

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ
ПРОБЛЕМЫ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ
ЗАДАЧ
ГЕОФИЗИКИ



Академия наук СССР Сибирское отделение
Вычислительный центр

519+550.3.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ГЕОФИЗИКИ

Сборник научных трудов

Под редакцией А.С.Алексеева



Новосибирск 1977



2407

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

А.С.Алексеев (председатель), В.Р.Кирейтов (зам.председателя),
В.А.Щецохо (зам.председателя), Б.Г.Михайленко, О.К.Омельченко

А Н Н О Т А Ц И Я

В сборнике представлены работы прикладного характера по ряду разделов геофизики (электроразведка, аэрофотосъемка, сейсмика, ядерный каротаж). Основное внимание уделено вопросам алгоритмизации и численного решения поставленных задач.

Сборник рассчитан на специалистов по прикладной математике и геофизике, а также на студентов и аспирантов, специализирующихся в этих областях.

СО Д Е Р Ж А Н И Е

Предисловие	5
М. В. АНТИПОВ. Распределение интенсивности излучения некогерентного источника	6
С. П. ВИНОГРАДОВ. О повышении разрешения фотографических изображений	18
В. В. ГЕЙДТ. Численный эксперимент по автоматизированному восстановлению рельефа по его фотоизображениям	25
Е. Ю. ДЕРЕВЦОВ. Об одной задаче волновой оптики	36
В. И. ДОБРИНСКИЙ, В. А. ГОРБУНОВ. О некоторых задачах рассеяния плоских $ЭН$ - волн на одномерно неоднородных средах	48
В. И. ДОБРИНСКИЙ. Обращаемые разностные схемы для расчета фундаментальных решений двух гиперболических уравнений	64
В. Р. КИРЕЙТОВ. О связи задачи определения оптического тела по его изображениям с одной задачей линейной интегральной геометрии	76
М. М. ЛАВРЕНТЬЕВ, Б. М. ПУШНОЙ, В. В. ГЕЙДТ, Г. А. ИВЧЕНКО, В. Р. КИРЕЙТОВ, Г. П. ЧЕЙДО. Лабораторный эксперимент по автоматизированному восстановлению рельефа по его фотоизображениям	84
А. А. МОРОЗОВ, А. Л. ПОЛЯЧЕНКО, А. И. ХИСАМУТДИНОВ, Т. А. ШАПОШНИКОВА. Сопоставление результатов численных методов и эксперимента в задаче импульсного каротажа	96
А. И. ХИСАМУТДИНОВ, Л. А. ТАБАРОВСКИЙ. Пример монте-карловских вычислений в задачах электроразведки	106
В. А. ЧЕВЕРЛА. Об одной обратной граничной задаче теории распространения волн (лучевое приближение)	113
Аннотации статей, помещенных в сборнике	125

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предложенный читателю сборник "Вычислительные проблемы математических задач геофизики" ориентирован преимущественно на вопросы алгоритмизации и численного решения ряда прикладных задач геофизики. При этом часть статей сборника имеет дело непосредственно с вычислительными процедурами и результатами расчетов по теме, другая часть в той или иной степени посвящена обоснованию возможности алгоритмизации и применения численных методов для решения поставленных задач.

В тематическом плане сборник имеет следующую структуру.

Большая часть сборника представлена работами по оптике и фотометрии. Рассмотренный круг задач здесь связан либо с вопросами формирования изображения в оптических приборах (Антипов М.В., Виноградов С.П.), либо с задачей определения параметров оптического объекта по набору его фотоизображений (Гейдт В.В., Деревцов Е.Ю., Кирейтов В.Р., Лаврентьев М.М. и др.). Обратная задача определения параметров источника поля или промежуточной среды по измеренному следу поля на некотором многообразии вдали от источников рассмотрена в работах Лобринского В.И. и Горбунова В.А., Чеверды В.А. Численным методам решения задач электроразведки и ядерного каротажа посвящены статьи Морозова А.А. и др., Хисамутдинова и Табаровского Л.А.

М. В. Антилов

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ
НЕКОГЕРЕНТНОГО ИСТОЧНИКА

В в е д е н и е

Данная работа посвящена рассмотрению ряда математических вопросов оптики для некогерентного светового излучения — задача определения параметров изображения на экране. Обратные задачи оптики в рамках фотометрии для монохроматического источника потенциального типа были поставлены и решались в статьях Лаврентьева — Кирейтова [1, 2] и Кирейтова [3]. Рассмотрение соответствующих задач в предположении о частичной когерентности источника, ориентирующем на реальные процессы распространения света, вынуждает более подробно проанализировать математическое содержание физической теории некогерентного светового излучения. Статья является подготовительной к решению обратных задач оптики в некогерентном случае и опирается, главным образом, на терминологию Борна — Вольфа [4].

1. Стохастические флуктуации параметров волнового излучения

Рассмотрим волновое поле, образованное протяженным квази-

монохроматическим источником σ . Световое возмущение в некоторой точке P пространства E^3 от точечного элемента $d\sigma_j$ выражается формулой

$$V_j(t) = A\left(t - \frac{R_j}{c}\right) \frac{\exp\left\{-2\pi i\nu\left(t - \frac{R_j}{c}\right)\right\}}{R_j}, \quad (I)$$

где $|A(t - \frac{R_j}{c})|$ - амплитуда излучения, $\arg A(t - \frac{R_j}{c})$ - фаза, $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{ck}{2\pi}$ - частота, R_j - расстояние от элемента $d\sigma_j$ до точки P [4].

По теореме Ван-Циттерта - Церника [4] взаимная интенсивность в точках P_1 и P_2 равна

$$J_j(P_1, P_2) = \langle A\left(t - \frac{R_{1j}}{c}\right) A^*\left(t - \frac{R_{2j}}{c}\right) \rangle \frac{\exp\{ik(R_{1j} - R_{2j})\}}{R_{1j} R_{2j}}, \quad (2)$$

где * означает комплексное сопряжение, а символ $\langle \rangle$ усреднение по времени, т.е.

$$\langle A(t - \tau) A^*(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A(t - \tau) A^*(t) dt.$$

В монографии [5] описывается дифракция волн, рассеянных статистически неровной поверхностью. В этой модели случайное поле определяется многомерной функцией распределения точек рассеивающей поверхности. Ниже предполагается несколько иной подход к проблеме стохастичности светового возмущения.

Будем считать один или несколько параметров возмущения $V_j(t)$ случайными величинами, тогда выражение (I) является одной из функций ансамбля, характеризующего процесс распространения светового возмущения. Если задана совместная функция распределения случайных параметров $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, которыми могут быть, например, амплитуда, фаза, частота или положение материальной точки $d\sigma_j$ в пространстве, то можно вычислить значения всех моментов многомерного распределения вероятностей при условии сходимости соответствующих интегралов.

В частности, можно найти математическое ожидание величины $V_j(t)$:

$$M\{V_j(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} V_j(t, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) d\delta_1 d\delta_2 \dots d\delta_n \quad (3)$$

и центральные моменты второго порядка.

Для примера пусть фаза δ распределена равномерно на отрезке $(-\Delta_1, \Delta_1)$ и распределение комплексного возмущения является эргодическим процессом, где фаза входит в $A(t - \frac{R_j}{c})$ под знаком экспоненты. Тогда из (2) и (3) определим взаимную интенсивность $J_j(P_1, P_2)$, не прибегая к усреднению по времени;

$$J_j(P_1, P_2) = C_0 \frac{\sin\{k(R_{1j} - R_{2j})\Delta_1\}}{k(R_{1j} - R_{2j})\Delta_1} \cdot \frac{\exp\{ik(R_{1j} - R_{2j})\}}{R_{1j} R_{2j}}, \quad (4)$$

где $C_0 = A(\frac{R_{2j} - R_{1j}}{c})A^*(0) = \text{Const.}$

Если случайные параметры, характеризующие процесс, независимы, то интеграл (3) приводится к виду

$$\mu\{V_j(t)\} = \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} V_j(t, \delta_1, \dots, \delta_n) d\Phi_1(\delta_1) d\Phi_2(\delta_2) \dots d\Phi_n(\delta_n).$$

Пусть в выражении (4) амплитуда также распределена равномерно на отрезке $(-\Delta_2, \Delta_2)$. Тогда, полагая $A(0)A^*(0) = C_1$, получаем

$$J_j(P_1, P_2) = C_1 \frac{\sin\{k(R_{1j} - R_{2j})\Delta_1\}}{k(R_{1j} - R_{2j})\Delta_1} \cdot \frac{\sin\{k(R_{1j} - R_{2j})\Delta_2\}}{k(R_{1j} - R_{2j})\Delta_2} \cdot \frac{\exp\{ik(R_{1j} - R_{2j})\}}{R_{1j} R_{2j}}. \quad (5)$$

По теореме Ван-Циттерта-Чернике комплексная степень когерентности двух точек P_1 и P_2 протяженного источника σ равна

$$\mu(P_1, P_2) = \frac{J(P_1, P_2)}{\sqrt{I(P_1)I(P_2)}} = \frac{1}{\sqrt{I(P_1)I(P_2)}} \int I(s) \frac{\exp\{ik(R_1 - R_2)\}}{R_1 R_2} ds, \quad (6)$$

где $I(s)$ - интенсивность на площадке ds источника σ . Здесь и далее под волновым числом k подразумевается усреднен-

ное квазимонохроматическое \bar{k} .

Для светящейся квадратной площадки размером $2\Delta \times 2\Delta$, на которой $I(s) = \text{Const}$, несложно найти из (6) комплексную степень когерентности

$$\mu_{P_1, P_2} = \frac{\sin\{k(x_1 - x_2)\Delta/R\}}{k(x_1 - x_2)\Delta/R} \cdot \frac{\sin\{k(y_1 - y_2)\Delta/R\}}{k(y_1 - y_2)\Delta/R} \cdot \exp(i\varphi). \quad (7)$$

Сравнивая формулы (4), (5), для точечного источника, и (7), для протяженного источника, видим, что степень когерентности, равная $|\mu_{12}|$, в каждом из этих случаев может быть меньше единицы, т.е. в случае точечного источника возможны частично когерентная суперпозиция и даже некогерентная суперпозиция ($|\mu_{12}| = 0$).

Для протяженного источника со стохастическими флуктуациями параметров комплексного возмущения та же степень когерентности будет достигнута при меньших линейных размерах некогерентно излучающего источника.

Математическое ожидание светового возмущения не фиксируется обычными приборами. Судить о нем можно, усредняя интенсивность по времени (2) или ансамблю (4) и (5). В последнем случае математическое ожидание входит составной частью в формулу взаимной интенсивности.

Выражения взаимной интенсивности, комплексной степени когерентности и степени когерентности связаны между собой, причем, если известна величина взаимной интенсивности, то две другие легко определяются с ее помощью.

Согласно [4] степень когерентности $|\mu_{12}|$ равна видимости полос в интерферометре. Если система (σ, P_1, P_2) находится в зоне Фраунгофера, то комплексная степень когерентности выражается соотношением

$$\mu_{12} = \frac{\exp\left\{\frac{ik}{2R}(x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2)\right\} \iint_{\sigma} I(\xi, \eta) \exp\left\{\frac{ik}{R}[(x_2 - x_1)\xi + (y_2 - y_1)\eta]\right\} d\eta d\xi}{\iint_{\sigma} I(\xi, \eta) d\eta d\xi} \quad (8)$$

Например, если источником σ является светящийся квадрат со стороной 2Δ постоянной амплитуды, получаем выражение (7), где $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ - координаты точек P_1 и P_2 , а R - расстояние от источника до центра экрана. Если отверстия в интерферометре равны, то, измеряя максимальную и минимальную интенсивность вблизи центра изображения, найдем

$$|\mu_{12}| = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}.$$

Как только найдено наименьшее расстояние $|P_1 - P_2|$, для которого степень когерентности близка к нулю, можно, зная среднюю частоту квазимонохроматического света, из формул (4), (5), (7) определить эффективный угловой диаметр источника. Для точечного источника этот диаметр будет воображаемым.

Взаимная интенсивность, по определению, является функцией корреляционной зависимости световых пучков, сходящихся в точках P_1 и P_2 . Мерой корреляции стохастических параметров δ_1 и δ_2 станет соотношение

$$I(P, \delta_1, \delta_2) / \sqrt{I(P, \delta_1) I(P, \delta_2)},$$

а при большем числе таких параметров $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ - корреляционная матрица

$$M_{jk} = \{I(P, \delta_j, \delta_k) / \sqrt{I(P, \delta_j) I(P, \delta_k)}\}.$$

Если в качестве флуктуирующих параметров выступают точки P_1 и P_2 , то мерой корреляции световых пучков, как было сказано выше, является комплексная степень когерентности.

2. Примеры расчета интенсивности

Для линейного и поверхностного источника формула Церника [4] позволяет вычислить интенсивность в точке экрана

$$I(x_3, y_3) = \iint_D J(P_1, P_2) \frac{\exp\{ik(s_1 - s_2)\}}{s_1 s_2} \Lambda_1 \Lambda_2^* dP_1 dP_2, \quad (9)$$

где s_1, s_2 - расстояния от точек P_1, P_2 до точки экрана (x_3, y_3) , Λ_1, Λ_2 - углы наклона, а D - отверстие.

Пусть D - прямоугольное отверстие размером $2a \times 2b$, а источник имеет форму прямоугольной рамки $2A \times 2B$ (см.рис. I).

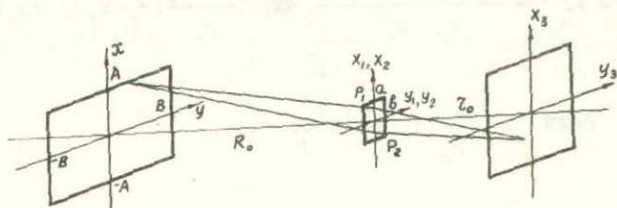


Рис. I.

Считая углы наклона малыми и подставляя в выражение (9) формулу (6), получаем

$$I(x_3, y_3) = \iint_{-a}^a \iint_{-b}^b \iint I(s) \frac{\exp\{ik(R_1 + s_1 - R_2 - s_2)\}}{R_1 R_2 s_1 s_2} ds dx_1 dx_2 dy_1 dy_2, \quad (10)$$

где

$$R_1 + s_1 = \sqrt{R_0^2 + (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{r_0^2 + (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2}.$$

В зоне Фраунгофера $R_1 + s_1 \approx R_0 + r_0 + \frac{x^2 + y^2}{2R_0} - \frac{xx_1 + yy_1}{R_0} + \frac{x_3^2 + y_3^2}{2r_0} - \frac{x_1 x_3 + y_1 y_3}{r_0}$, отсюда

$$R_1 + s_1 - R_2 - s_2 \approx \frac{(x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y}{R_0} + \frac{(x_2 - x_1)x_3 + (y_2 - y_1)y_3}{r_0},$$

поскольку источник находится в плоскости $Z = R_0$. Учитывая все это, вычислим интеграл (10).

$$I(x_3, y_3) = C_2 W(a, A, x_3) \left[\frac{\sin^2\{kb(\frac{B}{R_0} + \frac{y_3}{r_0})\}}{k^2 b^2 (\frac{B}{R_0} + \frac{y_3}{r_0})^2} + \frac{\sin^2\{kb(\frac{B}{R_0} - \frac{y_3}{r_0})\}}{k^2 b^2 (\frac{B}{R_0} - \frac{y_3}{r_0})^2} \right] + C_3 W(b, B, y_3) \left[\frac{\sin^2\{ka(\frac{A}{R_0} + \frac{x_3}{r_0})\}}{k^2 a^2 (\frac{A}{R_0} + \frac{x_3}{r_0})^2} + \frac{\sin^2\{ka(\frac{A}{R_0} - \frac{x_3}{r_0})\}}{k^2 a^2 (\frac{A}{R_0} - \frac{x_3}{r_0})^2} \right], \quad (11)$$

где

$$W(a, A, x_3) = \iint_{-a}^a \frac{\sin\{kA(x_2 - x_1)/R_0\}}{x_2 - x_1} \exp\left\{\frac{ikx_3}{r_0}(x_2 - x_1)\right\} dx_1 dx_2 \approx$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4a^2 kA}{R_0}, \text{ если } \left| \frac{A}{R_0} \pm \frac{x_3}{r_0} \right| ka \ll 1. \\ 4a^2 k, \text{ если } \left| \frac{A}{R_0} \pm \frac{x_3}{r_0} \right| ka \gg 1 \text{ и } \frac{A}{R_0} > \frac{x_3}{r_0}. \\ 2a^2 k + 2\left(\frac{A}{R_0} - \frac{x_3}{r_0}\right)ka^2, \text{ если } \left(\frac{A}{R_0} + \frac{x_3}{r_0}\right)ka \gg 1, \text{ но} \\ \left| \frac{A}{R_0} - \frac{x_3}{r_0} \right| ka < 1. \\ 0, \text{ если } x_3 ka/r_0 \gg Aka/R_0 \gg 1. \end{array} \right.$$

Из (10) можно получить также значение интенсивности, если источником является прямоугольная площадка постоянной амплитуды.

$$I(x_3, y_3) = C_4 \iint_{-a}^a \iint_{-b}^b \frac{\sin\{kA(x_2 - x_1)/R_0\}}{kA(x_2 - x_1)/R_0} \cdot \frac{\sin\{kB(y_2 - y_1)/R_0\}}{kB(y_2 - y_1)/R_0} \cdot$$

$$\exp\left\{ik \frac{(x_2 - x_1)x_3 + (y_2 - y_1)y_3}{r_0}\right\} dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 = C_5 W(a, A, x_3) W(b, B, y_3). \quad (12)$$

На рисунках 2 и 3 - интенсивности, зафиксированные на экране соответственно для рамки и прямоугольника. Под изображением - значение интенсивности в плоскости $x_3 z$.

Как известно, мгновенная интенсивность источника когерентного излучения определяется выражением

$$I_k(x_3, y_3) = U(x_3, y_3) U^*(x_3, y_3),$$

где световое возмущение $U(x_3, y_3)$ в зоне Фраунгофера равно

$$U(x_3, y_3) = C_6 \iint_{\sigma} U(x, y) \frac{\sin\left\{ka\left(\frac{x}{R_0} + \frac{x_3}{r_0}\right)\right\}}{\left(\frac{x}{R_0} + \frac{x_3}{r_0}\right)} \cdot \frac{\sin\left\{kb\left(\frac{y}{R_0} + \frac{y_3}{r_0}\right)\right\}}{\left(\frac{y}{R_0} + \frac{y_3}{r_0}\right)} dx dy.$$

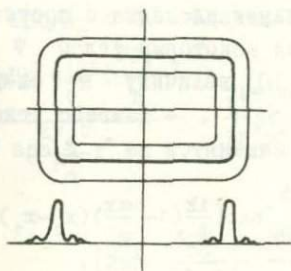


Рис. 2

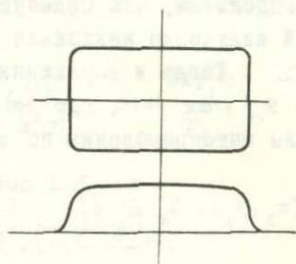


Рис. 3

Из формулы (10) для интенсивности освещенности источника частично когерентного света после интегрирования по отверстию получим

$$I_H(x_3, y_3) = C_7 \iint_{\sigma} I(x, y) \frac{\sin^2\left\{ka\left(\frac{x}{R_0} + \frac{x_3}{r_0}\right)\right\}}{\left(\frac{x}{R_0} + \frac{x_3}{r_0}\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\left\{kb\left(\frac{y}{R_0} + \frac{y_3}{r_0}\right)\right\}}{\left(\frac{y}{R_0} + \frac{y_3}{r_0}\right)^2} dx dy,$$

что соответствует предположению о некогерентности света излучающего источника. Отсюда следует адекватность в зоне Фраунго-

фера значений плотности интенсивности освещенности для источников частично когерентного и некогерентного света. Заметим, что для зоны Френеля это утверждение не является справедливым.

При сравнении выражений для $I_K(x_3, y_3)$ и $I_H(x_3, y_3)$ получаем, что значения плотностей интенсивности для когерентного и некогерентного источников будут близкими лишь в случае, когда поверхности σ стягиваются в точку.

3. Индикатриса углового излучения некогерентного источника

Предположим, что прямоугольная площадка с постоянной амплитудой излучения наклонена под некоторым углом Ψ к плоскости xz . Тогда в выражении (10) величину R_0 следует заменить на $R_0 + \alpha x$, где $\alpha = \text{tg } \Psi$ — тангенс угла наклона, а пределы интегрирования по x заменятся на $\pm A \cos \Psi$.

$$I(x_3, y_3) = C_8 \int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_{-A \cos \Psi}^{A \cos \Psi} \exp\left\{\frac{ik}{R_0}\left(1 - \frac{\alpha x}{R_0}\right)(x_2 - x_1)x\right\} \cdot$$

$$\frac{\sin\left\{\frac{kB}{R_0}(y_2 - y_1)\left(1 - \frac{\alpha x}{R_0}\right)\right\}}{\frac{kB}{R_0}(y_2 - y_1)\left(1 - \frac{\alpha x}{R_0}\right)} \cdot \exp\left\{\frac{ik}{r_0}[(x_2 - x_1)x_3 + (y_2 - y_1)y_3]\right\} dx dx_1 dx_2 \cdot dy_1 dy_2 \quad (13)$$

В том случае, когда $\frac{\alpha A}{R} \ll 1$, приходим к рассмотренному ранее примеру (12), который показывает, что при малых углах наклона площадки плотность интенсивности в центре экрана незначительно отличается от плотности интенсивности, создаваемой площадкой без наклона.

Для более точной оценки интеграла (13) рассмотрим две симметричные области $(-x_0 - \Delta, -x_0)$, $(x_0, x_0 + \Delta)$ и $x_0 + \Delta \leq A \cos \Psi$. Отсюда при $\Delta \rightarrow 0$ величина $I(x_0, x_3, y_3) =$

$$C_9 \frac{W\left[b, B\left(1 + \frac{\alpha x_0}{R_0}\right), y_3\right]}{1 + \frac{\alpha x_0}{R_0}} \cdot \frac{\sin^2\left\{ka\left[\frac{x_3}{r_0} - \frac{x_0}{R_0}\left(1 + \frac{\alpha x_0}{R_0}\right)\right]\right\}}{k^2 a^2 \left[\frac{x_3}{r_0} - \frac{x_0}{R_0}\left(1 + \frac{\alpha x_0}{R_0}\right)\right]^2} +$$

$$+ C_9 \frac{W[b, B(1 - \frac{\alpha x_0}{R_0}), y_3]}{1 - \frac{\alpha x_0}{R_0}} \cdot \frac{\sin^2 \{ k a [\frac{x_3}{r_0} + \frac{x_0}{R_0} (1 - \frac{\alpha x_0}{R_0})] \}}{k^2 a^2 [\frac{x_3}{r_0} + \frac{x_0}{R_0} (1 - \frac{\alpha x_0}{R_0})]} \cdot (14)$$

Величина плотности интенсивности в некоторой точке экрана равна

$$I_{\Psi}(x_3, y_3) = C_{10} \int_0^A \cos \psi I(x_0, x_3, y_3) dx_0. \quad (15)$$

При $kBb/R_0 < 1$ оценим величину $W(b, B, y_3) \approx$

$$\begin{aligned} & 4kBb^2 \sin^2 \left\{ \frac{k y_3 b}{r_0} \right\} \\ \approx & \frac{4kBb^2 \sin^2 \left\{ \frac{k y_3 b}{r_0} \right\}}{\left(\frac{k y_3 b}{r_0} \right)^2} + \frac{2kB^3 r_0^2}{3R_0^3 y_3^2} \left\{ \frac{3r_0^2}{k^2 y_3^2} + \cos \left(\frac{2k y_3 b}{r_0} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\cdot \left[2b^2 - \frac{3r_0^2}{k^2 y_3^2} \right] - \frac{4br_0}{k y_3} \sin \left(\frac{2k y_3 b}{r_0} \right).$$

В центральной точке экрана ($y_3 \rightarrow 0$) из выражения (16) получаем

$$W(b, B, y_3)_{y_3 \rightarrow 0} = 4 \frac{b^2 kB}{R_0} + \frac{8b^4 k^3 B^3}{9 R_0^3} + O\left(\frac{kBb}{R_0}\right)^4. \quad (17)$$

Предполагая $\frac{kAa \cos \Psi}{R_0} < 1$ и подставляя в выражение

$W(b, B, 0)$ вместо B величины $B(1 \pm \frac{\alpha x_0}{R_0})$ из формул (14), (15) и (17), получим

$$I_{\Psi}(0, 0) = C_{11} \left\{ \left(1 + \frac{2b^2 k^2 B^2}{9R_0^2} \right) A \cos \Psi + \frac{2k^2 A^2}{9R_0^2} \left(\frac{2b^2 B^2 \sin^2 \Psi}{3 R_0^2} - \right. \right. \quad (18)$$

$$\left. - a^2 \cos^2 \Psi \right) A \cos \Psi \} + O\left(\frac{kBb}{R_0}\right)^3.$$

Из выражения (18) найдем отношение плотности интенсивности освещения центра экрана к единице площади светящегося объекта, т.е.

$$\Theta(\Psi) = I_{\Psi}(0, 0)/4AB \cos \Psi$$

и, предполагая $bB \approx aA$, отношение

$$\Theta(\Psi)/\Theta(0) \approx 1 + \frac{2b^2 k^2 B^2}{9 R_0^2} + \frac{2k^2 A^2}{9 R_0^2} (2b^2 B^2 \sin^2 \Psi - a^2 \cos^2 \Psi).$$

Таким образом, относительная освещенность в центре экрана возрастает по мере увеличения угла наклона некогерентно светящейся площадки, что отражено на рис. 4.

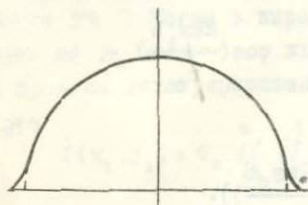


Рис. 4

Индикатриса углового излучения в фотометрии определяется как отношение прошедшего через оптическую систему потока к единице площади, т.е.

$$I_{\Psi} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_{\Psi}(x_3, y_3) dx_3 dy_3}{4AB \cos \Psi}.$$

Из выражений (14), (15) и (18) следует, что $I_{\Psi} \approx C_{\Psi} \cos \Psi$, причем $C_{\Psi \neq 0} > C_{\Psi=0}$, но отношение $C_{\Psi \neq 0}/C_{\Psi=0}$ незначительно отличается от единицы.

В заключение хотелось бы поблагодарить В.Р.Кирейтова за действенную помощь в работе.


Л и т е р а т у р а

1. Лаврентьев М.М., Кирейтов В.Р. Об одном классе отображений биповерхностей трехмерного пространства. ДАН СССР, т.216, № 2, 1974.
2. Лаврентьев М.М., Кирейтов В.Р. О точках ветвления оптических гиперповерхностей. ДАН СССР, т.221, № 5, 1975.
3. Кирейтов В.Р. О некоторых обратных задачах волновой оптики. I. В сб.: Математические проблемы геофизики, ВЦ СО АН СССР, № 6, ч.П, 1975.

4. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., "Наука", 1970.
5. Басс Ф.Г., Фукс И.М. Рассеяние волн на статистически неровной поверхности. М., "Наука", 1972.

2407





С. П. Виноградов

О ПОВЫШЕНИИ РАЗРЕШЕНИЯ ФОТОГРАФИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Пусть процесс формирования изображения описывается уравнением

$$\int_0^1 \int_0^1 k(x_1 - y_1) k(x_2 - y_2) \phi(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = f(x_1, x_2), \quad 0 \leq x_1, x_2 \leq 1 \quad (1)$$

Мы рассмотрим следующие случаи

$$k(x) = \frac{\sin(ax)}{x} \quad (2)$$

и

$$k(x) = \frac{\sin^2(ax)}{x^2} \quad (3)$$

Будем говорить, что два источника типа б - функции раз-

решаются прибором, описываемым уравнением (I), если для функции

$$\varphi(y_1, y_2) = \delta(y_1 - y_1^{(1)}, y_2 - y_2^{(1)}) + \delta(y_1 - y_1^{(2)}, y_2 - y_2^{(2)})$$

функция $f(x_1, x_2)$ имеет два максимума и отношение значения функции $f(x_1, x_2)$ во впадине между максимумами к значению максимума не больше 0.811 [1]. Минимальное расстояние

D_p между разрешающимися источниками назовем расстоянием разрешения по Рэлею. В случае (2) $D_p = \frac{4 \cdot 63}{a}$, в случае (3) -

$D_p = \frac{\pi}{a}$. Для повышения разрешающей способности прибора

в работах [2-6] предлагается по известной функции $f(x_1, x_2)$ находить $\varphi(y_1, y_2)$. Как известно, такая задача в классическом смысле некорректна. Численные результаты решения такого уравнения представляют несомненный интерес. В указанных работах не приводятся численные результаты повышения разрешающей способности прибора. Поэтому в данной работе основное внимание уделяется численному эксперименту.

