

**ТЕОРИЯ МЕТОДА
ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ
ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ
ГЕОКАРТИРОВАНИЯ
И РУДНОЙ
ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ**

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ

ТЕОРИЯ МЕТОДА
ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ
ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ
ГЕОКАРТИРОВАНИЯ
И РУДНОЙ
ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ

Ответственный редактор
доктор технических наук
А. А. Кауфман

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
НОВОСИБИРСК

1971

В сборнике рассмотрены некоторые вопросы теории нестационарного электромагнитного поля индуктивных источников.

Анализ нестационарного поля магнитного диполя в однородном полупространстве и двухслойной проводящей среде произведен на основе расчета компонент поля на ЭВМ. Результаты расчета приведены в виде графиков и таблиц. Исследована связь поля с параметрами среды при средних значениях параметра $\frac{\tau}{h}$.

Получено асимптотическое разложение для электромагнитного поля магнитного диполя «бесконечно» длинного кабеля и петли, справедливое в области низких частот и в области больших времен (двухслойная среда). В поздней стадии становления исследована связь поля с параметрами среды. В частности, показано, что глубинность метода переходных процессов в поздней стадии не зависит от разности. Произведена оценка сигналов для дипольного варианта МПП при решении задач геологического картирования.

Исследовано влияние неоднородной проводящей вмещающей среды на вторичные поля рудных объектов в МПП. Эти данные получены в результате моделирования на кольцевом индукционном интеграторе.

Г. М. Морозова, А. А. Кауфман

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ В ОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В статье рассмотрено переменное электромагнитное поле вертикального и горизонтального магнитного диполей на поверхности однородного проводящего полупространства при возбуждении поля импульсом тока в форме прямоугольной ступени. Получены асимптотические выражения для компонент поля и их производных по времени. Приведены таблицы значений компонент поля.

Вертикальный магнитный диполь

Как известно [1], выражения для компонент поля вертикального магнитного диполя (E_φ , B_z , B_r) имеют вид

$$E_\varphi^z = \frac{3M\rho}{2\pi r^4} e_\varphi^z; B_z^z = -\frac{\mu M}{4\pi r^3} b_z^z; B_r^z = -\frac{\mu M}{4\pi r^3} b_r^z, \quad (1)$$

где ρ — удельное сопротивление среды;

M — момент магнитного диполя;

r — расстояние от диполя до точки измерения;

μ — магнитная проницаемость среды, равная $4\pi \cdot 10^{-7}$ гн/м.

$$e_\varphi^z = \left[\Phi(u) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} u \left(1 + \frac{u^2}{3} \right) e^{-\frac{u^2}{2}} \right]; \quad (2)$$

$$b_r^z = \left[1 - \left(1 - \frac{9}{u^2} \right) \Phi(u) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \left(\frac{9}{u} + 2u \right) \right]; \quad (3)$$

$$b_r^z = 4e^{-\frac{u^2}{4}} \left[\left(2 + \frac{u^2}{4} \right) I_1 \left(\frac{u^2}{4} \right) - \frac{u^2}{4} I_0 \left(\frac{u^2}{4} \right) \right]. \quad (4)$$

Здесь

$$u = \frac{2\pi r}{\tau}; \quad \tau = 2\pi \sqrt{2t} a; \quad a = \frac{1}{\sqrt{\mu\gamma}}, \quad (5)$$

γ — удельная проводимость среды;

t — время;

Φ — интеграл вероятности.

$$\Phi(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^u e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

$I_0(x)$ и $I_1(x)$ — модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядков.

В табл. 1 приведены значения e_φ^z , b_z^z и b_r^z как функции параметра $\frac{\tau}{r}$.

Рассмотрим поведение компонент поля, когда параметр $\frac{\tau}{r}$ мал. Согласно (5), параметр u при этом стремится к бесконечности. Используя асимптотические выражения для функций $\Phi(u)$, $I_0(u)$ и $I_1(u)$ при $u \rightarrow \infty$

$$\Phi(u) \rightarrow 1, \quad I_0(u) \rightarrow \frac{e^u}{\sqrt{2\pi u}} \left(1 + \frac{1}{8u} + \frac{9}{128u^2} \right), \quad (5')$$

$$I_1(u) \rightarrow \frac{e^u}{\sqrt{2\pi u}} \left(1 - \frac{3}{8u} - \frac{15}{128u^2} \right),$$

находим

$$E_\varphi^z = \frac{3M\rho}{2\pi r^4}; \quad B_z^z = \frac{\mu M}{4\pi r^3} \frac{9}{u^2} = \frac{9M\rho}{2\pi r^5} t \quad (6)$$

и

$$B_r^z = \frac{\mu M}{4\pi r^3} \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{\pi} u} = \frac{3\mu M}{\pi r^4} \sqrt{\frac{2t}{\mu\gamma\pi}}.$$

Характер влияния удельного сопротивления среды и расстояния до источника такой же, как в волновой зоне для гармонического диполя. Электрическое поле на дневной поверхности не зависит от времени, магнитное поле растет с увеличением времени (вертикальная компонента растет быстрее, чем горизонтальная). В области больших значений параметра $B_z^z < B_r^z$.

Таблица 1

| $\frac{\pi}{r}$ | $e\varphi$ | $1 - b_z^2$ | b_z^2 |
|--------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 0,1250 · 10 ⁰ | +0,1000 · 10 ¹ | 0,9964 · 10 ⁰ | +0,9516 · 10 ⁻¹ |
| 0,1486 | 0,1000 | 0,9950 | 0,1131 · 10 ⁰ |
| 0,1768 | 0,1000 | 0,9929 | 0,1344 |
| 0,2102 | 0,1000 | 0,9899 | 0,1597 |
| 0,2500 | 0,1000 | 0,9858 | 0,1897 |
| 0,2973 | 0,1000 | 0,9799 | 0,2252 |
| 0,3536 | 0,1000 | 0,9715 | 0,2672 |
| 0,5204 | 0,1000 | 0,9597 | 0,3167 |
| 0,5000 | 0,1000 | 0,9430 | 0,3749 |
| 0,5946 | 0,1000 | 0,9192 | 0,4427 |
| 0,7071 | 0,1000 | 0,8860 | 0,5213 |
| 0,8409 | 0,1000 | 0,8388 | 0,6110 |
| 0,1000 · 10 ¹ | 0,1000 | 0,7720 | 0,7112 |
| 0,1189 | 0,1000 | 0,6776 | 0,8187 |
| 0,1411 | +0,9986 · 10 ⁰ | 0,5445 | 0,9241 |
| 0,1682 | 0,9841 | 0,3625 | +0,1004 · 10 ¹ |
| 0,2000 | 0,9210 | 0,1405 | 0,1017 |
| 0,2378 | 0,7778 | -0,7562 · 10 ⁻¹ | +0,9296 · 10 ⁰ |
| 0,2828 | 0,5761 | 0,2273 · 10 ⁰ | 0,7564 |
| 0,3364 | 0,3750 | 0,2893 | 0,5509 |
| 0,4000 | 0,2186 | 0,2786 | 0,3651 |
| 0,4757 | 0,1168 | 0,2296 | 0,2246 |
| 0,5657 | +0,5839 · 10 ⁻¹ | 0,1709 | 0,1306 |
| 0,6727 | 0,2779 | 0,1198 | +0,7276 · 10 ⁻¹ |
| 0,8000 | 0,1279 | 0,7903 · 10 ⁻¹ | 0,3931 |
| 0,9514 | +0,5726 · 10 ⁻² | 0,5081 | 0,2077 |
| 0,1131 · 10 ² | 0,2518 | 0,3192 | 0,1080 |
| 0,1345 | 0,1093 | 0,1973 | +0,5555 · 10 ⁻² |
| 0,1600 | +0,4702 · 10 ⁻³ | 0,1206 | 0,2833 |
| 0,1903 | 0,2009 | 0,7311 · 10 ⁻² | 0,1437 |
| 0,2263 | +0,8543 · 10 ⁻⁴ | 0,4407 | +0,7255 · 10 ⁻³ |
| 0,2691 | 0,3621 | 0,2646 | 0,3653 |
| 0,3200 | 0,1531 | 0,1584 | 0,1836 |
| 0,3805 | +0,6464 · 10 ⁻⁵ | 0,9465 · 10 ⁻³ | +0,9211 · 10 ⁻⁴ |
| 0,4525 | 0,2725 | 0,5647 | 0,4617 |
| 0,5382 | 0,1148 | 0,3366 | 0,2312 |
| 0,6400 | +0,4834 · 10 ⁻⁶ | 0,2005 | 0,1158 |

Чем больше расстояние от источника и удельная проводимость среды, тем при больших временах имеют место отмеченные выше закономерности в поведении поля.

Из сопоставления результатов расчета по асимптотическим формулам с данными, приведенными в табл. 1, следует, что выражения (6) справедливы с достаточной точностью для электрического поля E_{φ}^z и вертикальной компоненты B_z^z

$$\text{при } \frac{\tau}{r} < 2$$

и для горизонтальной компоненты B_r^z

$$\text{при } \frac{\tau}{r} < 1.$$

В табл. 2 даны максимальные значения времени t (в мксек), при которых выполняются соотношения (6) для E_{φ}^z и B_z^z .

Таблица 2

| $\rho, \text{ОМ}\cdot\text{М}$ | 5 | 10 | 20 | 40 | 100 | 1000 |
|--------------------------------|------|------|------|------|------|-------|
| $r, \text{М}$ | | | | | | |
| 50 | 32,0 | 16,0 | 8,00 | 4,00 | 1,60 | 0,16 |
| 100 | 127 | 63,6 | 31,8 | 15,9 | 6,36 | 0,636 |
| 200 | 508 | 254 | 127 | 63,6 | 25,4 | 2,54 |

Применяя разложение интеграла вероятности и модифицированных функций Бесселя по малому параметру.

$$\Phi(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} \right)$$

$$I_0(x) \rightarrow 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64}; \quad I_1(x) \rightarrow \frac{x}{2} + \frac{x^3}{16},$$

получаем приближенные формулы для компонент поля, когда параметр $\frac{\tau}{r}$ значительно больше единицы (большие времена, относительно небольшая проводимость среды, малые расстояния от точки наблюдения до источника):

$$E_{\varphi}^z = \frac{\mu^{\frac{5}{2}} \gamma^{\frac{3}{2}} r M}{40 \pi \sqrt{\pi} t^{5/2}}; \quad (7)$$

$$B_z^z = \frac{\mu M}{4\pi r^3} \left[1 + \frac{2}{15} \cdot \frac{r^3}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{t^{3/2}} (\mu \gamma)^2 \right]; \quad (8)$$

$$B_r^z = \frac{\mu M}{4\pi r^3} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{r^4}{t^2} (\mu \gamma)^2. \quad (9)$$

Вертикальная компонента магнитного поля значительно больше горизонтальной и не зависит от расстояния.

Поэтому при профилировании методом переходных процессов изменение расстояния и угла наклона приемной рамки приводит к меньшим ошибкам, чем в аналогичных вариантах профилирования с гармоническими полями.

Магнитное поле связано с параметрами среды и расстоянием так же, как реактивная компонента поля в гармоническом режиме. Поэтому при больших временах магнитное поле более чувствительно к изменениям удельной проводимости среды, чем амплитуда вторичного поля в области низких частот.

Приближенные формулы для компонент поля (7), (9), (22) можно получить, используя связь временной характеристики со спектральной плотностью.

Как известно [2],

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\omega) \sin \omega t d\omega,$$

где $f(\omega)$ — реактивная компонента электрического или магнитного поля, деленная на частоту.

Применяя интегрирование по частям, имеем:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{t} f(\omega) \cos \omega t \left| + \frac{1}{t^2} f'(\omega) \sin \omega t \right| - \frac{1}{t^2} \int_0^{\infty} f''(\omega) \times \right. \\ \left. \times \sin \omega t d\omega \right]. \quad (9')$$

Этот процесс можно продолжить, если $f(\omega)$ или ее первые производные равны нулю при $\omega=0$. При $\omega=\infty$ реактивные компоненты магнитного поля вертикального магнитного диполя и их производные по частоте равны нулю [3]. Как известно,

$$\frac{\text{Re} b_z^z}{\omega} \simeq A\omega + \frac{r^4 (\mu \gamma)^2}{32} \omega \ln \omega$$

при $\omega \rightarrow 0$.

$$\frac{\operatorname{Re} b_z^z}{\omega} \simeq \frac{1}{\omega} + \frac{2\sqrt{2}}{15} r^3 \cdot \frac{\mu \omega \gamma^{3/2}}{\omega},$$

где A — коэффициент, не зависящий от частоты. Подставляя эти разложения (9'), видим, что

$$b_r^z(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} b_z^z(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega \simeq \frac{r^4 (\mu \gamma)^2}{32t^2},$$

$$b_z^z(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} b_z^z(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega \simeq 1 + \frac{2}{15} \cdot \frac{r^3 (\mu \gamma)^{3/2}}{t^{3/2}}.$$

Таким образом, магнитное поле при больших временах определяется поведением реактивной компоненты гармонического поля в области низких частот, обусловленной взаимодействием индуцированных токов в проводящей среде.

Формулы (7)–(9) удовлетворительно описывают поле, когда параметр $\frac{\tau}{r}$ больше 16. На рис. 1 приведены графики для компонент поля вертикального диполя в зависимости от параметра $\frac{\tau}{r}$. Рассмотрим производные по времени от компонент магнитного поля. Согласно (3) и (4).

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_z^z}{\partial t} = \frac{\mu M}{4\pi r^3} \frac{\partial b_z^z}{\partial t} = \frac{9M\rho}{2\pi r^5} \left[\Phi(u) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} u \times \right. \\ \left. \times \left(1 + \frac{u^2}{3} + \frac{u^4}{9} \right) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_r^z}{\partial t} = \frac{\mu M}{4\pi r^3} \cdot \frac{\partial b_r^z}{\partial t} = \frac{4\pi M}{r^3} \frac{\rho u^2}{\tau^2} e^{-\frac{u^2}{4}} \left[\left(1 + \frac{u^2}{2} \right) I_0\left(\frac{u^2}{4}\right) - \right. \\ \left. - \left(2 + \frac{u^2}{2} + \frac{8}{u^2} \right) \times I_1\left(\frac{u^2}{4}\right) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

В табл. 3 приведены значения $\frac{\partial b_r^z}{\partial t}$ и $\frac{\partial b_z^z}{\partial t}$ в зависимости от параметра $\frac{\tau}{r}$; соответствующие графики представлены на рис. 2.

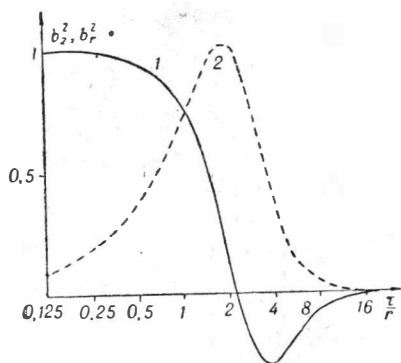


Рис. 1. Графики зависимости компонент поля от параметра
1) b_z^z , 2) b_r^z .

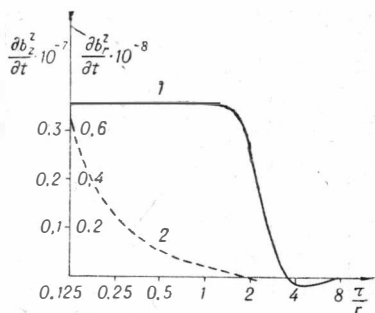


Рис. 2. Графики зависимости производных компонент поля по времени от параметра τ/r .

1) $\frac{\partial b_z^z}{\partial t}$, 2) $\frac{\partial b_r^z}{\partial t}$.

Из приближенных формул (6) и (8) следует, что

$$\frac{\partial B_z^z}{\partial t} = \frac{9M\rho}{2\pi r^5} \quad \text{при } \frac{\tau}{r} < 2; \quad (12)$$

$$\frac{\partial B_r^z}{\partial t} = \frac{3M}{2\pi r^4} \sqrt{\frac{\mu\rho}{\pi t}} \quad \text{при } \frac{\tau}{r} < 1; \quad (13)$$

$$\frac{\partial B_z^z}{\partial t} = -\frac{\mu M}{20\pi \sqrt{\pi}} (\mu\gamma)^{3/2} \frac{1}{t^{5/2}} \quad \text{при } \frac{\tau}{r} > 16; \quad (14)$$

$$\frac{\partial B_r^z}{\partial t} = -\frac{\mu M}{64\pi} r (\mu\gamma)^2 \frac{1}{t^3} \quad \text{при } \frac{\tau}{r} > 16. \quad (15)$$

Э. д. с., индуцированная в рамке, связана с параметрами среды так же, как компоненты вторичного магнитного поля.

Горизонтальный магнитный диполь

Воспользуемся известными соотношениями между компонентами электромагнитного поля вертикального и горизонтального магнитного диполей [4] на оси диполя ($\varphi=0$)

$$\begin{aligned} b_r^x &= -e_{\varphi}^{xz} - b_z^z, \\ b_z^x &= b_r^z, \\ b_r^x &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

| $\frac{r}{r}$ | $\frac{db^2}{dt^2}$ | $\frac{db_r^2}{dt}$ | $\frac{\tau}{r}$ | $\frac{db^2}{db^t}$ | $\frac{db_r^2}{dt}$ |
|---------------------|---------------------------|---------------------------|--------------------------|----------------------------|----------------------------|
| 0,1210 ⁰ | 0,3581 · 10 ⁷ | 0,6519 · 10 ⁸ | 0,3364 | 0,8141 · 10 ⁺⁵ | -0,8106 · 10 ⁸ |
| 0,1486 | 0,3581 | 0,4993 | 0,4000 | -0,1012 · 10 ⁺⁶ | -0,4672 |
| 0,1768 | 0,3581 | 0,3907 | 0,4757 | -0,1152 | -0,2326 |
| 0,2102 | 0,3581 | 0,3111 | 0,5657 | -0,8051 · 10 ³ | -0,1046 |
| 0,2500 | 0,3581 | 0,2511 | 0,6727 | -0,4636 | -0,4385 · 10 ⁵ |
| 0,2973 | 0,3581 | 0,2047 | 0,8000 | -0,2393 | -0,1748 |
| 0,3536 | 0,3581 | 0,1680 | 0,9514 | -0,1157 | -0,6727 · 10 ⁴ |
| 0,4204 | 0,3581 | 0,1384 | 0,1131 · 10 ² | -0,5356 · 10 ⁺⁴ | -0,2525 |
| 0,5000 | 0,3581 | 0,1141 | 0,1345 | -0,2408 | -0,9315 · 10 ³ |
| 0,5946 | 0,3581 | 0,9367 · 10 ⁷ | 0,1600 | -0,1061 | -0,3393 |
| 0,7071 | 0,3581 | 0,7625 | 0,1903 | -0,4610 · 10 ⁺² | -0,1225 |
| 0,8409 | 0,3581 | 0,6104 | 0,2263 | -0,1983 | -0,4398 · 10 ² |
| | 0,3581 | 0,4745 | 0,2691 | -0,8477 · 10 ⁺² | -0,1571 |
| 0,1189 | 0,3580 | 0,3489 | 0,3200 | -0,3605 | -0,5598 · 10 ¹ |
| 0,1411 | 0,3547 | 0,2228 | 0,3805 | -0,1528 | -0,1990 |
| 0,1682 | 0,3309 | 0,8665 · 10 ⁶ | 0,4525 | -0,6462 · 10 ⁺¹ | -0,7061 · 10 ⁰ |
| 0,2000 | 0,2600 | -0,3950 | 0,5382 | -0,2728 | -0,2503 |
| 0,2378 | 0,1539 | -0,1098 · 10 ⁷ | 0,6400 | -0,1150 | -0,8866 · 10 ⁻¹ |
| 0,2828 | 0,6065 · 10 ⁺⁸ | -0,1130 | | | |

В экваториальной плоскости $\left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right)$

$$b_{\varphi}^x = -e_{\psi}^{*z}$$

(17)

Здесь b_{φ}^x параллельна оси диполя:

$$e_{\varphi}^{*z} = \left[1 - \Phi(u) \left(1 - \frac{3}{u^2} \right) - \frac{3}{u} \sqrt{\frac{2}{u^2}} e^{-\frac{u^2}{2}} \right]$$

(18)

| $\frac{\tau}{r}$ | $b_r^x + 2$ | $b_\varphi^x + 1$ | $-\frac{db_\varphi^x}{dt}$ | $-\frac{db_r^x}{dt}$ |
|--------------------------|----------------------------|---------------------------|----------------------------|---------------------------|
| 0,1250 · 10 ⁰ | +0,1995 · 10 ¹ | +0,9988 · 10 ⁰ | +0,1194 · 10 ⁷ | +0,4775 · 10 ⁷ |
| 0,1486 | 0,1993 | 0,9983 | 0,1194 | 0,4775 |
| 0,1768 | 0,1991 | 0,9976 | 0,1194 | 0,4775 |
| 0,2102 | 0,1987 | 0,9966 | 0,1194 | 0,4775 |
| 0,2500 | 0,1981 | 0,9953 | 0,1194 | 0,4775 |
| 0,2973 | 0,1973 | 0,9933 | 0,1194 | 0,4775 |
| 0,3536 | 0,1962 | 0,9905 | 0,1194 | 0,4775 |
| 0,4204 | 0,1946 | 0,9866 | 0,1194 | 0,4775 |
| 0,5000 | 0,1924 | 0,9810 | 0,1194 | 0,4775 |
| 0,5946 | 0,1892 | 0,9731 | 0,1194 | 0,4775 |
| 0,7071 | 0,1848 | 0,9620 | 0,1194 | 0,4775 |
| 0,8409 | 0,1785 | 0,9463 | 0,1194 | 0,4775 |
| 1,1000 · 10 ¹ | 0,1696 | 0,9240 | 0,1194 | 0,4775 |
| 0,1189 | 0,1570 | 0,8925 | 0,1194 | 0,4774 |
| 0,1411 | 0,1393 | 0,8481 | 0,1193 | 0,4740 |
| 0,1682 | 0,1118 | 0,7855 | 0,1174 | 0,4483 |
| 0,2000 | 0,8408 | 0,7003 | 0,1099 | 0,3699 |
| 0,2378 | 0,5175 | 0,5931 | +0,9284 · 10 ⁺⁶ | 0,2467 |
| 0,2828 | +0,2458 · 10 ⁰ | 0,4738 | 0,6876 | 0,1294 |
| 0,3364 | +0,6615 · 10 ⁻¹ | 0,3555 | 0,4476 | 0,5290 · 10 ⁺⁶ |
| 0,4000 | -0,2560 · 10 ⁻¹ | 0,2520 | 0,2609 | 0,1597 |
| 0,4757 | 0,5746 | 0,1721 | 0,1394 | 0,2420 · 10 ⁺⁵ |
| 0,5657 | 0,5783 | 0,1131 · 10 ⁻¹ | +0,6970 · 10 ⁺⁵ | -0,1081 |
| 0,6727 | 0,4549 | 0,7231 | 0,3317 | 0,1319 |
| 0,8000 | 0,3376 | 0,4528 | 0,1526 | 0,8670 · 10 ⁺⁴ |
| 0,9514 | 0,2286 | 0,2795 | +0,6834 · 10 ⁺⁴ | 0,4735 |
| 0,1131 · 10 ² | 0,1485 | 0,1707 | 0,3006 | 0,2350 |
| 0,1345 | 0,9386 · 10 ⁻² | 0,1034 | 0,1305 | 0,1103 |
| 0,1600 | 0,5826 | 0,6234 · 10 ⁻² | +0,5613 · 10 ⁺³ | 0,4997 · 10 ⁺³ |
| 0,1903 | 0,3568 | 0,3743 | 0,2398 | 0,2212 |
| 0,2263 | 0,2166 | 0,2241 | +0,1020 | 0,9637 · 10 ⁺² |
| 0,2691 | 0,1307 | 0,1339 | +0,4322 · 10 ⁺² | 0,4154 |
| 0,3200 | 0,7850 · 10 ⁻³ | 0,7987 · 10 ⁻³ | 0,1828 | 0,1777 |
| 0,3805 | 0,4704 | 0,4761 | +0,7715 · 10 ⁺¹ | 0,7565 · 10 ⁺¹ |
| 0,4525 | 0,2811 | 0,2836 | 0,3253 | 0,3209 |
| 0,5382 | 0,1678 | 0,1689 | 0,1370 | 0,1357 |
| 0,6400 | 0,1000 | 0,1005 | +0,5771 · 10 ⁺⁰ | 0,5731 · 10 ⁺⁰ |

Поле горизонтального магнитного диполя в отличие от поля вертикального диполя зависит от координаты φ .

Для компонент поля b_r^x и b_φ^x соответственно на оси диполя и в экваториальной плоскости находим:

$$b_r^x = -2 + 2 \left[\left(1 - \frac{6}{u^2} \right) \Phi(u) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \left(u + \frac{6}{u} \right) \right], \quad (19)$$

$$b_{\varphi}^x = \left[-1 + \left(1 - \frac{3}{u^2}\right) \Phi(u) + \frac{3}{u} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \right]. \quad (20)$$

В табл. 4 приведены значения b_r^x , на оси диполя, b_{φ}^x в экваториальной плоскости и значения их производных по времени.

Когда параметр $\frac{\tau}{r}$ мал, согласно (5')

$$B_r^x = -\frac{6tM\rho}{\pi r^5} \quad (\varphi = 0) \text{ при } \frac{\tau}{r} < 2 \quad (21)$$

и

$$B_{\varphi}^x = -\frac{3Mt\rho}{2\pi r^5} \quad \left(\varphi = \frac{\pi}{2}\right) \text{ при } \frac{\tau}{r} < 2.$$

Рассмотрим поведение компонент магнитного поля при больших значениях параметра τ/r .

Из асимптотических разложений следует:

$$B_r^x = -\frac{\mu M}{4\pi r^3} \left[2 + \frac{1}{15} \frac{r^3 (\mu\gamma)^{3/2}}{\sqrt{\pi} t^{3/2}} \right], \quad (22)$$

$$B_{\varphi}^x = \frac{\mu M}{4\pi r^3} \left[-1 + \frac{1}{15} \frac{r^3 (\mu\gamma)^2}{\sqrt{\pi} t^{3/2}} \right]$$

при $\frac{\tau}{r} > 16$.

В табл. 5 даются минимальные времена (в мксек), начиная с которых выполняются асимптотические соотношения для компонент поля вертикального и горизонтального диполей при больших τ/r .

Таблица 5

| $\rho, \text{ОМ}\cdot\text{М}$ | | | | | | |
|--------------------------------|------|------|------|-----|-----|------|
| $r, \text{М}$ | 5 | 10 | 20 | 40 | 100 | 1000 |
| 50 | 256 | 128 | 64 | 32 | 128 | 32 |
| 100 | 1016 | 509 | 256 | 128 | 512 | 5,1 |
| 200 | 4064 | 2032 | 1016 | 509 | 203 | 20,3 |

В заключение приведем выражение для производных компонент поля по времени и их асимптотические разложения:

$$\frac{\partial B_r^x}{\partial t} = -\frac{\mu M}{4\pi r^3} \cdot \frac{6}{r^2 \mu \gamma} \left[4\Phi(u) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \left(4u + \frac{4u^3}{3} + \frac{u^5}{3} \right) \right]; \quad (23)$$

$$\frac{\partial B_\varphi^x}{\partial t} = -\frac{\mu M}{4\pi r^5} \frac{6}{\mu \gamma} \left[\Phi(u) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \left(u + \frac{u^3}{3} \right) \right].$$

Пользуясь асимптотическими формулами для $\Phi(x)$ и e^{-x} , при $x \rightarrow 0$ получаем:

$$\frac{\partial B_\varphi^x}{\partial t} = -\frac{\mu M}{4\pi} \frac{(\mu\gamma)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi} 10t^{\frac{5}{2}}} \quad \text{при } \frac{\tau}{r} > 16, \quad (24)$$

$$\frac{\partial B_r^x}{\partial t} = \frac{\mu M}{4\pi} \frac{(\mu\gamma)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi} 10t^{\frac{5}{2}}};$$

$$\frac{\partial B_\varphi^x}{\partial t} = -\frac{3}{2} \frac{M \rho}{\pi r^5} \quad \text{при } \frac{\tau}{r} < 1, \quad (25)$$

$$\frac{\partial B_r^x}{\partial t} = -\frac{6M \rho}{\pi r^5}.$$

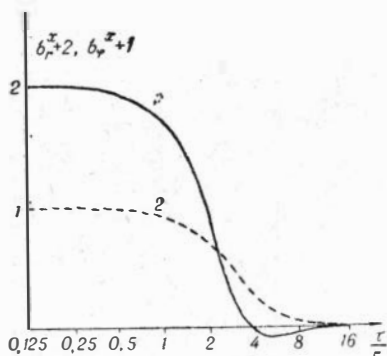


Рис. 3. Графики компонент поля горизонтального диполя в зависимости от параметра τ/r

- 1) b_r^x , 2) b_φ^x .

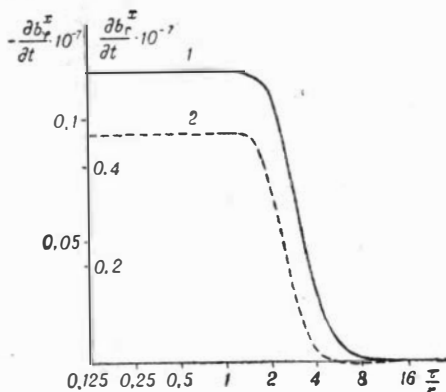


Рис. 4. Графики производных компонент поля горизонтального магнитного диполя в зависимости от параметра τ/r

- 1) $\frac{\partial b_\varphi^x}{\partial t}$, 2) $\frac{\partial b_r^x}{\partial t}$.

На рис. 3 и 4 представлены графики магнитных компонент поля горизонтального диполя и их производных по времени.

Как следует из (8) и (22), компоненты магнитного поля B_{φ}^x , B_r^x горизонтального диполя имеют такую же зависимость от параметров среды и времени, как и компонента B_z^x вертикального магнитного диполя.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. М. Шейнман. Об установлении электромагнитных полей в земле. Прикладная геофизика, вып. 3. М., Гостоптехиздат, 1947.
 2. Л. Л. Ваньян. Основы электромагнитных зондирований. М., «Недра», 1965.
 3. Л. Б. Гасаненко. Нормальное поле вертикального гармонического и низкочастотного диполя.— Уч. зап. ЛГУ, вып. 10, № 249.
 4. Л. Б. Гасаненко, Г. В. Молочнов. Электромагнитное поле горизонтального магнитного диполя над горизонтально-слоистой структурой.— Уч. зап. ЛГУ, вып. 10, № 249, 1958.
-

А. А. Кауфман, Г. М. Морозова

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ВЕРТИКАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЫ

Изучение влияния удельной проводимости и мощности пласта, а также удельной проводимости пород, залегающих под наносами,— одна из наиболее важных задач теории метода переходных процессов (МПП).

Ниже выводятся выражения для компонент поля. Результаты расчета представлены в виде таблиц и графиков. Установлены пределы применимости приближенных формул, описывающих поле в поздней стадии становления; исследовано влияние удельной проводимости пласта и основания на временные характеристики поля, а также роль мощности пласта и расстояния между источником поля и точкой наблюдения.

Формулировка задачи

Представим себе пространство, разделенное двумя плоскостями на три среды. Выберем цилиндрическую систему координат. Ось Z перпендикулярна плоскости раздела. Начало координат— в месте расположения диполя. Обозначим удельные проводимости пласта и проводящего основания соответственно γ_1 и γ_2 . Магнитный момент диполя направлен по оси Z и равен единице. Кроме того, будем считать магнитную проницаемость в средах одинаковой и равной $4\pi \cdot 10^{-7}$ гн/м.

Для квазистационарного поля уравнения Максвелла, как известно, записываем:

$$\operatorname{rot} E_0 = -\frac{\partial B_0}{\partial t}, \quad \operatorname{div} E_0 = 0; \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} H_0 = \gamma E_0, \quad \operatorname{div} H_0 = 0.$$

Вначале предположим, что диполь питается током, зависимость которого от времени можно представить как $\operatorname{Re} e^{-i\omega t}$, и

$$E_0 = E e^{-i\omega t}, \quad H_0 = H e^{-i\omega t}. \quad (2)$$

Уравнения (1) теперь имеют вид

$$\operatorname{rot} E = i\omega\mu H, \quad \operatorname{div} E = 0; \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} H = \gamma E, \quad \operatorname{div} H = 0.$$

Введем вектор-потенциал \bar{A} , связанный с основными компонентами поля \bar{E} и \bar{H} соотношениями:

$$\begin{aligned} \bar{H} &= k^2 \bar{A} + \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A}, \\ \bar{E} &= i\omega\mu \operatorname{rot} \bar{A}, \end{aligned} \quad (3')$$

где $k^2 = i\omega\mu\gamma$ — квадрат волнового числа. Как известно, вектор-потенциал A удовлетворяет волновому уравнению:

$$\nabla^2 \bar{A} + k^2 \bar{A} = 0. \quad (4)$$

Так как рассматривается вертикальный магнитный диполь, то его поле может быть представлено только через одну вертикальную составляющую

$$A = A_z(r, z), \quad (5)$$

которая зависит от двух координат r и z . Составляющие векторов поля на основании формул (3) связаны с вертикальной компонентой A следующим образом:

$$\begin{aligned} H_r &= \frac{\partial^2 A_z}{\partial r \partial z}, \quad H_z = k^2 A_z + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}, \quad H_\varphi = 0; \\ E_2 = E_z &= 0, \quad E_\varphi = -i\omega\mu \frac{\partial A_z}{\partial r}. \end{aligned} \quad (6)$$

Граничные условия для вертикальной компоненты A_z вследствие непрерывности E_x и H_x компонент поля имеют вид.

$$A_l = A_k, \quad \frac{\partial A_l}{\partial z} = \frac{\partial A_k}{\partial z} \quad (7)$$

при $z = h_{ik}$. Вблизи полюса (точка 0) поле должно совпадать с полем диполя в однородном пространстве. Для этого необходимо, чтобы функция A_z обращалась при $R \rightarrow 0$ в бесконечность порядка $1/R$. На бесконечности ($R \rightarrow \infty$) функ-

ция A_z стремится к нулю. Таким образом, для решения сформулированной задачи мы должны проинтегрировать систему уравнений

$$\begin{aligned}\nabla^2 A_{0z} &= 0, \\ \nabla^2 A_{1z} + k_1^2 A_{1z} &= 0, \\ \nabla^2 A_{2z} + k_2^2 A_{2z} &= 0\end{aligned}\quad (8)$$

(k_1, k_2 — волновые числа пласта и проводящего основания) и обеспечить выполнение граничных условий (7) и указанных выше краевых условий в начале координат и в бесконечности.

