

В. Р. БУРСИАН

теория
электромагнитных
полей,
применяемых
в электроразведке

Издание 2-е, исправленное и дополненное

ПОД РЕДАКЦИЕЙ ПРОФ. А. С. СЕМЕНОВА
И Д-РА ТЕХН. НАУК С. М. ШЕЙМАННА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НЕДРА»
ЛЕНИНГРАДСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ЛЕНИНГРАД • 1972

Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке. Б у р с и а н В. Р. Изд. 2-е, испр. и доп. Л., «Недра», 1972. 368 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Настоящая книга представляет собой второе издание фундаментального труда профессора Ленинградского университета В. Р. Бурсиана «Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке». Этот труд состоит из двух изданных в разное время томов. Первая часть — теория стационарных, вторая — переменных полей.

В книге помещена статья академика В. А. Фока, в которой дан метод решения задачи о поле дипольного источника. Работа В. А. Фока, напечатанная на немецком языке в 1933 г., была им переведена на русский язык специально для настоящего издания. Она сопровождается конкретными примерами применения его метода.

В книге приведены общие уравнения электромагнитного поля, рассмотрены поля различных источников и питающих установок в однородных и неоднородных средах, решены задачи, составляющие основу теории электроразведки постоянным и переменным током низкой частоты.

Книга «Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке», предназначена для специалистов, работающих в производственных и научно-исследовательских геофизических организациях, преподавателей, студентов и аспирантов геофизических специальностей вузов.

Таблиц 35, иллюстраций 126, список литературы — 199 названий.

| | |
|---|----|
| | С. |
| От редакторов | 6 |
| Виктор Робертович Бурсиан | 9 |
| Предисловие к I изданию | 13 |
| ЧАСТЬ I. ПОСТОЯННЫЕ ПОЛЯ | |
| Введение | 15 |
| Уравнения электромагнитного поля, электрические свойства среды, граничные условия | — |
| Уравнения электромагнитного поля | — |
| Однородность горных пород с точки зрения электроразведки | 18 |
| Граничные условия | 19 |
| Электродвижущие силы | 21 |
| Г л а в а I | |
| Общие положения теории пространственного распределения постоянного тока | 22 |
| § 1. Дифференциальные уравнения задач с постоянным током | — |
| § 2. Граничные условия | 24 |
| § 3. Анизотропия слоистого проводника | 27 |
| § 4. Эквипотенциальные электроды. Учет поверхности раздела земля — воздух | 33 |
| § 5. Аналогия между электростатикой и теорией распространения постоянного тока | 38 |
| Г л а в а II | |
| Сопротивление заземлений (переходное сопротивление) | 40 |
| § 6. Общие теоремы | — |
| § 7. Два полушаровых заземления | 43 |
| § 8. Влияние неоднородности среды на сопротивление заземлений | 48 |
| § 9. Сопротивление заземлений не сферической формы | 51 |
| § 10. Сопротивление пластинчатого заземления | 55 |
| § 11. Заземление из нескольких электродов | 60 |
| § 12. Неэквипотенциальный электрод | 67 |
| Г л а в а III | |
| Нормальные поля постоянного тока | 78 |
| § 13. Общие замечания | — |
| § 14. Нормальное поле точечных источников | 80 |
| § 15. Поле линейных электродов | 91 |
| § 16. Теорема взаимности | 95 |
| § 17. Магнитное поле цепи постоянного тока с двумя заземлениями | 96 |

| | |
|--|-----|
| Глава IV | С. |
| Поля постоянного тока в неоднородной среде | 109 |
| § 18. Аномалии в ходе эквипотенциальных линий вокруг сферической залежи | — |
| § 19. Среднее удельное сопротивление неоднородных пород | 115 |
| § 20. Аномалии от пластины. Применение метода функций комплексного переменного | 121 |
| § 21. Метод изображений при плоской поверхности раздела двух сред. Профилирование через контакт двух пород | 129 |
| § 22. Две поверхности раздела. Метод многократных отражений. Вертикальная жила или контактная зона | 141 |
| § 23. Горизонтальные слои различной электропроводности. Общее решение для n слоев | 147 |
| § 24. Два горизонтальных слоя. Преобразование рядов | 153 |
| § 25. Палетка для электротзондирования | 164 |
| § 26. Формулы и таблицы для практических вычислений палеток электротзондирования | 169 |
| § 27. Практические приемы при нескольких слоях | 177 |
| § 28. Теория каротажа | 180 |

| | |
|---|-----|
| Глава V | |
| Основания теории объемных токов в анизотропных средах | 191 |
| § 29. Основные уравнения | — |
| § 30. Точечный источник в неограниченной анизотропной среде | 193 |
| § 31. Точечный источник на поверхности анизотропной среды | 195 |
| § 32. Точечный источник на некоторой глубине в анизотропной среде | 198 |

| | |
|--|-----|
| Глава VI | |
| Поле естественных токов | 203 |
| § 33. Общие положения | — |
| § 34. Учет земной поверхности. Случай цилиндрической, горизонтально расположенной залежи | 205 |
| § 35. Решение обратной задачи в одном частном предположении | 212 |
| § 36. Приближенное решение обратной задачи для цилиндра | 215 |
| § 37. Приближенное решение для сферической залежи | 219 |

ЧАСТЬ II. ПЕРЕМЕННЫЕ ПОЛЯ

| | |
|---|-----|
| Глава I | |
| Уравнения поля и граничные условия. Комплексные решения. Электромагнитные потенциалы | 223 |
| § 1. Дифференциальные уравнения поля. Теорема о наложении полей | — |
| § 2. Периодические поля; введение комплексных величин | 227 |
| § 3. Пространственные гармонические колебания векторов поля | 230 |
| § 4. Электромагнитные потенциалы | 241 |
| § 5. Граничные условия для вектор-потенциала | 245 |

| | |
|---|-----|
| Глава II | |
| Простейшие переменные поля в неограниченной однородной среде | 246 |
| § 6. Плоские волны. Характеристики волны | — |
| § 7. Поглощение энергии в проводящей среде | 251 |
| § 8. Зависимость скорости распространения и поглощения от электрических свойств среды | 253 |

| | |
|--|-----|
| | С. |
| § 9. Поле бесконечно длинного прямолинейного кабеля с переменным током | 261 |
| § 10. Поле точечного диполя | 269 |
| § 11. Закон подобия для электромагнитных полей | 274 |

| | |
|--|-----|
| Глава III | |
| Бесконечно длинный прямолинейный ток при наличии границы земля — воздух | 279 |
| § 12. Решение общей задачи при посредстве определенных интегралов | — |
| § 13. Две среды; кабель над землей | 283 |
| § 14. Две среды; кабель, лежащий на земле | 288 |
| § 15. Палетки нормального поля прямолинейного кабеля | 298 |
| § 16. Теорема взаимности для плоских задач | 302 |
| § 17. Две среды; кабель под землей | 306 |
| В. А. Фок. О расчете электромагнитного поля переменного тока при наличии плоской поверхности раздела | 325 |
| С. М. Шейнманн, Л. Ф. Чмиль. Примеры применения метода В. А. Фока | 343 |
| Краткий исторический обзор теории электромагнитных методов | 353 |

| | |
|----------------------|-----|
| Литература | 360 |
|----------------------|-----|

ОТ РЕДАКТОРОВ

Настоящая книга представляет собой второе издание фундаментального труда профессора Ленинградского университета В. Р. Бурсиана «Теория электромагнитных полей, применяемых в электроразведке». Этот труд состоит из двух изданных в разное время томов, которые в настоящем издании составляют две части книги.

Первый том, включающий полный цикл лекций по теории электроразведки постоянным током, был издан технико-теоретическим издательством в 1933 г. Выход его в свет явился крупным событием, в значительной мере определившим характер и пути развития теоретических исследований в области электроразведки. В ней впервые определялись круг конкретных задач, входящих в компетенцию теории электроразведки постоянным током, и контуры самого предмета этой, тогда еще не оформившейся области науки. Строгое решение задач, мастерски выполненное с применением методов математической физики, служило указанием на пути и методы теоретических исследований в области электроразведки. Результаты решения, доведенные до числа, имели непосредственное практическое значение. Таким образом, книга явилась основополагающим трудом, определившим предмет и методы исследования электроразведки постоянным током, руководством для теоретиков и практиков, работающих в этой области и полным, высококвалифицированным учебным пособием по теории электроразведки постоянным током для вузов.

Первое издание книги было не только учебным пособием и руководством, но также теоретической основой ряда учебников, учебных пособий и специальных работ, изданных в последующие годы по электроразведке постоянным током. Свое научное и учебное значение книга не утратила до сих пор, хотя первое издание ее уже давно стало библиографической редкостью. Большой интерес к книге со стороны электроразведчиков явился непосредственной причиной второго издания ее.

При подготовке книги к печати мы считали необходимым полностью сохранить ее план, содержание и стиль изложения. Поэтому в ее текст внесены лишь исправления опечаток и отдельных редких неточностей, большинство из которых было замечено и внесено в свой личный экземпляр самим автором. По от-

дельным вопросам сделаны редакторские примечания, которые касаются главным образом вновь составленного списка литературы, изданной после выхода книги в свет. В список включены фундаментальные руководства по математической физике, аппарат которой используется в книге, основные учебники и учебные руководства по электроразведке и некоторые специальные работы, касающиеся затронутых в книге вопросов. Ссылки (примечания редактора) делаются только на специальную литературу, нумерация которой дана в конце книги.

Второй том включает лишь первую часть цикла лекций, читанных В. Р. Бурсианом по теории переменных полей. Он был издан в 1936 г. издательством университета очень ограниченным тиражом и почти сразу же стал библиографической редкостью. В нем изложены основы теории переменных электромагнитных полей в проводящих средах, рассмотрены некоторые простые электромагнитные поля, даны решения отдельных задач и обстоятельно разобрана задача о поле переменного тока в прямолинейном бесконечно длинном кабеле. Рассматриваемый том является первым из двух составленных В. Р. Бурсианом выпусков по теории переменных полей. Второй выпуск, подготовленный им к печати, не был опубликован, а впоследствии рукопись его оказалась утерянной. Несмотря на то, что изданный выпуск представляет лишь первую часть труда В. Р. Бурсиана по теории переменных полей, он как и первый том, посвященный полю постоянного тока, сыграл решающую роль в развитии методов электроразведки и послужил основой многих дальнейших исследований в области теории методов переменного тока и соответствующих разделов учебных пособий по электроразведке. Основные идеи и приведенные в книге решения не потеряли своего значения и в настоящее время. Предложение о переиздании его было единодушно поддержано специалистами.

При подготовке ко 2-му изданию второго тома в него были внесены дополнения и редакционные исправления. Текст автора был дополнен статьей академика В. А. Фока и историческим обзором работ по теории электромагнитных полей. Включение статьи В. А. Фока во второе издание обусловлено следующим обстоятельством. Подготавливая к несостоявшемуся изданию второй выпуск своей теории переменных полей, В. Р. Бурсиан включил в него подробное изложение решения фундаментальной задачи теории о поле дипольного источника, расположенного на плоской поверхности земного полупространства, и ряд следствий, вытекающих из этого решения. Первоисточником для такого изложения явилась работа В. А. Фока (*Zur Berechnung des elektromagnetischen Wechselstromfeldes bei ebener Begrenzung*), появившаяся в 1933 г. на немецком языке в *Annalen der Physik*. Не имея возможности восстановить бурсиановский текст, мы помещаем оригинал работы В. А. Фока. Печатаемый авторский перевод немецкой статьи является ее первой отечественной публикацией.

Работа В. А. Фока отличается от труда В. Р. Бур-

спана манерой изложения материала и повышенной требовательностью к математической подготовке читателя. Для того чтобы ближе связать работу В. А. Фока с геофизически направленным изложением В. Р. Бурсиана, даны примеры применения метода Фока к расчетам полей дипольных источников и приведены результаты числовых расчетов таких полей.

Включение во второе издание книги В. Р. Бурсиана статьи В. А. Фока позволило в значительной мере восполнить утрату составленной В. Р. Бурсианом рукописи второго выпуска теории переменных полей.

Необходимость дополнения текста автора историческим обзором связана с тем, что со времени издания книги В. Р. Бурсиана электроразведка с помощью нестационарных полей, в том числе и переменных, и ее теория сильно изменились. Воплотились в жизнь идеи, которые во времена первого издания труда В. Р. Бурсиана не могли быть экспериментально проверены и иногда представлялись практически неосуществимыми. В обзоре приведены краткие сведения о развитии теории электроразведки с помощью переменных и устанавливающихся полей с указанием главной литературы. Обзор помещен в конце книги.

Редакторская подготовка ко второму изданию второй части труда В. Р. Бурсиана свелась, в основном, к ее частичной модернизации. Из нее изъят один параграф, посвященный неактуальной в наше время теории кардиоидного генератора. Убраны некоторые архаизмы — упоминания вышедшей из употребления аппаратуры, употребление отживших специфических терминов и т. д. Подновлены ссылки на литературные источники.

Некоторые параграфы, в которых автор имел в виду распространенные в его время, но теперь отжившие методы электроразведки, не потеряли своей целостности вследствие общности и обстоятельности изложения материала (таковы § 3, 17). В первом подробно разбираются пространственные параметры, характеризующие эллиптическую поляризацию переменного поля. Во втором рассматривается поле тока в кабеле, расположенном под земной поверхностью. Эти разделы книги сохранены полностью, если не считать убранных из текста прямых указаний на устаревшие методы и приемы работы.

Очерк о В. Р. Бурсиане написан А. С. Семеновым с участием Э. В. Бурсиана и С. М. Шейнманна. Примеры применения метода В. А. Фока составлены С. М. Шейнманном и Л. Ф. Чмиль; краткий исторический обзор в конце книги — С. М. Шейнманном.

Редактирование и подготовка к печати первой части книги выполнена А. С. Семеновым, второй — С. М. Шейнманном.

Издательство и редакторы книги благодарят академика Владимира Александровича Фока за согласие предоставить свою статью для печатания и за перевод его статьи с немецкого на русский язык и сына В. Р. Бурсиана Эрика Викторовича Бурсиана за предоставленные биографические сведения о В. Р. Бурсиане.

ВИКТОР РОБЕРТОВИЧ БУРСИАН (1886—1945)

В. Р. Бурсиан, один из основателей советской школы теоретической физики, в то же время был одним из основоположников разведочной геофизики. Исключительную эрудицию физика-теоретика В. Р. Бурсиан применил для решения важнейших проблем геофизической разведки, являясь родоначальником одного из ее направлений — электроразведки.

В. Р. Бурсиан родился в Петербурге в 1886 г. в семье врача. В 1904 г., окончив гимназию с золотой медалью, поступил на физико-математический факультет Петербургского университета, по окончании которого в 1910 г. был оставлен при кафедре физики. До 1919 г. он преподавал физику в Петроградском политехническом институте. В 1916—1918 гг. сдал экзамен на степень магистра физики. С 1919 г. начал преподавательскую деятельность в Ленинградском (Петроградском) университете, где был избран доцентом по теоретической физике. Одновременно был избран на кафедру теоретической физики физико-механического факультета Политехнического института; был одним из организаторов этого факультета. В 1918 г. при основании академиком А. Ф. Иоффе Физико-технического института занял в нем должность ученого секретаря, а затем был назначен руководителем теоретического отдела этого института. В этих должностях В. Р. Бурсиан проработал в Физико-техническом институте им. А. Ф. Иоффе до 1932 г.

Начиная с 1932 г. В. Р. Бурсиан работал в качестве профессора и заведующего кафедрой теоретической физики Ленинградского государственного университета. В 1933 г., при основании Научно-исследовательского физического института при ЛГУ был назначен на должность заместителя директора НИФИ по научно-исследовательской части; с 1934 г. стал директором этого института. Параллельно с работой в НИФИ при ЛГУ В. Р. Бурсиан продолжал преподавать в университете теоретическую физику и с 1933 г. занял место декана физического факультета университета. В 1934 г. утвержден в ученой степени доктора физико-математических наук.

Результатом педагогической и исследовательской деятельности В. Р. Бурсиана в области теоретической физики помимо непосредственного воспитания молодых специалистов-физиков явились многочисленные печатные работы и четыре курса лекций — «Электромагнитная теория света», «Электродинамика», «Термодинамика» и «Теория излучения». Среди печатных работ особой интерес представляют строгое решение задачи Ленгмюра о движении электронов, теория оптически активных изотропных и анизотропных сред, работы, посвященные проблеме природы массы электрона, и работы по электро-



динамике сплошных сред (решение вопроса о «средних значениях» в электронной теории).

С 1924 г. В. Р. Бурсиан принимал активное участие в геофизических работах сначала в Геологическом комитете, а затем в Геофизическом институте, ЦНИГРИ и Нефтяном геологоразведочном институте. Краткий очерк о его геофизических исследованиях приводится ниже.

Свою деятельность в области разведочной геофизики В. Р. Бурсиан начал в период зарождения и формирования этого нового направления в геологии. В 1923—1924 гг. в Ленинграде были созданы две первые геофизические организации — Институт прикладной геофизики и Геофизическая секция при Геолкоме, в которую В. Р. Бурсиан был приглашен для организации и руководства электроразведочными исследованиями. Ученый с большим опытом исследовательской и педагогической работы, близко связанный с физическими учреждениями Ленинграда, В. Р. Бурсиан сумел в короткий срок подобрать и организовать коллектив сотрудников и создать электроразведочный отдел. В отделе одновременно развивались исследования по разработке теоретических основ методов электроразведки, велись аппаратные разработки и в широких масштабах ставились полевые работы. Уже в течение первых лет своей деятельности электроразведочный отдел занял в секции ведущее место.

Параллельно с развитием работ в Геофизической секции под руководством В. Р. Бурсиана велись теоретические и экспериментальные исследования в лаборатории электрометрии НИФИ. В работе Геофизической секции и лаборатории электрометрии наряду с коллегами В. Р. Бурсиана, известными учеными В. А. Фоком и В. К. Фредериксом, принимали участие молодые физики и студенты университета, многие из которых в дальнейшем стали крупными специалистами.

Основное внимание руководимых В. Р. Бурсианом коллективов в течение первых 5—6 лет было сосредоточено на разработке методов электроразведки переменным током: «эквипотенциальных линий», «интенсивности» и «индукции».

В течение первых двух лет сам Виктор Робертович занимался главным образом разработкой метода эквипотенциальных линий, который вскоре стал первым методом электроразведки, получившим широкое производственное применение в нашей стране. С 1925 г. этот метод стал применяться для поисков месторождений меди и других металлов на Урале, Рудном Алтае, в Казахстане и в других рудных районах. Партиями, работавшими под руководством В. Р. Бурсиана, с помощью метода эквипотенциальных линий были открыты крупные медноколчеданные месторождения на Урале — линза Электрическая, Левиха IX и др.

Разработкой метода интенсивности вместе с В. Р. Бурсианом занимался профессор Университета В. К. Фредерикс. С 1926 г. метод интенсивности стал применяться в качестве одного из ведущих методов рудной электроразведки. В 1929 г. В. Р. Бурсиан и В. К. Фредерикс привлекли к сотрудничеству с геофизической секцией Геолкома Физико-технический институт, в котором в течение 1929—1930 гг. была разработана первая типовая отечественная геофизическая аппаратура — приемные рамки и ламповые вольтметры для метода интенсивности. В самом начале 30-х годов в строй вступил метод индукции, разработанный И. Г. Михайловым под руководством В. Р. Бурсиана.

В решении некоторых задач теории методов электроразведки переменным током, принимал участие физик-теоретик В. А. Фок. Решенная им совместно с В. Р. Бурсианом задача об электромагнитном поле заземленной линии с током и теперь является основой в теории некоторых методов электроразведки переменным током.

Геофизические методы не могли быть развиты и внедрены в широком масштабе без подготовки специальных кадров геофизиков. Поэтому начиная с 1929 г. в ряде ведущих вузов страны стали создаваться геофизические специальности геологопоискового профиля, в частности была организована специальность электроразведки при кафедре геофизики на физическом факультете университета. Организатором и руководителем ее был В. Р. Бурсиан.

Первые группы студентов-электроразведчиков университета принимали участие во многих полевых работах в качестве технических исполнителей, а по

окончании университета явились весьма существенным пополнением кадров геофизических организаций. Организованные в 1929 г. специальности (электро- и магниторазведка) успешно действуют и в настоящее время, готовя высококвалифицированных специалистов для различных областей разведочной и общей геофизики. Многие из первых выпускников этих специальностей стали крупными учеными и ведущими специалистами в ряде геофизических учреждений.

Наряду с организационной, педагогической и исследовательской работой в университете В. Р. Бурсиан продолжал свою деятельность в качестве научного руководителя и консультанта в научно-исследовательских геофизических учреждениях — Геофизическом институте (1930 г.) и Геофизическом секторе ЦНИГРИ (1931 г.), образованных на базе Геофизической секции Геолкома и Института прикладной геофизики, и в геофизическом отделе Нефтяного института.

С начала 30-х годов наряду с работами методами переменного тока, имевшими в то время узко рудную направленность, все большее значение приобретают методы электроразведки постоянным током. Последние стали применяться в нефтяной геологии, при поисках угольных месторождений и в инженерной геологии. В этот период методы электроразведки постоянным током стали основными предметами исследования и В. Р. Бурсиана. Занимаясь в основном разработкой теоретических вопросов, он одновременно руководил методическими и полевыми работами, связанными с применением методов электроразведки постоянным и переменным током в геофизических учреждениях. В 1931 г. он был научным руководителем комплексной экспедиции на Урале, где при поисках медноколчеданных месторождений наряду с методами переменного тока применялись и некоторые модификации методов постоянного тока. В 1932 г. при его участии проведены исследования методами постоянного тока в Кузбассе для изучения угольных месторождений.

Результаты своих исследований по электроразведке постоянным током В. Р. Бурсиан обобщил в монографии, изданной в 1933 г., которая была первым в мировой литературе фундаментальным учебником по электроразведке. Она до сих пор остается непревзойденным по своей полноте и строгости руководством по теории электроразведки постоянным током.

В 1936 г. вышел в свет первый выпуск цикла его лекций по теории переменных полей, в котором содержатся основы теории переменных электромагнитных полей в земле и полная теория поля переменного тока в бесконечном прямолинейном кабеле, лежащем на поверхности земного полупространства. Этот выпуск, дополненный статьей академика В. А. Фока и историческим обзором, составляет вторую часть настоящей книги.

В начале 30-х годов при разведке нефтяных и угольных месторождений стали применяться электрические методы исследования буровых скважин — «каротаж». В. Р. Бурсианом была поставлена фундаментальная задача по теории каротажа сопротивления, решение которой дал В. А. Фок. Так были созданы теоретические основы одного из ведущих методов каротажа. С разработкой теории второго метода, основанного на изучении естественных электрических полей, в НИФИ под руководством В. Р. Бурсиана проводились экспериментальные и теоретические исследования по изучению фильтрационных и диффузионных полей в дисперсных средах. Теорию этих полей разработал В. Р. Бурсиан.

Перечень опубликованных работ В. Р. Бурсиана по затронутым вопросам приведен в списке литературы [12, 13, 14, 15, 16, 17].

Многое, созданное В. Р. Бурсианом, к сожалению, не получило отражения в печати и осталось лишь в памяти или в конспектах лекций его учеников. Так, например, подготовленная к печати ценнейшая рукопись второго выпуска теории переменных электромагнитных полей оказалась полностью утраченной.

Упомянутые выше исследования в области разведочной геофизики и приведенный перечень опубликованных работ В. Р. Бурсиана далеко не исчерпывают его вклад в эту науку. Уже одно участие в создании и деятельности первых геофизических организаций такого известного и талантливого ученого способствовало поднятию авторитета этих организаций и развитию самой науки. Идеи и непосредственное влияние В. Р. Бурсиана определили направление и уровень

научных исследований его многочисленных учеников и последователей. Высокий уровень советской электроразведки и широкие масштабы ее применения в самых различных областях геологии в значительной мере обязаны трудам В. Р. Бурсиана и его школы.

Велика роль В. Р. Бурсиана в организации высшего геофизического образования и подготовке молодых специалистов в вузах нашей страны. При его активном участии определялись профили и выработывались учебные планы первых геофизических специальностей. Им одним из первых была предложена и обоснована схема подготовки геофизиков по двум профилям — инженеров-геофизиков в горных институтах и физиков-геофизиков в университетах. С небольшими изменениями такое подразделение геофизических специальностей существует до настоящего времени (к ним добавился лишь профиль геофизика-геолога на геологических факультетах университетов).

Большое значение для геофизического образования имели труды В. Р. Бурсиана, которые широко использовались в качестве учебных пособий в вузах и служили первоисточником при составлении учебников и учебных руководств по электроразведке. Его ученики являются ведущими преподавателями в ряде вузов страны.

По складу своего характера В. Р. Бурсиан был исследователем и педагогом. Наряду с чтением лекций, которые им отрабатывались с большой тщательностью, он руководил курсовыми работами студентов, сам определял их на производственные практики, а по окончании университета старался устроить на работу, отвечающую склонностям своих воспитанников. Будучи предельно скромным и требовательным к себе, он воспитывал соответствующие качества и у своих учеников, среди которых пользовался заслуженным уважением и любовью.

ПРЕДИСЛОВИЕ К I ИЗДАНИЮ

Настоящая книга представляет собой первую попытку систематического изложения теории электромагнитных полей, применяемых в электроразведке. Автор имел в виду в первую очередь студентов-геофизиков Ленинградского государственного университета, специализирующихся по электроразведке, предназначая книгу как основное пособие к читаемому им курсу теории электроразведки. Курс этот предполагает знание теоретической электродинамики, теории функций комплексных переменных и уравнений математической физики; поэтому исходные положения и изложение математических методов даны лишь в виде кратких напоминаний*. Книга не предназначается для первого ознакомления с методами электроразведки, а предполагает у читателя достаточное знакомство с практикой дела, и последовательность изложения материала подчинена не методам, а теоретическому подходу к различным типам электрических и магнитных полей. В литературе имеются учебники [79, 60], достаточно полно освещающие практическую сторону дела и физические основы различных методов, но нет систематического руководства, позволяющего овладеть методикой постановки и решения тех задач, которые ставит практика перед теорией; поэтому автор старался по возможности полно осветить все те пункты, где теория дает существенный материал для использования данных электроразведки. В большинстве случаев выводы формул даны с достаточной полнотой, так что надлежаще подготовленный читатель сможет на самом деле произвести все выкладки и усвоить метод решения так, чтобы справляться с аналогичными задачами. Лишь в немногих случаях пришлось ограничиться беглыми указаниями на ход сложных математических выкладок; при дальнейшей разработке подобных вопросов неизбежна помощь математиков, и автор надеется, что помещенный здесь материал будет достаточным для того, чтобы физик-электроразведчик мог поставить задачу, а математик мог в ней разобраться. По мере возможности результаты теории доведены до расчетных формул, таблиц и графиков; автор показал на ряде примеров, как нужно представлять результаты теоретических рассуждений для того, чтобы они могли найти непосредственное применение на практике.

* Для изучения теории электричества можно рекомендовать книгу И. Е. Тамма [99].

В этом отношении книга содержит некоторый оригинальный материал, не только иллюстрирующий выводы, но и дающий возможность путем простых расчетов на основании данных таблиц и графиков ориентироваться в различных частных случаях, а также продолжить систематические расчеты полезных таблиц и графиков, сверх тех, которыми автор должен был ограничиться за недостатком времени и места.

При тех широких задачах, которые стоят перед прикладной геофизикой вообще и электрическими методами в частности, совершенно необходимо, чтобы в деле электроразведки принимали участие лица, могущие свободно разбираться во всех вопросах теории электрических методов, критически относиться к предложениям, поступающим из-за границы, определять пределы применимости различных методов и работать над их усовершенствованием и приспособлением к разнообразным геологическим условиям. Математический и теоретический аппарат, употребленный в настоящей книге, дает ясное представление о том, какую подготовку должны иметь физики-электроразведчики для того, чтобы справиться со своей задачей.

ВВЕДЕНИЕ

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ, ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СРЕДЫ, ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

По знанию законов электромагнитных явлений мы должны исходить из уравнений Максвелла-Герца, если имеем в виду явления, протекающие в пространственном отношении в масштабах больших по сравнению с размерами атомов и молекул, и в отношении их переменности во времени — происходящие с частотами от нуля и до частот ультракоротких волн радиотехники. Так как масштаб явлений, встречающихся в электроразведочной практике, далеко не доходит до этих практически установленных границ применения теории, то система уравнений Максвелла будет лежать в основе всех теоретических выкладок нашего предмета.

Состояние электромагнитного поля в данной точке среды и в данный момент описывается пятью векторными величинами; \mathbf{E} — вектор напряжения электрического поля, \mathbf{D} — электрического смещения или электрической индукции, \mathbf{H} — напряжения магнитного поля, \mathbf{B} — магнитной индукции и \mathbf{J} — плотности электрического тока. Кроме них в уравнениях еще появляется скалярная величина ρ_e — объемная плотность электрического заряда. Эти пять векторов связаны дифференциальными уравнениями

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \dot{\mathbf{D}} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}; \quad (\text{I})*$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_e; \quad (\text{II})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}; \quad (\text{III})$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (\text{IV})$$

Входящая в эти уравнения постоянная c есть отношение электромагнитной единицы электрического заряда к электростатической и численно равна скорости света в вакууме, т. е. приближенно

$$3 \cdot 10^{10} \text{ см/сек.}$$

* Точками над буквами мы будем для сокращения письма обозначать частные производные по времени.

Взяв расхождение от обеих частей уравнения (I), получаем, помня, что операция div rot дает тождественно нуль,

$$\frac{4\pi}{c} \text{div} (\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{J}) = 0.$$

Заменяя $\text{div} \mathbf{D}$ через ρ_e из (II) и переставляя порядок дифференцирования по координатам и времени, получаем, сократив на $4\pi/c$,

$$\rho_e + \text{div} \mathbf{J} = 0, \quad (\text{V})$$

так называемое уравнение сохранения количества электричества, смысл которого делается понятным, если его проинтегрировать по какому-нибудь объему τ и воспользоваться для второго члена теоремой Гаусса

$$\int_{\tau} (\rho_e + \text{div} \mathbf{J}) d\tau = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} \rho_e d\tau + \int_S J_n dS = 0.$$

По определению понятий \mathbf{J} и ρ_e мы имеем

$$\int_{\tau} \rho_e d\tau = e,$$

заряд, заключенный внутри объема τ , ограниченного поверхностью S ,

$$\int_S J_n dS = I,$$

полный ток, вытекающий из объема τ через поверхность S .

В этих обозначениях мы имеем

$$I = - \frac{\partial e}{\partial t},$$

т. е. полный ток, вытекающий из замкнутой поверхности, равен убыли количества электричества, заключенного внутри нее.

Характеристика среды, в которой происходит электромагнитный процесс, для макроскопических явлений с достаточно медленным изменением во времени дается следующими уравнениями связи между векторами:

$$\mathbf{D} = \frac{\epsilon}{4\pi} \mathbf{E}; \quad (\text{VI})$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad (\text{VII})$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (\text{VIII})$$

где ϵ — диэлектрическая постоянная, μ — магнитная проницаемость, σ — удельная электропроводность среды в данной точке.

В вышеуказанных пределах применения теории эти три величины можно считать постоянными, т. е. не зависящими от величины и скорости изменения векторов поля; исключение нужно сделать для понятия магнитной проницаемости в сильно намагничивающихся

веществах, как железо и некоторые другие ферромагнитные вещества. Если в определенном участке пространства эти характеристики во всех точках одни и те же, т. е. не зависят от координат, то мы называем такую среду в электрическом отношении однородной. Как известно, уравнения (VI—VIII) недостаточны для описания явлений в так называемых *анизотропных* средах, т. е. таких, свойства которых зависят от направления. В этом случае, имеющем место в кристаллической среде некубической симметрии, их нужно заменить системой уравнений типа

$$\left. \begin{aligned} D_x &= \frac{1}{4\pi} (\epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z); \\ D_y &= \frac{1}{4\pi} (\epsilon_{yx} E_x + \epsilon_{yy} E_y + \epsilon_{yz} E_z); \\ D_z &= \frac{1}{4\pi} (\epsilon_{zx} E_x + \epsilon_{zy} E_y + \epsilon_{zz} E_z); \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX})$$

и аналогично для \mathbf{B} и \mathbf{J} , т. е. принять вместо пропорциональности более общую линейную зависимость составляющих векторов \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{J} от составляющих \mathbf{E} и \mathbf{H} *. Одна постоянная, например ϵ , заменяется группой девяти величин, образующих тензор. Возможность охарактеризовать свойства данной анизотропной среды по отношению к электромагнитным явлениям указанными тремя постоянными тензорами подлежит тем же самым оговоркам в смысле пространственно-временного масштаба, как и для изотропной среды.

Основные уравнения (I—IV) написаны так, что входящие в них величины предполагаются измеренными в смешанной системе единиц: \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{J} , ρ_e в системе СГСЕ, а \mathbf{B} и \mathbf{H} — в СГСМ. В этой системе единиц (в которой для пустоты $\epsilon = 1$, $\mu = 1$) мы будем писать все теоретические формулы и выкладки. При переходе к практическим применениям мы будем выражать, конечно, все величины в практических единицах.

Уравнения (I—VIII) и обобщение последних на случай анизотропной среды должны быть получены как результат усреднения микроэлектромагнитных явлений, протекающих в атомах и межатомных пространствах данного тела. Последовательное проведение этой точки зрения должно рассматривать величины, входящие в уравнения (I—IV), как средние значения величин, характеризующих эти микропроцессы, и отсюда вывести как сами уравнения (I—IV) так и связи между усредненными векторами, т. е. уравнения типа (VI—VIII), давая теоретическое объяснение величинам ϵ , μ , σ или соответственным тензорам из структуры самих атомов и их относительного расположения в пространстве. Формальная сторона этого процесса до известной степени выполнена в электронной теории Лоренца; но окончательное проведение этой программы упирается в трудности, обусловленные не только тем, что структура атомов и законы,

* Или еще более сложные соотношения, как например, в электромагнитной теории света в телах, вращающих плоскость поляризации.

управляющие движениями составляющих их зарядов, недостаточно известны, но и тем обстоятельством, что в этой теории основные положения о взаимодействии электромагнитного поля и зарядов (электронов и протонов) являются лишь специализацией соотношений, выраженных в уравнениях (I—VIII). На самом деле, как мы указывали выше, эти соотношения получены из опыта и подтверждены в своих отдаленных следствиях практикой макроскопических явлений; действительные же соотношения, имеющие место в микроскопических явлениях, требуют введения совершенно новых понятий, пад установлением которых наука работает на многообещающих путях теории квантов.

ОДНОРОДНОСТЬ ГОРНЫХ ПОРОД С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ

В электроразведке мы также встречаемся с вопросом об усреднении. Действительно, из сред, с которыми мы имеем дело, лишь только воздух и вода, заполняющая открытые или подземные водоемы, могут считаться физически достаточно однородными, все же горные породы и наносы состоят из массы мелких кристаллических частей, между которыми находятся поры, заполненные воздухом и в большей или меньшей степени влагой, т. е. раствором различных веществ в воде (иногда таким пропитывающим веществом может являться нефть). Степень дисперсности (мелкозернистости) подобных образований может быть весьма различна — от едва видимой в микроскоп до крупной (валунные отложения, осыпи). Чередование таких, в электрическом отношении разнородных образований может иметь пространственную правильность — сланцеватость самой породы или мощная свита повторяющихся более или менее правильно напластований различных пород. Эти обстоятельства во всех своих деталях трудно поддаются теоретическому учету и в этом направлении сделано весьма мало.

При оценке значения этих обстоятельств для математической теории электромагнитных полей, с которыми мы имеем дело в электроразведке, нужно иметь в виду опять-таки масштабы, в которых протекают измерения. Мелкокристаллический агрегат, представляющий горную породу или нанос (песок, глина, почвенный слой и т. п.), хотя и состоит из отдельных анизотропных зерен, все же благодаря беспорядочной их ориентации, уже в масштабе, превосходящем в несколько десятков раз размер отдельного зерна, окажется изотропным, с некоторыми средними значениями электрических свойств. Для методов электроразведки, оперирующих с размерами полей порядка километров, где измерения выполняются в точках, отстоящих на десятки (в редких случаях единицы) метров друг от друга — осыпь из отдельных с линейными размерами порядка метра также будет достаточно однородна. Но зато сланцеватость, выдержанная на большой мощности (сравнимой с размерами промеряемого поля) даст эффект анизотропии и может нас заставить при описании электромагнитного поля ввести в теорию соотношения типа (IX). При более или менее правильно чередующемся напластовании электри-

чески дифференцированных пород, мы можем иметь в достаточно большом масштабе лишь суммарный эффект анизотропии, а при достаточно мелкой сети точек наблюдения по отношению к мощности самих пластов — каждый может выступить в отдельности как однородный участок среды.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Математическая трактовка неоднородных сред, т. е. таких, в которых ϵ , μ , σ меняются от точки к точке, даже если, согласно масштабам проблемы, рассматриваются лишь средние значения, — представляется весьма сложной задачей, и решение ее мало дает для практики, так как для каждого конкретного случая требуется особое рассмотрение, и общего решения даже типичных задач, по-видимому, дать нельзя. Но во многих случаях можно ограничиться предположением, что неоднородность среды заключается в соприкосновении участков пространства, заполненных средами, однородными внутри участка, но различными между собой. Конечно, математически точных границ не существует, но если переходные слои, в которых происходит изменение констант от значений, имеющих место в одной среде, к тем значениям, которые характерны для другой, очень малы по толщине по сравнению с размерами самих объектов и с масштабом исследований, то такая абстракция, сильно упрощая математическую трактовку, достаточно близко будет соответствовать действительности. При этом рассмотрение сложных процессов, происходящих в неоднородных переходных слоях, путем перехода к пределу заменяется граничными условиями, которые могут быть сформулированы весьма просто. Как известно из электродинамики, эти условия сводятся к требованию непрерывности нормальной к поверхности раздела составляющей \mathbf{B} и тангенциальных составляющих \mathbf{E}^* и \mathbf{H} . Нормальные составляющие \mathbf{E} не непрерывны, а имеют разное значение по обе стороны поверхности раздела.

Обозначая одну среду индексом 1 и другую — 2, направим нормаль из среды 1 в 2, обозначая это направление символом n_{12} , и введем два взаимно перпендикулярных направления t и t' в плоскости, касательной к поверхности раздела (рис. 1). Тогда указанные выше граничные условия можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} B_{n_{12}}^{(1)} &= B_{n_{12}}^{(2)}; & E_t^{(1)} &= E_t^{(2)}; & E_{t'}^{(1)} &= E_{t'}^{(2)}; \\ H_t^{(1)} &= H_t^{(2)}; & H_{t'}^{(1)} &= H_{t'}^{(2)}. \end{aligned} \quad (X)$$

* При наличии контактных э. д. с. это условие видоизменяется.

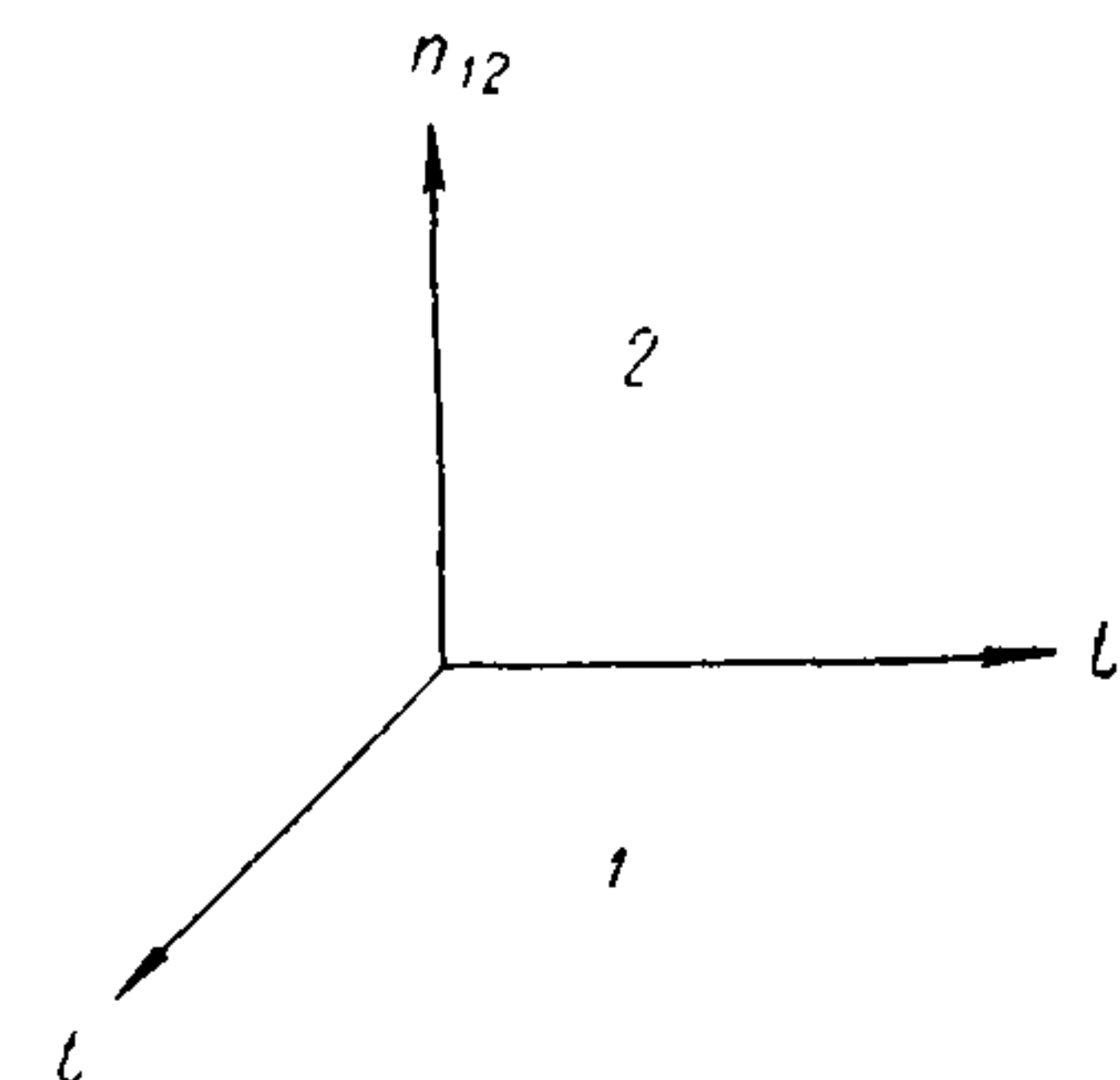
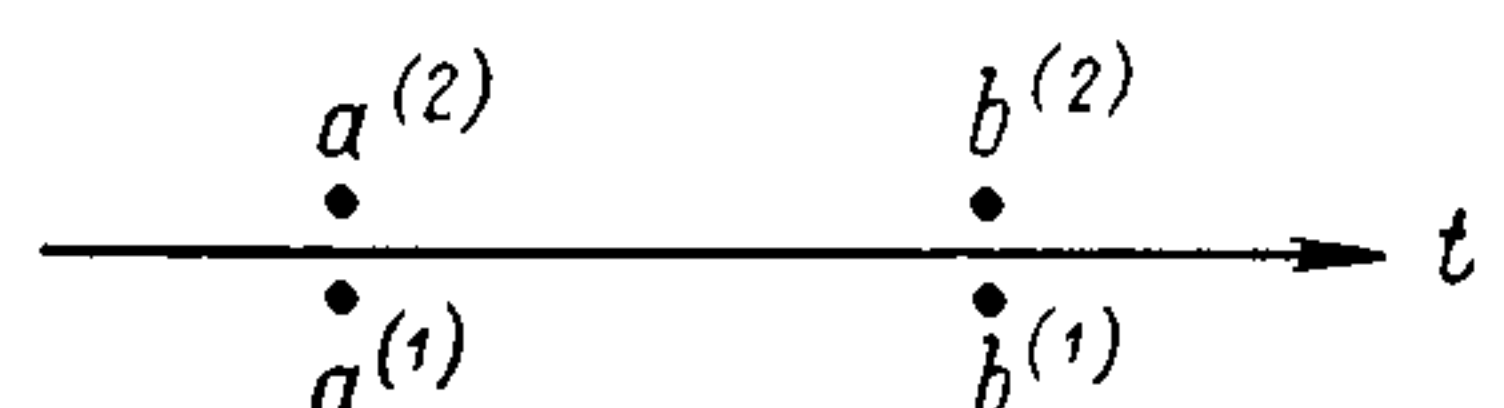


Рис. 1.

Заметим, что если какая-нибудь величина непрерывна при переходе через границу, то и ее производные по любому тангенциальному направлению (тангенциальные составляющие ее градиента) также непрерывны. Действительно, если в точках $a^{(1)}$ и $a^{(2)}$ (рис. 2), бесконечно близких, но лежащих по разную сторону поверхности раздела, какая-нибудь величина ψ имеет одно и то же значение, и то же самое относится к точкам $b^{(1)}$ и $b^{(2)}$, то

$$\psi(b^{(1)}) - \psi(a^{(1)}) = \psi(b^{(2)}) - \psi(a^{(2)}).$$

Разделив обе части этого равенства на расстояние точек a и b и перейдя к пределу $(ab) \rightarrow 0$, получим производные от ψ в данной точке по касательному направлению, которые и окажутся равными друг другу. Таким образом,



$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^{(1)} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^{(2)}, \quad (1)$$

Рис. 2. а так как направление t можно взять произвольным в касательной плоскости, то это будет иметь место для любого касательного направления.

Что касается нормальных составляющих \mathbf{D} , то, как известно [и может быть выведено из уравнения (II)],

$$D_{n_{12}}^{(2)} - D_{n_{12}}^{(1)} = \eta, \quad (XI)$$

где η — поверхностная плотность заряда.

Из уравнения (I) получаем

$$\dot{D}_{n_{12}}^{(2)} - \dot{D}_{n_{12}}^{(1)} = - (J_{n_{12}}^{(2)} - J_{n_{12}}^{(1)}) + \frac{c}{4\pi} [(\text{rot } \mathbf{H})_{n_{12}}^{(2)} - (\text{rot } \mathbf{H})_{n_{12}}^{(1)}]. \quad (2)$$

При обозначении осей координат, согласно рис. 1, мы имеем

$$(\text{rot } \mathbf{H})_{n_{12}} = \frac{\partial H_{t'}}{\partial t} - \frac{\partial H_t}{\partial t'}$$

и, согласно граничным условиям (X) и формуле (1), заключаем, что эта величина должна быть непрерывна при переходе через поверхность, так что последний член формулы (2) равен нулю. Сопоставляя уравнение (XI), продифференцированное по времени, с формулой (2), получаем

$$\dot{\eta} = - (J_{n_{12}}^{(2)} - J_{n_{12}}^{(1)}). \quad (3)$$

Отсюда видно, что скачок нормальной составляющей \mathbf{D} не только не равен нулю (XI), но может изменяться с течением времени в зависимости от распределения тока. Уравнение (3) по смыслу есть уравнение (V), специализированное для случая поверхностных зарядов. Если обе соприкасающиеся среды — изоляторы ($\sigma = 0$), то, конечно, поверхностная плотность меняться со временем не может, так как по обе стороны ток будет равняться нулю. Только в этом случае, и считая η известным и наперед заданным, можно предписать значе-

ние скачка нормальной составляющей \mathbf{D} , а стало быть и \mathbf{E} ; вообще же гоноря, значение этого скачка, т. е. величина поверхностной плотности, получится как результат решения всей задачи.

ЭЛЕКТРОДВИЖУЩИЕ СИЛЫ

Уравнения связи (VI—VIII) не учитывают активной роли среды в создании электромагнитного поля и нуждаются в некотором дополнении. Как известно, мы можем получить в замкнутой цепи ток без видимого участия каких-либо внешних источников, чему является примером любая цепь, содержащая гальванический элемент или аккумуляторную батарею. Это явление математически учитывается введением понятия электродвижущей силы. Физические причины появления электродвижущей силы — это физические и химические процессы, идущие в разных участках цепи и связанные с наличием градиента концентрации носителей зарядов (ионов в растворах или электронов в металлах). В условиях, которые мы встречаем в земной коре, подобные обстоятельства всегда имеют место: процессы выщелачивания горных пород идут все время, влага, пропитывающая породы, представляет собой растворы различных солей, в зависимости от состава породы. Там, где происходят процессы окисления сульфидных руд, следует ожидать особенно энергичных электрохимических (связанных с появлением ионов) реакций, что и наблюдается в действительности; на этом явлении основан один из методов электроразведки (метод естественного поля).

В тех случаях, когда перемещение носителей тока (ионов и электронов) обуславливается не только электрическим полем, но и другими причинами (например диффузией при неравномерной концентрации), мы характеризуем эти причины вектором объемной электродвижущей силы \mathbf{E}^e , так что для изотропной среды мы имеем

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^e). \quad (VIIIa)$$

Если имеется физическое основание считать, что электродвижущая сила сосредоточена около какой-нибудь поверхности раздела двух сред, то для математической трактовки удобно перейти к пределу бесконечно тонкого слоя, в котором сосредоточена электродвижущая сила, вводя таким образом понятие электродвижущей силы контакта. Так как градиент свойств (концентраций и т. п.) в тонком переходном слое между двумя однородными средами направлен по нормали, то мы положим, что внутри переходного слоя \mathbf{E}^e имеет направление нормали, так что, вводя единичный вектор (орт) нормали \mathbf{n}_{12} , имеем

$$\mathbf{E}^e = \mathbf{n}_{12} E^e, \quad (4)$$

где E^e может быть положительно или отрицательно, в зависимости от того, совпадает ли направление \mathbf{E}^e с выбранным направлением нормали, или прямо ему противоположно.

Под контактной электродвижущей силой в таком случае понимают величину

$$\mathcal{E}_{12} = \int_a^b E^e dn, \quad (5)$$

где интеграл взят по пути ab между двумя точками, лежащими по обе стороны переходного слоя в области однородных сред 1 и 2 соответственно (рис. 3). Если толщина этого слоя будет стремиться к нулю, то для того чтобы \mathcal{E} не обратилось в нуль, нам нужно будет считать в пределе E^e стремящимся к бесконечности так, чтобы \mathcal{E} осталось конечным. Объемные и поверхностные (контактные) электродвижущие силы — величины разной размерности; как видно из формул (VIIIa) и (5) E^e имеет размерность одинаковую с напряжением электрического поля, а \mathcal{E} — линейного интеграла этого поля,

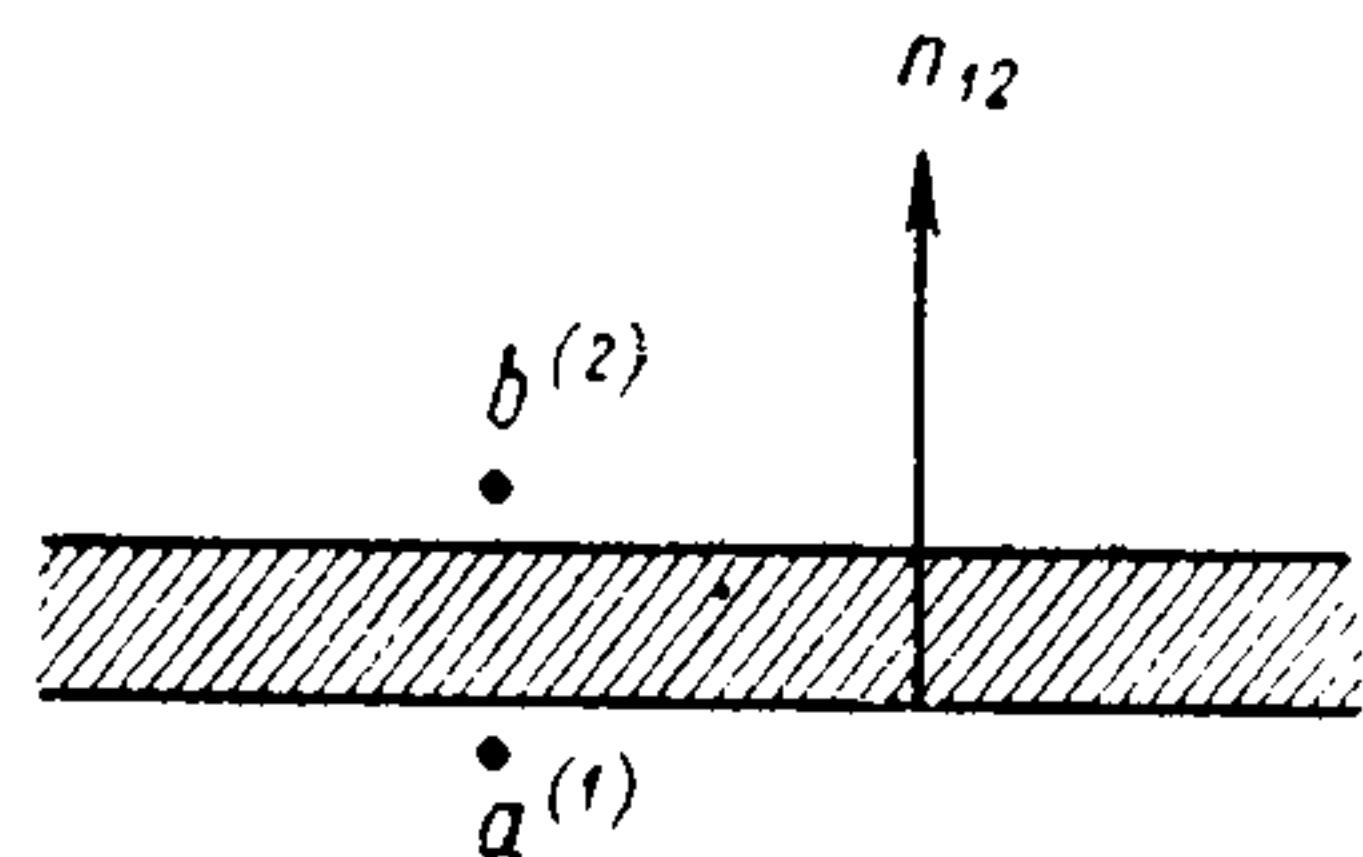


Рис. 3.

т. е. разности потенциалов. Напомним, что условия, создающие электродвижущую силу, могут быть не только присущи самим соприкасающимся веществам, но и создаваться прохождением тока через контакт. Таким образом, в цепи, в которой действуют постоянные во времени источники тока, могут появиться и изменяться со временем добавочные электродвижущие силы; вследствие этого режим тока

уже не будет постоянным. Эти переменные электродвижущие силы поляризации могут сильно повлиять на измерения, производимые в методах, пользующихся постоянным током, и приходится заботиться об их устранении (неполяризующиеся электроды). Так как их образование и нарастание до заметной величины требует некоторого времени, то при пользовании переменным током достаточно большой частоты (практически 50 периодов и выше) с поляризацией можно не считаться.

Электродвижущие силы могут быть вызваны также и механическими процессами, происходящими в данном объеме; из них в последнее время для электроразведки особенно интересными стали электродвижущие силы, возникающие при фильтрации, т. е. медленном просачивании жидкости (почвенной воды) сквозь пористую породу.

Глава I

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАДАЧ С ПОСТОЯННЫМ ТОКОМ

Специализируя уравнения системы (I—IV) на случай постоянного, независящего от времени, поля, мы должны положить равными нулю все производные по времени. Основные уравнения для постоянного поля будут

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}; \\ \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_e; \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII})$$

Так как \mathbf{D} и \mathbf{E} связаны соотношением (VI) или (IX), то в данном случае задача распадается на две: нахождение решения для электрического поля из уравнения (XII), что даст возможность вычислить распределение тока по (VIII); после того как ток вычислен, можно вычислять магнитное поле по уравнениям (XII). Уравнения (XII) имеют очень важное следствие: раз вихрь \mathbf{E} равен нулю, то само \mathbf{E} должно быть градиентом некоторой скалярной величины, функции от координат. Поэтому во всех задачах определение электрического поля сводится к разысканию скалярной функции φ , которую называют потенциалом, связывая ее с \mathbf{E} уравнением

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \quad (\text{XIII})$$

Для определения этой неизвестной функции мы подставляем (XIII) в уравнение (XII), имея в виду, что (для изотропной среды)

$$\mathbf{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathbf{E}.$$

По правилам векторного анализа получается

$$\frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \varepsilon \operatorname{grad} \varphi = \frac{\varepsilon}{4\pi} \Delta \varphi + \frac{1}{4\pi} (\operatorname{grad} \varepsilon \operatorname{grad} \varphi) = -\rho_e. \quad (6)$$

Для однородной среды, где ε не зависит от координат, мы получаем при

$$\operatorname{grad} \varepsilon = 0; \quad (7)$$

$$\Delta \varphi = -\frac{4\pi \rho_e}{\varepsilon}, \quad (8)$$

т. е. уравнение Пуассона, которое, при отсутствии объемного заряда, т. е. при

$$\rho_e = 0,$$

сводится к уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0. \quad (9)$$

В изолирующей среде ρ_e может быть задано произвольно, и тогда потенциал можно определять из уравнений (8) или (9) и граничных условий; если же у нас имеется проводящая среда, т. е. $\sigma \neq 0$, то дифференциальное уравнение для φ мы получим следующим образом. Обратимся к уравнению (V), которое, при условии равенства нулю производных по времени, даст нам

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (10)$$

Это уравнение выражает первый закон Кирхгофа в дифференциальном виде, так как, взяв интеграл по некоторому объему τ , мы получим по теореме Гаусса

$$\int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{J} d\tau = \int_s J_n dS = 0, \quad (11)$$

что обозначает, конечно, что алгебраическая сумма токов, вытекающих из любого объема, должна равняться нулю. Как известно,

отсюда получается следствие, что вдоль трубки сила тока остается постоянной

$$\int J_n dS = I = \text{const.}$$

если интеграл взят по любому сечению трубки.

Уравнение (11) должно иметь место и в случае присутствия электродвижущих сил, так как если сумма токов, вытекающих из некоторого объема, не равнялась бы нулю, то менялся бы со временем заряд, заключенный внутри этого объема, а это в свою очередь повлекло бы изменение электрического поля, и поле не могло бы быть постоянным.

Обращаясь к уравнению (10), подставим в него полное выражение для плотности тока (VIIIa)

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}^e) = -\sigma \text{grad } \varphi + \sigma \mathbf{E}^e. \quad (12)$$

Получается

$$-\sigma \Delta \varphi - (\text{grad } \sigma \text{ grad } \varphi) + (\mathbf{E}^e \text{ grad } \sigma) + \sigma \text{div } \mathbf{E}^e = 0. \quad (13)$$

Сравнение этого уравнения, разрешенного относительно $\Delta \varphi$ с уравнением (6), также разрешенным относительно $\Delta \varphi$, даст сложное соотношение

$$-\frac{4\pi\rho_e}{\epsilon} - \frac{(\text{grad } \epsilon \text{ grad } \varphi)}{\epsilon} = -\frac{(\text{grad } \sigma \text{ grad } \varphi)}{\sigma} + \left(\frac{\text{grad } \sigma}{\sigma} \mathbf{E}^e\right) + \text{div } \mathbf{E}^e, \quad (14)$$

которое показывает, что, решив уравнение (13), мы получим распределение потенциала при данном распределении электропроводности и электродвижущих сил, а затем уже из (14) можем определить распределение объемной плотности электричества. Нас интересует случай однородной среды; здесь мы можем положить $\text{grad } \epsilon$ и $\text{grad } \sigma$ равными нулю, а также предположить отсутствие объемных электродвижущих сил. В таком случае мы имеем из (13) $\Delta \varphi = 0$, а из (14) — $\rho_e = 0$. Таким образом, получаем, что при режиме постоянного тока в однородной среде объемных зарядов нет, а потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа.

§ 2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Переходим теперь к рассмотрению граничных условий. Из уравнения (3) получаем для постоянного поля

$$J_{n12}^{(1)} = J_{n12}^{(2)}, \quad (15)$$

т. е. непрерывность нормальной составляющей вектора плотности тока.

Отсюда следует, что на границе с изолятором нормальная составляющая вектора плотности тока исчезает, т. е. ток течет параллельно поверхности. Для потенциала условие (15) можно написать в таком виде:

$$\sigma^{(1)} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial n} = \sigma^{(2)} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n}, \quad (16)$$

а на границе с изолятором внутри проводника должно иметь место условие $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$.

При отсутствии электродвижущих сил требование непрерывности тангенциальных составляющих \mathbf{E} удовлетворяется, согласно замечанию, сделанному в введении,

$$\varphi^{(1)} = \varphi^{(2)} \quad (17)$$

в точках поверхности раздела двух сред, т. е. что потенциал непрерывен.

В случае контактных электродвижущих сил мы это условие должны заменить другим. Рассмотрим очень тонкую трубку тока, пропизывающую переходный слой (рис. 4). Сила тока во всей ее длине постоянна и равна (при достаточно малом сечении)

$$dI = J ds,$$

где ds — площадь сечения, перпендикулярного к оси трубки; J — абсолютное значение плотности тока.

Обозначим через l направление оси трубки, тогда

$$J = J_l = \sigma(\mathbf{E}_l + \mathbf{E}_l^e)$$

или

$$\frac{J_l}{\sigma} = \mathbf{E}_l + \mathbf{E}_l^e.$$

Возьмем линейный интеграл правой и левой части этого уравнения вдоль оси трубки от a до b через переходный слой, подставив слева

$$\frac{J_l}{\sigma} = \frac{J_l dS}{\sigma dS} = \frac{dI}{\sigma dS},$$

получим

$$dI \int_a^b \frac{dl}{\sigma dS} = \int_a^b \mathbf{E}_l dl + \int_a^b \mathbf{E}_l^e dl, \quad (18)$$

где dI как величина постоянная вдоль трубки вынесена за знак интеграла.

Величина

$$\frac{dl}{\sigma dS} = r_{ab}$$

есть сопротивление отрезка трубки длиной dl , а весь интеграл в левой части есть сопротивление трубки от a до b ; в правой части мы имеем, в силу

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi,$$

$$\int_a^b \mathbf{E}_l dl = \varphi_a - \varphi_b. \quad (19)$$

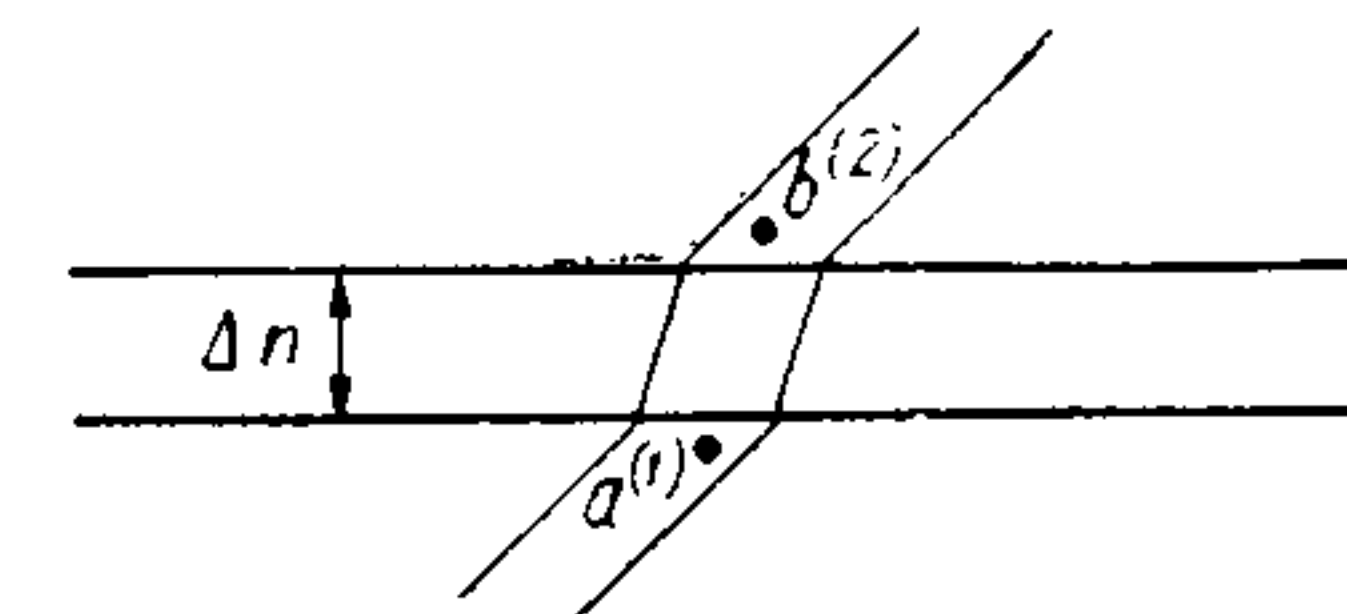


Рис. 4.

Во втором интеграле справа предположим, что E^e имеет направление нормали, тогда

$$E_i^e dl = E^e \cos(n, l) dl = E^e dn.$$

Если имеется отличная от нуля электродвижущая сила контакта то, переходя к пределу бесконечно тонкого переходного слоя, мы согласно определению, данному во введении (5), получаем для второго интеграла

$$\int_a^b E^e dn = \mathcal{E}_{12}. \quad (20)$$

С другой стороны, предполагая, что электропроводность в контактном слое остается конечной, мы при исчезающей длине ab будем иметь, что r_{ab} стремится к нулю. Поэтому получаем в пределе из (18), подставляя (19) и (20),

$$\varphi_a - \varphi_b + \mathcal{E}_{12} = 0, \quad (21)$$

т. е.

$$\mathcal{E}_{12} = \varphi_b - \varphi_a.$$

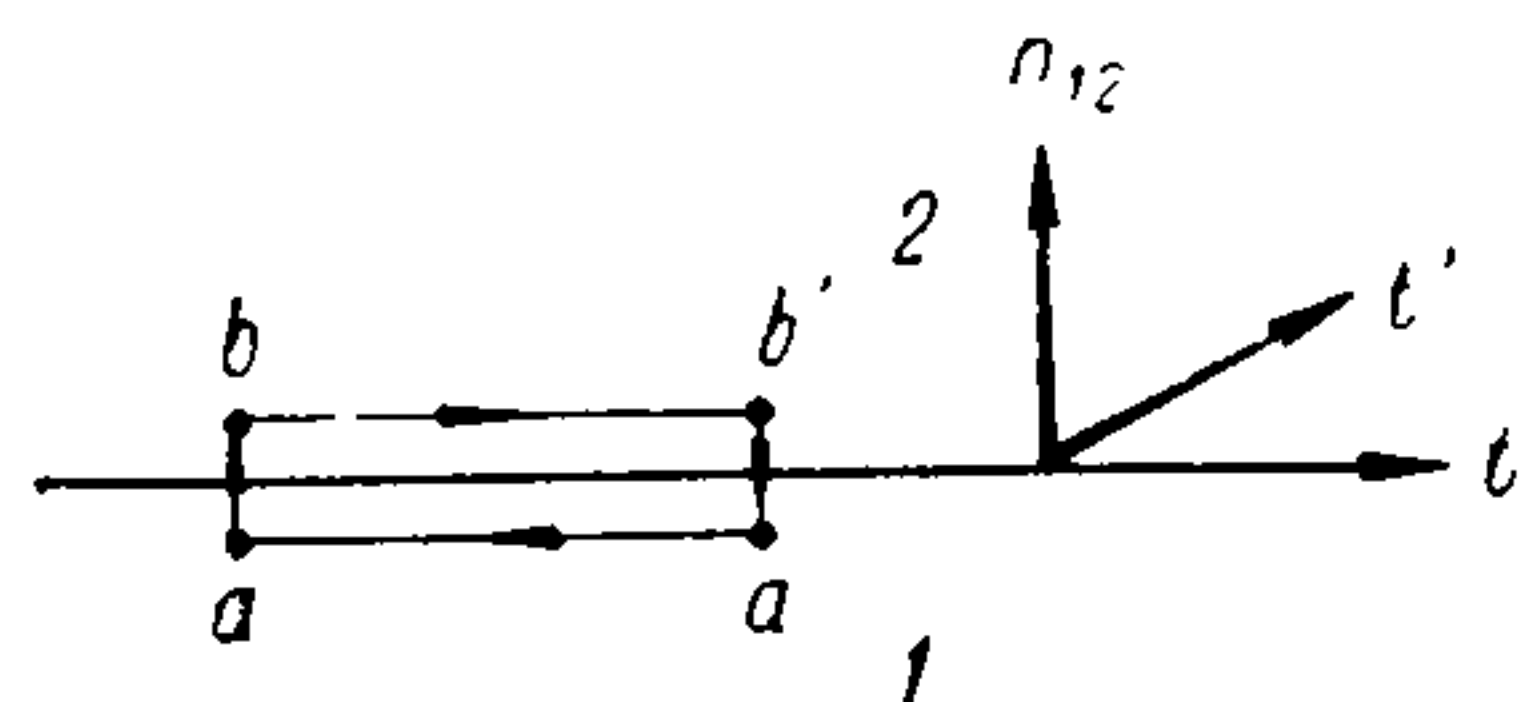


Рис. 5.

На контакте, обладающем электродвижущей силой, имеет место скачок потенциала, численно равный величине электродвижущей силы и обусловленный физическими (электрохимическими) процессами идущими в контактном слое.

В случае наличия контактной электродвижущей силы нужно также пересмотреть граничные условия для тангенциальных составляющих E . Эти условия, как известно, получаются из рассмотрения линейного интеграла E , взятого по контуру, проходящему от a' до a в первой среде (рис. 5), затем пронизывающему переходный слой от a к b , идущему от b до b' во второй среде, и снова пронизывающему границу раздела, от b' к a' .

$$\oint E_l dl = \int_{a'}^a E_t^{(1)} dt + \int_a^b E_{n_{12}} dn + \int_b^{b'} E_t^{(2)} dt + \int_{b'}^{a'} E_{n_{12}} dn.$$

Полагаем, что контур достаточно мал, чтобы считать $E_t^{(1)}$ и $E_t^{(2)}$ постоянными вдоль участков aa' и bb' соответственно.

Согласно предыдущим рассуждениям имеем

$$\int_a^b E_{n_{12}} dn = \varphi_a - \varphi_b = -\mathcal{E}'_{12}; \quad \int_{b'}^{a'} E_{n_{12}} dn = \varphi_{b'} - \varphi_{a'} = \mathcal{E}'_{12}$$

и получаем, принимая во внимание направления отдельных участков контура,

$$\oint E_l dl = (E_t^{(2)} - E_t^{(1)}) aa' + \mathcal{E}'_{12} - \mathcal{E}_{12}.$$

Так как точки a и a' близки, то, полагая, что \mathcal{E} меняется вдоль поверхности плавно, положим

$$\mathcal{E}' - \mathcal{E} = \frac{d\mathcal{E}}{dt} aa'.$$

Тогда

$$\oint E_l dl = aa' \left(E_t^{(2)} - E_t^{(1)} + \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right).$$

С другой стороны, применяя теорему Стокса к уравнению (III) мы получаем

$$\oint E_l dl = -\frac{1}{c} \int \dot{B}_t \cdot dS,$$

где t' — направление нормали к плоскости нашего контура.

Так как \dot{B} конечно (в статическом случае $\dot{B} = 0$), а площадь контура стремится к нулю, то правая часть для бесконечно тонкого переходного слоя равна нулю, и мы получаем результат

$$E_t^{(2)} - E_t^{(1)} + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = 0. \quad (22)$$

Непрерывность тангенциальных составляющих E имеет место только при постоянном значении \mathcal{E} вдоль поверхности (или при отсутствии \mathcal{E}).

§ 3. АНИЗОТРОПИЯ СЛОИСТОГО ПРОВОДНИКА

Применим дифференциальные уравнения и граничные условия к более детальному рассмотрению вопроса о средней анизотропии среды, создаваемой чередованием параллельных наслоений изотропных сред с различной электропроводностью. Пусть имеются (рис. 6) последовательные слои свиты с мощностями $d_1, d_2, \dots, d_k, d_{k+1}, \dots$ и электропроводностями $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, \dots$. Мы будем искать такое решение, при котором в каждом слое поле тока однородно ($J = \text{const}$), но направлено под разными углами к их общей нормали. Соответственно этому полагаем потенциал в пределах каждого слоя равным

$$\varphi_k = a_k x + b_k y + c_k z + f_k. \quad (23)$$

Это выражение удовлетворяет уравнению Лапласа, и остается связать коэффициенты a_k, b_k, c_k, f_k для разных слоев между собой, пользуясь граничными условиями. Коэффициенты a_k, b_k, c_k имеют следующий смысл:

$$a_k = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} = -E_x^k; \quad b_k = \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} = -E_y^k; \quad c_k = \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} = -E_z^k. \quad (24)$$

Если мы направим оси координат так, чтобы ось OZ была перпендикулярна к пластам, то E_x и E_y будут составляющими тангенциаль-

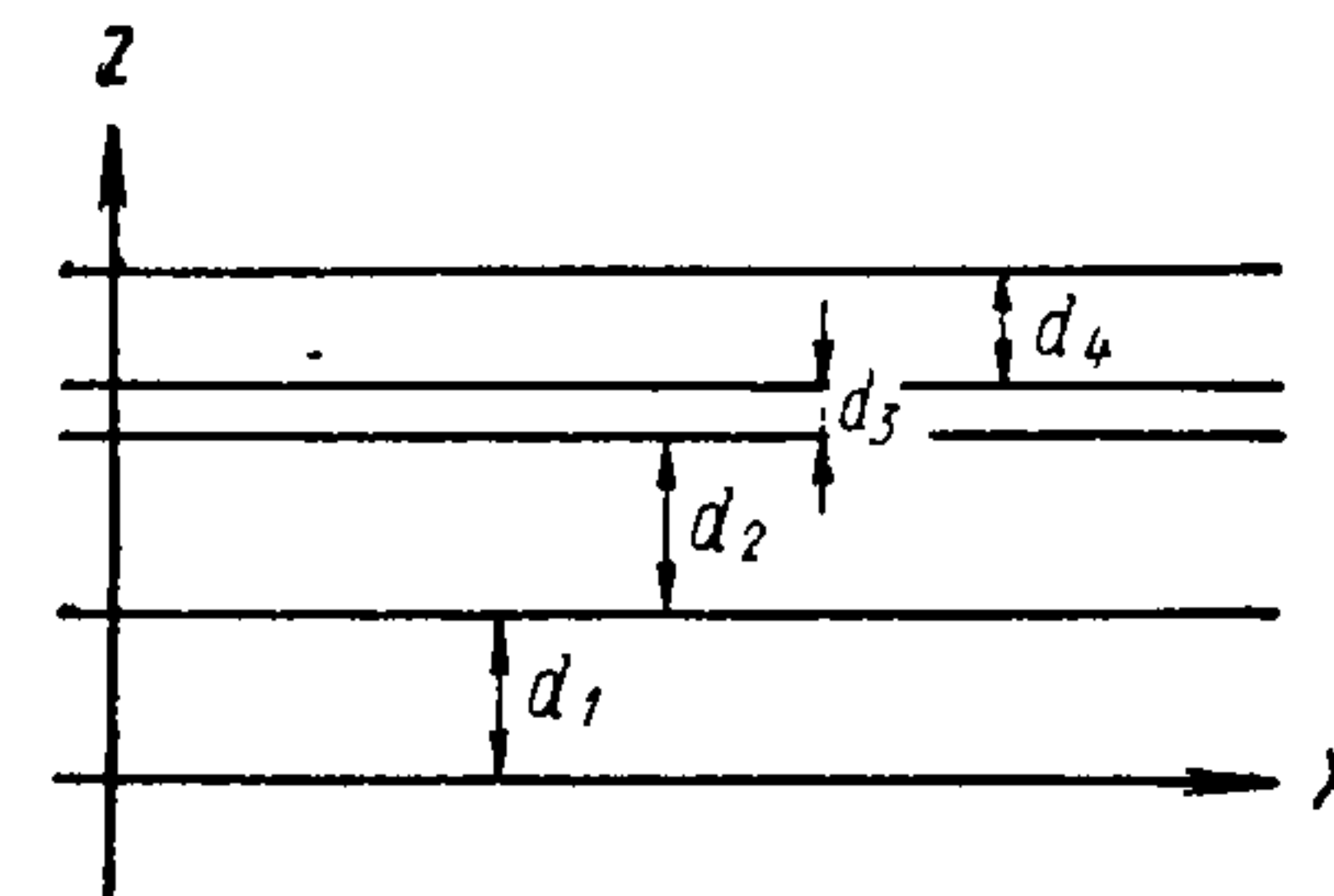


Рис. 6.

ными к поверхностям раздела, и должны быть непрерывны, т. е. одинаковы во всех слоях. Наоборот, условие непрерывности нормальной составляющей тока

$$J_z^k = -\sigma_k c_k = J_z^{k+1} = -\sigma_{k+1} c_{k+1}$$

требует, чтобы произведения из σ_k на c_k для всех значков k были одинаковы, т. е. $c_k = \frac{c}{\sigma_k}$, где c одинаково для всех слоев. Таким образом,

$$\varphi_k = ax + by + \frac{c}{\sigma_k} z + f_k. \quad (25)$$

Уравнение эквипотенциальной поверхности $\varphi = h$ в каждой среде будет иметь вид

$$ax + by + \frac{c}{\sigma_k} z = h - f_k, \quad (26)$$

и легко видеть, что вся эквипотенциальная поверхность будет составлена из плоских полосок, пересекающих две соседние поверхности раздела $z = z_{k, k+1}$ и $z = z_{k-1, k}$, по параллельным прямым

$$ax + by = h - f_k - \frac{c}{\sigma_k} z_{k, k+1};$$

$$ax + by = h - f_k - \frac{c}{\sigma_k} z_{k-1, k}.$$

Очевидно, можно повернуть систему координат в плоскости XOY вокруг оси OZ так, чтобы ось OY имела направление этих пересечений; тогда мы получим $b = 0$ и сможем написать

$$\varphi_k = ax + \frac{c}{\sigma_k} z + f_k. \quad (27)$$

Определим теперь постоянные f_k из условия непрерывности потенциала. При $z = z_{k, k+1}$, т. е. в поверхности раздела между слоями k и $k+1$ мы имеем

$$\varphi_k = ax + \frac{c}{\sigma_k} z_{k, k+1} + f_k;$$

$$\varphi_{k+1} = ax + \frac{c}{\sigma_{k+1}} z_{k, k+1} + f_{k+1}.$$

Приравнявая эти два выражения, получаем

$$f_{k+1} = f_k + cz_{k, k+1} \left(\frac{1}{\sigma_k} - \frac{1}{\sigma_{k+1}} \right).$$

Так как для следующей поверхности раздела должно иметь место подобное же уравнение

$$f_{k+2} = f_{k+1} + cz_{k+1, k+2} \left(\frac{1}{\sigma_{k+1}} - \frac{1}{\sigma_{k+2}} \right),$$

то

$$f_{k+2} = f_k + c \left\{ \frac{z_{k, k+1}}{\sigma_k} - \frac{z_{k, k+1}}{\sigma_{k+1}} + \frac{z_{k+1, k+2}}{\sigma_{k+1}} - \frac{z_{k+1, k+2}}{\sigma_{k+2}} \right\}$$

или, так как

$$z_{k+1, k+2} - z_{k, k+1} = d_{k+1},$$

$$f_{k+2} = f_k + c \left[\frac{z_{k, k+1}}{\sigma_k} + \frac{d_{k+1}}{\sigma_{k+1}} - \frac{z_{k+1, k+2}}{\sigma_{k+2}} \right].$$

Рассуждая таким же образом дальше, получим

$$f_{k+3} = f_k + c \left[\frac{z_{k, k+1}}{\sigma_k} + \frac{d_{k+1}}{\sigma_{k+1}} + \frac{d_{k+2}}{\sigma_{k+2}} - \frac{z_{k+2, k+3}}{\sigma_{k+3}} \right].$$

Полагая начало координат в границе между слоями с номерами 0, 1, будем иметь в общем виде (так как $z_{1,2} = d_1$)

$$f_m = f_1 + c \sum_1^{m-1} \frac{d_s}{\sigma_s} - c \frac{z_{m-1, m}}{\sigma_m} \quad (28)$$

где $m = 1, 2, \dots, k \dots$

Таким образом, окончательно

$$\varphi_k = ax + c \frac{(z - z_{k-1, k})}{\sigma_k} + c \sum_1^{k-1} \frac{d_s}{\sigma_s} + f_1. \quad (29)$$

Если мы возьмем за плоскость рисунка плоскость XOZ , то след эквипотенциальной поверхности $\varphi = h$ представит собой ломаную линию, состоящую из отрезков прямых

$$ax + \frac{c(z - z_{k-1, k})}{\sigma_k} = h - f_1 - c \sum_1^{k-1} \frac{d_s}{\sigma_s}.$$

От этого точного решения переходим теперь к средним значениям. Рассмотрим некоторую толщину D нашей среды, содержащую n слоев между N и $(N+n)$; величина

$$\frac{1}{D} \sum_N^{N+n} \frac{d_s}{\sigma_s} = \frac{1}{D} \sum_N^{N+n} d_s \rho_s = \bar{\rho}, \quad (30)$$

где ρ_s — удельное сопротивление s -го слоя, есть, очевидно, среднее удельное сопротивление этих n слоев, с учетом мощности каждого.

Предположим, что можно указать такую толщину D , которая мала по сравнению с обстоятельствами измерения, но достаточно велика, чтобы $\bar{\rho}$ получилось бы вполне определенным и независимым от N и n ; для этого, очевидно, необходимо, чтобы в среднем чередование слоев было бы достаточно однообразно; кроме того, n должно быть достаточно велико, чтобы среднее для толщины D получалось бы уже независимо от случайного распределения слоев в пределах D .

Если D^* есть какая-нибудь толщина, сравнимая с масштабом наблюдений, т. е. значительно большая, чем D , то мы ее можем представить в виде

$$D^* = mD + \xi D,$$

где m — большое целое число; ξ — дробь. Тогда взятая в пределах D^* сумма величин d_s/σ_s окажется равной

$$\sum_{(D^*)} \frac{d_s}{\sigma_s} = m \sum_{(D)} \frac{d_s}{\sigma_s} + \sum_{(\xi D)} \frac{d_s}{\sigma_s}.$$

Разделив ее на D^* , получим

$$\frac{1}{D^*} \sum_{D^*} \frac{d_s}{\sigma_s} = \frac{m D \bar{\rho} + \sum_{(\xi D)} \frac{d_s}{\sigma_s}}{mD + \xi D},$$

что приближенно можно приравнять $\bar{\rho}$, если m достаточно большое число.

Наши предположения о структуре среды, таким образом, формулируются так:

$$\frac{1}{D^*} \sum_{(D^*)} \frac{d_s}{\sigma_s} \approx \bar{\rho} \quad (31)$$

при любом $D^* > D$.

То же самое мы предположим относительно величины средней электропроводности

$$\frac{1}{D} \sum_N^{N+1} d_s \sigma_s = \bar{\sigma}, \quad (32)$$

полагая, что

$$\frac{1}{D^*} \sum_{(D^*)} d_s \sigma_s \approx \bar{\sigma}. \quad (33)$$

В таком случае мы имеем среду, «однородную в масштабе D », и наша задача состоит в том, чтобы показать, что в том же масштабе она окажется анизотропной.

В уравнении (29) мы можем написать приближенно

$$c \sum_1^{k-1} \frac{d_s}{\sigma_s} + c \frac{z - z_{k-1, k}}{\sigma_k} = cz \bar{\rho},$$

так как при сделанных предположениях величина

$$\frac{1}{z} \left[\sum_0^{k-1} \frac{d_s}{\sigma_s} + \frac{(z - z_{k-1, k})}{\sigma_k} \right]$$

будет мало отличаться от $\bar{\rho}$, если только z достаточно велико; таким образом, усредненное уравнение эквипотенциальной поверхности будет

$$\varphi = ax + c\bar{\rho}z + f_1 = h, \quad (34)$$

что представляет собой уравнение плоскости, которой, при сделанных предположениях, «в среднем» следует ломаная действительная эквипотенциальная поверхность; точки, лежащие на такой плоскости, будут иметь весьма близкие потенциалы при любом расстоянии между ними. Градиент этого усредненного потенциала будет представлять собою электрический вектор усредненного поля; его составляющие будут

$$\bar{E}_x = -a; \quad \bar{E}_y = 0; \quad \bar{E}_z = -c\bar{\rho},$$

среднее поле будет однородно и составлять с осями координат углы

$$\cos(\bar{E}, OX) = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2\bar{\rho}^2}}; \quad \cos(\bar{E}, OY) = 0;$$

$$\cos(\bar{E}, OZ) = -\frac{c\bar{\rho}}{\sqrt{a^2 + c^2\bar{\rho}^2}}.$$

С другой стороны, истинное направление линий тока в каждом слое дается формулами

$$J_x^k = \sigma_k E_x^k; \quad J_y^k = \sigma_k E_y^k; \quad J_z^k = \sigma_k E_z^k,$$

причем E^k имеет по (24) составляющие

$$E_x^k = -\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} = -a; \quad E_y^k = -\frac{\partial \varphi_k}{\partial y} = 0;$$

$$E_z^k = -\frac{\partial \varphi_k}{\partial z} = -\frac{c}{\sigma_k}.$$

Таким образом, получаем

$$J_x^k = -a\sigma_k; \quad J_y^k = 0; \quad J_z^k = -c. \quad (35)$$

Идя в обратном направлении линии тока, мы, пересекая слой k , будем перемещаться по оси OX на расстояние (рис. 7)

$$\Delta x_k = x_{k, k+1} - x_{k-1, k} = d_k \operatorname{tg} \beta^k = d_k \frac{J_x^k}{J_z^k} = d_k \sigma_k \frac{a}{c},$$

а по оси OZ на расстояние d_k .

После n слоев мы будем иметь, если начнем с точки

$$x = 0, \quad z = 0,$$

$$x = \sum_1^n \Delta x_n + (z - z_{n, n+1}) \frac{a}{c} \sigma_{n+1} = \frac{a}{c} \left[\sum_1^n d_s \sigma_s + (z - z_{n, n+1}) \sigma_{n+1} \right]$$

и, согласно сделанным предположениям, можем написать

$$\frac{1}{z} \left[\sum_0^n d_s \sigma_s + (z - z_{n, n+1}) \sigma_{n+1} \right] = \bar{\sigma},$$

если z (пройденная мощность) настолько велика, что среднее значение уже получается постоянным, не зависящим от z . Тогда уравнение усредненной линии тока получает вид

$$x = \frac{a}{c} \bar{\sigma} z. \quad (36)$$

Истинная токовая линия (ломаная) на всем своем протяжении мало отклоняется от этой прямой. Среднее распределение тока в масштабе D будет, следовательно, однородным (параллельные токовые линии). Средняя плотность тока по величине получится, если мы возьмем действительный ток, проходящий через квадратный сантиметр

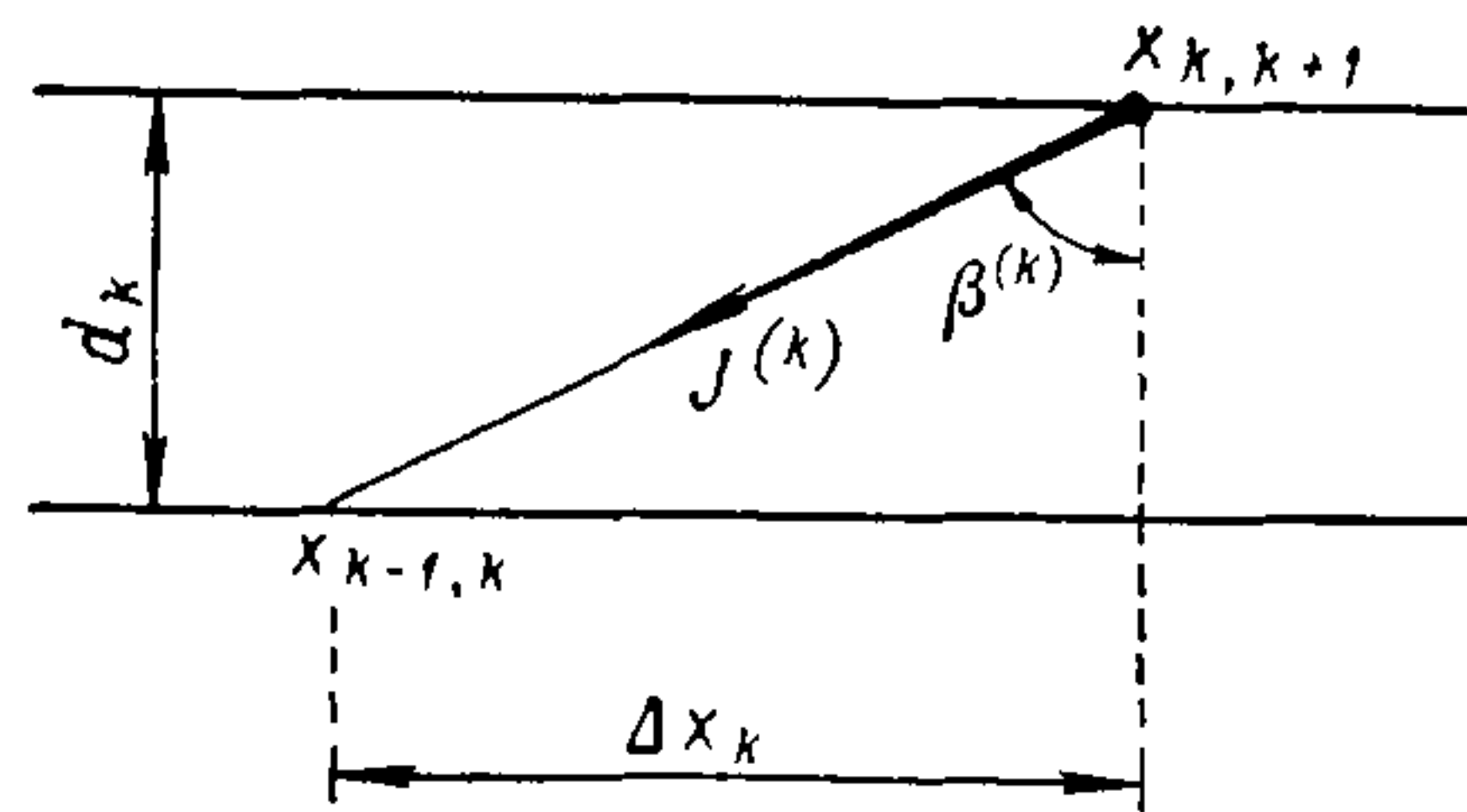


Рис. 7.

любой поверхности раздела, и разделим его величину на косинус угла между осью OZ и направлением среднего тока на основании соотношения $\bar{J}_z = \bar{J} \cos(\bar{J}, OZ)$.

Так как во всех слоях J_z одинаково и равно $-c$, то и $\bar{J}_z = -c$; что же касается углов, то из уравнения усредненной линии тока (36) мы имеем

$$\cos(\bar{J}, OX) = \frac{-\frac{a}{c} \bar{\sigma}}{\sqrt{\left(\frac{a}{c} \bar{\sigma}\right)^2 + 1}}; \quad \cos(\bar{J}, OZ) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a}{c} \bar{\sigma}\right)^2 + 1}}.$$

Отсюда

$$\bar{J} = c \sqrt{\left(\frac{a}{c} \bar{\sigma}\right)^2 + 1} \quad \text{и} \quad \bar{J}_x = -a \bar{\sigma}.$$

Сопоставляя полученные значения для составляющих усредненных \bar{E} и \bar{J} , получаем

$$\left. \begin{array}{l} \bar{E}_x = -a; \quad \bar{J}_x = -a \bar{\sigma}; \\ \bar{E}_z = -c \bar{\rho}; \quad \bar{J}_z = -c; \end{array} \right\} \text{откуда} \quad \left. \begin{array}{l} \bar{J}_x = \bar{\sigma} \bar{E}_x; \\ \bar{J}_z = \frac{1}{\bar{\rho}} \bar{E}_z. \end{array} \right\} \quad (37)$$

Последние два уравнения дают в явном виде связь между плотностью тока и электрическим полем (градиентом усредненного потенциала) и показывают, что мы имеем дело с анизотропной средой, так как $\bar{\sigma}$, вообще говоря, не равно $1/\bar{\rho}$. Направление тока состав-

ляет с направлением нормали к поверхностям постоянного усредненного потенциала угол, который легко можно рассчитать на основании уравнений (37).

Возьмем в качестве примера слоистую среду, состоящую из более или менее правильного чередования слоев с электропроводностями $\sigma_1 = 10^{-4}$ и $\sigma_2 = 10^{-6}$, причем первые составляют 93, а вторые 7% всей мощности*. Среднее удельное сопротивление будет

$$\bar{\rho} = 0,93 \cdot 10^4 + 0,07 \cdot 10^6 = 0,079 \cdot 10^6,$$

а средняя электропроводность

$$\bar{\sigma} = 0,93 \cdot 10^{-4} + 0,07 \cdot 10^{-6} = 0,93 \cdot 10^{-4}.$$

Если поле и ток направлены вдоль слоев, то

$$\bar{J}_x = \bar{\sigma} \bar{E}_x; \quad \bar{J}_z = 0; \quad \bar{E}_z = 0,$$

и среда имеет электропроводность $0,93 \cdot 10^{-4}$; если же поле и ток направлены поперек слоев, то

$$\begin{aligned} \bar{J}_x = 0; \quad \bar{E}_x = 0; \quad \bar{J}_z = \\ = \frac{1}{\bar{\rho}} \bar{E}_z = 0,126 \cdot 10^{-4} \bar{E}_z \end{aligned}$$

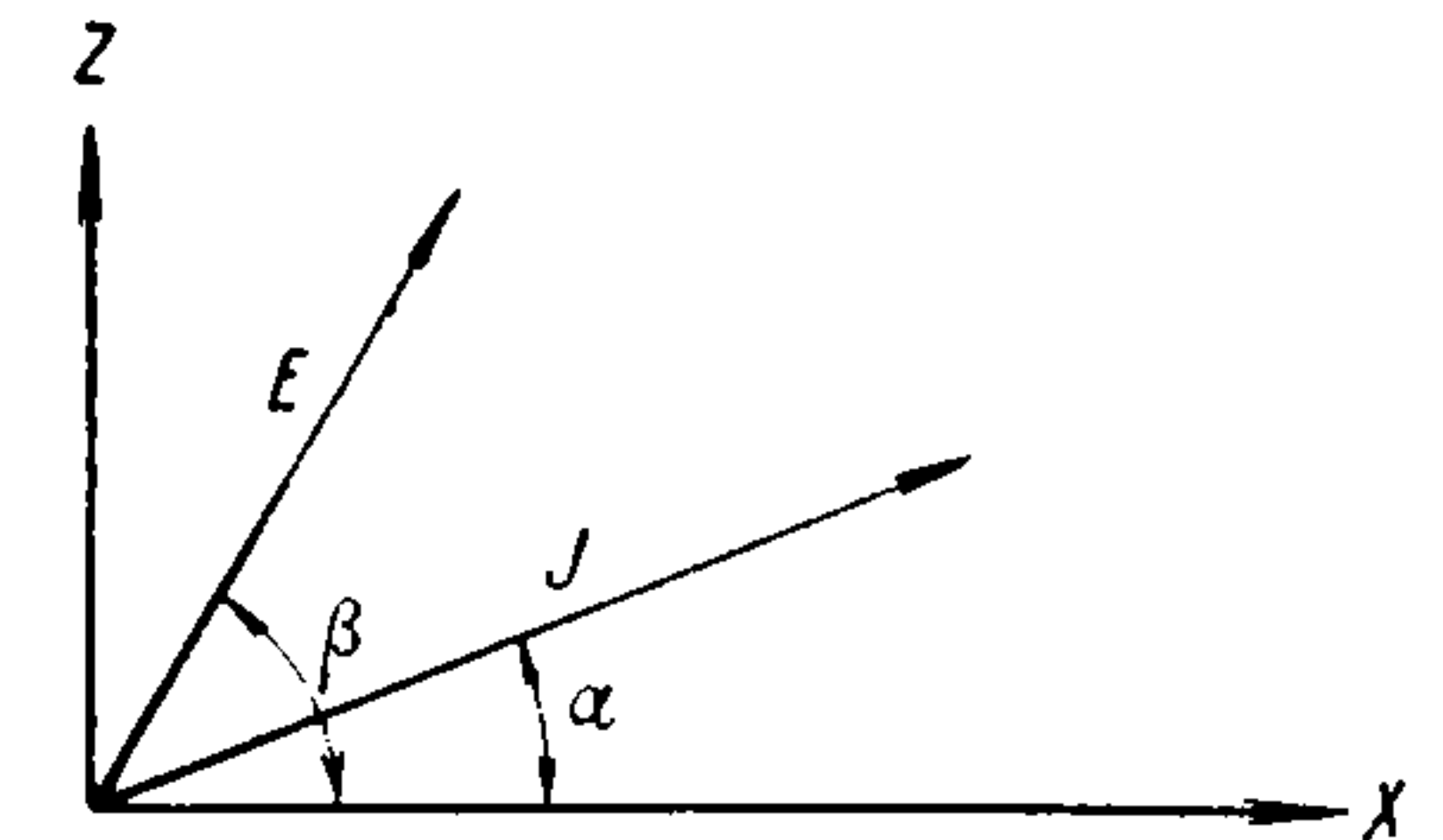


Рис. 8.

и эффективная электропроводность равна $0,126 \cdot 10^{-4}$, т. е. примерно в 7,5 раз меньше, чем в первом случае. В случае наклонного направления тока мы имеем

$$\bar{J}_x = 0,93 \cdot 10^{-4} \bar{E}_x; \quad \bar{J}_z = 0,126 \cdot 10^{-4} \bar{E}_z,$$

и если обозначим через α угол (\bar{J}, OX) , а через β угол (\bar{E}, OX) , то получим (рис. 8)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\bar{J}_z}{\bar{J}_x} = 0,135 \frac{\bar{E}_z}{\bar{E}_x} = 0,135 \operatorname{tg} \beta,$$

откуда, например, при $\beta = 45^\circ$ получим $\alpha \approx 8^\circ$.

§ 4. ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ЭЛЕКТРОДЫ. УЧЕТ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ЗЕМЛЯ — ВОЗДУХ

Во всех методах, пользующихся током, вводимым в землю от каких-либо источников, мы пользуемся заземлениями или питающими электродами. Эти заземления представляют собой голый провод, металлические кольца, шпильки, листы, к которым подводится ток от генератора и через поверхности которых он поступает в землю. Все эти предметы имеют металлическую электропроводность, т. е.

* Примерно такие соотношения по предварительным сведениям имеют место для одной из свит угольных пластов Кузбасса [σ дано в $(\text{ом} \cdot \text{см})^{-1}$].

превышающую электропроводность верхнего земного покрова во много раз. При той точности, которая нужна в электроразведочной практике, мы не сделаем большой ошибки, если пренебрежем теми разностями потенциалов, которые могут быть в разных точках проводника, служащего электродом, так как благодаря большой электропроводности его материала и сравнительно малым его размерам эти разности не могут быть велики. Это пренебрежение математически сводится к тому, что мы полагаем электропроводность материала электрода бесконечно большой, так как при $\lim \sigma = \infty$ должно быть $\lim |\text{grad } \varphi| = 0$, если плотность тока должна оставаться конечной. Поэтому мы в дальнейшем будем принимать, что потенциал металлических электродов постоянен (за исключением очень длинных и тонких электродов, на протяжении которых падение потенциала может оказаться заметным).

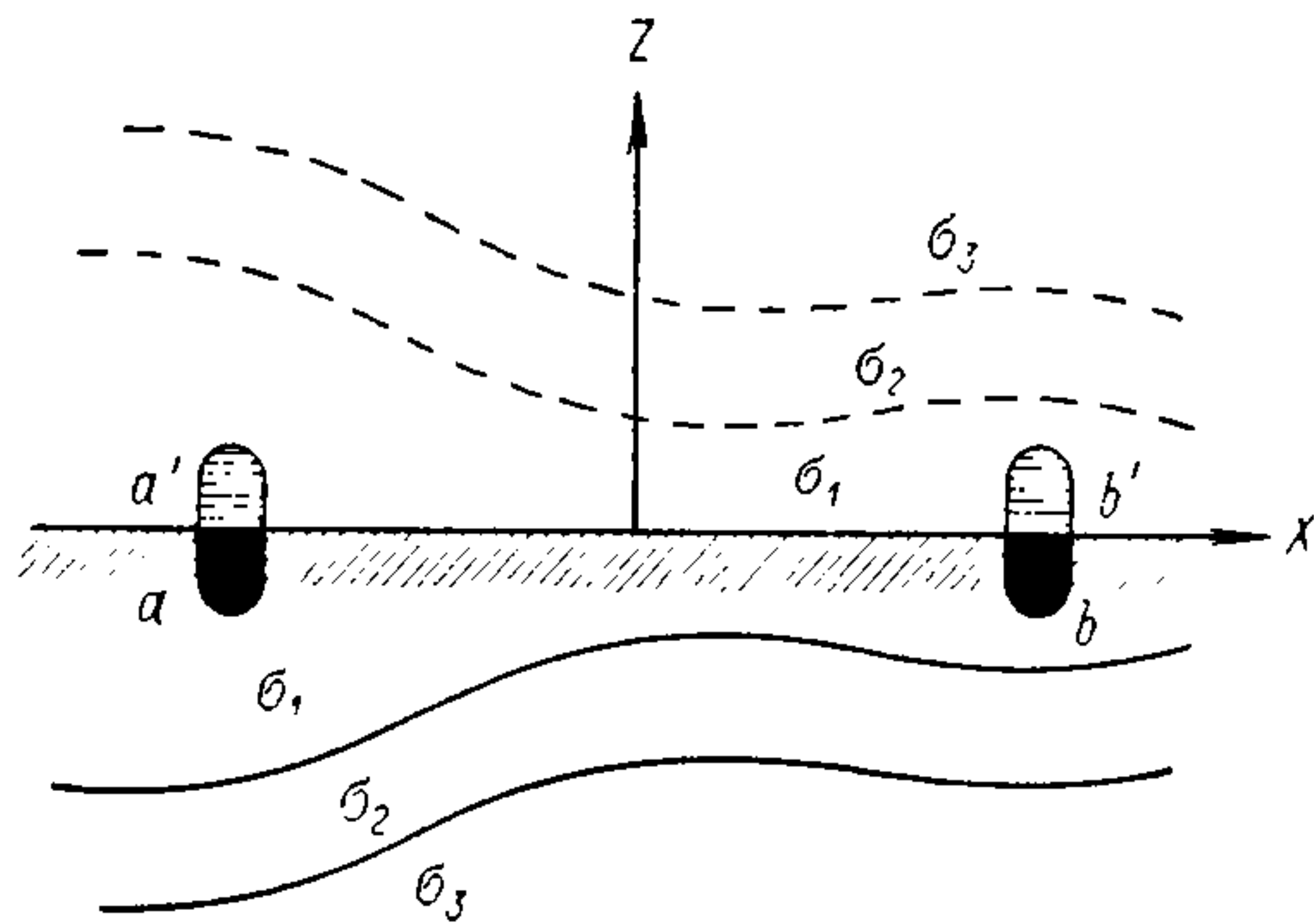


Рис. 9.

осуществляется проводом, подходящим к ним из воздушной среды. Граница между землей и воздухом автоматически учитывается следующим образом. Если мы представим себе поверхность земли плоской и вместо воздуха вообразим себе точное отражение в пространстве над землей всего того, что находится под землей, то мы будем иметь картину, в которой все источники тока, все распределение электропроводностей и все поверхности соприкосновения разных проводников, составляющих землю, будут распределены в пространстве совершенно симметрично по отношению к поверхности земли (рис. 9). Совершенно очевидно, что и распределение токов симметрично, т. е.

$$\left. \begin{aligned} J_z(x, y, z) &= -J_z(x, y, -z); \\ J_x(x, y, z) &= J_x(x, y, -z); \\ J_y(x, y, z) &= J_y(x, y, -z). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Но так как в точках плоскости симметрии (теперь уже не являющейся границей разнородных сред), очевидно,

$$J_z(x, y, 0) = -J_z(x, y, 0),$$

то отсюда и из первой строчки (38) следует, что

$$J_z(x, y, 0) = 0. \quad (39)$$

В электроразведке применяются электроды, опущенные в землю с поверхности или положенные на поверхность; подвод тока

Таким образом, можно сказать, что решение, верное для неограниченного пространства с симметричной структурой, будет верно и для любого из полупространств в отдельности, если другое заменить изолятором. Если через электроды a и b , опущенные в землю с поверхности, пропускается ток I , то нужно будет положить, что через дополненные зеркальным изображением электроды проходит ток $2I$. При этом мы можем не обращать внимания на то, как в действительности проходит питающий a и b кабель в воздухе, так что в этой вспомогательной картине мы считаем тела aa' и bb' положительными или отрицательными источниками тока. Это, правда, противоречит на первый взгляд основным уравнениям, действительно, если бы мы имели неограниченное проводящее пространство и в нем два эквипотенциальных электрода aa' и bb' , соединенных тонким и изолированным питающим кабелем, т. е. физически мыслимую обстановку, то распределение тока будет отличаться от такового в нашей условной картине только теми искажениями, которые получились бы от обтекания током тонкого кабеля; полный же ток, проходящий через поверхность, окружающую данный электрод и, конечно, пересекающую подводящий кабель, получится равным нулю, как это и должно быть. На частном примере, который вместе с тем может послужить упражнением в решении задач на объемное распределение тока, мы можем убедиться в том, что это искажение будет достаточно мало.

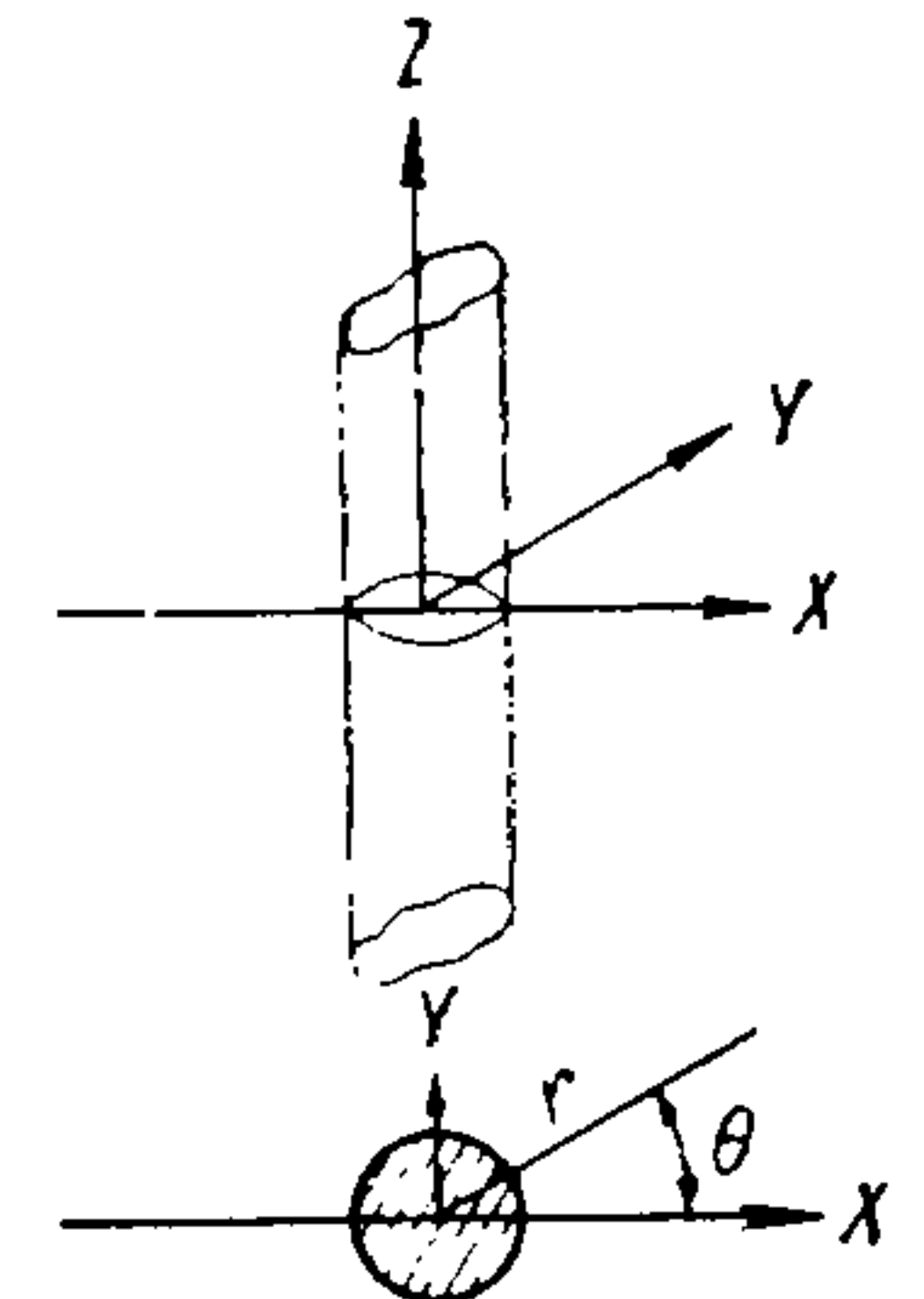


Рис. 10.

Предположим, что мы имеем бесконечную однородную среду и что в ней однородное поле тока, идущего по направлению оси Ox . В таком случае

$$I_x^{(0)} = J; \quad J_y^{(0)} = J_z = 0; \quad E_x^{(0)} = \frac{J}{\sigma}, \quad (40)$$

где J предполагается постоянным.

Потенциал можно положить равным

$$\varphi^{(0)} = -\frac{J}{\sigma} x, \quad (41)$$

проведя нулевую эквипотенциальную поверхность через точку

$$x = 0.$$

Наше $\varphi^{(0)}$ удовлетворяет уравнению Лапласа. Теперь предположим, что вокруг оси OZ из среды вырезан цилиндрический бесконечно длинный объем, с радиусом a , и заполнен изолятором. Распределение потенциала исказится, но на расстояниях, достаточно больших от оси OZ , очевидно, весьма мало; мы положим, что в пределе, при $r \rightarrow \infty$, потенциал изображается формулой (41), так что, полагая

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi_1, \quad (42)$$

мы будем искать поправку φ_1 как функцию, тоже удовлетворяющую уравнению Лапласа (так как если $\Delta\varphi = 0$, $\Delta\varphi^{(0)} = 0$, то и $\Delta\varphi_1 = 0$) и исчезающую в бесконечности. Нам удобно будет ввести в плоскости XOY полярные координаты

(рис. 10), причем на симметрии задачи видно, что φ_1 не будет зависеть от z . Так как $x = r \cos \theta$, то

$$\varphi = -\frac{J}{\sigma} r \cos \theta + \varphi_1(r, \theta). \quad (43)$$

Уравнение Лапласа для φ_1 в полярных координатах напишется, как известно, так:

$$\Delta \varphi_1 = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \theta^2} = 0. \quad (44)$$

Решая его методом разделения переменных, полагаем для нахождения частных решений $\varphi_1 = R(r) \Theta(\theta)$ и, подставляя в (44), получаем

$$\Theta \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = 0.$$

Разделив на φ_1/r^2 , имеем

$$\frac{r^2}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{\Theta} \cdot \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = 0.$$

Так как первый член зависит только от r , второй только от θ , а все уравнение должно иметь место при любых значениях r и θ , то каждый из них может равняться только постоянной, причем мы положим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\Theta} \cdot \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} &= -m^2; \\ \frac{r^2}{R} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dR}{dr} \right) &= m^2, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

где m — неопределенное число.

Решение первого уравнения хорошо известно

$$\Theta = A \cos m \theta + B \sin m \theta. \quad (46)$$

По условиям задачи нужно, чтобы $\Theta(\theta) = \Theta(-\theta)$, так как по обе стороны прямой OX явление симметрично*. Кроме того, нужно, чтобы решение было однозначным, т. е. чтобы Θ при приращении θ на 2π принимало прежнее значение. Этими двумя требованиями решение (46) сводится к

$$\Theta = A \cos m \theta \quad (m=0, 1, 2, \dots \text{целые числа}). \quad (47)$$

Выбрав какое-нибудь значение m , решаем теперь второе уравнение (45), которое напишем так:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dR}{dr} - \frac{m^2}{r^2} R = 0. \quad (48)$$

Введем новую переменную

$$\xi = \ln r, \quad r = e^\xi$$

* В отличие от совершенно аналогичной задачи гидродинамики там не приходится оставлять неопределенной циркуляцию J , которая связана с возможностью многозначного потенциала. Циркуляция E в постоянном электрическом поле всегда равна нулю и потенциал однозначен. Циркуляция J возможна (в любой замкнутой гальванической цепи), но тогда она обусловлена наличием электродвижущих сил, наличие которых в данной задаче не предполагается.

и обозначим $R(r) = u(\xi)$. Тогда

$$\frac{dR}{dr} = \frac{du}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dr} = \frac{du}{dr} = e^{-\xi} \frac{du}{d\xi};$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} = \left(-e^{-\xi} \frac{du}{d\xi} + e^{-\xi} \frac{d^2 u}{d\xi^2} \right) e^{-\xi} = e^{-2\xi} \left(\frac{d^2 u}{d\xi^2} - \frac{du}{d\xi} \right);$$

$$\frac{m^2}{r^2} R = m^2 e^{-2\xi} u.$$

Подставляя эти выражения в (48), получаем

$$e^{-2\xi} \left(\frac{d^2 u}{d\xi^2} - m^2 u \right) = 0. \quad (49)$$

Общее решение этого уравнения (нужно приравнять к нулю скобку, так как $e^{-2\xi} \neq 0$) будет

$$\left. \begin{aligned} u &= M e^{-m\xi} + N e^{+m\xi}; \\ R &= M r^{-m} + N r^m. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Так как искомое решение должно исчезать в бесконечности, то, считая m положительным, нужно положить $N = 0$; присоединяя полученное решение для Θ , получаем серию частных решений

$$\varphi_{1,m} = B_m r^{-m} \cos m \theta, \quad (51)$$

где B_m — неопределенные постоянные.

Ряд, составленный из таких частных решений с неопределенными коэффициентами, будет также решением

$$\varphi_1 = \sum_{m=0}^{\infty} B_m r^{-m} \cos m \theta. \quad (52)$$

На основании того, что при $r = a$ мы имеем границу с изолятором, мы должны подчинить наше решение для φ условию

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=a} = \left(\frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial r} \right)_{r=a} + \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right)_{r=a} = 0, \quad (53)$$

так как $\varphi^{(0)} = -\frac{J}{\sigma} r \cos \theta$, то

$$\left(\frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial r} \right)_{r=a} = -\frac{J}{\sigma} \cos \theta.$$

Таким образом, для φ_1 получается условие

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right)_{r=a} = \frac{J}{\sigma} \cos \theta.$$

Выполняя дифференцирование ряда (52) почленно и подставляя $r = a$, получаем

$$-\sum_{m=1}^{\infty} B_m m a^{-(m+1)} \cos m \theta = \frac{J}{\sigma} \cos \theta$$

или

$$\left(\frac{J}{\sigma} + B_1 a^{-2} \right) \cos \theta + 2B_2 a^{-3} \cos 2\theta + \dots = 0$$

для всех значений θ . Отсюда мы заключаем на основании известных свойств ряда Фурье, что

$$B_1 = -\frac{J}{\sigma} a^2, \quad B_2 = B_3 = \dots = 0$$

и имеем окончательно

$$\varphi = \varphi^{(0)} - \frac{Ja^2}{\sigma r} \cos \theta = -\frac{J}{\sigma} r \cos \theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right). \quad (54)$$

Эта формула показывает, что искажение в распределении потенциала уже на расстоянии $r = 10a$, т. е. 5 диаметров, составляет только один процент. Так как подобное препятствие больше всего искажает поле тока, если последний направлен перпендикулярно к оси цилиндра, и совсем не искажает при токе, направленном параллельно оси цилиндра, то этой оценкой можно удовлетвориться.

Для вопроса о пространственном распределении тока в неограниченной среде можно отвлечься от соединяющих электроды проводов; для вычисления же, например, магнитного поля такой системы токов расположение проводов, конечно, будет очень существенно.

§ 5. АНАЛОГИЯ МЕЖДУ ЭЛЕКТРОСТАТИКОЙ И ТЕОРИЕЙ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Чтобы в дальнейшем воспользоваться для решения конкретных задач известными приемами решения электростатических задач, покажем, что между этими задачами существует тесная математическая аналогия. Выпишем основные уравнения для электростатического поля проводников, помещенных в незаряженных диэлектриках, и для поля токов между эквипотенциальными электродами, погруженными в среду, составленную из проводников конечной электропроводности (мы здесь отвлекаемся от электродвижущих сил, как объемных, так и контактных).

| Электростатика | Постоянный ток |
|--|--|
| В объеме | В объеме |
| $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi;$ | $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi;$ |
| $\mathbf{D} = \frac{\epsilon}{4\pi} \mathbf{E};$ | $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E};$ |
| $\text{div } \mathbf{D} = 0;$ | $\text{div } \mathbf{J} = 0;$ |
| $\epsilon \Delta \varphi + \text{grad } \epsilon \text{ grad } \varphi = 0.$ | $\sigma \Delta \varphi + \text{grad } \sigma \text{ grad } \varphi = 0.$ |
| На границе | На границе |
| двух диэлектриков | двух проводников |
| $E_t^{(2)} = E_t^{(1)}; \quad E_n^{(2)} = E_n^{(1)};$ | $E_t^{(2)} = E_t^{(1)}; \quad E_n^{(2)} = E_n^{(1)};$ |
| $D_{n12}^{(2)} = D_{n12}^{(1)}.$ | $J_{n12}^{(2)} = J_{n12}^{(1)}.$ |

На границе

диэлектрика и проводника

проводника и эквипотенциального электрода

$$\left. \begin{aligned} \varphi = V = \text{const}; * \\ E_t = 0, \quad E_t' = 0; \\ E_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}; \\ e = \int_S D_n dS = - \int_S \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS; \end{aligned} \right| \begin{aligned} \varphi = V = \text{const}; \\ E_t = 0, \quad E_t' = 0; \\ E_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n}; \\ I = \int_S J_n dS = - \int_S \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS, \end{aligned}$$

где в последней паре сопоставляемых уравнений e означает заряд проводника, а I полный ток, выходящий из эквипотенциального электрода в среду. Полная аналогия двух задач ясна из приведенной таблицы; для перевода одной задачи на язык другой можно сопоставлять величины D и J , σ и $\epsilon/4\pi$, e и I . Несколько более удобно сопоставлять $4\pi D$ и J , σ и ϵ , $4\pi e$ и I ; если между электродами находится однородная среда с проводимостью σ , то проще всего сопоставлять эту задачу с электростатической задачей, где электроды являются проводниками, находящимися в пустоте ($\epsilon = 1$); в таком случае из решения электростатической задачи получаем, полагая

$$e = \frac{I}{4\pi\sigma}, \quad (55)$$

решение для потенциала задачи с током, причем распределение тока в пространстве получится из определения

$$\mathbf{J} = -\sigma \text{grad } \varphi.$$

Если мы имеем дело с электродом, опущенным в землю с поверхности, то, как было указано выше, действительный ток I , входящий или выходящий через него, должен быть удвоен, т. е. электростатическую перефразировку задачи нужно производить для дополненной изображением картины. Для таких случаев мы имеем

$$e = \frac{I}{2\pi\sigma}. \quad (56)$$

Основываясь на приведенной аналогии, можем сказать, что если размеры электрода малы по сравнению с расстоянием, на котором вычисляется его поле, то мы можем заменить его точечным электродом, так как при таком предположении поле эквивалентной заряженной системы может быть заменено полем алгебраической суммы ее зарядов, сосредоточенных в одной точке. Это упрощение относится только к расчету поля на достаточно большом расстоянии, но конечно неприменимо для расчета сопротивления электрода, которое, как мы увидим, обусловлено полем у самой его поверхности.

* V — численное значение потенциала проводника, который, как известно, во всех точках проводника одинаков; φ — значение потенциала поля в диэлектрике, в точке, где последний граничит с проводником; аналогично для тока.

СОПРОТИВЛЕНИЕ ЗАЗЕМЛЕНИЙ
(ПЕРЕХОДНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ) *

§ 6. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ

Установленное в § 5 соответствие между электростатикой и теорией объемного распределения постоянных токов позволяет перенести в последнюю ряд теорем электростатики. Полагая, что наша среда однородна, неограниченна и что в нее опущена система электродов, питаемых токами разной силы или поддерживаемых при разных потенциалах, мы переходим к задаче о геометрически одинаковой системе проводников, имеющих заданные заряды или потенциалы и помещенных в однородную диэлектрическую среду.

В простейшем случае мы имеем один проводник, имеющий заряд e и потенциал V . Емкость такого изолированного проводника равна

$$C = \frac{e}{V}$$

и может быть найдена, если будет решена задача о поле такого проводника при условии, что во всем внешнем пространстве потенциал ϕ удовлетворяет уравнению Лапласа, в бесконечности обращается в нуль как $1/R$, а на поверхности его равен единице. Полагая $\epsilon = 1$ и вычисляя

$$e_1 = - \frac{1}{4\pi} \int_s \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = C,$$

находим заряд при потенциале $V = 1$, т. е. емкость в пустоте. Для некоторых тел (шар, эллипсоид и немногие другие) эта задача решена. Полагая на основании (55)

$$e = \frac{I}{4\pi\sigma},$$

получаем

$$\frac{1}{C} = \frac{V}{I} 4\pi\sigma \quad \text{или} \quad \frac{V}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma C} = R \quad (57)$$

для электрода, целиком погруженного в среду, и аналогично, в силу (56),

$$\frac{V}{I} = \frac{1}{2\pi\sigma C} = R \quad (58)$$

для электрода, опущенного в землю с поверхности, причем C — емкость электрода, дополненного изображением и помещенного в пустоту. Так как электрод имеет потенциал V , а в бесконечности $\phi = 0$,

* Некоторые выводы этой главы используются в работах по методу заряда [29, 68, 87]. — Прим. ред.

то полученное выражение можно назвать сопротивлением участка цепи от электрода и до бесконечности. Выражаясь не совсем точно, эту величину называют сопротивлением данного заземления или переходным сопротивлением.

Переходя к случаю двух электродов, мы напишем систему уравнений, в которые входят известные из электростатики потенциальные и индукционные коэффициенты, зависящие от геометрического расположения проводников и, в случае неоднородной среды, — от распределения ϵ в пространстве между ними,

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= q_{11}V_1 + q_{12}V_2; \\ e_2 &= q_{21}V_1 + q_{22}V_2 \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

и ее решение относительно потенциалов проводников

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= p_{11}e_1 + p_{12}e_2; \\ V_2 &= p_{21}e_1 + p_{22}e_2. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Если рассматриваемые два электрода являются заземлениями одной цепи, то через них проходит один и тот же ток, так что в написанных формулах нужно положить $e_1 = e$, $e_2 = -e$.

Сопротивление участка цепи между двумя заземлениями равно

$$R = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{V_1 - V_2}{2\pi\sigma e} \quad (61)$$

(считая, что заземления с поверхности). Подставляя в (61) значения для e из (60), получаем

$$\begin{aligned} V_1 &= (p_{11} - p_{12})e; \quad V_2 = (p_{21} - p_{22})e; \\ R &= \frac{1}{2\pi\sigma} (p_{11} - 2p_{12} + p_{22}), \end{aligned} \quad (62)$$

помня, что $p_{21} = p_{12}$ и $q_{21} = q_{12}$. Из уравнений (59) и (60) получается связь между коэффициентами p и q

$$\begin{aligned} p_{11} &= \frac{q_{22}}{q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21}}; \quad p_{22} = \frac{q_{11}}{q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21}}; \\ p_{21} &= p_{12} = - \frac{q_{12}}{q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21}}. \end{aligned} \quad (63)$$

По определению, q_{11} обозначает количество электричества, находящееся на первом проводнике, когда $V_1 = 1$, а $V_2 = 0$, и называется емкостью проводника 1 при данной конфигурации этих проводников; q_{22} определяется аналогично; q_{21} — количество электричества на втором проводнике, когда $V_2 = 0$, а $V_1 = 1$, т. е. заряд, индуцированный на втором проводнике (отведенном к земле) первым, имеющим потенциал, равный единице. В качестве примера мы разберем в дальнейшем подробно случай двух шаров, но и сейчас можно сказать, что если расстояние между проводниками велико по сравнению с их размерами, то q_{21} будет мало по сравнению с q_{11} и q_{22} .

Тем более мы можем пренебречь обратным действием индуцированного заряда на индуцирующее тело, а потому можем заменить в «нулевом» приближении величины q_{11} и q_{22} емкостями C_1 и C_2 , вычисленными в предположении отсутствия другого проводника.

В таком случае мы имеем

$$\left. \begin{aligned} p_{11}^{(0)} &= \frac{1}{C_1}; & p_{22}^{(0)} &= \frac{1}{C_2}; \\ p_{12}^{(0)} &= -\frac{q_{21}}{C_1 C_2 \left(1 - \frac{q_{21}^2}{C_1 C_2}\right)} \approx 0; \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right). \quad (65)$$

Сравнение с формулой (58) показывает, что

$$R = R_1 + R_2, \quad (66)$$

т. е. сопротивление цепи из двух заземлений, при достаточно большом расстоянии между ними по сравнению с их размерами, оказывается равным сумме сопротивлений каждого в отдельности и не зависит от их расстояния*. Полученный результат показывает физическое значение вычисления сопротивления

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma C}$$

одного заземления, т. е. решения задачи, физический смысл которой сначала не ясен. Действительно, мы не можем подвести ток к одному заземлению и дать ему распространяться в бесконечность — необходим другой электрод для замыкания цепи; наши формулы показывают, что если электроды далеки друг от друга, то каждое из слагаемых вычисляется как «сопротивление единичного заземления», независимо от формы и положения другого электрода.

Можно показать, что в следующем приближении мы получим более точную формулу

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma C_1} + \frac{1}{2\pi\sigma C_2} + \frac{2q_{12}}{2\pi\sigma C_1 C_2}. \quad (67)$$

Так как по физическому своему смыслу q_{12} отрицательно и возрастает при сближении электродов, то эта формула показывает, что сопротивление цепи действительно начинает уменьшаться при сближении до расстояний, не слишком больших по сравнению с максимальными линейными размерами электродов.

На формуле (66) основан прием для измерения сопротивления заземления. Располагаем два вспомогательных заземления 2 и 3 на достаточно большом расстоянии от данного 1 и измеряем каким-

* Выражаясь неточно, можно сказать, что сопротивление земного участка цепи состоит из последовательно включенных сопротивлений заземлений, а сопротивление земного массива можно считать равным нулю.

нибудь способом сопротивления участков цепи между всеми попарно. Имеем

$$R_{12} = R_1 + R_2;$$

$$R_{13} = R_1 + R_3;$$

$$R_{23} = R_2 + R_3.$$

Решая эту систему относительно R_1 , получаем

$$R_1 = \frac{R_{12} + R_{13} - R_{23}}{2}. \quad (68)$$

Заметим, что этот результат основан только на вышеупомянутом пренебрежении взаимодействия электродов, однородность среды при этом необязательна. Действительно, уравнения (59) и (60) верны и для неоднородной среды: если будем сопоставлять $4\pi D$ с J , $4\pi\epsilon$ (или $2\pi\epsilon$) с I , то положение $e_1 = -e_2 = e$ останется в силе, и из уравнений (60) мы получим

$$V_1 - V_2 = (p_{11} + p_{22} - 2p_{12})e.$$

Отсюда

$$R_{12} = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{1}{2\pi} (p_{11} + p_{22} - 2p_{12}); \quad (69)$$

разница с (62) в том, что там p_{11} и т. д. предполагались вычисленными для пустоты, а здесь — для неоднородной среды с $\epsilon(xyz) = \sigma(xyz)$. Дальнейшие рассуждения не отличаются от только что изложенных.

Более сложный случай — электрода, составленного из нескольких заземляющих тел — мы разберем в отдельном параграфе в дальнейшем.

§ 7. ДВА ПОЛУШАРОВЫХ ЗАЗЕМЛЕНИЯ

Вычисление величин C , p , q для тел неправильной формы представляет очень большие математические затруднения, в то время как на практике в большинстве случаев требуется лишь теоретическая оценка их порядка величины. Поэтому мы ограничимся простейшими формами, главным образом, для иллюстрации общих заключений предыдущего параграфа. Предположим, что в однородной среде имеются два заземления в виде полушаров (рис. 11) с радиусами a и b на расстоянии d между центрами. Действительная форма надземной части электродов безразлична, но, дополняя их зеркальным изображением, мы получаем случай двух шаров. Электростатическую задачу решим последовательными приближениями по методу изображений. Если бы мы имели только один шар A , несущий заряд e , то, как известно, внешнее поле его получается таким, как если бы заряд e был сосредоточен в центре шара

$$\varphi^{(0)} = \frac{e}{r_A},$$

при $r_A = a$ имеем

$$V_A^{(0)} = \frac{e}{a}. \quad (70)$$

При этом действительный заряд распределен равномерно на поверхности шара. Вследствие присутствия второго шара, который предположим отведенным к земле, т. е. имеющим $V_B = 0$, это распределение нарушится, но если мы предположим, что расстояние d

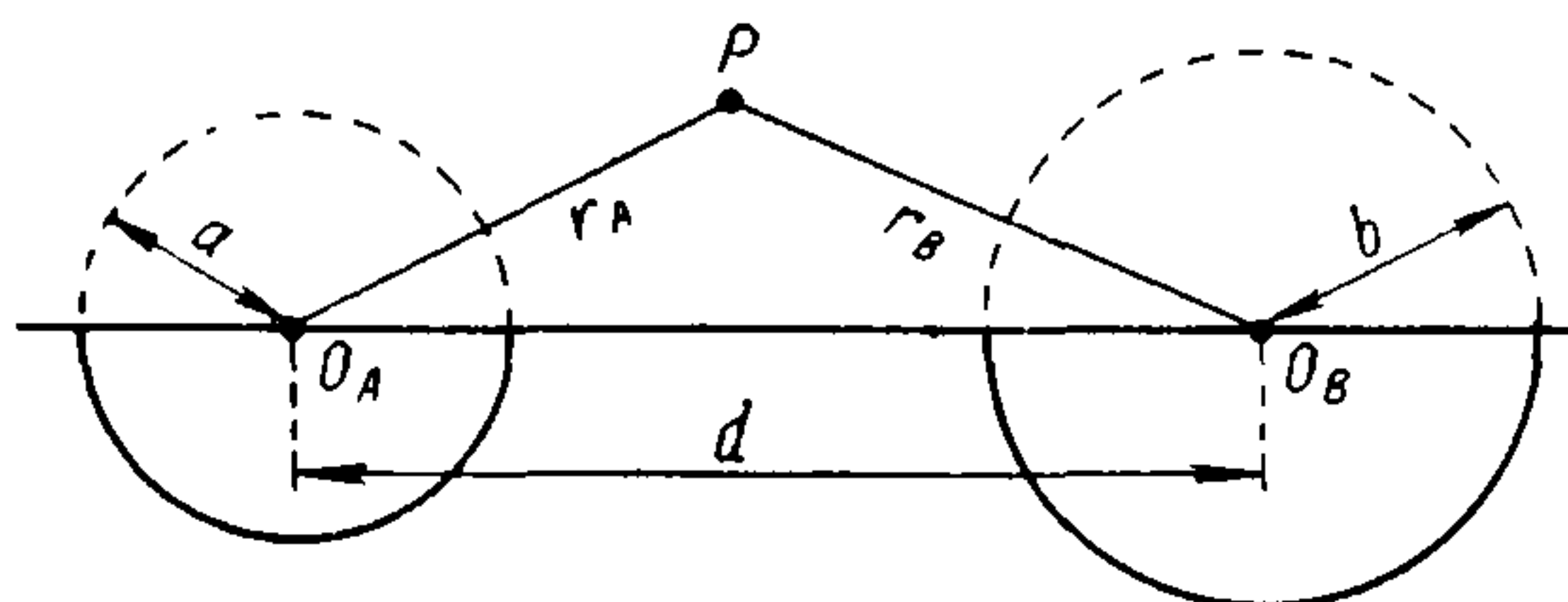


Рис. 11.

велико по сравнению с a и b , то в пределах объема шара B можно считать в первом приближении поле $\varphi_A^{(0)}$ неизменным. В таком случае эта функция не удовлетворяет условию, что на поверхности

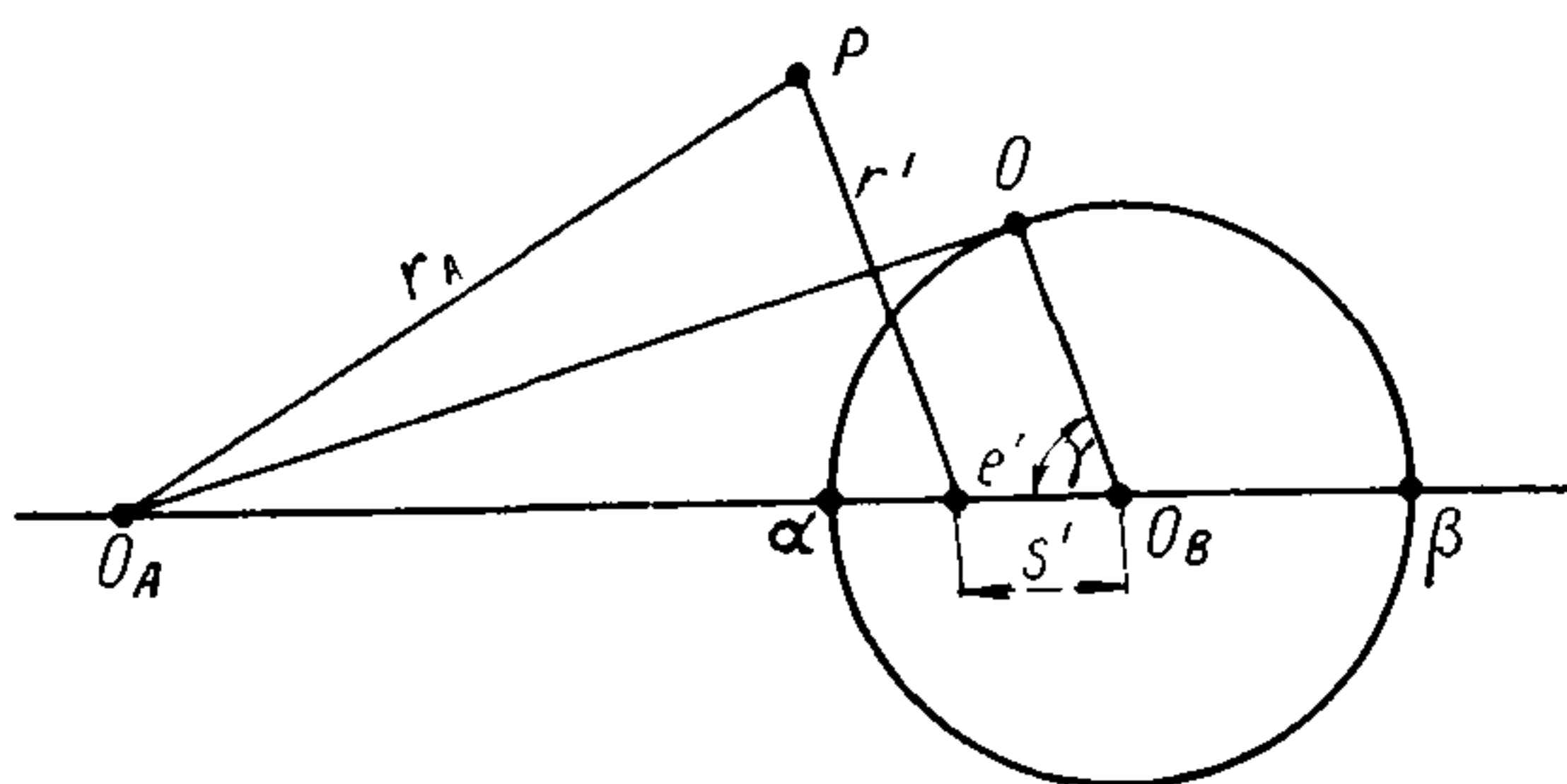


Рис. 12.

шара B потенциал обращается в нуль. Попробуем заменить действительное распределение индуцированного заряда на шаре B точечным зарядом e' , находящимся внутри его, и, по соображениям симметрии, на прямой AB . Внешнее поле тогда будет иметь потенциал

$$\varphi^{(1)} = \frac{e}{r_A} + \frac{e'}{r'} \quad (71)$$

(рис. 12). Заряд e' и его расстояние от O_B , обозначенное s' , нужно определить из условия, что $\varphi^{(1)}$ должно равняться нулю на всей поверхности шара B . Для точек α и β имеем

$$\frac{e}{d-b} + \frac{e'}{b-s'} = 0; \quad \frac{e}{d+b} + \frac{e'}{b+s'} = 0.$$

Отсюда определяем

$$e' = -\frac{be}{d}; \quad s' = \frac{b^2}{d} \quad (72)$$

и убеждаемся, что для любой точки Q на поверхности шара B действительно $\varphi^{(1)} = 0$. Для этого нужно только подставить полученные значения для e' и s' в выражение для потенциала в точке Q

$$\varphi^{(1)}(Q) = \frac{e}{\sqrt{b^2 + d^2 - 2bd \cos \gamma}} + \frac{e'}{\sqrt{b^2 + s'^2 - 2bs' \cos \gamma}}.$$

Полученное нами выражение для потенциала

$$\varphi^{(1)} = \frac{e}{r_A} - \frac{be}{dr'} \quad (73)$$

есть строгое решение для случая индукции точечным зарядом в точке O_A заряда на шаре B , имеющем потенциал нуль, и приближенное для нашей задачи. Если мы пренебрежем обратным действием шара B на шар A , то на шаре A мы имеем заряд e , потенциал $V_A^{(1)} = e/a$, на шаре B заряд $e' = -be/d$ *. Пренебрежение заключается в том, что в выражении, получающемся из (73) в точке поверхности шара A

$$\varphi_{r'=a}^{(1)} = \frac{e}{a} \left(1 - \frac{ba}{dr'} \right),$$

мы отбрасываем второй член в скобке, являющийся членом второго порядка малости, если считать величины порядка отношения размеров шаров к их расстоянию за величины малые. Если мы положим $e = a$, то $V_A^{(1)} = 1$, $V_B = 0$, и мы имеем приближенное значение для коэффициентов

$$\left. \begin{aligned} q_{11}^{(1)} &= a; \\ q_{12}^{(1)} &= -\frac{ba}{d}, \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

откуда

$$\frac{q_{12}^{(1)}}{q_{11}^{(1)}} = -\frac{b}{d}.$$

Сделаем второе приближение. Очевидно, $\varphi^{(1)}$ не постоянно на поверхности шара A из-за второго члена выражения (73). Если мы теперь, повторяя метод изображений, поместим заряд

$$e'' = -\frac{ae'}{(d-s')} = \frac{abe}{d(d-s')}$$

на расстоянии (рис. 13)

$$s'' = \frac{a^2}{(d-s')}$$

* Этот заряд в действительности распределен по всей поверхности шара B , но его величина должна равняться e' , так как легко проверить, что применение теоремы Гаусса к поверхности, заключающей шар B и исключаяющей шар A , даст как раз e' как заряд, находящийся внутри нее.