Приведем описание процедуры нахождения приближенного решения уравнения (I). Зададим в квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ систему точек

$$(x_{1i}, x_{2j}) = (y_{1i}, y_{2j}), \quad (4)$$

$$y_{ki} = hi - h/2; \quad h = 1/n; \quad k = 1, 2; \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Будем искать приближенное решение уравнения (I) в виде

$$\varphi(y_1, y_2) = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n J_{j_1}(y_1) J_{j_2}(y_2) \varphi_{j_1 j_2}, \quad (5)$$

где

$$J_k(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } (k-1)h < y < kh \\ 0 & \text{при } y > kh \text{ или } y < (k-1)h. \end{cases}$$

Подставив (5) в (I) и используя метод коллокации, мы получим систему алгебраических уравнений для определения $\Phi_{j_1 j_2}$. Точками коллокации являются точки системы (4). Система имеет вид

$$\sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n k_{i_1 j_1} k_{i_2 j_2} \Phi_{j_1 j_2} = f_{i_1 i_2} \quad i_1, i_2 = 1, \dots, n, \quad (6)$$

где

$$f_{i_1 i_2} = f(x_{1 i_1}, x_{2 i_2}), \quad k_{i j} = \int_{-h/2}^{h/2} k((i-j)h-y) dy.$$

Систему (6) можно записать в виде

$$K \Phi K = F,$$

где

$$K = \|k_{ij}\|_{i,j=1}^n, \quad \Phi = \|\Phi_{ij}\|_{i,j=1}^n, \quad F = \|f_{ij}\|_{i,j=1}^n.$$

Тогда

$$\Phi = K^{-1} F K^{-1}. \quad (7)$$

В нашем случае матрица K есть симметрическая теплопева матрица. Для таких матриц существуют эффективные алгоритмы нахождения обратной матрицы. Элементы матрицы K вычислялись с использованием формулы прямоугольников.

Численный эксперимент проводился по следующей схеме. Задавалась функция $\Phi(y_1, y_2)$ следующего вида:

$$\Phi(y_1, y_2) = \begin{cases} \frac{1}{d^2} & \text{на } [a_1, a_1+d] \times [a_2, a_2+d] \quad [a_3, a_3+d] \times [a_4, a_4+d] \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (8)$$

Значения функции $f(x_1, x_2)$ в точках коллокации находились согласно уравнению (I). Для интегрирования использовалась формула прямоугольников. После этого находилась матри-

на Φ по (7) и выяснялось, можно ли в ней выделить два "пика". Мы говорим, что выделяются два "пика", если после выполнения эксперимента среди элементов матрицы Φ найдутся два первых максимальных элемента $\Phi_{i_1 j_1}$ и $\Phi_{i_2 j_2}$, которые удовлетворяют условиям

$$\frac{\Phi_{i,j}}{\Phi_{i_k, j_k}} \leq 0.811, \quad i \neq i_k, \quad j \neq j_k; \quad k = 1, 2; \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Определим коэффициент повышения разрешения по Рэлею равенством

$$q_n(a) = \frac{D_p}{D},$$

где D - расстояние между центрами квадратов в (8). Определим координаты центров квадратов равенствами

$$y_1^{(1)} = y_2^{(1)} = y_1^{(2)} = \left(\frac{D}{2} - 0.5\right)h - \frac{7}{8}h,$$

$$y_2^{(2)} = y_1^{(2)} + \frac{7}{4}h, \quad h = 1/n.$$

Определим максимальное значение n , при котором после выполнения численного эксперимента в матрице Φ можно выделить два "пика". Зависимость $q_n(a)$ от a при так определяемом n производится на рис. 1 для случая (2) и на рис. 2 для случая (3). При этом в случае (2): для $a = 5$, $n = 5$; $a = 10$, $n = 8$; $a = 20$, $n = 11$; $a = 30$, $n = 15$; $a = 40$, $n = 18$; в случае (3): для $a = 5$, $n = 7$; $a = 10$, $n = 11$; $a = 20$, $n = 17$; $a = 30$, $n = 24$; $a = 40$, $n = 30$. Такие же значения $q_n(a)$ можно получить и при меньших значениях n : в случае (2) - для $a = 20$, $n = 8$; $a = 30$, $n = 11$; $a = 40$, $n = 13$; в случае (3) - для $a = 10$, $n = 10$; $a = 20$, $n = 14$; $a = 30$, $n = 20$; $a = 40$, $n = 25$. Отметим, что значения $q_n(a)$ в этом случае можно несколько увеличить. Зависимости чисел Тодда ρ для системы (6) приведены на

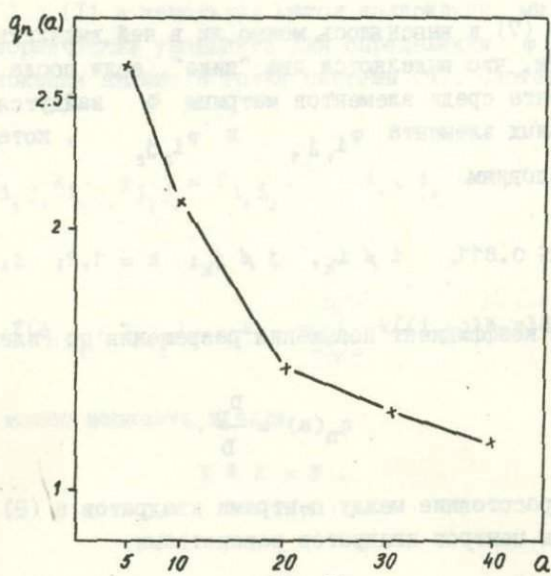


Рис.1

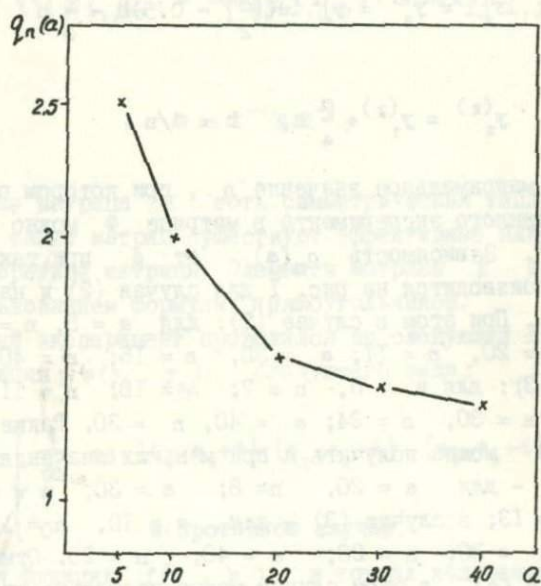


Рис.2

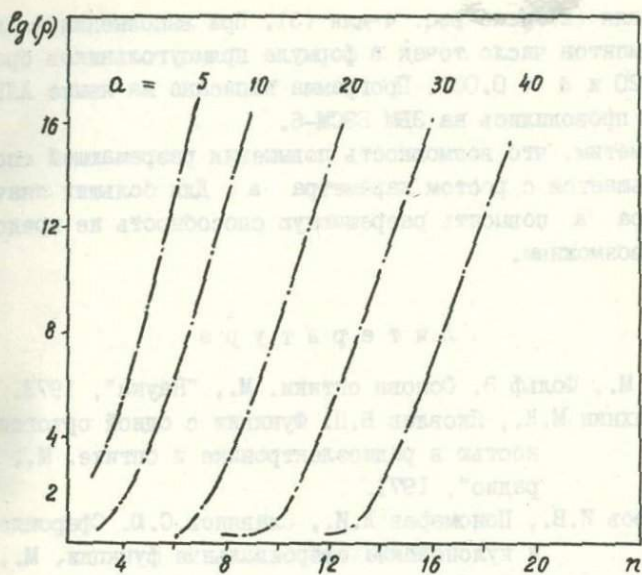


Рис.3

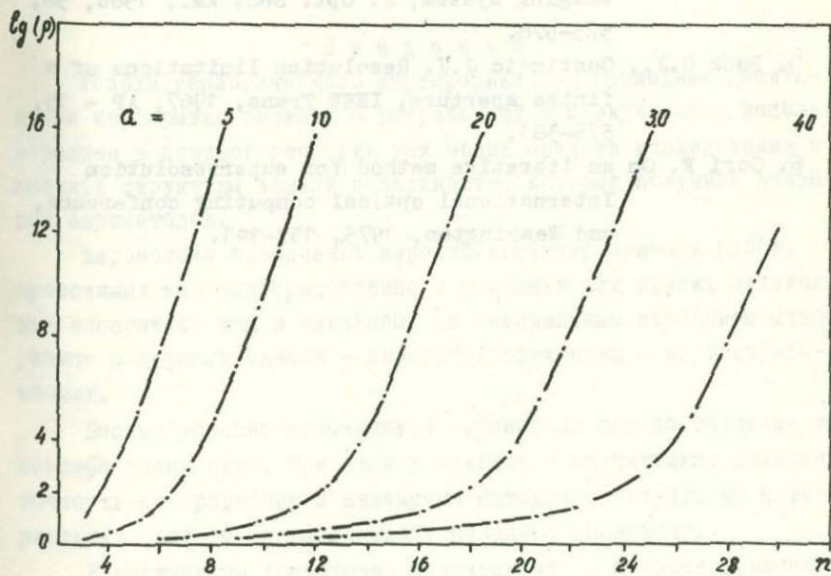


Рис.4

рис. 3 для (2) и на рис. 4—для (3). При выполнении численных экспериментов число точек в формуле прямоугольников бралось равным 20 и $d = 0.001$. Программа написана на языке АЛЬФА-6. Расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-6.

Отметим, что возможность повышения разрешающей способности уменьшается с ростом параметра a . Для больших значений параметра a повысить разрешающую способность не представляется возможным.

Л и т е р а т у р а

1. Борн М., Фольф Э. Основы оптики. М., "Наука", 1973.
2. Размахнин М.К., Яковлев В.П. Функции с одной ортогональностью в радиоэлектронике и оптике. М., "Сов. радио", 1971.
3. Комаров И.В., Пономарев Л.И., Славянов С.Ю. Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции. М., "Наука", 1976.
4. Barnes W.C. Object restoration in a diffraction-limited imaging system, *J. Opt. Soc. Am.*, 1966, 56, 575-578.
5. Buck G.J., Custincic J.J. Resolution limitations of a finite aperture, *IEEE Trans*, 1967, AP - 15, 376-381.
6. Gori F. On an iterative method for superresolution International optical computing conference, and Washington, 1975, 137-141.

В. В. Гейдт

**ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО АВТОМАТИЗИРОВАННОМУ
ВОССТАНОВЛЕНИЮ РЕЛЬЕФА ПО ЕГО ФОТОИЗОБРАЖЕНИЯМ**

В в е д е н и е

Успехи геологического картирования за последние десятилетия неразрывно связаны с разработкой и практическим использованием в полевой геологии тех новых средств исследования и анализа структуры земной поверхности, которые получили название аэрометодов.

Аэрометоды объединяют широкий комплекс приемов работ, проводимых как непосредственно с самолета или других летательных аппаратов, так и связанных со специальным изучением материалов воздушных съемок — аэрофотографических и аэрогеофизических.

Весьма успешно применяются аэрометоды при составлении топографических карт. При этом достигается значительно большая точность по сравнению с наземными методами, затраты же материальных средств не выдерживают никакого сравнения.

Единственным достаточно надежным методом восстановления

рельефа по его фотоизображениям является стереоскопический метод. В этом методе исходят из двух фотоизображений предмета, сделанных из двух различных точек пространства. Затем производится операция идентификации фотоизображений, при которой на фотоизображениях отмечаются пары точек, соответствующие одной и той же точке рельефа.

Указанная операция идентификации выполняется, как правило, визуально, с помощью стереоскопических приборов, позволяющих по двум фотоизображениям воссоздать объемную картину исследуемого рельефа и тем самым идентифицировать два фотоизображения. После того, как идентификация фотоизображений произведена для достаточно густой сетки точек, координаты точек рельефа определяются из элементарных геометрических соображений.

Стереоскопическое рассмотрение облегчает работу идентификатора, но не устраняет трудоемкую ее часть — сам процесс идентификации, производимый человеком.

К настоящему времени накопилось огромное количество как аэрофотоснимков, так и космических фотоснимков, которые остаются необработанными в силу того, что полуавтоматизированным методом, каким является стереоскопический метод, невозможно обработать при существующих возможностях такое количество фотоснимков. Поэтому назрела настоятельная необходимость в разработке полностью автоматизированных методов обработки фотоизображений. Задача создания полностью автоматизированного метода восстановления рельефа по его фотоизображениям была решена в работах [1-3] в двух случаях — рельеф излучает рассеянный свет либо по закону Ламберта, либо по закону Буге.

Приведем основные результаты, полученные в вышеуказанных работах.

Рассмотрим поверхность, излучающую рассеянный свет, и фотографический прибор, с помощью которого создается фотоизображение.

Величина светового потока, излучаемого поверхностью в направлении \vec{i} , определяется функцией яркости поверхности. Яркость есть предел отношения силы света, излучаемого элементом поверхности в выбранном направлении, к площади проекции этого элемента на плоскость, перпендикулярную направлению из-

лучения света, при стремлении элемента поверхности к нулю, и является, в общем случае, функцией как точки поверхности, так и угла излучения.

На фотопластинке рассмотрим произвольную точку \vec{w} . Степень почернения фотопластинки в этой точке определяется следующим выражением:

$$J(\vec{w}, \vec{Q}) = \int A(\vec{r}, \varphi) \cdot \cos(\vec{n} \cdot \vec{l}) \cdot P(\vec{w}, \vec{r}, \vec{Q}) ds,$$

где \vec{r} - точка на поверхности, \vec{n} - нормаль к поверхности в точке \vec{r} , \vec{Q} - вектор, задающий положение объектива, $A(\vec{r}, \varphi)$ - яркость, $D(\vec{w}, \vec{r}, \vec{Q})$ - фильтрация объектива.

Интегрирование ведется по видимой части поверхности.

Яркость может произвольным образом зависеть от угла φ . В том случае, когда яркость совсем не зависит от угла φ , говорят, что поверхность излучает по закону Ламберта. Будем называть объектив δ -образным, если в произвольную точку \vec{w} фотопластинки свет приходит только из точки пересечения поверхности прямой, проходящей через точку \vec{w} , и объектив.

Для δ -образного объектива и излучения по Ламберту было получено следующее выражение для функции почернения фотопластинки

$$J(\vec{w}, \vec{Q}) = \Phi \times A(x, y) / (\Phi^2 + w_1^2 + w_2^2)^{3/2} \quad (1)$$

$$w_1 = \Phi \frac{Q_1 - x}{Q_3 - z}; \quad w_2 = \Phi \frac{Q_2 - y}{Q_3 - z},$$

где Φ - фокусное расстояние объектива, w_1 и w_2 - абсцисса и ордината точки на фотопластинке, отсчитываемые от точки пересечения фотопластинки оптической осью объектива и направленные параллельно X- и Y- осям объемлющего пространства, оптическая ось объектива параллельна оси Z, (Q_1, Q_2, Q_3) - (x, y, z) - координаты объектива, x, y, z - координаты точки поверхности.

Из последних двух уравнений системы (1) видно, что точки \vec{w} , \vec{Q} и \vec{r} лежат на одной прямой.

При известных функции $J(\vec{w}, \vec{Q})$ почернения фотопластинок и всех параметров съемки в систему (I) входят два неизвестных - сам рельеф как функция $z(x, y)$ и яркость $A(x, y)$.

Таким образом, при наличии более, чем одного, фотоизображений, снятых из разных точек, можно надеяться восстановить как рельеф, так и яркость.

В работе [2] доказана следующая теорема:

если градиент яркости обращается в нуль лишь в конечном числе точек оптической поверхности, то поверхность и яркость однозначно определяются заданием достаточно большого количества фотоизображений какой-либо точки \vec{P} , принадлежащей поверхности.

На основе вышеприведенных теоретических результатов были проведены численные эксперименты по определению рельефа и яркости. Настоящая работа и посвящена изложению алгоритма и результатов этих численных экспериментов.

2. Постановка задачи численного эксперимента

Задачей численного эксперимента является численное моделирование некоего явления или процесса. В данном случае моделируется процесс: имеется некая поверхность, с которой известно только, что она излучает свет по закону Ламберта. Имеется несколько (достаточное количество) фотоизображений этой поверхности, полученных фотографированием δ - образными объективами, и известны все параметры, которые входят в формулу почернения фотопластинок

$$J_1(w^{(1)}, Q^{(1)}) = \Phi^{(1)} \cdot A(x, y) / (\Phi^{(1)^2} + w_1^{(1)^2} + w_2^{(1)^2})^{3/2}, \quad (2)$$

где индекс (i) отмечает величины, относящиеся к i-ому фотоизображению поверхности. Требуется определить поверхность и яркость на некотором определенном участке плоскости $x \times y$.

Когда мы говорим, что "имеется фотоизображение", под этим подразумевается, что известна функция почернения $J(\vec{w})$ как функция координат на фотопластинке.

Численное моделирование заключается в следующем: задается некая конкретная поверхность S как функция $z(x, y)$ и

некая ламбертова яркость как функция координат на поверхности $A(x, y)$, задаются все параметры фотосъемки — положения и фокусные расстояния объективов, в плоскости $x \times y$ задается прямоугольник $a \times b$, в котором восстанавливается поверхность и яркость, причем участок поверхности, расположенный над прямоугольником $a \times b$ должен быть виден на всех фотографиях. По прямой формуле (2) насчитываются функции почернения фотопластинок.

На этой стадии заканчивается процесс численного моделирования фотосъемки рельефа с самолета или спутника и последующей оцифровки фотографий в лабораторных условиях.

Далее следует непосредственное восстановление поверхности и яркости на участке $a \times b$ по насчитанным фотографиям.

3. Описание алгоритма

Процесс численного моделирования автоматизированного процесса восстановления рельефа и яркости естественно разбивается на две части: насчитывание функций почернения фотопластинок и собственно восстановление рельефа и яркости.

Для насчитывания функций почернения фотопластинок был использован следующий алгоритм: каждая фотопластинка разбивается равномерной сеткой на $n \times n$ узлов, в которых и насчитывается функция почернения (этот процесс соответствует оцифровке реальных фотографий).

В каждом из узлов равномерной сетки на фотопластинке функция почернения насчитывается лучевым методом, который заключается в следующем: через данный узел решетки с координатами (w_1, w_2) и фокус объектива проводим прямую линию l .

Если за параметр на этой линии выбрать z — координату текущей точки линии, то она задается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} z &= z, \\ x &= Q_1 + \frac{w_1}{\Phi}(z - Q_3), \\ y &= Q_2 + \frac{w_2}{\Phi}(z - Q_3), \end{aligned} \quad (3)$$

где (Q_1, Q_2, Q_3) - координаты объектива.

Находим точку пересечения поверхности этой линией. Для этого выбираем на луче l две точки A_1 и A_2 , расположенные по разные стороны поверхности. Поскольку уравнение поверхности $z(x, y)$ известно, то это сделать несложно с помощью уравнений (3). Далее отрезок $A_1 A_2$ делим пополам точкой A_3 . Из трех точек A_1, A_2, A_3 выбираем две, лежащие по разные стороны поверхности, и повторяем процедуру деления отрезка пополам и выбора из трех точек двух, лежащих по разные стороны поверхности. Процесс продолжается до тех пор, пока расстояние между точками, лежащими по разные стороны поверхности, не достигает наперед заданной величины, определяющей точность начисывания функции почернения.

После того, как z - координата точки пересечения определена, x - и y - координаты ее вычисляются по формулам (3). Обозначим их x_0 и y_0 .

Теперь значение функции почернения в узле (w_1, w_2) вычисляется по уже известной нам формуле:

$$J(\vec{w}, \vec{Q}) = \Phi \times A(x_0, y_0) / (\Phi^2 + w_1^2 + w_2^2)^{3/2}.$$

Вся эта процедура повторяется для каждого узла каждой фотографии.

Перейдем к описанию алгоритма восстановления рельефа и яркости.

Для двух фотоизображений мы имеем следующую систему уравнений:

$$J_1(\vec{w}^{(1)}, \vec{Q}^{(1)}) = \Phi^{(1)} \times A(x, y) / (\Phi^{(1)2} + w_1^{(1)2} + w_2^{(1)2})^{3/2},$$

$$J_2(\vec{w}^{(2)}, \vec{Q}^{(2)}) = \Phi^{(2)} \times A(x, y) / (\Phi^{(2)2} + w_1^{(2)2} + w_2^{(2)2})^{3/2},$$

$$w_1^{(1)} = \Phi^{(1)} \frac{Q_1^{(1)} - x}{Q_3^{(1)} - z}; \quad w_2^{(1)} = \Phi^{(1)} \frac{Q_2^{(1)} - y}{Q_3^{(1)} - z}, \quad (4)$$

$$w_1^{(2)} = \Phi(2) \frac{Q_1^{(2)} - x}{Q_3^{(2)} - z}; \quad w_2^{(2)} = \Phi(2) \frac{Q_2^{(2)} - y}{Q_3^{(2)} - z},$$

где величины с индексом (1) относятся к первой фотографии, а с индексом (2) ко второй.

Эта система шести уравнений содержит шесть неизвестных - z , A , $w_1^{(1)}$, $w_2^{(1)}$, $w_1^{(2)}$, $w_2^{(2)}$.

Исключая из первых двух уравнений яркость $A(x, y)$ (возможность существования на поверхности точек, в которых $A = 0$, т.е.

абсолютно не отражающих, очевидно, можно исключить), получим систему пяти уравнений для пяти неизвестных:

$$J_1 \cdot (\Phi(1)^2 + w_1^{(1)2} + w_2^{(1)2})^{3/2} \cdot \Phi(2) - J_2 \cdot (\Phi(2)^2 + w_1^{(2)2} + w_2^{(2)2})^{3/2} \cdot \Phi(1) = 0$$

$$w_1^{(1)} = \Phi(1) \frac{Q_1^{(1)} - x}{Q_3^{(1)} - z}; \quad w_2^{(1)} = \Phi(1) \frac{Q_2^{(1)} - y}{Q_3^{(1)} - z}; \quad (5)$$

$$w_1^{(2)} = \Phi(2) \frac{Q_1^{(2)} - x}{Q_3^{(2)} - z}; \quad w_2^{(2)} = \Phi(2) \frac{Q_2^{(2)} - y}{Q_3^{(2)} - z}.$$

Введем функцию

$$F = J_1(w_1^{(1)}, Q_1^{(1)}) (\Phi(1)^2 + w_1^{(1)2} + w_2^{(1)2})^{3/2} \cdot \Phi(2) - \\ - J_2 \cdot (\Phi(2)^2 + w_1^{(2)2} + w_2^{(2)2})^{3/2} \cdot \Phi(1),$$

в которой переменные $w_1^{(1)}$, $w_2^{(1)}$, $w_1^{(2)}$, $w_2^{(2)}$ выражаются через (x, y, z) последними четырьмя формулами системы (5), однако точка (x, y, z) не обязана принадлежать поверхности.

Тогда, поскольку функции $J_1(w_1^{(1)})$ и $J_2(w_2^{(2)})$ нам известны, при фиксированных x и y F является известной функцией от z (разумеется, в тех пределах, в которых точки

$w^{(1)}$ и $w^{(2)}$ не выходят за пределы фотографий в силу формул (5)).

Функция F в общем случае не является тождественным нулем по z и корни ее дают решение системы (5).

В настоящем численном эксперименте корни функции F искались методом деления отрезка пополам. Этот метод решения имеет ряд преимуществ перед методом Ньютона - в каждом узле прямоугольника $a \times b$ плоскости $x \times Y$ поверхность восстанавливается независимо от остальных узлов, что особенно важно при наличии участков, невидимых на одной фотографии (область тени). При наличии таких участков метод деления отрезка пополам не дает ответа только в этих участках; при решении же методом Ньютона мы не можем проходить эти участки для получения правильных решений на хороших участках - в лучшем случае, если это возможно, нужно искать удобный путь обхода этих участков.

После восстановления поверхности на всем участке $a \times b$, яркость $A(x, y)$ восстанавливается в произвольном узле (j, k) участка $a \times b$ по любой из двух фотографий по следующим формулам:

$$A(x_j, y_k) = J_1(\vec{w}^{(1)}, \vec{Q}^{(1)}) \cdot (\Phi^{(1)^2 + w_1^{(1)^2 + w_2^{(1)^2}})^{1/2} / \Phi^{(1)},$$

$$w_1^{(i)} = \Phi^{(i)} \frac{Q_1^{(i)} - x_j}{Q_3^{(i)} - z_{jk}}; \quad w_2^{(i)} = \Phi^{(i)} \frac{Q_2^{(i)} - y_k}{Q_3^{(i)} - z_{jk}},$$

где индекс i относится к номеру фотографии, j и k - определяют узел, x_j, y_k, z_{jk} - координаты точки поверхности в узле (j, k) .

4. Результаты численного эксперимента

Настоящий численный эксперимент преследует следующие цели: а) выяснение принципиальной возможности реализации на современных ЭВМ алгоритма, описанного в предыдущем параграфе; б) установление работоспособности алгоритма в различных условиях, которые могут встретиться на практике (степень измене-

ния рельефа и яркости на исследуемом участке); в) проверка на устойчивость.

С этой целью за исходные были взяты следующие функции рельефа и яркости

$$z = 0.1 \cdot (x^2 + y^2); \quad A = \exp(x + y);$$

$$z = 0.5 \cdot \cos(y); \quad A = \exp(x + y);$$

$$z = 0.1 \cdot (x^2 + y^2); \quad A = \sin^2 10x + \cos^2 10y + \exp(x+y+4);$$

$$z = 0.5 \cdot \cos(y); \quad A = \sin^2 10x + \cos^2 10y + \exp(x+y+4).$$

Параметры "фотосъемки" были выбраны следующими: фокусные расстояния объективов были положены равными единице, объективы расположены на одинаковой высоте с координатами (0,0,4) и (0,4,4) соответственно. Оптические оси фотоаппаратов параллельны оси z . Фотопластинки были взяты размером 3×3 и разбиты в равномерной сетке на 81×81 узлов, в которых и насчитывается функция почернения.

Поверхность и яркость восстанавливаются в прямоугольнике $(-1, -2), (1, 2), (-1, 1), (1, 1)$ плоскости $X \times Y$, который был разбит равномерной сеткой на 11×101 узлов, в которых и восстанавливалась поверхность и яркость.

За исходную точку z_0 в методе деления отрезка пополам бралась одна и та же точка для всех узлов участка - точка, ненамного превышающая высоту поверхности на исследуемом участке, и видимая на обеих фотографиях.

В процессе решения задачи необходимо знать значение функции почернения J в любой точке фотографии. Для этой цели используется процедура бикубической интерполяции двумерных массивов, заданных на равномерной сетке, т.к. линейная интерполяция не дает правильного результата уже при изменении яркости по закону $\cos^2(x \cdot y)$. При изменении яркости по закону $\exp(x + y)$ хороший результат дает и линейная интерполяция.

Погрешностью восстановления рельефа в данном эксперименте разумнее всего, видимо, считать отношение абсолютной величины разности между истинной и восстановленной высотами поверх-

ности к рельефности исследуемого участка поверхности. Результаты эксперимента показывают, что в этих единицах поверхность восстанавливается с точностью до 10% [4].

Критерием восстановления яркости, видимо, лучше всего считать относительную погрешность, в единицах которой яркость восстанавливается также в пределах 10% [4].

Большой интерес, в связи с практическим применением метода, представляет вопрос устойчивости восстановления поверхности и яркости. Причем под устойчивостью здесь, опять же ввиду практических применений, следует иметь в виду устойчивость по отношению к изменению данных на фотографиях. Поэтому проверка на устойчивость производилась следующим образом.

Вначале фотографии насчитывались без каких-либо искажений. Затем в каждом узле обеих фотографий функция почернения "портилась" случайным образом, причем искажение не превышало 10% от истинного значения. Данные эксперимента показывают, что погрешность восстановления рельефа и яркости по искаженным таким образом фотографиям опять-таки не превышает 10% [4]. Т.е. процесс восстановления рельефа и яркости в данном численном эксперименте можно считать устойчивым.

Результаты проведенного численного эксперимента по автоматизированному восстановлению рельефа и яркости в случае ламбертова закона излучения позволяют сделать следующие выводы:

- 1) предложенный алгоритм определения рельефа и яркости реализуем на современных ЭВМ;
- 2) алгоритм работает в различных достаточно экстремальных условиях, которые могут встретиться на практике;
- 3) алгоритм устойчив по отношению к изменению начальных данных (данных на фотографиях) - необходимое требование с точки зрения практических приложений.

Таким образом, проведенный численный эксперимент позволяет надеяться на возможность использования предложенного в работах [1-3] метода автоматизированного восстановления рельефа и яркости в практической картографии.

Автор благодарен члену-корреспонденту АН СССР М.М.Лаврентьеву и В.Р.Кирейтову за постановку задачи.

Л и т е р а т у р а

1. Лаврентьев М.М., Кирейтов В.Р. Об одном классе отображений биповерхностей трехмерного пространства. ДАН СССР, т.216, № 2, 1974.
2. Лаврентьев М.М., Кирейтов В.Р. О точках ветвления оптических гиперповерхностей. ДАН СССР, т.221, № 5, 1975.
3. Кирейтов В.Р. Об одном классе отображений биповерхностей трехмерного пространства. Математические проблемы геофизики. Вып.У, ч.1, Новосибирск, 1974.
4. Лаврентьев М.М., Гейдт В.В. Численный эксперимент по автоматизированному восстановлению рельефа по фотоизображениям в случае ламбертова закона отражения. Отчет ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1976.