Рассмотрим сначала частные решения волнового уравнения $\nabla^2 A_z + k^2 A_z = 0$. Если $A_z = A_z(R)$, то последнее уравнение принимает вид

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial A_z}{\partial R} + k^2 A_z = 0,$$

или

$$\frac{\partial^2 (A_z R)}{\partial R^2} + k^2 (A_z R) = 0,$$

откуда

$$A_z R = C e^{ikR} + B e^{-ikR}.$$

Условимся брать комплексные k с положительной мнимой частью, так что в дальнейшем $\operatorname{Re} ik < 0$, где Re — вещественная часть комплексного числа. Функция A_z при $R \rightarrow \infty$ должна стремиться к нулю, поэтому, положив $B = 0$ и приняв $C = \frac{M}{4\pi}$, получаем

$$A_z = \frac{M}{4\pi} \cdot \frac{e^{ikR}}{R}. \quad (9)$$

Эта формула определяет вектор-потенциал магнитного диполя в однородном пространстве. В частности, в непроводящей среде

$$A_z = \frac{M}{4\pi} \cdot \frac{1}{R}. \quad (10)$$

Теперь рассмотрим решение волнового уравнения в цилиндрических координатах (r, z), так как поле не зависит от азимута ϕ . В этих координатах получаем волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z = 0.$$

Полагая $A_z = U(r) \cdot v(z)$, приходим после разделения переменных к двум уравнениям:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \lambda^2 U = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - (\lambda^2 - k^2) v = 0,$$

Здесь λ — постоянная разделения. Первое уравнение есть уравнение Бесселя, имеющее частным решением функции Бесселя первого и второго рода $J_0(\lambda r)$ и $Y_0(\lambda r)$, и

$$U(r) = AJ_0(\lambda r) + BY_0(\lambda r).$$

Функция $Y_0(\lambda r)$ при $r=0$ обращается в бесконечность и поэтому не может принимать участия в решении задачи. Второе уравнение имеет решение:

$$v(z) = Ce^{-\sqrt{\lambda^2 - k^2} z} + De^{\sqrt{\lambda^2 - k^2} z}.$$

Общее решение волнового уравнения записываем:

$$A_z(r, z) = \frac{M}{4\pi} \int_0^\infty \{Le^{\sqrt{\lambda^2 - k^2} z} + Ne^{-\sqrt{\lambda^2 - k^2} z}\} J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (11)$$

Условимся выбирать значение квадратного корня в показателе степени так, чтобы вещественная часть корня была положительна, т. е.

$$\operatorname{Re} \sqrt{\lambda^2 - k^2} > 0, \quad (12)$$

Поле в среде, где находится диполь, представим в виде суммы первичного и вторичного возбуждений

$$A_{0z} = \frac{M}{4\pi} \left[\frac{1}{R} + A_{0z}^{(1)} \right].$$

Как известно, имеет место соотношение

$$\frac{1}{R} = \int_0^\infty e^{-\lambda |z|} J_0(\lambda r) d\lambda. \quad (12')$$

Введем следующие обозначения: верхнее непроводящее полупространство, в котором находится диполь, отметим индексом (0), пласт — индексом (1) и проводящее основание — индексом (2). Выражения для вектор-потенциала в каждой области:

$$A_z^0 = \frac{M}{4\pi} \int_0^\infty [e^{-\lambda |z|} + D_1 e^{\lambda z}] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (z \leq h_1), \quad (13)$$

$$A_z^1 = \frac{M}{4\pi} \int_0^\infty [D_2 e^{\lambda_1 z} + D_3 e^{-\lambda_1 z}] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (h_1 \leq z \leq h_2), \quad (14)$$

$$A_z^{(2)} = \frac{M}{4\pi} \int_0^\infty D_4 e^{-\lambda_2 z} J_0(\lambda r) d\lambda \quad (z \geq h_2). \quad (15)$$

Здесь h_1 — расстояние от диполя до дневной поверхности; $h_2 = h_1 + h$; h — мощность пласта;

$$\lambda_1 = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}; \quad \lambda_2 = \sqrt{\lambda^2 - k_2^2}.$$

Для определения неизвестных коэффициентов D_1 , D_2 , D_3 и D_4 , согласно граничным условиям (7), получаем систему четырех линейных уравнений:

$$\begin{aligned} e^{-\lambda h} + D_1 e^{\lambda h} &= D_2 e^{\lambda h_1} + D_3 e^{-\lambda h_1}, \\ -e^{-\lambda_1 h_1} + \lambda D_1 e^{\lambda h_1} &= \lambda_1 D_2 e^{\lambda_1 h_1} - \lambda_1 D_3 e^{-\lambda_1 h_1}, \\ D_2 e^{\lambda_1 h_1} + D_3 e^{-\lambda_1 h_2} &= D_4 e^{-\lambda_2 h_2}, \\ \lambda_1 D_2 e^{\lambda_1 h_2} - \lambda_1 D_3 e^{-\lambda_1 h_2} &= \lambda_2 D_4 e^{-\lambda_2 h_2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Решая систему, находим следующее выражение для коэффициента D_1 , определяющего поле в верхнем полупространстве и, в частности, на дневной поверхности:

$$D_1 = -\frac{k_{10} + k_{12} e^{-2\lambda_1 h}}{1 + k_{12} k_{10} e^{-2\lambda_1 h}}, \quad (17)$$

и вектор-потенциал вторичного поля в верхнем полупространстве имеет вид

$$A_z = -\frac{M}{4\pi} \int_0^\infty \frac{k_{10} + k_{12} e^{-2\lambda_1 h}}{1 + k_{12} k_{10} e^{-2\lambda_1 h}} e^{\lambda z} J_0(\lambda r) d\lambda, \quad (18)$$

где

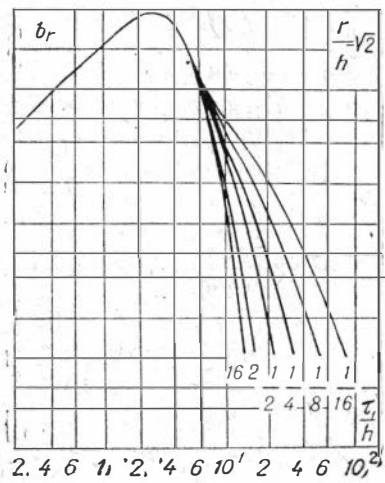
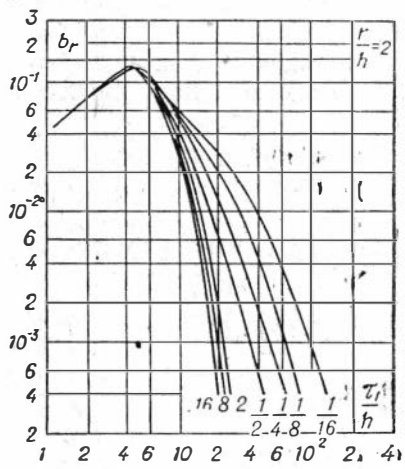
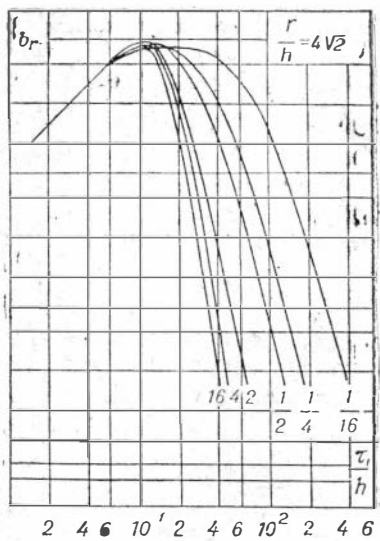
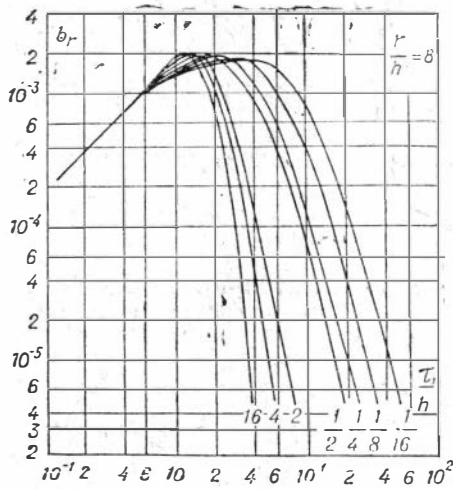
$$k_{10} = \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1 + \lambda}; \quad k_{12} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}.$$

С помощью интегрального преобразования Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

определялось нестационарное поле. Возбуждение поля представляет собою мгновенное включение постоянного тока I :

$$I(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ I & \text{при } t > 0, \end{cases}$$



Как известно, спектральная функция возбуждения обратно пропорциональна ω :

$$I(\omega) = -\frac{1}{i\omega},$$

поэтому для временной характеристики вектор-потенциала A_z получаем:

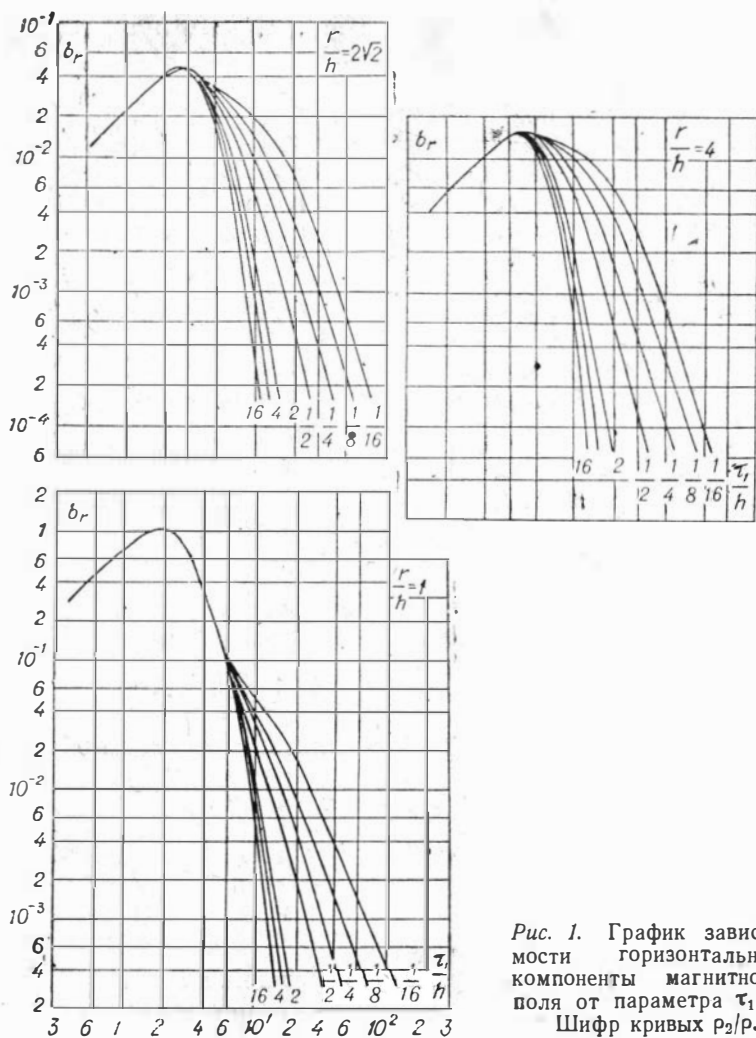


Рис. 1. График зависимости горизонтальной компоненты магнитного поля от параметра τ_1/h . Шифр кривых ρ_2/ρ .

$$A_z(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A_z(\omega) \frac{1}{-i\omega} e^{-i\omega t} d\omega, \quad (19)$$

или, согласно [1],

$$A_z(t) \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} A_z(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega. \quad (20)$$

Таким образом, определение нестационарного поля сводится к расчету двойных несобственных интегралов, содержащих осциллирующие функции.

Для определения высокочастотной части спектра поля вместо интегрального представления были использованы известные выражения компонент поля в волновой зоне [2].

При расчете неустановившегося поля на больших временах появляются значительные трудности, возникновение которых связано с сильной осцилляцией подинтегральной функции, при этом величина поля быстро убывает.

Расчет поля в нестационарном режиме был выполнен для трех компонент:

$$E_{\varphi} = \frac{3M \rho_1}{2\pi r^4} e_{\varphi}; \quad B_z = \frac{\mu M}{4\pi r^3} b_z \quad \text{и} \quad B_r = -\frac{\mu M}{4\pi r^3} b_r$$

при следующих соотношениях удельного сопротивления пласта ρ_1 и основания ρ_2 :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1}; \quad \frac{1}{16}; \quad \frac{1}{8}; \quad \frac{1}{4}; \quad \frac{1}{2}; \quad 1; \quad 2; \quad 4; \quad 8; \quad 16.$$

Расстояния между приемным и питающим диполями, отнесенные к мощности пласта h , полагались равными

$$\frac{r}{h} : 1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 8.$$

Значения параметра τ_1/h изменялись следующим образом:

$$2, 2\sqrt[4]{2}, 2\sqrt{2} \dots, \quad \text{где} \quad \tau_1 = \sqrt{2\pi \cdot 10^7 \rho_1 t}$$

Результаты расчета компонент поля b_z и b_r приведены в приложении и в виде графиков (рис. 1).

Влияние параметров среды на поле в зависимости от времени

Анализ поля в средах, для которых выполнены расчеты, позволяет сделать следующие выводы.

1. Согласно закону электромагнитной индукции, непосредственно после включения импульса тока магнитное поле равно нулю.

2. При относительно малых временах компоненты магнитного поля в двухслойной среде совпадают с полем в однород-

ном полупространстве, заполненном средой с удельным сопротивлением пласта ρ_1 .

3. В каждой точке дневной поверхности вертикальная компонента вторичного поля B_z по абсолютной величине вначале уменьшается от значения постоянного поля до нуля, затем, изменяя знак, растет, достигает максимума, не превышающего 30% от постоянного поля, и при больших временах быстро стремится к нулю. При этом полное поле становится равным полю магнитного диполя с постоянным моментом.

4. Поскольку в формулах не учитываются токи смещения, рассчитанное поле достигает любой точки среды мгновенно, другими словами, отсутствует эффект запаздывания.

5. Независимо от разносов ($\frac{r}{h} < 8$), компонента B_z при $\frac{\tau_1}{h} < 8$ практически не отличается от поля в однородном полупространстве с удельным сопротивлением ρ_1 . Влияние мощности пласта, удельного сопротивления проводящего основания наступает при $\frac{\tau_1}{h} > 8$.

6. Радиальная компонента поля на дневной поверхности магнитного вертикального диполя с постоянным моментом равна нулю. Поэтому непосредственно после включения тока в источнике компонента B_r равна нулю. С увеличением времени B_r растет, достигает максимума, и при больших временах, когда поле практически совпадает с полем постоянного магнитного диполя, горизонтальная составляющая магнитного поля B_r равна нулю.

7. Горизонтальная компонента поля меньше вертикальной.

8. В поздней стадии становления поля токи находятся главным образом в проводящем основании, и поле, измеряемое на дневной поверхности, в значительной мере зависит от удельного сопротивления основания. Поэтому общий характер зависимости поля от мощности пласта с увеличением времени следующий: вначале поле не зависит от мощности пласта, затем влияние ее возрастает, и при больших временах вновь мощность перестает оказывать влияние.

В поздней стадии становления уменьшается влияние удельного сопротивления пласта. Рассмотрим более подробно влияние мощности пласта и удельного сопротивления среды. В табл. 1 приведены значения вертикальной компоненты

Таблица I

| $\frac{\tau_1}{r} \backslash \frac{h}{r}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 | 8 |
|---|---------------|---------------|---------------|----------|--------|---------|----------|
| $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 16$ | | | | | | | |
| 8 | 0,00192 | 0,00776 | 0,0303 | 0,0649 | 0,0801 | 0,0790 | 0,0790 |
| $8\sqrt{2}$ | 0,000720 | 0,000708 | 0,00459 | 0,0170 | 0,0298 | 0,0300 | 0,0300 |
| 16 | 0,000416 | 0,000398 | 0,000700 | 0,00321 | 0,0113 | 0,0112 | 0,0112 |
| $16\sqrt{2}$ | 0,000186 | 0,000246 | 0,000420 | 0,000620 | — | 0,00418 | 0,00417 |
| 32 | — | 0,000098 | 0,000280 | 0,000227 | — | 0,00172 | 0,00158 |
| $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 4$ | | | | | | | |
| 8 | 0,0147 | 0,0226 | 0,0426 | 0,0690 | 0,0797 | 0,0791 | 0,0790 |
| $8\sqrt{2}$ | 0,00472 | 0,00564 | 0,0101 | 0,0204 | 0,0309 | 0,0304 | 0,0304 |
| 16 | 0,00184 | 0,00199 | 0,00260 | 0,00502 | 0,0126 | 0,0112 | 0,0112 |
| $16\sqrt{2}$ | 0,000798 | 0,000907 | 0,00103 | 0,00133 | — | 0,0426 | 0,0418 |
| 32 | — | — | 0,000494 | 0,000468 | — | 0,00182 | 0,00159 |
| $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{4}$ | | | | | | | |
| 8 | 0,239 | 0,203 | 0,248 | 0,0947 | 0,0802 | 0,0791 | 0,0790 |
| $8\sqrt{2}$ | 0,145 | 0,121 | 0,0867 | 0,0508 | 0,0339 | 0,0304 | 0,0304 |
| 16 | 0,0693 | 0,0599 | 0,0445 | 0,0275 | 0,0184 | 0,0114 | 0,0112 |
| $16\sqrt{2}$ | 0,0309 | 0,0279 | 0,0204 | 0,0140 | — | 0,00472 | 0,00418 |
| 32 | — | — | 0,00884 | 0,00661 | — | 0,00263 | 0,00160 |
| $32\sqrt{2}$ | — | — | 0,00397 | 0,00312 | — | — | 0,000665 |
| $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{16}$ | | | | | | | |
| 8 | 0,142 | 0,225 | 0,203 | 0,110 | 0,0804 | 0,0791 | 0,0790 |
| $8\sqrt{2}$ | 0,262 | 0,237 | 0,166 | 0,0764 | 0,0355 | 0,0304 | 0,0304 |
| 16 | 0,236 | 0,184 | 0,119 | 0,0551 | 0,0223 | 0,0114 | 0,0112 |
| $16\sqrt{2}$ | 0,153 | 0,111 | 0,0736 | 0,0369 | — | 0,00498 | 0,00418 |
| 32 | — | 0,0559 | 0,0391 | 0,0224 | — | 0,00322 | 0,00160 |
| $32\sqrt{2}$ | — | 0,0265 | 0,0185 | 0,0129 | — | — | 0,000701 |

магнитного поля в зависимости от мощности пласта. Как видно из таблицы, с увеличением мощности пласта поле возрастает, если пласт более проводящий, чем основание, и уменьшается, когда соотношение проводимостей обратное. При увеличении мощности пласта поле стремится к полю в однородном полупространстве с удельным сопротивлением ρ_1 . Чем более проводящий пласт, тем при меньших значениях мощности h поле в двухслойной среде $B_z^{\text{неодн}}$ становится равным полю в однородном полупространстве $B_z^{\text{одн}}$.

Так, при отношении удельных сопротивлений $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 16$ условие $B_z^{\text{неодн}} \approx B_z^{\text{одн}}(\rho_1)$ выполняется, если $\frac{h}{r} > 4$. Если $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1}{16}$,

поле на дневной поверхности совпадает с полем в однородном полупространстве, когда мощность пласта h более чем в восемь раз превышает разнос — r . В обоих случаях параметр

τ_1/h удовлетворяет соотношению $8 \leq \frac{\tau_1}{h} \leq 32$.

С увеличением времени возрастает роль токов, индуцированных в основании, поэтому соответственно увеличивается и мощность пласта, при котором выполняется равенство

$$B_z^{\text{неодн}} \approx B_z^{\text{одн}}(\rho_1).$$

Вертикальная компонента магнитного поля в двухслойной среде практически совпадает с полем в однородном полупространстве, если параметр

$$\frac{\tau_1}{r} \leq 8 \left(\frac{1}{16} \leq \frac{\rho_2}{\rho_1} \leq 16; \frac{h}{r} > 4 \right).$$

Анализ влияния удельного сопротивления основания на временные характеристики вертикальной компоненты магнитного поля был проведен при различных значениях мощности пласта (табл. 2). Поле B_z с уменьшением удельного сопротивления ρ_2 возрастает. При более поздних временах и с уменьшением мощности пласта дифференциация поля по проводимости основания становится заметнее. В табл. 3 приведены значения отношения

$$\frac{B_z \left(\rho_2 = \frac{1}{16} \right)}{B_z (\rho_2 = 16)}.$$

Таблица 2

| $\frac{\tau_2}{r}$ \ $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | 16 | 8 | 4 | 2 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |
|--|----|---|---|---|---------------|---------------|---------------|----------------|
|--|----|---|---|---|---------------|---------------|---------------|----------------|

$$\frac{h}{r}=4$$

| | | | | | | | | |
|----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 4 | 0,278 | 0,278 | 0,278 | 0,278 | 0,278 | 0,278 | 0,278 | 0,278 |
| 4 | 0,174 | 0,174 | 0,174 | 0,174 | 0,174 | 0,174 | 0,174 | 0,174 |
| 8 | 0,079 | 0,079 | 0,0791 | 0,791 | 0,791 | 0,791 | 0,791 | 0,791 |
| 8 | 0,030 | 0,030 | 0,0304 | 0,0304 | 0,0304 | 0,0304 | 0,0304 | 0,0304 |
| 16 | 0,0110 | 0,0112 | 0,0112 | 0,0113 | 0,0113 | 0,0114 | 0,0114 | 0,0114 |
| 16 | 0,00418 | 0,00419 | 0,0426 | 0,0433 | 0,0457 | 0,0472 | 0,0486 | 0,0498 |
| 32 | 0,00172 | 0,00181 | 0,00182 | 0,00194 | 0,00234 | 0,00263 | 0,00293 | 0,00322 |

$$\frac{h}{r}=2$$

| | | | | | | | | |
|-------------|--------|-------|-------|--------|-------|-------|-------|--------|
| 4 | 0,278 | 0,278 | 0,278 | 0,278 | 0,278 | 0,278 | 0,278 | 0,278 |
| $4\sqrt{2}$ | 0,175 | 0,175 | 0,175 | 0,175 | 0,175 | 0,175 | 0,175 | 0,175 |
| 8 | 0,804 | 0,796 | 0,797 | 0,0798 | 0,801 | 0,802 | 0,804 | 0,804 |
| $8\sqrt{2}$ | 0,0298 | 0,306 | 0,309 | 0,314 | 0,330 | 0,339 | 0,348 | 0,0355 |
| 16 | 0,0113 | 0,120 | 0,126 | 0,134 | 0,164 | 0,184 | 0,204 | 0,0223 |

$$\frac{h}{r}=1$$

| | | | | | | | | |
|--------------|----------|----------|----------|----------|---------|---------|---------|--------|
| 4 | 0,277 | 0,277 | 0,277 | 0,277 | 0,277 | 0,277 | 0,277 | 0,277 |
| $4\sqrt{2}$ | 0,268 | 0,169 | 0,170 | 0,172 | 0,177 | 0,179 | 0,181 | 0,182 |
| 8 | 0,0649 | 0,0664 | 0,0690 | 0,0731 | 0,0865 | 0,0947 | 0,103 | 0,110 |
| $8\sqrt{2}$ | 0,0170 | 0,0182 | 0,0204 | 0,242 | 0,0393 | 0,0508 | 0,0640 | 0,0764 |
| 16 | 0,00321 | 0,00383 | 0,00502 | 0,00723 | 0,0177 | 0,0275 | 0,0404 | 0,0551 |
| $16\sqrt{2}$ | 0,000620 | 0,000855 | 0,00133 | 0,00229 | 0,00777 | 0,0140 | 0,0237 | 0,0369 |
| 32 | 0,000227 | 0,000303 | 0,000468 | 0,000829 | 0,00328 | 0,00661 | 0,0127 | 0,0224 |
| $32\sqrt{2}$ | 0,000112 | 0,000139 | 0,000201 | 0,000344 | 0,00144 | 0,00312 | 0,00656 | 0,012 |

$$\frac{h}{r}=\frac{1}{2}$$

| | | | | | | | | |
|--------------|----------|----------|----------|----------|---------|---------|--------|--------|
| 4 | 0,253 | 0,258 | 0,265 | 0,272 | 0,278 | 0,273 | 0,263 | 0,252 |
| $4\sqrt{2}$ | 0,116 | 0,122 | 0,134 | 0,151 | 0,199 | 0,220 | 0,230 | 0,230 |
| 8 | 0,0303 | 0,0347 | 0,0426 | 0,0566 | 0,111 | 0,148 | 0,181 | 0,203 |
| $8\sqrt{2}$ | 0,00459 | 0,00643 | 0,0101 | 0,0172 | 0,0531 | 0,0867 | 0,128 | 0,166 |
| 16 | 0,000700 | 0,00130 | 0,00200 | 0,00538 | 0,0231 | 0,0445 | 0,0778 | 0,119 |
| $16\sqrt{2}$ | 0,000420 | 0,000603 | 0,00103 | 0,00200 | 0,00945 | 0,0204 | 0,0411 | 0,0736 |
| 32 | 0,000280 | 0,000341 | 0,000494 | 0,000835 | 0,00377 | 0,00884 | 0,0196 | 0,0391 |

| $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | 16 | 8 | 4 | 2 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |
|-------------------------|----|---|---|---|---------------|---------------|---------------|----------------|
|-------------------------|----|---|---|---|---------------|---------------|---------------|----------------|

$$\frac{h}{r} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

| | | | | | | | | |
|--------------|----------|----------|----------|----------|---------|--------|--------|--------|
| 4 | 0,214 | 0,225 | 0,242 | 0,262 | 0,277 | 0,255 | 0,217 | 0,175 |
| $4\sqrt{2}$ | 0,0801 | 0,0899 | 0,107 | 0,135 | 0,216 | 0,243 | 0,242 | 0,215 |
| 8 | 0,0164 | 0,0213 | 0,0309 | 0,0486 | 0,124 | 0,177 | 0,219 | 0,230 |
| $8\sqrt{2}$ | 0,00170 | 0,00343 | 0,00710 | 0,0148 | 0,0591 | 0,104 | 0,161 | 0,208 |
| 16 | 0,000382 | 0,000897 | 0,00209 | 0,00484 | 0,0249 | 0,0522 | 0,0971 | 0,154 |
| $16\sqrt{2}$ | 0,000279 | 0,000442 | 0,000858 | 0,00180 | 0,00988 | 0,0234 | 0,0501 | 0,0928 |
| 32 | 0,000129 | 0,000187 | 0,000378 | 0,000686 | 0,00382 | 0,0105 | 0,0244 | 0,0475 |

$$\frac{h}{r} = \frac{1}{4}$$

| | | | | | | | | |
|--------------|----------|----------|----------|----------|---------|--------|--------|--------|
| 4 | 0,164 | 0,182 | 0,211 | 0,248 | 0,273 | 0,217 | 0,129 | 0,0366 |
| $4\sqrt{2}$ | 0,0498 | 0,0617 | 0,0936 | 0,121 | 0,231 | 0,257 | 0,225 | 0,146 |
| 8 | 0,00776 | 0,0126 | 0,0226 | 0,0425 | 0,136 | 0,203 | 0,245 | 0,225 |
| $8\sqrt{2}$ | 0,000708 | 0,00221 | 0,00564 | 0,0134 | 0,0641 | 0,121 | 0,192 | 0,237 |
| 16 | 0,000398 | 0,000844 | 0,00199 | 0,00461 | 0,0265 | 0,0599 | 0,117 | 0,184 |
| $16\sqrt{2}$ | 0,000246 | 0,000400 | 0,000907 | 0,00175 | 0,0103 | 0,0279 | 0,0623 | 0,111 |
| 32 | 0,000098 | 0,000158 | — | 0,000676 | 0,00402 | — | — | 0,0559 |

Таблица 3

| $\frac{h}{r}$ | $\frac{\tau_1}{r}$ | 8 | 32 |
|---------------|--------------------|-----|-----|
| $\frac{1}{4}$ | 1 | 28 | 550 |
| | 1 | 1,7 | 100 |

Как было показано выше, вертикальная компонента поля практически не зависит от удельного сопротивления основания, если

$$\frac{h}{r} > 2 \text{ и } \frac{\tau_1}{r} < 8.$$

Чем меньше мощность пласта, тем на более ранних временах наблюдается влияние токов, индуцированных в проводящем основании.

В табл. 4 приведены значения отношений вертикальной компоненты в двухслойной среде $B_z^{\text{неодн}}$ к полю в однородном полупространстве $B_z^{\text{одн}}$ в зависимости от удельного сопротивления пласта и безразмерного параметра τ_2/r .

С уменьшением удельного сопротивления пласта поле стремится к полю в однородном полупространстве

Таблица 4

| $\frac{\tau_a}{r}$ \diagdown $\frac{p_1}{p_2}$ | 16 | 8 | 4 | 2 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |
|--|----|---|---|---|---------------|---------------|---------------|----------------|
|--|----|---|---|---|---------------|---------------|---------------|----------------|

$$\frac{h}{r}=4$$

| | | | | | | | | |
|--------------|------|-------|-------|-------|------|------|------|------|
| 4 | 0,94 | 0,954 | 1,0 | 1,02 | 0,97 | 0,95 | 0,98 | 0,99 |
| $4\sqrt{2}$ | 1,13 | 0,94 | 0,954 | 1 | 1 | 0,98 | 0,95 | 0,98 |
| 8 | 2,02 | 1,1 | 0,94 | 0,054 | 1,01 | 1,0 | 0,98 | 0,95 |
| $8\sqrt{2}$ | | 1,85 | 1,07 | 0,93 | 1,0 | 1,02 | 1,0 | 0,98 |
| 16 | | | 1,66 | 1,03 | 0,96 | 1,0 | 1,02 | 1,0 |
| $16\sqrt{2}$ | | | | 1,48 | 0,93 | 0,95 | 1,0 | 1,01 |
| 32 | | | | | | | | |

$$\frac{h}{r}=2$$

| | | | | | | | | |
|--------------|------|------|-------|------|------|------|------|------|
| 4 | 1,84 | 1,09 | 1,01 | 1,02 | 0,98 | 0,95 | 0,98 | 1,0 |
| $4\sqrt{2}$ | | 1,69 | 1,06 | 1,01 | 1,0 | 0,98 | 0,95 | 0,98 |
| 8 | | | 01,52 | 1,03 | 1,02 | 1,0 | 0,98 | 0,95 |
| $8\sqrt{2}$ | | | | 1,35 | 1,01 | 1,02 | 1 | 0,98 |
| 16 | | | | | 0,99 | 1,01 | 0,98 | 1,0 |
| $16\sqrt{2}$ | | | | | | 1,1 | 0,97 | 0,98 |
| 32 | | | | | | | 0,96 | 1,01 |

$$\frac{h}{r}=1$$

| | | | | | | | | |
|--------------|-----|------|-----|------|------|-------|------|------|
| 4 | 4,5 | 2,0 | 1,2 | 1,03 | 0,98 | 0,95 | 0,98 | 0,98 |
| $4\sqrt{2}$ | 8,4 | 3,3 | 1,6 | 1,1 | 1,0 | 0,98 | 0,95 | 0,98 |
| 8 | 14 | 5,4 | 2,3 | 1,2 | 1,0 | 1,0 | 0,98 | 0,95 |
| $8\sqrt{2}$ | 23 | 8,1 | 3,2 | 1,46 | 0,93 | 1,0 | 1,0 | 0,98 |
| 16 | | 11,5 | 4,2 | 1,74 | 0,77 | 0,87 | 0,99 | 1,0 |
| $16\sqrt{2}$ | | | 5,5 | 2,06 | 0,6 | 0,64 | 0,84 | 0,98 |
| 32 | | | | 2,6 | 0,52 | 0,415 | 0,57 | 0,82 |

$$\frac{h}{r}=\frac{1}{2}$$

| | | | | | | | | |
|--------------|------|------|------|------|------|-------|------|------|
| 4 | 9,8 | 4,0 | 1,87 | 1,15 | 1 | 0,95 | 0,98 | 0,99 |
| $4\sqrt{2}$ | 16,7 | 6,45 | 2,7 | 1,4 | 0,97 | 1,01 | 0,95 | 0,98 |
| 8 | 24,8 | 9,3 | 3,7 | 1,67 | 0,89 | 0,95 | 1,02 | 0,95 |
| $8\sqrt{2}$ | 32,6 | 12,4 | 4,6 | 1,9 | 0,71 | 0,78 | 0,93 | 1,02 |
| 16 | 41 | 16,4 | 5,6 | 2,14 | 0,54 | 0,54 | 0,71 | 0,94 |
| $16\sqrt{2}$ | | | 7 | 2,4 | 0,44 | 0,32 | 0,44 | 0,68 |
| 32 | | | | 2,7 | 0,45 | 0,215 | 0,20 | 0,39 |

| | | | | | | | | |
|-------------------------|----|---|---|---|---------------|---------------|---------------|----------------|
| $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ | 16 | 8 | 4 | 2 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |
| $\frac{\tau_2}{r}$ | | | | | | | | |

$$\frac{h}{r} = \frac{1}{4}$$

| | | | | | | | | |
|--------------|------|------|------|------|------|-------|-------|-------|
| 4 | 15,2 | 6 | 2,6 | 1,35 | 1,18 | 0,400 | 0,950 | 0,99 |
| $4\sqrt{2}$ | 25,2 | 9,6 | 3,8 | 1,72 | 0,89 | 1,2 | 0,32 | 0,94 |
| 8 | 35,3 | 14,1 | 4,95 | 2,0 | 0,71 | 0,76 | 1,2 | 0,17 |
| $8\sqrt{2}$ | 47 | | 6,3 | 2,19 | 0,54 | 0,49 | 0,65 | 1,17 |
| 16 | | | | 2,34 | 0,42 | 0,288 | 0,36 | 0,59 |
| $16\sqrt{2}$ | | | | 2,54 | 0,38 | 0,176 | 0,16 | 0,29 |
| 32 | | | | 3,0 | 0,4 | 0,165 | 0,069 | 0,098 |

$\left(\frac{B_z^{\text{неодн}}}{B_z^{\text{одн}}} \rightarrow 1 \right)$. Влияние удельного сопротивления пласта на

величину поля при более поздних временах становится слабее, так как возрастает роль токов, возникающих в проводящем основании.