и рассмотрим потенциал трех зарядов

$$\varphi_2 = \frac{e}{r_A} + \frac{e'}{r'} + \frac{e''}{r''}, \quad (75)$$

то, так как мы подгоняли s'' и e'' по примеру предыдущих рассуждений, так, чтобы последние два члена вместе дали на поверхности шара A нуль, мы будем иметь по-прежнему

$$V_A^{(2)} = \frac{e}{a}, \quad (76)$$

причем, очевидно, помещение добавочного заряда e'' есть учет обратного действия индуцированного заряда e' на шар A . Общий заряд, находящийся на шаре A при прежнем потенциале, равен $e + e''$. Для определения коэффициентов индукции положим $e = a$, тогда

$$e + e'' = e \left[1 + \frac{ab}{d(d - \frac{b^2}{d})} \right] = a \left[1 + \frac{ab}{d(d - \frac{b^2}{d})} \right], \quad (77)$$

по (76) $V_A^{(2)} = 1$ и

$$q_{11}^{(2)} = e + e'' = a \left[1 + \frac{ab}{d(d - \frac{b^2}{d})} \right]. \quad (78)$$

Правда, теперь заряды e и e'' вместе с e' уже не будут давать $V_B^{(2)} = 0$, и, очевидно, нужно будет кроме e' ввести внутрь шара B дополнительно заряд e''' так, чтобы e'' и e''' вместе снова дали бы на его поверхности потенциал, равный нулю. Таким образом, можно идти последовательными приближениями и получать все более точные решения задачи. Можно показать, что так как a/d и b/d меньше единицы, то последовательность значений q_{11} и q_{12} будет сходящаяся, и тем более быстро, чем меньше эти отношения. Каждое следующее приближение исправляет по очереди либо q_{11} либо q_{12} ; мы ограничимся только полученными приближениями: нулевое приближение дает

$$q_{11}^{(0)} = a = C_A; \quad q_{12}^{(0)} = 0,$$

где C_A — емкость шара A без учета его взаимодействия с шаром B , первое приближение дает (74)

$$q_{11}^{(1)} = a; \quad q_{12}^{(1)} = -b \left(\frac{a}{d} \right),$$

а второе, разложенное в ряд по степеням отношений a/d и b/d ,

$$q_{12}^{(2)} = -b \left(\frac{a}{d} \right); \quad q_{11}^{(2)} = a \left[1 + \frac{ab}{d^2} \left(1 + \frac{b^2}{d^2} \dots \right) \right]^* = a \left(1 + \frac{ab}{d^2} \right) \quad (79)$$

с точностью до членов второго порядка малости.

* Так как $\frac{1}{1 - \left(\frac{b}{d}\right)^2} = 1 + \left(\frac{b}{d}\right)^2 + \dots$

Аналогичными рассуждениями получим для q_{22} в нулевом и первом приближении $q_{22}^{(0)} = q_{22}^{(1)} = b$, а во втором приближении

$$q_{22}^{(2)} = b \left[1 + \frac{ab}{d \left(d - \frac{a^2}{d} \right)} \right] \quad (80)$$

или, разлагая в ряд с точностью до членов второго порядка,

$$q_{22}^{(2)} = b \left(1 + \frac{ab}{d^2} \right); \quad b = C_B. \quad (81)$$

Эти формулы показывают, что приближенные значения

$$q_{11}^{(0)} = C_A; \quad q_{22}^{(0)} = C_B$$

верны с точностью до квадрата в отношении размеров шаров к расстоянию между ними, и что q_{12}/q_{22} и q_{12}/q_{11} порядка первой степени такого отношения, так как

$$\left. \begin{aligned} \frac{q_{12}^{(2)}}{q_{22}^{(2)}} &= -\frac{ba}{db \left[1 + \left(\frac{b}{d}\right)^2 \frac{a}{b} \dots \right]} = -\frac{a}{d} \left[1 - \frac{a}{b} \left(\frac{b}{d}\right)^2 + \dots \right]; \\ \frac{q_{12}^{(2)}}{q_{11}^{(2)}} &= -\frac{ba}{da \left[1 + \frac{b}{a} \left(\frac{a}{d}\right)^2 + \dots \right]} = -\frac{b}{d} \left[1 - \frac{b}{a} \left(\frac{a}{d}\right)^2 + \dots \right]. \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

Предлагаем читателям вычислить на основании формул (78) и (80) и разложений (79) и (81) величины q_{11} , q_{22} и q_{12} в нулевом, первом и втором приближениях, полагая $a = b = 1 \text{ м} = 100 \text{ см}$, $d = 10 \text{ м}$ и $d = 100 \text{ м}$.

Переходя от q к p по формулам (63) и подставляя эти значения в (62), можно убедиться, что во втором случае, когда расстояние равно 50 диаметрам полушаров, второе приближение даст значения для сопротивления, лишь на единицы процентов отличные от нулевого приближения, которое есть вместе с тем точное значение для бесконечно удаленных заземлений ($d = \infty$). Заметим, что с точностью до квадратов отношений a/d и b/d можно представить величины p_{11} , p_{22} и p_{12} как

$$\left. \begin{aligned} p_{11} &= \frac{q_{22}}{q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21}} = \frac{1}{q_{11}} \left(1 + \frac{q_{12}^2}{q_{11}q_{22}} \right) = \frac{1}{a}; \\ p_{22} &= \frac{q_{11}}{q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21}} = \frac{1}{q_{22}} \left(1 + \frac{q_{12}^2}{q_{11}q_{22}} \right) = \frac{1}{b}; \\ p_{12} &= -\frac{q_{12}}{q_{11}q_{22} - q_{12}q_{21}} = \frac{1}{d} \left(1 - \frac{ba}{d^2} \right), \end{aligned} \right\} \quad (83) *$$

* Для вывода формул (83) и (84) нужно воспользоваться формулами (79), (81) и (82) и подставить эти выражения в (63), сохраняя только высказанные здесь члены до второго порядка. При этом, производя соответствующие деления и умножения, нужно всегда отбрасывать члены высших степеней отношений a/d и b/d . Так, например,

$$p_{11} = \frac{1}{q_{11} - \frac{q_{12}^2}{q_{22}}} = \frac{1}{q_{11} \left(1 - \frac{q_{12}^2}{q_{22}q_{11}} \right)} \approx \frac{1 + \frac{q_{12}^2}{q_{22}q_{11}}}{q_{11}} \approx \frac{\left(1 + \frac{ab}{d^2} \right)}{a \left(1 + \frac{ab}{d^2} \right)} = \frac{1}{a} \quad \text{и т. д.}$$

откуда по (62)

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma} \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{d} \right], \quad (84)$$

так как поправку второго порядка в p_{12} нужно отбросить; действительно, как легко видеть, p_{12} есть уже величина первого порядка малости по отношению к p_{11} и p_{22} , а поправки третьего порядка у этих величин мы не принимаем во внимание.

В наших примерах отношение a/d составляет одну десятую и одну сотую, а квадрат его — одну сотую и одну десятитысячную. Не принимая во внимание взаимодействия (т. е. p_{12}), получим

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma} \cdot \frac{2}{a} = \frac{1}{100\pi\sigma}.$$

Учитывая член $2/d$, мы получаем

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma} \left(\frac{2}{a} - \frac{2}{d} \right) = \frac{0,9}{100\pi\sigma} \quad \text{при } d = 10 \text{ м}$$

и

$$R = \frac{0,99}{100\pi\sigma} \quad \text{при } d = 100 \text{ м},$$

откуда видно, что при сближении на 5 диаметров сопротивление уменьшается против того значения, которое оно имеет при большом расстоянии, на 10%; при 50 диаметрах оно лишь на 1% меньше, чем предельное.

Этими результатами мы можем пользоваться для оценки других случаев, т. е. при электродах другой формы. Так как сопротивление заземлений сильно зависит от качества контакта с почвой, а электропроводность земли, в которую опущено заземление, также известна обычно лишь приблизительно, то практические подсчеты не могут претендовать на большую точность; почти всегда можно считать, что сопротивление между двумя заземлениями равно сумме их сопротивлений в отдельности, если только заземления не слишком близки друг к другу.

§ 8. ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ СРЕДЫ НА СОПРОТИВЛЕНИЕ ЗАЗЕМЛЕНИЙ

Действительная причина того, что расстояние между заземлениями мало сказывается на сопротивлении земного участка цепи между ними, очевидно, заключается в том, что ток, выходя из заземления, имеет, грубо говоря, поперечное сечение, равное площади контакта электрода с землей; это поперечное сечение быстро увеличивается по мере удаления от электрода и расхождения линий тока; поэтому все сопротивление цепи сосредоточено в непосредственном соседстве с электродом, причем как раз в этом месте поле самого электрода очень велико по сравнению с полем других удаленных электродов, и от расположения последних форма линий тока мало зависит. На основании подобных соображений можно ожидать, что если электрод находится в среде с электропроводностью σ , а на некотором расстоянии от него имеются участки с другими значениями элек-

тропроводности, то влияние последних на сопротивление электрода будет мало заметно, если граница этих участков находится на расстоянии, большом по сравнению с размерами электрода. Проверим это на примере шарового электрода (или полушарового заземления) с радиусом a и окруженного concentрическим слоем с электропроводностью σ_1 и толщиной $b - a$; при $r > b$ пусть имеется среда с σ_2 (рис. 14). В соответствующей электростатической задаче имеем шар, окруженный concentрическими слоями с соответственными диэлектрическими постоянными. Решение этой задачи, как известно, очень просто, вследствие шаровой симметрии поле будет радиально, по теореме Гаусса

$$\int D_n dS = e,$$

где e — заряд шара, а интеграл берется по любой шаровой поверхности с радиусом $r > a$.

Так как $D_n = D_r = D$ постоянно для всей поверхности интегрирования, то мы получаем

$$4\pi r^2 D = e \quad \text{или} \quad D = \frac{e}{4\pi r^2},$$

отсюда

$$E^{(1)} = \frac{e}{\epsilon_1 r^2} = -\frac{d\varphi^{(1)}}{dr}; \quad E^{(2)} = \frac{e}{\epsilon_2 r^2} = -\frac{d\varphi^{(2)}}{dr},$$

и, интегрируя эти выражения по r , получаем

$$\varphi^{(1)} = \frac{e}{\epsilon_1 r} + C_1; \quad \varphi^{(2)} = \frac{e}{\epsilon_2 r} + C_2.$$

Условие непрерывности потенциала при $r = b$ дают

$$C_2 - C_1 = \frac{e}{b} \left(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right),$$

а так как в бесконечности потенциал конечной системы зарядов равен нулю, то $C_2 = 0$.

Таким образом,

$$\varphi^{(1)} = e \left[\frac{1}{\epsilon_1 r} - \frac{1}{b} \left(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) \right]$$

и при $r = a$ имеем

$$V = e \left[\frac{1}{\epsilon_1 a} - \frac{1}{b} \left(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right) \right].$$

Емкость C получится равной

$$C = \frac{1}{\frac{1}{\epsilon_1 a} - \frac{1}{b} \left(\frac{1}{\epsilon_1} - \frac{1}{\epsilon_2} \right)},$$

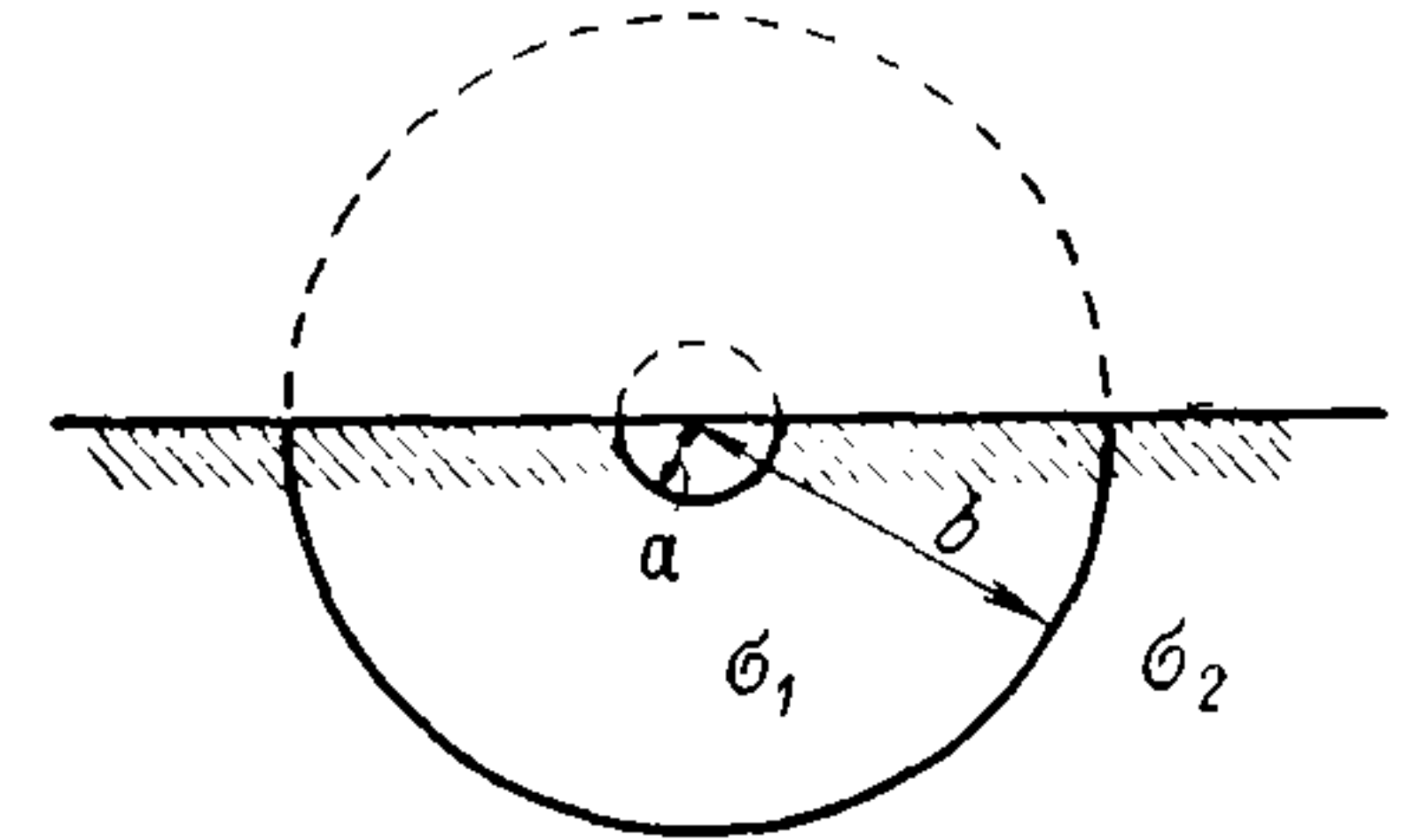


Рис. 14.

а сопротивление в задаче с током и полушаровым заземлением

$$R = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{\sigma_1 a} - \frac{1}{b} \left(\frac{1}{\sigma_1} - \frac{1}{\sigma_2} \right) \right]. \quad (85)$$

Если $b = \infty$, т. е. вся среда однородна и имеет электропроводность σ_1 , то получаем

$$R^{(0)} = \frac{1}{2\pi\sigma_1 a}$$

и можем написать

$$R = R^{(0)} \left[1 - \frac{a}{b} \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \right]. \quad (86)$$

Если $\sigma_2 > \sigma_1$, то сопротивление R меньше, чем R_0 , но не больше, чем на множитель $1 - \frac{a}{b}$, и при $b \gg a$ влияние незаметно; если же

$\sigma_2 < \sigma_1$, то сопротивление увеличивается, причем пока отношение σ_1/σ_2 порядка нескольких единиц, влияние также будет порядка отношения a/b , если же σ_1/σ_2 велико не только по сравнению с единицей, но и значительно больше, чем b/a , то

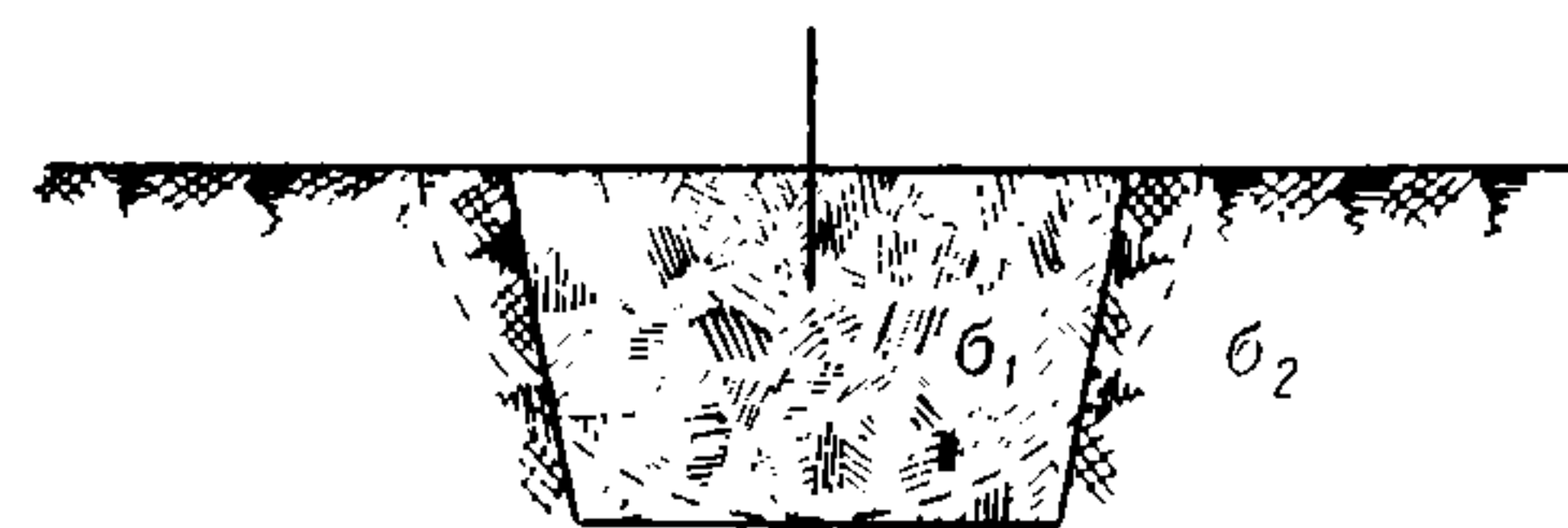


Рис. 15.

добавочный член в скобках будет мало отличаться от $a\sigma_1/b\sigma_2$, которое по предположению много больше единицы; в таком случае можно написать

$$R \approx R^0 \frac{a\sigma_1}{b\sigma_2} = \frac{1}{2\pi\sigma_2 b}, \quad (87)$$

т. е. сопротивление получается равным сопротивлению заземления радиуса b в среде с электропроводностью σ_2 . Отсюда можно извлечь следующее практическое указание. В очень плохо проводящем грунте можно понизить сопротивление заземления, вырыв яму и заполнив ее влажной землей, глиной или смоченным песком; в песчаной сухой почве можно применить обильную поливку земли вокруг электрода; тогда при небольших размерах металлического заземления можно сильно повысить эффективный радиус электрода. Точно так же выгодно поместить электрод в слегка увлажненном месте или в скалистой местности в ложбине с наносами и т. п. При оценке сопротивления электрода, помещенного в яму, заполненную хорошо проводящей землей и окруженной гораздо менее проводящими породами, можно принять за диаметр сферы средние размеры ямы, если она не слишком отходит от сферической формы (рис. 15); конечно, нужно, чтобы сопротивление металлического электрода, опущенного в яму, в неограниченной среде с электропроводностью вещества, наполняющего яму, по расчету было бы достаточно мало по сравнению с сопротивлением, вычисленным по формуле (87); в противном случае можно при оценке поступить так: формулу (85) можно в предположении $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \gg 1$ написать

$$R \approx \frac{1}{2\pi\sigma_1 a} + \frac{1}{2\pi\sigma_2 b} \quad (88)$$

и в практическом приложении первый член заменить сопротивлением металлического электрода в среде σ_1 (если он не шаровой формы, но по размерам мал по сравнению с радиусом ямы), а второй член оценить, исходя из размеров ямы.

§ 9. СОПРОТИВЛЕНИЕ ЗАЗЕМЛЕНИЙ НЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

Вычисление сопротивления одиночного заземления сводится, как было указано в § 6, к вычислению емкости эквивалентного ему проводника. Мы рассмотрим здесь лишь немногие случаи, отсылая

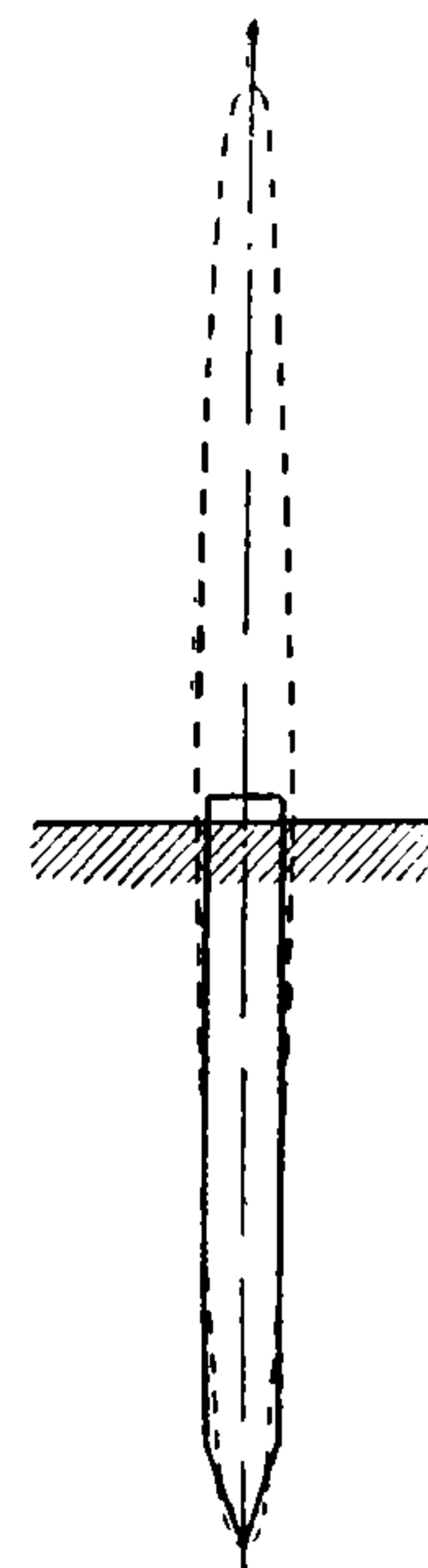


Рис. 16.

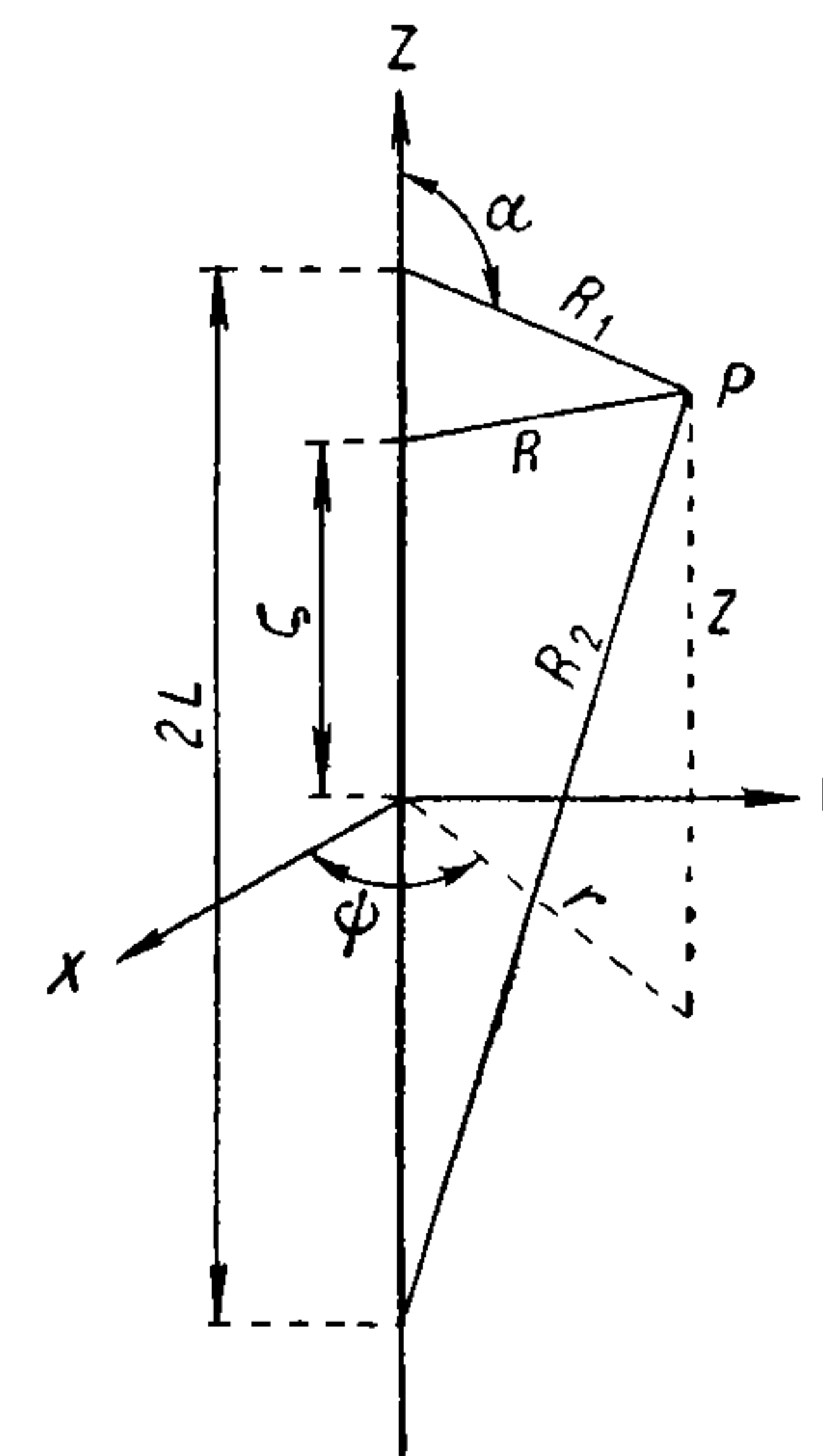


Рис. 17.

читателя к книге Ф. Оллендорфа [72], где вопрос о сопротивлении заземлений разбирается очень подробно.

Наиболее часто встречающаяся в электроразведочной практике форма заземления — это воткнутая в землю шпилька, щуп или металлический кол. Пусть поперечный диаметр его $d = 2b$; длина части, опущенной в землю, a (рис. 16). Нам нужно найти геометрическую поверхность, близкую по форме к такому телу и допускающую простой математический расчет. Такой поверхностью является эллипсоид вращения с большой полуосью a и малой b , и чем больше отношение a/b , тем лучше будет приближение, полученное при замене погруженной части стержня и ее зеркального изображения — указанным эллипсоидом.

Для расчета емкости эллипсоида проще всего найти такое электростатическое поле, эквипотенциальные поверхности которого были

бы эллипсоидами; в таком случае мы для внешнего поля ничего не изменим, если вообразим себе любую эквипотенциальную поверхность заполненной проводником, и получим решение электростатической задачи. (Прием замены эквипотенциальной поверхности вычисленного уже поля поверхностью проводника.)

Вообразим себе заряженную линию, т. е. отрезок прямой длиной $2L$, причем на единицу длины приходится заряд $\lambda = \frac{e}{2L}$.

Начало координат поместим в середине отрезка и направим последний по оси OZ (рис. 17). Систему координат возьмем цилиндрическую; положение точки P определяется координатой z , r — расстоянием от оси, и азимутом ψ , но ясно, что потенциал от ψ зависеть не будет. Координату точки заряженной линии будем обозначать ζ .

Потенциал в точке P будет равен

$$\varphi = \int_{-L}^{+L} \frac{\lambda}{R} d\zeta = \lambda \int_{-L}^{+L} \frac{d\zeta}{\sqrt{(\zeta - z)^2 + r^2}}.$$

Неопределенный интеграл берется

$$\int \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 2\zeta z + z^2 + r^2}} = \ln [\zeta - z + \sqrt{(\zeta - z)^2 + r^2}],$$

и, подставляя пределы, получаем

$$\varphi = \lambda \ln \frac{\sqrt{(L-z)^2 + r^2} + L - z}{\sqrt{(L+z)^2 + r^2} - L - z}. \quad (89)$$

Полагая

$$\frac{\varphi}{\lambda} = \frac{2\varphi L}{e} = \ln K, \quad (90)$$

имеем уравнение эквипотенциальных поверхностей

$$[\sqrt{(L+z)^2 + r^2} - (L+z)] K = \sqrt{(L-z)^2 + r^2} + (L-z). \quad (91)$$

По освобождении от радикалов мы приходим к уравнению эллипса

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{r^2}{b^2} = 1,$$

где

$$a = L \frac{K+1}{K-1}; \quad b = L \frac{2\sqrt{K}}{K-1}. \quad (92)$$

Несколько быстрее, чем простое алгебраическое преобразование уравнения (91), приводит к цели следующий прием. Перенесем начало координат в верхний конец заряженной линии. Тогда вместо $z - L$ нужно писать z' , а $L + z = z' + 2L$. Радикалы, входящие в (91), не что иное, как расстояния от верхнего R_1 и нижнего R_2 конца заряженной линии; введя угол α между OZ и R_1 , имеем

$$z' = R_1 \cos \alpha; \quad r = R_1 \sin \alpha; \\ R_2 = \sqrt{R_1^2 + 4L^2 + 4R_1L \cos \alpha}$$

и уравнение кривой приводится к виду

$$\sqrt{R_1^2 + 4L^2 + 4R_1L \cos \alpha} - (R_1 \cos \alpha + 2L) = \frac{1}{K} R_1 (1 - \cos \alpha).$$

Отсюда

$$\sqrt{R_1^2 + 4L^2 + 4R_1L \cos \alpha} = \frac{1}{K} R_1 (1 - \cos \alpha) + R_1 \cos \alpha + 2L,$$

и, возведя в квадрат, имеем

$$R_1^2 + 4L^2 + 4R_1L \cos \alpha = \frac{R_1^2}{K^2} (1 - \cos \alpha)^2 + R_1^2 \cos^2 \alpha + 4L^2 + \\ + \frac{2R_1^2}{K} \cos \alpha (1 - \cos \alpha) + 4R_1L \cos \alpha + \frac{4R_1L}{K} (1 - \cos \alpha).$$

Сокращая одинаковые члены слева и справа, мы можем оставшиеся члены разделить на R_1 и получаем линейное уравнение для R_1 , которое легко решается:

$$R_1 = \frac{4LK}{(K^2 - 1) \left(1 + \frac{K-1}{K+1} \cos \alpha\right)} = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \alpha},$$

а это есть уравнение эллипса в полярных координатах с началом в фокусе эллипса с параметром

$$p = \frac{4LK}{K^2 - 1}$$

и эксцентриситетом

$$\varepsilon = \frac{K-1}{K+1}.$$

Отсюда по известным формулам получаем

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = L \frac{K+1}{K-1}; \\ b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = L \frac{2\sqrt{K}}{K-1}.$$

Отношение a/b для приближенного изображения удлиненного тонкого стержня должно быть очень велико; так как мы получаем

$$\frac{a}{b} = \frac{K+1}{2\sqrt{K}} = \frac{1}{2} \sqrt{K} + \frac{1}{2\sqrt{K}} = \frac{1}{2} \sqrt{K} \left(1 + \frac{1}{K}\right),$$

то ясно, что K должно быть велико; пренебрегая поэтому вторым членом справа, имеем

$$K \approx \left(\frac{2a}{b}\right)^2, \quad (93)$$

с той же точностью

$$L = a \frac{K-1}{K+1} = a \left(1 - \frac{2}{K}\right) \approx a. \quad (94)$$

Таким образом, мы видим, что если взять заряженную линию, длиной практически равной $2a$, то из очень близких к ней эквипотенциальных поверхностей можно выбрать такую, которая имеет

малую полуось, равную b ; численное значение потенциала на этой поверхности будет равно из (90) на основании (94) и (93)

$$\varphi = \frac{e}{2a} \ln K = \frac{e}{a} \ln \frac{2a}{b} = V. \quad (95)$$

Внешнее поле проводника, имеющего форму такого эллипсоида и несущего заряд e , должно совпадать с полем рассматриваемой заряженной линии вне эллипсоида, так как потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа во всем внешнем пространстве (как всякий потенциал, вычисленный по формуле $\varphi = \int \frac{de}{r}$) и принимает на поверхности эллипсоида постоянное значение, причем поток вектора \mathbf{E} таков, что внутри этой поверхности находится заряд e . Вычисленное нами значение V (95) есть значение потенциала на проводнике при заряде e ; отсюда емкость очень вытянутого эллипсоида с осями $a \gg b$

$$C = \frac{e}{V} = \frac{a}{\ln \frac{2a}{b}},$$

а для сопротивления получаем

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma a} \ln \frac{2a}{b} = \frac{1}{2\pi\sigma a} \cdot \frac{\lg 2a - \lg b}{0,4343}. \quad (96)$$

В среде с электропроводностью $10^{-4} \text{ (ом}\cdot\text{см)}^{-1}$ заземление шпилькой длиной 30 см и диаметром 1 см будет иметь сопротивление

$$R = \frac{1}{6,28 \cdot 10^{-4} \cdot 30} \cdot \frac{\lg 60 - \lg 0,5}{0,4343} = 254 \text{ ом.}$$

Горизонтально лежащий на земле голый провод схематически можно рассматривать как полуцилиндрическое заземление. Дополнив картину изображением, получим цилиндрический стержень (но не удвоенной, а настоящей длины). Заменяя его эллипсоидом, получаем в точности предыдущий пример. Если длина провода равна $2a$, а диаметр $2b$, то имеет место формула (96). Нужно заметить, что в то время как в предыдущем случае погруженная часть действительно со всех сторон соприкасается с землей, в этом случае из формулы (96) для практики получается лишь очень грубая, а иногда и совершенно ошибочная оценка. Дело в том, что провод, конечно, не зарывается аккуратно на половину своей толщины в землю, а местами просто кладется на нее, местами зарывается совсем, причем площадь контакта имеет совершенно случайную и неопределенную величину. В действительности такой провод при осуществлении линейных электродов прибывают шпильками через определенное расстояние (порядка немногих метров). Эти шпильки и являются на самом деле заземлениями, а на голый провод пужно смотреть как на питающий их проводник.

Качество контакта важно и для вертикально опущенного в землю стержня; в каменистой почве (галечник, дресва) может случиться, что сопротивление заземления окажется много больше вычисленного

по формуле (96), хотя взято верное значение средней электропроводности почвы. Произойдет это потому, что ток будет выходить не со всей погруженной в землю поверхности, а только в небольших участках, где есть контакт.

§ 10. СОПРОТИВЛЕНИЕ ПЛАСТИНЧАТОГО ЗАЗЕМЛЕНИЯ

Сопротивление круглой пластины радиусом a , положенной на землю, вычисляется сложнее. Здесь не удастся сразу указать простое распределение зарядов на диске, такое, которое дало бы постоянный потенциал на нем или на поверхности, достаточно близко его облегающей.

Можно идти двумя путями: или переходить к диску как пределу сплюснутого эллипсоида вращения, и для этого найти сначала решение для поля такого эллипсоида, или же, найдя общее выражение для поля, симметричного вокруг оси, подобрать его так, чтобы были выполнены все требуемые условия.

В первом случае естественно искать решение в таких криволинейных координатах, чтобы поверхность эллипсоида была одной из координатных поверхностей; для этого нужно ввести в плоскости, проходящей через нормаль к диску в его центре, эллиптические координаты, задаваемые сеткой из семейства конфокальных эллипсов

$$\frac{r^2}{\zeta^2} + \frac{z^2}{\zeta^2 - a^2} = 1 \quad (97)$$

и конфокальных с ним гипербол

$$\frac{r^2}{\eta^2} - \frac{z^2}{a^2 - \eta^2} = 1. \quad (98)$$

Из этих уравнений непосредственно видно, что большие полуоси эллипсов определяются значениями ζ , а вещественные оси гипербол значениями η ; фокусы любой из кривых семейств (97) и (98) находятся в точках: $r = \pm a, z = 0$.

Будем считать параметры этих кривых ζ, η за новые координаты; тогда написанные уравнения будут уравнениями координатных линий, при ζ постоянном — эллипсы, при η постоянном — гиперболы; задание ζ и η определяет точку в каждом квадранте плоскости (z, r) как пересечение пары кривых из этих двух семейств (рис. 18). Если мы прибавим еще азимут ψ поворота плоскости (z, r) от (z, x), то будем иметь новые криволинейные координаты, определенным образом связанные со старыми,

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= \frac{\zeta^2 \eta^2}{a^2}; \\ z^2 &= \frac{(a^2 - \eta^2)(\zeta^2 - a^2)}{a^2}; \\ \psi &= \psi. \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

К прямолинейным прямоугольным координатам мы перейдем, положив

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \psi = \frac{\zeta \eta}{a} \cos \psi; \\ y &= r \sin \psi = \frac{\zeta \eta}{a} \sin \psi; \\ z &= \frac{1}{a} \sqrt{(a^2 - \eta^2)(\zeta^2 - a^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

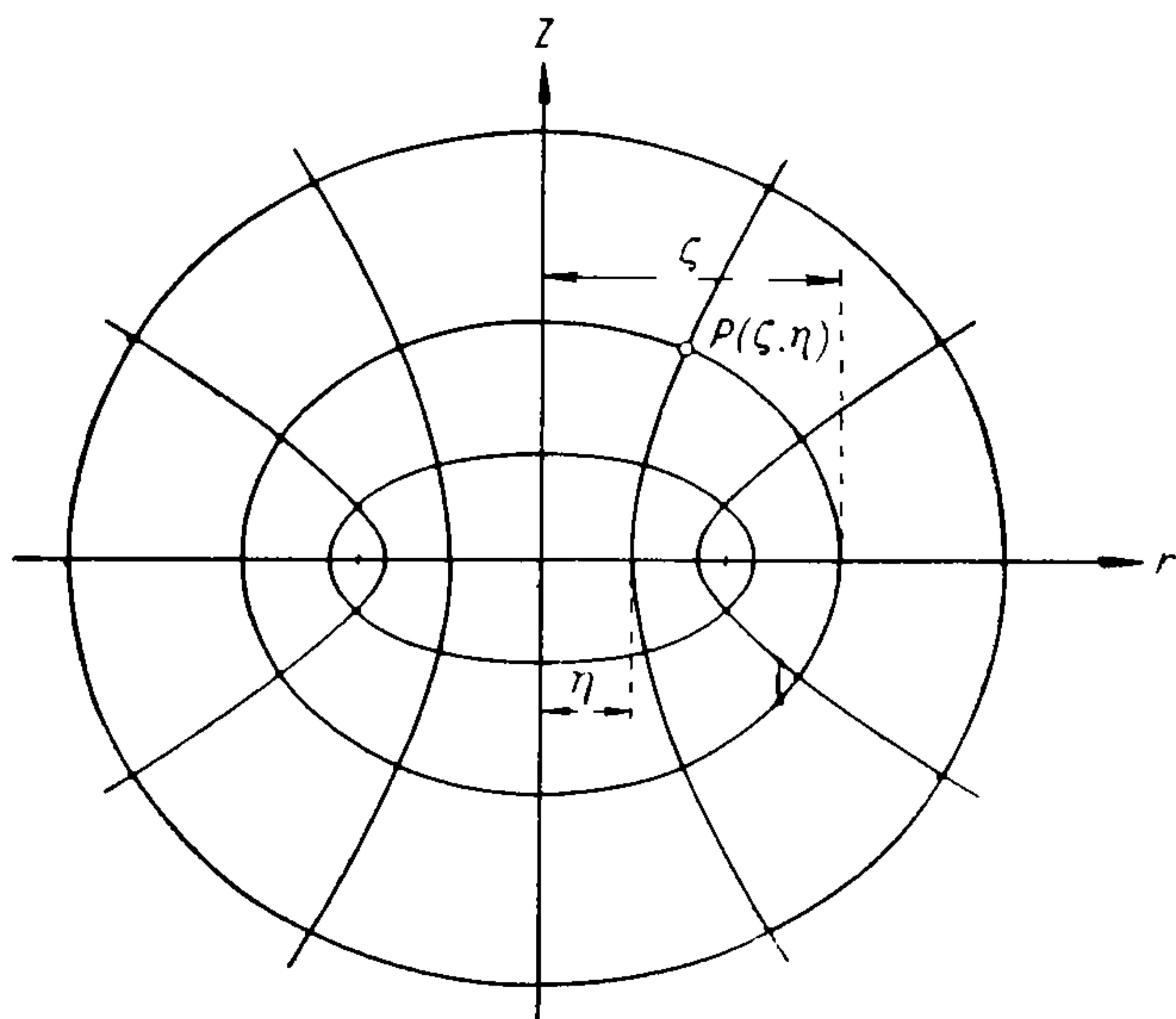


Рис. 18.

Новые координаты ортогональны, чтобы это показать, составим таблицу производных

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \zeta} &= a_1 = \frac{\eta}{a} \cos \psi; & \frac{\partial y}{\partial \zeta} &= a_2 = \frac{\eta}{a} \sin \psi; & \frac{\partial z}{\partial \zeta} &= a_3 = \frac{\zeta}{a} \sqrt{\frac{a^2 - \eta^2}{\zeta^2 - a^2}}; \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= b_1 = \frac{\zeta}{a} \cos \psi; & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= b_2 = \frac{\zeta}{a} \sin \psi; & \frac{\partial z}{\partial \eta} &= b_3 = -\frac{\eta}{a} \sqrt{\frac{\zeta^2 - a^2}{a^2 - \eta^2}}; \\ \frac{\partial x}{\partial \psi} &= c_1 = -\frac{\zeta \eta}{a} \sin \psi; & \frac{\partial y}{\partial \psi} &= c_2 = \frac{\zeta \eta}{a} \cos \psi; & \frac{\partial z}{\partial \psi} &= c_3 = 0, \end{aligned} \right\}$$

и проверяем, что

$$b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3 = c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0.$$

Для того чтобы написать уравнение Лапласа в эллиптических координатах, составляем выражения

$$\left. \begin{aligned} A^2 &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = \frac{\eta^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{a^2} \frac{a^2 - \eta^2}{\zeta^2 - a^2} = \frac{\zeta^2 - \eta^2}{\zeta^2 - a^2}; \\ B^2 &= b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = \frac{\zeta^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{a^2} \frac{\zeta^2 - a^2}{a^2 - \eta^2} = \frac{\zeta^2 - \eta^2}{a^2 - \eta^2}; \\ C^2 &= c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = \frac{\zeta^2 \eta^2}{a^2} \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

и по известной формуле пишем

$$\Delta \varphi = \frac{1}{ABC} \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{BC}{A} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{CA}{B} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{AB}{C} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \right) \right\} = 0. \quad (102)$$

Мы ищем такое решение, которое было бы постоянным на поверхностях $\zeta = \text{const}$; так как точки такой поверхности имеют разные η и ψ , то φ не должно от них зависеть, т. е. $\varphi = \varphi(\zeta)$. Тогда уравнение (102) после сокращения на $1/ABC$ сведется к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta \eta}{a} \sqrt{\frac{\zeta^2 - a^2}{a^2 - \eta^2}} \frac{d\varphi}{d\zeta} \right) = \frac{\eta}{a \sqrt{a^2 - \eta^2}} \frac{d}{d\zeta} \left(\zeta \sqrt{\zeta^2 - a^2} \frac{d\varphi}{d\zeta} \right) = 0$$

или

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\zeta \sqrt{\zeta^2 - a^2} \frac{d\varphi}{d\zeta} \right) = 0. \quad (103)$$

Первый интеграл будет

$$\zeta \sqrt{\zeta^2 - a^2} \frac{d\varphi}{d\zeta} = -h = \text{const},$$

а второй

$$\varphi = -h \int \frac{d\zeta}{\zeta \sqrt{\zeta^2 - a^2}} = \frac{h}{a} \int \frac{d \frac{a}{\zeta}}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{\zeta}\right)^2}} = \frac{h}{a} \arcsin \frac{a}{\zeta} + C. \quad (104)$$

Через очень удаленные точки проходят эллипсоиды с полуосями ζ и $\sqrt{\zeta^2 - a^2}$, стремящимися к бесконечности, так что бесконечно удаленным точкам должно соответствовать $\zeta = \infty$. Отсюда видно, что $C = \varphi_\infty$ и значит постоянную можно положить равной нулю. Для определения постоянной h представим φ как функцию от $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ для больших значений R .

Взяв разложение \arcsin в ряд Маклорена

$$\arcsin u = u + \frac{1}{6} u^3 + \frac{3}{40} u^5 + \dots,$$

мы видим, что при больших ζ можно написать*

$$\varphi = \frac{h}{a} \left[\frac{a}{\zeta} + O\left(\frac{a}{\zeta}\right)^3 \right] = \frac{h}{\zeta} \left[1 + O\left(\frac{a}{\zeta}\right)^2 \right]. \quad (105)$$

* Символ $O(x)$ означает «малая величина порядка x ».

С другой стороны, решая систему (99) относительно ζ , получаем

$$\eta^2 = \frac{a^2 r^2}{\zeta^2};$$

$$z^2 = (\zeta^2 - a^2) \left(1 - \frac{r^2}{\zeta^2}\right),$$

что сводится к биквадратному уравнению

$$\zeta^4 - (a^2 + r^2 + z^2) \zeta^2 + a^2 r^2 = 0,$$

ак как $r^2 + z^2 = R^2$, то

$$\zeta^2 = \frac{R^2 + a^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(R^2 + a^2)^2}{4} - a^2 r^2} = \frac{R^2 + a^2}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4a^2 r^2}{(R^2 + a^2)^2}}\right)$$

Полагая $r = R \cos \theta$ и разлагая это выражение в ряд по степеням a/R , имеем, взяв верхний знак,

$$\zeta^2 = R^2 + a^2 \sin^2 \theta + \dots, \quad (106)$$

а при нижнем знаке

$$\zeta^2 = a^2 \cos^2 \theta + \dots$$

Очевидно, нужно взять верхний знак, т. е. (106), так как при $R \rightarrow \infty$ также должно стремиться к бесконечности. Из (106) получаем далее

$$\frac{h}{\zeta} = \frac{h}{R} \left[1 + O\left(\frac{a}{R}\right)^2\right];$$

$$\left(\frac{a}{\zeta}\right)^2 = O\left(\frac{a}{R}\right)^2 - \dots,$$

и вместо (105) можем написать

$$\varphi = \frac{h}{R} \left[1 + O\left(\frac{a}{R}\right)^2\right], \quad (107)$$

что и показывает, что постоянная интегрирования h есть заряд e нашего эллипсоида, так как потенциал его в бесконечности должен стремиться к значению e/R . Таким образом, окончательно

$$\varphi = \frac{e}{a} \arcsin \frac{a}{\zeta}. \quad (108)$$

Для эллипсоида с $\zeta = \zeta_0$ мы имеем при заряде e

$$V = \frac{e}{a} \arcsin \frac{a}{\zeta_0}, \quad (109)$$

отсюда емкость

$$C = \frac{a}{\arcsin \frac{a}{\zeta_0}} \quad (110)$$

и сопротивление поверхностного заземления

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma C} = \frac{\arcsin \frac{a}{\zeta_0}}{2\pi\sigma a}. \quad (111)$$

Если эллипсоид вырождается в тонкую пластинку, то это значит, что его малая полуось $\sqrt{\zeta_0^2 - a^2}$ стремится к нулю; значит $\zeta_0 = a$.

Емкость такой пластинки

$$C = \frac{a}{\arcsin 1} = \frac{2a}{\pi}, \quad (112)$$

а сопротивление круглого пластинчатого заземления

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma C} = \frac{1}{4a\sigma}. \quad (113)$$

В последнее время предложена конструкция неполяризующихся электродов, в которой контакт с землей осуществляется плоской увлажненной резиновой губкой. Предполагая, что диаметр площади соприкосновения губки с почвой равен 15 см, получим при

$$\sigma = 10^{-4} \text{ (ом}\cdot\text{см)}^{-1}$$

$$R = \frac{1}{30\sigma} = 333 \text{ ом},$$

а при $\sigma = 10^{-6} \text{ (ом}\cdot\text{см)}^{-1}$

$$R = 33\,300 \text{ ом}.$$

Так как от сопротивления потенциометрического электрода зависит точность отсчетов, то в последнем случае можно посоветовать полить водой площадку около метра в поперечнике. Допуская, что увлажнение проникает на 5 см в глубину, уподобим образовавшееся проводящее тело сплюснутому эллипсоиду с осями 50 и 5 см.

Имеем

$$\zeta_0 = 50 \text{ см}; \quad \sqrt{\zeta_0^2 - a_1^2} = \sqrt{2500 - a_1^2} = 5;$$

$$a_1 = \sqrt{2475} = 49,7 \text{ см}.$$

Так как $\arcsin \frac{a}{\zeta_0} = \arcsin 0,994$ равен 1,47, что не очень отличается от $\frac{\pi}{2} = 1,57$, то мы видим, вычисляя по формуле (111), что глубина проникновения воды не так важна, а главную роль играет радиус увлажненной площади. Сопротивление перехода получится равным

$$R \approx \frac{1}{4\sigma a_1} = \frac{10^6}{200} = 5000 \text{ ом},$$

к чему по формуле (88) нужно прибавить сопротивление увлажненного объема. Это сопротивление будет того же порядка, как и вычисленное выше, если вследствие увлажнения мы достигли электропроводности $10^{-4} \text{ (ом}\cdot\text{см)}^{-1}$, т. е. сотни омов, так что оценка снижения сопротивления с 33 000 до 5000 ом по порядку величины будет правильна.

можно назвать коэффициентом полезного действия многократного заземлителя, как это предлагает Ф. Оллендорф [72].

При n одинаковых звеньях заземления мы имеем $C_k = C^*$,

$$R_0 = \frac{1}{2\pi\sigma n C^*} = \frac{R^*}{n}, \quad (124)$$

если R^* — сопротивление одного звена, взятого в отдельности. При учете их взаимодействия в первом приближении, оставляя $q_{kk} = C_k$, но учитывая q_{ik} , мы получаем большее сопротивление, именно

$$\eta = 1 - 2 \frac{\sum_{i>k} \sum |q_{ik}|}{nC^*};$$

$$R = \frac{R_0}{\eta} = \frac{R_0}{1 - 2 \frac{\sum_{i>k} \sum |q_{ik}|}{nC^*}}. \quad (125)$$

Для определения величин q_{ik} в первом приближении мы выразим их через потенциальные коэффициенты. Для этого мы покажем, что в том приближении, которое мы имеем в виду, можно положить

$$p_{rs} = \frac{1}{d_{rs}}, \quad r \neq s. \quad (126)$$

Действительно, тело r , рассматриваемое как малое по сравнению с расстоянием d_{rs} между r и s , имеющее единицу заряда, в объеме, занимаемом телом s и также, по предположению, малом, дает приблизительно постоянный потенциал, равный

$$\varphi = \frac{1}{d_{rs}}. \quad (127)$$

На теле s , если оно отведено к земле, индуцируется заряд q_{rs} , если на теле r заряд равен q_{rr} или q_{rs}/q_{rr} , если заряд тела r равен единице. Заряд распределяется по поверхности тела s так, что создаваемый им потенциал вместе с потенциалом индуцирующего поля давал нуль. Значит, так как последний дается приближенно выражением (127), то потенциал, вызываемый одним индуцированным зарядом в пределах тела s , равен

$$\varphi' = -\frac{1}{d_{rs}}.$$

С точностью до величин высшего порядка отношения размера тел к расстояниям он постоянен, следовательно, заряд q_{rs}/q_{rr} распределен (почти) так, как он распределился бы, если бы он был сообщен телу s , находящемуся в пространстве совершенно отдельно. Поместим теперь на наше тело s дополнительно заряд, равный $-q_{rs}/q_{rr}$; его потенциал будет равен $\varphi = 1/d_{rs}$, и все тело окажется незаряженным. Так как мы обратного действия индуцированного заряда на тело r не рассматриваем, то индуцирующее поле будет то же самое, и мы нашли приближенное выражение потенциала тела s , не име-

ющего заряда и помещенного на расстоянии d_{rs} от тела r , несущего заряд, равный единице, т. е. значение p_{rs} , данное в формуле (126).

Для тела r при пренебрежении обратным действием со стороны прочих незаряженных или отведенных к земле проводников мы имеем $p_{rr} = \frac{1}{q_{rr}} = \frac{1}{C_r}$.

Таким образом, получается таблица приближенных значений коэффициентов p

$$\|p_{rs}\| = \begin{vmatrix} \frac{1}{C_1} & \frac{1}{d_{12}} & \frac{1}{d_{13}} & \dots & \frac{1}{d_{1n}} \\ \frac{1}{d_{21}} & \frac{1}{C_2} & \frac{1}{d_{23}} & \dots & \frac{1}{d_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{d_{n1}} & \frac{1}{d_{n2}} & \frac{1}{d_{n3}} & \dots & \frac{1}{C_n} \end{vmatrix}. \quad (128)$$

Помня, что C_r — величины порядка размера проводников, так что величины C_k/d_{rs} нужно считать малыми, мы вычисляем теперь коэффициенты q_{rs} . По правилам алгебры мы должны, разрешая систему

$$V_i = \sum_k e_k p_{ki} \quad (129)$$

относительно e_k , т. е. желая получить

$$e_k = \sum_i V_i q_{ik}, \quad (130)$$

составить определитель Δ системы (129), подопределители Δ_{ki} , соответствующие элементам p_{ki} , и написать

$$q_{ik} = \frac{\Delta_{ki}}{\Delta}. \quad (131)$$

Разложим определитель Δ по элементам строки, в которой встречается член p_{ki}

$$\Delta = p_{k1} \Delta_{k1} + p_{k2} \Delta_{k2} + \dots + p_{ki} \Delta_{ki} + \dots + p_{kn} \Delta_{kn}.$$

Ясно, что член p_{ki} не содержится ни в одном из Δ_{ki} (мы отвлекаемся сейчас от того, что в нашем случае $p_{ki} = p_{ik}$). Поэтому сразу видно, что, считая Δ функцией всех элементов p_{ik} как независимых величин,

$$\Delta_{ki} = \frac{\partial \Delta}{\partial p_{ki}},$$

откуда

$$q_{ik} = \frac{\Delta_{ki}}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial p_{ki}} = \frac{\partial \ln \Delta}{\partial p_{ki}}. \quad (132)$$

Вычислим теперь Δ ; в развернутом виде мы получим, во-первых, член, содержащий произведение всех членов главной диагонали, т. е.

$$\frac{1}{C_1 C_2 \dots C_n}, \quad (133)$$

затем ряд членов, получающихся как произведение членов по диагонали после перестановки любой пары строк. Если переставляемые строки имеют номера r и s , то в произведении будут $n - 2$ диагональных члена нетронутых строк, а от переставленных в диагональ попадут два члена $1/d_{rs}$ и $1/d_{sr}$. Поэтому следующая за первым группа членов будет представлять сумму членов вида

$$\sum_{r \neq s} \sum \frac{1}{C_1 C_2 \dots C_{r-1} d_{rs} C_{r+1} \dots C_{s-1} d_{sr} C_{s+1} \dots C_n},$$

причем все эти члены, как происшедшие вследствие одной перестановки строк, будут отрицательны. Дальнейшие члены развернутого определителя будут иметь еще меньше множителей типа $1/C$, и, как мы сейчас увидим, неинтересны. Вынося (133) за скобки, получаем

$$\Delta = \frac{1}{C_1 C_2 \dots C_n} \left(1 - \sum_{r \neq s} \sum \frac{C_r C_s}{d_{rs} d_{sr}} + \dots \right).$$

Невыписанные члены будут высших порядков по отношению к величинам C_r/d_{rs} , которые мы считаем малыми.

Теперь составим $\ln \Delta$, считая двойную сумму величиной малой по сравнению с единицей и применяя к логарифму скобки известное разложение $\ln(1 - x) = -x - \dots$,

$$\ln \Delta \approx \sum_r \ln \frac{1}{C_r} - \sum_{r \neq s} \sum \frac{C_r C_s}{d_{rs} d_{sr}}. \quad (134)$$

Отсюда уже легко получаем

$$q_{rr} = \frac{\partial \ln \Delta}{\partial p_{rr}} = \frac{\partial \ln \Delta}{\partial \left(\frac{1}{C_r} \right)} \approx C_r + \sum_{s \neq r} \frac{C_r^2 C_s}{d_{rs} d_{sr}} = C_r \left[1 + \sum_{s \neq r} \frac{C_r C_s}{(d_{rs})^2} \right], \quad (135)$$

где, с принятой нами точностью, скобку, как содержащую величины второго порядка, нужно заменить единицей. Далее

$$q_{ik} = \frac{\partial \ln \Delta}{\partial p_{ik}} = \frac{\partial \ln \Delta}{\partial \left(\frac{1}{d_{ik}} \right)} \approx - \frac{C_i C_k}{d_{ik}}. \quad (136)$$

Таким образом, требуемые коэффициенты найдены, и можно указать приближенное значение сопротивления многократного заземлителя, если известны сопротивления каждого из звеньев и расстояния между ними. При одинаковых звеньях можно дать окончательное выражение на основании формулы (125). В этом случае

$$q_{ik} = - \frac{C^*{}^2}{d_{ik}}$$

и, вычисляя сумму, стоящую в (125), мы получаем

$$\frac{2}{n} \sum_{i>k} \sum \frac{|q_{ik}|}{C^*} = \frac{2C^*}{n} \sum_{i>k} \sum \frac{1}{d_{ik}};$$

помня, что $C^* = \frac{1}{2\pi\sigma R^*}$, запишем теперь формулу (125) в виде

$$R = \frac{R_0}{1 - \frac{1}{\pi\sigma R^* n} \sum_{i>k} \sum \frac{1}{d_{ik}}}.$$

Так как по (124) $R^* n = R_0 n^2$, то получаем

$$R = \frac{R_0}{1 - \frac{1}{\pi\sigma R_0} \cdot \frac{1}{n^2} \sum_{i>k} \sum \frac{1}{d_{ik}}} = \frac{R_0}{1 - \frac{M_n}{\pi\sigma R_0}}, \quad (137)$$

где

$$M_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i>k} \sum \frac{1}{d_{ik}} = \frac{1}{2n^2} \sum_{i \neq k} \sum \frac{1}{d_{ik}}. \quad (138)$$

Симметричное заземление получается, если расположить звенья под вершинами правильного n -угольника. Для этого случая можно указать формулу для вычисления M_n .

Пусть A — радиус описанного круга, O — его центр. Центральный угол между радиусами, проведенными к двум соседним заземлениям, равен $2\pi/n$, а расстояние между заземлениями 1 и k , как легко видеть из рис. 19, равно

$$d_{k1} = 2A \sin \frac{k\pi}{n}.$$

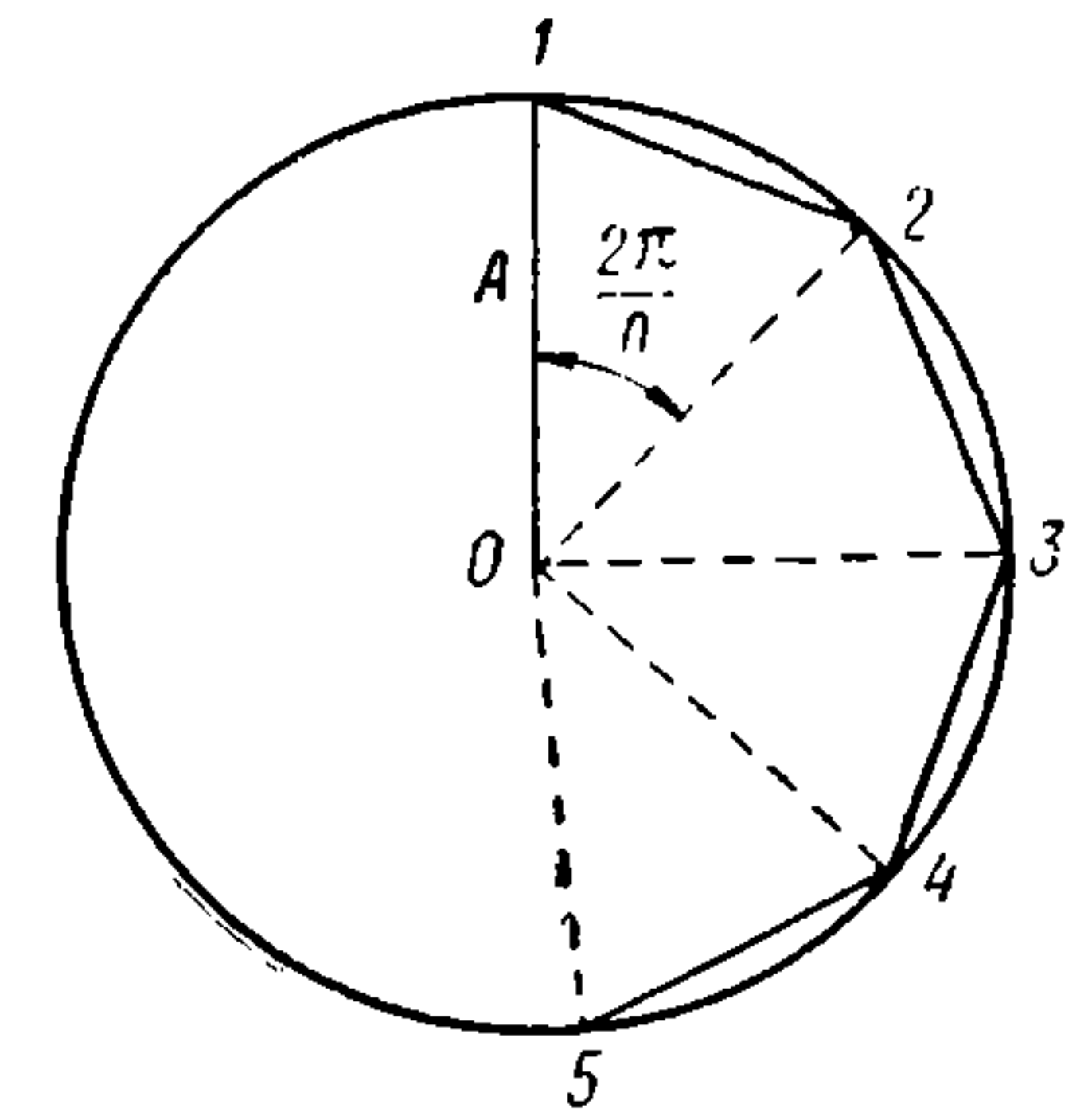


Рис. 19.

При вычислении суммы удобно воспользоваться последним из выражений в формуле (138), так как эта сумма равна n раз взятой сумме

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{d_{k1}} = \frac{1}{2A} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin \frac{k\pi}{n}}. \quad (139)$$

Таким образом,

$$M_n = \frac{n}{4An^2} \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{cosec} \frac{k\pi}{n} = \frac{1}{4A} f(n). \quad (140)$$

Для значений

$$f(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sin \frac{k\pi}{n}} \quad (141)$$

можно составить табл. 1.

Эти же данные даем на графике (рис. 20).

Таблица 1

| n | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $f(n)$ | 0,500 | 0,770 | 0,957 | 1,101 | 1,218 | 1,317 | 1,402 | 1,478 | 1,545 |
| n | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 20 |
| $f(n)$ | 1,606 | 1,661 | 1,712 | 1,760 | 1,804 | 1,845 | 1,883 | 1,920 | 1,987 |

Таким образом,

$$R = \frac{R_0}{1 - \frac{f(n)}{4\pi\sigma A R_0}}. \quad (142)$$

По поставленным нами условиям поправка должна быть величиной не слишком большой, поэтому можно написать эту формулу и так:

$$R \approx R_0 \left[1 + \frac{f(n)}{4\pi\sigma A R_0} \right],$$

откуда получается

$$R \approx R_0 + \frac{f(n)}{4\pi\sigma A}.$$

В данной степени приближения можно сказать, что к R_0 прибавляется поправка

$$\Delta R = \frac{f(n)}{4\pi\sigma A}, \quad (143)$$

так что

$$R = R_0 + \Delta R. \quad (144)$$

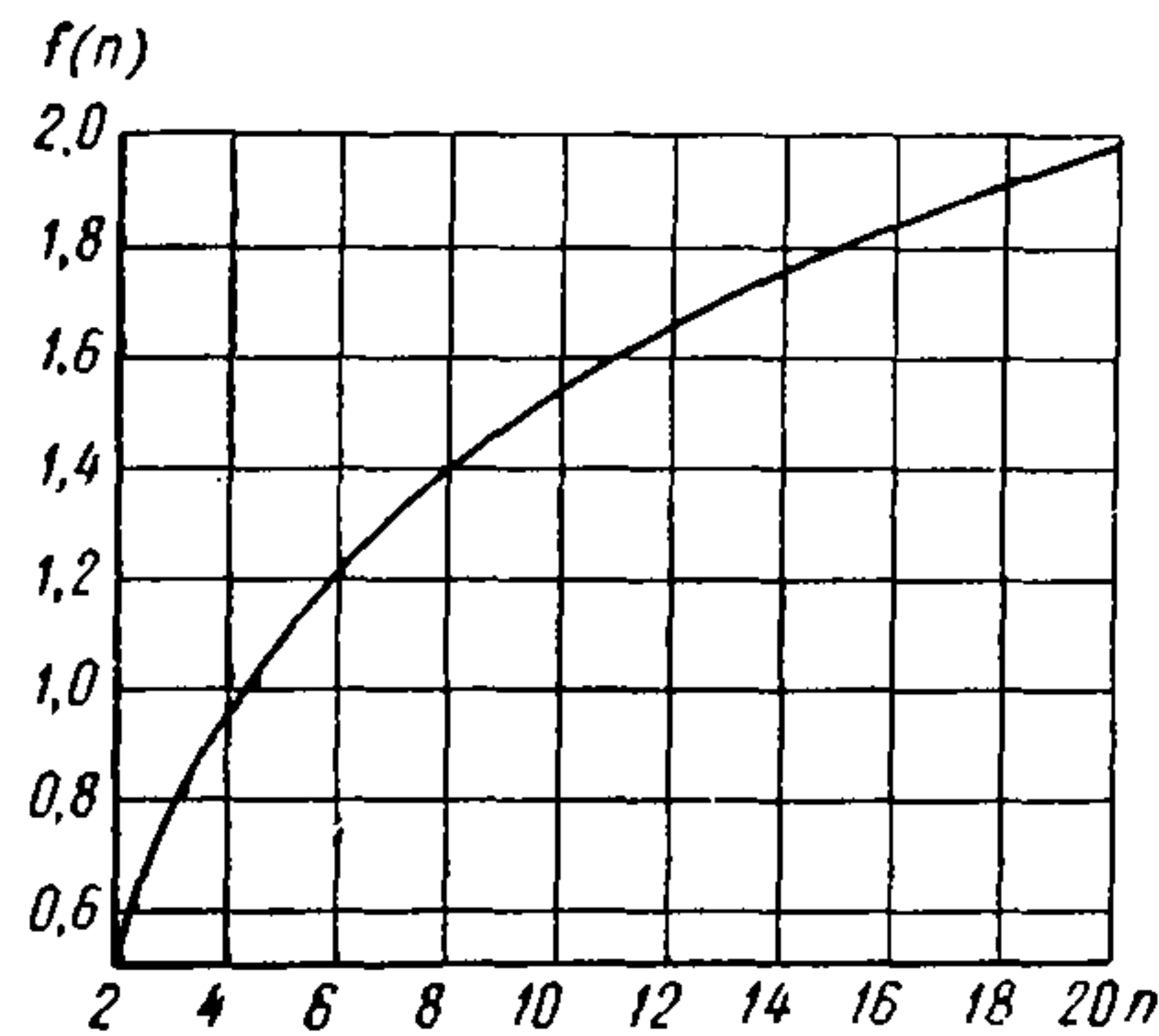


Рис. 20.

Шестнадцать одинаковых шпилек, для которых мы вычислили в § 9 $R = 250$ ом при $\sigma = 10^{-4}$ (ом·см) $^{-1}$, расположенные по кругу с радиусом в 5 м, дадут сопротивление по приближенной формуле (144)

$$R = \frac{250}{16} + \frac{1,845 \cdot 10^4}{4 \cdot 3,14 \cdot 500} = 15,6 + 2,9 = 18,5 \text{ ом};$$

по более точной формуле (142) получится

$$R = \frac{15,6}{1 - 0,188} = 19,2 \text{ ом}.$$

Расстояние между ближайшими шпильками будет в нашем примере $10 \sin \frac{\pi}{16} = 1,95$ м, что не очень велико по сравнению с линейными размерами шпильки, так как нужно рассматривать шпильки, дополненные зеркальным отражением, т. е. длиной 60 см. Поэтому это приближение будет грубовато, но оно показывает, что в рассмотренном случае мы получаем сопротивление на 20—25% большее, чем по нулевому приближению, т. е. рассчитанное как сопротивление параллельно включенных проводников.

Если поправка получается большая, то к формулам (122) и (142) нужно отнестись с осторожностью, так как очевидно взаимодействие проводников велико, и обратными действиями пренебрегать нельзя. В этом случае формула только указывает, что увеличение числа звеньев заземлителя перестает приносить пользу, и что большего эффекта можно достигнуть, только увеличивая расстояния между ними.

§ 12. НЕЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ЭЛЕКТРОД

Если электрод представляет собой тело, имеющее очень большую длину по сравнению со своим поперечным сечением, и питающий ток входит в него в одной или нескольких удаленных друг от друга точках, то может случиться, что нельзя будет пренебречь падением потенциала вдоль него, и электрод перестанет быть эквипотенциальным.

Представим себе наш электрод в виде провода, непосредственно не соприкасающегося с землей, но заземленного через более или менее равные промежутки шпильками, имеющими более или менее одинаковые сопротивления (в смысле их сопротивления как заземлений).

Около каждого заземления имеют место следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} r_k I_k &= V_{k-1} - V_k; & r_{k+1} I_{k+1} &= V_k - V_{k+1}; \\ R_k (I_k - I_{k+1}) &= V_k. \end{aligned} \right\} \quad (145)$$

Первая строчка есть закон Ома для участков провода между заземлениями, причем

$$r_k = r_1 (x_{k+1} - x_k),$$

где x_{k+1} и x_k — координаты точек заземления, а r_1 — сопротивление провода на единицу длины.

Вторая строчка есть выражение связи силы тока, ответвляемого через k -е заземление, потенциала провода в точке k (потенциал в земле на большом расстоянии, как всегда, принимается за нуль) и сопротивление заземления R_k . Нижняя часть рис. 21 представляет собой эквивалентную схему, причем, так как сопротивления заземлений введены в нее полностью и явно, нужно считать потенциал земли равным нулю. За сопротивление одной шпильки нужно взять не ее сопротивление как одиночного заземления, а рассмотренное в предыдущем параграфе эффективное ее сопротивление в многократном заземлении (достаточно иметь грубую оценку или ориентировочные экспериментальные данные).

Из написанных равенств легко получить соотношения

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= \frac{V_k - V_{k+1}}{r_{k+1}}; & I_k &= \frac{V_{k-1} - V_k}{r_k}; \\ R_k (I_{k+1} - I_k) &= R_k \left[-\frac{V_{k+1}}{r_{k+1}} + V_k \left(\frac{1}{r_{k+1}} + \frac{1}{r_k} \right) - \frac{V_{k-1}}{r_k} \right] = -V_k; \\ V_{k+1} - V_k &\left(1 + \frac{r_{k+1}}{r_k} + \frac{r_{k+1}}{R_k} \right) + V_{k-1} \frac{r_{k+1}}{r_k} = 0. \end{aligned} \quad (146)$$

Если здесь положить все $r_k = r_{k+1} = \dots = r$, $R_k = R_{k+1} = \dots = R$, то оно получает вид

$$V_{k+1} - V_k \left(2 + \frac{r}{R}\right) + V_{k-1} = 0. \quad (146a)$$

Это однородное уравнение второго порядка в конечных разностях может быть решено приемами теории конечных разностей, на чем мы здесь останавливаться не будем.

Очевидно, что если $R_k = \infty$, то от точек $k - 1$ до $k + 1$ мы будем иметь линейное падение потенциала при неразветвленном токе. В действительности получится некоторый излом, но при малых значениях r_{k+1}/R_k очень незначительный. Медный провод сечением

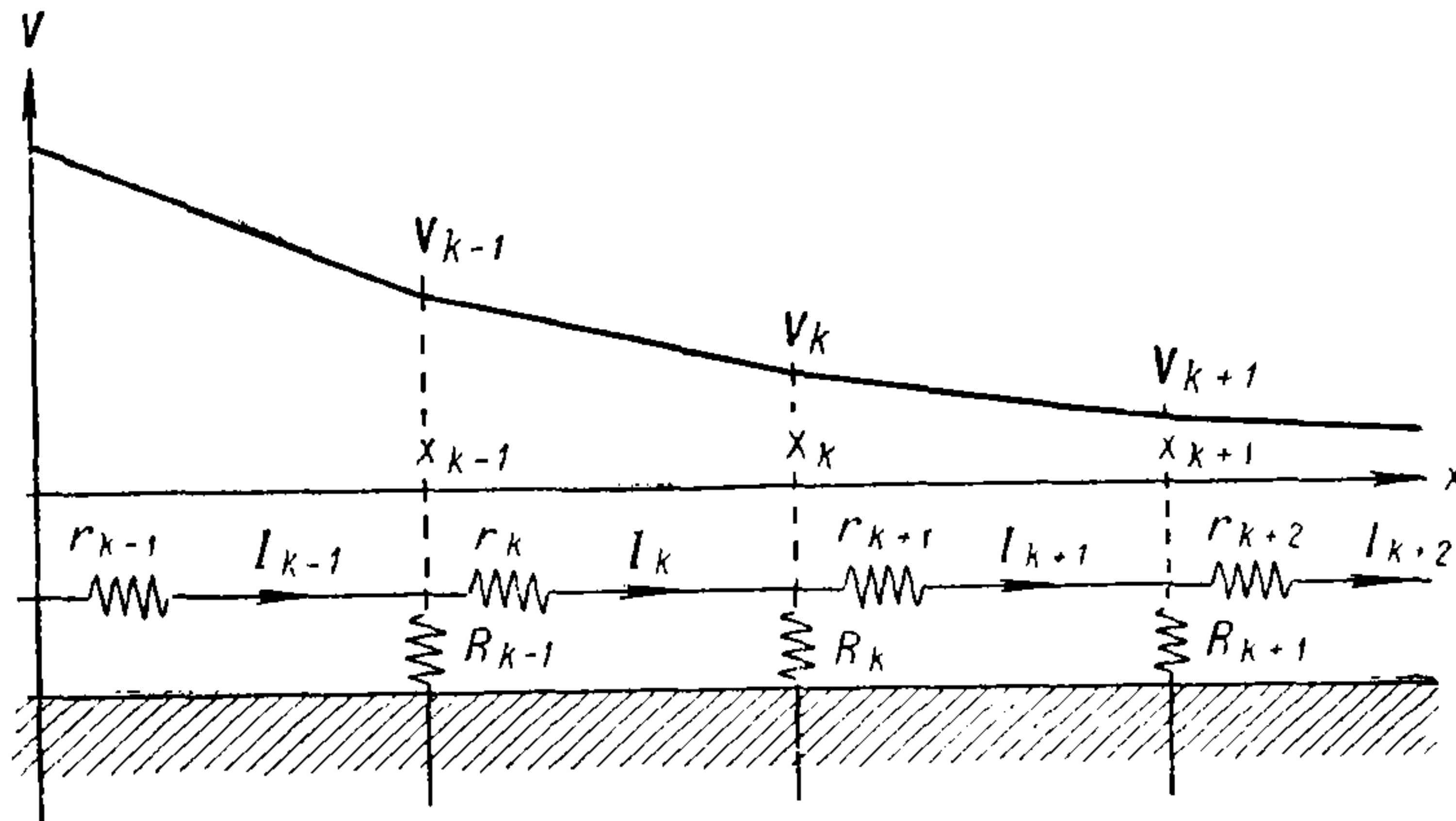


Рис. 21.

10 мм² на 5 м длины имеет сопротивление порядка 10⁻² ом, а заземляющая шпилька, как мы вычисляли, — сопротивление порядка 300 ом*. Поэтому нет смысла вычислять все изломы, а можно поставить себе задачу рассчитать усредненное распределение потенциала; это можно сделать, как мы увидим, предполагая лишь некоторую приближенную правильность в распределении заземлений и приближенное равенство величин R_k , что ближе соответствует практике. Обозначим через Δx длину отрезка электрода, содержащего некоторое число n заземлений между N -м и $N + n$ -м, не считая первого. Считая по проводнику, мы будем иметь падение потенциала

$$-\Delta V = \sum_N^{N+n-1} I_s r_s = r_1 \sum_N^{N+n-1} I_s (x_{s+1} - x_s). \quad (147)$$

Пусть отношение r_s к R_s настолько мало, что сумма токов, ответвленных через все n заземлений, мала по сравнению с током I , мало

* Это значение мы берем довольно произвольно; нужно помнить, что при близком расположении шпилек по данным предыдущего параграфа средняя проводимость заземления меньше, чем для каждого в отдельности, а сопротивление — больше.

меняющимся, следовательно, вдоль рассматриваемого участка. Назовем

$$\frac{1}{\Delta x} \sum_N^{N+n-1} I_s (x_{s+1} - x_s) = \bar{I} \quad (148)$$

средним значением тока на данном участке. Тогда

$$-\Delta V = r_1 \Delta x \bar{I}. \quad (149)$$

С другой стороны, на этом участке сила тока по проводнику упадет вследствие ответвлений в землю на величину

$$-\Delta I = \sum_{N+1}^{N+n} \frac{V_s}{R_s}. \quad (150)$$

В силу сделанных допущений мы можем написать

$$\sum_{N+1}^{N+n} \frac{V_s}{R_s} = n \frac{\bar{V}}{\bar{R}}, \quad (151)$$

где \bar{V} — среднее значение потенциала на данном участке, а \bar{R} — средняя величина сопротивлений включенных параллельно шпилек, и мы считаем, что n достаточно велико, чтобы это среднее получилось независимым от N и n ; тогда \bar{R} есть определенная характеристика качества заземления электрода.

Пусть на единицу длины приходится ν заземлений; тогда

$$\frac{\nu}{\bar{R}} = \frac{1}{R_1} \quad (152)$$

есть проводимость заземлений на единицу длины. Далее мы имеем

$$n = \nu \Delta x, \quad (153)$$

предполагая, что случайные колебания в расстояниях отдельных заземлений на участке, имеющем n заземлений, в среднем выравниваются.

Таким образом, получаем из (150), (151), (152) и (153)

$$-\Delta \bar{I} = n \frac{\bar{V}}{\bar{R}} = \bar{V} \Delta x \frac{\nu}{\bar{R}} = \frac{\bar{V} \Delta x}{R_1}. \quad (154)$$

Переходя теперь к другому масштабу, в котором Δx — малая величина и \bar{V} и \bar{I} рассматриваются как плавные функции x , мы можем написать вместо (149) и (154)

$$-d\bar{V} = r_1 \bar{I} dx; \quad -d\bar{I} = \frac{\bar{V}}{R_1} dx. \quad (155)$$

Отсюда получаем дифференциальное уравнение для V (черта сверху для обозначения средних значений в дальнейшем опускается)

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{r_1}{R_1} V, \quad (156)$$

общий интеграл которого известен

$$V = Ae^{\sqrt{\frac{r_1}{R_1}}x} + Be^{-\sqrt{\frac{r_1}{R_1}}x} - P \operatorname{ch} \sqrt{\frac{r_1}{B_1}}x + Q \operatorname{sh} \sqrt{\frac{r_1}{R_1}}x. \quad (157)$$

Для I получаем

$$I = -\frac{1}{r_1} \cdot \frac{dV}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{r_1 R_1}} \left(P \operatorname{sh} \sqrt{\frac{r_1}{R_1}}x + Q \operatorname{ch} \sqrt{\frac{r_1}{R_1}}x \right). \quad (158)$$

Обычно условия на концах провода, из которых надлежит определить постоянные интегрирования, задаются так, что на одном конце ($x = 0$) дается либо потенциал, либо сила питающего тока, а другой конец свободен, т. е. провод кончается при $x = L$ последним заземлением. При большом числе заземлений (а только для этого случая и годится наше усредненное рассмотрение) через каждое заземление идет ток ничтожно малый по сравнению с током, поступающим в электрод и на последнем заземлении потенциал провода ниже, чем где бы то ни было; так как в последнем звене провода идет ток последнего заземления, то на конце можно положить $I = 0$.

Для сокращения письма введем обозначение

$$\lambda = \sqrt{\frac{r_1}{R_1}} L \quad (159)$$

и определим постоянные P и Q из условий

$$\left. \begin{aligned} I_0 &= -\frac{Q}{\sqrt{r_1 R_1}} \quad x=0; \\ 0 &= P \operatorname{sh} \lambda + Q \operatorname{ch} \lambda \quad x=L. \end{aligned} \right\} \quad (160)$$

Отсюда находим

$$Q = -\sqrt{r_1 R_1} I_0; \quad P = \sqrt{r_1 R_1} I_0 \operatorname{cth} \lambda, \quad (161)$$

и для V имеем окончательное решение

$$V = \sqrt{r_1 R_1} I_0 \frac{\operatorname{ch} \lambda \operatorname{ch} \lambda \frac{x}{L} - \operatorname{sh} \lambda \operatorname{sh} \lambda \frac{x}{L}}{\operatorname{sh} \lambda} = \sqrt{r_1 R_1} I_0 \frac{\operatorname{ch} \left[\lambda \left(1 - \frac{x}{L} \right) \right]}{\operatorname{sh} \lambda}; \quad (162)$$

при $x=0$ имеем

$$V_0 = \sqrt{r_1 R_1} I_0 \operatorname{cth} \lambda, \quad (163)$$

поэтому можем написать (162) в таком виде:

$$V = V_0 \frac{\operatorname{ch} \lambda \left(1 - \frac{x}{L} \right)}{\operatorname{ch} \lambda}. \quad (164)$$

Таблица гиперболических функций (табл. 3) приведена в конце этой главы, более полные таблицы в работах Глазенапа и А. Н. Крылова [28, 58].

Полное сопротивление такого электрода, рассматриваемого как заземление, равно

$$R = \frac{V_0}{I_0} = \sqrt{r_1 R_1} \operatorname{cth} \lambda. \quad (165)$$

При очень малых L эта формула, конечно, неприменима — при небольшом числе заземлений нужно пользоваться методами предыдущего параграфа; при $L \rightarrow \infty$ мы имеем $\operatorname{cth} \infty = 1$,

$$R_\infty = \sqrt{r_1 R_1};$$

несмотря на бесконечно большое число заземлений, сопротивление остается конечным, что показывает, что, благодаря падению напряжения, очень далекие участки электрода практически лишены тока, и поэтому их присутствие не влияет на повышение проводимости и уменьшение сопротивления всего заземления.

Разность потенциалов между началом и концом электрода равна

$$V_0 - V_L = V_0 \frac{\operatorname{ch} \lambda - 1}{\operatorname{ch} \lambda}. \quad (166)$$

Относительное падение потенциала от начала до конца провода равно

$$\eta = \frac{\operatorname{ch} \lambda - 1}{\operatorname{ch} \lambda} = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda}. \quad (167)$$

Приводим табл. 2 значений η как функции величины λ и график (рис. 22).

Таблица 2

| λ | η | λ | η | λ | η | λ | η | λ | η |
|-----------|--------|-----------|--------|-----------|--------|-----------|--------|-----------|--------|
| 0,0 | 0,000 | 0,5 | 0,113 | 1,0 | 0,352 | 1,5 | 0,575 | 2,0 | 0,734 |
| 0,1 | 0,005 | 0,6 | 0,156 | 1,1 | 0,401 | 1,6 | 0,612 | 2,1 | 0,759 |
| 0,2 | 0,020 | 0,7 | 0,203 | 1,2 | 0,448 | 1,7 | 0,646 | 2,2 | 0,781 |
| 0,3 | 0,043 | 0,8 | 0,252 | 1,3 | 0,493 | 1,8 | 0,678 | 2,3 | 0,801 |
| 0,4 | 0,075 | 0,9 | 0,302 | 1,4 | 0,535 | 1,9 | 0,707 | 2,4 | 0,820 |

Предположим, что провод электрода имеет длину 1 км и сопротивление $2 \cdot 10^{-3} \text{ ом} \cdot \text{м}^{-1}$ на погонный метр; при заземлении шпильками через 4 м и сопротивлении шпильки 500 ом, по (165), имеем $R_1 = 2000 \text{ ом}$,

$$L \sqrt{\frac{r_1}{R_1}} = \lambda = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{-3}}{2000}} 10^6 = 1,00,$$

следовательно, можно ожидать падения напряжения в конце на 35% при общем сопротивлении электрода, по (165)

$$R = \sqrt{2 \cdot 10^{-3} \cdot 2000} \operatorname{cth} 1,0 = 2,63 \text{ ом}.$$

Уменьшив число шпилек в четыре раза (заземляя через 16 м), мы увеличим R_1 в четыре раза и уменьшим λ вдвое; падение напряжения на конце будет всего на 11%, а общее сопротивление $\text{cth } 0,5 \sqrt{2 \cdot 10^{-3} \cdot 8000} = 8,65 \text{ ом}$. Для этих двух случаев на рис. 23 (кривые I и II) показано относительное распределение потенциала вдоль всего электрода, рассчитанное по формуле (164), принимая оба раза $V_0 = 100$.

Рассмотрим еще вопрос о влиянии многократного питания на распределение потенциала вдоль электрода. Пусть питающий ток I разделяется на два, I_I и I_{II} , подведенных к различным точкам электрода (рис. 24). Сопротивления ответвлений питательной цепи поло-

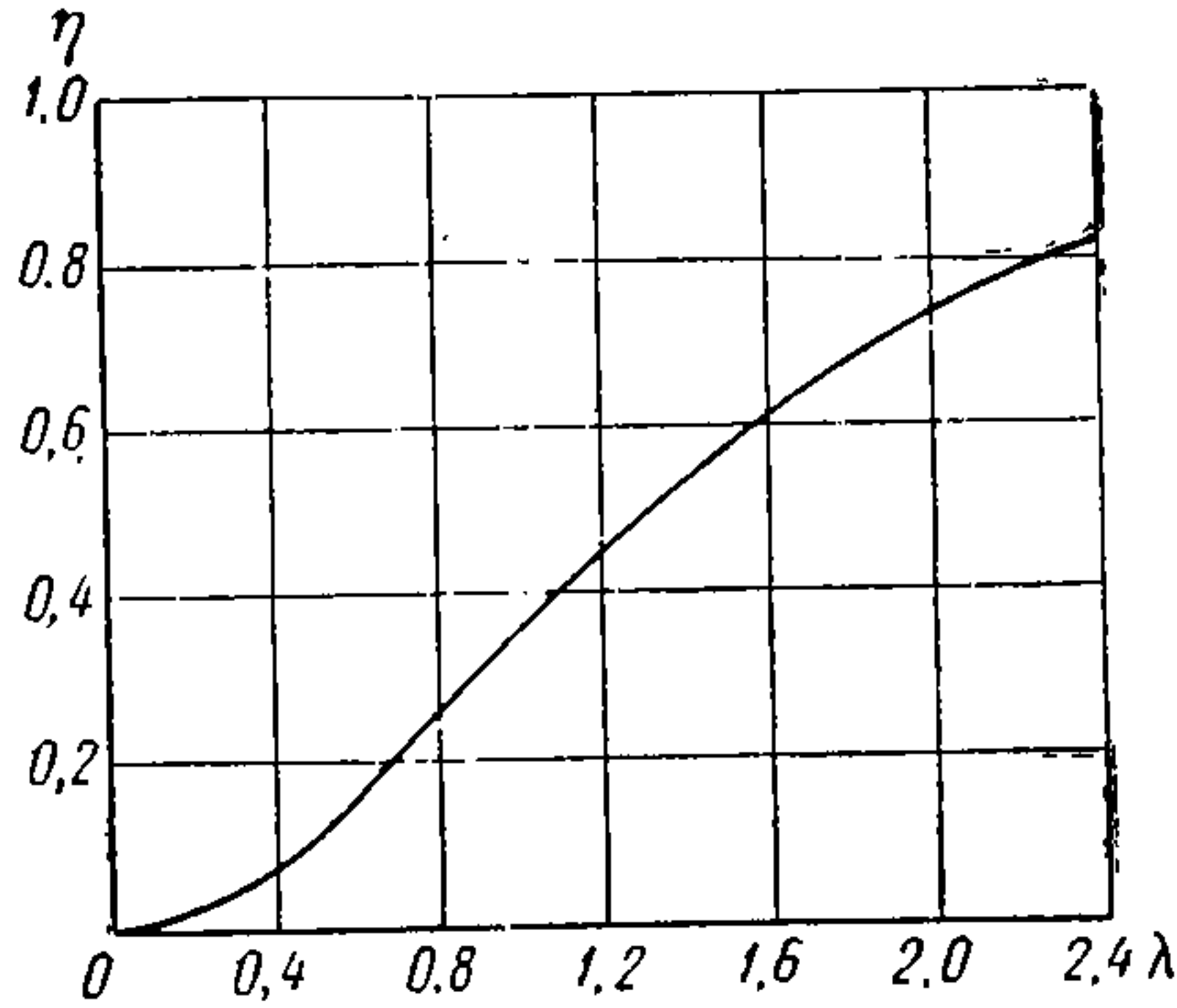


Рис. 22.

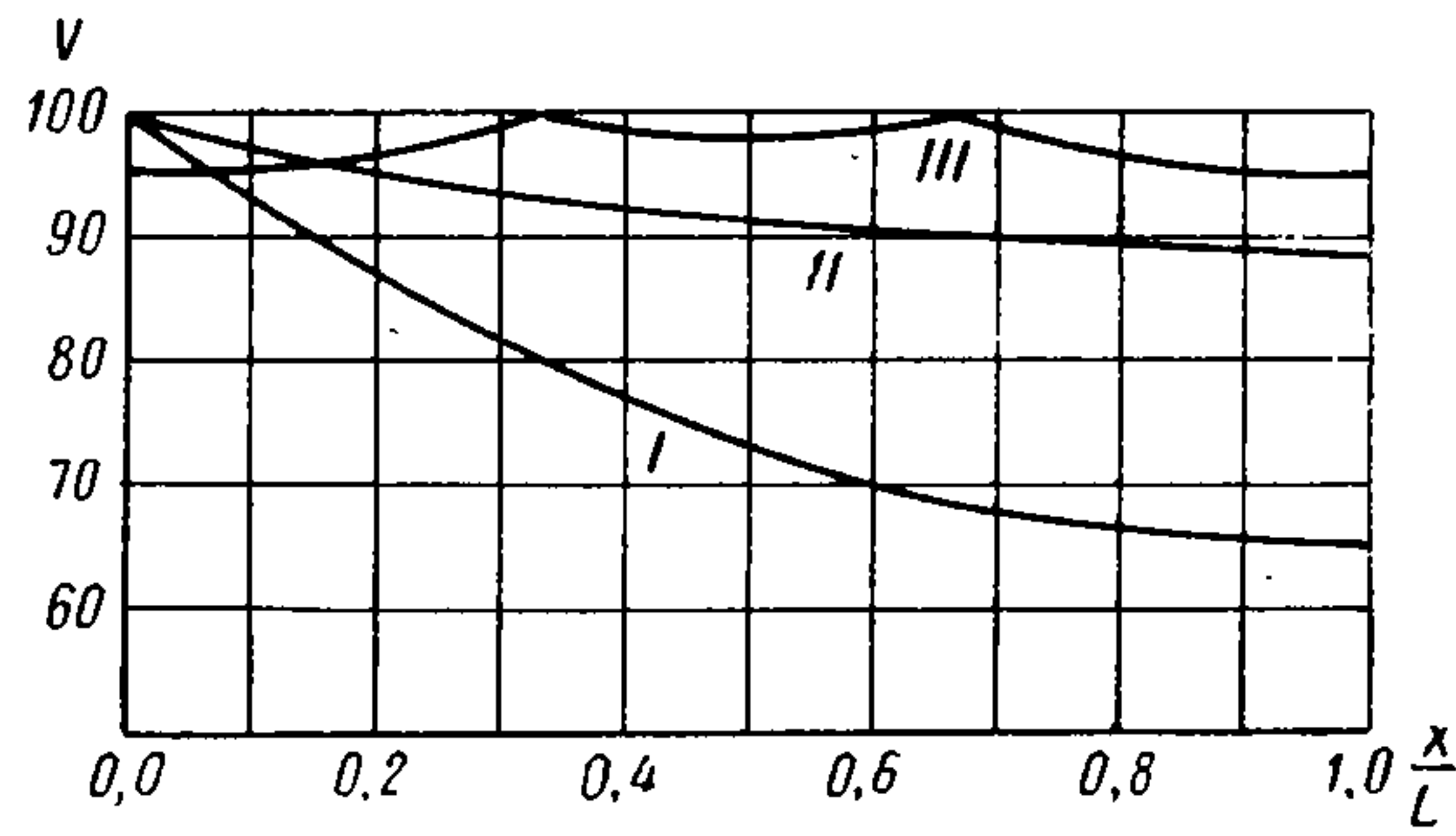


Рис. 23.

жим равными R_I и R_{II} . В точке разветвления пусть будет потенциал V . Введем для упрощения письма новую переменную

$$\zeta = x \sqrt{\frac{r_1}{R_1}}, \quad (168)$$

которая в конце электрода при $x = L$ принимает значение $\zeta = \lambda$. Разобьем электрод на три участка OI , II , III и напомним для каждого из них граничные условия, исходя из решения для каждого из них в виде

$$\left. \begin{aligned} V_{OI} &= P_{OI} \text{ch } \zeta + Q_{OI} \text{sh } \zeta; \\ I_{OI} &= -\frac{1}{\sqrt{r_1 R_1}} (P_{OI} \text{sh } \zeta + Q_{OI} \text{ch } \zeta); \\ V_{II} &= P_{II} \text{ch } \zeta + Q_{II} \text{sh } \zeta; \\ I_{II} &= -\frac{1}{\sqrt{r_1 R_1}} (P_{II} \text{sh } \zeta + Q_{II} \text{ch } \zeta); \\ V_{III} &= P_{III} \text{ch } \zeta + Q_{III} \text{sh } \zeta; \\ I_{III} &= -\frac{1}{\sqrt{r_1 R_1}} (P_{III} \text{sh } \zeta + Q_{III} \text{ch } \zeta). \end{aligned} \right\} \quad (169)$$

Нам нужно написать условия: непрерывности потенциала в точках I и II ; равенства нулю тока в точках O и L , и приравнять сумму

токов, расходящихся по электроду в обе стороны от I и II — токам питания I_I и I_{II} , причем нужно помнить, что токи по электроду у нас написаны как идущие от O к L , так что, например, для тока, идущего от I влево, нужно взять обратный знак. Шесть граничных уравнений будут иметь вид

$$\left. \begin{aligned} V_I &= P_{OI} \text{ch } \zeta_I + Q_{OI} \text{sh } \zeta_I = P_{II} \text{ch } \zeta_I + Q_{II} \text{sh } \zeta_I; \\ V_{II} &= P_{II} \text{ch } \zeta_{II} + Q_{II} \text{sh } \zeta_{II} = P_{III} \text{ch } \zeta_{II} + Q_{III} \text{sh } \zeta_{II} \\ &\quad - \sqrt{r_1 R_1} I_0 = Q_{OI} = 0 \\ I_I &= \frac{1}{\sqrt{r_1 R_1}} [(P_{OI} - P_{II}) \text{sh } \zeta_I + (Q_{OI} - Q_{II}) \text{ch } \zeta_I]; \\ I_{II} &= \frac{1}{\sqrt{r_1 R_1}} [(P_{II} - P_{III}) \text{sh } \zeta_{II} + (Q_{II} - Q_{III}) \text{ch } \zeta_{II}] \\ &\quad - \sqrt{r_1 R_1} I = P_{III} \text{sh } \lambda + Q_{III} \text{ch } \lambda = 0. \end{aligned} \right\} \quad (170)$$

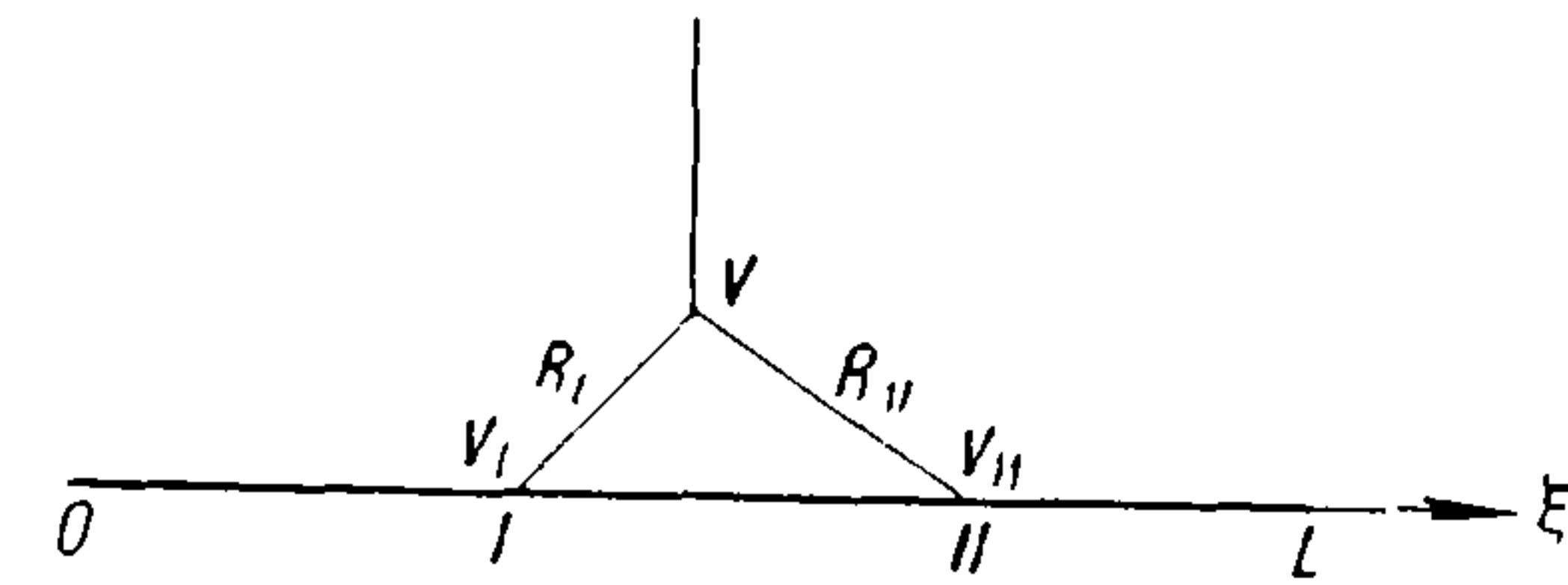


Рис. 24.

Из этих 8 уравнений 6 неизвестных коэффициентов и токи I_I и I_{II} выразятся через V_I и V_{II} .

Для составления графика относительного распределения потенциала будем считать заданным потенциал V . Тогда мы можем написать еще два уравнения

$$\left. \begin{aligned} V_I &= V - I_I R_I; \\ V_{II} &= V - I_{II} R_{II}, \end{aligned} \right\} \quad (171)$$

из которых и получим величины, выраженные через V .

В общем случае выкладки получаются очень сложные, но по существу совершенно элементарные. Мы рассмотрим, как пример, случай, когда точками питания электрод делится на три равные части, и когда сопротивления R_I и R_{II} одинаковы и равны R_0 (рис. 25). Тогда ясно, что

$$I_I = I_{II} = \frac{I}{2}; \quad V_I = V_{II} = V - \frac{IR_0}{2}.$$

Ввиду того, что решение должно получиться симметричным относительно средней точки, удобно ввести новое начало координат посередине. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \zeta'_1 &= \zeta - \frac{\lambda}{2}; & \zeta'_2 &= -\frac{\lambda}{6}; \\ \zeta'_{II} &= \frac{\lambda}{6}; & \zeta'_0 &= -\frac{\lambda}{2}; & \zeta'_L &= \frac{\lambda}{2}. \end{aligned} \right.$$

Кроме того, ясно, что при $\zeta' = 0$ ток в электроде должен равняться нулю; поэтому задача сводится к задаче — электрод половинной длины, питаемый в одной точке половиной общего тока. Система уравнений, подлежащих решению, сильно упрощается; мы имеем два участка:

$$1) 0 \leq \zeta' \leq \frac{\lambda}{6} \quad V' = P' \operatorname{ch} \zeta' + Q' \operatorname{sh} \zeta';$$

$$I' = -\frac{1}{V r_1 R_1} (P' \operatorname{sh} \zeta' + Q' \operatorname{ch} \zeta');$$

$$2) \frac{\lambda}{6} \leq \zeta' \leq \frac{\lambda}{2} \quad V'' = P'' \operatorname{ch} \zeta' + Q'' \operatorname{sh} \zeta';$$

$$I'' = -\frac{1}{V r_1 R_1} (P'' \operatorname{sh} \zeta' + Q'' \operatorname{ch} \zeta')$$

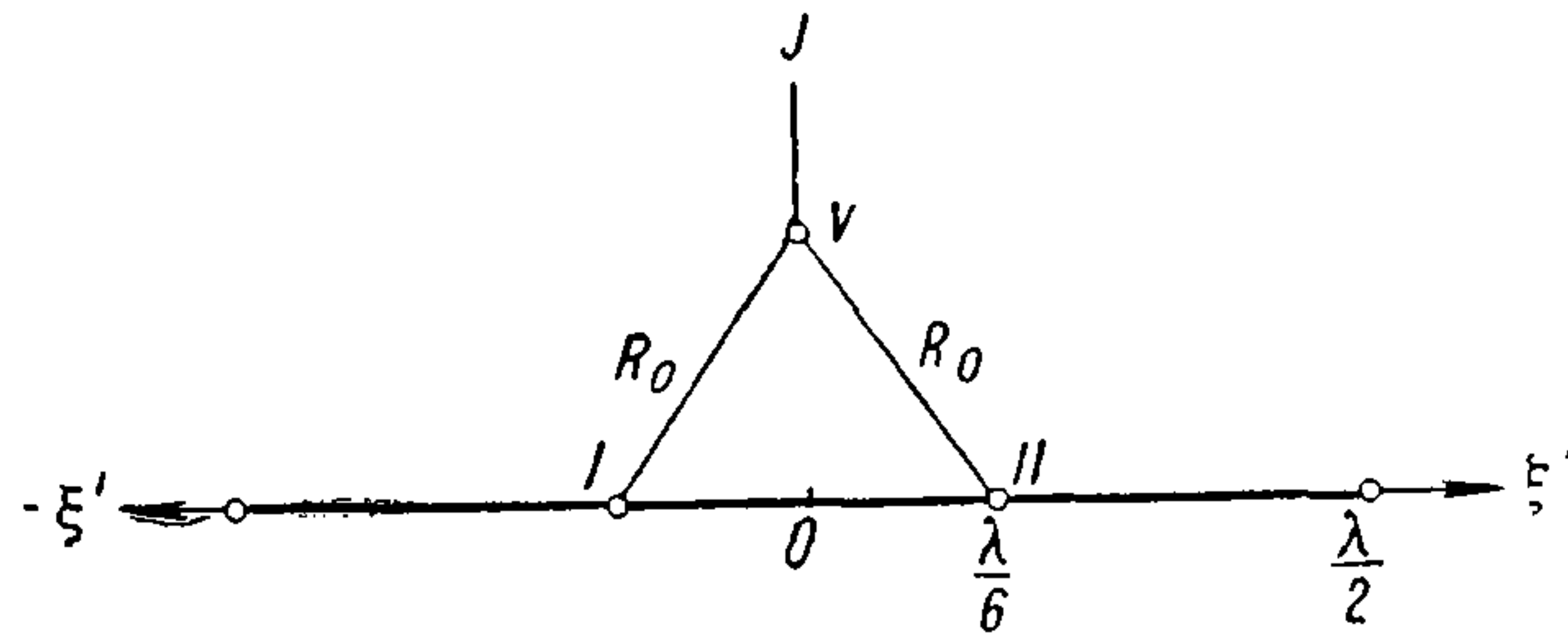


Рис. 25.

и уравнения на их границах,

$$\zeta' = 0; \quad Q' = 0.$$

$$\zeta' = \frac{\lambda}{6}; \quad (P' - P'') \operatorname{ch} \frac{\lambda}{6} + (Q' - Q'') \operatorname{sh} \frac{\lambda}{6} = 0;$$

$$(P' - P'') \operatorname{sh} \frac{\lambda}{6} + (Q' - Q'') \operatorname{ch} \frac{\lambda}{6} = \frac{I}{2} V r_1 R_1;$$

$$\zeta' = \frac{\lambda}{2}; \quad P'' \operatorname{sh} \frac{\lambda}{2} + Q'' \operatorname{ch} \frac{\lambda}{2} = 0.$$

Решая их, получаем

$$P' = \frac{I V r_1 R_1}{2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\lambda}{3}}{\operatorname{sh} \frac{\lambda}{2}}; \quad P'' = \frac{I V r_1 R_1}{2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\lambda}{6} \operatorname{ch} \frac{\lambda}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\lambda}{2}};$$

$$Q'' = -\frac{I V r_1 R_1}{2} \operatorname{ch} \frac{\lambda}{6}.$$

С этими значениями получаем при $\zeta' = \frac{\lambda}{6}$

$$V_{II} = \frac{I V r_1 R_1}{2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\lambda}{3} \operatorname{ch} \frac{\lambda}{6}}{\operatorname{sh} \frac{\lambda}{2}} \quad (172)$$

и распределение потенциала

$$V' = V_{II} \frac{\operatorname{ch} \zeta'}{\operatorname{ch} \frac{\lambda}{6}}; \quad V'' = V_{II} \frac{\operatorname{ch} \left(\frac{\lambda}{2} - \zeta' \right)}{\operatorname{ch} \frac{\lambda}{3}}.$$

Относительное распределение потенциала для этого случая изображено на рис. 23 (кривая III) при тех же значениях r_1 и R_1 , как и для кривой I, причем в точках питания V принято равным 100, как и на кривых I и II.

Если наш электрод один раз питается с конца, а затем по последней схеме, то сравнение этих двух случаев можно довести до конца. Пусть \mathcal{E} — электродвижущая сила генератора, R_{ab} — сопротивление генератора и питающего кабеля на участке ab (рис. 26). Мы вычислили для I случая сопротивление электрода R_I ; значит полное сопротивление цепи $R_{ab} + 2R_I$, а сила тока

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{ab} + 2R_I}.$$

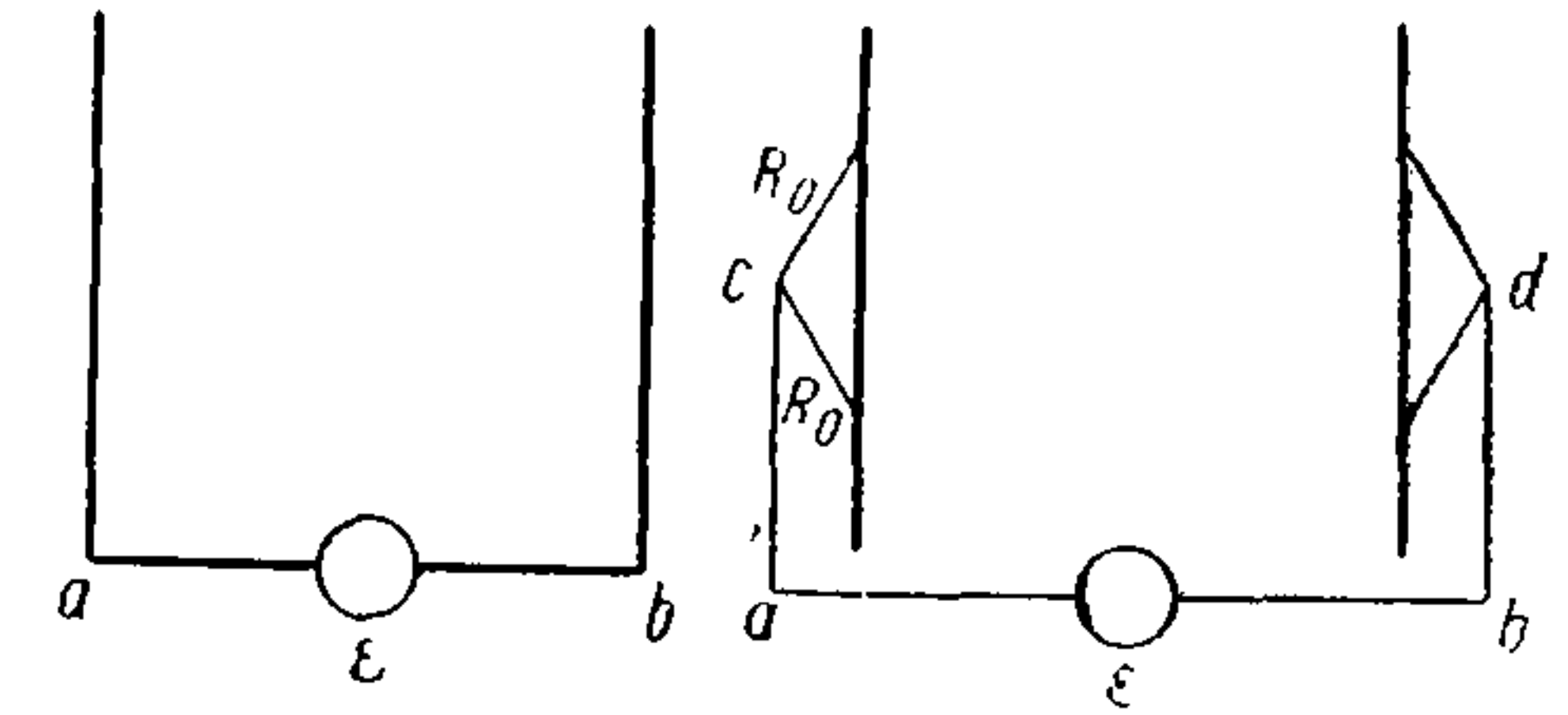


Рис. 26.

Разность потенциалов на электродах в точках a и b будет равна

$$2V_I = \frac{\mathcal{E} 2R_I}{R_{ab} + 2R_I}, \quad (173)$$

откуда и получим численное значение V_I и настоящий масштаб ординат кривой I (рис. 23). Во втором случае мы имеем новое сопротивление электрода R_{III} и общее сопротивление цепи

$$R_{ab} + 2R_{ac} + R_0 + 2R_{III}.$$

Между точками c и d будет разность потенциалов

$$2V = \frac{\mathcal{E} (R_0 + 2R_{III})}{R_{ab} + 2R_{ac} + R_0 + 2R_{III}},$$

а потенциал в точках питания электрода, обозначенный в формуле (172) через V_{II} , будет

$$V_{III} = V - \frac{IR_0}{2} = \frac{\mathcal{E} R_{III}}{R_{ab} + 2R_{ac} + R_0 + 2R_{III}}, \quad (174)$$

причем мы его теперь обозначаем через V_{III} для согласования с нумерацией кривых на рис. 23.

Под R_{III} очевидно нужно понимать величину

$$R_{III} = \frac{V_{III}}{I} = \frac{\sqrt{r_1 R_1}}{2} \cdot \frac{\operatorname{ch} \frac{\lambda}{3} \operatorname{ch} \frac{\lambda}{6}}{\operatorname{sh} \frac{\lambda}{2}},$$

считая параллельно включенными два сопротивления по $2V_{III}/I$ каждое.

Для тех же данных, как для кривой I , получаем

$$R_{III} = 2,06 \text{ ом};$$

$R_{III} < R_I$, так как заземления работают более равномерно.

Заметим, что для измерений в поле важны не значения потенциала на электродах, а сила тока, так как градиент потенциала при данном удельном сопротивлении почвы пропорционален плотности тока, которая, при прочих равных условиях, пропорциональна общей силе питающего тока.

В предположении, что для питающих кабелей сопротивление на погонный метр равно $3,33 \cdot 10^{-3} \text{ ом} \cdot \text{м}^{-1}$, получаем, пренебрегая сопротивлением генератора, подставляя числа в (173) и (174) и полагая длину $ac = 500 \text{ м}$, а длину сопротивления $R_0 = 167 \text{ м}$,

$$V_I = 0,306 \text{ в}; \quad I_I = 0,116 \text{ в};$$

$$V_{III} = 0,183 \text{ в}; \quad I_{III} = 0,088 \text{ в}.$$

Для случая II получаем

$$V_{II} = 0,418 \text{ в}; \quad I_{II} = 0,048 \text{ в}.$$

В рассмотренных примерах качество заземления несколько увеличено против практики, для того, чтобы рассматриваемый эффект выступил яснее. Из наших расчетов следует, что уменьшать поперечное сечение электродного провода не следует, иначе при вполне возможных в практике обстоятельствах можно получить весьма заметное падение потенциала вдоль электрода и связанное с этим искажение поля. Принятые в нашем расчете данные для r_1 соответствуют медному проводу в 10 мм^2 сечения. Питающие кабели для удешевления и облегчения полевого оборудования принято брать с сечением 6 мм^2 . Сравнение кривых I и III (рис. 23) показывает, что одним только перераспределением питания можно сильно выравнять распределение потенциала вдоль электрода; правда, усложненное питание требует удлинения питающей цепи (в нашем случае с 1000 до 2333 м , т. е. более чем вдвое), что не всегда желательно. Поэтому другая возможность, иллюстрируемая кривой II (рис. 23), не лишена практической ценности; увеличение общего сопротивления электрода может, конечно, тоже оказаться вредным, но так как до сих пор линейные электроды применялись при переменном токе, то с этим можно бороться, повышая напряжение трансформатором или применяя, если это нужно, усилители в приемной цепи. К случаю переменного тока рассуждения этого отдела при-

менимы с некоторыми оговорками, о которых речь будет во второй части.

С проникновением в практику удобной методики измерений на постоянном токе можно рассчитывать на то, что метод эквипотенциальных линий с линейными электродами будет применяться и с постоянным током, особенно в тех случаях, когда сопротивление почвы мало. Как мы увидим во второй части, посвященной полям переменного тока, в этих случаях особенно приходится считаться с искажением полей от индукции, что и заставляет думать о переходе к постоянному току. Применяя постоянный ток, нет надобности питать электрод с конца, а наиболее естественно проложить питающий кабель по середине планшета, переделав по изложенной выше схеме все расчеты, причем, как легко видеть, в двух первых случаях (питание в одной точке, но посередине) падение потенциала будет уменьшено, а в третьем случае — относительная картина останется без изменения, но вследствие экономии в один километр подводящих проводов потеря напряжения на питающих проводах по сравнению с предыдущими случаями не будет столь велика.

Таблица 3

| x | $\operatorname{sh} x$ | $\operatorname{ch} x$ | $\operatorname{th} x$ | $\operatorname{cth} x$ |
|-----|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| 0,0 | 0,0000 | 1,000 | 0,0000 | ∞ |
| 0,1 | 0,1002 | 1,005 | 0,0997 | 10,033 |
| 0,2 | 0,2013 | 1,020 | 0,1974 | 5,066 |
| 0,3 | 0,3045 | 1,045 | 0,2913 | 3,432 |
| 0,4 | 0,4108 | 1,081 | 0,3800 | 2,632 |
| 0,5 | 0,5211 | 1,128 | 0,4621 | 2,164 |
| 0,6 | 0,6367 | 1,185 | 0,5370 | 1,862 |
| 0,7 | 0,7586 | 1,255 | 0,6044 | 1,655 |
| 0,8 | 0,8881 | 1,337 | 0,6640 | 1,506 |
| 0,9 | 1,027 | 1,433 | 0,7163 | 1,396 |
| 1,0 | 1,175 | 1,543 | 0,7616 | 1,313 |
| 1,1 | 1,336 | 1,669 | 0,8005 | 1,249 |
| 1,2 | 1,509 | 1,811 | 0,8337 | 1,200 |
| 1,3 | 1,698 | 1,971 | 0,8617 | 1,160 |
| 1,4 | 1,904 | 2,151 | 0,8854 | 1,130 |
| 1,5 | 2,129 | 2,352 | 0,9052 | 1,105 |
| 1,6 | 2,376 | 2,577 | 0,9217 | 1,085 |
| 1,7 | 2,646 | 2,828 | 0,9354 | 1,069 |
| 1,8 | 2,942 | 3,107 | 0,9468 | 1,056 |
| 1,9 | 3,268 | 3,418 | 0,9562 | 1,046 |
| 2,0 | 3,627 | 3,762 | 0,9640 | 1,037 |
| 2,1 | 4,022 | 4,144 | 0,9705 | 1,030 |
| 2,2 | 4,457 | 4,568 | 0,9757 | 1,025 |
| 2,3 | 4,937 | 5,037 | 0,9801 | 1,020 |
| 2,4 | 5,466 | 5,557 | 0,9837 | 1,017 |
| 2,5 | 6,050 | 6,132 | 0,9866 | 1,013 |
| 2,6 | 6,695 | 6,769 | 0,9890 | 1,011 |
| 2,7 | 7,406 | 7,473 | 0,9910 | 1,009 |
| 2,8 | 8,192 | 8,253 | 0,9926 | 1,007 |
| 2,9 | 9,060 | 9,115 | 0,9940 | 1,006 |
| 3,0 | 10,018 | 10,068 | 0,9951 | 1,005 |

Различная электропроводность почвы на протяжении электрода сказывается на сопротивлении шпилек; если σ есть функция координаты, взятой вдоль электрода, то при геометрически равномерном распределении шпилек вдоль электрода значение усредненного переходного сопротивления на единицу длины, обозначенное у нас через R_1 , будет функцией координат, и уравнение (156) уже не будет интегрироваться так просто. Неравномерное падение потенциала сказывается очень сильно на ходе эквипотенциальных линий около электрода и может исказить картину всего поля. Изменяя соответствующим образом густоту шпилек на электроде, можно управлять этой функцией, а именно: так как R (среднее сопротивление шпилек на данном участке) обратно пропорционально σ , то и v (число шпилек на единицу длины) нужно брать обратно пропорциональным σ . При некотором опыте уже на основании осмотра местности можно наметить, где ставить шпильки гуще, и где реже; простейший способ проконтролировать правильное распределение заземлений — это проведение эквипотенциальной линии вблизи электрода (примерно метрах в 30—50 от него).

Если есть основание ожидать сильного перекоса и искажения всего поля, то лучше затратить время на этот контроль и добиться равномерного заземления, чем переделывать весь планшет или сделать неудовлетворительную работу.

Глава III

НОРМАЛЬНЫЕ ПОЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА *

§ 13. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Задача электрических методов разведки состоит в обнаружении некоторых неоднородностей в толще земли, не выходящих на поверхность. Для этого исследуются электрические и магнитные поля, создаваемые искусственно (за исключением метода естественного поля), причем в этом отделе мы рассматриваем только поля токов, введенных в землю при посредстве определенным образом расположенных заземлений. Полное исследование всего электрического или магнитного поля во всем объеме, конечно, дало бы, при посредстве уравнений Максвелла, возможность установить величины ϵ , μ и σ в каждой точке пространства, т. е. изучить его структуру в электромагнитном отношении совершенно однозначно. Но такой подход нереален, так как предполагает доступность любой точки исследуемого пространства, а тогда совершенно ясно, что всякая разведка по электрическим признакам становится излишней. На самом деле

* Результаты последующих исследований нормальных полей различных источников рассмотрены в опубликованных работах [24, 25, 26, 27, 122]. — Прим. ред.

доступно измерению лишь поле на поверхности земли и только в редких случаях можно произвести измерения над землей или под ее поверхностью в подземных выработках.

Можно строго показать, что, измеряя поле только в одной поверхности, нельзя сделать однозначных заключений о вызвавших его причинах. Как простейший пример возьмем распределение заряда внутри некоторой сферы, причем такое, что плотность заряда есть функция расстояния от центра, т. е. заряд распределен по концентрическим сферам с постоянной плотностью на данной сфере и с произвольным распределением плотности вдоль радиуса. Как хорошо известно, поле вне этих зарядов есть поле алгебраической суммы всех зарядов, сосредоточенной в центре сферы, и совершенно не зависит от того, как мы распределим этот общий заряд между концентрическими слоями. Стало быть, если мы не можем подойти к определенной точке пространства ближе некоторого расстояния a , и во всем доступном пространстве измеряем потенциал e/r , то все, что мы можем сказать, это то, что в доступных нам пределах никаких зарядов нет, а внутри сферы с радиусом a находится суммарный заряд e с распределением, имеющим шаровую симметрию. Для многих целей подобное заключение может иметь большое значение, так как нельзя сказать, что в предыдущем примере мы *ничего* не могли узнать об объекте, вызывающем поле: мы определили положение его центра, нашли верхний предел величины объема, в котором он может находиться, нашли его общий заряд и определили некоторые особенности, характеризующие его пространственное распределение, именно его шаровую симметрию. Если бы последняя была нарушена, то прямой расчет показал бы, что на внешнем поле это должно было отразиться совершенно определенным образом, и мы могли бы, путем анализа внешнего поля, указать некоторые количественные характеристики (дипольный момент и моменты высшего порядка), характеризующие это пространственное распределение. Если по ряду других соображений можно сделать несколько гипотез о характере объекта, то исследование поля может значительно сузить возможные предположения, а иногда даже дать практически достаточно определенный ответ. Как было указано выше, за исключением метода естественного поля, мы пользуемся в электроразведке искусственными полями, т. е. полями, вызванными известными источниками. Такие поля можно рассчитать теоретически, если сделать предположение, что среда имеет вполне определенные свойства, например, однородна, или состоит из двух однородных частей (воздух, однородная земля), разделенных плоскостью или какой-нибудь другой известной нам поверхностью раздела. Можно задаться и более сложными картинами закономерного распределения неоднородностей среды, воспроизводя таким образом «нормальную» геологическую картину какого-нибудь района или участка. В случае больших математических трудностей можно искусственно создать такую обстановку, «модель», причем эта модель может быть взята в уменьшенном размере, и измерения проделаны в лаборатории. Само собой, что переход от действительных размеров к модели должен быть сделан на основании теоретического

расчета, для того, чтобы было сохранено «подобие» не только геометрическое, но и в электромагнитном отношении. Действительно наблюдаемое поле может либо совпасть с достаточной точностью с таким «нормальным полем», либо показывать некоторые «аномалии». Для выделения этих аномалий и нужно знать нормальные поля.

Второй важной задачей является вычисление (или модельное исследование) типичных аномалий, так как прямых методов расчета источников аномалий по самим аномалиям не существует. Задача интерпретации полученных аномалий, т. е. основная задача всякого метода прикладной геофизики в конце концов решается всегда так, что, построив гипотезу (на основании геологических возможностей) о причине аномалии, ее проверяют прямым расчетом или сравнением с уже рассчитанными или изученными модельным путем аномалиями от известных объектов. Само собой, знание общего характера аномалий, получающихся в данном методе от типичных объектов, позволяет зачастую непосредственно сделать заключение об общих чертах дающего аномалию объекта (рудная залежь, проводящий или непроводящий слой, утолщение наносного слоя, контакт двух пород, анизотропия, т. е. сланцеватость и т. п.) и может сильно облегчить процесс подыскания гипотез, возможных как с геологической, так и физической стороны. Откладывая вычисление типичных аномальных полей до следующей главы, мы в этой главе займемся вопросом о нормальных полях постоянного тока.

§ 14. НОРМАЛЬНОЕ ПОЛЕ ТОЧЕЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Если простое или сложное заземление сосредоточено на небольшой площади, с линейными размерами порядка нескольких метров, то уже на расстоянии немногих десятков метров его поле можно

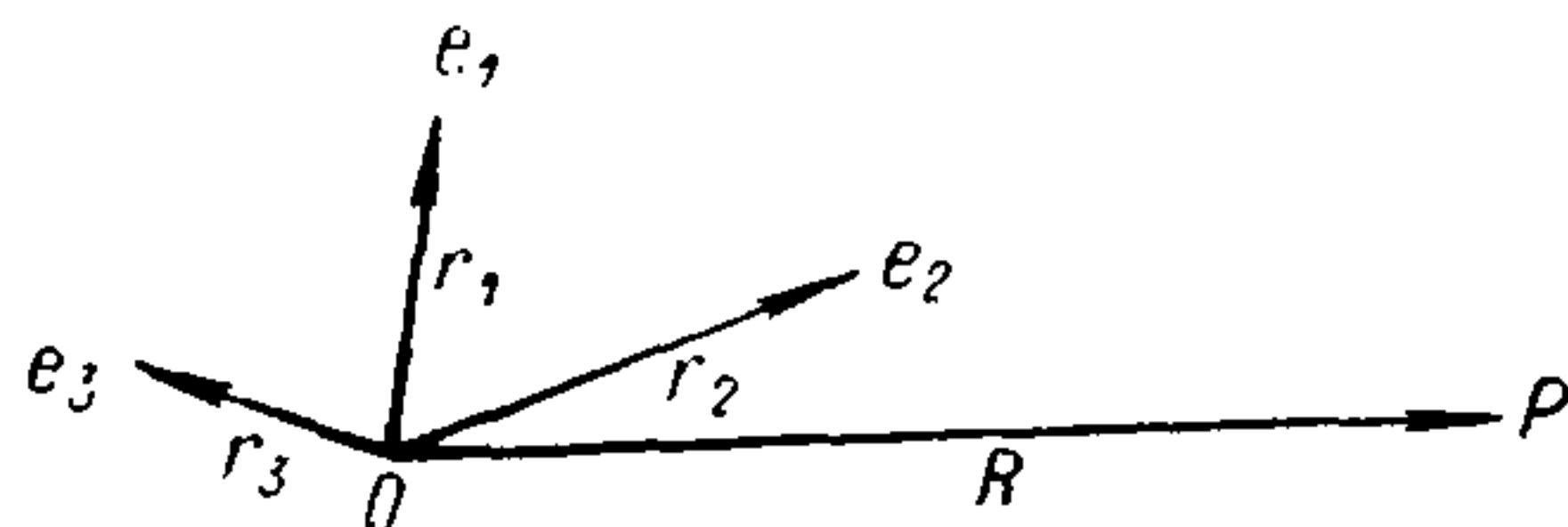


Рис. 27.

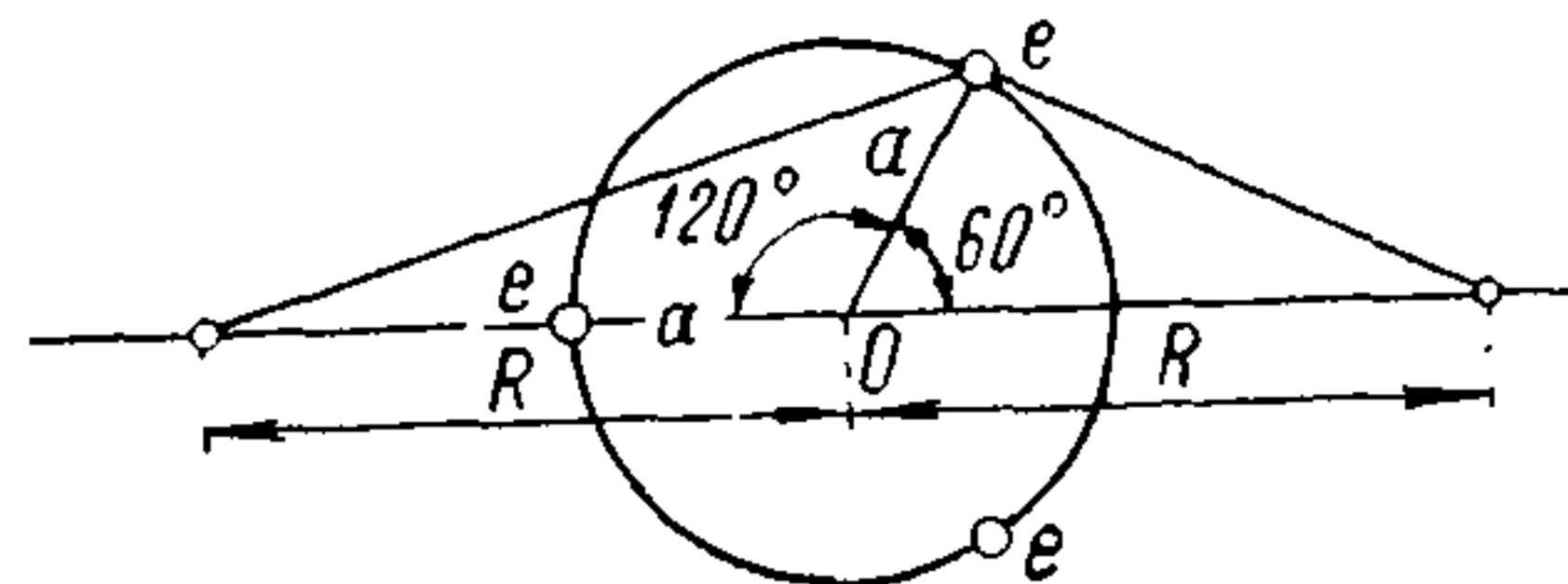


Рис. 28.

рассчитывать как поле точечного источника. На основании установленной нами аналогии между задачами на ток и электростатическими, мы можем сослаться на теорему электростатики, гласящую, что потенциал любой конечной системы зарядов можно разложить в ряд по обратным степеням расстояния от некоторой точки внутри нее, которую мы принимаем за центр. Если мы обозначим (рис. 27)

$$\sum e_i = e; \quad \sum e_i r_i = p,$$

то первые два члена разложения

$$\varphi = \frac{e}{R} + \frac{(pR)}{R^3} + \dots$$

и следующие члены будут иметь высшие степени R в знаменателе. Второй член можно написать в виде

$$\frac{(R \sum e_i r_i)}{R^3} = \frac{1}{R} \left(\frac{R}{R} \sum e_i \frac{r_i}{R} \right),$$

и ясно, что по отношению к первому члену он будет порядка первой степени отношения линейных размеров системы к расстоянию R . Подобный же анализ дальнейших членов разложения дает оценку их порядка $(r_i/R)^2$ и т. д.

В качестве примера рассмотрим симметричное трехточечное заземление, и вычислим потенциал на расстояниях $R = a, 2a, \dots$, где a — радиус круга заземления. Элементарным построением получаем для точек диаметра, проходящего через один из зарядов, и его продолжения в обе стороны, влево 1 и вправо 2 (рис. 28), формулы

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= \frac{3e}{R} \left[\frac{R}{3(R-a)} + \frac{2R}{3\sqrt{R^2+aR+a^2}} \right] = \\ &= \frac{3e}{R} \left[\frac{1}{3\left(1-\frac{a}{R}\right)} + \frac{2}{3\sqrt{1+\frac{a}{R}+\left(\frac{a}{R}\right)^2}} \right] = \frac{3e}{R} \alpha_1; \\ \varphi^{(2)} &= \frac{3e}{R} \left[\frac{R}{3(R+a)} + \frac{2R}{3\sqrt{R^2-aR+a^2}} \right] = \\ &= \frac{3e}{R} \left[\frac{1}{3\left(1+\frac{a}{R}\right)} + \frac{2}{3\sqrt{1-\frac{a}{R}+\left(\frac{a}{R}\right)^2}} \right] = \frac{3e}{R} \alpha_2. \end{aligned}$$

Множитель в скобках есть поправочный множитель для перехода от приближенной величины $3e/R$ к точной. Непосредственно вычисленные α_1 и α_2 приведены с точностью до 1% (табл. 4).

Таблица 4

| $\frac{R}{a}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------------|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| α_1 | ∞ | 1,17 | 1,05 | 1,03 | 1,02 | 1,01 | 1,01 | 1,01 | 1,00 | 1,00 |
| α_2 | 0,83 | 0,99 | 1,00 | 1,01 | 1,01 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 | 1,00 |

Эта зависимость представлена также на графике (рис. 29). Рис. 30 дает распределение потенциала по прямой, проходящей через центр и одно заземление (сплошная кривая); в непосредственной близости она характерно отклоняется от одноточечного потенциала (штриховая кривая), но очень скоро с ней сливается.

В предыдущей главе имеются формулы для потенциала удлинённого и сплюснутого эллипсоидов вращения; представив их в виде

$$\varphi = \frac{e}{R} \alpha$$

и вычисляя потенциал в плоскости симметрии (поверхность земли), можно получить аналогичные таблицы для поправочного множителя α и составить представление о степени точности приближенного выражения

$$\varphi = \frac{e}{R}$$

для разных расстояний.

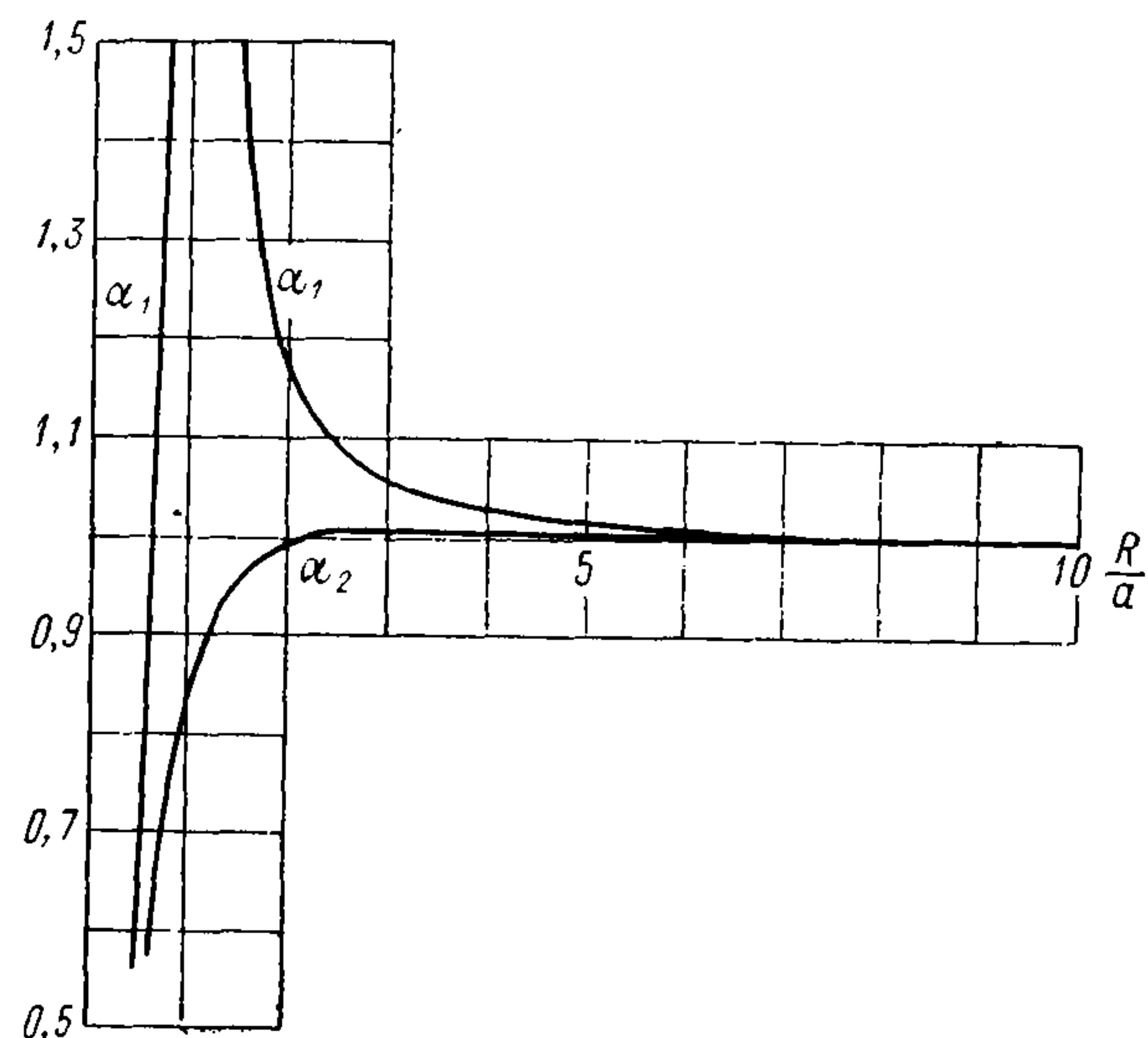


Рис. 29.

Для тонкой шпильки получаем из (89), полагая $L = 2a$, где a — длина шпильки в земле, значения α , представленные в табл. 5.

Таблица 5

| $\frac{R}{a}$ | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 |
|---------------|------|------|------|------|------|
| α | 0,82 | 0,96 | 0,98 | 0,99 | 0,99 |

Таким образом, потенциал поля одиночного простого или сложного заземления на расстоянии большем десятикратного наибольшего его диаметра можно считать равным

$$\varphi = \frac{I}{2\pi\sigma r} = \frac{I\rho}{2\pi r}, \quad (175)$$

где r — расстояние от центра заземления до данной точки на поверхности земли, предполагаемой, конечно, плоской.

Напряженность поля

$$E = - \frac{d\varphi}{dr} = \frac{I}{2\pi\sigma r^2} = \frac{I\rho}{2\pi r^2} \quad (176)$$

направлена радиально от электрода, подающего ток в землю ($I > 0$).