Е.Ю.Деревцов

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВОЛНОВОЙ ОПТИКИ

В статье уточняются условия, при которых совокупность излучающих точек определяется однозначно по своим фотоизображениям. Используются понятия, введенные в [1]-[3]. Зададим в R^3 прямоугольную декартову систему координат. Пусть (V, μ) - дискретное тело (д.п.т.), $V = \{p_j\}_{j \in J}$, $\mu(p) = \sum_{j \in J} c_j \delta(p - p_j)$, $p_j \in R^3$, $c_j \in \mathbb{C}$. Семейство оптических систем (о.с.)

$\{F^1\}_{1 \in L}$ таково, что центры тяжести $q_0^1 = (q_{0x}^1, q_{0y}^1, q_{0z}^1)$ диафрагм Σ^1 принадлежат плоскости $z = H$ и эффективные области W^1 - квадраты со стороной $2a$, $W^1 \subset \mathcal{E}$ для всех $1 \in L$. В дальнейшем всюду предполагаем, что центры тяжести диафрагм любых трех о.с. из семейства $\{F^1\}_{1 \in L}$ не лежат на одной прямой. Экран \mathcal{E} задан уравнением $z = H + d_1$, $d_1 > 0$. Считаем, что $V \subset \bigcap_{1 \in L} F^1 \neq \emptyset$. Здесь d_1 - при-

цельное расстояние, F_+^1 - допустимая область о.с. F^1 . Приведенное линейризованное изображение [I] в этом случае ($F \in \{F^1\}_{l \in L}$)

$$J_F(w) = B \sum_{j \in J} c_j b(p_j, q_0) K_0(w - F(p_j)), \quad (1)$$

где $B \in \mathbb{O}$ - постоянная, $F(p_j) = (F_x(p_j), F_y(p_j), H + d_1) =$

$$= (q_{0x} + d_1 \frac{x_j - q_{0x}}{z_j - q_{0z}}, q_{0y} + d_1 \frac{y_j - q_{0y}}{z_j - q_{0z}}, H + d_1) -$$

вектор-функция, $p_j = (x_j, y_j, z_j) \in V$, $w = (w_x, w_y, H + d_1) \in W$,

функция $b(p_j, q_0)$ описывает закон излучения д.п.т. (V, μ) ,

$$K_0(w - F(p_j)) = \frac{\sin \frac{ka}{d_1} (w_x - F_x(p_j))}{w_x - F_x(p_j)} \frac{\sin \frac{ka}{d_1} (w_y - F_y(p_j))}{w_y - F_y(p_j)},$$

k - волновое число.

Семейство $\{w^1\}_{l \in L}$ точек $w^1 \in W^1$ называется геометрически согласованным, если существует точка $p \in \bigcap_{l \in L} F_+^1$ такая, что $F^1(p) = w^1$ для всех $l \in L$. Критерий геометрической согласованности [2] двух точек $w^1 \in W^1$, $w^2 \in W^2$ формулируется в нашем случае так: точки w^1 , w^2 геометрически согласованы, если и только если $|w^1 - w^2| > |b|$, $\langle w^1 - w^2, b \rangle = |w^1 - w^2| \cdot |b|$. При этом положение их общего стерео-прообраза p может быть найдено по формулам

$$p = q_0^1 + \frac{(b, a_2, a_1 \times a_2)}{|a_1 \times a_2|^2} a_1 = q_0^2 - \frac{(b, a_1, a_1 \times a_2)}{|a_1 \times a_2|^2} a_2, \quad (2)$$

Здесь $a_1 = w^1 - q_0^1$, $a_2 = w^2 - q_0^2$, $b = q_0^1 - q_0^2$.

Приведем пример, проясняющий характер неоднозначности при восстановлении д.п.т. (V, μ) по его фотоизображениям.

Пусть д.п.т. (V, μ) состоит из точек $p_1, p_2 \in F_+^1 \cap F_+^2 \subset \mathbb{R}^3$, $\mu(p) = c_1 \delta(p - p_1) + c_2 \delta(p - p_2)$, и о.с. F^1 и F^2 таковы, что $(b, p_1 - p_2, p_1 - q_0^1) = 0$. Тогда каждая

из точек $w_1^1 = F^1(p_1)$ и $w_2^1 = F^1(p_2)$ геометрически согласована с точками $w_1^2 = F^2(p_1)$ и $w_2^2 = F^2(p_2)$, поэтому формулы (2) дадут четыре стереообраза, составляющих множество \bar{V} , которое содержит носитель V д.п.т. (V, μ) .

Считаем известным $\bar{V} = \{p_j\}$, $1 \leq j \leq 4$, и левые части (I) $\int_{F^1}^1(w_m^1)$, $m, l = 1, 2$. Ставим задачу: найти

$c_j \in \mathbb{C}$, если $b(p_j, q_0^1) = \frac{\exp ik|p_j - q_0^1|}{|p_j - q_0^1|}$. Легко ус-

танавливается, что определитель полученной системы из четырех линейных уравнений равен нулю при выполнении двух условий

$$|p_1 - q_0^1| \cdot |p_2 - q_0^1| \cdot |p_3 - q_0^2| \cdot |p_4 - q_0^2| = |p_1 - q_0^2| \cdot |p_2 - q_0^2| \cdot |p_3 - q_0^1| \cdot |p_4 - q_0^1|,$$

$$\exp ik(|p_1 - p_3| + |p_1 - p_4|) = \exp ik(|p_2 - p_3| + |p_2 - p_4|). \quad (4)$$

С помощью методов аналитической геометрии нетрудно показать, что (3) выполняется тождественно для любого четырехугольника, в котором нет параллельных сторон. Условие (4) означает, что

$$k = \frac{2\pi n}{|p_1 - p_3| + |p_1 - p_4| - |p_2 - p_3| - |p_2 - p_4|}, \quad (5)$$

$$n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

при неравном нулю знаменателе или при любом k

$$|p_1 - p_3| + |p_1 - p_4| = |p_2 - p_3| + |p_2 - p_4|. \quad (5')$$

Физически условия (5), (5') означают пропорциональность волновых полей от источников, составляющих V и \bar{V} . Если (5) и (5') не выполнены, то c_j , $1 \leq j \leq 4$, а тем самым и V , находятся однозначно.

I. Пусть $\{F^1\}_{l \in L}$ - семейство о.с., задано д.п.т.

(V, μ) и $V \subset \bigcap_{l \in L} F^1$. Применив к V F^1 - отображения, получим

на каждой эффективной области W^1 семейство точек $\{w_{n_1}^1\}_{n_1 \in N_1}$. Ставим задачу определения носителя V д.п.т. (V, μ) по из-

вестному семейству $\{w_{n_1}^1\}_{n_1 \in N_1}$. Рассмотрим множество $Q = \bigcup_{l \in L} \{w_{n_1}^1\}_{n_1 \in N_1} = \bigcup_{l \in L} F^1(V)$. Используя критерий гео-

метрической согласованности, разобьем Q на геометрически согласованные семейства Q_j . Каждому Q_j сопоставим по формулам (2) стереообраз $p_j \in \bigcap_{l \in L} F^1_+$. Таким образом, $Q_j = \bigcup_{l \in L} F^1(p_j)$, и множеству Q соответствует семейство $\{p_j\}_{j \in J} = \bar{V}$. Очевидно, $\bar{V} \supseteq V$. Пусть множества $U_n = Q_{n_1} \cup Q_{n_2} \cup \dots \cup Q_{n_k}$ таковы, что 1) для всякого n_k существует n_m , что $Q_{n_k} \cap Q_{n_m} \neq \emptyset$; 2) если $j \neq n_1, n_2, \dots, n_k$, то $Q_j \cap U_n = \emptyset$. Тогда $Q = \bigcup_{n \in N} U_n$ и $U_n \cap U_m = \emptyset$, $n, m \in N$. Ясно, что такое разбиение задает непересекающееся разбиение семейства $\bar{V} = \{p_j\}_{j \in J} = \bigcup_{n \in N} V_n$, где каждому V_n соответствует U_n при F^1 -отображениях.

Отметим несколько очевидных свойств построенных множеств.

$|M|$ обозначает количество элементов в конечном множестве M .

$$1. F^1(\bar{V}) = F^1(V) \quad \text{для всех } l \in L.$$

$$2. |Q_j| = |L| \quad \text{для любого } j \in J.$$

3. $|N| \leq |J|$, $|N| = |J|$ тогда и только тогда, когда для всяких $i, j \in J$ $Q_i \cap Q_j = \emptyset$.

4. Если $Q_n \cap Q_m \neq \emptyset$ для некоторых $n, m \in J$, то существует l такое, что $F^1(p_n) = F^1(p_m)$.

5. Если $p_j \in \bar{V} - V \neq \emptyset$, то для любого $l \in L$ существует точка $p_n \in \bar{V} - p_j$ такая, что $F^1(p_j) = F^1(p_n)$.

Покажем, например, справедливость свойства 5. Пусть $p_j \in \bar{V} - V \neq \emptyset$. Зафиксируем $l \in L$ и обозначим $w_0^1 = F^1(p_j)$. Если не существует точки p_n такой, что $w_0^1 = F^1(p_n)$, то $|F^1(\bar{V})| = |F^1(\bar{V} - p_j)| + 1$, т.е. $F^1(\bar{V}) \neq F^1(V)$, что противоречит свойству 1.

На вопрос, какое количество о.с. необходимо для однозначного восстановления носителя V д.п.т. (V, μ) , отвечает

У т в е р ж д е н и е 1. Пусть задано семейство о.с. $\{F^l\}_{l \in L}$. Тогда существует д.п.т. (V, μ) такое, что $|\bar{V}| = |V| + 1 = |L| + 1$. Если при этом $F^0 \notin \{F^l\}_{l \in L}$ - такая о.с., что $\bar{V} \subset \bigcap_{l \in L} F^l_+ \cap F^0_+$, то семейство $F^0 \cup \{F^l\}_{l \in L}$ позволяет однозначно восстановить носитель V .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем произвольно точку $p_0 \in \bigcap_{l \in L} F^l_+$. Рассмотрим отрезки $tp_0 + (1-t)q^l_0$, $l \in L$, $0 \leq t \leq 1$. Тогда для любого $l \in L$ в силу открытости $\bigcap_{l \in L} F^l_+$ существует $t_l \in (0, 1)$, что $p_l = t_l p_0 + (1-t_l)q^l_0 \in \bigcap_{l \in L} F^l_+$. Пусть $V = \{p_l\}_{l \in L}$. Рассмотрим множество $A = \bigcup_{l \in L} F^l(p_l)$. По построению V , $F^l(p_l) = F^l(p_0)$, $l \in L$, поэтому A - семейство геометрически согласованных точек, и $p_0 \in \bar{V}$. Таким образом, $\bar{V} = V + p_0$. Вторая половина утверждения очевидна.

Сформулируем условия, при выполнении которых носитель V д.п.т. (V, μ) восстанавливается однозначно.

У т в е р ж д е н и е 2. Пусть задано семейство о.с. $\{F^l\}_{l \in L}$ и д.п.т. (V, μ) , $V \subset \bigcap_{l \in L} F^l_+$. Если геометрические F^l - изображения таковы, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $l \in L$ такое, что $|F^l(V_n)| < |L|$, то $\bar{V} = V$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$ и $p_0 \in V_n$. Предположим, что $p_0 \in \bar{V} - V \neq \emptyset$. В силу свойства 5 для всякого $l \in L$ найдется точка $p_l \in V_n - p_0$ такая, что $F^l(p_0) = F^l(p_l)$. Рассмотрим множества $B = p_0 \cup_{l \in L} p_l \subset V_n$ и $F^l(B)$, $l \in L$. Покажем, что $|F^l(B)| = |L|$ для всех $l \in L$. Если это не так, то для некоторого $l_0 \in L$ $|F^{l_0}(B)| < |L|$

(обратное неравенство не имеет места по построению B), т.е. существуют $p_{l_1}, p_{l_2} \in B - p_0$ такие, что $F^{l_0}(p_{l_1}) = F^{l_0}(p_{l_2})$. Но тогда центры тяжести диаграмм о.с. F^{l_0} , F^{l_1} и F^{l_2} лежат на одной прямой, что противоречит соглашению, принятому в начале статьи. Значит, для всех $l \in L$ $|F^l(B)| = |L|$.

Следовательно, если выполнено условие утверждения, то $\bar{V} - V = \emptyset$.

Утверждение 3. Пусть задана о.с. F^1 и д.п.т. (V, μ) . Если относительно носителя V известно, что $V \subset F^1_+ \cap \{z \leq H - \varepsilon, \varepsilon > 0\}$, то существует о.с. F^2 такая, что по геометрическим F^1, F^2 - изображениям д.п.т. (V, μ) носитель V определяется однозначно.

Доказательство. Рассмотрим $F^1(V) = \{w_j\}_{j \in J}$ и совокупность отрезков $[w_i, w_j], i, j \in J$. Выберем две точки $w_H, w_K \in W^1$ так, чтобы отрезок $[w_H, w_K]$ был непараллелен ни одному из отрезков $[w_i, w_j], i, j \in J$. Проведем через $[w_H, w_K], q_0^1$ плоскость и точку q_0^2 выберем на пересечении последней и плоскости $z = H, q_0^2 \neq q_0^1$. В силу условий $V \subset F^1_+ \cap \{z \leq H - \varepsilon, \varepsilon > 0\}$ можно построить о.с. F^2 с F^2_+ , не совпадающей с полупространством $z \leq H$, и эффективной областью W^2 , представляющей собой квадрат со стороной $2c$, c определяется допустимой областью F^2_+ . При этом $V \subset F^2_+$.

П. Пусть относительно д.п.т. (V, μ) известно, что $V \subset X \subset S$, где S - замкнутая гладкая поверхность, делящая множество $R^3 - S$ на ограниченную S_- и неограниченную S_+ компоненты связности; X - замкнутое подмножество S . Множество $\omega(p) \subseteq R^3, p \in S$ есть [3]

$$\omega(p) = \{q \in S_+ \mid [p, q] \cap S_- = \emptyset\}.$$

Если $X \subseteq S$, то $\omega(X) = \bigcap_{p \in X} \omega(p)$. Зададим две о.с. F^1, F^2 и $X \subset S$ так, чтобы выполнялись условия $V \subset X \subset F^1_+ \cap F^2_+$ и $\Sigma^1, \Sigma^2 \subseteq \omega(X)$. Тогда по лемме в [1],

$$\text{сов}(q_0^1 - p, n_p) \neq 0, \quad l = 1, 2; \quad p \in X, \quad (6)$$

n_p - нормаль к поверхности S в точке p . В дальнейшем считаем, что эти условия выполнены. В силу (6) среди точек носителя $V \subset X$ нет геометрически двойных относительно о.с. F^1, F^2 , поэтому для всех $n \in N \quad |F^1(V_n)| = |F^2(V_n)| = |K_n|$. Для восстановления носителя V по фотоизображениям необходи-

мо из каждого V_n , $|V_n| = |K_n|^2$, выбрать $B_n \subset V_n$, $|B_n| = |K_n|$, т.е. выделить в U_n $|K_n|$ непересекающихся семейств геометрически согласованных точек.

Рассмотрим точку $p \in X$, плоскость

$$\mathcal{P} = \{q \in R^3 | q = p + t_1(q_0^1 - p) + t_2(q_0^2 - p); t_1, t_2 \in R\} \quad (7)$$

и прямые $\mathcal{L}_1 = \{r \in R^3 | r - t(q_0^1 - p) - p = 0, t \in R\}$, $l = 1, 2$.

Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{P} \cap X$, и

$$\mathcal{P}_{pi}^j = \{r \in R^3 | (-1)^{i-1} [r - t_1(q_0^1 - p) - p] \cdot e_i > 0 \& (-1)^{j-1} [r - t_2(q_0^2 - p) - p] \cdot e_j > 0;$$

$$t_1, t_2 \in R\}, \quad i, j = 1, 2.$$

Вводя в \mathcal{P} прямоугольную декартову систему координат $q_0^1 uv$ с центром в точке q_0^1 и осями e_1, e_2 :

$$e_1 = \frac{q_0^2 - q_0^1}{|q_0^2 - q_0^1|}, \quad \langle q_0^1 - p, e_2 \rangle > 0, \quad (8)$$

и пользуясь обобщенной теоремой о среднем для функций, задающих \mathcal{L}_1 (или \mathcal{L}_2) и \mathcal{L} , и свойством (6), легко показать, что справедлива

Лемма. Если $p, q \in \mathcal{L}$, $p \neq q$, то $q \in \mathcal{P}_{pi}^{3-i}$, $i=1, 2$.

Очевидным следствием из леммы является отношение

$$\mathcal{P}_{pi}^i \cap \mathcal{P}_{q3-i}^{3-i} = \emptyset, \quad i = 1, 2; \quad p, q \in \mathcal{L}.$$

Утверждение 4. Пусть д.п.т. (V, μ) и о.с. F^1, F^2 таковы, что $V \subset X \subset F_+^1 \cap F_+^2$; $\Sigma^1, \Sigma^2 \subseteq \omega(X)$.

Тогда носитель V определяется однозначно, если известны $F^1(V)$ и $F^2(V)$.

Доказательство. Фиксируем множества U_n и V_n для некоторого $n \in \mathbb{N}$ и произвольную точку $p \in V_n$. Зададим на плоскости \mathcal{P} , определяемой (7), систему координат $q_0^1 uv$. Перенумеруем от 1 до $|K_n|$ каждое из семейств

$F^1(V_n) = \{w_i^1\}_{i \in K_n}$, $1 = 1, 2$, в соответствии с порядком по координате u . Рассмотрим семейство геометрически согласованных точек $\{Q_j\}_{j \in K_n} = \{w_j^1, w_j^2\}_{j \in K_n}$ и соответствующее ему $B_n = \{p_j\}_{j \in K_n}$, $F^1(p_j) = w_j^1$, $1 = 1, 2$. Покажем, что если $M \subset V_n$, $|M| = |K_n|$ и $M \subset X$, то $M = B_n$. Пусть это не так. Предположим, что $Q_1 = \{w_1^1, w_m^2\} \subset M$, $m \neq 1$ и p_1 - стереообраз множества Q_1 , т.е. $F^1(p_1) = w_1^1$ и $F^2(p_1) = w_m^2$. Рассмотрим $Q_2 = \{w_k^1, w_{m-1}^2\} \subset M$, $k \in K_n - \{1\}$, и p_2 такое, что $F^1(p_2) = w_k^1$, $F^2(p_2) = w_{m-1}^2$. Используя формулы аналитической геометрии, легко доказать включение $p_2 \in \mathcal{L}_{p_1}^2$, что противоречит лемме. Следовательно, $M = B_n$.

Пусть теперь носитель V д.п.т. (V, μ) , $X \subset S$ и о.с. F^1, F^2 таковы, что $V \subset X \subset F_+^1 \cup F_+^2$, $\Sigma^1, \Sigma^2 \subseteq \omega(X)$.

Введем обозначения $\tilde{X} = X \cap F_+^1 \cap F_+^2 \neq \emptyset$, $\tilde{V} = V \cap F_+^1 \cap F_+^2 \neq \emptyset$. Ставим задачу найти $\tilde{V} \subset \tilde{X}$, если известны $F^1(V)$ и $F^2(V)$.

У т в е р ж д е н и е 5. Пусть известна линия $\mathcal{L} \subset \tilde{X}$, касательная к которой в любой точке $p \in \mathcal{L}$ не лежит в плоскости \mathcal{P} , определяемой (7). Тогда множество \tilde{V} находится однозначно, если известны $F^1(V)$, $1 = 1, 2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\mathcal{L} \subset \tilde{X}$ и $\Sigma^1 \subseteq \omega(X)$, $1 = 1, 2$, то не существует точек $p \in \mathcal{L}$, $q \in X$, для которых выполнялись бы соотношения $F^1(p) = F^1(q)$, $1 = 1, 2$. Выберем $n \in \mathbb{N}$ и любую $p \in V_n$. Плоскость \mathcal{P} и система координат $q_0^1 uv$ с осями e_1, e_2 определяется (7), (8). Рассмотрим точки $w_0^1 = F^1(\mathcal{L} \cap \mathcal{P})$ и семейства $F^1(V_n) = \{w_i^1\}_{i \in K_1}$;

$1 = 1, 2$; $w_1^1 = (u_1^1, d_1)$ в системе координат $q_0^1 uv$. Пусть

$$M_1^1 = \{w_i^1 | u_i^1 > u_0^1, i \in K_1\}, \quad M_2^1 = \{w_i^1 | u_i^1 < u_0^1, i \in K_1\}, \quad 1=1, 2.$$

Заномеруем точки, принадлежащие M_1^1 , по возрастанию координаты u , а точки M_2^1 - по убыванию, используя индексы от 1 до $|M_1^1|$, $1, i = 1, 2$ и оставляя прежние обозначения. Пусть

множества индексов A_1 и A_2 таковы, что

$$A_i = M_i^1, \text{ если } |M_i^1| < |M_i^2|, A_i = M_i^2, \text{ если } |M_i^1| \geq |M_i^2|, i = 1, 2.$$

Введем обозначение $\tilde{U}_n = \{w_1^1, w_1^2\}$. Индекс $i \in A_1 \cup A_2$. Построением \tilde{U}_n доказательство закончено, поскольку после этого выполнены условия предыдущего утверждения.

Ш. Пусть заданы семейства о.с. $\{F^l\}_{l \in L}$ и точек $\{w_{n_1}^l\}_{n_1 \in N_1} \in W^l$. Используя формулы (2), находим множество $\bar{V} = \{p_j\}_{j \in J}, \bar{V} \supseteq V$. Считая известными функции $f_{F^l}^1(w^l)$, $l \in L$, и функцию $b(p, q)$ заданной в виде $b(p, q) = \frac{\exp ik(p-q)}{|p-q|}$,

ставим задачу найти величины $c_j, j \in J$. Введем обозначения:

$$\mu^l(w^l) = \frac{f_{F^l}^1(w^l)}{B}, \frac{\exp ik|p_j - q_0^l|}{|p_j - q_0^l|} c_j = G_j^l, K_0(w^l - F^l(p_j)) = a_j^l(w^l). \quad (9)$$

Тогда (I) приобретает вид

$$\mu^l(w^l) = \sum_{j \in J} a_j^l(w^l) G_j^l. \quad (10)$$

Отметим, что если известна величина G_j^m для некоторого $m \in L$, то известны все $G_j^l, l \in L$.

Зафиксируем о.с. $F^1 \in \{F^l\}_{l \in L}$, произвольное семейство точек $\{w_j\}_{j \in N}, |N| \geq \max_{l \in L} \{|N_l|\}$, и покажем, что ранг системы (10), ($l=1$), не превосходит $|N_1|$. Действительно, если относительно о.с. F^1 в \bar{V} нет геометрически двойных точек, то $|N_1| = |J|$. Если такие точки найдутся, то определения функций $F^1(p)$ и $K_0(w - F(p))$ показывают, что среди функций $a_j^1(w^1)$ только $|N_1|$ различных, при этом некоторые неизвестные являются суммами вида $\sum_{k \in K_1} G_{1k}$, где K_1 - множество индексов $i, j \in J$, что $F^1(p_1) = F^1(p_j), p_1, p_j \in \bar{V}$.

Отсюда следует, что если $\sum_{l \in L} |N_l| < |\bar{V}|$, то система уравнений (10) недоопределена.

Пусть для заданного семейства о.с. $\{F^l\}_{l \in L}$ и множества \bar{V} выполнено неравенство $\sum_{l \in L} |N_l| \geq |\bar{V}|$. Для того, чтобы найти величины G_j^l из соотношений (10), необходимо зафиксировать систему точек w_m^l , $m \in M$, $l \in L$ так, чтобы определитель (10) не был равен нулю. Будем выбирать точки w_m^l из семейства $\bigcup_{l \in L} \{w_{n_1}^l\}_{n_1 \in N_1}$, используя тот факт [4], что если матрица A действительная и $|a_{mm}| > \sum_{i=1}^n |a_{im}|$, $i \neq m$, $m=1, 2, \dots, n$, то $\det(A) \neq 0$. При достаточно больших $\frac{ka}{a_1}$ этот признак справедлив, и система линейных уравнений (10) однозначно разрешается.

IV. Дадим краткое описание численных экспериментов определения координат точек, составляющих носитель V , по известным модулям $|\int_{F^l}(w_{mn}^l)|$, $l = 1, 2, 3$; $m, n = 0, 1, \dots, 127$. Носитель V содержал 3 точки p_1, p_2, p_3 , расположенные на осях координат. В таблице 1 приведены значения параметров о.с. F^1, F^2, F^3 в пяти экспериментах. В таблице 2 - истинные p_{ju} и найденные p_{jH} координаты точек p_j , $j = 1, 2, 3$. (В каждой клетке таблицы помещены значения координат соответствующей точки).

Т а б л и ц а 1

№ ЭП	к	а	a_1	a_0^1	a_0^2	a_0^3
1	$2\pi \cdot 10^5$	0,1	31,25	0,0,7000	1400,1400, 7000	700,1400, 7000
2	$2\pi \cdot 10^3$	1	31,25	0,0,7000	1400,1400 7000	700,-1400, 7000
3	$2\pi \cdot 10^2$	0,5	0,78125	0,0, 1,5	0,3 0,3 1,5	0,15 -0,3 1,5
4	$2\pi \cdot 10^2$	1	3,125	0, 0, 3	0,6 0,6 3	0,3 -0,6 3
5	$2\pi \cdot 10^1$	1	0,3125	0, 0, 1	0,2 0,2 1	0,1 -0,2 1

Т а б л и ц а 2

№ П/П	P_{1u}	P_{1H}	P_{2u}	P_{2H}	P_{3u}	P_{3H}
I	10	10,05	0	0,09	0	0,18
	0	0,18	10	10,14	0	0,18
	0	0,00	0	0,88	10	10,57
2	100	101,3	0	1,8	0	1,7
	0	0,9	100	100,5	0	1,7
	0	8,8	0	0,0	100	104,3
3	0,8	0,778	0	-0,004	0	-0,002
	0	0,004	0,8	0,810	0	0,002
	0	0,037	0	-0,039	0,8	0,797
4	0,8	0,794	0	0,004	0	0,003
	0	-0,008	0,8	0,788	0	-0,003
	0	0,000	0	0,037	0,8	0,803
5	2	2,236	0	-0,014	0	0,025
	0	-0,014	2	2,236	0	0,025
	0	-0,144	0	-0,144	2	1,985

Относительная ошибка в определении координат x и y

$\frac{\Delta p_{jx}}{|p_{ju}|}$ и $\frac{\Delta p_{jy}}{|p_{ju}|}$ в первых четырех экспериментах не превышает 3%, относительная ошибка $\frac{\Delta p_{jz}}{|p_{ju}|} < 0,09$. В последнем эксперименте $\frac{\Delta p_{jx}}{|p_{ju}|} < 0,132$, $\frac{\Delta p_{jy}}{|p_{ju}|} < 0,132$, $\frac{\Delta p_{jz}}{|p_{ju}|} < 0,08$, $j = 1, 2, 3$. В заключение выражаю благодарность члену-корреспонденту АН СССР Алексееву А.С. и к.ф.-м.н. Кирейтову В.Р. за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Л и т е р а т у р а

1. Кирейтов В.Р. О некоторых обратных задачах волновой оптики I.-Сб. "Математические проблемы геофизики",

вып.6, ч.2, Новосибирск, 1975, с.167-211.

2. Кирейтов В.Р. О некоторых обратных задачах волновой оптики II. - Сб. "Некорректные математические задачи и проблемы геофизики", Новосибирск, 1976, с.90-121.
3. Кирейтов В.Р. О некоторых свойствах $(n - 1)$ -мерных поверхностей в n -мерном пространстве. - Сб. "Математические проблемы геофизики", вып.5, ч.2, Новосибирск, 1974, с.46-58.
4. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М., "Наука", 1969.

В. И. Добринский, В. А. Горбунов
О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ РАССЕЯНИЯ ПЛОСКИХ ЗН - ВОЛН
НА ОДНОМЕРНО НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

В первой части работы рассмотрена задача определения плотности одномерно неоднородного полупространства и скорости распространения поперечных волн в нем по заданным формам наклонно падающих и отраженных ЗН - волн. Предполагается, что углы падения достаточно малы. Тогда волновой процесс описывается гиперболическим уравнением [1]. Эта задача впервые была рассмотрена в работах А.Г.Меграбова [1,2], где ее решение доведено до вычислительной программы. В данной статье делается попытка снять несколько ограничений, при которых было проведено цитированное исследование. Во-первых, теореме единственности придается локальный характер (раздел 1). Второе усовершенствование заключается в доказательстве единственности восстановления плотности и скорости по данным рассеяния для двух углов (раздел 2), тогда как в работах [1,2] требуется счетное множество.

В последующих разделах статьи рассмотрен численный метод (раздел 3) решения прямой задачи об отражении наклонной плоской ЗН - волны от полупространства, заполненного одномерно

неоднородной и неидеально упругой средой, а также приведены (раздел 5) результаты численных расчетов с использованием как этого алгоритма, так и алгоритма решения обратной задачи, т.е. восстановления плотности и скорости.