Как известно [3], в поздней стадии становления справедливы асимптотические формулы для компонент электромагнитного поля, которые в точках дневной поверхности имели вид

$$\begin{aligned}
 B_z = & \frac{M \mu}{4\pi} \left\{ -\frac{32s^{3/2}\sqrt{2} \pi^3}{15 \sqrt{\pi} \tau_1^3} + \frac{8\pi^4 h}{\tau_1^4} s(s-1) + \frac{96\sqrt{2} \pi^5}{\sqrt{\pi} \tau_1^5} \times \right. \\
 & \times \left[r^2 \frac{4}{105} s^{5/2} + \frac{h^2 4 \sqrt{s}}{105} (1-s)(8s-9) \right]; \\
 & - 256 \frac{\pi^6}{\tau_1^6} \left[r^2 h \frac{5}{64} s^2 (s-1) + h^3 (s-1) \left(-\frac{5s^2}{24} + \frac{7s}{12} - \frac{1}{4} \right) \right] \}; \quad (21) \\
 B_r = & \frac{M \mu}{4\pi} \left\{ -\frac{2s^2 r \pi^4}{\tau_1^4} - \frac{96r \sqrt{z} \pi^5 h \cdot 32 \cdot s^{3/2}}{105 \sqrt{\pi} \tau_1^5} (1-s) + \right. \\
 & \left. + \frac{8r \pi^6 h^2}{6 \tau_1^6} (s-1) s (6-5s) \right\};
 \end{aligned}$$

$$E_{\psi} = \frac{M}{4\pi} \left\{ -\frac{rs^{3/2} 64 \sqrt{2} \pi^5}{5 \sqrt{\pi} \gamma_1 \tau_1^5} + \frac{64\pi^6 r h s}{\tau_1^6 \gamma_1} (s-1) + \frac{15 \cdot 64 \sqrt{2} r}{\gamma_1 \sqrt{\pi}} \times \right. \\ \left. \times \frac{\pi^7}{\tau_1^7} \left[r^2 \frac{s^{5/2}}{105} + \frac{4h^2 \sqrt{s}}{105} (1-s)(8s-9) \right] \right\}.$$

Введем понятие кажущейся проводимости γ_k , связанной с полем соотношением

$$\frac{\gamma_k^z}{\gamma_1} = \frac{B_z^{\text{неодн}}}{B_z^{\text{одн.}}(\gamma_1)}; \quad \frac{\gamma_k^r}{\gamma_1} = \frac{B_r^{\text{неодн}}}{B_r^{\text{одн.}}(\gamma_1)}.$$

Согласно (21), при больших значениях параметра τ_1/h получаем:

$$\frac{\gamma_k^z}{\gamma_1} \rightarrow \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^{3/2} \quad \text{и} \quad \frac{\gamma_k^r}{\gamma_1} \rightarrow \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^2.$$

Графики функций $\frac{\gamma_k^z}{\gamma_1}$ и $\frac{\gamma_k^r}{\gamma_1}$ в зависимости от параметра τ_1/h приведены на рис. 2 и 3. Каждая кривая оцифрована значением $\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^{3/2}$ на рис. 1 и $\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^2$ на рис. 3. Кривые кажущейся проводимости в поздней стадии практически не зависят от разносов. Изменение r/h в диапазоне от 0,7 до 5,6 приводит к изменениям γ_k/γ_1 , не превышающим 10% (при $\frac{\tau_1}{h} \geq 64$).

Как видно из рис. 2, 3, при $\frac{\tau_1}{h} \approx 256$ кривые $\frac{\gamma_k^z}{\gamma_1}$ и $\frac{\gamma_k^r}{\gamma_1}$ выходят на асимптоты.

В табл. 5 приведены значения времени t (в мсек) в зависимости от мощности пласта h и удельного сопротивления ρ_1 при $\frac{\tau_1}{h} = 32$.

Представляет интерес оценить величину э. д. с., измеряемую в поздней стадии становления на поверхности двухслойной среды. В табл. 6—7 приведены значения э. д. с. (мкв) в

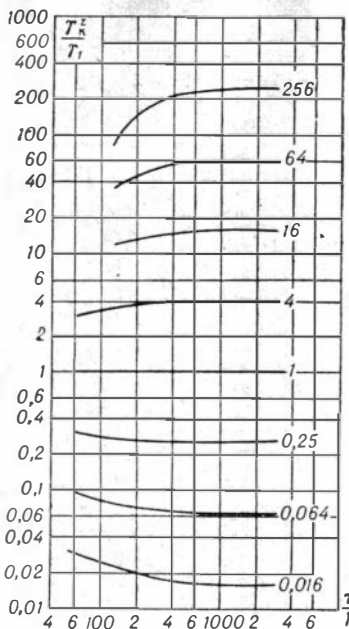


Рис. 2. График зависимости $\frac{\gamma_k^2}{\gamma_1}$ от τ_1/h . Шифр кривых $\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^2$.

от τ_1/h . Шифр кривых $\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^{3/2}$.

горизонтальной и вертикальной рамках для дипольного варианта. Параметры рамок и величина тока приняты следующими:

- радиус генераторной рамки $R_2 = 1$ м,
- » измерительной » $R_n = 1$ м,
- число витков в генераторной рамке $n_2 = 100$,
- » » измерительной » $n_n = 500$,
- величина тока в генераторной рамке $I = 15,7$ а,
- удельное сопротивление пласта $\rho_1 = 1$ ом·м,
- мощность пласта $h = 1$ м,

Рис. 3. График зависимости $\frac{\gamma_k^r}{\gamma_1}$

Таблица 5

| $\rho_1, \text{OM} \cdot \text{M}$ h, M | 1 | 5 | 10 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 |
|---|--------|---------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 1 | 0,0163 | 0,00326 | 0,00163 | 0,000815 | 0,000408 | 0,000272 | 0,000204 | 0,000163 |
| 5 | 0,408 | 0,0816 | 0,0408 | 0,0204 | 0,0102 | 0,00680 | 0,0051 | 0,00408 |
| 10 | 1,63 | 0,326 | 0,163 | 0,0815 | 0,0408 | 0,0272 | 0,0204 | 0,0163 |
| 20 | 6,32 | 1,30 | 0,652 | 0,326 | 0,163 | 0,109 | 0,0816 | 0,0652 |
| 40 | 25,6 | 5,21 | 2,56 | 1,28 | 0,640 | 0,467 | 0,320 | 0,256 |
| 60 | 58,6 | 11,7 | 5,86 | 2,93 | 1,47 | 0,976 | 0,735 | 0,586 |
| 80 | 104 | 28,7 | 10,4 | 6,20 | 2,60 | 1,73 | 1,30 | 1,04 |
| 100 | 163 | 32,6 | 16,3 | 8,15 | 4,08 | 2,72 | 2,04 | 1,63 |
| 150 | 367 | 73,4 | 36,7 | 18,4 | 9,20 | 6,13 | 4,60 | 3,67 |
| 200 | 652 | 130 | 65,2 | 32,6 | 16,3 | 109 | 8,15 | 6,52 |

Э. д. с. в горизонтальной рамке

| $\frac{\tau_1}{h} \backslash S$ | 16 | 8 | 4 | 2 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |
|---------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 32 | — | $1,00 \cdot 10^9$ | $6,58 \cdot 10^8$ | $3,4 \cdot 10^8$ | $1,02 \cdot 10^8$ | $6,25 \cdot 10^7$ | $4,17 \cdot 10^7$ | $3,05 \cdot 10^7$ |
| 38,1 | — | $5,24 \cdot 10^8$ | $3,02 \cdot 10^8$ | $1,52 \cdot 10^8$ | $4,02 \cdot 10^7$ | $2,24 \cdot 10^7$ | $1,37 \cdot 10^7$ | $9,25 \cdot 10^6$ |
| 45,3 | — | $2,63 \cdot 10^8$ | $1,39 \cdot 10^8$ | $6,77 \cdot 10^7$ | $1,59 \cdot 10^7$ | $8,26 \cdot 10^6$ | $4,66 \cdot 10^6$ | $2,92 \cdot 10^6$ |
| 53,8 | $1,93 \cdot 10^8$ | $1,29 \cdot 10^8$ | $6,42 \cdot 10^7$ | $2,99 \cdot 10^7$ | $6,37 \cdot 10^6$ | $3,10 \cdot 10^6$ | $1,62 \cdot 10^6$ | $9,48 \cdot 10^5$ |
| 64 | $1,12 \cdot 10^8$ | $6,21 \cdot 10^7$ | $2,93 \cdot 10^7$ | $1,31 \cdot 10^7$ | $2,59 \cdot 10^6$ | $1,18 \cdot 10^6$ | $5,84 \cdot 10^5$ | $3,17 \cdot 10^5$ |
| 76,1 | $5,87 \cdot 10^7$ | $2,93 \cdot 10^7$ | $1,32 \cdot 10^7$ | $5,73 \cdot 10^6$ | $1,04 \cdot 10^6$ | $4,60 \cdot 10^5$ | $2,14 \cdot 10^5$ | $109 \cdot 10^5$ |
| 90,5 | $2,90 \cdot 10^7$ | $1,36 \cdot 10^7$ | $5,92 \cdot 10^6$ | $2,49 \cdot 10^6$ | $4,25 \cdot 10^5$ | $1,81 \cdot 10^5$ | $8,07 \cdot 10^4$ | $3,88 \cdot 10^4$ |
| 107,6 | $1,39 \cdot 10^7$ | $6,23 \cdot 10^6$ | $2,62 \cdot 10^6$ | $1,07 \cdot 10^6$ | $1,74 \cdot 10^5$ | $7,19 \cdot 10^4$ | $3,08 \cdot 10^4$ | $1,41 \cdot 10^4$ |
| 128 | $6,54 \cdot 10^6$ | $2,81 \cdot 10^6$ | $1,15 \cdot 10^6$ | $4,60 \cdot 10^5$ | $7,18 \cdot 10^4$ | $2,89 \cdot 10^4$ | $1,20 \cdot 10^4$ | $5,26 \cdot 10^3$ |
| 152,2 | $3,01 \cdot 10^6$ | $1,25 \cdot 10^6$ | $5,03 \cdot 10^5$ | $1,87 \cdot 10^5$ | $2,96 \cdot 10^4$ | $1,16 \cdot 10^4$ | $4,70 \cdot 10^3$ | $2,00 \cdot 10^3$ |
| 181 | $1,36 \cdot 10^6$ | $5,55 \cdot 10^5$ | $2,18 \cdot 10^5$ | $8,41 \cdot 10^4$ | $4,75 \cdot 10^3$ | $1,22 \cdot 10^4$ | $1,88 \cdot 10^3$ | $7,72 \cdot 10^2$ |
| 215,2 | $6,14 \cdot 10^5$ | $2,42 \cdot 10^5$ | $9,42 \cdot 10^4$ | $3,58 \cdot 10^4$ | $5,10 \cdot 10^3$ | $1,94 \cdot 10^3$ | $7,35 \cdot 10^2$ | $3,03 \cdot 10^2$ |
| 256 | $2,72 \cdot 10^5$ | $1,06 \cdot 10^5$ | $4,04 \cdot 10^4$ | $1,32 \cdot 10^3$ | $2,12 \cdot 10^3$ | $7,99 \cdot 10^2$ | $3,05 \cdot 10^2$ | $2,00 \cdot 10^2$ |

Э. д. с. в вертикальной рамке

| $\frac{\tau_1}{h}$ \ S | 8 | 4 | 2 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |
|------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|---------------------|
| 32 | — | — | $5,66 \cdot 10^7$ | $1,05 \cdot 10^7$ | $3,71 \cdot 10^6$ | $1,24 \cdot 10^6$ | $4,12 \cdot 10^5$ |
| 38,1 | — | — | $2,33 \cdot 10^7$ | $3,61 \cdot 10^6$ | $1,20 \cdot 10^6$ | $3,94 \cdot 10^5$ | $1,28 \cdot 10^5$ |
| 45,3 | — | $1,38 \cdot 10^7$ | $9,19 \cdot 10^6$ | $1,22 \cdot 10^6$ | $3,94 \cdot 10^5$ | $1,26 \cdot 10^5$ | $4,05 \cdot 10^4$ |
| 53,8 | — | $7,32 \cdot 10^6$ | $3,53 \cdot 10^6$ | $4,19 \cdot 10^5$ | $1,30 \cdot 10^5$ | $4,03 \cdot 10^4$ | $1,28 \cdot 10^4$ |
| 64 | | $3,26 \cdot 10^6$ | $3,31 \cdot 10^6$ | $1,40 \cdot 10^5$ | $4,30 \cdot 10^4$ | $1,32 \cdot 10^4$ | $4,09 \cdot 10^3$ |
| 76,1 | $2,58 \cdot 10^6$ | $1,39 \cdot 10^6$ | $4,98 \cdot 10^5$ | $4,80 \cdot 10^4$ | $1,44 \cdot 10^4$ | $4,32 \cdot 10^3$ | $1,31 \cdot 10^3$ |
| 90,5 | $1,34 \cdot 10^6$ | $5,55 \cdot 10^5$ | $1,84 \cdot 10^5$ | $1,65 \cdot 10^4$ | $4,82 \cdot 10^3$ | $1,42 \cdot 10^3$ | $4,26 \cdot 10^2$ |
| 107,6 | $5,99 \cdot 10^5$ | $2,15 \cdot 10^5$ | $6,72 \cdot 10^4$ | $5,69 \cdot 10^3$ | $1,63 \cdot 10^3$ | $4,72 \cdot 10^2$ | $1,38 \cdot 10^2$ |
| 128 | $2,49 \cdot 10^5$ | $8,19 \cdot 10^4$ | $2,44 \cdot 10^4$ | $1,97 \cdot 10^3$ | $5,54 \cdot 10^2$ | $1,58 \cdot 10^2$ | $4,57 \cdot 10^1$ |
| 152,2 | $9,93 \cdot 10^4$ | $3,06 \cdot 10^4$ | $8,83 \cdot 10^3$ | $6,84 \cdot 10^2$ | $1,89 \cdot 10^2$ | $5,30 \cdot 10^1$ | $1,51 \cdot 10^1$ |
| 181 | $3,84 \cdot 10^4$ | $1,13 \cdot 10^4$ | $3,18 \cdot 10^3$ | $2,39 \cdot 10^2$ | $6,50 \cdot 10^1$ | $1,79 \cdot 10^1$ | $5,04 \cdot 10^0$ |
| 215,2 | $1,46 \cdot 10^4$ | $4,16 \cdot 10^3$ | $1,14 \cdot 10^3$ | $8,31 \cdot 10^1$ | $2,24 \cdot 10^1$ | $6,10 \cdot 10^0$ | $1,68 \cdot 10^0$ |
| 256 | $5,44 \cdot 10^3$ | $1,51 \cdot 10^3$ | $4,09 \cdot 10^2$ | $2,9 \cdot 10^1$ | $7,71 \cdot 10^0$ | $2,09 \cdot 10^0$ | $5,7 \cdot 10^{-1}$ |

Таблицы значений вертикальной компоненты магнитного поля

$$\frac{r}{h} = \frac{1}{2}$$

| $\frac{\tau_1}{h} \backslash \frac{\rho_2}{\rho_1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |
|---|---------------|---------------|---------------|----------------|
| 0,1250 · 10 ⁰ | 0,0143 | 0,0143 | 0,0143 | 0,0143 |
| 0,1487 | 0,0201 | 0,0202 | 0,0202 | 0,0202 |
| 0,1768 | 0,0284 | 0,0285 | 0,0285 | 0,0285 |
| 0,2102 | 0,0402 | 0,0403 | 0,0403 | 0,0403 |
| 0,2500 | 0,0571 | 0,0572 | 0,0572 | 0,0572 |
| 0,2973 | 0,0813 | 0,0814 | 0,0813 | 0,0814 |
| 0,3536 | 0,116 | 0,116 | 0,116 | 0,116 |
| 0,4204 | 0,164 | 0,165 | 0,165 | 0,165 |
| 0,5000 | 0,233 | 0,233 | 0,233 | 0,233 |
| 0,5946 | 0,329 | 0,330 | 0,330 | 0,330 |
| 0,7071 | 0,465 | 0,465 | 0,465 | 0,465 |
| 0,8409 | 0,647 | 0,648 | 0,648 | 0,648 |
| 0,1000 · 10 ¹ | 0,866 | 0,866 | 0,866 | 0,866 |
| 0,1189 | 1,0754 | 1,0754 | 1,0754 | 1,0754 |
| 0,1414 | 1,222 | 1,222 | 1,222 | 1,222 |
| 0,1682 | 1,285 | 1,285 | 1,285 | 1,285 |
| 0 2000 | 1,278 | 1,278 | 1,278 | 1,278 |
| 0,2378 | 1,232 | 1,232 | 1,232 | 1,232 |
| 0,2828 | 1,175 | 1,175 | 1,175 | 1,175 |
| 0,3364 | 1,122 | 1,122 | 1,122 | 1,122 |
| 0,4000 | 1,0801 | 1,0802 | 1,0804 | 1,0804 |
| 0,4757 | 1,0513 | 1,0517 | 1,0521 | 1,0524 |
| 0,5657 | 1,0330 | 1,0339 | 1,0348 | 1,0355 |
| 0,6727 | 1,0223 | 1,0238 | 1,0253 | 1,0265 |
| 0,8000 | 1,0164 | 1,0184 | 1,0204 | 1,0223 |

$$\frac{r}{h} = \frac{1}{2}$$

| $\frac{\tau_1}{h}$ \diagdown $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | 2 | 4 | 8 | 16 |
|--|--------|--------|--------|--------|
| 0,1250 · 10 ⁰ | 0,0143 | 0,0143 | 0,0143 | 0,0143 |
| 0,1487 | 0,0202 | 0,0202 | 0,0202 | 0,0202 |
| 0,1768 | 0,0285 | 0,0285 | 0,0285 | 0,0285 |
| 0,2102 | 0,0403 | 0,0403 | 0,0403 | 0,0403 |
| 0,2500 | 0,0572 | 0,0572 | 0,0572 | 0,0572 |
| 0,2973 | 0,0814 | 0,0814 | 0,0814 | 0,0814 |
| 0,3536 | 0,116 | 0,116 | 0,116 | 0,116 |
| 0,4204 | 0,165 | 0,165 | 0,165 | 0,165 |
| 0,5000 | 0,233 | 0,233 | 0,233 | 0,233 |
| 0,5946 | 0,330 | 0,330 | 0,330 | 0,330 |
| 0,7071 | 0,465 | 0,465 | 0,465 | 0,465 |
| 0,8409 | 0,648 | 0,648 | 0,648 | 0,648 |
| 0,1000 · 10 ¹ | 0,866 | 0,866 | 0,866 | 0,866 |
| 0,1189 | 1,0754 | 0,0754 | 0,075 | 0,075 |
| 0,1414 | 1,222 | 1,222 | 1,222 | 1,222 |
| 0,1682 | 1,285 | 1,285 | 1,285 | 1,285 |
| 0,2000 | 1,278 | 1,278 | 1,278 | 1,278 |
| 0,2378 | 1,232 | 1,232 | 1,232 | 1,232 |
| 0,2828 | 1,175 | 1,175 | 1,175 | 1,175 |
| 0,3364 | 1,122 | 1,121 | 1,121 | 1,121 |
| 0,4000 | 1,0798 | 1,0797 | 1,0800 | 1,0801 |
| 0,4757 | 1,0505 | 1,0502 | 1,0500 | 1,0507 |
| 0,5657 | 1,0314 | 1,0309 | 1,0306 | 1,0298 |
| 0,6727 | 1,0199 | 1,0192 | 1,019 | 1,0183 |
| 0,8000 | 1,0134 | 1,0126 | 1,012 | 1,0113 |

$$\frac{r}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

| $\frac{\tau_1}{h}$ | $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |
|--------------------------|-------------------------|---------------|---------------|---------------|----------------|
| 0,1250 · 10 ⁰ | | 0,00714 | 0,00714 | 0,00714 | 0,00714 |
| 0,1487 | | 0,0101 | 0,0101 | 0,0101 | 0,0101 |
| 0,1768 | | 0,0143 | 0,0143 | 0,0143 | 0,0143 |
| 0,2102 | | 0,0201 | 0,0202 | 0,0202 | 0,0202 |
| 0,2500 | | 0,02884 | 0,0403 | 0,0403 | 0,0403 |
| 0,3536 | | 0,0572 | 0,0572 | 0,0572 | 0,0572 |
| 0,4204 | | 0,0814 | 0,0814 | 0,0813 | 0,0814 |
| 0,5000 | | 0,116 | 0,116 | 0,116 | 0,116 |
| 0,5946 | | 0,164 | 0,165 | 0,165 | 0,165 |
| 0,7071 | | 0,233 | 0,233 | 0,233 | 0,233 |
| 0,8409 | | 0,329 | 0,330 | 0,330 | 0,330 |
| 0,1000 · 10 ¹ | | 0,465 | 0,465 | 0,465 | 0,465 |
| 0,1189 | | 0,648 | 0,648 | 0,648 | 0,648 |
| 0,1414 | | 0,866 | 0,867 | 0,867 | 0,867 |
| 0,1682 | | 1,0757 | 1,0757 | 1,0757 | 1,0757 |
| 0,2000 | | 1,223 | 1,223 | 1,223 | 1,223 |
| 0,2378 | | 1,286 | 1,286 | 1,286 | 1,285 |
| 0,2828 | | 1,279 | 1,279 | 1,279 | 1,279 |
| 0,3364 | | 1,234 | 1,234 | 1,234 | 1,234 |
| 0,4000 | | 1,177 | 1,177 | 1,177 | 1,177 |
| 0,4757 | | 1,125 | 1,126 | 1,126 | 1,126 |
| 0,5657 | | 1,0852 | 1,0871 | 1,0887 | 1,0899 |
| 0,6727 | | 1,0587 | 1,0620 | 1,0651 | 1,0676 |
| 0,8000 | | 1,0429 | 1,0476 | 1,0521 | 1,0559 |

$$\frac{r}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

| $\frac{\tau_1}{h}$ | $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | 2 | 4 | 8 | 16 |
|--------------------------|-------------------------|---------|---------|---------|---------|
| 0,1250 · 10 ⁰ | | 0,00714 | 0,00714 | 0,00714 | 0,00714 |
| 0,1487 | | 0,0101 | 0,0101 | 0,0101 | 0,0101 |
| 0,1768 | | 0,0143 | 0,0143 | 0,0143 | 0,0143 |
| 0,2102 | | 0,0202 | 0,0202 | 0,0202 | 0,0202 |
| 0,2500 | | 0,0285 | 0,285 | 0,0285 | 0,0285 |
| 0,2973 | | 0,0403 | 0,0403 | 0,0403 | 0,0403 |
| 0,3536 | | 0,0572 | 0,0572 | 0,0572 | 0,0572 |
| 0,4204 | | 0,0814 | 0,0814 | 0,0814 | 0,0814 |
| 0,5000 | | 0,116 | 0,116 | 0,116 | 0,116 |
| 0,5946 | | 0,165 | 0,165 | 0,165 | 0,165 |
| 0,7071 | | 0,233 | 0,233 | 0,233 | 0,233 |
| 0,8409 | | 0,330 | 0,330 | 0,330 | 0,330 |
| 0,1000 · 10 ¹ | | 0,465 | 0,465 | 0,465 | 0,465 |
| 0,1189 | | 0,648 | 0,648 | 0,648 | 0,648 |
| 0,1414 | | 0,867 | 0,867 | 0,867 | 0,867 |
| 0,1682 | | 1,0757 | 1,0757 | 1,076 | 1,076 |
| 0,2000 | | 1,223 | 1,223 | 1,223 | 1,223 |
| 0,2378 | | 1,285 | 1,285 | 1,285 | 1,285 |
| 0,2828 | | 1,279 | 1,279 | 1,279 | 1,279 |
| 0,3364 | | 1,234 | 1,233 | 1,233 | 1,233 |
| 0,4000 | | 1,176 | 1,176 | 1,176 | 1,176 |
| 0,4757 | | 1,123 | 1,123 | 1,122 | 1,120 |
| 0,5657 | | 1,0817 | 1,0806 | 1,080 | 1,0791 |
| 0,6727 | | 1,0531 | 1,0514 | 1,050 | 1,0504 |
| 0,8000 | | 1,0357 | 1,0336 | 1,032 | 1,0321 |

$$\frac{r}{h} = 1$$

| $\frac{\tau_1}{h}$ \diagdown $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |
|--|---------------|---------------|---------------|----------------|
| 0, 1000 · 10 ¹ | 0, 233 | 0, 233 | 0, 233 | 0, 233 |
| 0, 1189 | 0, 330 | 0, 329 | 0, 329 | 0, 330 |
| 0, 1414 | 0, 465 | 0, 465 | 0, 464 | 0, 465 |
| 0, 1682 | 0, 648 | 0, 647 | 0, 647 | 0, 648 |
| 0, 2000 | 0, 866 | 0, 866 | 0, 866 | 0, 866 |
| 0, 2378 | 1, 0753 | 1, 0753 | 0, 0753 | 1, 0753 |
| 0, 2828 | 1, 222 | 1, 222 | 1, 222 | 1, 222 |
| 0, 3364 | 1, 285 | 1, 285 | 1, 285 | 1, 285 |
| 0, 4000 | 1, 278 | 1, 278 | 1, 278 | 1, 278 |
| 0, 4757 | 1, 233 | 1, 233 | 1, 234 | 1, 234 |
| 0, 5657 | 1, 177 | 1, 179 | 1, 181 | 1, 182 |
| 0, 6727 | 1, 126 | 1, 131 | 1, 135 | 1, 140 |
| 0, 8000 | 1, 0865 | 1, 0947 | 1, 103 | 1, 110 |
| 0, 9514 | 1, 0584 | 1, 0690 | 1, 0800 | 1, 0902 |
| 0, 1131 · 10 ² | 1, 0393 | 1, 0508 | 1, 0640 | 1, 0764 |
| 0, 1345 | 1, 0264 | 1, 0375 | 1, 0509 | 1, 0652 |
| 0, 1600 | 1, 0177 | 1, 0275 | 0, 0404 | 1, 0551 |
| 0, 1903 | 1, 0118 | 1, 0198 | 1, 0313 | 1, 0457 |
| 0, 2263 | 1, 00777 | 1, 0140 | 1, 0237 | 1, 0369 |
| 0, 2691 | 1, 00506 | 1, 00969 | 1, 0175 | 1, 0291 |
| 0, 3200 | 1, 00328 | 1, 00661 | 1, 0127 | 1, 0224 |
| 0, 3805 | 1, 00214 | 1, 00450 | 1, 00908 | 1, 0170 |
| 0, 4525 | 1, 00144 | 1, 00312 | 1, 00656 | 1, 0129 |
| 0, 5382 | 1, 00103 | 1, 00227 | 1, 00492 | 1, 0101 |
| 0, 6400 | | | | |

$$\frac{r}{h} = 1$$

| $\frac{\tau_1}{h}$ \backslash $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | 2 | 4 | 8 | 16 |
|---|----------|----------|----------|-----------|
| 0,1000 · 10 ¹ | 0,233 | 0,233 | 0,233 | 0,233 |
| 0,1189 | 0,330 | 0,329 | 0,329 | 0,329 |
| 0,1414 | 0,465 | 0,464 | 0,465 | 0,465 |
| 0,1682 | 0,648 | 0,647 | 0,647 | 0,647 |
| 0,2000 | 0,866 | 0,866 | 0,866 | 0,866 |
| 0,2378 | 1,0753 | 1,0754 | 1,0753 | 1,0753 |
| 0,2828 | 1,222 | 1,222 | 1,222 | 1,222 |
| 0,3364 | 1,285 | 1,285 | 1,285 | 1,285 |
| 0,4000 | 1,278 | 1,278 | 1,278 | 1,277 |
| 0,4757 | 1,232 | 1,231 | 1,230 | 1,230 |
| 0,5657 | 1,172 | 1,170 | 1,169 | 1,168 |
| 0,6727 | 1,117 | 1,113 | 1,111 | 1,110 |
| 0,8000 | 1,0731 | 1,0690 | 1,0664 | 1,0649 |
| 0,9514 | 1,0430 | 1,0388 | 1,0362 | 1,0347 |
| 0,1131 · 10 ² | 1,0242 | 1,0204 | 1,0182 | 1,0170 |
| 0,1345 | 1,0133 | 1,0102 | 1,00853 | 1,00762 |
| 0,1600 | 1,00723 | 1,00502 | 1,00383 | 1,00321 |
| 0,1903 | 1,00401 | 1,00251 | 1,00174 | 1,00134 |
| 0,2263 | 1,00229 | 1,00133 | 1,000855 | 1,000620 |
| 0,2691 | 1,00136 | 1,000763 | 1,000481 | 1,000346 |
| 0,3200 | 1,000829 | 1,000468 | 1,000303 | 1,000227 |
| 0,3805 | 1,000523 | 1,000300 | 1,000202 | 1,000158 |
| 0,4525 | 1,000344 | 1,000201 | 1,000139 | 1,000112 |
| 0,5382 | 1,000244 | 1,000144 | 1,000100 | 1,0000817 |
| 0,6400 | | | | |

$$\frac{r}{h} = \sqrt{2}$$

| $\frac{\tau_1}{h}$ | $\frac{p_2}{p_1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |
|--------------------------|-------------------|---------------|---------------|---------------|----------------|
| 0,1000 · 10 ¹ | | 0,166 | 0,116 | 0,116 | 0,116 |
| 0,1189 | | 0,165 | 0,164 | 0,164 | 0,165 |
| 0,1414 | | 0,233 | 0,233 | 0,233 | 0,233 |
| 0,1682 | | 0,330 | 0,329 | 0,329 | 0,330 |
| 0,2000 | | 0,465 | 0,465 | 0,464 | 0,465 |
| 0,2378 | | 0,648 | 0,647 | 0,647 | 0,648 |
| 0,2828 | | 0,866 | 0,866 | 0,866 | 0,866 |
| 0,3364 | | 1,0752 | 1,0752 | 1,0751 | 1,0750 |
| 0,4000 | | 1,222 | 1,221 | 1,221 | 1,220 |
| 0,4757 | | 1,284 | 1,283 | 1,282 | 1,280 |
| 0,5657 | | 1,278 | 1,278 | 1,276 | 1,275 |
| 0,6727 | | 1,237 | 1,240 | 1,241 | 1,242 |
| 0,8000 | | 1,185 | 1,194 | 1,202 | 1,206 |
| 0,9514 | | 1,137 | 1,153 | 1,167 | 1,178 |
| 0,1131 · 10 ² | | 1,0974 | 1,118 | 1,139 | 1,155 |
| 0,1345 | | 1,0677 | 1,0904 | 1,115 | 1,136 |
| 0,1600 | | 1,0462 | 1,0680 | 1,0938 | 1,119 |
| 0,1903 | | 1,0311 | 1,0502 | 1,0752 | 1,103 |
| 0,2263 | | 1,0206 | 1,0362 | 1,0587 | 1,0861 |
| 0,2691 | | 1,0136 | 1,0256 | 1,0446 | 1,0703 |
| 0,3200 | | 1,00886 | 1,0177 | 1,0330 | 1,0560 |
| 0,3805 | | 1,00582 | 1,0122 | 1,0241 | 1,0437 |
| 0,4525 | | 1,00392 | 1,00852 | 1,0177 | 1,0339 |
| 0,5382 | | 1,00282 | 1,00624 | 1,0134 | 1,0267 |
| 0,6400 | | | | | |

$$\frac{r}{h} = \sqrt{2}$$

| $\frac{\tau_1}{h}$ \diagdown $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | 2 | 4 | 8 | 16 |
|--|----------|----------|----------|----------|
| 0,1000 · 10 ¹ | 0,116 | 0,116 | 0,116 | 0,116 |
| 0,1189 | 0,165 | 0,164 | 0,164 | 0,164 |
| 0,1414 | 0,233 | 0,233 | 0,233 | 0,233 |
| 0,1682 | 0,330 | 0,329 | 0,329 | 0,329 |
| 0,2000 | 0,465 | 0,465 | 0,465 | 0,465 |
| 0,2378 | 0,648 | 0,647 | 0,647 | 0,647 |
| 0,2828 | 0,866 | 0,866 | 0,866 | 0,866 |
| 0,3364 | 1,0754 | 1,0755 | 1,0755 | 1,0755 |
| 0,4000 | 1,223 | 1,223 | 1,223 | 1,223 |
| 0,4757 | 1,285 | 1,285 | 1,285 | 1,285 |
| 0,5657 | 1,277 | 1,275 | 1,274 | 1,273 |
| 0,6727 | 1,227 | 1,222 | 1,219 | 1,217 |
| 0,8000 | 1,164 | 1,157 | 1,152 | 1,148 |
| 0,9514 | 1,108 | 1,0986 | 1,0928 | 1,0894 |
| 0,1131 · 10 ² | 1,0653 | 1,0563 | 1,0509 | 1,0479 |
| 0,1345 | 1,0372 | 1,0300 | 1,0252 | 1,0227 |
| 0,1600 | 1,0204 | 1,0146 | 1,0114 | 1,00970 |
| 0,1903 | 1,0110 | 1,00695 | 1,00482 | 1,00373 |
| 0,2263 | 1,00606 | 1,00340 | 1,00207 | 1,00140 |
| 0,2691 | 1,00347 | 1,00180 | 1,00101 | 1,000625 |
| 0,3200 | 1,00208 | 1,00107 | 1,000601 | 1,000384 |
| 0,3805 | 1,00131 | 1,000689 | 1,000413 | 1,000289 |
| 0,4525 | 1,000875 | 1,000475 | 1,000302 | 1,000226 |
| 0,5382 | 1,000632 | 1,000352 | 1,000232 | 1,000180 |
| 0,6400 | | | | |