Так как на практике чаще оперируют с удельным сопротивлением, а не с обратной ему величиной электропроводности, то в дальнейших

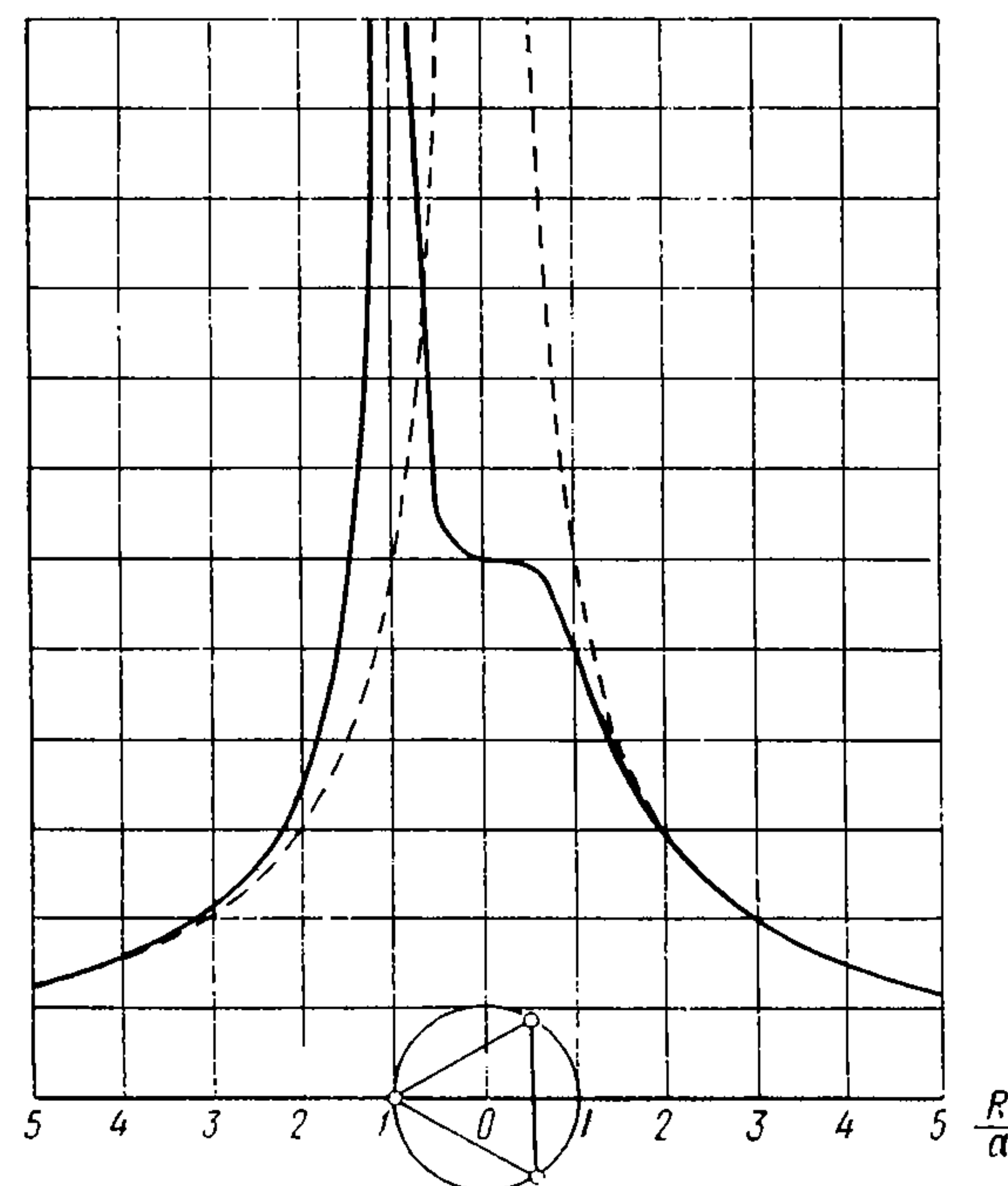


Рис. 30.

формулах мы будем всюду писать удельное сопротивление, обозначая его через ρ .

Эквипотенциальные линии (т. е. пересечение поверхностей постоянного потенциала с поверхностью земли) в поле одного точечного источника — концентрические круги. Распределение потенциала, напряжения поля и картина равноотстоящих по разности потенциалов эквипотенциальных линий даны на рис. 31.

Численные данные рис. 31 относятся к случаю $I = 1000$ ма, $\rho = 10^4$ ом·см (за единицу длины принято 10 м). Однако им можно пользоваться и для других данных. Если масштаб длины взят m метров на единицу длины рисунка, то при силе тока I ма и сопротивлении $\rho = \rho^* \cdot 10^4$ ом·см, мы найдем потенциал в соответственной

точке в милливольтгах, умножив численное значение ординат на переводной множитель β ,

$$\varphi^* = \varphi \cdot 10^{-2} \frac{I\rho^*}{m} = \varphi\beta$$

и аналогично для напряжения поля

$$E^* = E \cdot 10^{-1} \frac{I\rho^*}{m^2} = E\gamma.$$

Так, например, для $I = 3,5$ а при $\rho = 8 \cdot 10^4$ ом·см будем иметь, считая расстояние в км,

$$I = 3,5 \cdot 10^3; \quad m = 1000; \quad \rho^* = 8;$$

переводные множители

$$\beta = \frac{35 \cdot 8}{1000} = 0,28;$$

$$\gamma = \frac{350 \cdot 8}{10^6} = 0,0028.$$

По рис. 31 для точки с абсциссой 4 имеем $\varphi = 400$ мв, $E = 10$ мв/м. Отсюда получаем для взятых выше данных на расстоянии 4 км

$$\varphi^* = 400 \cdot 0,28 = 112 \text{ мв};$$

$$E^* = 10 \cdot 0,0028 = 0,028 \text{ мв/м}.$$

Измерив разности потенциалов между точками с расстояниями r_1 и r_2 (расстояние измерительных электродов $a = r_2 - r_1$), мы имеем по (175)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = V = \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Полагая $r_1 = r - \frac{a}{2}$, $r_2 = r + \frac{a}{2}$, где r — расстояние середины измеряемого промежутка от центра, имеем

$$V = \frac{I\rho}{2\pi} \cdot \frac{a}{r^2 - \frac{a^2}{4}}, \quad (177)$$

при $r > 5a$ с точностью не менее чем до сотых долей процента

$$V = \frac{I\rho}{2\pi} \cdot \frac{a}{r^2} \left[1 + \left(\frac{a}{2r} \right)^2 \right], \quad (178)$$

а с точностью до $100 (a/2r)^2 \%$

$$V = \frac{I\rho}{2\pi} \cdot \frac{a}{r^2}. \quad (179)$$

Если положить $r \gg a$, то, измеряя V и разделив на a , получаем в пределах погрешности полевых измерений

$$E = \frac{V}{a} = \frac{I\rho}{2\pi r^2}. \quad (180)$$

Введя в качестве приведенного расстояния величину, $\xi = \frac{2r}{a}$, имеем

$$V = \frac{2I\rho}{\pi a} \cdot \frac{1}{\xi^2 - 1}. \quad (177a)$$

Из этих формул вытекает прием определения удельного сопротивления почвы, предполагаемой однородной,

$$\rho = \frac{V}{I} \cdot \frac{\pi a}{2} (\xi^2 - 1), \quad (181)$$

$$\rho = \frac{E}{I} 2\pi r^2 \quad \xi^2 \gg 1. \quad (182)$$

Если измерять разности потенциалов в милливольтгах, силу тока в миллиамперах, а длины, как это удобнее всего на практике, в метрах, то ρ получается в единицах (ом·м), т. е. как сопротивление цилиндрического проводника с сечением 1 м^2 и длиной 1 м .

Очевидно, что второй электрод, замыкающий цепь на землю, должен находиться достаточно далеко; оценку необходимого для этого расстояния L между двумя питающими электродами, или наоборот, оценку допустимых значений r при данном расстоянии L мы получим, рассмотрев поле двух электродов.

Предполагая, что $r < L$, где L расстояние между двумя электродами, имеем (рис. 32)

$$\varphi = \frac{I\rho}{2\pi} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right), \quad (183)$$

где для $1/r'$ можно написать разложение

$$\begin{aligned} \frac{1}{r'} &= \frac{1}{\sqrt{L^2 + r^2 - 2Lr \cos \theta}} = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \frac{r}{L} \cos \theta + \frac{r^2}{L^2}}} \\ &= \frac{1}{L} \sum_0^{\infty} \left(\frac{r}{L} \right)^n P_n(\cos \theta). \end{aligned} \quad (184)$$

Здесь P_n — полиномы Лежандра (шаровые функции от одного аргумента). Как известно,

$$P_0(\cos \theta) = 1; \quad P_1(\cos \theta) = \cos \theta; \quad P_2(\cos \theta) = \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2}.$$

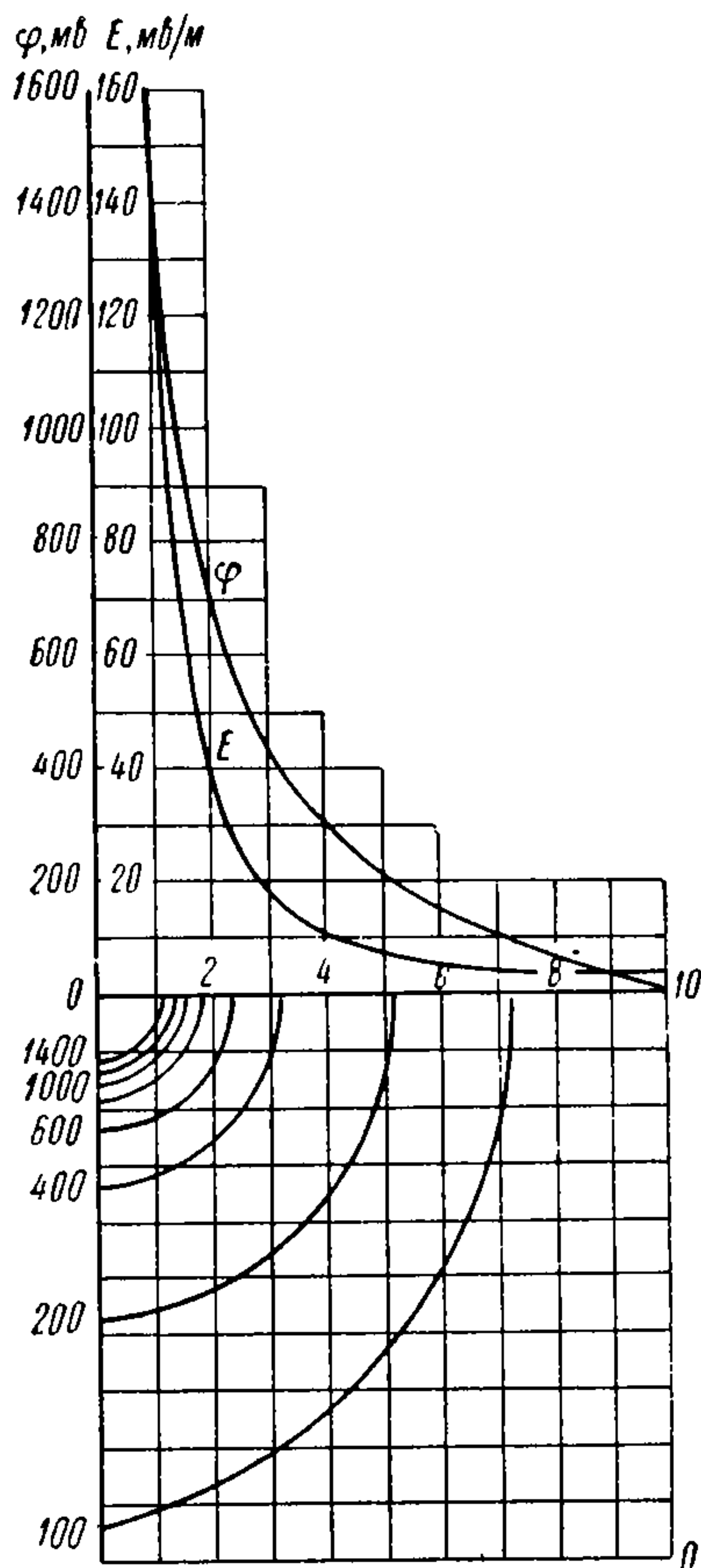


Рис. 31.

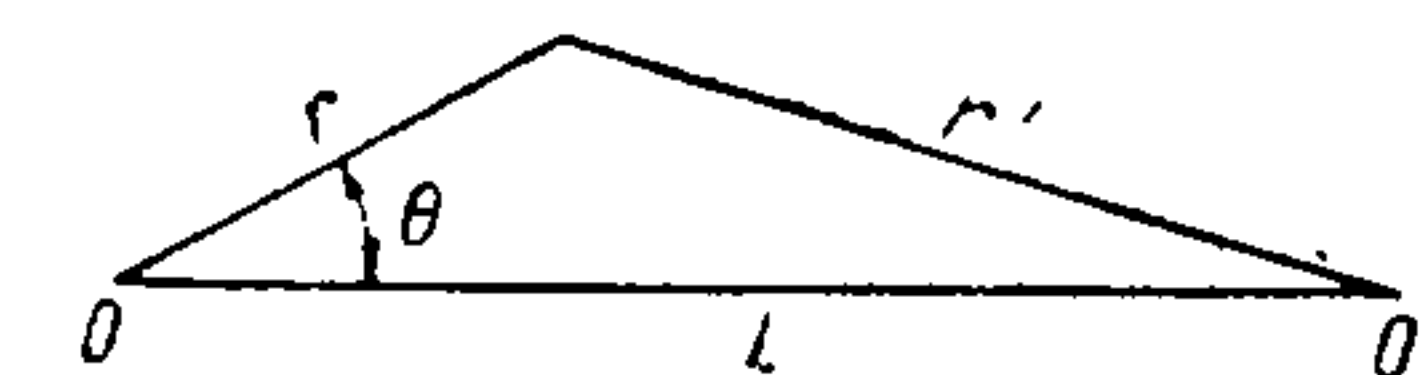


Рис. 32.

Выписав первые три члена разложения, представим формулу (183) в виде

$$\varphi = \frac{I\rho}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \left(1 - \frac{r}{r'}\right) =$$

$$= \frac{I\rho}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} \left[1 - \frac{r}{L} - \left(\frac{r}{L}\right)^2 \cos \theta - \left(\frac{r}{L}\right)^3 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} - \dots\right]. \quad (185)$$

Так как на практике абсолютные значения потенциала не измеряются, а всегда определяются разности потенциалов в двух точках, то составим формулу для $V = \varphi_A - \varphi_B$ для случая, когда точки A и B лежат на одном и том же радиусе-векторе, проведенном из ближнего источника (рис. 33).

Пусть по-прежнему $r_A = r - \frac{a}{2}$, $r_B = r + \frac{a}{2}$. Подставляя эти значения в (185), имеем

$$V = \varphi_A - \varphi_B = \frac{I\rho}{2\pi} \left[\frac{a}{r^2 - \frac{a^2}{4}} + \frac{a}{L^2} \cos \theta + \frac{2ar}{L^3} \cdot \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right] =$$

$$= \frac{I\rho a}{2\pi r^2} \left[\frac{r^2}{r^2 - \frac{a^2}{4}} + \left(\frac{r}{L}\right)^2 \cos \theta + 2 \left(\frac{r}{L}\right)^3 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right]. \quad (186)$$

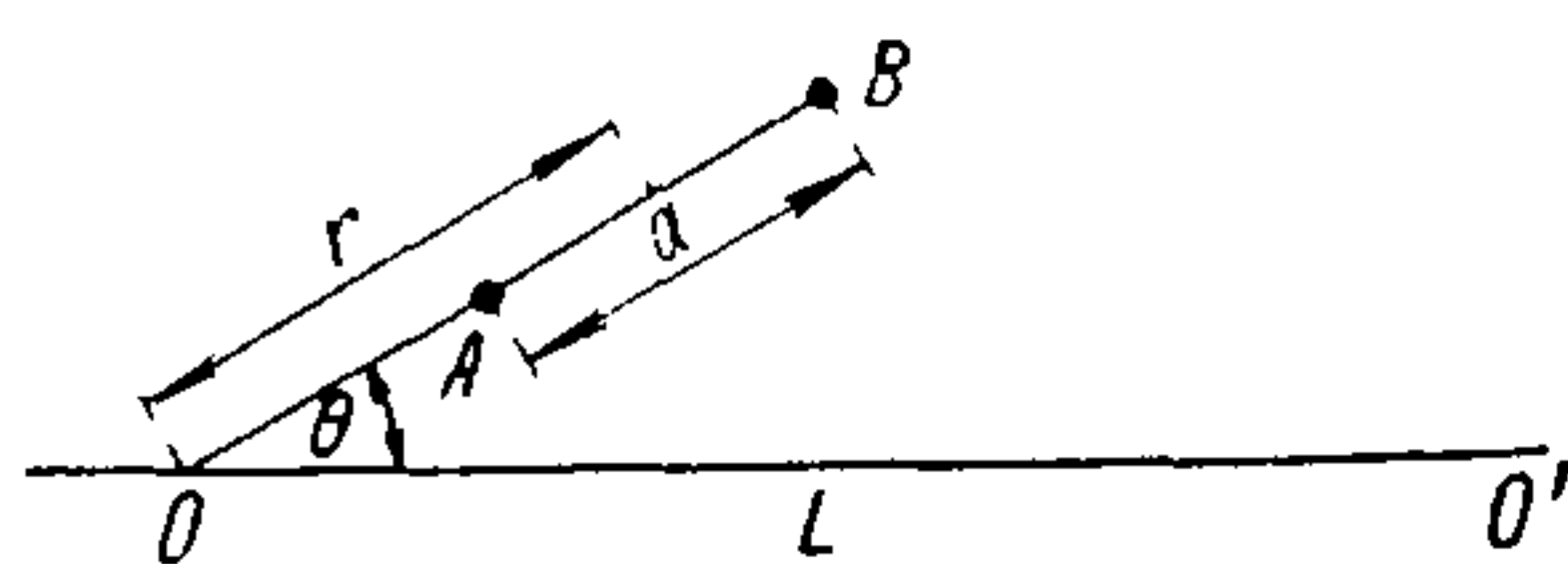


Рис. 33.

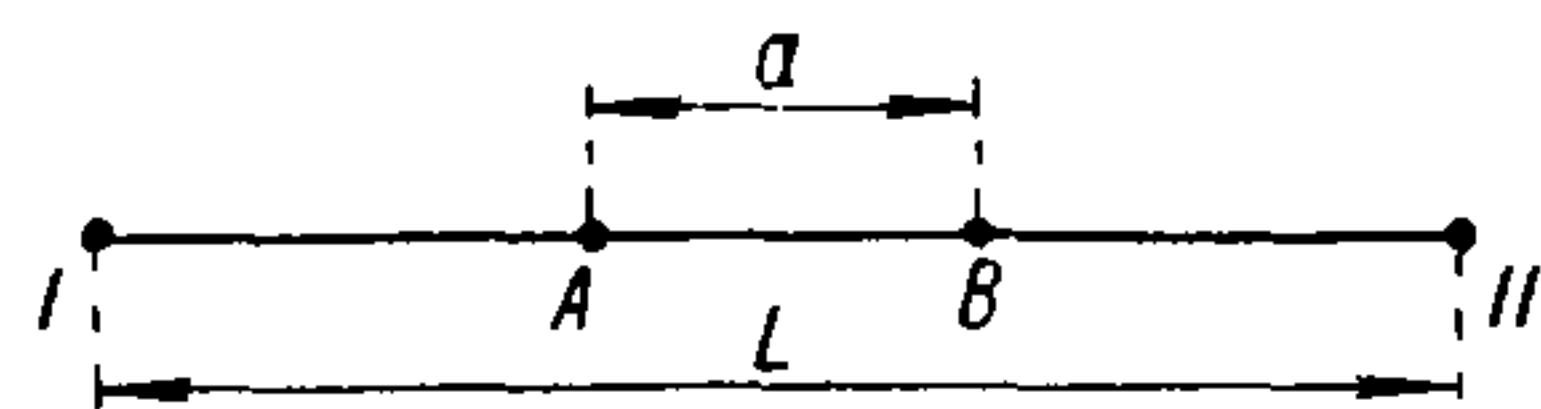


Рис. 34.

Первый член этой формулы совпадает с (177), остальные дают поправки на положение второго электрода с точностью до членов порядка $(r/L)^3$ включительно. Точно так же, с точностью до $(a/2r)^2$ включительно, можно написать, как более полное выражение формулы (178),

$$V = \frac{I\rho a}{2\pi r^2} \left[1 + \left(\frac{a}{2r}\right)^2 + \left(\frac{r}{L}\right)^2 \cos \theta + 2 \left(\frac{r}{L}\right)^3 \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{2} \right]. \quad (187)$$

На практике применяются и такие расположения электродов, когда приходится пользоваться точными формулами (a/r и r/L — не очень малые величины). Это имеет место при электроразведке и электропрофилеировании, о чем мы скажем несколько подробнее при рассмотрении тех аномалий, которые этими методами могут быть обнаружены и интерпретированы. Здесь мы только дадим формулы для «нормального» случая, т. е. для вполне однородной среды. Расположение измерительных (A, B) и питающих (I, II) электродов ясно из рис. 34.

Введем также отношение $L/a = \beta$, которое на практике подбирается равным небольшому целому числу ($\beta = 3$ дает 4 электрода

на равных расстояниях, или так называемый метод 4 электродов Веннера). Задача заключается в определении ρ из измерений разности потенциалов V между A и B и силы питающего тока, идущего через I и II . Легко видеть, что разность потенциалов в точках A и B , происходящая от действия электрода II , равна разности потенциалов от электрода I ; действительно

$$\varphi_A^{(I)} = -\varphi_B^{(II)};$$

$$\varphi_B^{(I)} = -\varphi_A^{(II)};$$

$$V^{(I)} = \varphi_A^{(I)} - \varphi_B^{(I)} = \varphi_A^{(II)} - \varphi_B^{(II)} = V^{(II)},$$

а для $\varphi_A^{(I)} - \varphi_B^{(I)}$ мы имеем уже формулу (177), так что при наложении полей двух электродов остается только удвоить значение, даваемое формулой (177), положив в ней $r = \frac{L}{2}$.

Вводя величину β , мы получаем после совершенно элементарных выкладок

$$V = \frac{4I\rho}{\pi} \cdot \frac{a}{L^2} \cdot \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} = \frac{4I\rho}{\pi a} \cdot \frac{1}{\beta^2 - 1}, \quad (188)$$

отсюда

$$\rho = \frac{V}{I} \cdot \frac{\pi a}{4} (\beta^2 - 1) = A \frac{V}{I}; \quad A = \frac{\pi a}{4} (\beta^2 - 1). \quad (189)$$

Множитель A зависит от установки, выбранной для измерения. При серийных измерениях его можно вычислить для всей серии. Даем табл. 6, облегчающую это вычисление.

Таблица 6

| β | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|------------------------------|------|------|-------|-------|------|------|------|------|------|
| $\frac{\pi(\beta^2 - 1)}{4}$ | 2,36 | 6,28 | 11,78 | 18,85 | 27,5 | 37,7 | 49,5 | 62,8 | 77,8 |

Градиент в середине между питающими электродами получится, если удвоить значение E по формуле (180) и положить r равным половине разности электродов.

Тогда мы получаем

$$E = \frac{4I\rho}{\pi L^2};$$

$$\rho = \frac{E}{I} \cdot \frac{\pi L^2}{4}. \quad (189a)$$

На рис. 35 изображено распределение потенциала и напряжения по прямой, соединяющей оба питающих электрода. За единицу длины принято 10 м ($L = 200$ м), сила тока 1000 ма и удельное сопротивление земли $\rho = 10^4$ ом·см. На том же рисунке снизу изображены эквипотенциальные линии [79] (дан только один квадрант у одного

из электродов). Переводные множители для ориентировки при других заданиях I , ρ и L — те же, как и для рис. 31. Для более детальных расчетов большую пользу оказывают таблицы, опубликованные в статьях проф. А. А. Петровского [75] и Р. И. Скарятин [95]. В статье Р. И. Скарятин даны значения так называемых потен-

циальных чисел; смысл их следующий: принимая за единицу длины $1/20$ расстояния между электродами, вводим координатную систему с центром в одном электроде, осью $O\bar{X}$ по линии, соединяющей оба электрода, и осью OY перпендикулярно к ней. Тогда

$$\xi = 20 \frac{x}{L}; \quad \eta = \frac{20y_m}{L};$$

$$r = \frac{L}{20} \sqrt{\xi^2 + \eta^2};$$

$$r' = \frac{L}{20} \sqrt{(20 - \xi)^2 + \eta^2}$$

и мы имеем

$$\varphi = \frac{10I\rho}{\pi L} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} - \frac{1}{\sqrt{(20 - \xi)^2 + \eta^2}} \right\} = \frac{10I\rho}{\pi L} D_{\xi\eta}. \quad (190)$$

Числа $D_{\xi\eta}$ и есть потенциальные числа двухэлектродного поля, которые сведены в таблицу. При помощи таблицы величин $1/\sqrt{m^2 + n^2}$, данной в первой из цитированных статей, можно легко расширить область значений ξ и η . При пользовании этими статьями нужно иметь в виду, что наши ξ , η не совпа-

дают с нумерацией координат в оригинальных статьях (номеров пикетов и буквенных обозначений профилей), но переход от одних к другим не представляет никаких затруднений.

В табл. 7 даны значения потенциала φ_0 в милливольты для точек одной четверти двухэлектродного поля Шлюмберже, в предположении, что питающий ток $I = 1$ а, удельное сопротивление почвы $\rho = 10^4$ ом·см или 10^2 ом·м и разнос питающих электродов $L = 200$ м. При других заданиях этих величин мы получаем

$$\varphi^{me}(x, y) = \varphi_0(\xi, \eta) \frac{2I\rho}{L}, \quad (190a)$$

где $[I]$ а; $[\rho]$ ом·м; $[L]$ м.

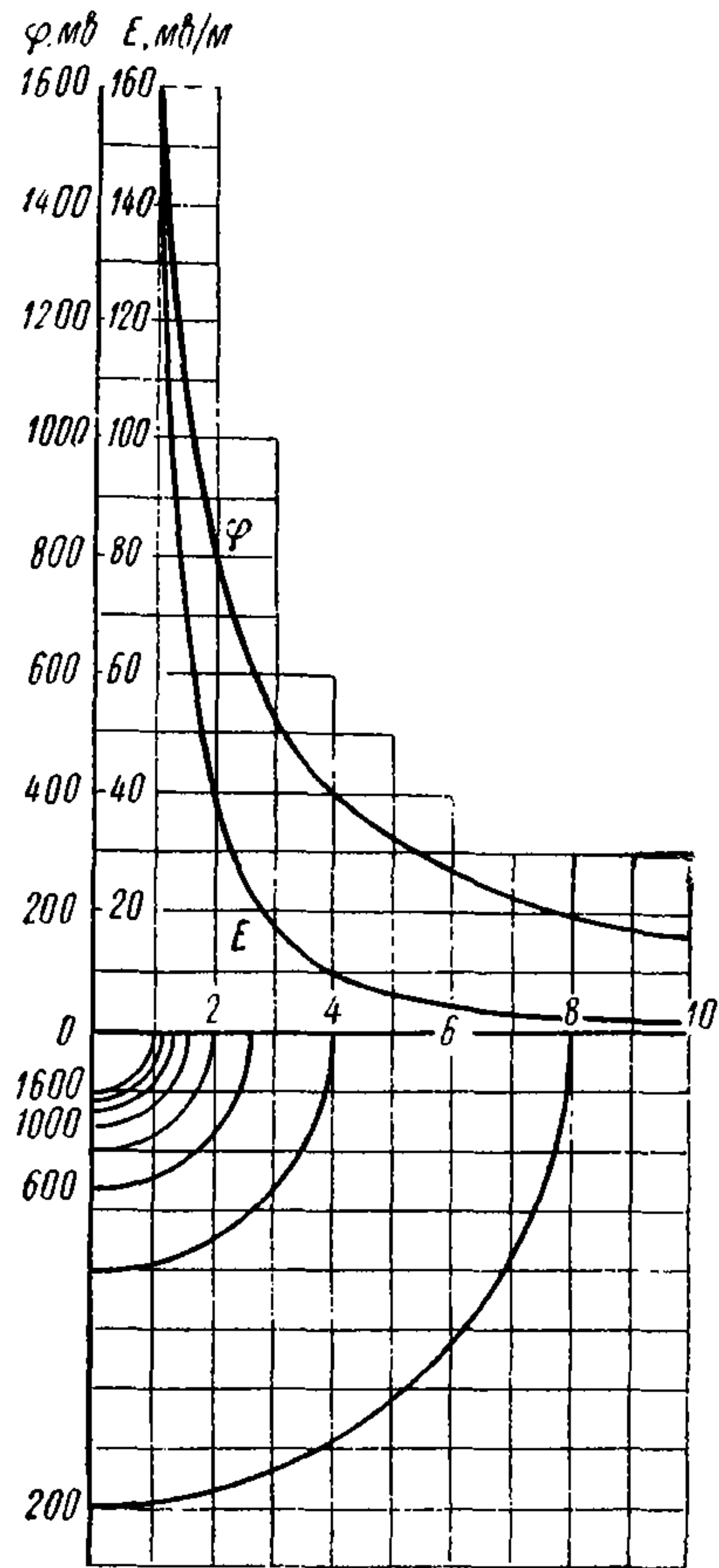


Рис. 35.

| η | ξ | | | | | | | | | | |
|--------|----------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 0 | ∞ | 1507,83 | 707,28 | 436,72 | 298,41 | 212,15 | 151,51 | 104,88 | 66,36 | 32,14 | 0,00 |
| 1 | 1512,13 | 1041,66 | 623,41 | 409,82 | 286,79 | 206,26 | 148,17 | 102,97 | 65,25 | 31,67 | 0,00 |
| 2 | 716,51 | 628,50 | 474,75 | 348,39 | 257,19 | 190,34 | 139,10 | 98,03 | 62,22 | 30,23 | 0,00 |
| 3 | 451,84 | 420,48 | 354,27 | 282,97 | 220,58 | 168,86 | 126,05 | 89,76 | 57,61 | 28,17 | 0,00 |
| 4 | 319,90 | 303,98 | 269,60 | 227,11 | 184,93 | 146,10 | 111,40 | 80,37 | 52,04 | 25,62 | 0,00 |
| 5 | 241,11 | 231,09 | 210,40 | 183,18 | 153,58 | 124,45 | 96,76 | 70,66 | 46,31 | 22,91 | 0,00 |
| 6 | 189,07 | 181,75 | 167,74 | 148,96 | 127,64 | 105,20 | 83,07 | 61,43 | 40,42 | 20,05 | 0,00 |
| 7 | 152,31 | 146,42 | 136,23 | 122,39 | 106,31 | 88,80 | 71,46 | 52,99 | 35,17 | 17,50 | 0,00 |
| 8 | 125,09 | 120,16 | 112,20 | 101,54 | 88,96 | 75,12 | 60,47 | 45,51 | 30,23 | 15,11 | 0,00 |
| 9 | 104,24 | 100,10 | 93,58 | 84,98 | 74,96 | 63,66 | 51,56 | 38,99 | 26,10 | 13,05 | 0,00 |
| 10 | 88,01 | 84,19 | 78,78 | 71,77 | 63,34 | 54,11 | 43,92 | 33,42 | 22,44 | 11,14 | 0,00 |

Формула (183) дает распределение потенциала не только на поверхности, но и во всем объеме, так что эквипотенцильные поверхности под землей получатся при вращении плана эквипотенциальных линий вокруг прямой, соединяющей оба электрода. Нас может интересовать распределение плотности тока с глубиной, что мы и исследуем для плоскости, перпендикулярной к оси поля и проведенной посередине между обоими электродами (рис. 36).

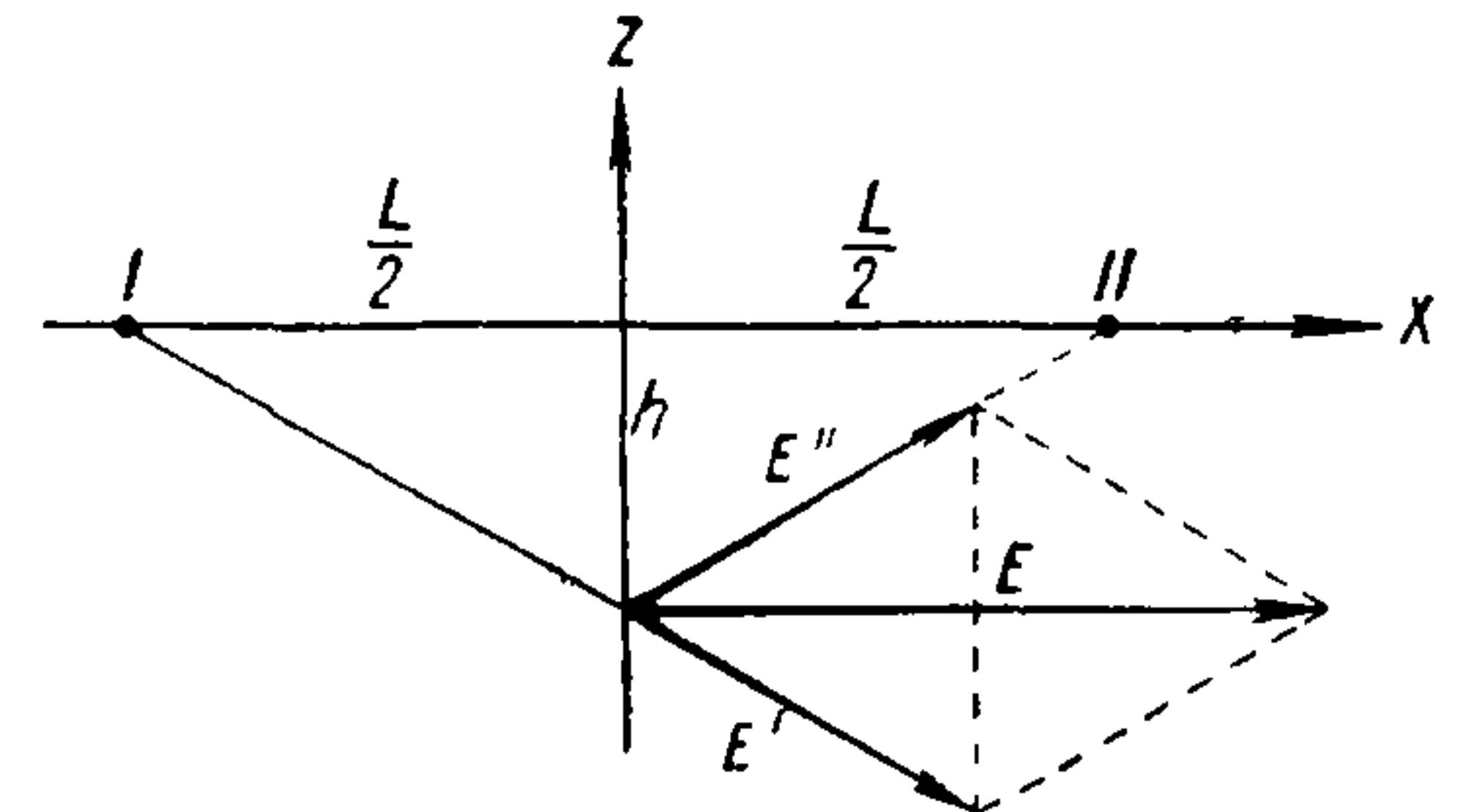


Рис. 36.

Вычисление E'_n от одного электрода дает

$$E'_n = E' \cos(E', OX) = \frac{I\rho}{2\pi \left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2 \right]} \cdot \frac{L}{2\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + h^2}}.$$

Обозначая $\frac{2h}{L} = \xi$ и удваивая E'_n , получаем E от обоих электродов

$$E = \frac{4I\rho}{\pi L^2} \cdot \frac{1}{(1 + \xi^2)^{3/2}}$$

и для плотности тока имеем

$$J = \frac{1}{\rho} E = \frac{4I}{\pi L^2} \cdot \frac{1}{(1 + \xi^2)^{3/2}} = J_0 \frac{1}{(1 + \xi^2)^{3/2}}, \quad (191)$$

где J_0 — плотность тока на поверхности в центре средней линии.

Вычислим ток, проходящий в пределах полукруга радиуса h через нашу плоскость

$$I_h = \pi \int_0^h J h dh.$$

Вводя сюда переменную ξ , имеем после простых преобразований

$$I_h = I \int_0^{\frac{2h}{L}} \frac{\xi d\xi}{(1+\xi^2)^{3/2}} = I \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2h}{L}\right)^2}} \right]. \quad (192)$$

На рис. 37 даны J/J_0 и I_h/I как функции величины h/L . Из рис. 37 видно, что плотность тока остается еще заметной (9%) на глубине,

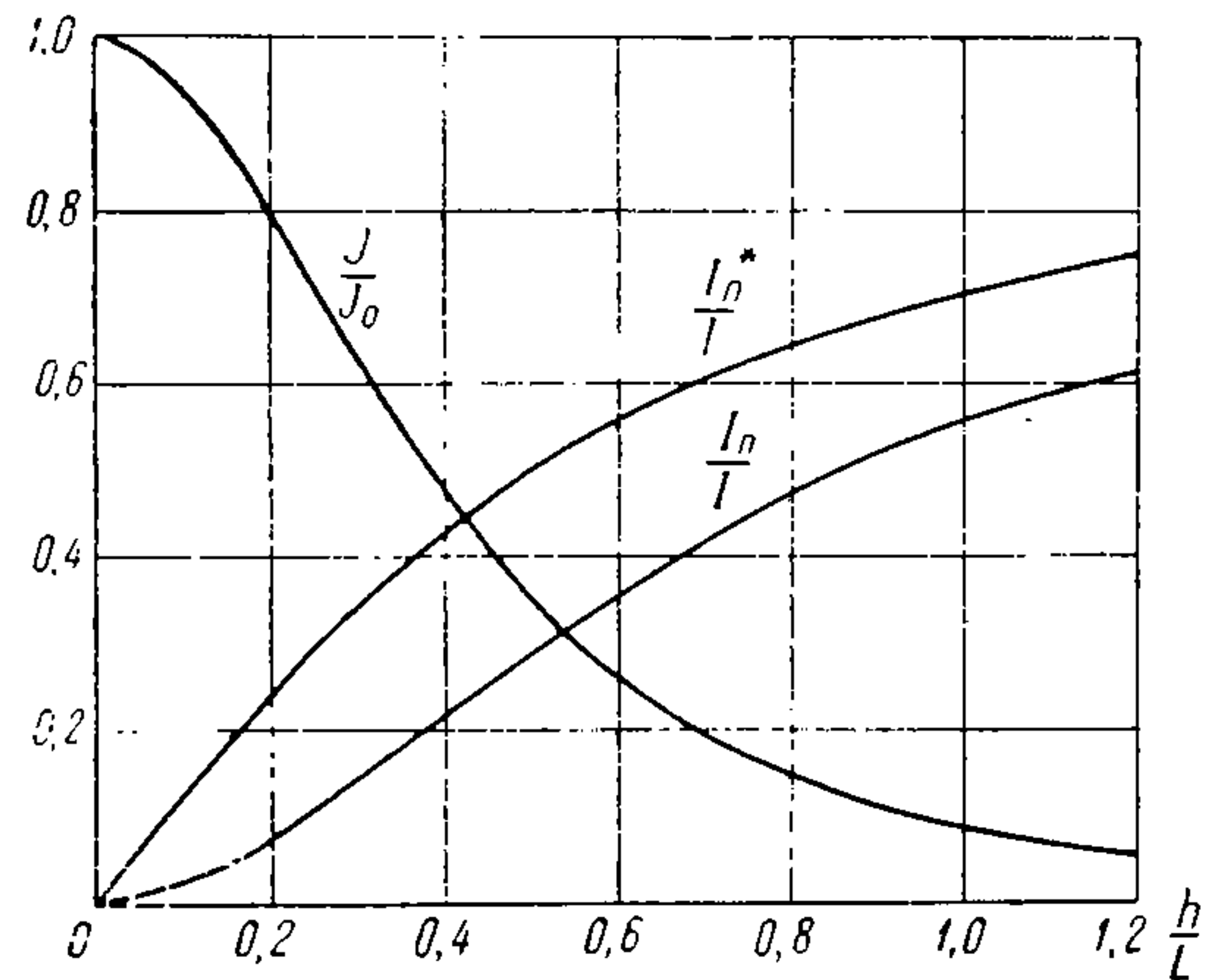


Рис. 37.

равной разнесу питающих электродов, и что ток, проходящий через полукруг вокруг оси поля и диаметром равным удвоенному разнесу — составляет немного больше половины всего тока.

Для оценки глубины проникновения тока в однородной среде можно определить ток, проходящий через ту же плоскость до глубины h в пределах от $+\infty$ до $-\infty$ по поперечному направлению. Это будет та часть тока, которая не выходит из пласта глубиной h , так как линии тока глубже всего опускаются в рассматриваемой средней поперечной плоскости.

В таком случае мы имеем

$$I_h^* = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_0^h J dh.$$

Вводя относительную координату

$$\eta = \frac{2y}{L}$$

и подставляя выражение (191) для J , в котором вместо ξ нужно писать $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, получаем

$$I_h^* = \frac{I}{\pi} \int_0^{\frac{h}{2L}} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\eta}{(1+\xi^2+\eta^2)^{3/2}} = I \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2h}{L}. \quad (193)$$

Эта зависимость также изображена на рис. 37.

Полученные здесь результаты важны для критического подхода к оценкам «глубины захвата» при данном разнесе питающих электродов.

§ 15. ПОЛЕ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРОДОВ

В методе эквипотенциальных линий качественные результаты получаются отчетливее при применении более однородных полей, т. е. таких, в которых нормальные изолинии более приближаются к прямым. Это достигается применением линейных электродов (Лундберг). Теоретический расчет этих полей возможен, но на практике эти расчеты до сих пор не применялись. Причина отчасти заключается в следующем. При двух точечных электродах случайные неоднородности небольших размеров около электродов не влияют заметно на характер поля в целом; если среда более или менее однородна в крупном масштабе, то и поле получится близким к нормальному, а если имеются правильные образования (горизонтальные пласты, контакт двух пород и т. п.), то получатся определенные аномалии, которые количественно могут быть учтены на основании сделанных измерений и сравнения с нормальным полем. При электродах более или менее протяженных, например, расположенных по противоположным сторонам исследуемого квадрата, действительное поле будет зависеть не только от причин вышеуказанного типа и от сосредоточенных, резко очерченных неоднородностей рудного или нерудного происхождения, но и от условий, имеющих место вдоль обоих электродов. Случайные свойства самого поверхностного слоя могут сильно повлиять на силу тока, входящего в землю из различных участков электрода; при условиях, разобранных в § 12, может появиться падение потенциала вдоль электрода. Наконец, установки такого рода практически применяются главным образом в связи с использованием переменным током, отчего происходят трудно учитываемые индуктивные эффекты.

Для полноты укажем однако формулы для расчета нормальных полей для двух пар линейных электродов и для системы точечных заземлений, предложенной проф. А. А. Петровским, предполагая их эквипотенциальными и качество заземления совершенно однородным вдоль всей длины. Если погонное сопротивление провода достаточно мало по сравнению с погонным сопротивлением заземлений, то, как мы видели (см. табл. 2, рис. 22), протяженный электрод становится практически эквипотенциальным. В таком случае это поле приближенно можно вычислять как поле равномерно заряженной линии, что, конечно, эквивалентно предположению, что выход

тока в землю происходит равномерно со всей длины провода. Если I — сила питающего тока, то линейная плотность заряда λ равна

$$\lambda = \frac{I\rho}{2\pi \cdot 2l},$$

где $2l$ — длина электрода.

По формуле (89) получаем

$$\varphi' = \frac{I\rho}{2\pi \cdot 2l} \ln \frac{\sqrt{(l-y)^2 + x^2} + l-y}{\sqrt{(l+y)^2 + x^2} - l-y}, \quad (194)$$

причем начало координат полагаем в середине электрода и в формуле (89) заменяем r на x , z на y . Если на расстоянии $2L$ находится второй электрод, то происходящий от него потенциал равен

$$\varphi'' = - \frac{I\rho}{2\pi \cdot 2l} \ln \frac{\sqrt{(l-y)^2 + (2L-x)^2} + l-y}{\sqrt{(l+y)^2 + (2L-x)^2} - l-y}. \quad (195)$$

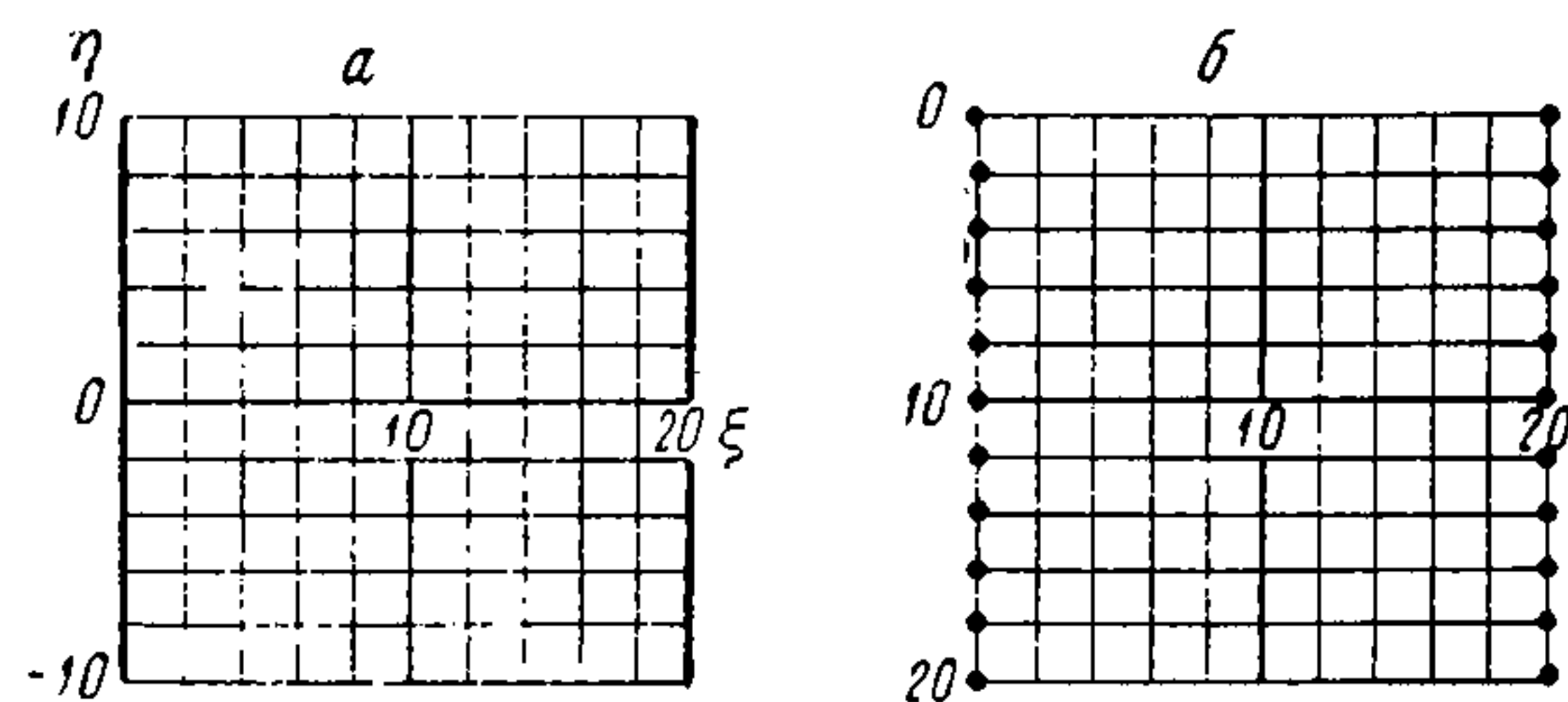


Рис. 38.

Потенциал двух параллельных электродов, в обычной для практики установке, когда $l = L$, будет равен сумме выражений (194) и (195):

$$\varphi = \frac{I\rho}{2\pi \cdot 2L} \ln \frac{[\sqrt{(L-y)^2 + x^2} + L-y][\sqrt{(L+y)^2 + (2L-x)^2} - L-y]}{[\sqrt{(L+y)^2 + x^2} - L-y][\sqrt{(L-y)^2 + (2L-x)^2} + L-y]}. \quad (196)$$

При вычислении аргумента логарифма удобно положить $L = 10$, т. е. разбить квадрант поля на 10 частей по абсциссе и ординате. Ограничиваясь значениями потенциала в узлах полученной таким образом сетки (рис. 38, а), имеем

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{I\rho}{2\pi \cdot 2LM} \lg \frac{[\sqrt{(10-\eta)^2 + \xi^2} + 10-\eta][\sqrt{(10+\eta)^2 + (20-\xi)^2} - 10-\eta]}{[\sqrt{(10+\eta)^2 + \xi^2} - 10-\eta][\sqrt{(10-\eta)^2 + (20-\xi)^2} + 10-\eta]} = \\ &= \frac{I\rho}{2\pi \cdot 2LM} D_{\xi\eta}, \end{aligned} \quad (197)$$

где M — модуль натуральных логарифмов,

$$\xi = 10 \frac{x}{L}; \quad \eta = 10 \frac{y}{L},$$

так что в узлах сетки эти приведенные или относительные координаты имеют целые значения, причем достаточно сделать вычисление для одного квадранта, т. е. для точек $\xi = 1, \dots, 10; \eta = 0, 1, \dots, 10$.

Числа $D_{\xi\eta}$ вычислены и представлены в виде таблицы в цитированной уже статье Р. И. Скарятин [100], так что расчет потенциала для любого случая квадратного поля сводится к умножению чисел этой таблицы на множитель

$$\frac{I\rho}{2\pi \cdot 2LM}. \quad (198)$$

Потенциальные числа φ_0 четверти поля Лундберга (табл. 8) рассчитаны в предположении, что $I = 1$ а, $\rho = 10^2$ ом·м, $2L = 200$ м, и дает значение потенциала φ_0 в точках сетки в милливольтгах. Переводной множитель для других заданий этих величин — тот же, как и для формулы (190').

Таблица 8

| η | ξ | | | | | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 0 | 396,64 | 283,53 | 218,30 | 168,24 | 130,26 | 98,59 | 70,98 | 46,01 | 22,62 | 0,00 |
| 1 | 396,13 | 282,98 | 215,88 | 167,71 | 129,91 | 98,25 | 70,72 | 45,84 | 22,55 | 0,00 |
| 2 | 394,10 | 282,10 | 214,05 | 166,13 | 128,50 | 97,88 | 69,95 | 45,33 | 22,28 | 0,00 |
| 3 | 389,97 | 277,78 | 210,90 | 163,40 | 126,26 | 95,41 | 68,63 | 44,47 | 21,85 | 0,00 |
| 4 | 384,42 | 272,14 | 206,35 | 159,43 | 123,0 | 92,86 | 66,77 | 43,48 | 21,25 | 0,00 |
| 5 | 376,41 | 264,73 | 199,96 | 154,04 | 118,64 | 89,51 | 64,31 | 41,64 | 20,52 | 0,00 |
| 6 | 365,04 | 254,22 | 191,15 | 146,93 | 113,09 | 85,27 | 61,29 | 39,50 | 19,51 | 0,00 |
| 7 | 348,80 | 240,62 | 179,84 | 137,92 | 106,27 | 78,36 | 57,68 | 37,37 | 18,39 | 0,00 |
| 8 | 323,46 | 221,44 | 165,29 | 127,42 | 98,19 | 74,30 | 53,55 | 34,77 | 17,11 | 0,00 |
| 9 | 285,33 | 195,18 | 147,39 | 114,52 | 89,05 | 67,76 | 49,01 | 31,95 | 15,73 | 0,00 |
| 10 | 220,54 | 162,36 | 126,92 | 100,65 | 79,26 | 60,83 | 44,26 | 28,91 | 14,29 | 0,00 |

Поле идеальных электродов Лундберга весьма мало отличается от поля Петровского, где линейный электрод заменен N -точечным заземлением, причем при теоретическом расчете предполагается, что токи всех отдельных заземлений одинаковы (рис. 38, б). В этом случае мы имеем

$$\varphi = \frac{I\rho}{2\pi N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{1}{r_k} - \frac{1}{r'_k} \right),$$

Вводя в эту формулу те же приведенные координаты, как и раньше, имеем координаты точки поля

$$x = \frac{\xi L}{10}; \quad y = \frac{\eta L}{10},$$

координаты k -ого заземления левого электрода

$$x_k = 0; \quad y_k = \frac{(10-k)L}{10},$$

и для правого электрода

$$x'_k = 2L = \frac{20L}{10}; \quad y'_k = \frac{(10-k)L}{10}.$$

Таким образом,

$$r_k = \frac{L}{10} \sqrt{\xi^2 + (10 - k - \eta)^2};$$

$$r'_k = \frac{L}{10} \sqrt{(20 - \xi)^2 + (10 - k - \eta)^2};$$

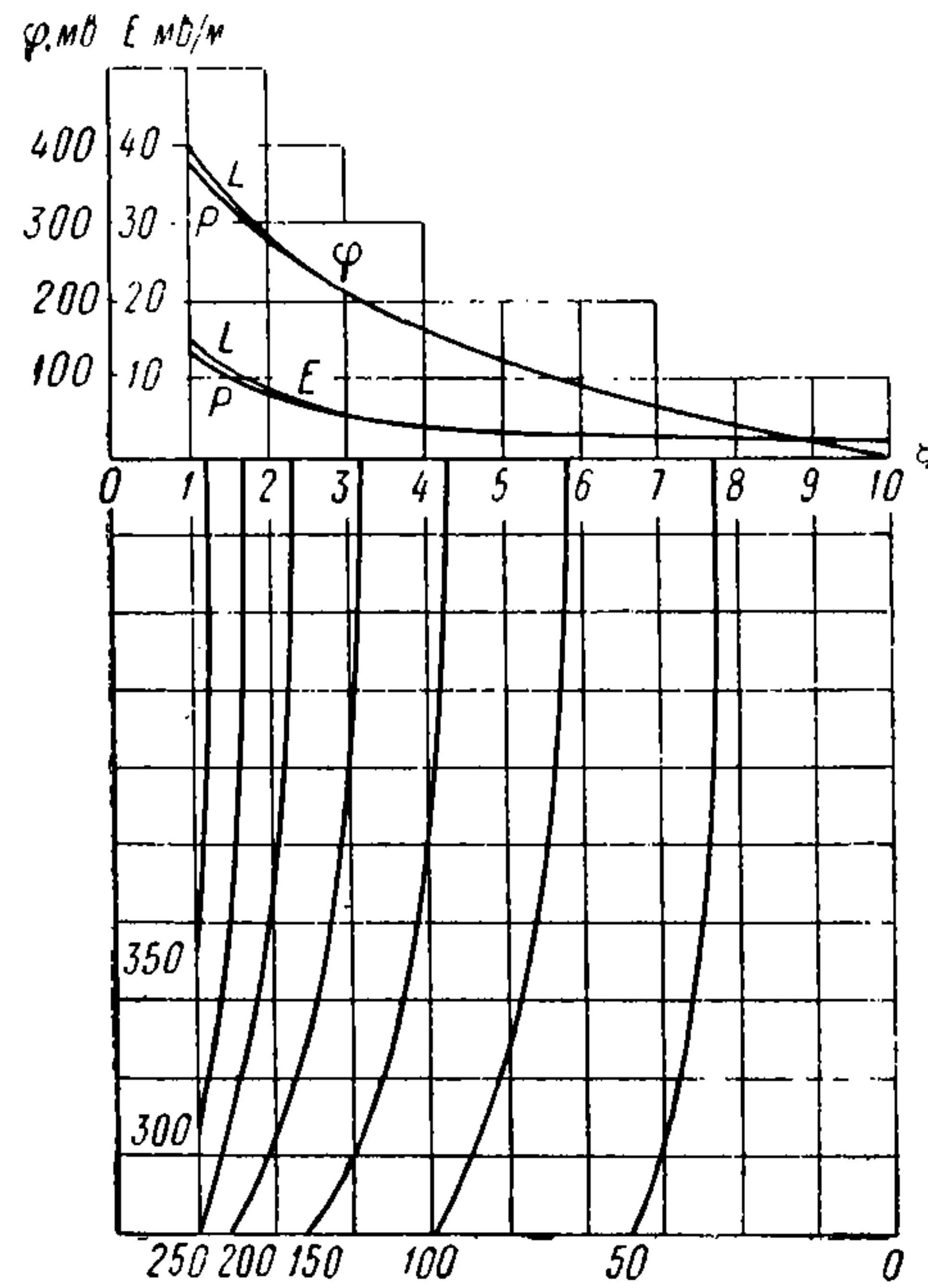


Рис. 39.

$$\varphi = \frac{I\rho 10}{2\pi NL} \sum_{k=0}^{N-1} \left[\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + (10 - k - \eta)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(20 - \xi)^2 + (10 - k - \eta)^2}} \right] = \frac{I\rho 10}{2\pi NL} D_{\xi\eta}. \quad (199)$$

Числа $D_{\xi\eta}$ для $N = 21$ даны в статье А. А. Петровского [76].

Для этого случая мы даем табл. 9 значений потенциала φ_0 в милливольты для тех же условий, как и для табл. 8. Переводной множитель также имеет прежнее значение. Рис. 39 дает распределение потенциала φ и напряжения E по средней продольной линии полей Лундберга (L) и Петровского (P), а в нижней части — изолинии поля Петровского. Единица

длины — 10 м, $2L = 200$ м, сила питающего тока 1000 ма и удельное сопротивление 10^4 ом·см, так что

Таблица 9

| η | ξ | | | | | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 0 | 382,14 | 273,77 | 209,49 | 163,17 | 126,57 | 95,93 | 69,15 | 44,86 | 22,07 | 0,00 |
| 1 | 381,54 | 273,20 | 208,98 | 162,72 | 126,19 | 95,63 | 68,93 | 44,71 | 22,00 | 0,00 |
| 2 | 379,70 | 271,48 | 207,41 | 161,35 | 125,05 | 94,71 | 68,24 | 44,26 | 21,77 | 0,00 |
| 3 | 376,50 | 268,48 | 204,72 | 159,01 | 123,10 | 93,16 | 67,09 | 43,49 | 21,39 | 0,00 |
| 4 | 371,71 | 264,03 | 200,74 | 155,59 | 120,27 | 90,93 | 65,44 | 42,41 | 20,85 | 0,00 |
| 5 | 364,96 | 257,82 | 195,26 | 150,94 | 116,48 | 87,97 | 63,27 | 40,99 | 20,15 | 0,00 |
| 6 | 355,64 | 249,35 | 187,94 | 144,87 | 111,62 | 84,24 | 60,57 | 39,23 | 19,29 | 0,00 |
| 7 | 342,64 | 237,88 | 178,36 | 137,16 | 105,97 | 79,70 | 57,32 | 37,14 | 18,27 | 0,00 |
| 8 | 323,92 | 222,22 | 165,98 | 127,62 | 98,37 | 74,36 | 53,56 | 34,74 | 17,10 | 0,00 |
| 9 | 295,15 | 200,68 | 150,36 | 116,23 | 90,03 | 68,33 | 49,36 | 32,09 | 15,81 | 0,00 |
| 10 | 246,58 | 171,95 | 131,70 | 103,33 | 80,86 | 61,80 | 44,86 | 29,25 | 14,44 | 0,00 |

для перехода к другим заданиям можно опять пользоваться переводными множителями, указанным для рис. 31. Сравнение рис. 39 и 35 поля двух точечных электродов (поле Шлюмберже) показывает, что последнее и в смысле формы изолиний и в количественном отношении (колебания в величине и направлении E в разных точках поля) гораздо менее однородно, чем поля линейных и квазилинейных электродов. Сравнивая же табл. 8, 9, мы убеждаемся, что идеальные поля Лундберга и Петровского практически не отличаются друг от друга.

§ 16. ТЕОРЕМА ВЗАИМНОСТИ

Пусть имеются два электрода a и b , первый подает в землю ток I , второй разомкнут, т. е. не берет на себя тока. Тогда на нем будет определенный потенциал V_b , а во всем пространстве будет поле φ . Теперь предположим, что, наоборот, первый электрод стоит без тока, а второй подает тот же ток I . Потенциал на первом электроде в этом случае обозначим W_a , а потенциал в поле через ψ . Переводя задачу на электростатическую аналогию (предполагая отсутствие электродвижущих сил), мы видим, что здесь как в том, так и другом случае имеем вопрос о потенциале незаряженного проводника (b, a) в поле другого заряженного (a, b), причем заряды в обоих случаях одинаковы. При какой угодно (и не однородной) среде эти индуцированные потенциалы равны

$$V_b = e\rho_{ab}; \quad W_a = e\rho_{ba},$$

и так как $\rho_{ab} = \rho_{ba}$, то сразу следует, что $V_b = W_a$. Для случая точечных электродов это, конечно, тоже имеет место, так как в действительности «точечные» электроды — это лишь достаточно малые по размерам проводники, что несколько не влияет на предыдущие рассуждения.

Для часто встречающегося на практике случая двух питающих I и II и двух измерительных электродов A и B , которые в момент измерения разности потенциалов потенциометром как раз лишены тока, мы можем высказать теорему: если, при питании электродов I и II током I , между A и B будет разность потенциалов V , то при питании A и B тем же током I , между I и II , употребленными как измерительные электроды, будет та же самая разность потенциалов V . Действительно, вводя обозначения V_A^I — потенциал A , происходящий от электрода I , и т. д., мы имеем, на основании только что доказанной теоремы,

$$V_A^I = V_I^A; \quad V_A^{II} = V_{II}^A;$$

$$V_B^I = V_I^B; \quad V_B^{II} = V_{II}^B. \quad (200)$$

При этом предполагается, что через соответственные рассматриваемые электроды идет ток I в землю (положительный). Учитывая знак тока, мы напишем для разностей потенциалов между A и B при питании через $I (+)$ и $II (-)$

$$V_A^I - V_A^{II} - V_B^I + V_B^{II} = V_{AB}.$$

В противоположной комбинации, считая питание через $A (+)$ и $B (-)$, имеем для разности потенциалов между I и II

$$V_I^A - V_I^B - V_{II}^A + V_{II}^B = V_{I II}.$$

На основании соотношений (200) непосредственно убеждаемся, что

$$V_{AB} = V_{I II}. \quad (201)$$

Таким образом, в методах профилирования и электроразведки теоретически можно всегда переставить местами питающие и измерительные электроды.

Единственно, что заставляет отдать предпочтение обычному способу, именно питанию внешних электродов и измерению разности потенциалов внутренних, это то, что при большом расстоянии измерительных электродов может появиться большая разность потенциалов от естественного земного поля; обычно ее компенсируют, пользуясь двойным потенциометром, но при больших ее значениях она может повлиять на точность и достоверность результатов.

§ 17. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА С ДВУМЯ ЗАЗЕМЛЕНИЯМИ

Ток в питающем кабеле и объемный ток в земле составляют замкнутую систему токов, обладающую определенным магнитным полем. В случае постоянного тока расчет показывает, что магнитное поле такой системы токов при обычных значениях силы питающего тока весьма мало, и совершенно покрывается земным магнитным полем, за исключением точек очень близких к питающему кабелю. Если же применять переменный ток, и для обнаружения его переменного магнитного поля пользоваться электродвижущей силой, индуцированной им в соответствующих поставленных рамках (соленоидах), то постоянное земное поле выпадает и измеряется, действительно, только переменная часть магнитного поля, обуславливаемая током. Законы распространения переменного тока, как мы увидим во второй части, отличаются от таковых для постоянного тока, но при определенных условиях, которые мы выясним во второй части нашего курса, это различие невелико и лишь постепенно растет по мере увеличения частоты.

Распределение тока в земле можно считать (в случае нормального поля постоянного тока) известным; фигура кабеля также задана, и магнитное поле может быть вычислено различными способами, из которых мы укажем три. Сперва, однако, напомним некоторые общие выводы из основных уравнений магнитного поля постоянных токов

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}; \quad \text{div } \mathbf{B} = 0. \quad (\text{XII})$$

В однородной среде $\mu = \text{const}$ (практически μ , исключая ферромагнитные тела, равно единице). Поэтому второе из написанных уравнений сводится к

$$\text{div } \mathbf{H} = 0. \quad (202)$$

На основании известного тождества

$$\text{div rot } \mathbf{A} = 0$$

мы можем положить

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (203)$$

где \mathbf{A} — неизвестный вектор, называемый вектор-потенциалом магнитного поля; его надлежит определить из первого уравнения (XII), подставляя в него (203), получается

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (204)$$

Мы разбиваем эти уравнения на два

$$\text{div } \mathbf{A} = 0; \quad (205)$$

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (206)$$

и получаем для определения составляющих вектор-потенциала три уравнения Пуассона

$$\Delta A_x = -\frac{4\pi}{c} J_x; \quad \Delta A_y = -\frac{4\pi}{c} J_y; \quad \Delta A_z = -\frac{4\pi}{c} J_z, \quad (207)$$

которые решаем совершенно так же, как и уравнение Пуассона для электростатического потенциала:

$$A_x = \frac{1}{c} \int \frac{J_x d\tau}{r}; \quad A_y = \frac{1}{c} \int \frac{J_y d\tau}{r}; \quad A_z = \frac{1}{c} \int \frac{J_z d\tau}{r}. \quad (208)$$

Для того, чтобы эти выражения действительно были решениями уравнения (204), необходимо потребовать, чтобы они удовлетворяли еще уравнению (205); можно в общем виде показать, что это будет иметь место в силу уравнения

$$\text{div } \mathbf{J} = 0,$$

имеющего место во всем пространстве.

Точно так же можно в общем виде вычислить $\text{rot } \mathbf{A}$ из выражений (208) для составляющих. Результат можно представить в векторном виде

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{J}\mathbf{R}]}{R^3} d\tau, \quad (209)$$

где \mathbf{R} — радиус-вектор, проведенный из элемента $d\tau$ к точке, в которой вычисляется поле.

Этот результат, как известно, можно формально истолковать таким образом, что приписать каждому элементу объема $d\tau$, в котором имеется плотность тока \mathbf{J} , магнитное поле

$$d\mathbf{H} = \frac{1}{c} \cdot \frac{[\mathbf{J}\mathbf{R}]}{R^3} d\tau. \quad (210)$$

Если $d\tau$ означает отрезок бесконечно тонкой трубки токовых линий длиной dl и сечением ds , то можно написать

$$\mathbf{J} d\tau = d\mathbf{l} \cdot J ds = d\mathbf{l} \cdot dI,$$

где $d\mathbf{l}$ имеет направление оси трубки в сторону течения тока. Тогда имеем

$$d\mathbf{H} = \frac{dI}{c} [d\mathbf{l}\mathbf{R}]. \quad (211)$$

Формулы (210) и (211) известны под названием закона Био — Савара. Заметим, что интегралы (208) получаются, вообще говоря, расходящимися, если токи предполагаются замыкающимися в бесконечности*, но интеграл для поля и в этом случае может остаться конечным.

Мы предполагаем ток уходящим в бесконечность или приходящим оттуда, как удобную схему в том случае, если мы интересуемся магнитным полем в определенной области вблизи весьма протяженной системы, имеющей на большом протяжении определенную форму, например прямолинейный проводник с током. Если мы вычислили интегралы (208) по достаточно большому пространству, в котором наша система имеет данную конфигурацию, то они будут иметь определенное значение. Вычисленное из них магнитное поле будет представлено интегралом (209), распространяемым в тех же пределах. Увеличивая теперь эти пределы, мы видим, что (209) стремится к определенному значению; это значит, что весьма удаленные части системы токов не влияют на величину магнитного поля; если в то же самое время интегралы (208) расходятся, то это значит, что величины A_x , A_y , A_z в пределе получают бесконечно большие неопределенные постоянные, которые на вычисление поля не влияют. Так как в действительности наша система токов замыкается где-то еще дальше, то на самом деле эти постоянные не бесконечно велики, а представляют собой части составляющих вектор-потенциала, происходящие от очень удаленных проводников, замыкающих нашу цепь.

Заметим также, что по формулам (208) и (209) можно вычислять магнитное поле и вектор-потенциал части системы, т. е. незамкнутых токов. Такое поле, вообще говоря, самостоятельного значения не имеет, так как только поле замкнутых токов будет удовлетворять системе уравнений (V).

Для случая двух точечных заземлений (a , b) и соединяющего их кабеля применение закона Био — Савара дает возможность вычислить магнитное поле

$$\mathbf{H} = \frac{I}{c} \int_a^b \frac{[d\mathbf{l}\mathbf{R}]}{R^3} + \frac{1}{c} \int \frac{[\mathbf{J}\mathbf{R}]}{R^3} d\tau,$$

* Как, например, в фиктивном случае одноэлектродного заземления.

где линейный интеграл взят по кабелю, а объемный — по нижнему полупространству. При вычислении объемного интеграла можно воспользоваться следующим замечанием. Так как поле двух электродов получается наложением полей отдельных электродов, то можно, на основании

$$\mathbf{J} = -\sigma \text{grad } \varphi = -\sigma \text{grad } \varphi^{(a)} - \sigma \text{grad } \varphi^{(b)} = \mathbf{J}^{(a)} + \mathbf{J}^{(b)}$$

вычислять отдельно интегралы

$$\int \frac{[\mathbf{J}^{(a)}\mathbf{R}]}{R^3} d\tau \text{ и } \int \frac{[\mathbf{J}^{(b)}\mathbf{R}]}{R^3} d\tau,$$

которые вычисляются несколько проще. Все же этот прием приводит к элементарным, но довольно сложным квадратурам. Подробное изложение вычислений по этому методу дано в статье А. А. Петровского [77].

Без всяких квадратур можно получить решение для рассматриваемого случая по методу, предложенному С. С. Стефанеску. Вывод можно расчленить на три части.

1. Рассмотрим случай бесконечного вертикального линейного тока, оканчивающегося в плоскости $z=0$ заземлением b , через которое ток переходит в однородное полупространство, распространяясь там радиально во все стороны, причем плотность тока на расстоянии R от заземления равна, очевидно,

$$J = \frac{I}{2\pi R^2},$$

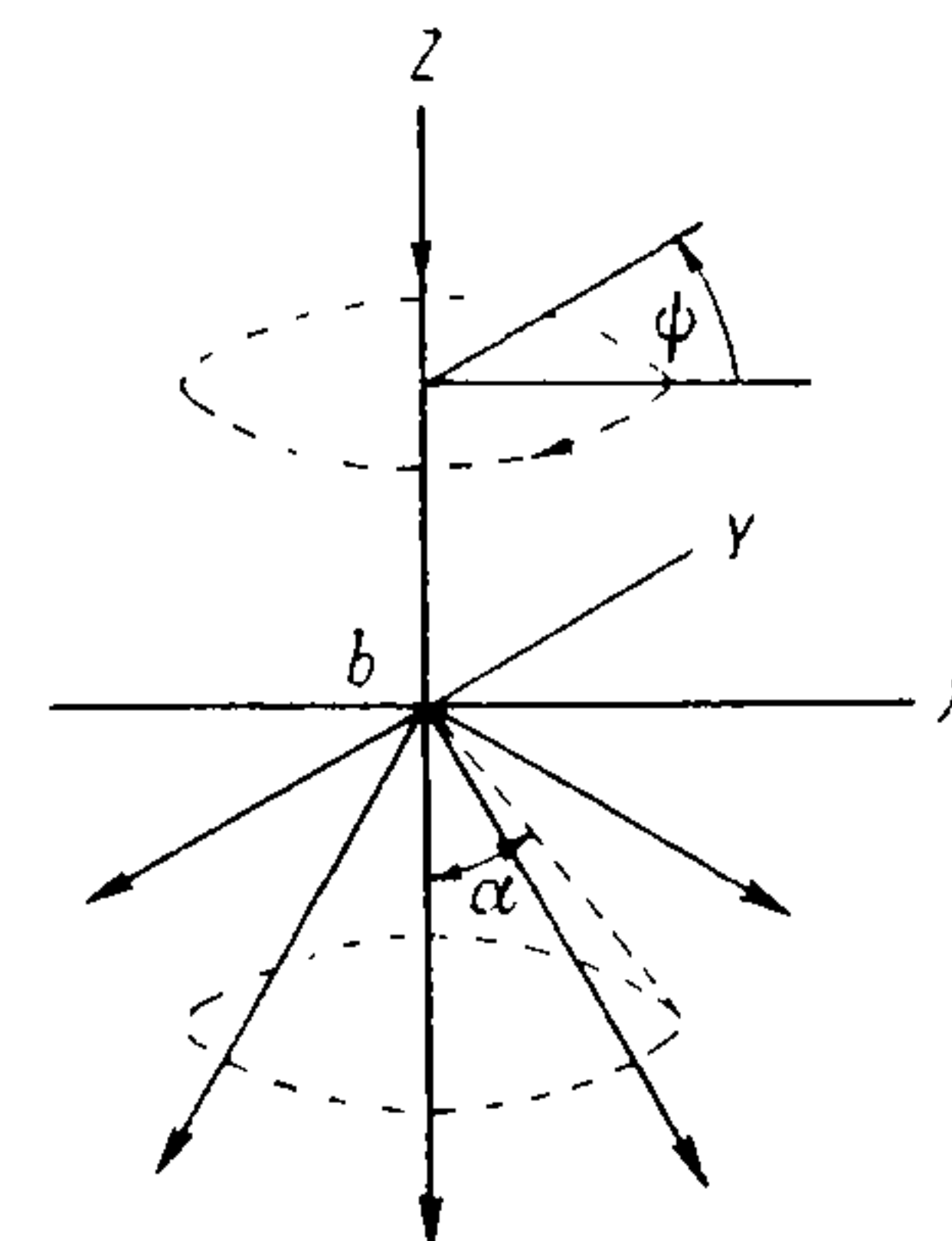


Рис. 40.

так как ток распределяется равномерно по полусфере с радиусом R (рис. 40).

Как известно из формулы

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi\mathbf{J}}{c}$$

по теореме Стокса получается связь между циркуляцией вектора \mathbf{H} и током, пронизывающим данный контур,

$$\oint H_l dl = \frac{4\pi}{c} \int J_n dS = \frac{4\pi}{c} I,$$

причем направление нормали связано с направлением обхода контура правилом правого винта.

Эту формулу применим к окружности, расположенной при $z > 0$, имеющей центр на оси и радиус r ; элемент дуги окружности есть $rd\psi$, и мы получаем, обозначая через H_ψ составляющую \mathbf{H} ,

перпендикулярную к оси и к кратчайшему расстоянию до оси, т. е. направленную в сторону возрастания азимута ψ ,

$$\int_0^{2\pi} H_\psi r d\psi = -\frac{4\pi}{c} I.$$

Так как из симметрии распределения тока видно, что от азимута ψ ничего не зависит, то мы получаем:

$$2\pi r H_\psi = -\frac{4\pi}{c} I; \quad H_\psi = -\frac{2I}{cr}. \quad (212)$$

Для такой же окружности при $z < 0$ полный ток, проходящий через нее, уже не равен I , а меньше во столько раз, во сколько раз телесный угол конуса, имеющего вершину в точке заземления и опирающегося на данную окружность, меньше, чем телесный угол полу-пространства, т. е. 2π . Так как этот телесный угол, как легко вычислить, равен $2\pi(1 - \cos \alpha)$, то мы получаем

$$H_\psi = -\frac{2I}{cr}(1 - \cos \alpha) = -\frac{2I}{cr} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}\right). \quad (213)$$

Докажем теперь, что при таком распределении тока, а именно при цилиндрической симметрии, H_z и H_r должны равняться нулю.

Симметрия распределения тока характеризуется тем, что во всем пространстве

$$\begin{aligned} J_x &= J_r(r, z) \cos \psi; \\ J_y &= J_r(r, z) \sin \psi; \\ J_z &= J_z(r, z). \end{aligned}$$

Возьмем точку с координатами $x_0, 0, z_0$; тогда $H_r = H_x$, и мы имеем

$$R = \sqrt{x_0^2 + r^2 + (z_0 - z)^2 - 2x_0 r \cos \psi};$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{JR}]_x &= J_y(z_0 - z) - J_z(y_0 - y) = J_r \sin \psi (z_0 - z) + J_z r \sin \psi = \\ &= [J_r(z_0 - z) + J_z r] \sin \psi; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{JR}]_z &= J_x(y_0 - y) - J_y(x_0 - x) = -J_r r \sin \psi \cos \psi - \\ &- J_z \sin \psi (x_0 - r \cos \psi) = -J_r x_0 \sin \psi. \end{aligned}$$

Отсюда, подставляя в формулу (209), получаем

$$\begin{aligned} H_x &= \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{\infty} r dr [J_r(z_0 - z) + \\ &+ J_z r] \int_0^{2\pi} \frac{\sin \psi d\psi}{[x_0^2 + r^2 + (z_0 - z)^2 - 2x_0 r \cos \psi]^{\frac{3}{2}}}; \quad (214) \end{aligned}$$

$$H_z = -\frac{1}{c} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_0^{\infty} r dr J_r x_0 \int_0^{2\pi} \frac{\sin \psi d\psi}{[x_0^2 + r^2 + (z_0 - z)^2 - 2x_0 r \cos \psi]^{\frac{3}{2}}}. \quad (215)$$

Оба эти интеграла равны нулю, так как легко видеть, что интегралы по ψ при всех значениях r, z, x_0 и z_0 исчезают. Таким образом, формулы (212) и (213) дают полное решение рассматриваемой задачи.

Заметим, что значение $H_\psi^{(b)}$ при $z \geq 0$ при наличии осевой симметрии совершенно не зависит от распределения токов в земле; равенство же нулю интегралов (214) и (215) нами доказано для любого распределения токов в земле с осевой симметрией. Таким образом, H_ψ при $z \geq 0$ получится одно и то же при любой зависимости σ от z , т. е. при каких угодно горизонтальных напластованиях разпородных пород, так как при этом осевая симметрия токов не будет нарушена.

2. Пусть точка b находится не в начале координат, а по отношению к координатным осям OX и OY в плоскости раздела имеет координаты x_b и y_b (рис. 41). Разложим $\mathbf{H}^{(b)}$, имеющее только составляющую H_ψ , на составляющие по осям OX и OY :

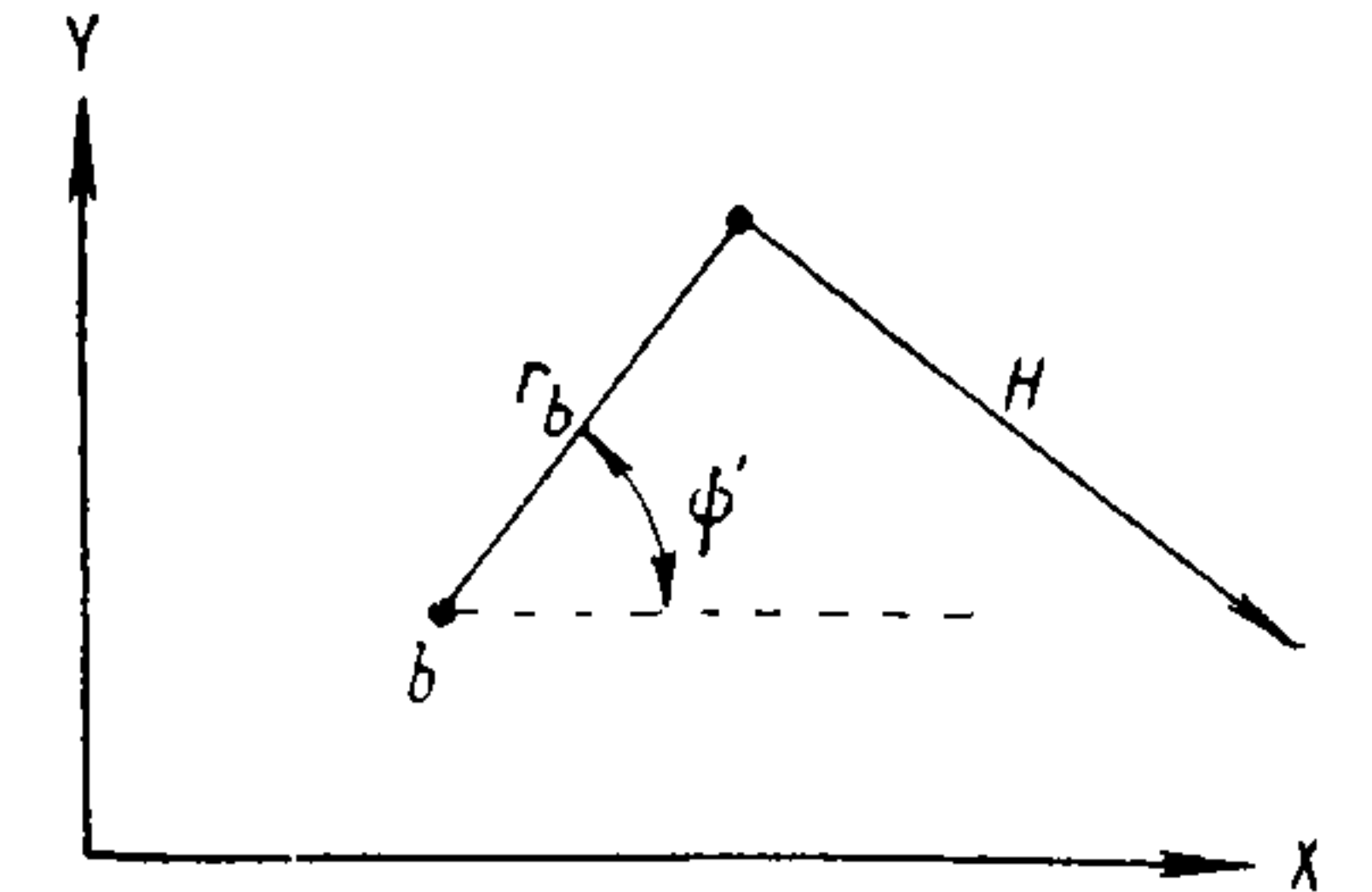


Рис. 41.

$$\left. \begin{aligned} H_x^{(b)} &= -H_\psi \sin \psi = -\frac{2I}{cr_b^2} r_b \sin \psi = -\frac{2I}{c} \cdot \frac{y - y_b}{r_b^2}; \\ H_y^{(b)} &= H_\psi \cos \psi = -\frac{2I}{cr_b^2} r_b \cos \psi = -\frac{2I}{c} \cdot \frac{x - x_b}{r_b^2}. \end{aligned} \right\} \quad (216)$$

Пусть в точке a находится заземление подобной же установки, но с обратным направлением тока (из земли в кабель). Магнитное поле этой системы будет равно на основании (216)

$$H_x^{(a)} = -\frac{2I}{c} \cdot \frac{y - y_a}{r_a^2}; \quad H_y^{(a)} = \frac{2I}{c} \cdot \frac{x - x_a}{r_a^2}. \quad (217)$$

Эти формулы имеют место для $z \geq 0$, r_a и r_b , как ясно из предыдущего, означают расстояния проекции точки наблюдения на плоскости $z = 0$ от заземлений a и b .

Для $z < 0$ будем иметь аналогично (выписываем только $H^{(a)}$)

$$\left. \begin{aligned} H_x^{(a)} &= -\frac{2I}{c} \cdot \frac{y - y_a}{r_a^2} \left(1 + \frac{z}{R_a}\right); \\ H_y^{(a)} &= +\frac{2I}{c} \cdot \frac{x - x_a}{r_a^2} \left(1 + \frac{z}{R_a}\right). \end{aligned} \right\} \quad (218)$$

3. Сумма двух полей $\mathbf{H}^{(a)}$ и $\mathbf{H}^{(b)}$ дает поле установки с двумя точечными заземлениями в a и b , причем питание производится кабелем, приходящим сверху к точке b и уходящим от точки a вверх. Предположим теперь, что имеется еще незаземленный кабель, идущий вплотную вдоль вертикальных кабелей, а на поверхности земли лежащий в виде какой-нибудь линии, соединяющей точки a и b

(рис. 42). Пусть по нему ток I в таком направлении, чтобы действие вертикальных заземленных кабелей было уничтожено вертикальными частями незаземленного кабеля. Очевидно мы получим в сумме поле установки с отрезком кабеля, лежащим на земле и заземленным в точках a и b , если мы к вычисленному ранее магнитному полю $\mathbf{H}^{(a)} + \mathbf{H}^{(b)}$ прибавим еще поле всего воображаемого незаземленного кабеля.

Вычисление магнитного поля добавленного кабеля очевидно можно произвести по закону Био — Савара для линейных проводников; назовем это поле $\mathbf{H}^{(c)}$

$$\mathbf{H}^{(c)} = \frac{I}{c} \int_b^\infty \frac{[d\mathbf{R}]}{R^3} + \frac{I}{c} \int_0^a \frac{[d\mathbf{R}]}{R^3} + \frac{I}{c} \int_a^b \frac{[d\mathbf{R}]}{R^3} = \mathbf{H}_1^{(c)} + \mathbf{H}_2^{(c)} + \mathbf{H}_3^{(c)}. \quad (219)$$

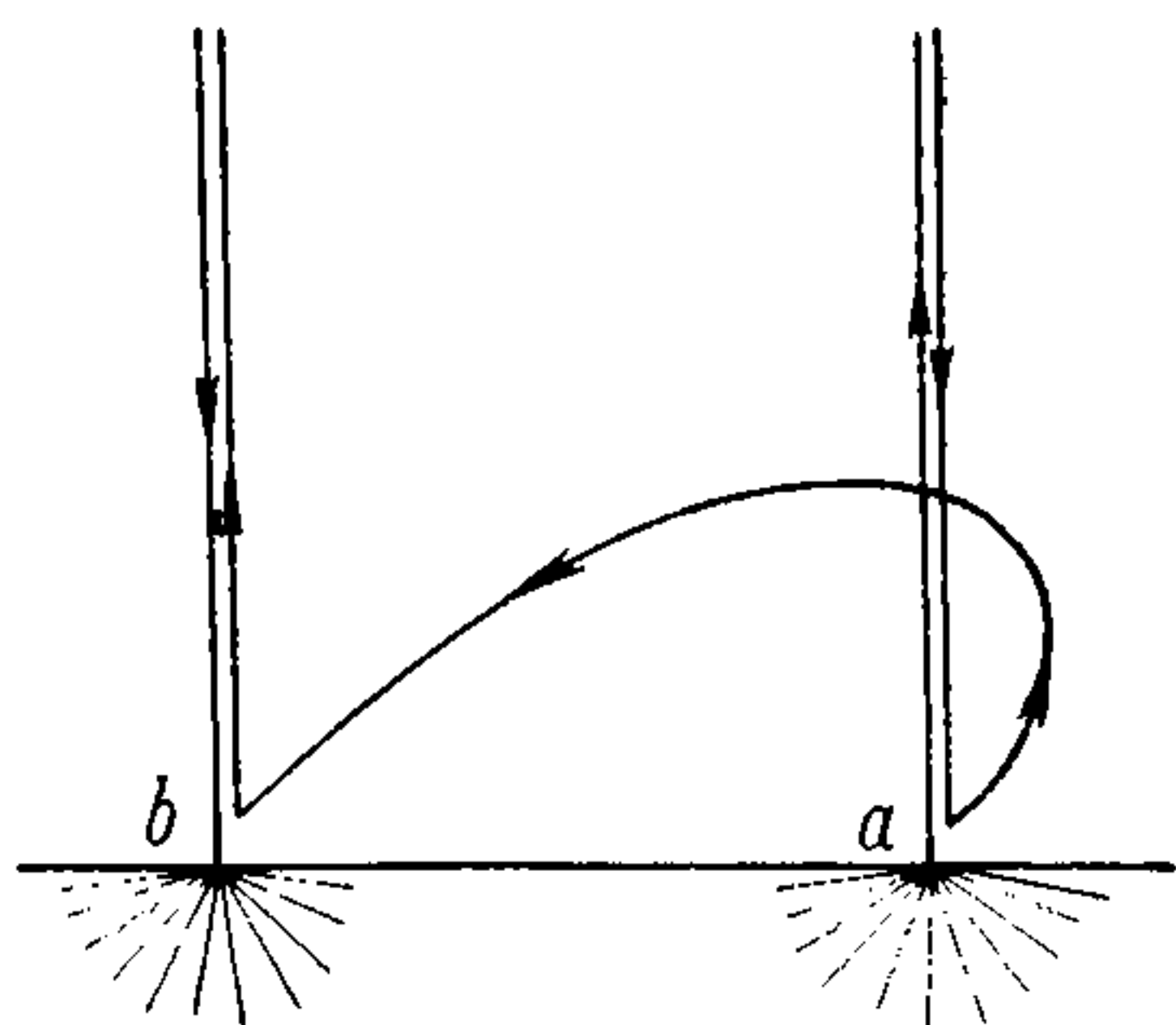


Рис. 42.

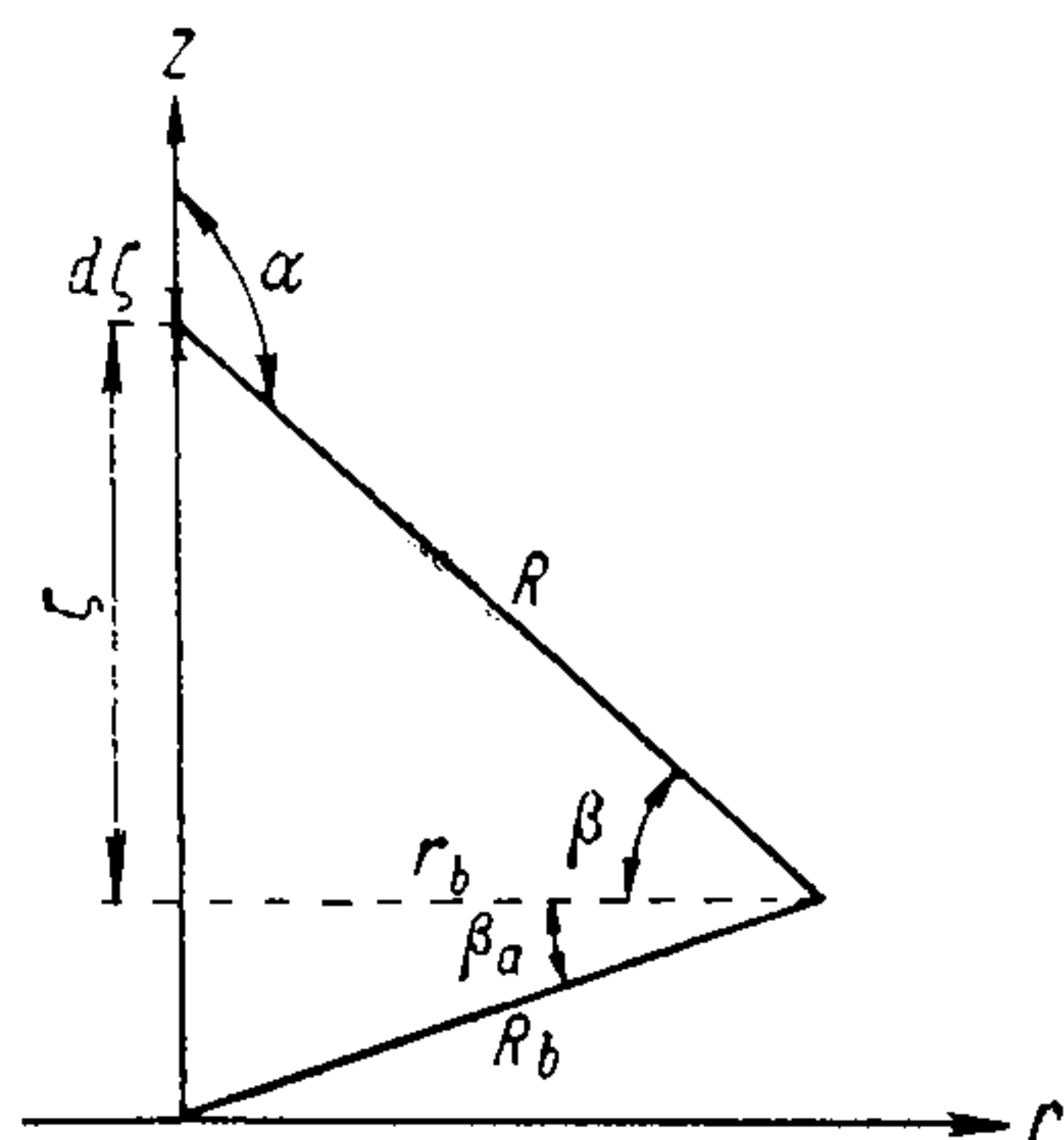


Рис. 43.

Первый интеграл даст опять только составляющую по азимуту вокруг вертикальной прямой, проходящей через точку b . Абсолютная величина подынтегрального элемента равна

$$\left| \frac{[d\mathbf{R}]}{R^3} \right| = \frac{\sin \alpha d\zeta}{R^2} = \frac{\cos \beta d\beta}{r}, \quad (220)$$

так как $\zeta = r \operatorname{tg} \beta$, $d\zeta = \frac{r d\beta}{\cos^2 \beta}$, $R = \frac{r}{\cos \beta}$ (рис. 43).

Пределы интегрирования по β от $-\beta_0$ до $\pi/2$, где

$$\beta_0 = \arcsin \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}};$$

$$\frac{I}{c} \int_b^\infty \left| \frac{[d\mathbf{R}]}{R^3} \right| = \frac{I}{cr} \int_{-\beta_0}^{\pi/2} \cos \beta d\beta = \frac{I}{cr} (1 + \sin \beta_0) = \frac{I}{cr} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + r^2}} \right).$$

Переходя к координатам X, Y , имеем

$$\left. \begin{aligned} H_{1x}^{(c)} &= -\frac{I}{c} \cdot \frac{y - y_b}{r_b^2} \left(1 + \frac{z}{R_b} \right); \\ H_{1y}^{(c)} &= \frac{I}{c} \cdot \frac{x - x_b}{r_b^2} \left(1 + \frac{z}{R_b} \right), \end{aligned} \right\} \quad (221)$$

где R_b — расстояние точки наблюдения от заземления b .

Формулы для составляющих $H_2^{(c)}$ пишутся совершенно аналогично, с заменой значка b на a и переменной знака

$$\left. \begin{aligned} H_{2x}^{(c)} &= \frac{I}{c} \cdot \frac{y - y_a}{r_a^2} \left(1 + \frac{z}{R_a} \right); \\ H_{2y}^{(c)} &= -\frac{I}{c} \cdot \frac{x - x_a}{r_a^2} \left(1 + \frac{z}{R_a} \right). \end{aligned} \right\} \quad (221a)$$

$\mathbf{H}_3^{(c)}$ представляет собой результат интегрирования формулы Био — Савара по горизонтально лежащему участку кабеля. Если он представляет собой ломаную линию, то от каждого прямолинейного отрезка, начинающегося в точке 1 и кончающегося в точке 2, мы получим, вычисляя тем же приемом, как в (220),

$$|H_3^{(c)}|_{(1,2)} = \frac{I}{cr'} \int_{-\beta_1}^{\beta_2} \cos \beta d\beta = \frac{I}{cr'} (\sin \beta_2 + \sin \beta_1). \quad (222)$$

Вектор $\mathbf{H}_3^{(c)}$ направлен в плоскости PSQ (рис. 44) перпендикулярно к направлению r' . Если точка P попадает в плоскости $z = 0$, то $\mathbf{H}_3^{(c)}$ имеет только вертикальную составляющую. Так как измерения проводят именно в этой плоскости, то, замечая, что $\mathbf{H}^{(a)}$, $\mathbf{H}^{(b)}$, $\mathbf{H}_1^{(c)}$ и $\mathbf{H}_2^{(c)}$ имеют только горизонтальные составляющие, мы можем сказать, что в плоскости $z = 0$ вертикальная составляющая определяется исключительно формой лежащего на земле кабеля, а горизонтальная составляющая — только расположением заземлений. При $z \neq 0$ вектор $\mathbf{H}_3^{(c)}$ дает горизонтальную составляющую, что пужно принимать во внимание, оперируя вблизи кабеля, так как там его действие очень велико, и если измерения производятся не точно в его плоскости (рамка, принимающая магнитное поле, всегда стоит на треноге и имеет некоторую высоту над поверхностью земли), то измеряемую горизонтальную составляющую следует приводить к значению ее в плоскости кабеля, учитывая это превышение. Для этого мы представим выражение $H_3^{(c)}$ в особой системе координат для рассматриваемого отрезка цепи, к которому мы находимся близко.

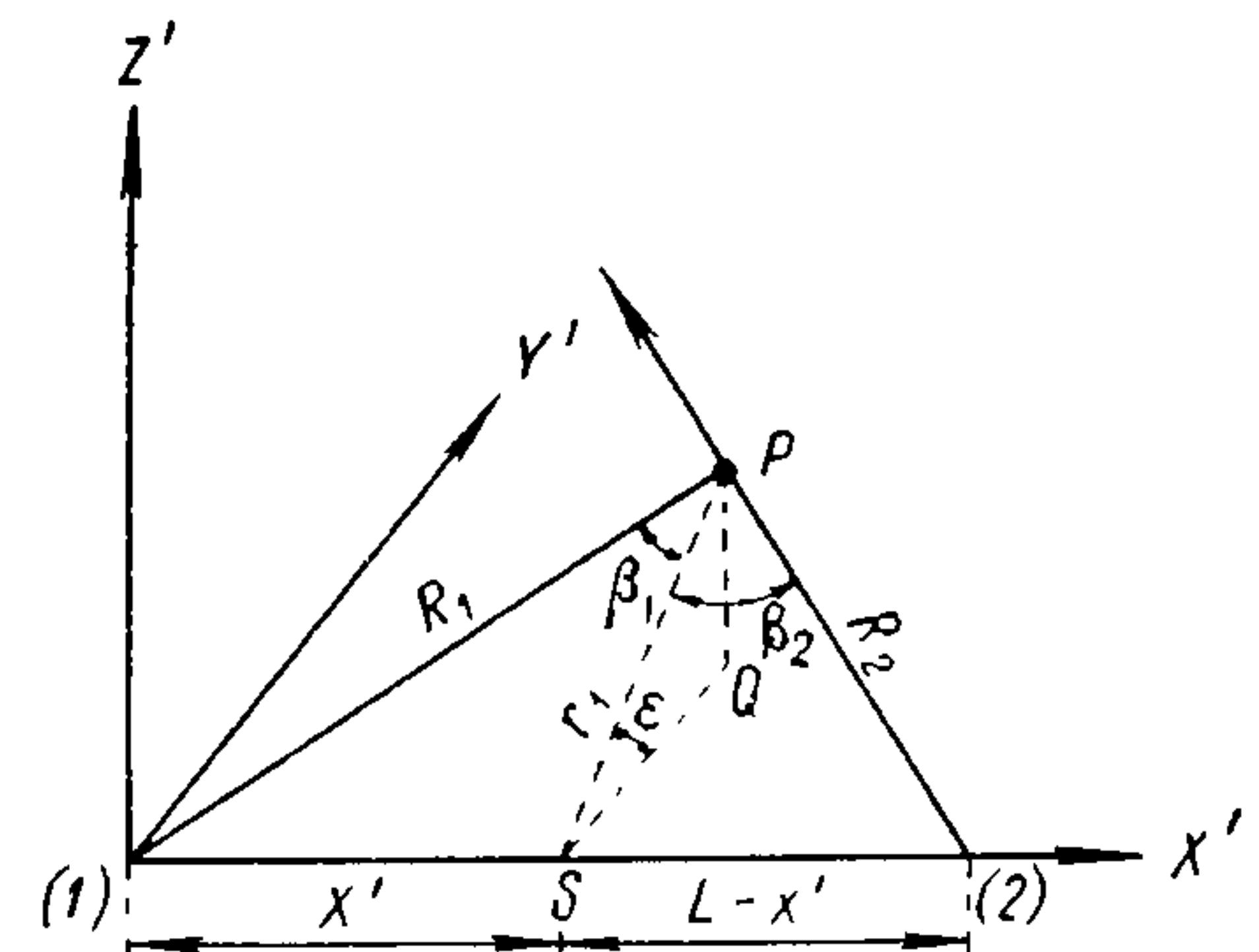


Рис. 44.

Именно, мы примем ось OX' вдоль отрезка, ось OY' перпендикулярно к нему и влево (от направления тока в горизонтальной плоскости) у его начала, ось OZ' — вертикально вверх. Тогда, если x' , y' , z' координаты точки поля,

$$\sin \beta_2 = \frac{L-x'}{R_2}; \quad \sin \beta_1 = \frac{x'}{R_1};$$

$$r' = \sqrt{y'^2 + z'^2}; \quad R_1 = \sqrt{z'^2 + x'^2 + y'^2};$$

$$R_2 = \sqrt{z'^2 + (L-x')^2 + y'^2}$$

и (222) дает

$$H_3^{(c)} = \frac{I}{c \sqrt{y'^2 + z'^2}} \left[\frac{x'}{R_1} + \frac{(L-x')}{R_2} \right]. \quad (223)$$

Так как

$$(H_3^{(c)})_y = -H_3^{(c)} \sin \varepsilon; \quad \sin \varepsilon = \frac{z'}{\sqrt{y'^2 + z'^2}},$$

то

$$(H_3^{(c)})_y = -\frac{I}{c} \cdot \frac{z'}{y'^2 + z'^2} \left(\frac{L-x'}{R_2} + \frac{x'}{R_1} \right). \quad (224)$$

Если $\sin \varepsilon$ мал, что будет, если возвышение точки P мало по сравнению с кратчайшим расстоянием до кабеля, то мы будем считать величину z/y малой и пренебрежем ее квадратом по сравнению с единицей. Тогда мы имеем приближенные равенства

$$r'^2 \approx y^2 \left(1 + \frac{z^2}{y^2} \right) \approx y;$$

$$R_1 = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{x'^2 + y'^2} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{z'^2}{x'^2 + y'^2} \right) \approx$$

$$\approx \sqrt{x'^2 + y'^2} = r_1 = (1Q)$$

и аналогично $R_2 = r_2 = (2Q)$. Отсюда получим

$$(H_3^{(c)})_y = -\frac{I}{c} \cdot \frac{z}{y^2} \left(\frac{L-x}{r_2} + \frac{x}{r_1} \right), \quad (225)$$

причем знак $(-)$ показывает, как нетрудно проверить на рис. 44, что если смотреть вдоль кабеля по направлению тока, то слева $(H_3^{(c)})_y$ будет направлено к кабелю, а справа — от него. В методе интенсивности редко приходится наблюдать ближе 50 м от кабеля, а возвышение рамки над поверхностью земли обычно около 1,5 м, и может быть сделано меньше. Отношение $\frac{z}{y} \leq \frac{2}{50}$ и квадрат его не больше чем 1/625. Для вычисления поправочной величины пренебрежение величиной такого порядка можно считать допустимым.

Выведем в окончательном виде формулы для нормального магнитного поля постоянного тока в употребительной установке метода

интенсивности, представленной на рис. 45. Начало координат полагаем в левом нижнем углу; заземления имеют координаты

$$x_a = 0; \quad y_a = \frac{L}{2}; \quad x_b = L; \quad y_b = \frac{L}{2}$$

и кабель проложен от a к b по половине периметра квадрата. Выкладки проведем для точек, лежащих в плоскости кабеля, т. е. при $z = 0$. Складывая взятые из формул (216), (217), (221) и (221а) величины

$$(H_x^{(b)})_{z=0} + (H_x^{(a)})_{z=0} + (H_{1x}^{(c)})_{z=0} + (H_{2x}^{(c)})_{z=0} = (H_x)_{z=0},$$

получаем

$$H_x = -\frac{I}{c} \left(\frac{y - \frac{L}{2}}{r_a^2} - \frac{y - \frac{L}{2}}{r_b^2} \right) \quad (226)$$

и аналогично

$$H_y = \frac{I}{c} \left(\frac{x}{r_a^2} - \frac{x-L}{r_b^2} \right),$$

причем

$$r_a^2 = \left(y - \frac{L}{2} \right)^2 + x^2;$$

$$r_b^2 = \left(y - \frac{L}{2} \right)^2 + (x-L)^2.$$

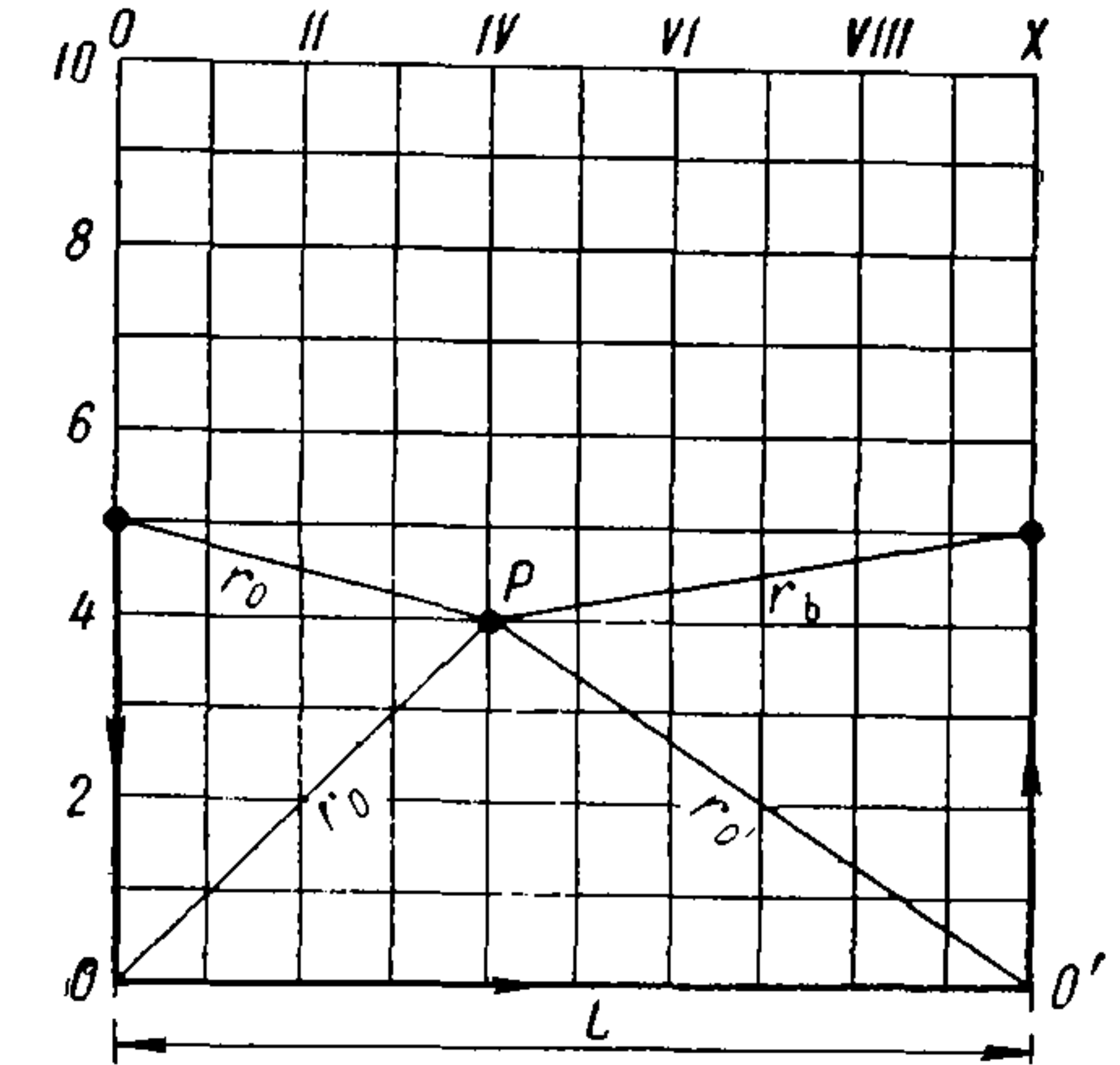


Рис. 45.

H_z будет происходить от трех прямолинейных отрезков: от полной стороны квадрата получим из (222) часть H_z

$$\frac{I}{c} \cdot \frac{1}{y} \left[\frac{x}{r_0} + \frac{(L-x)}{r_{0'}} \right],$$

а от двух боковых остальные две части H_z

$$\frac{I}{c} \cdot \frac{1}{x} \left(\frac{\frac{L}{2} - y}{r_a} + \frac{y}{r_0} \right) + \frac{I}{c} \cdot \frac{1}{(L-x)} \left[\frac{\frac{L}{2} - y}{r_{0'}} + \frac{y}{r_b} \right].$$

Имеются таблицы, дающие полный расчет этого поля. Они составляются обычно таким образом, что для $\frac{x}{L}$ и $\frac{y}{L} = 0,0; 0,1; 0,2; \dots; 1,0$, т. е. для узловых точек сетки (рис. 45) (за исключением точек, лежащих на кабель) вычислены значения чисел $a_x, a_y, a_z, a_p = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, a_s = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, пропорциональные значению величин H_x, H_y, H_z, H_p, H в соответственных точках. Вводя

относительные координаты $\xi = 10 \frac{x}{L}$; $\eta = 10 \frac{y}{L}$, принимающие целые значения в узловых точках сетки, мы сможем написать

$$\left. \begin{aligned} H_x &= -\frac{I}{c} \cdot \frac{10}{L} \left[\frac{\eta-5}{(\eta-5)^2 + \xi^2} - \frac{\eta-5}{(\eta-5)^2 + (10-\xi)^2} \right] = -\frac{2I}{cL} a_x; \\ H_y &= \frac{I}{c} \cdot \frac{10}{L} \left[\frac{\xi}{(\eta-5)^2 + \xi^2} + \frac{10-\xi}{(\eta-5)^2 + (10-\xi)^2} \right] = \frac{2I}{cL} a_y; \\ H_z &= \frac{I}{c} \cdot \frac{10}{L} \left[\frac{\xi}{\eta \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} + \frac{10-\xi}{\eta \sqrt{(10-\xi)^2 + \eta^2}} + \right. \\ &+ \frac{5-\eta}{\xi \sqrt{(\eta-5)^2 + \xi^2}} + \frac{\eta}{\xi \sqrt{\xi^2 + \eta^2}} + \frac{1}{(10-\xi) \sqrt{\eta^2 + (10-\xi)^2}} + \\ &\left. + \frac{5-\eta}{(10-\xi) \sqrt{(\eta-5)^2 + (10-\xi)^2}} \right] = \frac{2I}{cL} a_z, \end{aligned} \right\} (227)$$

определяя таким образом числа a , как значения соответствующих скобок, умноженные на 5. Коэффициент при числах a в практических единицах равняется

$$H^{(0)} = \frac{2I}{cL} = \frac{0,2I}{10^5 L} = 2 \frac{I}{L} 10^{-6} \text{ эс} = 2 \frac{I}{L} \text{ мкэс.}$$

В центре поля имеем

$$\xi = \eta = 5;$$

$$H_x = 0; \quad H_y = 2 \frac{I}{L} 5 \cdot 0,4 = 4 \frac{I}{L} \text{ мкэс};$$

$$H_z = 2 \frac{I}{L} 5 \frac{4}{5 \sqrt{2}} = 5,56 \frac{I}{L} \text{ мкэс.}$$

Эти числа показывают порядок величины напряжений магнитного поля при употребительных силах тока и расстояниях.

При вычислении таблиц чисел a можно воспользоваться уже указанными таблицами величин $1/\sqrt{m^2 + n^2}$, а также таблицами величин $m/(m^2 + n^2)$, данными в статье А. А. Петровского [76]. В цитированной уже статье [77] дается расчет горизонтальных составляющих магнитного поля в этой установке.

На основании замечания по поводу независимости $H_{\psi}^{(b)}$ и $H_{\psi}^{(a)}$ от распределения электропроводности в вертикальном направлении, мы можем сказать, что вычисленное нами нормальное поле будет тождественно при любом чередовании различно проводящих горизонтальных пластов, и приходим к заключению, что рассматриваемая установка при постоянном и, что практически более важно, при переменном токе достаточно низкой частоты — нечувствительна к такой структуре почвы.

Предлагаем читателю самому вывести формулы для магнитного поля на поверхности земли, происходящего от прямолинейного изолированного провода, расположенного горизонтально под поверхностью земли на глубине h и имеющего длину l . На концах этот провод заземлен, так что идущий по нему ток I замыкается через

землю. На поверхности земли и над нею это поле совпадает с полем линейного проводника, состоящего из самого провода и двух вертикальных бесконечно длинных отрезков, по которым ток подходит снизу к началу и уходит вниз от конца провода.

Эта схема может послужить первым грубым приближением для расчета аномалии, вызванной концентрацией тока в удлиненном проводящем теле, находящемся на некоторой глубине и расположенном примерно горизонтально.

Укажем еще на один прием вычисления магнитного поля объемно распределенных токов, сводящий объемные интегрирования к интегрированию по поверхностям. Метод этот применим к среде, составленной из однородных участков, так что в каждой области мы имеем

$$\mathbf{J}_i = -\sigma_i \text{grad } \varphi.$$

Часть вектор-потенциала, происходящая от области i , представляется в виде интеграла

$$\mathbf{A}_i = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}_i}{R} d\tau = -\frac{\sigma_i}{c} \int \frac{\text{grad } \varphi d\tau}{R}.$$

Возьмем составляющую A_{ix}

$$\begin{aligned} A_{ix} &= -\frac{\sigma_i}{c} \int \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} d\xi d\eta d\zeta = -\frac{\sigma_i}{c} \int \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\varphi}{R} d\xi d\eta d\zeta + \\ &+ \sigma_i \int \varphi \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{R} d\xi d\eta d\zeta; \end{aligned}$$

так как

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{R} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{R},$$

а дифференцирование по x можно вынести за знак интеграла, то мы получаем

$$A_{ix} = -\frac{\sigma_i}{c} \int \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\varphi}{R} \right) d\xi d\eta d\zeta - \frac{\sigma_i}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{\varphi}{R} d\xi d\eta d\zeta^*.$$

Второй интеграл представляет собой составляющую по оси X (по осям Y и Z получаются аналогичные выражения) некоторого градиента; при вычислении магнитного поля, т. е. при образовании вихря \mathbf{A} эти члены не играют роли, и их можно отбросить. Первый же интеграл можно свести к интегралу по поверхности

$$\int \frac{\partial}{\partial \xi} \cdot \frac{\varphi}{R} d\xi d\eta d\zeta = \int d\eta d\zeta \left[\left(\frac{\varphi}{R} \right)_{\xi_2} - \left(\frac{\varphi}{R} \right)_{\xi_1} \right],$$

* Причем предполагаем, что точка, в которой вычисляется вектор-потенциал, находится вне сред i, k, \dots , например в воздухе; в противном случае нужно было бы исследовать допустимость примененного интегрального преобразования. Произведя его, убеждаемся, что полученная формула в этом случае справедлива.

что уже легко написать в виде

$$\int \frac{\varphi}{R} \cos(n, OX) dS_i,$$

рассуждая так, как это делается при доказательстве теоремы Гаусса; n означает направление внешней нормали для среды i и интеграл распространен по границе среды i

$$A_{ix}^* = -\frac{\sigma_i}{c} \int \frac{\varphi}{R} \cos(n, OX) dS_i. \quad (228)$$

Обозначая через dS_{ik} элемент границы раздела между средой i и k и через dS_{i0} тоже для границы i и окружающего систему проводников изолятора, мы можем, не изменяя результата для магнитного поля, вместо настоящего вектор-потенциала

$$A = \sum_i A_i$$

вычислить сумму векторов $\sum_i A_i^*$, отличающихся от A на градиент каких-то скаляров. В составляющих получим

$$A_x^* = \frac{1}{c} \sum_{i>k} \sum_k (\sigma_k - \sigma_i) \int \frac{\varphi_{ik}}{R} \cos(n_{ik}, OX) dS_{ik} - \frac{1}{c} \sum_i \sigma_i \int \frac{\varphi_{i0}}{R} \cos(n_{i0}, OX) dS_{i0}. \quad (229)$$

Если i, k и т. д. означают различные участки земли, то еще нужно добавить вектор-потенциал кабеля, питающего электроды. Для двух точечных электродов и лежащего горизонтально на земле кабеля будем иметь

$$\left. \begin{aligned} A_x^* &= \frac{1}{c} \sum_{i>k} (\sigma_k - \sigma_i) \int \frac{\varphi_{ik}}{R} \cos(n_{ik}, OX) dS_{ik} - \\ &- \frac{1}{c} \sum_i \sigma_i \int \frac{\varphi_{i0}}{R} \cos(n_{i0}, OX) dS_{i0} + \frac{I}{c} \int_a^b \frac{dx'}{R}; \\ A_y^* &= \frac{1}{c} \sum_{i>k} (\sigma_k - \sigma_i) \int \frac{\varphi_{ik}}{R} \cos(n_{ik}, OY) dS_{ik} - \\ &- \frac{1}{c} \sum_i \sigma_i \int \frac{\varphi_{i0}}{R} \cos(n_{i0}, OY) dS_{i0} + \frac{I}{c} \int_a^b \frac{dy'}{R}; \\ A_z^* &= \frac{1}{c} \sum_{ik} (\sigma_k - \sigma_i) \int \frac{\varphi_{ik}}{R} \cos(n_{ik}, OZ) dS_{ik} - \\ &- \frac{1}{c} \sum_i \sigma_i \int \frac{\varphi_{i0}}{R} \cos(n_{i0}, OZ) dS_{i0}. \end{aligned} \right\} \quad (230)$$

Для вычисления по этим формулам нужно знать из решения задачи о токе значение потенциала во всех точках поверхностей раздела. Может случиться, что выполнение квадратур окажется возможным; тогда эти формулы могут пригодиться. Применяя их к рассмотренной выше задаче, можно придти к формулам (227), которые были выведены таким способом В. А. Фоком и автором в 1925 г. для первых опытов по электроразведке, поставленных в Геологическом комитете.

Глава IV

ПОЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

§ 18. АНОМАЛИИ В ХОДЕ ЭКВИПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ЛИНИЙ ВОКРУГ СФЕРИЧЕСКОЙ ЗАЛЕЖИ

В электроразведке месторождений хорошо проводящих руд (сульфидные руды железа, меди, свинца, мышьяка) задача заключается в нахождении более или менее резко ограниченных неоднородностей, притом не слишком протяженных, так что обычно удается выбрать такие размеры установки (разнос и форма электродов), чтобы вызывающая отклонения от нормального поля область была невелика по сравнению с размерами поля. Ввиду неправильности форм рудных тел и математической сложности расчетов даже для таких идеализированных форм, как, например, эллипсоид, интерпретация полученных аномалий проводится обычно на основании накопившегося уже полевого и модельного опыта. Однако самый характер аномалий поучительно получить из расчета хотя бы в наиболее простых случаях.

Мы предположим, что размеры неоднородности достаточно малы по сравнению с размерами поля, чтобы считать, что, если бы ее не было, в занимаемом ею и окружающем ее пространстве нормальное поле было бы однородным. В качестве объекта возьмем сферическую неоднородность, и формулируем задачу таким образом: в однородное поле, имеющее место в среде с электропроводностью σ_1 , вносится шар радиусом a , из вещества другой электропроводности σ_2 . Требуется найти поле (т. е. распределение потенциала), искаженное этой неоднородностью.

Положим начало координат (рис. 46) в центре сферы, и пусть нормальное поле имеет направление оси OX . Если плотность тока нормального поля есть J_0 , то

$$J_0 = -\sigma_1 \text{grad}_x \varphi_0,$$

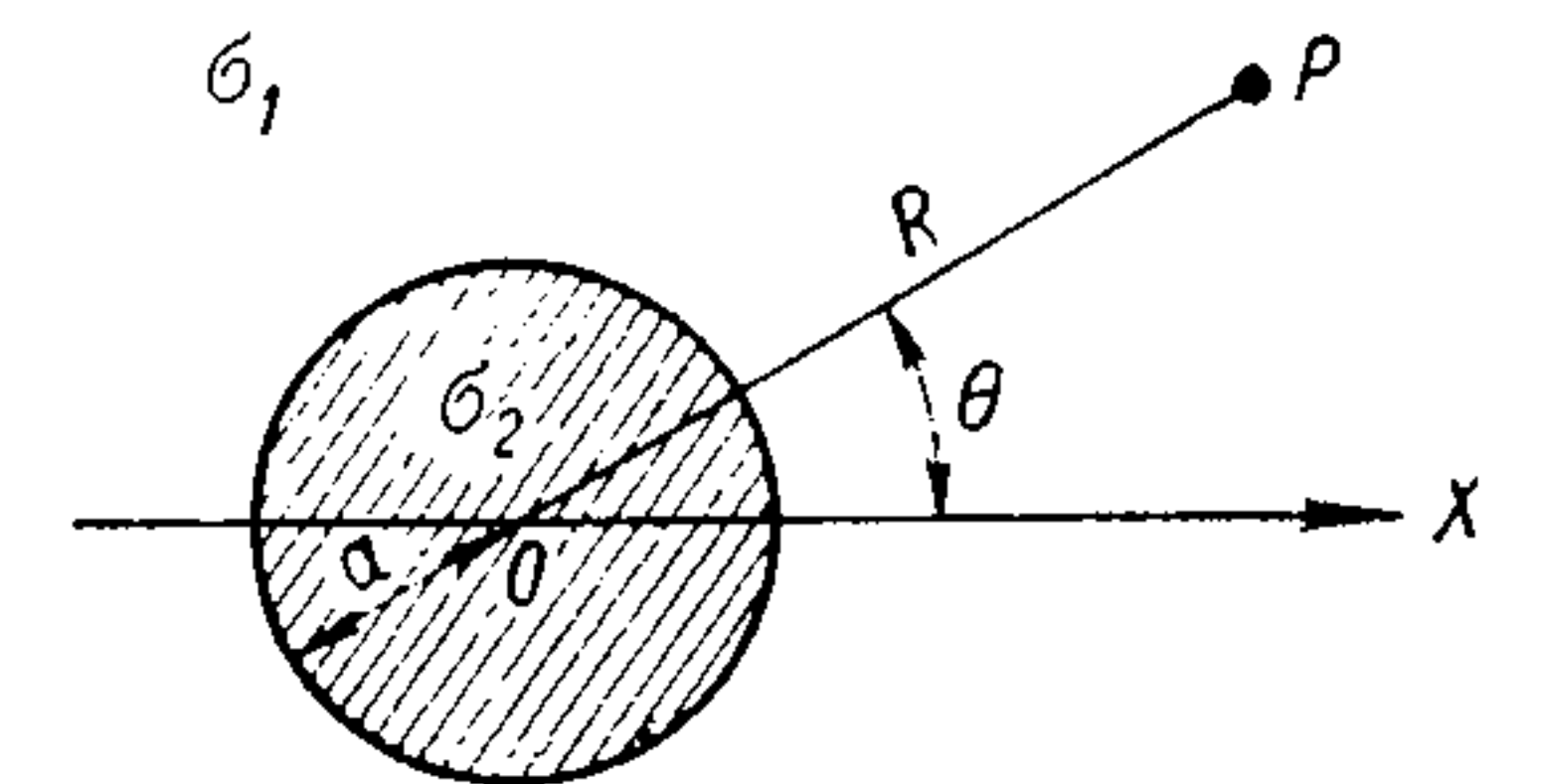


Рис. 46.

чему соответствует потенциал невозмущенного поля

$$\varphi_0 = -\frac{J_0}{\sigma_1} x + C.$$

Равноотстоящие по разности потенциалов эквипотенциальные поверхности φ_0 будут плоскостями, перпендикулярными к OX и равноотстоящими по координате x . Константу C можем положить равной нулю. Мы будем искать решение задачи в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi^{(1)} &= \varphi_0 + \varphi_1^*; \\ \varphi^{(2)} &= \varphi_0 + \varphi_2^*, \end{aligned} \right\} \quad (231)$$

где значки 1 и 2 относятся к внешнему и внутреннему по отношению к сфере пространству.

Так как должно быть

$$\Delta\varphi = 0,$$

а

$$\Delta\varphi_0 = 0,$$

то и добавочные потенциалы должны удовлетворять уравнениям

$$\Delta\varphi_1^* = 0; \quad \Delta\varphi_2^* = 0,$$

причем φ_1^* для достаточно больших R должно стремиться к нулю, так как на достаточно большом удалении действие неоднородности должно исчезнуть. Введем сферические координаты с осью OX , как полярной. Из симметрии задачи видно, что от азимута вокруг этой оси ничего не должно зависеть, поэтому дифференциальные уравнения для φ_1^* и φ_2^* будут

$$\frac{1}{R^2} \cdot \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi^*}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi^*}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (232)$$

где R — расстояние от центра; θ — полярный угол, отсчитываемый от оси OX .

Полагая, для разыскания частных решений,

$$\varphi^* = \Phi(R) P(\theta) \quad (233)$$

и подставляя это выражение в (232), легко добиваемся разделения переменных

$$\frac{1}{\Phi} \cdot \frac{d}{dR} R^2 \frac{d\Phi}{dR} + \frac{1}{P \sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = 0. \quad (234)$$

Отсюда ясно, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dR} R^2 \frac{d\Phi}{dR} &= m\Phi; \\ \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \sin \theta \frac{dP}{d\theta} &= -mP. \end{aligned} \right\} \quad (235)$$

Вводя вместо θ новую переменную $\xi = \cos \theta$, получим для второго уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \frac{d}{d\xi} \left(\sqrt{1-\xi^2} \frac{dP}{d\xi} \right) = -mP \quad (236)$$

и узнаем в нем дифференциальное уравнение полиномов Лежандра (шаровых функций одного переменного). Как известно, это уравнение дает однозначные и конечные решения для всех значений θ только тогда, когда

$$m = n(n+1), \quad (237)$$

где n — целое положительное число, включая нуль.

Так как требование однозначности и конечности (последнее при отсутствии точечных зарядов) для электростатического потенциала обязательно, то мы видим, что возможны частные решения только с указанными в (237) значениями n . При данном n уравнение решается функцией

$$P_n(\xi) = P_n(\cos \theta),$$

вид которых для $n=0$ и $n=1$ есть

$$P_0(\xi) = 1;$$

$$P_1(\xi) = \xi = \cos \theta.$$

Выбрав определенное значение n , имеем для нахождения соответствующего Φ_n уравнение

$$\frac{d}{dR} R^2 \frac{d\Phi}{dR} = n(n+1)\Phi. \quad (238)$$

Полагая здесь $\Phi = R^\mu$, имеем

$$\mu(\mu+1)R^\mu = n(n+1)R^\mu,$$

и, решая уравнение для μ , получаем

$$\mu_1 = n; \quad \mu_2 = -(n+1).$$

Полученные два частных решения R^n и $R^{-(n+1)}$ линейно независимы, и общее решение (238) будет

$$\Phi = \alpha_n R^n + \beta_n R^{-(n+1)}. \quad (239)$$

Общее решение (232) получится как сумма частных, с неопределенными пока коэффициентами, причем для φ_1^* , очевидно, нужно будет взять только решения типа $R^{-(n+1)}$, так как только эти решения будут обращаться в нуль на бесконечности, а для φ_2^* , наоборот, только решения типа R^n , так как в точке $R=0$ потенциал не должен обращаться в бесконечность.

Таким образом, мы нашли

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1^* &= \sum_0^\infty \beta_n R^{-(n+1)} P_n(\cos \theta); \\ \varphi_2^* &= \sum_0^\infty \alpha_n R^n P_n(\cos \theta). \end{aligned} \right\} \quad (240)$$

Для определения постоянных α_n и β_n мы должны использовать граничные условия, а именно непрерывность потенциала и нормальной к поверхности составляющей J . Для этого выпишем в сферических координатах выражение для φ_0

$$\varphi_0 = -\frac{J_0}{\sigma_1} R \cos \theta = -\frac{J_0}{\sigma_1} R P_1(\cos \theta) \quad (241)$$

и его производную по R , т. е. по нормали к поверхности шара

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial R} = -\frac{J_0}{\sigma_1} P_1(\cos \theta). \quad (242)$$

Написав также нормальные производные потенциалов φ_1^* и φ_2^*

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1^*}{\partial R} &= -\sum_0^{\infty} \beta_n (n+1) R^{-(n+2)} P_n(\cos \theta); \\ \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial R} &= \sum_1^{\infty} \alpha_n n R^{n-1} P_n(\cos \theta) \end{aligned} \right\} \quad (243)$$

и положив во всех формулах $R = a$, имеем для точек границы

$$(\varphi_1)_{R=a} = \varphi_0 + \beta_0 a^{-1} P_0(\cos \theta) + \beta_1 a^{-2} P_1(\cos \theta) + \dots;$$

$$(\varphi_2)_{R=a} = \varphi_0 + \alpha_0 P_0(\cos \theta) + \alpha_1 a P_1(\cos \theta) + \dots$$

и, следовательно,

$$0 = \varphi_1 - \varphi_2 = (\beta_0 a^{-1} - \alpha_0) P_0(\cos \theta) + (\beta_1 a^{-2} - \alpha_1 a) P_1 \cos \theta + \dots \quad (244)$$

Далее

$$\left(\sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} \right)_{R=a} = -\beta_0 \sigma_1 a^{-2} P_0(\cos \theta) - (2\beta_1 a^{-3} \sigma_1 + J_0) P_1(\cos \theta) + \dots;$$

$$\left(\sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial R} \right)_{R=a} = \left(\alpha_1 \sigma_2 - J_0 \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) P_1(\cos \theta) + \alpha_2 \sigma_2 P_2(\cos \theta) + \dots +$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} 0 = \sigma_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial R} - \sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial R} &= -\beta_0 \sigma_1 a^{-2} P_0(\cos \theta) - \left[2\beta_1 a^{-3} \sigma_1 + \alpha_1 \sigma_2 + \right. \\ &\quad \left. + J_0 \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \right] P_1 \cos(\theta) - \dots \end{aligned} \quad (245)$$

Для коэффициентов α_n и β_n получаем уравнения

$$\beta_0 a^{-1} - \alpha_0 = 0; \quad \beta_1 a^{-2} - \alpha_1 a = 0;$$

$$-\beta_0 a^{-2} \sigma_1 = 0; \quad 2\beta_1 a^{-3} \sigma_1 + \alpha_1 \sigma_2 = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} - 1 \right) J_0;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\beta_n a^{-(n+1)} - \alpha_n a^{n+1} = 0; \quad \beta_n a^{-(n+2)} \sigma_1 - \alpha_n \sigma_2 a^n = 0.$$

Только вторая система дает отличные от нуля решения.

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{(\sigma_2 + 2\sigma_1)} \cdot \frac{J_0}{\sigma_1} = B \frac{J_0}{\sigma_1}; \\ \beta_1 &= \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)}{(\sigma_2 + 2\sigma_1)} \cdot \frac{J_0}{\sigma_1} a^3 = B \frac{J_0}{\sigma_1} a^3, \end{aligned} \right\} \quad (246)$$

где для сокращения мы ввели обозначение

$$\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + 2\sigma_1} = B. \quad (247)$$

Добавочный потенциал для внутреннего поля будет

$$\varphi_2^* = B \frac{J_0}{\sigma_1} R P_1(\cos \theta) = B \frac{J_0}{\sigma_1} x, \quad (248)$$

т. е. потенциал однородного поля, направленного в зависимости от знака величины B либо против первоначального, т. е. ослабляя его ($\sigma_2 > \sigma_1$), либо по его направлению, т. е. усиливая его ($\sigma_2 < \sigma_1$). Для внешнего поля получаем

$$\varphi_1^* = B a^3 \frac{J_0}{\sigma_1} \cdot \frac{P_1(\cos \theta)}{R^2} = B a^3 \frac{J_0}{\sigma_1} \cdot \frac{x}{R^3}, \quad (249)$$

что, как нетрудно видеть, есть потенциал диполя, находящегося в начале координат, направленного по оси X и имеющего момент

$$p = B a^3 \frac{J_0}{\sigma_1} = B a^3 E_0. \quad (249a)$$

Полагая $\frac{J_0}{\sigma_1} = E_0$, имеем окончательное решение

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= -\left(1 - B \frac{a^3}{R^3} \right) x E_0; \\ \varphi_2 &= -(1 - B) x E_0, \end{aligned} \right\} \quad (250)$$

и легко проверить, что это решение удовлетворяет всем условиям задачи.

Величина B , а следовательно, и картина потенциального поля, зависит только от отношения электропроводностей. На рис. 47 и 48 даны результаты расчета эквипотенциальных линий, представляющих сечение эквипотенциальных поверхностей с плоскостью, проведенной через диаметр шара, параллельный первичному полю. На рис. 47 $B = 0,8$, т. е. $\sigma_2/\sigma_1 = 13$; на рис. 48 $B = 0,4$; $\sigma_2/\sigma_1 = 3$.

Расчет эквипотенциальных кривых проводился в предположении $a = 1$ и вычислялись координаты точек кривых для внешнего поля из уравнений

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{R^3}{R^3 - B} \cdot \frac{\varphi}{E_0}; \\ y &= R \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R} \right)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (251)$$

причем значения φ/E_0 брались равными 0,2; 0,4; . . . ; 1,8; 2,0, а значения R подбирались так, чтобы расстояния вычисленных точек позволяли провести плавные кривые.

Рассмотрение полученных формул и построенных картин эквипотенциальных линий показывает следующее: внутри шара, проводящего лучше окружающей среды, градиент потенциала понижен; понижен он также сбоку, если считать по направлению тока. Зато непосредственно перед шаром и позади шара — он сильно повышен, что выражается сближением эквипотенциальных поверхностей. Непосредственное приложение диаграмм имеем в том случае, когда неоднородность представляется полушаровым углублением, заполненным веществом с другой проводимостью, так как мы можем тогда рассматривать одно полупространство ($z > 0$) как изображение другого

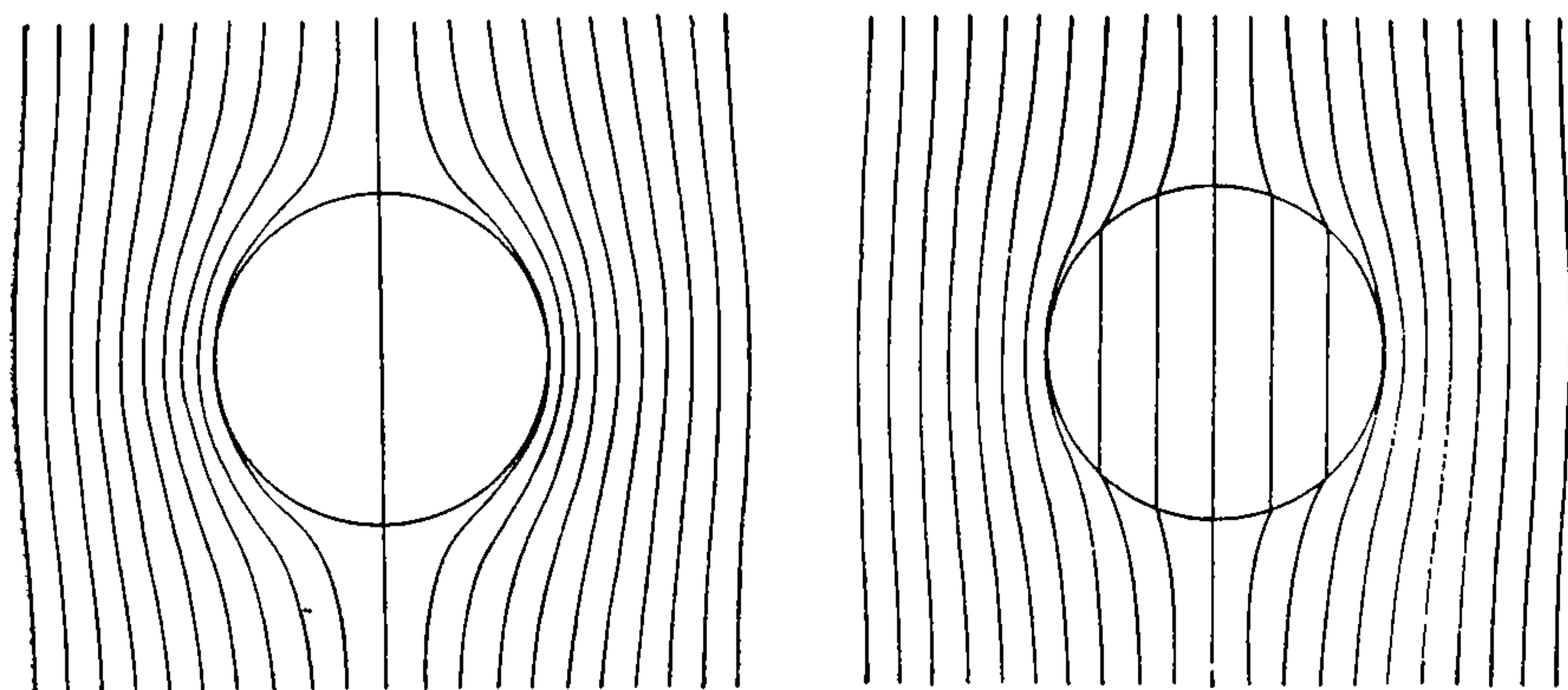


Рис. 47.

Рис. 48.

($z < 0$). В таком случае, как показывает рис. 48, даже сравнительно незначительное отношение электропроводностей дает весьма заметную аномалию в виде характерного раздутья эквипотенциальных линий, стремящихся как бы отойти от проводящего тела. Если бы могли произвести промер потенциала внутри неограниченной среды в плоскости, параллельной общему направлению тока и отстоящей от центра шара на величину его диаметра, то, как показывает верхний край наших диаграмм, мы получили бы по прямой, проходящей над самым центром (т. е. там, где аномалия всего больше), почти равноотстоящие эквипотенциальные линии и градиент соответствовал бы почти нормальному полю. При этом рис. 47 и 48 нужно рассматривать как разрезы по вертикальной плоскости через центр шара.

Для практического вывода это рассуждение имеет ориентировочный характер. Для правильного учета границы раздела между землей и воздухом нужно было бы рассматривать два симметрично расположенных шара. Если эффект на поверхности от одного шара невелик, то приближенно можно сказать, что эффект двух шаров будет примерно в два раза больше, но это будет весьма грубое при-

ближение, если диаметр шара больше глубины залегания верхней его точки.

Так как случай на рис. 47 весьма мало отличается от предельного: $\sigma_2/\sigma_1 = \infty$, $B = 1$, то мы видим, что шарообразная форма залежи даже при очень большом значении электропроводности, но при достаточной глубине, очень невыгодна для ее обнаружения методом эквипотенциальных линий.