В отличие от большинства авторов [3,4 и др.] программ расчета сейсмических волн в неупругих средах для описания явления поглощения мы выбрали модель Больцмана. По сравнению с общепринятым полуэвристическим подходом к учету поглощения данный подход обладает одним важным преимуществом, а именно, здесь решается вполне четкая математическая задача, тогда как в первом подходе отсутствует уравнение, описывающее волновой процесс в среде. Этот элемент эвристичности привел к тому, что получающееся решение не удовлетворяет принципу причинности. Модель Больцмана не нашла широкого применения, по-видимому, из-за недостаточной четкости физического смысла характеризующих ее величин и, вследствие этого, трудности их измерения. Однако эта трудность вполне преодолима (см. раздел 4).

I. 0 единственности определения некоторой вспомогательной функции по данным рассеяния плоских SH - волн

I⁰. Задачу построения решения $u(x, \tau, p)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{d \ln \sigma}{dx}(x, p) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad -\infty < \tau < +\infty, \quad (1.1)$$

удовлетворяющего начальным данным

$$u(x, \tau, p) \Big|_{\tau \leq 0} = 0 \quad (I.2)$$

и граничному условию

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial u}{\partial x} \right]_{x=0} = 2g'(\tau), \quad (g(\tau) \equiv 0 \text{ при } \tau < 0) \quad (I.3)$$

будем называть прямой задачей. Эта задача возникает при описании поля колебаний полупространства $z > 0$, возбужденного либо наклонно падающей плоской SH - волной [1,2], либо нор-

мальной плоской продольной волной [5]. В первом случае

$$\sigma(x, p) = c_s(x) \rho(x) \sqrt{1 - p^2 c_s^2(x)},$$

$$x = x(z, p) = \int_0^z \sqrt{c_s^{-2}(z) - p^2} dz, \quad p = \frac{\sin \theta}{c_s(0)},$$

где функция $c_s(z) \in C^3[0, \infty)$, $0 < c_s(z) < p^{-1}$, имеет смысл скорости поперечных волн, а $\rho(z) \in C^3[0, \infty)$, $\rho(z) > 0$, есть плотность. Параметр θ задает угол между нормалью к фронту падающей волны и осью z . Во втором случае

$\sigma(x, p) = \sigma(x) = c_p(x) \rho(x)$, $x = \int_0^z dz / c_p(z)$, где $c_p(z)$ - скорость продольных волн. Функция $g(\tau) \in C^3(-\infty, \infty)$ в обоих случаях описывает форму падающей волны.

2°. Определим функцию $u_\delta(x, \tau, p)$ как решение задачи (I.1), (I.2), (I.5):

$$\left. \frac{\partial u_\delta}{\partial x} \right|_{x=0} = \delta(\tau), \quad (I.5)$$

где $\delta(\tau)$ - δ -функция Дирака.

Л е м м а I.1. При сделанных предположениях относительно гладкости всех функций имеет место связь:

$$u(x, \tau, p) = \int_0^\tau f'(\tau - t, p) u_\delta(x, t, p) dt, \quad (I.6)$$

причем функция $f(\tau, p)$ находится из интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода:

$$f(\tau, p) + g(\tau) + \int_0^\tau H(\tau - t, p) f(t, p) dt = 0, \quad (I.7)$$

где

$$H(\tau, p) = -\frac{1}{2} \left[\delta(\tau) + \frac{\partial u_\delta}{\partial \tau}(0, \tau, p) \right], \quad H(\tau, p) \in C^2[0, \infty), [8].$$

Для доказательства леммы достаточно подставить выражение (I.6) в уравнение (I.I) и условия (I.2), (I.3) и воспользоваться свойствами функции $u_8(x, \tau, p)$.

Формула (I.6) выражает решение задачи (I.I)–(I.3) через решение задачи (I.I), (I.2), (I.5). В частности для формы $\varphi(\tau, p)$ отраженной волны из (I.6) и (I.7) вытекает формула:

$$\varphi(\tau, p) = u(0, \tau, p) - g(\tau) = f(\tau, p) + g(\tau). \quad (I.8)$$

3°. Полученное выше представление (I.6) дает возможность применить результаты работ М.Г.Крейна [6–8], А.С.Благовещенского [9] и др. по краевой обратной задаче к решению задачи определения функции $\sigma(x, p)$ по заданным $g(\tau)$ и $\varphi(\tau, p)$, которую будем называть обратной задачей (I.I)–(I.3), (I.8). Приступим к ее решению.

В силу линейности относительно $g(\tau)$ оператора прямой задачи и гиперболичности уравнения (I.I) задание пары функций – $g(\tau)$ и $\varphi(\tau, p)$ – эквивалентно заданию одной функции $v(\tau, p)$, которая определяется из уравнения:

$$\int_0^{\tau} g(\tau - t)v(t, p)dt = \varphi(\tau, p). \quad (1.9)$$

Функция $v(\tau, p)$, называемая импульсной переходной характеристикой среды, есть отклик полупространства $z > 0$ на падающий импульс с формой $g(\tau) = \delta(\tau)$. Следовательно, в данном случае $f(\tau, p) = v(\tau, p) - \delta(\tau)$. Подставляя это выражение в (I.7), получаем соотношение

$$H(\tau, p) - \int_0^{\tau} v(\tau - t, p)H(t, p)dt = v(\tau, p), \quad (1.10)$$

которое можно рассматривать как интегральное уравнение относительно функции $H(\tau, p)$.

Построение $\sigma(x, p)$ по функции $H(\tau, p)$ является уже хорошо исследованной задачей [6–9 и др.]. Например, согласно первому варианту метода М.Г.Крейна следует разрешить однопараметрическое семейство интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\tau_{2x}(t, p) + \int_0^{2x} H(|t-s|, p) \tau_{2x}(s, p) ds = 1, \quad 0 \leq t \leq 2x,$$

Тогда искомая функция $\sigma(x, p)$ находится по формуле

$$\sigma(x, p) = \sigma(0, p) \tau_{2x}^2(2x, p),$$

Исходя из результатов работы [9] и взаимнооднозначного характера связи (I.10) легко заключаем, что справедлива

Т е о р е м а I.1. Решение обратной задачи (I.1)-(I.3), (I.8) существует и единственно, если для любой непрерывной функции $\Psi(t)$ имеет место неравенство

$$\int_0^{2x} \Psi^2(t) dt + \int_0^{2x} \int_0^{2x} \Psi(t) \Psi(s) H(|t-s|) ds dt > 0.$$

Подчеркнем локальный характер этого утверждения. Так, если $v(\tau, p)$ задана на интервале $[0, T]$, то $\sigma(x, p)$ находится на интервале $[0, T/2]$. Можно показать, что отображение $v(\tau, p) \rightarrow \sigma(x, p)$ непрерывно из $C^2[0, T]$ в $C^3[0, T/2]$.

З а м е ч а н и е. Для численного решения обратной задачи (I.1)-(I.3), (I.8) применим алгоритм, изложенный в работе [5].

2. Способ построения скорости $c_g(z)$ и плотности $\rho(z)$ по функции $\sigma(x(z, p), p)$, известной при двух значениях параметра p

Пусть исходная информация для решения обратной задачи (I.1)-(I.3), (I.8) задана при двух значениях параметра p : p_1 и p_2 . Решая обратную задачу, мы находим

$$\sigma_1(x) = \sigma(x(z, p_1), p_1), \quad \sigma_2(x) = \sigma(x(z, p_2), p_2).$$

Покажем, что по этим двум функциям однозначно находятся $c_g(z)$ и $\rho(z)$. Для этого мы выведем некоторое нелинейное уравнение относительно функции $c_g(z)$ и покажем его однозначную разрешимость. После определения $c_g(z)$ плотность $\rho(z)$ находится уже просто [2].

В силу формул (I.4) имеем:

$$\sigma(x(z, p), p) = c_S(z) \rho(z) \sqrt{1 - c_S^2(z) p^2} = \sigma\left(\int_0^z \sqrt{f(z) - p^2} dz, p\right),$$

где $f(z) = c_S^{-2}(z)$. Отсюда

$$\sigma(x_1(z), p_1) \sqrt{1 - c_S^2(z) p_2^2} - \sigma(x_2(z), p_2) \sqrt{1 - c_S^2(z) p_1^2} = 0,$$

где $x_1(z) = \int_0^z \sqrt{f(z) - p_1^2} dz$, $i = 1, 2$.

Подставляя в данное соотношение известные функции $\sigma_1(x)$ и $\sigma_2(x)$, получим

$$\sigma_1(x_1(z)) \sqrt{1 - c_S^2 p_2^2} - \sigma_2(x_2(z)) \sqrt{1 - c_S^2 p_1^2} = 0. \quad (2.1)$$

Так как функции $\sigma_1(x)$, $i = 1, 2$ и числа p_1 , $i = 1, 2$ заданы, то соотношение (2.1) можно рассматривать как уравнение относительно $c_S(z)$.

Т е о р е м а 2.1. Пусть $\rho(z)$ и $c_S(z)$ кусочно-аналитические функции. Тогда решение уравнения (2.1) единственно.

Предполагается, что решение существует.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Преобразуем (2.1) к эквивалентному виду

$$f(z) = \frac{\sigma_1^2(x_1(z)) p_2^2 - \sigma_2^2(x_2(z)) p_1^2}{\sigma_1^2(x_1(z)) - \sigma_2^2(x_2(z))} = \mathfrak{N}f(z), \quad (2.2)$$

где через \mathfrak{N} обозначен нелинейный оператор, задаваемый правой частью (2.2).

Найдем все производные $f(z)$ при $z = 0$. Имеем, во-первых,

$$f(0) = \frac{\sigma_1^2(0) p_2^2 - \sigma_2^2(0) p_1^2}{\sigma_1^2(0) - \sigma_2^2(0)},$$

так как $x_1(0) = 0$, $i = 1, 2$.

В силу того, что n -я производная от $x_1(z)$, $i = 1, 2$, будет $(n-1)$ -ой производной от $\sqrt{f(z) - p_1^2}$, $i = 1, 2$ из

(2.2) получаем

$$f^{(n)}(0) = F_n(\sigma_1(0), \sigma_2(0), \sigma_1'(0), \sigma_2'(0), \dots, \sigma_1^{(n)}(0), \sigma_2^{(n)}(0), \\ f(0), f'(0), \dots, f^{(n-1)}(0)),$$

где функция F_n известна.

Стало быть, все производные от $f(z)$ в точке $z = 0$ находятся явно, а сама $f(z)$ определяется в некоторой окрестности точки $z = 0$, где она аналитична.

Пусть $f(z)$ терпит разрыв в точке $z = z_1$. В таком случае функции $\sigma_1(x_1(z))$, $i = 1, 2$, также разрывны в этой точке (по построению).

Так как

$$\lim_{x_1(z) \rightarrow x_1(z_1)+0} \sigma_1(x_1(z)) = \lim_{z \rightarrow z_1+0} \sigma_1(x_1(z)) = \\ = c_s(z_1+0) \sqrt{1 - c_s^2(z_1+0)p_1^2},$$

то

$$f(z_1+0) = \lim_{x_1(z) \rightarrow x_1(z_1)+0} Bf(z), \quad i=1,2$$

Следовательно, значение функции $f(z)$ справа восстановлено. Аналогично этому

$$f^{(n)}(z_1+0) = \lim_{x_1(z) \rightarrow x_1(z_1)+0} (Bf(z))^{(n)}, \quad i=1,2$$

Где выражение справа имеет структуру F_n . Аргументами функции F_n в данном случае будут $\sigma_1^{(k)}(x_1(z_1)+0)$,

$i = 1, 2, k = 0, 1, 2, \dots, n$ и $f^{(k)}(z_1 + 0)$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, а так как эти числа известны, то $f^{(n)}(z_1 + 0)$ находится однозначно. Вычислив все производные $f^{(n)}(z_1 + 0)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, мы находим $f(z)$ в некоторой окрестности точки $z = z_1$. Продолжая этот процесс дальше, найдем $f(z)$ на всей полуоси $0 \leq z < \infty$.

Для завершения доказательства остается лишь заметить, что наличие точек неаналитичности функции $\rho(z)$ не приводит к нерегулярности правой части (2.2) в этих точках. Последнее показывается непосредственным вычислением производных от $Vf(z)$ справа и слева.

З а м е ч а н и е . Для численного решения уравнения (2.2) мы использовали метод последовательных приближений

$$f_n(z) = Vf_{n-1}(z), \quad n = 1, 2, \dots,$$

который, как показали контрольные вычисления на ЭВМ, сходится достаточно быстро (5-10 итераций) к точному решению. В качестве начального приближения во всех случаях задавалась функция $f_0(z) = \bar{c}_s^2(0)$.

3. Постановка прямой задачи рассеяния плоской SH - волны на неупругом полупространстве и численный метод ее решения

Предположим, что полупространство $z > 0$ заполнено идеально упругой средой, а полупространство $z < 0$ - идеально упругой. Для описания волнового процесса при $z > 0$ возьмем модель Больцмана - наиболее общую среди линейных моделей неупругой среды [10]. Несложно показать, что в случае падения наклонной плоской SH - волны единственная компонента вектора перемещений частиц среды при $z > 0$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{d \ln \sigma}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} - Q \int_0^{\tau} h(\tau - \eta) \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{d \ln(\sigma Q)}{dx} \frac{\partial u}{\partial x} \right\} d\eta =$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + p^2 Q \int_0^{\tau} h(\tau - \eta) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} d\eta, \quad (3.1)$$

где функция $\sigma = \sigma(x, p)$ и переменная $x = x(z, p)$ определены равенствами (1.4), $h(t)$ - функция последействия [10], а функция $Q = Q(x)$ характеризует уровень поглощаемой энергии.

Добавив к уравнению (3.1) условия (1.2), (1.3), получим прямую задачу. Ее численное решение достаточно просто находится разностным методом. Заменяем входящие в уравнение (3.1) производные их разностными аналогами, а интегралы - квадратурами. Алгоритм решения полученной системы алгебраических уравнений легко реализуется на ЭВМ. Наиболее просто и эффективно это делается для функции последействия $h(t)$ вида: $h(t) = e^{-\gamma t}$.

При этом разностная задача принимает вид:

$$A_n u_n^{k+1} + B_n u_n^{k-1} = C_n u_{n+1}^k + D_n u_{n-1}^k + E_n u_n^k + F_n J_{n+1}^k + G_n J_n^k + H_n J_{n-1}^k, \quad (3.2)$$

$$u_0^{k+1} = u_1^k + \varepsilon_{k+1} - \varepsilon_{k-1}, \quad u_n^k = 0, \quad n < k, \quad n, k = 0, 1, 2, \dots,$$

где коэффициенты $A_n, B_n, C_n, D_n, E_n, F_n, G_n, H_n$ выражаются через отсчеты $\sigma(n \Delta x)$, $Q(n \Delta x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и параметры p и γ , а $u_n^k = u(n \Delta x, k \Delta \tau, p)$, $\varepsilon_k = g(k \Delta \tau)$,

$$J_n^k = \sum_{j=0}^{k-1} \int_{j \Delta \tau}^{(j+1) \Delta \tau} e^{-\gamma(k \Delta \tau - t)} [u_n^j + (u_n^{j+1} - u_n^j)(t - j \Delta \tau) / \Delta \tau] dt, \quad \Delta x = \Delta \tau.$$

Специальный выбор функции $h(t)$ приводит к появлению рекуррентной формулы:

$$J_n^{k+1} = a_1 J_n^k + a_2 u_n^{k+1} + a_3 u_n^k, \quad (3.3)$$

которая позволяет отказаться от запоминания двумерной таблицы $\{u_n^k\}$, чего нельзя избежать при произвольной $h(t)$. Использование формулы (3.3) приводит к тому, что при вычислении k -ого отсчета отраженной волны $\varphi_k = \varphi(k \Delta \tau, p) = u_0^k - \varepsilon_k$ достаточно помнить лишь J_n^{k-1-n} , $0 \leq n \leq [k/2]$, u_n^{k-n-n} , $n = 1, 2$, $0 \leq n \leq [(k - n + 1)/2]$.

4. Определение значений параметров $Q(z)$ и γ по экспериментальным данным о поглощении

Использование изложенного выше алгоритма решения прямой задачи требует задания значений параметров $Q(z)$ и γ . При изучении диссипативных свойств реальной среды определяются не эти параметры, а коэффициент поглощения $\alpha_3(f, z)$ как функция частоты $f \in [f_H, f_B]$ и пространственной координаты z . Однако $Q(z)$ и γ можно найти по экспериментально определенному $\alpha_3(f, z)$, для чего в общем случае следует минимизировать по $Q(z)$ и γ следующий функционал:

$$\Phi(Q(z), \gamma, z) = \int_{f_H}^{f_B} |\alpha_T(f, Q(z), \gamma, z) - \alpha_3(f, z)|^2 df,$$

где [5]

$$\alpha_T(f, Q(z), \gamma, z) = \frac{2\pi f}{c_s(z)} \sqrt{\frac{\nu^2 + (1-\beta)^2 + \beta^2 \nu^2 - 1 - \nu^2 + \beta}{2[(1-\beta)^2 + \nu^2]}}.$$

Здесь $\nu = 2\pi f/\gamma$, $\beta = Q(z)/\gamma$.

В практически интересном случае линейной зависимости $\alpha_3(f, z)$

от частоты f можно предложить более простой способ отыскания значений $Q(z)$ и γ . Как показали численные расчеты (см. рис. 4.1), графики $\alpha_T(f, Q(z), \gamma, z) \cdot c_S(z)$ при $f \in [\gamma/25, \gamma/5]$ и $\beta \leq 0.05$ достаточно хорошо описываются линейной функцией вида $1.875 \cdot \beta (f - \gamma/40)$. Следовательно, если $\alpha_S(f, z) \approx k_S(z)(f - f_0)$ и $f_0 > 0$, то следует положить $\beta = k_S(z)c_S(z)/1.875$ $\gamma = 40 f_0$.

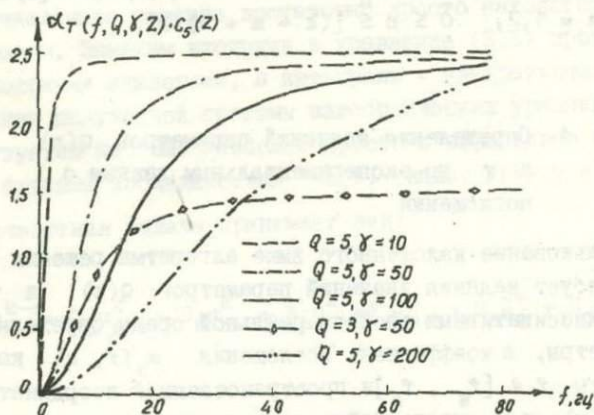


Рис. 4.1. Графики коэффициента поглощения в модели Больцмана с функцией последнего действия $h(t) = e^{-\gamma t}$

В вычислениях формы $g(\tau)$ падающих волн следует выбирать с таким расчетом, чтобы их энергия вне интервала $[f_H, f_B]$ аппроксимации экспериментальной зависимости $\alpha_S(f, z)$ теоретической была незначительной. Тогда, несмотря на возможные расхождения α_S и α_T вне интервала $[f_H, f_B]$ расчетное поле по описанному алгоритму будет близко к экспериментально наблюдаемому.

5. Результаты численных экспериментов

Проанализируем структуру волн, отраженных от полупространства с неидеально упругими свойствами. На рис. 5.1 приве-

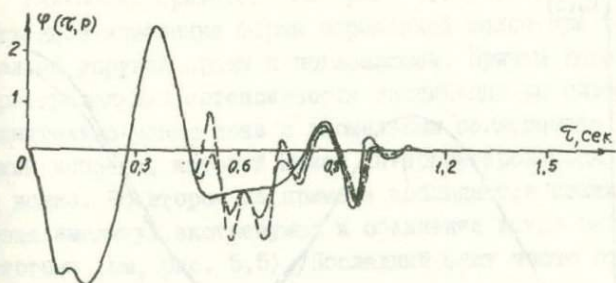


Рис. 5.1. Форма отраженной волны при разных уровнях поглощения в примере I.

дене суммотрассы отраженных волн для сложной среды, включающей аномально поглощающую зону. Задаваемые законы изменения скорости $c_s(z)$ и плотности $\rho(z)$ изображены сплошными линиями на рис. 5.2 и 5.3. Функция $Q(z)$ задавалась формулой: $Q(z) = \gamma \cdot \exp \{-0.01 / (0.01 - (z - 0.5)^2)\}$

при $z \in [0.5, 0.7]$ и $Q(z) = 0$ при $z \notin [0.5, 0.7]$.

Отраженная волна рассчитывалась при трех значениях параметра $\gamma = 0, 10, 20$.

Для следующего примера были использованы данные УЗК (см. рис. 5.4) в скважине Ледовая I-р. Так как информация о плотности пород отсутствует, мы взяли $\rho(z) = \text{const} = 2 \text{ г/см}^3$.

Скорость поперечных волн определялась по формуле $c_s(z) = c_p(z) / \sqrt{3}$, а параметр $k_s(z)$ - из предположения о линейной зависимости коэффициента поглощения в интервале от нуля до 25 кгц, т.е. $k_s(z) = \alpha_s (25 \text{ кгц}, z) / 25000$.

Во всех расчетах в качестве формы $g(\tau)$ падающей волны использован импульс вида $g(\tau) = A\tau e^{-\delta\tau} \sin 2\pi f_1\tau$,

$f_1 = 10 \text{ кгц}$, $\delta = 8\pi$, а параметр γ и угол падения принимали значения: $\gamma = 100$, $\theta = \pi/18$.

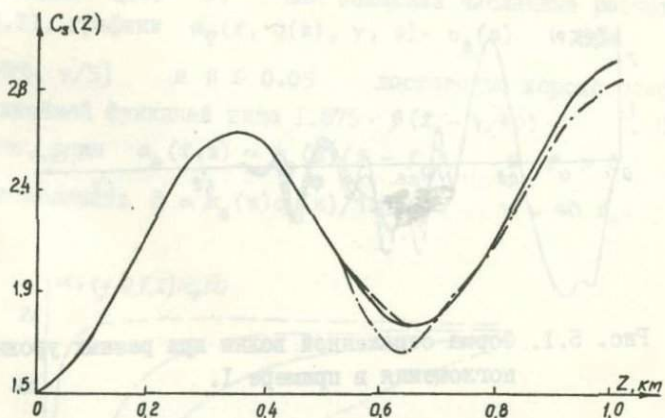


Рис. 5.2. Результаты восстановления скорости $c_s(z)$.

- задаваемая $c_s(z)$.
- - - - - восстановленная при $\gamma = 0$,
- · - · - · - при $\gamma = 20$

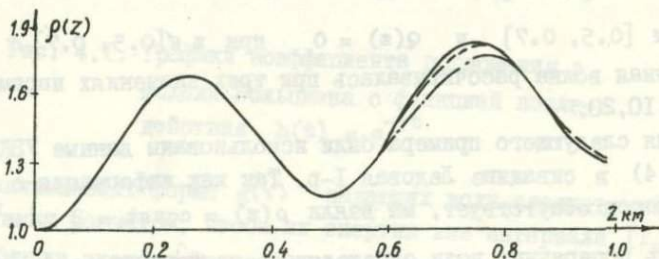


Рис. 5.3. Результаты восстановления плотности $\rho(z)$.

- задаваемая $\rho(z)$,
- - - - - восстановленная при $\gamma = 0$,
- · - · - · - при $\gamma = 20$

Для обоих примеров (см. рис. 5.1 и 5.5) характерно существенное изменение формы отраженной волны при переходе от идеально упругой среды к поглощающей. Причем характер зависит от распределения интенсивности диссипации по глубине. Так, сравнительно узкая зона с аномальным поглощением порождает резкий всплеск, который может интерпретироваться как отдельная волна. Во втором же примере наблюдается понижение общего уровня амплитуд экстремумов и обеднение конца записи высокими частотами (см. рис. 5.5). Последний факт часто отмечается в реальных экспериментах.

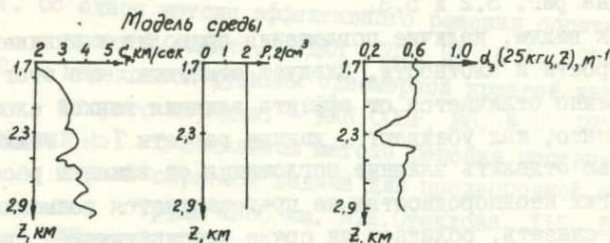


Рис. 5.4. Данные УЗК по скважине Ледовая I-p

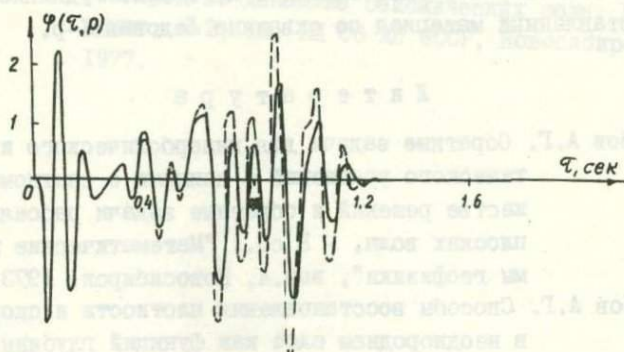


Рис. 5.5. Рассчитанные сейсмограммы отраженных волн для модели среды, изображенной на рис. 5.4

Наиболее отчетливо проявляет себя поглощение при попытке решения обратной динамической задачи в предположении об отсутствии диссипации [5]. Таким способом можно установить, какому разрезу с идеально упругими свойствами соответствуют волны, отраженные от неупругого полупространства. Для этого мы формально подставили построенные для двух углов ($\theta_1 = \pi/18$, $\theta_2 = \pi/36$) отраженные волны в алгоритм решения обратной задачи. Функции $\sigma(x_i, p_i)$, $i = 1, 2$, находились по методу, изложенному в работе [5], а скорость $c_s(z)$ определялась путем решения нелинейного уравнения (2.2). Результаты построения $c_s(z)$ и $\rho(z)$ для среды из первого примера при $\tau = 20$ отражены на рис. 5.2 и 5.3.

Как видим, наличие поглощения приводит к занижению значений скорости и плотности. Следует отметить, что этот эффект качественно отличается от эффекта влияния тонкой слоистости [5]. Однако, как убеждают данные расчеты (см. также [5]), полностью отделить влияние поглощения от влияния рассеяния на упругих неоднородностях не представляется возможным. Трудно даже сказать, обладает ли среда диссипативными свойствами (см. также [II]). Для ответа на этот вопрос требуется априорная информация о поведении скорости и плотности. О характере информации можно судить по рис. 5.2 и 5.3.

В заключение выражаем благодарность к.ф.-м.н. Меграбову А.Г. за постановку обратной задачи и к.г.-м.н. Рудницкой Д.И. за предоставленный материал по скважине Ледовая I-р.

Л и т е р а т у р а

1. Меграбов А.Г. Обратные задачи для гиперболического и эллиптического уравнений с данными о счетном множестве решений и обратные задачи рассеяния плоских волн. - В сб.: "Математические проблемы геофизики", вып.4, Новосибирск, 1973.
2. Меграбов А.Г. Способы восстановления плотности и скорости в неоднородном слое как функций глубины по семейству плоских волн, отраженных от слоя под различными углами. - В сб.: "Математические проблемы геофизики", вып.5, ч.2, Новосибирск, 1974.

3. Ратникова Л.Н. Методы расчета сейсмических волн в тонко-слоистых средах. М., "Наука", 1973.
4. Гогоненков Г.Н., Захаров Е.Т. Теоретические сейсмограммы в тонкослоистых поглощающих средах. "Изв. АН СССР, сер. Физика Земли", № 2, 1971.
5. Алексеев А.С., Добринский В.И. Некоторые вопросы практического использования обратных динамических задач сейсмики. - В сб.: "Математические проблемы геофизики", вып.6, ч.2, Новосибирск, 1975.
6. Крейн М.Г. Об обратных задачах для неоднородной струны. ДАН СССР, 82, № 5, 1952.
7. Крейн М.Г. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи. - ДАН СССР, 94, № 6, 1954.
8. Крейн М.Г. О переходной функции одномерной краевой задачи второго порядка. - ДАН СССР, 88, № 3, 1953.
9. Благовещенский А.С. О локальном методе решения нестационарной обратной задачи для неоднородной струны. - Труды МИАН им. В.А.Стеклова, 115, Л., "Наука", 1971.
10. Шемякин Е.И. Динамические задачи теории упругости и пластичности. - Курс лекций для студентов НГУ, Новосибирск, 1968.
11. Добринский В.И. Метод определения одномерных характеристик сред по динамике сейсмических волн. Препринт, № 2, 63, ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1977.

В. И. Добринский

ОБРАЩАЕМЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ РАСЧЕТА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ
РЕШЕНИЙ ДВУХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В работе [1] сформулирован общий подход к построению численных алгоритмов решений обратных динамических задач сейсмики. Идея заключается в обращении разностных схем, используемых для решения соответствующих прямых задач. В настоящее время намечились два разных способа реализации этой идеи. В первом идея обращения используется наиболее полно, т.е. весь процесс решения связан только с обращением разностной схемы (см., например, работу [2]). Однако в практических вычислениях более широкое применение нашел второй способ, когда решение строится в два приема (см. [1,3] и др.).