$$\frac{r}{h} = 2$$

| $\frac{\tau_1}{\eta}$ \diagdown $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |
|---|---------------|---------------|---------------|----------------|
| 0,2000 · 10 | 0,233 | 0,233 | 0,233 | 0,233 |
| 0,2378 | 0,329 | 0,330 | 0,330 | 0,329 |
| 0,2828 | 0,465 | 0,465 | 0,465 | 0,464 |
| 0,3364 | 1,648 | 0,648 | 0,648 | 0,647 |
| 0,4000 | 0,866 | 0,865 | 0,865 | 0,864 |
| 0,4757 | 1,0724 | 1,0696 | 1,0669 | 1,0647 |
| 0,5657 | 1,216 | 1,208 | 1,201 | 1,195 |
| 0,6727 | 1,278 | 1,268 | 1,256 | 1,246 |
| 0,8000 | 1,278 | 1,273 | 1,263 | 1,252 |
| 0,9514 | 1,246 | 1,252 | 1,250 | 1,242 |
| 0,1131 · 10 ² | 1,199 | 1,220 | 1,230 | 1,230 |
| 0,1345 | 1,152 | 1,184 | 1,206 | 1,217 |
| 0,1600 | 1,1110 | 1,148 | 1,181 | 1,203 |
| 0,1903 | 1,0779 | 1,115 | 1,155 | 1,186 |
| 0,2263 | 1,0531 | 1,0867 | 1,128 | 1,166 |
| 0,2691 | 1,0353 | 1,0631 | 1,102 | 1,144 |
| 0,3200 | 1,0231 | 1,0445 | 1,0778 | 1,119 |
| 0,3805 | 1,0148 | 1,0305 | 1,0575 | 1,0956 |
| 0,4525 | 1,00945 | 1,0204 | 1,0411 | 1,0736 |
| 0,5382 | 1,00598 | 1,0135 | 1,0286 | 1,0546 |
| 0,6400 | 1,00377 | 1,00884 | 1,0196 | 1,0391 |
| 0,7610 | 1,00239 | 1,00583 | 1,0133 | 1,0273 |
| 0,9050 | 1,00153 | 1,00397 | 1,00925 | 1,0185 |
| 0,1076 · 10 ³ | 1,000992 | 1,00288 | 1,00675 | 1,0124 |

$$\frac{r}{h} = 2$$

| $\frac{\tau_1}{h}$ \diagdown $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | 2 | 4 | 8 | 16 |
|--|----------|----------|----------|----------|
| 0,2000 · 10 | 0,233 | 0,233 | 0,233 | 0,233 |
| 0,2378 | 0,329 | 0,329 | 0,330 | 0,330 |
| 0,2828 | 0,465 | 0,465 | 0,465 | 0,465 |
| 0,3364 | 0,648 | 0,648 | 0,648 | 0,648 |
| 0,4000 | 0,867 | 0,868 | 0,862 | 0,848 |
| 0,4757 | 1,0781 | 1,0802 | 1,0815 | 1,0821 |
| 0,5657 | 1,227 | 1,230 | 1,232 | 1,232 |
| 0,6727 | 1,288 | 1,287 | 1,285 | 1,283 |
| 0,8000 | 1,272 | 1,265 | 1,258 | 1,253 |
| 0,9514 | 1,216 | 1,202 | 1,191 | 1,184 |
| 0,1131 · 10 ² | 1,151 | 1,134 | 1,122 | 1,116 |
| 0,1345 | 1,0960 | 1,0792 | 1,0691 | 1,0634 |
| 0,1600 | 1,0566 | 1,0426 | 1,0347 | 1,0303 |
| 0,1903 | 1,0316 | 1,0212 | 1,0156 | 1,0126 |
| 0,2263 | 1,0172 | 1,0101 | 1,00643 | 1,00459 |
| 0,2691 | 1,0945 | 1,00489 | 1,00266 | 1,00158 |
| 0,3200 | 1,00538 | 1,00260 | 1,00130 | 1,000700 |
| 0,3805 | 1,00322 | 1,0056 | 1,000824 | 1,000492 |
| 0,4525 | 1,00200 | 1,00103 | 1,000603 | 1,000420 |
| 0,5382 | 1,00128 | 1,000704 | 1,000455 | 1,000351 |
| 0,64000 | 1,000835 | 1,000494 | 1,000341 | 1,000280 |
| 0,7610 | 1,000558 | 1,000358 | 1,000258 | 1,000221 |
| 0,9050 | 1,000386 | 1,000274 | 1,000202 | 1,000179 |
| 0,1076 · 10 ³ | 1,000281 | 1,000226 | 1,000167 | 1,000153 |

$$\frac{r}{h} = 2\sqrt{2}$$

| $\frac{\tau_1}{h}$ | $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |
|--------------------------|-------------------------|---------------|---------------|---------------|----------------|
| 0,2000 · 10 | | 0,116 | 0,116 | 0,116 | 0,116 |
| 0,2378 | | 0,165 | 0,165 | 0,165 | 0,164 |
| 0,2828 | | 0,233 | 0,233 | 0,233 | 0,233 |
| 0,3364 | | 0,329 | 0,329 | 0,329 | 0,329 |
| 0,4000 | | 0,465 | 0,464 | 0,464 | 0,463 |
| 0,4757 | | 0,645 | 0,643 | 0,642 | 0,641 |
| 0,5657 | | 0,857 | 0,849 | 0,842 | 0,836 |
| 0,6727 | | 1,0530 | 1,0314 | 1,0124 | 0,965 |
| 0,8000 | | 1,191 | 1,224 | 1,183 | 1,144 |
| 0,1131 · 10 ² | | 1,277 | 1,255 | 1,217 | 1,175 |
| 0,1345 | | 1,257 | 1,259 | 1,236 | 1,198 |
| 0,1600 | | 1,216 | 1,243 | 1,242 | 1,215 |
| 0,1903 | | 1,169 | 1,214 | 1,236 | 1,226 |
| 0,2263 | | 1,124 | 1,177 | 1,218 | 1,230 |
| 0,2691 | | 1,0873 | 1,139 | 1,193 | 1,224 |
| 0,3200 | | 1,0591 | 1,104 | 1,161 | 1,208 |
| 0,3805 | | 1,0388 | 1,0753 | 1,128 | 1,183 |
| 0,4525 | | 1,0249 | 1,0522 | 1,0971 | 1,154 |
| 0,5382 | | 1,0158 | 1,0352 | 1,0708 | 1,122 |
| 0,6400 | | 1,00988 | 1,0234 | 1,0601 | 1,0928 |
| 0,7610 | | 1,00615 | 1,0155 | 1,0349 | 1,0676 |
| 0,9050 | | 1,00382 | 1,0105 | 1,0244 | 1,0475 |
| 0,1076 · 10 ³ | | 1,00238 | 1,00752 | 1,0178 | 1,0325 |

$$\frac{r}{h} = 2\sqrt{2}$$

| $\frac{\tau_1}{h}$ \diagdown $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | 2 | 4 | 8 | 16 |
|--|----------|----------|----------|-----------|
| 0,2000 · 10 | 0,116 | 0,116 | 0,116 | 0,116 |
| 0,2378 | 0,165 | 0,165 | 0,165 | 0,165 |
| 0,2828 | 0,233 | 0,233 | 0,233 | 0,233 |
| 0,3364 | 0,329 | 0,329 | 0,330 | 0,330 |
| 0,4000 | 0,465 | 0,466 | 0,466 | 0,464 |
| 0,4757 | 0,659 | 0,652 | 0,654 | 0,655 |
| 0,5657 | 0,875 | 0,884 | 0,889 | 0,892 |
| 0,6727 | 1,0949 | 1,108 | 1,116 | 1,118 |
| 0,8000 | 1,243 | 1,252 | 1,254 | 1,252 |
| 0,9514 | 1,291 | 1,285 | 1,276 | 1,269 |
| 0,1131 · 10 | 1,262 | 1,242 | 1,225 | 1,214 |
| 0,1345 | 1,199 | 1,172 | 1,152 | 1,141 |
| 0,1600 | 1,135 | 1,107 | 1,0899 | 1,0801 |
| 0,1903 | 1,0839 | 1,0602 | 1,0466 | 1,0393 |
| 0,2263 | 1,0486 | 1,0309 | 1,0213 | 1,0164 |
| 0,2691 | 1,0269 | 1,0149 | 1,00874 | 1,00573 |
| 0,3200 | 1,0148 | 1,00710 | 1,00343 | 1,00170 |
| 0,3805 | 1,00830 | 1,00364 | 1,00153 | 1,000580 |
| 0,4525 | 1,00484 | 1,00209 | 1,000897 | 1,000382 |
| 0,5382 | 1,00292 | 1,00131 | 1,000625 | 1,000341 |
| 0,6400 | 1,00180 | 1,000858 | 1,000442 | 1,000279 |
| 0,7610 | 1,00111 | 1,000564 | 1,000296 | 1,000200 |
| 0,9050 | 1,000686 | 1,000378 | 1,000187 | 1,000129 |
| 0,1076 · 10 ³ | 1,000422 | 1,000268 | 1,000113 | 1,0000777 |

$$\frac{r}{h} = 1$$

| $\frac{\tau}{h}$ | $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |
|--------------------------|-------------------------|---------------|---------------|---------------|----------------|
| 0,2000 · 10 | | 0,0573 | 0,0575 | 0,0576 | 0,0576 |
| 0,2378 | | 0,0815 | 0,0816 | 0,0818 | 0,0818 |
| 0,2828 | | 0,116 | 0,116 | 0,116 | 0,116 |
| 0,3364 | | 0,165 | 0,165 | 0,165 | 0,164 |
| 0,4000 | | 0,233 | 0,233 | 0,233 | 0,232 |
| 0,4757 | | 0,329 | 0,328 | 0,327 | 0,327 |
| 0,5657 | | 0,461 | 0,457 | 0,454 | 0,451 |
| 0,6727 | | 0,632 | 0,618 | 0,607 | 0,508 |
| 0,8000 | | 0,825 | 0,789 | 0,760 | 0,736 |
| 0,9514 | | 1,00564 | 0,940 | 0,884 | 0,840 |
| 0,1131 · 10 ² | | 1,147 | 1,0603 | 0,981 | 0,914 |
| 0,1345 | | 1,236 | 1,153 | 1,0603 | 0,978 |
| 0,1600 | | 1,273 | 1,217 | 1,129 | 1,0366 |
| 0,1903 | | 1,266 | 1,252 | 1,185 | 1,0929 |
| 0,2263 | | 1,231 | 1,257 | 1,225 | 1,146 |
| 0,2691 | | 1,184 | 1,238 | 1,246 | 1,191 |
| 0,3200 | | 1,136 | 1,203 | 1,245 | 1,225 |
| 0,3805 | | 1,0955 | 1,161 | 1,224 | 1,241 |
| 0,4525 | | 1,0641 | 1,121 | 1,192 | 1,237 |
| 0,5382 | | 1,0417 | 1,0866 | 1,153 | 1,217 |
| 0,6400 | | 1,0265 | 1,0599 | 1,117 | 1,184 |
| 0,7610 | | 1,0166 | 1,0407 | 1,0858 | 1,147 |
| 0,9050 | | 1,0103 | 1,0279 | 1,0623 | 1,111 |
| 0,1076 · 10 ³ | | 1,00641 | 1,0201 | 1,0463 | 1,0801 |

$$\frac{r}{h} = 4$$

| $\frac{\tau_1}{h}$ \diagdown $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | 2 | 4 | 8 | 16 |
|--|---------|----------|----------|----------|
| 0,2000 · 10 | 0,0571 | 0,0579 | 0,0570 | 0,0570 |
| 0,2378 | 0,0813 | 0,0814 | 0,0814 | 0,0815 |
| 0,2828 | 0,116 | 0,116 | 0,116 | 0,116 |
| 0,3364 | 0,165 | 0,165 | 0,165 | 0,165 |
| 0,4000 | 0,233 | 0,234 | 0,234 | 0,234 |
| 0,4757 | 0,330 | 0,331 | 0,332 | 0,333 |
| 0,5657 | 0,469 | 0,475 | 0,480 | 0,485 |
| 0,6727 | 0,665 | 0,684 | 0,699 | 0,709 |
| 0,8000 | 0,909 | 0,944 | 0,954 | 0,976 |
| 0,9514 | 1,133 | 1,169 | 1,183 | 1,186 |
| 0,1131 · 10 ² | 1,266 | 1,277 | 1,273 | 1,265 |
| 0,1345 | 1,290 | 1,272 | 1,251 | 1,235 |
| 0,1600 | 1,248 | 1,211 | 1,182 | 1,164 |
| 0,1903 | 1,182 | 1,141 | 1,113 | 1,0973 |
| 0,2263 | 1,121 | 1,0836 | 1,0617 | 1,0498 |
| 0,2691 | 1,0738 | 1,0452 | 1,0296 | 1,0216 |
| 0,3200 | 1,0425 | 1,0226 | 1,0126 | 1,00776 |
| 0,3805 | 1,0238 | 1,0110 | 1,00505 | 1,00229 |
| 0,4525 | 1,0134 | 1,00564 | 1,00221 | 1,000708 |
| 0,5382 | 1,00772 | 1,00319 | 1,00124 | 1,000432 |
| 0,6400 | 1,00461 | 1,00199 | 1,000844 | 1,000398 |
| 0,7610 | 1,00282 | 1,00132 | 1,000594 | 1,000337 |
| 0,9050 | 1,00175 | 1,000907 | 1,000400 | 1,000246 |
| 0,1076 · 10 ³ | 1,00108 | 1,000666 | 1,000256 | 1,000161 |

$$\frac{r}{h} = 4 \sqrt{2}$$

| $\frac{\tau_j}{h}$ | $\frac{p_2}{p_1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |
|--------------------------|-------------------|---------------|---------------|---------------|----------------|
| 0,2000 · 10 ¹ | | 0,0286 | 0,0286 | 0,0287 | 0,0287 |
| 0,2378 | | 0,0405 | 0,0406 | 0,0407 | 0,0408 |
| 0,2828 | | 0,0574 | 0,0576 | 0,0578 | 0,0579 |
| 0,3364 | | 0,0815 | 0,0817 | 0,0819 | 0,0820 |
| 0,4000 | | 0,116 | 0,116 | 0,116 | 0,116 |
| 0,4757 | | 0,164 | 0,164 | 0,164 | 0,164 |
| 0,5657 | | 0,231 | 0,230 | 0,229 | 0,228 |
| 0,6727 | | 0,323 | 0,318 | 0,313 | 0,310 |
| 0,8000 | | 0,445 | 0,429 | 0,415 | 0,403 |
| 0,9514 | | 0,597 | 0,556 | 0,522 | 0,496 |
| 0,1131 · 10 ² | | 0,767 | 0,688 | 0,625 | 0,576 |
| 0,1345 | | 0,941 | 0,819 | 0,722 | 0,647 |
| 0,1600 | | 1,0948 | 0,946 | 0,817 | 0,717 |
| 0,1903 | | 1,207 | 1,0651 | 0,914 | 0,790 |
| 0,2263 | | 1,266 | 1,165 | 1,0127 | 0,868 |
| 0,2691 | | 1,273 | 1,233 | 1,106 | 0,951 |
| 0,3200 | | 1,243 | 1,262 | 1,184 | 1,0382 |
| 0,3805 | | 1,196 | 1,255 | 1,236 | 1,121 |
| 0,4525 | | 1,146 | 1,223 | 1,257 | 1,191 |
| 0,5382 | | 1,102 | 1,179 | 1,246 | 1,238 |
| 0,6400 | | 1,0681 | 1,134 | 1,214 | 1,254 |
| 0,7610 | | 1,0439 | 1,0944 | 1,171 | 1,242 |
| 0,9050 | | 1,0277 | 1,0638 | 1,129 | 1,210 |
| 0,1076 · 10 ³ | | 1,0173 | 1,0418 | 1,0918 | 1,170 |
| 0,1280 | | 1,0108 | 1,0270 | 1,0630 | 1,128 |
| 0,1522 | | 1,00688 | 1,0174 | 1,0425 | 1,0940 |
| 0,1810 | | 1,00456 | 1,0115 | 1,0289 | 1,0676 |
| 0,2152 | | 1,00326 | 1,00826 | 1,0207 | 1,0497 |

$$\frac{r}{h} = 4 \sqrt{2}$$

| $\frac{\tau_1}{h}$ \diagdown $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | 2 | 4 | 8 | 16 |
|--|----------|----------|----------|-----------|
| 0,2000 · 10 ¹ | 0,0283 | 0,0282 | 0,0281 | 0,0280 |
| 0,2378 | 0,0400 | 0,0399 | 0,0398 | 0,0398 |
| 0,2828 | 0,0570 | 0,0570 | 0,0571 | 0,0571 |
| 0,3364 | 0,0814 | 0,0816 | 0,0817 | 0,0818 |
| 0,4000 | 0,116 | 0,117 | 0,117 | 0,117 |
| 0,4757 | 0,165 | 0,166 | 0,166 | 0,167 |
| 0,5657 | 0,235 | 0,237 | 0,239 | 0,241 |
| 0,6727 | 0,336 | 0,345 | 0,354 | 0,364 |
| 0,8000 | 0,489 | 0,517 | 0,544 | 0,564 |
| 0,9514 | 0,709 | 0,770 | 0,815 | 0,839 |
| 0,1131 · 10 ² | 0,968 | 1,0467 | 1,0878 | 1,103 |
| 0,1345 | 1,183 | 1,236 | 1,248 | 1,244 |
| 0,1600 | 1,284 | 1,288 | 1,269 | 1,249 |
| 0,1903 | 1,285 | 1,249 | 1,211 | 1,185 |
| 0,2263 | 1,232 | 1,179 | 1,139 | 1,115 |
| 0,2691 | 1,167 | 1,114 | 1,0803 | 1,0617 |
| 0,3200 | 1,109 | 1,0653 | 1,0409 | 1,0283 |
| 0,3805 | 1,0661 | 1,0346 | 1,0186 | 1,0108 |
| 0,4525 | 1,0383 | 1,0175 | 1,00785 | 1,00346 |
| 0,5382 | 1,0218 | 1,00901 | 1,00347 | 1,00110 |
| 0,6400 | 1,0126 | 1,00497 | 1,00187 | 1,000595 |
| 0,7610 | 1,00742 | 1,00297 | 1,00121 | 1,000508 |
| 0,9050 | 1,00450 | 1,00186 | 1,000833 | 1,000423 |
| 0,1076 · 10 ³ | 1,00278 | 1,00118 | 1,000560 | 1,000311 |
| 0,1280 | 1,00174 | 1,000753 | 1,000363 | 1,000207 |
| 0,1522 | 1,00111 | 1,000479 | 1,000230 | 1,000129 |
| 0,1810 | 1,000733 | 1,000314 | 1,000147 | 1,0000810 |
| 0,2152 | 1,000522 | 1,000220 | 1,000100 | 1,0000534 |

$$\frac{r}{h} = 4$$

| $\frac{\tau_1}{h}$ \diagdown $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |
|--|---------------|---------------|---------------|----------------|
| 0,2000 · 10 ¹ | 0,0143 | 0,0143 | 0,0144 | 0,0144 |
| 0,2378 | 0,0202 | 0,0203 | 0,0201 | 0,0204 |
| 0,2828 | 0,0286 | 0,0288 | 0,0288 | 0,0289 |
| 0,3364 | 0,0406 | 0,0407 | 0,0409 | 0,0409 |
| 0,4000 | 0,0574 | 0,0577 | 0,0578 | 0,0579 |
| 0,4757 | 0,0814 | 0,0815 | 0,0816 | 0,0816 |
| 0,5657 | 0,115 | 0,115 | 0,115 | 0,114 |
| 0,6727 | 0,162 | 0,160 | 0,158 | 0,156 |
| 0,8000 | 0,225 | 0,218 | 0,211 | 0,207 |
| 0,9514 | 0,308 | 0,289 | 0,274 | 0,262 |
| 0,1131 · 10 ² | 0,415 | 0,374 | 0,342 | 0,316 |
| 0,1345 | 0,547 | 0,471 | 0,413 | 0,369 |
| 0,1600 | 0,704 | 0,580 | 0,489 | 0,422 |
| 0,1903 | 0,877 | 0,702 | 0,573 | 0,479 |
| 0,2263 | 1,0443 | 0,837 | 0,668 | 0,545 |
| 0,2691 | 1,179 | 0,977 | 0,776 | 0,621 |
| 0,3200 | 1,258 | 1,107 | 0,895 | 0,709 |
| 0,3805 | 1,277 | 1,207 | 1,0177 | 0,810 |
| 0,4525 | 1,253 | 1,261 | 1,131 | 0,910 |
| 0,5382 | 1,206 | 1,267 | 1,216 | 1,0363 |
| 0,6400 | 1,154 | 1,239 | 1,260 | 1,142 |
| 0,7610 | 1,107 | 1,193 | 1,262 | 1,222 |
| 0,9050 | 1,0714 | 1,145 | 1,233 | 1,262 |
| 0,1076 · 10 ³ | 1,0459 | 1,102 | 1,189 | 1,263 |
| 0,1280 | 1,0291 | 1,0693 | 1,143 | 1,236 |
| 0,1522 | 1,0185 | 1,0461 | 1,104 | 1,195 |
| 0,2152 | 1,00867 | 1,0219 | 1,0536 | 1,119 |

$$\frac{r}{h} = 8$$

| $\frac{\tau_1}{h} \backslash \frac{\rho_2}{\rho_1}$ | 2 | 4 | 8 | 16 |
|---|---------|----------|----------|----------|
| 0,2000 · 10 ¹ | 0,0143 | 0,0142 | 0,0142 | 0,0141 |
| 0,2378 | 0,0201 | 0,0199 | 0,0196 | 0,0196 |
| 0,2828 | 0,0282 | 0,0279 | 0,0278 | 0,0278 |
| 0,3364 | 0,0400 | 0,0398 | 0,0398 | 0,0399 |
| 0,4000 | 0,0571 | 0,0572 | 0,0574 | 0,0575 |
| 0,4757 | 0,0817 | 0,0821 | 0,0824 | 0,0826 |
| 0,5657 | 0,117 | 0,118 | 0,119 | 0,120 |
| 0,6727 | 0,168 | 0,171 | 0,174 | 0,178 |
| 0,8000 | 0,242 | 0,252 | 0,265 | 0,280 |
| 0,9514 | 0,355 | 0,387 | 0,425 | 0,457 |
| 0,1131 · 10 ² | 0,529 | 0,608 | 0,678 | 0,724 |
| 0,1345 | 0,774 | 0,899 | 0,980 | 1,0177 |
| 0,1600 | 1,0374 | 1,156 | 1,205 | 1,214 |
| 0,1903 | 1,225 | 1,281 | 1,277 | 1,258 |
| 0,2263 | 1,294 | 1,280 | 1,240 | 1,206 |
| 0,2691 | 1,276 | 1,221 | 1,169 | 1,134 |
| 0,3200 | 1,218 | 1,151 | 1,103 | 1,0756 |
| 0,3805 | 1,154 | 1,0927 | 1,0562 | 1,0369 |
| 0,4525 | 1,0997 | 1,0524 | 1,0274 | 1,0152 |
| 0,5382 | 1,0606 | 1,0279 | 1,0124 | 1,00544 |
| 0,6400 | 1,0355 | 1,0147 | 1,00570 | 1,00192 |
| 0,7610 | 1,0206 | 1,00807 | 1,00299 | 1,000962 |
| 0,9050 | 1,0121 | 1,00472 | 1,00184 | 1,000720 |
| 0,1076 · 10 ³ | 1,00730 | 1,00291 | 1,00123 | 1,000570 |
| 0,1280 | 1,00950 | 1,00184 | 1,000821 | 1,000416 |
| 0,1522 | 1,00287 | 1,00119 | 1,000542 | 1,000282 |
| 0,1810 | 1,00191 | 1,000798 | 1,000361 | 1,000186 |
| 0,2152 | 1,00137 | 1,000571 | 1,000255 | 1,000128 |

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Л. Ваньян. Основы электромагнитных зондирований. М., «Недрз», 1965.
 2. Л. Л. Ваньян. Становление электромагнитного поля и его использование для решения задач структурной геологии. Новосибирск, «Наука», 1966.
 3. А. А. Кауфман, Г. М. Морозова. Электромагнитное поле магнитного вертикального диполя «бесконечно» длинного кабеля и петли в области низких частот и больших времен (двухслойная среда). Настоящий сборник.
-

А. А. Кауфман, Г. М. Морозова

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ
МАГНИТНОГО ВЕРТИКАЛЬНОГО ДИПОЛЯ
«БЕСКОНЕЧНО» ДЛИННОГО КАБЕЛЯ И ПЕТЛИ
В ОБЛАСТИ НИЗКИХ ЧАСТОТ И БОЛЬШИХ ВРЕМЕН**

(двухслойная среда)

В статье показана принципиальная возможность изучения геоэлектрического разреза методами переменного тока, когда расстояние между передающим и приемным устройством меньше, чем глубина до исследуемого пласта. Сокращение разносов по сравнению с ныне применяемыми и переход в область низких частот или больших времен может привести к существенному повышению эффективности электроразведки.

Как известно, вектор-потенциал вертикального магнитного диполя над двухслойной средой определяется по формуле:

$$A_z = \frac{M}{4\pi r} \int_0^{\infty} F(\lambda, \alpha) e^{-\lambda z} J_0(\lambda) d\lambda, \quad (1)$$

где r — расстояние между передающим и приемным устройствами; M — момент диполя;

$$\bar{z} = \frac{z+d}{r}. \quad (1')$$

Здесь d — расстояние от диполя до дневной поверхности.

$$F(\lambda, \alpha) = - \frac{k_{10} + k_{12} e^{-2\lambda_1 h}}{1 + k_{10} k_{12} e^{-2\lambda_1 h}}, \quad (2)$$

где

$$k_{10} = \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1 + \lambda}; \quad k_{12} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}; \quad \lambda_1 = \sqrt{\lambda^2 + \alpha^4};$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\lambda^2 + s\alpha^4}; \quad \alpha^4 = k_1^2 r^2; \quad s = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}; \quad h = \frac{H}{r}.$$

Здесь $k_1 = c' \sigma_1 \mu \omega$ — волновое число пласта с удельной проводимостью σ_1 и мощностью H ; σ_2 — удельная проводимость подстилающей среды; ω — круговая частота; μ — магнитная проницаемость, равная $4\pi \cdot 10^{-7}$ гн/м.

Найдем выражение для вектор-потенциала A_z в виде ряда по степеням малого параметра α , когда длина волны в наиболее проводящей среде значительно больше мощности пласта и расстояния между источником поля и точкой наблюдения.

Представим интеграл в выражении (1) как сумму двух интегралов:

$$A_z = \frac{1}{r} \left[\int_0^\alpha F(\lambda, \alpha) e^{-\lambda z} J_0(\lambda) d\lambda + \int_\alpha^\infty F(\lambda, \alpha) e^{-\lambda z} J_0(\lambda) d\lambda \right], \quad (3)$$

где $\alpha \ll 1$, и для каждого из интегралов найдем разложение в ряд по степеням α .

Внутренняя часть интеграла

Поскольку множитель в выражении (2) $k_{10} k_{12} e^{-2\lambda h} < 1$, представим функцию $F(\lambda)$ в виде ряда:

$$F(\lambda) = - \left[\sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} k_{10}^l k_n^{l-1} e^{-2\lambda h (l-1)} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \times \right. \\ \left. \times k_{10}^{l-1} k_{12}^l \cdot e^{-2\lambda h l} \right]. \quad (4)$$

Знакопеременный ряд в выражении (4) при всех значениях λ достаточно быстро сходится, и каждый член можно интерпретировать как соответствующее отражение от поверхности раздела сред с различной проводимостью при возбуждении поля элементарной цилиндрической волной. Считая величину $2\lambda_1 h l$ на участке интегрирования по λ от 0 до α меньше единицы, разложим экспоненты $e^{-2\lambda h (l-1)}$ и $e^{-2\lambda h l}$ и представим функцию F в виде ряда

$$F = \sum_{i=1}^n F_i, \quad (5)$$

где F_i — функции, получаемые при замене экспонент, стоя-

щих в правой части (4), соответствующим им членом разложения. Очевидно,

$$F_1 = - \left[\sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} k_{10}^l k_{12}^{l-1} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} k_{10}^{l-1} k_{12}^l \right]. \quad (6)$$

Воспользовавшись известным разложением

$$\frac{1}{1+x} = \sum (-1)^k x^k,$$

имеем

$$F_1 = - [A_1 + B_1], \quad (7)$$

где

$$A_1 = \frac{k_{10}}{1 + k_{10} k_{12}}; \quad B_1 = \frac{k_{12}}{1 + k_{10} k_{12}}. \quad (8)$$

Аналогично

$$F_2 = - (-2\lambda_1 h) \left[\sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} (l-1) k_{10}^l k_{12}^{l-1} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} e k_{10}^{l-1} k_{12}^{l-1} \right] = (2\lambda_1 h) [A_2 + B_2]. \quad (9)$$

Нетрудно заметить, что функции A_2 и B_2 можно представить в виде

$$A_2 = k_{12} A_1', \quad B_2 = k_{12} B_1', \quad (10)$$

где A_1' и B_1' — производные по параметру k_{12} , и для функции F_2 имеем:

$$F_2 = \frac{m_2}{m_1} k_{12} F_1'.$$

Здесь m_i — коэффициенты разложения $e^{-2\lambda_1 h}$. Аналогично

$$F_3 = \frac{m_3}{m_2} k_{12} F_2'. \quad (11)$$

В общем случае имеем

$$F_n = \frac{m^n}{m^{n-1}} k_{12} F_n',$$

где

$$\frac{m^n}{m^{n-1}} = - \frac{2\lambda_1 h}{n-1}. \quad (12)$$

Опуская несложные преобразования, получаем выражение для функций F_i :

$$F_1 = - \frac{k_{10} + k_{12}}{1 + k_{10} k_{12}}; \quad (13)$$

$$F_2 = 2\lambda_1 h k_{12} \frac{(1 - k_{10}^2)}{(1 + k_{10} k_{12})^2}; \quad (14)$$

$$F_3 = -2h^2 \lambda_1^2 k_{12} \frac{(1 - k_{10}^2)}{(1 + k_{10} k_{12})^3} (1 - k_{10} k_{12}); \quad (15)$$

$$F_4 = \frac{4}{3} h^3 \lambda_1^3 (1 - k_{10}^2) k_{12} \frac{1}{(1 + k_{10} k_{12})^4} [k_{10}^2 k_{12}^2 - 4k_{10} k_{12} + 1]; \quad (16)$$

$$F_5 = -\frac{2}{3} h^4 \lambda_1^4 (1 - k_{10}^2) k_{12} \frac{1}{(1 + k_{10} k_{12})^5} [-k_{10}^3 k_{12}^3 + 11k_{10}^2 k_{12}^2 - 11k_{10} k_{12} + 1]. \quad (17)$$

Выражения для функций F с индексом $i > 5$ в статье не приведены, но ниже будут даны соответствующие разложения интегралов, содержащих эти функции, в ряд по степеням α . Функции с индексом $i > 9$ не вносят вклад в разложения интегралов, если ограничиваться членами ряда со степенями α не больше 12. Воспользуемся соотношениями

$$\frac{1}{1 + k_{10} k_{12}} = \frac{(\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda_1)}{2\lambda_1(\lambda_2 + \lambda)}, \quad 1 - k_{10}^2 = \frac{4\lambda\lambda_1}{(\lambda_1 + \lambda)^2},$$

$$1 - k_{10} k_{12} = \frac{2\lambda(\lambda + \lambda_2) + \alpha^4}{(\lambda_1 + \lambda)(\lambda_2 + \lambda_1)}$$

и выразим функции F_i через $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$:

$$F_1 = -\frac{s\alpha^4}{(\lambda_2 + \lambda)^2}, \quad (18)$$

$$F_2 = 2\lambda h \frac{(s-1)\alpha^4}{(\lambda_2 + \lambda)^2}, \quad (19)$$

$$F_3 = F_3^{(1)} + F_3^{(11)}, \quad (20)$$

где

$$F_3^{(1)} = -2h^2(s-1)\alpha^4 \frac{\lambda^2}{(\lambda_2 + \lambda)^2}; \quad (21)$$

$$F_3^{(11)} = -2h^2(s-1)\alpha^8 \frac{\lambda}{(\lambda_2 + \lambda)^3};$$

$$F_4 = \sum_{i=1}^4 F_4^{(i)},$$

где

$$F_4^{(1)} = \frac{4}{3} h^3 (s-1) \alpha^4 \frac{\lambda^3}{(\lambda + \lambda_2)^2},$$

$$F_4^{(II)} = \frac{8}{3} h^3 (s-1) \alpha^8 \frac{\lambda^2}{(\lambda + \lambda_2)^3}, \quad (22)$$

$$F_4^{(III)} = \frac{4}{3} h^3 (s-1) \alpha^{12} \frac{\lambda}{(\lambda + \lambda_2)^4}, \quad F_4^{(IV)} = -\frac{2}{3} h^3 (s-1)^2 \alpha^{12} \times \\ \times \frac{\lambda}{(\lambda + \lambda_2)^4},$$

и наконец,

$$F_5 = \sum_i^6 F_5^{(i)},$$

где

$$F_5^{(I)} = -\frac{2}{3} h^4 (s-1) \alpha^4 \frac{\lambda^4}{(\lambda_2 + \lambda)^2},$$

$$F_5^{(II)} = -2h^4 (s-1) \frac{\lambda^3}{(\lambda_2 + \lambda)^3} \alpha^8, \quad F_5^{(III)} = -2h^4 (s-1) \alpha^{12} \times \\ \times \frac{\lambda^2}{(\lambda_2 + \lambda)^4},$$

$$F_5^{(IV)} = -\frac{2}{3} h^4 (s-1) \alpha^{16} \frac{\lambda}{(\lambda_2 + \lambda)^5}, \quad F_5^{(V)} = \frac{4}{3} h^4 (s-1)^2 \alpha^{12} \times \\ \times \frac{\lambda^2}{(\lambda_2 + \lambda)^4}, \quad (23)$$

$$F_5^{(VI)} = \frac{4}{3} h^4 (s-1)^2 \alpha^{15} \frac{\lambda}{(\lambda_2 + \lambda)^5}.$$

Таким образом, внутренний интеграл в выражении для вектор-потенциала записывается в виде суммы интегралов:

$$\sum_{k=1}^5 \int_0^\alpha e^{-\lambda z} J_0(\lambda) d\lambda, \quad (24)$$

Так как переменная интегрирования λ значительно меньше единицы ($\alpha \ll 1$), то произведение $e^{-\lambda z} J_0(\lambda)$ можно представить в виде быстро сходящегося ряда

$$e^{-\lambda z} J_0(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k^{(0)} \lambda^k, \quad (25)$$

где $f_k^{(0)}$ легко определяются из известных разложений в степенной ряд функций $e^{-\lambda z}$ и $J_0(\lambda)$. Интегралы в выражении (24), после подстановки ряда (25) и умножения знаменателя в функциях F на сопряженное приводятся к табличным интегралам вида

$$I_m = \int_0^\alpha \lambda^m (\lambda^2 + s\alpha^4)^{i-3} d\lambda, \quad (26)$$

которые связаны между собой рекуррентным соотношением

$$I_m = \frac{\lambda^{m-1}(\lambda^2 + s\alpha^4)^{3/2}}{m+2} - \frac{m-1}{m+2} s\alpha^4 I_{m-2} \quad (m \geq 2). \quad (27)$$

Разложение интегралов I_m в ряд по степеням α приведено ниже:

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{2} \alpha^2 + \left(\frac{1}{4}s + \frac{1}{2}s \ln 2 - \frac{1}{4}s \ln s \right) \alpha^4 - \frac{1}{2} s \alpha^4 \ln \alpha + \\ &+ \frac{1}{16} s^2 \alpha^6 - \frac{1}{64} s^3 \alpha^8 + \frac{5}{32 \cdot 24} s^4 \alpha^{10} - \frac{7}{64 \cdot 32} s^5 \alpha^{12} + \frac{21}{256 \cdot 40} s^6 \alpha^{14}, \\ I_1 &= \frac{1}{3} \alpha^3 + \frac{1}{2} s \alpha^5 - \frac{1}{3} s^{3/2} \alpha^6 + \frac{1}{8} s^2 \alpha^7 - \frac{1}{48} s^3 \alpha^9 + \frac{1}{128} s^4 \alpha^{11} - \frac{1}{256} s^5 \alpha^{13}, \\ I_2 &= \frac{1}{4} \alpha^4 + \frac{1}{4} s \alpha^6 + \frac{1}{8} s^2 \alpha^8 \ln \alpha + \left(\frac{1}{8}s - \frac{1}{2}s \ln 2 + \frac{1}{4}s \ln s \right) \cdot \frac{s \alpha^8}{4} - \\ &- \frac{1}{32} s^3 \alpha^{10} + \frac{5}{4 \cdot 128} s^4 \alpha^{12} - \frac{7}{6 \cdot 256} s^5 \alpha^{14} + \frac{21 s^6 \alpha^{16}}{32 \cdot 256} - \frac{66 s^7 \alpha^{18}}{160 \cdot 256}, \\ I_3 &= \frac{1}{5} \alpha^5 + \frac{1}{6} s \alpha^7 - \frac{1}{8} s^2 \alpha^9 - \frac{1}{16} s^3 \alpha^{11} + \frac{2}{15} s^{3/2} \alpha^{10} + \frac{5}{3 \cdot 128} s^4 \alpha^{13} - \\ &- \frac{7}{5 \cdot 256} s^5 \alpha^{15} + \frac{3}{4 \cdot 256} s^6 \alpha^{17}, \\ I_4 &= \frac{1}{6} \alpha^6 + \frac{1}{8} s \alpha^8 - \frac{1}{16} s^2 \alpha^{10} + s^3 \left(-\frac{5}{192} + \frac{1}{16} \ln 2 - \frac{1}{32} \ln s \right) \alpha^{12} - \\ &- \frac{1}{16} s^3 \alpha^{12} \ln \alpha - \frac{5}{256} s^4 \alpha^{14} - \frac{8}{4 \cdot 256} s^5 \alpha^{16} + \frac{7 s^6 \alpha^{18}}{8 \cdot 256}, \\ I_5 &= \frac{1}{7} \alpha^7 + \frac{1}{10} s \alpha^9 - \frac{1}{24} s^2 \alpha^{11} + \frac{1}{16} s^3 \alpha^{13} - \frac{8}{105} s^{7/2} \alpha^{14} + \\ &+ \frac{5}{128} s^4 \alpha^{15} - \frac{7 s^5}{3 \cdot 256} \alpha^{17}, \\ I_6 &= \frac{1}{8} \alpha^8 + \frac{1}{12} s \alpha^{10} - \frac{1}{32} s^2 \alpha^{12} - \frac{1}{32} s^3 \alpha^{14} + s^4 \left(\frac{59}{192 \cdot 16} - \frac{5}{8 \cdot 16} \ln 2 + \right. \\ &\left. + \frac{5 \ln s}{8 \cdot 32} \right) \alpha^{16} + \frac{5}{128} s^4 \alpha^{16} \ln \alpha - \frac{7}{2 \cdot 256} s^5 \alpha^{18}, \\ I_7 &= \frac{1}{9} \alpha^9 + \frac{1}{14} s \alpha^{11} - \frac{1}{40} s^2 \alpha^{13} + \frac{1}{48} s^3 \alpha^{15} - \frac{5}{128} s^4 \alpha^{17} + \frac{16}{315} s^{7/2} \alpha^{18}, \\ I_8 &= \frac{1}{10} \alpha^{10} + \frac{1}{16} s \alpha^{12} - \frac{1}{48} s^2 \alpha^{14} + \frac{1}{64} s^3 \alpha^{16} - \frac{5}{256} s^4 \alpha^{18}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_9 &= \frac{1}{11} \alpha^{11} + \frac{1}{18} s \alpha^{13} - \frac{1}{56} s^2 \alpha^{15} + \frac{1}{80} s^3 \alpha^{17}, \\
I_{10} &= \frac{1}{12} \alpha^{12} + \frac{1}{20} s \alpha^{14} - \frac{1}{64} s^2 \alpha^{16} + \frac{1}{96} s^3 \alpha^{18}, \\
I_{11} &= \frac{1}{13} \alpha^{13} + \frac{1}{22} s \alpha^{15} - \frac{1}{72} s^2 \alpha^{17}, \quad I_{12} = \frac{1}{14} \alpha^{14} + \frac{1}{24} s \alpha^{16} - \frac{1}{80} s^2 \alpha^{18}, \\
I_{13} &= \frac{1}{15} \alpha^{15} + \frac{1}{26} s \alpha^{17}, \quad I_{14} = \frac{1}{16} \alpha^{16} + \frac{1}{28} s \alpha^{18}, \\
I_{15} &= \frac{1}{17} \alpha^{17}, \quad I_{16} = \frac{1}{18} \alpha^{18}.
\end{aligned}$$

Так как первый коэффициент разложения (25) $f_0^{(0)}$ не зависит от координат точек наблюдения ($f_0^{(0)} = 1$), то интегралы, содержащиеся в подинтегральном выражении f_0 , не влияют на компоненты электромагнитного поля. С увеличением индекса при коэффициенте f_i интегралы убывают, так как возрастает степень λ ($\lambda \ll 1$). Для каждого f_i (начиная с f_1) ниже приведено разложение интегралов в ряд по степеням α , которые могут быть одновременно использованы при изучении асимптотического поведения полей вертикального магнитного диполя, бесконечно длинного кабеля, замкнутой петли, лежащей в горизонтальной плоскости, а также одной из компонент вектор-потенциала электрического и горизонтального магнитного диполей:

$$\begin{aligned}
F_1 &= -\frac{\lambda_2 - \lambda}{\lambda_2 + \lambda} = -s \alpha^4 \frac{1}{(\lambda_2 + \lambda)^2}; \\
f_1^{(0)} &\left[\frac{1}{4} s \alpha^4 \ln \alpha + \left(\frac{1}{8} s - \frac{1}{2} s \ln 2 + \frac{1}{4} s \ln s \right) \frac{\alpha^4}{2} - \frac{1}{16} s^2 \alpha^6 + \frac{5s^3 \alpha^8}{256} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{7}{3 \cdot 256} s^4 \alpha^{10} + \frac{21s^5}{16 \cdot 256} \alpha^{12} \right]; \\
f_2^{(0)} &\left[-\frac{1}{4} s \alpha^5 - \frac{1}{8} s^2 \alpha^7 + \frac{4}{15} s^{3/2} \alpha^6 + \frac{5}{192} s^3 \alpha^9 - \frac{7}{5 \cdot 128} s^4 \alpha^{11} \right]; \\
f_3^{(0)} &\left[-\frac{1}{8} s \alpha^6 + s^2 \left(-\frac{5}{96} + \frac{1}{8} \ln 2 - \frac{1}{16} \ln s \right) \alpha^8 - \frac{1}{8} s^2 \alpha^8 \ln \alpha + \right. \\
&\quad \left. + \frac{5}{128} s^3 \alpha^{10} - \frac{7}{2 \cdot 256} s^4 \alpha^{12} \right]; \\
f_4^{(0)} &\left[-\frac{1}{12} s \alpha^7 + \frac{1}{8} s^2 \alpha^9 - \frac{16}{105} s^{3/2} \alpha^{10} + \frac{5}{64} s^3 \alpha^{11} \right];
\end{aligned}$$

$$f_5^{(0)} \left[-\frac{1}{16} s \alpha^8 + \frac{1}{16} s^2 \alpha^{10} + \frac{5}{64} s^3 \alpha^{12} \ln \alpha + s^3 \left(\frac{59}{192 \cdot 8} - \frac{5}{64} \ln 2 + \frac{5 \ln s}{4 \cdot 32} \right) \alpha^{12} \right];$$

$$f_6^{(0)} \left[-\frac{1}{20} s \alpha^9 + \frac{1}{24} s^2 \alpha^{11} \right]; \quad f_7^{(0)} \left[-\frac{1}{24} s \alpha^{10} + \frac{1}{32} s^2 \alpha^{12} \right];$$

$$f_8^{(0)} \left[-\frac{1}{28} s \alpha^{11} \right]; \quad f_9^{(0)} \left[-\frac{1}{32} s \alpha^{12} \right];$$

$$F_2 = 2h (s-1) \alpha^4 \frac{\lambda}{(\lambda + \lambda_2)^2}.$$

Функция F_2 может быть представлена следующим образом:

$$F_2 = 2h \cdot \frac{(1-s)}{s} \lambda F_1,$$

поэтому коэффициенты при параметре α непосредственно получают из разложения функций F_1 в ряд по степеням α :

$$2h (1-s) f_1^{(0)} \left[-\frac{1}{4} \alpha^5 - \frac{1}{8} s \alpha^7 + \frac{4}{15} s^{1/2} \alpha^6 + \frac{5}{192} s^2 \alpha^9 - \frac{7}{5 \cdot 128} s^3 \alpha^{11} \right];$$

$$2h (1-s) f_2^{(0)} \left[-\frac{1}{8} \alpha^6 + s \left(-\frac{5}{96} + \frac{1}{8} \ln 2 - \frac{1}{16} \ln s \right) \alpha^8 - \frac{1}{8} s \alpha^8 \ln \alpha + \frac{5s^2 \alpha^{10}}{128} - \frac{7}{2 \cdot 256} s^3 \alpha^{12} \right];$$

$$2h (1-s) f_3^{(0)} \left[-\frac{1}{12} \alpha^7 + \frac{1}{8} s \alpha^9 - \frac{16}{105} s^{3/2} \alpha^{10} + \frac{5}{64} s^2 \alpha^{11} \right];$$

$$2h (1-s) f_4^{(0)} \left[-\frac{1}{16} \alpha^8 + \frac{1}{16} s \alpha^{10} + \frac{5}{64} s^2 \alpha^{12} \ln \alpha + s^2 \left(\frac{59}{8 \cdot 192} - \frac{5}{64} \ln 2 + \frac{5 \ln s}{128} \right) \alpha^{12} \right];$$

$$2h (1-s) f_5^{(0)} \left[-\frac{1}{20} \alpha^9 + \frac{1}{24} s \alpha^{11} \right]; \quad 2h (1-s) f_6^{(0)} \left[-\frac{1}{24} \alpha^{10} + \frac{1}{32} s \alpha^{12} \right];$$

$$2h (1-s) f_7^{(0)} \left[-\frac{1}{28} \alpha^{11} \right]; \quad 2h (1-s) f_8^{(0)} \left[-\frac{1}{32} \alpha^{12} \right];$$

$$F_3^{(1)} = -2h^2 (s-1) \alpha^4 \frac{\lambda^2}{(\lambda_2 + \lambda)^2} = -h \lambda F_2;$$

$$-2h^2 (1-s) f_1^{(0)} \left[-\frac{1}{8} \alpha^6 + s \left(-\frac{5}{96} + \frac{1}{8} \ln 2 - \frac{1}{16} \ln s \right) \alpha^8 - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{8} s \alpha^8 \ln \alpha + \frac{5}{128} s^2 \alpha^{10} - \frac{7}{2 \cdot 256} s^3 \alpha^{12} \Big]; \\
& -2h^2(1-s) f_2^{(0)} \left[-\frac{1}{12} \alpha^7 + \frac{1}{8} s \alpha^9 - \frac{16}{105} s^{3/2} \alpha^{10} + \frac{5}{64} s^2 \alpha^{11} \right]; \\
& -2h^2(1-s) f_3^{(0)} \left[-\frac{1}{16} \alpha^8 + \frac{1}{16} s \alpha^{10} + s^2 \left(\frac{59}{8 \cdot 192} \cdot \frac{5}{64} \ln 2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{5 \ln s}{128} \right) \alpha^{12} + \frac{5}{64} s^2 \alpha^{12} \ln \alpha \right]; \\
& -2h^2(1-s) f_4^{(0)} \left[-\frac{1}{20} \alpha^9 + \frac{1}{24} s \alpha^{11} \right]; \\
& -2h^2(1-s) f_5^{(0)} \left[-\frac{1}{24} \alpha^{10} + \frac{1}{32} s \alpha^{12} \right]; \\
& -2h^2(1-s) f_6^{(0)} \left[-\frac{1}{28} \alpha^{11} \right]; \quad -2h^2(1-s) f_7^{(0)} \left[-\frac{1}{32} \alpha^{12} \right]. \\
F_3^{(11)} = & -2h^2(s-1) \alpha^8 \frac{\lambda}{(\lambda_2 + \lambda)^3} = \frac{2h^2(1-s)}{s^3 \alpha^4} [4\lambda^3 \lambda_2 + s \alpha^4 \lambda \lambda_2 - \\
& -4\lambda^4 - 3s \alpha^4 \lambda_2]; \\
& 2h^2(1-s) f_1^{(0)} \left[-\frac{1}{8} \alpha^8 \ln \alpha + \left(-\frac{7}{96} + \frac{1}{8} \ln 2 - \frac{1}{16} \ln s \right) \alpha^8 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{3}{64} s \alpha^{10} - \frac{9s^2}{2 \cdot 256} \alpha^{12} \right]; \\
& 2h^2(1-s) f_2^{(0)} \left[\frac{1}{8} \alpha^9 - \frac{6}{35} s^{1/2} \alpha^{10} + \frac{3}{32} s \alpha^{11} \right]; \\
& 2h^2(1-s) f_3^{(0)} \left[\frac{1}{16} \alpha^{10} + \frac{3}{32} s \alpha^{12} \ln \alpha + s \left(\frac{13}{256} - \frac{3}{32} \ln 2 + \frac{3}{64} \ln s \right) \alpha^{12} \right]; \\
& 2h^2(1-s) f_4^{(0)} \left[\frac{1}{24} \alpha^{11} \right]; \quad 2h^2(1-s) f_5^{(0)} \left[\frac{1}{32} \alpha^{12} \right]. \\
F_4^{(1)} = & \frac{4}{3} h^3 (s-1) \alpha^4 \frac{\lambda^3}{(\lambda_2 + \lambda)^2} = -\frac{2h}{3} \lambda F'_{3}; \\
& \frac{4}{3} h^3 (1-s) f_1^{(0)} \left[-\frac{1}{12} \alpha^7 + \frac{1}{8} s \alpha^9 - \frac{16}{105} s^{3/2} \alpha^{10} + \frac{5}{64} s^2 \alpha^{11} \right]; \\
& \frac{4}{3} h^3 (1-s) f_2^{(0)} \left[-\frac{1}{16} \alpha^8 + \frac{1}{16} s \alpha^{10} + \frac{s^2}{64} \left(\frac{59}{24} - 5 \ln 2 + \frac{5}{2} \ln s \right) \alpha^{12} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{5}{64} s^2 \alpha^{12} \ln \alpha \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{3} h^3 (1-s) f_3^{(0)} \left[-\frac{1}{20} \alpha^9 + \frac{1}{24} s \alpha^{11} \right]; \quad \frac{4}{3} h^3 (1-s) f_4^{(0)} \times \\
& \quad \times \left[-\frac{1}{24} \alpha^{10} + \frac{1}{32} s \alpha^{12} \right]; \\
& \frac{4}{3} h^3 (1-s) f_5^{(0)} \left[-\frac{1}{28} \alpha^{11} \right]; \quad \frac{4}{3} h^3 (1-s) f_6^{(0)} \left[-\frac{1}{32} \alpha^{12} \right]. \\
& F_4^{(II)} = \frac{8h^3}{3} (s-1) \alpha^8 \frac{\lambda^2}{(\lambda + \lambda_2)^3} = -\frac{4}{3} h \lambda F_3^{(II)}; \\
& -\frac{8}{3} h^3 (1-s) f_1^{(0)} \left[\frac{1}{8} \alpha^9 - \frac{6}{35} s^{1/2} \alpha^{10} + \frac{3}{32} s \alpha^{11} \right]; \\
& -\frac{8}{3} h^3 (1-s) f_2^{(0)} \left[\frac{1}{16} \alpha^{10} + \frac{3}{32} s \alpha^{12} \ln \alpha + s \left(\frac{13}{256} - \frac{3}{32} \ln 2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{3}{64} \ln s \right) \alpha^{12} \right]; \\
& -\frac{8}{3} h^3 (1-s) f_3^{(0)} \left[\frac{1}{24} \alpha^{11} \right]; \quad -\frac{8}{3} h^3 (1-s) f_4^{(0)} \left[\frac{1}{32} \alpha^{12} \right]. \\
& F_4^{(III)} = \frac{4}{3} h^3 (s-1) \alpha^{12} \frac{\lambda}{(\lambda_2 + \lambda)^4} = \frac{4}{3} h^3 (1-s) \frac{1}{s^4 \alpha^4} [4s \alpha^4 \lambda^2 \lambda_2 + \\
& \quad + 8 \lambda^4 \lambda_2] - (8 \lambda^5 + 8s \alpha^4 \lambda^3 + s^2 \alpha^8 \lambda); \\
& \frac{4}{3} h^3 (1-s) f_1^{(0)} \left[-\frac{8}{105} s^{-1/2} \alpha^{10} + \frac{1}{16} \alpha^{11} \right]; \\
& \frac{4}{3} h^3 (1-s) f_2^{(0)} \left[\frac{1}{16} \alpha^{12} \ln \alpha + \left(\frac{19}{384} - \frac{1}{16} \ln 2 + \frac{\ln s}{32} \right) \alpha^{12} \right]. \\
& F_4^{(IV)} = -\frac{2}{3} h^3 \alpha^{12} (1-s) \frac{\lambda}{(\lambda_2 + \lambda)^2} = \frac{1}{2} (1-s) F_4^{(III)}; \\
& \frac{2}{3} h^3 (1-s)^2 f_1^{(0)} \left[-\frac{8}{105} s^{-1/2} \alpha^{10} + \frac{1}{16} \alpha^{11} \right]; \\
& \frac{2}{3} h^3 (1-s)^2 f_2^{(0)} \left[\frac{1}{16} \alpha^{12} \ln \alpha + \left(\frac{19}{384} - \frac{1}{16} \ln 2 + \frac{1}{32} \ln s \right) \alpha^{12} \right]; \\
& F_5^{(I)} = -\frac{2}{3} h^4 (s-1) \alpha^4 \frac{\lambda^4}{(\lambda_2 + \lambda)^2} = -\frac{1}{2} h \lambda F_4^{(I)}; \\
& -\frac{2}{3} h^4 (1-s) f_1^{(0)} \left[-\frac{1}{16} \alpha^8 + \frac{1}{16} \alpha^{10} + \frac{5}{64} s^2 \alpha^{12} \ln \alpha + \frac{s^2}{64} \left(\frac{59}{24} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 5 \ln 2 + \frac{5 \ln s}{2} \right) \alpha^{12} \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{3} h^4 (1-s) f_2^{(0)} \left[-\frac{1}{20} \alpha^9 + \frac{1}{24} s \alpha^{11} \right]; \quad -\frac{2}{3} h^4 (1-s) f_3^{(0)} \times \\
& \quad \times \left[-\frac{1}{24} \alpha^{10} + \frac{1}{32} \alpha^{11} \right]; \\
& -\frac{2}{3} h^4 (1-s) f_4^{(0)} \left[-\frac{1}{28} \alpha^{11} \right]; \quad -\frac{2}{3} h^4 (1-s) f_5^{(0)} \times \\
& \quad \times \left[-\frac{1}{32} \alpha^{12} \right].
\end{aligned}$$

$$F_5^{(II)} = -2h^4 (s-1) \alpha^8 \frac{\lambda^3}{(\lambda + \lambda_2)^3} = -\frac{3h}{4} \lambda F_4^{(II)};$$

$$\begin{aligned}
2h^4 (1-s) f_1^{(0)} \left[\frac{1}{16} \alpha^{10} + s \alpha^{12} \left(\frac{13}{256} - \frac{3}{32} \ln 2 + \frac{3}{64} \ln s \right) + \right. \\
\left. + \frac{3}{32} s \alpha^{12} \ln \alpha \right];
\end{aligned}$$

$$2h^4 (1-s) f_2^{(0)} \left[\frac{1}{24} \alpha^{11} \right]; \quad 2h^4 (1-s) f_3^{(0)} \left[\frac{1}{32} \alpha^{12} \right].$$

$$F_5^{(III)} = \frac{4}{3} h^4 (s-1)^2 \alpha^{12} \frac{\lambda^2}{(\lambda_2 + \lambda)^2} = -2h\lambda F_4^{(IV)};$$

$$\frac{4}{3} h^4 (1-s) f_1^{(0)} \left[-\frac{1}{16} \alpha^{12} \ln \alpha - \left(\frac{19}{384} - \frac{1}{16} \ln 2 + \frac{1}{32} \ln s \right) \alpha^{12} \right].$$

$$F_5^{(IV)} = -\frac{2}{3} h^4 (s-1) \alpha^{16} \frac{\lambda}{(\lambda_2 + \lambda)^5};$$

$$\frac{2}{3} h^4 (1-s) f_1^{(0)} \left[\frac{5}{192 \cdot s} \alpha^{12} \right].$$

$$F_5^{(V)} = \frac{4}{3} h^4 (s-1)^2 \alpha^{16} \frac{\lambda}{(\lambda_2 + \lambda)^5} = 2(1-s) F_5^{(IV)};$$

$$\frac{4}{3} h^4 (1-s)^2 f_1^{(0)} \left[\frac{5}{192 \cdot s} \alpha^{12} \right].$$

$$F_5^{(VI)} = -2h^4 (s-1) \alpha^{12} \frac{\lambda^2}{(\lambda_2 + \lambda)^4} = -\frac{3}{2} h\lambda F_4^{(III)};$$

$$-2h^4 (1-s) f_1^{(0)} \left[\frac{1}{16} \alpha^{12} \ln \alpha + \left(\frac{19}{384} - \frac{1}{16} \ln 2 + \frac{1}{32} \ln s \right) \right].$$

$$F_6^{(I)} = \frac{4}{15} h^5 \alpha^4 (s-1) \frac{\lambda^5}{(\lambda_2 + \lambda)^2} = -\frac{2}{5} h^4 \lambda F_5^{(I)};$$

$$\frac{4}{15} h^5 (1-s) f_1^{(0)} \left[-\frac{1}{20} \alpha^9 + \frac{1}{24} s \alpha^{11} \right]; \quad \frac{4}{15} h^5 (1-s) f_4^{(0)} \times$$

$$\times \left[-\frac{1}{24} \alpha^{10} + \frac{1}{32} s \alpha^{12} \right];$$

$$\frac{4}{15} h^5 (1-s) f_3^{(0)} \left[-\frac{1}{28} \alpha^{11} \right]; \quad \frac{4}{15} h^5 (1-s) f_4^{(0)} \left[-\frac{1}{32} \alpha^{12} \right].$$

$$F_6^{(II)} = \frac{16}{15} h^5 \alpha^8 (s-1) \frac{\lambda}{(\lambda_2 + \lambda)^3} = -\frac{8}{15} h \lambda F_5^{(II)};$$

$$-\frac{16}{15} h^5 (1-s) f_1^{(0)} \left[\frac{1}{24} \alpha^{11} \right]; \quad -\frac{16}{15} h^5 (1-s) f_2^{(0)} \left[\frac{1}{32} \alpha^{12} \right].$$

$$F_7^{(I)} = -\frac{4}{45} h^6 (s-1) \alpha^4 \frac{\lambda^6}{(\lambda_2 + \lambda)^2} = -\frac{1}{3} h \lambda F_6^{(I)};$$

$$-\frac{4}{45} h^6 (1-s) f_1^{(0)} \left[-\frac{1}{24} \alpha^{10} + \frac{1}{32} s \alpha^{12} \right];$$

$$-\frac{4}{45} h^6 (1-s) f_2^{(0)} \left[-\frac{1}{28} \alpha^{11} \right]; \quad -\frac{4}{45} h^6 (1-s) \left[-\frac{1}{32} \alpha^{12} \right];$$

$$F_7^{(II)} = -\frac{4}{9} h^6 (s-1) \alpha^8 \frac{\lambda^5}{(\lambda_2 + \lambda)^3} = -\frac{5}{12} h \lambda F_6^{(II)};$$

$$\frac{4}{9} h^6 (1-s) f_1^{(0)} \left[\frac{1}{32} \alpha^{12} \right].$$

$$F_8^{(I)} = \frac{8}{315} h^7 \alpha^4 (s-1) \frac{\lambda^7}{(\lambda_2 + \lambda)^2} = -\frac{2}{7} h \lambda F_7^{(I)};$$

$$\frac{8}{315} (1-s) h^7 f_1^{(0)} \left[-\frac{1}{28} \alpha^{11} \right];$$

$$\frac{8}{315} (1-s) h^7 f_2^{(0)} \left[-\frac{1}{32} \alpha^{12} \right].$$

$$F_9^{(I)} = -\frac{1}{4} \lambda F_8^{(I)};$$

$$\frac{2}{315} (1-s) h^8 \left[\frac{1}{32} \alpha^{12} \right].$$

При определении компонент электромагнитного поля многие коэффициенты сокращаются. Так, в выражении для вертикальной компоненты магнитного поля присутствует относительная мощность пласта h в степени не выше трех, т. е. величину H_z (с заданной точностью) определяют только функции F_1, F_2, F_3, F_4 .

Внешняя часть интеграла

Методика суммирования ряда (4), основанная на разложении $e^{-2\lambda_1 h}$ в ряд по степеням $(\lambda_1 h \lambda)^k$, неприменима для внешней части интеграла, так как параметр λ_1 неограниченно возрастает. Поэтому будем искать разложение в ряд по степеням α для интегралов, подинтегральная функция которых представляет собой произведение каждого члена суммы (4) на $e^{-\lambda z} J_0(\lambda)$.

Для первых шести интегралов имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 N_0 &= - \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1 + \lambda} e^{-\lambda \bar{z}} J_0(\lambda) d\lambda, \\
 N_1 &= - \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1} e^{-2\lambda_1 h} e^{-\lambda z} J_0(\lambda) d\lambda, \\
 N_2 &= \int_{\alpha}^{\infty} \left(\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1 + \lambda} \right)^2 \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1} e^{-2\lambda_1 h} e^{-\lambda \bar{z}} J_0(\lambda) d\lambda, \quad (28) \\
 N_3 &= \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1 + \lambda} \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1} \right)^2 e^{-4\lambda_1 h} e^{-\lambda \bar{z}} J_0(\lambda) d\lambda, \\
 N_4 &= - \int_{\alpha}^{\infty} \left(\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1 + \lambda} \right)^3 \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1} \right)^2 e^{-4\lambda_1 h} e^{-\lambda \bar{z}} J_0(\lambda) d\lambda, \\
 N_5 &= - \int_{\alpha}^{\infty} \left(\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1 + \lambda} \right)^2 \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1} \right)^3 e^{-6\lambda_1 h} e^{-\lambda \bar{z}} J_0(\lambda) d\lambda \text{ и т. д.}
 \end{aligned}$$

Как будет видно из дальнейшего, первый член ряда разложения каждого последующего интеграла N начинается с более высокой степени α . Эта закономерность отсутствует, если искать разложения для интегралов N в пределах от нуля до α : ряды начинаются с одной и той же степени α , но соответствующие коэффициенты уменьшаются.

Для внешней части интеграла выполняется условие

$$\lambda^2 > \alpha^4. \quad (29)$$

Поэтому радикалы, входящие в подинтегральные функции

N_i , $\sqrt{\lambda^2 + \alpha^4}$ и $\sqrt{\lambda^2 + S\alpha^4}$ можно разложить в достаточно быстро сходящийся ряд по степеням (α^4/λ^2) .

Таким образом, интегралы N_i могут быть выражены с помощью интегралов, не содержащих в подынтегральной функции параметра α . Эти интегралы имеют вид:

$$L_k = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-\beta_i i}}{\lambda^k} J_0(\lambda) d\lambda, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_0 &= z; \quad \beta_1 = z + 2h; \\ \beta_3 &= z + 4h; \quad \beta_4 = z + 6h. \end{aligned} \quad (31)$$

Введем коэффициенты $f_m^{(i)}$ из разложения

$$e^{-\beta_i i} J_0(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m^{(i)} \lambda^m. \quad (32)$$

В частности, при $\beta_0 (h=0)$ получаем $f_m^{(0)}$ из соотношения (25). Представим интегралы (30) в виде ряда

$$L_k = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-\beta_i i}}{\lambda^k} J_0(\lambda) d\lambda = \sum a_n \alpha^n + a_0 \ln \alpha, \quad (33)$$

где n может быть отрицательным числом. Беря от обеих частей равенства (33) производную по α и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях α , легко находим a ($n \neq 0$) через $f_m^{(i)}$:

$$\begin{aligned} L_0 &= B_0 - f_0 \alpha - \frac{1}{2} f_1 \alpha^2 - \frac{1}{3} f_2 \alpha^3 - \frac{1}{4} f_3 \alpha^4 - \frac{1}{5} f_4 \alpha^5 - \frac{1}{6} f_5 \alpha^6 - \\ &\quad - \frac{1}{7} f_6 \alpha^7 - \frac{1}{8} f_7 \alpha^8 - \frac{1}{9} f_8 \alpha^9 - \frac{1}{10} f_9 \alpha^{10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1 &= B_1 - f_0 \ln \alpha - f_1 \alpha - \frac{1}{2} f_2 \alpha^2 - \frac{1}{3} f_3 \alpha^3 - \frac{1}{4} f_4 \alpha^4 - \frac{1}{5} f_5 \alpha^5 - \\ &\quad - \frac{1}{6} f_6 \alpha^6 - \frac{1}{7} f_7 \alpha^7 - \frac{1}{8} f_8 \alpha^8 - \frac{1}{9} f_9 \alpha^9 - \frac{1}{10} f_{10} \alpha^{10}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 &= B_2 + \frac{f_0}{\alpha} - f_1 \ln \alpha - f_2 \alpha - \frac{1}{2} f_3 \alpha^2 - \frac{1}{3} f_4 \alpha^3 - \frac{1}{4} f_5 \alpha^4 - \\ &\quad - \frac{1}{5} f_6 \alpha^5 - \frac{1}{6} f_7 \alpha^6 - \frac{1}{7} f_8 \alpha^7 - \frac{1}{8} f_9 \alpha^8 - \frac{1}{9} f_{10} \alpha^9 - \frac{1}{10} f_{11} \alpha^{10}, \end{aligned}$$

$$L_3 = B_3 + \frac{1}{2} \frac{f_0}{\alpha^2} + \frac{f_1}{\alpha} - f_2 \ln \alpha - f_3 \alpha - \frac{1}{2} f_4 \alpha^2 - \frac{1}{3} f_5 \alpha^3 -$$

$$-\frac{1}{4}f_6\alpha^4 - \frac{1}{5}f_7\alpha^5 - \frac{1}{6}f_8\alpha^6 - \frac{1}{7}f_9\alpha^7 - \frac{1}{8}f_{10}\alpha^8 - \frac{1}{9}f_{11}\alpha^9 - \\ - \frac{1}{10}f_{12}\alpha^{10},$$

$$L_4 = B_4 + \frac{1}{3}\frac{f_0}{\alpha^3} + \frac{1}{2}\frac{f_1}{\alpha^2} + \frac{f_2}{\alpha} - f_3 \ln \alpha - f_4 \alpha - \frac{1}{2}f_5 \alpha^2 - \frac{1}{3}f_6 \alpha^3 - \\ - \frac{1}{4}f_7 \alpha^4 - \frac{1}{5}f_8 \alpha^5 - \frac{1}{6}f_9 \alpha^6,$$

$$L_5 = B_5 + \frac{1}{4}\frac{f_0}{\alpha^4} + \frac{1}{3}\frac{f_1}{\alpha^3} + \frac{1}{2}\frac{f_2}{\alpha^2} + \frac{f_3}{\alpha} - f_4 \ln \alpha - f_5 \alpha - \frac{1}{2}f_6 \alpha^2 - \\ - \frac{1}{3}f_7 \alpha^3 - \frac{1}{4}f_8 \alpha^4 - \frac{1}{5}f_9 \alpha^5 - \frac{1}{6}f_{10} \alpha^6,$$

$$L_6 = B_6 + \frac{1}{5}\frac{f_0}{\alpha^5} + \frac{1}{4}\frac{f_1}{\alpha^4} + \frac{1}{3}\frac{f_2}{\alpha^3} + \frac{1}{2}\frac{f_3}{\alpha^2} + \frac{f_4}{\alpha} - f_5 \ln \alpha - f_6 \alpha - \\ - \frac{1}{2}f_7 \alpha^2 - \frac{1}{3}f_8 \alpha^3,$$

$$L_7 = B_7 + \frac{1}{6}\frac{f_0}{\alpha^6} + \frac{1}{5}\frac{f_1}{\alpha^5} + \frac{1}{4}\frac{f_2}{\alpha^4} + \frac{1}{3}\frac{f_3}{\alpha^3} + \frac{1}{2}\frac{f_4}{\alpha^2} + \frac{f_5}{\alpha} - f_6 \ln \alpha - f_7 \alpha - \\ - \frac{1}{2}f_8 \alpha^2,$$

$$L_8 = B_8 + \frac{1}{7}\frac{f_0}{\alpha^7} + \frac{1}{6}\frac{f_1}{\alpha^6} + \frac{1}{5}\frac{f_2}{\alpha^5} + \frac{1}{4}\frac{f_3}{\alpha^4} + \frac{1}{3}\frac{f_4}{\alpha^3} + \frac{1}{2}\frac{f_5}{\alpha^2},$$

$$L_9 = B_9 + \frac{1}{8}\frac{f_0}{\alpha^8} + \frac{1}{7}\frac{f_1}{\alpha^7} + \frac{1}{6}\frac{f_2}{\alpha^6} + \frac{1}{5}\frac{f_3}{\alpha^5} + \frac{1}{4}\frac{f_4}{\alpha^4},$$

$$L_{10} = B_{10} + \frac{1}{9}\frac{f_0}{\alpha^9} + \frac{1}{8}\frac{f_1}{\alpha^8} + \frac{1}{7}\frac{f_2}{\alpha^7} + \frac{1}{6}\frac{f_3}{\alpha^6} + \frac{1}{5}\frac{f_4}{\alpha^5},$$

$$L_{11} = B_{11} + \frac{1}{10}\frac{f_0}{\alpha^{10}} + \frac{1}{9}\frac{f_1}{\alpha^9} + \frac{1}{8}\frac{f_2}{\alpha^8} + \frac{1}{7}\frac{f_3}{\alpha^7} + \frac{1}{6}\frac{f_4}{\alpha^6},$$

$$L_{12} = B_{12} + \frac{1}{11}\frac{f_0}{\alpha^{11}} + \frac{1}{10}\frac{f_1}{\alpha^{10}} + \frac{1}{9}\frac{f_2}{\alpha^9} + \frac{1}{8}\frac{f_3}{\alpha^8} + \frac{1}{7}\frac{f_4}{\alpha^7},$$

$$L_{13} = B_{13} + \frac{1}{12}\frac{f_0}{\alpha^{12}} + \frac{1}{11}\frac{f_1}{\alpha^{11}} + \frac{1}{10}\frac{f_2}{\alpha^{10}} + \frac{1}{9}\frac{f_3}{\alpha^9} + \frac{1}{8}\frac{f_4}{\alpha^8}.$$

Во всех формулах $L_1 - L_{13}$ верхний индекс (i) у коэффициента f_m опущен.