Если же объект пересекается поверхностью земли (яма, заполненная более проводящим материалом), то эффект наоборот получается весьма заметным. Этим объясняются аномалии от резко очерченных углублений подземного рельефа плотных каменных пород, заполненных более проводящими наносами или представляющих собой зоны смятия и разрушения. Наличие подобных причин аномалий, однако, в большинстве случаев может быть легко проверено поверхностными горно-разведочными работами. Расчет аномальных полей для более сложных форм лучше проводящих (и хуже проводящих) тел требует весьма значительной затраты труда; учет наличия поверхности земли для погруженного в нее тела (т. е. рассмотрение двух тел в однородной среде) еще более усложняет расчеты. Укажем здесь, что расчет некоторых случаев известного решения для эллипсоида в однородном поле (задача тождественна с задачей о поле эллипсоида, намагниченного однородным магнитным полем) мог бы дать картину аномалии от полуэллипсоидального углубления, заполненного веществом с другой электропроводностью, и представил бы некоторый интерес, так как подобные образования (островки серицитовых сланцев в менее проводящем массиве, зоны смятия и т. п.) имеют по большей части удлиненную по простиранию форму, и глубина их не равна ширине.

§ 19. СРЕДНЕЕ УДЕЛЬНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ ПОРОД

Мы воспользуемся результатами § 18 для того, чтобы рассмотреть вопрос о средней электропроводности мелкозернистой среды, составленной из двух веществ, например из определенной породы и вкрапленной в нее руды, или из минерала, образующего данную породу, и влаги, заполняющей поры последней.

Ввиду того, что большинство породообразующих минералов в совершенно сухом состоянии представляют собой хорошие изоляторы, принято считать, что вся электропроводность таких пород в их естественном состоянии обусловлена именно влагой, заполняющей поры.

Переведем сначала результаты § 18 на электростатический язык. Положим, что в пустоте ($\epsilon = 1$) у нас находится шар радиусом a с диэлектрической постоянной $\epsilon = \sigma_2/\sigma_1$. Тогда по формуле (247) величина B будет равна

$$B = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}, \quad (252)$$

электрический момент шара, помещенного в поле E_0 , по (249а), будет равен

$$p = Va^3 E_0. \quad (249б)$$

Введем в рассмотрение известный из электростатики вектор объемной поляризации P , связанный с напряжением поля формулой

$$P = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi} E.$$

Внутри шара мы имеем по (250) однородное электрическое поле E_2 ; отсюда следует, что поле P внутри шара также будет однородно, или что шар из изотропного диэлектрика, внесенный в однородное поле, сам поляризуется однородно (но, как мы видим, искажает при этом внешнее поле). Так как P имеет физический смысл электрического момента единицы объема, а момент всего шара известен из (249б), то, деля p на объем шара $\frac{4\pi}{3}a^3$, получаем

$$P = \frac{3p}{4\pi a^3} = \frac{3V}{4\pi} E_0. \quad (253)$$

С другой стороны, поле, имеющее место внутри шара, нам известно

$$E_2 = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial x} = (1 - B) E_0 = E_0 - BE_0.$$

Так как при отсутствии шара мы имели бы поле E_0 , то видим, что добавочное поле, создаваемое однородно поляризованным шаром внутри него, равно

$$E' = -BE_0 = -\frac{4\pi}{3} P. \quad (254)$$

Теперь предположим, что имеем среду, которая состоит из большого числа мелких шариков, распределенных равномерно беспорядочно в пустоте. Число таких шариков в единице объема пусть будет ν , так что доля единицы объема, занятая ими, равна $\xi = \frac{4\pi}{3} a^3 \nu$.

Предположим теперь, что из такой среды образован шар с радиусом A , очень большим по сравнению с масштабом структуры, т. е. со средним расстоянием d_0 между центрами шариков, и помещен в пустоте в однородное поле E_0 . Так как в макроскопическом масштабе вещество, заполняющее шар, будет иметь некоторую среднюю поляризацию, то мы его охарактеризуем средней диэлектрической постоянной $\bar{\varepsilon}$, и по формулам (247) и (249а) получим, введя

$$\bar{B} = \frac{\bar{\varepsilon} - 1}{\bar{\varepsilon} + 2},$$

полный момент большого шара

$$p^* = \bar{B} E_0 A^3,$$

среднюю поляризацию

$$\bar{P} = \frac{3\bar{B}}{4\pi} E_0 \quad (255)$$

и среднее значение поля внутри шара

$$\bar{E} = E_0 - \frac{4\pi}{3} \bar{P}.$$

Средняя поляризация есть сумма моментов маленьких шаров в единице объема

$$\bar{P} = \nu \bar{p},$$

\bar{p} в свою очередь зависит от среднего действующего на такой шарик поля, которое обозначим через \bar{E} ; по (249б) имеем

$$\bar{P} = \nu Va^3 \bar{E}. \quad (256)$$

Величина \bar{E} не совпадает с \bar{E} ; под действующим полем (как раньше в случае одного шара, E_0) мы понимаем то поле, которое было бы в объеме данного шарика, если его самого там нет, а все прочие причины, вызывающие поле, в том числе моменты соседних шаров, остались бы такими, какие они есть на самом деле в его присутствии. Само собой, что это влияние носит случайный характер и зависит от их расположения относительно данного. Но в среднем, вокруг такого шарика имеется однородно поляризованная среда, и если мы его вынем, то останется шарообразная выемка (если предположить, что расположение шариков вполне беспорядочное, а потому в среднем изотропное).

Более подробно можно рассуждать так: возьмем расположение соседей вокруг одного шарика — оно конечно не представляет собой равномерной поляризации, а собрание случайно расположенных поляризованных шариков. Возьмем большое число N таких распределений и наложим их друг на друга. Тогда случайные неравномерности сгладятся, и мы получим уже равномерно поляризованную среду с полостью посередине, и эта полость будет иметь сферическую форму, если в расположении соседей нет никакой правильности. Разделив получившуюся суммарную поляризацию на N , мы получим среднюю поляризацию P ; поле в центре такой выемки в однородно поляризованной среде и есть среднее \bar{E} . Задача значит свелась к вычислению поля в центре сферической полости, взятой где-то внутри равномерно поляризованного шара, находящегося во внешнем поле E_0 . Мы его вычислим, взяв поле внутри такого шара, но сплошного, а затем наложив поле, получающееся, если мы нашу полость заполним средой, поляризованной в обратном направлении. Первое поле равно, как мы видели

$$\bar{E} = E_0 - \frac{4\pi}{3} \bar{P},$$

а второе, по (254), но с обратным знаком из-за перемены знака поляризации

$$E'' = \frac{4\pi \bar{P}}{3},$$

а в сумме дают

$$\bar{E} + E'' = \bar{E} = E_0. *$$

Возвращаясь к (256), мы имеем $\bar{P} = \nu B a^3 E_0$ и, сравнивая с (255), получаем

$$\bar{B} = \frac{4\pi}{3} a^3 \nu B = \xi B.$$

Отсюда находим формулу для вычисления $\bar{\epsilon}$ по ξ и ϵ

$$\frac{\bar{\epsilon} - 1}{\bar{\epsilon} + 2} = \xi \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2},$$

откуда решением относительно $\bar{\epsilon}$

$$\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon(1+2\xi) + 2(1-\xi)}{\epsilon(1-\xi) + (2+\xi)}.$$

Подставляя

$$\bar{\epsilon} = \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_1}; \quad \epsilon = \frac{\sigma_2}{\sigma_1},$$

переходим к нашей прямой задаче, которая решается формулой

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 \frac{\sigma_2(1+2\xi) + 2\sigma_1(1-\xi)}{\sigma_2(1-\xi) + \sigma_1(2+\xi)}. \quad (257)$$

Было бы весьма интересно произвести проверку применимости формулы (257) для вкрапленных руд, приобретающих в настоящее время промышленное значение даже при весьма небольшом процентном содержании руды. Само собой, что сильное отклонение формы вкрапленных зерен от сферической, например вкрапление в виде длинных тонких прожилков, может дать значительные отклонения от формулы (257).

Приписывая электропроводность горных пород влаге, заполняющей поры, мы положим проводимость минералов $\sigma_2 = 0$, так как она в десятки тысяч раз меньше проводимости воды σ_1 , получим формулу для средней проводимости пород

$$\bar{\sigma} = 2\sigma_1 \frac{1-\xi}{2+\xi}. \quad (258)$$

Так как в нашем выводе (данным Лоренцом в теории диэлектрической постоянной), мы в первом приближении учли взаимодействие

* Поле, действующее на включения в любом реальном агрегате является неоднородным, сложно зависящим от конкретного расположения включений и их относительных размеров. Приведенный вывод с использованием средней статистической характеристики поля $\bar{E} = E_0$ оказывается строгим только для случая, когда включения расположены настолько редко, что их взаимным влиянием можно пренебречь. Равенство $\bar{E} = E_0$, по существу, и является выражением этого ограничения.

Строгого решения задачи об определении среднего сопротивления параметров неоднородных сред рассматриваемого типа (с ограниченными включениями в однородной массе) до сих пор не получено. Ряд приближенных решений приводится в литературе [8, 19, 53, 54, 70, 71, 84]. — Прим. ред.

окружающих шариков, то можно думать, что эта формула будет более или менее верна до значений ξ , не очень близких к единице *. С некоторой натяжкой ее можно применить к таким образованиям, как галечник, песок и даже глина; относительно ее применимости к плотным породам, где конфигурация пор весьма сильно может отличаться от пространств, остающихся даже при плотной упаковке шаров, можно высказаться лишь гадательно.

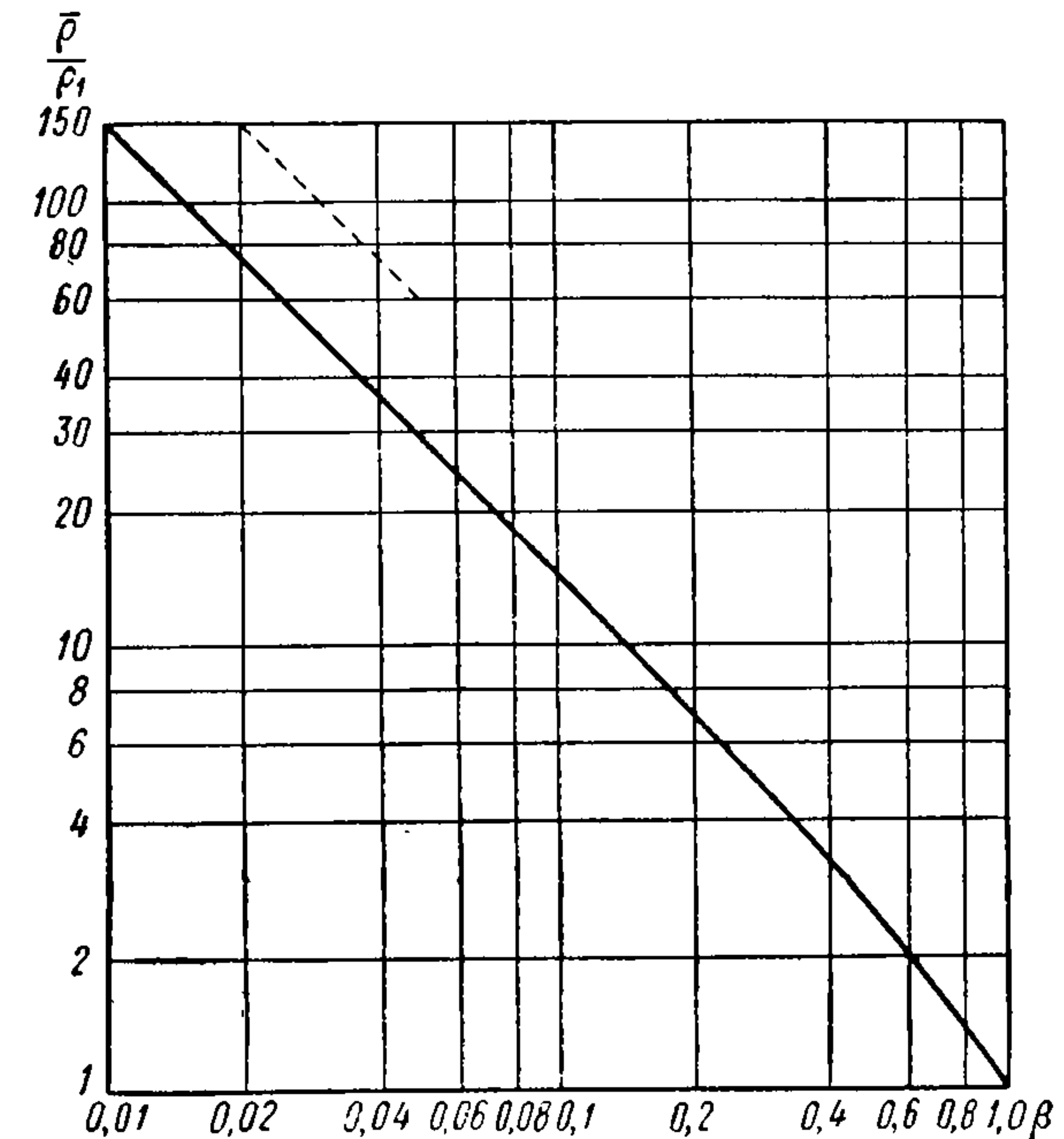


Рис. 49.

Переписав ее для удельных сопротивлений, получим

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_1} = \frac{2+\xi}{2(1-\xi)} = \frac{3-\beta}{2\beta} = \frac{3}{2\beta} - \frac{1}{2}, \quad (259)$$

где

$$\beta = 1 - \xi$$

есть доля объема, приходящаяся на проводящее вещество, заполняющее поры. На рис. 49 зависимость (259) дана на логарифмическом графике. Она экстраполирована далеко за пределы математического смысла формулы (259); действительно, наименьшее значение β , которое возможно при наиболее плотной упаковке шаров, равно

$$1 - \frac{\pi\sqrt{2}}{6} \approx 0,26.$$

* В действительности, в формулах (257) и (258) взаимодействие включений не учитывается. — Прим. ред.

Представляло бы некоторый интерес собрать экспериментальный материал по этому вопросу.

Некоторое оправдание экстраполяции, сделанной в кривой рис. 49, можно получить из расчета следующего, тоже очень схематического представления о форме пор. Представим себе, что единица объема заполняется m^3 кубиками непроводящего вещества. Если ребро каждого кубика равно $1/m$, то они заполнят все пространство. Если же ребро каждого кубика равно $\frac{1}{m} - \delta$, где δ очень мало по сравнению с $1/m$, а центры кубиков остаются на местах, то объем, занимаемый ими, будем равен

$$\xi = m^3 \left(\frac{1}{m} - \delta \right)^3 \approx 1 - 3m\delta,$$

а объем пор

$$\beta = 3m\delta.$$

Это пространство, которое мы заполним проводником с электропроводностью σ_1 , имеет вид трех взаимно ортогональных систем параллельных тонких слоев толщиной в δ . Если мы направим ток параллельно двум из них, то третья система, как лежащая перпендикулярно к току, в проведении тока участвовать практически не будет; приближенно можно оценить поперечное непроводящее сечение, как

$$s' = m^3 \left(\frac{1}{m} - \delta \right)^2 = 1 - 2m\delta,$$

а проводящее

$$s = 2m\delta.$$

Проводимость в расчете на куб с ребром в единицу длины будет равна

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 2m\delta = \sigma_1 \frac{2}{3} \beta.$$

Отсюда для среднего сопротивления получаем

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_1} = \frac{3}{2\beta}. \quad (260)$$

При малых значениях β эта формула будет давать результат практически не отличающийся от (259). Такое хорошее совпадение, конечно, случайно. Если представить себе поры в виде систем прямолинейных тонких каналов с сечением s и числом q на единицу площади, и, для изотропии представить себе три такие системы, параллельные осям координат, то легко подсчитать приближенное значение

$$\frac{\bar{\rho}}{\rho_1} = \frac{3}{\beta}. \quad (261)$$

Эта зависимость для малых β нанесена на рис. 49 пунктиром.

§ 20. АНОМАЛИИ ОТ ПЛАСТИНЫ. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Для теоретической иллюстрации аномалий от объекта, вытянутого в длину и глубину при относительно небольшом поперечнике, вообразим себе причину аномалии в виде пластины, стоящей вертикально, имеющей по горизонтали протяжение $2a$, ничтожную толщину и настолько большую глубину, что можно ее считать бесконечной. Если она доходит до поверхности, то, добавляя зеркальное изображение, мы будем иметь бесконечно длинную, вертикально стоящую полосу, помещенную в однородное, горизонтально направленное поле. Так как в этом случае очевидно, что от координаты z по вертикальной оси ничего зависеть не будет, то мы имеем частный случай задач, в которых требуется нахождение решений уравнения Лапласа в двух переменных:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0. \quad (262)$$

Предположим, что след нашей полосы на плоскости XOY располагается на оси OX , причем середина ее находится в начале координат; предположим далее, что она значительно лучше проводит, чем окружающая среда, так что можно положить, что потенциал ее практически постоянен. Тогда условия задачи будут следующие: найти такое решение уравнения (262), которое в бесконечности имеет вид

$$\varphi = -E_x x - E_y y = -\frac{J_x}{\sigma} x - \frac{J_y}{\sigma} y \quad (263)$$

и обращается в нуль на отрезке оси OX от $-a$ до $+a$.

Так как мы свели дело к «плоской задаче», то можем воспользоваться известным из теории функций комплексного переменного приемом, заключающемся в следующем: если дана функция $w(z)$ от комплексного переменного $z = x + iy$, то ее вещественная и мнимая части φ и ψ

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (264)$$

являются решениями уравнения (262). Напомним вкратце, как это получается. Берем частные производные от w по x и по y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w(x+iy)}{\partial x} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dw}{dz}; \\ \frac{\partial w(x+iy)}{\partial y} &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} + i \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{dw}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = i \frac{dw}{dz}. \end{aligned}$$

Отсюда получаются соотношения Риманна

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial x} = -i \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y}$$

и, III

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (265)$$

Далее следует

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = 0;$$

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} = 0.$$

Уравнения

$$u = \varphi(x, y); \quad v = \psi(x, y) \quad (266)$$

представляют два семейства кривых на плоскости XOY ; уравнения (266), разрешенные относительно x и y

$$x = x(u, v); \quad y = y(u, v), \quad (267)$$

дают значения координат точки пересечения пары кривых по одной u каждого семейства (266). Рассматривая u и v как координаты в плоскости комплексной переменной w , мы получаем точечное преобразование или отображение плоскостей w и z . Как показывает в теории функций комплексного переменного, это отображение обладает особыми свойствами («конформное» отображение), из которых нам важна взаимная ортогональность семейств (266). Это следует из соотношений (265), из которых получаем, обозначая через n_φ и n_ψ (рис. 50) направления нормалей к двум пересекающимся в данной точке кривым,

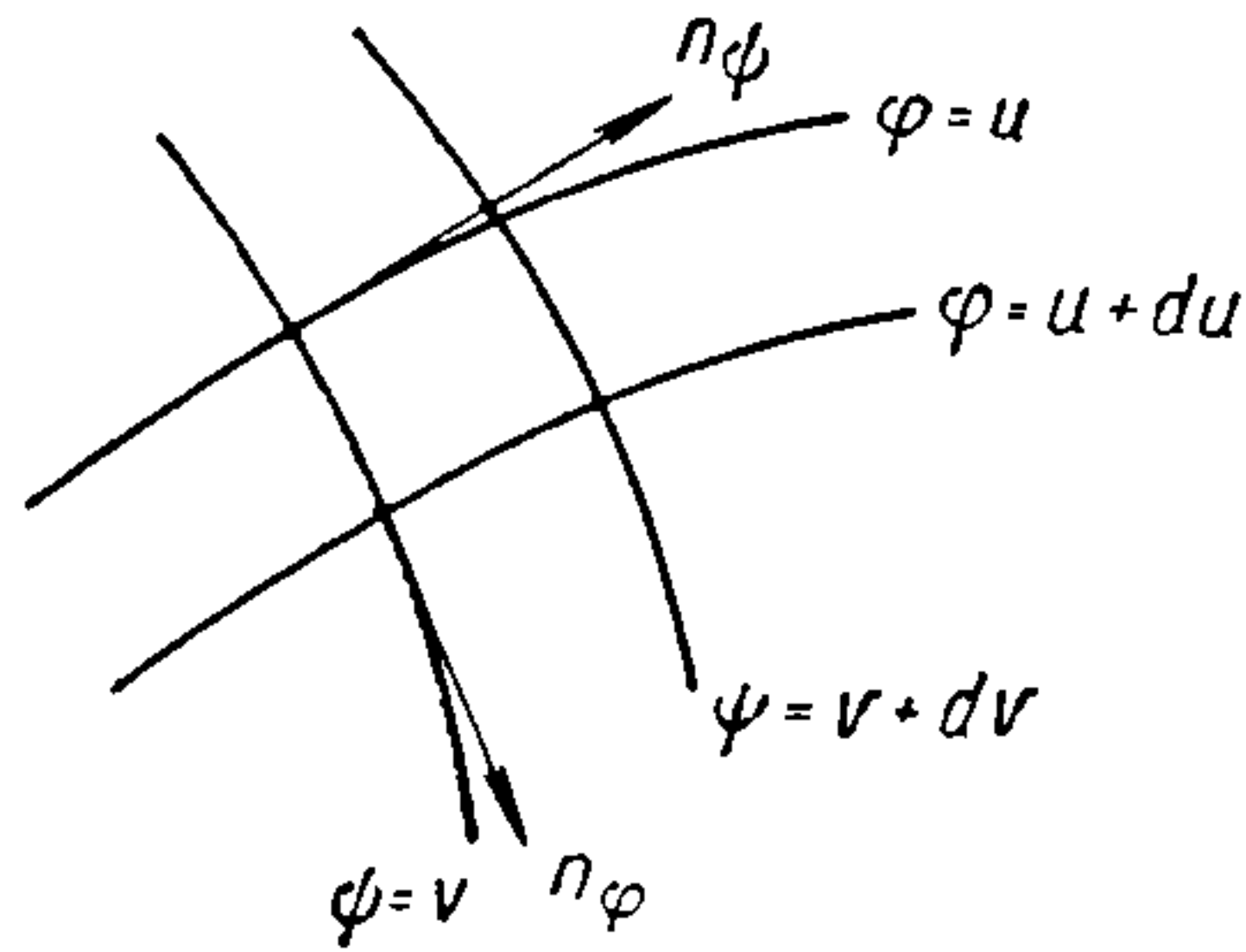


Рис. 50.

$$\cos(n_\varphi, OX) = \frac{1}{D_\varphi} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad \cos(n_\psi, OX) = \frac{1}{D_\psi} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x};$$

$$\cos(n_\varphi, OY) = \frac{1}{D_\varphi} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad \cos(n_\psi, OY) = \frac{1}{D_\psi} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial y},$$

причем знаки направлений нормалей мы выбираем оба раза в направлении возрастания соответствующего параметра u или v , а D_φ и D_ψ равны

$$D_\varphi = \left| \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2} \right|; \quad D_\psi = \left| \sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2} \right|.$$

Составляя косинус угла между n_φ и n_ψ , имеем

$$\cos(n_\varphi, n_\psi) = \frac{1}{D_\varphi D_\psi} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial\psi}{\partial y} \right).$$

Выражение в скобках тождественно равно нулю в силу (265); таким образом, ортогональность доказана.

Обозначая далее через t_φ и t_ψ направления касательных к соответствующим кривым в сторону возрастания параметра другого семейства вдоль данной кривой одного из них, будем иметь:

$$t_\varphi = n_\psi; \quad t_\psi = n_\varphi,$$

причем в сторону положительного вращения (от x к y против часовой стрелки) будет следовать либо $n_\varphi, t_\varphi; t_\psi, n_\psi$, либо наоборот, $n_\psi, t_\psi; t_\varphi, n_\varphi$.

Возьмем плоскость, параллельную плоскости переменных xu и отстоящую от нее на единицу длины, и цилиндрическую поверхность, след которой на плоскости xu есть контур s , с образующими, перпендикулярными к OXY (рис. 51). Тогда через площадь такой поверхности, между упомянутыми параллельными плоскостями и образующими, проходящими через точку a и b контура s , при данном потенциале $\varphi(xu)$ будет проходить ток

$$I_{ab} = -\sigma \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial n} ds.$$

Величина этого тока очень просто выражается через значения функции ψ в точках a и b , т. е. через v_a и v_b . Действительно,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cos(n_s, OX) + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cos(n_s, OY) =$$

$$= \frac{\partial\psi}{\partial y} \cos(n_s, OX) - \frac{\partial\psi}{\partial x} \cos(n_s, OY).$$

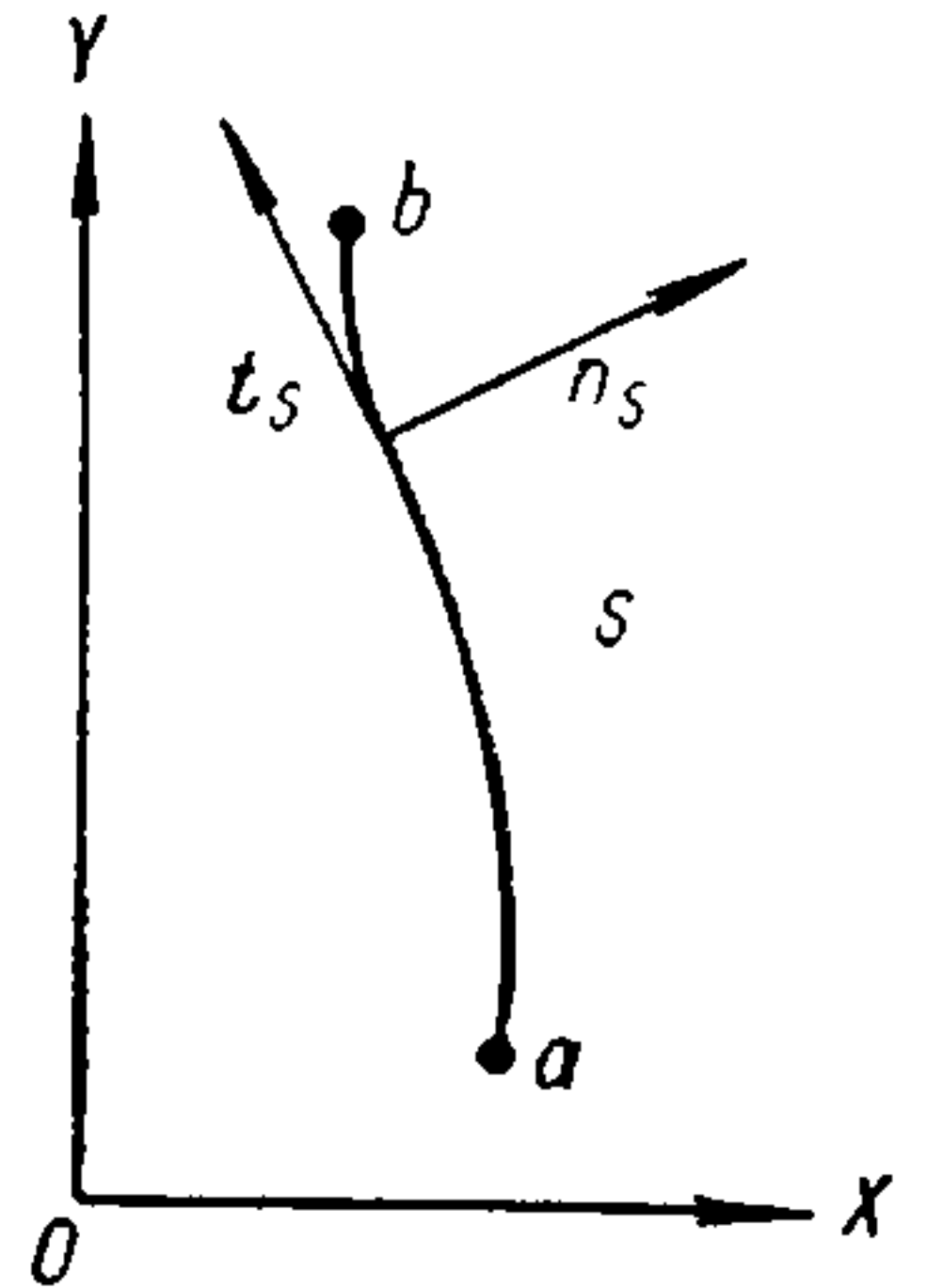


Рис. 51.

Взяв для нашей кривой s последовательность в смысле положительного вращения от n_s к t_s , имеем

$$\cos(n_s, OX) = \cos(t_s, OY);$$

$$\cos(n_s, OY) = -\cos(t_s, OX).$$

Отсюда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \cos(t_s, OY) + \frac{\partial\psi}{\partial x} \cos(t_s, OX);$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n} \right) ds = \frac{\partial\psi}{\partial y} ds \cos^2(t_s, OY) + \frac{\partial\psi}{\partial x} ds \cos(t_s, OX) =$$

$$= \frac{\partial\psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\psi}{\partial x} dx = d\psi,$$

и, наконец,

$$I_{ab} = -\sigma \int_a^b d\psi = \sigma(\psi_a - \psi_b) = \sigma(v_a - v_b). \quad (268)$$

Итак, можем резюмировать следующим образом: любая функция комплексного переменного при разделении на вещественную и мнимую части дает нам два решения уравнения Лапласа для двух переменных (плоская задача). Выбрав одно из них за потенциал, например вещественную часть, мы имеем уравнение семейства эквипотенциальных линий $\varphi(x, y) = u$, тогда другое семейство ортогональных к ним кривых $\psi(x, y) = v$, очевидно, даст нам уравнения линий тока, причем разность значений функций ψ для двух линий тока измеряет согласно (268) силу тока в токовой трубке единицы высоты между двумя

данными линиями. Так как свойства этих двух семейств взаимны, то можно считать ψ за потенциал, а φ за функцию тока.

Простейшая функция z есть

$$w_1 = az = ax + iay.$$

Если α — вещественная величина, то $\varphi_1 = \alpha x$; $\psi_1 = \alpha y$, и мы получаем однородное поле с эквипотенциальными линиями, перпендикулярными к OX , и линиями тока, направленными параллельно OX . Если возьмем β чисто мнимым, то

$$w_2 = \beta z = i|\beta|z = i|\beta|x - |\beta|y$$

дает нам $\varphi_2 = -|\beta|y$; $\psi_2 = |\beta|x$, т. е. поле, направленное перпендикулярно к предыдущему. Обращаясь к случаю бесконечно проводящей вертикальной пластины, мы замечаем, что если она расположена, как было указано, по оси OX , то, так как φ_2 по оси OX равно нулю, условие задачи выполнено, и, следовательно, бесконечно проводящая тонкая пластина, расположенная перпендикулярно к линиям тока, не искажает однородного поля. Поэтому мы можем ограничиться пока случаем, когда пластина расположена параллельно линиям тока, т. е. когда на достаточно большом расстоянии потенциал принимает вид φ_1 , а соответственная функция комплексного переменного w будет равна

$$w_\infty = -E_0 z = -\frac{J}{\sigma} z \quad (269)$$

с вещественной частью

$$\varphi_\infty = -\frac{J}{\sigma} x = -E_0 x, \quad (270)$$

дающей $J_\infty = \sigma E_0$, т. е. ток, направленный в сторону положительной оси X .

Довольно легко представить себе качественное распределение линий тока и эквипотенциальных поверхностей в этом случае (особенно имея некоторые практические навыки в электроразведке): линии тока, идущие параллельно оси X , должны собираться пластиной, т. е. сближаться при приближении к ней, входить в ее боковые поверхности, а затем опять выйти из них, раздвинуться и снова пойти параллельно оси OX (рис. 53). Идя по оси OX слева, вдоль направления тока, мы должны иметь падение потенциала, сначала равномерное, затем увеличенное (так как плотность тока должна возрастать). Затем вдоль пластины потенциал равен нулю, и дальше картина продолжается симметрично с переменной знака у φ . Таким образом ясно, что вещественная часть искомой функции должна быть отлична от нуля на оси OX вне участка, занимаемого пластиной, и равняться нулю между точками $x = \pm a$, $y = 0$. С противоположных сторон в точке $a > x > 0$ подходят к пластине две линии тока, которые на большом расстоянии идут симметрично к оси OX , т. е. определяются уравнениями

$$\psi = -\frac{J}{\sigma} y \quad \text{и} \quad \psi = \frac{J}{\sigma} y.$$

Так как линия тока, идущая из бесконечности по оси OX ($\psi = 0$), по соображениям симметрии подходит прямо к концу пластины, то ясно, что мнимая часть искомой функции должна равняться нулю на оси OX вне пластины, а по обе стороны последней принимать значения, противоположные по знаку. Последнее обстоятельство поможет нам догадаться, что искомая функция может представляться квадратным корнем и зная, что точки $x = \pm a$ имеют особенное значение для нашей задачи, мы положим

$$w = \frac{J}{\sigma} \sqrt{z^2 - a^2} = \frac{J}{\sigma} a \sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad (271)$$

где $\zeta = \frac{z}{a}$.

Исследуем поведение этой функции около точки $\zeta = +1$ (рис. 52) Положим

$$\zeta = 1 + \varepsilon e^{i\theta},$$

где ε — малая вещественная величина.

С точностью до ε^2

$$\zeta^2 = 1 + 2\varepsilon e^{i\theta},$$

$$\zeta^2 - 1 = 2\varepsilon e^{i\theta}.$$

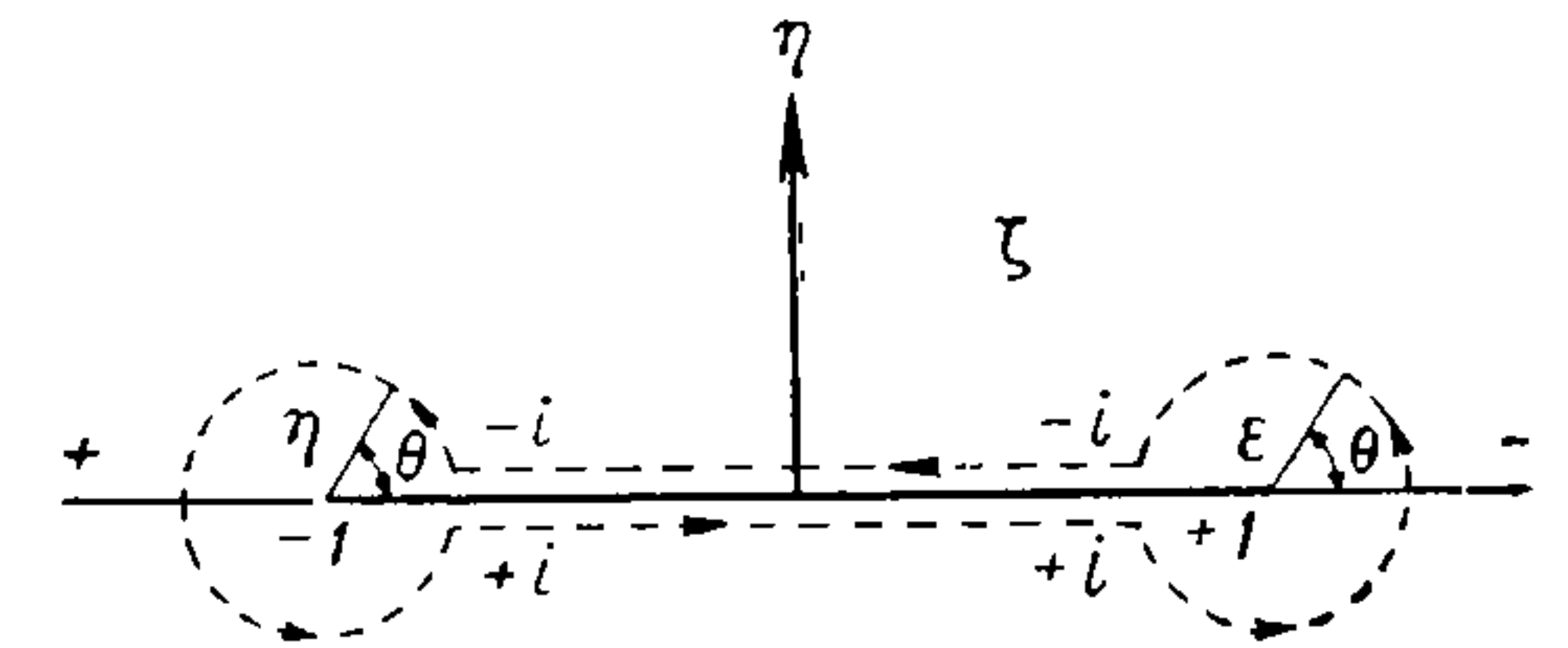


Рис. 52.

Извлекая корень, получим два значения

$$\frac{\sigma w}{Ja} = \sqrt{\zeta^2 - 1} = \begin{cases} |\sqrt{2\varepsilon}| e^{i\frac{\theta}{2}} \\ |\sqrt{2\varepsilon}| e^{i(\frac{\theta}{2} + \pi)}. \end{cases}$$

Когда $\theta = 0$ (рис. 52), мы должны иметь $\sigma w/Ja$ вещественным и отрицательным, что получится, если мы возьмем второе значение корня. Для $\theta = \pi$, т. е. для точки, попадающей внутри участка оси OX , занятого пластиной, мы будем иметь

$$\frac{\sigma w}{Ja} = |\sqrt{2\varepsilon}| e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i|\sqrt{2\varepsilon}|,$$

т. е. при приближении к пластине со стороны положительных y w будет чисто мнимым и отрицательным. Полагая же $\theta = -\pi$, получаем

$$\frac{wJ}{\sigma a} = |\sqrt{2\varepsilon}| e^{i\frac{\pi}{2}} = i|\sqrt{2\varepsilon}|,$$

т. е. w чисто мнимо и положительно. Вещественная часть w в промежутке $-a \leq x \leq a$, или $-1 \leq \zeta \leq 1$, на вещественной оси будет равна нулю, так как в этом случае

$$w = \sqrt{\zeta^2 - 1} = \pm i\sqrt{1 - \zeta^2} = i\psi,$$

причем верхний знак дает значения ψ со стороны отрицательных, а нижний — со стороны положительных y у самой оси OX .

Исследуем теперь точку $\zeta = -1$; в ее соседстве полагаем

$$\zeta = -1 + \eta e^{i\theta}$$

и получаем

$$\zeta^2 - 1 = -2\eta e^{i\theta} = 2\eta e^{i(\theta-\pi)};$$

$$\sqrt{\zeta^2 - 1} = \begin{cases} |\sqrt{2\eta}| e^{i(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2})} \\ |\sqrt{2\eta}| e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2})}. \end{cases}$$

При $\theta = 0$ мы находимся на оси OX внутри промежутка $1 \geq \zeta \geq -1$, и притом со стороны положительных y ; значение корня должно быть чисто мнимым и отрицательным, значит нужно взять первое значение корня. Тогда при $\theta = \pi$ мы переходим на часть оси OX , для которой $x < -a$, $\zeta < -1$, и имеем

$$\sqrt{\zeta^2 - 1} = |\sqrt{2\eta}|,$$

т. е. вещественное и положительное значение.

Наконец, $\theta = 2\pi$ дает нам

$$\sqrt{\zeta^2 - 1} = |\sqrt{2\eta}| e^{i\frac{\pi}{2}} = i|\sqrt{2\eta}|,$$

и мы приходим опять к чисто мнимому положительному значению w , которое имеет место около $\zeta = +1$ со стороны отрицательных y .

Если мы отрезок оси OX , занятый пластиной, будем считать купюрой, т. е. условимся никогда через него не переходить, то значение корня у нас определено однозначно на всей плоскости xu , и притом так, что для точек, достаточно удаленных от начала координат, т. е. при $|\zeta| \rightarrow \infty$ мы будем иметь

$$w_\infty = -\frac{J}{\sigma} a\zeta = -\frac{J}{\sigma} z$$

в согласии с (269), причем знак следует из рассмотрения поведения w на вещественной оси, которое мы определили так, что при $x \rightarrow +\infty$, т. е. $x > a$ мы имеем

$$w_\infty \rightarrow -\frac{Ja}{\sigma} x.$$

Задача решена, так как вещественная часть w есть, очевидно, искомый потенциал, а мнимая часть — функция тока.

Для окончательного решения задачи пишем

$$\zeta = \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma w}{Ja}\right)^2}$$

и, полагая

$$\zeta = \xi + i\eta;$$

$$\frac{\sigma w}{Ja} = \varphi' + i\psi'; \quad \varphi' = \frac{\sigma\phi}{Ja}; \quad \psi' = \frac{\sigma\psi}{Ja},$$

разделяем вещественную и мнимую части

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{x}{a}\right)^2 = \xi^2 &= \frac{V(\varphi'^2 + \psi'^2)^2 + 2(\varphi'^2 - \psi'^2) + 1 + (\varphi'^2 - \psi'^2 + 1)}{2}; \\ \left(\frac{y}{a}\right)^2 = \eta^2 &= \frac{V(\varphi'^2 + \psi'^2)^2 + 2(\varphi'^2 - \psi'^2) + 1 - (\varphi'^2 - \psi'^2 + 1)}{2}. \end{aligned} \right\} (272)$$

Задаваясь значениями φ' и ψ' , можно построить по формулам (272) сетку точек на плоскости $\xi\eta$ и, соединяя точки с одинаковыми значениями φ' , получить эквипотенциальные линии, а с одинаковыми ψ' — линии тока.

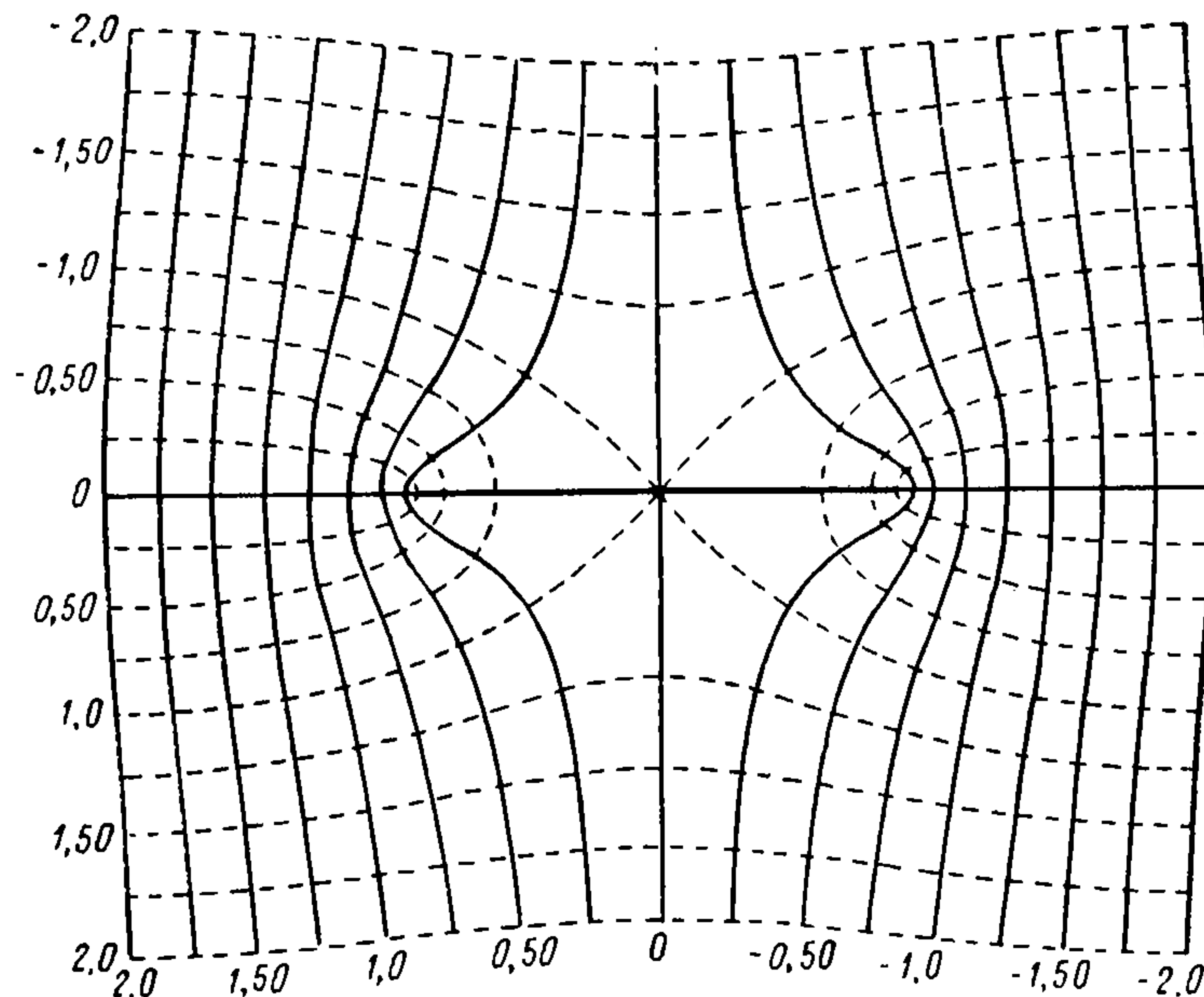


Рис. 53.

Отметки на рис. 53 относятся к значениям ψ' (пунктирные) и φ' (сплошные линии); длина пластины принята равной двум единицам. С соответственными переводными множителями этот рисунок годится для любого геометрически подобного случая.

Случай пластины, наклонной к направлению тока, можно рассматривать как наложение двух имеющихся у нас решений; действительно, функция

$$w = \frac{J_x}{\sigma} \sqrt{z^2 - a^2} + i \frac{J_y}{\sigma} z \quad (273)$$

будет, при таком же определении знака корня, как и выше, при $|z| \rightarrow \infty$ давать

$$w_\infty = \left(\frac{J_x}{\sigma} - i \frac{J_y}{\sigma}\right) z,$$

т. е. потенциал и функцию тока

$$\varphi_{\infty} = -\frac{J_x}{\sigma} x - \frac{J_y}{\sigma} y; \quad \psi_{\infty} = -\frac{J_x}{\sigma} y + \frac{J_y}{\sigma} x,$$

или поле, имеющее любые заданные составляющие плотности тока J_x и J_y , вообще наклонное к оси OX . Распределение же потенциала на оси OX не изменится, так как прибавленная часть при $y = 0$ будет чисто мнимая.

Имея рис. 53, можно обойтись без вычислений, используя метод вычерчивания эквипотенциальных линий для суммарного поля, если вычерчены равноотстоящие по разностям потенциалов эквипотенциальные кривые для складываемых полей. Метод заключается в следующем. Пусть значки 1, 2, ..., 5 означают (рис. 54) кривые семейства φ_1 , т. е. эквипотенциальные линии одного поля, для которых

$\varphi_1 = u_1, \quad \varphi_1 = u_1 + \alpha, \quad \varphi_1 = u_1 + 2\alpha,$

и аналогично для накладываемого поля

$$\varphi_2 = u_2, \quad \varphi_2 = u_2 + \alpha,$$

$$\varphi_2 = u_2 + 2\alpha, \quad \text{и т. д.}$$

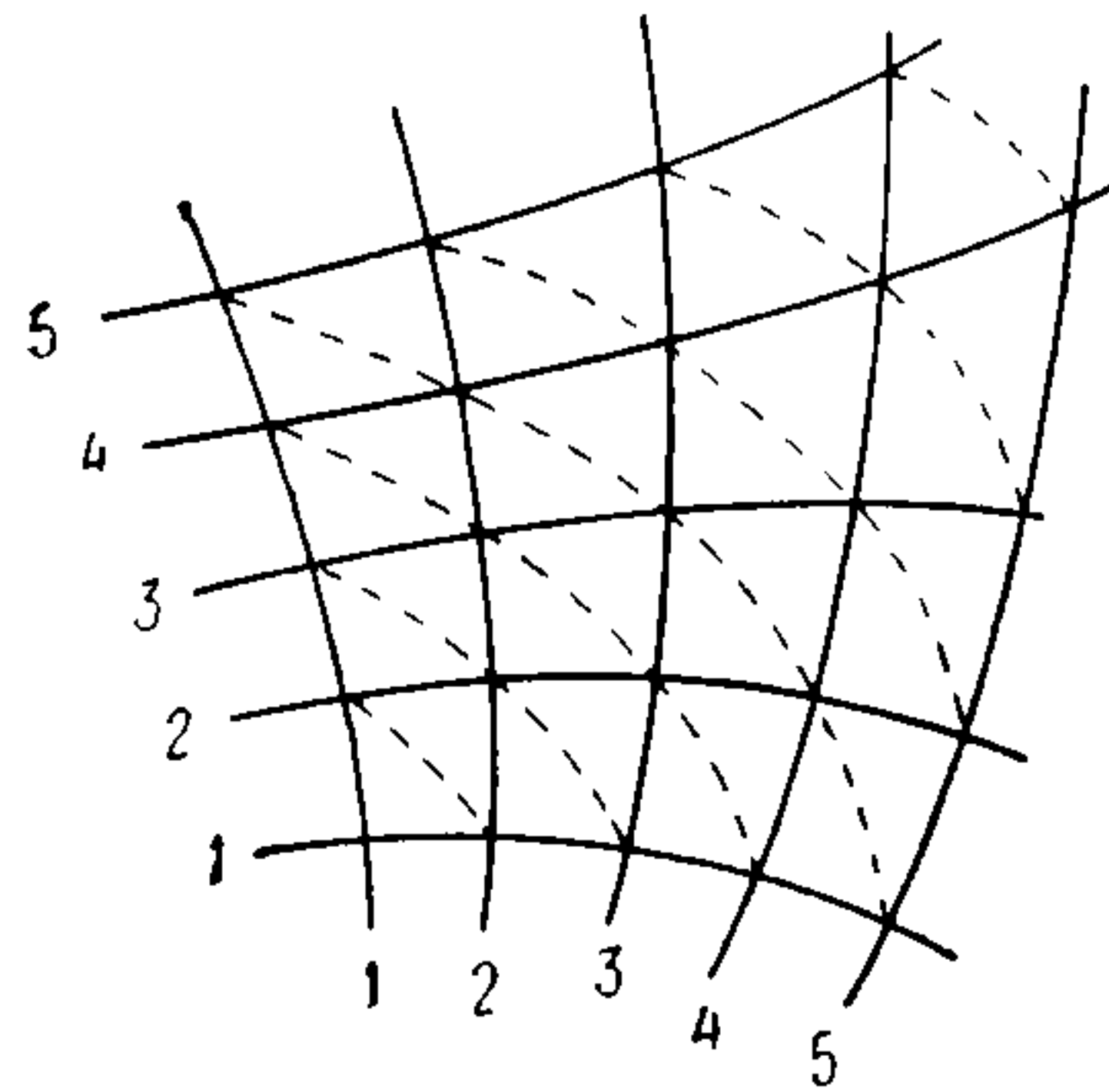


Рис. 54.

В точке пересечения кривых $\varphi_1 = u_1 + k\alpha$ и $\varphi_2 = u_2 + s\alpha$ имеем потенциал $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = u_1 + u_2 + (k + s)\alpha$ и точки, для которых $k + s = \text{const}$, очевидно, принадлежат одной и той же эквипотенциальной линии суммарного поля.

Наложив два рисунка, мы в точках пересечения кривых сразу можем прочесть значение потенциала суммарного поля, сложив отметки этих кривых; соединяя точки с одинаковыми суммарными потенциалами плавными кривыми, получаем графическое решение задачи. В нашем случае нужно прочертить на кальке систему эквипотенциальных линий поля

$$\varphi_2 = -\frac{J_y}{\sigma} y,$$

т. е. прямые, параллельные оси OX и отстоящие друг от друга на расстоянии d_2 , относящиеся к нормальному расстоянию d_1 эквипотенциальных линий (рис. 53), как

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{J_x}{J_y},$$

перенумеровав их так же, как и эквипотенциальные линии (рис. 53), а затем наложив кальку на этот рисунок, провести требуемое построение. Таким образом можно проследить, как аномалия при увеличении наклона направления тока к направлению пластины посте-

пенно сглаживается, и иллюстрировать давно известное из практики правило, что аномалия от вытянутых в длину проводящих объектов отчетливее всего выступает, если ток идет по простиранию.

Кроме полученного решения мы имеем еще одно, именно то, в котором ψ есть потенциал и φ — функция тока. В случае, разобранным на рис. 53, мы имеем $\varphi = 0$ вдоль пластины; отсюда заключаем, что на поверхности пластины $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$, а по соотношениям (265) $\frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$.

Функция ψ , т. е. мнимая часть комплексной функции

$$w = \frac{J}{\sigma} a \sqrt{\zeta^2 - 1}, \quad (274)$$

рассматриваемая как потенциал, удовлетворяет условию, что ее производная по нормали к пластине равна нулю, т. е. тому условию, которому должен удовлетворять потенциал на границе с изолятором. Рассматривая на рис. 53 линии постоянного ψ как эквипотенциальные, мы имеем картину аномалии, вносимой в однородное поле, направленное по оси Y , *непроводящей пластиной, поставленной поперек линий тока*. Сплошные кривые $\varphi = \text{const}$ изображают для этого случая линии тока, и сразу видно, что эквипотенциальные линии сближаются около непроводящего тела, а линии тока расходятся. Если направить ток по простиранию изолятора, то аномалия будет наименьшая, а для случая тонкой пластины — вообще исчезает. Для случая наклонного направления тока и непроводящей пластины можно применить то же построение, которое только что было указано.

§ 21. МЕТОД ИЗОБРАЖЕНИЙ ПРИ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД. ПРОФИЛИРОВАНИЕ ЧЕРЕЗ КОНТАКТ ДВУХ ПОРОД*

Предположим, что на расстоянии d от плоской границы двух сред с диэлектрическими постоянными ϵ_1 и ϵ_2 находится точечный источник поля (рис. 55). Тогда, как известно, можно получить решение, предположив, что поле в среде 1, содержащей действительный источник e , происходит от него и от фиктивного источника e' , расположенного в точке, являющейся зеркальным изображением действующего заряда e в плоскости раздела, причем этот фиктивный заряд e' предполагается находящимся в среде с диэлектрической постоянной ϵ_1 , т. е. мы вычисляем поле 1 как поле в однородной среде, происходящее от двух зарядов, но пользуемся этим решением только для той половины пространства, где находится действительный заряд e . Поле в среде 2 мы вычисляем, полагая, что она также

* § 21, 22 посвящены теории методов электропрофилеирования, рассматриваемых в соответствующих разделах учебников и учебных пособий по электрогеофизике. Дальнейшие исследования по теории и методике интерпретации результатов наблюдений по методам электропрофилеирования получили отражение в работах [1, 8, 9, 20, 21, 22, 23, 30, 31, 34, 61, 63, 81, 82, 84, 85, 107, 108, 112—120]. — Прим. ред.

безгранична и что на месте действительного заряда e находится заряд e'' (в среде с диэлектрической постоянной ϵ_2). От этого решения мы используем только половину, приходящуюся на часть пространства, действительно занятого средой с ϵ_2 . Эти два решения, каждое взятое в соответствующем полупространстве, удовлетворяют уравнению Лапласа (как поля точечных зарядов), всюду непрерывны и конечны за исключением точки, в которой находится действительный заряд, и остается подобрать величины фиктивных зарядов e' и e'' так, чтобы были удовлетворены условия на границе. Обозначая через φ_1 и φ_2 потенциалы в двух полупространствах, будем иметь

$$\varphi_1 = \frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{e}{r} + \frac{e'}{r'} \right); \quad \varphi_2 = \frac{e''}{\epsilon_2 r}. \quad (275)$$

В точках поверхности раздела мы должны удовлетворить условию непрерывности потенциала

$$\varphi_1 = \varphi_2 \quad (r = r'),$$

что приводит к уравнению

$$\frac{1}{\epsilon_1} (e + e') = \frac{1}{\epsilon_2} e''. \quad (276)$$

Взяв начало координат в точке основания перпендикуляра, опущенного из точки e на поверхность раздела, и ось X , направленную по этой нормали из 1 в 2, мы имеем

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + (x+d)^2}}; \quad \frac{1}{r'} = \frac{1}{\sqrt{y^2 + (x-d)^2}};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} = -\frac{(x+d)}{[y^2 + (x+d)^2]^{\frac{3}{2}}}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r'} = -\frac{(x-d)}{[y^2 + (x-d)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

и условие, выражающее непрерывность D_n ,

$$\epsilon_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)_{x=0} = \epsilon_2 \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right)_{x=0}$$

приводит к уравнению

$$e - e' = e''. \quad (277)$$

Решая совместно (276) и (277), получаем

$$\left. \begin{aligned} e' &= \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} e; \\ e'' &= \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} e. \end{aligned} \right\} \quad (278)$$

Введем величину

$$k_{12} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2},$$

которую можно назвать условно «коэффициентом отражения»; тогда

$$\left. \begin{aligned} e' &= k_{12} e; \\ e'' &= (1 - k_{12}) e, \end{aligned} \right\} \quad (279)$$

где можно назвать величину $(1 - k_{12})$ «коэффициентом пропускания», продолжая оптическую аналогию, впрочем весьма формальную. При переходе к задачам с током мы вместо ϵ должны подставить пропорциональные им σ

$$k_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}, \quad (280)$$

а вводя удельные сопротивления

$$k_{12} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}. \quad (281)$$

Через k_{12} отношение сопротивлений или электропроводностей выражается формулой

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + k_{12}}{1 - k_{12}}. \quad (281a)$$

Заметим, что порядок значков 1—2 определяется тем, что мы предположили наличие действительного заряда в среде 1. Если бы мы предположили его в среде 2, то формулы (279) надлежит написать с перестановкой значков

$$\left. \begin{aligned} e' &= k_{21} e; \\ e'' &= (1 - k_{21}) e, \end{aligned} \right\} \quad (279a)$$

причем из (280) и (281) видно, что

$$k_{12} = -k_{21}.$$

Так как величины типа k_{12} будут в дальнейшем изложении этой главы играть существенную роль, мы даем табл. 10.

Таблица 10

| k_{12} | $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | k_{12} | $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | k_{12} | $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | k_{12} |
|----------|-------------------------|----------|-------------------------|-------------------------|----------|-------------------------|----------|
| 1,00 | ∞ | 0,50 | 3,00 | 1000 | 0,998 | 9 | 0,800 |
| 0,95 | 39,0 | 0,45 | 2,64 | 500 | 0,996 | 8 | 0,778 |
| 0,90 | 19,0 | 0,40 | 2,33 | 300 | 0,993 | 7 | 0,750 |
| 0,85 | 12,32 | 0,35 | 2,08 | 200 | 0,990 | 6 | 0,714 |
| 0,80 | 9,00 | 0,30 | 1,857 | 100 | 0,980 | 5 | 0,667 |
| 0,75 | 7,00 | 0,25 | 1,667 | 50 | 0,961 | 4 | 0,600 |
| 0,70 | 5,67 | 0,20 | 1,500 | 30 | 0,932 | 3 | 0,500 |
| 0,65 | 4,72 | 0,15 | 1,353 | 20 | 0,905 | 2,5 | 0,429 |
| 0,60 | 4,00 | 0,10 | 1,222 | 15 | 0,875 | 2,0 | 0,333 |
| 0,55 | 3,44 | 0,05 | 1,107 | 10 | 0,818 | 1,5 | 0,200 |
| | | 0,00 | 1,000 | | | 1,0 | 0,000 |

и график (рис. 56) для перехода от ρ_2/ρ_1 к k_{12} и обратно. Отрицательным k соответствуют обратные отношения ρ_2/ρ_1 . Табл. 10 показывает, что, так же как и величина B в случае шара в однородном поле, при возрастании величины отношения сопротивлений k очень быстро стремится к пределу $+1$ для $\rho_2 > \rho_1$ и -1 для $\rho_2 < \rho_1$.

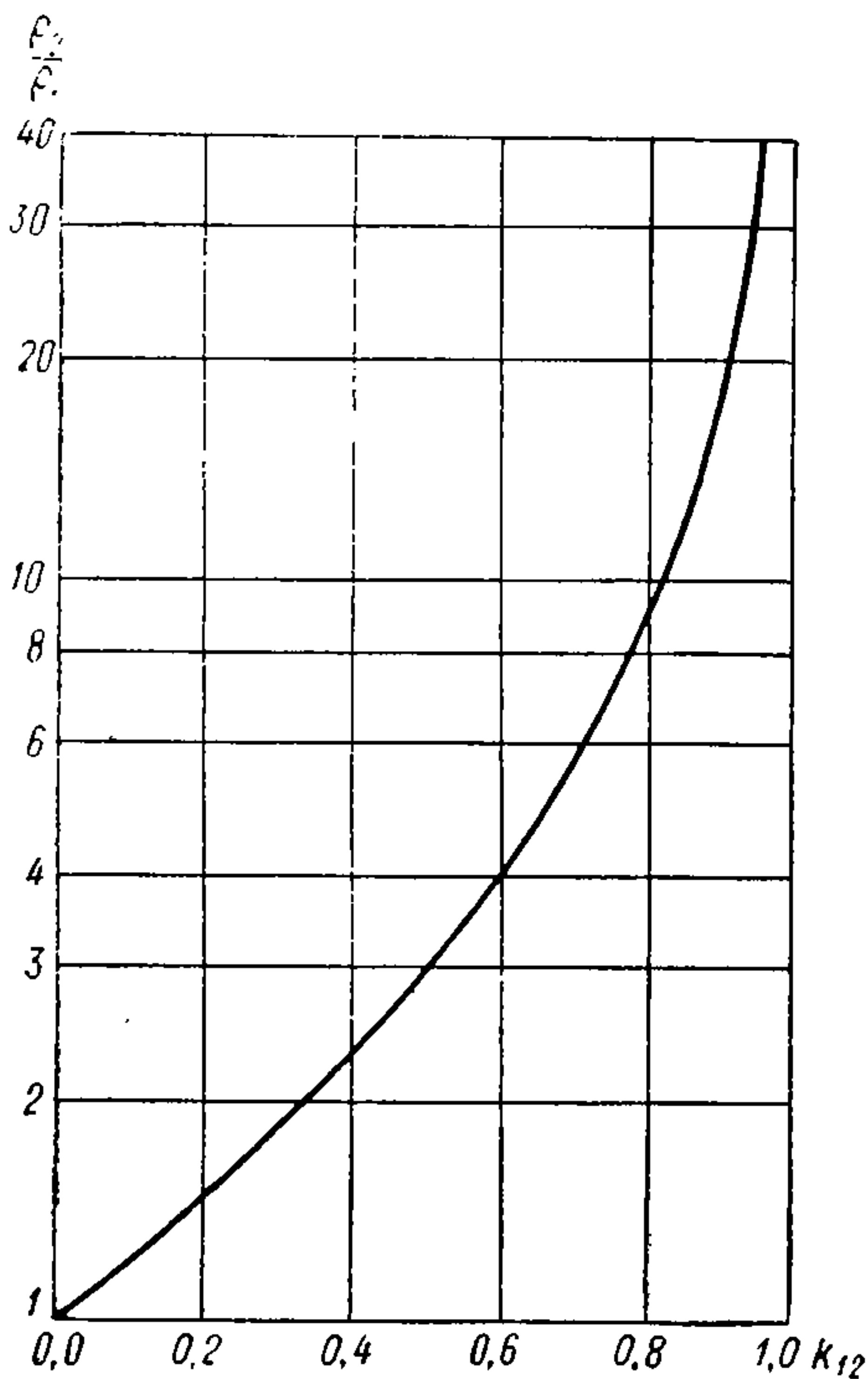


Рис. 56.

Результат, полученный в (279), можно формулировать в виде следующего правила: при наличии контакта двух сред и источника поля, находящегося в среде a , поле в этой среде вычисляется как происходящее от двух источников, находящихся в неограниченной среде a , один действительный, другой фиктивный, находящийся в месте зеркального изображения в плоскости контакта (где

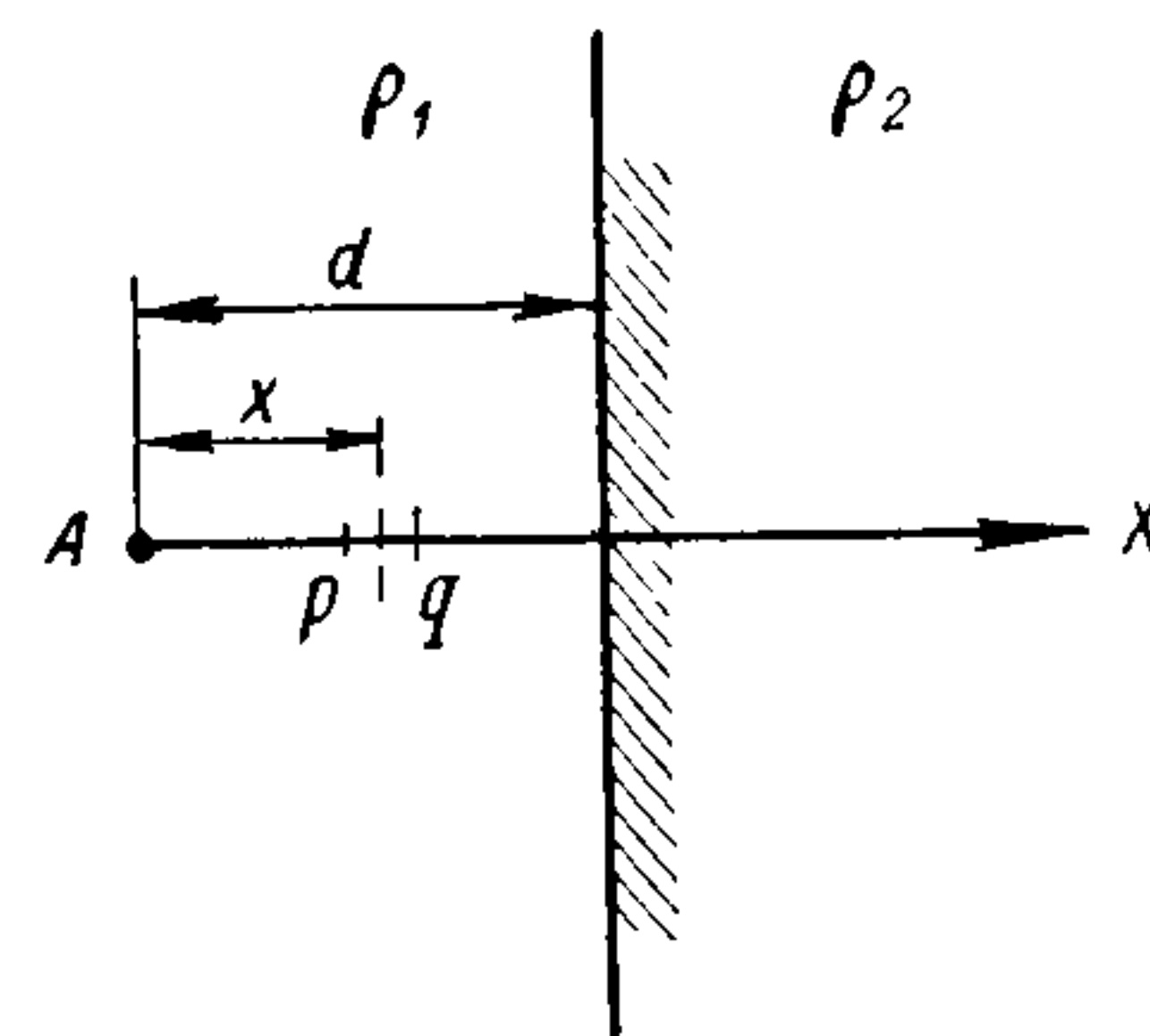


Рис. 57.

на самом деле среды a нет), причем меру фиктивного источника получаем, умножив меру действительного на k_{ab} . Поле в другой среде b происходит от фиктивного источника, имеющего меру $(1 - k_{ab})$, помещенного в месте действительного источника, но в среде b .

Рассмотренная задача имеет непосредственное применение к вычислению потенциала точечного электрода, находящегося около вертикального контакта двух пород, либо обнаженных, либо покрытых тонким слоем наносов (рассматривая в дальнейшем вопрос о двухслойной земле, мы увидим, что на расстояниях больших по сравнению с толщиной верхнего слоя, распределение потенциала практически определяется удельным сопротивлением нижнего слоя). Действительно, плоскость, проходящая через ось X (рис. 55), есть плоскость симметрии и может быть принята за поверхность раздела земли и воздуха. Для этого случая имеем, заменяя e на $I/2\pi$, ϵ_1 на $1/\rho_1$, ϵ_2 на $1/\rho_2$, из (275) и (279)

$$\varphi_1 = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left(\frac{1}{r} + \frac{k_{12}}{r'} \right); \quad \varphi_2 = \frac{I\rho_2}{2\pi} \cdot \frac{(1-k_{12})}{r}. \quad (282)$$

Предположим, что мы расположили один электрод на расстоянии d от контакта, а другой электрод отнесли достаточно далеко, чтобы можно было пренебречь его влиянием (рис. 57). Произведем профилирование, измеряя разность потенциалов V между двумя электродами p и q , находящимися на постоянном расстоянии a , и притом настолько малом, что можно считать *

$$\frac{\varphi_p - \varphi_q}{a} = \frac{V}{a} = E_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \quad (283)$$

Из (282) получаем, полагая, что $r = x$, $r' = 2d - x$, и дифференцируя (282)

$$E_x^{(1)} = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{k_{12}}{(2d-x)^2} \right]; \quad E_x^{(2)} = \frac{I\rho_2}{2\pi} \cdot \frac{(1-k_{12})}{x^2}. \quad (284)$$

Если мы наблюдаемые значения E подставим в формулу (182), т. е. будем вычислять сопротивление, не обращая внимания на неоднородность среды, то мы получим некоторые значения, которые мы будем обозначать $\bar{\rho}$ и называть эффективными сопротивлениями. $\bar{\rho}$, конечно, не равно действительному удельному сопротивлению в точке наблюдения, которое равно либо ρ_1 , либо ρ_2 , но им наиболее удобно на практике характеризовать отклонение действительного поля от поля в однородной среде. Зная d и k_{12} , мы можем вычислить $\bar{\rho}$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho}_1 &= \frac{E_x^{(1)}}{I} 2\pi x^2 = \rho_1 \left[1 - k_{12} \left(\frac{x}{2d-x} \right)^2 \right] && \text{при } x < d; \\ \bar{\rho}_2 &= \frac{E_x^{(2)}}{I} 2\pi x^2 = \rho_2 (1 - k_{12}) = \rho_1 (1 + k_{12})^{**} && \text{при } x > d. \end{aligned} \right\} \quad (285)$$

При $k_{12} = 0$, $\rho_1 = \rho_2$ мы получаем $\bar{\rho}_1 = \bar{\rho}_2 = \rho_1$, т. е. истинное значение удельного сопротивления; если же $k_{12} \neq 0$, то, полагая

$$\frac{x}{2d} = \xi,$$

мы получаем значения, представленные на рис. 58, для разных значений k_{12} .

Замечательно, что, идя от источника к контакту со средой большего удельного сопротивления, мы должны наблюдать уменьшение эффективного сопротивления, а после перехода через контакт — возрастание скачком; далее оно остается постоянным, но отнюдь не равным ρ_2 . На практике этот теоретический ход будет, конечно, сглажен влиянием наносов и нерезкостью контакта. При отношении сопротивлений 1,5, т. е. всего в полтора раза, как показывает кривая $k = 0,2$, мы имеем скачок в эффективном сопротивлении с $0,8\rho_1$ к $1,2\rho_1$, т. е. на 40%. Если взять масштаб установки, т. е. d , достаточно большим по сравнению с толщиной наносов или шириной контактной зоны,

* Расчет расстояния, на которое нужно отнести второй электрод, а также расстояния a , при котором применима формула (283), можно сделать, исходя из (282), теми же способами, как в § 14.

** Применяя (281а).

то можно ожидать, что за исключением точек, приходящихся около самого контакта — кривые $\bar{\rho}$ получатся похожие на рис. 58 и дадут возможность довольно точно определить положение контакта даже при незначительной разнице в электропроводностях. Этот способ у нас еще не употреблялся на практике: он может найти себе применение при детализации контакта, уже приблизительно намеченного другими путями.

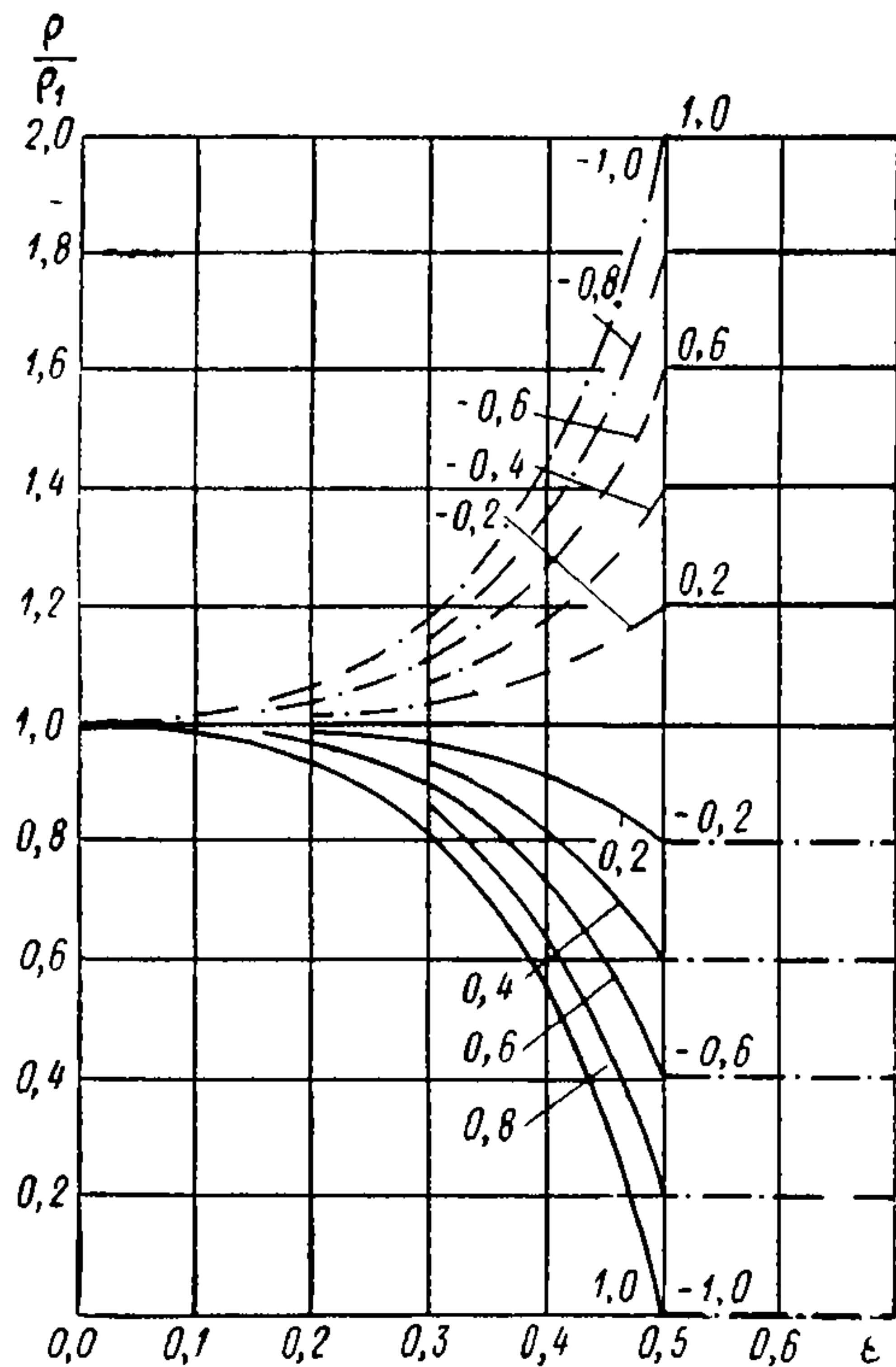


Рис. 58.

а именно, с продольным* и поперечным расположением цепи (рис. 59). Вычисленное значение $\bar{\rho}$ относим к середине цепи, как это наиболее естественно и всегда делается на практике.

При рассмотрении продольно расположенной цепи, приближающейся к контакту и переходящей через него, мы обозначаем, как и раньше, расстояние крайних электродов (I, II) через L , внутренних электродов AB через a ; отношение L/a через β , расстояние середины цепи от контакта через x ; для упрощения формул вводим $a/2$ как единицу длины, так что

$$\xi = \frac{2x}{a}$$

будет у нас приведенной координатой точки, к которой относится $\bar{\rho}$.

Расчет основан на применении формул (282); как легко сообразить,

* Вывод формул для этого случая, а также весь расчет рис. 61 сделан студентом ЛГУ В. М. Шиповым.

приходится различать пять случаев: 1) все четыре электрода находятся в среде 1; 2) крайний электрод II переходит в среду 2; 3) электроды II и B находятся в среде 2; 4) II, B, A находятся в среде 2 и,

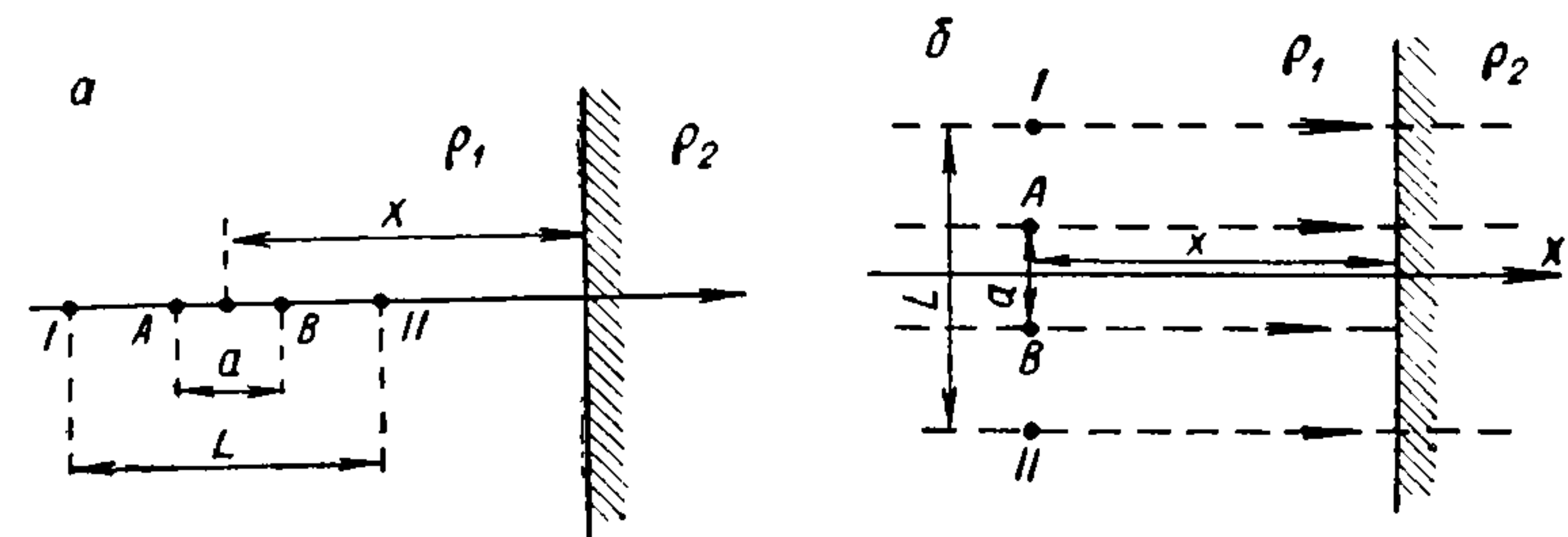


Рис. 59.

наконец, 5) все четыре электрода находятся в среде 2. Разбор этих случаев не представляет затруднений; укажем вкратце, как получается формула для третьего случая (рис. 60). Потенциал в точке A

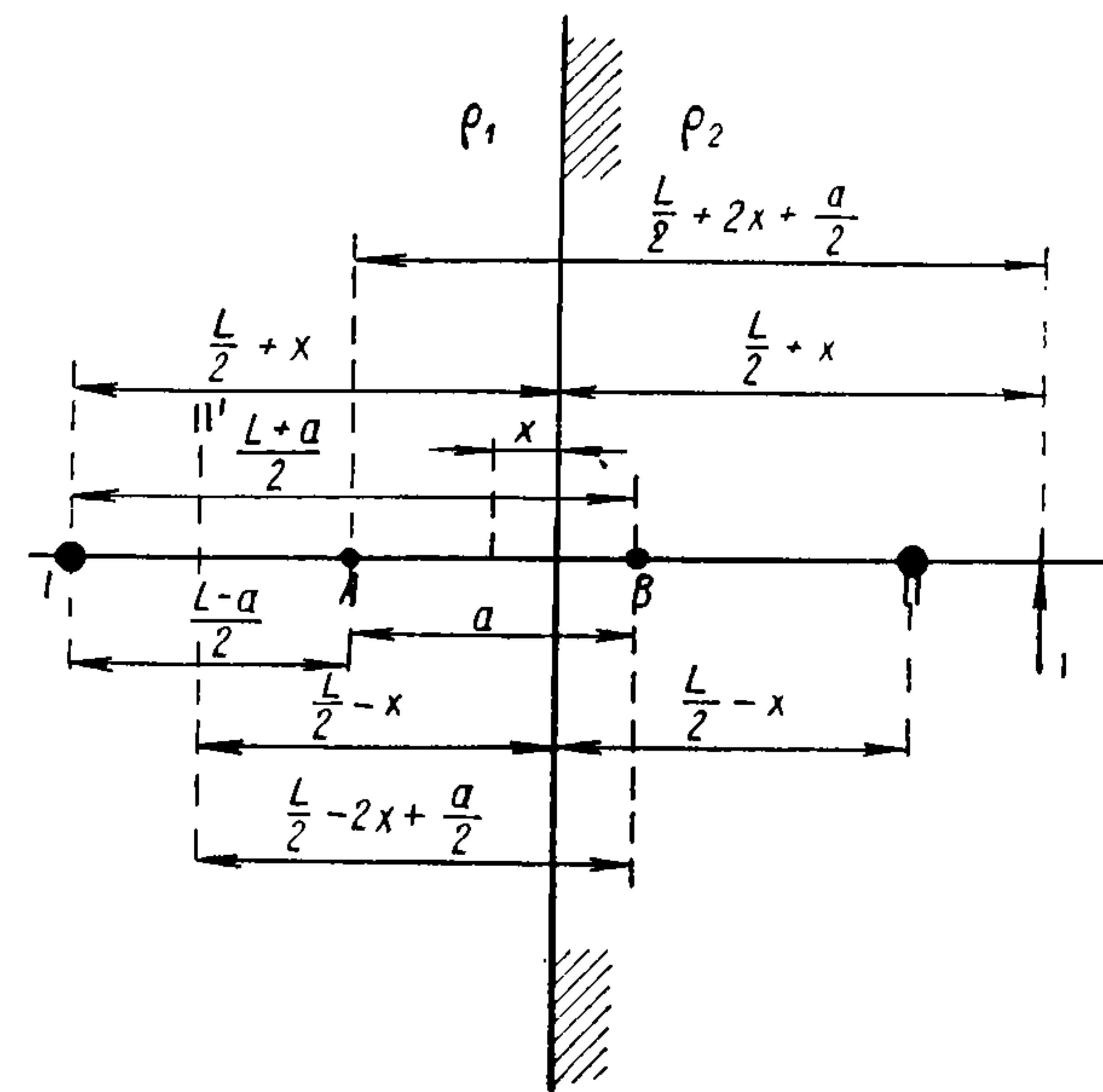


Рис. 60.

происходит от действия I , его изображения I' и II , находящегося в другой среде; выписываем расстояния (рис. 60), выражая их в кратных $a/2$, и множители, зависящие от силы тока и среды, в которой

помещается действительный или фиктивный источник, причем пользуемся обозначением $\beta = L/a$

$$IA \quad \frac{a}{2}(\beta - 1) \quad \frac{I\rho_1}{2\pi};$$

$$I'A \quad \frac{a}{2}(2\xi + \beta + 1) \quad \frac{I\rho_1}{2\pi} k_{12};$$

$$IIA \quad \frac{a}{2}(\beta + 1) \quad -\frac{I\rho_2}{2\pi}(1 - k_{12}) = -\frac{I\rho_1}{2\pi}(1 + k_{12})$$

и составляем выражение для φ_A

$$\varphi_A = \frac{I\rho_1}{\pi a} \left[\frac{1}{\beta - 1} - \frac{(1 + k_{12})}{\beta + 1} + \frac{k_{12}}{2\xi + \beta + 1} \right].$$

Точно так же поступаем при вычислении потенциала φ_B

$$IB \quad \frac{a}{2}(\beta + 1) \quad \frac{I\rho_1}{2\pi}(1 - k_{21}) = \frac{I\rho_1}{2\pi}(1 + k_{12});$$

$$IIB \quad \frac{a}{2}(\beta - 1) \quad -\frac{I\rho_2}{2\pi} = -\frac{I\rho_1}{2\pi} \cdot \frac{(1 + k_{12})}{(1 - k_{12})};$$

$$II'V \quad \frac{a}{2}(\beta - 2\xi + 1) \quad -\frac{I\rho_2}{2\pi} k_{21} = \frac{I\rho_1}{2\pi} \cdot \frac{1 + k_{12}}{1 - k_{12}} k_{12},$$

откуда получается выражение для φ_B

$$\varphi_B = \frac{I\rho_1}{\pi a} \cdot \frac{1 + k_{12}}{1 - k_{12}} \left[\frac{1 - k_{12}}{\beta + 1} - \frac{1}{\beta - 1} + \frac{k_{12}}{\beta - 2\xi + 1} \right].$$

После простых алгебраических действий выражение для разности потенциалов приводится к виду

$$V_{III} = \varphi_A - \varphi_B = \frac{4I\rho_1}{\pi a} \cdot \frac{1}{\beta^2 - 1} \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - \frac{k_{12}(\beta - 1)\xi}{\beta + 1 + 2\xi} \right] + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + k_{12}}{1 - k_{12}} \left[1 - \frac{k_{12}(\beta - 1)\xi}{\beta + 1 - 2\xi} \right] \right\}.$$

Так как по определению

$$\bar{\rho} = \frac{V}{I} \cdot \frac{\pi a}{4} (\beta^2 - 1),$$

то, подставляя сюда вычисленное V , получаем

$$\bar{\rho}_{III} = \rho_1 \left\{ \frac{1}{2} \left[1 - \frac{k_{12}(\beta - 1)\xi}{\beta + 1 + 2\xi} \right] + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + k_{12}}{1 - k_{12}} \left[1 - \frac{k_{12}(\beta - 1)\xi}{\beta + 1 - 2\xi} \right] \right\}, \quad (286a)$$

причем эта формула применима в пределах

$$\frac{a}{2} \geq x \geq 0, \quad \text{т. е.} \quad 1 \geq \xi \geq 0.$$

Аналогичными выкладками получаем

$$\bar{\rho}_I = \rho_1 \left\{ 1 + \frac{k_{12}}{2} (\beta^2 - 1) \left[\frac{1}{(2\xi - \beta)^2 - 1} - \frac{1}{(2\xi + \beta)^2 - 1} \right] \right\} \quad (286б)$$

при

$$\xi \geq \beta$$

и

$$\bar{\rho}_{II} = \rho_1 \left\{ 1 + \frac{k_{12}}{2} \left[1 - \frac{\beta^2 - 1}{(2\xi + \beta)^2 - 1} \right] \right\} \quad (286в)$$

при

$$\beta \geq \xi \geq 1.$$

Формула (286а) может быть продолжена и на участок, симметрично расположенный по отношению к контакту, т. е. для ξ'

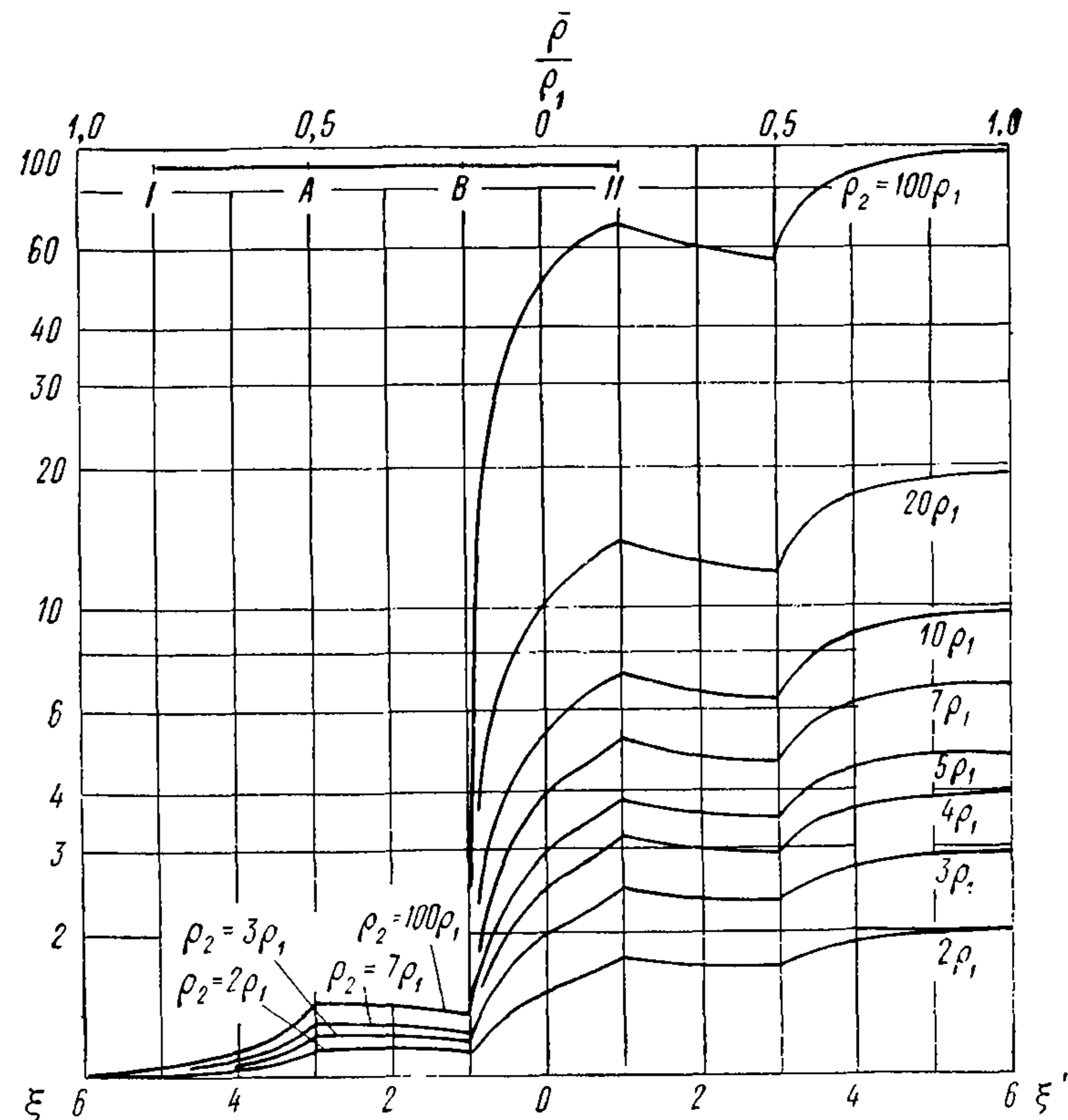


Рис. 61.

лежащих по другую сторону контакта; для этого достаточно положить $\xi = -\xi'$ и брать ξ' в пределах $1 \geq \xi' \geq 0$.

Что же касается случаев IV и V, то формулы для них получаются заменой ξ на ξ' и перестановкой всех значков 1 и 2 в правых частях формул (286а) и (286в); вводя снова ρ_1 и k_{12} по известным соотношениям, получаем

$$\bar{\rho}_{IV} = \rho_1 \frac{1 + k_{12}}{1 - k_{12}} \left\{ 1 - \frac{k_{12}}{2} \left[1 - \frac{\beta^2 - 1}{(2\xi' + \beta)^2 - 1} \right] \right\}; \quad (286г)$$

$$\bar{\rho}_V = \rho_1 \frac{1 + k_{12}}{1 - k_{12}} \left\{ 1 - \frac{k_{12}}{2} (\beta^2 - 1) \left[\frac{1}{(2\xi' - \beta)^2 - 1} - \frac{1}{(2\xi' + \beta)^2 - 1} \right] \right\}. \quad (286д)$$

Как показывает рис. 61, ход кривых весьма сложный; существенно то, что на расстояниях порядка длины цепи ($x = L$; $\xi = 2\beta$) влияние контакта очень слабо, так что при наличии резкого контакта и малой мощности наносов переходная часть кривой заключается в пределах порядка удвоенной длины цепи. В действительной обстановке переходная часть будет сглажена и искажена, но при больших L может отчасти выявиться и дать повод к неправильным заключениям о структуре контакта, если ее интерпретировать буквально.

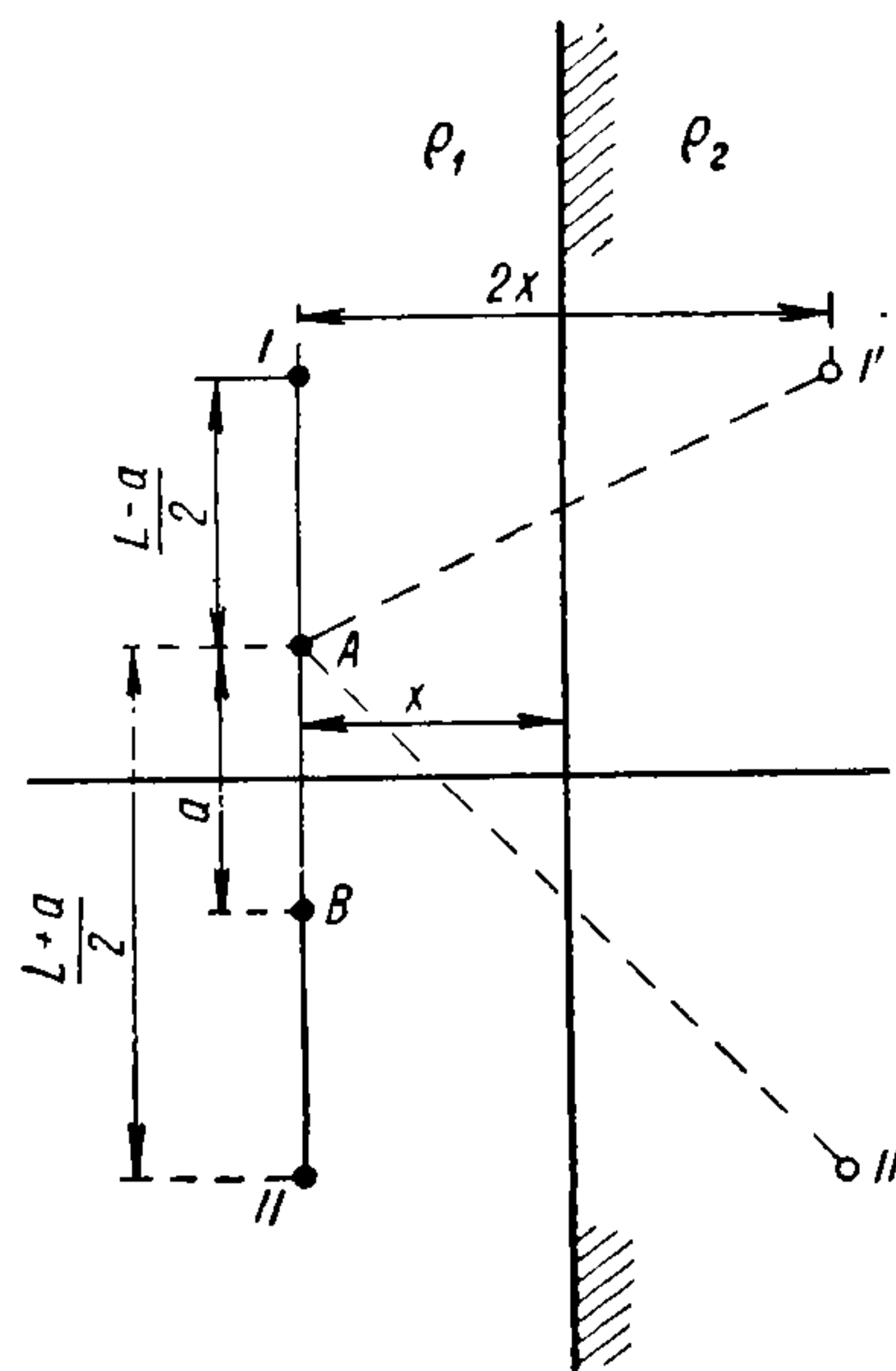


Рис. 62.

На рис. 61 величины $\bar{\rho}$ отложены как ординаты в логарифмическом масштабе, а ξ и ξ' как абсциссы, считаемые от контакта влево и вправо, в обычном масштабе. Отношение β принято равным 3. Цифры наверху дают расстояния в долях длины цепи L , изображенной на рисунке для непосредственного указания масштаба.

Случай поперечного расположения цепи приводит к более простым формулам. Считая, что цепь находится в среде 1, имеем (рис. 62)

| | | |
|------|---|--------------------------------|
| IA | $\frac{a}{2}(\beta - 1)$ | $\frac{I\rho_1}{2\pi}$ |
| I'A | $\frac{a}{2} \sqrt{(2\xi)^2 + (\beta - 1)^2}$ | $\frac{I\rho_1}{2\pi} k_{12}$ |
| IIA | $\frac{a}{2}(\beta + 1)$ | $-\frac{I\rho_1}{2\pi}$ |
| II'A | $\frac{a}{2} \sqrt{(2\xi)^2 + (\beta + 1)^2}$ | $-\frac{I\rho_1}{2\pi} k_{12}$ |

и аналогично для B, откуда путем простых выкладок получаем

$$\bar{\rho}_1 = \frac{V}{I} \cdot \frac{\pi a}{4} (\beta^2 - 1) =$$

$$= \rho_1 \left\{ 1 + \frac{k_{12}}{2} (\beta^2 - 1) \left[\frac{1}{\sqrt{(2\xi)^2 + (\beta - 1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2\xi)^2 + (\beta + 1)^2}} \right] \right\} \quad (287)$$

и после перехода через контакт

$$\bar{\rho}_2 = \rho_1 \frac{1 + k_{12}}{1 - k_{12}} \left\{ 1 - \frac{k_{12}}{2} (\beta^2 - 1) \left[\frac{1}{\sqrt{(2\xi')^2 + (\beta - 1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(2\xi')^2 + (\beta + 1)^2}} \right] \right\}. \quad (287a)$$

На рис. 63 даны соответственные кривые в том же масштабе, что и на рис. 61, причем β опять принято равным 3.

Хотя и в этом случае кривые имеют характерный ход, не соответствующий действительному значению удельного сопротивления в той

точке, к которой относятся измерения, но они идут гораздо плавнее, а главное, вся переходная область уже, чем на рис. 61, и можно думать, что в реальных условиях контакт при этом методе выявится резче, чем при профилировании продольной цепью. Из сравнения рис. 61 и 63 можно еще вывести качественное заключение, что при наличии возможных неоднородностей в виде более или менее круто

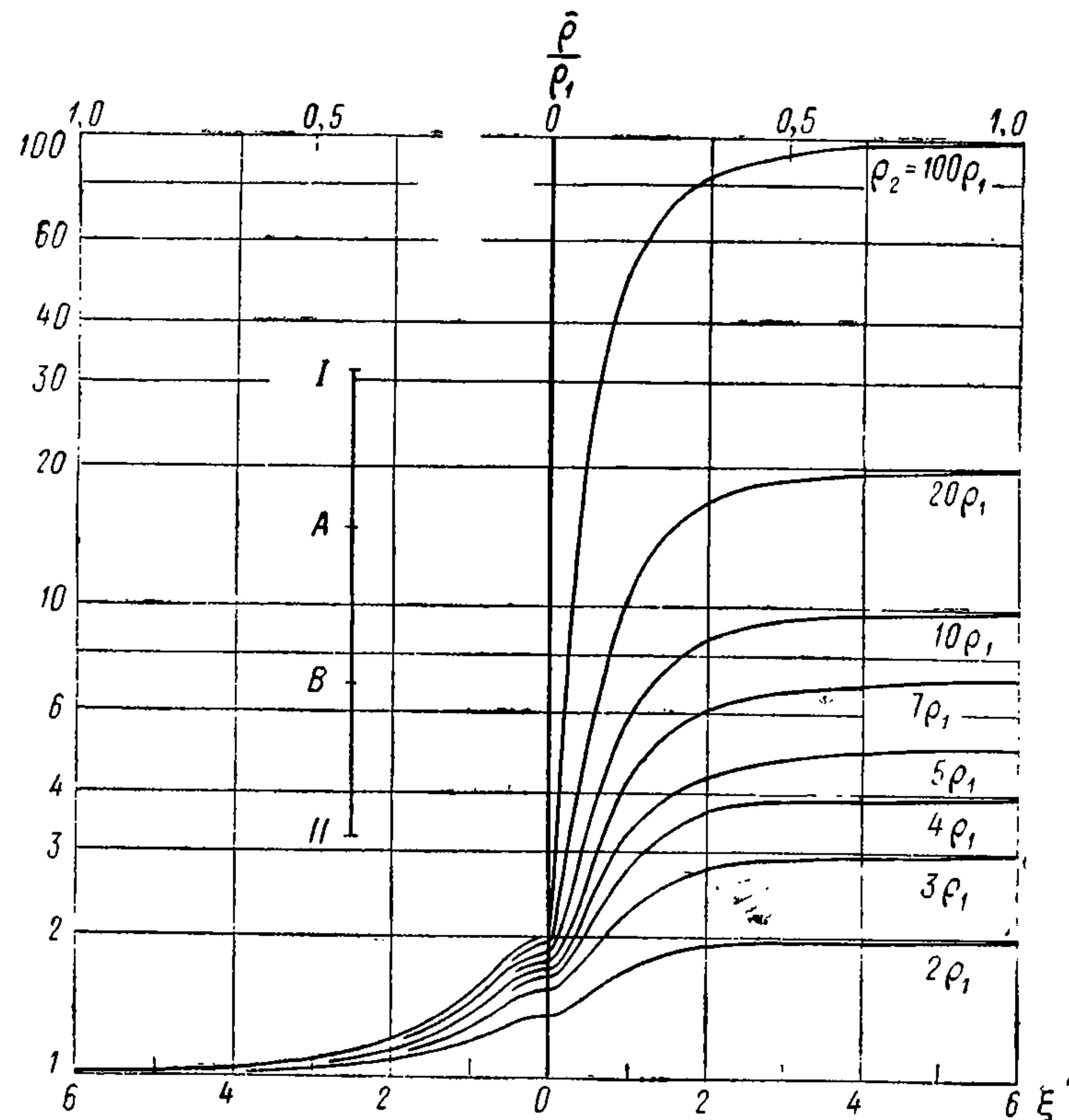


Рис. 63.

падающих границ между различными средами выгоднее располагать измерения так, чтобы направление измерительной цепи было параллельно этим границам. В таком случае результат, полученный в данной точке, будет более близким к истинному значению удельного сопротивления и менее искажен влиянием иной электропроводности объектов, находящихся рядом.

Мы подробно иллюстрировали случай $\beta = 3$; при увеличении β , т. е. при уменьшении отношения a/L , в случае профилирования продольной цепью участок III, к которому относится формула (287a), становится уже и масштаб ξ мельче. Оставляя прежний масштаб x/L (обозначенный сверху на рис. 61 и 63), можно вычертить подобные кривые для разных отношений β .

Предоставляем читателю вывести формулы для случая определения $\bar{\rho}$ по значению срединного градиента E , т. е. при профилировании с таким малым a , что можно положить

$$\frac{V}{a} = E.$$

Для вывода формул можно перейти от формул для потенциала соответствующих источников к выражениям для составляющих вектора E , вычислить составляющую E_x (сохраняя прежнее расположение координатных осей) и подставить в формулу (189а); проще, однако, в формулах (286б, в) и (287а) перейти к пределу $\beta = \infty$, $a = 0$, причем вместо ξ/β получится

$$\frac{\xi}{\beta} = \frac{2xa}{aL} = \frac{2x}{L} = 2y.$$

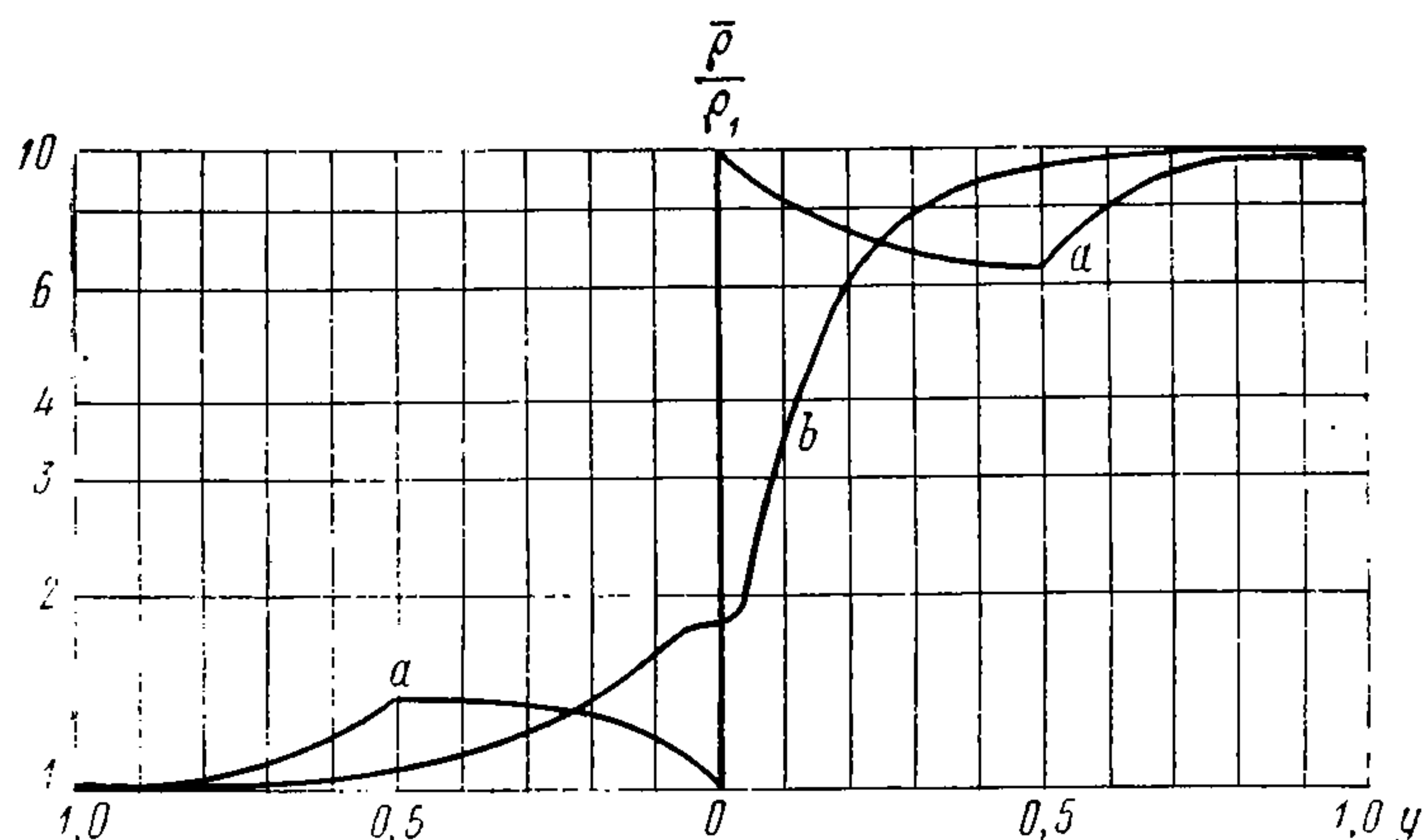


Рис. 64.

Окончательные формулы следующие.
Для продольной цепи

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\rho}}{\rho_1} &= 1 + 8k_{12} \frac{y}{(16y^2 - 1)}, & y &\geq 0,5; \\ \frac{\bar{\rho}}{\rho_1} &= 1 + 2k_{12} \frac{2y + 1}{(4y - 1)^2}, & 0,5 &\geq y \geq 0; \\ \frac{\bar{\rho}}{\rho_1} &= \frac{1 + k_{12}}{1 - k_{12}} \left[1 - 2k_{12} \frac{2y' + 1}{(4y' - 1)^2} \right], & 0,5 &\geq y' \geq 0; \\ \frac{\bar{\rho}}{\rho_1} &= \frac{1 + k_{12}}{1 - k_{12}} \left[1 - 8k_{12} \frac{y'}{(16y'^2 - 1)} \right], & y' &\geq 0,5, \end{aligned} \quad (288)$$

причем y считается в сторону среды 1, а y' — в сторону среды 2.

Для поперечной цепи

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\rho}}{\rho_1} &= 1 + k_{12} \frac{1}{(4y^2 + 1)^{3/2}}, \\ \frac{\bar{\rho}}{\rho_1} &= \frac{1 + k_{12}}{1 - k_{12}} \left[1 - k_{12} \frac{1}{(4y'^2 + 1)^{3/2}} \right]. \end{aligned} \quad (289)$$

В случае формул (288) величина $\bar{\rho}$ в точке пересечения профиля с контактом терпит разрыв; по (289) $\bar{\rho}$ меняется плавно. На рис. 64 (a — продольная, b — поперечная цепь) даны эти два случая для $\rho_2 = 10\rho_1$ в том же масштабе величины y , как и рис. 61 и 63. Здесь полезно обратить внимание на то, что величина $\bar{\rho}$ зависит не только от действительного распределения сопротивлений, но и от установки (величины β), не говоря уже о том, что она не равняется истинному значению ρ в точке, куда ее относят.

§ 22. ДВЕ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА. МЕТОД МНОГОКРАТНЫХ ОТРАЖЕНИЙ. ВЕРТИКАЛЬНАЯ ЖИЛА ИЛИ КОНТАКТНАЯ ЗОНА

Положим, что мы имеем две среды 1 и 3, разделенные плоскопараллельным слоем среды 2. Пусть точечный источник поля e находится в первой среде, на расстоянии d от границы 1, 2; мощность (толщина) слоя 2 есть h (рис. 65). Действуя последовательными приближениями, постараемся удовлетворить граничным условиям на обеих поверхностях раздела. Мы знаем, что поле в первой среде, происходящее от e и его изображения $k_{12}e$ в границе 1, 2, которую для краткости будем обозначать буквой M , а также поле во второй среде, происходящее от фиктивного заряда $(1 - k_{12})e$, находящегося на месте истинного — удовлетворяют условиям на границе M . Так как это поле в 2 происходит от одного точечного источника, как будто находящегося в 2, то для удовлетворения условиям на границе 2, 3, которую назовем N , положим, что в среде 3 поле происходит от источника, опять-таки находящегося на месте истинного, но имеющего заряд $(1 - k_{12})(1 - k_{23})e$; но тогда нам нужно будет производить поле в среде 2 от двух источников; от имеющегося уже фиктивного источника $(1 - k_{12})e$ и от его изображения, находящегося на расстоянии $d + h$ справа от N и равного $k_{23}(1 - k_{12})e$. Теперь поле в 2 вместе со взятым первоначально полем в 1 не удовлетворяют условиям на границе M , так как справа прибавился еще один источник. Очевидно, нам нужно будет ввести еще два дополнительных источника: влево от границы M на расстоянии $d + 2h$ с зарядом $k_{21}k_{23}(1 - k_{12})e$ для поля в 2, и на расстоянии $d + 2h$ справа от

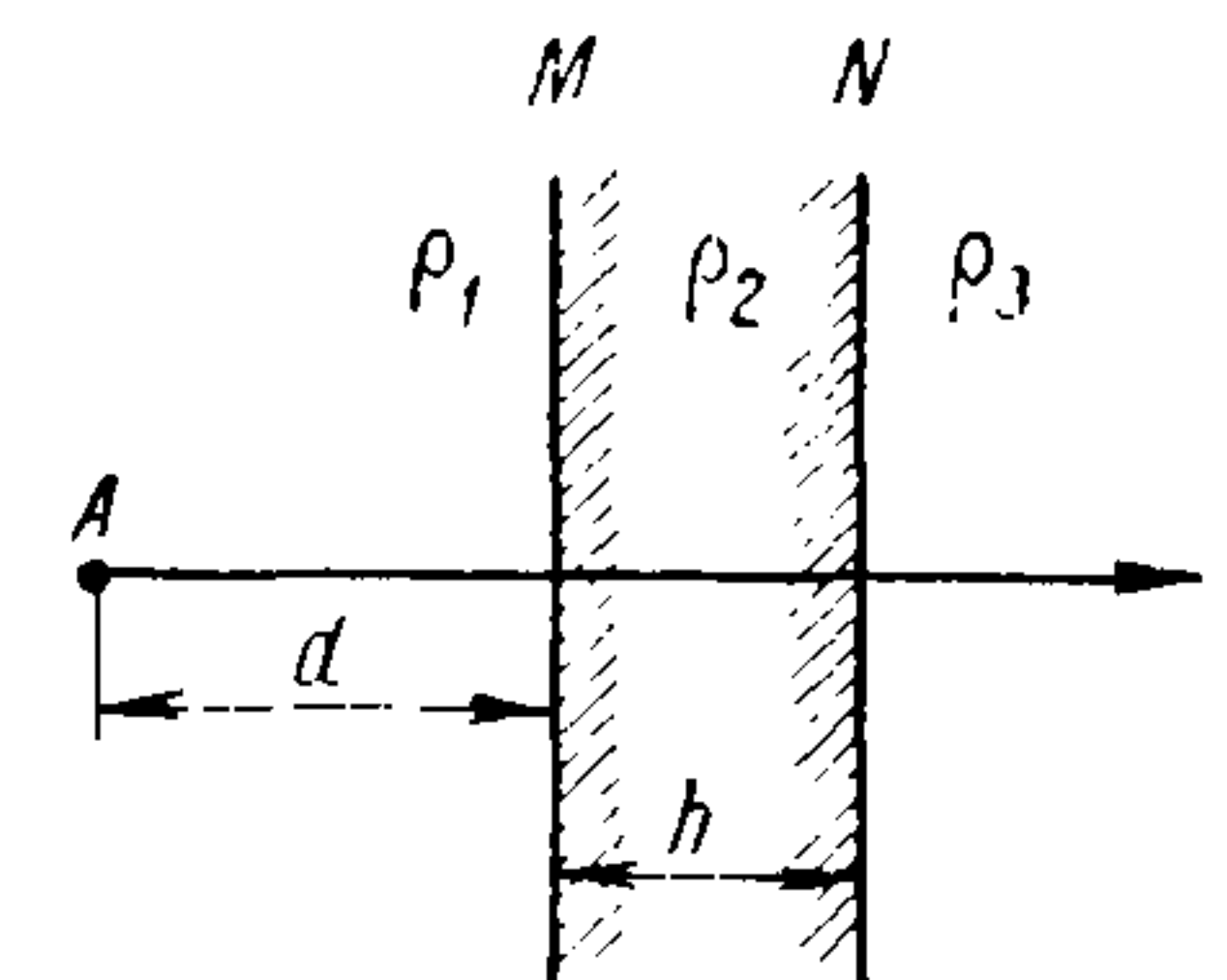


Рис. 65.

M с зарядом $k_{23}(1 - k_{12})(1 - k_{21})e$, для поля в 1. Введенный для поля в 2 новый источник слева потребует введения дополнительных источников именно $k_{21}k_{23}(1 - k_{12})(1 - k_{23})e$ для 3, на том же месте, и $k_{23}k_{21}k_{23}(1 - k_{12})e$ для поля 2 на расстоянии $d + 2h$ справа от N ; добавленный для поля 2 заряд опять приведет к новым зарядам, необходимым для условий на границе M . Так как величины k по модулю меньше единицы, то эти заряды, получающиеся повторными изображениями, по абсолютной величине уменьшаются, и можно ожидать, что получающиеся таким образом бесконечные ряды для потенциала в каждой области будут сходящимися, что и можно показать непосредственно, рассматривая окончательные выражения для этих рядов.

Для среды 1 мы получили:

e на расстоянии d слева от M ;

$k_{12}e$ на расстоянии d справа от M ;

$k_{23}(1 - k_{12})(1 - k_{21})e$ на расстоянии $d + 2h$ справа от M .

Последнее выражение можно формально истолковать как действие заряда e , «пропущенного» через M [множитель $(1 - k_{12})$], отраженного на границе N слева (множитель k_{23}) и снова пропущенного через M , но справа [множитель $(1 - k_{21})$]. Если мы «непропущенную» часть, т. е. $k_{23}(1 - k_{12})e$ отразим от M справа, затем от N слева, и теперь «пропустим» его действие через M справа, то мы получим $k_{23}^2k_{21}(1 - k_{12})(1 - k_{21})e$, на расстоянии $d + 4h$ справа от M .

Продолжая наши рассуждения первоначальным способом, т. е. удовлетворяя последовательными приближениями условиям на границах, мы как раз придем к тому же результату. Таким образом, только что введенная терминология оказывается правильной и очень удобной, так как, применяя ее далее, мы видим, что, начиная со второго, каждый следующий заряд получается из предыдущего умножением на $k_{23}k_{21}$. Мы приходим к результату, что поле в 1 будет производиться от бесконечного ряда фиктивных зарядов, расположенных справа от M на расстояниях $d + 2nh$, и величины зарядов будут

$$e_0^{(1)} = k_{12}e;$$

$$e_1^{(1)} = k_{23}(1 - k_{12}^2)e;$$

$$e_2^{(1)} = -k_{23}^2k_{12}(1 - k_{12}^2)e;$$

$$e_n^{(1)} = (-1)^{n+1}k_{23}^n k_{12}^{n-1} (1 - k_{12}^2)e$$

(для однообразия мы заменяем k_{21} на $-k_{12}$).

Введем координатную систему с началом в e , с осью OX по направлению перпендикуляра, опущенного из e на поверхности раздела, выразим расстояния какой-нибудь точки P среды 1 от всех действующих зарядов, включая и действительный заряд e ; тогда мы можем написать ряд для потенциала в среде 1

$$\varphi^{(1)} = \frac{e}{\varepsilon_1} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{k_{12}}{\sqrt{(2d-x)^2 + y^2}} + \right.$$

$$\left. + k_{23}(1 - k_{12}^2) \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(k_{12}k_{23})^{n-1}}{\sqrt{(2nh+2d-x)^2 + y^2}} \right]. \quad (290a)$$

Если k_{12} равно единице, то слой 2 является изолятором и множитель перед суммой обращается в нуль; если же k_{12} по модулю меньше единицы, то при беспредельном возрастании n модуль отношения двух последующих членов ряда

$$\frac{|k_{12}| |k_{23}| \sqrt{(2nh+2d-x)^2 + y^2}}{\sqrt{[2(n+1)h+2d-x]^2 + y^2}}$$

стремится к пределу

$$\lim |k_{12}| |k_{23}| \frac{n}{n+1} = |k_{12}| |k_{23}| < 1,$$

так что ряд абсолютно сходящийся. Таким же способом можно убедиться в абсолютной сходимости рядов, полученных почленным дифференцированием по x и по y , так что этот ряд можно дифференцировать почленно.

Поле в среде 2 происходит только от фиктивных зарядов, находящихся слева от M и справа от N ; первые из них мы нашли

$(1 - k_{12})e$ на расстоянии d слева от M ;

$k_{21}k_{23}(1 - k_{12})e$ на расстоянии $d + 2h$ слева от M

и

$k_{23}(1 - k_{12})e$ на расстоянии $d + 2h$ справа от M .

Продолжая рассуждения тем или иным способом, получаем для потенциала ряд

$$\varphi^{(2)} = \frac{e(1-k_{12})}{\varepsilon_2} \sum_0^{\infty} (-1)^n (k_{12}k_{23})^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{(2nh+x)^2 + y^2}} + \frac{k_{23}}{\sqrt{[2(n+1)h+2d-x]^2 + y^2}} \right\} \quad (290б)$$

и, наконец, для $\varphi^{(3)}$

$$\varphi^{(3)} = \frac{e(1-k_{12})(1-k_{23})}{\varepsilon_3} \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{(k_{12}k_{23})^n}{\sqrt{(2nh+x)^2 + y^2}}. \quad (290в)$$

Заменяя в полученных формулах

$$\frac{e}{\varepsilon_1} \quad \text{на} \quad \frac{I\rho_1}{2\pi};$$

$$\frac{e}{\varepsilon_2} \quad \text{на} \quad \frac{I\rho_2}{2\pi} = \frac{I\rho_1}{2\pi} \cdot \frac{1+k_{12}}{1-k_{12}};$$

$$\frac{e}{\varepsilon_3} \quad \text{на} \quad \frac{I\rho_3}{2\pi} = \frac{I\rho_1}{2\pi} \cdot \frac{(1+k_{12})(1+k_{23})}{(1-k_{12})(1-k_{23})},$$

получаем окончательное решение нашей задачи

$$\varphi^{(1)} = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{k_{12}}{\sqrt{(2d-x)^2+y^2}} + \right. \\ \left. + k_{23}(1-k_{12}^2) \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(k_{12}k_{23})^{n-1}}{\sqrt{(2nh+2d-x)^2+y^2}} \right]; \quad (291a)$$

$$\varphi^{(2)} = \frac{I\rho_1}{2\pi} (1+k_{12}) \sum_0^{\infty} (-1)^n (k_{12}k_{23})^n \left\{ \frac{1}{\sqrt{(2nh+x)^2+y^2}} + \right. \\ \left. + \frac{k_{23}}{\sqrt{[2(n+1)h+2d-x]^2+y^2}} \right\}; \quad (291б)$$

$$\varphi^{(3)} = \frac{I\rho_1}{2\pi} (1+k_{12})(1+k_{23}) \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{(k_{12}k_{23})^n}{\sqrt{(2nh+x)^2+y^2}}. \quad (291в)$$

Все эти ряды одного типа, и сходимость их и почленная дифференцируемость доказываются одинаково для всех. Можно проверить, что полученные выражения для потенциала действительно строго удовлетворяют условиям на границах M и N . Формулы упрощаются, если положить $y=0$, т. е. для точек оси X ; рассмотренный случай может иметь довольно широкое практическое применение, так как мало проводящие золотоносные кварцевые жилы могут залегать под небольшим слоем наносов и могут быть окруженными более проводящими породами; аналогичное образование представляют залегания слюды. Наконец, и сами контакты зачастую характеризуются зоной разрушения или смятия контактирующих пород, и подобная зона может иметь сопротивление, отличное от сопротивлений соприкасающихся массивов, в большинстве случаев меньшее.

В статье Г. Гедстрема, с которой автор мог ознакомиться благодаря любезности К. Зундберга еще до появления ее в печати, рекомендуется профилирование градиента одноэлектродного поля вкрест простирания жилы, подобно разобранным нами в предыдущем параграфе [формула (285), рис. 58], и указывается, что этот метод был применен при разведке на золотоносные кварцевые жилы на острове Суматре.

Специализируя формулы (291) на случай $y=0$ и дифференцируя полученные ряды по x , получаем (считая $x>0$, т. е. идя от питающего электрода по направлению к жиле дальше через нее)

$$-\left(\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x}\right)_{y=0} = E^{(1)} = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{k_{12}}{(2d-x)^2} - \right. \\ \left. - k_{23}(1-k_{12}^2) \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(k_{12}k_{23})^{n-1}}{(2nh+2d+x)^2} \right]; \quad (292)$$

$$-\left(\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial x}\right)_{y=0} = E^{(2)} = \frac{I\rho_1}{2\pi} (1+k_{12}) \sum_0^{\infty} (-1)^n (k_{12}k_{23})^n \times \\ \times \left\{ \frac{1}{(2nh+x)^2} - \frac{k_{23}}{[2(n+1)h+2d-x]^2} \right\}; \quad (292a)$$

$$-\left(\frac{\partial\varphi^{(3)}}{\partial x}\right)_{y=0} = E^{(3)} = \frac{I\rho_1}{2\pi} (1+k_{12})(1+k_{23}) \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{(k_{12}k_{23})^n}{(2nh+x)^2}. \quad (293)$$

Подставляя эти выражения в формулу, определяющую в данном случае $\bar{\rho}$,

$$\bar{\rho} = \frac{E}{I} 2\pi x^2$$

и вводя снова относительную координату $\xi = \frac{x}{2d}$ и относительную мощность жилы $\eta = \frac{h}{2d}$, получаем

$$\bar{\rho} = \rho_1 \left[1 - \frac{k_{12}\xi^2}{(1-\xi)^2} - k_{23}(1-k_{12}^2) \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(k_{12}k_{23})^{n-1}\xi^2}{(2n\eta+1-\xi)^2} \right] \quad (294a)$$

для первой среды, где $x \leq d$, т. е. $\xi \leq 0,5$;

$$\bar{\rho} = \rho_1 (1+k_{12}) \sum_0^{\infty} (-1)^n (k_{12}k_{23})^n \times \\ \times \left\{ \frac{\xi^2}{(2n\eta+\xi)^2} - \frac{k_{23}\xi^2}{[2(n+1)\eta+1-\xi]^2} \right\} \quad (294б)$$

для второй среды, где $d \leq x \leq d+h$, т. е. $0,5 \leq \xi \leq 0,5+\eta$, и

$$\bar{\rho} = \rho_1 (1+k_{12})(1+k_{23}) \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{(k_{12}k_{23})^n \xi^2}{(2n\eta+\xi)^2} \quad (294в)$$

для третьей среды, где $x \geq d+h$, т. е. $\xi \geq 0,5+\eta$.

Предоставляем читателю вывести формулы для случая нахождения источника в пределах жилы.

Детальный расчет по этим формулам и вычисление удобных для практики палеток еще не производились; точно так же интересной задачей является построение характерных кривых профилирования продольной и поперечной цепью при разных отношениях сопротивлений и разных мощностях жилы или контактной зоны. Если предположить, что с обеих сторон жилы находится та же самая среда, то во всех формулах нужно положить

$$k_{23} = -k_{12}.$$

Формулы (291в), (293), (294в), как легко убедиться, будут содержать только k_{12}^2 . Отсюда следует, что поле в среде 3, если источник

находится в 1, т. е. по другую сторону жилы, не зависит от знака величины k_{12} , т. е. от того, будет ли окружающая порода иметь удельное сопротивление большее или во столько же раз меньшее, чем жила, которая в обоих случаях оказывает одинаковое экранирующее действие.

К теоретическим выводам предыдущих параграфов прибавим некоторые общие замечания, касающиеся выбора подходящей методики на практике.

Профилирование продольной цепью является технически выработанным приемом, для которого существуют готовые формулы расчета, и потому, вероятно, будет всегда считаться основным методом площадной разведки постоянным током. Его прямое назначение — получение карты сопротивлений для некоторой средней глубины, которую приято расценивать в $1/4$, $1/3$ или $3/8$ разности питающих электродов. Теоретического обоснования последних цифр дать нельзя — они имеют совершенно ориентировочный характер. При спокойном напластовании мощных пластов с пологим падением и при разносах, достаточных для того, чтобы пренебречь влиянием наносов, мы получаем в областях выхода различных пластов характерные для них значения $\bar{\rho}$ и, имея ключ к переходу от значений сопротивлений к геологической номенклатуре, подобие геологической карты. Сопоставляя площадные данные, полученные при различных разносах питающих электродов, с данными систематического электроразведывания (см. § 23) в достаточном числе точек, мы получаем материал для изучения глубинной тектоники данного района. Само собой разумеется, что ключ к интерпретации должен быть получен из комбинирования электрических и геологических данных на хорошо исследованном участке площади, подлежащей обследованию.

Если мы желаем применить постоянный ток к изучению деталей структуры, как, например, контакты, жилы, отдельные угольные пласты, местные утолщения наносов и т. п., то профилирование обычным приемом не всегда является наилучшим способом. Причина та, что при этом приеме перемещаются все четыре электрода, и мы не только меняем положение той точки, где производим измерения, но и точек питания; последнее в свою очередь влияет на распределение поля, и интерпретация усложняется. В таких случаях выгоднее употреблять неподвижные питающие электроды (точечные или линейные), нормальное поле которых может быть вычислено или измерено на соседнем участке, геологически по возможности тождественном с данным, но без его местных аномалий, и основывать свои заключения на величине относительных аномалий градиента. Так как в нормальном поле (если за таковое можно принять теоретическое поле) градиент прямо пропорционален удельному сопротивлению среды, принимаемой за однородную, то по соответствующим формулам и измеренному градиенту в данной точке можно вычислить кажущееся удельное сопротивление, и, как результат обработки наблюдений, давать карты или профили кажущихся сопротивлений. Выбор соответственной установки зависит от объекта.

Так как, применяя точечные электроды, не всегда можно отнести второй питающий электрод на достаточно большое расстояние (может не хватить мощности питающей установки), то при профилировании градиента по линии, соединяющей неподвижные питающие электроды, нужно принимать во внимание влияние второго электрода. Предоставляем читателю вывести самому методом, изложенным в § 14, следующие формулы:

$$\bar{\rho} = \frac{2\pi r^2 E}{I} \cdot \frac{(1-\xi)^2}{(1-\xi)^2 + \xi^2} = \frac{2\pi r^2 E}{I} M(\xi),$$

где $\xi = r/L$; r — расстояние от ближайшего питающего электрода до середины малого по отношению к r разноса измерительных электродов; L — разность питающих электродов.

Ближе к середине удобнее пользоваться формулой

$$\bar{\rho} = \frac{\pi L^2 E}{I} \cdot \frac{(1-4\eta^2)^2}{4(1+4\eta^2)} = \frac{\pi L^2 E}{4I} N(\eta),$$

где $\eta = r'/L$ и r' считается от середины профиля.

Для практического пользования этими формулами даем таблицу величин $M(\xi)$ и $N(\eta)$; удобнее всего построить по этим данным график и интерполировать по кривой (табл. 11).

В нормальном поле значение градиента получится с ошибкой меньше одного процента, если выполнено условие $a < 5r$, при резко изменяющемся градиенте желательно брать a как можно меньшим.

§ 23. ГОРИЗОНТАЛЬНЫЕ СЛОИ РАЗЛИЧНОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ n СЛОЕВ *

Измерение эффективного сопротивления $\bar{\rho}$ при различных разносах обоих питающих электродов и неподвижной средней точке

* § 23—27 посвящены теории методов электроразведывания, рассматриваемых в соответствующих разделах учебников и руководств по электроразведке. Результаты исследований в области теории и методики интерпретации по методам зондирования излагаются в работах [3, 5, 10, 11, 44, 45, 46, 83, 109, 110]. — Прим. ред.

Таблица 11

| ξ | $M(\xi)$ | η | $N(\eta)$ |
|-------|----------|--------|-----------|
| 0,00 | 1,000 | | |
| 0,02 | 1,000 | | |
| 0,04 | 0,998 | | |
| 0,06 | 0,996 | | |
| 0,08 | 0,992 | | |
| 0,10 | 0,988 | | |
| 0,12 | 0,982 | | |
| 0,14 | 0,974 | | |
| 0,16 | 0,965 | | |
| 0,18 | 0,954 | | |
| 0,20 | 0,941 | | |
| 0,22 | 0,926 | | |
| 0,24 | 0,909 | | |
| 0,26 | 0,890 | | |
| 0,28 | 0,869 | | |
| 0,30 | 0,845 | 0,20 | 0,608 |
| 0,32 | 0,819 | 0,18 | 0,671 |
| 0,34 | 0,790 | 0,16 | 0,734 |
| 0,36 | 0,760 | 0,14 | 0,788 |
| 0,38 | 0,727 | 0,12 | 0,840 |
| 0,40 | 0,692 | 0,10 | 0,886 |
| 0,42 | 0,656 | 0,08 | 0,926 |
| 0,44 | 0,618 | 0,06 | 0,958 |
| 0,46 | 0,580 | 0,04 | 0,981 |
| 0,48 | 0,540 | 0,02 | 0,995 |
| 0,50 | 0,500 | 0,00 | 1,000 |

измерительной цепи позволяет судить в известной степени о распределении сопротивления пород вглубь. Эта процедура называется *электрондированием*, и основой теории этого метода является изучение поля точечного электрода при наличии горизонтально расположенных параллельных напластований пород с различным удельным сопротивлением. Интерпретация данных электрондирования производится на основании теоретического расчета возможно большего числа типичных случаев; для случая одной резкой границы (двух слоев) эту задачу можно считать решенной не только теоретически, но и практически, в том смысле, что совокупность всех теоретических данных может быть представлена в виде удобной палетки, позволяющей путем простых манипуляций получить, на основании должного числа промеров, окончательный ответ о глубине залегания границы и величине электропроводностей

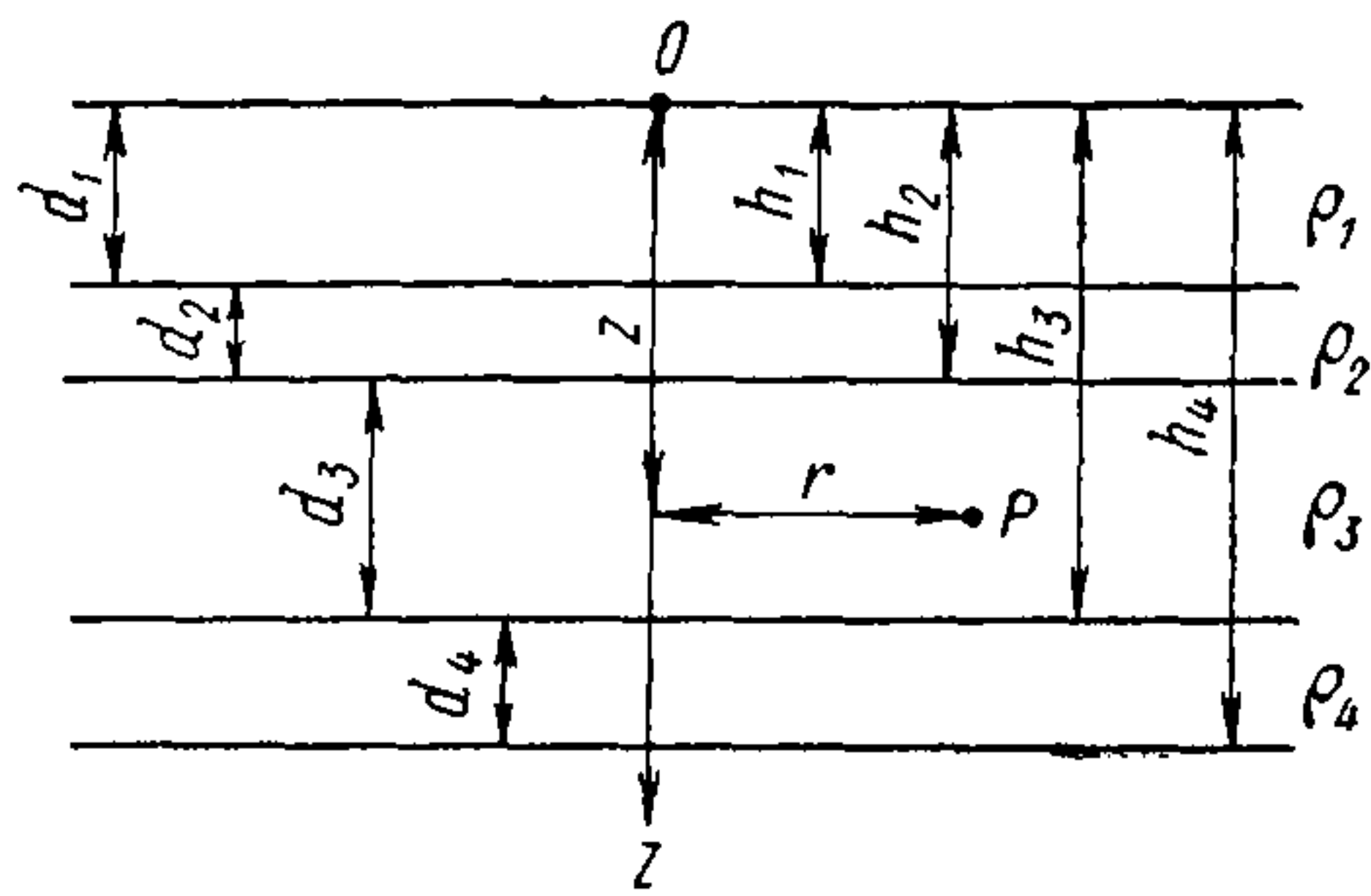


Рис. 66.

верхнего и нижнего слоя. Основная формула для этого случая может быть получена применением того же метода многократных изображений; для большего числа слоев и границ между ними метод изображений также применим, но вывод формул становится довольно запутанным.

Мы воспользуемся здесь другим методом, дающим общее решение для любого

числа слоев [123]. Правда, как мы увидим, окончательный результат представится в виде некоторого определенного интеграла, еще мало дающего для практических вычислений, но из него могут быть уже довольно просто получены все те формулы, которые выводятся методом изображений, и, кроме того, задача оказывается сведенной к чисто математической, а именно к вычислению определенного интеграла, для которого, при различных частных предположениях, вероятно, можно будет найти достаточно приближенные и вместе с тем достаточно простые методы вычисления.

Задачу нашу мы формулируем так: верхнее полупространство является изолятором (воздух). Нижнее полупространство состоит из ряда плоскопараллельных горизонтальных слоев 1, 2, ... с удельным сопротивлением ρ_1, ρ_2, \dots и мощностями по вертикали d_1, d_2, \dots , так что поверхности раздела находятся на глубинах $h_1 = d_1, h_2 = d_1 + d_2, h_3 = d_1 + d_2 + d_3$, и т. д. (рис. 66). Введем систему координат с началом в точке O , расположенной на границе воздух — земля; ось Z направим вниз по вертикали, и положение точек пространства будем определять координатами z и r , где r — расстояние от оси Z в горизонтальной плоскости. В начале координат поместим точечный источник и будем искать решение для потенциала, удовлетворяющее во всем нижнем полупространстве уравнению Лапласа

и граничным условиям, обращающиеся около начала координат с точностью до постоянного множителя в бесконечность, как $1/R$, где R — расстояние от точки O

$$R = \sqrt{r^2 + z^2},$$

а в бесконечности обращающиеся в нуль как $1/R$. Граничные условия заключаются в требованиях, чтобы при $z = 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

а при $z = h_s$

$$\lim_{\varepsilon=0} (\varphi)_{z=h_s-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon=0} (\varphi)_{z=h_s+\varepsilon};$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=h_s-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon=0} \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=h_s+\varepsilon}.$$

Будем искать частные решения уравнения Лапласа в цилиндрических координатах (z, r)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (295)$$

методом разделения переменных, т. е. полагая

$$\varphi = y = f(r) g(z), \quad (296)$$

так как искомое решение вследствие симметрии вокруг оси Z от азимута, очевидно, не должно зависеть.