Первый заключается в приведении исходной информации к ситуации с идеальным источником и регистрирующим трактом путем решения интегрального уравнения Вольтерра первого рода типа свертки, что эквивалентно определению значений фундаментального решения прямой задачи в точках (поверхностях) наблюдений. Затем, на втором этапе, используется идея обращения

разностной схемы. Ясно, что для этого пригодны только такие схемы, которые приспособлены для расчетов фундаментальных (обобщенных) решений.

В предлагаемой работе построены для двух задач именно такие разностные схемы. Используемый метод конструирования схем обладает большой общностью.

1⁰. Пусть функция $u_+(x, t)$, $0 \leq x < \infty$, $-\infty < t < +\infty$, является решением следующей задачи:

$$u_{+xx} + K_+(x)u_{+x} = u_{+tt}, \quad (1.1)$$

$$u_{+x} \Big|_{x=0} = \delta(t), u_{+} \Big|_{t=0} = 0, \quad (1.2)$$

где $K_+(x) \in C^2[0, \infty)$, $K_+(0) = 0$.

Продолжим функцию $u_+(x, t)$ в область $x < 0$ четным образом. Полученная таким способом четная функция $u(x, t)$, как легко увидеть, будет решением задачи Коши:

$$u_{xx} + K(x)u_x = u_{tt}, \quad (1.3)$$

$$u_t \Big|_{t=0} = -2\delta(x), u \Big|_{t=0} = 0, \quad (1.4)$$

где $K(x) = K_+(x)$ при $x > 0$ и $K(x) = -K_+(-x)$ при $x < 0$.

Применим к задаче (1.3), (1.4) формулу [4], которая дает решение задачи Коши для уравнения: $u_{tt} = u_{xx} + f(x, t)$.

Получим соотношение

$$u(x, t) = -\varepsilon(t - |x|) + \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x, t)} K(\xi) u_{\xi}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (1.5)$$

которое можно рассматривать как уравнение относительно функции $u(x, t)$. В (1.5) область $\Delta(x, t) = \{(\xi, \tau): 0 \leq \tau \leq t - |x - \xi|\}$.

Интегрированием по частям из (1.5) получаем интеграль-

ное уравнение Вольтерра второго рода:

$$u(x, t) = -\varepsilon(t - |x|) + \frac{1}{2} \int_0^t [K(x+t-\tau)u(x+t-\tau, \tau) - K(x-t+\tau)u(x-t+\tau, \tau)] d\tau - \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\tau-x-t}^{x+t-\tau} \frac{dK(\xi)}{d\xi} u(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (1.6)$$

$$u(x, t) \equiv 0 \text{ при } t < |x|.$$

Используя метод последовательных приближений, можно показать существование решения уравнения (1.6) в классе дважды непрерывно дифференцируемых при $t > |x|$ функций и его единственность.

2^o. Построим численный метод нахождения решений уравнения (1.6) и докажем сходимость приближенного (численного) решения к точному. Идея метода в целом не нова и заключается в замене интеграла квадратурной формулой и последующем решении полученной системы алгебраических уравнений.

Покроем область $t > |x|$ сеткой специального вида (см. рис. 1.1) и обозначим через \bar{u}_n^k значения поля в узлах сетки: $\bar{u}_n^k = u((k-n)h, (k+n)h)$, $k \geq 0$, $n \geq 0$.

Заменяя интегралы, входящие в уравнение (1.6), по формуле прямоугольников, а производную $\frac{dK(\xi)}{d\xi}$ — центральной разностью,

получим систему алгебраических уравнений:

$$\bar{u}_n^k = -1 + \sum_{i=0}^{n-1} \bar{u}_i^k q_{k-i-1} - \sum_{j=0}^{k-1} \bar{u}_n^j q_{j-n+1} - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} \bar{u}_i^j [q_{j+1-i} - q_{j-1-i}] + r_n^k, \quad (1.7)$$

где $n \geq 0$, $k \geq 0$, $q_n = \frac{1}{2} hK(nh)$, $r_n^k = O(h)$.

Уравнениям (1.7) удовлетворяет точное решение задачи (1.3),

(I.4). Отбрасывая неизвестный остаток r_n^k , получаем уравнения для u_n^k - приближенных значений \bar{u}_n^k .

У т в е р ж д е н и е I.I. Приближенное решение $\{u_n^k\}_{n,k=0}^\infty$ сходится при $h \rightarrow 0$ к решению $u(x, t)$ уравнения (I.6).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Определим погрешность $\epsilon_n^k = \bar{u}_n^k - u_n^k$, которая, очевидно, является решением системы уравнений

$$\epsilon_n^k = \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon_i^k q_{k-i-1} - \sum_{j=0}^{k-1} \epsilon_n^j q_{j-n+1} - \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} \epsilon_i^j [q_{j+1-i} - q_{j-1-i}] + r_n^k. \quad (1.8)$$

Пусть в (I.8) $0 \leq k \leq k_0$, $0 \leq n \leq n_0$, а n_0 и k_0 определены из условий: $2k_0 h = t_0 + x_0 = T_0$, $2n_0 h = t_0 - x_0 = T_1$.

Пусть также $|K(x)| \leq 4c_0$, $|K'(x)| \leq 2c_1$ при $0 \leq x \leq \frac{1}{2} \max(T_0, T_1)$, $c_0 = \text{const}$, $c_1 = \text{const}$, и $|r_n^k| \leq r$, $r = O(h)$.

Тогда из (I.8) легко получается неравенство

$$|\epsilon_n^k| < 2hc_0 \sum_{i=0}^{n-1} |\epsilon_i^k| + 2hc_0 \sum_{j=0}^{k-1} |\epsilon_n^j| + 2h^2 c_1 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} |\epsilon_i^j| + r. \quad (1.9)$$

В частности, при $n = 0$:

$$|\epsilon_0^k| < 2hc_0 \sum_{j=0}^{k-1} |\epsilon_0^j| + r, \quad 1 \leq k \leq k_0.$$

Пользуясь рассуждениями, приведенными на стр. 258-261 книги [5], получаем оценку

$$|\epsilon_0^k| < r \left[(1 + 2hc_0)^{\frac{1}{2hc_0}} \right]^{2hc_0 k_0} < r \cdot \exp(c_0 T_0). \quad (1.10)$$

Введем некоторую последовательность $\{E_n\}_{n=0}^{n_0}$, элементы которой обладают свойством: $E_n > \max_{0 \leq j \leq k_0} |\epsilon_n^j|$, $0 \leq n \leq n_0$. Положим $E_0 = r \cdot \exp(c_0 T_0)$, а остальные члены E_n , $1 \leq n \leq n_0$, определим ниже.

Неравенству (I.9) теперь можно придать следующий вид:

$$|\epsilon_n^k| < h(2c_0 + c_1 T_0) \sum_{i=0}^{n-1} E_i + 2hc_0 \sum_{j=0}^{k-1} |\epsilon_n^j| + r,$$

где $1 \leq n \leq n_0$, $1 \leq k \leq k_0$, $|\epsilon_n^0| < E_0$.

Рассуждая так же, как и при доказательстве неравенства (I.10), получим

$$|\epsilon_n^k| < [r + 2hc_0 E_0 + h(2c_0 + c_1 T_0) \sum_{i=0}^{n-1} E_i] \exp(c_0 T_0).$$

Правую часть данного неравенства положим равной E_n . Ясно, что при всех n , $0 \leq n \leq n_0$, $\max_{0 \leq j \leq k_0} |\epsilon_n^j| < E_n$.

Применим цитированные рассуждения из книги [5] к полученной связи членов последовательности $\{E_n\}_{n=0}^{n_0}$. Это дает

$$E_n < r(1 + b_0) \exp(c_0 T_0 + b_1 T_1),$$

где

$$b_0 = h(4c_0 + c_1 T_0) \exp(c_0 T_0), \quad b_1 = (2c_0 + c_1 T_0) \exp(c_0 T_0).$$

Следовательно,

$$|u(x_0, t_0) - u_{n_0}^{k_0}| < r(1 + b_0) \exp(c_0 T_0 + b_1 T_1).$$

Так как $r = O(h)$, то правая часть этого неравенства стре-

мится к нулю при $h \rightarrow 0$. Тем самым сходимость приближенного решения к точному доказана.

3°. Для практического определения приближенного решения $\{u_n^k\}_{n,k=0}^\infty$ полезно использовать

У т в е р ж д е н и е I.2. Последовательность $\{u_n^k\}_{n,k=0}^\infty$ удовлетворяет системе алгебраических уравнений

$$u_n^k + u_{n-1}^{k-1} = (1 + q_{k-n})u_{n-1}^k + (1 - q_{k-n})u_n^{k-1}, \quad k, n \geq 1, \quad (1.11)$$

$$u_0^k = (1 - q_k)u_0^{k-1}, \quad k \geq 1, \quad u_n^0 = (1 - q_n)u_{n-1}^0, \quad n \geq 1, \quad u_0^0 = 1. \quad (1.12)$$

Докажем выполнение равенств (I.II). Из (I.7) легко получаем, что

$$u_n^k - u_{n-1}^k = u_{n-1}^k q_{k-n} + \sum_{j=0}^{k-1} [u_{n-1}^j q_{j-n} - u_n^j q_{j+1-n}].$$

Отсюда

$$(u_n^k - u_{n-1}^k) - (u_n^{k-1} - u_{n-1}^{k-1}) = u_{n-1}^k q_{k-n} - u_n^{k-1} q_{k-n},$$

что является другой записью соотношения (I.II). Справедливость равенств (I.I2) показывается просто.

В качестве следствия доказанного утверждения мы получаем эффективный способ построения $\{u_n^k\}_{n,k=0}^\infty$. Он состоит в следующем. Пусть нам, к примеру, требуется определить $u_{n_0}^{k_0}$. Для этого мы сначала находим u_0^k , $1 \leq k \leq k_0$, и u_n^0 , $1 \leq n \leq n_0$, по формулам (I.I2), а затем последовательно, переходя от слоя к слою, по явной формуле (I.II) находим u_1^k при всех k , $1 \leq k \leq k_0$, u_2^k при $1 \leq k \leq k_0$ и т.д. На

последнем шаге строится $u_{n_0}^k$, $1 \leq k \leq k_0$.

4°. Система равенств (I.II) по виду напоминает разностную схему. Покажем, что это так и есть.

Пусть область $t > |x|$ покрыта сеткой указанного выше вида (см. рис. I.I). Заменим в точках, являющихся центром полученных квадратов, производные из уравнения (I.3) их разностными отношениями. К примеру, в точке E (см. рис. I.I) получим

$$\frac{u(A) - 2u(E) + u(C)}{h^2} = \frac{u(B) - 2u(E) + u(D)}{h^2} + K(x_E) \frac{u(B) - u(D)}{2h}.$$

Отсюда

$$u(A) + u(C) = \left(1 + \frac{h}{2} K(x_E)\right)u(B) + \left(1 - \frac{h}{2} K(x_E)\right)u(D),$$

а это как раз есть уравнение (I.II).

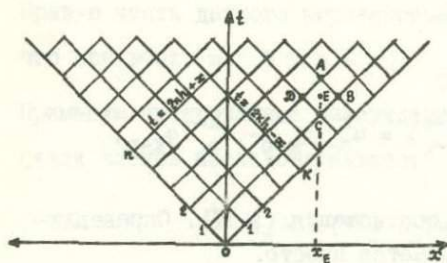


Рис. I.I.

Равенство (I.I2) получается, если записать разностную схему для точек, расположенных на прямых $t = |x| - h$, и использовать равенство нулю $u(x, t)$ при $t < |x|$.

Сходимость разностного решения к точному при $h \rightarrow 0$ является следствием утверждения I.I. Устойчивость показывается также прос-

то исходя из эквивалентности разностной задачи (I.II), (I.I2) системе (I.7).

5°. Разностную задачу, соответствующую задаче (I.I), (I.2), можно получить из системы (I.II), (I.I2). Для этого запишем (I.II) при $n = k$. Получим

$$u_k^k + u_{k-1}^{k-1} = 2u_{k-1}^k, \quad k \geq 1, \quad (1.13)$$

так как $u_{k-1}^k = u_k^{k-1}$ и $q_0 = 0$.

Легко заметить, что соотношение (I.I3) аппроксимирует при $t > 0$ граничное условие (I.2).

Используя систему (I.II) при $k > n$, первое из равенств (I.I2) и условие (I.I3), мы найдем разностное решение задачи (I.I), (I.2).

Покажем, что система уравнений (I.II)-(I.I3) обладает свойством обращения, т.е. если зададим u_k^k , $k \geq 1$, то из этой системы сможем найти $\{q_n\}_{n=1}^\infty$.

Пусть q_i , $0 \leq i \leq k-1$ уже определены, следовательно, известны u_i^{k-1} , $0 \leq i \leq k-1$. Из формулы (I.I3) находим u_{k-1}^k , а затем, используя (I.II), последовательно определяем u_i^k , $0 \leq i \leq k-2$. Так как u_0^k найдено, а u_0^{k-1} известно, то $q_k = (u_0^{k-1} - u_0^k)/u_0^{k-1}$ согласно первому из равенств (I.I2).

З а м е ч а н и е . Описанный выше разностный метод решения задачи (I.I), (I.2) совпадает с известным алгоритмом Баранова-Кюнэтца [6], построенным ими из некоторых физических соображений. В работе [7] Кюнэтом изучен также ряд вопросов, связанных с обращением этого алгоритма.

II

Рассмотрим задачу:

$$u_{+xx} + p_+(x)u_+ = u_{+tt}, \quad 0 \leq x < \infty, \quad (2.1)$$

$$u_{+x} \Big|_{x=0} = \delta(t), \quad u_+ \Big|_{t < 0} = 0, \quad (2.2)$$

где

$$p_+(x) \in C^1[0, \infty).$$

Четное продолжение $u_+(x, t)$ в область $x < 0$ является решением задачи

$$u_{xx} + p(x)u = u_{tt}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2.3)$$

$$u_t \Big|_{t=0} = -2\delta(x), \quad u \Big|_{t=0} = 0, \quad (2.4)$$

где

$$p(x) = p_+(|x|), \quad u(x, t) = u_+(|x|, t) \quad \text{при} \quad -\infty < x < +\infty.$$

Решение задачи (2.3), (2.4) эквивалентно нахождению решения интегрального уравнения [4]

$$u(x, t) = -\varepsilon(t-|x|) + \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x, t)} p(\xi)u(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (2.5)$$

Заменим интеграл в (2.5) квадратурной формулой на введенной выше сетке. К примеру, интеграл по квадрату ABCD (см. рис. I.1) запишем в виде

$$\frac{1}{2} \iint_{ABCD} p(\xi)u(\xi, \tau) d\xi d\tau = \frac{1}{2} (\sqrt{2} h)^2 p(x_E) \frac{u(B) + u(D)}{2} + O(h^4).$$

Тогда получим систему равенств

$$\bar{u}_n^k = -1 + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{k-1} q_{j-1} (\bar{u}_{i+1}^j + \bar{u}_i^{j+1}) + r_n^k, \quad n, k > 0, \quad (2.6)$$

где

$$q_k = h^2 p_k / 2, \quad p_k = p(kh), \quad -\infty < k < +\infty, \quad \bar{u}_n^k = u((k-n)h,$$

$$(k+n)h), \quad r_n^k = O(h^2), \quad n \geq 0, \quad k \geq 0.$$

Причем $\bar{u}_0^k = -1$, $r_0^k = 0$, при $k \geq 0$ и $\bar{u}_n^0 = -1$,

$r_n^0 = 0$ при $n \geq 0$.

Определим последовательность $\{\bar{u}_n^k\}_{n, k=0}^{\infty}$ как решение сис-

темы уравнений (2.6) без члена $r \frac{k}{n}$.

Сформулируем ряд утверждений без доказательств, так как они (доказательства) аналогичны приведенным в разделе I.

У т в е р ж д е н и е 2.1. Справедлива оценка

$$|u(x_0, t_0) - u_{n_0}^{k_0}| < r \cdot \exp(c_2 + c \frac{T_0 T_1}{4} e^{c_2}),$$

где n_0, k_0, T_0, T_1 определены в первом разделе, а $c_2 = \frac{hc_0 T_0}{4}$, $c \geq \max |p(x)|$ при $0 \leq x \leq \frac{1}{2} \max(T_0, T_1)$, $r = O(h^2)$.

У т в е р ж д е н и е 2.2. Последовательность

$\{u_n^k\}_{n,k=0}^\infty$ удовлетворяет системе алгебраических уравнений

$$u_n^k + u_{n-1}^{k-1} = (1 + q_{k-n})(u_{n-1}^k + u_n^{k-1}), \quad n, k > 0, \quad (2.7)$$

$$u_0^k = -1, \quad k \geq 0, \quad u_n^0 = -1, \quad n \geq 0.$$

З а м е ч а н и е 2.1. Первое из равенств (2.7) является разностной схемой для уравнения (2.3).

З а м е ч а н и е 2.2. Система уравнений

$$u_n^k + u_{n-1}^{k-1} = (1 + q_{k-n})(u_{n-1}^k + u_n^{k-1}), \quad k > 0, \quad n > 0, \quad (2.8)$$

$$u_0^k = -1, \quad k \geq 0, \quad u_k^k + u_{k-1}^{k-1} = 2(1 + q_0)u_{k-1}^k, \quad k \geq 1,$$

дает устойчивое и сходящееся разностное решение задачи (2.1), (2.2).

У т в е р ж д е н и е 2.3. Если задано $\{u_k^k\}_{k=1}^\infty$,

то система уравнений (2.8) разрешается относительно $\{u_n^k\}_{n=0}^\infty$.

У т в е р ж д е н и е 2.4. Имеет место равенство

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{u_n^k - u_{n-1}^{k-1}}{2h} + O(h),$$

где

$$t + x = 2kh, \quad t - x = 2nh, \quad n > 0, \quad k > 0, \quad t > |x|.$$

Это утверждение является следствием утверждения 2.1.

Утверждение 2.5. Последовательность $\{w_n^k\}_{k \geq n, n \geq 0}$, где $w_n^k = (u_n^k - u_{n-1}^{k-1})/2h$, $k \geq n$, $n \geq 1$, $w_0^k = -1/2h$, $k \geq 0$, является решением системы уравнений:

$$w_n^k + w_{n-1}^{k-1} = (1 + q_{k-n})(w_{n-1}^k + w_n^{k-1}), \quad k > n, \quad n > 0, \quad (2.9)$$

$$w_0^k = -1/2h, \quad k \geq 0, \quad w_k^k + w_{k-1}^{k-1}(1 + \delta_{k-1}) = 2(1 + q_0)w_{k-1}^k, \quad k \geq 1,$$

где $\delta_k = 1$ при $k = 0$ и $\delta_k = 0$ при $k > 0$.

Справедливость утверждения проверяется просто.

Замечание 2.3. Система уравнений (2.9) определяет разностное решение задачи

$$u_{+xx} + p_+(x)u_+ = u_{+tt}, \quad 0 \leq x < \infty,$$

$$u_{+x}|_{x=0} = \delta^*(t), \quad u_+|_{t < 0} = 0.$$

Сходимость разностного решения является следствием утверждения 2.4.

Утверждение 2.6. Если задано $\{w_k^k\}_{k=1}^{\infty}$, то система уравнений (2.9) разрешается относительно $\{q_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Л и т е р а т у р а

1. Алексеев А.С. Обратные динамические задачи сейсмологии. - В сб.: "Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных", М., "Наука", 1967.

2. Антоненко О.Ф. Обращение одной разностной схемы для решения одномерной динамической задачи сейсмоки. - В сб.: "Некоторые методы и алгоритмы интерпретации геофизических данных". М., "Наука", 1967.
3. Алексеев А.С., Добринский В.И., Непрочнов Ю.П., Семенов Г.А. К вопросу о практическом использовании теории обратных динамических задач сейсмоки. - Доклады АН СССР, 220, № 5, 1976.
4. Романов В.Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений. - Спецкурс для студентов НГУ, НГУ, Новосибирск, 1973.
5. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырний П.И. Вычислительные методы. т.2, М., "Наука", 1977.
6. Баранов В., Кунетц Г. Синтетические сейсмограммы с многократными отражениями. - В сб.: "Проблемы сейсмической разведки". Гостоптехиздат, 1962.
7. Kunetz G. Sur certaines proprietes d'une onde acoustique plane de compression dans un milieu stratifie - "Ann. de geophys"., 18, N4, 1962.

В.Р.Кирейтов

О СВЯЗИ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ТЕЛА ПО ЕГО
ИЗОБРАЖЕНИЯМ С ОДНОЙ ЗАДАЧЕЙ ЛИНЕЙНОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ
ГЕОМЕТРИИ

В в е д е н и е

Цель статьи — показать в простейшем случае взаимосвязь задачи определения оптического тела (объёма, поверхности, линии) по его изображениям (задача D) с одной задачей интегральной геометрии, состоящей в определении функции по известным интегралам от неё (с весом) вдоль кривых заданного семейства кривых (задача G). Именно доказывается, что задача G равносильна некоторой задаче типа D , в которой используемые проекционные схемы являются b -образными, искомая функция плотности (яркости) является обычной функцией и допускается к рассмотрению бесконечное количество изображений; при этом фильтрации проекционных схем задачи D связаны простой формулой с весовой функцией задачи G . В остальном же задачу D можно считать обобщением задачи G , поскольку в рамках задачи D , например, возможно и естественно рассмотрение (иско-

мых) обобщенных функций (в фотометрических задачах обобщенные функции плотности с необходимостью возникают при описании светящихся точек, линий, поверхностей). В настоящей работе мы, для наглядности, ограничимся простейшим случаем, когда семейство кривых задачи G представляет собой семейство прямых линий, что соответствует в задаче D рассмотрению светящихся объектов в однородной оптической среде (например, вакууме).

В работе используется ряд определений, обозначений и результатов статей [1], [3], [4]. Символом E^3 обозначается трехмерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle x, y \rangle$ и нормой $|x|$ векторов $x, y \in E^3$.

Под обобщенной функцией (в трехмерном пространстве, на плоскости) понимается обобщенная функция на пространстве D основных бесконечно-дифференцируемых функций с компактным носителем; если f - обобщенная, а φ - основная функции, то (f, φ) - значение f на φ .

Плотностью в пространстве E^3 назовем обобщенную функцию с компактным носителем. Относительно проекционных схем (п.с.) (см. [1 - 2]).

Напомним, что в [1] п.с. $\mathcal{F} = \{q, \mathcal{E}, w, F\}$ называется δ -образной, если $F(x, w) = b(x)\delta(w - \mathcal{F}(x)) = \frac{c(x)}{|q-x|^2} \delta(w - \mathcal{F}(x))$, где $\mathcal{F}(x) = q - d \frac{x - q}{\langle x - q, n_{\mathcal{F}} \rangle}$ - геометрическое изображение точки $x \in \mathcal{F}_+$, δ - δ -функция Дирака на экране \mathcal{E} . Простейшие математические модели механизма формирования изображения в оптических приборах приводят к следующим значениям весовой функции (с точностью до постоянного множителя):

$$c(x) = 1, \quad c(x) = \frac{1}{\cos^3 \eta(x)}, \quad c(x) = |x - q|, \quad c(x) = e^{k|x - q|},$$

где $\eta(x)$ - угол между векторами $x - q$ и $n_{\mathcal{F}}$, k - вещественное число.

Если $\mathcal{F} = \{q, \mathcal{E}, w, F\}$ - п.с. и μ - некоторая плотность, носитель которой $\text{supp } \mu \subseteq \mathcal{F}_+$, то \mathcal{F} -изображением плотности μ назовем обобщенную функцию $\mathcal{F}_{\mathcal{F}}(w)$ на экране \mathcal{E} п.с. \mathcal{F} , определяемую формулой

$$(\mathcal{F}_{\mathcal{F}}(w), \varphi(w)) = (\mu(x), (F(x, w), \varphi(w)))$$

Для всякой основной функции $\varphi(w)$ на экране \mathcal{E} .

З а м е ч а н и е I. Если μ сосредоточена на гладкой поверхности S и $\mu(x) = \sigma(x) \delta_S$, где $\sigma(x)$ - соответствующая функции μ поверхностная плотность ($\delta_S - \delta$ - функция поверхности S), то

$$\mathcal{J}_{\mathcal{F}}(w) = \int_S \sigma(x) F(x, w) dS_x.$$

Предполагая, что $q \in \text{int}(\omega(\text{supp } \mu))$ (см. [3]), и переписав последнее выражение в виде

$$\mathcal{J}_{\mathcal{F}}(w) = \int_S \left(\frac{\sigma(x)}{\cos \Psi(x)} \right) \cos \Psi(x) F(x, w) dS_x,$$

где $\Psi(x)$ - угол между нормалью n_x к поверхности S в точке x и вектором $\frac{q-x}{|q-x|}$, видим, что $\mathcal{J}_{\mathcal{F}}(w)$ можно считать \mathcal{F} -изображением оптической поверхности (S, A) (в смысле работы [1]), яркость которой $A(x, \cos \Psi) = \frac{\sigma(x)}{\cos \Psi(x)}$.

Сформулируем задачу определения плотности по её изображениям (задача D).

Пусть заданы семейство $\{\mathcal{F}^j\}_{j \in J}$ п.с. $\mathcal{F}^j = \{q^j, \mathcal{E}^j, w^j, F^j\}$, семейство $\{\mathcal{J}_{\mathcal{F}^j}\}_{j \in J}$ \mathcal{F}^j -изображений некоторой плотности μ и некоторое (возможно, пустое) подмножество $X \subseteq \text{supp } \mu$. По перечисленным данным требуется определить плотность μ . Предполагается, что $\text{supp } \mu \subseteq \mathcal{F}^j_+$ и функция $\mathcal{J}_{\mathcal{F}^j}(w)$ известна для $w \in w^j$ при всех значениях $j \in J$.

Задача D является формализацией одного класса задач инструментальной фотометрии; в таких задачах информация о светящемся оптическом объекте представлена в виде показаний тех или иных оптических приборов (спектрографов, интерферометров, фотоаппаратов и т.д.) и требуется на основании этих данных сделать заключение о строении (геометрические параметры, спектральный состав) исходного объекта. В указанной постановке задачи D плотность μ соответствует яркости оптического тела, п.с. - прибору типа фотоаппарата. Заметим, что в прикладном аспекте задачи семейство заданных п.с. и изображений может быть только конечным.

Напомним постановку одной задачи линейной интегральной геометрии, приведенной в [4] (задача G).

Пусть Ω — гладкая замкнутая ограниченная область в E^3 , $\Omega_h = \{x \in E^3 | R(x, \Omega) \leq h\}$ и $u(\xi)$ — некоторая (обычная) функция, носитель которой $\text{supp } u \subseteq \Omega$. Пусть заданы семейство $\Gamma = \{\Gamma(x, v)\}$ кривых $\Gamma(x, v)$, весовая функция $\rho(x, v, \xi)$ и семейство $I = \{I(x, v)\}$ интегралов $I(x, v) = \int_{\Gamma(x, v)} \rho(x, v, \xi) u(\xi) d\xi$, определенных для всех $x, \xi \in \Omega_h$ и каждого единичного вектора v . Требуется по перечисленным данным определить функцию u .

В работе [4] на кривые семейства Γ , весовую функцию ρ и функцию u наложены определенные ограничения, которые мы для простоты предполагаем выполненными и в настоящей статье.

Рассмотрим частный случай задачи G. Именно, предположим, что область Ω выпукла, семейство $\Gamma = \{\Gamma(x, v)\}$ состоит из прямых линий вида $\Gamma(x, v)(x) = x + tv$, а весовая функция $\rho(x, v, \xi)$ удовлетворяет соотношениям:

$$\rho(x + tv, v, \xi) = \rho(x, v, \xi),$$

$\rho(x, -v, \xi) = \rho(x, v, \xi)$ для всех значений $t \in R^1$, $x, \xi \in \Omega_h$ и для каждого направления v , удовлетворяющих условию $x + tv \in \Omega_h$. В этом случае функция $I(x, v) = \int_{\Gamma(x, v)} \rho(x, v, \xi) u(\xi) d\xi$ переменных x, v обладает свойствами: $I(x + tv, v) = I(x, v)$, $I(x, -v) = I(x, v)$ для всех значений $t \in R^1$, $x, \xi \in \Omega_h$ и каждого направления v , удовлетворяющих условию $x + tv \in \Omega_h$.

Семейство $I = \{I(x, v)\}$ интегралов $I(x, v)$ сводится теперь к семейству $I' = \{I(q, v)\}$ интегралов $I(q, v)$, где q пробегает множество $\partial\Omega_h$, а единичный вектор v всегда направлен из точки q внутрь области Ω_h (так как $I(x, v) = I(q, \pm v)$, где q — какая-либо из точек пересечения прямой $x + tv$ с границей $\partial\Omega_h$).

Покажем, что в этом частном случае задача G эквивалентна некоторой задаче типа D.

Зададимся некоторой положительной функцией $d(q)$ на множестве $\partial\Omega_h$ и для каждой точки $q \in \partial\Omega_h$ определим п.с.