Для определения постоянных в разложении интегралов L_i воспользуемся следующими соотношениями:

$$\frac{dL_n}{d\zeta} = -L_{n-1}, \quad (34)$$

$$J_{i0}(\alpha) = \int_a^\infty \frac{J_0(u)}{u} du = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2k}}{2k (\kappa!)^2} - \ln \frac{\alpha}{2} - c, \quad (35)$$

$$J_{i1}(\alpha) = \int_a^\infty \frac{J_1(u)}{u} du = 1 - \sum_{\kappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\kappa \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{2\kappa+1}}{(2\kappa+1) \kappa! (\kappa+1)!}.$$

Здесь $I_0(u)$, $I_1(u)$ — функции Бесселя нулевого и первого порядка; c — постоянная Эйлера. Для интеграла L_0 имеем

$$L_0 = \int_a^\infty e^{-\beta_i \lambda} J_0(\lambda) d\lambda.$$

Устремляя α к нулю, получаем интеграл Вебера-Липшица

$$L_{0(\alpha=0)} = \int_0^\infty e^{-\beta_i \lambda} I_0(\lambda) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{1+\beta_i^2}}. \quad (36)$$

Таким образом,

$$B_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\beta_i^2}}.$$

Применяя соотношение (34), имеем:

$$\frac{\partial B_1}{\partial \beta_i} = -B_0 = -(1+\beta_i^2)^{-1/2}$$

или

$$B_1 = -\ln |\beta_i + (1+\beta_i^2)^{1/2}| + P_0. \quad (37)$$

При параметре β_i , равном нулю, получаем:

$$B_1(0) = P_0 \quad (38)$$

и

$$L_1 = J_1(\alpha).$$

Из соотношений (38) имеем $P_0 = -c + \ln 2$. Аналогично находятся остальные функции $B(\beta_i)$. В рассматриваемом приближении достаточно определить B_0 , B_1 , B_2 , B_3 и B_4 .

$$B_0 = (1+\beta_i^2)^{-1/2},$$

$$B_1 = -\ln |\beta_i + (1+\beta_i^2)^{1/2}| + \ln 2 - c,$$

$$B_2 = \beta_i \ln |\beta_i + (1+\beta_i^2)^{1/2}| - (1+\beta_i^2)^{1/2} + \beta_i(c - \ln 2),$$

$$B_3 = -\frac{1}{2}\beta_i^2 \ln |\beta_i + (1 + \beta_i^2)^{1/2}| + \frac{3}{4}\beta_i(1 + \beta_i^2)^{1/2} - \frac{1}{4} \ln [\beta_i + (1 + \beta_i^2)^{1/2}] + \frac{1}{2} \ln |\beta_i + (1 + \beta_i^2)^{1/2}| + \frac{\xi_i^2}{2}(\ln 2 - c) - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \ln 2 + \frac{1}{4}c, \quad (39)$$

$$B_4 = \frac{1}{6}\beta_i^3 \ln |\beta_i + (1 + \beta_i^2)^{1/2}| - \frac{1}{4}\beta_i \ln |\beta_i + (1 + \beta_i^2)^{1/2}| + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\beta_i^3\right)(1 + \beta_i^2)^{1/2} - \frac{5}{36}(1 + \beta_i^2)^{3/2} - \frac{\beta_i^3}{6}(\ln 2 - c) + \frac{\xi_i^2}{4}(1 + \ln 2 - c).$$

Для преобразования интегралов N_i к интегралам вида L_i воспользуемся следующими соотношениями:

$$\left(1 + s \frac{\alpha^4}{\lambda^2}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}s \frac{\alpha^4}{\lambda^2} - \frac{1}{8}s^2 \frac{\alpha^8}{\lambda^4} + \frac{1}{16}s^3 \frac{\alpha^{12}}{\lambda^6} - \frac{5}{128}s^4 \frac{\alpha^{16}}{\lambda^8} + \frac{7}{256}s^5 \frac{\alpha^{20}}{\lambda^{10}} - \frac{21}{4 \cdot 256}s^6 \frac{\alpha^{24}}{\lambda^{12}} + \frac{33}{8 \cdot 256}s^7 \frac{\alpha^{28}}{\lambda^{14}}; \quad (40)$$

$$-\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1} = a_1 \frac{\alpha^4}{\lambda^2} + a_2 \frac{\alpha^8}{\lambda^4} + a_3 \frac{\alpha^{12}}{\lambda^6} + a_4 \frac{\alpha^{16}}{\lambda^8} + a_5 \frac{\alpha^{20}}{\lambda^{10}} + a_6 \frac{\alpha^{24}}{\lambda^{12}}; \quad (41)$$

$$\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}\right)^2 = b_1 \frac{\alpha^8}{\lambda^4} + b_2 \frac{\alpha^{12}}{\lambda^6} + b_3 \frac{\alpha^{16}}{\lambda^8} + b_4 \frac{\alpha^{20}}{\lambda^{10}} + b_5 \frac{\alpha^{24}}{\lambda^{12}}; \quad (42)$$

$$-\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}\right)^3 = c_1 \frac{\alpha^{12}}{\lambda^6} + c_2 \frac{\alpha^{16}}{\lambda^8} + c_3 \frac{\alpha^{20}}{\lambda^{10}} + c_4 \frac{\alpha^{24}}{\lambda^{12}}; \quad (43)$$

$$\left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}\right)^4 = d_1 \frac{\alpha^{16}}{\lambda^8} + d_2 \frac{\alpha^{20}}{\lambda^{10}} + d_3 \frac{\alpha^{24}}{\lambda^{12}}; \quad (44)$$

$$\left(\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1 + \lambda}\right)^2 \cdot \left(\frac{\lambda_2 + \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}\right) = U_1 \frac{\alpha^{12}}{\lambda^6} + U_2 \frac{\alpha^{16}}{\lambda^8} + U_3 \frac{\alpha^{20}}{\lambda^{10}} + U_4 \frac{\alpha^{24}}{\lambda^{12}}; \quad (45)$$

$$\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1 + \lambda} \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}\right)^2 = v_1 \frac{\alpha^{12}}{\lambda^6} + v_2 \frac{\alpha^{16}}{\lambda^8} + v_3 \frac{\alpha^{20}}{\lambda^{10}} + v_4 \frac{\alpha^{24}}{\lambda^{12}}; \quad (46)$$

$$-\left(\frac{\lambda_1 - \lambda}{\lambda_1 + \lambda}\right)^3 \left(\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}\right)^2 = \omega_1 \frac{\alpha^{20}}{\lambda^{10}} + \omega_2 \frac{\alpha^{24}}{\lambda^{12}}. \quad (47)$$

Здесь

$$a_1 = -\frac{1}{4}(s-1); \quad a_2 = \frac{1}{8}(s^2-1); \quad a_3 = -\frac{1}{64}(5s^5 + s^2 - s - 5);$$

$$a_1 = \frac{1}{128} (7s^4 + 2s^3 - 2s - 7); \quad a_5 = -\frac{1}{2 \cdot 256} (21s^5 + 7s^4 + 2s^3 - 7s - 21).$$

$$a_6 = \frac{1}{4 \cdot 256} (33s^6 + 12s^5 + 5s^4 - 5s^2 - 12s - 33);$$

$$b_1 = \frac{1}{16} (s - 1)^2; \quad b_2 = -\frac{1}{16} (s - 1)^2 (s + 1); \quad b_3 = \frac{1}{128} (s - 1) \times \\ \times [7s^3 + 3s^2 - 3s - 7];$$

$$b_4 = -\frac{1}{64} (s - 1)^2 [3s^3 + 5s^2 + 5s + 3];$$

$$b_5 = \frac{5}{16 \cdot 256} (s - 1)^2 [33s^4 + 60s^3 + 70s^2 + 60s + 33];$$

$$C_1 = -\frac{1}{64} (s - 1)^3; \quad C_2 = \frac{3}{128} (s - 1)^3 (s + 1);$$

$$C_3 = -\frac{3}{4 \cdot 256} (s - 1)^3 (9s^2 + 14s + 9); \quad C_4 = \frac{(s - 1)^3}{8 \cdot 256} (55s^3 + \\ + 96s^2 + 96s + 55);$$

$$d_1 = \frac{1}{256} (s - 1)^4; \quad d_2 = -\frac{1}{128} (s - 1)^4 (s + 1); \quad d_3 = \frac{1}{4 \cdot 256} \times \\ \times (s - 1)^4 (11s^2 + 18s + 11);$$

$$U_1 = \frac{1}{64} (s - 1); \quad U_2 = -\frac{1}{128} (s - 1) (3 + s); \quad U_3 = \frac{1}{8 \cdot 128} (5s^3 + \\ + 9s^2 + 13s - 27);$$

$$U_4 = -\frac{1}{16 \cdot 128} (7s^4 + 12s^3 + 16s^2 + 20s - 5);$$

$$v_1 = \frac{1}{64} (s - 1)^2; \quad v_2 = -\frac{1}{128} (s - 1)^2 (2s + 3); \quad v_3 = \frac{1}{8 \cdot 128} \times \\ \times (s - 1)^2 (14s^2 + 28s + 27);$$

$$v_4 = -\frac{(s - 1)^2}{8 \cdot 256} [24s^3 + 54s^2 + 70s + 55];$$

$$\omega_1 = -\frac{1}{64 \cdot 16} (s - 1)^2, \quad \omega_2 = \frac{1}{128 \cdot 16} (2s + 5)$$

и, наконец,

$$x_1 = -\frac{1}{16 \cdot 64} (s - 1)^3, \quad x_2 = \frac{1}{16 \cdot 128} (s - 1)^3 (3s + 5);$$

$$e^{-k\lambda} = e^{-kh\lambda} \left\{ 1 - \frac{kh}{2\lambda} \alpha^4 + \left(\frac{kh}{8\lambda^3} + \frac{k^2 h^2}{8\lambda^2} \right) \alpha^8 - \left(\frac{kh}{16\lambda^5} + \frac{k^2 h^2}{16\lambda^4} + \frac{k^3 h^3}{48\lambda^3} \right) \alpha^{12} + \left(\frac{5kh}{128\lambda^7} + \frac{5k^2 h^2}{128\lambda^6} + \frac{k^3 h^3}{64\lambda^5} \right) \alpha^{16} \right\},$$

где $k = \{2, 4, 6\}$. Для интеграла N_0 имеем:

$$\begin{aligned} N_0 = & -\frac{1}{4} f_0^{(0)} \alpha^3 - \frac{1}{4} B_2 \alpha^4 + \frac{1}{4} f_1^{(0)} \alpha^4 \ln \alpha + \left[\frac{1}{4} f_2^{(0)} + \frac{1}{24} f_0^{(0)} \right] \alpha^5 + \\ & + \left[\frac{1}{8} f_3^{(0)} + \frac{1}{16} f_1^{(0)} \right] \alpha^6 + \left[\frac{1}{12} f_4^{(0)} + \frac{1}{8} f_2^{(0)} - \frac{1}{64} f_0^{(0)} \right] \alpha^7 + \left[\frac{1}{16} f_5^{(0)} + \right. \\ & + \frac{1}{8} B_4 - \frac{5}{256} f_1^{(0)} \left. \right] \alpha^8 - \frac{1}{8} f_3^{(0)} \alpha^8 \ln \alpha + \left[\frac{1}{20} f_6^{(0)} - \frac{1}{8} f_4^{(0)} - \frac{5}{192} f_2^{(0)} + \right. \\ & + \frac{1}{128} f_0^{(0)} \left. \right] \alpha^9 + \left[\frac{1}{24} f_7^{(0)} - \frac{1}{16} f_5^{(0)} - \frac{5}{128} f_3^{(0)} + \frac{7}{6 \cdot 128} f_1^{(0)} \right] \alpha^{10} + \\ & + \left[\frac{1}{28} f_8^{(0)} - \frac{1}{24} f_6^{(0)} - \frac{5}{64} f_4^{(0)} + \frac{7}{5 \cdot 128} f_2^{(0)} - \frac{7}{6 \cdot 256} f_0^{(0)} \right] \alpha^{11} + \\ & + \frac{5}{64} f_5^{(0)} \alpha^{12} \ln \alpha + \left[\frac{1}{32} f_9^{(0)} - \frac{1}{32} f_7^{(0)} - \frac{5}{64} B_6 + \frac{7}{4 \cdot 128} f_3^{(0)} - \right. \\ & \left. - \frac{21}{16 \cdot 256} f_1^{(0)} \right] \alpha^{12}, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} N_{11}^{(1)} = & a_1 f_0^{(1)} \alpha^3 + a_1 B_2 \alpha^4 - a_1 f_1^{(1)} \alpha^4 \ln \alpha + \left[-a_1 f_2^{(1)} + \right. \\ & + \frac{1}{3} f_0^{(1)} a_2 \left. \right] \alpha^5 + \left[-\frac{a_1}{2} f_3^{(1)} + \frac{1}{2} f_1^{(1)} a_2 \right] \alpha^6 + \left[-\frac{a_1}{3} f_4^{(1)} + f_2^{(1)} a_2 + \right. \\ & + \frac{1}{5} f_0^{(1)} a_3 \left. \right] \alpha^7 + \left[-\frac{a_1}{4} f_5^{(1)} + B_4 a_2 + \frac{a_3}{4} f_1^{(1)} \right] \alpha^8 - f_3^{(1)} a_2 \alpha^8 \ln \alpha + \\ & + \left[-\frac{a_1}{5} f_6^{(1)} - f_4^{(1)} a_2 + \frac{1}{3} a_3 f_2^{(1)} + \frac{1}{7} f_6^{(1)} a_4 \right] \alpha^9 + \left[-\frac{1}{6} a_1 f_7^{(1)} - \right. \\ & - \frac{1}{2} a_2 f_5^{(1)} + \frac{1}{2} a_3 f_3^{(1)} + \frac{1}{6} f_1^{(1)} a_4 \left. \right] \alpha^{10} + \left[-\frac{1}{7} a_1 f_8^{(1)} - \frac{1}{3} f_6^{(1)} a_2 + \right. \\ & + f_4^{(1)} a_3 + \frac{1}{5} f_2^{(1)} a_4 + \frac{1}{9} f_0^{(1)} a_5 \left. \right] \alpha^{11} + \left[-\frac{1}{8} a_1 f_9^{(1)} - \frac{1}{4} f_7^{(1)} a_2 + \right. \\ & \left. + B_6 a_3 + \frac{1}{4} f_3^{(1)} a_4 + \frac{1}{8} a_5 f_1^{(1)} \right] \alpha^{12} - f_5^{(1)} a_3 \alpha^{12} \ln \alpha, \end{aligned} \quad (49)$$

$$N_1^{(2)} = -\frac{h}{2} f_0^{(1)} a_1 \alpha^6 - h a_1 f_1^{(1)} \alpha^7 - \left[h a_1 B_3 + \frac{1}{4} h a_2 f_0 \right] \alpha^8 +$$

$$\begin{aligned}
& + h a_1 f_2 \alpha^8 \ln \alpha + \left[h a_1 f_3 - \frac{1}{3} h a_2 f_1 \right] \alpha^9 + \left[\frac{1}{2} h a_1 f_4 - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{2} h a_2 f_2 - \frac{1}{6} h a_3 f_0 \right] \alpha^{10} + \left[\frac{1}{3} h a_1 f_5^{(1)} - h a_2 f_3^{(1)} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{5} h a_3 f_1^{(1)} \right] \alpha^{11} + h a_2 f_4^{(1)} \alpha^{12} \ln \alpha + \left[\frac{1}{4} h a_1 f_6^{(1)} - h a_2 B_5 - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{4} h a_3 f_2^{(1)} - \frac{1}{8} h a_4 f_0^{(1)} \right] \alpha^{12},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_1^{(3)} &= \frac{1}{16} h a_1 f_0^{(1)} \alpha^8 + \frac{1}{12} h a_1 f_1^{(1)} \alpha^9 + \left[\frac{1}{8} h a_1 f_2^{(1)} + \frac{1}{24} h a_2 f_2 \right] \alpha^{10} + \\
& + \left[\frac{h a_1}{4} f_3^{(1)} + \frac{1}{20} h a_2 f_1^{(1)} \right] \alpha^{11} - \frac{1}{4} h a_1 f_4^{(1)} \alpha^{12} \ln \alpha + \left[\frac{1}{4} h a_1 B_5 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{12} h a_2 f_2^{(1)} + \frac{1}{32} f_0^{(1)} h a_3 \right] \alpha^{12},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N_1^{(4)} &= \frac{1}{6} h^2 a_1 f_0 \alpha^8 + \frac{1}{4} h^2 a_1 f_1 \alpha^{10} + \left[\frac{1}{2} h^2 a_1 f_2^{(1)} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{10} h^2 a_2 f_0^{(0)} \right] \alpha^{11} + \left[\frac{1}{2} h^2 a_1 B_4 + \frac{1}{8} h^2 a_2 f_1^{(1)} \right] \alpha^{12} - \\
& \quad - \frac{1}{2} h^2 a_1 f_3 \alpha^{12} \ln \alpha,
\end{aligned}$$

$$N_1^{(5)} = -\frac{h a_1}{48} f_0^{(1)} \alpha^{10} - \frac{h}{40} a_1 f_1 \alpha^{11} + \left[-\frac{h a_1 f_2}{32} - \frac{h a_2 f_0}{64} \right] \alpha^{12},$$

$$N_1^{(6)} = -\frac{1}{20} h^2 a_1 f_0^{(1)} \alpha^{11} - \frac{1}{16} h^2 f_1^{(1)} \alpha^{12},$$

$$N_1^{(7)} = -\frac{1}{24} h^3 a_1 f_0^{(1)} \alpha^{12}, \quad N_1^{(8)} = \frac{5h}{4 \cdot 256} a_1 f_0^{(1)} \alpha^{12},$$

$$\begin{aligned}
N_2^{(4)} &= \frac{1}{5} U_1 f_0 \alpha^7 + \frac{1}{4} U_1 f_1 \alpha^8 + \left[\frac{1}{3} U_1 f_2^{(1)} + \frac{1}{7} U_2 f_0^{(0)} \right] \alpha^9 + \\
& \quad + \left[\frac{1}{2} U_1 f_3^{(1)} + \frac{1}{6} U_2 f_1^{(1)} \right] \alpha^{10} + \left[U_1 f_4^{(1)} + \frac{1}{5} U_2 f_2^{(1)} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{9} U_3 f_0^{(1)} \right] \alpha^{11} - U_1 f_5^{(1)} \alpha^{12} \ln \alpha + \\
& \quad + \left[U_1 B_6 + \frac{1}{4} U_2 f_3^{(1)} + \frac{1}{8} U_3 f_1^{(1)} \right] \alpha^{12}, \tag{50}
\end{aligned}$$

$$N_2^{(2)} = -\frac{1}{6} h U_1 f_0^{(1)} \alpha^{10} - \frac{1}{5} h U_1 f_1^{(1)} \alpha^{11} +$$

$$\dagger \left[-\frac{1}{4} h U_1 f_2^{(1)} - \frac{1}{8} h U_2 f_0^{(1)} \right] \alpha^{12},$$

$$N_2^{(3)} = \frac{1}{32} h U_1 f_0^{(1)} \alpha^{12},$$

$$N_3^{(1)} = \frac{1}{5} v_1 f_0^{(2)} \alpha^7 + \frac{1}{4} v_1 f_1^{(2)} \alpha^8 + \left[\frac{1}{3} v_1 f_2^{(2)} + \frac{1}{7} v_2 f_0^{(2)} \right] \alpha^9 +$$

$$+ \left[\frac{1}{2} v_1 f_3^{(2)} + \frac{1}{6} v_2 f_1^{(2)} \right] \alpha^{10} + \left[v_1 f_4^{(2)} + \frac{1}{5} v_2 f_2^{(2)} +$$

$$+ \frac{1}{9} v_3 f_0^{(2)} \right] \alpha^{11} - v_1 f_5^{(2)} \alpha^{12} \ln \alpha +$$

$$+ \left[v_1 B_6 + \frac{1}{4} v_2 f_3^{(2)} + \frac{1}{8} v_3 f_1^{(2)} \right] \alpha^{12},$$

$$N_3^{(2)} = -\frac{h}{3} v_1 f_0 \alpha^{10} - \frac{2}{5} h v_1 f_1^{(2)} \alpha^{11} +$$

$$+ \left[-\frac{h}{2} v_1 f_2^{(2)} - \frac{h}{4} v_2 f_0^{(2)} \right] \alpha^{12},$$

$$N_3^{(3)} = \frac{h}{16} v_1 f_0^{(2)} \alpha^{12},$$

$$N_4^{(1)} = \frac{1}{9} \omega_1 f_0^{(2)} \alpha^{11} + \frac{1}{8} \omega_1 f_1^{(2)} \alpha^{12},$$

$$N_5^{(1)} = \frac{1}{9} x_1 f_0^{(3)} \alpha^{11} + \frac{1}{8} x_1 f_1^{(3)} \alpha^{12}.$$

Собирая коэффициенты при одинаковых степенях α во внутреннем и внешнем интегралах, получаем:

$$\alpha^2 \left(-\frac{2}{3} f_0 s^{1/2} \right),$$

$$\alpha^4 \ln \alpha \left[f_1 \frac{s}{4} + f_0 \frac{2h(1-s)}{4} + \frac{f_1}{4} - a_2 \bar{f}_1 \right],$$

$$\alpha^4 \left[f_0 \frac{2h(1-s)}{8} \left(\frac{1}{2} - 2 \ln 2 + \ln s \right) +$$

$$+ f_1 \frac{s}{8} \left(\frac{1}{2} - 2 \ln 2 + \ln s \right) - \frac{B_2}{4} - a_2 \bar{B}_2 \right],$$

$$\alpha^6 \left[-f_1 \frac{s^2}{16} + f_2 \frac{4s^{3/2}}{15} - f_3 \frac{s}{8} - f_6 \frac{h(1-s)s}{8} + \right]$$

$$\begin{aligned}
& + f_1 \frac{8h(1-s)s^{1/2}}{15} - f_2 \frac{h(1-s)}{4} + f_0 \frac{8h^2(s-1)s^{3/2}}{15} - \\
& - f_1 \frac{h^2(s-1)}{4} + \frac{f_3}{8} + \frac{f_1}{16} - \frac{a_2 \bar{f}_3}{2} + \frac{\bar{f}_1 a_3}{2} - \frac{h a_2 \bar{f}_0}{2} \Big], \\
& \alpha^8 \ln \alpha \left[-f_3 \frac{s^2}{8} - f_2 \frac{h(1-s)s}{4} + f_1 \frac{h^2(s-1)}{4} - \right. \\
& \quad \left. - f_1 \frac{h^2(s-1)s}{4} - \frac{f_3}{8} - a_3 \bar{f}_3 + h a_2 \bar{f}_2 \right], \\
& \alpha^8 \left[f_1 \frac{5s^3}{256} - f_3 \frac{s^2}{96} (5 - 12 \ln 2 + 6 \ln s) - f_5 \frac{s}{16} + f_0 \frac{h s^2 (1-s)}{128} - \right. \\
& \quad - f_2 \frac{2h(1-s)s}{96} (5 - 12 \ln 2 + 6 \ln s) - f_4 \frac{h(1-s)}{8} + \\
& \quad + f_1 \frac{h^2(s-1)}{24} \left(\frac{7}{2} - 6 \ln 2 + 3 \ln s \right) - f_1 \frac{h^2(s-1)s}{48} \times \\
& \quad \times (5 - 12 \ln 2 + 6 \ln s) - f_1 \frac{h^4(s-1)}{24} + \frac{f_5}{16} + \\
& \quad + \frac{b_0^{(4)}}{8} - \frac{5}{256} f_1 - \frac{a_2 \bar{f}_5}{4} + a_3 b_0^{(4)} + \frac{a_4 \bar{f}_1}{4} + a_2 \bar{b}_0^{(3)} + \\
& \quad \left. + \frac{a_3 \bar{f}_4}{4} + \frac{h_1 a_2 \bar{f}_0}{16} + \frac{\bar{a}_2 \bar{f}_1}{4} + \frac{v_3 f_1}{4} \right], \\
& \alpha^{10} \left[-J_1 \frac{7s^4}{3 \cdot 256} + f_3 \frac{5s^3}{128} - f_4 \frac{16s^{5/2}}{105} + f_5 \frac{s^2}{16} - f_7 \frac{s}{24} + \right. \\
& \quad + f_0 \frac{h(s-1)7s^3}{3 \cdot 128} + f_2 \frac{5hs^2(1-s)}{64} - f_3 \frac{32hs^{3/2}(1-s)}{105} + \\
& \quad + f_4 \frac{h(1-s)s}{8} - f_6 \frac{h(1-s)}{12} - f_1 \frac{3h^2}{32} (s-1)s + \\
& \quad + f_2 \frac{12h^2(s-1)s^{1/2}}{35} - f_3 \frac{h^2}{8} (s-1) + f_1 \frac{5h^2(s-1)s^2}{64} - \\
& \quad - f_2 \frac{32h^2(s-1)s^{3/2}}{105} + f_3 \frac{h^2(s-1)s^2}{8} - f_5 \frac{h^2(s-1)}{12} + \\
& \quad + f_1 \frac{32h^3(s-1)s^{3/2}}{315} - f_1 \frac{16h^3(s-1)^2}{315} s^{-1/2} + f_1 \frac{64h^3(s-1)s^{3/2}}{315} - \\
& \quad \left. - f_2 \frac{h^3 s(s-1)}{12} + f_4 \frac{h^3(s-1)}{18} - f_1 \frac{16}{35} h^3 (s-1) s^{1/2} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + f_2 \frac{h^3 (s-1)}{6} + f_1 \frac{h^4 s (s-1)}{24} - f_3 \frac{h^4 (s-1)}{36} - f_1 \frac{h^4 (s-1)}{8} + \\
& + f_2 \frac{h^5}{90} (s-1) - f_1 \frac{4}{45} h^6 \frac{(s-1)}{24} + \frac{f_7}{24} - \frac{f_5}{16} - \frac{5f_3}{128} + \\
& + \frac{7}{128 \cdot 6} f_1 - \frac{a_2 \bar{f}_7}{6} + \bar{f}_5 \frac{a_3}{2} + \bar{f}_3 \frac{a_4}{2} + \bar{f}_1 \frac{a_5}{6} - \bar{f}_4 \frac{a_2}{2} + \bar{f}_2 \frac{a_3}{2} + \\
& + \bar{f}_0 \frac{a_4}{6} + f_1 \frac{a_2 h^2}{4} + \bar{f}_2 \frac{a_2 h_1}{8} + \bar{f}_0 \frac{h_1 a_3}{24} - \bar{f}_0 \frac{h a_2}{48} + \\
& + \bar{f}_3 \frac{\bar{a}_2}{2} + \bar{f}_1 \frac{\bar{a}_3}{6} - \bar{f}_0 \frac{h \bar{a}_2}{6} + \bar{f}_3 \frac{v_3}{2} + \bar{f}_1 \frac{v^4}{6} - \bar{f}_0 \frac{h v_3}{3} \Big],
\end{aligned}$$

где \bar{f} , \bar{f} , \bar{f} являются коэффициентами разложения в степенной ряд функций: для магнитного диполя

$$e^{-\beta_i \lambda} J_0(\lambda), \quad (51)$$

для кабеля

$$\frac{1}{\lambda} e^{-\beta_i \lambda} \cos \lambda y \quad (52)$$

и для петли

$$J_1(\lambda a) J_1(\lambda) e^{-\beta_i \lambda}. \quad (53)$$

Функции \bar{f} , \bar{f} и \bar{f} зависят соответственно от β_0 , β_1 и β_2 .

Как известно, компоненты электромагнитного поля в непроводящей среде связаны с вектор-потенциалом A_z , A_x и A_φ соотношением для магнитного диполя:

$$H_{0z} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}; \quad H_{0r} = \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial r}; \quad E_\varphi = -i\omega\mu \frac{\partial A_z}{\partial r}, \quad (54)$$

для бесконечно длинного кабеля

$$H_{0y} = \frac{\partial A_x}{\partial z}; \quad H_{0z} = -\frac{\partial A_x}{\partial y}; \quad E_x = -i\omega A_x \quad (55)$$

и для петли

$$H_{0r} = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}; \quad H_{0z} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r}; \quad E_\varphi = -i\omega A_\varphi. \quad (56)$$

Таким образом, магнитные компоненты поля записываются в виде ряда

$$\begin{aligned}
& [\varphi_0 \alpha^2 + \varphi_1 \alpha^4 \ln \alpha + \varphi_2 \alpha^4 + \varphi_3 \alpha^6 + \varphi_4 \alpha^8 \ln \alpha + \\
& + \varphi_5 \alpha^8 + \varphi_6 \alpha^{10}], \quad (57)
\end{aligned}$$

где $\alpha \ll 1$ и φ_i — функции, в общем случае зависящие от параметров: s , d , r и H .

В области низких частот, высоких сопротивлений, небольших расстояний ($\alpha \ll 1$) активная компонента магнитного поля определяется главным образом токами, индуцированными под действием первичного электрического поля (отсутствует взаимодействие). Эта часть поля легко поддается расчету, и относящиеся сюда вопросы широко освещены в литературе. Поэтому основное внимание в работе уделено реактивной компоненте поля и нестационарным процессам.

Нестационарное электромагнитное поле, возникающее в проводящей среде при воздействии импульса тока в форме прямоугольной ступени, связано с гармоническим режимом соотношением

$$M(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) \sin \omega t d\omega, \quad (58)$$

где

$$F(\omega) = \frac{\operatorname{Re} M(\omega)}{\omega}. \quad (59)$$

Интегрируя (58) по частям, получаем:

$$\begin{aligned} M(t) &= -\frac{2}{\pi} \frac{1}{t} \int_0^{\infty} F(\omega) d \cos \omega t = \\ &= -\frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{t} F(\omega) \int_0^{\infty} - \frac{1}{t} \int_0^{\infty} F'(\omega) \cos \omega t d\omega \right] = \\ &= -\frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{t} F(0) - \frac{1}{t^2} \int_0^{\infty} F'(\omega) d \sin \omega t \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{t} F(0) + \frac{1}{t^2} \int_0^{\infty} F'(\omega) d \sin \omega t \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{t} F(0) - \frac{1}{t^2} F'(0) \omega t - \frac{1}{t^2} \int_0^{\infty} F''(\omega) \sin \omega t d\omega \right] = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{t} F(0) - \frac{1}{t^2} \omega t F'(0) - \frac{1}{t^3} F''(0) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{t^3} \int_0^{\infty} F'''(\omega) \cos \omega t d\omega \right]. \quad (60) \end{aligned}$$

Из выражения для реактивной компоненты поля следует, что позднее стадия становления поля определяется производными по частоте. Соотношение позволяет получить асимптотические формулы для компонент поля, справедливые при достаточно больших временах.