Подставляя в (295) выражение (296) и разделив на y , имеем

$$\frac{1}{f} \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{df}{dr} \right) + \frac{1}{g} \cdot \frac{d^2 g}{dz^2} = 0.$$

Так как переменные разделились, то полагаем

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{d^2 g}{dz^2} = \lambda^2; \quad (297)$$

$$\frac{1}{f} \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{df}{dr} \right) = -\lambda^2. \quad (298)$$

Общее решение уравнения (297)

$$g = \alpha e^{\lambda z} + \beta e^{-\lambda z}, \quad (299)$$

а второе

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{df}{dr} + \lambda^2 f = 0,$$

которое введением новой переменной $x = \lambda r$ приводим к виду

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{df}{dx} + f = 0, \quad (300)$$

т. е. к уравнению, определяющему цилиндрические функции нулевого порядка. Общее решение этого уравнения есть

$$f = \gamma J_0(x) + \delta Y_0(x), * \quad (301)$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода, обращающаяся при $x = 0$ в единицу, а Y_0 — функция второго рода, имеющая при $x = 0$ логарифмическую особенность.

Так как искомое решение должно быть конечным при $r = 0$, второй член (301) нужно отбросить, и мы будем строить нашу задачу из частных решений вида

$$y = J_0(\lambda r) (\alpha e^{\lambda z} + \beta e^{-\lambda z}), \quad (302)$$

причем неопределенный множитель γ мы можем соединить с α и β . Для каждого частного случая α , β и λ — постоянные, не зависящие от r и z . Так как сумма частных решений однородного линейного уравнения есть опять решение, то мы возьмем как более общее

$$\varphi = \sum y = \int_0^\infty J_0(\lambda r) [\alpha(\lambda) e^{\lambda z} + \beta(\lambda) e^{-\lambda z}] d\lambda, \quad (303)$$

где $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ — неизвестные функции от λ .

Предполагая, что они таковы, что интеграл (303) и его первые и вторые производные по r и z , взятые под знаком интеграла, сходятся, можно убедиться, что функция φ , определяемая уравнением (303), действительно удовлетворяет уравнению (295). В первом слое мы предположим решение в виде

$$\varphi_1 = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[\frac{1}{R} + \int_0^\infty J_0(\lambda r) (\alpha_1 e^{\lambda z} + \beta_1 e^{-\lambda z}) d\lambda \right], \quad (304)$$

а в следующих слоях

$$\varphi_k = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda r) (\alpha_k e^{\lambda z} + \beta_k e^{-\lambda z}) d\lambda, \quad (305)$$

за исключением последнего, простирающегося в бесконечность; чтобы решение φ_n при $z = \infty$ обращалось в нуль, достаточно предположить, что $\alpha_n = 0$, т. е. написать

$$\varphi_n = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda r) \beta_n e^{-\lambda z} d\lambda. \quad (306)$$

Множитель $I\rho_1/2\pi$ выбран так, чтобы первый член (304), выражающий поле источника, имел бы сразу надлежащее значение. В остальных выражениях он несуществен, так как функции α и β еще не определены, но для дальнейшего удобно его выписать явно.

* Обозначения из теории бесселевых функций всюду взяты согласно монографии Г. Н. Ватсона [18].

Неизвестные функции α и β мы должны для каждого слоя подобрать так, чтобы выполнялись граничные условия. Для $z = 0$ мы имеем одно условие:

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R} + \int_0^\infty J_0(\lambda r) (\alpha_1 e^{\lambda z} - \beta_1 e^{-\lambda z}) \lambda d\lambda \right] = 0.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R} = -\frac{z}{R^3}$$

равно нулю при $z = 0$, то остается потребовать, чтобы при всех значениях r имело место

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r) (\alpha_1 - \beta_1) \lambda d\lambda = 0.$$

Этому условию удовлетворяем, положив

$$\alpha_1 = \beta_1. \quad (307)$$

Таким образом, при наличии n слоев и $n - 1$ границ между ними, мы имеем $2(n - 1)$ условий, которым нужно удовлетворить выбором $2(n - 1)$ функции $\alpha_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}, \beta_n$. Для того чтобы выписать уравнения, мы представим величину $1/R$ в виде подобного же интеграла, известного из теории функций Бесселя:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{1}{R} = \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-\lambda z} d\lambda, \quad z > 0. \quad (308)$$

Выпишем подробно условия непрерывности потенциала при $z = h_1$

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{I\rho_1} \varphi_1 &= \int_0^\infty J_0(\lambda r) [e^{-\lambda h_1} + \alpha_1 (e^{\lambda h_1} + e^{-\lambda h_1})] d\lambda = \\ &= \int_0^\infty J_0(\lambda r) [\alpha_2 e^{\lambda h_1} + \beta_2 e^{-\lambda h_1}] d\lambda = \frac{2\pi}{I\rho_1} \varphi_2. \end{aligned}$$

Приравняв разность интегралов к нулю

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r) [e^{-\lambda h_1} + \alpha_1 (e^{\lambda h_1} + e^{-\lambda h_1}) - \alpha_2 e^{\lambda h_1} - \beta_2 e^{-\lambda h_1}] d\lambda = 0$$

и зная, что это равенство должно иметь место при любых значениях r , мы получаем уравнение

$$\alpha_1 (e^{\lambda h_1} + e^{-\lambda h_1}) - \alpha_2 e^{\lambda h_1} - \beta_2 e^{-\lambda h_1} = -e^{-\lambda h_1}. \quad (309)$$

Совершенно аналогичными рассуждениями получаем следующие уравнения:

$$\alpha_2 e^{\lambda h_2} + \beta_2 e^{\lambda h_2} - \alpha_3 e^{\lambda h_2} - \beta_3 e^{-\lambda h_2} = 0 \quad (309a)$$

и т. д.; для последней границы имеем

$$\alpha_{n-1} e^{\lambda h_{n-1}} + \beta_{n-1} e^{-\lambda h_{n-1}} - \beta_n e^{-\lambda h_{n-1}} = 0. \quad (309, n-1)$$

Дифференцируя выражения для потенциала по z^* , умножая на соответствующее значение $1/\rho$ и приравнивая вертикальные составляющие плотности тока по обе стороны каждой границы, получаем еще $(n-1)$ уравнений

$$\frac{\alpha_1}{\rho_1} e^{\lambda h_1} - \frac{\beta_1}{\rho_1} e^{-\lambda h_1} - \frac{\alpha_2}{\rho_2} e^{\lambda h_1} + \frac{\beta_2}{\rho_2} e^{-\lambda h_1} = \frac{1}{\rho_1} e^{\lambda h_1}; \quad (310)$$

$$\frac{\alpha_2}{\rho_2} e^{\lambda h_2} - \frac{\beta_2}{\rho_2} e^{-\lambda h_2} - \frac{\alpha_3}{\rho_3} e^{\lambda h_2} + \frac{\beta_3}{\rho_3} e^{-\lambda h_2} = 0; \quad (310a)$$

$$\dots \dots \dots \frac{\alpha_{n-1}}{\rho_{n-1}} e^{\lambda h_{n-1}} - \frac{\beta_{n-1}}{\rho_{n-1}} e^{-\lambda h_{n-1}} + \frac{\beta_n}{\rho_n} e^{-\lambda h_{n-1}} = 0, \quad (310, n-1)$$

из которых простым алгебраическим способом определим неизвестные функции, так как получилась система $2(n-1)$ линейных неоднородных уравнений.

Предположим, что мы имеем четыре слоя и три границы; число уравнений системы (309) и (310) будет восемь, и после элементарных выкладок получается решение, из которого мы выписываем только α_1 , так как нас интересует распределение потенциала при $z=0$. В процессе алгебраического решения следует выразить отношения ρ_{s+1}/ρ_s через $k_{s,s+1}$ по известной уже нам формуле. Окончательные выражения для α_1 и для потенциала φ_1 при $z=0$ даны в (311) и (312).

$$\alpha_1 = \frac{k_{12} e^{-2\lambda d_1} + k_{23} e^{-2\lambda (d_1+d_2)} + k_{34} e^{-2\lambda (d_1+d_2+d_3)} + k_{12} k_{23} k_{34} e^{-2\lambda (d_1+d_3)}}{1 - k_{12} e^{-2\lambda d_1} - k_{23} e^{-2\lambda (d_1+d_2)} - k_{34} e^{-2\lambda (d_1+d_2+d_3)} + k_{23} k_{34} e^{-2\lambda d_3} + k_{34} k_{12} e^{-2\lambda (d_2+d_3)} + k_{12} k_{23} e^{-2\lambda d_2} - k_{12} k_{23} k_{34} e^{-2\lambda (d_1+d_3)}}; \quad (311)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda r) (1 + 2\alpha_1) d\lambda = \\ &= \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^\infty J_0(\lambda r) \frac{1 + k_{12} e^{-2\lambda d_1} + k_{23} e^{-2\lambda (d_1+d_2)} + k_{34} e^{-2\lambda (d_1+d_2+d_3)} + k_{23} k_{34} e^{-2\lambda d_3} + k_{34} k_{12} e^{-2\lambda (d_2+d_3)} + k_{12} k_{23} e^{-2\lambda d_2} + k_{12} k_{23} k_{34} e^{-2\lambda (d_1+d_3)}}{1 - k_{12} e^{-2\lambda d_1} - k_{23} e^{-2\lambda (d_1+d_2)} - k_{34} e^{-2\lambda (d_1+d_2+d_3)} + k_{23} k_{34} e^{-2\lambda d_3} + k_{34} k_{12} e^{-2\lambda (d_2+d_3)} + k_{12} k_{23} e^{-2\lambda d_2} - k_{12} k_{23} k_{34} e^{-2\lambda (d_1+d_3)}} d\lambda. \end{aligned} \quad (312)$$

* Заметим, что в выражении (308) можно дифференцировать по z под знаком интеграла при $z \neq 0$. При $z=0$ интеграл, полученный дифференцированием, расходится, поэтому мы должны были, исследуя выше границу $z=0$, воспользоваться явным выражением для $\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{R}$.

Для случая меньшего числа слоев нужно только положить равными нулю должное число величин $k_{s,s+1}$, что физически означает, что мы считаем слои s и $(s+1)$ одинаковыми по удельному сопротивлению. Легко убедиться, что при этом в показателях останутся только суммы толщин слоев, объединяемых таким образом в один слой.

Если величины d_1, d_2, \dots соизмеримы, т. е. могут быть представлены в виде

$$d_s = m_s d_0,$$

где m_s — целые числа, то в дроби, стоящей под знаком интеграла, числитель и знаменатель будут целыми полиномами от величины

$$t = e^{-2\lambda d_0}. \quad (313)$$

Разделив числитель на знаменатель, мы получим разложение дроби по степеням величины t в бесконечный ряд, и можем вычислить коэффициенты при любой степени t . Интегрируя затем почленно этот ряд, получим разложение для φ_1 .

Так как

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r) t^m d\lambda = \int_0^\infty J_0(\lambda r) e^{-2\lambda m d_0} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (2m d_0)^2}}, \quad (314)$$

то мы получим ряд, каждый член которого можно считать за потенциал фиктивного заряда, находящегося на оси Z на глубине $m d_0$, причем заряды будут находиться не на всех кратных глубины d_0 , а с некоторыми пропусками. Палетка для двух слоев, о которой мы будем говорить подробно в дальнейшем, дает возможность приближенного разбора случая нескольких слоев, особенно если мощность их значительно возрастает с глубиной; в особо важных случаях может, однако, представиться необходимость проверить полученную таким образом интерпретацию прямым расчетом. Только что указанный способ приводит к написанию ряда, по которому придется вычислять разность потенциалов на измерительных электродах.

Если расстояния d_1, d_2, \dots несоизмеримы, то разложение в ряд выражения (312) (или еще более сложного для большего числа слоев) приводит к многократным рядам; в статьях И. Г. Гуммеля [116] эти ряды выписаны для случая трех слоев; он получает их методом изображений. В статье Д. О. Эренбурга и Р. И. Ватсона [114] дан весьма сложный, но элементарный способ численного нахождения коэффициентов ряда, составленного из выражений типа (314), которые мы можем получить одной операцией — делением двух полиномов.

§ 24. ДВА ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ СЛОЯ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РЯДОВ

Как было уже указано, случай двух слоев, математически наиболее простой, может быть доведен до конца в общем виде, причем так, что теоретические результаты с легкостью могут быть использованы

на практике. Поэтому и мы здесь рассмотрим его подробно. Предоставляя читателям получить формулу (316) методом изображений, выведем основную формулу из выражения (312), положив $k_{34} = k_{23} = 0$; $k_{12} = k$; $d_1 = h_1 = h$. Мы имеем для поверхности земли ($z = 0$)

$$\varphi = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) \frac{1+ke^{-2\lambda h}}{1-ke^{-2\lambda h}} d\lambda. \quad (315)$$

Разлагая дробь в ряд

$$\frac{1+ke^{-2\lambda h}}{1-ke^{-2\lambda h}} = 1 + 2 \sum_1^{\infty} k^n e^{-2n\lambda h},$$

имеем по формуле (314)

$$\varphi = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[\frac{1}{r} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{\sqrt{r^2 + (2nh)^2}} \right]. \quad (316)$$

Дифференцируя по r , получаем выражение для градиента

$$E = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n r}{[r^2 + (2nh)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\}. \quad (317)$$

Заметим, что практическое вычисление по этим формулам удобно для не слишком больших r и для значений k не очень близких к единице. В противном случае ряды (316) и (317) сходятся очень медленно и делаются негодными для вычислений. Для случая $k = 1$ ряд (316) расходится, ряд (317) остается сходящимся. Задача заключается в преобразовании этих рядов к такому виду, чтобы вычисления стали возможными.

Это преобразование мы начнем с преобразования выражения (315), для чего воспользуемся теорией функций Бесселя и теоремами теории функций комплексного переменного, касающихся интегралов в комплексной области. Как было упомянуто выше, общее решение уравнения Бесселя (300) складывается из двух линейно независимых фундаментальных решений $J_0(x)$ и $Y_0(x)$. Для многих приложений удобны другие системы фундаментальных решений, из которых наиболее употребительны функции Ганкеля, определяемые через прежние функции уравнениями

$$J_0(x) = \frac{1}{2} [H_0^{(2)}(x) + H_0^{(1)}(x)]; \quad (318)$$

$$Y_0(x) = \frac{i}{2} [H_0^{(2)}(x) - H_0^{(1)}(x)]. \quad (319)$$

Функции $H_0^{(1)}$ и $H_0^{(2)}$ обладают тем свойством, что первая из них обращается в нуль, когда аргумент ее по модулю делается бесконечно большим, а мнимая часть его — остается положительной, т. е. для бесконечно удаленных точек полуплоскости комплексного аргумента,

лежащей в сторону положительной мнимой оси, вторая — ведет себя точно так же в другой полуплоскости, при отрицательной мнимой части. Аналогичны терминология, обозначения и свойства функций $J_n(x)$, $Y_n(x)$, $H_n^{(1)}(x)$, $H_n^{(2)}(x)$, удовлетворяющих уравнению цилиндрических функций n -го порядка

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{df}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) f = 0. \quad (320)$$

Функции первого порядка нужны часто, благодаря тому, что существует соотношение

$$f_1 = -\frac{df_0}{dx}, \quad (321)$$

где f_0 , f_1 означает соответственно любую из функций, обозначаемых буквами J , Y , $H^{(1)}$, $H^{(2)}$.

Написав выражение (315) на основании (318) в виде

$$\varphi = \frac{I\rho_1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{2} [H_0^{(2)}(\lambda r) + H_0^{(1)}(\lambda r)] \frac{1+ke^{-2\lambda h}}{1-ke^{-2\lambda h}} d\lambda,$$

мы преобразуем его к новому виду, пользуясь следующей теоремой. Если в области комплексной переменной z берется интеграл по замкнутому контуру, причем подынтегральная функция внутри этого контура повсюду аналитическая или регулярная, то интеграл равен нулю. Поэтому интеграл, взятый в такой области между точками $z = z_1$ и $z = z_2$ может быть взят по любому контуру, имеющему те же конечные точки:

Множитель

$$q(\lambda) = \frac{1+ke^{-2\lambda h}}{1-ke^{-2\lambda h}} \quad (322)$$

имеет полюсы в точках, где знаменатель обращается в нуль, эти корни знаменателя легко найти

$$e^{-2\lambda h} = \frac{1}{k} = \frac{1}{k} e^{-2s\pi i}, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Логарифмируя, легко получаем

$$\lambda_s = \frac{1}{2h} (\ln k + 2s\pi i). \quad (323)$$

Мы положим

$$\ln |k| = -v \quad (324)$$

или, для случая $k > 0$, $\ln k = -v$; $k = e^{-v}$, где v — положительное число, так как $|k| < 1$; если $k < 0$, то

$$\ln k = \ln(|k| e^{+i\pi(2m+1)}) = \ln |k| + (2m+1)\pi i = -v + (2m+1)\pi i;$$

в обоих случаях мы имеем бесконечное множество корней

$$\lambda_s = \frac{1}{2h} (-v + 2s\pi i), \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$\lambda_p = \frac{1}{2h} [-v + 2(p+1)\pi i], \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

лежащие в плоскости комплексной переменной λ влево от мнимой оси, в сторону отрицательной вещественной части. Что же касается функции Ганкеля, то $H_0^{(1)}$ регулярно во всей положительно-мнимой полуплоскости, а $H_0^{(2)}$ — в отрицательно-мнимой. Рассматривая интеграл

$$Q^{(2)} = \int_0^{\infty} H_0^{(2)}(\lambda r) q(\lambda) d\lambda,$$

взятый по положительной вещественной оси, мы его можем заменить интегралом, взятым по отрицательно-мнимой оси и по кругу бесконечно большого радиуса в пределах от $-i\infty$ до $+\infty$ (рис. 67). Последний

интеграл при ближайшем исследовании оказывается равным нулю*, и мы имеем

$$Q^{(2)} = \int_0^{-i\infty} H_0^{(2)}(\lambda r) q(\lambda) d\lambda.$$

Полагая здесь $\lambda = -it$, после преобразования переменных получим

$$Q^{(2)} = -i \int_0^{\infty} H_0^{(2)}(-itr) q(-it) dt. \quad (325)$$

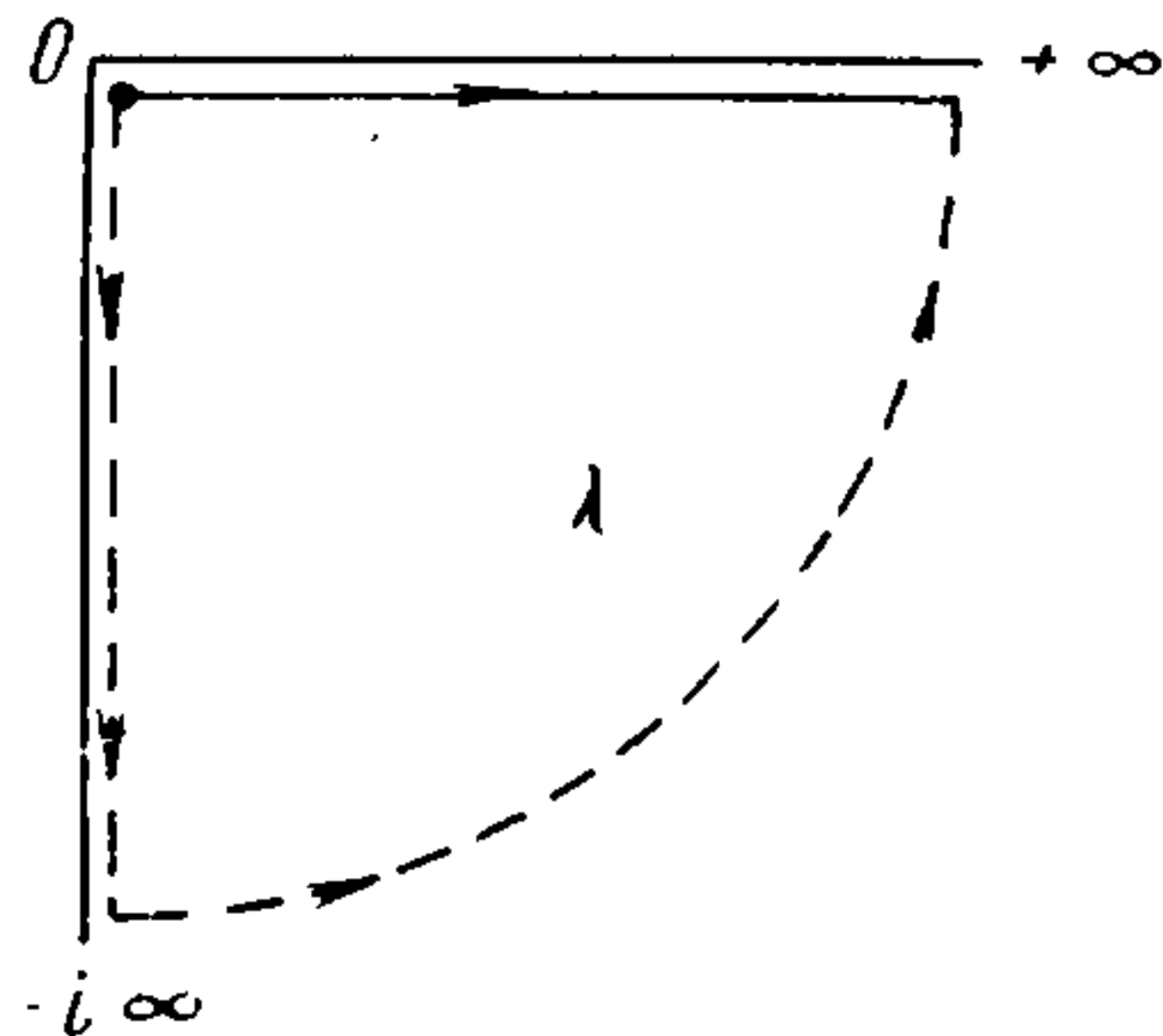


Рис. 67.

Поступая совершенно аналогично с интегралом

$$Q^{(1)} = \int_0^{\infty} H_0^{(1)}(\lambda r) q(\lambda) d\lambda,$$

но поворачивая путь интегрирования в положительную мнимую ось, получаем

$$Q^{(1)} = \int_0^{i\infty} H_0^{(1)}(\lambda r) q(\lambda) d\lambda,$$

так как интеграл по четверти бесконечно удаленной окружности от $+i\infty$ до $+\infty$ в силу свойств $H_0^{(1)}$ ** также исчезает. Вводя

* Для этого нужно воспользоваться асимптотическим выражением $H_0^{(2)}(x)$ для больших $|x|$

$$H_0^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

** При больших $|x|$ мы имеем

$$H_0^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

здесь замену переменной $\lambda = it$, получаем

$$Q^{(1)} = i \int_0^{\infty} H_0^{(1)}(itr) q(it) dt. \quad (326)$$

Между функциями $H_n^{(1)}(x)$ и $H_n^{(2)}(x)$ существует соотношение

$$H_n^{(2)}(x^*) = [H_n^{(1)}(x)]^*, \quad (327)$$

где * означает комплексную сопряженную величину.

В нашем случае отсюда следует:

$$H_0^{(2)}(-itr) = [H_0^{(1)}(itr)]^*. \quad (328)$$

Функция

$$K_0(x) = \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(ix) \quad (329)$$

весьма удобна в приложениях и хорошо представлена в различных таблицах; она вещественна для вещественных x , убывает очень быстро с возрастанием x , при $x \rightarrow \infty$ имеет асимптотическое разложение

$$K_0(x) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left(1 - \frac{1}{8x} + \frac{9}{8 \cdot 16x^2} - \dots\right), \quad (330)$$

а при $x \rightarrow 0$ имеет логарифмическую особенность

$$K_0(x) = -I_0(x) (\ln x - 1,115931515658) - 1 + [\beta_4(s_2 - 1) + \beta_6(s_3 - 1) + \dots], \quad (331)$$

где

$$s_k - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{k};$$

$$\beta_{2k} = \frac{x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2};$$

$$I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} = J_0(ix).$$

Так как $J_0(x)$ и $H_0^{(1)}(x)$ удовлетворяют уравнению Бесселя (300), то, как легко проверить, $I_0(x)$ и $K_0(x)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{df}{dx} - f = 0 \quad (332)$$

и являются его фундаментальными решениями, причем K_0 имеет, как было указано, особенность при $x = 0$, а $I_0(x)$ при $x = 0$ обращается в единицу и ведет себя регулярно, зато при $x \rightarrow \infty$ растет беспредельно

$$I_0(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}. \quad (333)$$

Сопоставляя (328) и (329), имеем

$$iH_0^{(1)}(itr) = \frac{2}{\pi} K_0(tr);$$

$$-iH_0^{(2)}(-itr) = [iH_0^{(1)}(itr)]^* = \frac{2}{\pi} K_0(tr),$$

и, наконец,

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r) q(\lambda) d\lambda = \frac{Q^{(1)} + Q^{(2)}}{2} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_0(tr) \frac{q(it) + q(-it)}{2} dt, \quad (334)$$

где стоящая под знаком интеграла полусумма есть вещественная часть от $q(it)$, или, как мы будем иногда писать для краткости,

$$\frac{q(it) + q(-it)}{2} = \operatorname{Re} q(it).$$

Применяя преобразование (334)* к нашему случаю, мы для $q(\lambda)$, данного формулой (332), вычисляем вещественную часть; при $k > 0$, вводя величину v (323), мы имеем

$$\operatorname{Re} \frac{1 + |k| e^{-2ith}}{1 - |k| e^{-2ith}} = \operatorname{Re} \frac{1 + e^{-(v+2ith)}}{1 - e^{-(v+2ith)}} = \frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch} v - \cos 2th},$$

а для случая $k < 0$

$$\operatorname{Re} \frac{1 - |k| e^{-2ith}}{1 + |k| e^{-2ith}} = \frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch} v + \cos 2th}.$$

Рассмотрим сначала первый случай ($k > 0$), представляющий вследствие знаков постоянства членов рядов (316) и (317) наибольшие затруднения при вычислении. Мы привели выражение для потенциала к виду

$$\frac{2\pi}{I\rho_1} \varphi = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_0(tr) \frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch} v - \cos 2th} dt,$$

которое удобнее представить немного иначе, введя $x = r/2h$; $u = 2th$,

$$\frac{2\pi}{I\rho_1} \varphi = \frac{1}{\pi h} \int_0^\infty K_0(ux) \frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch} v - \cos u} du. \quad (335)$$

Определив корни знаменателя, мы сможем разложить стоящую под интегралом дробь на простейшие, воспользовавшись для этого теорией интегральных вычетов.

Чтобы не слишком удлинять изложение, дадим сразу результат

$$\frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch} v - \cos u} = 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_m}{v_m^2 + u^2}, \quad (336)$$

где $v_m = v + 2m\pi i$.

* Преобразование (334) было применено В. А. Фоком при решении ряда задач по теории электроразведки.

В получающемся выражении для потенциала

$$\frac{2\pi h}{I\rho_1} \varphi = \frac{2}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} v_m \int_0^\infty \frac{K_0(ux) du}{v_m^2 + u^2} \quad (337)$$

мы можем интегрировать почленно, воспользовавшись формулой,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_0(ux)}{v_m^2 + u^2} = \frac{\pi}{2v_m} [H_0(v_mx) - Y_0(v_mx)], \quad (338)$$

где $Y_0(x)$ упомянутая выше функция Бесселя второго рода нулевого порядка, а $H_0(x)$ есть частное решение уравнения

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{df}{dx} - f = \frac{2}{\pi x},$$

называемое также функцией Струве. Член с $m=0$ будет равен

$$\frac{\pi}{2} [H_0(vx) - Y_0(vx)]$$

и может быть вычислен при помощи таблиц, имеющих в цитированной книге Г. Ватсона [18]; таким образом,

$$\frac{2\pi h}{I\rho_1} \varphi = \frac{\pi}{2} [H_0(vx) - Y_0(vx)] + \frac{\pi}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} [H_0(v_mx) - Y_0(v_mx)]. \quad (339)$$

Члены с $+m$ и $-m$, соединенные попарно (они сопряжены друг другу), могут быть разложены по степеням vx , и при малых v ($|k|$ близко к единице) дают достаточно быстро сходящиеся ряды.

Аналогичные рассуждения и выкладки приводят в случае $k < 0$ к следующим преобразованиям:

$$\frac{2\pi h}{I\rho_1} \varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty K_0(ux) \frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch} v + \cos u} du = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_0(ux) \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_n}{v_n^2 + u^2} du, \quad (340)$$

где

$$v_n = v + (2n + 1)\pi, \quad (341)$$

и к ряду

$$\frac{2\pi h}{I\rho_1} \varphi = \frac{\pi}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} [H_0(v_n x) - Y_0(v_n x)], \quad (342)$$

где все члены будут попарно комплексно сопряженными, имея аргументами

$$v_n = v + (2n + 1)\pi i;$$

$$v_{-(n+1)} = v - (2n + 1)\pi i.$$

Соединяя их попарно и разлагая в ряд Тейлора по степеням vx , получаем снова удобные для вычислений разложения, о которых будет сказано в следующем параграфе.

Займемся еще вопросом о выводе выражения для φ в случае очень больших r . Предельное значение при $r \rightarrow \infty$ можно получить из ряда (316); действительно, если мы предположим r настолько большим, что для $n \leq N$ можно положить

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + (2nh)^2}} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{n}{x}\right)^2}} \sim \frac{1}{r}, \quad (343)$$

а с другой стороны, N настолько велико, что остаточный член ряда

$$\sum_1^{\infty} k^n = \sum_1^N k^n + R_N$$

очень мал, то легко видеть, что остаточный член R_N^* ряда

$$\sum_1^{\infty} \frac{k^n}{\sqrt{r^2 + (2nh)^2}} = \sum_1^N \frac{k^n}{\sqrt{r^2 + (2nh)^2}} + R_N^*$$

будет еще меньше, а для суммы первых N членов ряда (316) в предположении (343) мы можем написать приближенное значение

$$\sum_1^N k^n \approx \sum_1^{\infty} k^n = \frac{k}{1-k}.$$

Это приближение будет тем лучше, чем больше r , а стало быть и N . Тогда ряд (316) получает предельное значение

$$\varphi = \frac{I\rho_1}{2\pi r} \left(1 + 2 \frac{k}{1-k}\right) = \frac{I\rho_2}{2\pi r} \cdot \frac{1+k}{1-k} = \frac{I\rho_2}{2\pi r}, \quad (344)$$

т. е. потенциал в пределе $r \rightarrow \infty$ получает то значение, которое он имел бы при наличии однородной среды с удельным сопротивлением нижнего слоя. Этот результат интересен сам по себе, так как показывает, что при размерах установки больших по сравнению с мощностью верхнего слоя, например наносов, влияние последних исчезает, на что мы без доказательства вскользь указывали уже раньше. Для исследования поведения φ при больших r и $k > 0$ мы обратимся снова к сумме (336) и представим ее в виде

$$2 \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_m}{v_m^2 + u^2} = \frac{2v}{v^2 + u^2} + 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_m}{v_m^2 + u^2}, \quad (345)$$

где штрих у суммы в правой части означает, что член с $m = 0$ исключен.

Соответственно этому разделению членов напишем и

$$\frac{2\pi h}{I\rho_1} \varphi = \frac{\pi}{2} [H_0(vx) - Y_0(vx)] + \frac{2}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\infty} K_0(ux) \frac{v_m}{v_m^2 + u^2} du. \quad (346)$$

В оставшихся интегралах разлагаем дробь, стоящую под интегралом по степеням u ,

$$\frac{v_m}{v_m^2 \left[1 + \left(\frac{u}{v_m}\right)^2\right]} = \sum_0^{\infty} (-1)^s \frac{u^{2s}}{v_m^{2s+1}}, \quad (347)$$

что верно только в случае, если $|u| < |v_m|$. Однако, в виду быстрого убывания функции K_0 с возрастанием аргумента, значение второго множителя подынтегральной функции в (346) существенно только для малых u , так как при большом x и не слишком малом u аргумент ux будет уже достаточно велик.

Наибольшее значение u , при котором формула (347) применима ко всем членам суммы,

$$u = |v_1| = \sqrt{4\pi^2 + v^2} > 2\pi.$$

При этом u аргумент функции K_0 будет

$$ux > 2\pi x > 6x.$$

При $x = 2$, $ux = 12$, вполне можно применить асимптотическое разложение K_0 (330) и оценить погрешности, проистекающие от сделанных допущений.

Для значения x порядка немногих единиц и не слишком больших v мы с хорошим приближением можем принять

$$\int_0^{\infty} K_0(ux) \frac{v_m}{v_m^2 + u^2} du = \sum_0^{\infty} (-1)^s \frac{1}{v_m^{2s+1}} \int_0^{\infty} K_0(ux) u^{2s} du,$$

где интегралы, стоящие справа, могут быть вычислены по формуле

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(ux) u^{2s} du = \frac{2}{\pi x^{2s+1}} \int_0^{\infty} K_0(\xi) \xi^{2s} d\xi = \frac{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2s-1)]^2}{x^{2s+1}}. \quad (348)$$

Составляем теперь сумму, стоящую в (346),

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(ux) \frac{v_m}{v_m^2 + u^2} du = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_0^{\infty} (-1)^s \frac{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2s-1)]^2}{x^{2s+1}} \cdot \frac{1}{v_m^{2s+1}}.$$

Переставляя порядок суммирования, получаем ряд*, идущий по обратным степеням x ,

$$\sum_0^{\infty} (-1)^s \frac{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2s-1)]^2}{x^{2s+1}} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{v_m^{2s+1}} = \sum_0^{\infty} (-1)^s \frac{[1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2s-1)]^2}{x^{2s+1}} P_{2s+1}. \quad (349)$$

* Этот ряд расходится, но конечное число первых его членов дает тем лучшее приближение, чем больше x ; подобные разложения называются асимптотическими.

независимо от того, будет ли k положительно или отрицательно; при вычислении дальнейших коэффициентов мы можем написать

$$\frac{d}{d\left(\frac{v}{2}\right)} = 2 \frac{d}{dk} \cdot \frac{dk}{dv} = \mp 2k \frac{d}{dk},$$

где верхний знак относится к случаю $k > 0$, а нижний — к случаю $k < 0$. Так как \bar{P}_1 и Q_1 через k выражаются одинаково, то и выражения коэффициентов \bar{P}_{2s+1} и Q_{2s+1} через k будут формально одинаковы вплоть до знака.

§ 25. ПАЛЕТКА ДЛЯ ЭЛЕКТРОЗОНДИРОВАНИЯ

Представим выражение для потенциала на поверхности земли в виде

$$\varphi = \frac{I\rho_1}{2\pi r} S_0(k, x). \quad (353)$$

Для S_0 мы имеем из предыдущего параграфа три представления.

$$1. S_0 = 1 + 2 \sum_1^{\infty} \frac{k^n r}{\sqrt{r^2 + (2nh)^2}} = 1 + 2 \sum_1^{\infty} \frac{k^n x}{\sqrt{x^2 + n^2}}, \quad (354)$$

удобное для вычисления при малых x для всех k , а при $|k|$, близком к единице, и сколько-нибудь больших x , плохо сходящееся.

$$2. S_0 = \left. \begin{aligned} & \frac{\pi}{v} \Phi(vx) + N_0(w) + vR_1(w) - v^2N_2(w) - \\ & - v^3R_3(w) + \dots (k > 0); \\ & \bar{N}_0(w) + v\bar{R}_1(w) - v^2\bar{N}_2(w) - v^3\bar{R}_3(w) + \dots (k < 0), \end{aligned} \right\} \quad (355)$$

получаемые из (329) и (332), где

$$\left. \begin{aligned} & \Phi = vx [H_0(vx) - Y_0(vx)]; \\ & w = 2\pi x; \quad v = -\ln |k|; \end{aligned} \right\} \quad (356)$$

функции N , \bar{N} , R и \bar{R} с соответствующими значками являются коэффициентами при разложении по степеням v .

При практическом вычислении с помощью таблиц этих функций легко убедиться, что член с Φ является главным, а остальные — поправочные.

$$3. S_0 = \left. \begin{aligned} & \frac{\pi}{v} \Phi + p_0(v) + \frac{p_2(v)}{x^2} + \frac{p_4(v)}{x^4} + \dots (k > 0, 2); \\ & \bar{p}_0 + \frac{\bar{p}_2}{x^2} + \frac{\bar{p}_4}{x^4} + \dots (k < 0, 2), \end{aligned} \right\} \quad (357)$$

где коэффициенты p и \bar{p} получаются из P , Q и \bar{P} предыдущего параграфа и являются функциями от v или, через посредство v , от k .

Если мы имеем один электрод, то, измеряя разность потенциалов в точках r_1 и r_2 , расположенных на прямом профиле, проходящем через питающий электрод, мы будем иметь

$$V = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left[\frac{S_0(k, x_1)}{r_1} - \frac{S_0(k, x_2)}{r_2} \right]. \quad (358)$$

Если a — расстояние между потенциометрическими электродами, r — расстояние от питающего электрода до середины измерительной цепи, то вводя [аналогично формуле (181)] $\xi = \frac{2r}{a}$, имеем

$$r_1 = r - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} (\xi - 1);$$

$$r_2 = r + \frac{a}{2} = \frac{a}{2} (\xi + 1).$$

Выражая r_1 и r_2 через ξ и a , получаем

$$V = \frac{2I\rho_1}{\pi a (\xi^2 - 1)} \left[\frac{S_0(k, x_2) + S_0(k, x_1)}{2} - \xi \frac{S_0(k, x_2) - S_0(k, x_1)}{2} \right]. \quad (359)$$

Пусть $x = \frac{r}{2h}$, тогда

$$x_1 = \frac{r - \frac{a}{2}}{2h} = x - \frac{a}{4h};$$

$$x_2 = \frac{r + \frac{a}{2}}{2h} = x + \frac{a}{4h}.$$

Если $a \ll 4h$, то можно положить

$$S_0\left(k, x \pm \frac{a}{4h}\right) = S_0(k, x) \pm \frac{a}{4h} S'_0(k, x)$$

и, подставляя эти выражения в (359), получим после простых преобразований

$$\frac{V}{a} = \frac{2I\rho_1}{\pi a^2 (\xi^2 - 1)} [S_0(k, x) - xS'_0(k, x)] = \frac{2I\rho_1}{\pi a^2 (\xi^2 - 1)} S_1(k, x).$$

Так как

$$a^2 \xi^2 - a^2 = (2r)^2 - a^2 = (2r)^2 \left[1 - \left(\frac{a}{2r}\right)^2 \right],$$

то, если еще $a/2r$ достаточно мало, можно положить

$$\frac{V}{a} = E = \frac{I\rho_1}{2\pi r^2} S_1(k, x). \quad (360)$$

К этой формуле можно прийти сразу, если провести все рассуждения с выражением (317) для E . Формула (360) дает возможность вычислить, если функция $S_1(k, x)$ изучена, величину $\bar{\rho}$, получаемую

при методе одноэлектродного профилирования по градиентам. По (182) имеем

$$\bar{\rho} = \frac{E}{I} 2\pi r^2 = \rho_1 S_1(k, x). \quad (361)$$

Для $\bar{\rho}$, получаемого из градиента в средней точке двухэлектродного поля, получается та же самая формула (361), причем

$$x = \frac{L}{4h}.$$

Из (317) получается первоначальный ряд для S_1

$$S_1(k, x) = 1 + 2 \sum \frac{k^n x^3}{(x^2 + n^2)^2},$$

для вычисления были использованы представления ее в виде выражений, аналогичных (355) и (357).

В случае установки с двумя электродами мы должны удвоить в формуле (359) значение потенциала; выбрав определенное отношение разносов питающих и измерительных электродов $\frac{L}{a} = \beta$, мы имеем

$$x_1 = \frac{L-a}{4h} = \frac{L}{4h} \left(\frac{\beta-1}{\beta} \right) = x \left(\frac{\beta-1}{\beta} \right);$$

$$x_2 = \frac{L+a}{4h} = \frac{L}{4h} \left(\frac{\beta+1}{\beta} \right) = x \left(\frac{\beta+1}{\beta} \right),$$

причем вводим обозначение

$$\frac{L}{4h} = x.$$

С этими обозначениями получаем

$$V = \frac{4I\rho_1}{\pi a (\beta^2 - 1)} \left[\frac{S_0\left(k, x \frac{\beta+1}{\beta}\right) + S_0\left(k, x \frac{\beta-1}{\beta}\right)}{2} - \beta \frac{S_0\left(k, x \frac{\beta+1}{\beta}\right) - S_0\left(k, x \frac{\beta-1}{\beta}\right)}{2} \right], \quad (362)$$

или сокращенно

$$V = \frac{4I\rho_1}{\pi a (\beta^2 - 1)} T(k, \beta, x),$$

где

$$T(k, \beta, x) = \frac{S_0\left(k, x \frac{\beta+1}{\beta}\right) + S_0\left(k, x \frac{\beta-1}{\beta}\right)}{2} - \beta \frac{S_0\left(k, x \frac{\beta+1}{\beta}\right) - S_0\left(k, x \frac{\beta-1}{\beta}\right)}{2}. \quad (363)$$

Величина $\bar{\rho}$, определенная по формуле (189), получится равной

$$\bar{\rho} = \rho_1 T(k, \beta, x). \quad (364)$$

Прямая задача состоит в определении величин k и h из наблюдаемых $\bar{\rho}$; увеличивая расстояние r в случае одноэлектродного метода, или разнос питающих электродов L (сохраняя отношение β постоянным) в двухэлектродном методе, мы получаем для $\bar{\rho}$ при малых значениях x значения, близкие к ρ_1 , так как при $x = 0$ S_0 и S_1 стремятся к единице. Таким образом, начальные точки кривой электророндирования дают всегда возможность определить сопротивление верхнего слоя ρ_1 . Далее значения $\bar{\rho}$ характерным образом меняются, и, нанося экспериментальные значения $\bar{\rho}$ как функцию от r или L , мы получаем всю кривую электророндирования, которая, при достаточно больших значениях r и L , должна соответствовать постоянному значению

$$\bar{\rho} = \rho_2,$$

приближаясь к нему асимптотически. Однако эта асимптота может при большом h и $|k|$, близком к единице, получиться только на очень большом расстоянии, при котором могут подействовать искажающим образом изменения сопротивления в еще более глубоких слоях; поэтому нужно применить такой метод, который мог бы дать значения ρ_2 и h или k и h из некоторого конечного участка кривой в начале. Метод этот заключается в построении и применении логарифмической палетки. По формулам (361) и (363) мы можем написать

$$\left. \begin{aligned} \lg \bar{\rho} &= \lg \rho_1 + \lg S_1(k, \lg x), \\ \lg \bar{\rho} &= \lg \rho_1 + \lg T(k, \beta, \lg x), \end{aligned} \right\} \quad (365)$$

если изобразим $\lg S_1$ и $\lg T$ как функции $\lg x$. Предположим, что это сделано для достаточно большого числа значений величин k , так что имеется чертеж (палетка) с серией кривых

$$\lg S_1(k, x) = f(\lg x) = f(\lg r - \lg 2h) \quad (366)$$

и ряд таких же палеток, для разных употребительных значений β дающих

$$\lg T(k, \beta, x) = F_{\beta, k}(\lg x) = F_{\beta, k}(\lg L - \lg 4h), \quad (366a)$$

Полевые наблюдения дают возможность (с помощью логарифмической бумаги того же масштаба) получить экспериментальные кривые

$$\left. \begin{aligned} \lg \bar{\rho} &= f^*(\lg r), \\ \lg \bar{\rho} &= f^*(\lg L). \end{aligned} \right\} \quad (367)$$

Если теоретическая предпосылка о наличии двух слоев с резкой границей на некоторой глубине h соответствует действительности, то кривые (367), с одной стороны, и (366) и (366a), с другой — можно привести к совпадению, сдвинув кривые (366) и (366a) по оси абсцисс на величину $\lg 2h$ или $\lg 4h$ соответственно и по оси ординат на $\lg \rho_1$, сохраняя оси координат параллельными. По (365) $\lg \bar{\rho}$ есть

$\lg S_1$, увеличенное на $\lg \rho_1$, т. е. кривая $\lg \bar{\rho}$ сдвинута вверх по отношению к кривой $\lg S_1$ на $\lg \rho_1$, что и отсчитывается перемещением оси абсцисс палетки ($\lg S_1 = 0$) по оси ординат экспериментального чертежа вверх или вниз. Относя экспериментальные значения $\lg \rho$ к абсциссе

$$\lg r = \lg x + \lg 2h,$$

мы видим, что экспериментальная кривая должна быть смещена на $\lg 2h$ вправо (в сторону возрастающих x). Палетку придется

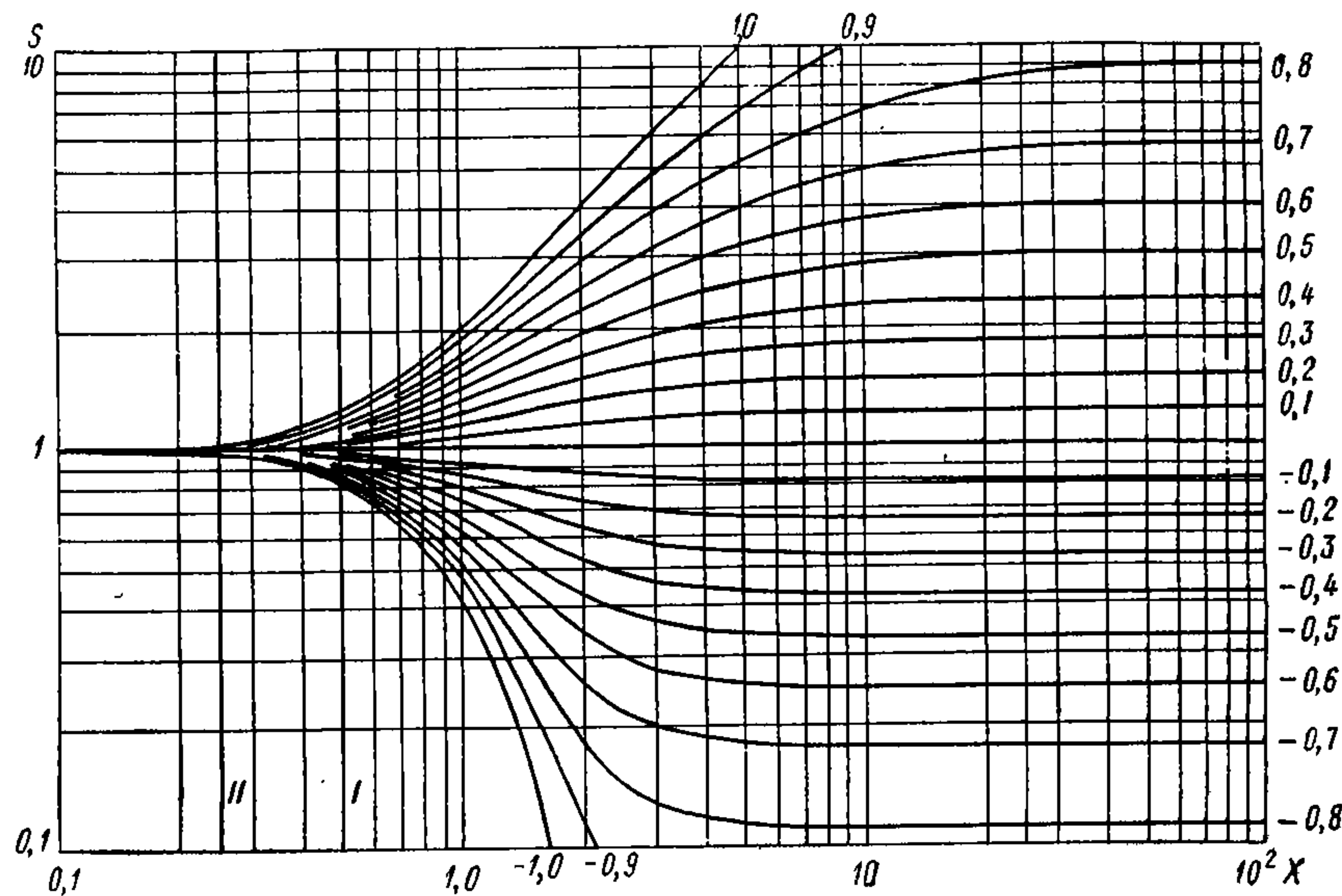


Рис. 68.

передвинуть вслед за ней вправо на $\lg 2h$, в силу чего абсцисса $x = -\lg 2$ палетки придется на абсциссу

$$\lg r = -\lg 2 + \lg 2h = \lg h.$$

Отметив на палетке абсциссу $x = -\lg 2$ чертой, параллельной оси ординат, мы ею засечем как раз $\lg h$ на оси абсцисс экспериментальной кривой. Рассуждая аналогично с уравнениями (365), (366а), (367), получаем те же правила, только индикатором глубины будет служить прямая, проведенная при $\lg x = -\lg 4$.

Таким образом, если протяжение экспериментальной кривой достаточно для того, чтобы с большей или меньшей уверенностью подобрать к ней определенную кривую палетки, то будут найдены k и h , а так как ρ_1 получается из начальной части кривой, то значит будет определено и ρ_2 . При определении $\bar{\rho}$ по значению градиента на данном r от одного электрода или в середине между электродами при разnose L годится одна и та же палетка, соответствующая функ-

ции S_1^* (рис. 68) (для практического употребления она должна быть вычерчена на кальке в масштабе: одна логарифмическая единица — 10 или 6,25 см); если за абсциссу берется $\lg r$, то глубина указывается положением прямой I, а если $\lg L$ — то прямой II. При определении небольших глубин несомненно удобнее применять одноэлектродный метод, так как переносить придется только два измерительных электрода, причем расстояние между ними можно менять, соблюдая неравенства

$$a \ll r \text{ и } a \ll 4h.$$

Требование сохранения постоянства отношения β практически оказывается не очень существенным, так как сравнение палетки, вычисленной для среднего градиента ($a \rightarrow 0, \beta \rightarrow \infty$) и для $\beta = 3$ [64], показывает, что в пределах точности, достигаемой на практике, существенной разницы между ними нет. При больших разносах и недостаточной чувствительности приборов приходится увеличивать a , т. е. уменьшать β , но дальше $\beta = 3$ идти ни в коем случае не следует, так как тогда потенциал от ближнего электрода получает преобладающее значение, и базой, служащей для измерения глубины, является уже не разнос электродов, а скорее расстояние до ближайшего электрода, которое уменьшается при увеличении a .

Кроме палетки S_1 и указанной выше палетки Нестерова имеются в литературе указания на то, что подобные палетки вычислялись разными авторами. Для отчетливого технического выполнения палетки на восковке или лучше на целлулоиде следует сделать аккуратный расчет палеток функций $T(k, \beta, x)$ для некоторых значений β и изготовить чертежи в увеличенном масштабе, с которых можно получить клише нормального размера; удобный для практики нормальный масштаб это 10 см на логарифмическую единицу, соответствующий имеющейся в продаже логарифмической бумаге в 2×3 логарифмических единицы**.

§ 26. ФОРМУЛЫ И ТАБЛИЦЫ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПАЛЕТОК ЭЛЕКТРОЗОНДИРОВАНИЯ

Вычисление по первоначальному ряду для ϕ удобно вести, вычисляя сразу функцию T ; после элементарных преобразований ее можно свести к виду

$$T = 1 + \frac{\beta^2 - 1}{2} \sum_1^{\infty} k^n \left[\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\beta-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{n\beta}{2x}\right)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\beta+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{n\beta}{2x}\right)^2}} \right]. \quad (368)$$

* Теория, изложенная в § 24, была развита В. А. Фоком и автором для вычисления палетки S_1 , так как это вычисление сделано, то мы не приводим его подробно, а развиваем в § 24 аналогичную теорию для преобразования рядов S_0 , облегчающих вычисления палеток $T(k, \beta, x)$. В численных расчетах палетки S_1 принимал участие Д. И. Шерман.

** Логарифмическая единица стандартных электроразведочных бланков принята равной 6,25 см. — Прим. ред.

При вычислении обратных значений квадратных корней можно воспользоваться цитированными уже таблицами Л. А. Петровского, цифровой материал имеется и у И. Х. Гуммеля [116]. Можно воспользоваться и следующим приемом. Положим

$$B = 1 + \left(\frac{n}{x}\right)^2 \quad (369)$$

и напишем ряд для T в виде

$$T = 1 + \sum_1^{\infty} k^n t_n(\beta, x); \quad (370)$$

$$t_n(\beta, x) = (\beta^2 - 1) \frac{\sqrt{B\beta^2 + 1 + 2\beta} - \sqrt{B\beta^2 + 1 - 2\beta}}{\sqrt{(B\beta^2 + 1)^2 - 4\beta^2}}, \quad (371)$$

и приближенные формулы

$$t_n(\beta, x) = \frac{2(\beta^2 - 1)}{\beta^2} B^{-\frac{3}{2}} - \frac{3(\beta^2 - 1)}{\beta^4} B^{-\frac{5}{2}} + \dots; \quad (372)$$

$$t_n(\beta, x) = \frac{2(\beta^2 - 1)\beta}{(B\beta^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \left[1 + \frac{5}{2} \left(\frac{\beta}{B\beta^2 + 1}\right)^2 + \frac{63}{8} \left(\frac{\beta}{B\beta^2 + 1}\right)^4 + \frac{429}{16} \left(\frac{\beta}{B\beta^2 + 1}\right)^6 + \dots \right]. \quad (373)$$

При помощи хороших таблиц квадратов и квадратных корней выражение (371), несмотря на кажущуюся его сложность, вычисляется довольно просто, если иметь таблицу величин B [табл. 12].

Возьмем как пример вычисление $t_6(5, 3)$. Для $n=6, x=3$, имеем $B=5,00$.

$$\left. \begin{aligned} B\beta^2 + 1 + 2\beta &= 136; & \sqrt{136} &= 11,6619 \\ B\beta^2 + 1 - 2\beta &= 116; & \sqrt{116} &= 10,7703 \end{aligned} \right\} \sqrt{136} - \sqrt{116} = 0,8916;$$

$$(B\beta^2 + 1)^2 = 126^2 = 15\,876;$$

$$(B\beta^2 + 1)^2 - 4\beta^2 = 15\,776; \quad \sqrt{(B\beta^2 + 1)^2 - 4\beta^2} = 125,60;$$

$$t_6(5, 3) = \frac{24 \times 0,8916}{125,60} = 0,1704.$$

Только последнее действие требует арифмометра или таблицы логарифмов, если требуются четыре значащих цифры; практически в большинстве случаев достаточно будет логарифмической линейки.

Формула (373) дает с двумя членами ряда — 0,1703. Для всех кривых с разными k коэффициенты $t_n(\beta, x)$ — одни и те же, и их полезно заготовить, приступая к вычислению палетки на определенное β . Таблицу степеней k мы даем в табл. 13. Как только вычисление по ряду (368) начинает требовать большого числа членов, нужно сравнить результат с результатом вычисления по формулам (339), вычисляя S_0 при помощи таблиц функций Φ, N и R и вычисляя T по формуле (363) (табл. 14 и 15); при этом сразу видно, что выделенный математическим анализом (§ 24) член Φ является главным, а остальные члены — лишь поправочными, вычисление которых может быть сделано с небольшим числом значащих цифр.

Для отрицательных k эти формулы требуют больших значений x , чем для положительного, а для малых значений k ($|k| \leq 0,3$) они мало пригодны; по там вычисление по ряду (368) не представляет особых затруднений. Переходя затем к формулам (357), мы можем составить формулу для непосредственного вычисления T , подставляя выражения (357) в (363) и выражая x_1 и x_2 через x и β в членах асимптотического разложения, получаем.

Для $k > 0,2$

$$T = \frac{\pi}{2} \left[\frac{\Phi(vx_2) + \Phi(vx_1)}{2} - \beta \frac{\Phi(vx_2) - \Phi(vx_1)}{2} \right] + p_0(v) - \frac{(3\beta^2 + 1)\beta^2}{(\beta^2 - 1)^2} \cdot \frac{p_2(v)}{x^2} + \frac{(5\beta^4 + 10\beta^2 + 1)\beta^4}{(\beta^2 - 1)^4} \cdot \frac{p_4(v)}{x^4} + \dots, \quad (374)$$

для $-1 \leq k \leq 0,2$ можно пользоваться формулой

$$T = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left[1 + \frac{(3\beta^2 + 1)\beta^2}{(\beta^2 - 1)^2} \cdot \frac{q_2}{x^2} + \frac{(5\beta^4 + 10\beta^2 + 1)\beta^4}{(\beta^2 - 1)^4} \cdot \frac{q_4}{x^4} + \frac{(7\beta^6 + 35\beta^4 + 21\beta^2 + 1)\beta^6}{(\beta^2 - 1)^6} \cdot \frac{q_6}{x^6} + \dots \right]. \quad (375)$$

Таблица 12

| n | x | | | | | |
|---|------------|-----------|--------|-----------|--------|------------|
| | 0,30 | 0,35 | 0,40 | 0,45 | 0,50 | 0,60 |
| 1 | 12,111111 | 9,163265 | 7,25 | 5,938272 | 5,00 | 3,777778 |
| 2 | 45,444444 | 33,653061 | 26,00 | 20,753086 | 17,00 | 12,111111 |
| 3 | 101,000000 | 74,469388 | 57,25 | 45,444444 | 37,00 | 26,000000 |
| 4 | 178,777778 | 131,61224 | 101,00 | 80,012345 | 65,00 | 45,444444 |
| 5 | 278,888889 | 205,08163 | 157,25 | 124,45679 | 101,00 | 71,444444 |
| 6 | 401,000000 | 294,87755 | 226,00 | 178,77778 | 145,00 | 101,000000 |

| n | x | | | | | |
|---|-----------|---------|-----------|-------|-----------|------------|
| | 0,70 | 0,80 | 0,90 | 1,00 | 1,1 | 1,2 |
| 1 | 3,040816 | 2,5625 | 2,234568 | 2,00 | 1,8264463 | 1,6944444 |
| 2 | 9,163265 | 7,2500 | 5,938272 | 5,00 | 4,305785 | 3,7777778 |
| 3 | 19,367347 | 15,0625 | 12,111111 | 10,00 | 8,438017 | 7,2500000 |
| 4 | 33,653061 | 26,0000 | 20,753086 | 17,00 | 14,223140 | 12,1111111 |
| 5 | 52,020408 | 40,0625 | 31,834568 | 26,00 | 21,66107 | 18,361111 |
| 6 | 74,469388 | 58,2500 | 45,444444 | 37,00 | 30,75207 | 26,000000 |
| 7 | — | — | — | — | — | 35,027778 |

| n | x | | | | | |
|---|-----------|-----------|-----------|-------|-------|----------|
| | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2,0 | 2,5 | 3,0 |
| 1 | 1,5102041 | 1,390625 | 1,308642 | 1,25 | 1,16 | 1,111111 |
| 2 | 3,040816 | 2,562500 | 2,234568 | 2,00 | 1,64 | 1,444444 |
| 3 | 5,591830 | 4,515625 | 3,777778 | 3,25 | 2,44 | 2,000000 |
| 4 | 9,163265 | 7,250000 | 5,938272 | 5,00 | 3,56 | 2,777778 |
| 5 | 13,755102 | 10,765625 | 8,716049 | 7,25 | 5,00 | 3,777778 |
| 6 | 19,367347 | 15,062500 | 12,111111 | 10,00 | 6,76 | 5,000000 |
| 7 | 26,000000 | 20,140625 | 15,123457 | 13,25 | 8,84 | 6,444444 |
| 8 | 33,653080 | 26,000000 | 20,753086 | 17,00 | 11,24 | 8,111111 |

Таблица 13

| n | k | | | | | | | | | |
|---|-----|-----|------|--------|---------|-----------|-----------|------------|------------|------------------|
| | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 ⁻¹ |
| 2 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 10 ⁻² |
| 3 | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 | 10 ⁻³ |
| 4 | 1 | 16 | 81 | 256 | 625 | 1 296 | 2 401 | 4 096 | 6 561 | 10 ⁻⁴ |
| 5 | 1 | 32 | 243 | 1 024 | 3 125 | 7 776 | 16 807 | 32 768 | 59 049 | 10 ⁻⁵ |
| 6 | 1 | 64 | 729 | 4 096 | 15 625 | 46 656 | 117 649 | 262 144 | 531 441 | 10 ⁻⁶ |
| 7 | 1 | 128 | 2187 | 16 384 | 78 125 | 279 936 | 823 543 | 2 097 152 | 4 782 969 | 10 ⁻⁷ |
| 8 | 1 | 256 | 6561 | 65 536 | 390 625 | 1 679 616 | 5 764 801 | 16 777 216 | 43 046 721 | 10 ⁻⁸ |

Таблица 14

| lg z | $\frac{\Phi(z)}{z}$ | lg z | $\frac{\Phi(z)}{z}$ | lg z | $\frac{\Phi(z)}{z}$ | lg z | $\frac{\Phi(z)}{z}$ | lg z | $\frac{\Phi(z)}{z}$ | lg z | $\frac{\Phi(z)}{z}$ |
|------|---------------------|------|---------------------|------|---------------------|------|---------------------|------|---------------------|------|---------------------|
| 6,0 | 5,937 | 6,8 | 4,765 | 7,6 | 3,594 | 8,4 | 2,435 | | | | |
| 6,2 | 5,644 | 7,0 | 4,472 | 7,8 | 3,303 | 8,6 | 2,150 | | | | |
| 6,4 | 5,351 | 7,2 | 4,179 | 8,0 | 3,012 | 8,8 | 1,8705 | | | | |
| 6,6 | 5,058 | 7,4 | 3,887 | 8,2 | 2,722 | 9,0 | 1,5978 | | | | |

| z | $\Phi(z)$ | z | $\Phi(z)$ | z | $\Phi(z)$ | z | $\Phi(z)$ | z | $\Phi(z)$ | z | $\Phi(z)$ |
|-------|-----------|------|-----------|------|-----------|------|-----------|------|-----------|------|-----------|
| 0,075 | 0,1326 | 0,36 | 0,3263 | 0,78 | 0,4449 | 1,40 | 0,5235 | 2,96 | 0,5915 | 6,8 | 0,6247 |
| 0,080 | 0,1383 | 0,38 | 0,3348 | 0,80 | 0,4486 | 1,44 | 0,5267 | 3,04 | 0,5932 | 7,0 | 0,6253 |
| 0,085 | 0,1439 | 0,40 | 0,3425 | 0,82 | 0,4522 | 1,48 | 0,5299 | 3,12 | 0,5948 | | |
| 0,090 | 0,1494 | 0,42 | 0,3500 | 0,84 | 0,4558 | 1,52 | 0,5329 | 3,20 | 0,5963 | 7,5 | 0,6266 |
| 0,095 | 0,1546 | 0,44 | 0,3572 | 0,86 | 0,4592 | | | | | 8,0 | 0,6277 |
| 0,100 | 0,1598 | 0,46 | 0,3641 | 0,88 | 0,4625 | 1,60 | 0,5386 | 3,4 | 0,5997 | 8,5 | 0,6287 |
| 0,105 | 0,1648 | 0,48 | 0,3707 | 0,90 | 0,4657 | 1,68 | 0,5438 | 3,6 | 0,6028 | 9,0 | 0,6294 |
| 0,110 | 0,1697 | 0,50 | 0,3770 | 0,92 | 0,4688 | 1,76 | 0,5486 | 3,8 | 0,6054 | 9,5 | 0,6301 |
| 0,115 | 0,1745 | 0,52 | 0,3831 | 0,94 | 0,4718 | 1,84 | 0,5530 | 4,0 | 0,6078 | 10,0 | 0,6307 |
| 0,12 | 0,1791 | 0,54 | 0,3890 | 0,96 | 0,4748 | 1,92 | 0,5571 | 4,2 | 0,6100 | 10,5 | 0,6312 |
| | | 0,56 | 0,3946 | 0,98 | 0,4776 | 2,00 | 0,5610 | 4,4 | 0,6118 | 11,0 | 0,6317 |
| 0,14 | 0,1967 | 0,58 | 0,4000 | 1,00 | 0,4804 | 2,08 | 0,5645 | 4,6 | 0,6136 | 11,5 | 0,6321 |
| 0,16 | 0,2128 | 0,60 | 0,4052 | | | 2,16 | 0,5678 | 4,8 | 0,6151 | 12,0 | 0,6324 |
| 0,18 | 0,2277 | 0,62 | 0,4103 | 1,04 | 0,4858 | 2,24 | 0,5710 | 5,0 | 0,6165 | 12,5 | 0,6328 |
| 0,20 | 0,2416 | 0,64 | 0,4152 | 1,08 | 0,4908 | 2,32 | 0,5738 | 5,2 | 0,6178 | 13,0 | 0,6330 |
| 0,22 | 0,2545 | 0,66 | 0,4198 | 1,12 | 0,4956 | 2,40 | 0,5766 | 5,4 | 0,6189 | 13,5 | 0,6333 |
| 0,24 | 0,2666 | 0,68 | 0,4244 | 1,16 | 0,5002 | 2,48 | 0,5791 | 5,6 | 0,6200 | 14,0 | 0,6335 |
| 0,26 | 0,2780 | 0,70 | 0,4288 | 1,20 | 0,5046 | 2,56 | 0,5815 | 5,8 | 0,6210 | 14,5 | 0,6337 |
| 0,28 | 0,2888 | 0,72 | 0,4330 | 1,24 | 0,5087 | 2,64 | 0,5838 | 6,0 | 0,6218 | 15,0 | 0,6339 |
| 0,30 | 0,2989 | 0,74 | 0,4371 | 1,28 | 0,5126 | 2,72 | 0,5859 | 6,2 | 0,6227 | 15,5 | 0,6341 |
| 0,32 | 0,3085 | 0,76 | 0,4411 | 1,32 | 0,5164 | 2,80 | 0,5879 | 6,4 | 0,6234 | 16,0 | 0,6342 |
| 0,34 | 0,3176 | | | 1,36 | 0,5200 | 2,88 | 0,5897 | 6,6 | 0,6241 | 16,5 | 0,6344 |

Примечание. Для $z < 0,0001$ $\frac{\Phi(z)}{z} = -1,4658 \lg z + 0,0738^*$.

Для $z > 15,0$ $\Phi(z) = 0,63662 \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$.

* $\lg z$ с отрицательной характеристикой и мантиссой.

Таблица 15

| w | x | lg N ₀ | lg N ₂ | R ₁ | R ₃ | lg N ₀ | lg N ₂ | R ₁ | R ₃ |
|------|--------|-------------------|-------------------|----------------|----------------|-------------------|-------------------|----------------|----------------|
| 3,0 | 0,4775 | 8,837 | 8,034 | 0,183 | 0,002 | 9,624 | 8,948 | 0,404 | 0,007 |
| 3,6 | 0,5730 | 8,612 | 7,945 | 0,186 | 0,003 | 9,532 | 8,974 | 0,442 | 0,011 |
| 4,2 | 0,6685 | 8,382 | 7,833 | 0,185 | 0,003 | 9,434 | 8,981 | 0,491 | 0,015 |
| 4,8 | 0,7639 | 8,150 | 7,705 | 0,182 | 0,003 | 9,334 | 8,974 | 0,520 | 0,020 |
| 5,4 | 0,8594 | 7,915 | 7,562 | 0,181 | 0,004 | 9,230 | 8,954 | 0,541 | 0,025 |
| 6,0 | 0,9549 | 7,678 | 7,408 | 0,179 | 0,004 | 9,124 | 8,924 | 0,555 | 0,030 |
| 6,6 | 1,0504 | 7,438 | 7,245 | 0,177 | 0,003 | 9,015 | 8,886 | 0,562 | 0,034 |
| 7,2 | 1,1459 | 7,197 | 7,074 | 0,175 | 0,003 | 8,904 | 8,840 | 0,568 | 0,038 |
| 7,8 | 1,2414 | 6,954 | 6,896 | 0,174 | 0,003 | 8,792 | 8,789 | 0,569 | 0,042 |
| 8,4 | 1,3369 | | | 0,173 | 0,003 | 8,679 | 8,732 | 0,569 | 0,045 |
| 9,0 | 1,4324 | | | 0,172 | 0,003 | 8,564 | 8,671 | 0,564 | 0,047 |
| 9,6 | 1,5279 | | | 0,171 | 0,003 | 8,449 | 8,605 | 0,562 | 0,049 |
| 10,2 | 1,6234 | | | 0,170 | 0,003 | 8,332 | 8,536 | 0,559 | 0,051 |
| 10,8 | 1,7189 | | | 0,170 | 0,003 | 8,215 | 8,464 | 0,555 | 0,052 |
| 11,4 | 1,8144 | | | 0,169 | 0,003 | 8,097 | 8,389 | 0,551 | 0,052 |
| 12,0 | 1,9099 | | | 0,169 | 0,003 | 7,978 | 8,311 | 0,547 | 0,053 |
| 12,6 | 2,0005 | | | 0,169 | 0,003 | 7,859 | 8,230 | 0,543 | 0,053 |
| 13,2 | 2,1009 | | | 0,168 | 0,003 | 7,739 | 8,148 | 0,540 | 0,053 |
| 13,8 | 2,1963 | | | 0,168 | 0,003 | 7,618 | 8,064 | 0,537 | 0,052 |
| 14,4 | 2,2918 | | | 0,168 | 0,003 | 7,498 | 7,977 | 0,533 | 0,052 |
| 15,0 | 2,3873 | | | 0,168 | 0,003 | 7,377 | 7,889 | 0,530 | 0,052 |
| 15,6 | 2,4828 | | | | | 7,255 | 7,799 | 0,527 | 0,051 |
| 16,2 | 2,5783 | | | | | 7,133 | 7,708 | 0,525 | 0,051 |
| 16,8 | 2,6738 | | | | | 7,011 | 7,616 | 0,522 | 0,050 |
| 17,4 | 2,7693 | | | | | 6,888 | 7,522 | 0,520 | 0,050 |
| 18,0 | 2,8648 | | | | | 6,768 | 7,427 | 0,519 | 0,049 |
| 18,6 | 2,9603 | | | | | | | 0,517 | 0,049 |
| 19,2 | 3,0558 | | | | | | | 0,515 | 0,048 |
| 19,8 | 3,1513 | | | | | | | 0,514 | 0,048 |
| 20,4 | 3,2468 | | | | | | | 0,513 | 0,048 |
| 21,0 | 3,3423 | | | | | | | 0,513 | 0,047 |

Коэффициенты p_0, p_2, p_4 как функции от v даются формулами, получающимися из формул (349) и (350),

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= L\left(\frac{v}{2}\right); \\ p_2 &= -\frac{1}{8} L''\left(\frac{v}{2}\right); \\ p_4 &= \frac{3}{128} L^{IV}\left(\frac{v}{2}\right), \end{aligned} \right\} \quad (376)$$

и даны в табл. 16 как функции от v (для удобства интерполяции) и в табл. 17 как функции от k .

Коэффициенты q_2, q_4, q_6 удобнее выразить как функции от k ; они получаются из P и Q (§ 24) и через k выражаются следующим образом. Положим

$$\eta = \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \right] = -\frac{2k}{(1-k)^2}, \quad (377)$$

Таблица 16

| v | P_0 | P_2 | P_4 |
|-----|--------|---------|---------|
| 0,0 | 0,0000 | 0,00000 | 0,00000 |
| 0,1 | 0,0167 | 0,00084 | 0,00030 |
| 0,2 | 0,0333 | 0,00166 | 0,00059 |
| 0,3 | 0,0499 | 0,00249 | 0,00088 |
| 0,4 | 0,0665 | 0,00329 | 0,00114 |
| 0,5 | 0,0830 | 0,00409 | 0,00143 |
| 0,6 | 0,0994 | 0,00486 | 0,00168 |
| 0,7 | 0,1157 | 0,00561 | 0,00192 |
| 0,8 | 0,1319 | 0,00634 | 0,00213 |
| 0,9 | 0,1480 | 0,00704 | 0,00232 |
| 1,0 | 0,1640 | 0,00770 | 0,00250 |
| 1,1 | 0,1797 | 0,00834 | 0,00265 |
| 1,2 | 0,1954 | 0,00894 | 0,00278 |
| 1,3 | 0,2108 | 0,00950 | 0,00288 |

Таблица 17

| k | $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | P_0 | P_2 | P_4 | v |
|-----|-------------------------|--------|---------|---------|---------|
| 1,0 | ∞ | 0,0000 | 0,00000 | 0,00000 | 0,00000 |
| 0,9 | 19,0000 | 0,0176 | 0,00088 | 0,00031 | 0,10536 |
| 0,8 | 9,0000 | 0,0372 | 0,00185 | 0,00066 | 0,22314 |
| 0,7 | 5,6667 | 0,0593 | 0,00294 | 0,00104 | 0,35667 |
| 0,6 | 4,0000 | 0,0848 | 0,00418 | 0,00145 | 0,51083 |
| 0,5 | 3,0000 | 0,1146 | 0,00556 | 0,00190 | 0,69315 |
| 0,4 | 2,3333 | 0,1506 | 0,00715 | 0,00236 | 0,91629 |
| 0,3 | 1,8571 | 0,1960 | 0,00884 | 0,00278 | 1,20397 |

| k | $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ | q_2 | q_4 | q_6 | v |
|------|-------------------------|---------|---------|---------|----------|
| 0,2 | 1,5000 | -0,3125 | 1,1133 | -10,724 | 1,60944 |
| 0,1 | 1,2222 | -0,1235 | 0,2298 | -1,070 | 2,30259 |
| 0,0 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,000 | ∞ |
| -0,1 | 0,8182 | 0,0826 | -0,0005 | -0,078 | 2,30259 |
| -0,2 | 0,6667 | 0,1389 | 0,0695 | -0,034 | 1,60944 |
| -0,3 | 0,5385 | 0,1775 | 0,1504 | 0,188 | 1,20397 |
| -0,4 | 0,4286 | 0,2041 | 0,2218 | 0,477 | 0,91629 |
| -0,5 | 0,3333 | 0,2222 | 0,2777 | 0,756 | 0,69315 |
| -0,6 | 0,2500 | 0,2344 | 0,3185 | 0,983 | 0,51083 |
| -0,7 | 0,1765 | 0,2422 | 0,3463 | 1,148 | 0,35667 |
| -0,8 | 0,1111 | 0,2469 | 0,3635 | 1,255 | 0,22314 |
| -0,9 | 0,0526 | 0,2493 | 0,3724 | 1,311 | 0,10536 |
| -1,0 | 0,0000 | 0,2500 | 0,3750 | 1,328 | 0,00000 |

тогда имеем (см. также табл. 17)

$$\left. \begin{aligned} q_2 &= \frac{\eta}{2}; \\ q_4 &= \frac{3}{8} (6\eta^2 - \eta); \\ q_6 &= \frac{5}{16} (90\eta^3 - 30\eta^2 + \eta). \end{aligned} \right\} \quad (378)$$

Зависящие от β коэффициенты при членах p_{2n}/x^{2n} и q_{2n}/x^{2n} в разложениях (374) и (375) даны в табл. 18 под заголовком $M_{2n}(\beta)$.

Таблица 18

| β | $\frac{2(\beta^2-1)}{\beta^2}$ | $\frac{3(\beta^2-1)}{\beta^4}$ | $M_2(\beta)$ | $M_4(\beta)$ | $M_6(\beta)$ | $A(\beta)$ |
|---------|--------------------------------|--------------------------------|--------------|--------------|--------------|------------|
| 3 | 1,7778 | 0,2963 | 3,9375 | 9,809 | 28,456 | 0,7672 |
| 4 | 1,8750 | 0,1758 | 3,4844 | 7,287 | 13,653 | 0,8368 |
| 5 | 1,9200 | 0,1152 | 3,2986 | 6,360 | 10,774 | 0,8751 |
| 6 | 1,9444 | 0,0810 | 3,2033 | 5,908 | 9,460 | 0,8992 |
| 7 | 1,9592 | 0,0600 | 3,1476 | 5,652 | 8,740 | 0,9156 |
| 8 | 1,9688 | 0,0461 | 3,1121 | 5,492 | 8,300 | 0,9275 |
| 9 | 1,9753 | 0,0366 | 3,0881 | 5,385 | 8,011 | 0,9366 |
| 10 | 1,9800 | 0,0297 | 3,0711 | 5,309 | 7,809 | 0,9436 |

Случай $k = -1$ во второй формуле (355) сводится к

$$S_0(-1, x) = \bar{N}_0(w)$$

и вычисление T не представляет затруднения, начиная с такого значения x , при котором $x_1 = x \left(\frac{\beta-1}{\beta} \right) > 0,4755$; если x_1 меньше этого числа, то для него придется использовать ряд (354), а если и x_2 меньше 0,4775, то для обоих значений x вычисление надо будет вести по ряду (354) или же сразу вычислять T по (368).

При $k = -1$ ряд (354) можно представить в виде степенного ряда, удобного при $x < 0,5$,

$$S_0(-1, x) = 1 - \sum_0^{\infty} x^{2s+1} a_s, \quad (354a)$$

где $a_s = 2C_s^{(-1/2)} f_s$; $C_s^{(-1/2)}$ означает s -й коэффициент бинома Ньютона, для степеней $-1/2$; $f_s = \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^{2s+1}}$.

Численные значения коэффициентов

$$\begin{aligned} a_0 &= -1,3863 = -2 \ln 2; & a_3 &= 0,6204; \\ a_1 &= 0,9015; & a_4 &= -0,5456; \\ a_2 &= -0,7541; & a_5 &= 0,4920. \end{aligned}$$

Можно вычислить наперед значения $S_0(-1, x)$ для ряда значений x в указанных пределах и интерполировать полученную табл. 19.

Случай $k = -1$ был еще в 1928 г. разобран теоретически и рассчитан по моему поручению А. А. Марковым.

Случай $k = +1$ требует особого рассмотрения, потому что ряд (354) для $S_0(1, x)$ расходится при всяком x , и функции $S_0(1, x)$ не существует. Ряд (368) для T сходится и годен для вычислений при малых значениях x , для больших значений мы можем вывести удобную формулу непосредственно для T . Формулу эту получим из рядов (355) переходом к пределу $v = 0$.

Подставляя в (363) выражения (355) для x_1 и x_2 , имеем

$$T(k, \beta, x) = \frac{\pi}{v} \left[\frac{\Phi(vx_2) + \Phi(vx_1)}{2} - \beta \frac{\Phi(vx_2) - \Phi(vx_1)}{2} \right] + \left[\frac{N_0(w_2) + N_0(w_1)}{2} - \beta \frac{N_0(w_2) - N_0(w_1)}{2} \right] + O(v), \quad (379)$$

где $O(v)$ обозначает сумму членов, происходящих от членов, имеющих множителями степени v . Вторая скобка (379) от v не зависит и вычисляется по табл. 15, из которых видно, что ее значение уже при $x_1 > 1,2$ будет весьма мало. Члены $O(v)$ при $v = 0$ исчезают, остается рассмотреть предел, к которому стремится первая скобка при $v \rightarrow 0$.

В заголовке табл. 14 указано выражение, к которому стремится $\Phi(z)/z$ при z , стремящемся к нулю; если напишем натуральный логарифм, то имсет место

$$\frac{\Phi(z)}{z} = -\frac{2}{\pi} (\ln z + \delta) + \dots, \quad (380)$$

где величина δ связана с постоянной Эйлера, а отброшенные члены исчезают при $z = 0$.

Чтобы воспользоваться этим выражением, напишем первую скобку (379) в виде

$$\frac{\pi x}{2} \left\{ \frac{\Phi(vx_2)}{vx} + \frac{\Phi(vx_1)}{vx} - \beta \left[\frac{\Phi(vx_2)}{vx} - \frac{\Phi(vx_1)}{vx} \right] \right\}$$

и далее, вводя вместо x_2 и x_1 их выражения через x и β ,

$$\frac{\pi x}{2} \left\{ \frac{\Phi\left(vx \frac{\beta+1}{\beta}\right)}{vx \frac{\beta+1}{\beta}} \cdot \frac{\beta+1}{\beta} + \frac{\Phi\left(vx \frac{\beta-1}{\beta}\right)}{vx \frac{\beta-1}{\beta}} \cdot \frac{\beta-1}{\beta} - \beta \left[\frac{\Phi\left(vx \frac{\beta+1}{\beta}\right)}{vx \frac{\beta+1}{\beta}} \cdot \frac{\beta+1}{\beta} - \frac{\Phi\left(vx \frac{\beta-1}{\beta}\right)}{vx \frac{\beta-1}{\beta}} \cdot \frac{\beta-1}{\beta} \right] \right\}. \quad (381)$$

$$\text{Написав } -\frac{2}{\pi} \left[\ln\left(vx \frac{\beta+1}{\beta}\right) + \delta \right] = -\frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{vx}{\beta} + \delta \right) - \frac{2}{\pi} \ln(\beta+1);$$

$$-\frac{2}{\pi} \left[\ln\left(vx \frac{\beta-1}{\beta}\right) + \delta \right] = -\frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{vx}{\beta} + \delta \right) - \frac{2}{\pi} \ln(\beta-1),$$

и подставив в (381), получаем после алгебраических выкладок

$$x \left(\frac{\beta^2-1}{\beta} \right) \ln \frac{\beta+1}{\beta-1},$$

так что окончательно для $T(1, \beta, x)$ получаем формулу

$$T(1, \beta, x) = Ax + \left[\frac{N_0(w_2) + N_0(w_1)}{2} - \beta \frac{N_0(w_2) - N_0(w_1)}{2} \right], \quad (382)$$

где значения коэффициента A (зависящего от β) $A(\beta) = \frac{\beta^2-1}{\beta} \ln \frac{\beta+1}{\beta}$ для некоторых значений β даны также в табл. 18.

§ 27. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ ПРИ НЕСКОЛЬКИХ СЛОЯХ *

Преимущество применения палетки перед всеми другими приемами (нахождение величин k и h решением уравнений по нескольким наблюдениям, метод Тэгга [124]) заключается в простоте, все теоретические трудности и вся вычислительная работа отнесены на изготовление палетки и могут быть сделаны раз навсегда. К тому же, накладывая теоретические кривые на экспериментальные (при проведении которых в известной мере можно сгладить случайные ошибки наблюдения), мы используем всю совокупность наблюденных данных и сразу видим, в какой мере применима к данному случаю эта методика, т. е. отвечает ли действительное распределение сопротивления в почве случаю двух слоев.

При наличии нескольких слоев экспериментальную кривую нельзя будет совместить ни с одной кривой двухслойной палетки. Так как каждый лишний слой прибавляет два новых параметра: удельное сопротивление и мощность (или глубину новой границы), то построение удобных палеток в виде серии кривых на одном чертеже уже невозможно. Однако качественные и отчасти количественные заключения можно сделать и в случае нескольких слоев путем умелого применения той же двухслойной палетки.

Предположим, что каждый следующий слой имеет мощность очень большую по сравнению с предыдущим. Рассматривая кривые двухслойной палетки, легко убедиться, что они будут иметь следующий характер: сначала скажется первая граница, и кривая, поднявшись или опустившись характерным образом, делается снова параллельной оси OX , при значении ρ , соответствующем ρ_2 . Применяя палетку к этой начальной части кривой, мы определим h_1 и k_{12} . Если бы второй слой был бесконечно большой мощности, то дальнейшее раздвижение электродов ничего нового не дало бы, и мы имели бы как будто однородную среду с удельным сопротивлением ρ_2 .

Если же на глубине h_2 имеется новая граница, причем h_2 велико по сравнению с h_1 , то дальнейшее раздвижение электродов вызывает снова изменение ρ от значения ρ_2 до значения ρ_3 , и ясно, что при предположенных соотношениях глубин, когда вторая граница начинает заметно действовать только тогда, когда первый слой уже не играет роли — начнется новый участок кривой, который может

* Методика интерпретации кривых зондирования рассматривается в руководствах [46, 83]. — Прим. ред.

быть снова интерпретирован той же палеткой; за новую ось X нужно принять продолжение горизонтального конца первой части кривой и подобрать кривую палетки, подходящую к ходу второго участка,

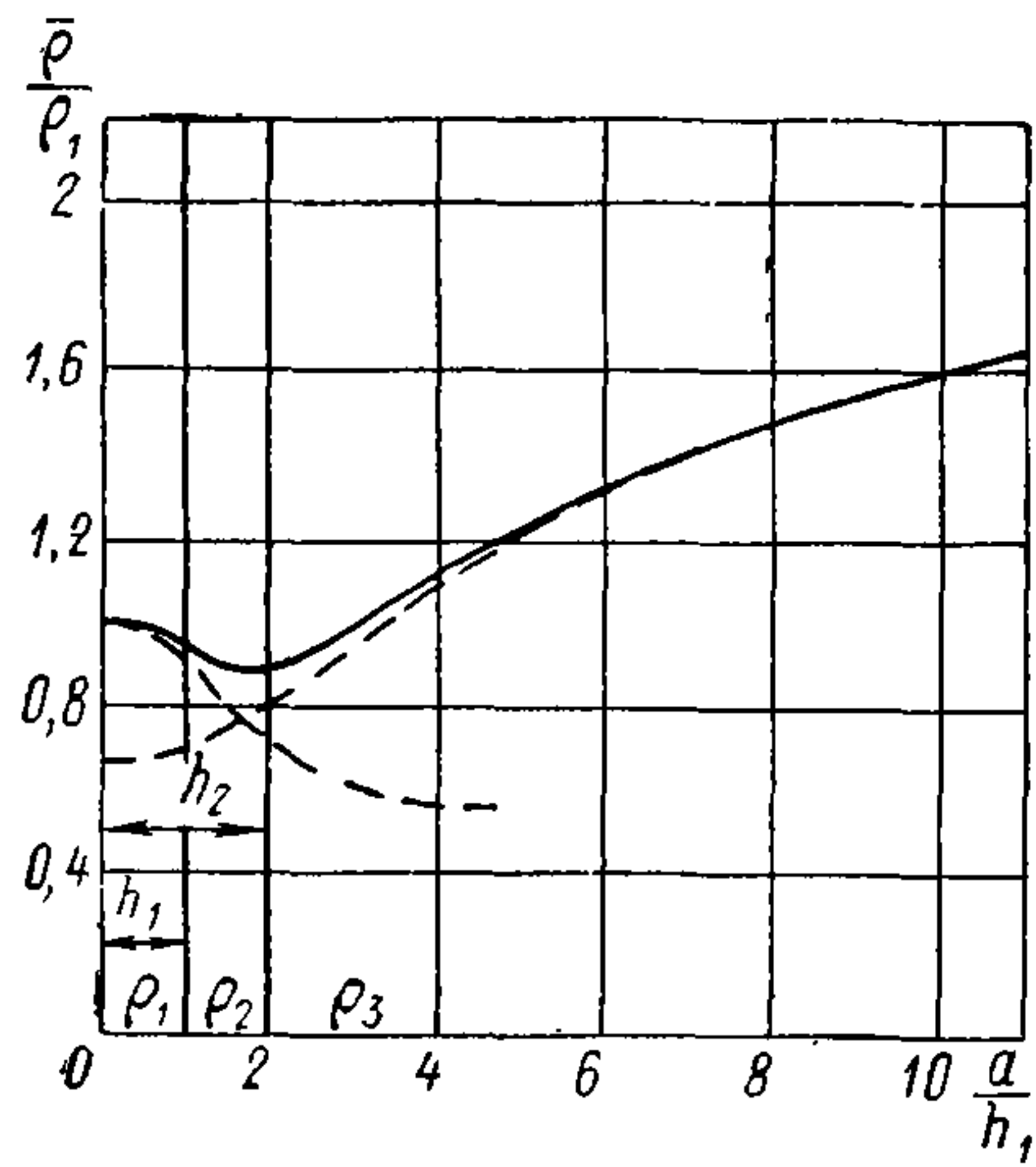


Рис. 69.

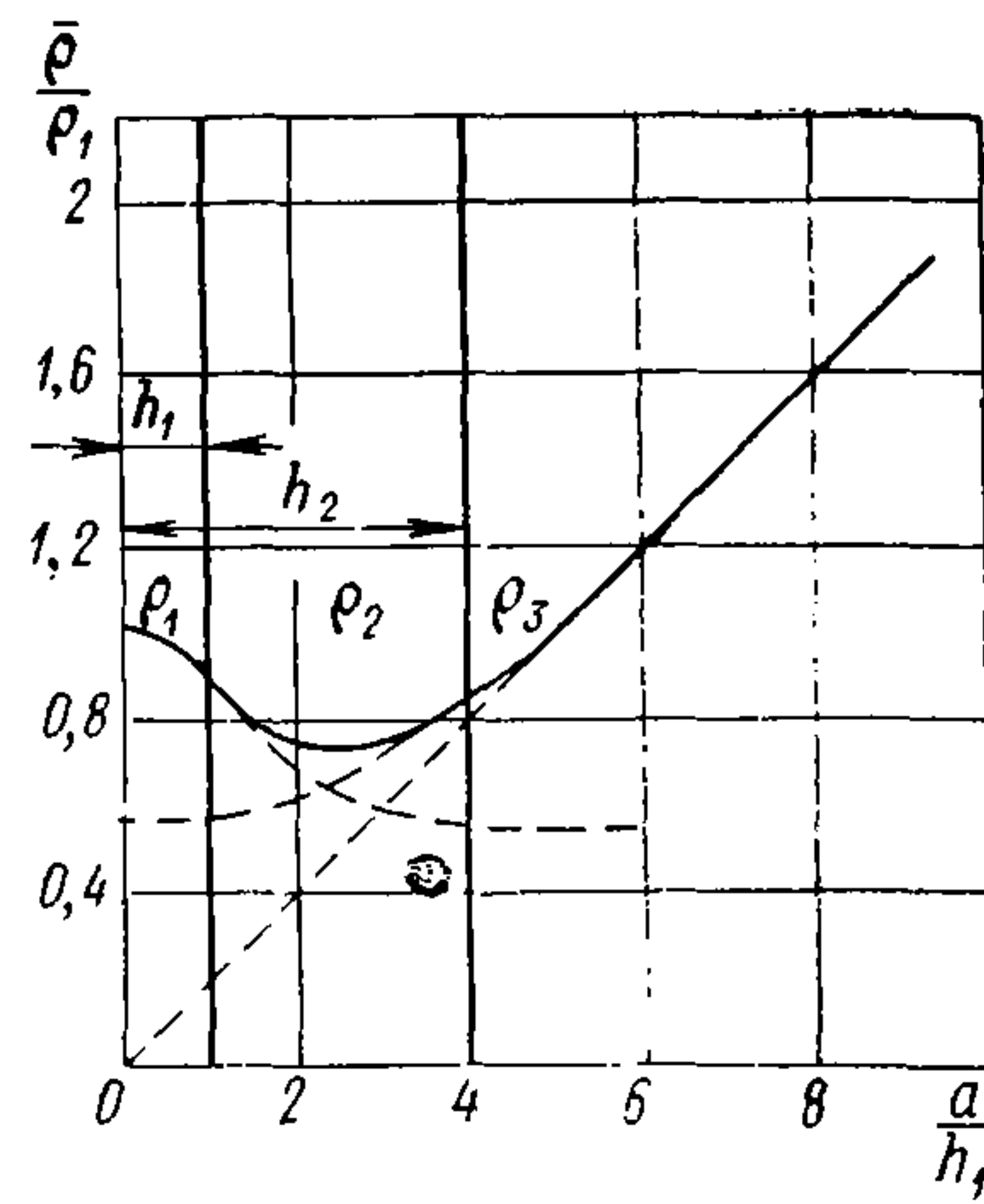


Рис. 70.

откуда и найдем k_{23} и h_2 , глубину второй границы. По найденному значению k_{23} и по известному уже ρ_2 найдется и ρ_3 . В этом идеальном случае никаких сомнений относительно применения палетки

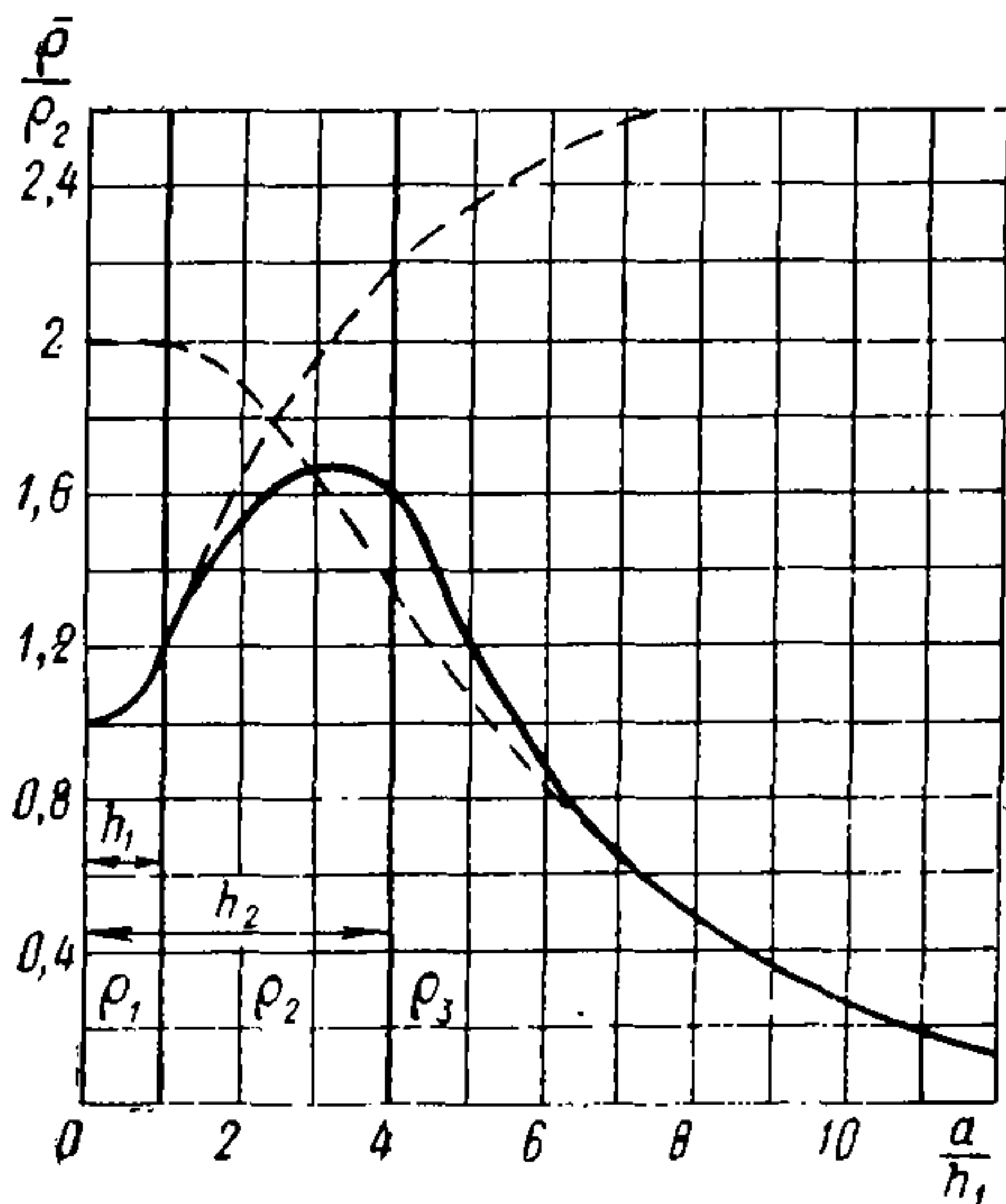


Рис. 71.

не возникает, но в действительности часто бывает, что глубины залегания границ не расположены столь благоприятно, и вторая граница (а часто даже и третья) дает себя знать на ходе кривой одновременно с первой. Приводим в качестве иллюстраций кривые $\bar{\rho}/\rho_1$, как функции $a/h_1 = L/3h_1$, рассчитанные И. Н. Гуммелем для случаев

$$\rho_1 : \rho_2 : \rho_3 = 1 : 0,5 : 2 \quad (\text{рис. 69});$$

$$\rho_1 : \rho_2 : \rho_3 = 1 : 0,5 : \infty \quad (\text{рис. 70});$$

$$\rho_1 : \rho_2 : \rho_3 = 1 : 3 : 0 \quad (\text{рис. 71}).$$

(не логарифмическом) масштабе. В большинстве случаев начальная часть кривой дает возможность определить h_1 и k_{12} достаточно уверенно; на рис. 69—71 показаны теоретические кривые, подобранные для первой и второй части кривой.

Так как в начале второй участок кривой еще сильно искажен действием первой границы, то ясно, что подбирать нужно по далеким частям (если там не проявляется еще четвертый слой). И. Н. Гуммель доказывает, что для случая двух слоев одинаковой толщины, лежащих на изоляторе, далекая часть кривой будет соответствовать слою двойной толщины с удельным сопротивлением, вычисленным по формуле

$$\frac{2}{\rho'} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$$

и лежащему на изоляторе.

Он обобщает этот результат, полагая, что совокупность n верхних слоев по отношению к мощному подслою ведет себя как один слой, с толщиной равной сумме мощностей верхних слоев и с сопротивлением, вычисленным как для параллельных проводников

$$\frac{\sum_1^n d_i}{\rho'} = \sum_1^n \frac{d_i}{\rho_i} \quad (383)$$

Это верно для случая, когда подслоя является изолятором. Мы имеем тогда слоистую пластину, в которой ток на большом расстоянии от одного электрода идет радиально и (383) легко доказать. Насколько это верно для проводящего подстилающего слоя, необходимо исследовать.

Если будем иметь возможность более или менее правильно оценивать «среднее» удельное сопротивление всей верхней свиты по мощностям и удельным сопротивлениям составляющих ее слоев, то, анализируя при помощи палетки далекую часть экспериментальной кривой, мы сможем уточнить получаемый результат. Действительно, предположим, что мы имеем три слоя, и из начальной части кривой знаем ρ_1 и приближенно (обычно довольно хорошо) h_1 и k_{12} , т. е. ρ_2 . Анализируя далекую часть кривой, мы получаем некоторые значения k и h_2 и засечку на оси ρ , которая дает ρ' , среднее удельное сопротивление свиты над границей h_2 . Но из h_1, h_2, ρ_1 и ρ_2 мы сможем, если будем располагать вышеуказанной теорией, также вычислить ρ' . Если это ρ' разойдется сильно со значением ρ' , полученным из засечки, то очевидно, что взаимные искажения кривых от двух границ велики, и, изменяя несколько подгонку как в первой, так и во второй части кривой, можно добиться лучшего согласия, и тем уточнить результаты как определения глубин, так и удельных сопротивлений.

В 1932 г. * А. А. Петровский предложил следующий приближенный метод анализа данных электроразведки. Он полагает, что величина эффективной проводимости $\bar{\sigma} = 1/\bar{\rho}$, получаемая при данном разnose питающих электродов L , приближенно может быть представлена как арифметическое среднее истинных значений σ до некоторой

* Доклад на Первой всесоюзной конференции по геофизическим методам в Свердловске.

глубины $H = \alpha L$, где α — некоторое число, которое А. А. Петровский принимает равным $3/8$. Это предположение в виде формулы может быть записано

$$\bar{\sigma} + \frac{1}{H} \int_0^H \sigma(h) dh,$$

производя замену переменной, положив $h = \alpha l$, получаем

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{L} \int_0^L \sigma(\alpha l) dl$$

или

$$\bar{\sigma} L = \int_0^L \sigma(\alpha l) dl,$$

где левая часть из опыта известна и может быть представлена в виде кривой, изображающей зависимость $\bar{\sigma} L$ от L . Дифференцируя последнюю по L как переменной, получаем

$$\frac{d(\bar{\sigma} L)}{dL} = \sigma(\alpha L) = \sigma(H). \quad (384)$$

Метод, стало быть, заключается в том, что кривая $\bar{\sigma} L$ дифференцируется графически, строится новая кривая, и в полученном чертеже меняется масштаб оси абсцисс. Тогда эта кривая дает изменение «истинной» электропроводности с глубиной.

А. А. Петровский приводит примеры, где этот метод дает вполне удовлетворительные результаты. Теоретическую оценку этого метода в общем виде дать очень трудно, ясно, что результат этот нельзя понимать буквально; при наличии одной резкой границы, на которой электропроводность меняется в зависимости от H скачком, кривые $\bar{\sigma}$, как мы видим на палетках, меняются плавно, и кривые для $\sigma(H)$ по методу Петровского, конечно, получатся также плавными. Весьма возможно, что для целого ряда типичных формаций кривые $\sigma(H)$ при том или ином выборе множителя α будут давать достаточно близкое представление о характере электропроводности с глубиной, и, может быть, этот метод окажется в таких случаях полезным. Во всяком случае, для теоретического обоснования пределов применимости этого метода необходимо точно рассчитать ряд типичных случаев нескольких слоев и сравнить то, что получается при их анализе методом Петровского, с теми данными, которые положены в основу расчета.

§ 28. ТЕОРИЯ КАРОТАЖА *

С 1928 г. фирма Шлюмберже применяет метод, называемый им *каротаж* (carottage, electrical coring). Метод этот имеет целью определять сопротивление пород, пересекаемых буровой скважиной,

* Результаты последующих исследований по теории каротажа сопротивления и ее приложению приведены в работах [2, 4, 7, 36, 37, 38, 40, 41, 47, 48, 49, 50, 51, 71]. — Прим. ред.

без их извлечения. Если для пород данной свиты установлена определенная корреляция между удельным сопротивлением и геологической характеристикой, то буровая скважина, вдоль оси которой распределение удельного сопротивления известно, дает то же самое, что и извлеченный из скважины керн. Понятно, что упомянутую корреляцию не всегда удастся установить однозначно и что для установления ее необходимо иметь контрольные геологические данные для ряда каротированных скважин данного района. С другой стороны, Шлюмберже указывает ряд примеров, где удельное сопротивление давало более важные эксплуатационные указания, чем простое геологическое опознание пересекаемых пород, в особенности таких, которые не извлекаются в виде компактного керна; так, например, пески, пропитанные соленой или пресной водой, газами или нефтью, имеют весьма различное удельное сопротивление в натуральном состоянии, которое невозможно сохранить при их извлечении из скважины. В последнее время Шлюмберже достиг еще более детальных указаний, измеряя потенциал естественного поля в скважине и связав его значения с явлениями просачивания почвенной воды из породы в скважину или раствора, заполняющего скважину из последней в окружающую породу.

Принцип метода чрезвычайно прост. Предположим, что мы имеем буровую скважину, наполненную «раствором», т. е. водой, которая подается в нее в процессе бурения для вымывания шлама; после того как штанги вынуты, но обсадные трубы еще не опущены, в нее опускается трехжильный хорошо изолированный кабель. Одна жила кончается питающим электродом A , две других — измерительными электродами I и II . Второй питающий электрод находится у поверхности земли (рис. 72), так что поле вокруг электрода A можно считать полем одного электрода. Не обращая пока внимания на существование скважины, положим, что все три электрода расположены в самой породе, причем будем считать ее однородной в пределах значительно больших, чем расстояние от A до дальнего измерительного электрода. Тогда мы имеем схему одноэлектродного поля и, измеряя силу тока I , выходящего из A , и разность потенциалов V между измерительными электродами, мы будем иметь, обозначая через z_2 и z_1 расстояния измерительных электродов от питающего (рис. 72),

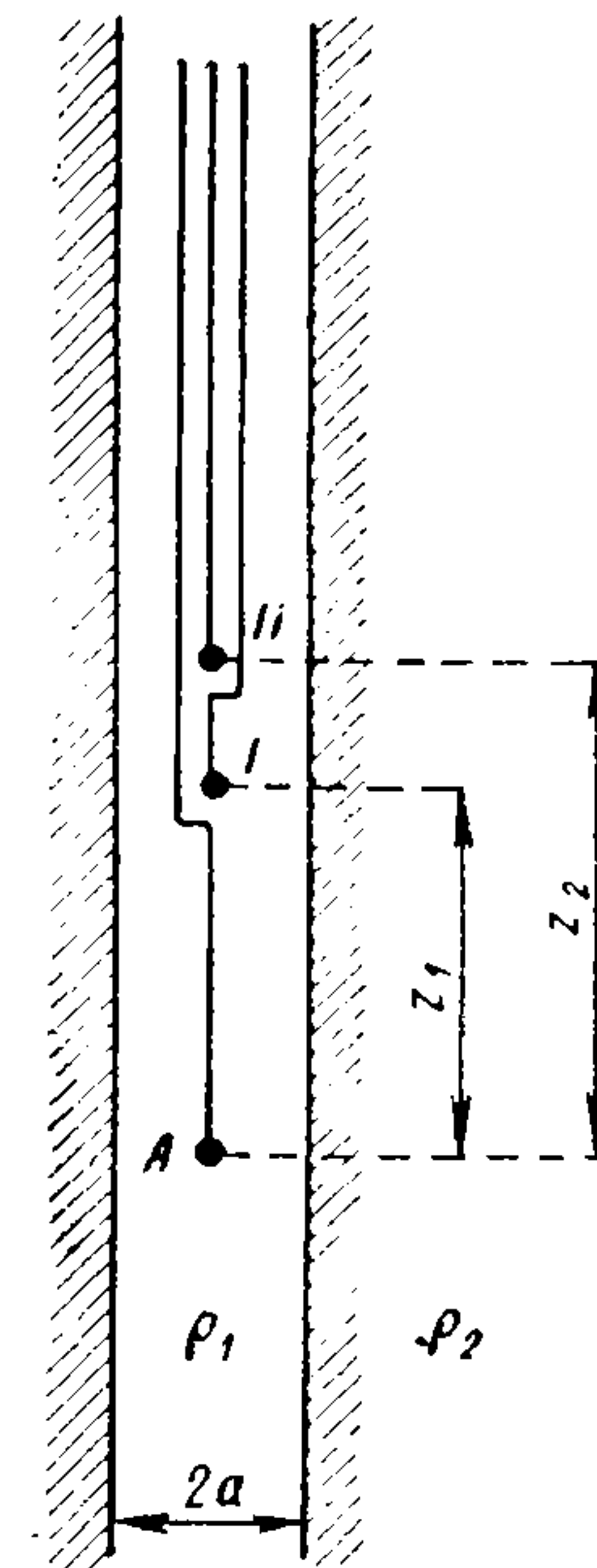


Рис. 72.

$$V = \varphi_I - \varphi_{II} = \frac{I\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2} \right) = \frac{I\rho}{3\pi} \cdot \frac{z_2 - z_1}{z_2 z_1},$$

отсюда находим

$$\rho = \frac{4\pi V}{I} \cdot \frac{z_2 z_1}{z_2 - z_1} = M \frac{V}{I} \quad (385)$$

где

$$M = 4\pi \frac{z_2 z_1}{z_2 - z_1} \quad (386)$$

зависит от размеров установки.

Для многих целей практики расчет по этой простой формуле оказывается достаточным. Действительно, для распознавания тех же самых пластов в различных скважинах, при соблюдении примерного постоянства их диаметров и сопротивления раствора, не особенно важно, является ли найденное ρ истинным или условным; но для большей уверенности в заключениях, для возможности учета упомянутых факторов (диаметр, сопротивление раствора), желательно уточнить теорию, рассмотрев действительное распределение тока в данной схеме.

Оказывается, что при наличии сопротивления породы, значительно превышающего сопротивление раствора, получаемые ρ могут быть довольно далеки от истинных. Развитие теории в этом направлении важно еще и потому, что является очень заманчивым распространить методику каротажа на разведочные скважины при бурении на металлические руды, уголь и другие ископаемые. При этом можно ожидать случаи, когда проходимые скважиной породы будут иметь большие удельные сопротивления, и дифференцировать их друг от друга можно будет только умея верно определять ρ при больших отношениях сопротивления породы и содержащегося в скважине раствора.

Теория этого вопроса разработана в Теоретическом отделе НИФИ при ЛГУ В. А. Фоком и изложена им, с подробным освещением ряда математических вопросов и с указанием таблиц для практических вычислений, в отдельной монографии [104]. Поэтому мы в дальнейшем ограничиваемся выводом основной формулы и приводим без доказательства основные этапы дальнейшей ее теоретической обработки.

Согласно обозначениям рис. 72, мы имеем следующую задачу: в начале координат находится точечный источник A ; граница между средой ρ_1 (раствор) и ρ_2 (окружающая порода) есть цилиндр радиусом a . Требуется найти распределение потенциала в областях 1 и 2 и вычислить разность потенциалов между точками оси с координатами z_1 и z_2 .

Решение будем искать в виде

$$\varphi_1 = \frac{I\rho_1}{4\pi a} v; \quad \varphi_2 = \frac{I\rho_1}{4\pi a} w, \quad (387)$$

где v есть функция от координат, которая в начале координат должна вести себя как a/R и во всем пространстве внутри цилиндра удовлетворять уравнению Лапласа, функция w точно также должна удовлетворять уравнению Лапласа в пространстве вне цилиндра и в бесконечности обращаться в нуль.

Условия на границе следующие:

$$\text{при } r = a, \quad v = w; \quad (388)$$

$$\frac{1}{\rho_1} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{\rho_2} \cdot \frac{\partial w}{\partial r}. \quad (389)$$

Поле имеет симметрию вращения вокруг оси Z , поэтому уравнение Лапласа напишем в цилиндрических координатах, считая, что наши функции от азимута не зависят

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0,$$

и такое же уравнение для w .

Применяя здесь метод разделения переменных при разыскании частных решений, мы положим $v = f(r) Z(z)$ и придем к уравнению

$$\frac{1}{f} \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{df}{dr} \right) + \frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0.$$

В отличие от § 22, где мы до этого момента поступали точно так же, как и сейчас, мы положим

$$\frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\lambda^2, \quad (390)$$

отчего уравнение для f получит вид

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{df}{dr} - \lambda^2 f = 0. \quad (391)$$

Общий интеграл (380) есть

$$Z(z) = \alpha \cos \lambda z + \beta \sin \lambda z, \quad (392)$$

а уравнение (381) приводится к виду

$$\frac{d^2 f}{d(\lambda r)^2} + \frac{1}{\lambda r} \cdot \frac{df}{d\lambda r} - f = 0 \quad (391a)$$

и совпадает с уравнением (322), имеющим, как мы видели, два линейно независимых интеграла $I_0(\lambda r)$ и $K_0(\lambda r)$, так что его общий интеграл

$$f = \gamma I_0(\lambda r) + \delta K_0(\lambda r). \quad (393)$$

Для $1/R$ вместо выражения (308) мы возьмем

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_0(\lambda r) \cos \lambda z d\lambda, \quad (394)$$

которое можно получить из (308) путем применения теоремы, данной в формуле (334). Функция $v' = v - \frac{a}{R}$ должна оставаться конечной всюду внутри цилиндра, следовательно во всех точках его оси; функция w должна исчезать при $r \rightarrow \infty$ при всяком z ; на основании

известных нам свойств функций I_0 и K_0 эти требования очень удобно оформляются положением

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{a}{R} + \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} I_0(\lambda r) \cos \lambda z g_1(\lambda) d\lambda = \\ &= \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} (K_0(\lambda r) + g_1(\lambda) I_0(\lambda r) \cos \lambda z) d\lambda; \\ w &= \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} K_0(\lambda r) \cos \lambda z g_2(\lambda) d\lambda, \end{aligned} \right\} \quad (395)$$

где g_1, g_2 — неизвестные функции от λ .

Из решения (392) взят только член с $\cos \lambda z$ ввиду того, что поле должно быть симметричным относительно плоскости $z = 0$, содержащей питающий электрод. Выбор I_0 и K_0 в соответствующих местах однозначно определяется тем, что K_0 при $r \rightarrow \infty$ обращается в нуль, а при $r \rightarrow 0$ в логарифмическую бесконечность, так что для области 1 оно непригодно, так же как и I_0 непригодно для области 2, стремясь к бесконечности при $r \rightarrow \infty$. Условия (388) и (389) при $r = a$ будут выполнены, если мы определим функции $g_1(\lambda)$ и $g_2(\lambda)$ из уравнений

$$\left. \begin{aligned} g_1(\lambda) I_0(\lambda a) - g_2(\lambda) K_0(\lambda a) &= -K_0(\lambda a); \\ \frac{1}{\rho_1} g_1(\lambda) I_1(\lambda a) + \frac{1}{\rho_2} g_2(\lambda) K_1(\lambda a) &= \frac{1}{\rho_1} K_1(\lambda a), \end{aligned} \right\} \quad (396)$$

где мы для соблюдения равенства интегралов приравниваем подынтегральные функции и пользуемся соотношениями

$$\frac{dI_0(x)}{dx} = I_1(x); \quad \frac{dK_0(x)}{dx} = -K_1(x).$$

Решая уравнение (396) относительно g_1 , получаем

$$g_1 = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) \frac{K_0(\lambda a) K_1(\lambda a)}{K_1(\lambda a) I_0(\lambda a) + \frac{\rho_2}{\rho_1} K_0(\lambda a) I_1(\lambda a)}, \quad (397)$$

Подставляя (397) в (395), получим

$$v = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \left[K_0(\lambda r) + \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right) \frac{K_0(\lambda a) K_1(\lambda a) I_0(\lambda r)}{K_1(\lambda a) I_0(\lambda a) + \frac{\rho_2}{\rho_1} K_0(\lambda a) I_1(\lambda a)} \right] \cos \lambda z d\lambda.$$

В этом выражении мы введем обозначение $\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 = \alpha$ и новую переменную интегрирования $\lambda a = \mu$.

Вводим также обозначения для приведенных значений координат r и z

$$\frac{r}{a} = r'; \quad \frac{z}{a} = z'.$$

Тогда мы получим

$$v = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[K_0(\mu r') + \alpha \frac{K_0(\mu) K_1(\mu) I_0(\mu r')}{K_1(\mu) I_0(\mu) + (\alpha + 1) K_0(\mu) I_1(\mu)} \right] \cos \mu z' d\mu,$$

в котором можно упростить выражение знаменателя, воспользовавшись соотношением

$$I_0(\mu) K_1(\mu) + I_1(\mu) K_0(\mu) = \frac{1}{\mu},$$

известным из теории бесселевых функций.

Таким образом, в окончательном виде наше решение получает вид

$$v(z', r') = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[K_0(\mu r') + \alpha \frac{\mu K_0(\mu) K_1(\mu) I_0(\mu r')}{1 + \alpha \mu K_0(\mu) I_0(\mu)} \right] \cos \mu z' d\mu. \quad (398)$$

Аналогично доказанной в § 24 теореме можно доказать, что

$$\int_0^{\infty} f(\mu) \cos \mu z' d\mu = - \int_0^{\infty} \text{Im} [f(it)] e^{-tz'} dt,$$

если $f(\mu)$ регулярна для всех значений комплексной переменной μ , для которых

$$\text{Re}(\mu) > 0$$

и в указанной полуплоскости переменной μ интеграл

$$\int f(\mu) \cos \mu z' d\mu$$

по дуге окружности с бесконечно большим радиусом исчезает. Установив особым исследованием, что эти условия имеют место, В. А. Фок приводит выражение (398) к виду

$$v(z', r') = (1 + \alpha) \int_0^{\infty} \frac{J_0(tr') e^{-tz'} dt}{[1 - \alpha t I_1(t) K_0(it)]^2}. \quad (399)$$

Полагая здесь $r' = 0$, мы получаем для точек на оси цилиндра

$$v(z') = (1 + \alpha) \int_0^{\infty} \frac{e^{-tz'} dt}{[1 - \alpha b(t)]^2 + \alpha^2 [c(t)]^2}, \quad (400)$$

где знаменатель написан в раскрытом виде, причем для величин

$$b(t) = -\frac{\pi}{2} t J_1(t) Y_0(t);$$

$$c(t) = \frac{\pi}{2} t J_1(t) J_0(t)$$

в монографии В. А. Фока имеются таблицы [110].

Когда $\alpha = 0$, т. е. электроды погружены в однородную среду, из (400) легко получить

$$v(z') = \frac{1 + \alpha}{z'} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \cdot \frac{a}{z}.$$

Подставляя это в (387), получаем для точек оси цилиндра

$$\varphi(z, 0) = \frac{I\rho_2}{4\pi z},$$

т. е. исходную формулу для элементарной теории, приводящей к формулам (385) и (386).

Для малых значений α , т. е. отношений ρ_2/ρ_1 , близких к единице, интеграл (400) можно заменить приближенным выражением

$$v(z') \approx \frac{\rho_2}{\rho_1 z'} \left\{ 1 + \alpha \left[\frac{2}{z'^2} \left(\ln 2z' - \frac{3}{2} \right) - \frac{9}{z'^4} \left(\ln 2z' - \frac{17}{2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \alpha^2 \frac{18}{z'^4} \left[(\ln 2z')^2 - \frac{25}{6} \ln 2z' + \frac{35}{12} + \frac{\pi^2}{12} \right] \right\}. \quad (401)$$

Если последний член этого выражения оказывается незначительной поправкой, то выражение пригодно для вычислений. Так как разложение (401) идет по степеням величины

$$\frac{\alpha}{z'^2} = \alpha \left(\frac{a}{z} \right)^2,$$

то видно, что поправки к элементарной теории при данном α будут тем меньше, чем больше отношение расстояния от измерительных электродов до питающего к диаметру скважины. Полагая, что последний поправочный член должен быть не больше 0,05, т. е. требуя точность порядка единиц процентов, можно подсчитать, что при z около 3 м, $a \approx 3$ см с формулой (401) можно идти примерно до $\alpha = 170$, причем первый поправочный член будет иметь значение 0,13. Ввиду медленного убывания членов, весьма вероятно, что двух членов разложения уже недостаточно, и вычисление по формуле (401) для этого значения α дает только ориентировочный результат.

Для скважины с диаметром 25 см ($a = 12,5$ см) и при том же значении z предел применимости формулы (401) будет лежать при значении α примерно в 16 раз меньшем, т. е. около $\alpha = 10$. Формула (401) может быть полезной на практике для быстрой оценки допустимости применения элементарной формулы; представляя ее в виде

$$v(z') = \frac{\rho_2}{\rho_1 z'} [1 + \alpha A(z') + \alpha^2 B(z')] \quad (402)$$

и пользуясь логарифмическими графиками коэффициентов A и B (рис. 73), легко будет производить ориентировочные подсчеты. Когда $\rho_2 < \rho_1$, величина α отрицательна и по абсолютному значению

не больше единицы. В этом случае для всех практически применяемых значений z' формула (402) и график рис. 73 показывают, что поправка к элементарной формуле будет весьма мала, так что, учитывая неточность в определении ρ_1 , можно будет ею пренебречь и пользоваться непосредственно формулами (385) и (386).

При широких скважинах, как мы видели, применимость не только элементарной формулы, но и более точной формулы (401), довольно ограничена, если не брать очень большие разности электродов, что неудобно не только технически, но и методически, так как не позволяет отбивать каротажем слой небольшой мощности. В таком случае необходимо обратиться к результатам В. А. Фока, основанным на вычислении значения интеграла (400) путем числовых квадратур, и пользования специальными приближенными формулами для очень больших значений параметра α . Кроме ряда указаний и вспомогательных таблиц для систематических расчетов, в указанной монографии даются в окончательном виде кривые для перехода от кажущегося сопротивления ρ_0 , вычисленного по данным измерений на основании элементарной формулы, к истинным значениям ρ_2 окружающей скважину породы.

Относительные разности электродов приняты следующие:

$$\frac{z'_2}{z'_1} = \frac{4}{3},$$

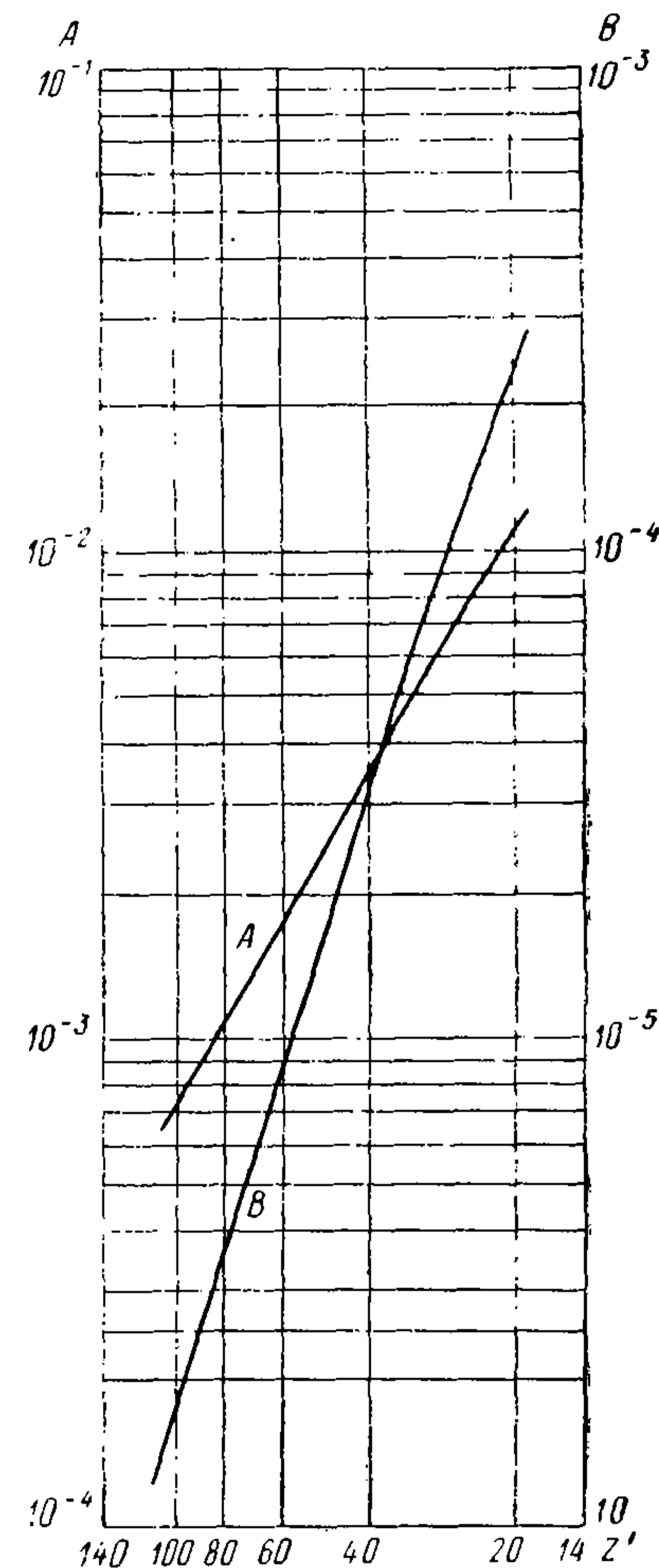


Рис. 73.

что является, по-видимому, довольно обычным. В таком случае множитель M формулы (385) по (386) будет равным

$$M = 4\pi a \frac{z'_2 z'_1}{z'_2 - z'_1} = 4\pi a 4z'_1.$$

Разность потенциалов на измерительных электродах равна

$$V = \varphi(z_1) - \varphi(z_2) = \frac{I\rho_1}{4\pi a} [v(z'_1) - v(z'_2)]$$

и по формуле (385) мы получаем кажущееся удельное сопротивление

$$\rho_0 = M \frac{V}{I} = 4\rho_1 z'_1 [v(z'_1) - v(z'_2)].$$

Для трех значений диаметра скважины $2a = 25; 18,75; 14,0625$ см мы получаем, полагая $z_1 = 3$ м и $z_2 = 4$ м,

$$z'_1 = 24, \quad z'_2 = 32,$$

$$z'_1 = 32, \quad z'_2 = 42,67,$$

$$z'_1 = 42,67, \quad z'_2 = 56,89,$$

и для этих трех пар значений z'_1 и z'_2 разность $v(z'_1) - v(z'_2)$ вычислена для достаточного числа значений параметра α . Отсюда было получено

$$\frac{\rho_0}{\rho_1} = 4z'_1 [v(z'_1) - v(z'_2)] = f\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right). \quad (403)$$

В монографии В. А. Фока [104] даны подробные таблицы функции f , по которым с точностью, превосходящей требования практики, можно по данному отношению ρ_0/ρ_1 найти ρ_2/ρ_1 и таким образом определить истинное удельное сопротивление породы ρ_2 . Совсем просто эта операция проводится при помощи графика, приложенного к указанной книге. Для иллюстрации полученных результатов мы даем в несколько меньшем масштабе график рис. 74, который в большинстве случаев также может быть использован для расчета. На этом графике по оси абсцисс отложены (в логарифмическом масштабе) отношения ρ_0/ρ_1 , а по оси ординат в том же масштабе ρ_2/ρ_0 ; так как

$$\rho_2 = \rho_0 \frac{\rho_2}{\rho_0}, \quad (404)$$

то ординаты кривых представляют собой поправочные множители к измеренной величине ρ_0 , дающие по (404) истинное значение ρ_2 . Расчет рис. 74 был сделан на основании таблиц В. А. Фока по формуле

$$\frac{\rho_2}{\rho_0} = \frac{\rho_2}{\rho_1} : f\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right).$$

Рис. 74 показывает, что при возрастании отношения ρ_0/ρ_1 истинное ρ_2 сначала меньше ρ_0 , а затем становится больше ρ_0 , причем,

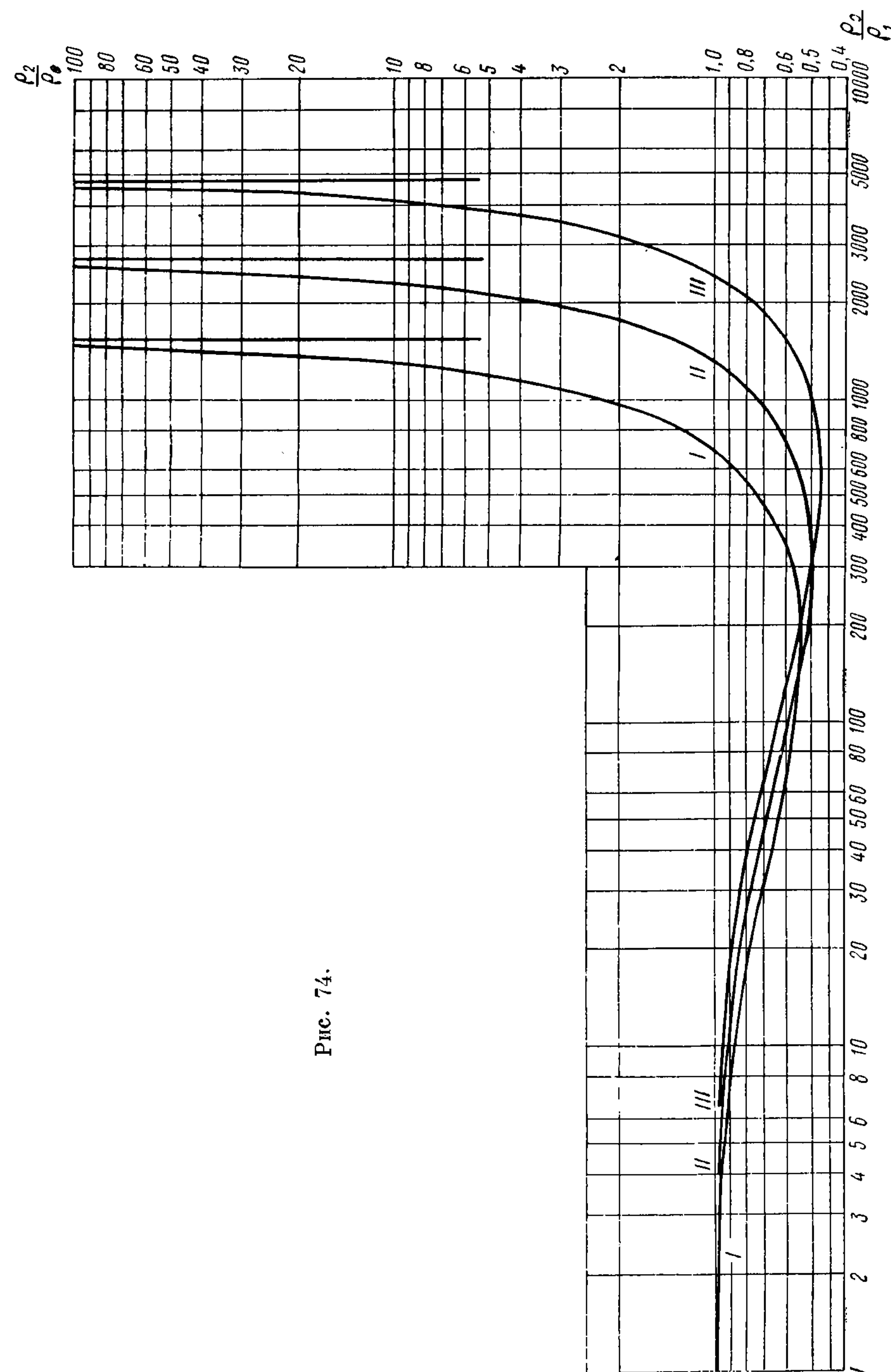


Рис. 74.

ОСНОВАНИЯ ТЕОРИИ ОБЪЕМНЫХ ТОКОВ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ *

§ 29. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В § 3 мы показали, что среда, состоящая из более или менее правильного чередования параллельных напластований разнородных пород, в известном масштабе может быть охарактеризована как анизотропная, т. е. такая, к которой можно применить соотношения типа VIII:

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y + \sigma_{xz}E_z; \\ J_y &= \sigma_{yx}E_x + \sigma_{yy}E_y + \sigma_{yz}E_z; \\ J_z &= \sigma_{zx}E_x + \sigma_{zy}E_y + \sigma_{zz}E_z. \end{aligned} \right\}$$

Тензор электропроводности, т. е. совокупность величин σ с двумя значками, как известно, обладает свойством симметрии и, как всякий симметричный тензор второго ранга, может быть отнесен к своим главным осям; другими словами, для всякой среды, анизотропной в отношении электропроводности, существуют такие три взаимно перпендикулярных направления, для которых имеют место соотношения

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \sigma_1 E_x; \\ J_y &= \sigma_2 E_y; \\ J_z &= \sigma_3 E_z, \end{aligned} \right\} \quad (405)$$

если эти направления выбрать за оси прямоугольной системы координат.

Так как мы будем рассматривать случай макроскопической анизотропии, созданной параллельными напластованиями, то мы будем иметь дело с двумя различными электропроводностями, для любого направления вдоль пластов мы имеем по (32) и (37)

$$\sigma_l = \bar{\sigma} = \frac{1}{D} \sum d_s \sigma_s; \quad \rho_l = \frac{D}{\sum \frac{d_s}{\rho_s}}, \quad (406)$$

* Основные результаты этой главы были получены С. М. Шейнманном. С необходимостью разобраться в теории анизотропных сред впервые пришлось встретиться опытной электроразведочной партией, работавшей в 1932 г. в Кузбассе на угольных месторождениях. Дальнейшая разработка теории велась мною совместно с С. М. Шейнманном во время пребывания в упомянутой партии в качестве консультанта.

благодаря крутому подъему кривых, определение поправочного множителя делается очень неточным, когда этот множитель приближается к 10. Сравнение кривых I, II, III показывает, что в таком случае нужно перейти к большим разностям электродов.

Чтобы при данном диаметре скважины воспользоваться вычисленными кривыми, нужно задаться отношением $\frac{z_2}{z_1} = \frac{4}{3}$ и подобрать длину z_1 соответственно диаметру скважины так, чтобы z_1' получило бы одно из вышеуказанных значений. Кроме того, нужно определить сопротивление раствора, заполняющего скважину, что, конечно, не представляет особых затруднений.

При наличии не очень мощных пластов нужно иметь в виду, что для получения верных значений ρ_2 необходимы такие разности электродов, чтобы все три электрода могли поместиться внутри пласта и не слишком близко к его краям; если это требование нельзя выполнить, то истинные значения сопротивлений получить невозможно, но изложенная здесь теория дает возможность сильно уменьшить разности электродов при данном диаметре скважины, не боясь получить совершенно превратные результаты. Для этого потребуются провести систематические вычисления поправочных кривых для других значений z_1' и z_2' , руководствуясь монографией В. А. Фока [104]. Если, пользуясь изложенными здесь результатами, можно оправдать применение элементарных формул (385) и (386), то можно дать теоретическую картину кривых ρ_0 для случая перехода каротажного снаряда из мощного пласта одного сопротивления в такой же пласт другого сопротивления; основой для расчета служат формулы, выведенные в § 21 для потенциала источника, находящегося около контакта двух пород. Ввиду того, что питающий электрод погружен целиком в среду, нужно в формуле (282) в знаменателе вместо 2 писать 4. При прохождении через пласт небольшой мощности (по сравнению с длиной снаряда) нужно пользоваться теорией, изложенной в § 22. Для случая контакта двух мощных пластов легко показать, что граница будет отбиваться правильно, если измеренные ρ_0 относить к середине измерительных электродов, и (в момент прохождения этой точки через контакт) питающий электрод будет в среде большего сопротивления; в противном случае ошибка в определении места контакта возможна порядка длины снаряда. Если пользоваться четырьмя электродами, воспроизводя в каротажном снаряде обычную установку профилирования, то должны получаться кривые, совпадающие по типу с кривыми рис. 61. Тот же результат, что и с четырехэлектродной установкой, получается при наложении диаграмм, наблюдаемых с подошвенным и кровельным трехэлектродными зондами.

В заключение этой главы укажем, что разобранные здесь вопросы далеко не исчерпывают всех конкретных случаев, которые могут встретиться в природе, но уже на этих примерах читателю должно стать ясным, какой теоретический и математический аппарат нужно себе усвоить для того, чтобы развивать методику в соответствии с возникающими в полевой работе задачами.

а в направлении, перпендикулярном к плоскости напластований, мы имеем по (30) и (37)

$$\sigma_t = \frac{1}{\rho} = \frac{D}{\sum d_s \rho_s}; \quad \rho_t = \frac{1}{D} \sum d_s \rho_s. \quad (407) *$$

Напомним, что D — некоторая минимальная мощность свиты, для которой величины, определяемые формулами (406) и (407), имеют определенные значения, характеризующие свиту в целом, а масштаб наблюдений таков, что D может рассматриваться как достаточно малая величина.

Для практически наиболее интересного случая чередования двух пород (например, уголь и вмещающая порода) мы обозначим через d_a — сумму мощностей пластов породы a на протяжении D , через d_b — сумму мощностей пластов породы b , так что

$$\frac{d_a}{D} = 1 - \frac{d_b}{D} = n_a \quad (408)$$

будет относительная насыщенность свиты породой a (по объему). Обозначим через q_{ab} отношение удельных сопротивлений пород a и b

$$q_{ab} = \frac{\rho_a}{\rho_b}. \quad (409)$$

В этих обозначениях нетрудно придать формулам (406) и (407) вид

$$\rho_t = \frac{\rho_b}{1 - n_a \left(1 - \frac{1}{q_{ab}}\right)}; \quad (410)$$

$$\rho_t = \rho_b [1 + n_a (q_{ab} - 1)]. \quad (411)$$

Направив ось Z поперек пластов, а оси X и Y произвольно в плоскости напластования, мы имеем

$$J_x = \frac{1}{\rho_t} E_x; \quad J_y = \frac{1}{\rho_t} E_y; \quad J_z = \frac{1}{\rho_t} E_z. \quad (412)$$

Основное дифференциальное уравнение задачи мы получим, полагая

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (413)$$

и составляя расхождение вектора плотности тока, которое в стационарном случае должно равняться нулю

$$\operatorname{div} J = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} + \frac{\partial J_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho_t} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{\rho_t} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (414)$$

* Соотношения (406) и (407) вполне соответствуют наглядному представлению о сопротивлении слоистой толщ, как параллельно включенных пластов при направлении тока вдоль последних, и последовательному включению их при поперечном направлении тока.

Уравнение (414) отличается от уравнения Лапласа, но может быть приведено к нему введением новых, неравномерных координат

$$\xi = \sqrt{\rho_t} x; \quad \eta = \sqrt{\rho_t} y; \quad \zeta = \sqrt{\rho_t} z. \quad (415)$$

В этих координатах мы получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} = 0, \quad (416)$$

т. е. обычное уравнение Лапласа.

§ 30. ТОЧЕЧНЫЙ ИСТОЧНИК В НЕОГРАНИЧЕННОЙ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ *

Уравнение (416) имеет, как мы хорошо знаем, решение, соответствующее точечной особенности в начале координат,

$$\varphi = \frac{C}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}. \quad (417)$$

Переходя к настоящим пространственным координатам, мы получаем решение уравнения (414)

$$\varphi = \frac{C}{\sqrt{\rho_t (x^2 + y^2) + \rho_t z^2}}. \quad (418)$$

Эквипотенциальные поверхности $\varphi = \text{const}$ будут иметь уравнения

$$\rho_t (x^2 + y^2) + \rho_t z^2 = \text{const}$$

или

$$\frac{x^2}{\rho_t} + \frac{y^2}{\rho_t} + \frac{z^2}{\rho_t} = \text{const}, \quad (419)$$

т. е. будут подобными концентрическими эллипсоидами вращения с осями, пропорциональными $\sqrt{\rho_t}$ по оси z и $\sqrt{\rho_t}$ по осям X и Y . Из соотношений (410) и (411) легко вычислить

$$\frac{\rho_t}{\rho_t} = \frac{q_{ab}}{q_{ab} + n_a (1 - n_a) (q_{ab} - 1)^2},$$

из которого видно, что это отношение всегда меньше единицы, если только $n_a \neq 0$ или $q_{ab} \neq 1$, т. е. если мы имеем на самом деле две различные породы. Поэтому эквипотенциальные поверхности всегда будут *сплюснутыми* эллипсоидами вращения, с малой полуосью, направленной по нормали к пластам.

* Результаты дальнейших исследований полей точечных и дипольных источников в анизотропных средах применительно к конкретным методам и задачам изложены в опубликованных работах [24, 57, 92, 93, 94, 111]. — Прим. ред.