$\mathcal{F}^q = \{q, \mathcal{E}^q, w^q, F^q\}$ условиями:

- а) объективом п.с. \mathcal{F}^q является точка q ;
- в) экран \mathcal{E}^q параллелен касательной плоскости к поверхности $\partial\Omega_h$ в точке q и находится на расстоянии $d(q)$ от точки q ;
- с) нормаль $n_{\mathcal{F}^q}$ п.с. \mathcal{F}^q является нормальным вектором к поверхности $\partial\Omega_h$ в точке q и направлена внутрь области Ω_h ;
- д) $w^q \in \mathcal{F}^q(\Omega)$, $\mathcal{F}^q(x) = q - d(q) \frac{q - x}{\langle q - x, n_{\mathcal{F}^q} \rangle}$ - геометрическая проекция, соответствующая п.с. \mathcal{F}^q ;
- е) $F^q(x, w) = b^q(x) \delta(w - \mathcal{F}^q(x))$,

где

$$b^q(x) = \rho(q, \frac{x - q}{|x - q|}, x) \frac{d^2(q)}{|q - x|^2 \cos^2 \eta^q(x)}, \quad \eta^q(x) -$$

угол между векторами $x - q$ и $n_{\mathcal{F}^q}$, $x \in \text{int } \Omega_h$,

$w \in \mathcal{E}$.

Пусть плотность u является обычной функцией, носитель которой $\text{supp } u \subseteq \Omega$, q - произвольная точка поверхности $\partial\Omega_h$ и пусть $\mathcal{J}_{\mathcal{F}^q}(w)$ - \mathcal{F}^q -изображение плотности u с помощью определенной выше п.с. \mathcal{F}^q .

У т в е р ж д е н и е I. $\mathcal{J}_{\mathcal{F}^q}(w) = I(q, \frac{q - w}{|q - w|})$

для каждой точки $w \in \mathcal{E}^q$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Достаточно показать, что

$$\iint_{\mathcal{E}} \mathcal{J}_{\mathcal{F}^q}(w) \phi(w) dw = \iint_{\mathcal{E}} I(q, \frac{q - w}{|q - w|}) \phi(w) dw$$

для каждой основной функции $\phi(w)$ на экране \mathcal{E} .

Для интеграла справа имеем выражение

$$\int_{\xi} \int I(q, \frac{q-w}{|q-w|}) \varphi(w) dw = \int_{\xi} \left(\int u(\xi) \rho(q, \frac{q-w}{|q-w|}, \xi) \varphi(w) d\xi \right) dw.$$

$$\Gamma(q, \frac{q-w}{|q-w|})$$

Интеграл в левой части доказываемого равенства приводится к виду

$$\int_{\xi} \int \int \mathcal{G}^q(w) \varphi(w) dw = (u(x), (F^q(x, w), \varphi(w))) = (u(x),$$

$$b(x) \varphi(\mathcal{G}^q(x))) = \int_{\Omega} \int \int u(x) \rho(q, \frac{x-q}{|q-x|}, x) \frac{d^2(q)}{|q-x|^2 \cos^3 \eta(x)} \varphi(\mathcal{G}^q(x)) dx.$$

Определяя на экране ξ^q прямоугольную систему координат w^1, w^2 , произведем в последнем интеграле замену переменных $w = \mathcal{G}^q(x)$, $l = |q - x|$, якобиан которой

$$D \left(\begin{matrix} x, y, z \\ w_1, w_2, l \end{matrix} \right) = \pm \frac{|q - x|^2 \cos^3 \eta^q(x)}{d^2(q)}.$$

Нетрудно заметить, что указанная замена переменных допустима в нашем случае и рассматриваемый интеграл приводится к виду

$$\int_{\xi} \left(\int_{L(q, \frac{q-w}{|q-w|})} u(\xi) \rho(q, \frac{q-w}{|q-w|}, \xi) d\xi \right) \varphi(w) dw,$$

где $L(q, \frac{q-w}{|q-w|})$ - прямая линия, проходящая через точку

ку q в направлении вектора $\frac{q-w}{|q-w|}$.

Утверждение доказано.

Таким образом, задача определения функции u по заданному семейству интегралов $I = \{I(x, v)\}$ равносильна задаче нахождения плотности u по заданному семейству $J = \{J_{\mathcal{G}^q}(w)\}$ ее \mathcal{G}^q - изображений, соответствующего семейству $\{\mathcal{G}^q\}_{q \in \Omega_n}$

п.с. \mathcal{G}^q определенного выше типа.

З а м е ч а н и е 2. Используя общее понятие п.с. в смысле статьи [1] и допуская, дополнительно, зависимость фильтрации F п.с. от вещественного параметра t (т.е. $F = F(x, w, t)$ в обозначениях работы [1]), можно показать, что задача G в полном ее объеме (при сохранении лишь некоторых условий, налагаемых на объекты ρ, I, F, u в статье [4]) эквивалента некоторой задаче типа D .

З а м е ч а н и е 3. Задача D , совпадая по существу с задачей G , если только речь идет об отыскании обычной функции плотности и принимаются к рассмотрению бесконечные семейства изображений, допускает содержательные постановки, в которых предполагается заданным лишь конечное (два, три, ...) число изображений некоторой обобщенной функции плотности; кроме этого имеют смысл постановки, в которых искомым является не сама плотность, а некоторые ее характеристики (например, параметры носителя плотности, масса $\int \mu dv$, характеристики изменения μ в области задания и т.д.).

З а м е ч а н и е 4. Установленная связь задач D и G в классе обычных (искомых) функций позволяет воспользоваться результатами ряда авторов по решению задачи G (см., например, [4], [5]), простая переформулировка которых приводит к соответствующим решениям задачи D .

Л и т е р а т у р а

1. Лаврентьев М.М., Кирейтов В.Р. О точках ветвления оптических гиперповерхностей // ДАН СССР, т.221, № 5, 1974.
2. Кирейтов В.Р. О задаче определения оптической поверхности по ее изображениям. Функциональный анализ и его приложения, т.10, вып.3, 1976.

3. Кирейтов В.Р. О некоторых свойствах $n-1$ -мерных поверхностей в n -мерном пространстве. В сб.: "Математические проблемы геофизики", вып.5, ч.1, Новосибирск, 1975.
4. Бухгейм А.Л. Нормальная разрешимость некоторых специальных операторных уравнений первого рода. В сб.: "Математические проблемы геофизики", вып.6, ч. I, Новосибирск, 1975.
5. Мухометов Р.Г. О задаче интегральной геометрии. В сб.: "Математические проблемы геофизики", вып.6, ч.2, Новосибирск, 1975.

М.М.Лаврентьев, Б.М.Пушной, В.В.Гейдт, Г.А.Ивченко,
В.Р.Кирейтов, Г.П.Чейдо

ЛАБОРАТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ ПО АВТОМАТИЗИРОВАННОМУ ВОССТАНОВЛЕНИЮ РЕЛЬЕФА ПО ЕГО ФОТОИЗОБРАЖЕНИЯМ

Задача создания полностью автоматизированного метода восстановления рельефа по его δ - фотоизображениям была решена в работах [1-4]. Для рельефов, излучающих рассеянный свет по закону Ламберта, на основе алгоритма, предложенного в работах [1-3], были проведены численные эксперименты по восстановлению как рельефа, так и яркости излучения.

Результаты этих численных экспериментов представлены в отчете ВЦ СО АН СССР ДЛЯ 035.000: М.М.Лаврентьев, В.В.Гейдт "Численные эксперименты по автоматизированному восстановлению рельефа и яркости по фотоизображениям в случае ламбертова закона отражения". Эксперименты показали, что:

- а) алгоритм, предложенный в работах [1-3], реализуем на современных ЭВМ;
- б) поверхность и яркость восстанавливаются с 10% точ-

ностью в тех точках, в которых градиент яркости отличен от нуля;

в) алгоритм устойчив по отношению к случайной погрешности в изменении функции почернения фотопластинки.

Следующей стадией в проверке возможности применения алгоритма автоматизированного восстановления рельефа в практической картографии является проведение лабораторных экспериментов.

Эти эксперименты должны заключаться в следующем: в лабораторных условиях изготавливается макет рельефа, удовлетворяющий условиям теоремы о восстановлении рельефа и яркости в случае ламбертова закона отражения (требуется определенная гладкость поверхности, хотя бы приближенное излучение по закону Ламберта и равенство нулю градиента функции яркости лишь в конечном числе точек поверхности). Затем этот рельеф фотографируется из различных точек пространства. Измеряется функция почернения фотографий и составляются соответствующие числовые массивы, подлежащие вводу в ЭВМ. По излученным функциям почернения фотопластинок согласно алгоритму, описанному далее, восстанавливаются рельеф и яркость.

Такой лабораторный эксперимент был проведен лабораторией статистических методов обработки экспериментальных данных ИГиЭ СО АН СССР (экспериментальная часть) и лабораторией математических задач геологии и геофизики ВЦ СО АН СССР (теоретическая часть и численные расчеты на ЭВМ).

В настоящей работе используются обозначения статьи [5].

2. Постановка задачи лабораторного эксперимента

Задачей лабораторного эксперимента является моделирование в лабораторных условиях следующего процесса: имеется некая поверхность, о которой известно только то, что она излучает свет по закону Ламберта; имеется несколько (достаточное количество) фотоизображений этой поверхности, полученных фотографированием δ - образными объективами, и известны все параметры, которые входят в формулу почернения фотопластинки

$$J_i(w^{(i)}, Q^{(i)}) = \Phi^{(i)} \cdot A(x, y) / (\Phi^{(i)^2 + w_1^{(i)^2} + w_2^{(i)^2})^{3/2}, \quad (2.1)$$

где индекс i отмечает величину, относящуюся к i -ому фотоизображению поверхности. Требуется определить поверхность и яркость на некотором определенном участке плоскости $X \times Y$.

Когда мы говорим, что "имеется фотоизображение", то под этим подразумевается, что известна функция почернения $J(w)$ как функция координат на фотопластинке.

Лабораторное моделирование заключается в следующем: в лабораторных условиях изготавливается макет рельефа, удовлетворяющий условиям теоремы о восстановлении рельефа и яркости в случае ламбертова закона отражения (требуется определенная гладкость поверхности, хотя бы приближенное излучение Ламберта и равенство нулю градиента функции яркости лишь в конечном числе точек поверхности). Макет фотографируется из различных точек пространства и полученные фотографии оцифровываются.

На этой стадии заканчивается процесс лабораторного моделирования фотосъемки рельефа с самолета или спутника и последующей оцифровки фотографий. Далее следует непосредственное восстановление поверхности и яркости макета рельефа.

3. Лабораторный эксперимент

Моделью рельефа служит мелкоячеистый листовой паролон. Прямоугольный лист паролона укрепляется над жестким плоским основанием с помощью большого количества вертикальных металлических стержней различной высоты. Слоем паролона реализована в некотором приближении сплайн-интерполяция рельефа, заданного дискретным множеством стержней. Кривизна поверхности ограничивалась естественным условием отсутствия "складок".

Представление о рельефе дает таблица 3.1, в которой представлены (в мм) высоты точек над плоскостью жесткого основания макета в узлах решетки с шагом 50мм по координатам x и y .

Эта таблица получена непосредственно измерением и использовалась для оценки качества алгоритма восстановления рельефа. Можно заметить, что диапазон высот на макете относительно невелик, всего 85мм = 169-84.

"Поздраватая" поверхность паролона соответствует физическим основаниям закона Ламберта, так что не возникло необ-

Т а б л и ц а 3.1

	0	50	100	150	200	250	300	350	400
0	90	84	94	109	121	127	125	120	107
50	112	101	101	112	123	132	135	127	114
100	129	117	115	122	131	138	142	134	126
150	146	136	132	138	143	146	146	140	138
200	165	150	147	150	152	153	149	146	143
250	169	155	155	158	159	158	155	150	145
300	162	156	157	162	164	161	157	152	144
350	154	148	151	158	162	161	160	148	136
400	142	136	140	147	155	153	146	131	113
450	126	122	123	126	133	132	125	114	90

ходимости в специальных измерениях, подтверждающих равномерность диаграмм интенсивности рассеянного света. Ячейки на поверхности паролоня достаточно малы и находятся за пределами результирующего углового разрешения системы фоторегистрации и опифровки.

Для получения необходимого "разброса" яркостей поверхности ячейки заполнялись неоднородной смесью черного и белого порошка. Распределение коэффициента отражения по поверхности рельефа было произвольным, весьма гладким и никак не было связано с формой рельефа.

Фотосъемка рельефа производилась на следующей схеме (рис. 3.1). Фотокамера устанавливалась над плоскостью основания рельефа, плоскость снимка была параллельна плоскости основания и отстояла от нее на 2240мм. В процессе съемки фотокамера оставалась неподвижной, макет рельефа перемещался в плоскости основания последовательно в три положения относительно фотокамеры. При этом сохранялась заданная ориентация макета в плоскости. Нормаль, опущенная на плоскость основания из центра объектива (оптическая ось) отмечена крестообразной меткой. Эта метка зарегистрирована совместно с рельефом на трех снимках. Кроме того, на плоскости основания нанесен отрезок длиной в 1м. Его изображение позволило в дальнейшем оценить масштаб снимков и рабочее расстояние от оптическо-

го центра объектива до плоскости фотопластины. Следует заметить, что в отличие от случая реальной аэрофотосъемки здесь размеры изображений вполне сравнимы с размерами макета рельефа.

Применялась павильонная фотокамера типа ФКД формат 13x18 см. Объектив И-51, имеющий относительное отверстие 4,5 мм и номинальное фокусное расстояние 210 мм. Съемка макета велась непосредственно на фотобумагу (унибром, глянцевая, тонкая, белая, нормальная, № 2), чтобы избежать копирования снимков для ввода в ЭВМ через фототелеграфный аппарат. Проявление производилось в стандартном проявителе № 1 в течение 2 мин. Для освещения макета использовались 3 лампы накаливания по 300 ватт, установленные на расстоянии 2,5 м от макета рельефа. Выдержка - 1 мин при диафрагме 8. Кроме того, была получена шкала почернения, необходимая для определения результирующей характеристической кривой фотобумаги и системы оцифровки. Для получения шкалы использовался подвижный софит с прямоугольным окном 16x65 мм, равномерно освещенным лампой накаливания мощностью 1,5 вт. Софит помещался в плоскости основания в поле зрения фотокамеры. При включенном освещении макета и открытом объективе фотокамеры софит устанавливался в некоторое положение и на заданное время включалось освещение окна. Затем софит смещался в новое положение и снова включалось освещение окна. На фотоматериале получались неперекрывающиеся изображения окна, отличающиеся интенсивностью почернения. Съемка производилась при 30 положениях софита. Продолжительность освещения окна софита варьировалась от 60 сек до 2 сек с интервалом 2 сек. Короткие экспозиции "не проработались", так что на снимке оказалось зарегистрировано 27 градаций почернения.

Три снимка, соответствующие трем положениям макета рельефа, и снимок со шкалой почернения проявлялись в одинаковых условиях. Для оцифровки снимки были установлены в передающую часть фототелеграфного аппарата типа "Нева", соединенного непосредственно с ЭВМ "Минск-32". Для контроля процесса ввода и оцифровки произведен вывод изображения из ЭВМ на фотобумагу с помощью приемной части этого же фототелеграфного аппарата.

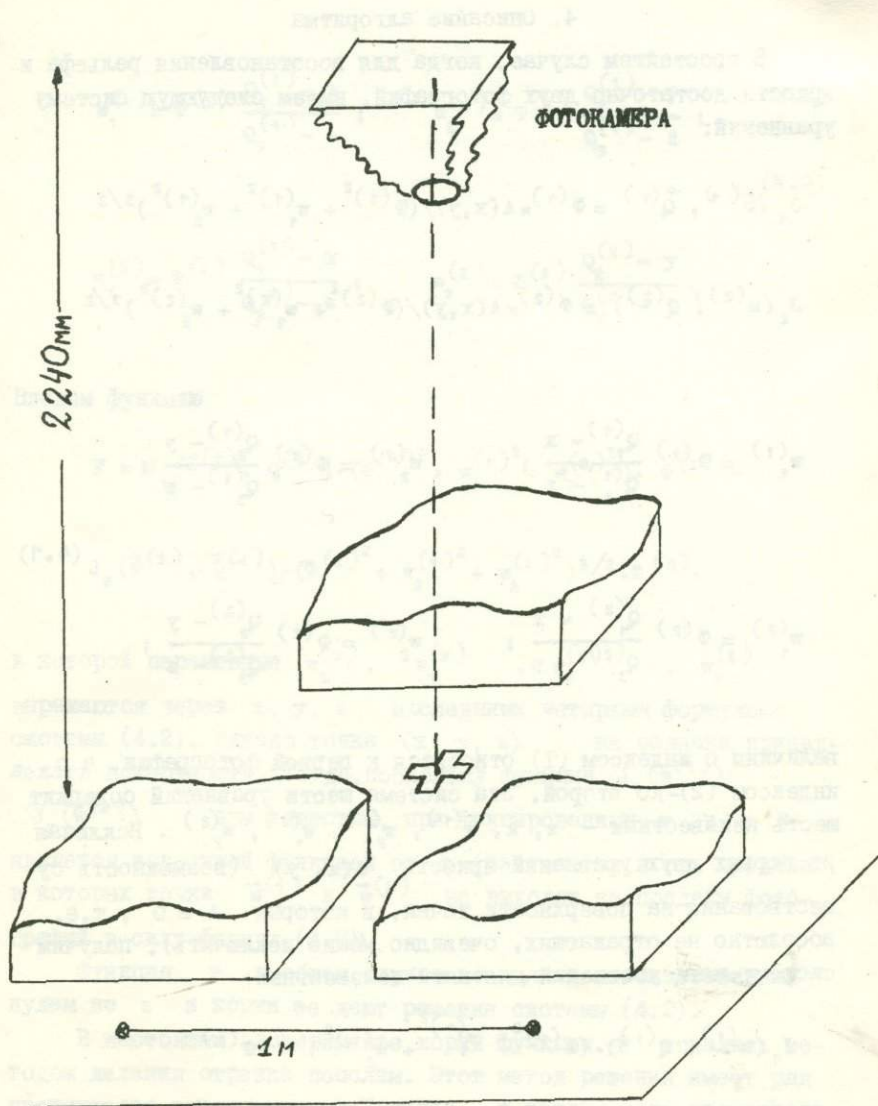


Рис. 3.1. Положение макета при фотографировании

4. Описание алгоритма

В простейшем случае, когда для восстановления рельефа и яркости достаточно двух фотографий, имеем следующую систему уравнений:

$$J_1(\vec{w}^{(1)}, \vec{Q}^{(1)}) = \Phi^{(1)} \times A(x, y) / (\Phi^{(1)^2} + w_1^{(1)^2} + w_2^{(1)^2})^{3/2}$$

$$J_2(w^{(2)}, Q^{(2)}) = \Phi^{(2)} \times A(x, y) / (\Phi^{(2)^2} + w_1^{(2)^2} + w_2^{(2)^2})^{3/2}$$

$$w_1^{(1)} = \Phi^{(1)} \frac{Q_1^{(1)} - x}{Q_3^{(1)} - z}; \quad w_2^{(1)} = \Phi^{(1)} \frac{Q_2^{(1)} - y}{Q_3^{(1)} - z};$$

(4.1)

$$w_1^{(2)} = \Phi^{(2)} \frac{Q_1^{(2)} - x}{Q_3^{(2)} - z}; \quad w_2^{(2)} = \Phi^{(2)} \frac{Q_2^{(2)} - y}{Q_3^{(2)} - z};$$

величины с индексом (1) относятся к первой фотографии, а с индексом (2) — ко второй. Эта система шести уравнений содержит шесть неизвестных — $z, A, w_1^{(1)}, w_2^{(1)}, w_1^{(2)}, w_2^{(2)}$. Исключая из первых двух уравнений яркость $A(x, y)$ (возможность существования на поверхности точек, в которых $A = 0$, т.е. абсолютно не отражающих, очевидно можно исключить), получим систему пяти уравнений для пяти неизвестных:

$$J_1(w^{(1)}, Q^{(1)}) \cdot (\Phi^{(1)^2} + w_1^{(1)^2} + w_2^{(1)^2})^{3/2} \cdot \Phi^{(2)}$$

$$J_2(w^{(2)}, Q^{(2)}) \cdot (\Phi^{(2)^2} + w_1^{(2)^2} + w_2^{(2)^2})^{3/2} \cdot \Phi^{(1)} = 0$$

$$w_1^{(1)} = \Phi^{(1)} \frac{Q_1^{(1)} - x}{Q_3^{(1)} - z}; \quad w_2^{(1)} = \Phi^{(1)} \frac{Q_2^{(1)} - y}{Q_3^{(1)} - z};$$

(4.2)

$$w_1^{(2)} = \Phi^{(2)} \frac{Q_1^{(2)} - x}{Q_3^{(2)} - z}; \quad w_2^{(2)} = \Phi^{(2)} \frac{Q_2^{(2)} - y}{Q_3^{(2)} - z};$$

Введем функцию

$$F = J_1(\vec{w}^{(1)}, \vec{Q}^{(1)}) \cdot (\Phi^{(1)^2} + w_1^{(1)^2} + w_2^{(1)^2}) \cdot \Phi^{(2)} -$$

$$J_2(\vec{w}^{(2)}, \vec{Q}^{(2)}) \cdot (\Phi^{(2)^2} + w_1^{(2)^2} + w_2^{(2)^2})^{3/2} \cdot \Phi^{(1)},$$

в которой переменные $w_1^{(1)}$, $w_1^{(2)}$, $w_2^{(1)}$, $w_2^{(2)}$ выражаются через x, y, z последними четырьмя формулами системы (4.2), однако точка (x, y, z) не обязана принадлежать поверхности. Тогда, поскольку функции $J_1(\vec{w}^{(1)})$

$J_2(\vec{w}^{(2)})$ нам известны, при фиксированных x и y F является известной функцией от z (разумеется, в тех пределах, в которых точки $\vec{w}^{(1)}$ и $\vec{w}^{(2)}$ не выходят за пределы фотографий в силу формул (4.2)).

Функция F в общем случае не является тождественным нулем по z и корни ее дают решение системы (4.2).

В настоящем эксперименте корни функции F искались методом деления отрезка пополам. Этот метод решения имеет ряд преимуществ перед методом Ньютона — в каждом узле прямоугольника $a \times b$ плоскости $X \times Y$ поверхность восстанавливается независимо от остальных узлов, что особенно важно при наличии участков, невидимых на одной из фотографий (область тени). При наличии таких участков метод деления отрезка пополам не дает ответа только в этих участках; при решении же методом

Ньютона мы не можем проходить эти участки для получения правильных решений на хороших участках - в лучшем случае, если это возможно, нужно искать удачный путь обхода этих участков.

После восстановления поверхности на всем участке яркость $A(x, y)$ восстанавливается в произвольном узле (j, k) участка $a \times b$ по любой из двух фотографий по следующим формулам:

$$A(x_j, y_k) = J_1(w^{(1)}, Q^{(1)}) \cdot (\Phi^{(1)^2 + w_1^{(1)^2 + w_2^{(1)^2}})^{3/2} / \Phi^{(1)},$$

$$w_1^{(1)} = \Phi^{(1)} \frac{Q_1^{(1)} - x_j}{Q_3^{(1)} - z_{jk}}; \quad w_2^{(1)} = \Phi^{(1)} \frac{Q_2^{(1)} - y_k}{Q_3^{(1)} - z_{jk}},$$

i - определяет номер фотографии,

j, k - определяют узел сетки,

x_j, y_k, z_{jk} - координаты точки поверхности в узле (j, k) .

5. Реализация алгоритма

В лабораторном эксперименте были получены три фотографии макета рельефа. Для определения же рельефа по вышеописанному алгоритму требуется два изображения рельефа, вследствие чего рельеф можно восстанавливать по любой из трех имеющихся пар фотографий. Поскольку все три пары фотографий в экспериментальном отношении совершенно равноправны, восстановление рельефа было проведено по каждой из них.

Перед непосредственной реализацией алгоритма была проведена подготовительная работа, в результате которой условия и данные эксперимента были приведены в соответствие с условиями, накладываемыми алгоритмом:

а) макет рельефа неподвижен относительно выбранной системы координат, объектив занимает различные положения во время фотосъемок. Для выполнения этого условия были проведены преобразования координат объектива при второй и третьей фотосъемках, обратные преобразования, переводящим макет рельефа при первой фотосъемке в макеты рельефа при второй и третьей фотосъемках;

б) в эксперименте в результате опифровки были получены функции почернения фотографий, алгоритм же работает с функцией, значение которой в произвольной точке фотографии представляет собой поток света, пришедший в данную точку фотографии. Необходимый пересчет был проделан с помощью шкалы почернения, полученной в эксперименте.

Восстановление рельефа производилось в узлах равномерной сетки, с шагом 50мм по абсциссе и ординате - в тех же узлах, в которых были произведены контрольные измерения, приведенные в таблице 3.1.

За исходную точку z_0 в методе деления отрезка пополам была взята одна и та же точка для всех узлов участка - точка, ненамного превышающая максимальную высоту рельефа на макете, и видимая на всех трех фотографиях.

Погрешностью восстановления рельефа в данном эксперименте разумнее всего, видимо, считать отношение абсолютной величины разности между истинной и восстановленной высотами рельефа к рельефности макета, умноженной на 100, т.е. погрешность измеряется в процентах от рельефности.

В процессе решения задачи необходимо знать значение функции почернения J в произвольной точке фотографии. Необходимая для этого интерполяция двумерных массивов производилась в двух вариантах: линейном и бикубическом.

При линейной интерполяции рельеф восстанавливается с точностью до 30% в 60 узлах из 90 лишь по совокупности трех пар фотографий, а по отдельным парам фотографий в 30-40 узлах.

При бикубической интерполяции по первой и второй фотографиям рельеф восстанавливается с точностью до 30% в 50 узлах из 90 по первой и третьей и по второй и третьей парам фотографий рельеф не восстанавливается вообще. Причина того, что рельеф не восстанавливается по второй и третьей парам фотографий, видимо, заключается в том, что точность, с которой опифрована третья фотография, недостаточна для вычисления вторых производных функции почернения, используемых при бикубической интерполяции.

Восстановленный рельеф и погрешность его восстановления могут быть представлены следующими таблицами

Восстановленный рельеф

I76	I40	I76	I76	I40	I76	I76	I76	I76
I64	I64	I64	I64	I72	I24	I72	I64	I64
I76	I45	I45	I45	I45	I45	I29	I33	I59
I74	I74	I74	I74	I74	I74	I74	I64	I64
I56	I62	I28	I28	I56	I56	I72	I56	I58
I55	I55	96	I55	I22	I55	I55	I55	I59
I7I	I72	I72	I55	I72	I72	I72	I7I	I72
I43	I43	I43	I43	I43	I36	I29	I43	I43
I24	I62	I62	I62	I62	I62	I62	I62	I62
I74	I40	I74	I74	I74	I74	I74	I74	I74

Погрешность в %

I00	66	9I	79	22	58	60	65	8I
60	74	74	6I	58	I0	43	43	60
55	33	35	27	I6	8	I5	I	38
33	45	49	42	36	33	33	28	30
I3	I4	23	27	5	4	27	I2	I8
I5	I	69	5	43	5	I	6	I6
I3	I9	I8	I0	I0	I3	I8	22	33
I3	6	I0	I8	22	29	36	6	8
2I	30	26	I8	8	I3	I9	36	55
56	2I	60	56	48	50	57	70	99

Результаты проведенного лабораторного эксперимента по автоматизированному восстановлению рельефа в случае ламбертова закона излучения позволяют сделать следующие выводы:

- а) предложенный алгоритм автоматизированного восстановления рельефа реализуем на современных ЭВМ;
- б) алгоритм достаточно эффективен в условиях лабораторного эксперимента, моделирующего реальную фотосъемку.

Таким образом, проведенный лабораторный эксперимент открывает реальную перспективу использования предложенного в работах [I-3] метода автоматизированного восстановления рельефа в практической картографии.

Л и т е р а т у р а

1. Лаврентьев М.М., Кирейтов В.Р. Об одном классе отображений биповерхностей трехмерного пространства. - ДАН СССР, т. 216, № 2, 1974.
2. Лаврентьев М.М., Кирейтов В.Р. О точках ветвления оптических гиперповерхностей. - ДАН СССР, т.221, № 5, 1975.
3. Кирейтов В.Р. Об одном классе отображений биповерхностей трехмерного пространства. - В сб.: "Математические проблемы геофизики", вып.У, ч.1, Новосибирск, 1974.
4. Гейдт В.В. К задаче восстановления индикатрисы излучения и рельефа по его фотоизображениям. - В сб.: "Некорректные задачи математической физики и проблемы интерпретации геофизических данных". Новосибирск, 1976.
5. Гейдт В.В. Численный эксперимент по автоматизированному восстановлению рельефа по его фотоизображениям. - Статья настоящего сборника.
6. Лаврентьев М.М., Пушной Б.М., Гейдт В.В., Ивченко Г.А., Кирейтов В.Р., Чейдо Г.П. Лабораторный эксперимент по автоматизированному восстановлению рельефа по фотоизображениям в случае ламбертова закона отражения. Отчет ИАиЭ СО АН СССР и ВЦ СО АН СССР. ДЛЯ 035.001, Новосибирск, 1976.