Введем следующие обозначения:

$$k_1 = \sqrt{\sigma_1 \mu} \omega = \frac{1}{a_1} \omega^{1/2} e^{i \frac{\pi}{4}}; \quad k_1^3 = \frac{1}{a_1^3} \omega^{3/2} e^{i \frac{3\pi}{4}}; \quad (61)$$

$$k_1^4 = \frac{1}{a_1^4} \omega^2 e^{i \pi}; \quad k_1^5 = \frac{1}{a_1^5} \omega^{5/2} e^{i \frac{5\pi}{4}}; \quad k_1^6 = \frac{1}{a_1^6} \omega^3 e^{i \frac{3\pi}{2}},$$

где $a_1 = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1 \mu}}$. Подставляя (61) в (57), находим для реаль-

ной части ряда выражение

$$\left[\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{r}{a_1} \sqrt{\omega} \varphi_0 - \frac{\pi}{8} \frac{r^2}{a_1^2} \omega \varphi_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{a_1^3} r^3 \varphi_3 \omega^{3/2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \varphi_4 \frac{r^4}{a_1^4} \omega^2 \ln \frac{r}{a_1} \sqrt{\omega} - \varphi_5 \frac{\omega^2 r^4}{a_1^4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \varphi_6 \frac{\omega^{5/2}}{a_1^5} r^5 \right]. \quad (62)$$

Положив в (60) вместо $M_i(\omega)$ соответственно $\omega^{1/2}$, ω , $\omega^{3/2} \ln \omega$, ω^2 , $\omega^{5/2}$, определяем:

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{\omega}}; \quad F_2 = 1; \quad F_3 = \sqrt{\omega}; \quad F_4 = \omega \ln \omega; \\ F_5 = \omega; \quad F_6 = \omega^{3/2}. \quad (63)$$

Как известно, при неограниченном увеличении частоты поле стремится к нулю. Поэтому введем под знак интеграла (60) множитель $e^{-\beta \omega}$, который не изменяет частотной характеристики при $\omega \rightarrow 0$, и в окончательном результате положим $\beta=0$.

$$M_1(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\beta \omega}}{\sqrt{\omega}} \sin \omega t d\omega = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{t^{1/2}}, \quad (64)$$

$$M_2(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\beta \omega} \sin \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} \frac{1}{t}, \quad (65)$$

$$M_3(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \omega^{1/2} e^{-\beta \omega} \sin \omega t d\omega = \frac{1}{\pi t} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega t}{\omega^{1/2}} d\omega =$$

$$= \frac{1}{\pi t^{3/2}} \int_0^{\infty} \frac{\cos u}{u^{1/2}} du = \frac{1}{\pi t^{3/2}} \sqrt{\frac{n}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{t^{3/2}}, \quad (66)$$

$$M_4(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \omega \ln \omega e^{-\beta \omega} \sin \omega t d\omega,$$

$$F_4(\omega, \beta) = \omega \ln \omega e^{-\beta \omega}.$$

$$F_4(0, 0) = 0; \quad F_4'(\omega, 0) = 1 + \ln \omega,$$

$$F_4''(\omega, 0) = \frac{1}{\omega};$$

$$M_4(t) = -\frac{2}{\pi t^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = -\frac{1}{t^2}; \quad (67)$$

$$M_5(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \omega e^{-\beta \omega} \sin \omega t d\omega,$$

$$F_5(\omega, \beta) = \omega e^{-\beta \omega}; \quad F_5(0, 0) = 0,$$

$$F_5'(\omega, 0) = 1,$$

$$M_5(t) = \frac{2}{\pi t} \int_0^{\infty} e^{-\beta \omega} \cos \omega t d\omega = 0 \quad (\beta \rightarrow 0), \quad (68)$$

$$M_6(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \omega^{3/2} e^{-\beta \omega} \sin \omega d\omega,$$

$$F_6(\omega, \beta) = \omega^{3/2} e^{-\beta \omega},$$

$$F_6(0, 0) = 0; \quad F_6'(\omega, 0) = \frac{3}{2} \omega^{1/2},$$

$$F_6^{II}(\omega, 0) = \frac{3}{4} \omega^{-1/2},$$

$$M_6(t) = -\frac{2}{\pi t^2} \cdot \frac{3}{4} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega^{1/2}} \sin \omega t d\omega =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{3}{2\pi t^{5/2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{(\omega t)^{1/2}} \sin \omega t d\omega t = \\
&= -\frac{3}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t^{5/2}} = -\frac{3}{2\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t^{5/2}}. \quad (69)
\end{aligned}$$

Таким образом, для компонент электромагнитного поля магнитного диполя находим:

$$B_z = \frac{M \mu}{4\pi} \left[\frac{1}{a^3 t^{3/2}} A_{11} + \frac{1}{a^4 t^2} A_{12} + \frac{1}{a^5 t^{5/2}} A_{13} \right], \quad (70)$$

Здесь

$$A_{11} = -\frac{2s^{3/2}}{15\sqrt{\pi}}; \quad A_{12} = \frac{1}{4} \left[\frac{zs^2}{4} + \frac{hs}{2} (s-1) \right];$$

$$\begin{aligned}
A_{13} = \frac{3}{\sqrt{\pi} 4} \left[z^2 \left(-\frac{8s^{5/2}}{105} \right) + zh \frac{32}{105} s^{3/2} (1-s) + \right. \\
\left. + r^2 \frac{4}{105} s^{5/2} + h^2 \frac{4\sqrt{s}}{105} (1-s) (8s-9) \right],
\end{aligned}$$

$$B_r = \frac{M \mu}{4\pi} \left[\frac{1}{a^4 t^2} A_{21} + \frac{1}{a^5 t^3} A_{22} + \frac{1}{a^6 t^4} A_{23} \right], \quad (71)$$

где

$$A_{21} = -\frac{rs^2}{32}; \quad A_{22} = -\frac{3r}{8\sqrt{\pi}} \left[-\frac{16s^{5/2}}{105} z + h \frac{32s^{3/2}}{105} (1-s) \right],$$

$$A_{23} = -\frac{r}{4} \left[\frac{5s^3}{64} z^2 + \frac{5s^2}{16} (s-1) zh - h^2 \frac{s(s-1)}{16} (6-5s) \right],$$

$$E_\varphi = \frac{M \mu}{4\pi} \left[\frac{1}{a^3 t^{5/2}} A_{31} + \frac{1}{a^4 t^3} A_{32} + \frac{1}{a^5 t^{7/2}} A_{33} \right], \quad (72)$$

где

$$A_{31} = -\frac{rs^{3/2}}{10\sqrt{\pi}}; \quad A_{32} = \frac{r}{4} \left[\frac{zs^2}{4} + \frac{hs}{2} (s-1) \right],$$

$$\begin{aligned}
A_{33} = \frac{15r}{16\sqrt{\pi}} \left[z^2 \left(-\frac{8s^{5/2}}{105} \right) + zh \frac{32}{105} s^{3/2} (1-s) + \right. \\
\left. + r^2 \frac{1}{105} s^{5/2} + \frac{h^2 4}{105} (1-s) (8s-9) \right].
\end{aligned}$$

Для электромагнитного поля петли

$$E_{\varphi}^n = \frac{1}{2} \mu a^2 I r \left[\frac{1}{a^3 t^{5/2}} B_{11} + \frac{1}{a^4 t^3} B_{12} \right]. \quad (73)$$

Здесь

$$B_{11} = -\frac{3s^{3/2}}{4\sqrt{\pi} 15}; \quad B_{12} = -\left(\frac{zs^2}{32} + \frac{hs(s-1)}{16} \right),$$

где

$$B_z^n = \frac{1}{2} \mu a^2 I \left[\frac{1}{a^3 t^3} B_{21} + \frac{1}{a^4 t^2} B_{22} \right], \quad (74)$$

$$B_{21} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{s^{3/2}}{15}; \quad B_{22} = \left[\frac{zs^2}{8} + \frac{hs(s-1)}{8} \right].$$

Магнитное поле кабеля в области больших времен имеет вид:

$$H_y = 2I_0 \left[\frac{1}{a t^{1/2}} C_{11} + \frac{1}{a^2 t} C_{12} + \frac{1}{a^3 t^{3/2}} C_{13} + \frac{1}{a^4 t^2} C_{14} \right], \quad (75)$$

где

$$C_{11} = -\frac{2s^{1/2}}{3} \sqrt{\frac{2}{\pi}}; \quad C_{12} = -\frac{1}{4} \left[-z \frac{s}{2} + h(1-s) \right];$$

$$C_{13} = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left[z^2 \frac{2s^{3/2}}{15} - \frac{2y^2 s^{3/2}}{15} + zh \frac{8s^{1/2}(s-1)}{15} + \right. \\ \left. + h^2 \frac{8(s-1)s^{3/2}}{15} \right],$$

$$C_{14} = \frac{1}{4} \left[z^3 \frac{s^2}{24} + z^2 h \frac{s(s-1)}{4} + h y^2 \frac{s(1-s)}{4} + \right. \\ \left. + z h^2 \frac{(s-1)^2}{2} + z y^2 \left(-\frac{s^2}{8} \right) + h^3 \frac{s^2 - 3s + 2}{6} \right],$$

$$H_z = 2I_0 \left[\frac{1}{a^2 t} C_{21} + \frac{1}{a^3 t^{3/2}} C_{22} + \frac{1}{a^4 t^2} C_{23} \right], \quad (76)$$

где

$$C_{21} = -\frac{ys}{8}; \quad C_{22} = -\frac{y}{2\sqrt{\pi}} \left[-\frac{4}{15} s^{3/2} z + \frac{8hs^{1/2}(1-s)}{15} \right];$$

$$C_{23} = \frac{y}{4} \left[y^2 \frac{s^2}{24} + z^2 \left(-\frac{s^2}{8} \right) + zh \frac{s(1-s)}{2} + h^2 \left(-\frac{(s-1)^2}{2} \right) \right].$$

На основе анализа формул для компонент поля и сопоставления с результатами строгого расчета можно сделать следующие выводы.

1. Компоненты электромагнитного поля вертикального магнитного диполя, определенные по строгим и асимптотическим формулам, практически совпадают, если выполняется условие:

$$\frac{\tau_1}{H} > 16 \text{ и } \frac{\tau_1}{r} > 16, \quad (77)$$

где

$$\tau_1 = 2\pi \sqrt{2t} \cdot a.$$

2. При достаточно больших временах индуцированные токи в основном находятся в нижележащем пласте, и поэтому поле определяется только его удельной проводимостью.

3. В рассматриваемой области времен электромагнитное поле более чувствительно к изменениям электрических параметров среды, чем в других зонах (область малого параметра при гармоническом режиме, в волновой зоне).

4. Вертикальная компонента магнитного поля не зависит от расстояния между передатчиком и точкой измерения.

5. Эта особенность в поведении поля H_z связана с характером распределения токов в среде, которые по мере удаления от диполя возрастают до определенных значений r . Поэтому, с одной стороны, удаление от источника приводит к ослаблению влияния токов, индуцированных вблизи него, с другой стороны, возрастает роль токов около точки наблюдения. Как показывает расчет, эти два фактора, действующие в противоположных направлениях, компенсируют друг друга.

6. Поэтому глубинность метода становления поля в поздней стадии не зависит от разноса, и, в частности, можно осуществлять измерения с совмещенными передающими и приемными устройствами.

7. Горизонтальная компонента поля магнитного диполя и петли на больших временах меньше, чем вертикальная компонента H_z .

8. Независимость от расстояния между передающим и приемным устройством, высота над дневной поверхностью, преобладание вертикальной компоненты над горизонтальной, отсутствие первичного поля, наиболее тесная связь поля с электропроводимостью — все это является несомненным достоинством метода переходных процессов, в воздушном и наземном вариантах для картирования под наносами в умеренно проводящих средах.

9. Если электропроводимость подстилающей среды равна нулю, то

$$H_z = \frac{M}{16\pi} \frac{H^3}{a_1^6 t^3} \quad (78)$$

или

$$H_z \approx 1,2 \cdot 10^3 M \cdot \frac{H^3}{\tau^3}.$$

Здесь

$$t = \frac{\tau^2}{2\pi \cdot 10^7 \rho}.$$

В этом случае поле прямо пропорционально кубу продольной проводимости s той части среды, которая расположена практически под источником поля. Поэтому при постоянстве удельной проводимости осадочной толщи небольшие изменения мощности могут быть замечены при измерении магнитного поля.

10. Из сопоставления с формулами, полученными С. М. Шейманном для пластины s , следует, что в поздней стадии становления пласт конечной мощности при произвольном соотношении r/h создает такое же поле, как пластина s .

11. Таким образом, переход на более короткие разности, в частности совмещение передающего и приемного устройств, обеспечивает более высокую чувствительность поля к изменениям глубин до поверхности фундамента, колебаниям электрических свойств осадочных пород и создает условия для более детального исследования геоэлектрического разреза в горизонтальном направлении.

12. Все выводы, касающиеся глубинности метода переходных процессов, когда разности значительно меньше мощности пласта, полностью относятся к реактивной компоненте поля в области очень низких частот. Однако реализация метода в гармоническом режиме, по-видимому, невозможна, так как эта компонента поля не только во много раз меньше первичного поля, но и меньше активной компоненты вторичного, которая не обладает отмеченными выше закономерностями, ибо механизм ее образования совершенно иной.

13. Горизонтальная компонента поля бесконечно длинного кабеля в поздней стадии больше вертикальной компоненты и убывает относительно медленно.

14. В отличие от индуктивных способов возбуждения (петля, диполь) в данном случае связь с электропроводимостью среды выражена более слабо.

И. Ф. Изюмов, Г. М. Морозова

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ МЕТОДА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Установка моделирования

Разрезы, в которых рудовмещающие породы обладают сравнительно низким удельным сопротивлением, встречаются часто. В этих условиях влияние вмещающей среды на величину ε . д. с., измеряемую в методе переходных процессов, может быть значительно.

В настоящее время электромагнитные поля, применяемые в методе переходных процессов, изучены главным образом для горизонтально-слоистых сред и хорошо проводящих тел правильной формы, расположенных в непроводящей среде или перекрытых наносами [2, 3, 4, 5]. Отсутствие данных о вмещающей среде, в общем случае, связано с большими трудностями, возникающими как при аналитическом, так и при экспериментальном способах исследования.

При моделировании задач низкочастотной электроразведки основные трудности возникают в связи с необходимостью создания моделей вмещающих сред и рудных тел с отношением проводимостей $1:1000$ — $1:50$. Использование металлов в качестве материала для моделей рудных тел и проводящих растворов в качестве вмещающей среды невозможно, так как минимальное отношение проводимостей, получаемое при этом, равно $1:250000$.

Применяя в качестве материала для моделей хорошо проводящих объектов графит или моделируя рудные тела и вмещающую среду проводящими растворами с использованием неискажающих перегородок, продольное и поперечное сопротивление которых равно нулю [7] (возможно также примене-

ние проводящей резины), можно получить нужные соотношения между проводимостями вмещающей среды и рудных тел. Однако длительность переходных процессов в таких средах очень мала (единицы микросекунд), что усложняет регистрирующую аппаратуру. В случае изучения переходных процессов во вмещающей среде на временах порядка единиц миллисекунд, при линейном масштабе моделирования 1:1000, проводимость модели должна быть достаточно высокой ($1 \cdot 10^3 - 1 \cdot 10^5 \text{ МО} \cdot \text{м}^{-1}$). Моделирование в средах с такой

проводимостью возможно при использовании индукционного кольцевого интегратора [6], на котором могут быть решены задачи, обладающие осевой симметрией.

Идея интегратора заключается в следующем: проводящая среда мысленно разбивается на объемные кольца прямоугольного сечения, образуемые системой коаксиальных цилиндрических поверхностей и плоскостей, перпендикулярных оси цилиндров.

Вследствие осевой симметрии источника поля и колец токовые линии не пересекают границ объемных колец. В этих условиях каждое объемное кольцо может быть заменено проволочным линейным кольцом того же сопротивления. Расчет сопротивления модели проводится на основании соотношения [8].

$$\gamma_{\text{мод}} \cdot S_{\text{мод}} = \gamma_{\text{меди}} \cdot S_{\text{меди}}, \quad (1)$$

где $S_{\text{мод}}$ — поперечное сечение замещенного кольца, равное $h \cdot l$ (h — высота замещенного кольца, а l — его ширина);

$S_{\text{меди}}$ — поперечное сечение проволоки.

Установка для моделирования размерами $80 \times 80 \times 70 \text{ см}$ представляет собой набор картонных листов с замкнутыми витками медного провода на каждом из них. Горизонтальная и вертикальная детальность (расстояния между кольцами на листе и между листами) была принята равной 10 мм , диаметр провода $0,15 \text{ мм}$ — при этом проводимость среды равна $1 \cdot 10^4 \text{ МО} \cdot \text{м}^{-1}$.

В верхней части интегратора выполнена полость, в которую помещались на различную глубину сферические модели рудных тел диаметром 100 мм с более высокой, чем у вмещающей среды, проводимостью. При необходимости полость можно заполнить кольцами, и тогда модель представляет собой однородную среду с проводимостью $1 \cdot 10^4 \text{ МО} \cdot \text{м}^{-1}$.

В табл. 1 приведены значения проводимостей сферических тел $\gamma_{сф}$ и величины отношения проводимости тела к проводимости вмещающей среды $\gamma_{сф}/\gamma_2$.

Таблица 1

| № | $\gamma_{сф}$ | $\gamma_{сф}/\gamma_2$ |
|---|-------------------|------------------------|
| 1 | $2000 \cdot 10^4$ | 2000 |
| 2 | $1000 \cdot 10^4$ | 1000 |
| 3 | $500 \cdot 10^4$ | 500 |
| 4 | $200 \cdot 10^4$ | 200 |
| 5 | $100 \cdot 10^4$ | 100 |
| 6 | $30 \cdot 10^4$ | 30 |

Сферическая модель рудного тела проводимостью $2000 \cdot 10^4 \text{ мо} \cdot \text{м}^{-1}$ изготовлена из алюминиевого сплава, остальные сферические тела слоистые. Слоистая модель сферического тела изготовлена следующим образом: шар мысленно разбивается на ряд параллельных слоев, каждый слой, обладающий определенной продольной проводимостью, заменяется листом фольги (латунь, медь) с таким же значением продольной проводимости, а между

листами фольги помещаются непроводящие прокладки из картона.

Для оценки влияния небольших углублений в коренных породах, заполненных хорошо проводящими отложениями, в полость интегратора помещались цилиндры диаметром 140 мм различной высоты (от 1 до 10 см), также выполненные из отдельных листов картона с кольцами медной проволоки. Проводимость цилиндров была выбрана $4 \cdot 10^4$; $8 \cdot 10^4$; $14 \cdot 10^4$; $32 \cdot 10^4$; $90 \cdot 10^4 \text{ мо} \cdot \text{м}^{-1}$, и отношение проводимостей цилиндрических неоднородностей и вмещающей среды соответственно составляло 4; 8; 14; 32 и 90.

С целью изучения влияния хорошо проводящих покровных отложений были изготовлены кольцевые модели с проводимостью $2,4 \cdot 10^4$; $8 \cdot 10^4$; $14 \cdot 10^4$ и $32 \cdot 10^4 \text{ мо} \cdot \text{м}^{-1}$, что соответствовало отношению проводимостей наносов и вмещающей среды (γ_1/γ_2) 2,4; 8; 14; 32. Мощность покровных отложений на модели могла изменяться от 1 до 4 см.

Измерения проводились с двумя типами установок: а) измерительный магнитный диполь в центре петли, б) совмещенные рамки. В табл. 2 приводятся параметры применяемых рамок.

В полевых условиях в варианте совмещенных рамок одна и та же петля служит для возбуждения и измерения поля. При работе на модели приемная рамка имела то же число витков и те же размеры, что и генераторная, и была совмещена с ней.

При моделировании применялось периодически-импульсное возбуждение поля. Для получения значительных токов в возбуждающем импульсе использовался генератор импуль-

сов и ключевая схема* на полупроводниковых триодах, обеспечивающая величину тока в импульсе до 6 а. Питание ключевой схемы осуществлялось от батареи аккумуляторов напряжением 12 в.

Таблица 2

| Тип источника | Радиус рамки, см | Число витков | Диаметр провода, мм |
|------------------------------|------------------|--------------|---------------------|
| Генераторная петля | 16,10,5 | 20 | 1,0 |
| Приемный диполь | 0,5 | 3500 | 0,09 |
| Совмещенные рамки | | | |
| генераторная | 16,10,5 | 20 | 1,0 |
| приемная | 16,10,5 | 20 | 0,5 |

Кривые э.д.с. переходных процессов наблюдались на экране осциллографа типа С1-19А, работавшего в режиме ждущей развертки, запуск которой производился в момент выключения импульса возбуждения. Длительность импульсов возбуждения (10 мсек) превышала время становления переходных процессов, а время между импульсами было выбрано равным 90 мсек. Собственные процессы в аппаратуре, при положении рамок в воздухе, заканчивались через 200 мксек, что обеспечивало нормальную работу установки моделирования. Схема установки приведена на рис. 1.

Как известно [11], условие подобия при моделировании переходных процессов записывается в виде

$$\gamma_n \cdot \mu_n \frac{l_n^2}{t_n} = \gamma_m \cdot \mu_m \frac{l_m^2}{t_m}$$

Индексы: м — параметры, относящиеся к модели; н — параметры, относящиеся к моделируемой среде; t — время, прошедшее с момента выключения тока в петле; γ — удельная проводимость; μ — магнитная проницаемость; l — характерные размеры.

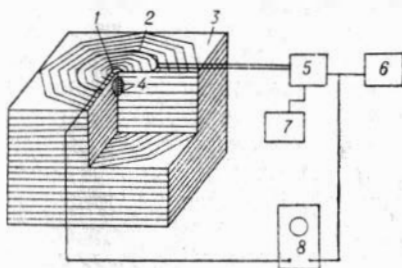


Рис. 1. Установка моделирования: 1 — приемная рамка, 2 — генераторная петля, 3 — интегратор, 4 — проводящая сфера, 5 — ключевая схема, 6 — генератор импульсов, 7 — аккумуляторы, 8 — осциллограф.

* Ключевая схема была разработана и изготовлена в Институте автматики и электротетрии СО АН СССР.

Выбирая линейный масштаб 1 : 1000 при $\gamma_m = 1 \cdot 10^4 \text{ МО} \cdot \text{М}^{-1}$, находим отношение t_n/t_m для различных значений удельных сопротивлений пород. Приводим величины отношений t_n/t_m

| | |
|-----------------------------|-----------------|
| при $\rho_n = 1$ <i>омм</i> | $t_n/t_m = 100$ |
| 5 | 20 |
| 10 | 10 |
| 20 | 5 |
| 50 | 2 |
| 100 | 1 |

Проведенные расчеты и сопоставление с результатами полевых измерений показали, что величины сигналов, наводимых в приемных рамках при моделировании, значительно превышают (примерно на порядок) сигналы, получаемые в полевых условиях. Однако благодаря тому, что чувствительность приемной аппаратуры, используемой при полевых измерениях, обычно выше, чем у применявшейся нами при моделировании, величины сигналов, регистрируемых при моделировании и в полевых условиях, близки.

При моделировании основное внимание уделялось влиянию вмещающей среды, как однородной, так и неоднородной, на кривые э. д. с. переходных процессов от сферических тел, проводимость которых в 30—500 раз превышает проводимость вмещающих пород, и основные закономерности рассмотрены для тех времен регистрации э. д. с. переходных процессов, когда заметно сказывается влияние вмещающей среды.

Результаты сопоставления измерений на интеграторе с данными расчета однородного проводящего полупространства (и в других случаях) свидетельствуют о нормальной работе основных узлов установки для моделирования (кольцевая модель, генераторный и измерительный блоки аппаратуры).

Как известно [5], э. д. с., наводимую в рамке, расположенной в центре петли на поверхности однородного полупространства, записываем

$$\varepsilon = -\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{3I}{\gamma R^3} \left[\Phi(u) - \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot u \left(1 + \frac{u^2}{3} \right) \right] \dots \quad (2)$$

где

$$u = \frac{R \cdot \sqrt{\mu \gamma}}{\sqrt{2t}}$$

I — сила тока в петле;
 γ — проводимость среды;
 R — радиус петли;
 t — время.
 Введем функцию

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = \frac{\partial B_r}{\partial t} \cdot \frac{\gamma \cdot R^3}{3I}$$

Воспользовавшись разложением интеграла вероятности $\Phi(u)$ в ряд по малому параметру, из (2) получим асимптотические выражения для $\frac{\partial b_z}{\partial t}$ при больших и малых временах. При $t \rightarrow 0$ $\frac{\partial b_z}{\partial t} \rightarrow 1$, при $t \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} \rightarrow \frac{R^3 \mu^{5/2} \cdot \gamma^{5/2}}{\sqrt{\pi} \cdot 60 \cdot t^{5/2}}$$

На рис. 2 приведены теоретические кривые э. д. с. переходных процессов для различных значений проводимости однородного полупространства. На этом же рисунке приведена экспериментальная кривая (масштаб экспериментальной и теоретических кривых выбран одинаковым). Теоретические

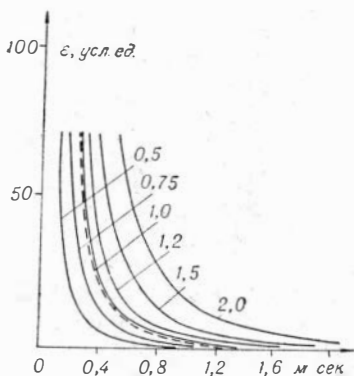


Рис. 2. Теоретические кривые переходных процессов над однородным полупространством. Шифр кривых — удельная проводимость однородного полупространства —

$$\gamma_2 \cdot 10^4$$

- - - - - экспериментальная кривая.

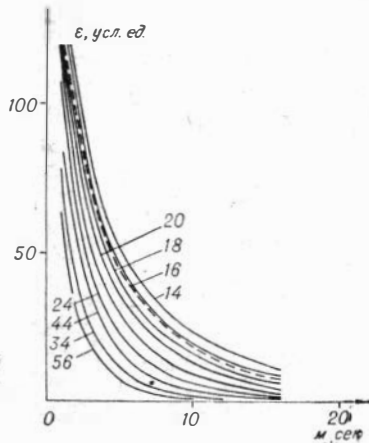


Рис. 3. Теоретические кривые спада э. д. с. над проводящими сферами в воздухе.

16 — параметр сферы, $\alpha = \frac{1}{r^2 \mu \gamma}$

- - - - - экспериментальная кривая.

кривые достаточно хорошо разрешены по проводимости, а значение проводимости однородного полупространства, определенное путем сопоставления экспериментальных и теоретических кривых, совпадает с результатом расчета проводимости модели по формуле (1).

Измерения, проведенные с генераторными петлями различных радиусов, показывают, что ошибка в определении проводимости модели не превышает 10%. Проводимость моделей сферических тел определялась по кривым э. д. с. переходных процессов, полученных при измерениях над сферическими телами в воздухе.

Как известно [4], отношение $\frac{\partial b_z}{\partial t}$ для проводящего шара в воздухе, при измерении в центре петли достаточно больших размеров, по сравнению с радиусом шара, находим по формуле.

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{6 B_0 \cdot r^3}{h^3} \cdot \alpha \cdot \cos \varphi \sum_{s=1}^{\infty} e^{-s^2 \alpha \pi^2 t},$$

где
$$\alpha = \frac{1}{\mu \gamma r^2};$$

- r — радиус сферического проводника;
 - B_0 — магнитное поле в центре петли;
 - h — глубина залегания сферического проводника.
- Были построены теоретические кривые функции

$$\sum_{s=1}^{\infty} e^{-s^2 \alpha \pi^2 t},$$

определяющие изменение э. д. с. со временем, для различных значений параметра α . Совмещая экспериментальную кривую с одной из теоретических кривых и определяя параметр α , можно, зная радиус сферического тела, найти значение проводимости. Для сферического тела из алюминия это значение хорошо согласуется с данными, приведенными в справочниках. Рис. 3 иллюстрирует определение параметра α для этой сферы ($\alpha = 16$; $\gamma = 2 \cdot 10^7 \text{ мО} \cdot \text{м}^{-1}$). Аналогичное значение параметра α получено при интерпретации по асимптотической ветви кривой переходного процесса, когда функция изменения э. д. с. со временем

$$\varepsilon = e^{-\pi^2 \alpha t},$$

и в этом случае график э. д. с. переходного процесса в полулогарифмическом масштабе представляет собой прямую, угловой коэффициент которой пропорционален параметру α .

Для сфер, изготовленных из листов фольги и картона, значения проводимостей, определенные путем сопоставления теоретических и экспериментальных кривых, приведены в табл. 1.

Сферические тела в однородном проводящем полупространстве

Измерения над сферическими телами в однородной среде проводились как в центре петли, так и по методике совмещенных рамок. На рис. 4, а приведены кривые э. д. с. переходных процессов (измерения в центре петли радиусом 16 см), полученные при глубине погружения сферы 1 см ($\frac{h}{r} = \frac{1}{5}$, где h — глубина до верхней кромки сферы, r — радиус сферы) для тел с различной проводимостью (шифр кривых $\gamma_{\text{сф}}/\gamma_2$ — отношение проводимости сферического тела к проводимости вмещающей среды). На этом же рисунке приведена кривая, полученная при измерении э. д. с. над однородным полупространством. Как видно из рисунка, влияние среды практически прекращается на временах около 1,8 мсек. При сопротивлении среды 10 ом это соответствует 18 мсек.

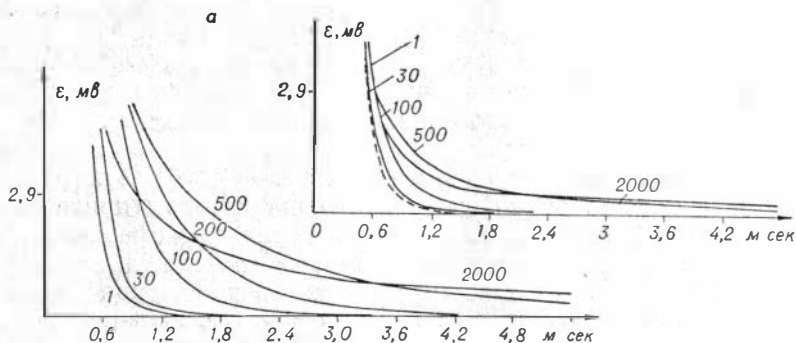


Рис. 4. Экспериментальные кривые переходных процессов над сферами во вмещающей среде. Шифр кривых — $\gamma_{\text{сф}}/\gamma_2$.

а — глубина погружения сферы 1 см, б — глубина погружения сферы 5 см.

что хорошо согласуется с результатами полевых измерений [4].

Из графиков видно, что переходные процессы над однородным полупространством, когда в среде помещено хорошо проводящее тело, протекают на одних временах, если отношение проводимости рудного тела к проводимости вмещающей среды составляет 30—50. Для меньших соотношений проводимостей возникают затруднения при выделении проводящих тел путем увеличения длительности записи переходных процессов. Подобный случай имел место при полевых измерениях, например, на Дергамышском месторождении [11].

С увеличением глубины погружения тела относительное влияние токов в среде возрастает. На рис. 4, б приведены кривые переходных процессов при глубине погружения сферического тела 5 см ($\frac{h}{r} = 1$). Как видно из графика, рудные тела, проводимость которых менее чем в 30 раз превышает проводимость вмещающих пород, создают незначительные аномалии.

В рассматриваемом диапазоне времен амплитуда э. д. с. пропорциональна проводимости моделей (исключением является кривая переходного процесса для сферы, проводимость которой в 2000 раз превышает проводимость вмещающих пород). При меньших временах, согласно [3], имеет место обратная зависимость.

Влияние вмещающей среды на переходные процессы от сферических тел показано на рис. 5, а, где приведены экспериментальные кривые для сферических проводников, находящихся в среде и в воздухе, и кривая над однородной средой. На ранних временах преобладает влияние токов в среде, на поздних временах становится более заметным влияние взаимодействия между токами в сфере и среде, что приводит к увеличению сигнала по сравнению с сигналом от сферы в воздухе.

Увеличение влияния среды при большой глубине погружения тела хорошо видно из рис. 5, б, на котором приведены аналогичные кривые при глубине погружения сферического тела 0 и 2 см. При совмещении кривых спада э. д. с. переходных процессов от тел, находящихся в проводящей среде, с кривыми, рассчитанными для тел в воздухе, влияние среды проявляется в увеличении параметра α . Так, для сферического тела с параметром $\alpha = 150$ ($\frac{h}{r} = 0,4$ и $\frac{\gamma_{сф}}{\gamma_2} = 200$) $\alpha_{каж} = 210$. Определенная в этом случае проводимость сфери-

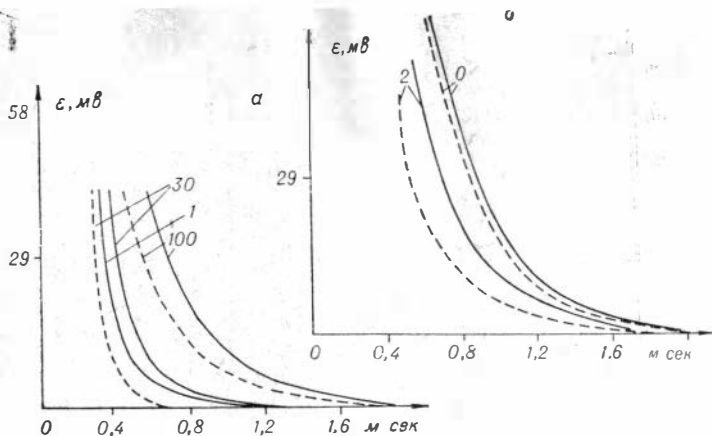


Рис. 5. Сравнение экспериментальных кривых над сферой в воздухе и сферой во вмещающей среде.

— измерения в среде. - - - - измерения в воздухе.

а) $h=1$ см, шифр кривых — $\frac{\gamma_{сф}}{\gamma_3}$; б) $\frac{\gamma_{сф}}{\gamma_3} = 100$, шифр кривых — глубина погружения сферы h .

ческого тела несколько занижена по сравнению с истинным значением. С увеличением глубины погружения сферических тел до $0,6-0,8r$ кривые спада э. д. с. переходных процессов по форме не совпадают с теоретическими кривыми для сферических тел в воздухе и для однородного полупространства. При глубинах погружения свыше $0,8r$ экспериментальные кривые достаточно хорошо совпадают с теоретическими для однородного полупространства, но при этом получаем завышенные значения проводимости среды. Так, для приведенного случая при $\frac{h}{r} = 0,8$ кажущаяся проводимость среды равна $1,5 \cdot 10^4 \text{ мо} \cdot \text{м}^{-1}$. При больших глубинах погружения $\left(\frac{h}{r} > 1\right)$ влияние сферы практически отсутствует.

При моделировании была исследована зависимость отношения э. д. с. в рамке над проводящей сферой в среде к э. д. с. над однородным полупространством ($\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$) от глубины залегания сферы при различных способах измерения. Эти исследования проводились для случаев, когда отношение проводимости сферы к проводимости среды не превышало 500.

На рис. 6 приведены графики зависимости $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$ от глу-

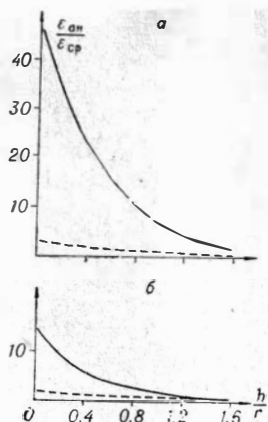


Рис. 6. Сопоставление зависимости $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$ от h/r при различных способах измерения э. д. с. $t=1$ мсек.
 — измерения в центре петли, ---- измерения в рамке, совмещенной с генераторной.

а) $\frac{\gamma_{сф}}{\gamma_2} = 500$; б) $\frac{\gamma_{сф}}{\gamma_2} = 100$.

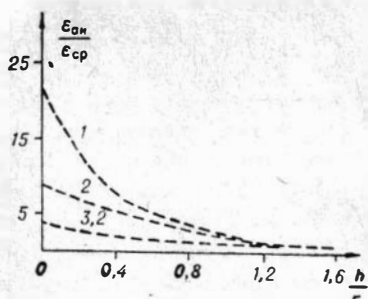


Рис. 7. Зависимость отношения $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$ от глубины погружения сферы при различных размерах рамок. $t=0,5$ мсек,

$$\frac{\gamma_{сф}}{\gamma_2} = 500.$$

Шифр кривых R/r

бины залегания сфер различной проводимости. Источником поля является петля радиусом 16 см, а э. д. с. измерялась либо в приемном диполе, расположенном в центре петли, либо в рамке, совмещенной с генераторной. При малых глубинах погружения сфер ($\frac{h}{r} \leq 1$) величины отношения $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$ при измерении с диполем значительно больше, чем при измерениях с совмещенными рамками. Эта зависимость выдерживается для всех значений времен, на которых заметно влияние среды, и для различных размеров петли: $R=16, 10$ и 15 см (где R —радиус петли) или соответственно $\frac{R}{r} = 3,2; 2; 1$.