Составляющие J получаем из (412) и (413), пользуясь выражением для потенциала (418),

$$\left. \begin{aligned} J_x &= -\frac{1}{\rho_l} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{Cx}{[\rho_l(x^2+y^2) + \rho_t z^2]^{3/2}}; \\ J_y &= -\frac{1}{\rho_l} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{Cy}{[\rho_l(x^2+y^2) + \rho_t z^2]^{3/2}}; \\ J_z &= -\frac{1}{\rho_l} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{Cz}{[\rho_l(x^2+y^2) + \rho_t z^2]^{3/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (420)$$

Отсюда получаем

$$\left. \begin{aligned} J_x : J_y : J_z &= x : y : z; \\ J^2 &= \frac{C^2 R^2}{[\rho_l(x^2+y^2) + \rho_t z^2]^3}. \end{aligned} \right\} \quad (421)$$

Вводя сферические координаты с осью Z (как полярной) и углом θ между радиусом-вектором точки и осью Z , легко получить из последней формулы

$$\left. \begin{aligned} J^2 &= \frac{C^2}{R^4 (\rho_l \sin^2 \theta + \rho_t \cos^2 \theta)^3}; \\ J &= \frac{C}{R^2 (\rho_l \sin^2 \theta + \rho_t \cos^2 \theta)^{3/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (422)$$

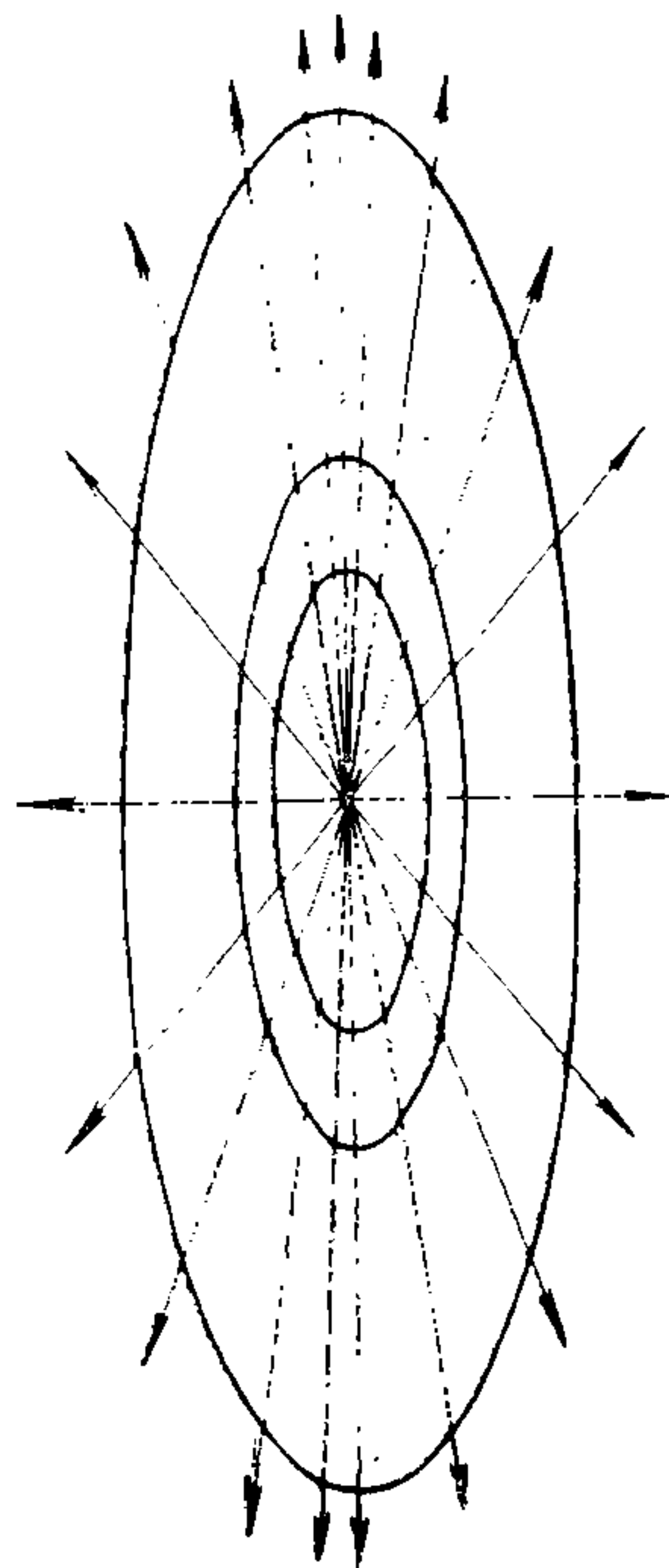


Рис. 75.

Формулы (421) и (422) показывают, что линии тока, несмотря на анизотропию, оказываются радиальными, и по радиусу плотность тока убывает обратно пропорционально квадрату расстояния, причем множитель пропорциональности зависит от направления. Линии тока и эквипотенциальные поверхности изображены на рис. 75.

Силовые линии электрического поля E , т. е. ортогональные траектории семейства эллипсоидов (419), будут, как легко видеть, кривыми: направление тока, вообще говоря, не параллельно направлению градиента потенциала, что и характерно для анизотропной среды. Только по направлениям координатных осей, т. е. главных осей анизотропии, эти направления совпадают.

Чтобы закончить изучение поля точечного источника, нам остается еще определить значение константы C . Полный ток, расходящийся из точечного источника, равен

$$I = \int J ds = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} J_r R^2 \sin \theta d\theta d\psi,$$

если ψ означает азимут вокруг оси Z . Так как ток радиален, то $J_r = J$ и, подставляя (422), мы имеем

$$I = C \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi \frac{\sin \theta d\theta}{(\rho_l \sin^2 \theta + \rho_t \cos^2 \theta)^{3/2}} = 2\pi C \int_{-1}^{+1} \frac{du}{[\rho_l + (\rho_t - \rho_l) u^2]^{3/2}},$$

где во втором выражении проведено интегрирование по ψ и сделана подстановка $\cos \theta = u$. Выполнив интегрирование, получим

$$I = \frac{4\pi C}{\rho_l \sqrt{\rho_t}}; \quad C = \frac{I}{4\pi} \rho_l \sqrt{\rho_t}. \quad (423)$$

Таким образом, мы получаем окончательное выражение для потенциала точечного источника, из которого поступает ток I в однородную, неограниченную анизотропную среду

$$\varphi = \frac{I \rho_l \sqrt{\rho_t}}{4\pi \sqrt{\rho_l(x^2+y^2) + \rho_t z^2}}. \quad (424)$$

§ 31. ТОЧЕЧНЫЙ ИСТОЧНИК НА ПОВЕРХНОСТИ АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Благодаря тому, что линии тока, исходящие из точечного источника в неограниченной среде, идут строго радиально, мы можем провести в любом направлении плоскость через источник и считать ее за границу одного из получающихся полупространств с изолятором, так как равенство нулю нормальной составляющей J будет автоматически выполнено. Совершенно так же, как и для изотропной среды, для точечного источника, находящегося на границе земля-воздух, мы получим вместо (424)

$$\varphi = \frac{I \rho_l \sqrt{\rho_t}}{2\pi \sqrt{\rho_l(x^2+y^2) + \rho_t z^2}}. \quad (425)$$

Координаты x, y, z отнесены к главным осям тензора электропроводности. Ориентацию напластований относительно поверхности земли принято определять *простиранием*, т. е. направлением пересечения плоскости напластования с горизонтальной плоскостью, и *падением*, т. е. углом α , который плоскость пластов составляет с горизонтом. Введем координатную систему, в которой ось \bar{Z} направлена вертикально вверх, ось \bar{X} по простиранию, и ось \bar{Y} — вкрест простирания.

Выбор направлений осей X и Y в плоскости напластования был пока произволен, будем теперь считать, что ось X совпадает с осью \bar{X} . Формулы преобразования координат следующие (рис. 76):

$$\left. \begin{aligned} x &= \bar{x}; \\ y &= \bar{y} \cos \alpha - \bar{z} \sin \alpha; \\ z &= \bar{y} \sin \alpha + \bar{z} \cos \alpha. \end{aligned} \right\}$$

Подставляя эти выражения в (425) и полагая $\bar{z} = 0$, получаем для точек поверхности земли

$$\varphi = \frac{I\rho_l \sqrt{\rho_t}}{2\pi [\rho_l (\bar{x}^2 + \bar{y}^2 \cos^2 \alpha) + \rho_t \bar{y}^2 \sin^2 \alpha]^{1/2}}. \quad (426)$$

Направление профиля, проведенного через точечный источник O , будем определять азимутом β , отсчитанным от простирания. Тогда мы имеем

$$\bar{x} = r \cos \beta; \quad \bar{y} = r \sin \beta,$$

где r — расстояние от O до данной точки, β вдоль профиля постоянно. Это приводит к формуле

$$\varphi = \frac{I\rho_l \sqrt{\rho_t}}{2\pi r \sqrt{\rho_l + (\rho_t - \rho_l) \sin^2 \beta \sin^2 \alpha}}. \quad (427)$$

Мы располагаем теперь достаточным теоретическим материалом, чтобы разобрать различные методы, основанные на потенциометрических измерениях.

1. Из формулы (426) получаем уравнение эквипотенциальных линий для значения потенциала $\varphi = V$

$$\frac{\bar{x}^2}{\rho_l \cos^2 \alpha + \rho_t \sin^2 \alpha} + \frac{\bar{y}^2}{\rho_l} = \frac{I^2 \rho_l \rho_t}{4\pi^2 V^2 (\rho_l \cos^2 \alpha + \rho_t \sin^2 \alpha)}.$$

Это — эллипсы, вытянутые по простиранию, причем отношение большой полуоси к малой равняется

$$\frac{a'}{b'} = \sqrt{\frac{\rho_l \cos^2 \alpha + \rho_t \sin^2 \alpha}{\rho_l}} = \sqrt{1 + \lambda \sin^2 \alpha}, \quad (428)$$

где λ — величина, представляющая собой меру анизотропии,

$$\lambda = \frac{\rho_t - \rho_l}{\rho_l}. \quad (429)$$

Отношение полуосей зависит от анизотропии и угла падения; при горизонтальном залегании ($\alpha = 0$) мы имеем

$$a' = b'$$

и эквипотенциальные линии — концентрические круги. При вертикальном падении $\alpha = \pi/2$,

$$\frac{a'}{b'} = \sqrt{1 + \lambda} = \sqrt{\frac{\rho_t}{\rho_l}}.$$

Только в этом случае фигура эквипотенциальных линий дает возможность вычислить анизотропию; при наклонном падении мы можем определить только простирание и величину $\lambda \sin^2 \alpha$.

2. Из формулы (427) мы видим, что вдоль определенного профиля потенциал обратно пропорционален расстоянию; сопоставляя (427) с формулой для изотропной среды

$$\varphi = \frac{I\rho}{2\pi r},$$

мы видим, что при всех потенциометрических измерениях с одним или двумя питающими и двумя приемными электродами, расположенными на одной прямой, остаются в силе все формулы, выведенные для изотропной среды, причем в качестве эффективного сопротивления будет получаться величина

$$\rho'_\beta = \frac{\sqrt{\rho_l \rho_t}}{\sqrt{1 + \lambda \sin^2 \beta \sin^2 \alpha}}. \quad (430)$$

При $\beta = 0$ (профиль по простиранию) мы получим

$$\rho'_i = \sqrt{\rho_l \rho_t}, \quad (431)$$

а при $\beta = \pi/2$ (вкрест простирания)

$$\rho'_t = \frac{\sqrt{\rho_l \rho_t}}{\sqrt{1 + \lambda \sin^2 \alpha}}. \quad (432)$$

Весьма замечательно, что эффективное сопротивление вкрест простирания получается *меньше*, чем по простиранию. Если простирание вперед неизвестно, то следует сделать круговое профилирование с одним или двумя питающими электродами для ряда азимутов β и построить полярную или обычную диаграмму ρ' , как функции от азимута. Максимумы и минимумы ρ' должны чередоваться через 90° ; максимальное и минимальное значения ρ' дадут возможность по формулам (431) и (432) определить величины $\sqrt{\rho_l \rho_t}$ и $\lambda \sin^2 \alpha$. Последнюю величину можно назвать мерой кажущейся анизотропии. Сопоставление формул (427) и (430) показывает, что, обозначая через r_β радиус-вектор эквипотенциальной кривой $\varphi = \text{const} = V$, проведенный по азимуту β , мы имеем

$$\frac{\rho'_\beta}{r_\beta} = \frac{2\pi V}{I} = \text{const},$$

т. е. что полярная диаграмма величин ρ'_β подобна эквипотенциальным кривым. Нанесение результатов кругового профилирования в виде такой диаграммы заменяет проведение эквипотенциальных кривых; квадрат отношения большой полуоси полученного эллипса к малой дает, согласно (431) и (432)

$$\frac{a'^2}{b'^2} = 1 + \lambda \sin^2 \alpha$$

или

$$\lambda \sin^2 \alpha = \frac{a'^2 - b'^2}{b'^2}. \quad (433)$$

На рис. 77 изображена такая полярная диаграмма, полученная автором в Кузбассе при участии В. М. Шишова и С. М. Шейнманна. Данные получены таким образом, что измерялся радиальный градиент в точках, расположенных по кругу на расстоянии 300 м от постоянного заземления, находившегося в центре. Другое заземление находилось на расстоянии около 2,5 км.

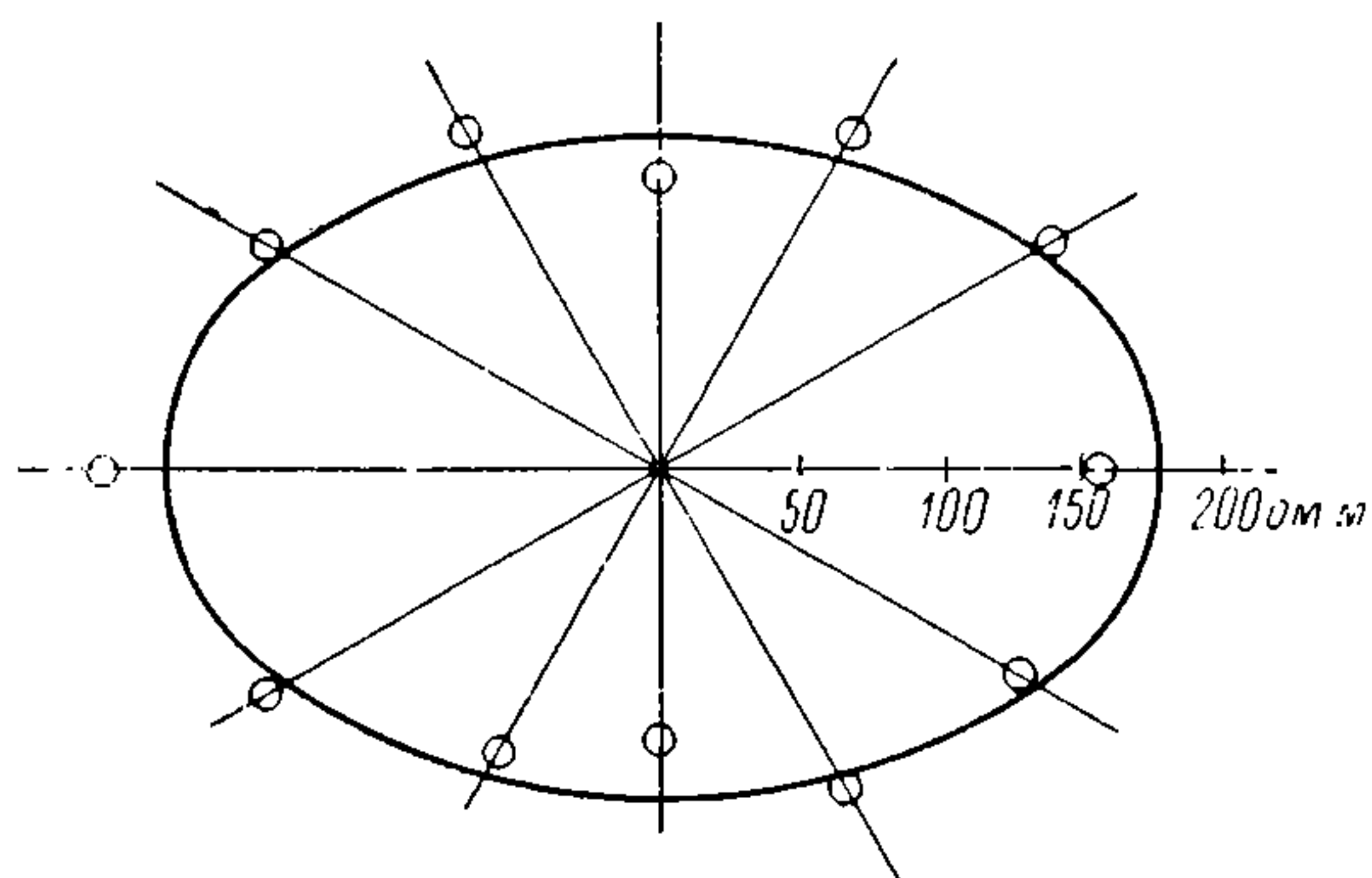


Рис. 77.

Если угол падения известен из каких-либо других данных, то знание величин $\sqrt{\rho_l \rho_t}$ и λ даст возможность определить ρ_l и ρ_t в отдельности, а отсюда по формулам (410) и (411), предполагая известным ρ_b и q_{ab} или одно из них, получить данные о возможных значениях величины n_a , т. е. содержания породы a , что является ценным разведочным результатом, если порода a есть полезное ископаемое, представляющее цель разведки.

§ 32. ТОЧЕЧНЫЙ ИСТОЧНИК НА НЕКОТОРОЙ ГЛУБИНЕ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Определение угла падения потенциометрическим методом возможно, если имеется скважина, в которую опускают изолированный кабель с электродом на конце. Пренебрегая существованием скважины, будем считать, что мы имеем точечный источник, находящийся на глубине h , причем вертикальная проекция его на дневную поверхность известна и нанесена на планшет. Задача заключается в выводе формулы для потенциала на поверхности, где можно проводить промеры одним из обычных способов (площадная съемка распределения потенциала или непосредственное проведение эквипотенциальных линий при помощи цепи из двух электродов). Непосредственное применение метода электрических изображений не дает простого пути к решению этой задачи, так как, рассматривая электрод, опущенный в землю на глубину h , мы должны заполнить верхнее полупространство зеркальным изображением нижнего, т. е. первым делом заполнить анизотропной средой, ориентированной под углом к нижней (рис. 78). Исследование условий на границе двух анизотропных сред и использование их для решения задачи — очень сложно. Но можно поступить иначе, развивая тот прием, при

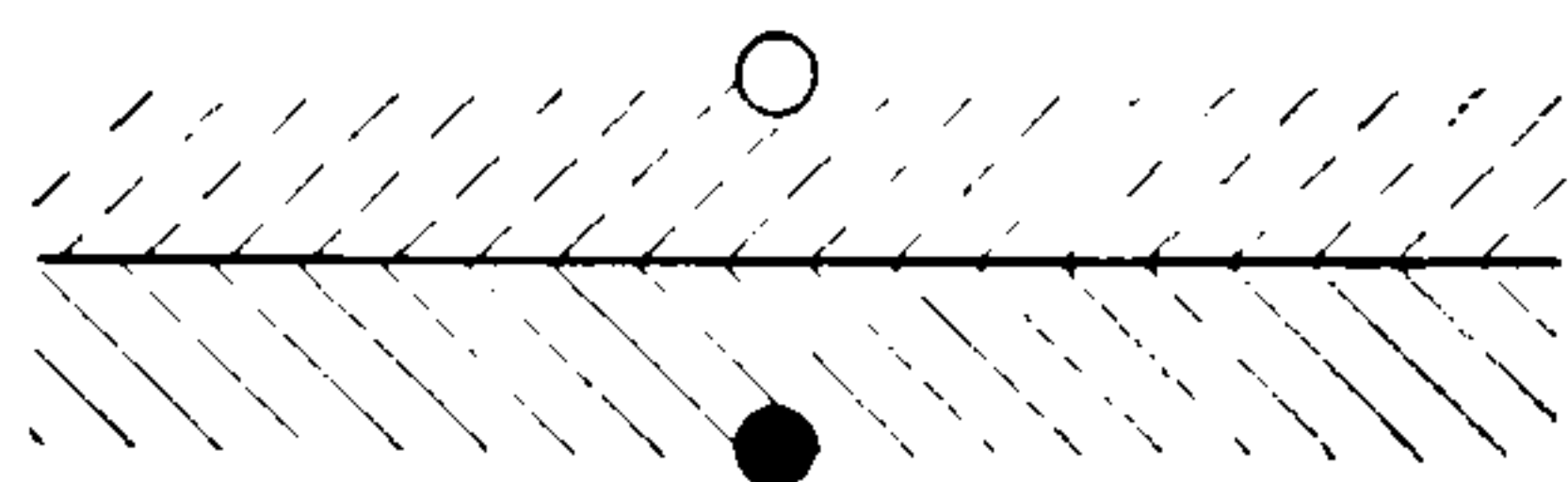


Рис. 78.

посредстве которого мы получили решение задачи об одном точечном электроде. Для этого наряду с действительным пространством, заполненным анизотропной средой, будем рассматривать фиктивное пространство, являющееся в геометрическом отношении его искаженной картиной, а именно такое, в котором введенные в (415) величины ξ, η, ζ являются обычными, равномасштабными координатами.

Для общности рассуждений предположим что $\rho_x \neq \rho_y \neq \rho_z$, и напишем

$$\left. \begin{aligned} J_z &= -\frac{1}{\rho_x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{\rho_x}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}; & \sqrt{\rho_x} J_x &= J'_\xi = -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}; \\ E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \sqrt{\rho_x} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}; & \frac{1}{\sqrt{\rho_x}} E_x &= E'_\xi = -\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \end{aligned} \right\} \quad (434)$$

и аналогичные выражения для координат y, z, η, ζ соответственно. Исходя из положения, доказанного в § 29, что если в действительном пространстве, заполненном анизотропной средой, потенциал удовлетворяет уравнению (415), то в фиктивном он удовлетворяет уравнению Лапласа, мы видим, что если мы это фиктивное пространство заполним фиктивной однородной средой с электропроводностью, равной единице, найдем решение уравнения Лапласа, а также распределение фиктивного тока J' и фиктивного электрического поля E' , то, преобразуя потенциал как скаляр, а составляющие J' и E' по формулам (434) — мы получим соответственное решение для анизотропной среды, причем нужно помнить, что оси X, Y, Z и Ξ, Υ, Z по направлению совпадают с главными осями анизотропии нашей среды. Отметим еще одно важное свойство нашего сопоставления: если в фиктивной среде, заполняющей фиктивное пространство, вектор J' изображается отрезком, имеющим составляющие $\xi_2 - \xi_1, \eta_2 - \eta_1, \zeta_2 - \zeta_1$, так что

$$\frac{J'_\xi}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{J'_\eta}{\eta_2 - \eta_1} = \frac{J'_\zeta}{\zeta_2 - \zeta_1},$$

то в действительном пространстве мы будем иметь соотношения

$$\frac{J_x}{x_2 - x_1} = \frac{J_y}{y_2 - y_1} = \frac{J_z}{z_2 - z_1},$$

что следует из того, что формулы перехода для координат и для составляющих J совпадают

$$\xi = \sqrt{\rho_x} x; \quad J'_\xi = \sqrt{\rho_x} J_x; \text{ и т. д.}$$

Если в решении, полученном для фиктивного пространства, J' оказывается параллельным некоторой прямой или плоскости, то в действительной задаче J будет параллельно прямой или плоскости, в которые переходят первые при геометрическом искажении, соответствующем переходу от фиктивного пространства к действительному и наоборот.

Если мы в однородной среде поместим два источника одинаковой мощности, принимаемой за единицу, в точках A и A' , то с обозначениями, указанными на рис. 79, мы будем иметь выражение для потенциала в любой точке пространства:

$$\varphi = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2},$$

причем из симметрии задачи видно, что в плоскости C' , проведенной перпендикулярно к AA' в середине их расстояния, потенциал $\varphi = 2/q$; эквипотенциальные линии в этой плоскости будут круги с центром в M' , и градиент потенциала по направлению нормали к C' равен нулю. Линии тока I' не пересекают плоскость C' , и мы имеем, таким образом, решение задачи об электроде, опущенном в однородную среду на глубину s под плоской границей C' с изолятором, занимающим верхнюю половину чертежа.

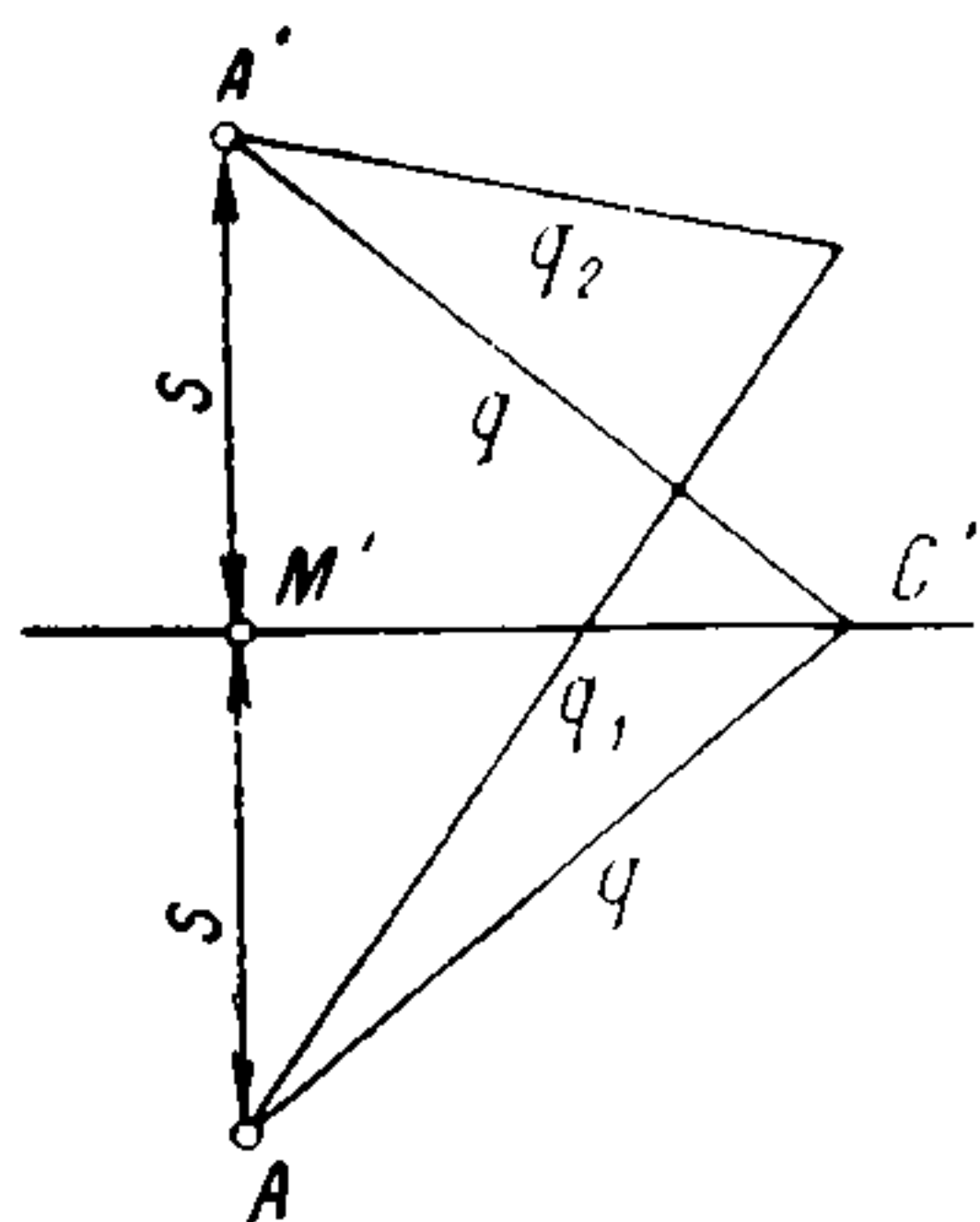


Рис. 79.

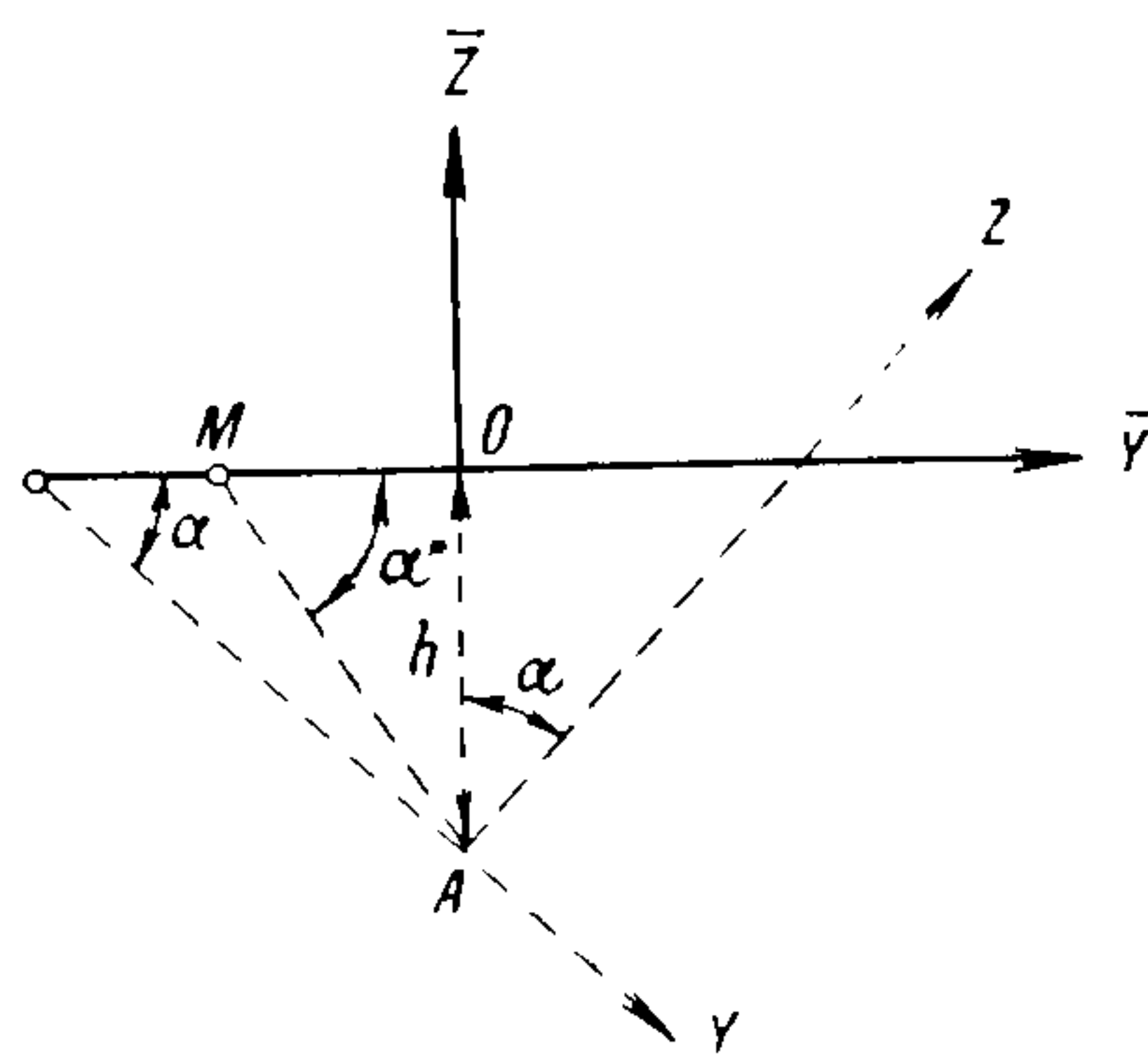


Рис. 80.

Рассматривая это как решение для нашего фиктивного пространства, постараемся выбором осей \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} приспособить его для решения нашей основной задачи.

Направляя оси \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} так же, как и на рис. 76, т. е. ось \bar{X} по простиранию, \bar{Y} вкрест простирания, а \bar{Z} вверх, проведем также в точке A , где находится погруженный электрод, главные оси анизотропии X , Y , Z (рис. 80). Уравнение поверхности земли ($\bar{X}O\bar{Y}$) в координатах x , y , z будет иметь вид

$$-y \sin \alpha + z \cos \alpha = h. \quad (435)$$

По граничным условиям нормальная составляющая тока в этой плоскости должна исчезать.

Переходя к фиктивному пространству, преобразуем (415), удерживая, как начало координат точку A (рис. 81). Уравнение (435) плоскости перейдет в уравнение

$$-\frac{\eta \sin \alpha}{V \rho_y} + \frac{\zeta \cos \alpha}{V \rho_z} = h, \quad (436)$$

которое перепишем в нормальной форме, разделив на

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha}{\rho_y} + \frac{\cos^2 \alpha}{\rho_z}} &= V \bar{Q}; \\ \frac{-\eta \sin \alpha}{V \rho_y \bar{Q}} + \frac{\zeta \cos \alpha}{V \rho_z \bar{Q}} &= \frac{h}{V \bar{Q}}. \end{aligned} \quad (437)$$

Так как нормальная составляющая фиктивного тока должна исчезать именно в этой плоскости, а в точке A должен находиться в фиктивном пространстве точечный источник, то эта плоскость и есть как раз плоскость C' (рис. 79). Длина s перпендикуляра, опущенного на нее из A , дается уравнением (437)

$$s = \frac{h}{V \bar{Q}},$$

а координаты точки M'

$$\begin{aligned} \eta_{M'} &= -s \frac{\sin \alpha}{V \rho_y \bar{Q}} = -\frac{h \sin \alpha}{V \rho_y \cdot \bar{Q}}; \\ \zeta_{M'} &= s \frac{\cos \alpha}{V \rho_z \bar{Q}} = \frac{h \cos \alpha}{V \rho_z \cdot \bar{Q}}, \end{aligned}$$

так как M' есть конец вектора, имеющего длину s и направление нормали к плоскости (436). Точка M' есть центр эквипотенциальных кругов в плоскости C' . Обратный переход к действительному пространству переведет C' в поверхность земли, круги с центром в M' — в эллипсы с центром в M , где M — точка, соответствующая M' при нашем переходе. Координаты точки M получаем, переходя сначала к y и z ,

$$y_M = \frac{1}{V \rho_y} \eta_{M'} = -\frac{h \sin \alpha}{\rho_y \bar{Q}}; \quad z_M = \frac{1}{V \rho_z} \zeta_{M'} = \frac{h \cos \alpha}{\rho_z \bar{Q}},$$

и вычисляя отсюда по формулам преобразования координат системы x , y , z к системе \bar{x} , \bar{y} , \bar{z}

$$\bar{y}_M = y_M \cos \alpha + z_M \sin \alpha = -\frac{h \sin \alpha \cos \alpha}{\bar{Q}} \left(\frac{1}{\rho_y} - \frac{1}{\rho_z} \right).$$

Последняя формула после простых преобразований, замены обозначений ρ_y и ρ_z через прежние ρ_l и ρ_t и введения величины λ , приводится к виду

$$\bar{y}_M = -h \operatorname{ctg} \alpha \frac{(\rho_t - \rho_l) \sin^2 \alpha}{\rho_l \sin^2 \alpha + \rho_l \cos^2 \alpha} = -h \operatorname{ctg} \alpha \frac{\lambda \sin^2 \alpha}{1 + \lambda \sin^2 \alpha}. \quad (438)$$

Так как $\bar{y}_M = -MO$ (см. рис. 80), то, вводя в рассмотрение угол «кажущегося падения» α^* , мы имеем

$$\operatorname{ctg} \alpha^* = \frac{MO}{h} = \frac{\lambda \sin^2 \alpha}{1 + \lambda \sin^2 \alpha} \operatorname{ctg} \alpha. \quad (439)$$

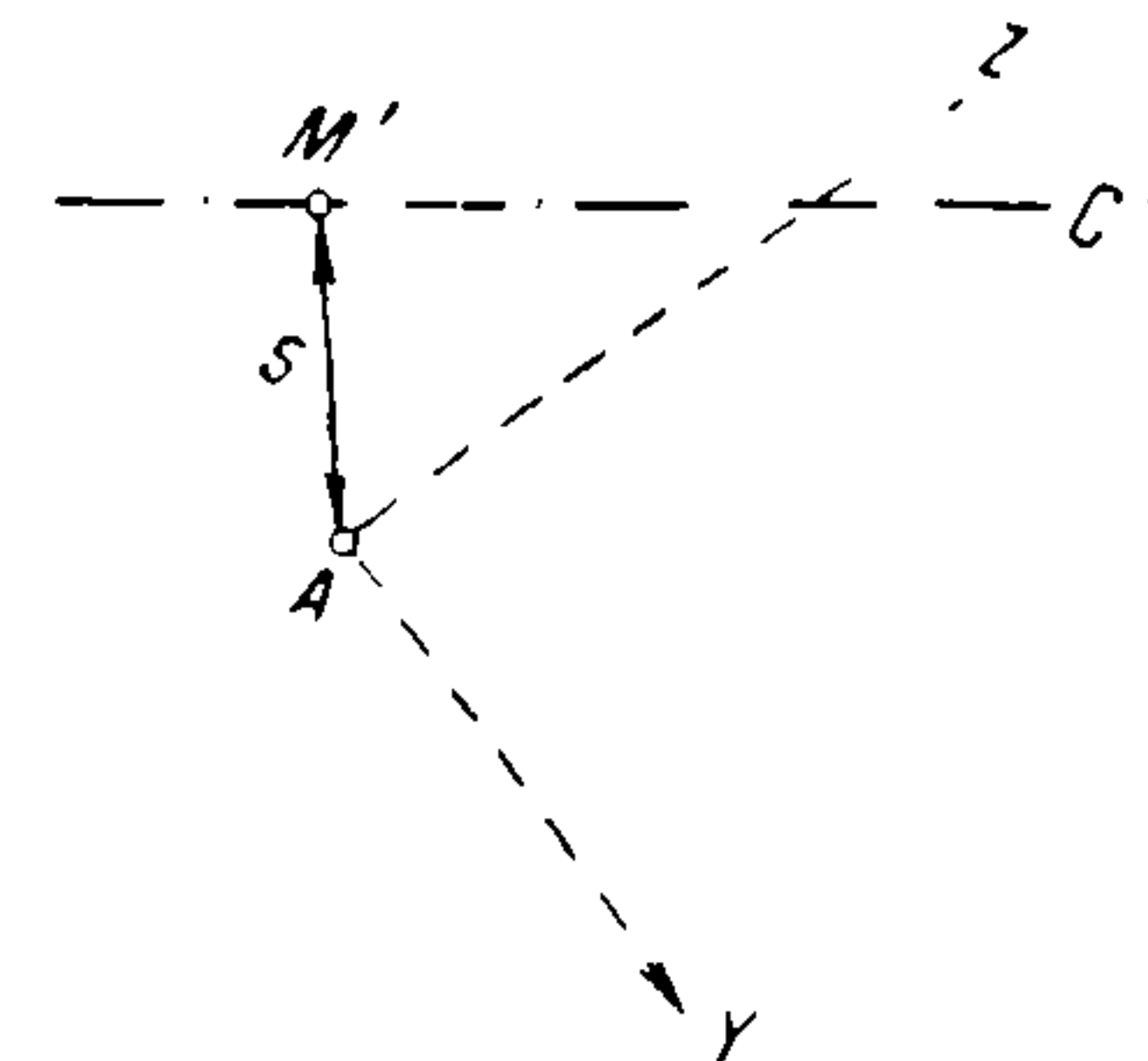


Рис. 81.

Так как мы видели, что измерение на дневной поверхности величин ρ'_i и ρ'_t дает возможность определить величину $\lambda \sin^2 \alpha$, которую мы назвали мерой кажущейся анизотропии, то, определив положение точки M как центра эквипотенциальных эллипсов, получающихся от электрода, погруженного в скважину, мы можем найти по углу α^* из (439) истинный угол падения α . Для проверки можно еще измерить отношение осей эквипотенциального эллипса, которое вычисляется следующим образом: опишем вокруг точки M' в фиктивном пространстве шар произвольного радиуса и перенесем начало координат в точку M' . Тогда уравнение шара будет

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = \gamma^2,$$

в координатах x' , y' , z' действительного пространства с началом в M получим

$$\rho_x x'^2 + \rho_y y'^2 + \rho_z z'^2 = \gamma^2.$$

Переходя к координатам \bar{x}' , \bar{y}' , \bar{z}' , оси которых параллельны \bar{x} , \bar{y} , \bar{z} , мы получим

$$\rho_x \bar{x}'^2 + \rho_y (\bar{y}' \cos \alpha - \bar{z}' \sin \alpha)^2 + \rho_z (-\bar{y}' \sin \alpha + \bar{z}' \cos \alpha)^2 = \gamma^2.$$

Так как шар, построенный вокруг M' , пересечет плоскость C' в окружности с центром в M' и так как плоскость C' преобразуется в плоскость $\bar{z}' = 0$, то, полагая в последнем уравнении $\bar{z}' = 0$, получаем уравнение эквипотенциальных эллипсов

$$\rho_x \bar{x}'^2 + (\rho_y \cos^2 \alpha + \rho_z \sin^2 \alpha) \bar{y}'^2 = \gamma^2.$$

Вводя обозначения ρ_l и ρ_t , получаем отношение осей

$$\frac{a'}{b'} = \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{\rho_t}{\rho_l} \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 + \lambda \sin^2 \alpha}. \quad (440)$$

Круговое профилирование на поверхности дает то же самое отношение осей. Если из кругового профилирования величина $\lambda \sin^2 \alpha$ уже получена и притом при разносах достаточно больших, чтобы можно было пренебречь действием (обычно изотропных) наносов, то измерение осей эквипотенциального эллипса при погруженном электроде может дать указание, достаточно ли глубоко опущен электрод, чтобы и в этом случае можно было пренебречь действием наносов.

Во всяком случае, если желательно получить величину угла падения более или менее точно, необходимо провести бурение на глубину, значительно превышающую мощность верхнего изотропного слоя. Для определения направления падения глубина опускания электрода может быть и меньше.

При поисковой или перспективной разведке обычно бурение на сколько-нибудь большую глубину не производится, поэтому этот прием плохо укладывается в современный порядок операций разведочного дела. Можно указать на чисто геофизический прием, который

должен дать, наверно, качественное и, возможно, количественное определение угла падения анизотропной свиты. Если мы имеем достаточно длинный прямолинейный кабель, положенный на землю и оканчивающийся точечным заземлением, то магнитное поле около самого заземления при достаточно низкой частоте можно рассчитывать как поле постоянного тока. Вычисление той части поля, которая происходит от прямолинейного кабеля, не представит затруднений, а вычисление поля, происходящего от тока в земле, также принципиально возможно, так как распределение тока мы знаем.

Это распределение несимметрично к вертикали, если имеется падение, то поле земных токов уже не будет горизонтально, как мы видели в § 17, а в силу того, что ток уклонен в сторону падения, должен получиться соответственный наклон и магнитного поля. Если подвести питающий кабель (другой конец которого заземлен на большом расстоянии) по простиранию, то его собственное поле на линии, представляющей его продолжение за заземление, должно исчезать, а поле земных токов для качественного рассмотрения можно заменить прямолинейным током, уходящим вглубь не по вертикали, а с уклоном в сторону падения (рис. 82). Для определения самого угла падения необходимо сделать полное теоретическое исследование этого случая. Разбор этого вопроса позволит также учесть влияние анизотропии, обусловленной, например, сланцеватостью, на нормальное магнитное поле метода интенсивности, по крайней мере, для низких частот.

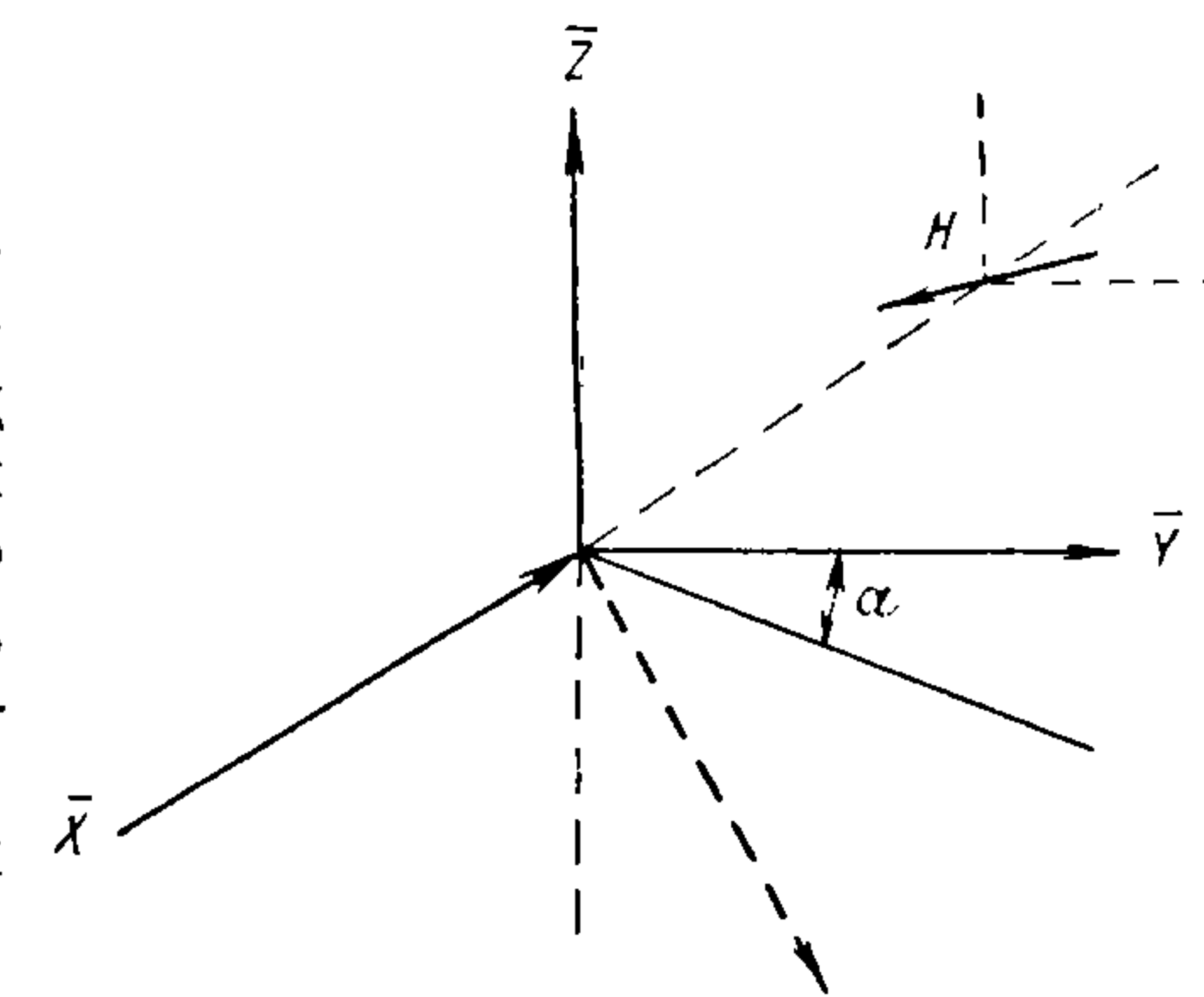


Рис. 82.

Глава VI

ПОЛЕ ЕСТЕСТВЕННЫХ ТОКОВ *

§ 33. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В самом общем случае мы имеем неоднородную среду, в которой как электропроводность σ , так и объемная электродвижущая сила E^e каким-то образом распределены в пространстве. Несмотря на то,

* Задача о поле равномерно поляризованной рудной залежи в форме сферы впервые была решена А. А. Петровским [73, 74, 78, 79]. В настоящей книге В. Р. Бурсиан дает решение задач о поле равномерно поляризованных цилиндра и сферы с использованием иного математического аппарата. Решение В. Р. Бурсиана позволяет более точно учесть влияние границы раздела земля — воздух. Результаты дальнейших исследований естественных полей поляризованных проводников, выполненных на основе расчетов и экспериментальных наблюдений, приведены в работах [33, 34, 55, 56, 57, 66, 67, 88, 89, 92, 100, 101, 102]. — *Прим. ред.*

что это как раз имеет место в действительности, мы из-за сложности исходного уравнения (13) этого случая рассматривать не можем, а ограничимся лишь случаем, когда изменение электропроводности и появление электродвижущих сил имеет место в определенных поверхностях, разделяющих части пространства, занятые однородными (и для простоты изотропными) средами, внутри которых объемных э. д. с. нет. В таком случае в объеме потенциал должен удовлетворять уравнению Лапласа, на границе двух проводников должен иметь место, согласно (21), скачок потенциала

$$\varphi_a - \varphi_b = \mathcal{E}_{ba}, \quad (441)$$

где \mathcal{E}_{ba} — электродвижущая сила контакта по направлению от b к a ; кроме того, на границе двух проводников нормальная составляющая J должна быть непрерывна, а на границе с изолятором — исчезать.

В качестве примера разберем случай шара с электропроводностью σ_2 и радиусом a в неограниченной среде с электропроводностью σ_1 , причем предположим, что электродвижущая сила контакта не постоянна, а распределена по поверхности шара по закону косинуса

$$\mathcal{E}_{21} = \mathcal{E}_0 \cos \theta. \quad (442)$$

Координатную систему возьмем ту же, как на рис. 46 (§ 18) и воспользуемся общими решениями, которые были получены для внешнего и внутреннего поля (240)

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \sum_0^{\infty} \beta_n R^{-(n+1)} \cdot P_n(\cos \theta); \\ \varphi_2 &= \sum_0^{\infty} \alpha_n R^n P_n(\cos \theta). \end{aligned} \right\} \quad (443)$$

Изменяются теперь только граничные условия, при $R = a$ мы должны иметь, согласно (441) и (442),

$$\sum_0^{\infty} [\beta_n a^{-(n+1)} - \alpha_n a^n] P_n(\cos \theta) = \mathcal{E}_0 \cos \theta = \mathcal{E}_0 P_1(\cos \theta),$$

а непрерывность нормальной составляющей тока приводит к уравнению

$$\sum_0^{\infty} [\sigma_2 \alpha_n n a^{n-1} + \sigma_1 \beta_n (n+1) a^{-(n+2)}] P_n(\cos \theta) = 0.$$

Для удовлетворения этих условий мы напишем ряд уравнений для определения коэффициентов α_n и β_n , собирая все члены с $P_n(\cos \theta)$ и приравнявая нулю коэффициенты при них.

$$\begin{aligned} 1. \quad & \alpha_0 - \beta_0 a^{-1} = 0 & 2. \quad & \alpha_1 a - \beta_1 a^{-2} = -\mathcal{E}_0 \\ & \sigma_1 \beta_0 a^{-2} = 0 & & \sigma_2 \alpha_1 + 2\sigma_1 \beta_1 a^{-3} = 0 \\ 3. \quad & \alpha_2 a^2 - \beta_2 a^{-3} = 0 & & \\ & 2\sigma_2 \alpha_2 a + 3\sigma_1 \beta_2 a^{-4} = 0 & \text{и т. д.} & \end{aligned}$$

Только вторая система дает отличные от нуля решения

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{\mathcal{E}_0}{a} \frac{2\sigma_1}{2\sigma_1 + \sigma_2}; \\ \beta_1 &= \mathcal{E}_0 \frac{\sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2} a^2, \end{aligned}$$

остальные коэффициенты равны нулю. Отсюда получим

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \mathcal{E}_0 \frac{\sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2} a^2 \frac{\cos \theta}{R^2}; \\ \varphi_2 &= -\frac{\mathcal{E}_0}{a} \cdot \frac{2\sigma_1}{2\sigma_1 + \sigma_2} R \cos \theta = -\frac{\mathcal{E}_0}{a} \cdot \frac{2\sigma_1}{2\sigma_1 + \sigma_2} x. \end{aligned} \right\} \quad (444)$$

Внутри шара получается однородное поле, направленное в сторону положительных x , а снаружи мы имеем поле диполя с моментом

$$\mathbf{p} = \mathcal{E}_0 a^2 \frac{\sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2}. \quad (445)$$

Последнее обстоятельство позволяет отождествить внешнее поле сферы с контактной электродвижущей силой, распределенной по закону косинуса и находящейся в неограниченной среде — с внешним полем поляризованной сферы. Если электропроводность вещества сферы очень велика по сравнению с электропроводностью окружающего пространства (например, рудное тело из сплошных сульфидов), то приближенно можем положить $\sigma_2 = \infty$ и мы получаем, переходя к этому пределу,

$$\varphi_1 = \mathcal{E}_0 a^2 \frac{\cos \theta}{R^2}. \quad (446)$$

Потенциал внутреннего поля стремится к нулю, но плотность тока остается конечной

$$J = -\sigma_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = 2\sigma_1 \frac{\mathcal{E}_0}{a}.$$

§ 34. УЧЕТ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ. СЛУЧАЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ, ГОРИЗОНТАЛЬНО РАСПОЛОЖЕННОЙ ЗАЛЕЖИ

Для учета поверхности земли мы должны, как известно, рассматривать картину, симметрично дополненную изображением. Как и в случае аномалий от искусственного тока, это обстоятельство вносит большое осложнение в математическую трактовку; рассмотрим случай горизонтально расположенной цилиндрической залежи, предполагая, что на ее поверхности электродвижущая сила задана по окружности сечения, перпендикулярного к оси, и вдоль образующих постоянна. Если предположить, что цилиндр бесконечно длинный, то поле во всех сечениях, перпендикулярных к оси, будет одинаково, и задача сводится к плоской, для решения которой, как мы уже видели на примерах, естественно прибегнуть к методам теории функций комплексного переменного. Мы будем

решать задачу при помощи конформного отображения плоскости XU , рассматриваемой как плоскость комплексной переменной $z = x + iy$ на плоскость другой комплексной переменной w .

Пусть круги, изображенные на рис. 83, представляют собой сечения нашего цилиндра и его отражения в плоскости XU ; OX — поверхность земли. Нам нужно ввести такие координаты,

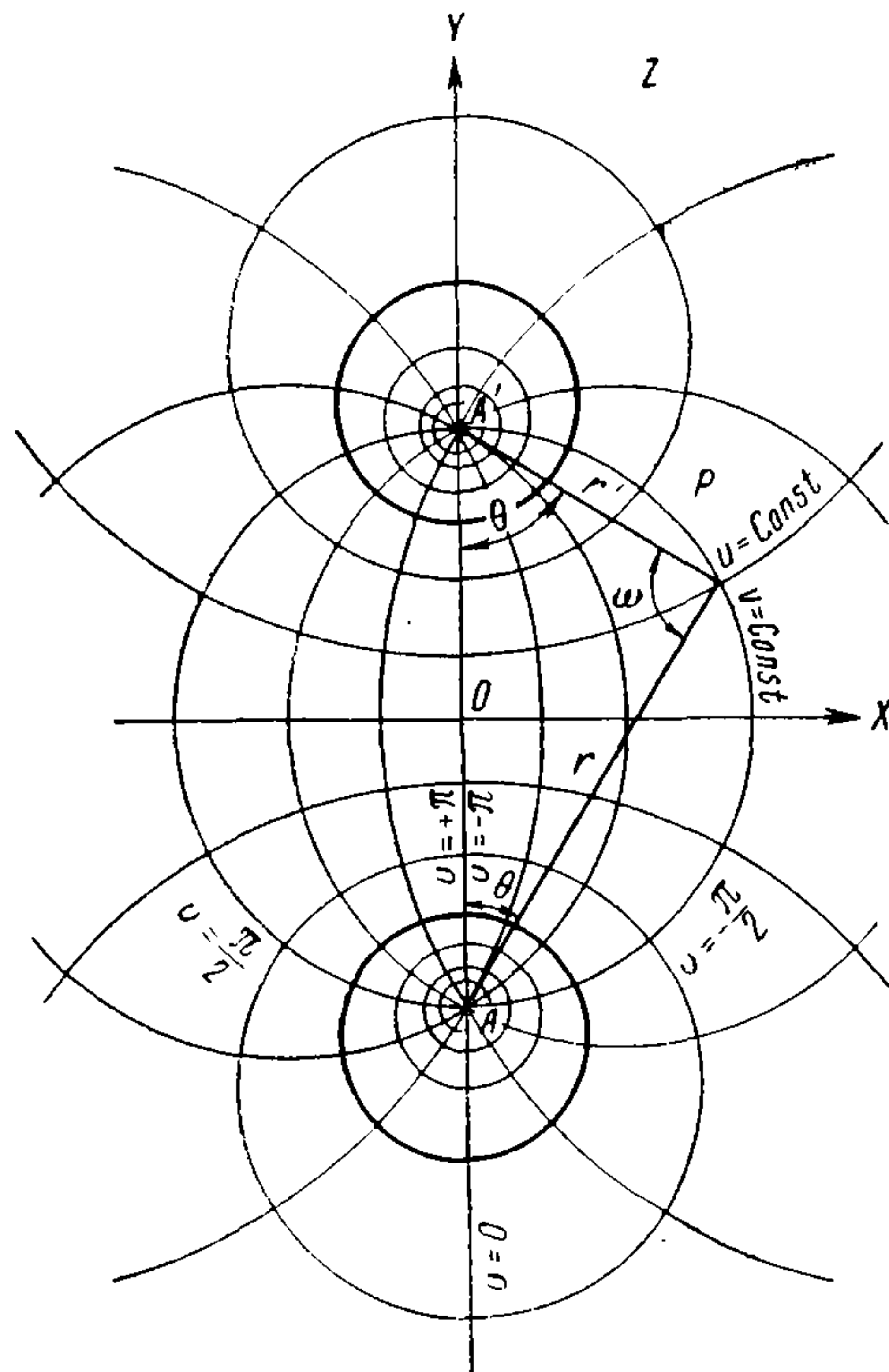


Рис. 83.

при которых эти три линии были бы координатными линиями. Эта задача решается введением биполярных координат, к которым проще всего прийти, рассматривая функцию w комплексного переменного $z = x + iy$,

$$w = \ln \frac{z - iB}{z + iB} = u + iv, \quad (447)$$

где B — длина OA .

По обозначениям рис. 83 видно, что значение z , соответствующее точке P плоскости комплексного переменного z , равно

$$\begin{aligned} z &= iB + r'e^{-i(\frac{\pi}{2} - \theta')} = \\ &= -iB + re^{i(\frac{\pi}{2} - \theta)} \end{aligned}$$

или проще

$$z = iB - ir'e^{i\theta'} = -iB + ire^{-i\theta}.$$

Подставляя первое выражение в числитель, а второе в знаменатель (447), имеем

$$w = \ln \frac{-r'e^{i\theta'}}{re^{-i\theta}} = \ln \frac{r'}{r} + i(\theta' - \theta - \pi) = \ln \frac{r'}{r} - i\omega.$$

Таким образом, мы получили

$$\left. \begin{aligned} u &= \ln \frac{r'}{r} = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + (y - B)^2}{x^2 + (y + B)^2}; \\ v &= -\omega = \theta' - \theta - \pi. \end{aligned} \right\} \quad (448)$$

Так как

$$\operatorname{tg} \theta' = \frac{x}{B - y}; \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{x}{B + y},$$

то

$$\operatorname{tg}(\theta' + \theta) = \frac{\operatorname{tg} \theta' + \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg} \theta' \operatorname{tg} \theta} = \frac{2Bx}{x^2 + y^2 - B^2},$$

а

$$\operatorname{tg} v = -\operatorname{tg}(\theta' + \theta) = \frac{2Bx}{B^2 - x^2 - y^2}. \quad (449)$$

Уравнения координатных линий $u = u_0$, $v = v_0$ будут уравнениями окружностей

$$\frac{x^2 + (y - B)^2}{x^2 + (y + B)^2} = e^{2u_0};$$

$$x^2(e^{2u_0} - 1) + y^2(e^{2u_0} - 1) + B^2(e^{2u_0} - 1) + 2By(e^{2u_0} + 1) = 0.$$

Сокращая на $e^{2u} - 1$ и замечая, что

$$\frac{e^{2u_0} + 1}{e^{2u_0} - 1} = \operatorname{cth} u_0,$$

получаем

$$x^2 + y^2 + 2By \operatorname{cth} u_0 + B^2 = 0,$$

а это уравнение легко привести к виду

$$x^2 + (y + B \operatorname{cth} u_0)^2 = B^2(\operatorname{cth}^2 u_0 - 1) = \frac{B^2}{\operatorname{sh}^2 u_0},$$

т. е. к уравнению окружности с центром на оси ординат при

$$y = -B \operatorname{cth} u_0$$

и радиусом

$$R = \frac{B}{|\operatorname{sh} u_0|}.$$

Из последних двух формул, между прочим, следует, что значениям $u = u_0$ и $u = -u_0$ соответствуют круги, расположенные симметрично относительно OX ; значению $u_0 = 0$, как легче всего видеть непосредственно из (448), соответствует прямая OX .

Для окружности нашего цилиндра, ось которого находится при ординате (рис. 84)

$$y = -(a + h),$$

а радиус которой равен a , мы положим $u = \tau$ и имеем

$$a = \frac{B}{\operatorname{sh} \tau}; \quad a + h = B \operatorname{cth} \tau;$$

$$h = B \left(\operatorname{cth} \tau - \frac{1}{\operatorname{sh} \tau} \right) = B \operatorname{th} \frac{\tau}{2}, \quad (450)$$

τ выражается через a и h по формуле

$$\tau = \ln \frac{\sqrt{2ah + h^2} + h}{\sqrt{2ah + h^2} - h} = \ln \frac{\sqrt{2\frac{h}{a} + \left(\frac{h}{a}\right)^2} + \frac{h}{a}}{\sqrt{2\frac{h}{a} + \left(\frac{h}{a}\right)^2} - \frac{h}{a}}. \quad (451)$$

Что же касается кривых $v = \text{const}$, то их уравнение

$$x^2 + y^2 + 2Bx \operatorname{ctg} v - B^2 = 0$$

приводится к виду

$$(x + B \operatorname{ctg} v)^2 + y^2 = \frac{B^2}{\sin^2 v}.$$

Семейство кривых $v = \text{const}$ есть система кругов, проходящих через точки оси ординат $y = \pm B$ и имеющих центры на оси абсцисс.

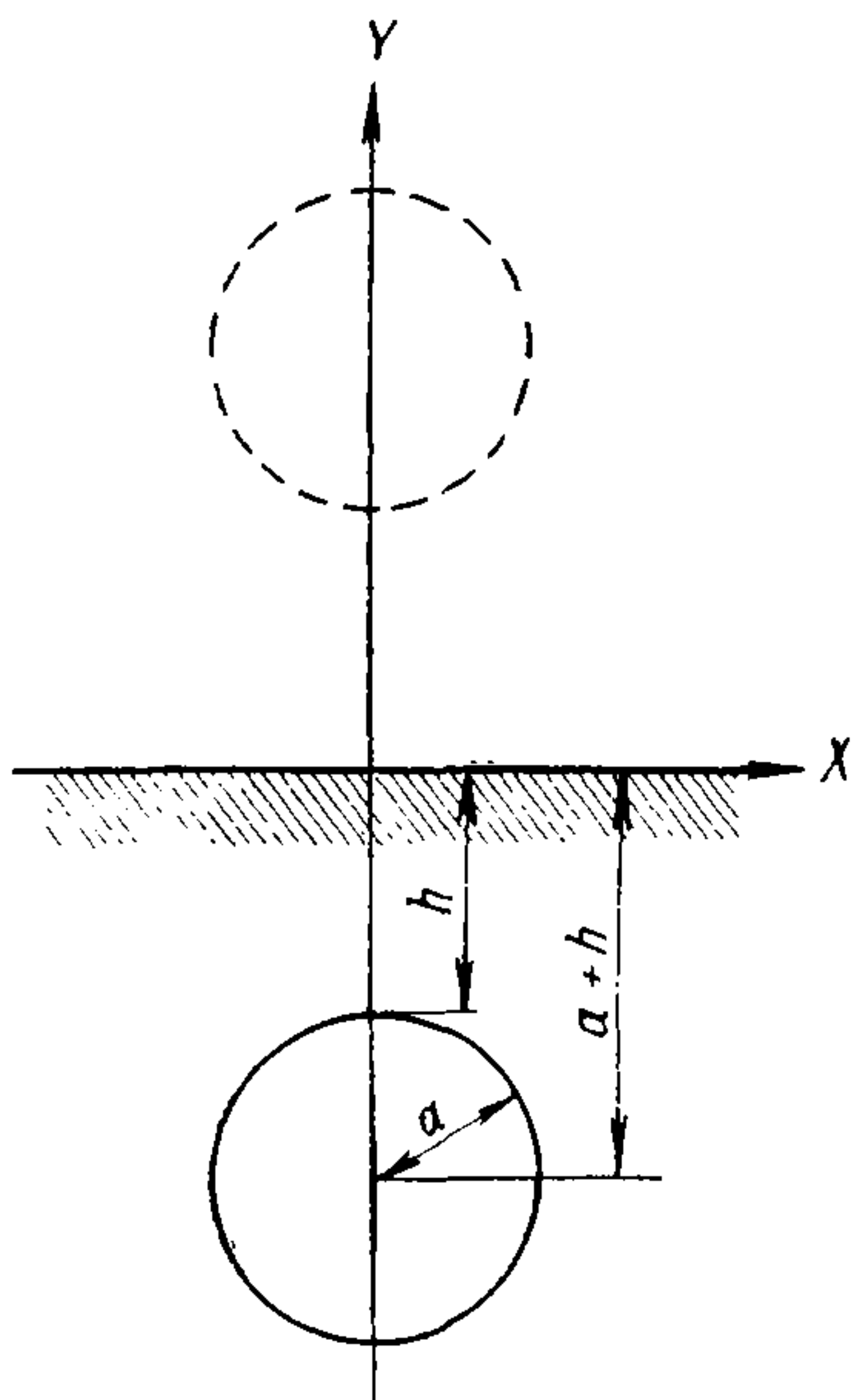


Рис. 84.

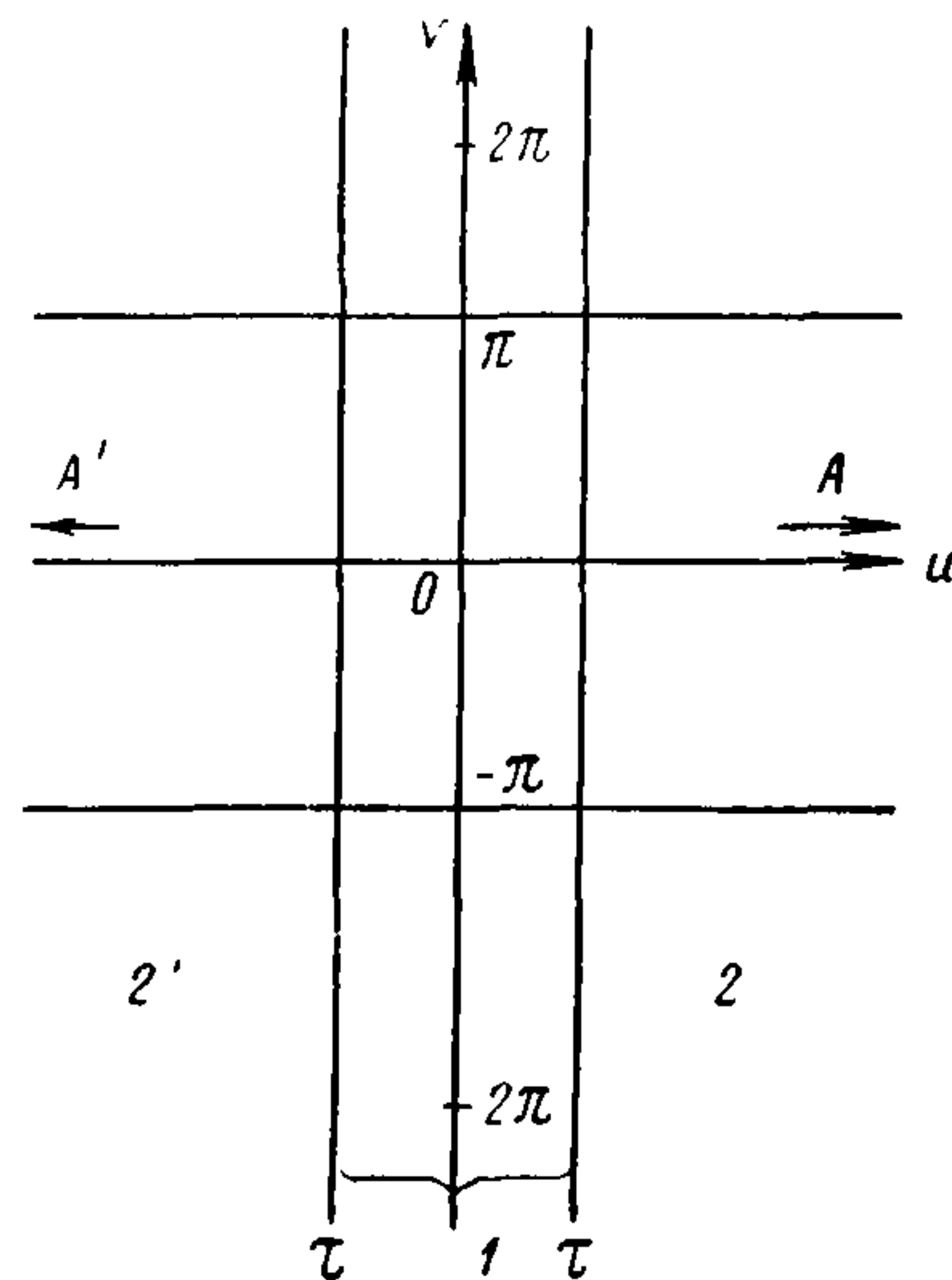


Рис. 85.

Функция w конформно отображает плоскость z на полосу плоскости w ; точкам A и A' соответствуют точки $\pm\infty$ на оси u , а значения v лежат в пределах $\pm\pi$ (рис. 85); v — угол, который составляет направление выхода из точки A по кратчайшей дуге к P по координатной линии $v = \text{const}$, с направлением отрицательной оси Y , как указано на рис. 83.

Исследуя (451), легко убедиться, что при малых значениях h/a , т. е. при большом радиусе и малой глубине верхнего края мы имеем малые значения τ , а при больших значениях h/a , т. е. при цилиндре малого радиуса на большой глубине — большие значения τ . Во втором случае полюс A находится почти в центре окружности τ и для точек окружности v практически совпадает с центральным углом данной точки поверхности цилиндра, отсчитанным от отрицательной оси Y ; в первом же случае значения v от $-\pi/2$ до $-\pi$ и от π до $\pi/2$ соответствуют точкам окружности, расположенным относительно недалеко от ее вершины.

Решение нашей задачи в полупространстве под землей мы будем искать как вещественную часть $\varphi(x, y)$ функции комплексной переменной $z = x + iy$

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

причем легче будет найти функцию $F(w)$, удовлетворяющую необходимым условиям в плоскости переменной w , от которой мы затем преобразованием (447) перейдем к $f(z)$,

$$F(w) = F[w(z)] = f(z).$$

При этом мы будем иметь

$$F(w) = \Phi(u, v) + i\Psi(u, v) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = f(z).$$

Исследуя значения u и v на координатных линиях рис. 83, мы легко убеждаемся, что значениям $v = \pm\pi$, т. е. двум разным линиям на рис. 85, соответствуют две стороны одной и той же прямой AO . Так как в плоскости переменной z значения $f(z)$ по обе стороны этой линии должны быть равны, и эта линия ничем физически не замечательна, то мы должны потребовать, чтобы $F(w)$ было бы периодической функцией с чисто мнимым периодом 2π ; тогда вся плоскость переменной w однозначно будет отображаться на плоскости переменной z . Таким образом, первое требование для функции F будет

$$F(w + k2\pi i) = F(w).$$

Этому требованию, как известно, удовлетворяют функции e^{mw} и e^{-mw} , где m — целое вещественное число, а также их линейные комбинации с постоянными коэффициентами.

Поэтому мы будем искать решения для областей 1 и 2 в виде

$$\left. \begin{aligned} F^{(1)} &= \sum_{m=0}^{\infty} (b_m e^{mw} + c_m e^{-mw}); \\ F^{(2)} &= \sum_{m=0}^{\infty} (d_m e^{mw} + g_m e^{-mw}). \end{aligned} \right\} \quad (452)$$

Для $u = 0$, $w = iv$ (ось мнимых чисел плоскости w) имеем требование, чтобы это была линия тока, так как ее отображение в плоскости z есть прямая OX , изображающая поверхность земли. По (268) мы имеем

$$I_{ab} = \sigma(\psi_a - \psi_b) = \sigma(\Psi_a - \Psi_b)$$

для силы тока, проходящей через контур, соединяющий точки a и b . Если эти две точки находятся на прямой OX (рис. 83), а их отображение на прямой Ov (рис. 85), то I_{ab} должно равняться нулю, значит ψ , а также Ψ — постоянной. Эту постоянную мы можем принять за нуль. Таким образом, приходим к граничному условию, что при $u = 0$ мнимая часть $F(w)$ должна исчезать

$$\Psi^{(1)}(0, v) = 0. \quad (453)$$

На прямой τ (рис. 85), отображающей окружность τ (рис. 83), т. е. поверхность нашего цилиндра, имеем заданное распределение \mathcal{E}_{21} ; мы можем считать, что \mathcal{E}_{21} задано как функция v в пределах изменения последнего от $-\pi$ до $+\pi$. Разлагая в ряд Фурье

$$\mathcal{E}_{21} = \sum_0^{\infty} (\mathcal{E}'_m \cos mv + \mathcal{E}''_m \sin mv), \quad (454)$$

мы распространяем ее как периодическую функцию на все значения v . Таким образом, будем иметь условие

$$\Phi^{(1)}(\tau, v) - \Phi^{(2)}(\tau, v) = \mathcal{E}_{21}. \quad (455)$$

На той же прямой мы должны потребовать, чтобы ток, проходящий между двумя любыми точками a и b с двух ее сторон, был бы равен.

Это требование будет выполнено, если

$$\sigma_1 \Psi^{(1)}(\tau, v) = \sigma_2 \Psi^{(2)}(\tau, v).$$

Наконец, в области 2, содержащей бесконечно удаленную точку оси u , мы должны потребовать, чтобы при $u \rightarrow \infty$ $F(w)$ оставалось бы конечным, так как эта точка, как мы знаем, есть отображение точки A (рис. 83), в которой и потенциал и функция тока должны быть конечными.

В общем члене суммы $F^{(1)}$ (452) разделим мнимую и вещественную части, полагая, что коэффициенты b_m и c_m могут быть комплексными

$$\begin{aligned} (b'_m + ib''_m) e^{mu} (\cos mv + i \sin mv) + (c'_m + ic''_m) e^{-mu} (\cos mv - i \sin mv) = \\ = b'_m e^{mu} \cos mv - b''_m e^{mu} \sin mv + c'_m e^{-mu} \cos mv + c''_m e^{-mu} \sin mv + \\ + i (b''_m e^{mu} \cos mv + b'_m e^{mu} \sin mv + c''_m e^{-mu} \cos mv - c'_m e^{-mu} \sin mv). \end{aligned}$$

Полагая здесь $u = 0$ и приравнявая нулю мнимую часть для всех значений v , получаем

$$(b''_m + c''_m) \cos mv + (b'_m - c'_m) \sin mv = 0,$$

отсюда следует, что в отдельности

$$b''_m + c''_m = 0;$$

$$b'_m - c'_m = 0,$$

т. е.

$$c_m = b_m^*,$$

где звездочка означает комплексно-сопряженную величину.

Функция $F^{(1)}(w)$ приобретает вид

$$F^{(1)}(w) = \sum_0^{\infty} (b_m e^{mw} + b_m^* e^{-mw}). \quad (456)$$

Функции $F^{(2)}(w)$ в силу требования конечности при возрастании u нужно дать вид

$$F^{(2)}(w) = \sum_0^{\infty} g_m e^{-mw}. \quad (457)$$

Разделяя вещественные и мнимые части, получаем

$$F^{(1)}(w) = \sum_0^{\infty} 2 \operatorname{ch} mu (b'_m \cos mv - b''_m \sin mv) +$$

$$+ i \sum_0^{\infty} 2 \operatorname{sh} mu (b''_m \cos mv + b'_m \sin mv);$$

$$F^{(2)}(w) = \sum_0^{\infty} e^{-mu} (g'_m \cos mv + g''_m \sin mv) +$$

$$+ i \sum_0^{\infty} e^{-mu} (g''_m \cos mv - g'_m \sin mv).$$

Пользуясь этими выражениями и разложением (454), мы можем написать условия (453) и (455) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} (2b'_m \operatorname{ch} m\tau - g'_m e^{-m\tau} - \mathcal{E}'_m) \cos mv - \sum_0^{\infty} (2b''_m \operatorname{ch} m\tau + \\ + g''_m e^{-m\tau} + \mathcal{E}''_m) \sin mv = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} (2b''_m \sigma_1 \operatorname{sh} m\tau - g''_m \sigma_2 e^{-m\tau}) \cos mv + \sum_0^{\infty} (2b'_m \sigma_1 \operatorname{sh} m\tau + \\ + g'_m \sigma_2 e^{-m\tau}) \sin mv = 0. \end{aligned}$$

В силу однозначности разложений в ряд Фурье мы полагаем равными нулю все коэффициенты и, решая соответственные уравнения, получаем

$$2b'_m = \frac{\sigma_2 \mathcal{E}'_m}{\sigma_2 \operatorname{ch} m\tau + \sigma_1 \operatorname{sh} m\tau}; \quad 2b''_m = -\frac{\sigma_2 \mathcal{E}''_m}{\sigma_2 \operatorname{ch} m\tau + \sigma_1 \operatorname{sh} m\tau}.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \sigma_2 = q \operatorname{ch} \gamma; \quad \sigma_1 = q \operatorname{sh} \gamma; \quad q^2 = \sigma_2^2 - \sigma_1^2; \quad \operatorname{th} \gamma = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}. \end{aligned} \quad (458)$$

Тогда

$$\sigma_2 \operatorname{ch} m\tau + \sigma_1 \operatorname{sh} m\tau = q (\operatorname{ch} m\tau \operatorname{ch} \gamma + \operatorname{sh} m\tau \operatorname{sh} \gamma) = \sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} \operatorname{ch} (m\tau + \gamma);$$

$$\left. \begin{aligned} 2b'_m &= \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}} \cdot \frac{\mathcal{E}'_m}{\operatorname{ch} (m\tau + \gamma)}; \\ 2b''_m &= -\frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}} \cdot \frac{\mathcal{E}''_m}{\operatorname{ch} (m\tau + \gamma)}. \end{aligned} \right\} \quad (459)$$

Так как при $u=0$ мы получаем

$$F^{(1)}(w) = \sum_0^{\infty} (2b'_m \cos mv - 2b''_m \sin mv),$$

то для потенциала в плоскости земной поверхности

$$\varphi(x, 0) = \Phi(0, v) = \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}} \sum_0^{\infty} \frac{\varepsilon'_m \cos mv + \varepsilon''_m \sin mv}{\operatorname{ch}(m\tau + \gamma)}. \quad (460)$$

В бесконечно удаленной точке прямой OX (рис. 83) имеем $v=0$ или $2k\pi$,

$$\sin mv = 0;$$

$$\cos mv = 1;$$

$$\varphi(\infty, 0) = \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}} \sum_0^{\infty} \frac{\varepsilon'_m}{\operatorname{ch}(m\tau + \gamma)}.$$

Для того, чтобы в бесконечности потенциал обращался в нуль мы примем:

$$V = \varphi(x, 0) - \varphi(\infty, 0) = \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}} \sum_0^{\infty} \frac{\varepsilon'_m (\cos mv - 1) + \varepsilon''_m \sin mv}{\operatorname{ch}(m\tau + \gamma)},$$

что может быть легко преобразовано к виду

$$V = -\frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}} \sum_0^{\infty} \frac{2 \sin \frac{mv}{2}}{\operatorname{ch}(m\tau + \gamma)} \left(\varepsilon'_m \sin \frac{mv}{2} - \varepsilon''_m \cos \frac{mv}{2} \right). \quad (461)$$

Если $\sigma_2 \gg \sigma_1$, то формулы (458) показывают, что γ близко к нулю. В предельном случае $\sigma_2 = \infty$ имеем

$$V = -\sum_0^{\infty} \frac{2 \sin \frac{mv}{2}}{\operatorname{ch} m\tau} \left(\varepsilon'_m \sin \frac{mv}{2} - \varepsilon''_m \cos \frac{mv}{2} \right). \quad (462)$$

§ 35. РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ В ОДНОМ ЧАСТНОМ ПРЕДПОЛОЖЕНИИ

Прямая задача, т. е. вычисление поля цилиндрической залежи при заданных геометрических и электрических условиях, как мы видели, решается до конца; наибольшую трудность представит разложение \mathcal{E}_{21} в ряд Фурье по углу v . Если τ сколь-нибудь велико (т. е. h/a не мало), то ряд (461) быстро сходится из-за гиперболического косинуса кратных аргументов в знаменателях членов. Для решения обратной задачи, т. е. для оценки размеров залежи по полученному из измерений профилю потенциала вкrest простирания, вычислим простейший случай, когда электродвижущая сила распре-

делена по закону косинуса угла v (если предположить закон косинуса центрального угла, как мы это рассматривали в § 1 этой главы, то коэффициенты разложения в ряд Фурье получаются весьма сложными). Для радиусов малых по отношению к глубине залегания это предположение мало отличается от закона косинуса центрального угла; для больших же радиусов и относительно небольших глубин дело сведется к тому, что \mathcal{E}_{21} будет иметь один знак вблизи вершины окружности, а именно для значений v от $-\pi/2$ через $\pm\pi$ до $+\pi/2$, а во всей остальной части окружности — противоположный. Возможно, что это предположение не так уже далеко от действительности, так как процессы окисления идут всегда в верхней части залежи и глубоко не распространяются.

Наше предположение выражается тем, что в разложении (454) остается только один член

$$\mathcal{E}_{21} = \mathcal{E}'_0 \cos v.$$

Если мы к тому же предположим, что σ_2 очень велико по сравнению с σ_1 , то из (462) находим

$$V = -\mathcal{E}'_0 \frac{2 \sin^2 \frac{v}{2}}{\operatorname{ch} \tau}.$$

По формуле (449) для $\operatorname{tg} v$ получаем

$$\cos v = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 v}} = -\frac{B^2 - x^2}{B^2 + x^2},$$

где выбор знака основан на том, что при $x=0$, $v = \pm\pi$, $\cos v = -1$.

Отсюда

$$2 \sin^2 \frac{v}{2} = 1 - \cos v = \frac{2B^2}{B^2 + x^2} = \frac{2}{1 + \left(\frac{x}{B}\right)^2}.$$

Что же касается $\operatorname{ch} \tau$, то для вершины залежи

$$\tau = \ln \frac{r'}{r} = \ln \frac{B+h}{B-h};$$

$$\operatorname{ch} \tau = \frac{e^\tau + e^{-\tau}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{B+h}{B-h} + \frac{B-h}{B+h} \right) = \frac{B^2 + h^2}{B^2 - h^2} = \frac{1 + \left(\frac{h}{B}\right)^2}{1 - \left(\frac{h}{B}\right)^2},$$

и получаем

$$V = -2\mathcal{E}'_0 \frac{1 - \left(\frac{h}{B}\right)^2}{1 + \left(\frac{h}{B}\right)^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{B}\right)^2}.$$

При $x=0$ имеем

$$V_0 = -2\mathcal{E}'_0 \frac{1 - \left(\frac{h}{B}\right)^2}{1 + \left(\frac{h}{B}\right)^2}; \quad (463)$$

обозначая $\frac{x}{B} = \xi$, мы можем написать

$$\frac{V}{V_0} = \frac{1}{1 + \xi^2}. \quad (464)$$

При $\xi = 1$

$$x = B;$$

$$\frac{V}{V_0} = \frac{1}{2},$$

т. е. величина B получится как абсцисса той точки, где потенциал падает до половины своего значения в максимуме.

Если на основании этой оценки масштаба и дальнейшей подгонки его удастся совместить кривую (464) с экспериментальной и если, кроме того, залежь и вызванное ею распределение потенциала имеет достаточно вытянутую форму, то можно принять определенное таким образом B за глубину центра биполярных координат.

Для облегчения этой операции даем табл. 20 значений функции $\frac{1}{1 + \xi^2}$.

Таблица 20

| ξ | $\frac{1}{1 + \xi^2}$ | ξ | $\frac{1}{1 + \xi^2}$ | ξ | $\frac{1}{1 + \xi^2}$ |
|-------|-----------------------|-------|-----------------------|-------|-----------------------|
| 0,0 | 1,000 | 0,7 | 0,671 | 1,4 | 0,338 |
| 0,1 | 0,990 | 0,8 | 0,610 | 1,5 | 0,308 |
| 0,2 | 0,962 | 0,9 | 0,553 | 1,6 | 0,281 |
| 0,3 | 0,917 | 1,0 | 0,500 | 1,7 | 0,257 |
| 0,4 | 0,862 | 1,1 | 0,423 | 1,8 | 0,236 |
| 0,5 | 0,800 | 1,2 | 0,410 | 1,9 | 0,217 |
| 0,6 | 0,735 | 1,3 | 0,372 | 2,0 | 0,200 |

Из (464) легко получить формулу

$$\frac{1}{\xi} = \frac{B}{x} = \frac{1}{\sqrt{\frac{V_0}{V} - 1}}.$$

Вычисляя для ряда точек профиля величину

$$B = \frac{x}{\sqrt{\frac{V_0}{V} - 1}},$$

мы должны получать примерно постоянное значение, если действительные условия приближаются к принятым в нашем рассмотрении.

Зная V_0 и оценивая так или иначе возможное значение \mathcal{E}'_0 , можно вычислить h , которое из (463) получается равным

$$h = B \sqrt{\frac{1 + \frac{V_0}{2\mathcal{E}'_0}}{1 - \frac{V_0}{2\mathcal{E}'_0}}}, \quad (465)$$

а зная h и B , получаем на основании (451), (465) и простых выкладок

$$a = \frac{B^2 - h^2}{2h} = -B \frac{V_0}{2\mathcal{E}'_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V_0}{2\mathcal{E}'_0}\right)^2}}. \quad (466)$$

Не говоря уже о том, что принятые нами геометрические условия могут оказаться весьма далекими от истины, в наши последние вычисления входит величина \mathcal{E}'_0 , относительно значения которой в разных природных условиях в настоящее время сказать можно весьма мало. Зависеть же она может не только от состава самой руды, но и от химизма окисляющей ее почвенной влаги.

Аналогично задаче, которая изложена в этом параграфе, можно рассмотреть задачу о сферической залежи, пользуясь биполярными координатами в пространстве и общим решением уравнения Лапласа в этих координатах, данными К. Нейманом [121].

Рассмотрение этого случая могло бы иметь интерес для критической оценки пределов применимости метода, предложенного А. А. Петровским под названием метода эквивалентных сфер, но оно гораздо сложнее, чем для изложенного выше случая цилиндра. Отсылая читателя к подробному изложению метода эквивалентных сфер в цитированной уже книге А. А. Петровского и Л. Я. Нестерова [79] мы проведем здесь аналогичные рассуждения с цилиндром.

§ 36. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЦИЛИНДРА

Для этой цели рассмотрим поле цилиндра, на поверхности которого электродвижущая сила распределена по закону косинуса центрального угла, находящегося в неограниченной среде. По аналогии с рассмотренным случаем сферы мы предположим, что потенциал внешнего поля будет потенциалом плоского диполя (т. е. двух бесконечно близких заряженных прямых, имеющих противоположные заряды), а потенциал внутреннего поля будет соответствовать однородному полю. Потенциал заряженной линии в комплексном виде в плоскости переменной $z = x + iy$, перпендикулярной к ней, есть

$$w' = -A \ln z + C, \quad (467)$$

где C — неопределенная постоянная, а след линии находится в начале координат.

Действительно, разложение на вещественную и мнимую часть дает

$$w' = \varphi'(xy) + i\psi(xy) = -A \ln r + i \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C,$$

откуда

$$\begin{aligned} \varphi' &= -A \ln r; \\ E_r &= -\frac{\partial \varphi'}{\partial r} = \frac{A}{r}, \end{aligned}$$

как оно и должно быть по теореме Гаусса, примененной к концентрическому цилиндру,

$$\int_0^{2\pi} E_r r d\varphi = 2\pi r E_r = 4\pi e; \quad E = \frac{2e}{r},$$

где e — заряд на единицу длины.

Для параллельной линии с зарядом противоположного знака, след которой на нашей плоскости приходится при $z = -il$, т. е. на расстоянии l от начала координат по мнимой оси, мы получаем

$$w'' = A \ln(z + il) + C. \quad (468)$$

Сумма выражений (467) и (468) даст комплексный потенциал двух линий

$$w = w' + w'' = -A \ln \frac{z}{z + il} = A \ln \left(1 + \frac{il}{z} \right). \quad (469)$$

Разложив логарифм по степеням l/z , имеем

$$w = \frac{iAl}{z} + \frac{A}{2} \left(\frac{l}{z} \right)^2 + \dots$$

Полагая, что произведение $Al = p$ остается конечным, а l идет к нулю, получаем

$$w = 2 \frac{ip}{z},$$

где p — момент диполя для плоской задачи.

Для нашей задачи мы положим

$$\left. \begin{aligned} r > a \quad w^{(1)} &= \frac{iM}{z}, \quad \sigma = \sigma_1; \\ r < a \quad w^{(2)} &= iNz, \quad \sigma = \sigma_2. \end{aligned} \right\} \quad (470)$$

Написанное выражение для $w^{(2)}$ приводит, как мы знаем из § 20, к однородному полю, направленному по оси Y .

Обозначая через θ угол, считаваемый в плоскости переменной z от оси Y (рис. 86), мы имеем

$$\left. \begin{aligned} w^{(1)} &= \frac{M}{r} (\cos \theta + i \sin \theta); \\ w^{(2)} &= -Nr (\cos \theta - i \sin \theta). \end{aligned} \right\} \quad (471)$$

При $r = a$ имеется скачок потенциала [знак $(-)$ у \mathcal{E}_0 берем для соответствия с формулой (454)]

$$\varphi^{(2)} - \varphi^{(1)} = -\mathcal{E}_0 \cos \theta. \quad (472)$$

Полагая $r = a$, применяя граничное условие (472) для вещественных частей и условие

$$\sigma_1 \psi^{(1)} - \sigma_2 \psi^{(2)} = 0$$

для мнимых, получаем из (471)

$$\frac{M}{a} \cos \theta + Na \cos \theta = -\mathcal{E}_0 \cos \theta;$$

$$\sigma_1 \frac{M}{a} \sin \theta - \sigma_2 Na \sin \theta = 0.$$

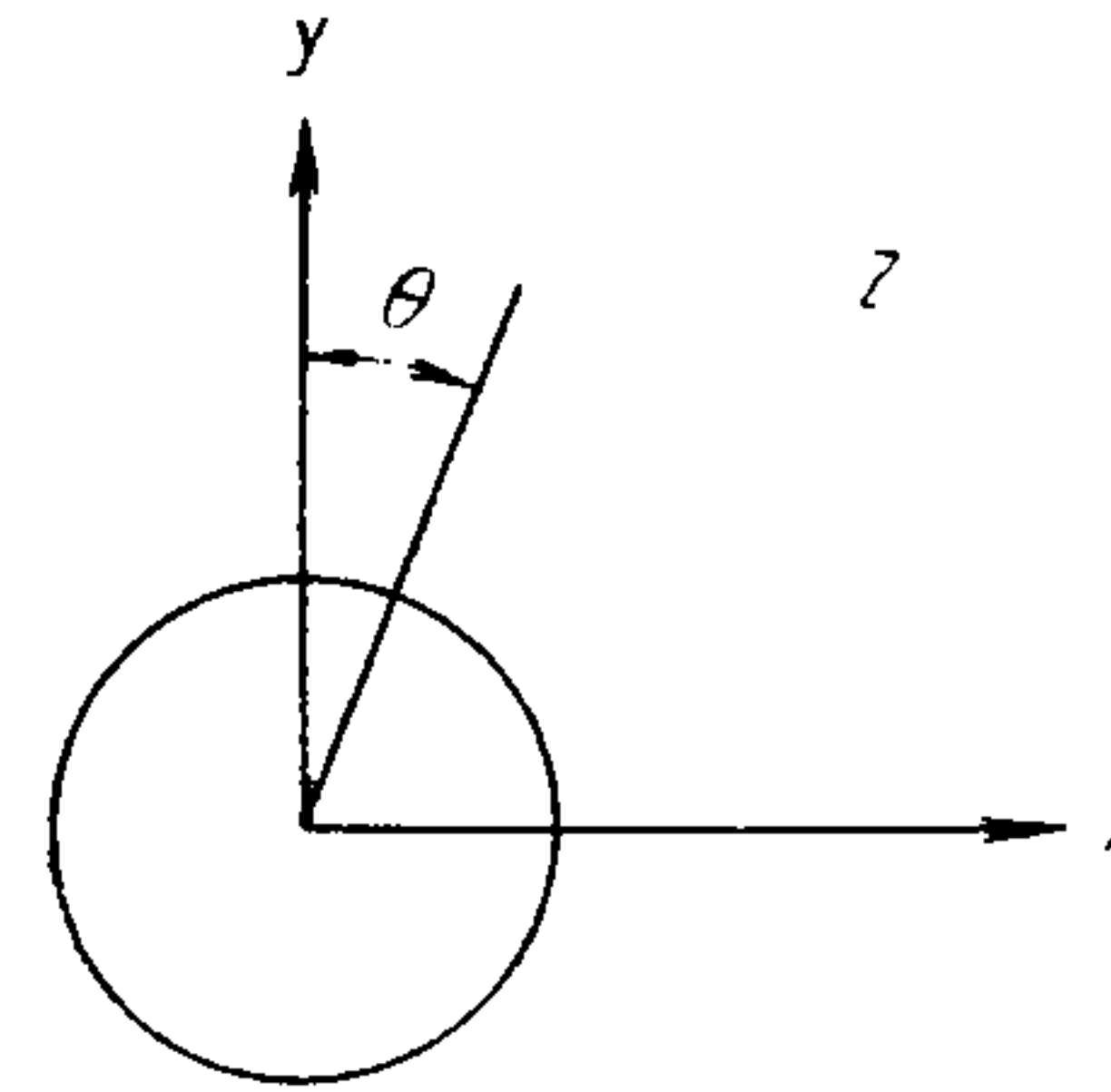


Рис. 86.

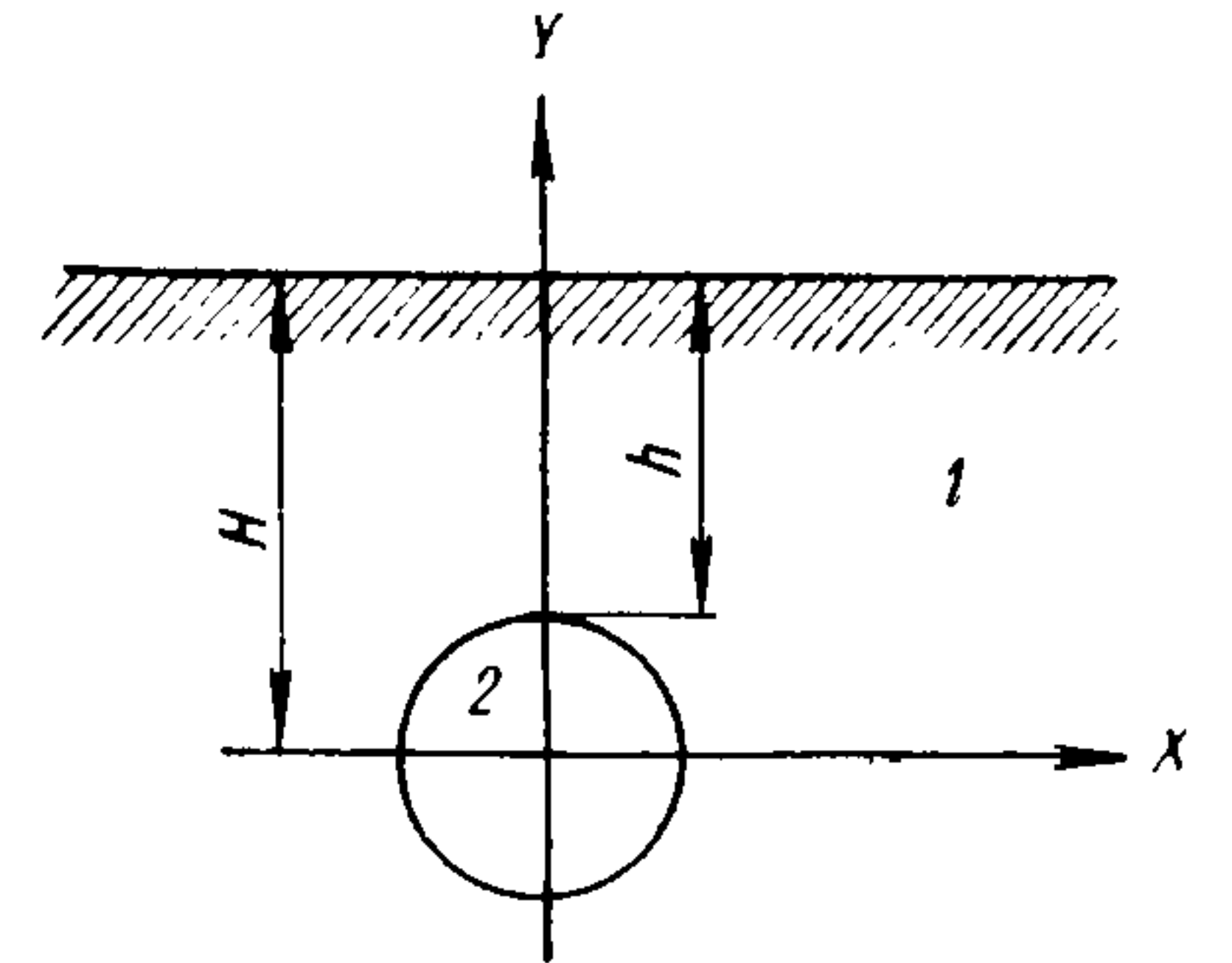


Рис. 87.

Тригонометрические функции сокращаются и, решая эти два уравнения, получаем

$$\begin{aligned} M &= -\frac{\sigma_2}{\sigma_2 + \sigma_1} \mathcal{E}_0 a; \quad \varphi^{(1)} = -\frac{\sigma_2}{\sigma_2 + \sigma_1} \mathcal{E}_0 a \times \\ &\times \frac{\cos \theta}{r} = -\frac{\sigma_2}{\sigma_2 + \sigma_1} \mathcal{E}_0 \frac{ay}{x^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (473)$$

Ограничиваясь случаем, когда ось поляризации вертикальна, перейдем к рассмотрению влияния поверхности земли, представленной прямой, параллельной OX при координате $y = H$ (рис. 87). Для этого добавляем изображение, расположенное симметрично сверху, и не учитываем того, что суммарный потенциал двух цилиндров уже не удовлетворяет условиям на их поверхности; тогда потенциал на поверхности земли удвоится, и мы будем иметь, полагая в (473) $y = H$,

$$V = 2\varphi^{(1)} = -\frac{\sigma_2}{\sigma_2 + \sigma_1} 2\mathcal{E}_0 \frac{aH}{x^2 + H^2}. \quad (474)$$

В смысле функциональной зависимости V от x мы получили результат, совпадающий с точной формулой (464); пренебрежение условиями на границе цилиндра при наличии изображения дает

для закона косинуса центрального угла то же самое, что в действительности соответствует закону косинуса угла ν . Мы уже указывали, что для больших значений h/a эти два предположения мало отличаются друг от друга. Анализируя полученный профиль совершенно так же, как и раньше, получим численное значение H , которое совпадет с величиной B предыдущего параграфа, т. е. величину B примем за глубину залегания центра. Из рис. (83) следует, что при больших h/a это не составит большой ошибки, для малых же значений h/a сильно расходится с действительностью. Полагая для простоты $\sigma_2 = \infty$, мы получаем по этой трактовке для значения потенциала в максимуме

$$V_0 = -2\epsilon_0 \frac{a}{H} \quad (475)$$

и вычисляем радиус цилиндра

$$a' = -H \frac{V_0}{2\epsilon_0} \quad (476)$$

и глубину залегания верхнего края залежи

$$h' = H \left(1 + \frac{V_0}{2\epsilon_0} \right). \quad (477)$$

Предположим, что экспериментальный профиль может быть удовлетворительно представлен формулой

$$V = V_0 \frac{1}{1 + \frac{x^2}{B^2}},$$

причем несколько параллельных профилей вкост простирания дают примерно те же значения V_0 и B , так что можно считать, что залежь достаточно протяжена по простиранию и залегает горизонтально. Эти обстоятельства являются необходимыми предпосылками для применения всех предыдущих рассуждений.

В таком случае мы имеем дело с обстоятельствами, близкими к нашим предпосылкам, и можем говорить с известной долей вероятности, что залежь приближенно представляется цилиндрическим, горизонтально расположенным телом, с электродвижущей силой, распределенной по закону косинуса угла ν . Определив B из графика потенциала, зная V_0 и сделав предположение о величине электродвижущей силы, мы вычисляем по точным формулам (465) и (466)

$$h = B \sqrt{\frac{1 + \frac{V_0}{2\epsilon_0}}{1 - \frac{V_0}{2\epsilon_0}}}; \quad a = -B \frac{V_0}{2\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V_0}{2\epsilon_0}\right)^2}},$$

а по приближенным (477) и (476)

$$h' = B \left(1 + \frac{V_0}{2\epsilon_0} \right); \quad a' = -B \frac{V_0}{2\epsilon_0},$$

причем нужно помнить, что по ходу наших выводов V_0 и ϵ_0 имеют противоположные знаки.

Характеризуя данную задачу положительной величиной

$$-\frac{V_0}{2\epsilon_0} = \zeta \quad (478)$$

и полученной из рассмотрения профиля величиной B , мы имеем следующие формулы и коэффициенты:

$$h' = B(1 - \zeta) = C_1 B; \quad a' = B\zeta = C_0 B; \quad (479)$$

$$h = B \sqrt{\frac{1 - \zeta}{1 + \zeta}} = C_2 B = C_3 h';$$

$$a = \frac{B\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = C_4 B = C_3 a',$$

где C_3 — поправочный множитель для перехода от приближенных величин к точным.

Ограничиваемся графиком этих коэффициентов как функций от ζ (рис. 88), имея в виду, что все расчеты по этим формулам нужно рассматривать как грубо ориентировочные. Заметим еще, что если нельзя положить $\sigma_2 = \infty$, то

$$\zeta = -\frac{\sigma_2 + \sigma_1}{\sigma_2} \cdot \frac{V_0}{2\epsilon_0},$$

остальные же формулы остаются в силе. Кривая C_3 ясно показывает, когда и в какой мере приближенное решение расходится с точным.

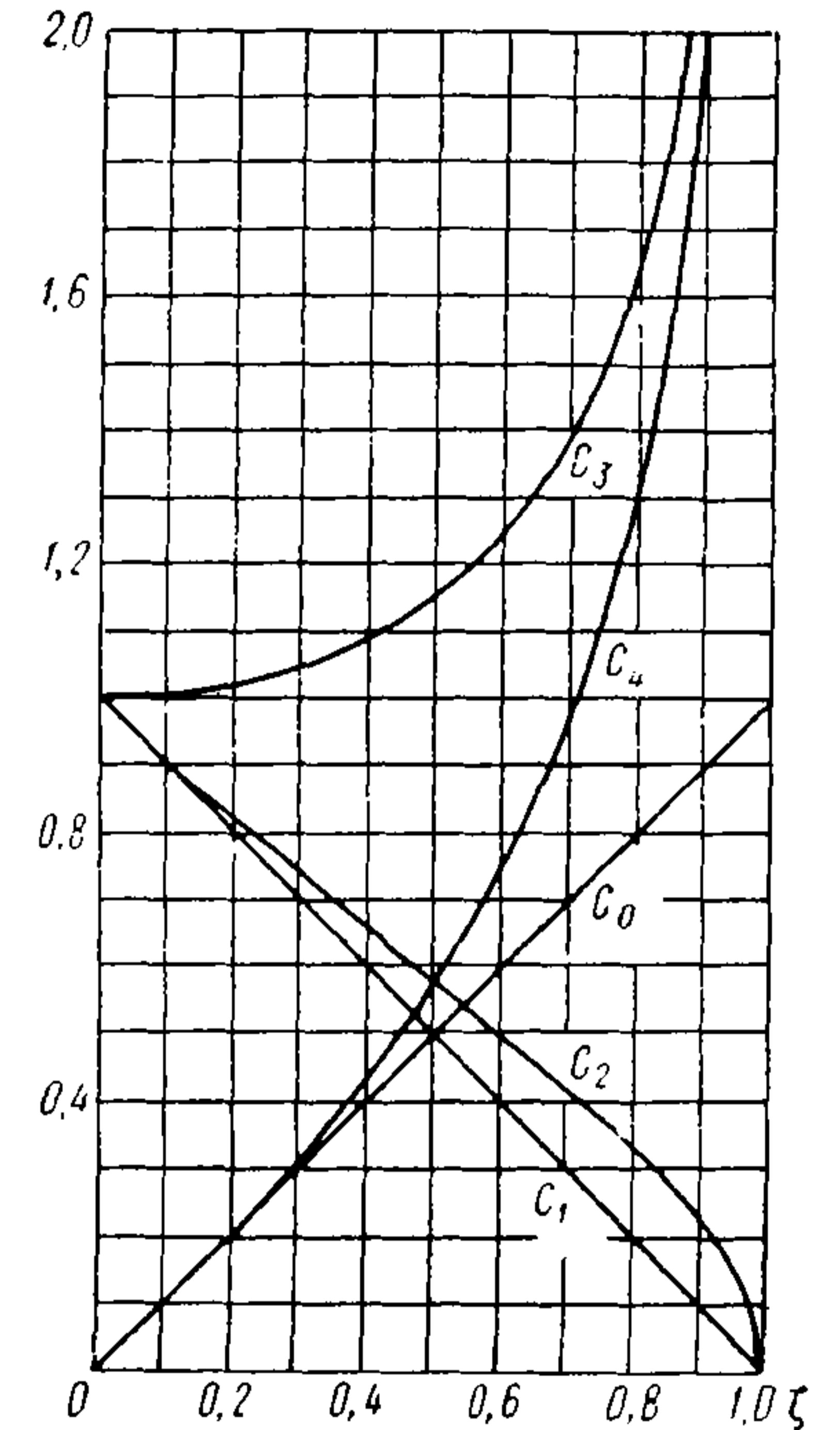


Рис. 88.

§ 37. ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ЗАЛЕЖИ

Точное решение задачи для сферической залежи дало бы возможность определить поправочный коэффициент и для этого случая. Так как это еще не сделано, то мы ограничимся выводом приближенных формул для случая вертикально направленной электродвижущей силы, распределенной по поверхности сферы по закону косинуса центрального угла. Вместо формулы (473) мы из (444) получаем, изменив знак для соответствия с предыдущим параграфом,

$$\varphi = -\epsilon_0 \frac{\sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2} a^2 \frac{\cos \theta}{r^2} = -\epsilon_0 \frac{\sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2} a^2 \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \quad (480)$$

Полагая $y = H$, для сокращения формул $\sigma_2 = \infty$, и удваивая значение, получающееся из (480), для учета изображения, мы получим для потенциала на поверхности земли

$$V = -2\epsilon_0 a^2 \frac{H}{(x^2 + H^2)^{3/2}} = V_0 \frac{1}{(1 + \xi^2)^{3/2}}, \quad (481)$$

где

$$V_0 = -2\epsilon_0 \frac{a^2}{H}. \quad (482)$$

Для нахождения H можно воспользоваться графиком, построенным на основании табл. 21 величин $\frac{1}{(1 + \xi^2)^{3/2}}$, подбирая масштаб абсцисс так, чтобы экспериментальный профиль совпал с теоретическим, можно также вычислять H из ряда точек профиля по формуле

$$H = \frac{x}{\sqrt{\left(\frac{V_0}{V}\right)^{2/3} - 1}}. \quad (483)$$

Таблица 21

| ξ | $\frac{1}{(1 + \xi^2)^{3/2}}$ | ξ | $\frac{1}{(1 + \xi^2)^{3/2}}$ | ξ | $\frac{1}{(1 + \xi^2)^{3/2}}$ |
|-------|-------------------------------|-------|-------------------------------|-------|-------------------------------|
| 0,0 | 1,000 | 0,7 | 0,551 | 1,4 | 0,197 |
| 0,1 | 0,985 | 0,8 | 0,477 | 1,5 | 0,171 |
| 0,2 | 0,943 | 0,9 | 0,411 | 1,6 | 0,149 |
| 0,3 | 0,879 | 1,0 | 0,354 | 1,7 | 0,129 |
| 0,4 | 0,800 | 1,1 | 0,305 | 1,8 | 0,115 |
| 0,5 | 0,715 | 1,2 | 0,263 | 1,9 | 0,101 |
| 0,6 | 0,632 | 1,3 | 0,227 | 2,0 | 0,0895 |

Таблица 22

| $\frac{V_0}{V}$ | $\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{V_0}{V}\right)^{2/3} - 1}}$ | $\frac{V_0}{V}$ | $\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{V_0}{V}\right)^{2/3} - 1}}$ | $\frac{V_0}{V}$ | $\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{V_0}{V}\right)^{2/3} - 1}}$ |
|-----------------|---|-----------------|---|-----------------|---|
| 1,2 | 2,76 | 2,2 | 1,21 | 3,5 | 0,88 |
| 1,4 | 2,00 | 2,4 | 1,12 | 4,0 | 0,81 |
| 1,6 | 1,65 | 2,5 | 1,06 | 4,5 | 0,76 |
| 1,8 | 1,44 | 2,8 | 1,01 | 5,0 | 0,72 |
| 2,0 | 1,30 | 3,0 | 0,96 | | |

При пользовании табл. 22 удобно подбирать те значения потенциала, для которых V_0/V имеют круглые значения, и умножать соответствующие абсциссы на множители, указанные во втором столбце.

Приблизительное постоянство H вдоль профиля покажет, что этот профиль может быть подвергнут дальнейшей обработке. Из (482) мы получаем

$$a' = H \sqrt{-\frac{V_0}{2\epsilon_0}}; \quad (484)$$

$$h' = H - a = H \left(1 - \sqrt{-\frac{V_0}{2\epsilon_0}}\right). \quad (485)$$

Буквы a и h снабжены штрихами для указания, что эти величины, вследствие несточности теории, даже при полном совпадении теоретического и экспериментального графика являются приближенными. Неточность теории заключается в пренебрежении обратным действием изображения, как мы выяснили на примере цилиндра; нужно заметить, что так как потенциал пространственного диполя с расстоянием изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния, а плоского диполя — первой степени расстояния, то можно ожидать, что там, где учет обратного действия для получения точной формулы носит характер поправки, эта поправка в случае сферы будет меньше, чем в случае цилиндра.

Полагая снова

$$\zeta = -\frac{V_0}{2\epsilon_0} \quad (486)$$

или, если пущо учесть отношение электропроводностей,

$$\zeta = -\frac{V_0}{2\epsilon_0} \cdot \frac{\sigma_2 + 2\sigma_1}{\sigma_2}, \quad (486a)$$

получаем расчетные формулы

$$a' = H \sqrt{\zeta}; \quad a'^3 = H \zeta^{3/2}; \quad (487)$$

$$h' = H (1 - \sqrt{\zeta}), \quad (488)$$

для пользования которыми даем график (рис. 89).

При сравнении формул этой главы с соответствующими формулами цитированной книги [79] нужно иметь в виду, что А. А. Петровский обозначает через E максимальную разность потенциалов у поверхности сферы во внешней среде, в то время как мы обозначаем

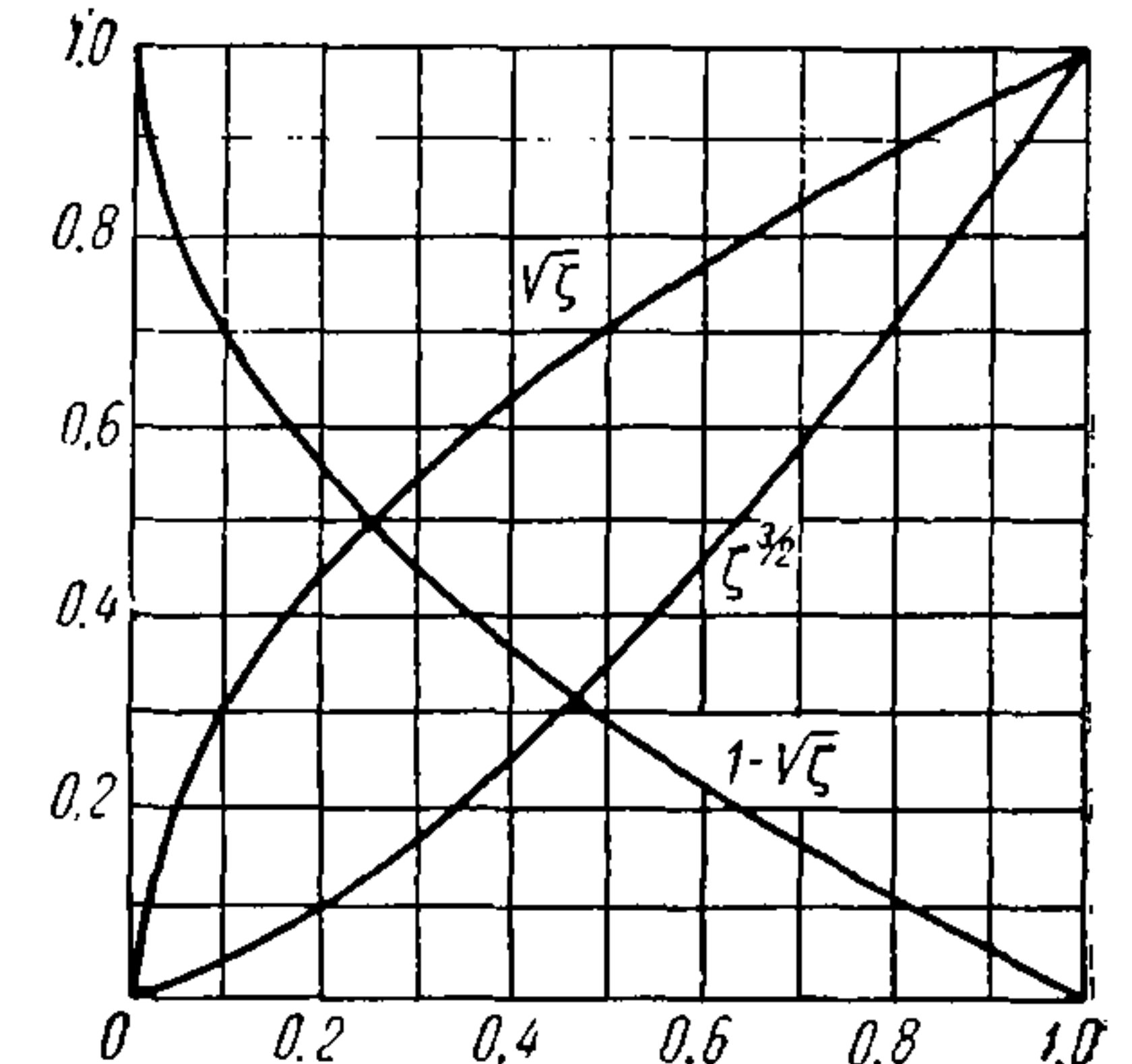


Рис 89.

через \mathcal{E}_0 — максимальный скачок потенциала. Связь между этими обозначениями устанавливается формулой

$$\left. \begin{aligned} E &= -2\mathcal{E}_0 \frac{\sigma_2}{\sigma_2 + 2\sigma_1}, \\ E &= -2\mathcal{E}_0 \frac{\sigma_2}{\sigma_2 + \sigma_1} \end{aligned} \right\} \quad (489)$$

для сферы и цилиндра соответственно. В указанной книге проведен детальный разбор способов обработки наблюдений по приближенной теории, причем разбираются также случаи наклонной оси поляризации. В заключение укажем, что поводом к развитию теории, изложенной в настоящей главе, явилось опубликование приближенной теории А. А. Петровского для сферической залежи, впервые обратившего внимание на возможность подобных расчетов.

Часть II. ПЕРЕМЕННЫЕ ПОЛЯ

Глава I

УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ. КОМПЛЕКСНЫЕ РЕШЕНИЯ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ. ТЕОРЕМА О НАЛОЖЕНИИ ПОЛЕЙ

Вспоминая исходные положения теории электромагнитных полей, изложенные во введении к первой части, напомним дифференциальные уравнения поля

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \dot{\mathbf{D}} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}; & (I) \\ \text{div } \mathbf{D} &= \rho_e; & (II) \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}; & (III) \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0 & (IV) \end{aligned} \right\}$$

и как следствие из (I) и (II)

$$\dot{\rho}_e + \text{div } \mathbf{J} = 0, \quad (V)$$

уравнения связи между векторами электромагнитного поля (для случая изотропных сред)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathbf{E}; & (VI) \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}; & (VII) \\ \mathbf{J} &= \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}^e) & (VIII) \end{aligned} \right\}$$

и, наконец, граничные условия

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{B}^{(2)} \mathbf{n}_{12}) &= (\mathbf{B}^{(1)} \mathbf{n}_{12}); \\ [\mathbf{n}_{12} [\mathbf{H}^{(2)} \mathbf{n}_{12}]] &= [\mathbf{n}_{12} [\mathbf{H}^{(1)} \mathbf{n}_{12}]]; \\ (\mathbf{D}^{(2)} \mathbf{n}_{12}) - (\mathbf{D}^{(1)} \mathbf{n}_{12}) &= \eta; \\ [\mathbf{n}_{12} [\mathbf{E}^{(2)} \mathbf{n}_{12}]] &= [\mathbf{n}_{12} [\mathbf{E}^{(1)} \mathbf{n}_{12}]] - \text{grad}_s \mathcal{E}, \end{aligned} \right\} \quad (IX)$$

выражающие непрерывность нормальной составляющей \mathbf{B} , тангенциальной составляющей \mathbf{H} , и соотношения между нормальными составляющими \mathbf{D} при наличии поверхностных зарядов плотности η и тангенциальными составляющими \mathbf{E} при наличии контактной электродвижущей силы \mathcal{E} , меняющейся вдоль поверхности. Во избежание употребления буквы t для обозначения тангенциального направления, мы прибегаем к определению составляющих при помощи указанных векторных операций, а под символом $\text{grad}_s \mathcal{E}$ понимаем вектор, градиент величины \mathcal{E} , определенный только в точках поверхности раздела и расположенный поэтому в тангенциальной плоскости.

Из линейности основных уравнений и граничных условий можно вывести теорему о наложении (суперпозиции) полей. Предположим, что нам заданы во всем пространстве величины ε , μ и σ . Задаем распределение величин ρ_{el} и η в диэлектриках и на границах между ними*; далее величины \mathbf{E}_1^e в проводниках и \mathcal{E}_1 на границах между проводниками, а также общие заряды e_1 каждого комплекса проводников, соединенных между собой и изолированных от других, и полагаем, что найдено решение, т. е. поля векторов \mathbf{E}_1 , \mathbf{H}_1 , \mathbf{B}_1 , \mathbf{D}_1 и \mathbf{J}_1 . Указанные задания мы варьируем, причем все величины, относящиеся к разным задачам (при тех же ε , μ , σ) и их решениях обозначаем значками 1, 2, . . . r . . . Теорема, которую мы должны доказать, утверждает, что

$$\mathbf{E} = \sum_k \mathbf{E}_k; \quad \mathbf{H} = \sum_k \mathbf{H}_k \quad (1)$$

и т. д., т. е. геометрическая сумма решений частных задач будет решением уравнений и граничных условий для случая

$$\rho_e = \sum_k \rho_{ek}; \quad \mathbf{E}^e = \sum_k \mathbf{E}_k^e; \quad \eta = \sum_k \eta_k; \quad \mathcal{E} = \sum_k \mathcal{E}_k. \quad (2)$$

В справедливости этой теоремы убеждаемся непосредственно, написав уравнения, которым должны удовлетворять

$$\mathbf{E}_k, \mathbf{D}_k, \mathbf{H}_k, \mathbf{B}_k \text{ и } \mathbf{J}_k,$$

и сложив их; величины (1) будут удовлетворять уравнениям и граничным условиям (I—IX), в которых появятся величины (2).

Для изучения переменных полей эта теорема имеет следующее значение. Пусть у нас в изоляторах и на границах между ними имеются заданные ρ_e и η и нам известны общие заряды e_k проводников, соединенных между собой в изолированные друг от друга группы. Решим электростатическую задачу, имеющую, как известно, един-

* В курсе В. Р. Бурсиана не приняты во внимание специфические свойства многофазных сред, какими являются горные породы. Поэтому пространственные и поверхностные заряды задаются только в диэлектриках и на их границах. Такой подход практически оправдан в отношении полей, характеризуемых частотами выше 20—30 гц.

ственное решение. В диэлектриках мы получим электростатическое поле, удовлетворяющее следующим требованиям:

$$\text{повсюду} \quad \text{rot } \mathbf{E}_1 = 0; \quad \text{div } \mathbf{D}_1 = \rho_e,$$

на поверхности раздела между диэлектриками

$$((\mathbf{D}_1^{(2)} - \mathbf{D}_1^{(1)}) \mathbf{n}_{12}) = \eta,$$

на всех границах

$$[\mathbf{n}_{12} [\mathbf{E}_1^{(1)} \mathbf{n}_{12}]] = [\mathbf{n}_{12} [\mathbf{E}_1^{(2)} \mathbf{n}_{12}]],$$

на поверхностях проводников

$$\int_s D_{1n} dS = e_1,$$

внутри проводников

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{E}_1 = 0,$$

во всем пространстве

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{B}_1 = 0.$$

Решим вторую задачу в предположении, что никаких зарядов в диэлектриках нет и что общие заряды проводников равны нулю. Пусть в объеме проводников и на границах между ними имеются практически постоянные по времени электродвижущие силы (концентрационные и контактные). В этом случае мы будем иметь в проводниках и диэлектриках постоянное электрическое поле, стационарное распределение токов в проводниках и соответствующее им магнитное поле; сюда же можно включить наличие постоянного магнитного поля (земного). Электромагнитное поле будет удовлетворять следующим уравнениям:

повсюду

$$\text{rot } \mathbf{E}_2 = 0; \quad \text{rot } \mathbf{H}_2 = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_2; \quad \text{div } \mathbf{B}_2 = 0,$$

в диэлектриках

$$\text{div } \mathbf{D}_2 = 0,$$

в проводниках

$$\text{div } \mathbf{J}_2 = 0; \quad \mathbf{J}_2 = \sigma (\mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_2^e)$$

и на границах

$$[\mathbf{n}_{12} [\mathbf{E}_2^{(2)} \mathbf{n}_{12}]] = \mathbf{n}_{12} [\mathbf{E}_2^{(1)} \mathbf{n}_{12}] - \text{grad}_s \mathcal{E}_2;$$

$$\varphi_2^{(2)} - \varphi_2^{(1)} = \mathcal{E}_2.$$

Если имеются еще источники переменного электромагнитного поля, то мы можем на основании теоремы о наложении электромагнитных полей рассматривать частную задачу о нахождении переменного электромагнитного поля, соответствующего данным начальным и граничным условиям, при данном распределении в пространстве величин ε , μ , σ и источников этого поля, полагая, что диэлектрики и проводники (в целом) не заряжены и что постоянных электродвижущих сил нет. Это решение

$$\mathbf{E}_3, \mathbf{D}_3, \mathbf{H}_3, \mathbf{B}_3, \mathbf{J}_3, \rho_e$$

должно удовлетворять системе уравнений и граничных условий

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H}_3 &= \frac{4\pi}{c} (\dot{\mathbf{D}}_3 + \mathbf{J}_3), \operatorname{rot} \mathbf{E}_3 = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}_3; \\ \operatorname{div} \mathbf{B}_3 &= 0; \\ (\mathbf{B}_3^{(2)} \mathbf{n}_{12}) &= (\mathbf{B}_3^{(1)} \mathbf{n}_{12}); \\ [\mathbf{n}_{12} [\mathbf{E}_3^{(2)} \mathbf{n}_{12}]] &= [\mathbf{n}_{12} [\mathbf{E}_3^{(1)} \mathbf{n}_{12}]]; \\ [\mathbf{n}_{12} [\mathbf{H}_3^{(2)} \mathbf{n}_{12}]] &= [\mathbf{n}_{12} [\mathbf{H}_3^{(1)} \mathbf{n}_{12}]]; \quad \mathbf{J}_3 = \sigma \mathbf{E}_3, \end{aligned} \right\} \quad (\text{X})$$

причем в диэлектриках $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$.

Сумма полей (1), (2), (3) будет соответствовать случаю, когда при наличии зарядов в диэлектриках постоянного земного магнитного поля и постоянных электродвижущих сил в проводниках имеются еще источники переменного поля. С такой задачей мы обычно имеем дело на практике, но так как методы наблюдения переменных полей не реагируют на постоянные электрические и магнитные поля, то практический интерес имеет только переменная часть электромагнитного поля, при расчете которой мы по доказанному можем совершенно не принимать во внимание постоянные (или очень медленно меняющиеся) поля, происходящие от постоянных зарядов, электродвижущих сил и токов, что значительно упрощает как теоретическую задачу, так и практическую интерпретацию.

Рассматривая неоднородные среды, мы ограничимся, как и в первой части нашей книги случаем, когда среда состоит из отдельных однородных участков с разными значениями величин ϵ , μ , σ ; добавим, что в задачах электроразведки μ почти всегда можно считать равным единице, поскольку естественные ферромагнитные тела электрическими методами разведываются очень редко, а для всех прочих тел μ так мало отличается от единицы, что для практических целей этой разницей можно пренебречь. Для случая однородных сред можно показать, что ρ_e внутри проводников независимо от временного течения электромагнитного процесса будет уменьшаться по показательному закону. Действительно, из уравнений (X) легко получить снова уравнение сохранения электричества (значок \mathbf{z} у векторов поля опускаем)

$$\dot{\rho}_e = \operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} = -\operatorname{div} \mathbf{J} = -\sigma \operatorname{div} \mathbf{E}.$$

С другой стороны,

$$\rho_e = \operatorname{div} \mathbf{D} = \frac{\epsilon}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{E}.$$

Отсюда следует

$$\frac{\dot{\rho}_e}{\rho_e} = -\frac{4\pi\sigma}{\epsilon}$$

или

$$\rho_e = \rho_{e0} e^{-\frac{4\pi\sigma}{\epsilon} t} = \rho_{e0} e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (3)$$

где ρ_{e0} — значение объемной плотности в момент $t = 0$.

Если в начальный момент мы имеем режим постоянного поля и внутри однородных проводников $\rho_e = 0$, то при возникновении и развитии переменного режима объемная плотность не может появиться. При любых начальных условиях она исчезнет тем быстрее, чем больше электропроводность среды. Скорость убывания величины, изменяющейся по закону (3), оценивают величиной, обратной «времени релаксации» τ , т. е. тому времени, в течение которого рассматриваемая величина уменьшается в e раз.

В нашем случае

$$\tau = \frac{\epsilon}{4\pi\sigma};$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon}.$$

Полагая

$$\epsilon \leq 80, \sigma \geq 10^{-7} (\text{ом} \cdot \text{см})^{-1} = 9 \cdot 10^4 \text{ СГСЕ},$$

т. е. допуская довольно высокое сопротивление земли, мы получаем

$$\tau \leq \frac{80}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^4} = 7,1 \cdot 10^{-5} \text{ сек.}$$

Таким образом, практически всегда можно считать, что $\rho_e = 0$. Вычисленное нами время релаксации не следует смешивать с временем, потребным для установления нового режима, например, при включении в электроразведочную установку источника постоянного (или переменного) тока или его выключении. Эти периоды неустановившегося режима могут быть гораздо продолжительнее, особенно при больших размерах установки, но мы можем при расчете таких проблем все же считать ρ_e равным нулю.

§ 2. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ПОЛЯ; ВВЕДЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ВЕЛИЧИН

Теорема о наложении решений позволяет нам внести в наши проблемы еще одно значительное упрощение во всех тех случаях, когда мы имеем дело с установившимся (стационарным) периодическим режимом электромагнитного поля, что в методах электроразведки переменными полями всегда имеет место. Как известно, периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье, члены которого представляют собой гармонические колебания с частотами, кратными основной, и с амплитудами и фазами, различными для каждого члена и зависящими от характера разлагаемой функции. Мы можем изучать в отдельности гармонические составляющие нашего поля, а затем сложить полученные поля, соответствующие, как говорят по аналогии с акустикой, основному тону и обертонам или высшим гармоникам. Источником этих гармоник поля являются гармонические составляющие тока или напряжения, даваемого генераторной установкой.

Мы увидим, что одна и та же среда по отношению к полям различной частоты характеризуется различными параметрами,

являющимися функциями частоты. Так как присутствие нескольких частот дает наложение полей, следующих разным закономерностям, то при наличии периодического, но не гармонического генератора толкование наблюдений весьма усложняется; поэтому нужно стараться уничтожить или по возможности заглушить высшие гармоники либо в генераторе, либо в приемнике (фильтры частоты).

По теореме о наложении полей можно изучать каждую гармоническую составляющую в отдельности, и изучение полей, в которых зависимость любой величины M от времени дается выражением являющимся основным для теории переменных полей,

$$M = M_0 \cos(2\pi ft + \delta), \quad (4)$$

где f — число колебаний в секунду; δ — начальная фаза; M_0 — амплитуда.

Решение задачи заключается в нахождении M_0 и δ как функций координат. Упрощение, которое получается в случае чисто гармонически колеблющегося поля, заключается в следующем: вместо того чтобы разыскивать решения для интересующих нас величин в виде выражений (4), где амплитуда и фаза могут быть функциями координат, гораздо удобнее писать решения в комплексном виде.

Пусть

$$\bar{M} = \bar{M}_0 e^{i2\pi ft} = \text{Re } \bar{M} + i \text{Im } \bar{M}. \quad (4a)$$

Тогда мы можем рассматривать в качестве M

$$M = \text{Re } \bar{M} \text{ или } M = -\text{Im } \bar{M}.$$

Сопоставим в окончательном виде уравнения для переменного поля в однородных средах для установившегося режима

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \dot{\mathbf{D}} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, & \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{B}}; \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0, & \text{div } \mathbf{D} &= 0; \\ \mathbf{D} &= \frac{\epsilon}{4\pi} \mathbf{E}, & \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H}, & \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} \end{aligned} \right\} \quad (XI)$$

и граничные условия (X), которые заключаются в непрерывности нормальной составляющей \mathbf{B} и тангенциальных составляющих \mathbf{E} и \mathbf{H} . Все уравнения этой системы линейны, однородны, и сумма частных решений, умноженных на любые численные коэффициенты, есть опять решение. Комплексная величина \bar{M} (4a) в предположении, что \bar{M}_0 также комплексно, представится в виде

$$\bar{M} = |\bar{M}_0| e^{i\delta} e^{i2\pi ft} = |\bar{M}_0| [\cos(2\pi ft + \delta) + i \sin(2\pi ft + \delta)], \quad (5)$$

и вещественная часть ее имеет требуемый вид при $M_0 = |\bar{M}_0|$. Если уравнения удовлетворяются комплексными величинами вида \bar{M} , то, подставляя их в развернутом виде (5) в уравнения системы (XI) и разделяя вещественную часть от мнимой во всех уравнениях,

мы легко увидим, что в отдельности и вещественная, и мнимая части должны удовлетворять всей системе уравнений. В дальнейшем мы в процессе решения под величинами $E_x, E_y, E_z, J_x, J_y, J_z$ и т. д. будем понимать именно комплексные величины вида \bar{M} .

Подставляя их в уравнения (XI), мы можем выполнить дифференцирование по t и прийти к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} (i2\pi f \mathbf{D} + \mathbf{J}); & \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{i2\pi}{c} f \mathbf{B}; \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0; & \text{div } \mathbf{D} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (XIa)$$

Оставшиеся дифференциальные операции касаются только координат; поэтому множитель $e^{i2\pi ft}$, входящий в выражения всех векторов, можно сократить и понимать под величинами E_x, D_x, H_x, B_x, J_x и т. д. не зависящие от времени комплексные амплитуды соответствующих составляющих векторов. На основании (5) мы можем сказать, что комплексные амплитуды, получающиеся в качестве окончательного решения системы уравнений (XI), определяют своим модулем амплитуду, а своим аргументом фазу данной вещественной величины. В применении к некоторым методам исследования удобнее давать вещественную и мнимую часть комплексной амплитуды. Действительно, выражение (4), представляющее искомую величину, можно представить в виде суммы двух членов:

$$\begin{aligned} M_0 \cos(2\pi ft + \delta) &= M_0 \cos \delta \cos 2\pi ft - M_0 \sin \delta \sin 2\pi ft = \\ &= M_0 \cos \delta \cos 2\pi ft + M_0 \sin \delta \cos \left(2\pi ft + \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

т. е. в виде суммы двух колебаний, одного с нулевой фазой и амплитудой, равной вещественной части \bar{M}_0 , и другого, отличающегося от первого по фазе на $\pi/2$ и с амплитудой, равной мнимой части \bar{M}_0 . За нулевую фазу принимают обычно фазу тока в генераторе. Как известно, эти соотношения иллюстрируются так называемой векторной диаграммой, представляющей плоскость комплексных чисел. Комплексная величина $\bar{M} = \bar{M}_0 e^{i2\pi ft}$ изображается вектором в плоскости комплексных чисел (рис. 1) с составляющими по вещественной оси

$$\text{Re } \bar{M} = |\bar{M}_0| \cos(2\pi ft + \delta),$$

по мнимой оси

$$\text{Im } \bar{M} = |\bar{M}_0| \sin(2\pi ft + \delta).$$

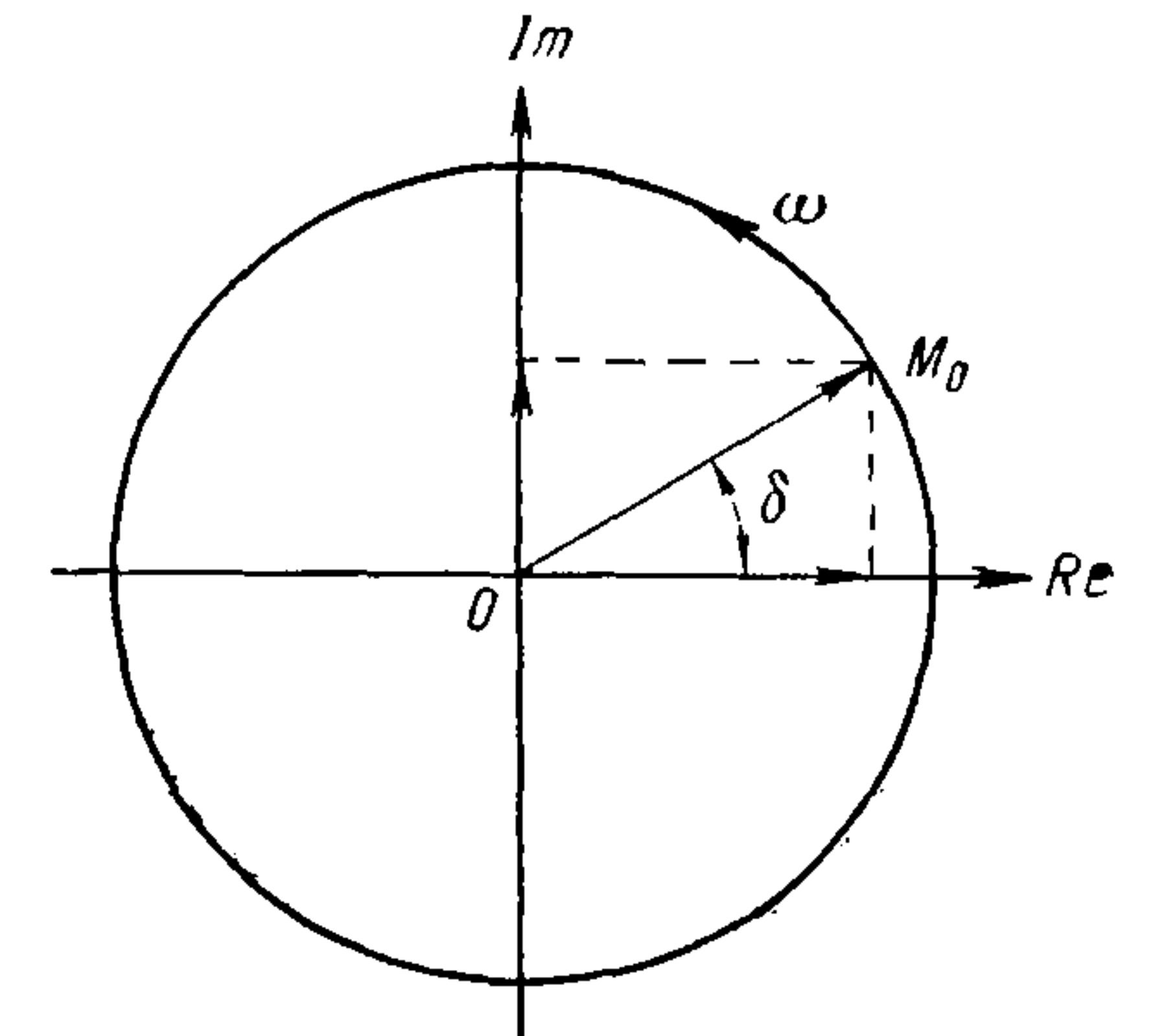


Рис. 1.

Этот вектор обращается с числом оборотов f в сторону возрастающих фазовых углов, т. е. против часовой стрелки, так что его конец описывает круг радиусом $|\overline{M}_0|$, и в момент $t = 0$ имеет положение, определяемое комплексным числом \overline{M}_0 , причем для характеристики данного колебания, очевидно, достаточно знать начальное положение вектора и число оборотов в секунду.

Если комплексная амплитуда \overline{M}_0 какой-нибудь величины, характеризующей электромагнитное поле, имеет в частном случае вещественное положительное значение, то начальная фаза колебания равна нулю. Если амплитуда есть мнимое положительное число, то мы имеем колебание, упреждающее по фазе на $\pi/2$ ток в генераторе. Разложение комплексной амплитуды на вещественную часть α и мнимую β соответствует разложению колебания на две части: одну с нулевой фазой и другую с упреждением по фазе на $\pi/2$. Заметим, что в выкладках удобнее вместо числа колебаний в секунду пользоваться круговой частотой

$$\omega = 2\pi f, \quad (6)$$

соответствующей угловой скорости вращения векторной диаграммы.