А.А.Морозов, А.Л.Поляченко, А.И.Хисамутдинов, Т.А.Шапошникова
СОПОСТАВЛЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ И ЭКСПЕРИМЕНТА
В ЗАДАЧЕ ИМПУЛЬСНОГО НЕЙТРОН-НЕЙТРОННОГО КАРОТАЖА

I. Для численного решения прямых задач скважинной ядерной геофизики, в том числе и метода импульсного нейтрон-нейтронного каротажа (ИННК), разработаны программы, в которых реализованы алгоритмы Монте-Карло или конечных разностей. Оценить априори точность принятых в них физико-математических моделей взаимодействия и переноса частиц и корректность вычислительных схем не представляется возможным. Положение усугубляется трудностью теоретического моделирования задач ядерной геофизики в реалистической постановке и сложностью соответствующих программ, а также резко возросшими в последние годы требованиями к точности решений. В связи с этим необходимы тщательные сопоставления расчетных и экспериментальных данных, результатов вычислений различными численными методами и различными вариантами одного метода.

На наш взгляд, целесообразно создание "тестовых" (или "эталонных") программ для основных методов ядерной геофизики, (см. след.стр.)

В настоящей работе сравниваются результаты расчетов задачи ИННК, полученные:

- 1) методом Монте-Карло по программе "ИННК-МК", неполное описание которой приведено в [1];
- 2) методом конечных разностей по многогрупповой программе "РУМ" [2];
- 3) экспериментально на натуральных моделях пластов [3].

Сравнивались также данные расчетов некоторых стационарных задач по программе "ИННК-МК" с известными результатами, полученными методом моментов [6] и известным точным решением [7]. Сопоставлялись данные [1]-[2], [2]-[3], [1]-[6] и [1]-[7].

2. Сравнение обоих численных методов ([1]-[2]) проведено для следующих условий ИННК; скважина-цилиндр радиусом 10 см, заполненный пресной водой, пласт бесконечной мощности - пористый кварцевый песчаник с объемной флюидонасыщенностью $m = 0, 10$ и 20% (плотность каркаса породы 2.65 г/см^3 , пластовая вода пресная); точечный изотропно-излучающий импульсный моноэнергетический источник нейтронов с энергией 14 Мэв расположен на оси симметрии Z в начале координат. Рассчитывалось пространственно-временное распределение плотности тепловых нейтронов $n(t, z)$ на оси системы для различных значений m в пласте (t - время после импульса быстрых нейтронов, z - расстояние до источника по оси системы).

Замедление в программе "ИННК-МК" описывалось в следующей модели: нейтроны при взаимодействии с ядрами среды испытывают только упругое рассеяние и поглощение (в качестве микроскопического сечения поглощения берется полное сечение σ_t , исключая сечение упругого рассеяния σ_s); упругое рассеяние изо-

которые могли бы использоваться для апробации новых методов теории переноса, вычислительных алгоритмов и различных библиотек ядерных данных. "Тестовые" программы должны быть ориентированы на простейшую содержательную геометрию измерений, входящую как частный случай в большинство реалистических задач; для случая каротажа это двухслойная бесконечная цилиндрическая среда, моделирующая систему "гомогенизированная скважина - однородный пласт".

тропно в системе центра масс. Сечения взаимодействия нейтронов с веществом в энергетической области до 10.5 Мэв взяты из [4] и дополнены группой 10.5 - 14 Мэв со следующими значениями σ_t и σ_s в барнах:

элемент	σ_t	σ_s
H	0.838	0.838
O	1.37	0.88
Si	1.83	0.65

Этап собственно термализации не рассматривался, и нейтроны с энергиями $E < 0.215$ эв считались тепловыми (равновесными). Упругое рассеяние тепловых нейтронов считается изотропным в лабораторной системе. Детектор представлял фиктивную сферу радиусом 2 см.

В программе "РУМ" использована 6-групповая теория замедления нейтронов в транспортном P_1 - приближении с источником однократного рассеяния. Термализация также не рассматривалась, а перенос тепловых нейтронов описывался в односкоростном диффузионном приближении. Нейтронные групповые константы рассчитывались по схеме и на основе 26-групповой системы АББН [4] с учетом упругого и неупругого рассеяния, поглощения за счет реакций (n, p) и (n, α) , анизотропии упругого рассеяния. Сеточная модель 120 x 80 см содержала $\sim 10^3$ узлов. Эта сетка вместе со специальным режимом изменения шага по времени обеспечила счетную погрешность $< 1-2\%$.

На рис. 1 представлены результаты сравнения данных расчетов по программе "ИННК-МК" (точки) и "РУМ-3" (кривые) для $m = 0, 10, 20\%$; $z = 0, 5, 10, 15$ см; $t = 0 + 1000$ мкс при заполнении скважины и пор пласта газированной нефтью (варианты I-III) и пресной водой (вариант IV). Величины статистических погрешностей (в %), времен счета и числа просчитанных траекторий нейтронов N приведены в таблице 1. Для большинства точек дисперсия сходится как $1/N$, что свидетельствует о достоверности оценок погрешности. В целом, согласие пространственно-временных распределений $n(t, z)$ можно считать удовлетворительным, в особенности, при $m \geq 10\%$ и $t \gtrsim 700$ мкс. На рис. 1 результаты приведены в условных единицах. Для привязки резуль-

$n(t)$, усл. ед

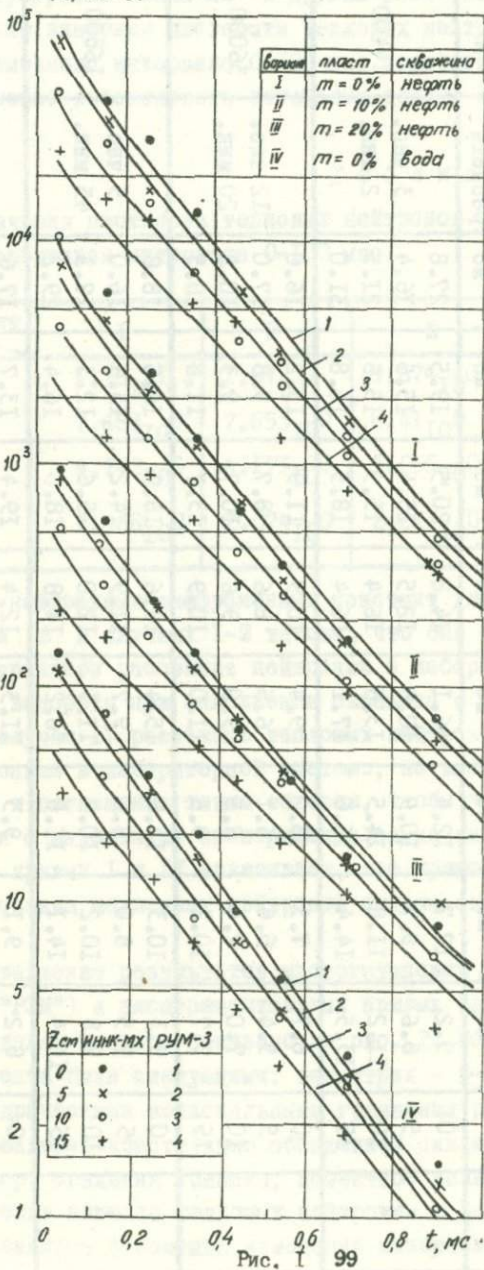


Рис. 1 99

Т а б л и ц а I
 СТАТИСТИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ РАСЧЕТА ПО ПРОГРАММЕ "ИННК-МК"

вариант	z, см	0-0.1 мс	0.1-0.2 мс	0.2-0.3 мс	0.3-0.4 мс	0.4-0.5 мс	0.5-0.6 мс	0.6-0.8 мс	0.8-1 мс	Время расчета	N
I	0	9.2	12.7	12.4	16.1	14.8	20.5	19.5	27.8	3 час. 2 мин.	14400
	5	8.6	9.7	10.9	10.8	12.5	15.4	15.5	16.4		
	10	11.2	11.8	14.5	13.6	16.4	15.9	15.6	21.5		
	15	13.5	14.4	16.6	17.1	16.4	18.5	16.8	31.0		
II	0	6.7	7.3	8.2	9.4	10.9	11.9	13.2	16.0	12 час. 20 мин.	36000
	5	5.4	5.6	6.1	6.5	8.6	8.7	9.8	17.0		
	10	7.0	7.4	8.5	9.0	9.6	10.7	9.3	10.2		
	15	9.7	10.2	9.6	11.0	10.9	13.7	11.8	18.5		
III	0	9.3	10.3	14.8	15.4	16.6	18.9	16.5	18.8	5 час. 45 мин.	16800
	5	7.5	8.0	8.6	9.7	11.9	14.2	13.6	16.0		
	10	9.8	10.2	10.2	11.3	12.0	15.6	12.3	17.3		
	15	16.4	14.1	11.8	16.2	14.8	18.0	16.4	29.2		
IV	0	8.2	9.1	9.5	11.3	12.4	19.4	13.7	17.6	9 час. 10 мин.	26400
	5	6.9	7.4	7.7	8.2	9.7	10.9	11.2	25.4		
	10	8.3	9.1	10.0	11.2	12.0	11.1	12.8	17.2		
	15	11.1	10.5	12.8	11.7	14.5	14.8	13.8	17.3		

татов данных программы "ИННК-МК" к другим расчетам полезно знать абсолютные значения плотности тепловых нейтронов. Эти данные для временного интервала 0-100 мкс приведены в таблице 2. По ним можно восстановить остальные точки, используя рис. 1.

Т а б л и ц а 2

Абсолютные значения плотности тепловых нейтронов (нейтрон/см² сек.) во временном интервале 0-100 мкс.

z, см \ вариант	I	II	III	IV
0	1.18_{10^1}	1.07_{10^1}	9.674_{10^0}	1.404_{10^1}
5	7.688_{10^0}	7.653_{10^0}	8.41_{10^0}	1.17_{10^1}
10	4.742_{10^0}	4.173_{10^0}	5.055_{10^0}	7.013_{10^0}
15	2.468_{10^0}	2.074_{10^0}	2.211_{10^0}	3.19_{10^0}

Значения нейтронных диффузионных констант для тепловых нейтронов τ и D в случаях I-III таковы, что они соответствуют модели изотропного рассеяния нейтронов в лабораторной системе на ядрах водорода при заполнении скважины и пласта пресной водой. В случае IV рассеяние тепловых нейтронов мы также считали изотропным в лабораторной системе, но выбирали сечения рассеяния и поглощения таким образом, чтобы τ и D для воды совпадали с известными экспериментальными значениями [4]. Сопоставление кривых I и IV показывает, что пренебрежение анизотропией рассеяния медленных нейтронов сильно сказывается на результатах.

3. Сопоставление результатов многогрупповых расчетов методом сеток ("РУМ") и экспериментальных кривых затухания $n(t)$ в натуральных моделях пластов показано на рис. 2. Условия расчета и эксперимента были следующими: геометрия - 5-ти слойная среда с цилиндрическими коаксиальными границами раздела, моделирующими реальную конструкцию обсаженной скважины: прибор, буровой раствор, стальная колонка, цементное кольцо, пласт с $m = 0.2$. Сечения захвата тепловых нейтронов в различных зонах системы менялись с помощью изменения минерализации воды

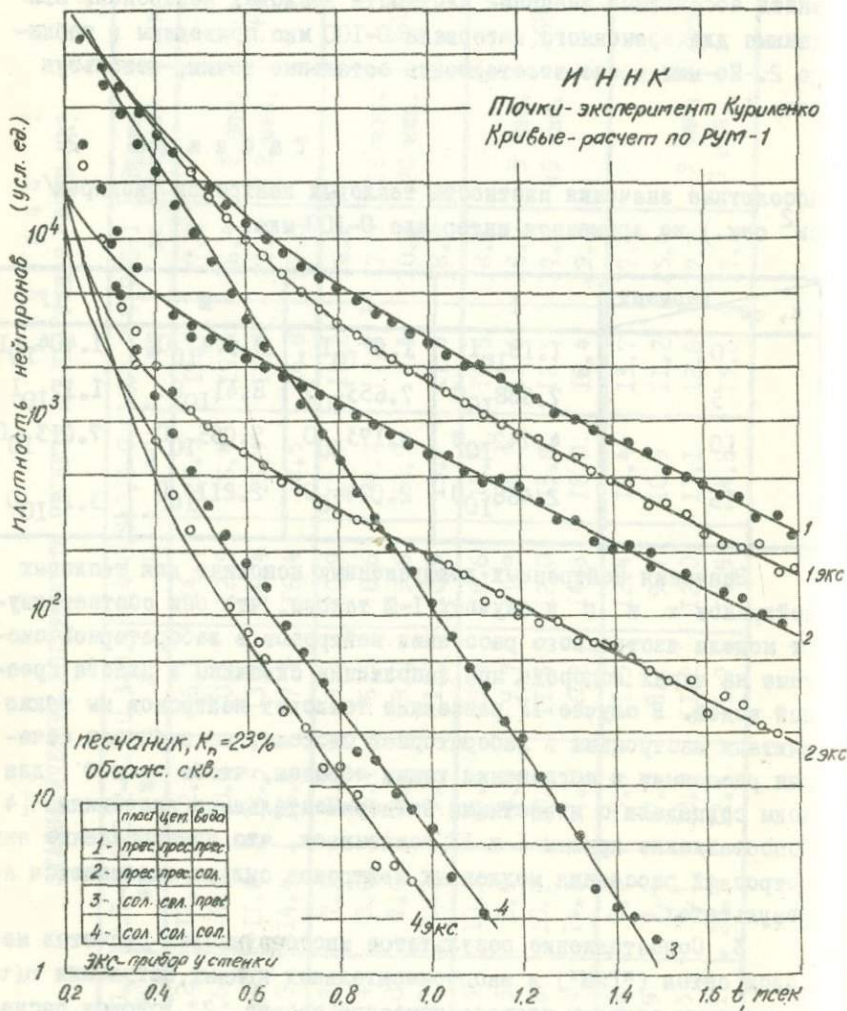


Рис. 2

(солями Na Се) в соответствующих средах. Прибор - серийный генератор нейтронов ИГН-4. Диапазон $t = 0.2 \div 1.8$ мс. На малых временах $t \lesssim 0.4$ мс из-за перегрузок аппаратуры в связи с ограниченной разрешающей способностью экспериментальные точки обладают значительными ошибками нестатистического характера. Расчет по программе "РУМ" проведен в том же приближении, что и выше.

Из рисунка видно, что алгоритм "РУМ" хорошо согласуется, во-первых, с экспериментом в области средних и больших $t \cong 0.5 \div 1.8$ мс, и, во-вторых, с представлением $n(t)$ в виде

$$n(t) \cong A_{\text{скв}} e^{-\lambda_{\text{скв}} \cdot t} + A_{\text{пл}} e^{-\lambda_{\text{пл}} \cdot t}, \quad (1)$$

где первый член ("короткоживущая" экспонента) описывает вклад потока, диффундировавшего преимущественно по скважине, а вторая экспонента ("долгоживущая") описывает поток из пласта.

Представление (1) для $n(t)$ известно из аналитической теории ИННК для двухзонной цилиндрической среды [5]. На асимптотике по времени $t > t_{\text{ас}} \sim (\lambda_{\text{скв}} - \lambda_{\text{пл}})^{-1} \ln(10 A_{\text{скв}} / A_{\text{пл}})$

поток по скважине становится пренебрежимо малым.

Ненадежность опытных данных при малых t оставляла вопрос о корректности программы "РУМ" в этой области, в принципе, открытым. Однако хорошее согласие данных программы РУМ и метода Монте-Карло именно в этой области позволяет предполагать, что она достаточно корректна и при малых t .

4. Было также проведено сравнение данных расчетов по программе "ИННК-МК" с результатами, полученными другими методами, для следующих стационарных задач:

а) нахождение пространственного распределения потока замедляющихся нейтронов в воде вокруг точечного изотропного моноэнергетического источника нейтронов с энергией 4 Мэв. В [6] приводятся дифференциальные спектры нейтронов $\Phi(r, E)$, полученные методом моментов. Интегральный поток нейтронов в энергетическом интервале 0.33-3.8 Мэв на расстоянии $r = 10$ см, согласно этим данным, равен $\Phi_{\text{инт}} = 4.158 \cdot 10^{-4}$ нейтрон/см² сек. Для сравнения с этим результатом были проведены два расчета по программе "ИННК-МК": в первом был использован способ "ма-

тематических ожиданий" [1] (радиус сферы - "детектора" 1 см), во втором использовалась известная оценка $\sum_i 1/|\mu_i|$, где μ_i - косинус угла между нормалью к поверхности и направлением полета нейтрона, пересекающего поверхность, i - номер пересечения. Результат первого расчета $\Phi_{\text{инт}} = 4.391 \cdot 10^{-4}$ н/см²сек со статистической погрешностью 4.2% (время расчета - 25 мин, число траекторий 60000). Результат второго расчета $\Phi_{\text{инт}} = 4.683 \cdot 10^{-4}$ н/см²сек (время расчета - 24 мин, число траекторий 100000). Так как дисперсия оценки $\sum_i 1/|\mu_i|$ расходится, полученное значение статистической погрешности во втором расчете не дает простой возможности построения доверительного интервала, и мы его не проводим;

б) нахождение распределения потока нейтронов $\Phi(r)$ от точечного изотропного моноэнергетического источника нейтронов, распределяющихся без потерь энергии (односкоростная задача) в среде с полным макроскопическим сечением Σ_t и вероятностью выживания c . Для этой задачи известно точное решение $\Phi(r)$ [7]; при $r = 0.7$; $\Sigma_t = 1$; $c = 0.8$, оно равно $\Phi = 0.219$. Расчеты по программе "ИННК-МК" дают следующие результаты: методом математических ожиданий $\Phi = 0.217$ с погрешностью 4.6% (время расчета 4.5 минуты, число траекторий - 3200, радиус сферы - "детектора" 0.1 см); по способу с оценкой $\sum_i 1/|\mu_i|$ $\Phi = 0.2164$ (время расчета 1.5 минуты, число траекторий 10000). Эти сравнения служат дополнительной проверкой правильности работы программы "ИННК-МК".

Авторы благодарны члену-корреспонденту АН СССР М.М.Лаврентьеву и С.А.Кантору за внимание к работе и обсуждения.

Л и т е р а т у р а

1. Морозов А.А., Хисамутдинов А.И. Способ "математических ожиданий" для сферических и цилиндрических областей в задачах переноса нейтронов. Сб.: Некорректные задачи математической физики и проблемы интерпретации геофизических наблюдений. Новосибирск, изд-во ВЦ СО АН СССР, 1976, с. 78-88.
2. Поляченко А.Л., Шапошникова Т.А., Цейтлин В.Г. Расчет пока-

заний стационарного и импульсного нейтронного каротажа в случае однородных пластов (программа РУМ). Сб.: Алгоритмы и программы, № 3, № ПОО1375, М., ВНИЦентр, 1975.

3. Куриленко Ф.А., Диссертация. М., ВНИИЯГТ, 1969.
4. Абагян Л.П., Базазянц Н.О., Бондаренко И.И., Николаев М.Н. Групповые константы для расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1964.
5. Поляченко А.Л. Теория нестационарной диффузии тепловых нейтронов в двухслойной среде с цилиндрической границей раздела. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 4, 1964, с. 532-547.
6. Гольштейн Г. Основы защиты реакторов. М., Госатомиздат, 1961.
7. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М., "Мир", 1972.

А.И.Хисамутдинов, Л.А.Табаровский

ПРИМЕР МОНТЕ-КАРЛОВСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В ЗАДАЧАХ
ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ

I⁰. В теории электромагнитных методов геофизических исследований в настоящее время широко применяется математическое моделирование электромагнитных полей в средах со сложным распределением электромагнитных параметров. Наиболее распространенный способ моделирования гармонических во времени полей — решение интегральных уравнений, связывающих компоненты поля. Одну и ту же электродинамическую задачу можно редуцировать к различным интегральным уравнениям (или системам уравнений). При численной реализации предпочтение обычно отдается уравнениям с наименьшей размерностью области интегрирования, что связано с ограниченностью ресурсов памяти вычислительных машин. Сокращение размерности области интегрирования в уравнениях достигается за счет усложнения функций Грина и повышения размерности системы уравнений.

Хорошо известно, что решение интегральных уравнений 2-го рода, допускающих его представление в виде ряда Неймана, может вычисляться методом Монте-Карло, при этом размерность

уравнения не столь существенна, как в других численных методах, что позволяет исходить из уравнений с простыми функциями Грина. Хотя большинство монте-карловских вычислений относится к вещественным уравнениям, имеются примеры [1] использования метода и для комплексных. При применении метода в рассматриваемой области возникают два вопроса:

1) сходится ли и как сходится ряд Неймана;

2) какова "типичная" погрешность метода и возможно ли получить приемлемую точность за реальное время (работы вычислительной машины). Априорный, до вычислений, ответ на эти вопросы сейчас неизвестен и его разрешение представляется сложным. Цель данной работы - получить некоторый опыт в указанном направлении на примере конкретной задачи, решение которой известно [2].

2^о. Наиболее очевидный класс задач, где можно ожидать сходимости рядов Неймана - это задачи, в которых имеется только те мода поля с единственной электрической компонентой, не пересекающей границ (осесимметрические задачи при возбуждении круговыми переменными токами и двумерные задачи при возбуждении линейными токами). Ядро уравнения для этой компоненты содержит параметр, пропорциональный частоте, поэтому можно ожидать, что ряды Неймана будут сходиться при электромагнитных и геометрических параметрах моделей, представляющих интерес в низкочастотных методах электрометрии (магнитотеллурические зондирования, индуктивные методы рудной разведки, низкочастотные методы индукционного каротажа).

Рассмотрим задачу возбуждения цилиндрической неоднородности с проводимостью γ_1 , расположенной в среде с проводимостью γ_e . Магнитные проницаемости обеих сред одинаковы и равны μ . Ось x декартовой прямоугольной системы координат направим вдоль образующей цилиндра (см. рис. 1). Источник первичного поля - система линейных токов, параллельных оси x и распределенных с постоянной плотностью в плоскости $z = -H$ ($H > 0$); начало системы координат лежит на оси цилиндра. Временную зависимость выберем в виде $e^{-i\omega t}$.

Стандартным образом для единственной электрической компоненты поля $E_x(\cdot) \equiv E(\cdot)$ может быть получено интегральное уравнение

$$E(s) = E^0(s) - (k_1^2 - k_e^2) \int_{(S_V)} E(s') \mathcal{G}(s', s) ds' \quad (2.1)$$

где $s \equiv (y, z)$, $s' \equiv (y', z')$ - точки в плоскости OYZ ,

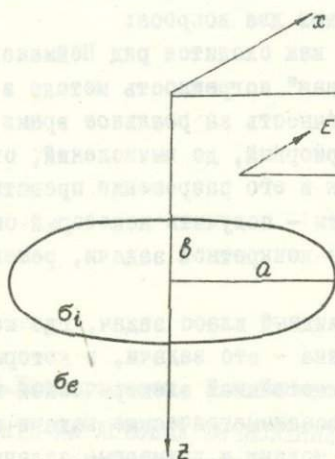


Рис. I.

S_V - сечение цилиндра плоскостью OYZ , а именно, внутренняя часть эллипса с полуосями a (вдоль оси Y) и b ; $b < H$;

$$k_{1,e}^2 = -i\omega\mu_{1,e};$$

$$\mathcal{G}(s', s) = \frac{1}{2\pi} K_0(k_e |s-s'|), \quad |s-s'| \equiv \sqrt{(y-y')^2 + (z-z')^2},$$

$K_0(\cdot)$ - функция Макдональда; $E^0(s)$ - первичное поле (в отсутствии неоднородности), имеющее в рассматриваемом случае вид плоской волны: $E^0(s) = E_0 e^{-k_e z}$.

Нас интересует значение $E(\cdot)$ в точке s_0 с $y_0 = 0$, $z_0 = -h$; $b < h < H$; при этом полагается $E_0 = 1$. Величина $E(s_0)$ и будет вычисляться методом Монте-Карло.

3⁰. Метод Монте-Карло (см., например, [3]) для вычислений, а именно, цепь Маркова и оценку $\xi(\cdot)$, функцию от траекторий

цепи, выберем следующего вида:

$$p_0(s) = \delta(s - s_0)$$

$$p_e(s', s) = \begin{cases} 1/(k_{ab}) & l = 1, \dots, N \\ 0 & l > N \end{cases}$$

$$\xi(\omega) = \sum_{l=0}^N q_l(s_0, \dots, s_l) E^0(s_l),$$

где $p_0(\cdot)$ - плотность начального распределения цепи, $p_l(\cdot, \cdot)$ - ее переходные плотности, $\omega = s_0, s_1, \dots, s_N$ - траектория цепи и $q_l(\cdot)$ - так называемые "веса". Выбор переходных плотностей нулями при $l > N$ отвечает тому, что вычисляется лишь $(N + 1)$ первых членов ряда Неймана уравнения (2.1).

Пусть $\text{Re}(\xi)$ и $\text{Im}(\xi)$ - действительная и мнимая части оценки, $D(\text{Re}(\xi))$ и $D(\text{Im}(\xi))$ - соответственно их дисперсии; тогда стандартные погрешности вычисления $\text{Re}(E(s_0))$ и $\text{Im}(E(s_0))$ есть

$$\sqrt{\frac{D(\text{Re}(\xi))}{L}} \quad \text{и} \quad \sqrt{\frac{D(\text{Im}(\xi))}{L}},$$

где L - число испытаний.

4⁰. Для различных значений a и $|k_e|$ при $\gamma_1/\gamma_e = 64$ были выполнены расчеты электрического поля в точке с $h = 3$. Результаты вычислений $E(\cdot)$ и стандартные погрешности вычисления $\text{Re}(E)$ и $\text{Im}(E)$ при $N = 12$ (13 членов ряда) приведены в таблице I; $\lambda_e = 2\pi \sqrt{2}/|k_e|$. Каждая клетка таблицы содержит 4 числа; верхние: $\text{Re}(E)$ и $\text{Im}(E)$ и нижние: их стандартные погрешности. Пустые клетки соответствуют "расходящимся" рядам Неймана. Считалось, что ряд при данных параметрах расходящийся, если в процессе счета достигалось

$$\text{mod}(q_l(\cdot)) > 100, \quad l = 1, \dots, N.$$

Это - грубое условие и вполне возможно, что часть "пустых" клеток могла быть просчитана. Те параметры $k_e, k_i, a, b,$

при которых приведены вычисления, удовлетворяют эмпирическому неравенству $|k_e^2 - k_1^2| |S_V| \lesssim 0.03$, $|S_V|$ - площадь сечения S_V .

Вычисление $E(\cdot)$ и стандартных погрешностей $Re(E)$ и $Jm(E)$ проводилось также при $N = 8$ (9 членов ряда). Оказалось, что результаты мало отличаются от значений при $N = 12$ и поэтому не приводятся. Таким образом, 13 членов ряда достаточно хорошо приближали значение $E(\cdot)$.

На рис. 2 приведены графики модуля аномального поля $e = \left| \frac{E}{E_0} - 1 \right|$, полученные в [2] методом "интегральных уравнений" (соответствующие интегральные уравнения решались путем редукции к алгебраической системе). На оси абсцисс отложены значения $\lambda_e \sqrt{b}$; шифр кривых - отношение a/b ; всюду $\gamma_1 / \gamma_e = 64$. Крестиками показаны значения, полученные методом Монте-Карло. Совпадение хорошее.

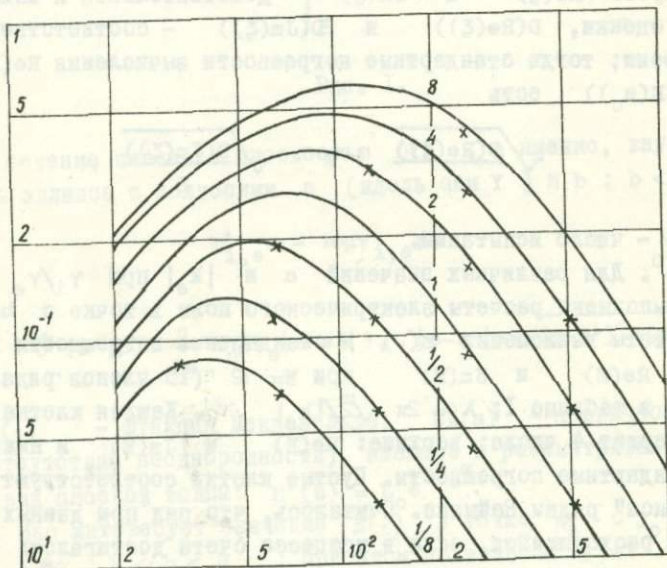


Рис. 2.

На расчет 23 вариантов было затрачено ~ 100сек времени ЭЭСМ-6. Число испытаний L во всех вариантах одинаково и равно 100.

Результаты вычислений и сопоставлений показывают, что вполне разумно применение методов Монте-Карло для решения задач электроразведки (по крайней мере, в низкочастотных методах).