Таким образом, возможность выделения рудных тел при заметном влиянии вмещающей среды выше при измерениях в центре петли. Особенно это преимущество становится заметным, когда отношение проводимости вмещающих пород не более 100—200 и отношение радиуса петли к радиусу проводящей сферы свыше двух ($\frac{R}{r} > 2$).

Исследование зависимости величины $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$ от размеров рамок показало, что при работе с диполем более уверенно

рудные тела выделяются, когда соотношение размеров петли и рудного тела R/r составляет 1—2, и несколько хуже — при больших размерах петли. При измерениях с совмещенными рамками эта зависимость отмечается более четко, и для малых глубин залегания проводящих сфер ($\frac{h}{r} \leq 1$) лучшие результаты получены с небольшими рамками ($\frac{R}{r} = 1$).

На рис. 7 приведены кривые $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$ для различных размеров, совмещенных рамок, причем аналогичная зависимость отмечается и для других значений $\gamma_{сф}/\gamma_2$.

Влияние слабопроводящих цилиндрических неоднородностей в проводящем полупространстве

Измерения над цилиндрическими неоднородностями проводились с целью оценки влияния небольших углублений, заполненных хорошо проводящими отложениями. Диаметр цилиндров 14 см, высота изменялась от 1 до 10 см, а отношение проводимости цилиндров к проводимости вмещающей среды ($\gamma_{ц}/\gamma_2$) равнялась 4, 8, 14, 32 и 90.

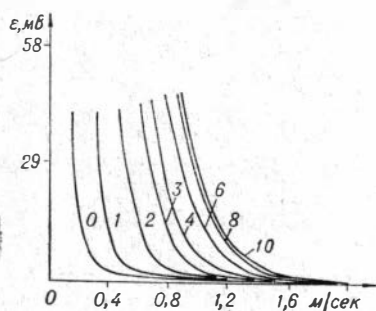


Рис. 8. Экспериментальные кривые над средой с цилиндрическими неоднородностями. $R=5$ см,

$$\frac{\gamma_{ц}}{\gamma_2} = 14.$$

Шифр кривых — высота цилиндра, см.

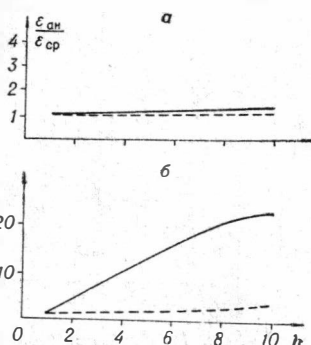


Рис. 9. Графики зависимости аномального эффекта от мощности цилиндра ($R=16$ см).

а) $t = 0,4$ мсек, $\frac{\gamma_{ц}}{\gamma_2} = 4$;

б) $t = 0,8$ мсек, $\frac{\gamma_{ц}}{\gamma_2} = 32$.

— измерения в центре петли,
 - - - измерения в рамке, совмещенной с генераторной.

Было исследовано влияние высоты и проводимости цилиндра на кривые э. д. с. переходных процессов при различных размерах генераторных петель.

На рис. 8 приведены кривые, полученные при измерении с диполем в центре петли. Шифр кривых — высота цилиндра в сантиметрах. С увеличением высоты цилиндра величина э. д. с. возрастает, причем при высоте цилиндра свыше 8 см это увеличение очень незначительно.

Для изучения влияния вмещающей среды на э. д. с. переходных процессов была исследована зависимость величины э. д. с. от цилиндров различной высоты в среде к э. д. с. от однородного полупространства ($\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$) для разных значений проводимостей цилиндров. На рис. 9 приведены подобные зависимости при измерении с генераторной петлей. Как видно из графиков, влияние цилиндрических неоднородностей более заметно сказывается при измерении в центре петли, причем эта зависимость выдерживается для разных времен регистрации переходных процессов и при различных размерах рамок. Зависимость влияния величины $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$ от размеров рамок для диполя в центре петли и при измерениях с совмещенными рамками приведена на рис. 10. Более четко цилиндрические неоднородности выделяются при меньших значениях отношения $R/r_{ц}$.

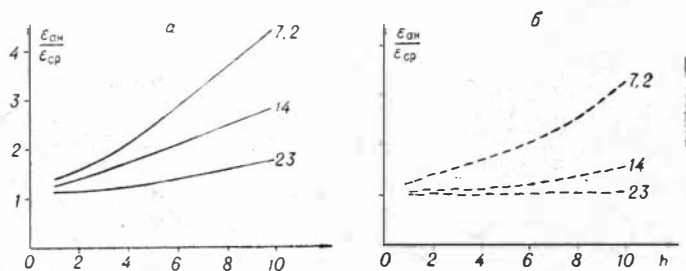


Рис. 10. Сравнение аномального эффекта от цилиндрических неоднородностей для различных размеров рамок.

$$t=0,4 \text{ мсек}, \quad \frac{\gamma_{ц}}{\gamma_2} = 8; \quad \text{шифр кривых } R/r_{ц}$$

а — измерения в центре петли. б — измерения в рамке, совмещенной с генераторной

Для оценки возможности выделения рудных тел, залегающих под хорошо проводящими цилиндрическими неоднородностями, были проведены измерения, показавшие, что и в

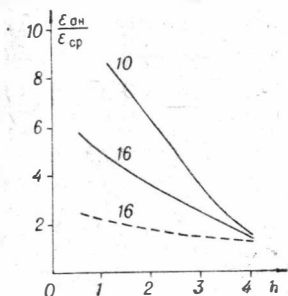
таких сложных случаях проводящие рудные тела могут более уверенно выделяться при измерениях с диполем в центре петли. Эта зависимость выдерживается для различных отношений проводимостей рудных тел ($\gamma_{сф}$), проводящих цилин-

Рис. 11. Аномальный эффект от сферы, залегающей под проводящей цилиндрической неоднородностью. $t = \text{мсек}$,

$$\frac{\gamma_{ц}}{\gamma_2} = 32, \quad \frac{\gamma_{сф}}{\gamma_2} = 100.$$

Шифр кривых — R (радиус рамки), h — высота цилиндра.

— измерения в центре петли, — — — измерения в рамке, совмещенной с генераторной.



дрических неоднородностей ($\gamma_{ц}$) и вмещающей среды ($\frac{\gamma_{сф}}{\gamma_2} = 100; 200; 500; \frac{\gamma_{ц}}{\gamma_2} = 4; 8; 16; 32$). На рис. 11 приведены кривые зависимости величины $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$ (здесь $\epsilon_{ср}$ — сигнал от неоднородной среды при отсутствии рудного тела) от высоты цилиндра для петель радиусом 16 и 10 см. Как видно из графика, рудное тело выделяется более уверенно при меньших размерах петли.

Сферические тела в двухслойной среде

В реальных условиях рудовмещающие породы часто перекрыты толщей проводящих рыхлых отложений. Для метода переходных процессов в этих условиях необходимо рассмотреть возбуждаемое токовым импульсом нестационарное электромагнитное поле петли, расположенной на поверхности двухслойной среды, содержащей проводящие сферические тела. Строгое аналитическое решение для такого типа задач можно получить в виде системы интегральных уравнений, решение которых, даже при современном уровне вычислительной техники, дело весьма трудное. Поэтому очевидным методом решения прямой задачи для сложных геоэлектрических разрезов является электрическое моделирование.

Мощность покровных отложений на модели изменялась от 1 до 4 см, отношения удельных проводимостей наносов и вмещающей среды (γ_1/γ_2) были приняты равными 8; 14; 32. Измерения проводились как в центре петли, так и в рамке, совмещенной с генераторной.

На рис. 12 приведены кривые спада э. д. с. со временем, когда мощность наносов равна 2 см, а отношение проводимостей наносов и вмещающей среды — 8.

Сравнив рис. 12, а, б и 12 в, г, видим, что при измерении в центре петли проводящие тела выделяются лучше, чем при измерениях по методике совмещенных рамок. Это отмечалось и для тел в однородном полупространстве. Так, при $t = 1,2$ мсек, $\frac{\gamma_{сф}}{\gamma_2} = 500$ и глубине залегания сферы 2 см отношение $\frac{\epsilon_{ан}}{\epsilon_{ср}} = 15$ (здесь $\epsilon_{ср} = \epsilon$ д. с. в двухслойной среде без

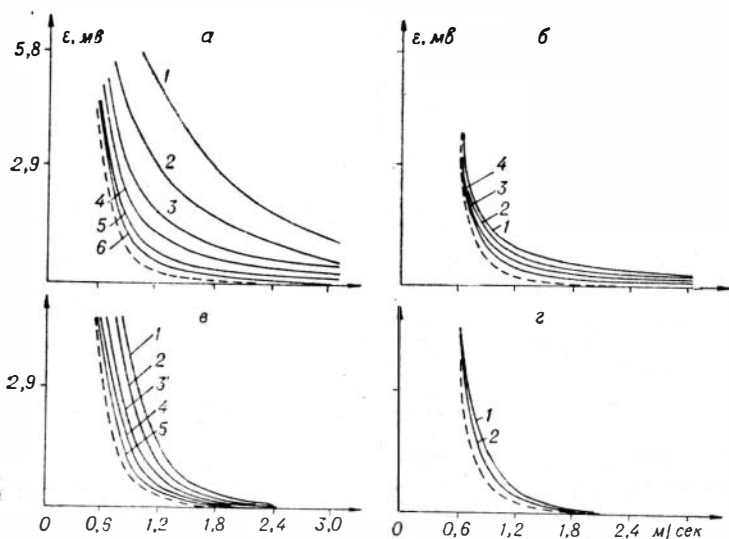


Рис. 12. Графики спада э. д. с. в рамке, расположенной на поверхности неоднородной среды. $R = 10$ см, $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 8$, мощность проводящих отложений (h_1) — 2 см. Шифр кривых — глубина до верхней кромки сферы, см.

— измерения над двухслойной средой с хорошо проводящим сферическим телом, - - - измерения над двухслойной средой, а — измерения в центре петли, $\frac{\gamma_{сф}}{\gamma_2} = 500$; б — измерения в рамке, совмещенной с генераторной, $\frac{\gamma_{сф}}{\gamma_2} = 500$; в — измерения в центре петли, $\frac{\gamma_{сф}}{\gamma_2} = 100$; г — измерения в рамке, совмещенной с генераторной, $\frac{\gamma_{сф}}{\gamma_2} = 100$.

сферического проводника), если измерения выполнены в центре петли, и $\frac{\epsilon_{ан}}{\epsilon_{ср}} = 4$ для совмещенных рамок.

На рис. 13 приведен график э. д. с. переходных процессов в двухслойной среде. Начиная с 3 мсек переходный процесс в двухслойной среде протекает так же, как и для проводящей среды в воздухе (пунктирная линия), т. е. на этих временах влияние среды практически не сказывается (рис. 13, а). При меньших отношениях $\gamma_{сф}/\gamma_2$ (рис. 13, б) влияние среды проявляется в большей степени, и переходный процесс в двухслойной среде (штрих-пунктирная линия) проходит на тех же временах, что и в среде с проводящим телом.

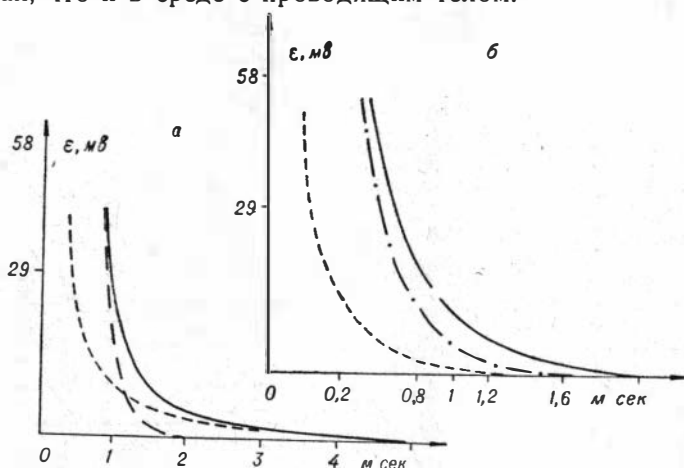


Рис. 13. Сравнение графиков э. д. с. над сферическим проводником в воздухе и в неоднородной вмещающей среде. $h_1 = 2$ см,

$$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 14.$$

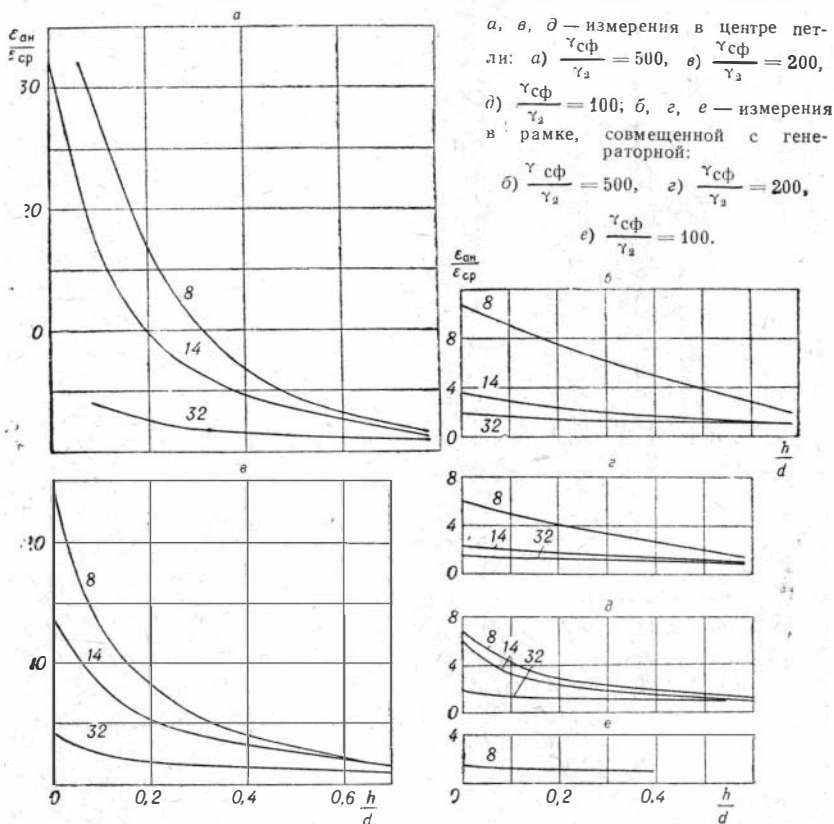
--- сферический проводник в воздухе, - · - двухслойная среда,
 — сферический проводник в двухслойной среде.

а) $\frac{\gamma_{сф}}{\gamma_2} = 500$; б) $\frac{\gamma_{сф}}{\gamma_2} = 100$.

Для оценки глубинности исследований построены графики (рис. 14), на которых по оси ординат отложена величина отношения $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$, а по оси абсцисс глубина погружения сферы для различных значений γ_1/γ_2 , $\gamma_{сф}/\gamma_2$ и при двух способах измерений. Отношение $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$, резко уменьшается при увеличении проводимости наносов. Значения $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$ при измерениях в центре петли значительно больше, чем при измерениях по методике совмещенных рамок.

Например, для разреза с параметрами $\rho_1 = 1,5 \text{ омм}$; $h_1 = 20 \text{ м}$, $\rho_2 = 20 \text{ омм}$; $\rho_{\text{сф}} = 0,1 \text{ омм}$; $r = 50 \text{ м}$ при глубине залегания верхней кромки сферы 30 м получим, что при измерении на 6-й мсек отношение $\frac{\epsilon_{\text{ан}}}{\epsilon_{\text{ср}}} = 4$, если э. д. с. регистрируется в центре петли радиусом 100 м , и $\frac{\epsilon_{\text{ан}}}{\epsilon_{\text{ср}}} = 17$, если э. д. с. регистрируется в рамке, совмещенной с генераторной. При глубине залегания рудного тела 60 м эти отношения равны соответственно 2 и 1, т. е. в последнем случае, при работе с совмещенными рамками, рудное тело практически не выделяется.

Рис. 14. Графики отношения $\epsilon_{\text{ан}}/\epsilon_{\text{ср}}$ в зависимости от глубины погружения сферического проводника. Шифр кривых γ_1/γ_2 ; $R = 10 \text{ см}$; $t = 1,2 \text{ мсек}$.



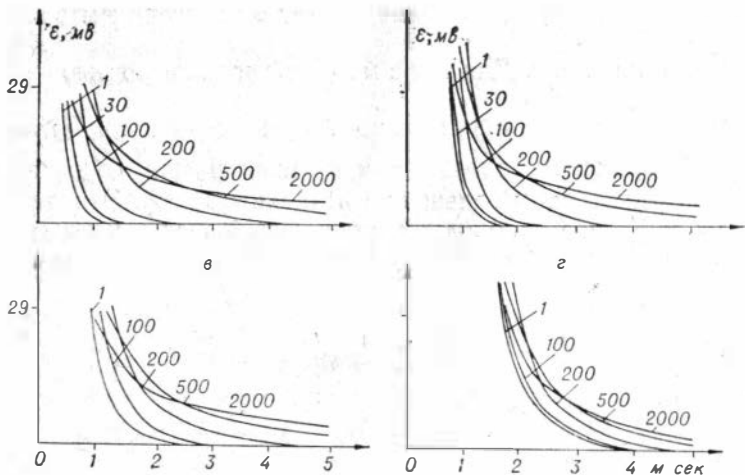


Рис. 15. Влияние проводимости наносов на величину э.д.с. переходных процессов. $R=16$ см, $h_1=2$ см. Глубина до верхней кромки сферы (h) — 2 см. Шифр кривых $\gamma_{сф}/\gamma_2$

а) $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 1$; б) $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 8$; в) $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 14$; г) $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 32$.

На рис. 15 приведены кривые э. д. с. переходных процессов для тел с различной проводимостью, перекрытых наносами мощностью 2 см, проводимостью которых в 8, 14 и 32 раза больше проводимости вмещающей среды. Глубина залегания сфер одинакова и равна 2 см. Измерения проведены в центре петли радиусом 16 см. По мере увеличения проводимости наносов возрастает влияние двухслойной среды, например, при $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 14$ (рис. 15, в) влияние сферы с отношением $\frac{\gamma_{сф}}{\gamma_2} = 30$ практически не сказывается при регистрации кривой э. д. с. переходных процессов, т. е. наблюдается экранирование рудного тела перекрывающими, хорошо проводящими наносами. В полевых условиях этому случаю могут соответствовать следующие параметры: $\rho_2=30$ ом·м, $\rho_1 \approx 2,0$ ом·м; $h_1=20$ м; $r=50$ м; $h=20$ м; $R=160$ м; $\rho_{р.т}^* = 1$ ом·м.

Зависимость величины $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$ от времени показана на рис. 16. Сплошные кривые относятся к измерениям в центре петли, а пунктирные — к данным, полученным с совмещенными рамками.

* р. т — рудное тело.

Аномальное поле над хорошо проводящими сферическими проводниками ($\frac{\gamma_{сф}}{\gamma_2} = 500$) возрастает с увеличением времени регистрации э. д. с. Для тел с меньшей проводимостью ($\frac{\gamma_{сф}}{\gamma_2} = 100$) отмечается значительно меньший рост аномального поля со временем, а для совмещенных рамок (пунктирные кривые) некоторое уменьшение величины $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$. Эти данные, как и в случае однородной вмещающей среды, показывают, что при небольших отношениях проводимостей рудного тела и

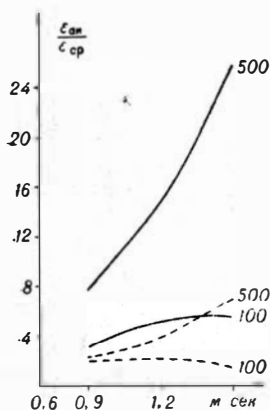


Рис. 16. Графики зависимости $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$ от времени. Шифр кривых $\gamma_{сф}/\gamma_2$; $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 8$. Глубина залегания сферы 2 см.

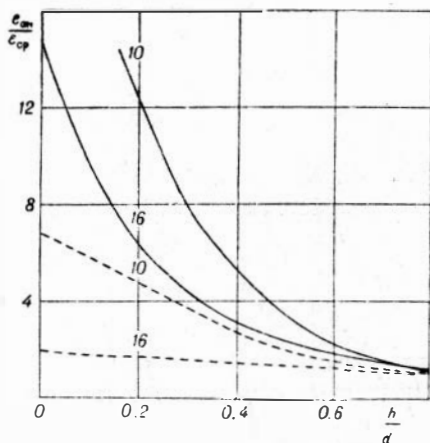


Рис. 17. Влияние размеров рамок на глубину исследования. Шифр кривых — радиус рамки, см.
 $t = 0,9$ мсек, $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 8$, $\frac{\gamma_{сф}}{\gamma_2} = 500$,
 γ_2
 $h_1 = 2$ см.
 — измерения в центре петли, — — — измерения в рамке, совмещенной с генераторной.

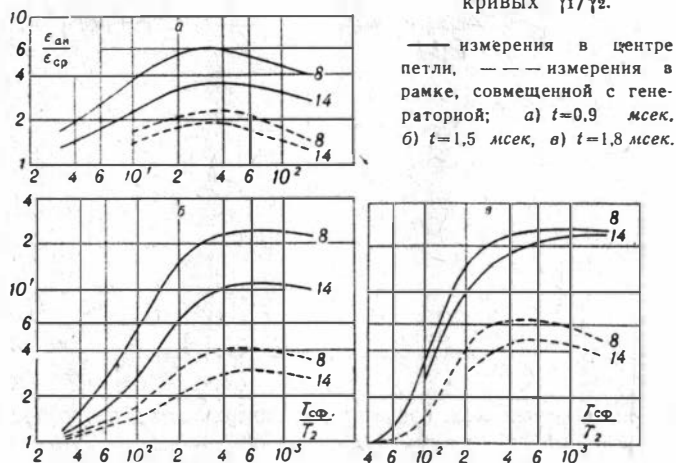
вмещающей среды ($\frac{\gamma_{сф}}{\gamma_2} < 50$) увеличение времени регистрации э. д. с. переходных процессов, по-видимому, не увеличивает разрешающую способность метода.

Влияние размеров рамок на величину $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$ для различных глубин залегания сферы показано на рис. 17. С уменьшением радиуса рамки от 16 до 10 см величина $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$ воз-

растает, причем эта зависимость отмечается для обоих способов измерений.

Зависимость величины отношения $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$ от проводимости сферических тел показана на рис. 18. В пределах исследуемого интервала времени отношение $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$ непропорционально проводимости сфер, имеется оптимальное значение $\gamma_{сф}/\gamma_2$,

Рис. 18. Графики зависимости $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$ от проводимости сферических тел. $R=10$ см, $h_1=2$ см, $h=2$ см. Шифр кривых γ_1/γ_2 .



соответствующее максимуму $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$, причем с увеличением времени регистрации э. д. с. этот максимум сдвигается в сторону больших значений $\gamma_{сф}/\gamma_2$. С увеличением времени уменьшается влияние проводимости наносов на значение $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$ (рис. 18, в, сплошные кривые со значениями $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 8$ и 14).

Переходные процессы в двухслойной среде

Моделирование проводилось над двухслойными средами при изменении мощности наносов от 1 до 4 см, отношения проводимости покровных отложений и основания (γ_1/γ_2) могли принимать следующие значения: 2,4; 8; 14 и 32. Измерения, как и при моделировании рудных задач, выполнялись в центре петли и в рамке, совмещенной с генераторной (радиус рамок $R=5; 10$ и 16 см).

Кривые спада э. д. с. со временем для различных значений мощности и проводимости покровных отложений показана

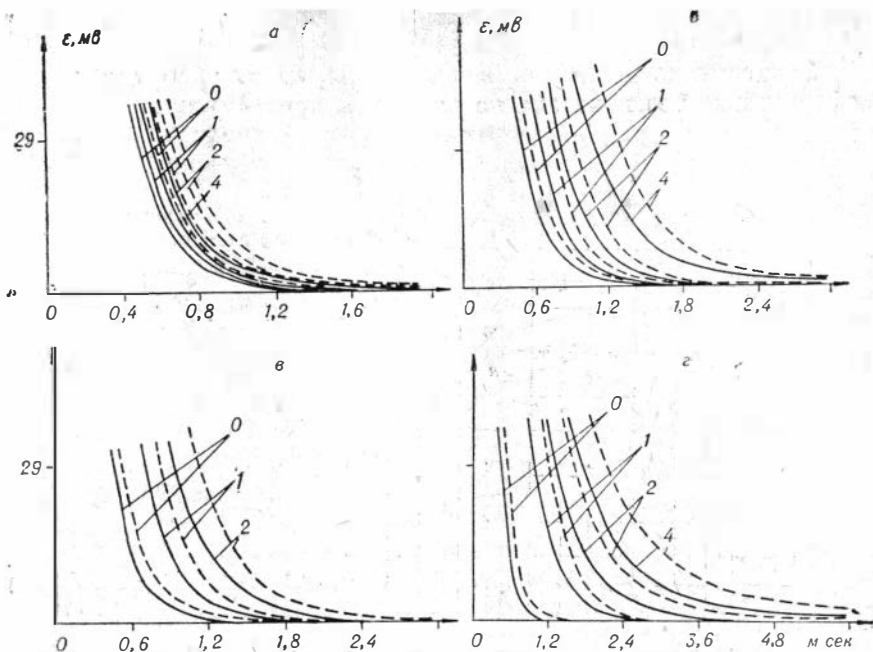


Рис. 19. Кривые переходных процессов на поверхности двухслойной среды. Шифр кривых — мощность покровных отложений, см.

— измерения в центре петли, — — измерения в рамке, совмещенной с генераторной.

$$а) \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 2,4; \quad б) \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 8; \quad в) \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 14; \quad г) \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 32.$$

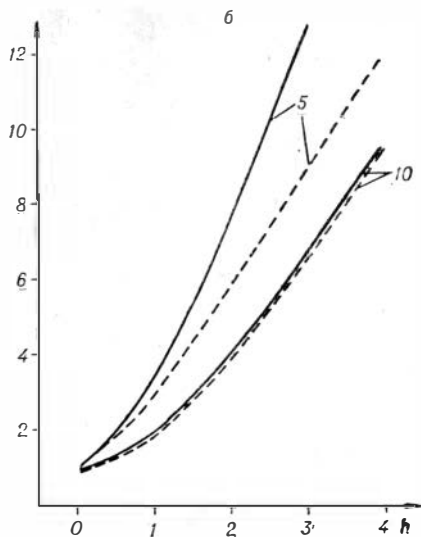
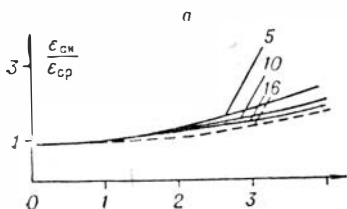
ны на рис. 19. Увеличение мощности покровных отложений приводит к увеличению э. д. с. и сдвигу кривой в область больших времен, с ростом проводимости наносов кривые становятся более разрешенными по мощности.

На рис. 20 даны кривые зависимости отношения $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$ (здесь $\epsilon_{ан}$ — э. д. с., измеренная над двухслойной средой, $\epsilon_{ср}$ — э. д. с. на поверхности однородного полупространства с удельной проводимостью γ_2) от мощности наносов для различных значений проводимости покровных отложений и разных размеров рамок. Когда проводимость наносов немного больше проводимости пород основания ($\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 2,4$), увеличение мощности наносов вызывает незначительное увеличение отношения $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$ (рис. 20, а). С увеличением проводимости наносов (рис. 20, б) отношение $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$ растет более резко.

Рис. 20. Графики зависимости $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$ от мощности наносов. Шифр кривых — радиус рамки, см.

— измерения в центре петли,
 --- измерения в рамке, совмещенной с генераторной.

а) $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 2,4$; б) $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 8$.



На рис. 21 приведен обобщенный график зависимости $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$ от продольной проводимости покровных отложений ($t=0,9$ мсек). Кривые, относящиеся к измерениям в рамках с различным радиусом (16 и 10 см), совпадают.

Данные рис. 20 и 21, указывают на то, что измерения в центре петли и по методике совмещенных рамок примерно равноценны для картирования наносов.

Влияние проводимости пород основания на величину э. д. с. переходных процессов показано на рис. 22, где приведены кривые изменения э. д. с. со временем, полученные при измерении с совмещенными рамками.

При небольших отношениях γ_1/γ_2 (рис. 22, а) значение э. д. с. над двухслойной средой значительно превышает величину э. д. с. над слоем проводящих отложений. С повышением про-

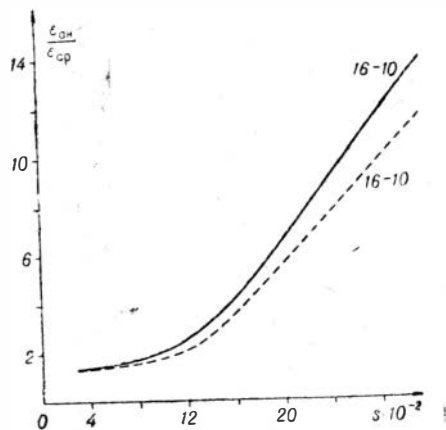


Рис. 21. Зависимость $\epsilon_{ан}/\epsilon_{ср}$ от продольной проводимости наносов.

$t=0,8$ мсек, $\gamma_2 = 10^4$ мо · м⁻¹.

Шифр кривых — радиус рамки.

— измерения в центре петли,
 --- измерения в рамке, совмещенной с генераторной.

димости наносов (рис. 22, б) разница в величинах э. д. с. над двухслойной средой и над слоем проводящих отложений становится меньше. Так, если мощность наносов 10 м ($\frac{\rho_2}{\rho_1} = 32$; $\rho_2 = 50 \text{ ом м}$), то при измерениях на времени свыше 5 мсек значение э. д. с. в основном определяется влиянием пород основания. Когда мощность наносов больше, то для исключения влияния проводящих отложений необходимо проводить измерения на более поздних временах.

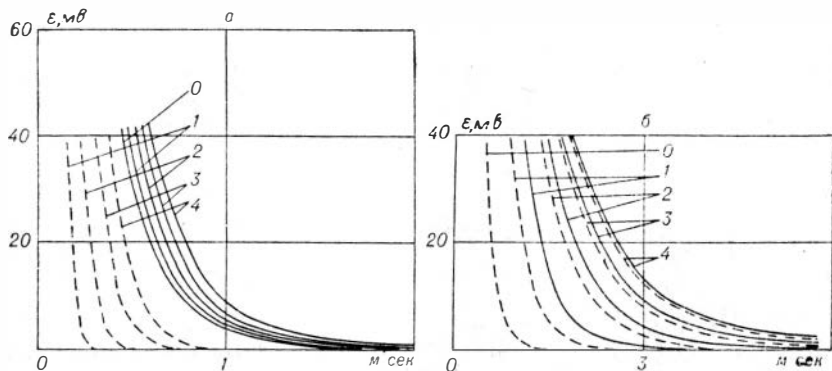


Рис. 22. Влияние проводимости основания на кривые переходных процессов. Шифр кривых — мощность проводящих отложений. $R = 16 \text{ см}$.
 — — — кривые спада э. д. с. от покровных отложений (непроводящее основание);
 — кривые спада э. д. с. над двухслойной средой: а) $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 2,4$; б) $\frac{\gamma_1}{\gamma_2} = 32$.

Таким образом, результаты моделирования показывают, что область малых времен при измерении э. д. с. переходных процессов наиболее благоприятна для картирования покровных отложений. Расчленение пород основания, перекрытых наносами, необходимо проводить на поздней стадии становления поля.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Кауфман, В. Ф. Коваленко, Ю. В. Якубовский. О возможностях метода становления при поисках хорошо проводящих рудных тел.— Изв. вузов. Геология и разведка, № 3, 1960.
2. Ф. М. Каменецкий, В. Ф. Коваленко. Неустановившееся поле незаземленной петли в присутствии проводящего тела, перекрытого слоем наносов.— Сб. «Прикладная геофизика», вып. 35, 1962.
3. Ф. М. Каменецкий, В. Ф. Коваленко. Неустановившиеся вихревые токи в проводящих покровных отложениях.— Изв. вузов. Геология и разведка, № 4, 1962.

4. Б. С. Светов и др. Электромагнитные методы разведки в рудной геофизике. М., «Недра», 1966.
 5. Ф. М. Каменецкий, В. Ф. Коваленко, Ю. В. Якубовский. Метод переходных процессов. М., ОНТИ, 1962.
 6. Л. М. Альпин. Кольцевой индукционный интегратор.— Изв. вузов, Геология и разведка, № 8, 1959.
 7. Л. М. Альпин. К моделированию задач электроразведки и электрического каротажа.— Труды МГРИ, т. 36, 1959.
 8. А. А. Кауфман, Р. П. Шапиро. Разработка кольцевого индукционного каротажного интегратора.— Изв. вузов. Геология и разведка, № 10, 1959.
 9. Д. С. Даев. «Моделирование низкочастотных электромагнитных полей в средах конечной проводимости».— Труды межвуз. конф. по индуктивным методам рудной геофизики. М., «Недра», 1964.
 10. А. В. Великин, Ю. И. Булгаков. Индуктивная электроразведка методом переходных процессов с совмещенными источником и приемником поля. Л., «Недра», 1967.
 11. Ю. В. Якубовский. Индуктивный метод электроразведки. М., Госгеолтехиздат, 1963.
-

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|----|
| Г. М. Морозова, А. А. Кауфман. Нестационарное электромагнитное поле вертикального магнитного диполя на полупространстве | 3 |
| А. А. Кауфман, Г. М. Морозова. Нестационарное электромагнитное поле вертикального магнитного диполя на поверхности двухслойной среды | 15 |
| А. А. Кауфман, Г. М. Морозова. Электромагнитное поле магнитного вертикального диполя «бесконечно» длинного кабеля и петли в области низких частот и больших времен (двухслойная среда) | 54 |
| И. Ф. Изюмов, Г. М. Морозова. Моделирование осесимметрических задач метода переходных процессов | 84 |

ТЕОРИЯ МЕТОДА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ГЕОКАРТИРОВАНИЯ И РУДНОЙ ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ

Ответственный редактор
доктор технических наук
Александр Аркадьевич Кауфман

Редактор И. П. Зайцева
Художественный редактор В. И. Шумаков
Технический редактор Т. К. Овчинникова
Корректоры В. Е. Селянина, М. П. Фомина

Сдано в набор 19 февраля 1971 г. Подписано к печати 8 декабря 1971 г. МН 06378.
Формат бумаги 60×90¹/₁₆. 6,75 печ. л., 5,1 уч.-изд. л. Тир. 1000. Зак. № 13. Цена 51 коп

Издательство «Наука», Сибирское отделение. Новосибирск-99, Советская, 18.
4-я типография изд-ва «Наука». Новосибирск-77, Станиславского, 25.