§ 3. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ВЕКТОРОВ ПОЛЯ

Каждая составляющая любого вектора электромагнитного поля в общем случае дается выражением типа (4), или при введении комплексных величин, в виде (5). Рассмотрим, как меняются величина и направление вектора \mathbf{M} , имеющего составляющие

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M_{ox} \cos(\omega t + \delta_x) = \operatorname{Re} M_{ox} e^{i\omega t}; \\ M_y &= M_{oy} \cos(\omega t + \delta_y) = \operatorname{Re} M_{oy} e^{i\omega t}; \\ M_z &= M_{oz} \cos(\omega t + \delta_z) = \operatorname{Re} M_{oz} e^{i\omega t}. \end{aligned} \right\}$$

Разложив комплексные амплитуды

$$M_{ox}, M_{oy}, M_{oz}$$

на вещественные и мнимые части

$$\left. \begin{aligned} M_{ox} &= \alpha_x + i\beta_x; \\ M_{oy} &= \alpha_y + i\beta_y; \\ M_{oz} &= \alpha_z + i\beta_z, \end{aligned} \right\}$$

получим

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \alpha_x \cos \omega t - \beta_x \sin \omega t; \\ M_y &= \alpha_y \cos \omega t - \beta_y \sin \omega t; \\ M_z &= \alpha_z \cos \omega t - \beta_z \sin \omega t. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Заметим, что вещественные амплитуды каждой из составляющих получаются из составляющих $\alpha_x, \beta_x \dots$ по формулам

$$\begin{aligned} a_x &= |\sqrt{\alpha_x^2 + \beta_x^2}|; \\ a_y &= |\sqrt{\alpha_y^2 + \beta_y^2}| \quad \text{и т. д.,} \end{aligned}$$

а фазы по формулам

$$\begin{aligned} \cos \delta_x &= \frac{\alpha_x}{|\sqrt{\alpha_x^2 + \beta_x^2}|}; \\ \sin \delta_x &= \frac{\beta_x}{|\sqrt{\alpha_x^2 + \beta_x^2}|} \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

Из этих формул следует, что

$$\operatorname{tg} \delta_x = \frac{\beta_x}{\alpha_x},$$

но при определении квадранта, в который приходится угол δ_x , нужно принять во внимание знаки в предыдущих формулах для синуса и косинуса.

Будем рассматривать $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ как составляющие вещественного вектора $\vec{\alpha}$ и $\beta_x, \beta_y, \beta_z$ — как составляющие вектора $\vec{\beta}$. Переменный вектор \mathbf{M} можно на основании (7) рассматривать как сумму двух векторов

$$\mathbf{M}_1 = \vec{\alpha} \cos \omega t; \quad \mathbf{M}_2 = -\vec{\beta} \sin \omega t, \quad (7a)$$

каждый из которых представляет собой линейное колебание той же частоты, но с разностью фаз в $\pi/2$. Как хорошо известно из элементарной теории колебаний, два линейных колебания разных направлений, фаз и амплитуд, но одинаковой частоты при сложении дают эллиптическое колебание, т. е. конец вектора \mathbf{M} описывает в пространстве плоский эллипс, причем положение этой плоскости определяется тем, что она должна проходить через направления $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$. Единичный вектор нормали этой плоскости проще всего определить формулой

$$\mathbf{n} = \frac{[\vec{\beta} \vec{\alpha}]}{|[\vec{\beta} \vec{\alpha}]|}. \quad (8)$$

Эта формула дает неопределенность, если $\vec{\alpha} = 0$, или $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$, или $\vec{\beta} = 0$. Во всех этих случаях мы имеем линейное колебание. Квадрат вектора \mathbf{M} из (7) получается равным

$$M^2 = \alpha^2 \cos^2 \omega t + \beta^2 \sin^2 \omega t - 2(\vec{\alpha} \vec{\beta}) \sin 2\omega t.$$

Подставляя

$$\cos^2 \omega t = \frac{1 + \cos 2\omega t}{2}; \quad \sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2},$$

получаем

$$M^2 = \frac{1}{2} [(\alpha^2 + \beta^2) + (\alpha^2 - \beta^2) \cos 2\omega t - 2(\vec{\alpha} \vec{\beta}) \sin 2\omega t].$$

Минимумы и максимумы M^2 , очевидно, должны соответствовать малой и большой полуоси эллипса. Приравнивая нулю первую производную по времени, имеем

$$\frac{d}{dt}M^2 = -\omega [(\alpha^2 - \beta^2) \sin 2\omega t + 2(\vec{\alpha} \vec{\beta}) \cos 2\omega t] = 0. \quad (9)$$

Если $\alpha^2 = \beta^2$ и $(\vec{\alpha} \vec{\beta}) = 0$ одновременно, то, как легко видеть, мы имеем круговое колебание как результат сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковыми амплитудами и с разностью фаз в $\pi/2$; во всех других случаях уравнение (9) имеет определенное решение

$$\operatorname{tg} 2\omega t_0 = \frac{2(\vec{\alpha} \vec{\beta})}{\beta^2 - \alpha^2}. \quad (10)$$

Для максимума необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\left(\frac{d^2M^2}{dt^2}\right)_{t=t_0} = -2\omega^2 [(\alpha^2 - \beta^2) \cos 2\omega t_0 - 2(\vec{\alpha} \vec{\beta}) \sin 2\omega t_0] < 0.$$

Это будет иметь место, если мы определим $2\omega t_0$ из условия, чтобы

$$\cos 2\omega t_0 = \frac{(\beta^2 - \alpha^2)}{\sqrt{(\beta^2 - \alpha^2)^2 + 4(\vec{\beta} \vec{\alpha})^2}};$$

$$\sin 2\omega t_0 = \frac{2(\vec{\alpha} \vec{\beta})}{\sqrt{(\beta^2 - \alpha^2)^2 + 4(\vec{\beta} \vec{\alpha})^2}},$$

тогда мы получим для M_{\max}^2 формулу

$$M_{\max}^2 = \frac{1}{2} \left[(\alpha^2 + \beta^2) + \sqrt{(\beta^2 - \alpha^2)^2 + 4(\vec{\beta} \vec{\alpha})^2} \right],$$

величину большой полуоси обозначим через m

$$m = \sqrt{\frac{(\alpha^2 + \beta^2) + \sqrt{(\beta^2 - \alpha^2)^2 + 4(\vec{\beta} \vec{\alpha})^2}}{2}}. \quad (10a)$$

При другом выборе знаков, т. е. взяв $2\omega t_0' = 2\omega t_0 \pm \pi$, мы получим малую полуось, величина которой равна

$$m' = \sqrt{\frac{(\alpha^2 + \beta^2) - \sqrt{(\beta^2 - \alpha^2)^2 + 4(\vec{\beta} \vec{\alpha})^2}}{2}}. \quad (10б)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} (\beta^2 - \alpha^2)^2 + 4(\vec{\beta} \vec{\alpha})^2 &= (\beta^2 - \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2 \cos^2(\vec{\alpha} \vec{\beta})^* = \\ &= (\beta^2 + \alpha^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2 \cos^2(\vec{\alpha} \vec{\beta}) - 4\alpha^2\beta^2 = (\beta^2 + \alpha^2)^2 - \\ &- 4\alpha^2\beta^2 \sin^2(\vec{\alpha} \vec{\beta}) = (\beta^2 + \alpha^2)^2 - 4[\vec{\beta} \vec{\alpha}]^2 \end{aligned}$$

* $(\vec{\alpha} \vec{\beta})$ — угол между векторами $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$.

удобнее для вычисления, ибо сумма квадратов и векторное произведение уже встречаются в формулах. Вычисление других элементов, определяющих пространственное колебание, мы разберем в дальнейшем на примере. Для сравнения теории с наблюдениями при некоторых приемах измерения желательно знать расположение и величину осей проекций эллиптического колебания на плоскости координат. Если нам известны величины $\alpha_x, \beta_x, \alpha_y, \beta_y$, то в плоскости XU мы будем иметь колебание с составляющими

$$M_x = \alpha_x \cos \omega t - \beta_x \sin \omega t;$$

$$M_y = \alpha_y \cos \omega t - \beta_y \sin \omega t,$$

тогда

$$M^2 = M_x^2 + M_y^2 = (\alpha_x^2 + \alpha_y^2) \cos^2 \omega t + (\beta_x^2 + \beta_y^2) \sin^2 \omega t - (\alpha_x\beta_x + \alpha_y\beta_y) \sin 2\omega t,$$

которое напомним в виде

$$M^2 = \frac{1}{2} (T - P \cos 2\omega t - Q \sin 2\omega t),$$

где

$$T = \beta_x^2 + \beta_y^2 + \alpha_x^2 + \alpha_y^2;$$

$$P = \beta_x^2 + \beta_y^2 - \alpha_x^2 - \alpha_y^2;$$

$$Q = 2(\alpha_x\beta_x + \alpha_y\beta_y).$$

Условия максимума M^2 будут

$$\frac{dM^2}{dt} = \omega (P \sin 2\omega t - Q \cos 2\omega t) = 0;$$

$$\frac{d^2M^2}{dt^2} = 2\omega^2 (P \cos 2\omega t + Q \sin 2\omega t) < 0,$$

Первое условие дает

$$\operatorname{tg} 2\omega t_0 = \frac{Q}{P}, \quad (11)$$

а второе показывает, что для максимума нужно взять решение, соответствующее

$$\cos 2\omega t_0 = -\frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}};$$

$$\sin 2\omega t_0 = -\frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}.$$

Подставив эти значения в выражение для M^2 , мы получим

$$M_{\max}^2 = \frac{1}{2} (T + \sqrt{P^2 + Q^2}), \quad (11a)$$

а взяв $\sin 2\omega t_0$ и $\cos 2\omega t_0$ с обратным знаком,

$$M_{\min}^2 = \frac{1}{2} (T - \sqrt{P^2 + Q^2}). \quad (11б)$$

Фаза составляющей по большой оси

$$\delta_p = -\omega t_0,$$

а фаза составляющей по малой оси

$$\delta_q = -\omega t_0 \pm \frac{\pi}{2},$$

причем если вектор обходит эллипс в положительном направлении (против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительной оси Z), то

$$\delta_q = \delta_p - \frac{\pi}{2},$$

а в противоположном случае

$$\delta_q = \delta_p + \frac{\pi}{2}.$$

Знак вращения определяется знаком составляющей по оси Z векторного произведения

$$[\mathbf{M}\dot{\mathbf{M}}]_z = M_x M_y - M_y M_x,$$

которая, как легко вычислить из выражений (7), равна

$$\omega (\beta_x \alpha_y - \alpha_x \beta_y).$$

Заметим, что проекции осей пространственного эллипса отнюдь не должны равняться осям проекций этого эллипса на какую-нибудь плоскость. При большой эллиптичности колебаний, а также при быстром изменении фаз от точки к точке методы, позволяющие измерять только амплитуды колебаний, могут дать неясную картину. Как мы увидим дальше, такие измерения в лучшем случае дают положение осей эллипса колебания в пространстве; проведение эквипотенциальных линий сводится к установлению направлений малой полуоси эллипса, описываемого вектором тока. Не зная фаз, приходится характеризовать поле в данной точке направлением большой полуоси; эта картина могла бы считаться достаточной, если бы во всех точках поля прохождение векторов через большую полуось было одновременно; если же это не имеет места, то действительная картина поля может заметно отличаться от того, что принято изображать как результат наблюдений в виде планшетов с изолиниями той или иной величины.

Измеряя же отдельно вещественные или мнимые части электромагнитных величин, мы можем по формулам (7) вычислить поле во всех измеренных точках в один и тот же момент времени. Такая обработка наблюдений, по виду ее сложности, до сих пор не практиковалась, но для анализа сложных случаев нужно иметь в виду эту возможность.

Возьмем численный пример и произведем расчет величин, характеризующих положение эллипса. Пусть нам дано колебание вектора \mathbf{H} с комплексными амплитудами составляющих

$$\overline{H}_{ox} = 5 + i3; \quad \overline{H}_{oy} = 2 - i4; \quad \overline{H}_{oz} = 8 + i2.$$

Рассмотрим сперва проекцию колебания на плоскость XY (горизонтальную); мы имеем

$$T = 54; \quad P = -4; \quad Q = 14.$$

По формуле (11)

$$\operatorname{tg} 2\omega t_0 = -\frac{14}{4} = -\frac{7}{2}$$

$2\omega t_0 = -74^\circ, 3', 3$, так как $\sin 2\omega t_0$ должен быть < 0 , а $2 \cos \omega t_0 > 0$; отсюда

$$\omega t_0 = -37^\circ 1', 6; \quad \sin \omega t_0 = -0,6022;$$

$$\cos \omega t_0 = 0,7983; \quad \delta_p = 37^\circ 1', 6;$$

$$\sin \left(\omega t_0 + \frac{\pi}{2} \right) = 0,7983; \quad \cos \left(\omega t_0 + \frac{\pi}{2} \right) = 0,6022.$$

Для момента $t = t_0$ вычисляем

$$H_x' = 5 \cdot 0,7983 + 3 \cdot 0,6022 = 5,798;$$

$$H_y' = 2 \cdot 0,7983 - 4 \cdot 0,6022 = -0,812,$$

а для момента

$$t_0 + \frac{\pi}{2\omega} = t_0 + \frac{T_0}{4},$$

где T_0 — период колебания,

$$H_x'' = 5 \cdot 0,6022 - 3 \cdot 0,7983 = 0,616;$$

$$H_y'' = 2 \cdot 0,6022 + 4 \cdot 0,7983 = 4,398.$$

Длина большой полуоси

$$\sqrt{H_x'^2 + H_y'^2} = 5,855 = a_p,$$

а малой

$$\sqrt{H_x''^2 + H_y''^2} = 4,441 = a_q.$$

Проверка по формулам (11а) и (11б) дает те же результаты. Мы имеем окончательно

$$H_p = 5,855 \cos(\omega t + 37^\circ 1', 6);$$

$$H_q = 4,441 \cos(\omega t - 52^\circ 58', 4),$$

причем $\delta_q = \delta_p - \pi/2$, так как вращение происходит в положительную сторону, что следует из того, что

$$\beta_x \alpha_y - \beta_y \alpha_x = 26 > 0.$$

Угол, который образует направление большой полуоси с осью X , получится из уравнения

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{H_y'}{H_x'} = -\frac{0,812}{5,798} = -0,140;$$

$$\psi = 7^\circ 58'.$$

При амплитудных измерениях, вращая вертикальную рамку вокруг оси z , определяют угол ψ (положение минимума приема) и, повернув рамку вокруг оси z на $\pi/2$, величину a_p . Далее, вращая приемную рамку около горизонтальной оси, совпадающей с малой полуосью горизонтальной проекции колебания, определяют направление большой полуоси проекции колебания на вертикальную плоскость, проходящую через большую полуось горизонтальной проекции (угол наклона η), а повернув рамку вокруг той же оси на $\pi/2$, измеряют величину большой полуоси этой проекции a_s .

Для того чтобы вычислить эти величины, разделим H_p на вещественную и мнимую компоненты

$H_p = a_p \cos(\omega t + \delta_p) = a_p \cos \delta_p \cos \omega t - a_p \sin \delta_p \sin \omega t$,
откуда следует

$$\alpha_p = a_p \cos \delta_p = 4,674;$$

$$\beta_p = a_p \sin \delta_p = 3,526.$$

Из этих величин и α_z и β_z , данных выше, получаем для проекции колебания на плоскость POZ

$$T = 102,28; \quad P = -69,42; \quad Q = 64,96;$$

$$\operatorname{tg} 2\omega t^* = -\frac{64,96}{69,42}; \quad \sin 2\omega t^* < 0; \quad \cos 2\omega t^* > 0;$$

$$2\omega t^* = -43^\circ 6'; \quad \omega t^* = -21^\circ 33';$$

$$\delta_s = 21^\circ 33'.$$

Для определения наклона (угол между направлением a_s и OZ) вычисляем

$$(H_z)_{t=t^*} = \alpha_z \cos \omega t^* - \beta_z \sin \omega t^* = 8,176;$$

$$(H_z)_{t=t^*} = \alpha_p \cos(\omega t^* + \delta_p) = 5,643;$$

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{5,643}{8,176} = 0,6901; \quad \eta = 34^\circ 36',6,$$

и, наконец, по формулам (11а) и (11б) большую и малую полуоси эллипса

$$a_s = 9,908; \quad a_s' = 2,026.$$

Вычислив α_q и β_q , можно получить из них α_z , β_z и угол ϑ таким же способом, как только что получили η . Вычисление дает

$$\vartheta = 16^\circ 8'.$$

Прибавив к этим результатам еще амплитуду вертикальной составляющей

$$a_z = \sqrt{8^2 + 2^2} = 8,246,$$

мы получим все элементы, которые можно просто наблюдать двухосной рамкой и вольтметром:

$$a_p = 5,855; \quad a_s = 9,924; \quad a_z = 8,246; \quad \psi = -7^\circ 58'; \quad \eta = 34^\circ 37'.$$

На рис. 2, 3, 4 указаны положения концов проекций вектора \mathbf{H} для 24 моментов в течение одного периода.

При наблюдении трехосной рамкой приводят рамку в положение, совпадающее с плоскостью эллипса (полное исчезновение приема). Это дает возможность определить азимут пересечения плоскости эллипса с горизонтальной плоскостью ξ и угол между плоскостью эллипса и горизонтом ι .

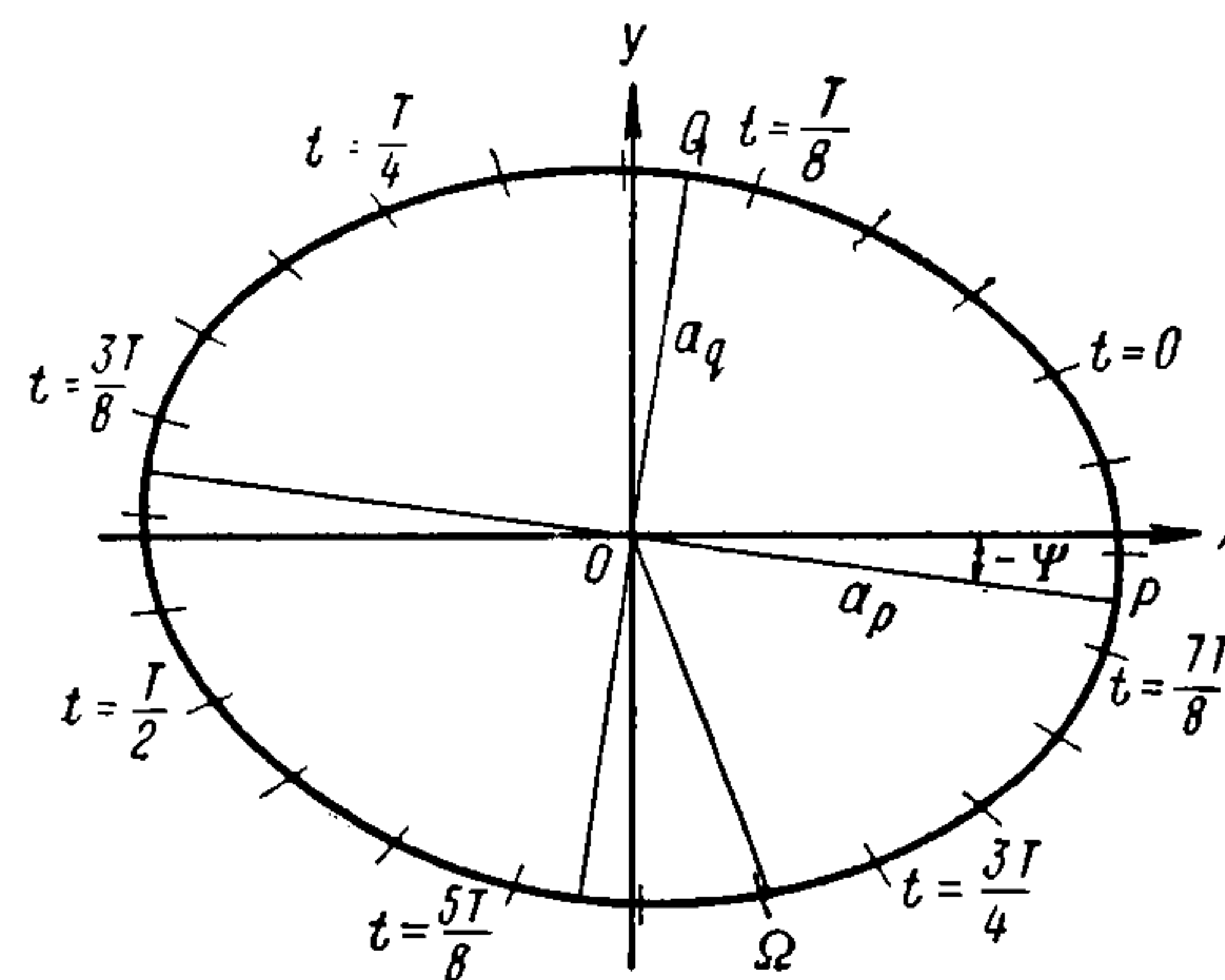


Рис. 2.

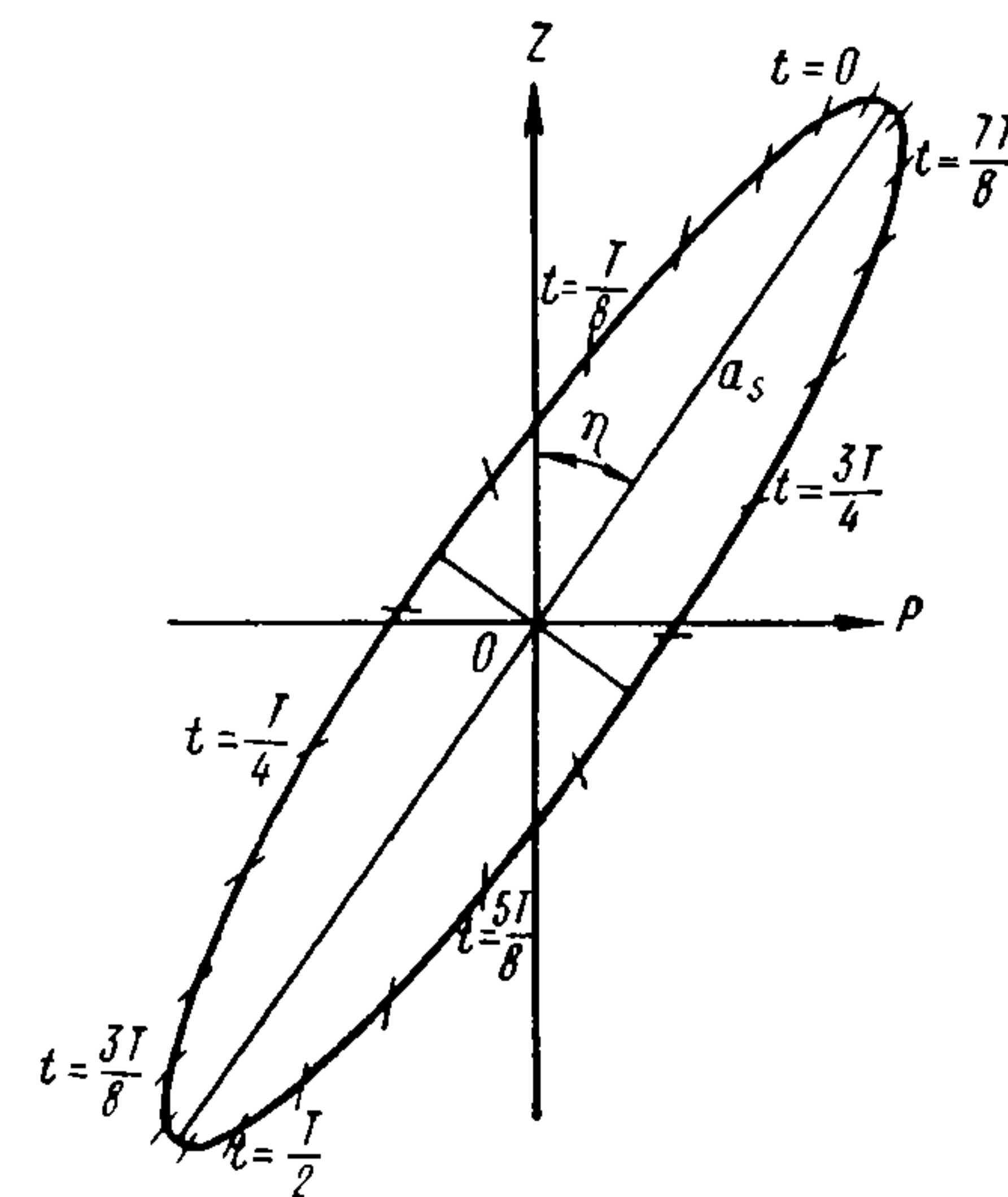


Рис. 3.

После этого простым приемом ставят третью ось, ось вращения рамки, перпендикулярно к плоскости эллипса, причем начальное положение плоскости рамки соответствует плоскости $NO\Omega$ (рис. 5). Находя вращением около этой оси минимум принимаемого напряжения, определяем положение большой полуоси m , отсчитывая угол поворота $\rho = \Omega\hat{M}$ из исходного положения. Измерение интенсивности в этом положении даст малую полуось m' , а повернув рамку на 90° вокруг той же оси, получаем измерением интенсивности большую полуось m .

Угол между m и OZ назовем η^* , а азимут направления m (угол XOR , рис. 5) назовем ψ^* . Из непосредственно измеренных углов ξ , ρ , ι , решая сферический треугольник ΩMR , получаем

$$\sin(\hat{MR}) = \cos \eta^* = \sin \rho \sin \iota,$$

отсюда

$$\sin \eta^* = \cos(\hat{MR}) = \sqrt{1 - \sin^2 \rho \sin^2 \iota}.$$

Для определения ψ^* введем угол ν (рис. 5). Из

$$\cos \rho = \cos \nu \cos(\hat{MR}) = \cos \nu \sin \eta^*$$

получаем

$$\cos v = \frac{\cos \rho}{\sqrt{1 - \sin^2 \rho \sin^2 \iota}}$$

и отсюда

$$\psi^* = \xi + v.$$

Для линейно поляризованного колебания, а также практически для очень вытянутого эллипса величины ψ^* и η^* будут мало отличаться от ψ и η определенных выше; если, пренебрегая эллиптичностью, характеризовать магнитное поле одним вектором постоянного направления, т. е. представлять поле как линейно поляризованное, то наиболее естественно считать этот вектор по величине и направлению равным большой полуоси пространственного эллипса. При заметной эллиптичности этот вектор по величине и направлению не совпадает

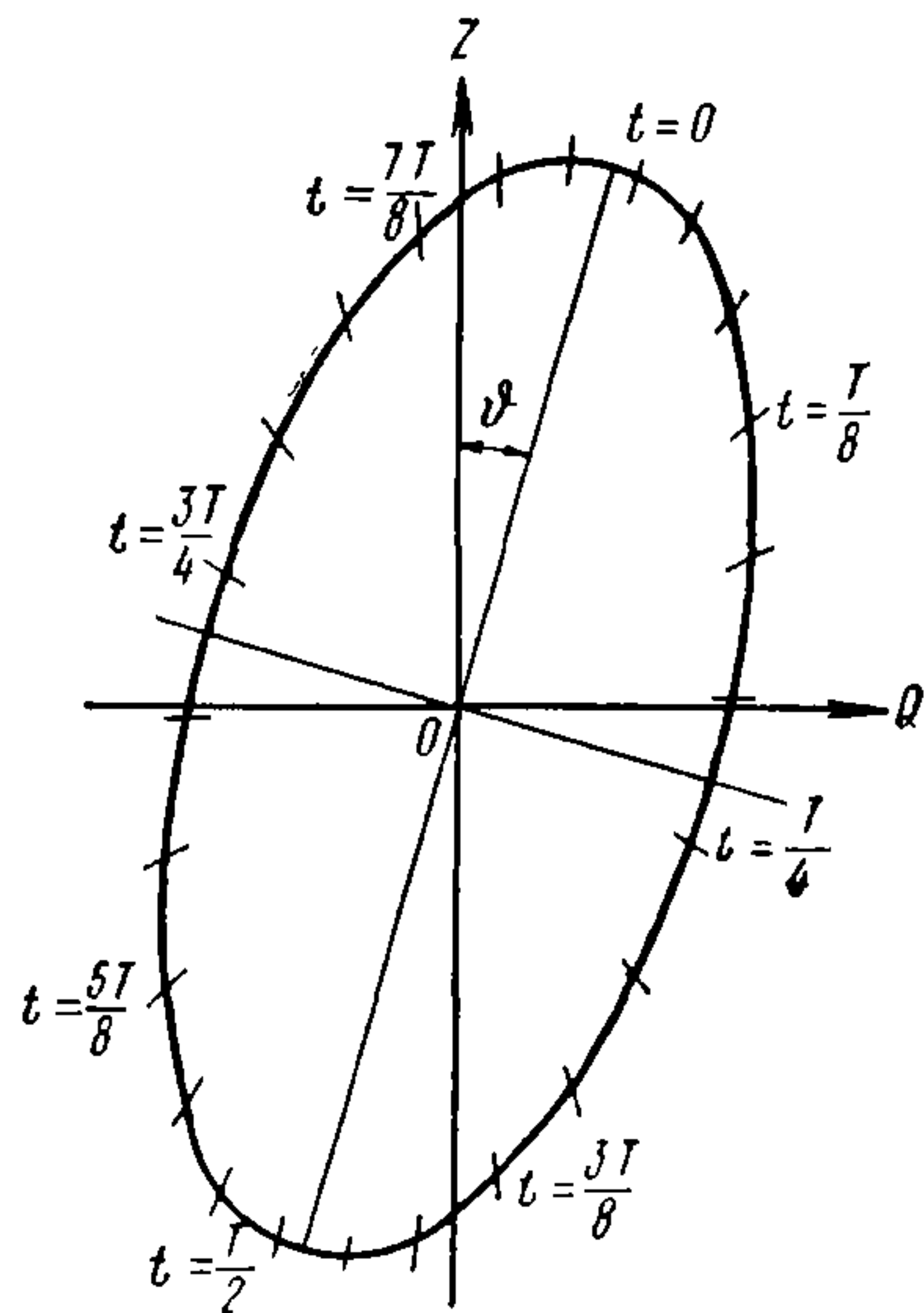


Рис. 4.

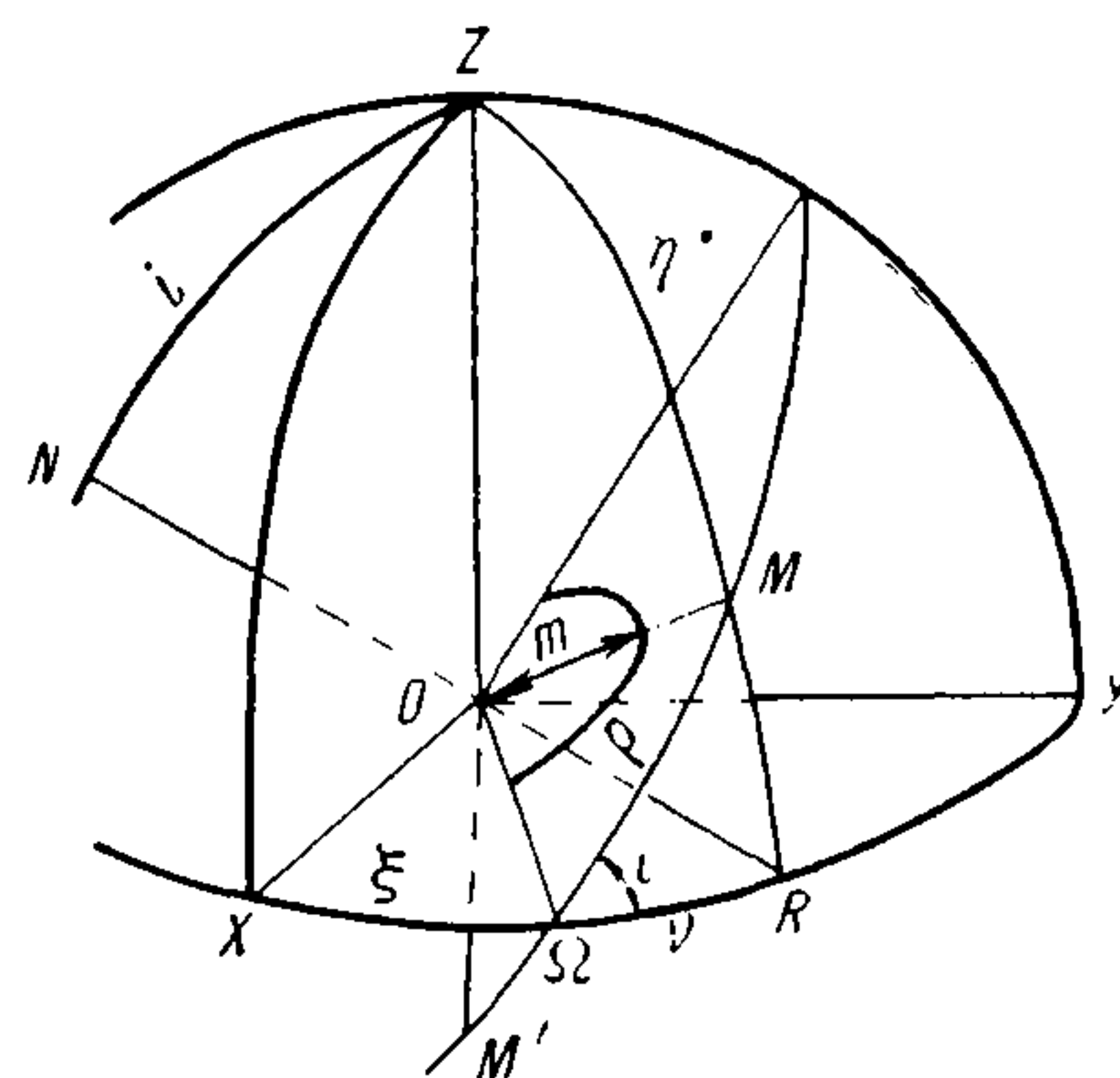


Рис. 5.

ни с a_s , ни с геометрической суммой a_p и a_z , что мы увидим на нашем примере.

Возвращаясь к примеру, мы определим сначала положение плоскости эллиптического колебания. На основании формулы (8) мы вычисляем составляющие векторного произведения $[\vec{\beta}\vec{\alpha}]$

$$\beta_y \alpha_z - \beta_z \alpha_y = -4 \cdot 8 - 4 = -36;$$

$$\beta_z \alpha_x - \beta_x \alpha_z = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 8 = -14;$$

$$\beta_x \alpha_y - \beta_y \alpha_x = 3 \cdot 2 + 5 \cdot 4 = 26.$$

Составляющие вектора \mathbf{n} , т. е. косинусы углов нормали с осями координат, пропорциональны этим числам, так что уравнение плоскости будет:

$$36x + 14y - 26z = 0.$$

Угол между нормалью и осью Z , равный углу ι , получится из

$$\cos \iota = n_z = \frac{26}{\sqrt{36^2 + 14^2 + 26^2}} = 0,5594;$$

$$\iota = 56^\circ 3'.$$

На практике отсчитывается угол $\omega = 90^\circ - \iota$.

Уравнение линии пересечения плоскости эллипса с горизонтом ($z = 0$)

$$36x + 14y = 0$$

даст нам азимут точки Ω ($\hat{O}\Omega$),

$$\operatorname{tg} \xi = -\frac{36}{14} = -2,571,$$

причем, если мы обозначим единичный вектор по оси z через \mathbf{k} , то азимут точки Ω определяется как азимут вектора $[\mathbf{k}\mathbf{n}]$, имеющего составляющие

$$-n_y, \quad +n_x, \quad 0.$$

Поэтому в нашем случае

$$\cos \xi > 0; \quad \sin \xi < 0$$

и

$$\xi = -68^\circ 45'.$$

Для определения составляющих m и m' применяем формулу (10)

$$\operatorname{tg} 2\omega t_0 = \frac{2(5 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + 8 \cdot 2)}{3^2 + 4^2 + 2^2 - 5^2 - 2^2 - 8^2} = -\frac{46}{64} = -0,7188;$$

$$2\omega t_0 = -35^\circ 42'; \quad \omega t_0 = -17^\circ 51';$$

$$m_x = (H_x)_{t_0} = 5 \cos 17^\circ 51' + 3 \sin 17^\circ 51' = 5,679;$$

$$m_y = (H_y)_{t_0} = 2 \cos 17^\circ 51' - 4 \sin 17^\circ 51' = 0,678;$$

$$m_z = (H_z)_{t_0} = 8 \cos 17^\circ 51' + 2 \sin 17^\circ 51' = 8,228;$$

$$m'_x = (H_x)_{t_0 + \frac{T}{4}} = 5 \sin 17^\circ 51' - 3 \cos 17^\circ 51' = -1,323;$$

$$m'_y = (H_y)_{t_0 + \frac{T}{4}} = 2 \sin 17^\circ 51' + 4 \cos 17^\circ 51' = 4,420;$$

$$m'_z = (H_z)_{t_0 + \frac{T}{4}} = 8 \sin 17^\circ 51' - 2 \cos 17^\circ 51' = 0,5485.$$

Отсюда

$$m = \sqrt{5,679^2 + 0,678^2 + 8,228^2} = 10,020;$$

$$m' = \sqrt{1,323^2 + 4,420^2 + 0,5485^2} = 4,647;$$

$$\operatorname{tg}(\hat{m}Z) = \operatorname{tg} \eta^* = \frac{\sqrt{5,679^2 + 0,678^2}}{8,228} = 0,6951;$$

$$\eta^* = 34^\circ 48', \quad \operatorname{tg} \psi^* = \frac{0,678}{8,228} = 0,0824; \quad \psi^* = 4^\circ 23'.$$

Сравнивая с данными, определяющими a_s , мы видим, что

$$m - a_s = 0,112;$$

$$\eta^* - \eta = 11';$$

$$\psi^* - \psi = 12^\circ 22'.$$

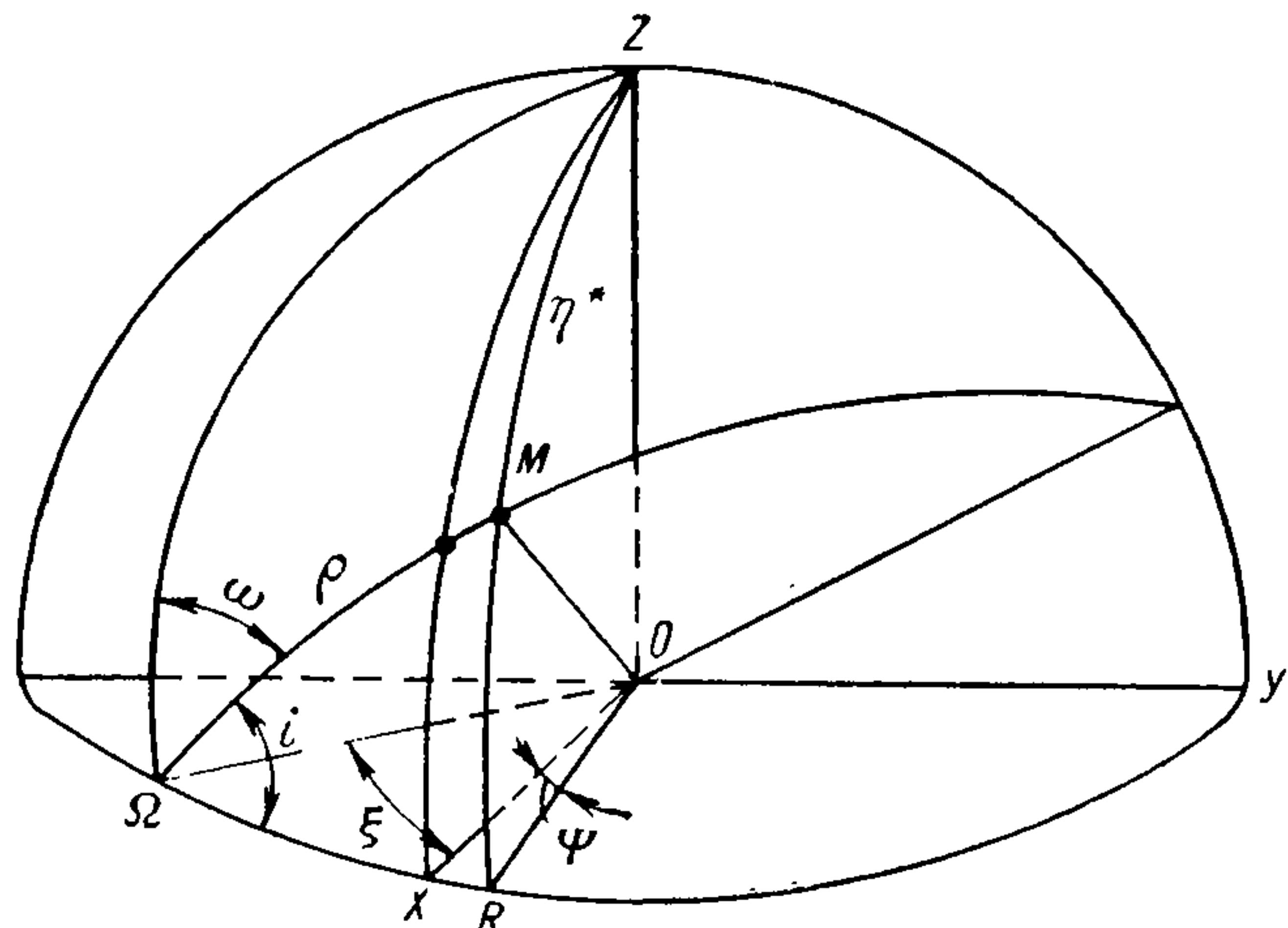


Рис. 6.

«Ошибка» в азимуте заметная; другие величины (случайно) получились близкие. Косинусы углов OM с осями координат равны

$$\frac{m_x}{m} = \frac{5,679}{10,020}; \quad \frac{m_y}{m} = \frac{0,679}{10,020}; \quad \frac{m_z}{m} = \frac{8,228}{10,020},$$

а синусы углов $O\Omega$ с осями координат

$$\cos \Omega OX = \cos \xi = \frac{14}{\sqrt{36^2 + 14^2}} = \frac{14}{36,627};$$

$$\cos \Omega OY = \sin \xi = -\frac{36}{\sqrt{36^2 + 14^2}} = -\frac{36}{38,627};$$

$$\cos \Omega OZ = 0.$$

Поэтому угол $MO\Omega = \rho$ определится из

$$\cos \rho = \frac{m_x}{m} \cos \xi + \frac{m_y}{m} \sin \xi = 0,1423,$$

$$\rho = 81^\circ 49'.$$

Рис. 6 построен аналогично рис. 5, но с данными, полученными из нашего расчета, он дает представление о пространственном колебании. Действительный эллипс, изображающий колебание и находящийся в плоскости ΩOM (рис. 6), изображен на рис. 7.

Практика показывает, что при не слишком большой эллиптичности величины a_p, a_z, a_s дают достаточно ясную картину поля; для их измерения, а также для определения углов ψ и η достаточно двухосной рамки и вольтметра. Трехосная рамка необходима для определения m, η^* и ψ^* . Для определения фаз всех этих данных

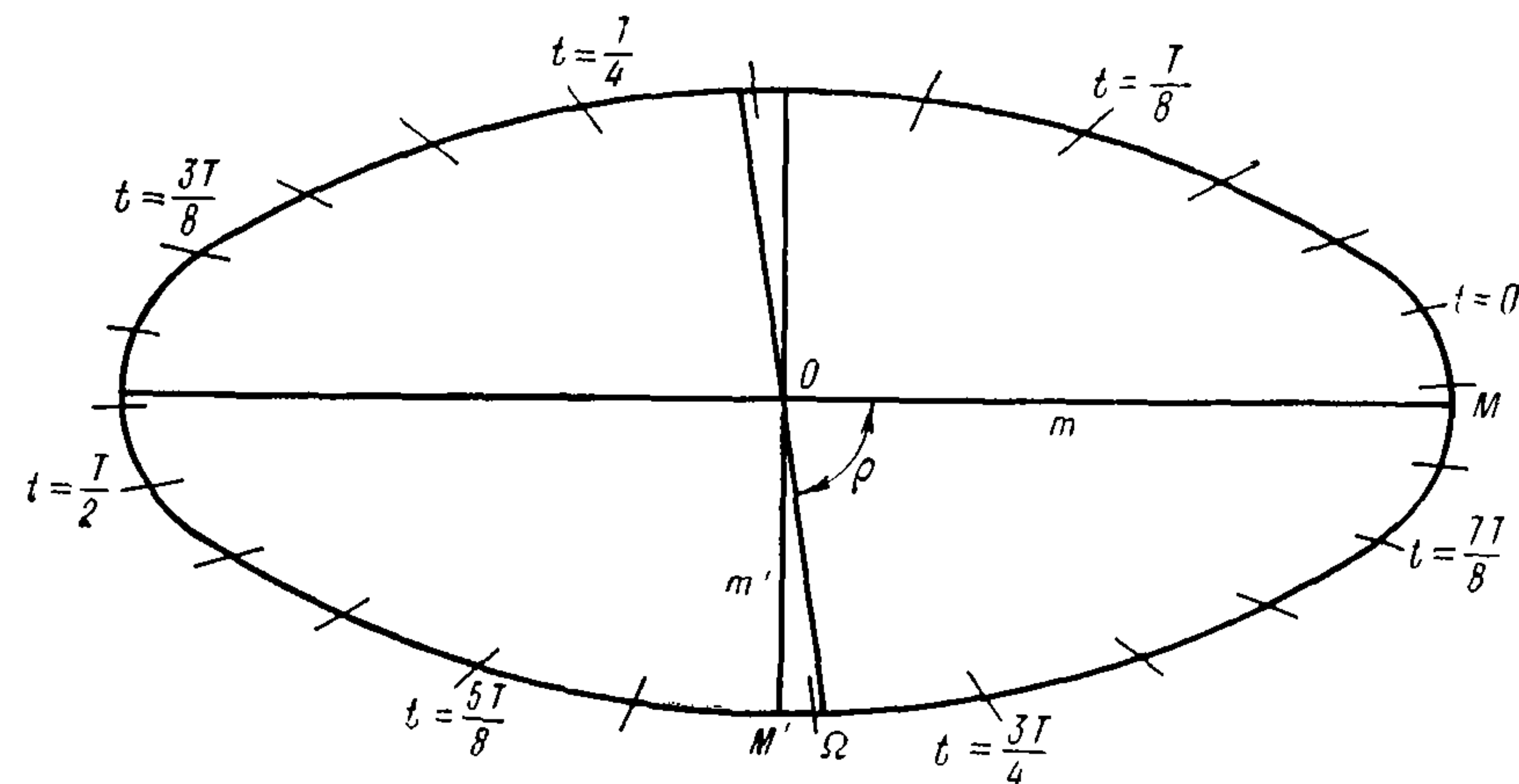


Рис. 7.

недостаточно, в то время как измерения вещественных и мнимых частей трех взаимно перпендикулярных составляющих дают исчерпывающее описание пространственного колебания, причем для этой цели двухосной рамки вполне достаточно, а в качестве измерительного прибора необходим комплексный или фазовый измерительный прибор.

Для облегчения пространственного представления мы рекомендуем читателям вычертить пространственный эллипс и его три проекции и склеить соответствующую модель.

§ 4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Предполагая в дальнейшем рассмотрение установившегося гармонического режима в изотропной среде, мы будем искать решения уравнений электромагнитного поля в виде

$$E_x = E_x^{(0)} e^{i\omega t} \text{ и т. д.}$$

В таком случае, как было указано в § 2, ч. II, мы можем заменить операцию дифференцирования по времени (точка над буквой) умножением на $i\omega$, т. е.

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = i\omega E_x \text{ и т. д.}$$

Дифференциальные уравнения для векторов поля примут вид (XIa) или, при введении угловой частоты ω вместо f ,

$$\left. \begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{i\omega\varepsilon + 4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}; \\ \text{div } \mathbf{H} &= 0; \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{i\omega}{c} \mathbf{H}; \\ \text{div } \mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XII})$$

Эта система уравнений может быть значительно упрощена введением вспомогательных величин, из которых искомые величины получаются дифференцированием. С такими величинами мы уже встречались при изучении постоянных полей и называли их потенциалами (электрический потенциал и вектор-потенциал магнитного поля).

Совершенно так же, как и для постоянного магнитного поля (часть I, § 17), мы удовлетворяем тождественно второму уравнению (X), положив

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}; \quad (12)$$

подставляя (12) в третье уравнение (XII), получаем

$$\text{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{i\omega}{c} \mathbf{A} \right) = 0,$$

откуда заключаем, что

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - \frac{i\omega}{c} \mathbf{A}. \quad (13)$$

Для определения неизвестных величин \mathbf{A} и φ подставляем (12) и (13) в первое уравнение (XII) и получаем

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = -\frac{i\omega\varepsilon + 4\pi\sigma}{c} \left(\text{grad } \varphi + \frac{i\omega}{c} \mathbf{A} \right)$$

или

$$\text{grad} \left(\text{div } \mathbf{A} + \frac{i\omega\varepsilon + 4\pi\sigma}{c} \varphi \right) = \Delta \mathbf{A} - \frac{i4\pi\sigma\omega - \omega^2\varepsilon}{c^2} \mathbf{A}.$$

Этому уравнению мы удовлетворяем, положив

$$\text{div } \mathbf{A} + \frac{i\omega\varepsilon + 4\pi\sigma}{c} \varphi = 0; \quad (14)$$

$$\Delta \mathbf{A} = k^2 \mathbf{A}, \quad (15)$$

где

$$k^2 = \frac{i4\pi\sigma\omega - \omega^2\varepsilon}{c^2}. \quad (16)$$

Комплексная постоянная k^2 заключает в себе свойства среды и в дальнейшем будет играть большую роль в нашем изложении.

Через величину k^2 мы можем выразить встречавшееся в (14) и (XII) выражение

$$\frac{i\omega\varepsilon + 4\pi\sigma}{c} = \frac{ck^2}{i\omega}, \quad (16a)$$

так что вместо (14) можно написать

$$\varphi = -\frac{i\omega}{ck^2} \text{div } \mathbf{A}. \quad (14a)$$

Из (XII) получаем другое выражение для \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = \frac{i\omega}{ck^2} \text{rot } \mathbf{H} = \frac{i\omega}{ck^2} \text{rot rot } \mathbf{A}. \quad (12a)$$

Наконец, подставляя (13) в четвертое уравнение (XII) и пользуясь (14a), имеем

$$\text{div } \mathbf{E} = -\Delta\varphi - \frac{i\omega}{c} \text{div } \mathbf{A} = -\Delta\varphi + k^2\varphi = 0,$$

так что φ удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi = k^2\varphi. \quad (17)$$

Таким образом, решение задачи сведено к решению уравнения

$$\Delta \mathbf{A} = k^2 \mathbf{A}$$

и вычислению из \mathbf{A} величин

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H} &= \text{rot } \mathbf{A}; \\ \mathbf{E} &= \frac{i\omega}{ck^2} \text{rot rot } \mathbf{A}, \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIII})$$

причем иногда удобнее сначала вычислить φ по (14a), а затем \mathbf{E} по второму уравнению (XIII).

Величины \mathbf{A} и φ называются электромагнитными вектор-потенциалом и скалярным потенциалом; они являются обобщениями вектор-потенциала магнитного поля постоянных токов и электрического потенциала постоянного электрического поля.

Переход к постоянному, не зависящему от времени полю получим, если положим

$$\omega = 0; \quad k^2 = 0.$$

Тогда (17) и (13) переходят в

$$\Delta\varphi = 0; \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi,$$

т. е. скалярный потенциал переходит в обычный потенциал электрического поля. Что же касается вектор-потенциала \mathbf{A} , то он удовлетворяет в случае $\omega = 0$ уравнениям

$$\Delta \mathbf{A} = 0; \quad \text{div } \mathbf{A} = -\frac{4\pi\sigma}{c} \varphi,$$

в то время как введенный нами в первой части книги вектор-потенциал магнитного поля постоянных токов, который мы здесь обозначим через \mathbf{A}' , удовлетворял уравнениям

$$\Delta \mathbf{A}' = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} = \frac{4\pi\sigma}{c} \text{grad } \varphi; \quad \text{div } \mathbf{A}' = 0.$$

Легко показать, что эта разница не существенна. Действительно, разность $(\mathbf{A} - \mathbf{A}')$ будет удовлетворять уравнениям

$$\Delta(\mathbf{A} - \mathbf{A}') = -\frac{4\pi\sigma}{c} \text{grad } \varphi; \quad \text{div}(\mathbf{A} - \mathbf{A}') = -\frac{4\pi\sigma}{c} \varphi.$$

Взяв от второго уравнения градиент, мы получим

$$\text{grad div}(\mathbf{A} - \mathbf{A}') = -\frac{4\pi\sigma}{c} \text{grad } \varphi,$$

откуда следует

$$\text{grad div}(\mathbf{A} - \mathbf{A}') - \Delta(\mathbf{A} - \mathbf{A}') = \text{rot rot}(\mathbf{A} - \mathbf{A}') = 0.$$

Производимые из \mathbf{A} и \mathbf{A}' операцией rot поля \mathbf{H} и \mathbf{H}' будут удовлетворять соотношению $\text{rot } \mathbf{H}' = \text{rot } \mathbf{H}$, и, следовательно, первое уравнение Максвелла (XII) будет одновременно выполняться при том и другом определении вектор-потенциала.

Вводя электромагнитные потенциалы для решения системы (XII), можно поступить и иначе. Можно положить

$$\mathbf{E}^* = \text{rot } \mathbf{A}^* \quad (17a)$$

и, подставляя в первое уравнение (XII) и пользуясь (16), получить

$$\mathbf{H}^* = -\text{grad } \varphi^* + \frac{ck^2}{i\omega} \mathbf{A}^*. \quad (18)$$

На основании третьего уравнения (XII) получаем

$$\text{rot } \mathbf{E}^* = \text{rot rot } \mathbf{A}^* = \text{grad div } \mathbf{A}^* - \Delta \mathbf{A}^* = \frac{i\omega}{c} \left(\text{grad } \varphi^* - \frac{ck^2}{i\omega} \mathbf{A}^* \right).$$

Полагая

$$\text{div } \mathbf{A}^* - \frac{i\omega}{c} \varphi^* = 0, \quad (19)$$

получаем

$$\Delta \mathbf{A}^* = k^2 \mathbf{A}^*, \quad (20)$$

т. е. \mathbf{A}^* должно удовлетворять такому же уравнению, как и \mathbf{A} .

Задача сведена к решению уравнения (20); \mathbf{E}^* и \mathbf{H}^* вычисляются по формулам (17), (19), (18), причем для \mathbf{H}^* можно легко получить из третьего уравнения (XII) выражение непосредственно через \mathbf{A}^* :

$$\mathbf{H}^* = -\frac{c}{i\omega} \text{rot rot } \mathbf{A}^*. \quad (18a)$$

Для сравнения с системой уравнений (XIII) выпишем только что полученную систему

$$\left. \begin{aligned} \Delta \mathbf{A}^* &= k^2 \mathbf{A}^*; \\ \mathbf{E}^* &= \text{rot } \mathbf{A}^*; \\ \mathbf{H}^* &= -\frac{c}{i\omega} \text{rot rot } \mathbf{A}^*. \end{aligned} \right\} \quad (\text{XIIIa})$$

Сравнение этих систем показывает, что, найдя решение \mathbf{A} первого уравнения (XIII), мы можем, положив $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$, построить еще одно

решение уравнений Максвелла (XII), связанное с первыми соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}^* &= \mathbf{H}; \\ \mathbf{H}^* &= \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \mathbf{E}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Это сопоставление позволит нам в дальнейшем очень просто перейти от поля линейного электрического вибратора к полю магнитного вибратора, т. е. полю излучения рамочной антенны.

§ 5. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВЕКТОР-ПОТЕНЦИАЛА

Граничные условия для векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} были уже неоднократно сформулированы. Нам нужно теперь установить граничные условия для вектор-потенциала \mathbf{A} . Проще всего они формулируются, если мы введем систему координат, расположенную так, что ось Z идет по нормали к поверхности раздела, а оси X и Y — в тангенциальной плоскости. Рассмотрим сначала случай системы (XIII) предыдущего параграфа. Непрерывность тангенциальных составляющих \mathbf{E}

$$E_x = \frac{i\omega}{c} \left(\frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial x} \text{div } \mathbf{A} - A_x \right);$$

$$E_y = \frac{i\omega}{c} \left(\frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial y} \text{div } \mathbf{A} - A_y \right)$$

будет иметь место, если мы положим A_x и A_y непрерывными, а также потребуем непрерывности величины

$$\frac{1}{k^2} \text{div } \mathbf{A},$$

так как непрерывность самой величины имеет следствием непрерывность тангенциальных производных (ч. I, Введение).

Так как по (XII)

$$H_z = -\frac{c}{i\omega} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right),$$

то непрерывность E_x и E_y уже влечет за собой автоматически непрерывность нормальной составляющей \mathbf{H} .

Тангенциальные составляющие \mathbf{H} даются выражениями

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}; \quad H_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}.$$

Для непрерывности тангенциальных производных A_z достаточно потребовать непрерывности A_z ; остается еще потребовать, чтобы величины $\frac{\partial A_y}{\partial z}$ и $\frac{\partial A_x}{\partial z}$ были непрерывными. Таким образом, мы приходим к граничным условиям, заключающимся в требовании непрерывности величин

$$A_x, A_y, A_z, \frac{\partial A_x}{\partial z}, \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{1}{k^2} \text{div } \mathbf{A}. \quad (22)$$

В векторной форме условия (22) можно записать

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(a)} &= \mathbf{A}^{(b)}, \\ \nabla_n \mathbf{A}^{(a)} &= \nabla_n \mathbf{A}^{(b)}; \\ \frac{1}{k_a^2} (\nabla \mathbf{A}^{(a)}) &= \frac{1}{k_b^2} (\nabla \mathbf{A}^{(b)}), \end{aligned} \quad (22a)$$

где a и b означают две соприкасающиеся среды.

Уравнения (22a) имеют место в точках на границе ab , A_x — тангенциальная слагающая вектора \mathbf{A} и, наконец, ∇ — известный символический вектор (набла).

Для случая системы (XIIIa) граничные условия для \mathbf{A}^* будут иными. Мы имеем

$$E_x^* = \frac{\partial A_z^*}{\partial y} - \frac{\partial A_y^*}{\partial z}; \quad E_y^* = \frac{\partial A_x^*}{\partial z} - \frac{\partial A_z^*}{\partial x}$$

и потребуем непрерывности A_z^* , $\frac{\partial A_x^*}{\partial z}$ и $\frac{\partial A_y^*}{\partial z}$.

При выполнении этих условий H_z^* также будет непрерывно и остается еще исследовать условия непрерывности H_x^* и H_y^* . Написав следующие выражения для H_x^* и H_y^* :

$$H_x^* = -\frac{c}{i\omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{A}^* - k^2 A_x^* \right);$$

$$H_y^* = -\frac{c}{i\omega} \left(\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \mathbf{A}^* - k^2 A_y^* \right),$$

мы видим, что достаточно будет непрерывности величин $\operatorname{div} \mathbf{A}^*$, $k^2 A_x^*$, $k^2 A_y^*$.

Таким образом, граничные условия для \mathbf{A}^* будут заключаться в требовании непрерывности величин

$$k^2 A_x^*, k^2 A_y^*, A_z^*; \quad \frac{\partial A_x^*}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_y^*}{\partial z}, \quad \operatorname{div} \mathbf{A}^*. \quad (23)$$

Глава II

ПРОСТЕЙШИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ПОЛЯ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

§ 6. ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ. ХАРАКТЕРИСТИКИ ВОЛНЫ

Рассмотрим простейший случай переменного электромагнитного поля, а именно плоскую волну. Под плоской гармонической волной мы понимаем такое поле, в котором все переменные величины зависят от времени через множитель $e^{i\omega t}$, а амплитуды одинаковы во всех точках любой плоскости, перпендикулярной к некоторому данному постоянному направлению.

Взяв это направление за ось X и воспользовавшись системой (XIII), мы должны решить первое уравнение (XIII), которое в наших предположениях сводится к трем дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} = k^2 A_x; \quad \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} = k^2 A_y; \quad \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} = k^2 A_z.$$

Общее решение этих уравнений в предположении, что все величины зависят только от x ,

$$\begin{aligned} A_x &= (A_{1x} e^{kx} + A_{2x} e^{-kx}); \\ A_y &= (A_{1y} e^{kx} + A_{2y} e^{-kx}); \\ A_z &= (A_{1z} e^{kx} + A_{2z} e^{-kx}), \end{aligned} \quad (24)$$

где A_{1x} и т. д. комплексные постоянные. Умножая на $e^{i\omega t}$, мы можем представить решение искомого типа как сумму двух более простых решений

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 e^{i\omega t + kx} + \mathbf{A}_2 e^{i\omega t - kx}, \quad (24a)$$

где \mathbf{A}_1 и \mathbf{A}_2 — два произвольных, но постоянных комплексных вектора, т. е. две пары вещественных векторов

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \alpha_1 + i\beta_1; \\ \mathbf{A}_2 &= \alpha_2 + i\beta_2. \end{aligned} \right\}$$

Условимся извлекать корень квадратный из комплексного числа k^2 так, чтобы вещественная часть $k = \sqrt{k^2}$ была положительна,

$$k = k_1 + ik_2; \quad k_1 > 0.$$

Так как по определению (16) эта комплексная величина лежит во втором квадранте комплексной плоскости (рис. 8), то корень с положительной вещественной частью будет лежать всегда в первом квадранте, т. е. $k_2 > 0$.

Показатели у e могут быть представлены таким образом:

$$\left. \begin{aligned} i\omega t + kx &= k_1 x + i(\omega t + k_2 x); \\ i\omega t - kx &= -k_1 x + i(\omega t - k_2 x). \end{aligned} \right\}$$

Положив \mathbf{A}_1 равным нулю, мы получим для всех составляющих этого частного решения в вещественном виде следующие выражения:

$$\left. \begin{aligned} |A_{2x}| e^{-k_1 x} \cos(\omega t - k_2 x + \delta_{2x}); \\ |A_{2y}| e^{-k_1 x} \cos(\omega t - k_2 x + \delta_{2y}); \\ |A_{2z}| e^{-k_1 x} \cos(\omega t - k_2 x + \delta_{2z}). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

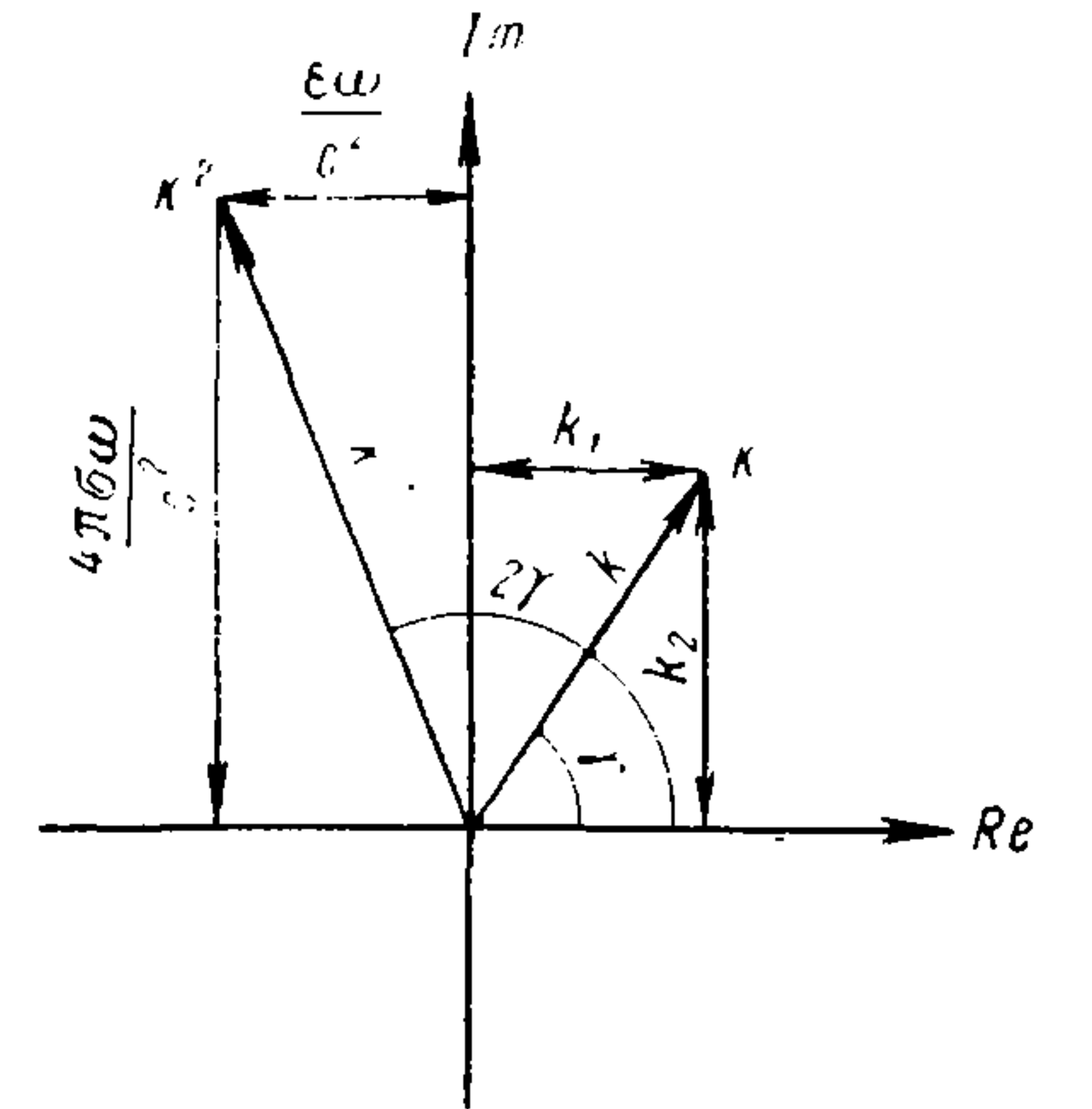


Рис. 8.

Если t возрастет на Δt , а x изменится на Δx , то фаза всех составляющих изменится на

$$\omega \Delta t - k_2 \Delta x.$$

Если

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\omega}{k_2},$$

то фаза остается неизменной, другими словами если какая-нибудь точка будет двигаться со скоростью

$$V = \frac{\omega}{k_2} \quad (26)$$

по направлению положительной оси X , то фаза колебания в месте нахождения этой точки будет всегда одна и та же. Таким образом, мы получаем, что V есть скорость распространения фазы, причем скорость направлена в сторону возрастающих x . Полагая же $A_2 = 0$, мы получим другое частное решение, отличающееся от первого знаком у x . Скорость распространения фазы будет та же самая, но направлена по отрицательной оси X . Из (26) получаем длину волны

$$\lambda = \frac{V}{f} = \frac{2\pi}{k_2}. \quad (26a)$$

Из выражений (25) следует, что при возрастании x , т. е. в направлении распространения фазы, вещественная амплитуда колебаний убывает. Скорость убывания амплитуды можно характеризовать расстоянием, на котором амплитуда уменьшается, например, в 10 раз, причем это расстояние одинаково для всех составляющих и определяется из условия

$$\frac{e^{k(x-L)}}{e^{k_1 x}} = e^{-k_1 L} = \frac{1}{10};$$

$$-k_1 L \lg e = -1,$$

это расстояние мы обозначим через*

$$L_{0,1} = \frac{1}{k_1 \lg e} = \frac{2,3026}{k_1}. \quad (27)$$

Остановимся на решении, соответствующем распространению волны в направлении положительной оси X , и вычислим составляющие векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} :

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0;$$

$$H_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = k A_{2z} e^{i\omega t - kx};$$

$$H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = -k A_{2y} e^{i\omega t - kx};$$

* Чаще глубина проникновения L определяется из соотношения $e^{-k_1 L} = \frac{1}{e}$, тогда $L = \frac{1}{k_1}$. — Прим. ред.

$$E_x = \frac{i\omega}{ck^2} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) = 0;$$

$$E_y = \frac{i\omega}{ck^2} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = -\frac{i\omega}{c} A_{2y} e^{i\omega t - kx};$$

$$E_z = \frac{i\omega}{ck^2} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = -\frac{i\omega}{c} A_{2z} e^{i\omega t - kx}.$$

Скорости распространения фазы и убывания амплитуды составляющих \mathbf{E} и \mathbf{H} остаются те же, что и для \mathbf{A} , так как эти величины обусловлены показателем у e ; векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} колеблются в плоскости YZ , т. е. поперечны по отношению к направлению распространения волны; при определенных x , A_{2y} и A_{2z} мы имеем в общем случае плоские эллиптические колебания векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} , причем если вид колебания \mathbf{E} задан, то этим определяется и вид колебания \mathbf{H} .

Мы видели в предыдущем, что расположение эллипса колебаний зависит от комплексных амплитуд составляющих; фазовый множитель определяет только фазу, т. е. время прохождения через различные точки эллипса. Колебание E_y можно представить так:

$$E_y = -\frac{i\omega}{c} A_{2y} e^{-k_1 x} e^{i(\omega t - k_2 x)};$$

комплексную амплитуду этого колебания обозначим через q_y ; тогда

$$E_y = q_y e^{i(\omega t - k_2 x)} = q_y e^{i\omega \tau}$$

и аналогично

$$E_z = q_z e^{i(\omega t - k_2 x)} = q_z e^{i\omega \tau},$$

причем

$$\tau = t - \frac{k_2 x}{\omega} = t - \frac{x}{V};$$

$$q_y = -\frac{i\omega}{c} A_{2y} e^{-k_1 x};$$

$$q_z = -\frac{i\omega}{c} A_{2z} e^{-k_1 x}.$$

Положив $k = |k| e^{i\gamma}$, можно представить колебание \mathbf{H} в виде

$$\left. \begin{aligned} H_y &= \frac{ick}{\omega} E_z = \frac{c|k|}{\omega} q_z e^{i\omega \tau} e^{i(\gamma + \frac{\pi}{2})} = \frac{c|k|}{\omega} q_z e^{i\omega \tau'}; \\ H_z &= -\frac{ick}{\omega} E_y = -\frac{c|k|}{\omega} q_y e^{i\omega \tau} e^{i(\gamma + \frac{\pi}{2})} = -\frac{c|k|}{\omega} q_y e^{i\omega \tau'}, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

причем

$$\tau' = \tau + \frac{\gamma + \frac{\pi}{2}}{\omega}.$$

Так как k^2 лежит во втором квадранте комплексной плоскости, то γ лежит в пределах $\pi/2 > \gamma > \pi/4$.

Повернем координатную систему вокруг OX на $\pi/2$ так, чтобы OY' пришлось в направление OZ (рис. 9). В таком случае

$$\left. \begin{aligned} H_{y'} = H_z = -\frac{c|k|}{\omega} q_y e^{i\omega\tau'} = \frac{c|k|}{\omega} q_y e^{i\omega\tau''}; \\ H_{z'} = -H_{y''} = -\frac{c|k|}{\omega} q_z e^{i\omega\tau'} = \frac{c|k|}{\omega} q_z e^{i\omega\tau''}, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где

$$\tau'' = \tau' - \frac{\pi}{\omega} = \tau + \frac{\gamma - \frac{\pi}{2}}{\omega}. \quad (30)$$

Сравнивая (28) и (29), мы видим, что при данном значении x комплексные амплитуды составляющих \mathbf{E} , отнесенные к YOZ , и комплексные амплитуды \mathbf{H} , отнесенные к $Y'OZ'$, отличаются вещественным множителем; отсюда заключаем, что эллипсы \mathbf{E} и \mathbf{H} подобны, но оси эллипса \mathbf{H} повернуты на $\pi/2$ по отношению к осям эллипса \mathbf{E} . В соответствующих точках величины векторов находятся в постоянном отношении

$$\mathbf{H} : \mathbf{E} = \frac{c|k|}{\omega}.$$

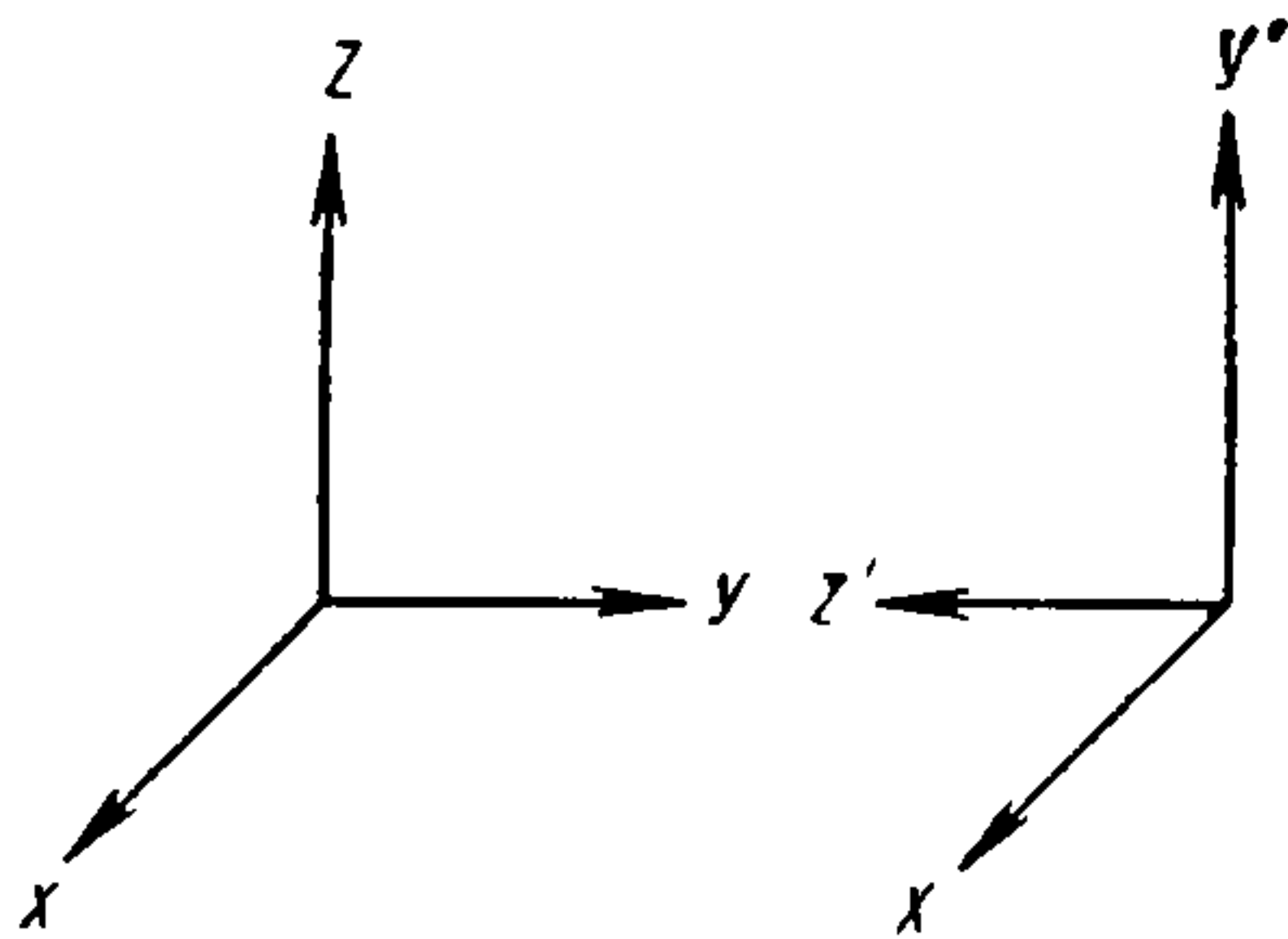


Рис. 9.

Если прохождению вектора \mathbf{E} через большую полуось соответствует значение $\tau = \tau_0$, то прохождению вектора \mathbf{H} через большую полуось соответствует значение $\tau''_0 = \tau_0$ и легко видеть, что для точек, соответственно расположенных на эллипсах, всегда будет иметь место соотношение $\tau = \tau''$.

Времена прохождения через соответствующие точки будут разные

$$t - \frac{x}{V} = t'' - \frac{x}{V} + \frac{\gamma - \frac{\pi}{2}}{\omega}$$

или

$$t'' - t = \frac{\frac{\pi}{2} - \gamma}{\omega}.$$

Если $\gamma = \pi/2$, что будет иметь место в изоляторе, где

$$k^2 = -\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} = \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} e^{i\pi};$$

$$k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon} e^{i\frac{\pi}{2}}; \quad \gamma = \pi/2,$$

то соответственные точки проходятся одновременно, и $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$; при наличии электропроводности, вообще говоря, \mathbf{E} не перпендикулярно к \mathbf{H} , за исключением случая линейной поляризации.

Физический смысл убывания амплитуды легко установить. Поток энергии, как известно, дается вектором Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}]. \quad (31)$$

Для плоской волны \mathbf{E} и \mathbf{H} поперечны; значит, вектор имеет только составляющую по оси X

$$S = S_x = \frac{c}{4\pi} (E_y H_z - E_z H_y). \quad (32)$$

При вычислении этого выражения, содержащего произведения составляющих переменных векторов, нельзя пользоваться комплексными их выражениями, так как вещественная часть произведения двух комплексных величин не равна произведению их вещественных частей.

Пользуясь полученными выше комплексными выражениями для составляющих \mathbf{E} и \mathbf{H} , мы получаем для вещественных их частей

$$E_y = |q_y| \cos(\omega\tau + \delta_y);$$

$$E_z = |q_z| \cos(\omega\tau + \delta_z);$$

$$H_y = -\frac{c|k|}{\omega} |q_z| \cos(\omega\tau'' + \delta_z);$$

$$H_z = \frac{c|k|}{\omega} |q_y| \cos(\omega\tau'' + \delta_y),$$

и, пользуясь известными тригонометрическими формулами, находим

$$S = \frac{c^2|k|}{8\pi\omega} [|q_y|^2 + |q_z|^2] \cos(\tau - \tau'') +$$

$$+ \frac{c^2k}{8\pi\omega} \{ |q_y|^2 \cos[\omega(\tau + \tau'') + 2\delta_y] + |q_z|^2 \cos[\omega(\tau + \tau'') + 2\delta_z] \}.$$

Так как q_y и q_z имеют вещественный множитель e^{-k_1x} , то S убывает как e^{-2k_1x} , т. е. на расстоянии, на котором амплитуда векторов поля убывает в 10 раз, интенсивность потока энергии убывает в 100 раз. В первом члене

$$\cos \omega(\tau - \tau'') = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \sin \gamma$$

от времени не зависит, второй же член в скобках содержит множители вида

$$\cos[\omega(\tau + \tau'') + 2\delta] = \cos\left[2\omega\left(t - \frac{x}{V}\right) + \frac{\pi}{2} - \gamma + 2\delta\right].$$

Среднее значение этого члена за период равно нулю, так как

$$\int_0^T \cos\left(\frac{4\pi}{T}t + \beta\right) dt = \frac{T}{4\pi} \int_0^{4\pi} \cos(u + \beta) du = 0.$$

Поэтому, обозначая среднее по времени чертой сверху, получаем

$$\overline{S} = \frac{c^2 |k|}{8\pi\omega} [|q_y|^2 + |q_z|^2] \sin \gamma = \frac{c^2 k_2}{8\pi\omega} [|q_y|^2 + |q_z|^2] \quad (33)$$

как среднее значение потока энергии.

Расход энергии в слое dx с сечением 1 см^2 будет равен

$$S_x - S_{x+dx} = - \frac{\partial S_x}{\partial x} dx,$$

так как S имеет только составляющую S_x , то

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} = \text{div } \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} \text{div } [\mathbf{E}\mathbf{H}].$$

По известной формуле векторного анализа имеем

$$\text{div } [\mathbf{E}\mathbf{H}] = (\mathbf{H} \text{ rot } \mathbf{E}) - (\mathbf{E} \text{ rot } \mathbf{H}).$$

Воспользуемся уравнениями Максвелла, написанными для вещественных величин,

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}; \quad \text{rot } \mathbf{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}$$

и подставим выражения для $\text{rot } \mathbf{E}$ и $\text{rot } \mathbf{H}$ в предыдущую формулу

$$\text{div } [\mathbf{E}\mathbf{H}] = - \frac{1}{c} \left(\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) - \frac{\epsilon}{c} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) - \frac{4\pi\sigma}{c} E^2,$$

отсюда получаем для расхождения вектора \mathbf{S}

$$\text{div } \mathbf{S} = - \sigma E^2 - \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{H^2 + \epsilon E^2}{8\pi} \right]. \quad (34)$$

Второй член есть производная по времени от периодической функции (плотности энергии), и легко показать, что его среднее значение за период должно равняться нулю.

Действительно, если $f(t+T) = f(t)$, то

$$\frac{1}{T} \int_0^T f'(t) dt = \frac{1}{T} [f(T) - f(0)] = 0.$$

Первый же член (34) есть не что иное, как джоулево тепло за единицу времени в единице объема

$$\sigma E^2 = \frac{1}{\sigma} J^2 = \rho J^2,$$

и, взяв среднее значение (34), получим

$$\overline{\text{div } \mathbf{S}} = \overline{\sigma E^2} = \rho \overline{J^2}.$$

Таким образом, мы видим, что расход энергии в среднем за период обуславливается джоулевым теплом

$$- \frac{\partial \overline{S}}{\partial x} dx = \rho \overline{J^2} dx,$$

что вполне соответствует тому, что при $\sigma = 0$, k^2 — отрицательно, k — чисто мнимо, $k_1 = 0$.

Убывание амплитуды отсутствует, так как потерь энергии нет. К тому же результату мы придем, если исходить из определения среднего потока энергии S (33).

Вычислим $\frac{\partial \overline{S}}{\partial x}$ на основании (33), помня, что $|q_y|$ и $|q_z|$ содержат множитель $e^{-k_1 x}$

$$\frac{\partial \overline{S}}{\partial x} = - 2 \frac{c^2 k_1 k_2}{8\pi\omega} [|q_y|^2 + |q_z|^2].$$

Если $\sqrt{k^2} = k_1 + ik_2$, то

$$k^2 = \frac{i4\pi\sigma\omega - \epsilon\omega^2}{c^2} = k_1^2 - k_2^2 + 2ik_1 k_2,$$

отсюда $2k_1 k_2 = \frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}$ и

$$\frac{\partial \overline{S}}{\partial x} = - \frac{\sigma}{2} [|q_y|^2 + |q_z|^2].$$

Дифференцируя же выражение (32) по x , мы кроме этого члена найдем еще ряд членов, представляющих собой гармонические функции времени с частотами ω и 2ω ; их среднее по времени равно нулю, так что

$$\frac{\partial \overline{S}}{\partial x} = \left(\frac{\partial \overline{S}}{\partial x} \right).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \sigma E^2 &= \sigma (|q_y|^2 \cos(\omega\tau + \delta_y) + |q_z|^2 \cos(\omega\tau + \delta_z)) = \\ &= \sigma \left\{ \frac{|q_y|^2 + |q_z|^2}{2} + \frac{|q_y|^2}{2} \cos(2\omega\tau + 2\delta_y) + \frac{|q_z|^2}{2} \cos(\omega\tau + 2\delta_z) \right\}. \end{aligned}$$

Последние два члена в среднем по времени дают нуль, и мы таким образом получаем

$$- \frac{\partial \overline{S}}{\partial x} = - \left(\frac{\partial \overline{S}}{\partial x} \right) = \sigma \overline{E^2},$$

что и является проверкой вышесказанных рассуждений.

Таким образом, мы приходим к результату, что физической причиной убывания амплитуды в направлении распространения плоской волны является поглощение энергии, имеющее место при наличии электропроводности и заключающееся в расходовании электромагнитной энергии на нагревание среды.

§ 8. ЗАВИСИМОСТЬ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ И ПОГЛОЩЕНИЯ ОТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СРЕДЫ

По отношению к волне данного числа колебаний f свойства среды характеризуются вещественной и мнимой частью величины k . Для того чтобы иметь более наглядные величины, мы будем пользоваться

показателем преломления n , определяемым как отношение скорости света в пустоте к скорости распространения фазы в данной среде

$$n = \frac{c}{V} = \frac{ck_2}{2\pi f} \quad (35)$$

и глубиной проникновения

$$L_{0,1} = \frac{2,3026}{k_1} \quad (36)$$

Волновой процесс будем характеризовать или числом колебаний f , или длиной волны в пустоте λ_0 , соответствующей данному числу колебаний,

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{f} \text{ см} = \frac{3 \cdot 10^8}{f} \text{ м.}$$

Длина волны λ в данной среде связана с λ_0 соотношением

$$\lambda = \frac{V}{f} = \frac{\lambda_0}{n}.$$

Глубина проникновения нами определена как расстояние, на котором амплитуда падает до 10% своей первоначальной величины.

Если желательно определить по данному $L_{0,1}$ расстояние, на котором амплитуда уменьшается до $1/p$ части, или же определить насколько уменьшится амплитуда при прохождении данной длины L , то нужно пользоваться соотношением

$$L_{1/p} = L_{0,1} \lg p. \quad (37)$$

Эта формула представлена номограммой (рис. 10). Представим выражение для k^2 в двух видах:

$$k^2 = i \frac{4\pi\sigma\omega}{c^2} \left(1 + i \frac{\varepsilon\omega}{4\pi\sigma} \right);$$

$$k^2 = - \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} \left(1 - i \frac{4\pi\sigma}{\varepsilon\omega} \right).$$

В практических единицах $(\text{ом} \cdot \text{см})^{-1}$

$$\sigma^* = \frac{1}{\rho^*} = \frac{\sigma}{9 \cdot 10^{11}}.$$

Вводя f вместо ω , получаем

$$k^2 = \frac{80\pi^2 f}{10^{10} \rho^*} \left(i - \frac{\varepsilon f \rho^*}{18 \cdot 10^{11}} \right);$$

$$k^2 = \frac{\varepsilon 4\pi^2 f^2}{c^2} \left(-1 + i \frac{18 \cdot 10^{11}}{\varepsilon f \rho^*} \right). \quad (38)$$

$$\frac{\varepsilon f \rho^*}{18 \cdot 10^{11}} = \beta; \quad \frac{18 \cdot 10^{11}}{\varepsilon f \rho^*} = \alpha. \quad (39)$$

Тогда извлечение квадратного корня, при выборе значения, лежащего в первом квадранте комплексной плоскости, дает

$$\left. \begin{aligned} k &= 4\pi \cdot 10^{-5} \sqrt{\frac{5f}{\rho^*}} \frac{\sqrt{\sqrt{\beta^2+1}-\beta} + i \sqrt{\sqrt{\beta^2+1}+\beta}}{\sqrt{2}}; \\ k &= \frac{2\pi f \sqrt{\varepsilon}}{3 \cdot 10^{10}} \frac{\sqrt{\sqrt{\alpha^2+1}-1} + i \sqrt{\sqrt{\alpha^2+1}+1}}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Отделив в выражении (40) вещественную и мнимую части, получим

$$n = \frac{ck_2}{2\pi f} = \frac{3 \cdot 10^5 \sqrt{10}}{V f \rho^*} \sqrt{\sqrt{\beta^2+1}+\beta} = \frac{9,487 \cdot 10^5}{V f \rho^*} Q(\beta); \quad (41)$$

$$\begin{aligned} L_{0,1} &= \frac{2,3026 \cdot 10^5}{k_1} = \frac{2,3026 \cdot 10^5}{2\pi \sqrt{10}} \sqrt{\frac{\rho^*}{f}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\beta^2+1}-\beta}} = \\ &= 1,159 \cdot 10^4 \sqrt{\frac{\rho^*}{f}} Q(\beta); \end{aligned} \quad (42)$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{2\pi}{k_2} = \frac{10^5}{V \sqrt{10}} \sqrt{\frac{\rho^*}{f}} \frac{1}{Q(\beta)} = 3,162 \cdot 10^4 \sqrt{\frac{\rho^*}{f}} \frac{1}{Q(\beta)}; \quad (43)$$

$$L_{0,1} = 0,3665 \lambda [Q(\beta)]^2. \quad (44)$$

Функция $Q(\beta)$ при малых значениях β разлагается в ряд

$$Q(\beta) = 1 + \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{8} - \frac{\beta^3}{6} - \frac{5}{128} \beta^4 + \dots; \quad (45)$$

$$[Q(\beta)]^2 = 1 + \beta + \frac{\beta^2}{2} - \frac{\beta^4}{8} + \dots, \quad (46)$$

откуда видно, что при малых значениях β она близка к единице и является поправочным множителем.

Полагая $Q(\beta) = 1$, мы получаем приближенные формулы

$$n^{(\sigma)} = \frac{9,487 \cdot 10^5}{V f \rho^*}; \quad (47)$$

$$L_{0,1}^{(\sigma)} = 1,159 \cdot 10^4 \sqrt{\frac{\rho^*}{f}}; \quad (48)$$

$$\lambda^{(\sigma)} = 3,162 \cdot 10^4 \sqrt{\frac{\rho^*}{f}}. \quad (49)$$

Для быстрого вычисления величин $n^{(\sigma)}$, $\lambda^{(\sigma)}$ и $L_{0,1}^{(\sigma)}$ мы даем номограмму (рис. 11), построенную по формулам (47), (48) и (49). Для определения β и α даем отдельную номограмму (рис. 12), так что с помощью графика $Q(\beta)$ (рис. 13) в случае надобности можно определить поправочные множители. Как показывает график (рис. 13),

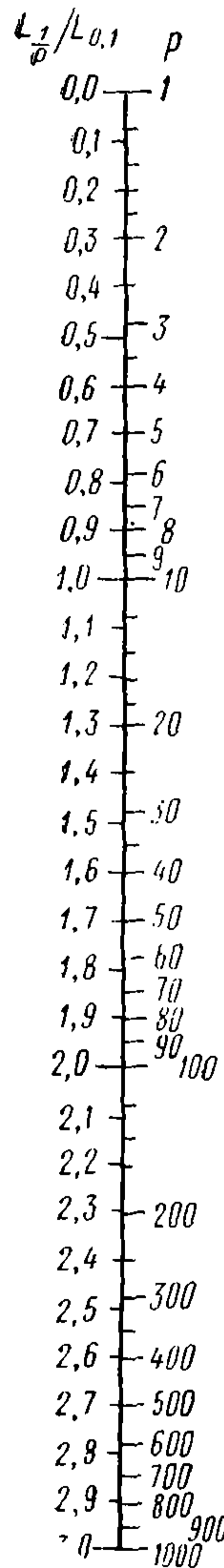


Рис. 10.

Назовем

приближенные формулы (47, 48, 49) дают ошибку не больше чем на 10%, если $\beta \leq 0,19$; положив

$$f = m \cdot 10^n; \quad \rho^* = q \cdot 10^s, \quad (50)$$

мы выводим из (39) следующие неравенства:

$$\rho^* \leq \frac{34 \cdot 10^{10-n}}{m\varepsilon}; \quad f \leq \frac{34 \cdot 10^{10-s}}{q\varepsilon}, \quad (50a)$$

ключ АЕ → С ВЕ → D

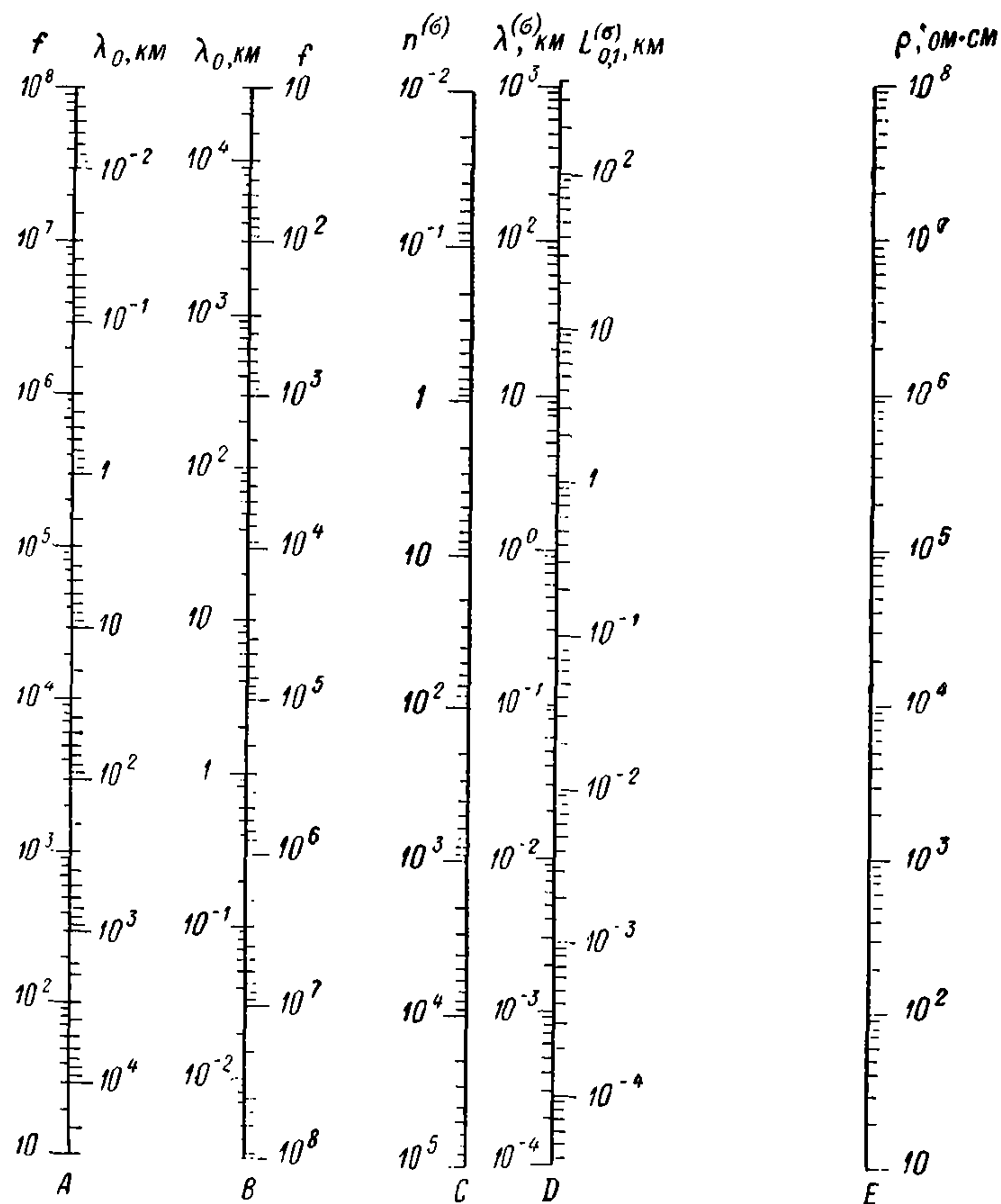


Рис. 11.

указывающие пределы применимости формул (47, 48, 49) и номограммы (рис. 11) при грубых подсчетах.

Рассматривая таким же образом выражение (40) для k , получаем

$$n = \sqrt{\varepsilon} \frac{\sqrt{1 + \alpha^2 + 1}}{2} = \sqrt{\varepsilon} P(\alpha); \quad (51)$$

$$L_{0,1} = \frac{2,3026 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{2\pi f \sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\frac{2}{1 + \alpha^2 - 1}} = \frac{2,3026 \cdot 3 \cdot 10^{10}}{2\pi f \sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{2}{\alpha} P(\alpha);$$

подставляя сюда значение α , получаем окончательно

$$L_{0,1} = 0,01222 \sqrt{\varepsilon} \rho^* P(\alpha); \quad (52)$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{P(\alpha)}. \quad (53)$$

ключ АС → В

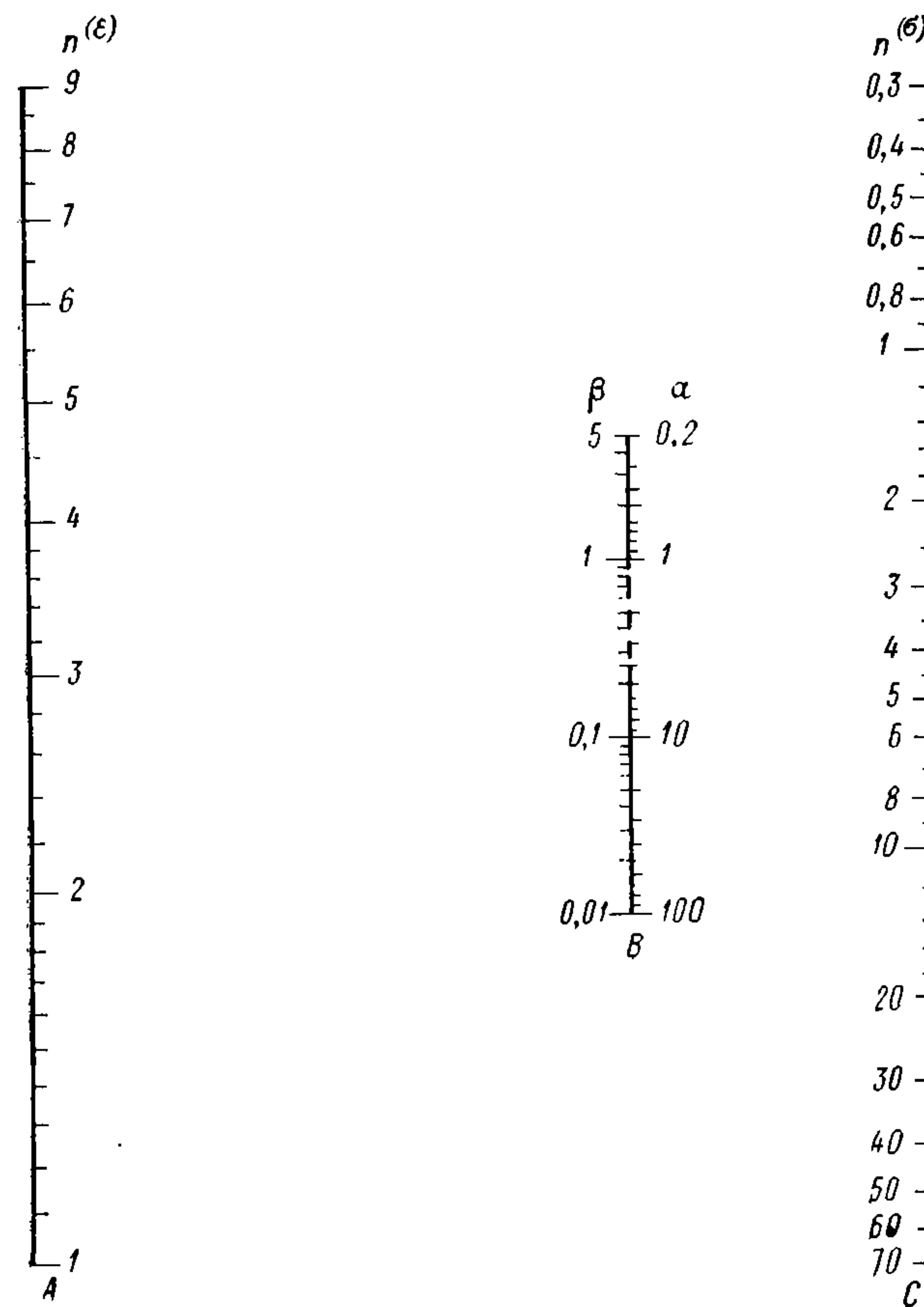


Рис. 12.

Функция $P(\alpha)$ имеет разложение

$$P(\alpha) = 1 + \frac{\alpha^2}{8} - \frac{5\alpha^4}{128} \dots$$

Полагая $P(\alpha) = 1$, имеем приближенные формулы

$$n^{(\varepsilon)} = \sqrt{\varepsilon}; \quad (54)$$

$$L_{0,1}^{(\varepsilon)} = 0,01222 \sqrt{\varepsilon} \rho^*; \quad (55)$$

$$\lambda^{(\varepsilon)} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{f \sqrt{\varepsilon}}. \quad (56)$$

Для определения этих величин даем номограмму (рис. 14). Для более точного вычисления можно дополнительно воспользоваться графиком $P(\alpha)$ (см. рис. 13). Приближенные выражения (54, 55, 56) годятся с точностью до 10% при $\alpha \leq 1$, $\beta \geq 1$ откуда следуют границы применимости формул (54, 55, 56) и соответственной номограммы (рис. 14), определяемые формулами

$$\rho^* \geq \frac{180 \cdot 10^{10-n}}{m\varepsilon};$$

$$f \geq \frac{180 \cdot 10^{10-s}}{q\varepsilon}. \quad (506)$$

Номограмма (рис. 12) дает возможность легко определить величины α и β . Для этого находим по номограммам (рис. 11, 14) значения $n^{(\varepsilon)}$ и $n^{(\sigma)}$ и определяем искомое значение. Номограмма (рис. 12) построена на основании формулы

$$\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{n^{(\varepsilon)}}{n^{(\sigma)}} \right)^2. \quad (57)$$

Шкала величин β и α нанесена только в тех пределах, в которых $Q(\beta)$ и $P(\alpha)$ дают поправки больше одного процента. Теоретические нормальные поля низкочастотных методов рассчитаны в предположении, что величиной β можно пренебречь и считать k^2 чисто мнимым.

Номограммы (рис. 11, 12) дают возможность легко определить, например, частоту, при которой при данном сопротивлении и максимально возможном значении ε , β будет достаточно мало.

Ориентировочные данные о сопротивлении пород имеются в литературе,

хотя обычно страдают тем недостатком, что они определены для образцов, степень влажности которых может далеко не соответствовать природным условиям. Гораздо менее мы осведомлены о значении диэлектрической постоянной пород в их естественном залегании. Обычно приходится оценивать ε для плотных пород ближе к 10—20, а для рыхлых и влажных с $\rho^* \leq 10^4$ — порядка нескольких десятков. Из сплошных веществ, залегающих в земной коре в достаточно больших объемах наибольшую диэлектрическую постоянную имеет вода $\varepsilon \approx 80$.

Например, положив удельное сопротивление $\rho^* = 10^6$ ом·см и диэлектрическую постоянную $\varepsilon = 50$, мы получим как предел грубого применения номограммы (рис. 11) $f \leq 8500$, а при $f = 500$, как легко подсчитать [или взять из номограммы (рис. 12)], $\beta = 0,014$, так что для методов низкой частоты почти всегда можно обойтись формулами (47, 48, 49).

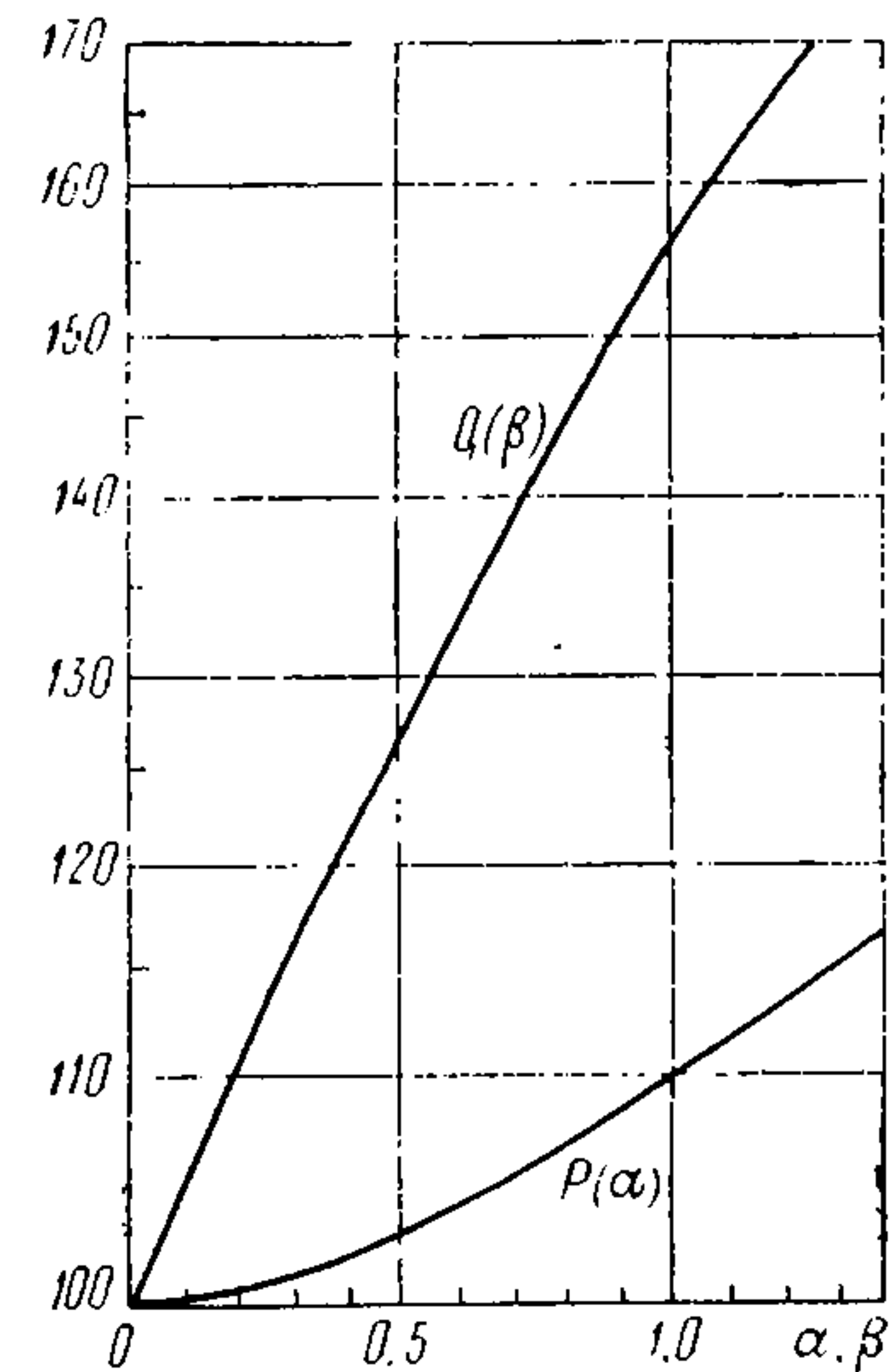


Рис. 13.

Для метода индукции в этих условиях обычные частоты (10 000) попадают в область, где для правильной оценки характеристик волнового процесса нужно учитывать диэлектрическую постоянную среды. Если же, например, ε не 50, а 10, то до $f = 40 000$ номограмма

ключ AC → B₁ CE → D

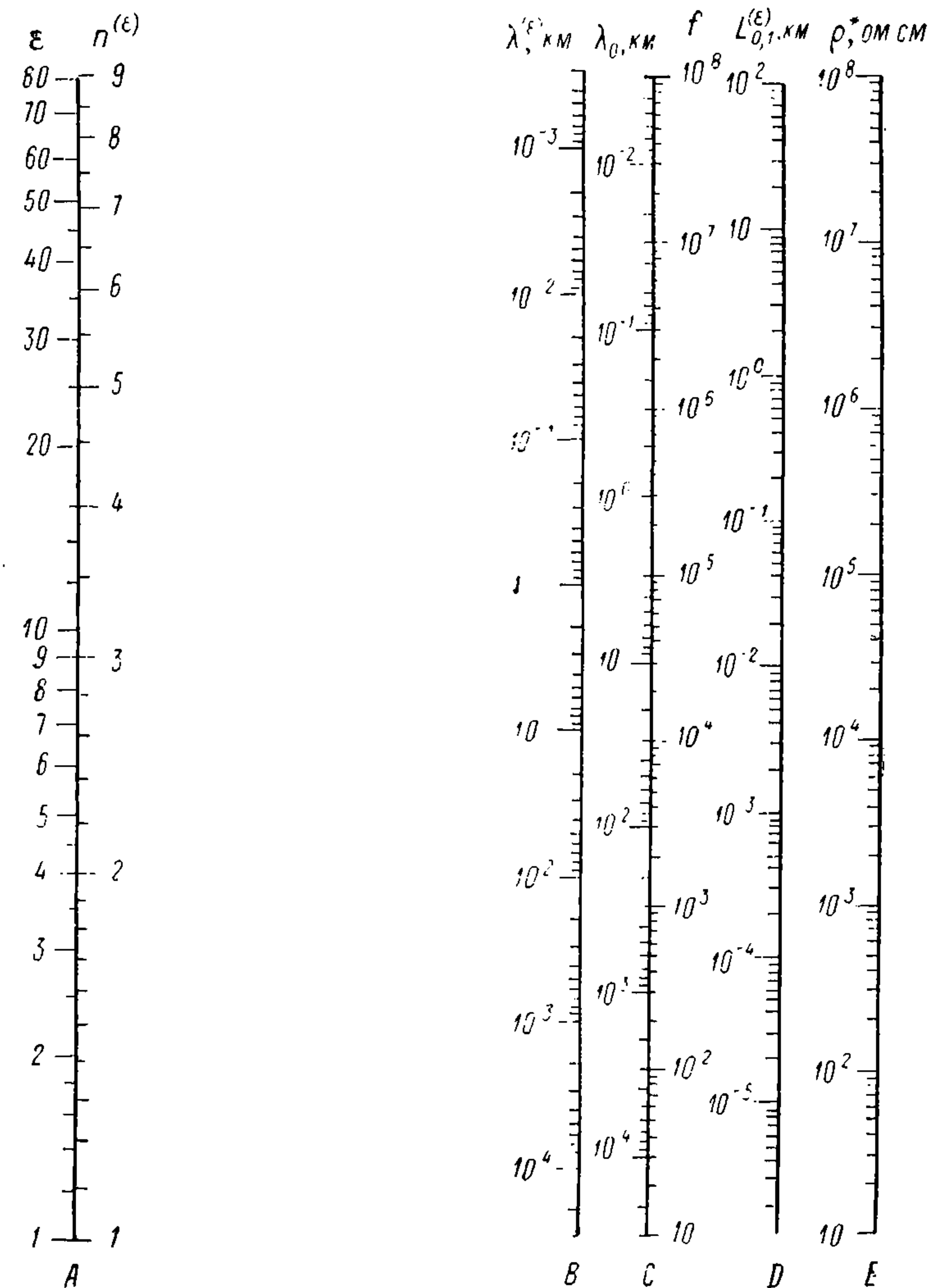


Рис. 14.

(рис. 11) с точностью до 10% остается применимой. Наоборот, при $f = 50 000$ и $\varepsilon = 50$ получается $\alpha = 0,9$, и можно переходить к номограмме (рис. 14).

Предлагаем читателям для упражнения в применении номограмм ответить на следующие вопросы.

1. При $\rho^* = 5 \cdot 10^5$, $f = 600$, $\epsilon \leq 30$ определить волны в среде и глубину проникновения. Во сколько раз уменьшится амплитуда при глубине 100 м?

$\lambda^{(\sigma)}$, км κ , км⁻¹

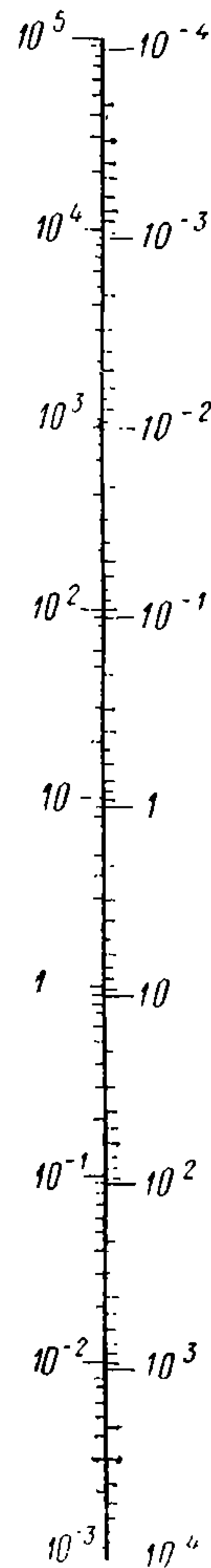


Рис. 15.

2. $\rho^* = 10^6$, $\epsilon = 25$; при какой частоте можно начинать пользоваться номограммой (рис. 14)? Какова будет глубина проникновения при $f = 75\,000$, какова будет длина волны λ в среде?

3. Какую частоту нужно взять, чтобы при $\rho^* \leq 10^4$ ом·см иметь глубину проникновения 50 м? Можно ли в этом случае рекомендовать метод индукции, в котором частота не ниже $(5 \div 10) \cdot 10^3$?

Необходимо помнить, что в действительности мы имеем дело с полями более сложными, чем плоские волны в неограниченной среде. Поэтому распределение фаз и амплитуд, в особенности вблизи источника поля, определяется не только введенными нами величинами показателя преломления и глубины проникновения. Все же, поскольку в основное уравнение входит всегда величина k , то величины n и $L_{0,1}$, однозначно связанные с вещественной и мнимой частями k , определяют свойства среды по отношению к данному периодическому процессу, имея преимущество известной наглядности.

В тех случаях, когда (в предположении однородной среды) возможно строгое вычисление нормальных полей, в формулы обычно входит модуль величины k , который мы будем обозначать через κ , причем детальный расчет нормальных полей был сделан для случаев, когда k^2 чисто мнимо, т. е. для исчезающе малого β . Из формулы (40) легко видеть, что в этом случае

$$k_1 = -k_2$$

и

$$\kappa = |k| = k_1 \sqrt{2}.$$

Эту величину, имеющую размерность обратную длине, удобнее всего давать в обратных километрах

$$\kappa = 4\pi \sqrt{\frac{5f}{\rho^*}}, \text{ км}^{-1}, \quad (58)$$

и легко вывести формулу

$$\kappa = \frac{2\pi \sqrt{2}}{\lambda^{(\sigma)}}. \quad (59)$$

Так как $\lambda^{(\sigma)}$ определяется из номограммы (рис. 11), то для вычисления κ даем номограмму на одной шкале (рис. 15).

Если можно считать k^2 чисто мнимым, то это значит, что фор-

мально можно положить ϵ равным нулю; физически же это значит, что в уравнении

$$\text{rot } \mathbf{H} = i \frac{\epsilon \omega}{c} \mathbf{E} + \frac{4\pi \sigma}{c} \mathbf{E}$$

мы имеем право пренебречь первым членом справа по сравнению со вторым, другими словами, мы можем пренебречь током смещения по сравнению с током проводимости; из рассмотрения, приведенного в настоящем параграфе, видно, что это обусловлено не только свойствами среды, но и частотой процесса.

Как мы видели, для электроразведки низкой частотой это в большинстве случаев возможно даже при не очень хорошо проводящей почве; тем более пренебрежение допустимо в случае хорошо проводящих тел (сульфидных руд и сплошных металлов).

§ 9. ПОЛЕ БЕСКОНЕЧНО ДЛИННОГО ПРЯМОЛИНЕЙНОГО КАБЕЛЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ТОКОМ

Следующий тип поля, который мы разберем, будет несколько сложнее; вместе с тем на этом примере покажем, как в наши рассуждения ввести источник поля.

Прием, которым мы все время будем пользоваться в дальнейшем, заключается в нахождении решений волнового уравнения обладающего в определенных точках или линиях особенностью, выражающейся в том, что поле определенным образом стремится к бесконечности при приближении к такой точке или линии. Исследуя характер поля вблизи таких мест, мы можем часто однозначно сказать, какого характера должен быть конечный, но малый по размерам источник поля для того, чтобы вокруг него имело место поле исследуемого характера; в таком случае мы и толкуем полученное решение как поле такого источника. Аналогичными приемами мы пользовались уже в первой части, вводя понятие точечного заряда или точечного источника постоянного тока.

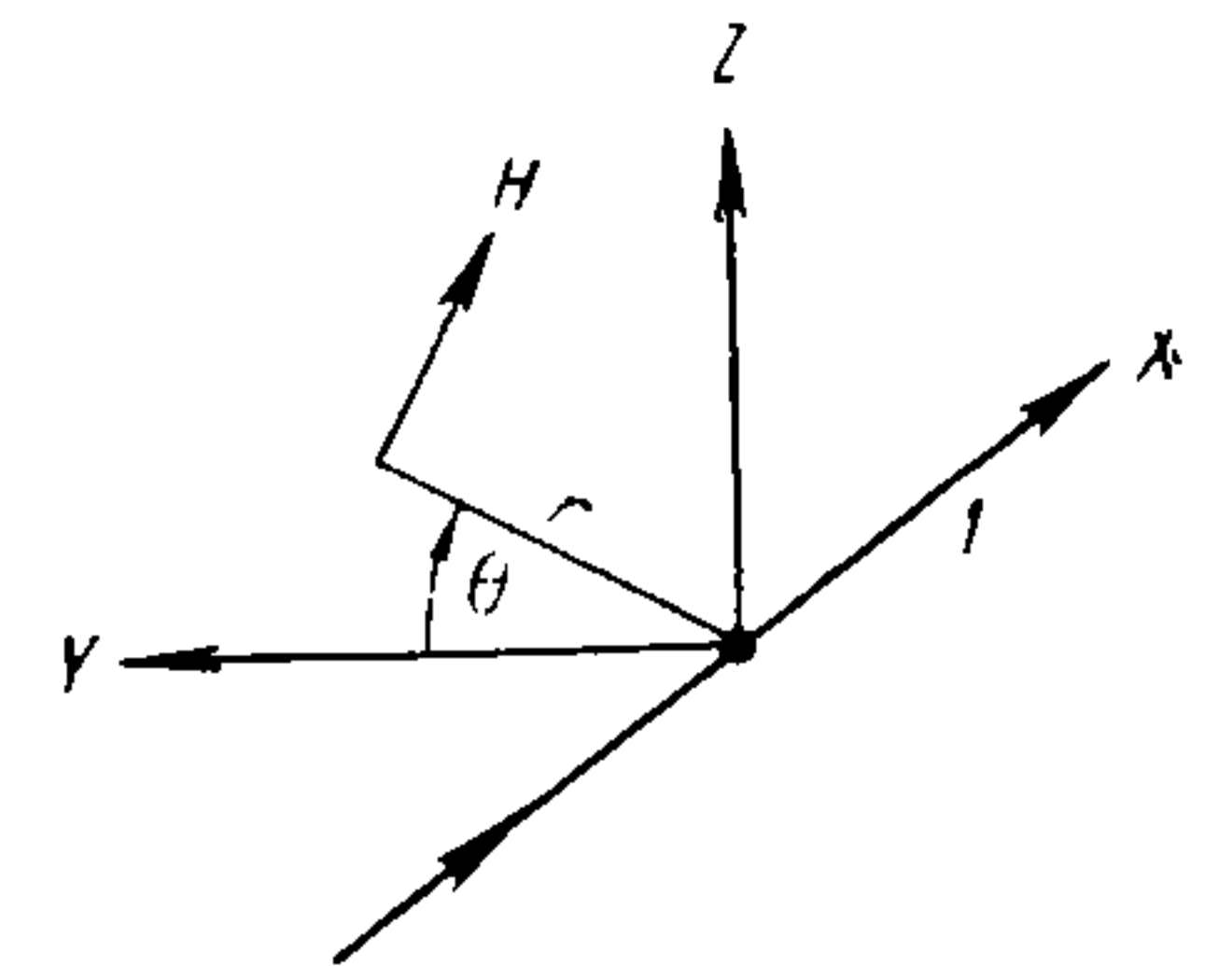


Рис. 16.

Для бесконечно длинного прямолинейного проводника в случае постоянного тока мы уже в первой части видели, что существует только азимутальная составляющая магнитного поля; введя цилиндрические координаты с осью, совпадающей с осью провода, мы будем иметь в пространстве вне провода (рис. 16)

$$H_\theta = \frac{2J}{cr}; \quad H_r = 0; \quad H_x = 0.$$

В прямоугольных координатах мы получим, взяв ось цилиндрических координат за ось X ,

$$H_y = -\frac{2J}{cr} \sin \theta = -\frac{2J}{cr^2} z;$$

$$H_z = \frac{2J}{cr} \cos \theta = \frac{2J}{cr^2} y;$$

$H_x = 0$, причем угол θ (азимут) отсчитываем от оси Y по направлению к оси Z . Это поле можно связать с вектор-потенциалом, имеющим только составляющую A_x ; для этого нужно подобрать A так, чтобы

$$\text{rot}_y \mathbf{A} = -\frac{\partial A_x}{\partial z} = -\frac{2I}{cr^2} z;$$

$$\text{rot}_z \mathbf{A} = -\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{2I}{cr^2} y;$$

так как

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}; \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r},$$

то можно написать

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} = -\frac{2I}{cr} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{2I}{c} \cdot \frac{\partial \ln r}{\partial z};$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = -\frac{2I}{cr} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{2I}{c} \cdot \frac{\partial \ln r}{\partial y},$$

и вектор-потенциал

$$A_x = -\frac{2I}{c} \ln r + C; \quad A_y = 0; \quad A_z = 0$$

будет удовлетворять всем требованиям.

Заметим, что если мы прибавим к вектор-потенциалу еще произвольный вектор A' , но такой, чтобы его производные в точках оси X оставались конечными, мы будем иметь «особенность» того же характера, связанную с тем обстоятельством, что по оси X идет ток конечной силы I .

Если ток заключен в сечении очень малого радиуса r_0 , то для всякого контура, его охватывающего, должно иметь место

$$\oint H_i dl = \frac{4\pi}{c} I. \quad (60)$$

Если мы предположим, что поле создается от вектор-потенциала

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \mathbf{A}',$$

где \mathbf{A} и \mathbf{A}' обладают вышеупомянутыми свойствами, то результирующее поле \mathbf{H}^* можно представить как сумму

$$\mathbf{H}^* = \mathbf{H} + \mathbf{H}' = \text{rot } \mathbf{A} + \text{rot } \mathbf{A}'.$$

Интеграл (60) в данном случае можно представить в виде суммы

$$\oint H_i^* dl = \oint H_i dl + \oint H_i' dl,$$

причем первый интеграл, как известно из теории магнитного поля постоянного тока, равен $4\pi I/c$.

Так как по предположению \mathbf{A}' имеет конечные производные вблизи оси X , то второй интеграл можно преобразовать по формуле Стокса

$$\oint H_i' dl = \int \text{rot}_n \mathbf{H}' dS,$$

где интеграл в правой части взят по поверхности, ограниченной контуром. Если мы представим себе этот контур в виде кружка в плоскости, перпендикулярной к оси X и с центром на оси, и будем уменьшать его радиус r' , то до тех пор, пока этот радиус не совпадет с радиусом r_0 провода, первый интеграл будет сохранять свое значение, а второй при достаточно малых размерах контура и конечных производных \mathbf{H}' можно заменить по теореме о среднем выражением

$$\int \text{rot}_n \mathbf{H}' dS = \text{rot}_n \mathbf{H}' \pi r_0^2,$$

которое может быть сделано как угодно малым, если считать, что $r_0 \rightarrow 0$, т. е. если рассматривать линейный ток.

Таким образом, для того чтобы то или иное решение, найденное для вектор-потенциала, соответствовало линейному току, достаточно потребовать, чтобы оно имело в точках, близких к данному отрезку линии, вид

$$\mathbf{A} = -\mathbf{l} \frac{2I}{c} \ln r + \mathbf{A}', \quad (61)$$

где \mathbf{l} — единичный вектор, дающий направление линейного тока в данной малой области; r — расстояние от линии; \mathbf{A}' — какой угодно непрерывный вектор.

Так как уравнение циркуляции магнитного поля вытекает из уравнения

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{D} + \mathbf{J}),$$

то в случае, когда мы имеем право пренебречь током смещения, соотношение

$$\oint H_i dl = \frac{4\pi}{c} I_{\sim}$$

и для случая переменного тока остается в силе, и мы можем утверждать, что для того, чтобы правильно изобразить поле линейных токов, необходимо найти решение волнового уравнения для вектор-потенциала с характерной логарифмической особенностью вдоль всех имеющихся проводников.

Возвращаясь к случаю прямолинейного кабеля (провода), мы будем по аналогии со случаем постоянного тока искать решение в предположении, что вектор-потенциал во всем пространстве имеет составляющую A_x , зависящую только от r .

Уравнение, подлежащее решению

$$\Delta A = k^2 A,$$

сводится к одному, которое при введении цилиндрических координат напишется в виде

$$\frac{dA_x}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dA_x}{dr} - k^2 A_x = 0. \quad (62)$$

Разделив на k^2 и введя переменную $u = kr$, получим

$$\frac{d^2 A_x}{du^2} + \frac{1}{u} \cdot \frac{dA_x}{du} - A_x = 0 \quad (63)$$

и можем сразу написать его общее решение

$$A_x = aI_0(u) + bK_0(u), \quad (64)$$

где u комплексное число вида

$$u = k_1 r + ik_2 r.$$

Асимптотическое выражение для I_0 [формула (333) в (ч. I)] дает

$$I_0(u) \sim \frac{e^{k_1 r}}{\sqrt{2\pi|u|}} e^{i\left(k_2 r - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{k_2}{k_1}\right)}.$$

Так как k_1 мы всегда берем положительными (так же, как и k_2), то при больших r модель этого выражения стремится к бесконечности, а поле при удалении от кабеля (если он является единственным источником поля) беспредельно возрастать не может. Поэтому мы должны положить $a = 0$ и остановиться на решении

$$A_x = bK_0(kr), \quad (64a)$$

асимптотический вид которого при больших r будет

$$A_x \sim b \sqrt{\frac{\pi}{2|kr|}} e^{-k_1 r} e^{-i\left(k_2 r + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{k_2}{k_1}\right)}.$$

Из этого выражения видно, что даже при $k_1 = 0$ амплитуда A_x убывает обратно пропорционально корню из расстояния. Это медленное изменение обусловлено геометрической формой поля. На него налагается убывание с расстоянием по показательному закону, обусловленное поглощением в среде и выражающееся тем же самым множителем $e^{-k_1 r}$, что и для плоских волн.

Исследуем теперь поведение нашего решения около $r = 0$. Выражение для $K_0(u)$ данное в формуле (331) (ч. I), можно представить в виде

$$K_0(u) = -I_0(u) \ln u + f(u),$$

где $f(u)$ есть функция, остающаяся конечной при $u = 0$, так как она выражается через степенной ряд с положительными показателями.

Разлагая $I_0(u)$ в ряд, имеем

$$K_0(u) = -\ln u - \frac{u^2}{2 \cdot 2} \ln u - \frac{u^4}{2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4} \ln u \dots + f(u),$$

и так как при $n \geq 1$

$$\lim (u^n \ln u)_{u \rightarrow 0} = 0,$$

то мы видим, что наше решение около $u = 0$ представляется в виде

$$A_x = -b \ln u + F(u),$$

где $F(u)$ снова есть функция, остающаяся конечной при $u = 0$. Подставляя $u = kr$, имеем

$$A_x = -b \ln r - b \ln k + F(kr),$$

и если мы положим $b = \frac{2I}{c}$, то на основании (61) видим, что наше решение

$$A_x = \frac{2I}{c} K_0(kr) \quad (65)$$

имеет как раз ту особенность, которая соответствует линейному току, текущему по оси X .

Функции $-\frac{2I}{c} \ln r$ и $\frac{2I}{c} K_0(kr)$ имеют одинаковую особенность при $r = 0$, т. е. отличаются только членами, остающимися конечными (вместе со своими производными); вторая, однако, имеет то преимущество, что она удовлетворяет волновому уравнению; поэтому в более сложных случаях мы при наличии линейных токов будем искать решения, имеющие в точках, близких к току, вид

$$A = \frac{2I}{c} K_0(kr) + A',$$

где A' непрерывно и имеет конечные производные при $r = 0$.

Возвращаясь к полученному решению (65), мы видим, что A получается как функция от комплексной величины kr . Вводя модуль и аргумент величины k и полагая, что k^2 чисто мнимо, мы имеем

$$k^2 = \kappa e^{i\pi/2};$$

$$k = \kappa e^{i\pi/4}$$

и получаем

$$A_x = \frac{2I}{c} K_0(\kappa r e^{i\pi/4}).$$

Величину κr мы обозначим через ξ , что сводится к тому, что мы за единицу длины берем

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \sqrt{\frac{\rho^*}{5f}} \text{ км} = \frac{\lambda}{8,886} \text{ км}.$$

Измеренное в этих единицах расстояние мы будем называть *приведенным* расстоянием и видим, что при различных значениях f и ρ^* меняется только линейный масштаб, но не характер решения, которое может быть записано так:

$$A_x = \frac{2I}{c} K_0(\xi e^{i\pi/4});$$

$$E_x = -\frac{i\omega}{c} A_x = -i \frac{2I \sim \omega}{c^2} K_0(\xi e^{i\pi/4}); \quad (67)$$

$$J_x = \sigma E_x = -i \frac{2I_{\sim} \omega \sigma}{c^2} K_0(\xi e^{i\pi/4}); \quad (68)$$

$$H_\theta = -\frac{dA_x}{dr} = -k \frac{dA_x}{d(kr)} = -\frac{2I_{\sim}}{c} \kappa e^{i\pi/4} K'_0(\xi e^{i\pi/4}). \quad (69)$$

Для аргумента $\xi e^{i\pi/4}$, где ξ — вещественно, функция K_0 и ее производная по аргументу представлены в таблицах в виде

$$\left. \begin{aligned} K_0(\xi e^{i\pi/4}) &= \ker \xi + i \operatorname{kei} \xi; \\ e^{i\pi/4} K'_0(\xi e^{i\pi/4}) &= \ker' \xi + i \operatorname{kei}' \xi. \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

Вводя практические единицы, мы получаем для плотности тока (68), относя плотность тока к единице силы тока в кабеле и выражая κ в обратных километрах,

$$\frac{J_x}{I_{\sim}} = -\frac{i\kappa^2 (\ker \xi + i \operatorname{kei} \xi)}{2\pi} \text{ км}^{-2} = \frac{10^{-10}}{\pi} \kappa^2 \times \left(\frac{\operatorname{kei} \xi}{2} - \frac{i \ker \xi}{2} \right) \text{ см}^{-2}. \quad (71)$$

Формулу для магнитного поля мы приведем к виду

$$\begin{aligned} \frac{H_\theta}{I_{\sim}} &= 2 \cdot 10^{-6} \kappa (\ker' \xi + i \operatorname{kei}' \xi) = \\ &= \frac{2 \cdot 10^{-6}}{r} \xi (\ker' \xi + i \operatorname{kei}' \xi) \text{ эс/а} \end{aligned}$$

или

$$\frac{H_\theta}{I_{\sim}} = -\frac{2}{r} \xi (\ker' \xi + i \operatorname{kei}' \xi) \text{ мкэс/а}. \quad (72)$$

Пользуясь таблицами функций $\ker \xi$, $\operatorname{kei} \xi$, $\ker' \xi$, $\operatorname{kei}' \xi$, нетрудно рассчитать магнитное поле и плотность тока для любого случая, причем наиболее наглядно представить результаты расчета в векторных диаграммах, позволяющих отсчитать по желанию вещественную или мнимую части, или же амплитуду и фазу.

На рис. 17 изображен множитель формулы (71)

$$\frac{1}{2} (\operatorname{kei} \xi - i \ker \xi) = f_1^{(0)}(\xi) + i f_2^{(0)}(\xi);$$

значения ξ нанесены в виде отметок на кривую.

Амплитуда плотности тока (в амперах на 1 см^2 при одном ампере в кабеле) дается радиусом-вектором точки кривой, соответствующей данному $\xi = \kappa r$, умноженным на множитель

$$\frac{10^{-10}}{\pi} \kappa^2 = 0,318 \kappa^2 \cdot 10^{-10},$$

а фаза — углом между радиусом-вектором и вещественной осью (отсчитанным в направлении против часовой стрелки). Если для

примера взять частоту $f = 500$ и $\rho^* = 10^4 \text{ ом} \cdot \text{см}$, то по формулам предыдущего параграфа получаем

$$\kappa = 2\pi \approx 6,3 \text{ км}^{-1},$$

следовательно,

$$\frac{J_x}{I_{\sim}} = 10^{-10} \cdot 4\pi \left(\frac{\operatorname{kei} \xi - i \ker \xi}{2} \right).$$

Пользуясь графиком рис. 17, получаем значения, приведенные в табл. 1.

Таблица 1

| $r, \text{ м}$ | ξ | $\frac{J}{I_{\sim}} \cdot \frac{10^{10}}{4\pi}$ | $\frac{J}{I_{\sim}}, \text{ см}^{-2}$ | Фаза |
|----------------|-------|---|---------------------------------------|---------------|
| 32 | 0,2 | 0,95 | $1,2 \cdot 10^{-9}$ | $246^\circ,5$ |
| 160 | 1,0 | 0,28 | $3,7 \cdot 10^{-10}$ | 210 |
| 320 | 2,0 | 0,10 | $1,3 \cdot 10^{-10}$ | $168^\circ,5$ |
| 480 | 3,0 | 0,04 | $0,5 \cdot 10^{-10}$ | 125 |

Рассчитаем распределение *постоянного* тока в плоскости, перпендикулярной к кабелю и проведенной в его середине, в предположении, что кабель конечный, имеет длину 10 км и оканчивается двумя заземлениями. В непосредственной близости от кабеля плотность тока

$$J' = \frac{2I}{4\pi} \cdot \frac{4}{L^2} = \frac{2I}{\pi L^2} = I \frac{2}{\pi} \cdot 10^{-12} \frac{a}{\text{см}^2};$$

отсюда

$$\frac{J'}{I} = 6,4 \cdot 10^{-13} \text{ см}^{-2}.$$

Расстояние 480 м составляет 5% длины кабеля, и, руководствуясь рис. 37 ч. I, мы заключаем, что плотность тока будет в этих пределах практически постоянна.

Значение отношения J'/I для постоянного тока значительно меньше, чем для случая переменного, если допустить, что наличие заземлений на расстоянии 5 км не влияет заметно на распределение тока, вычисленное нами для бесконечно длинного кабеля.

Заметим, что так же, как в случае постоянного тока, полный ток в среде I_{\sim}^* точно равен току в кабеле и имеет обратное направление

$$I_{\sim}^* = 2\pi \int_1^{\infty} J r dr = -I_{\sim} \int_0^{\infty} K_0(kr) k^2 r dr = -I_{\sim} \int_0^{\infty e^{i\pi/4}} K_0(u) u du.$$

Вычисление этого интеграла проводим следующим образом: по дифференциальному уравнению для $K_0(u)$ имеем

$$K_0(u) = K_0''(u) + \frac{1}{u} K_0'(u) = \frac{1}{u} \cdot \frac{d}{du} u K_0'(u),$$

значит

$$\int K_0(u) u du = \int \frac{d}{du} [uK_0'(u)] du = uK_0'(u).$$

При $u \rightarrow 0$ $uK_0'(u) = -1$; при $|u| \rightarrow \infty$ в правой половине плоскости комплексного аргумента

$$uK_0'(u) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi u}{2}} e^{-u} \rightarrow 0,$$

поэтому определенный интеграл

$$\int_0^{\infty e^{i\pi/4}} K_0(u) u du = 1;$$

$$I_{\sim}^* = -I_{\sim}.$$

На нашем примере мы видим, что по сравнению со случаем постоянного тока происходит заметная концентрация обратного тока около кабеля, сопровождающаяся значительным сдвигом фаз остальных токовых линий; это явление можно назвать внешним скин-эффектом, по аналогии с концентрацией переменного тока внутри кабеля у его поверхности (внутренний скин-эффект), теория которого основана на решении

$$A_x = aI_0(kr), \quad (646)$$

имеющем место внутри кабеля и получающемся из общего решения (64) на основании того, что при $r = 0$ функция $K_0(kr)$ обращается в бесконечность и поэтому в решение входить не должна. На теории внутреннего скин-эффекта мы не останавливаемся, считая ее известной из общего курса теории электричества.

Обращаем внимание читателя на то, что для заметного скин-эффекта внутри проводника обычных размеров требуются очень большие значения κ (металлическая электропроводность), в то время как внешний скин-эффект весьма заметен уже при нормальных электропроводностях почвы и сравнительно невысоких частотах; в нашем примере расчет тока как постоянного, распределение которого обусловливается расположением заземлений, дает совершенно неверный результат при длине кабеля в 10 км и частоте $f = 500$. Уменьшение частоты в 10 раз при прочих равных условиях уменьшает во столько же раз κ^2 и дает при тех же r значения ξ в 10 раз меньше; из рис. 17 сразу видно, что отношения плотностей тока для значений

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0,316; \quad \xi = \frac{2}{\sqrt{10}} = 0,635; \quad \xi = \frac{3}{\sqrt{10}} = 0,949$$

будут 2,5 : 1,5 : 1, в то время как при $f = 500$ имеем в тех же точках значения $\xi = 1, 2, 3$ и отношение плотности тока в круглых числах 9 : 3 : 1.

Таким образом, при частоте $f = 50$ скин-эффект будет заметно слабее, чем при $f = 500$, но все же ясно выражен.

В дальнейшем мы решим аналогичную задачу для кабеля, не окруженного со всех сторон проводящей средой, а лежащего на земле, но уже полученные здесь результаты показывают ясно, какие существенные изменения может внести в картину распределения тока то обстоятельство, что мы имеем дело с переменным, а не постоянным режимом.

Влияние проводимости окружающей среды на магнитное поле можно истолковать как экранирование поля кабеля обратным током, сосредоточенным, как мы видели, в большей или меньшей мере, около кабеля; при отсутствии подобного эффекта имели бы

$$\frac{rH_\theta}{2I} = 1,$$

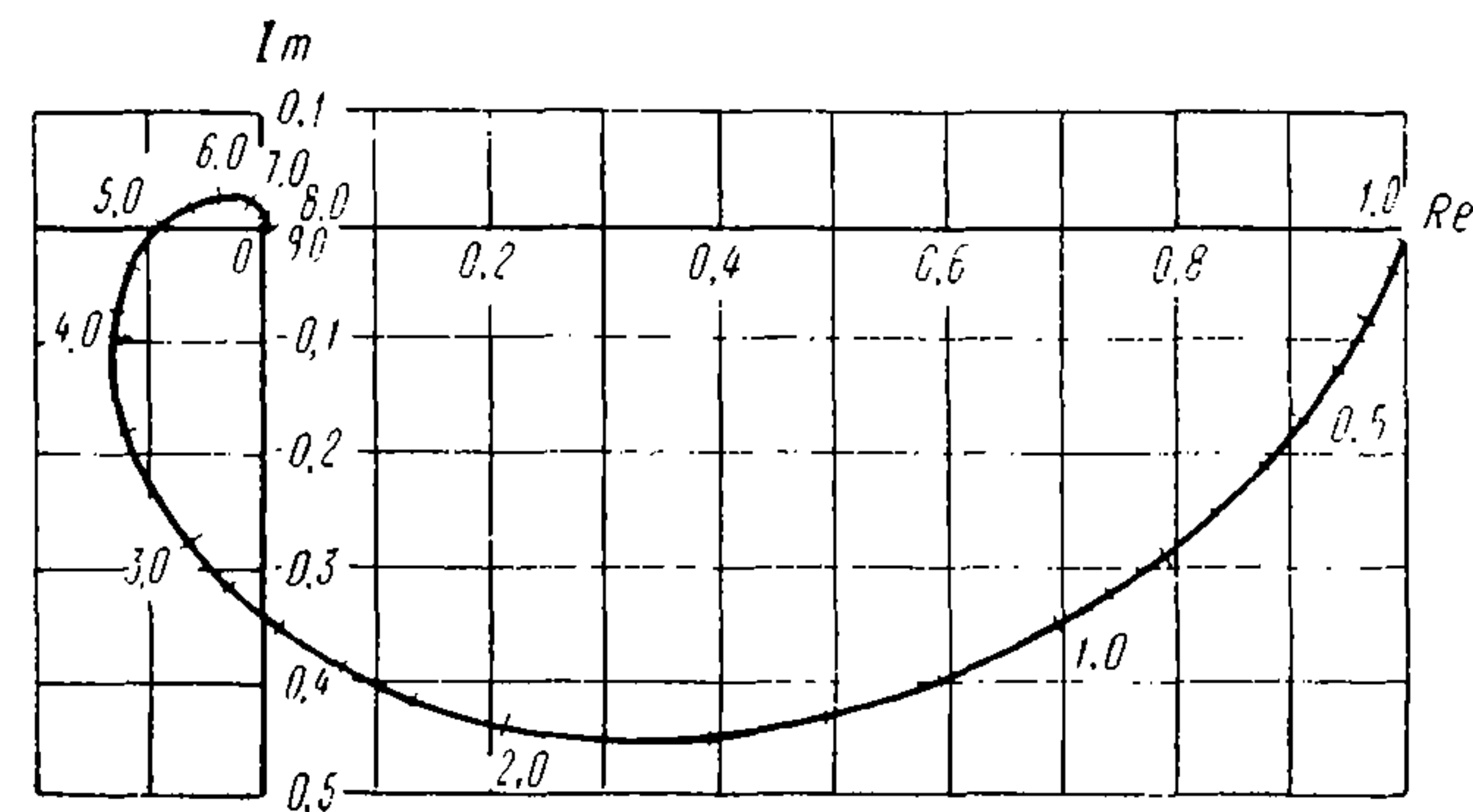


Рис. 18.