Т а б л и ц а I

	0.125	0.25	0.5	I
32	-0.1464 0.2072x10 ⁻¹ 0.51 x10 ⁻² 0.69 x10 ⁻²			
64	-0.6255x10 ⁻¹ 0.6370x10 ⁻¹ 0.66 x10 ⁻³ 0.18 x10 ⁻²	-0.1274 0.9083x10 ⁻¹ 0.13 x10 ⁻² 0.36 x10 ⁻²	-0.2265 0.8245x10 ⁻¹ 0.65 x10 ⁻² 0.11 x10 ⁻¹	
128	-0.1608x10 ⁻¹ 0.3094x10 ⁻¹ 0.50 x10 ⁻⁴ 0.41 x10 ⁻³	-0.3487x10 ⁻¹ 0.5941x10 ⁻¹ 0.15 x10 ⁻³ 0.93 x10 ⁻³	-0.7856x10 ⁻¹ 0.1034 0.61 x10 ⁻³ 0.16 x10 ⁻²	-0.1666 0.1627 0.15 x10 ⁻² 0.27 x10 ⁻²
256	-0.3881x10 ⁻² 0.1131x10 ⁻¹ 0.78 x10 ⁻⁵ 0.93 x10 ⁻⁴	-0.8189x10 ⁻² 0.2234x10 ⁻¹ 0.19 x10 ⁻⁴ 0.19 x10 ⁻³	-0.1764x10 ⁻¹ 0.4316x10 ⁻¹ 0.53 x10 ⁻⁴ 0.35 x10 ⁻³	0.3949x10 ⁻¹ 0.8384x10 ⁻¹ 0.22 x10 ⁻³ 0.76 x10 ⁻³
512	-0.9475x10 ⁻³ 0.3653x10 ⁻² 0.15 x10 ⁻⁵ 0.21 x10 ⁻⁴	0.1939x10 ⁻² 0.7212x10 ⁻² 0.27 x10 ⁻⁵ 0.41 x10 ⁻⁴	-0.4021x10 ⁻² 0.1445x10 ⁻¹ 0.69 x10 ⁻⁵ 0.88 x10 ⁻⁴	-0.8536x10 ⁻² 0.2865x10 ⁻¹ 0.16 x10 ⁻⁴ 0.17 x10 ⁻³

Т а б л и ц а I (окончание)

	2	4	8	
I28	-0.3054 0.1824 0.91 $\times 10^{-2}$ 0.11 $\times 10^{-1}$			
256	-0.8937 $\times 10^{-1}$ 0.1464 0.77 $\times 10^{-3}$ 0.16 $\times 10^{-2}$	-0.1896 0.2255 0.32 $\times 10^{-2}$ 0.38 $\times 10^{-2}$	-0.3529 0.2498 0.14 $\times 10^{-1}$ 0.15 $\times 10^{-1}$	
512	-0.1871 $\times 10^{-1}$ 0.5478 $\times 10^{-1}$ 0.87 $\times 10^{-4}$ 0.31 $\times 10^{-3}$	-0.4137 $\times 10^{-1}$ 0.1017 0.31 $\times 10^{-3}$ 0.77 $\times 10^{-3}$	-0.8874 $\times 10^{-1}$ 0.1633 0.12 $\times 10^{-2}$ 0.23 $\times 10^{-2}$	

Л и т е р а т у р а

1. Морозов А.А., Хисамутдинов А.И. К возможности решения методом Монте-Карло задач рассеяния в нерелятивистской квантовой механике. В тезисах докладов рабочего совещания "Метод Монте-Карло в вычислительной математике и математической физике", Минск, 1970.
2. Кауфман А.А., Табаровский Л.А., Терентьев С.А. Электромагнитное поле эллиптического цилиндра в горизонтально-слоистой среде. Институт геологии и геофизики СО АН СССР, Новосибирск, 1971.
3. Ермаков С.М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М., "Наука", 1976.

В. А. Чеверда

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН (ЛУЧЕВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ)

Решение обратных задач, т.е. задач определения свойств среды по решению некоторой граничной задачи теории распространения волн, известному по заданному многообразию, является одной из основных задач сейсмологии. К таким задачам относятся задачи определения границы раздела двух сред и параметров среды за ней по дифрагированному полю стационарного точечного источника, заданному на некотором многообразии. Как известно (см. [1],[2]), для больших частот хорошим приближением к решению в области регулярности поля лучей является лучевой ряд, причем на практике обычно ограничиваются его первым членом. Таким образом, если многообразие лежит в области регулярности поля лучей, то для дифрагированного поля, заданного на нем, естественно брать первый член лучевого ряда и, исходя из этой информации, искать границу раздела и параметры среды за ней. В случае выпуклой границы раздела и постоянной

скорости распространения "освещения" область является областью регулярности поля лучей, поэтому в дальнейшем считаем, что многообразие наблюдения лежит в "освещенной" области, а для поля на нем берем первый член лучевого ряда.

1. Постановка задачи.

Пусть гладкая выпуклая кривая Γ , задаваемая соотношением

$$y = g(x), \quad (I)$$

разделяет верхнюю полуплоскость на области Ω_1 и Ω_2 (рис. I).

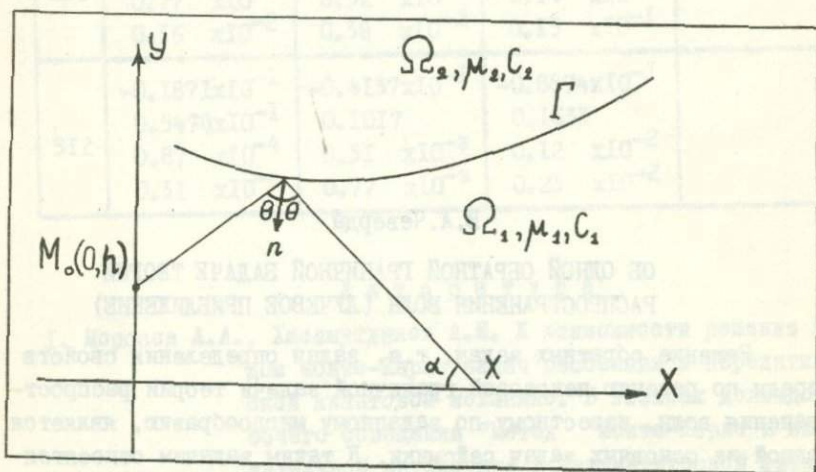


Рис. I.

Область Ω_1 заполнена средой с плотностью μ_1 и скоростью распространения звука c_1 , а область Ω_2 - средой с плотностью μ_2 и скоростью распространения звука c_2 . В точке $M_0(0, h)$ области Ω_1 расположен точечный источник стационарных колебаний, причем таким образом, что ось x лежит в "освещенной" области. Пусть u_1 и u_2 - давления в областях Ω_1 и Ω_2 соответственно. Тогда u_1 и u_2 удов-

летворяют следующим соотношениям:

$$(\Delta + k_1^2)u_1 = \delta(M - M_0), \quad k_1 = \omega/c_1,$$

$$(\Delta + k_2^2)u_2 = 0, \quad k_2 = \omega/c_2, \quad (2)$$

$$(u_1 - u_2)_\Gamma = 0,$$

$$\left(\frac{1}{\mu_1} \frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial u_2}{\partial n} \right)_\Gamma = 0.$$

Кроме того, считаем, что функции $u_1(x, y)$ допускают аналитическое продолжение в области $\text{Im } k_1 > 0$ и экспоненциально убывают при $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$, если $\text{Im } k_1 > 0$. В этом смысле $u_1(x, y)$ будут удовлетворять принципу предельного поглощения.

Требуется, зная давление u_1 на оси x :

$$u_1(x, 0) = f(x), \quad (3)$$

определить неизвестную функцию $g(x)$ и постоянные μ_2 и c_2 . Будем рассматривать задачу в высокочастотном приближении, т.е. считаем, что $k_1 \gg 1$. В этом случае $u_1(x, 0)$ представляется суммой:

$$u_1(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{-ik_1}} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{e^{ik_1 \sqrt{x^2 + h^2}}}{\sqrt{x^2 + h^2}} + \frac{m \cos \theta - \sqrt{h^2 - \sin^2 \theta}}{m \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \right) \times \frac{e^{ik_1(R_0 + R_1)}}{\sqrt{R_0 + R_1}},$$

где

$$m = \mu_2 / \mu_1$$

$$n = k_2 / k_1$$

- R_0 - расстояние от источника до точки отражения;
 R_1 - расстояние от точки отражения до точки наблюдения;
 ρ - радиус кривизны в точке отражения;
 θ - угол отражения.

Тогда из (3) получаем следующее уравнение:

$$\Psi(x) = \frac{m \cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{m \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \cdot \frac{e^{ik_1(R_0 + R_1)}}{\sqrt{R_0 + R_1 + \frac{2R_0R_1}{\rho \cos \theta}}} \quad (4)$$

Величина

$$V(\theta) = \frac{m \cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{m \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}$$

называется коэффициентом отражения.

2. Абсолютно отражающая граница

Считаем, что $m \ll 1$, т.е. $\mu_2 \ll \mu_1$. Это соответствует граничному условию

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0,$$

и коэффициент отражения в этом случае равен -1 . Тогда (4) принимает вид

$$\Psi(x) = - \frac{e^{ik_1(R_0 + R_1)}}{\sqrt{R_0 + R_1 + \frac{2R_0R_1}{\rho \cos \theta}}} \quad (5)$$

Таким образом, на самом деле мы получаем два соотношения:

$$\varphi(x) = e^{ik_1(R_0 + R_1)},$$

$$\Psi_1(x) = R_0 + R_1 + \frac{2R_0R_1}{\rho \cos \theta}.$$

а. Определение границы по фазе отраженной волны.

Пусть нам известна функция

$$\varphi(x) = e^{ik_1(R_0 + R_1)} \quad (6)$$

Продифференцировав (6), мы получим:

$$\frac{d\varphi}{dx} = ik_1 \cdot \cos \alpha \cdot \varphi \quad (7)$$

И, следовательно, мы знаем угол α - угол пересечения отраженного луча с осью x (рис. I). Но тогда ясно, что, задав точку на кривой Γ , мы можем найти на оси x точку с соответствующим углом α , и следовательно, определив для этой точки сумму $R_0 + R_1$, а затем, двигаясь по оси x с достаточно мелким шагом, определить и кривую Γ .

б. Определение границы по модулю отраженной волны.

Считаем теперь известной функцию

$$\Psi_1(x) = R_0 + R_1 + \frac{2 R_0 R_1}{\rho \cos \theta} \quad (8)$$

(8) представляет собой уравнение второго порядка на неизвестную функцию $g(x)$:

$$g''(x_0) \cdot \frac{2[x_0^2 + (g(x_0) - h)^2] \cdot \sqrt{(x - x_0)^2 + g^2(x_0)}}{(1 + g'^2(x_0))(g(x_0) - x_0 \cdot g'(x_0))} + \sqrt{x_0^2 + (g(x_0) - h)^2} + \\ + \sqrt{(x - x_0)^2 + g^2(x_0)} = \Psi_1(x), \quad (9)$$

где $(x_0, g(x_0))$ - точка отражения на кривой Γ . Из геометрии лучей легко получаем соотношение, связывающее x и x_0 :

$$x - x_0 + \frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + g^2(x_0)}}{(1 + g'^2(x_0))\sqrt{x_0^2 + (g(x_0) - h)^2}} \cdot [2(g(x_0) - h) \cdot g'(x_0) + \\ + x_0(1 - g'^2(x_0))], \quad (10)$$

Таким образом нами получена система двух уравнений (9)+(10) на две неизвестные функции: $g(x_0)$ и $x(x_0)$. Покажем, что начальные условия

$$\left. \begin{aligned} g(c) &= d \\ x(c) &= e \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

единственным образом определяют решение системы (9) + (10).

Из условий (II) после простых геометрических рассуждений можно определить $g'(c)$. Рассмотрим теперь (III), переписав его в виде

$$\Phi(x_0, x, g, g') = 0. \quad (I2)$$

Покажем, что его можно разрешить относительно производной g' :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial g'} = 2 \sqrt{\frac{(x-x_0)^2 + g^2(x_0)}{x_0^2 + (g(x_0)-h)^2}}.$$

$$\frac{g(x_0) - h - x_0 \cdot g'(x_0) - g'(x_0) \cdot (x_0 + g'(x_0)(g(x_0) - h))}{(1 + g'^2(x_0))^2} =$$

$$= 2 \sqrt{\frac{(x-x_0)^2 + g^2(x_0)}{x_0^2 + (g(x_0)-h)^2}} \cdot \frac{\cos \theta - g'(x_0) \cdot \sin \theta}{(1 + g'^2(x_0))^{5/2}};$$

$$\cos \theta - g'(x_0) \cdot \sin \theta = (1 - g'(x_0) \cdot \operatorname{tg} \theta) \cos \theta \neq 0.$$

В самом деле, пусть напротив

$$1 - g'(x_0) \cdot \operatorname{tg} \theta = 0.$$

Тогда $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \theta$, где α - угол наклона касательной к Γ в точке x_0 к оси x , а это означает, что отраженный луч параллелен оси x . Таким образом, нами доказано,

что $\frac{\partial \Phi}{\partial y'} \neq 0$, но тогда из теоремы о неявной функции следует,

что существует одна и только одна функция $F(x_0, x, g)$ такая, что

$$\frac{dg}{dx} = F(x_0, x, g), \quad (I3)$$

и подстановка (I3) в (I0) обращает последнее в тождество в окрестности точки $(c, 1, d, g'(c))$. Кроме того, функция

$F(x_0, x, g)$ непрерывно дифференцируема по всем своим аргументам.

Рассмотрим теперь уравнение (9), переписав его в виде

$$\frac{d^2 g}{dx^2} = H(x_0, x, g, g'). \quad (I4)$$

Функция $H(x_0, x, g, g')$ будет непрерывно дифференцируемой по всем своим аргументам, если $\Psi_1(x)$ непрерывно дифференцируема. Продифференцировав (I3) по x_0 и подставив в (I4), получим

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx_0} + \frac{\partial F}{\partial g} \cdot \frac{dg}{dx_0} = H(x_0, x, g, F(x_0, x, g)).$$

При условии, что $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$, получаем уравнение

$$\frac{dx}{dx_0} = G(x_0, x, g), \quad (I5)$$

которое вместе с (I3) образует замкнутую систему, нормально разрешенную по Коши с непрерывно дифференцируемыми правыми частями, а (II) - начальные условия для этой системы.

Таким образом, нам остается показать, что $\partial F / \partial x = 0$. Так как из теоремы о неявной функции следует, что подстановка (I3) в (I0) обращает последнее в тождество, то, продифференцировав это тождество по x , получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial g'} \cdot \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

И, следовательно, надо проверить, что

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial g'} \right| < \infty \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} \neq 0.$$

Первое условие проверяется точно так же, как и условие

$$\frac{\partial \Phi}{\partial g'} \neq 0:$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 1 + \frac{x_0 - x}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + g^2(x_0)}} \cdot \frac{2(g(x_0) - h) \cdot g'(x_0) + x_0 \cdot (1 - g'^2(x_0))}{(1 + g'^2(x_0)) \cdot \sqrt{x_0^2 + (g(x_0) - h)^2}}.$$

В правой части второй множитель во втором слагаемом есть проекция единичного вектора отраженного луча на ось x . Следовательно, во втором слагаемом оба множителя по модулю меньше единицы и, следовательно, $\partial \Phi / \partial x \neq 0$.

Итак, нами доказана следующая теорема.

Т е о р е м а . Пусть на отрезке $[a, b]$ оси x задана функция $\Psi(x) > 0$, $\Psi(x) \in C^1[a, b]$. Кроме того, заданы условия (I0), причем $1 \in [a, b]$. Тогда в окрестности точки $(c, g(c))$ существует и притом единственная выпуклая кривая Γ , задаваемая уравнением $y = g(x_0)$, $g(x_0) \in C^2$, такая, что $\Psi(x)$ является модулем первого члена лучевого ряда для волн, отраженных от этой кривой Γ .

Следовательно, зная либо фазу, либо модуль, нельзя определить кривую Γ , не зная некоторой дополнительной информации о ней. Покажем, что, зная в некоторой точке модуль и фазу в некоторой окрестности этой точки, мы сможем определить необходимую информацию, а именно, условия (II). В самом деле, продифференцировав (7) по x , получим:

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} = -ik \Phi \sin \alpha \cdot \frac{dx}{dx} - k^2 \cdot \Phi \cdot \cos^2 \alpha. \quad (16)$$

Если обозначить $\rho_1(x)$ - радиус кривизны отраженной волны, то получим:

$$\rho_1 = - \frac{\sin \alpha}{\frac{d\alpha}{dx}} ; \quad (I7)$$

и в то же время

$$\rho_1 = R_1 + \frac{R_0}{1 + \frac{2 R_0}{\rho \cos \theta}} = \Psi_1(x) \cdot \gamma^{-1},$$

где $\gamma = 1 + \frac{2 R_0}{\rho \cos \theta}$.

Следовательно, мы можем из (I6) и (I7) определить γ . Но тогда, решая уравнение

$$\Psi_1(x) - R_1 \cdot \gamma = R_0 \equiv \sqrt{R_1^2 + x^2 + h^2 - 2R_1(x \cos \alpha - h \sin \alpha)},$$

единственным образом определяем R_1 и, следовательно, точку отражения на кривой Γ и условия (II). После этого, используя только модуль или только фазу, находим кривую Γ .

3. Общий случай

Пусть теперь коэффициент отражения равен

$$V(\theta) = \frac{m \cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{m \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}},$$

Требуется по информации (3) определить кривую Γ и постоянные m и n . Мы будем рассматривать только ту часть кривой Γ , для которой $|\theta| < \theta_p$, где θ_p - угол полного внутреннего отражения, определяемый из уравнения

$$|\sin \theta_p| = n.$$

В этом случае $v(\theta)$ является вещественной величиной, поэтому уравнение (4) представляет собой два уравнения:

$$\underline{\varphi}(x) = e^{ik_1(R_0 + R_1)}, \quad (6)$$

$$\Psi(x) = \frac{m \cos \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{m \cos \theta + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{R_0 + R_1 + \frac{2 R_0 R_1}{\rho \cos \theta}}}. \quad (13)$$

Из уравнения (7) находим угол α и, следовательно, точку на оси x , в которую приходит луч, для которого угол отражения $\theta = 0$. Пусть это будет точка x_1 . Тогда из (II) получим:

$$\Psi(x_1) = \frac{m - n}{m + n} \cdot \frac{1}{\sqrt{R_0 + R_1 + \frac{2 R_0 R_1}{\rho}}},$$

а радиус кривизны отраженной волны в этой точке:

$$\rho_1(x_1) = R_1 + \frac{R_0}{1 + \frac{2 R_0}{\rho}}.$$

Кроме того, для любой точки на оси x имеет место соотношение:

$$\frac{v^2(\theta)}{\Psi^2(x) \cdot R_0} = \frac{\rho_1}{\rho_1 - R_1}.$$

Продифференцировав обе части по x и беря $x = x_1$, получим

$$-\frac{2v^2(0) \cdot \Psi'(x_1)}{R_0 \cdot \Psi^3(x_1)} = + \frac{-\rho_1' \cdot R_1 + \rho_1 \cdot \cos \alpha}{(\rho_1 - R_1)^2}. \quad (19)$$

Кроме того, имеют место соотношения

$$R_0 = R_1 - \frac{h}{\sin \alpha},$$

$$V^2(0) = \Psi^2(x_1) \cdot R_0 \cdot \frac{\rho_1}{\rho_1 - R_1}.$$

Подставив их в (19), получим

$$-2 \frac{\Psi'(x_1)}{\Psi(x_1)} \cdot \rho_1 = \frac{\rho_1 \cdot \cos \alpha - \rho_1' \cdot R_1}{\rho_1 - R_1},$$

откуда получим

$$R_1 = \rho_1 \cdot \frac{\cos \alpha \cdot \Psi(x_1) + 2\rho_1 \cdot \Psi'(x_1)}{\rho_1' \cdot \Psi(x_1) + 2\rho_1 \cdot \Psi'(x_1)},$$

А так как нам известен также и угол α , мы находим точку отражения на кривой Γ . После этого мы можем по фазе найти еще одну точку на Γ , и следовательно, определить коэффициенты m и n , а затем, используя либо фазу, либо модуль, определить кривую Γ .

4. Численные результаты

Были проведены тестовые расчеты. В качестве границы брались следующие две кривые:

$$\left(\frac{x-10}{10}\right)^2 + \left(\frac{y-10}{1}\right)^2 = 1,$$

$$\left(\frac{x-10}{10}\right)^2 + \left(\frac{y-10}{5}\right)^2 = 1.$$

Коэффициент отражения $V(\theta)$ брался равным единице. Сначала вычислялся первый член лучевого ряда для отраженной вол-

ны на оси x , после этого в него вносилась погрешность. Величина погрешности бралась порядка $k^{-1/2}$, так как, проводя те же рассуждения, что и в работе [3], можно получить следующую оценку:

$$u(x, y) = \frac{e^{ik_1 \tau(x, y)}}{\sqrt{k_1}} v_0(x, y) + O(k_1^{-1} \cdot \tau^{-1/2}),$$

где $u(x, y)$ — точное решение задачи дифракции на гладком выпуклом замкнутом контуре, а $v_0(x, y)$ — первый член лучевого ряда. После этого методом Рунге-Кутты решалась система двух уравнений (9) + (10) с начальными условиями (11).

В расчетах было взято $k = 100$ и вносилась погрешность порядка 10%. Первая кривая определялась для $10 \leq x \leq 19.2$, при этом ошибка определения координат кривой не превышала 2%, а радиуса кривизны — 10%. Вторая кривая определялась при $10 \leq x \leq 13.3$ и ошибка определения ее координат не превышала 1%, а радиуса кривизны — 8%.

В заключение выражаю благодарность члену-корреспонденту АН СССР А.С.Алексееву за постановку задачи и полезные советы.

Л и т е р а т у р а

1. Алексеев А.С., Бабич В.М., Гельчинский Б.Я. Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов. — Сб.: "Вопросы динамической теории распространения волн", вып.5, 1961, с. 3-25.
2. Бабич В.М., Булдырев В.С. Асимптотические методы дифракции коротких волн, М, "Наука", 1972.
3. Бабич В.М. О коротковолновой асимптотике функции Грина для уравнения Гельмгольца. "Математический сборник", 1964, т.65, (107), вып.4, с. 576-630.

А Н Н О Т А Ц И И
статей, помещенных в сборнике

УДК 535.317.2

"Распределение интенсивности излучения некогерентного источника". Антипов М.В. - Сб. "Вычислительные проблемы математических задач геофизики" (Математические проблемы геофизики). Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1977,

В данной работе рассматривается ряд математических вопросов оптики для некогерентного светового излучения, связанных с задачей определения параметров изображения на экране. Делается предположение о стохастичности не только излучающей поверхности, но и параметров волнового возмущения, которое позволяет несколько по-иному оценить степень некогерентности источника. Предлагаются примеры расчета интенсивности для двух источников некогерентного излучения простой геометрии. Получено выражение для индикатрисы углового излучения некогерентного источника. Библ. - 5 назв., рис. - 4.

УДК 518.12

"О повышении разрешения фотографических изображений". Виноградов С.П. - Сб. "Вычислительные проблемы математических задач геофизики" (Математические проблемы геофизики). Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1977,

Численно исследуется возможность повышения разрешающей способности оптических систем, описываемых уравнением

$$\int_0^1 \int_0^1 k(x_1 - y_1)k(x_2 - y_2)\varphi(y_1, y_2)dy_1 dy_2 = f(x_1, x_2), \quad 0 \leq x_1, x_2 \leq 1$$

для $k(x) = \sin(ax)/x$, $k(x) = \sin^2(ax)/x^2$.

Приближенное решение этого уравнения находится в виде ряда по системе линейно независимых функций. Для определения коэффициентов разложения используется метод коллокаций. Приводятся результаты численных экспериментов. Библиография - 5 названий, рис. - 4.

УДК 517.945

"Численный эксперимент по автоматизированному восстановлению рельефа по его фотоизображениям". Гейдт В.В. - Сб. "Вычислительные проблемы математических задач геофизики" (Математические проблемы геофизики). Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1977,

Проведено численное моделирование полностью автоматизированного метода восстановления рельефа по его фотоизображениям в случае ламбертова закона отражения. Рельеф восстанавливается с относительной погрешностью, меньшей 10%. Алгоритм устойчив по отношению к изменению начальных данных и эффективен в различных, достаточно экстремальных, условиях, которые могут встречаться на практике. Библиография - 3 названия.

УДК 517.945

"Об одной задаче волновой оптики". Деревцов Е.Ю. - Сб. "Вычислительные проблемы математических задач геофизики" (Математические проблемы геофизики). Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1977,

В статье уточняются условия, при которых имеет место однозначное определение носителя v и плотности μ дискретного потенциального тела (v, μ) ; устанавливается количество оптических систем, необходимое для этого. При дополнительном предположении принадлежности носителя v некоторому классу подмножеств замкнутой гладкой поверхности показана единственность восстановления множества v по двум своим F - изображениям. Приведены результаты численных экспериментов по восстановлению носителя v дискретного потенциального тела (v, μ) по трем приведенным линеаризованным изображениям. Библиография - 4 названия, табл. - 2.

УДК 550.834

"О некоторых задачах рассеяния плоских SH - волн на одномерно неоднородных средах." Добринский В.И., Горбунов В.А. В сб. "Вычислительные проблемы математических задач геофизики" (Математические проблемы геофизики). Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1977,

Рассмотрена обратная задача об определении скорости поперечных волн и плотности в полупространстве по данным о рассеянии плоских SH - волн при двух углах их падения. Доказана ее единственность в локальной постановке и приведен алгоритм решения.

Описан численный метод расчета волнового поля в случае косоугольного падения плоской SH - волны на полупространство, заполненное неидеально упругой средой Больцмана. Приведены тестовые примеры использования предложенных алгоритмов.

УДК 550.344

"Обращаемые разностные схемы для расчета фундаментальных решений двух гиперболических уравнений." Добринский В.И. В сб. "Вычислительные проблемы математических задач геофизики" (Математические проблемы геофизики). Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1977,

Для двух задач расчета фундаментальных решений построены разностные схемы, обладающие свойством обращения относительно коэффициента уравнений. Показана сходимость и устойчивость решений прямых задач. Библиография - 7 назв., рис. - 1.

УДК 517.945

"О связи задачи определения оптического тела по его изображениям с одной задачей линейной интегральной геометрии". Кирейтов В.Р. - В сб. "Вычислительные проблемы математических задач геофизики" (Математические проблемы геофизики). Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1977,

В статье устанавливается связь между задачей определения светящегося тела по его изображениям и одной задачей интегральной геометрии, состоящей в определении неизвестной функции по ее интегралам вдоль кривых заданного семейства

кривых. Библ. - 5 назв.

УДК 517.945

"Лабораторный эксперимент по автоматизированному восстановлению рельефа по его фотоизображениям." Лаврентьев М.М., Пушной Б.М., Гейдт В.В., Ивченко Г.А., Кирейтов В.Р., Чейдо Г.П. - В сб. "Вычислительные проблемы математических задач геофизики" (Математические проблемы геофизики). Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1977,

Проведен лабораторный эксперимент по автоматизированному методу восстановления рельефа по его фотоизображениям в случае ламбертова закона отражения.

Рельеф восстановлен с относительной погрешностью меньше 30% в 60 из 90 точек. Библ. - 3 назв., рис. - 1.

УДК 518.12 : 539.125.523

"Сопоставление результатов численных методов и эксперимента в задаче импульсного нейтрон-нейтронного каротажа". Морозов А.А., Поляченко А.Л., Хисамутдинов А.И., Шапошникова Т.А. - В сб. "Вычислительные проблемы математических задач геофизики" (Математические проблемы геофизики). Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1977,

В работе проводится сравнение результатов расчета задачи ИННК, полученных различными численными методами и в эксперименте. И использованные методы - Монте-Карло и разностные. "Геометрия" задачи - двухслойная бесконечная цилиндрическая среда. Библ. - 7 назв., рис. - 2, табл. - 2.

УДК 519.24/28:550.837

"Пример монте-карловских вычислений в задачах электроразведки". Хисамутдинов А.И., Табаровский Л.А. - В сб. "Вычислительные проблемы математических задач геофизики" (Математические проблемы геофизики). Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1977,

Методом Монте-Карло решается задача о возбуждении цилиндрической неоднородности, численное решение которой было получено ранее и другим методом. Цель работы - получить некоторый опыт применения Монте-Карло в задачах электроразведки.

Результаты вычислений и сопоставлений показывают, что вполне разумно использовать названный метод в указанной области (по крайней мере, в низкочастотных методах).

УДК 513.73

"Об одной обратной граничной задаче теории распространения волн (лучевое приближение)". Чеверда В.А. - В сб. "Вычислительные проблемы математических задач геофизики" (Математические проблемы геофизики). Изд-во ВЦ СО АН СССР, Новосибирск, 1977,

В работе рассматривается задача определения выпуклой границы двух сред и параметров за ней (плотности и скорости звука) по отраженной волне, заданной на оси x . Задача рассматривается в высокочастотном приближении. Показано, что если известен первый член лучевого ряда для отраженной волны, то единственным образом определяется выпуклая граница раздела и параметры среды за ней.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ГЕОФИЗИКИ

Сборник научных трудов

Под редакцией А.С.Алексеева

Технический редактор В.С.Сергеев

Художник-оформитель И.Г.Бархатова

Подписано в печать 16/ХП- 1977 г. МН18012
Формат бумаги 60x90 1/16 Объем 8,1 п.л. Уч.-изд.л.8,4
Тираж 500 экз. Заказ № 68 Цена 57 коп.

Ротап rint ВЦ СО АН СССР, Новосибирск 90

2407

Цена 57 коп.