сравнивая с формулой (72), мы видим, что ослабляющее действие выражается множителем

$$-\xi (\ker' \xi + i \operatorname{kei}' \xi),$$

который и изображен на векторной диаграмме рис. 18.

§ 10. ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ДИПОЛЯ

Разберем еще случай точечного источника переменного поля, находящегося в неограниченной однородной среде. К этому случаю мы подходим, полагая, что вектор-потенциал A , имея по-прежнему одну составляющую, зависит от всех трех координат, но только через расстояние R от начала координат.

Волновое уравнение для единственной составляющей A_z в сферических координатах

$$\Delta A_z = \frac{d^2 A_z}{dR^2} + \frac{2}{R} \cdot \frac{dA_z}{dR} = k^2 A_z, \quad (73)$$

левая часть приводится к виду

$$\frac{1}{R} \cdot \frac{d^2}{dR^2} (R A_z) = k^2 A_z$$

или

$$\frac{d^2}{dR^2} (RA_z) = k^2 A_z R.$$

Решение его

$$RA_z = \alpha e^{kR} + \beta e^{-kR},$$

введя множитель $e^{i\omega t}$ и разделив на R , будем иметь

$$A_z = \alpha \frac{e^{i(\omega t + kR)}}{R} + \beta \frac{e^{i(\omega t - kR)}}{R}. \quad (74)$$

Первый член соответствует распространению фазы по направлению убывающих, а второй — возрастающих R . Так как мы изучаем случай поля, исходящего из источника, расположенного в начале координат при $R = 0$, то остановимся на втором члене, положив $\alpha = 0$,

$$A_z = \beta \frac{e^{-kR}}{R}. \quad (74a)$$

Для того чтобы определить характер источника, способного давать такое поле, вычислим электрическое и магнитное поле и исследуем его характер около начала координат, причем мы используем обе возможности, указанные в § 4, ч. I.

Полагая $H = \text{rot } A$, мы имеем

$$H_x = \text{rot}_x A = \frac{\partial A_z}{\partial y};$$

$$H_y = \text{rot}_y A = -\frac{\partial A_z}{\partial x};$$

$$H_z = \text{rot}_z A = 0.$$

Выражение для A мы разложим в ряд по степеням величины kR , полагая ее малой по сравнению с единицей

$$A_z = \beta \frac{e^{-kR}}{R} = \beta \left(\frac{1}{R} - k + \frac{k^2 R}{2} \dots \right);$$

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{\beta y}{R^3} \left(1 - \frac{k^2 R^2}{2} \right);$$

$$H_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\beta x}{R^3} \left(1 - \frac{k^2 R^2}{2} \right).$$

С точностью до членов второго порядка малости можно написать, обозначая единичный вектор по оси Z через l ,

$$A = \beta \frac{l}{R};$$

$$H = \beta \frac{[lR]}{R^3}.$$

Предположим, что мы имеем линейный проводник длиной dl , расположенный в среде с проводимостью σ у начал координат и на-

правленный по оси Z . Пусть по нему идет постоянный ток I , боковая поверхность проводника изолирована, а концы его заземлены.

Магнитное поле такого тока, идущего в проводнике и замыкающегося через среду, дается формулой

$$H_0 = \frac{I_0 dl}{R^3} \frac{[lR]}{R^3},$$

которую проще всего вывести, воспользовавшись приемом, указанным в § 17, ч. I.

Если в этой формуле вместо I_0 введем I_{\sim} , меняющееся периодически, т. е. напишем

$$H'_0 = \frac{I_{\sim} dl}{c} \frac{[lR]}{R^3} e^{i\omega t}, \quad (74b)$$

то эта формула даст переменное поле, которое в каждый момент равно полю постоянного тока, соответствующему мгновенному значению переменного тока. Действительное поле переменного тока нами выведено выше и с только что полученным выражением вообще не совпадает, но при достаточно малых значениях kR , т. е. в области у самого источника, приближенное выражение для поля получается таким же, как и в формуле (74b), если положить $\beta = \frac{2I_{\sim} dl}{c}$.

Взяв это значение для β , мы будем иметь решение, которое около самого источника с точностью до членов второго порядка малости исключительно совпадает с (74b).

Поэтому будем считать, что

$$A_z = \frac{2I_{\sim} dl}{c} \cdot \frac{e^{-kR}}{R} \quad (75)$$

представляет поле бесконечно малой электрической антенны, расположенной в начале координат по оси Z и заземленной на концах. Мы будем называть такую установку электрическим диполем.

Вычислим теперь скалярный потенциал в предположении, что можно пренебрегать токами смещения, т. е. что $k^2 = i \frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}$

и

$$\varphi = -\frac{i\omega}{ck^2} \text{div } A = -\frac{c}{4\pi\sigma} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Пользуясь разложением A_z и проинтегрировав, получим

$$\varphi = \frac{I_{\sim} dl}{4\pi\sigma} \cdot \frac{z}{R^3} \left(1 - \frac{k^2 R^2}{2} + \dots \right).$$

Если в диполе ток постоянный и $k = 0$, то выражение точно соответствует потенциалу электрического поля для вышеуказанного элемента тока, в чем можно убедиться рассматривая распределение потенциала в поле двух бесконечно близких заземлений противоположного знака или сравнивая полученное выражение с потенциалом диполя длиной dl и с зарядами, равными $\pm e = \frac{I}{4\pi\sigma}$. Вычисляя

составляющие вектора \mathbf{E} , мы для E_x и E_y получим выражения, совпадающие вплоть до множителя $e^{i\omega t}$ со статическими; что же касается E_z , то

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{i\omega}{c} A_z.$$

Вычисляя отношение

$$\frac{i\omega}{c} A_z : \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{4\pi\sigma i\omega}{c^2} \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{R^5}{3z^2 - R^2} = k^2 R^2 \frac{R^2}{3z^2 - R^2},$$

мы видим, что оно, вообще говоря, будет второго порядка малости, и, следовательно, второй член E_z можно отбросить. Таким образом, при нашем выборе значения β электрическое поле при уменьшении R стремится к выражению, совпадающему с электрическим полем, вычисленным для мгновенного значения тока в источнике.

Полное выражение для составляющих электрического и магнитного поля мы получаем из (75), выполняя все дифференцирования

$$E_x = \frac{i\omega}{ck^2} \operatorname{rot}_x \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{I \sim dl}{4\pi\sigma} \cdot \frac{xz}{R^2} \cdot \frac{e^{-kR}}{R^3} (3 + 3kR + k^2 R^2);$$

$$E_y = \frac{i\omega}{ck^2} \operatorname{rot}_y \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{I \sim dl}{4\pi\sigma} \cdot \frac{yz}{R^2} \cdot \frac{e^{-kR}}{R^3} (3 + 3kR + k^2 R^2);$$

$$E_z = \frac{i\omega}{ck^2} \operatorname{rot}_z \operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{I \sim dl}{4\pi\sigma} \cdot \frac{e^{-kR}}{R^3} \left(\frac{3z^2 - R^2}{R^2} + kR \frac{3z^2 - R^2}{R^2} + k^2 R^2 \frac{z^2 - R^2}{R^2} \right);$$

$$H_x = -\frac{I \sim dl}{c} \cdot \frac{y}{R} \cdot \frac{e^{-kR}}{R^2} (1 + kR);$$

$$H_y = \frac{I \sim dl}{c} \cdot \frac{x}{R} \cdot \frac{e^{-kR}}{R^2} (1 + kR);$$

$$H_z = 0.$$

Если окружающая среда есть диэлектрик без заметной электропроводности, то мы рассуждаем так: из приближенного выражения для \mathbf{A} мы получаем снова выражение для скалярного потенциала, но полагаем $k^2 = -\frac{\epsilon\omega^2}{c^2}$; тогда

$$\varphi = -\frac{i\omega}{ck^2} \operatorname{div} \mathbf{A} = -\beta \frac{ic}{\omega\epsilon} \cdot \frac{z}{R^3} = \frac{\beta c}{i\omega\epsilon} \cdot \frac{z}{R^2}$$

с точностью до членов порядка $k^2 R^2$.

Вычисляя

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{i\omega}{c} A_z,$$

мы опять находим, что отношение второго члена к первому равно

$$k^2 R^2 \frac{R^2}{3z^2 - R^2},$$

т. е. второго порядка малости, и, следовательно, при $\lim R = 0$ мы будем иметь поле \mathbf{E} , являющееся градиентом потенциала φ .

Выражение φ совпадает с потенциалом статического электрического диполя с моментом p_z

$$\varphi = \frac{p_z z}{\epsilon R^3},$$

если положить

$$p_z = \frac{\beta c}{i\omega}.$$

Полагая, следовательно, $\beta = \frac{i\omega p_z}{c}$, мы получим для близких расстояний

$$A_z = \frac{i\omega p_z}{c} \cdot \frac{1}{R};$$

$$\varphi = \frac{p_z}{\epsilon} \cdot \frac{z}{R^3}.$$

Величину $i\omega p_z = \frac{dp_z}{dt}$ можно снова истолковать как $I \sim dl$, действительно,

$$p_z = e dl; \quad p = \frac{de}{dt} dl,$$

а

$$I \sim = \frac{de}{dt}.$$

Таким образом, и для непроводящей среды коэффициент β в выражении (74а) должен быть принят равным $\frac{I \sim dl}{c}$ и окончательно

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{p_z}{\epsilon} \cdot \frac{xz}{R^2} \cdot \frac{e^{-kR}}{R^3} (3 + 3kR + k^2 R^2); \\ E_y &= \frac{p_z}{\epsilon} \cdot \frac{yz}{R^3} \cdot \frac{e^{-kR}}{R^3} (3 + 3kR + k^2 R^2); \\ E_z &= \frac{p_z}{\epsilon} \cdot \frac{e^{-kR}}{R^3} \left(\frac{3z^2 - R^2}{R^2} + kR \frac{3z^2 - R^2}{R^2} + k^2 R^2 \frac{z^2 - R^2}{R^2} \right); \\ H_x &= -\frac{I \sim dl}{c} \cdot \frac{y}{R} \cdot \frac{e^{-kR}}{R^2} (1 + kR); \\ H_y &= \frac{I \sim dl}{c} \cdot \frac{x}{R} \cdot \frac{e^{-kR}}{R^2} (1 + kR); \\ H_z &= 0. \end{aligned} \right\} (76)$$

Рассматривая теперь решение (74а) как \mathbf{A}^* получаем другое возможное электромагнитное поле, вектор-потенциал которого равен

$$\mathbf{A}^* = \beta^* \frac{e^{-kR}}{R} \mathbf{1} \approx \beta^* \mathbf{1} \left| \frac{1}{R} - k + \frac{k^2 R}{2} \dots \right|.$$

Вычисляя скалярный потенциал с точностью до членов второго порядка исключительно, получаем по (19) и (18)

$$\varphi^* = \frac{c}{i\omega} \operatorname{div} \mathbf{A}^* = -\frac{c\beta^*}{i\omega} \cdot \frac{z}{R^3}$$

и

$$\mathbf{H}^* = -\operatorname{grad} \varphi^* + \frac{ck^2}{i\omega} \mathbf{A}^*.$$

Убеждаясь снова, что второй член будет второго порядка малости при малых R , мы видим, что вблизи источника \mathbf{H}^* есть градиент потенциала φ^* , причем φ^* , очевидно, нужно будет считать потенциалом магнитного диполя p_m , для чего нужно положить $p_m = -\frac{c\beta^*}{i\omega}$ или $\beta^* = -\frac{i\omega p_m}{c}$. Сделав выкладки, получим

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \frac{i\omega p_m}{c} \cdot \frac{y}{R} \cdot \frac{e^{-kR}}{R^2} (1 + kR); \\ E_y^* &= -\frac{i\omega p_m}{c} \cdot \frac{x}{R} \cdot \frac{e^{-kR}}{R^2} (1 + kR); \\ E_z^* &= 0; \\ H_x^* &= p_m \frac{xz}{R^2} \cdot \frac{e^{-kR}}{R^3} (3 + 3kR + k^2R^2); \\ H_y^* &= p_m \frac{yz}{R^2} \cdot \frac{e^{-kR}}{R^3} (3 + 3kR + k^2R^2); \\ H_z^* &= p_m \frac{e^{-kR}}{R^3} \left(\frac{3z^2 - R^2}{R^2} + kR \frac{3z^2 - R^2}{R^2} + k^2R^2 \frac{z^2 - R^2}{R^2} \right). \end{aligned} \right\} (77)$$

Магнитный диполь осуществляется контуром, обтекаемым током, причем направление диполя соответствует нормали к площадке, охватываемой контуром. Таким образом, можно осуществить физически источник полученного нами поля, взяв рамку с площадью S , обмотанную N витками, расположенную в плоскости XY в начале координат и питаемую переменным током $I' \sim$. Тогда $p_m = I' \sim NS/c$.

Переменный же электрический диполь, являющийся источником поля с вектор-потенциалом \mathbf{A} , осуществляется прямолинейной антенной, расположенной по оси Z . В обоих случаях для того, чтобы вычисленные нами поля вблизи начала координат действительно имели тот вид, который соответствует точечным диполям, необходимо, чтобы одновременно с условием $kR \ll 1$, т. е. $R \ll \lambda/8,886$, можно было осуществить неравенство $R \gg a$, где a — линейные размеры источника.

§ 11. ЗАКОН ПОДОБИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Возьмем какую-нибудь установку, например кабель с двумя заземлениями на концах, и поместим ее в какую-нибудь среду a , окруженную средами b, c, d и т. д. Выберем какую-нибудь характер-

ную длину l , например расстояние между заземлениями. Для описания геометрической конфигурации всей этой системы введем вместо линейных координат x, y, z приведенные или относительные координаты

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \eta = \frac{y}{l}; \quad \zeta = \frac{z}{l}.$$

Для описания другой системы, геометрически точно подобной данной, но увеличенной в s раз, мы можем опять ввести относительные координаты, только характерная длина будет уже не l , а $l' = sl$. Уравнения граничных поверхностей в относительных координатах и относительные координаты отдельных точек и линий останутся без изменений при переходе от одной системы к другой, если мы оба раза начало координат и направления осей будем выбирать так, чтобы они были подобно расположены.

Какие электромагнитные условия подобия нужно выполнить для того, чтобы в любых соответствующих точках этих двух систем (т. е. в точках, имеющих одинаковые относительные координаты) комплексные амплитуды составляющих периодического электромагнитного поля удовлетворили соотношениям

$$\frac{E_x}{E'_x} = \frac{E_y}{E'_y} = \frac{E_z}{E'_z} = e; \\ \frac{J_x}{J'_x} = \frac{J_y}{J'_y} = \frac{J_z}{J'_z} = j; \quad \frac{H_x}{H'_x} = \frac{H_y}{H'_y} = \frac{H_z}{H'_z} = h,$$

где e, j, h — постоянные, не зависящие от координат.

Если эти соотношения на самом деле имеют место, то задачу достаточно решить один раз для всех систем, удовлетворяющих не только геометрическим, но и электромагнитным условиям подобия.

Ограничиваясь случаем однородных сред, разделенных граничными поверхностями, переписем дифференциальные уравнения и граничные условия в относительных координатах. Для этого выпишем символические формулы перехода

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{l} \cdot \frac{\partial}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{l} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{l} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta}; \quad \nabla = \frac{1}{l} \nabla^*; \\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{l^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) = \frac{1}{l^2} \Delta^*,$$

где ∇^* и Δ^* означают дифференциальный оператор Гамильтона и оператор Лапласа по отношению к относительным координатам.

На основании этих соотношений мы можем написать пользуясь оператором ∇ как символическим вектором

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = (\nabla \mathbf{A}) = \frac{1}{l} (\nabla^* \mathbf{A});$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \nabla \varphi = \frac{1}{l} \nabla^* \varphi.$$

Преобразуем к относительным координатам волновое уравнение для a -й среды

$$\Delta \mathbf{A}^{(a)} = k_a^2 \mathbf{A}^{(a)} \rightarrow \Delta^* \mathbf{A}^{(a)} = (k_a l)^2 \mathbf{A}^{(a)}$$

и граничные условия (22) для границы сред a и b

$$\mathbf{A}^{(a)} = \mathbf{A}^{(b)} \rightarrow \mathbf{A}^{(a)} = \mathbf{A}^{(b)};$$

$$\nabla_n \mathbf{A}_r^{(a)} = \nabla_n \mathbf{A}_r^{(b)} \rightarrow \nabla_n^* \mathbf{A}_r^{(a)} = \nabla_n^* \mathbf{A}_r^{(b)};$$

$$\frac{1}{k_a^2} (\nabla \mathbf{A}^{(a)}) = \frac{1}{k_b^2} (\nabla \mathbf{A}^{(b)}) \rightarrow \frac{1}{(k_a l)^2} (\nabla^* \mathbf{A}^{(a)}) = \frac{1}{(k_b l)^2} (\nabla^* \mathbf{A}^{(b)}).$$

Введем теперь комплексные параметры

$$\tilde{p}_a = k_a l; \quad \tilde{p}_b = k_b l$$

для каждой среды.

Тогда волновое уравнение для среды a в относительных координатах получит вид

$$\Delta^* \mathbf{A}^{(a)} = \tilde{p}_a^2 \mathbf{A}^{(a)}, \quad (78)$$

а граничные условия на разделе между a и b будут написаны в виде

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}^{(a)} = \mathbf{A}^{(b)}; \quad \nabla_n^* \mathbf{A}_r^{(a)} = \nabla_n^* \mathbf{A}_r^{(b)}; \\ \frac{1}{\tilde{p}_a^2} (\nabla^* \mathbf{A}^{(a)}) = \frac{1}{\tilde{p}_b^2} (\nabla^* \mathbf{A}^{(b)}). \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Если имеются две системы, в которых кроме геометрического подобия в расположении источников поля и границ сред еще выполнено условие, что параметры p в соответственных средах одинаковы, то формулы (78) и (79) показывают, что уравнения и граничные условия в относительных координатах будут тождественными и всякое решение, годное для одной системы, окажется решением для другой (с точностью до произвольного постоянного множителя, ввиду однородности уравнений).

Таким образом, мы показали, что для подобия электромагнитных полей кроме геометрического подобия еще необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} \tilde{p} = kl = 4\pi \sqrt{i \frac{5f}{\rho^*} \left(1 + i \frac{\epsilon f \rho^*}{18 \cdot 10^{11}}\right) l^2} = \\ = 4\pi \sqrt{i \frac{5f'}{\rho^{*'}} \left(1 + i \frac{\epsilon' f' \rho^{*'}}{18 \cdot 10^{11}}\right) l'^2} = k' l' = \tilde{p}' \end{aligned} \quad (80)$$

для каждой пары соответствующих сред, входящих геометрически подобно в систему штрихованную и нештрихованную. (В этих формулах предполагается l выраженным в километрах, k — в обратных километрах.)

Если мы можем пренебречь токами смещения, т. е. положить формально $\epsilon = 0$, то имеем для \tilde{p} выражение

$$\tilde{p} = 4\pi \sqrt{\frac{5fl^2}{\rho^*}} \sqrt{i}$$

и равенство параметров соответствующих сред приводит к соотношению

$$\frac{fl^2}{\rho^*} = \frac{f'l'^2}{\rho^{*'}}. \quad (81)$$

Так как f и l , с одной стороны, f' и l' , с другой — от номера среды не зависят, то из уравнений

$$\frac{fl^2}{\rho_a^*} = \frac{f'l'^2}{\rho_a^{*'}}; \quad \frac{fl^2}{\rho_b^*} = \frac{f'l'^2}{\rho_b^{*'}}$$

следует

$$\frac{\rho_a^*}{\rho_b^*} = \frac{\rho_a^{*'}}{\rho_b^{*'}}$$

или

$$\frac{\rho_a^*}{\rho_a^{*'}} = \frac{\rho_b^*}{\rho_b^{*'}} = \text{const.} \quad (82)$$

Таким образом, мы можем, ограничиваясь случаями, когда $\epsilon f \rho^* / 18 \cdot 10^{11} \ll 1$, сказать, что подобие электромагнитных полей в геометрически подобных системах может иметь место, если, во-первых, в соответствующих средах сопротивления изменены пропорционально и, во-вторых, при увеличении всех сопротивлений в q раз и линейных масштабов в s раз частота будет увеличена в v раз, причем

$$\frac{vs^2}{q} = 1, \quad v = \frac{q}{s^2}.$$

В самом общем случае подобие будет иметь место, если выполнено условие (80), которое распадается на два

$$\frac{fl^2}{\rho^*} = \frac{f'l'^2}{\rho^{*'}} \quad (81a)$$

и новое условие

$$\epsilon f^2 l^2 = \epsilon' f'^2 l'^2 \quad (83)$$

одновременно для всех пар соответствующих сред.

Первое условие по-прежнему требует, чтобы

$$\rho_a^* : \rho_b^* : \dots : \rho_m^* : \dots = \rho_a^{*' } : \rho_b^{*' } : \dots : \rho_m^{*' } : \dots \quad (84)$$

а второе, комбинированное с первым, приводит к требованию

$$\epsilon f \rho^* = \epsilon' f' \rho^{*' }$$

или

$$\frac{\epsilon}{\epsilon'} = \frac{f' \rho^{*' }}{f \rho^*}.$$

Для соответствующих сред мы имеем

$$\frac{\epsilon_a \rho_a^*}{\epsilon_b \rho_b^*} = \frac{\epsilon'_a \rho_a^{*' }}{\epsilon'_b \rho_b^{*' }}$$

или, в силу (82),

$$\varepsilon_a : \varepsilon_b : \dots : \varepsilon_m \dots = \varepsilon'_a : \varepsilon'_b : \dots : \varepsilon'_m \dots \quad (85)$$

Условия (81а), (83), (84) и (85) необходимы для того, чтобы подобие имело место.

Физический смысл условий подобия заключается в следующем. Написав (80) с разделением вещественной и мнимой части, мы имеем

$$(k_1 + ik_2) l = (k'_1 + ik'_2) l'.$$

Так как по (42) и (43)

$$k_1 = \frac{2,3026}{L_{0,1}}, \quad k_2 = \frac{2\pi}{\lambda},$$

получаем

$$\frac{l}{L_{0,1}} = \frac{l'}{L'_{0,1}} \quad \text{и} \quad \frac{l}{\lambda} = \frac{l'}{\lambda'}.$$

Дело сводится к тому, что частота и электромагнитные характеристики среды определяют две линейные величины: длину волны и глубину проникновения. При изменении линейного масштаба системы нужно, чтобы и величины, определяющие λ и $L_{0,1}$, были изменены в том же соотношении и притом одинаково для всех сред. Если можно пренебречь ε то, как мы видели в § 8, ч. II, $L_{0,1}$ и λ друг другу пропорциональны, а потому и получается только одно условие подобия (81).

Для случая одной неограниченной среды, когда изменение линейного масштаба определяется изменением размеров питающей установки, полученные соотношения также остаются в силе, если мы можем пренебречь током смещения, то достаточно условий (81а) и (84).

Важным является случай однородного проводящего полупространства (земля с плоской поверхностью), граничащего с непроводником (воздух). В существующих расчетах нормальных полей невысокой частоты пренебрегают токами смещения как в почве, так и в воздухе, поэтому параметр воздуха полагается равным нулю, и характер задачи определяется только параметром почвы, определяемым размером установки, частотой и удельным сопротивлением. При равенстве параметров мы имеем подобные поля, поэтому достаточно рассчитать поле данной установки для ряда значений одной только переменной величины \tilde{p} , чтобы охватить все возможные случаи, причем $\tilde{p} = 0$ соответствует постоянному току, поле которого рассчитывается по формулам, приведенным в теории постоянных полей. Теорема подобия имеет также очень большое значение при проектировании модельных установок. С точностью до множителя параметр равняется модулю величины p , причем l берется равным некоторой длине, характерной для установки. Из (80), полагая $\varepsilon = 0$, мы получаем

$$|p| = 4\pi \sqrt{\frac{5fl^2}{\rho^*}}. \quad (86)$$

При больших сопротивлениях, низких частотах и малых размерах установки получаем малые значения параметра, приближаясь к полю, рассчитанному для постоянного тока.

БЕСКОНЕЧНО ДЛИННЫЙ ПРЯМОЛИНЕЙНЫЙ ТОК ПРИ НАЛИЧИИ ГРАНИЦЫ ЗЕМЛЯ — ВОЗДУХ

§ 12. РЕШЕНИЕ ОБЩЕЙ ЗАДАЧИ ПРИ ПОСРЕДСТВЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Рассмотрим общее решение для случая, когда имеется бесконечно длинный прямолинейный кабель, питаемый переменным током, и ряд сред, разделенных горизонтальными плоскостями. Кабель предполагается параллельным этим плоскостям. От этого общего решения нетрудно перейти к частным задачам, из которых мы рассмотрим

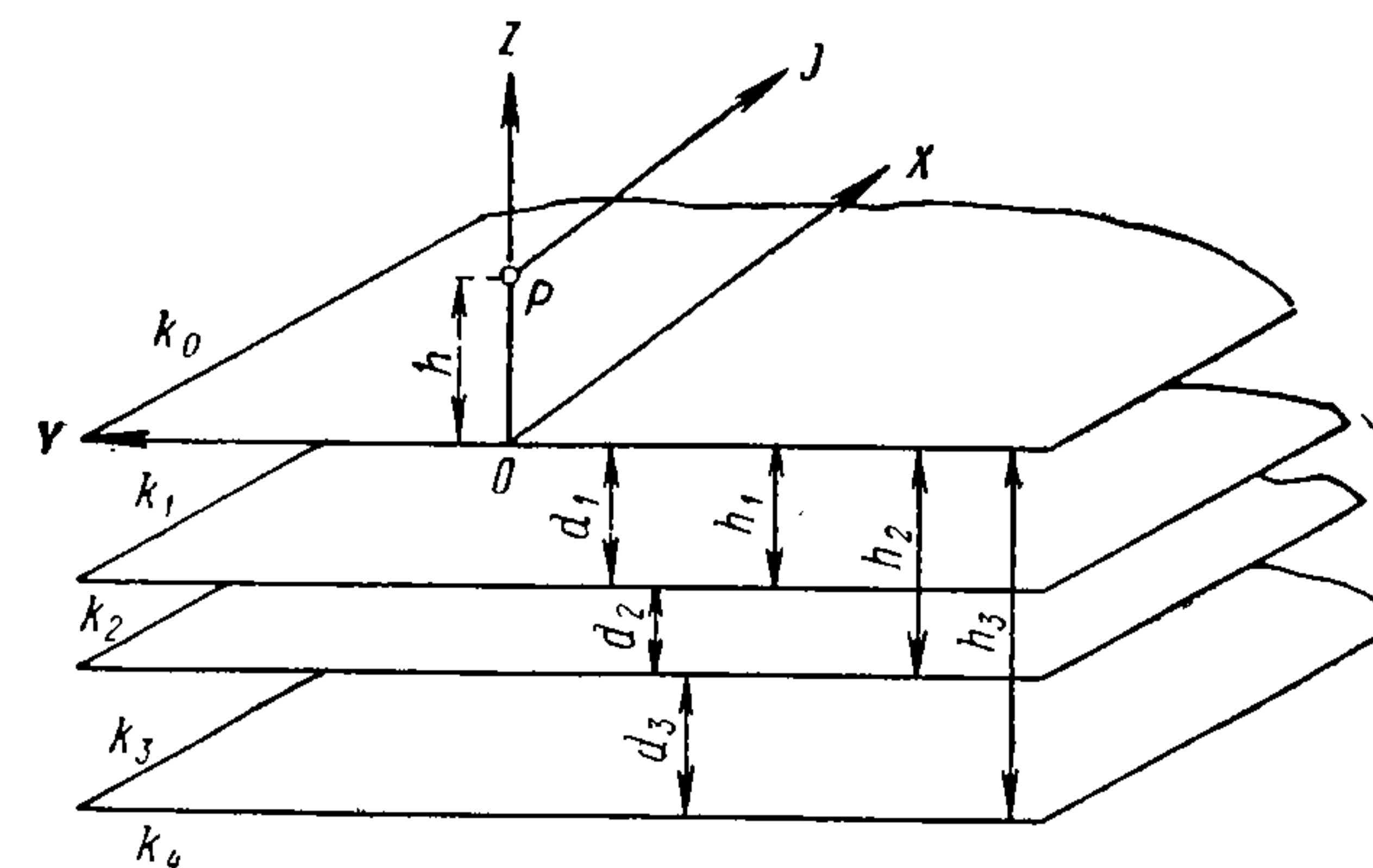


Рис. 19.

только случай наличия одной границы между двумя однородными средами земля — воздух.

Общую задачу формулируем следующим образом (рис. 19). Среды, разделенные параллельными горизонтальными плоскостями, обозначим, идя сверху, значками 0, 1, 2... и припишем им значения $k_0, k_1, k_2 \dots$. На некоторой высоте h над границей 0,1, которую мы принимаем за плоскость XY, протянут прямолинейный кабель, имеющий направление параллельное оси X. Начало координат положим на границе 0,1 под кабелем и ось Z направим вверх. Глубины следующих поверхностей раздела обозначим через h_1, h_2, \dots , так что мощность пласта s равна

$$d_s = h_s - h_{s-1}.$$

Задача заключается в нахождении вектор-потенциала и магнитного поля. Мы будем искать решение в предположении, что существует только составляющая A_x , параллельная кабелю, т. е. A_x , и что все величины, в том числе A_x , от x не зависят.

Искомая величина A_x должна удовлетворять в каждой среде уравнению вида

$$\Delta A_x = \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = k^2 A_x. \quad (87)$$

Частные решения этого уравнения будем искать методом разделения переменных, положим $A_x = Y(y) Z(z)$ и подставим в уравнение (87); разделив на YZ , получим

$$\frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2 Z}{dz^2} = k^2. \quad (88)$$

Полагаем

$$\frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\lambda^2. \quad (89)$$

так что

$$Y = \mu \cos \lambda y + \nu \sin \lambda y,$$

причем, так как плоскость XZ есть плоскость симметрии, то нужно положить $\nu = 0$; окончательно имеем

$$Y = \mu \cos \lambda y. \quad (90)$$

Из (88) и (89) для Z следует уравнение

$$\frac{1}{Z} \cdot \frac{d^2 Z}{dz^2} = \lambda^2 + k^2, \quad (91)$$

интегрируя которое, получаем

$$Z = \alpha e^{z \sqrt{\lambda^2 + k^2}} + \beta e^{-z \sqrt{\lambda^2 + k^2}}. \quad (92)$$

Умножая (90) на (92) и изменяя обозначение неопределенных, не зависящих от y и z величин, мы получаем частное решение (88) в виде

$$(f_1 e^{z \sqrt{\lambda^2 + k^2}} + f_2 e^{-z \sqrt{\lambda^2 + k^2}}) \cos \lambda y.$$

Более общим решением будет сумма подобных решений, где для каждого значения λ коэффициенты f_1 и f_2 могут иметь любое значение. Так как λ может иметь также любое значение, то вместо суммы можно написать интеграл

$$A_x = \frac{2I \sim}{c} \int_0^{\infty} (f_1(\lambda) e^{z \sqrt{\lambda^2 + k^2}} + f_2(\lambda) e^{-z \sqrt{\lambda^2 + k^2}}) \cos \lambda y d\lambda, \quad (93)$$

где f_1 и f_2 — неопределенные функции λ ; множитель $2I \sim / c$ введен для сохранения размерности формулы (93).

Для разных сред нашей задачи имеем решения типа (93), причем отличать их будем верхними значками у величин A_x , f_1 , f_2 и нижними значками у величин k . Условимся извлекать корень из комплексной величины $\lambda^2 + k^2$ так, чтобы вещественная часть была положительной. Тогда для верхней среды 0, простирающейся до $z = +\infty$, нужно положить $f_1^{(0)} = 0$. Для самой нижней среды n , наоборот, нужно принять $f_2^{(n)} = 0$ для того, чтобы интегралы были сходящимися.

Остальные же функции $f_2^{(0)}$, $f_1^{(1)}$, $f_2^{(1)}$, ..., $f_1^{(n)}$ нужно определить из граничных условий. В среде 0, где проходит линейный ток, вектор-потенциал имеет особенность, исследованную нами в § 9 ч. I. Поэтому мы положим

$$A_x^{(0)} = \frac{2I \sim}{c} \left[K_0(k_0 r) + \int_0^{\infty} f_2^{(0)}(\lambda) e^{-z \sqrt{\lambda^2 + k_0^2}} \cos \lambda y d\lambda \right], \quad (94)$$

выделив эту особенность. Функция, представленная интегралом, уже не имеет никаких особенностей (r — расстояние от кабеля). $A_x^{(0)}$ удовлетворяет уравнению (88) при $k = k_0$, так как оба члена ему удовлетворяют в отдельности. Первый член в скобках в (94) может быть также представлен в виде интеграла

$$K_0(kr) = \int_0^{\infty} e^{-|h-z| \sqrt{\lambda^2 + k_0^2}} \frac{\cos \lambda y d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k_0^2}},$$

так что можно написать

$$A_x^{(0)} = \frac{2I \sim}{c} \int_0^{\infty} \left[\frac{e^{-|h-z| \sqrt{\lambda^2 + k_0^2}}}{\lambda^2 + k_0^2} + f_2^{(0)} e^{-z \sqrt{\lambda^2 + k_0^2}} \right] \cos \lambda y d\lambda. \quad (95)$$

Напишем также выражение для $A_x^{(1)}$, полагая, что есть еще несколько сред ниже среды 1,

$$A_x^{(1)} = \frac{2I \sim}{c} \int_0^{\infty} [f_1^{(1)} e^{z \sqrt{\lambda^2 + k_0^2}} + f_2^{(0)} e^{-z \sqrt{\lambda^2 + k_0^2}}] \cos \lambda y d\lambda \quad (96)$$

и применим теперь граничные условия, которые должны иметь место на границе 0,1, т. е. при $z = 0$. По формулам (22) для данного случая имеем

$$A_x^{(0)} = A_x^{(1)}; \quad \frac{\partial A_x^{(0)}}{\partial z} = \frac{\partial A_x^{(1)}}{\partial z}.$$

Для сокращения введем обозначение $\mu_s = \sqrt{\lambda^2 + k_s^2}$ тогда, полагая нулю разность интегралов (95) и (96) при $z = 0$, имеем

$$\int_0^{\infty} \left[\frac{e^{-h\mu_0}}{\mu_0} + f_2^{(0)} - f_1^{(1)} - f_2^{(1)} \right] \cos \lambda y d\lambda = 0, \quad (97)$$

и, взяв производные по z и положив снова $z = 0$, получаем

$$\int_0^{\infty} \left[\left(\frac{e^{-h\mu_0}}{\mu_0} - f_2^{(0)} \right) \mu_0 - (f_1^{(1)} - f_2^{(1)}) \mu_1 \right] \cos \lambda y d\lambda = 0. \quad (98)$$

При этом нужно заметить, что при $z < h$ имеем $|h - z| = h - z$. Мы удовлетворим условиям (97) и (98), если приравняем нулю

подынтегральные выражения, так что граничные условия на границе 0,1 приводят нас к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} -f_2^{(0)} + f_1^{(1)} + f_2^{(1)} &= \frac{e^{-h\mu_0}}{\mu_0}; \\ f_2^{(0)} + f_1^{(1)} \frac{\mu_1}{\mu_0} - f_2^{(1)} \frac{\mu_1}{\mu_0} &= \frac{e^{-h\mu_0}}{\mu_0}. \end{aligned} \right\} \quad (99)$$

Предоставляем читателю, написав выражение для $A_x^{(2)}$, проверить, что условия на границе 1,2 при $z = -h$ приведут к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} f_1^{(1)}e^{-h\mu_1} + f_2^{(1)}e^{h\mu_1} - f_1^{(2)}e^{-h\mu_2} - f_2^{(2)}e^{h\mu_2} &= 0, \\ f_1^{(1)}e^{-h\mu_1} - f_2^{(1)}e^{h\mu_1} - f_1^{(2)}e^{-h\mu_2} \frac{\mu_2}{\mu_1} + f_2^{(2)}e^{h\mu_2} \frac{\mu_2}{\mu_1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (99a)$$

Аналогичные уравнения получатся для всех последующих границ, кроме последней, для которой в силу $f_2^{(n)} = 0$ мы будем иметь

$$\left. \begin{aligned} f_1^{(n-1)}e^{-h_{n-1}\mu_{n-1}} + f_2^{(n-1)}e^{h_{n-1}\mu_{n-1}} - f_1^{(n)}e^{-h_{n-1}\mu_n} &= 0; \\ f_1^{(n-1)}e^{-h_{n-1}\mu_{n-1}} - f_2^{(n-1)}e^{h_{n-1}\mu_{n-1}} - & \\ - f_1^{(n)}e^{-h_{n-1}\mu_{n-1}} \frac{\mu_n}{\mu_{n-1}} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (99n-1)$$

$2n$ уравнений (99) содержат $2n$ неизвестных коэффициентов, которые и определяются как функции от λ , причем в их выражения войдут все величины k_s и глубины h_s , а также высота кабеля над первой границей h . Для случая четырех сред и трех поверхностей раздела, решая шесть уравнений с шестью неизвестными, получаем для $f_2^{(0)}$ довольно сложное выражение, которое приводим полностью.

Полагаем

$$\begin{aligned} R &= (\mu_0 - \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)(\mu_2 + \mu_3) + (\mu_0 - \mu_1)(\mu_1 - \mu_2) \times \\ &\times (\mu_2 - \mu_3)e^{-2\mu_2(h_2 - h_1)} + (\mu_0 + \mu_1)(\mu_1 - \mu_2)(\mu_2 + \mu_3)e^{-2\mu_1 h_1} + \\ &+ (\mu_0 + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)(\mu_2 - \mu_3)e^{-2\mu_1 h_1 - 2\mu_2(h_2 - h_1)}; \\ S &= (\mu_0 + \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)(\mu_2 + \mu_3) + (\mu_0 + \mu_1)(\mu_1 - \mu_2) \times \\ &\times (\mu_2 - \mu_3)e^{-2\mu_2(h_2 - h_1)} + (\mu_0 - \mu_1)(\mu_1 - \mu_2)(\mu_2 + \mu_3)e^{-2\mu_1 h_1} + \\ &+ (\mu_0 - \mu_1)(\mu_1 + \mu_2)(\mu_2 - \mu_3)e^{-2\mu_1 h_1 - 2\mu_2(h_2 - h_1)}. \end{aligned}$$

С этими обозначениями имеем

$$f_2^{(0)} = \frac{e^{-\mu_0 h}}{\mu_0} \cdot \frac{R}{S}$$

и

$$A_x^{(0)} = \frac{2I \sim}{c} \int_0^\infty \left[e^{-|h-z|\mu_0} + e^{-(h+z)\mu_0} \frac{R}{S} \right] \frac{\cos \lambda y d\lambda}{\mu_0}. \quad (100)$$

Дифференцируя под знаком интеграла по z и y , мы можем написать выражения для составляющих магнитного поля

$$\begin{aligned} H_y^{(0)} &= \frac{\partial A_x}{\partial z}; \\ H_z^{(0)} &= -\frac{\partial A_x}{\partial y} \end{aligned}$$

в виде аналогичных, чрезвычайно сложных интегралов. В таком виде эти решения ничего не дают для практики; они являются исходными для дальнейших вычислений. Мы ограничимся рассмотрением случаев, когда имеются только две среды, причем одна из них воздух, для которого мы будем полагать $k_0 = 0$, пренебрегая токами смещения.

§ 13. ДВЕ СРЕДЫ; КАБЕЛЬ НАД ЗЕМЛЕЙ

К этому частному случаю мы перейдем, если положим в общем выражении (100) $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \sqrt{\lambda^2 + k_1^2}$. Тогда, как легко проверить,

$$\begin{aligned} R &= 4\mu_1^2(\mu_0 - \mu_1); \\ S &= 4\mu_1^2(\mu_0 + \mu_1); \end{aligned}$$

$$\frac{R}{S} = \frac{\mu_0 - \mu_1}{\mu_0 + \mu_1} = \frac{(\mu_0 - \mu_1)^2}{\mu_0^2 - \mu_1^2} = \frac{2\lambda^2 + k_0^2 + k_1 - 2\mu_0\mu_1}{k_0^2 - k_1^2},$$

и подынтегральное выражение в (100) приводится к виду

$$\begin{aligned} &\left(e^{-|h-z|\mu_0} + \frac{k_0^2 + k_1^2}{k_0^2 - k_1^2} e^{-(h+z)\mu_0} \right) \frac{\cos \lambda y}{\mu_0} + \\ &+ \frac{2(\lambda^2 - \mu_0\mu_1)}{k_0^2 - k_1^2} \cdot \frac{e^{-(h-z)\mu_0} \cos \lambda y}{\mu_0}. \end{aligned} \quad (101)$$

Полагая в (101) $k_0 = 0$; $k_1 = k$; $\mu_0 = \lambda$; $\mu_1 = \mu = \sqrt{\lambda^2 + k^2}$, мы переписываем это выражение в виде суммы трех членов:

$$\begin{aligned} &(e^{-|h-z|\lambda} - e^{-(h+z)\lambda}) \frac{\cos \lambda y}{\lambda} - \frac{2\lambda}{k^2} e^{-(h+z)\lambda} \cos \lambda y + \\ &+ \frac{2\mu}{k^2} e^{-(h+z)\lambda} \cos \lambda y. \end{aligned} \quad (102)$$

Соответственно этому разобьем $A_x^{(0)}$ на три слагаемых, которые будем вычислять отдельно. При интегрировании первого слагаемого нужно различать случаи $h > z$ и $h < z$. При $h > z$ мы имеем

$$A_{x1}^{(0)} = \frac{2I \sim}{c} \int_0^\infty \frac{e^{-h\lambda} (e^{z\lambda} - e^{-z\lambda})}{\lambda} \cos \lambda y d\lambda, \quad (103)$$

при $h < z$ получается

$$A_{x1}^{(0)} = \frac{2I \sim}{c} \int_0^\infty \frac{e^{-z\lambda} (e^{h\lambda} - e^{-h\lambda})}{\lambda} \cos \lambda y d\lambda. \quad (104)$$

Второе выражение получается из первого перестановкой букв h и z , поэтому мы можем ограничиться вычислением интеграла (103). Заменяем разность показательных функций в скобках гиперболическим синусом

$$A_x^{(0)} = \frac{4I_{\sim}}{c} \int_0^{\infty} \frac{e^{-h\lambda} \operatorname{sh} \lambda z \cos \lambda y}{\lambda} d\lambda$$

и, замечая, что

$$\frac{\operatorname{sh} z \lambda}{\lambda} = \int_0^z \operatorname{ch} \lambda \xi d\xi = \int_0^z \frac{e^{\lambda \xi} + e^{-\lambda \xi}}{2} d\xi;$$

$$\cos \lambda y = \operatorname{Re} e^{-iy},$$

получаем

$$A_x^{(0)} = \frac{2I_{\sim}}{c} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} e^{-(h+iy)\lambda} d\lambda \int_0^z (e^{\lambda \xi} + e^{-\lambda \xi}) d\xi.$$

Переставляя порядок интегрирования и разбивая на два интеграла, имеем

$$A_x^{(0)} = \frac{2I_{\sim}}{c} \operatorname{Re} \int_0^z d\xi \left(\int_0^{\infty} e^{-(h+iy-\xi)\lambda} d\lambda + \int_0^{\infty} e^{-(h+iy+\xi)\lambda} d\lambda \right) =$$

$$= \frac{2I_{\sim}}{c} \operatorname{Re} \int_0^z \left(\frac{1}{h+iy-\xi} + \frac{1}{h+iy+\xi} \right) d\xi =$$

$$= \frac{2I_{\sim}}{c} \operatorname{Re} \ln \frac{h+iy+z}{h+iy-z} = \frac{2I_{\sim}}{c} \ln \sqrt{\frac{(h+z)^2+y^2}{(h-z)^2+y^2}} = \frac{2I_{\sim}}{c} \ln \frac{r'}{r},$$

где r' — расстояние от данной точки до точки с координатами $y=0$, $z=-h$, т. е. до зеркального изображения кабеля; r — расстояние до самого кабеля.

Так как перестановка h и z в полученном выражении для $A_x^{(0)}$ ничего не меняет, то интегралы (103) и (104) имеют одно и то же значение

$$A_x^{(1)} = \frac{2I_{\sim}}{c} \ln \frac{r'}{r}. \quad (105)$$

Второй член суммы (102) тоже интегрируется в конечном виде, мы имеем

$$A_x^{(0)} = -\frac{4I_{\sim}}{ck^2} \int_0^{\infty} e^{-(h+z)\lambda} \cos \lambda y d\lambda.$$

Этот интеграл можно представить следующим образом:

$$A_x^{(0)} = -\frac{4I_{\sim}}{ck^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \int_0^{\infty} e^{-(h+z)\lambda} \sin \lambda y d\lambda =$$

$$= \frac{4I_{\sim}}{ck^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} \int_0^{\infty} e^{-(h+z+iy)\lambda} d\lambda = \frac{4I_{\sim}}{ck^2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} \frac{1}{h+z+iy}.$$

Вычисление мнимой части дает

$$\operatorname{Im} \frac{1}{h+z+iy} = -\frac{y}{(h+z)^2+y^2},$$

взяв производную по y , получим

$$A_x^{(0)} = -\frac{4I_{\sim}}{ck^2} \frac{(h+z)^2-y^2}{[(h+z)^2+y^2]^2}. \quad (106)$$

Остается вычислить интеграл третьего члена суммы (102)

$$A_x^{(0)} = \frac{4I_{\sim}}{ck^2} \int_0^{\infty} e^{-(h+z)\lambda} \sqrt{\lambda^2+k^2} \cos \lambda y d\lambda.$$

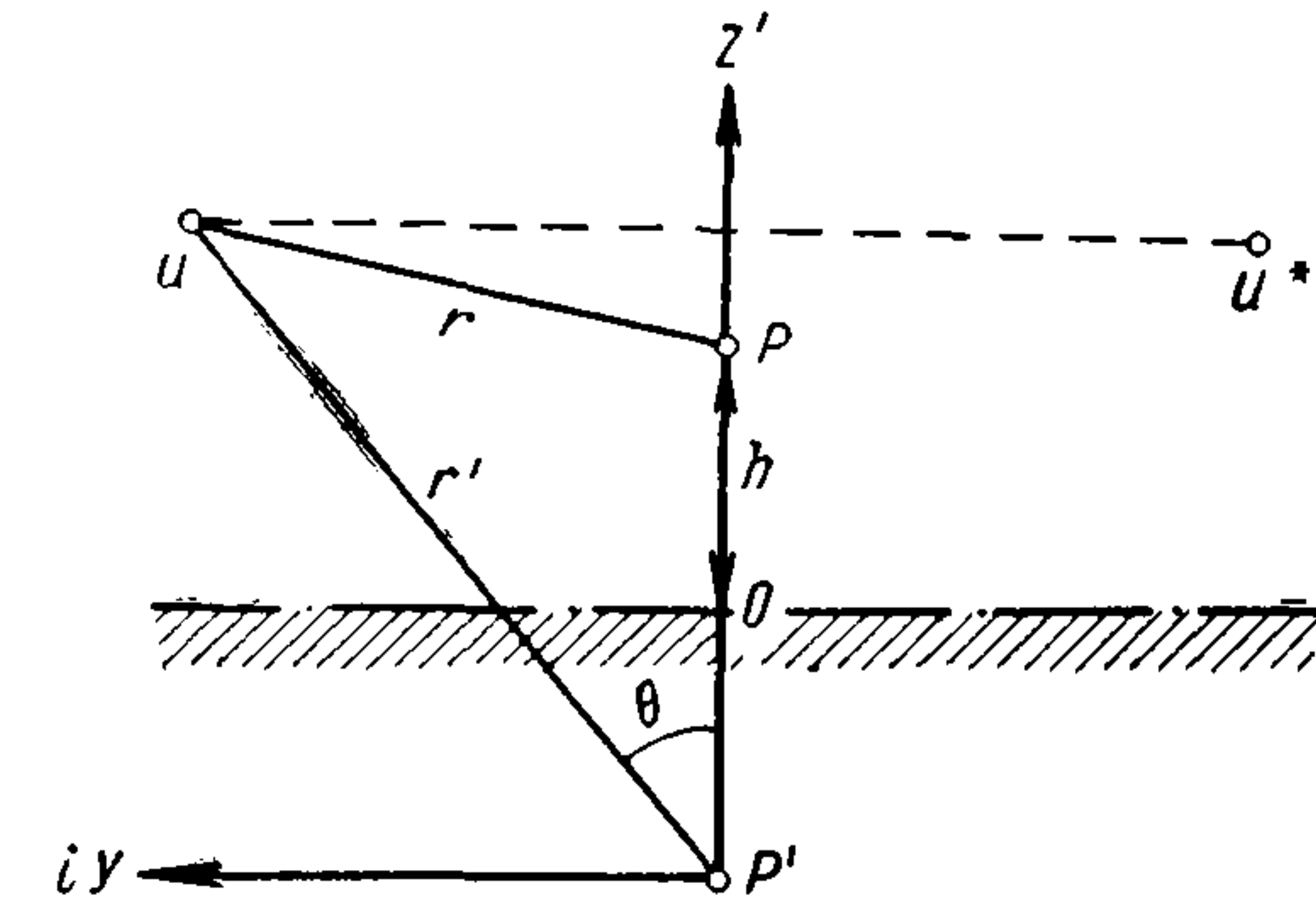


Рис. 20.

Перенесем начало координат в зеркальное изображение кабеля; тогда $h+z = z'$, выразим косинус через показательные функции:

$$\cos \lambda y = \frac{e^{i\lambda y} + e^{-i\lambda y}}{2}.$$

Тогда

$$A_x^{(0)} = \frac{2I_{\sim}}{ck^2} \left(\int_0^{\infty} e^{-(z'+iy)\lambda} \lambda d\lambda + \int_0^{\infty} e^{-(z'-iy)\lambda} \lambda d\lambda \right).$$

Введем обозначения

$$z'+iy = u = re^{i\theta}; \quad z'-iy = u^* = re^{-i\theta},$$

т. е. будем рассматривать плоскость (рис. 20) как плоскость комплексной переменной u .

Рассматривая только положительные значения y , мы имеем пределы для θ : $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$. Обозначим далее

$$F(u) = \int_0^{\infty} e^{-u\lambda} \lambda d\lambda, \quad (107)$$

тогда

$$A_{x^3}^{(0)} = \frac{2I_{\sim}}{ck^2} [F(u) + F(u^*)].$$

В (107) сделаем подстановку

$$t = \frac{\lambda}{k} = \frac{\lambda}{\kappa} e^{-i\pi/4} \quad (108)$$

тогда

$$F(u) = k^2 \int_0^{\infty e^{-i\pi/4}} e^{-kut} \sqrt{t^2 + 1} dt;$$

$$F(u^*) = k^2 \int_0^{\infty e^{-i\pi/4}} e^{-ku^*t} \sqrt{t^2 + 1} dt.$$

У Ватсона [7] мы находим, что эти интегралы выражаются через функции Бесселя и Струве, а именно

$$\int_0^{\infty e^{-i\omega}} e^{-vt} \sqrt{t^2 + 1} dt = \frac{\pi}{2v} [\mathbf{H}_1(v) - Y_1(v)], \quad (109)$$

при условии, что угол ω острый и аргумент комплексной величины $v = |v| e^{i\delta}$ лежит в пределах $-\frac{\pi}{2} + \omega \leq \delta \leq \frac{\pi}{2} + \omega$.

В нашем случае $\omega = \pi/4$, так что пределы для δ будут

$$-\frac{\pi}{4} \leq \delta \leq \frac{3\pi}{4}. \quad (110)$$

Функции $\mathbf{H}_n(v)$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{d^2 \mathbf{H}_n}{dv^2} + \frac{1}{v} \cdot \frac{d \mathbf{H}_n}{dv} + \left(1 - \frac{n^2}{v^2}\right) \mathbf{H}_n = \frac{2 \cdot n! v^{n-1}}{(2n)! \pi}$$

и могут быть представлены в виде рядов

$$\mathbf{H}_n(v) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2^{n+2m+2} (m+1)! (n+m+1)! v^{n+2m+1}}{(2m+2)! (n+2m+2)!}.$$

В качестве величины δ мы имеем аргументы величин

$$ku = \kappa r e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)};$$

$$ku^* = \kappa r' e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)},$$

и легко проверить, что для θ , лежащего в пределах $0, \pi/2$, условие (110) будет выполнено в обоих случаях. Формула (109) применима к $F(u)$ и $F(u^*)$, и мы получаем

$$F(u) = k^2 \frac{\pi}{2ku} [\mathbf{H}_1(ku) - Y_1(ku)];$$

$$F(u^*) = k^2 \frac{\pi}{2ku^*} [\mathbf{H}_1(ku^*) - Y_1(ku^*)],$$

подставляя в (108) имеем

$$A_{x^3}^{(0)} = \frac{2I_{\sim}}{c} \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\mathbf{H}_1(ku) - Y_1(ku)}{ku} + \frac{\mathbf{H}_1(ku^*) - Y_1(ku^*)}{ku^*} \right\}. \quad (111)$$

Окончательно имеем для вектор-потенциала в воздухе

$$A_x^{(0)} = \frac{2I_{\sim}}{c} \left\{ \ln \frac{r'}{r} + i \frac{2}{\kappa^2} \cdot \frac{(h+z)^2 - y^2}{[(h+z)^2 + y^2]^2} + \frac{G_1(ku)}{ku} - \frac{G_1(ku^*)}{ku^*} \right\}, \quad (112)$$

где мы ввели обозначение

$$G_s(v) = \frac{\pi}{2} [\mathbf{H}_s(v) - Y_s(v)].$$

Знание вектор-потенциала поля прямолинейного воздушного провода необходимо для точного расчета самоиндукции такого кабеля и взаимной индукции параллельных надземных проводов. К сожалению готовых таблиц функций Струве и Бесселя для всей области комплексного переменного не имеется, но можно использовать известные из теории бесселевых функций ряды и асимптотические разложения. Все же наличие таблиц функций G_0 и G_1 для комплексного аргумента было бы желательно. Используя асимптотическое выражение для функции G_1^* , можно показать, что при k стремящемся к бесконечности (большая проводимость земли или высокая частота тока), все члены выражения (112), кроме первого, стремятся к нулю. В этом предельном случае мы имеем

$$A_x^{(0)} = \frac{2I_{\sim}}{c} \ln \frac{r'}{r},$$

из этого следует, что присутствие земли может быть учтено введением фиктивного тока обратного направления, т. е. противоположной фазы, текущего в зеркальном изображении кабеля. В случае конечного k задача не решается одним изображением.

* Из общих формул, данных у Ватсона [см. (18) с. 361], следует

$$G_0(v) \approx \frac{1}{v} - \frac{1^2}{v^3} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{v^5} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{v^7} + \dots$$

$$G_1(v) \approx 1 + \frac{1^2}{v^2} - \frac{1^2 \cdot 3}{v^4} + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{v^6} - \dots$$

Более подробно мы на этом случае останавливаться не будем, а перейдем к случаю кабеля, лежащего на земле, и вычислим вектор-потенциал и составляющие магнитного поля для точек наблюдения, находящихся также на земной поверхности.

§ 14. ДВЕ СРЕДЫ; КАБЕЛЬ, ЛЕЖАЩИЙ НА ЗЕМЛЕ

Применение очень длинного кабеля, заземленного на концах, и промеры магнитного поля в полосе, лежащей по обе стороны кабеля, были введены как электроразведочный метод К. Зундбергом. Мы приступим к разбору нормального поля этого метода [см. I ч., 12].

Полагая $h = 0$, мы имеем $r = r'$, так как кабель совпадает со своим изображением, в силу чего первый член (112) исчезает. Далее мы имеем

$$u = z + iy; \quad u^* = z - iy,$$

и так как будем интересоваться полем у самой поверхности, то положим

$$ku = ikw; \quad ku^* = -ikw^*,$$

т. е.

$$w = y - iz; \quad w^* = y + iz.$$

Тогда для точек поверхности $z = 0$ будем иметь $w = w^*$. Для получения формул, удобных для численного расчета, нам придется провести ряд преобразований, в которых во избежание слишком длинных выкладок мы будем пользоваться готовыми формулами из теории бесселевых функций и функций Струве. Несколько более элементарно произведены выкладки в указанной брошюре автора [см. I ч., 12].

Переписывая (112) и имея в виду только что введенные обозначения, мы имеем

$$A_x^{(0)} = \frac{2I \sim}{c} \left\{ i \frac{2}{\kappa^2} \cdot \frac{z^2 - y^2}{(z^2 + y^2)^2} + \frac{G_1(ikw)}{ikw} - \frac{G_1(-ikw^*)}{ikw^*} \right\}. \quad (113)$$

Из теории бесселевых функций мы имеем

$$Y_1 = -Y'_0; \quad H_1 = \frac{2}{\pi} - H_0,$$

отсюда

$$G_1 = 1 - \frac{2}{\pi} (H'_0 - Y'_0) = 1 - G'_0 \quad (114)$$

(штрихи означают производные по аргументу функции). На основании (114) переписываем (113):

$$A_x^{(0)} = \frac{2I \sim}{c} \left[i \frac{2}{\kappa^2} \cdot \frac{z^2 - y^2}{z^2 + y^2} + \frac{1}{ikw} - \frac{1}{ikw^*} - \frac{G'_0(ikw)}{ikw} + \frac{G'_0(-ikw^*)}{ikw^*} \right]; \quad (115)$$

$$\frac{1}{ikw} - \frac{1}{ikw^*} = \frac{1}{ik} \left(\frac{1}{y - iz} - \frac{1}{y + iz} \right) = \frac{2}{k} \cdot \frac{z}{z^2 + y^2}. \quad (116)$$

Пользуясь формулой

$$Y_0(v) = i [J_0(v) - H_0^{(1)}(v)],$$

имеем

$$Y_0(ikw) = i [J_0(ikw) - H_0^{(1)}(ikw)] = iI_0(kw) - \frac{2}{\pi} K_0(kw),$$

так как

$$\frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(i\sigma) = K_0(\sigma).$$

Для функции Струве от мнимого аргумента введем по Ватсону обозначение

$$H_0(ikw) = iL_0(kw),$$

таким образом,

$$G_0(ikw) = K_0(kw) - i \frac{\pi}{2} [I_0(kw) - L_0(kw)].$$

Мы будем обозначать

$$\frac{\pi}{2} [I_0(kw) - L_0(kw)] = Q_0(kw),$$

так что

$$G_0(ikw) = K_0(kw) - iQ_0(kw); \quad (117)$$

$$G_0(-ikw^*) = K_0(-kw^*) - iQ_0(-kw^*). \quad (118)$$

На основании формулы

$$H_0^{(1)}(-\sigma) = H_0^{(1)}(\sigma) + 2J_0(\sigma)$$

мы имеем

$$K_0(-kw^*) = \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(-ikw^*) = \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(ikw) + i\pi J_0(ikw^*)$$

или

$$K_0(-kw^*) = K_0(kw^*) + i\pi I_0(kw^*);$$

что же касается Q_0 , то функция I_0 четная, а L_0 нечетная, так что

$$Q_0(-kw^*) = \frac{\pi}{2} [I_0(kw^*) + L_0(kw^*)].$$

Отсюда получаем на основании (118)

$$G_0(-ikw^*) = K_0(kw^*) + i \frac{\pi}{2} [I_0(kw^*) - L_0(kw^*)],$$

т. е.

$$G_0(-ikw^*) = K_0(kw^*) + iQ_0(kw^*). \quad (119)$$

Теперь мы можем вычислить производные, входящие в (115),

$$G'_0(ikw) = \frac{dG_0(ikw)}{id(kw)} = -iK'_0(kw) - Q'_0(kw); \quad (120)$$

$$G'_0(-ikw^*) = -\frac{dG_0(-ikw^*)}{id(kw^*)} = iK'_0(kw^*) - Q'_0(kw^*), \quad (121)$$

и принимая во внимание (116), написать

$$A_x^{(0)} = \frac{2I_{\sim}}{c} \left\{ i \frac{2}{\kappa^2} \cdot \frac{z^2 - y^2}{(z^2 + y^2)^2} + \frac{2e^{-i\pi/4}}{\kappa} \cdot \frac{z}{z^2 + y^2} + \frac{K'_0(kw) - iQ'_0(kw)}{kw} + \frac{K'_0(kw^*) + iQ'_0(kw^*)}{kw^*} \right\}. \quad (122)$$

При $z=0$, $w=w^*=y$ мы получаем

$$(A_x^{(0)})_{z=0} = \frac{2I_{\sim}}{c} \left\{ -i \frac{2}{\kappa^2 y^2} + \frac{2K'_0(\kappa y e^{i\pi/4})}{\kappa y} e^{-i\pi/4} \right\}. \quad (123)$$

При вычислении составляющих магнитного поля нам нужно будет дифференцировать (122). Легко показать, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} &= k \frac{\partial}{\partial(kw)} = k \frac{\partial}{\partial(kw^*)}; \\ \frac{\partial}{\partial z} &= -ik \frac{\partial}{\partial(kw)} = ik \frac{\partial}{\partial(kw^*)}, \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

так что для выполнения дифференцирования нужно знать производные функции K_0 и Q_0 по аргументу. Обозначая последний для краткости через v , имеем

$$\frac{d}{dv} \cdot \frac{K'_0(v)}{v} = \frac{K''_0(v)}{v} - \frac{K'_0(v)}{v^2},$$

а из дифференциального уравнения для K_0

$$K''_0(v) = K_0(v) - \frac{1}{v} K'_0(v),$$

так что

$$\frac{d}{dv} \cdot \frac{K'_0(v)}{v} = \frac{K_0(v)}{v} - \frac{2K'_0(v)}{v^2}, \quad (125)$$

что же касается функции $Q_0(v)$, то мы имеем

$$I''_0(v) + \frac{1}{v} I'_0(v) - I_0(v) = 0;$$

$$L''_0(v) + \frac{1}{v} L'_0(v) - L_0(v) = \frac{2}{\pi v}.$$

Отсюда, умножая оба уравнения на $\pi/2$ и вычитая второе из первого, получаем

$$Q''_0(v) + \frac{1}{v} Q'_0(v) - Q_0(v) = -\frac{1}{v}.$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dv} \cdot \frac{Q'_0(v)}{v} = \frac{Q''_0(v)}{v} - \frac{Q'_0(v)}{v^2} = \frac{Q_0(v)}{v} - \frac{2Q'_0(v)}{v^2} - \frac{1}{v^2}. \quad (126)$$

Выполняя дифференцирование (122), используя (124), (125) и (126) и полагая в конце концов $z=0$, $w=w^*=y$, мы после элементарных выкладок получаем

$$\left(\frac{\partial A_x^{(0)}}{\partial z} \right)_{z=0} = (H_y^{(0)})_{z=0} = \frac{2I_{\sim}}{cy} \left[\frac{4}{\kappa y} e^{-i\pi/4} - 2Q_0(\kappa y e^{i\pi/4}) + \frac{4Q'_0(\kappa y e^{i\pi/4}) e^{-i\pi/4}}{\kappa y} \right]; \quad (127)$$

$$-\left(\frac{\partial A_x^{(0)}}{\partial y} \right)_{z=0} = (H_z^{(0)})_{z=0} = \frac{2I_{\sim}}{cy} \left[-i \frac{4}{\kappa^2 y^2} - 2K_0(\kappa y e^{i\pi/4}) + \frac{4K'_0(\kappa y e^{i\pi/4}) e^{-i\pi/4}}{\kappa y} \right]. \quad (128)$$

Величину $\kappa y = \xi$ будем называть приведенным расстоянием. Для разделения вещественной и мнимой части в (123), (127) и (128) напомним, что

$$K_0(\xi e^{i\pi/4}) = \ker \xi + i \operatorname{kei} \xi;$$

$$K'_0(\xi e^{i\pi/4}) = e^{-i\pi/4} (\ker' \xi + i \operatorname{kei}' \xi)$$

и введем аналогичные обозначения

$$Q_0(\xi e^{i\pi/4}) = q_1(\xi) + i q_2(\xi);$$

$$Q'_0(\xi e^{i\pi/4}) = e^{-i\pi/4} [q'_1(\xi) + i q'_2(\xi)].$$

Функции $q_1(\xi)$ и $q_2(\xi)$ были специально вычислены для рассматриваемой здесь задачи. После введения этих обозначений мы имеем

$$(A_x^{(0)})_{z=0} = \frac{2I_{\sim}}{c} \left[\frac{2 \operatorname{kei}' \xi}{\xi} - i \left(\frac{2}{\xi^2} + \frac{2 \operatorname{ker}' \xi}{\xi} \right) \right]; \quad (129)$$

$$(H_y^{(0)})_{z=0} = -\frac{2I_{\sim}}{cy} \left[\left(2q_1(\xi) - \frac{4q'_2(\xi)}{\xi} - \frac{2\sqrt{2}}{\xi} \right) + i \left(2q_2(\xi) + \frac{4q'_1(\xi)}{\xi} + \frac{2\sqrt{2}}{\xi} \right) \right]; \quad (130)$$

$$(H_z^{(0)})_{z=0} = \frac{2I_{\sim}}{cy} \left[\left(\frac{4 \operatorname{kei}' \xi}{\xi} - 2 \operatorname{ker} \xi \right) + i \left(-2 \operatorname{kei} \xi - \frac{4 \operatorname{ker}' \xi}{\xi} - \frac{4}{\xi^2} \right) \right]. \quad (131)$$

Формулы * (129), (130), (131) относятся к точкам, находящимся на одном уровне с кабелем ($z=0$). При измерениях, сделанных вблизи кабеля, может оказаться необходимым учесть превышение

* При сравнении формул (130) и (131) с соответствующими формулами цитированной статьи [см. гл. (12)] читатель обнаружит расхождение в знаках. Это обусловлено тем, что здесь введено другое расположение осей (ток направлен по оси X , а там по оси Y). Кроме того, обозначение функций y_1 и y_2 изменено здесь на q_1 и q_2 .

рамки над поверхностью земли, т. е. иметь поправки на высоту центра рамки z . Чтобы не обращаться при выводе этих формул к общим выражениям, следующим из (122), мы вычислим первые и вторые производные по z от $H_y^{(0)}$ и $H_z^{(0)}$ при $z = 0$ и представим требуемые величины в виде разложения

$$H_y^{(0)} = (H_y^{(0)})_{z=0} + \frac{z}{y} \left(y \frac{\partial H_y^{(0)}}{\partial z} \right)_{z=0} + \left(\frac{z}{y} \right)^2 \left(y^2 \frac{\partial^2 H_y^{(0)}}{\partial z^2} \right)_{z=0} + \dots;$$

$$H_z^{(0)} = (H_z^{(0)})_{z=0} + \frac{z}{y} \left(y \frac{\partial H_z^{(0)}}{\partial z} \right)_{z=0} + \left(\frac{z}{y} \right)^2 \left(y^2 \frac{\partial^2 H_z^{(0)}}{\partial z^2} \right)_{z=0} + \dots$$

Для вычисления входящих сюда производных мы поступаем следующим образом. Из

$$H_y^{(0)} = \frac{\partial A_x^{(0)}}{\partial z};$$

$$H_z^{(0)} = - \frac{\partial A_x^{(0)}}{\partial y},$$

принимая во внимание дифференциальное уравнение для $A_x^{(0)}$, получаем

$$\frac{\partial H_y^{(0)}}{\partial z} = \frac{\partial^2 A_x^{(0)}}{\partial z^2} = k^2 A_x^{(0)} - \frac{\partial^2 A_x^{(0)}}{\partial y^2} = k^2 A_x^{(0)} + \frac{\partial H_z^{(0)}}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^2 H_y^{(0)}}{\partial z^2} = k^2 \frac{\partial A_x^{(0)}}{\partial z} - \frac{\partial^3 A_x^{(0)}}{\partial z \partial y^2} = k^2 H_y^{(0)} - \frac{\partial^2 H_y^{(0)}}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial H_z^{(0)}}{\partial z} = - \frac{\partial^2 A_x^{(0)}}{\partial z \partial y} = - \frac{\partial H_y^{(0)}}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^2 H_z^{(0)}}{\partial z^2} = - \frac{\partial^3 A_x^{(0)}}{\partial z^2 \partial y} = - \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 A_x^{(0)}}{\partial z^2} = - k^2 \frac{\partial A_x^{(0)}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 A_x^{(0)}}{\partial y^2} =$$

$$= k^2 H_z^{(0)} - \frac{\partial^2 H_z^{(0)}}{\partial y^2}.$$

Таким образом, все производные по z сведены к значениям $A_x^{(0)}$, $H_y^{(0)}$, $H_z^{(0)}$ в данной точке и к их производным по y , для вычисления которых при $z = 0$ можно воспользоваться выражениями, в которых уже положено $z = 0$.

Если еще ввести в (127) и (128) вместо κy величины ξ и соотношения

$$\frac{\partial}{\partial y} = \kappa \frac{\partial}{\partial \xi};$$

$$k^2 = i\kappa^2,$$

то можно непосредственно дифференцировать (127) и (128)

$$\left(\frac{\partial H_y^{(0)}}{\partial z} \right)_{z=0} = i\kappa^2 (A_x^{(0)})_{z=0} + \kappa \frac{\partial (H_z^{(0)})_{z=0}}{\partial \xi};$$

$$\left(\frac{\partial H_z^{(0)}}{\partial z} \right)_{z=0} = - \kappa \frac{\partial (H_y^{(0)})_{z=0}}{\partial \xi};$$

$$\left(\frac{\partial^2 H_y^{(0)}}{\partial z^2} \right)_{z=0} = i\kappa^2 (H_y^{(0)})_{y=0} - \kappa^2 \frac{\partial^2 (H_y^{(0)})_{z=0}}{\partial \xi^2},$$

$$\left(\frac{\partial^2 H_z^{(0)}}{\partial z^2} \right)_{z=0} = i\kappa^2 (H_z^{(0)})_{z=0} - \kappa^2 \frac{\partial^2 (H_z^{(0)})_{z=0}}{\partial \xi^2},$$

причем появляющиеся вторые и третьи производные функций K_0 и Q_0 по аргументу нужно выражать через сами функции и их первые производные при помощи дифференциальных уравнений для этих функций. Довольно продолжительные, но элементарные выкладки приводят к окончательным выражениям (с точностью до $(\frac{z}{y})^2$ включительно)

$$H_y = - \frac{2I_{\sim}}{cy} \left[\left(a_y^{(0)} + \frac{z}{y} a_y^{(1)} + \left(\frac{z}{y} \right)^2 a_y^{(2)} \right) + i \left(b_y^{(0)} + \frac{z}{y} b_y^{(1)} + \left(\frac{z}{y} \right)^2 b_y^{(2)} \right) \right]; \quad (132)$$

$$H_z = \frac{2I_{\sim}}{cy} \left[\left(a_z^{(0)} + \frac{z}{y} a_z^{(1)} + \left(\frac{z}{y} \right)^2 a_z^{(2)} \right) + i \left(b_z^{(0)} + \frac{z}{y} b_z^{(1)} + \left(\frac{z}{y} \right)^2 b_z^{(2)} \right) \right]. \quad (133)$$

В этих формулах величины a и b с соответствующими знаками означают следующие функции аргумента $\xi = \kappa y$:

$$a_y^{(0)} = - \frac{2\sqrt{2}}{\xi} - \frac{4q_2'(\xi)}{\xi} + 2q_1(\xi); \quad (134)$$

$$a_y^{(1)} = \frac{12 \operatorname{kei}'(\xi)}{\xi} + 2\xi \operatorname{ker}'(\xi) - 6 \operatorname{ker}(\xi); \quad (135)$$

$$a_y^{(2)} = \frac{12\sqrt{2}}{\xi} + \frac{\sqrt{2}}{2}\xi + \frac{24q_2'(\xi)}{\xi} + 5\xi q_1'(\xi) - 12q_1(\xi) + \xi^2 q_2(\xi); \quad (136)$$

$$b_y^{(0)} = \frac{2\sqrt{2}}{\xi} + \frac{4q_1'(\xi)}{\xi} + 2q_2(\xi); \quad (137)$$

$$b_y^{(1)} = - \frac{12}{\xi^2} - \frac{12 \operatorname{ker}'(\xi)}{\xi} + 2\xi \operatorname{kei}(\xi) - 6 \operatorname{kei}(\xi); \quad (138)$$

$$b_y^{(2)} = - \frac{12\sqrt{2}}{\xi} + \frac{\sqrt{2}}{2}\xi - \frac{24q_1'(\xi)}{\xi} + 5\xi q_2'(\xi) - 12q_2(\xi) - \xi^2 q_1(\xi); \quad (139)$$

$$a_z^{(0)} = \frac{4 \operatorname{kei}'(\xi)}{\xi} - 2 \operatorname{ker}(\xi); \quad (140)$$

$$a_z^{(1)} = \frac{6\sqrt{2}}{\xi} + \frac{12q_2'(\xi)}{\xi} + 2\xi q_1'(\xi) - 6q_1(\xi); \quad (141)$$

$$a_z^{(2)} = - \frac{24 \operatorname{kei}'(\xi)}{\xi} - 5\xi \operatorname{ker}'(\xi) + 12 \operatorname{ker}(\xi) - \xi^2 \operatorname{kei}(\xi); \quad (142)$$

$$b_z^{(0)} = - \frac{1}{\xi^2} - \frac{4 \operatorname{ker}'(\xi)}{\xi} - 2 \operatorname{kei}(\xi); \quad (143)$$

$$b_z^{(1)} = -\frac{6\sqrt{2}}{\xi} - \frac{12q'(\xi)}{\xi} + 2\xi q_1(\xi) - 6q_2(\xi); \quad (144)$$

$$b_z^{(2)} = \frac{24}{\xi^2} + \frac{24 \operatorname{ker}'(\xi)}{\xi} - 5\xi \operatorname{kei}(\xi) + 12 \operatorname{kei}(\xi) + \xi^2 \operatorname{ker}(\xi). \quad (145)$$

По этим формулам и таблицам функций ker , kei , ker' , kei' и q_1 , q_2 , q_1' и q_2' рассчитаны таблицы величин $a_y^{(0)}$, $b_y^{(0)}$, $a_z^{(0)}$, $b_z^{(0)}$ (табл. 2)

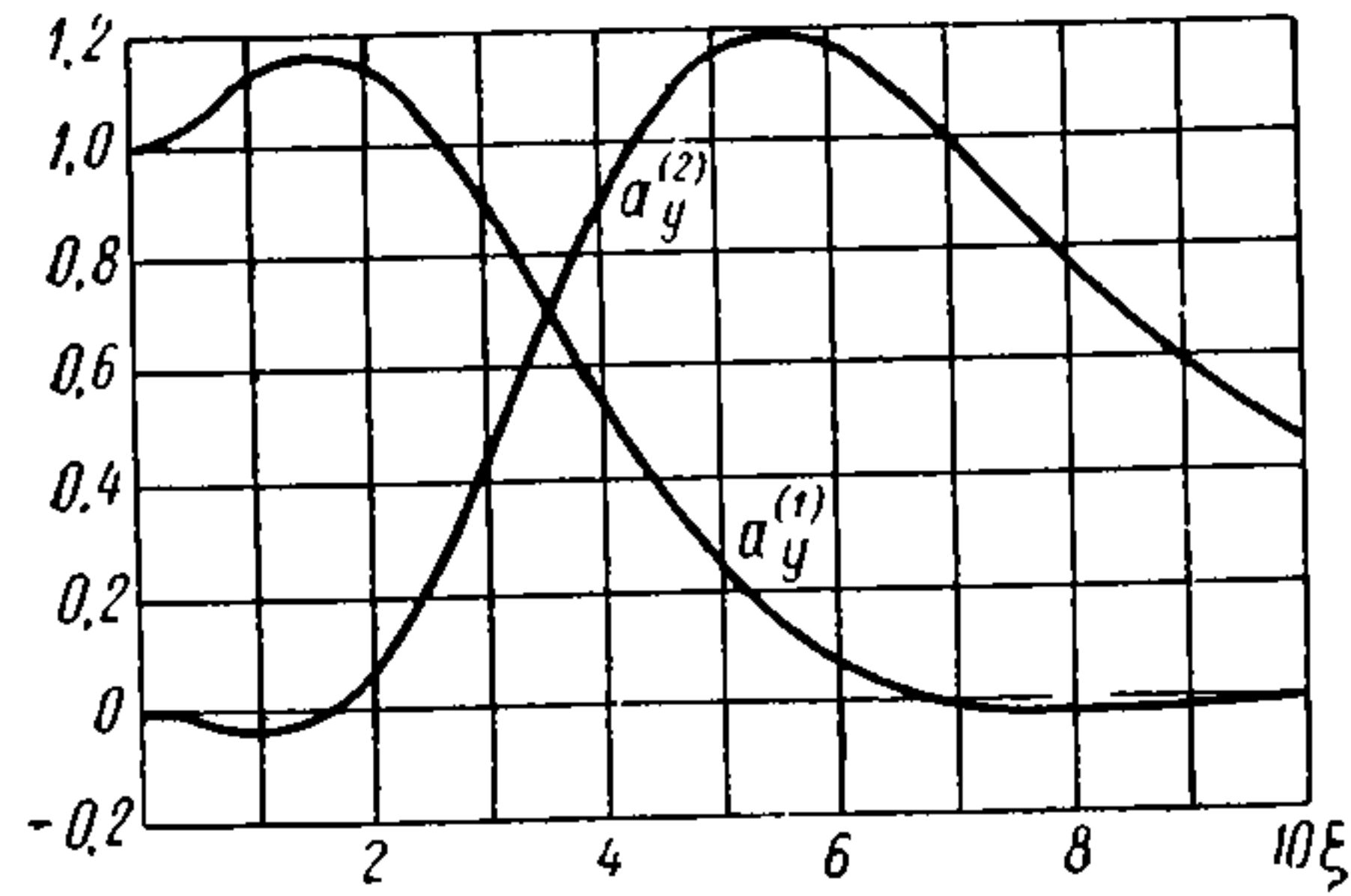


Рис. 21.

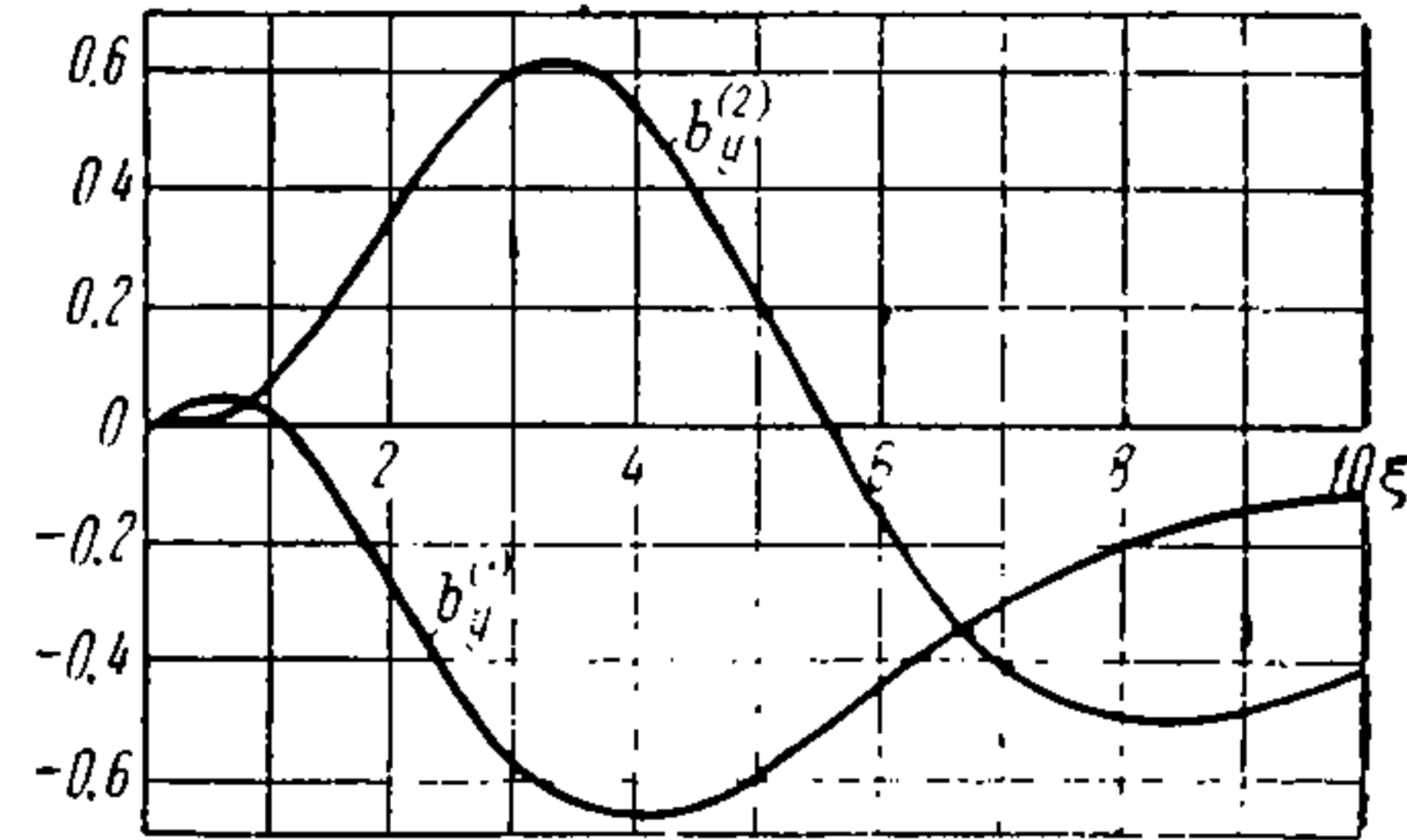


Рис. 22.

и графики для остальных поправочных членов формул (132) и (133)*. Графики представлены на рис. 21, 22, 23, 24.

Комплексные величины $a_y^{(0)} + ib_y^{(0)}$, $a_z^{(0)} + ib_z^{(0)}$ даны в виде фазовых диаграмм на рис. 25 и 26.

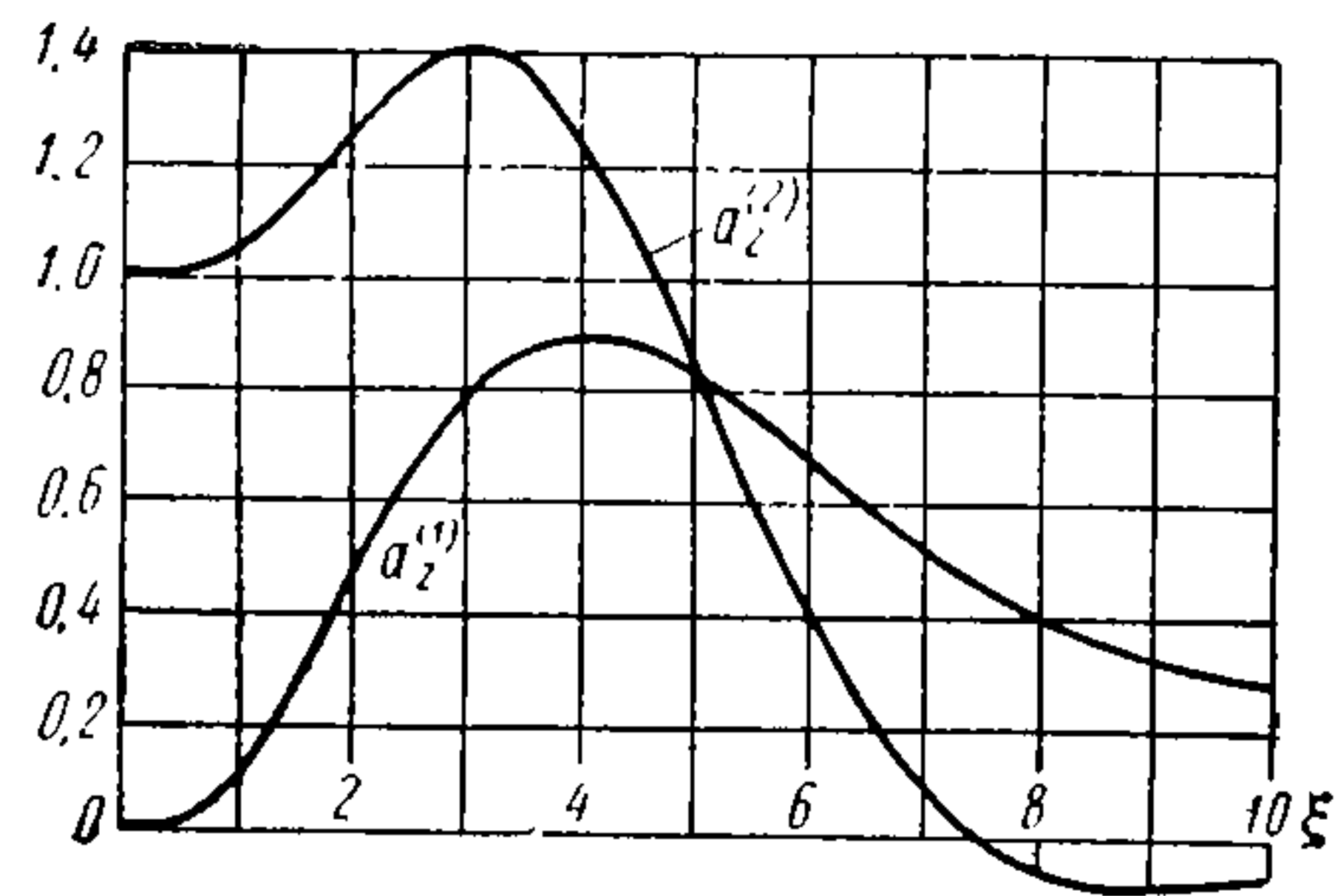


Рис. 23.

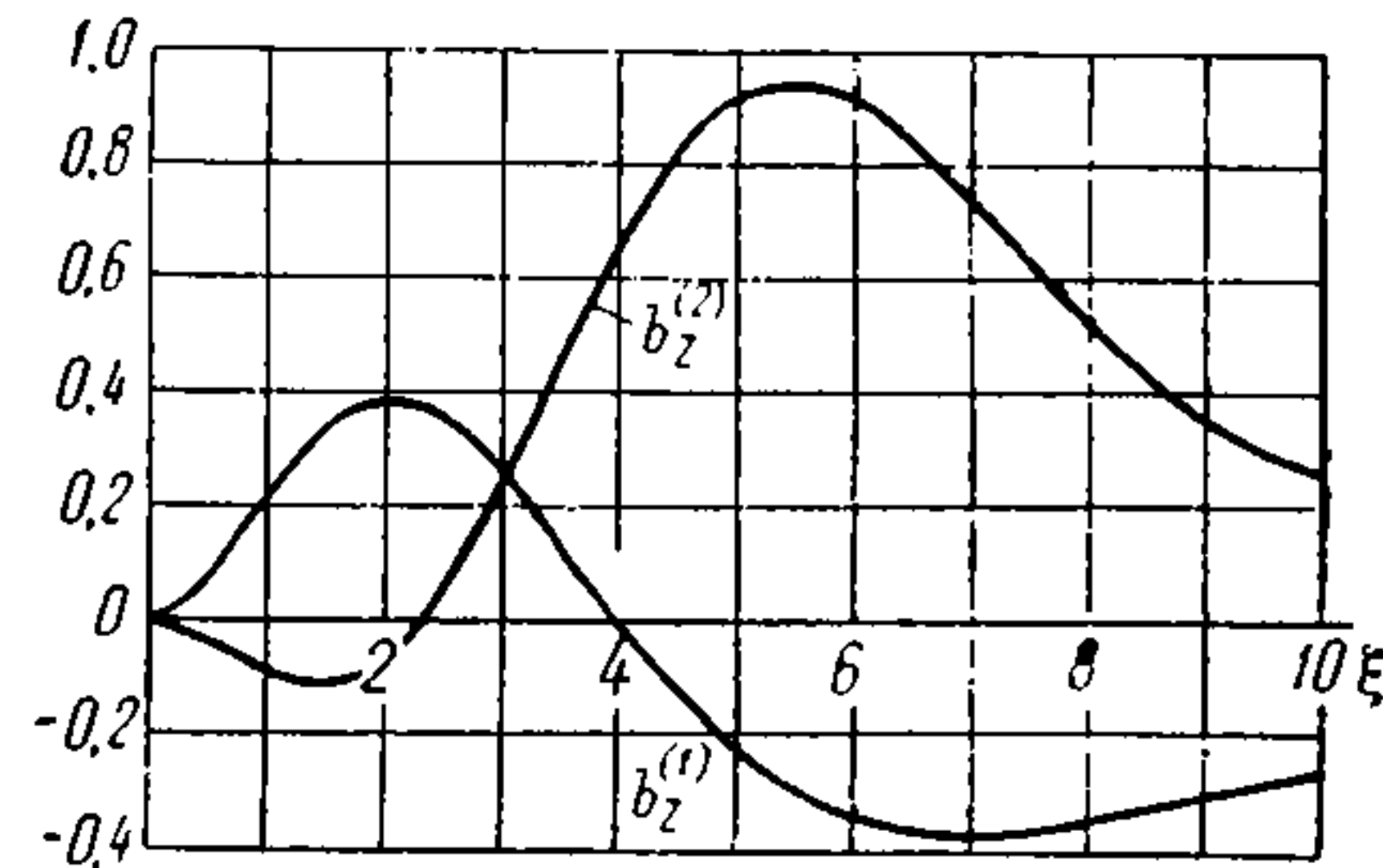


Рис. 24.

Для сравнения рассматриваемого случая с изученным нами в § 9 случае кабеля, находящегося в неограниченной среде, вычислим распределение тока на поверхности земли. Аналогично формуле (67) мы имеем

$$J_x = -\frac{i\omega\sigma}{c} A_x,$$

* Значительная часть вычислений была проведена вычислительным бюро сектора прикладной математики ГОИ.

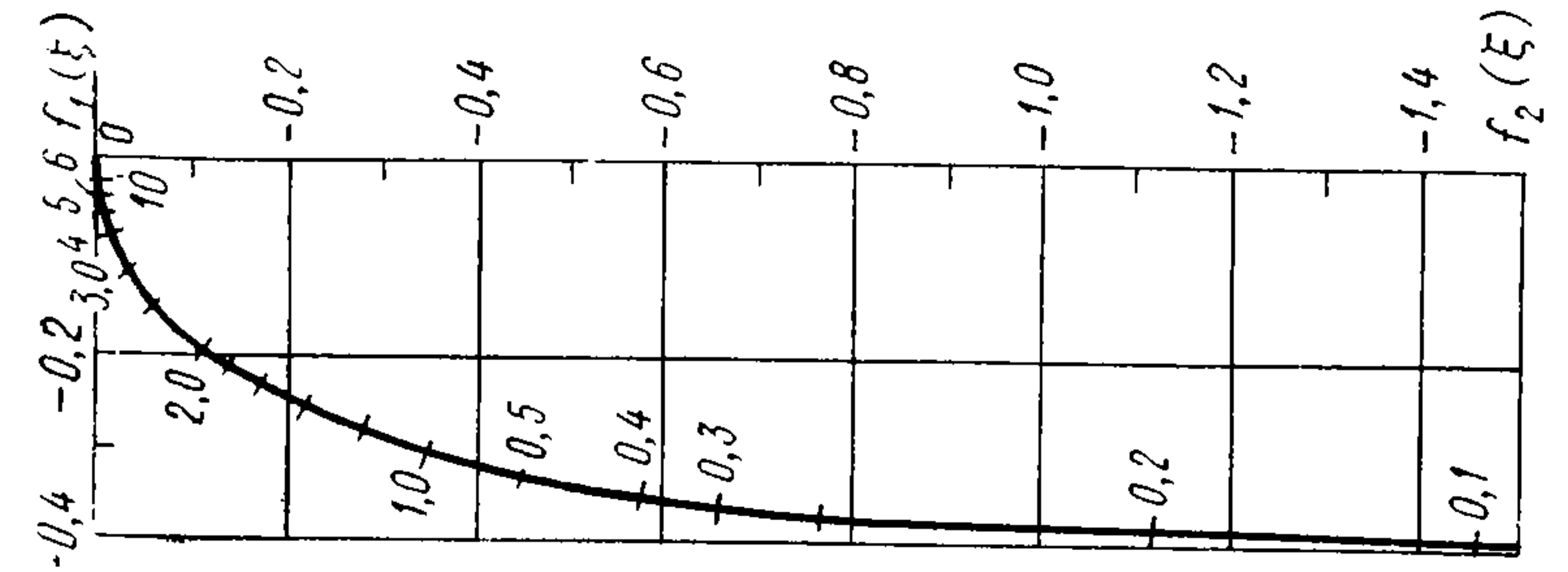


Рис. 27.

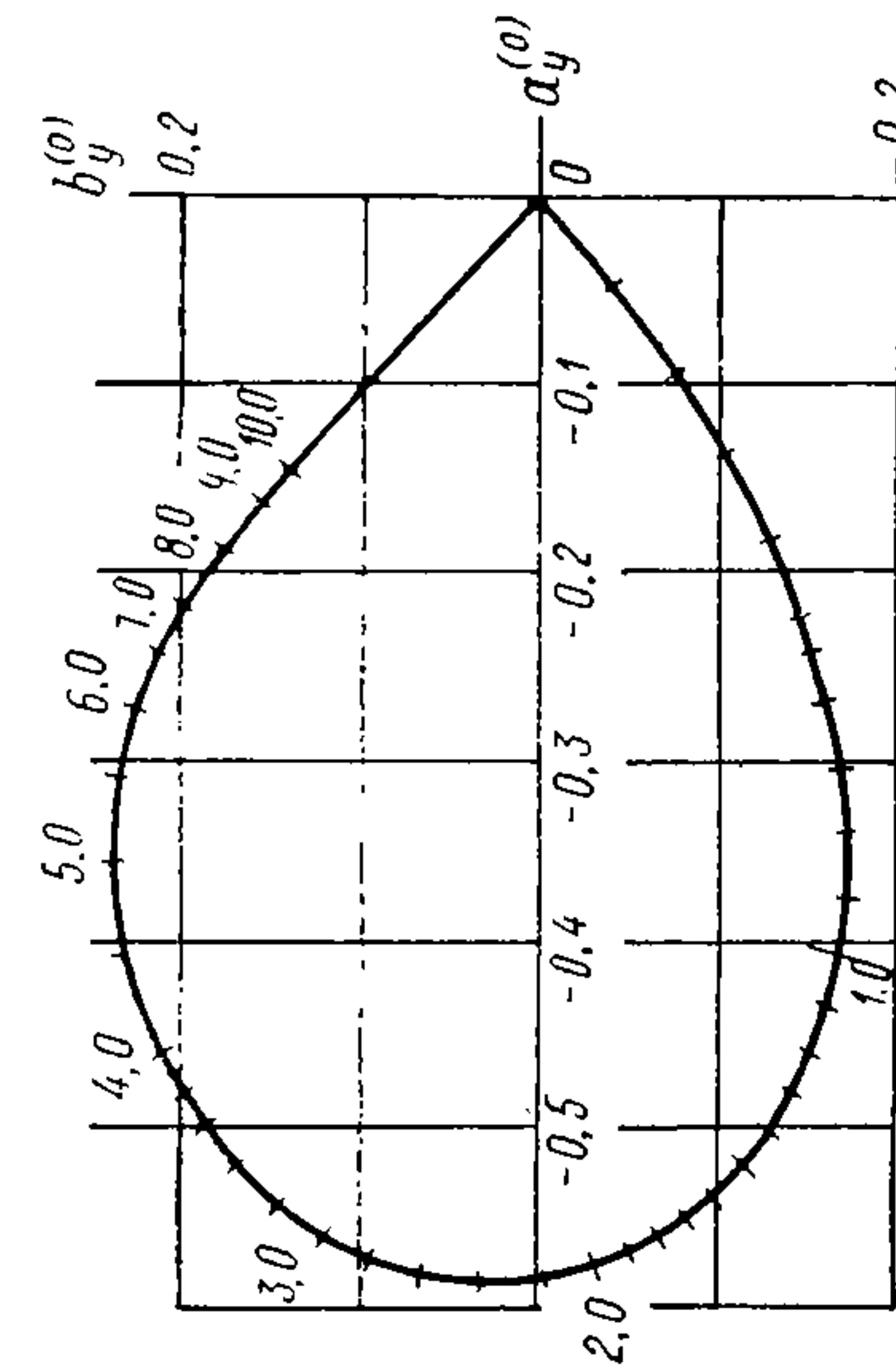


Рис. 25.

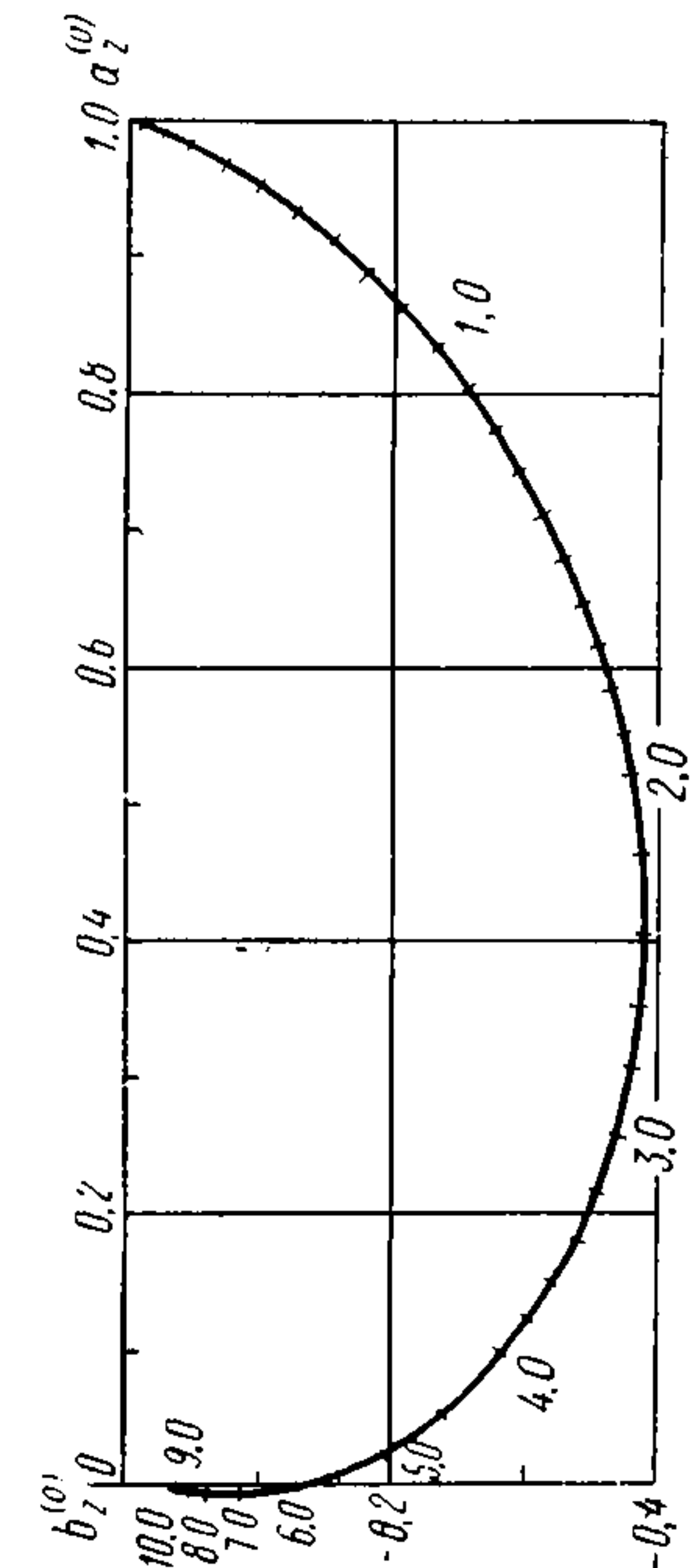


Рис. 26.

так что по формуле (129) можем написать

$$J_x = -\frac{2i\omega\sigma}{c^2} I_{\sim} \left[\frac{2 \operatorname{kei}' \xi}{\xi} - i \left(\frac{2}{\xi^2} + \frac{2 \operatorname{ker}' \xi}{\xi} \right) \right].$$

Переход к практическим единицам совершенно так же, как и в § 9, позволяет написать эту формулу в виде

$$\frac{J_x}{I_{\sim}} = \frac{10^{-10} \kappa^2}{\pi} \left[- \left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{\operatorname{ker}' \xi}{\xi} \right) - i \frac{\operatorname{kei}' \xi}{\xi} \right] \text{ см}^{-2}, \quad (146)$$

если κ выражено в обратных километрах. На рис. 27 изображен множитель, стоящий в (144) в квадратной скобке,

$$- \left(\frac{1}{\xi^2} + \frac{\operatorname{ker}' \xi}{\xi} \right) - i \frac{\operatorname{kei}' \xi}{\xi} = f_1(\xi) + i f_2(\xi).$$

Таблица 2

| ξ | $a_y^{(0)}$ | $b_y^{(0)}$ | $a_z^{(0)}$ | $b_z^{(0)}$ |
|-------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 0,0 | -0,000 | -0,000 | +1,000 | -0,000 |
| 0,1 | 0,047 | 0,043 | 0,998 | 0,008 |
| 0,2 | 0,094 | 0,079 | 0,992 | 0,025 |
| 0,3 | 0,139 | 0,109 | 0,983 | 0,047 |
| 0,4 | 0,183 | 0,132 | 0,970 | 0,072 |
| 0,5 | 0,226 | 0,149 | 0,954 | 0,098 |
| 0,6 | 0,266 | 0,162 | 0,935 | 0,126 |
| 0,7 | 0,305 | 0,169 | 0,913 | 0,154 |
| 0,8 | 0,341 | 0,173 | 0,889 | 0,181 |
| 0,9 | 0,374 | 0,173 | 0,864 | 0,207 |
| 1,0 | 0,405 | 0,169 | 0,836 | 0,232 |
| 1,2 | 0,460 | 0,155 | 0,777 | 0,277 |
| 1,4 | 0,504 | 0,132 | 0,714 | 0,314 |
| 1,6 | 0,538 | 0,103 | 0,650 | 0,345 |
| 1,8 | 0,562 | 0,070 | 0,586 | 0,367 |
| 2,0 | 0,578 | 0,036 | 0,523 | 0,382 |
| 2,2 | 0,585 | -0,001 | 0,462 | 0,390 |
| 2,4 | 0,587 | +0,033 | 0,405 | 0,392 |
| 2,6 | 0,582 | 0,065 | 0,351 | 0,389 |
| 2,8 | 0,572 | 0,094 | 0,302 | 0,382 |
| 3,0 | 0,559 | 0,121 | 0,257 | 0,371 |
| 3,2 | 0,542 | 0,145 | 0,216 | 0,357 |
| 3,4 | 0,524 | 0,166 | 0,180 | 0,341 |
| 3,6 | 0,503 | 0,184 | 0,148 | 0,323 |
| 3,8 | 0,482 | 0,198 | 0,120 | 0,305 |
| 4,0 | 0,460 | 0,210 | 0,096 | 0,286 |
| 4,5 | 0,405 | 0,228 | 0,051 | 0,239 |
| 5,0 | 0,355 | 0,234 | 0,022 | 0,196 |
| 5,5 | 0,312 | 0,230 | +0,006 | 0,159 |
| 6,0 | 0,275 | 0,221 | -0,002 | 0,129 |
| 6,5 | 0,245 | 0,210 | 0,005 | 0,106 |
| 7,0 | 0,221 | 0,197 | 0,006 | 0,087 |
| 7,5 | 0,201 | 0,184 | 0,005 | 0,073 |
| 8,0 | 0,186 | 0,173 | 0,004 | 0,063 |
| 8,5 | 0,173 | 0,162 | 0,002 | 0,055 |
| 9,0 | 0,163 | 0,152 | 0,001 | 0,048 |
| 9,5 | 0,154 | 0,144 | 0,001 | 0,043 |
| 10,0 | -0,146 | +0,137 | -0,000 | -0,039 |

Сравнение рис. 17, 27 показывает, что вблизи кабеля, точнее при малых ξ , разница в распределении тока небольшая, но при $\xi \geq 1$ фазы и амплитуды весьма заметно различаются. Заметим, что внешний скин-эффект и в этом случае ярко выражен, хотя несколько слабее, чем в случае кабеля, окруженного проводящей средой со всех сторон.

Таблица 3

| ξ | $-f_1(\xi)$ | $-f_2(\xi)$ | $\sqrt{f_1^2 + f_2^2}$ | $\operatorname{arctg} \frac{f_1}{f_2}$ |
|-------|-------------|-------------|------------------------|--|
| 0,0 | 0,393 | ∞ | ∞ | 270°,0 |
| 0,1 | 0,390 | 1,460 | 1,511 | 255,0 |
| 0,2 | 0,385 | 1,115 | 1,180 | 251,5 |
| 0,3 | 0,378 | 0,914 | 0,989 | 247,0 |
| 0,4 | 0,370 | 0,774 | 0,858 | 244,5 |
| 0,5 | 0,360 | 0,666 | 0,756 | 241,5 |
| 0,6 | 0,350 | 0,580 | 0,677 | 239,0 |
| 0,7 | 0,340 | 0,509 | 0,612 | 236,5 |
| 0,8 | 0,328 | 0,449 | 0,556 | 234,5 |
| 0,9 | 0,317 | 0,397 | 0,508 | 232,5 |
| 1,0 | 0,305 | 0,352 | 0,466 | 229,0 |
| 1,2 | 0,282 | 0,279 | 0,397 | 224,5 |
| 1,4 | 0,259 | 0,221 | 0,341 | 220,5 |
| 1,6 | 0,237 | 0,175 | 0,295 | 216,5 |
| 1,8 | 0,216 | 0,139 | 0,256 | 212,5 |
| 2,0 | 0,197 | 0,110 | 0,225 | 209,0 |
| 2,5 | 0,153 | 0,0596 | 0,164 | 201,0 |
| 3,0 | 0,118 | 0,0307 | 0,122 | 194,5 |
| 3,5 | 0,0911 | 0,0146 | 0,092 | 189,0 |
| 4,0 | 0,0704 | 0,0060 | 0,071 | 184,5 |
| 4,5 | 0,0549 | 0,0017 | 0,055 | 181,5 |
| 5,0 | 0,0434 | -0,0002 | 0,043 | 180,0 |
| 5,5 | 0,0350 | -0,0008 | 0,035 | 178,5 |
| 6,0 | 0,0287 | -0,0009 | 0,029 | 178,5 |
| 6,5 | 0,0240 | -0,0007 | 0,024 | 178,5 |
| 7,0 | 0,0205 | -0,0005 | 0,021 | 178,5 |
| 7,5 | 0,0177 | -0,0003 | 0,018 | 179,0 |
| 8,0 | 0,0155 | -0,0002 | 0,016 | 179,0 |
| 8,5 | 0,0137 | 0,0001 | 0,014 | 180,0 |
| 9,0 | 0,0123 | 0,0000 | 0,012 | 180,0 |
| 9,5 | 0,0110 | 0,0000 | 0,011 | 180,0 |
| 10,0 | 0,0100 | 0,0000 | 0,010 | 180,0 |

Так как знание распределения тока в этом случае может пригодиться на практике, даем табл. 3, по которой был построен рис. 27.

Сравнение рис. 18, с одной стороны, и рис. 25 и 26, с другой — дает представление об искажении, которое получается в магнитном поле, когда мы переходим от случая всестороннего окружения кабеля проводящей средой к случаю, когда только одно полупространство является проводящим.

§ 15. ПАЛЕТКИ НОРМАЛЬНОГО ПОЛЯ
ПРЯМОЛИНЕЙНОГО КАБЕЛЯ

На рис. 28 и 29 даны кривые, изображающие величины $a_y^{(0)}$, $b_y^{(0)}$ и $a_z^{(0)}$, $b_z^{(0)}$, в логарифмическом масштабе. Эти кривые позволяют проанализировать полученные промеры, проверить, является ли поле нормальным, и если так, то определить величину κ , из которой можно вычислить сопротивление среды. Точно так же можно выделить

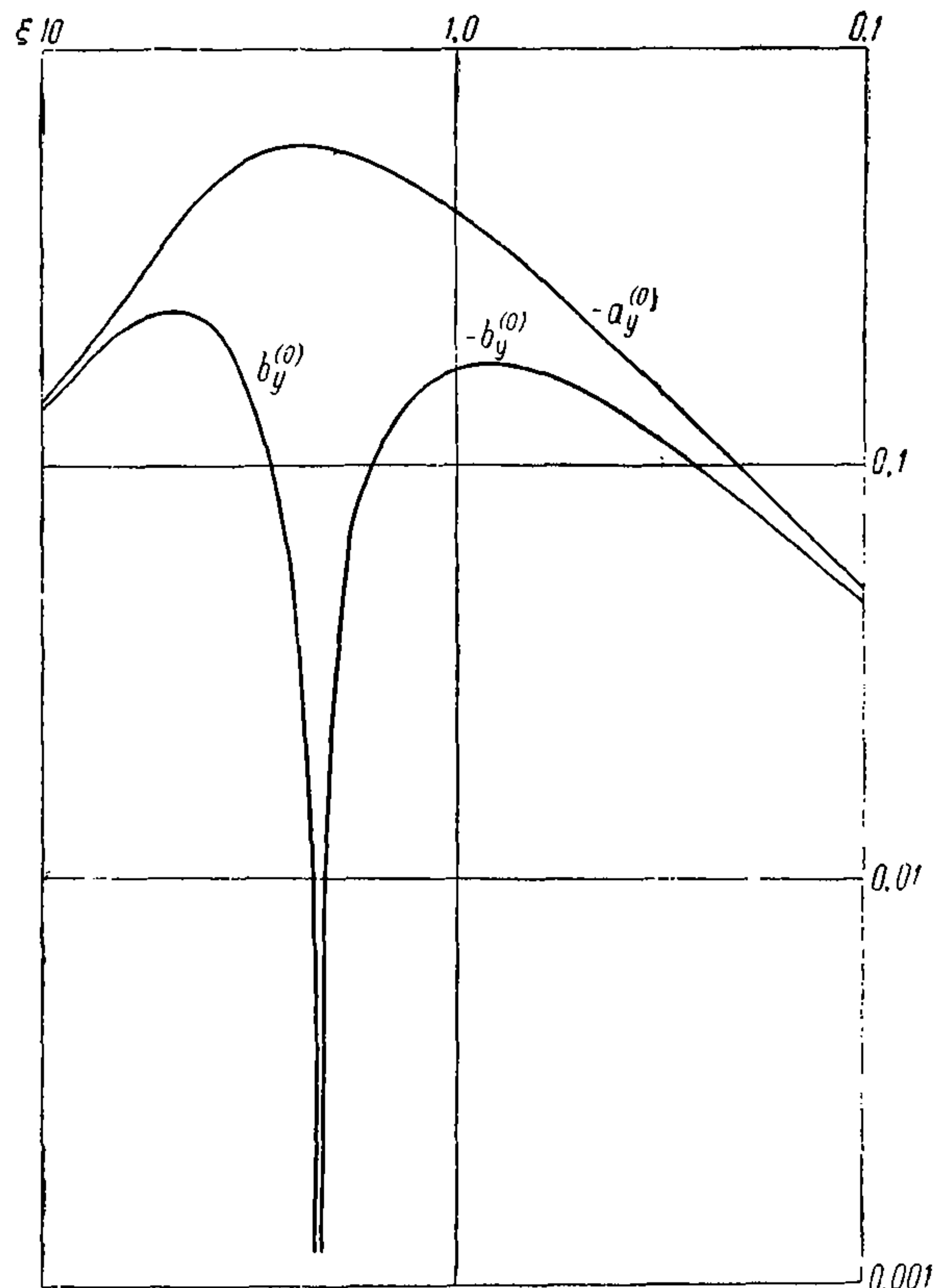


Рис. 28.

при помощи этих кривых местные аномалии, после чего последние можно подвергнуть дальнейшему изучению.

Для этого нужно обработать наблюдения следующим образом. Предположим, что для всех точек профиля можно считать $z = 0$. Пусть измерения по профилю, поперечному к кабелю, дали вещественные и мнимые составляющие величин H_y и H_z ; назовем эти величины соответственно α_y , β_y , α_z , β_z , они нам известны в микрогауссах как функции расстояний от кабеля в километрах.

Вычисляем величины

$$a'_y = \frac{y\alpha_y}{2I_{\sim}}; \quad b'_y = \frac{y\beta_y}{2I_{\sim}};$$

$$a'_z = \frac{y\alpha_z}{2I_{\sim}}; \quad b'_z = \frac{y\beta_z}{2I_{\sim}}.$$

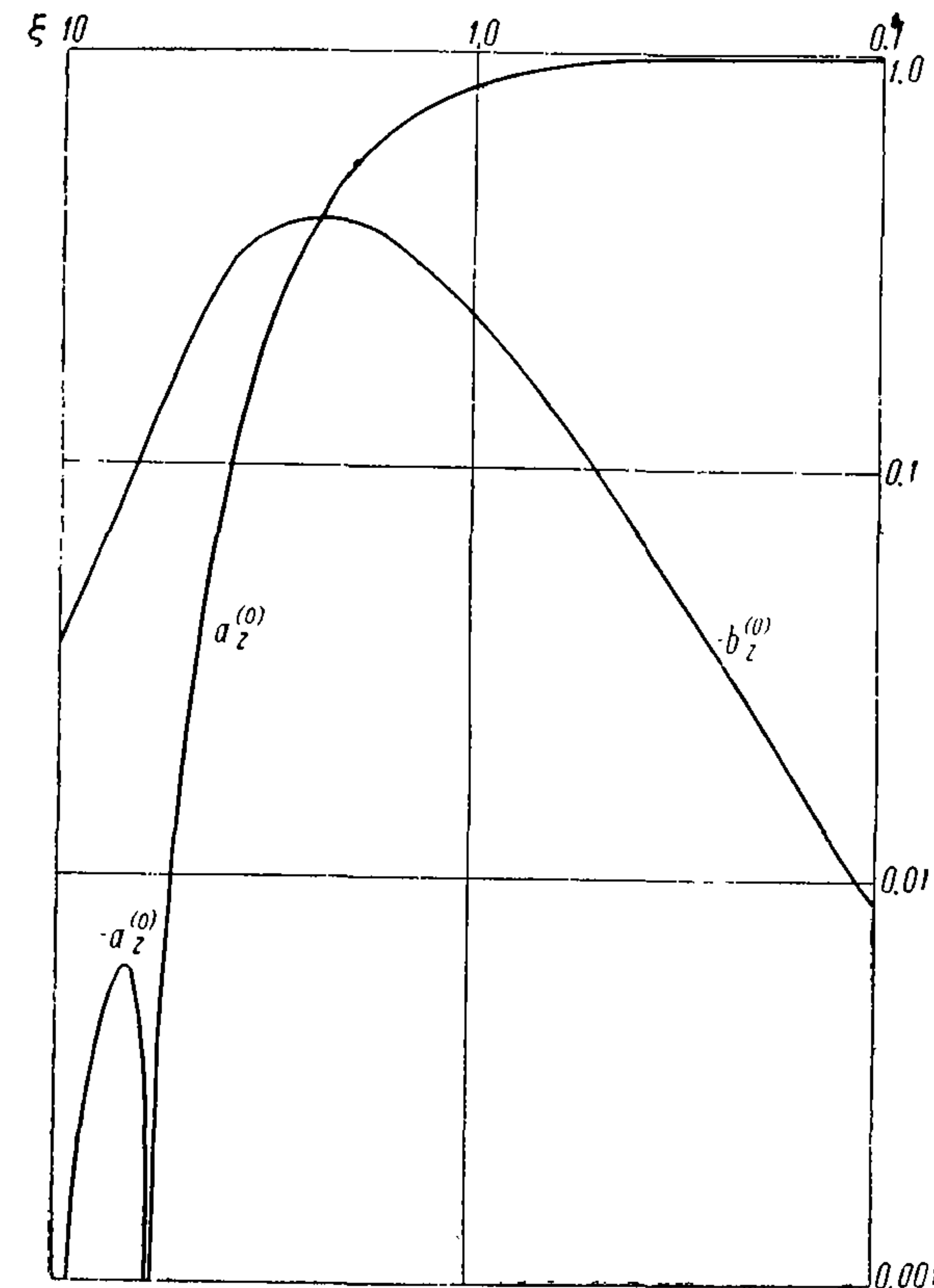


Рис. 29.

Переводя в абсолютные единицы, мы имеем

$$\frac{y\alpha_y}{2I_{\sim}} = c \frac{y\alpha_y}{2I_{\sim}}$$

(где $[y]$ см; $[\alpha_y]$ гс; $[I_{\sim}]$ ед. СГСЕ), в то время как теоретически должно быть по формуле (132) при $z = 0$

$$\frac{cy}{2I_{\sim}} \operatorname{Re} H_y^{(0)} = a_y^{(0)}.$$

Отсюда следует, что если измерения правильны и поле нормально (т. е. земля однородна), то должно быть

$$a'_y(v) = a_y^{(0)}(\xi) = a_y^{(0)}(\kappa y),$$

и аналогично для b'_y , a'_z , b'_z .

Для сравнения теоретических величин с экспериментальными наносим данные опыта, например a'_y , на логарифмическую бумагу, откладывая a'_y вниз, а y влево. Получающаяся кривая будет иметь уравнение

$$\lg a'_y = F(\lg y),$$

теоретическая же кривая $a_y^{(0)}$ имеет уравнение

$$\lg a_y^{(0)} = f(\lg \xi) = f(\lg \kappa + \lg y).$$

Если поле нормально, то функции f и F должны совпадать, и мы сможем совместить кривые, перемещая теоретическую кривую по оси ξ на $\lg \kappa$, другими словами, совмещенный с экспериментальной кривой теоретический чертеж (палетка) своей абсциссой $\xi = 1,0$ укажет на оси абсцисс экспериментальной кривой точку, для которой будет иметь место

$$\lg y_1 = \lg \kappa^{-1}.$$

Технически выполнение этой операции очень просто, если чертежи (см. рис. 28, 29) перечерчены на восковку с сохранением координатных линий. Средняя вертикальная линия ($\xi = 1$) и является индикатором. Конечно, и боковые линии ($\xi = 0,1; 10$) также могут служить индикаторами, давая

$$\lg y_{10} = \lg 10\kappa^{-1};$$

$$\lg y_{0,1} = \lg 0,1\kappa^{-1}.$$

Методу палетки следует отдать предпочтение перед какими бы то ни было иными расчетами, так как при совмещении кривых автоматически исправляются случайные погрешности наблюдений и, главное, искомая величина определяется сразу по всей совокупности наблюдаемых данных. Кроме того, пользуясь палеткой, можно сразу видеть, является ли поле хотя бы приближенно нормальным; более или менее удовлетворительное совпадение всех четырех кривых является подтверждением нормальности поля, при этом κ должно для всех кривых получаться близким к одному и тому же значению. При некотором навыке можно и на «плохих» кривых находить приближенное значение κ и оценивать возможную погрешность. Кривые, не подходящие под теоретические, или дающие очень большие расхождения в определении κ по разным составляющим, свидетельствуют о резкой неоднородности почвы.

Сосредоточенные нарушения однородности почвы, например рудные залежи, должны дать локализованные аномалии в ходе кривых. На остальном протяжении профиля, а также на соседних профилях, проходящих вне аномалии, ход кривых может оказаться достаточно нормальным. Подобное совмещение, если оно удастся достаточно

уверенно, позволяет выделить аномальное поле, так как можно сразу отсчитать для каждой абсциссы значение нормального поля и вычесть его из значения аномального. Проведя это для всех четырех кривых, будем иметь все элементы искомой аномалии. Может случиться, что при неоднородности общей геологической структуры района нормальных профилей не получится; тогда можно для выделения местных аномалий воспользоваться экспериментальным нормальным полем данного района или участка, снятым по профилям, не пересекающим местные аномалии.

Если нет надежной градуировки показаний измерительного прибора в микрогауссах, то можно обойтись и без нее. Умножаем при обработке наблюдений показания измерительного прибора (приведенные к одному и тому же числу витков рамки) на множитель $y/I \sim$. Полученные таким образом величины a' и b' будут пропорциональны прежним, а на логарифмическом графике это скажется перемещением всей кривой вверх или вниз. Палетку тоже придется поднимать или опускать для совмещения кривых, и из величины вертикального перемещения можно вывести множитель, переводящий условные показания в микрогауссы. Заметная разница в этом смещении для горизонтальной и вертикальной составляющих, которые часто приходится мерить при разных числах витков на рамке, заставляет подозревать неточность в переводных коэффициентах или структурную неоднородность, например два слоя.

Метод длинного прямолинейного кабеля в связи с тем, что указанной методикой обработки наблюдений может быть в некоторых случаях использован для составления карты сопротивлений. Если кабель более или менее перпендикулярно пересекает выходы мощных пластов 1, 2 и т. д. (рис. 30), то поперечные профили 1, 2 и т. д., протянутые на расстояния, не превышающие предполагаемые мощности выходов, дадут различные значения κ , более или менее соответствующие удельным сопротивлениям пластов 1, 2 и т. д. В этом случае выгоднее делать измерения систематически по продольным профилям I, II и т. д., и только местами, по возможности в середине пластов, увязывать их поперечными ходами. При большом числе близко расположенных друг к другу продольных профилей и надежных промерах это может оказаться излишним.

Для определения мелких по размерам неоднородностей и неглубокой структуры, очевидно, нельзя отходить от кабеля слишком далеко; с другой стороны, определение κ палеткой более или менее достоверно, если наибольшее приведенное расстояние ξ будет не меньше

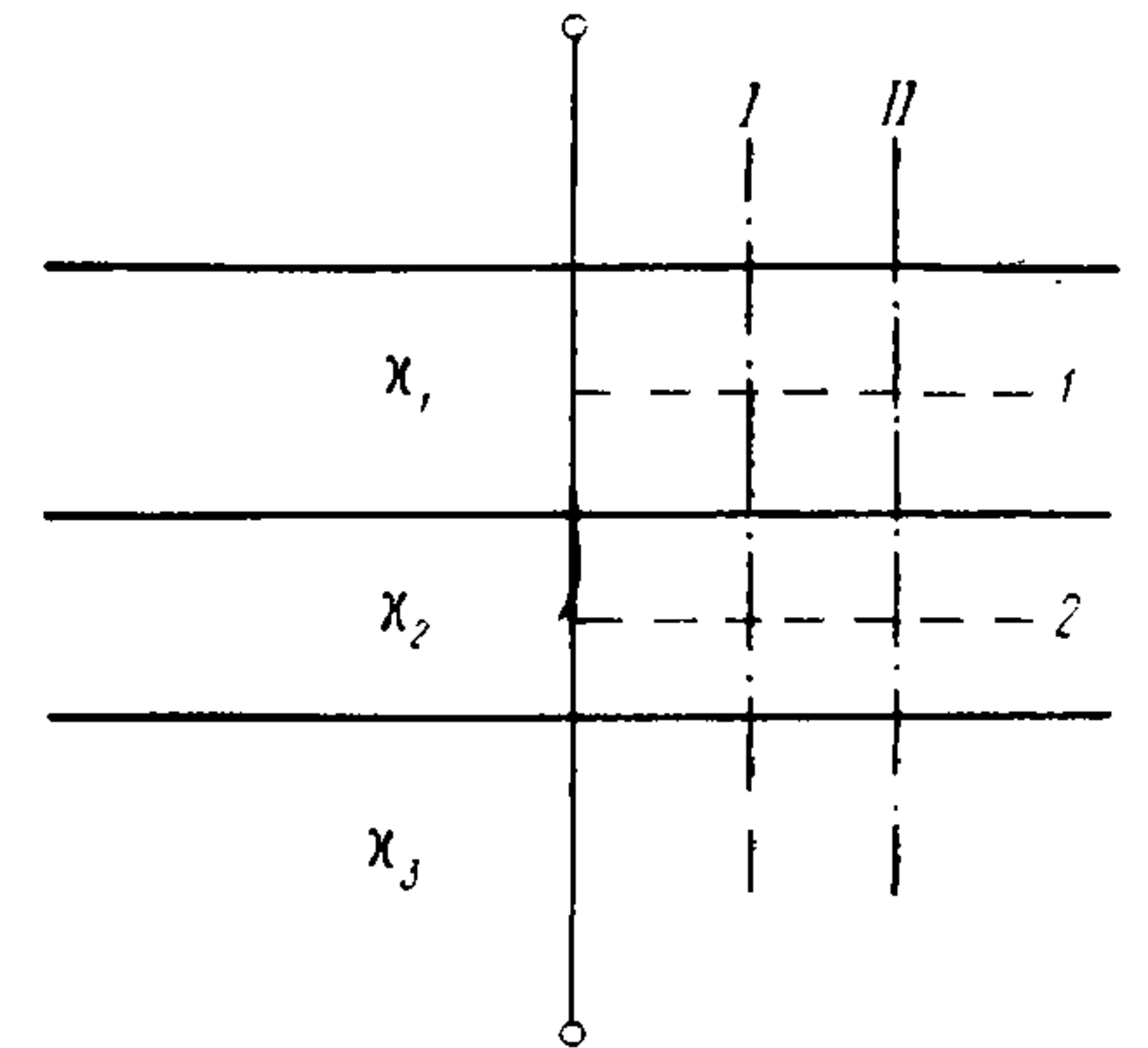


Рис. 30.

трех, потому что тогда на кривых получаются те особенности, по которым легче всего устанавливать палетку (максимумы $a_y^{(0)}$ и $b_z^{(0)}$, резкое спадение $a_z^{(0)}$ и перемена знака $b_y^{(0)}$). С этим затруднением легко справиться, если можно менять частоту; при достаточном ее увеличении можно при данном y сделать x , а тем самым и ξ достаточно большими.

Так как с удалением от кабеля измеряемое магнитное поле определяется токами, идущими в большом объеме и на большой глубине, то для исследования глубоко лежащих слоев нужно снижать частоту так, чтобы большим значениям y соответствовали значения ξ не слишком большие; к тому же и проникновение тока в глубину улучшается при понижении частоты. Для исследования верхних слоев нужно, наоборот, уменьшать расстояния и увеличивать частоту.

Этот метод был испробован в нашей электроразведочной практике С. М. Шейнманном. Ему удалось получить достаточно характерные кривые и интерпретировать их палетками. Методом, иллюстрированным рис. 30, он смог выделить угленосную свиту, обладающую большим сопротивлением вкрест простирания, из вмещающей безугольной толщи, обладающей малым сопротивлением.

Для интерпретации можно использовать и фазовые диаграммы рис. 25 и 26. Измерив $\alpha_y, \beta_y, \alpha_z, \beta_z$ можно построить комплексные векторы $\alpha_y + i\beta_y$ и $\alpha_z + i\beta_z$; наложив на этот чертеж соответственную фазовую диаграмму так, чтобы начало координат и оси совпали, можно по пересечению с кривой по отметкам на кривой определить ξ ; так как y известно, то отсюда следует x . Проведя такое определение x для обеих составляющих H_y и H_z и для ряда точек профиля, мы должны получить более или менее совпадающие значения; систематическое изменение x вдоль профиля свидетельствует о неоднородности земли. Приемы интерпретации, намеченные здесь на основании почти только теоретических соображений, несомненно, нуждаются в проверке их пригодности и в развитии на практике.

§ 16. ТЕОРЕМА ВЗАИМНОСТИ ДЛЯ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ

Задачи, рассматриваемые в настоящей главе, относятся к разряду плоских задач или задач в двух измерениях, поскольку все рассматриваемые величины являются функциями только y и z и от x не зависят. Если источником поля является бесконечно длинный прямолинейный ток и границы сред являются цилиндрическими поверхностями с образующими, параллельными оси X , то подобные решения $[A_x(y, z), A_y = A_z = 0]$ возможны, так как граничные условия (22) требуют непрерывности тангенциальной составляющей A , т. е. A_x , в то время как условие, касающееся $\text{div } A$ удовлетворяется само собой, в силу

$$\text{div } A = \frac{\partial A_x}{\partial x} = 0.$$

Особенность, которую должно иметь A_x около тока, выражается в случае плоской задачи соотношениями

$$A_x \approx -\frac{2I_{\sim}}{c} \ln r \quad (147)$$

или

$$A_x \approx \frac{2I_{\sim}}{c} K_0(\kappa r),$$

что, как мы видели уже в § 9, равносильно. В этом параграфе мы рассмотрим так называемую теорему взаимности, заключающуюся в утверждении, что если мы знаем вектор-потенциал в точке Q какой-нибудь среды q , когда поле вызывается током, след которого на плоскости YZ находится в среде p в точке P , то вектор-потенциал тока той же силы и фазы, проходящего в точке Q , даст то же самое значение вектор-потенциала в точке P .

Мы представляем себе ряд соприкасающихся сред $(a), (b), \dots, (p), \dots, (q)$ (рис. 31), разделенных границами, следы которых YZ изображаются контурами L_{ab} и т. д.

Области, соответствующие средам на чертеже, обозначим S_a, S_b и т. д. В каждой области (S_s) вектор-потенциал удовлетворяет уравнению (мы обозначаем A_x просто A)

$$\Delta A_s = k_s^2 A_s, \quad (148)$$

а на границе двух областей мы имеем

$$A_a = A_b; \quad (149)$$

$$\frac{\partial A_a}{\partial n} = \frac{\partial A_b}{\partial n}. \quad (150)$$

Выделяем кружками точки P и Q , тогда и для оставшихся частей областей (p) и (q) уравнения вида (148) будут иметь место. Доказательство основано на теореме Грина, которая утверждает, что для двух скалярных функций, непрерывных и имеющих непрерывные первые и конечные вторые производные в некоторой области, справедлива формула

$$\int (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) d\tau = \int \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS,$$

где нормаль у интеграла по поверхности взята внешняя. Для плоской задачи мы ограничиваем объем, к которому применяем теорему, двумя

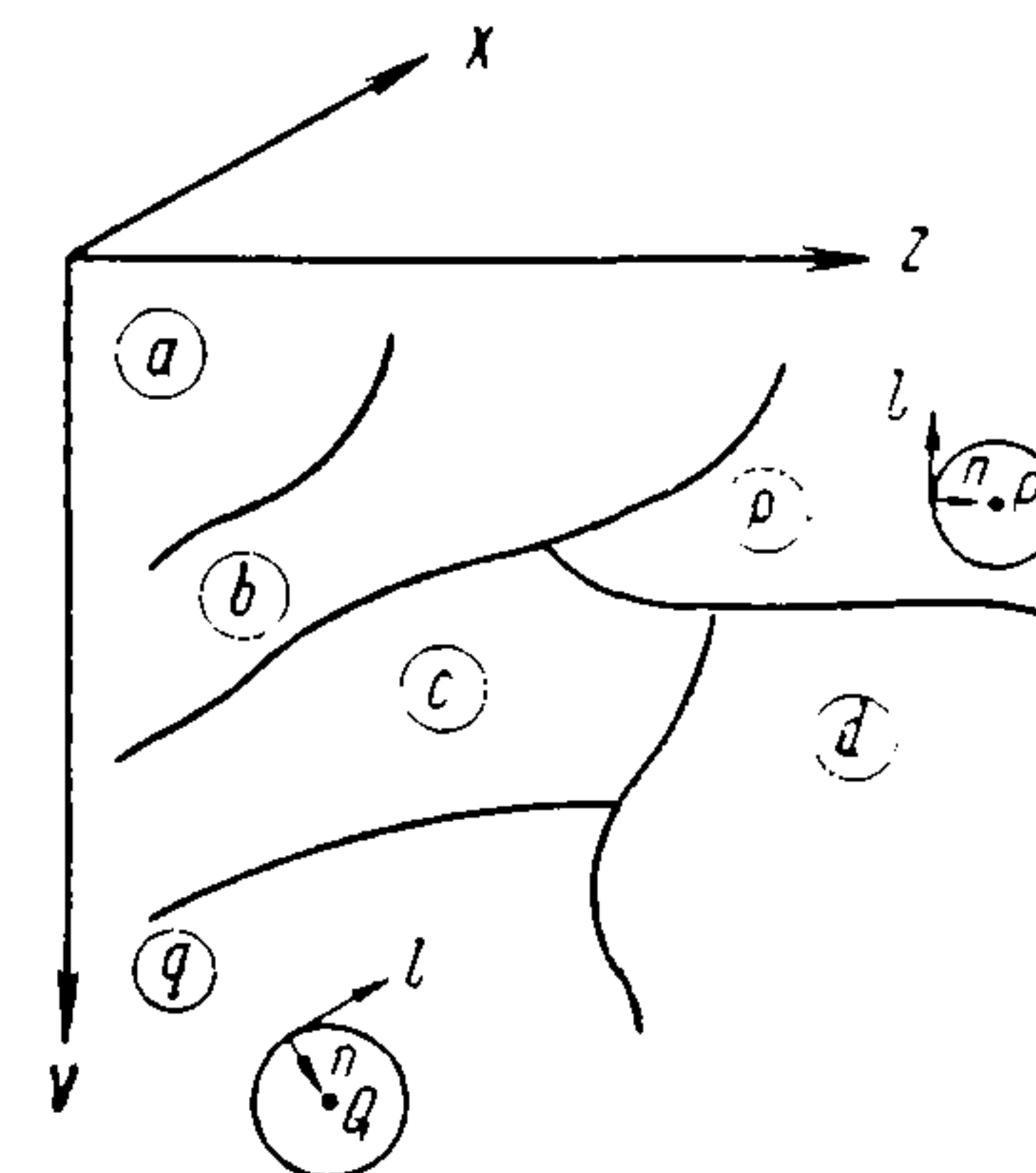


Рис. 31.

плоскостями, параллельными YZ с расстоянием, равным единице, и каким-нибудь контуром или контурами в плоскости YZ , которым соответствуют цилиндрические поверхности с образующими, параллельными оси X . Так как подынтегральные выражения по предположению от x не зависят и так как для ограничивающих объем плоскостей можно написать символически

$$\frac{\partial}{\partial n} = \pm \frac{\partial}{\partial x} = 0,$$

то интегрируя по x и сохраняя справа только интегралы, соответствующие контурам, получаем

$$\int_S (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi) dS = \int_L \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dl \quad (151)$$

и можем ограничиться рассмотрением плоскости YZ ; L — совокупность контуров, ограничивающих данную область S .

Вместо φ и ψ подставим функции $A^{(P)}$ и $A^{(Q)}$, являющиеся решениями задач при токе в кружках P и Q соответственно. В силу граничных условий (149) мы имеем, что $A^{(P)}$ и $A^{(Q)}$ непрерывны и имеют непрерывные тангенциальные (к граничным контурам) производные; по (150) нормальные производные также непрерывны, и поэтому несмотря на наличие контуров раздела, формула (151) может быть применена ко всей плоскости YZ за исключением кружков P и Q . Что касается бесконечно удаленной внешней границы, то мы будем утверждать, что интеграл по L_∞ равен нулю.

Подробное доказательство опустим и сошлемся на рассмотренные уже частные случаи, из которых следует, что если одна из сред a , $b \dots$ является проводящей и простирающейся в бесконечность, то $A^{(P)}$, $A^{(Q)}$, $\frac{\partial A^{(P)}}{\partial n}$ и $\frac{\partial A^{(Q)}}{\partial n}$ убывают с расстоянием от кабеля достаточно сильно. Так как во всей рассматриваемой плоскости имеют место уравнения вида

$$\Delta A_a^{(P)} = k_a^2 A_a^{(P)}; \quad \Delta A_a^{(Q)} = k_a^2 A_a^{(Q)},$$

то умножая первое на $A_a^{(Q)}$ и вычитая из второго, умноженного на $A_a^{(P)}$, получаем

$$A_a^{(P)} \Delta A_a^{(Q)} - A_a^{(Q)} \Delta A_a^{(P)} = 0,$$

так что интеграл в левой части (151) равен нулю. В правой части остаются два интеграла

$$\int_{L_P} \left(A_p^{(Q)} \frac{\partial A_p^{(P)}}{\partial n} - A_p^{(P)} \frac{\partial A_p^{(Q)}}{\partial n} \right) dl + \int_{L_Q} \left(A_q^{(P)} \frac{\partial A_q^{(Q)}}{\partial n} - A_q^{(Q)} \frac{\partial A_q^{(P)}}{\partial n} \right) dl = 0. \quad (152)$$

Заметим, что направления l , n , X (рис. 31) составляют правую систему координат, и потому из

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$$

следует

$$H_l = \frac{\partial A_x}{\partial n} - \frac{\partial A_n}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial n}.$$

Рассмотрим интеграл

$$R_1 = \int_{L_P} A_p^{(P)} \frac{\partial A_p^{(Q)}}{\partial n} dl = \int_{L_P} A_p^{(P)} H_l^{(Q)} dl,$$

около точки P мы можем положить

$$A_p^{(P)} = -\frac{2I_\sim}{c} \ln r + f,$$

где f — конечная функция; r — расстояние от данной точки контура до P , т. е. радиус кружка P .

Тогда мы имеем

$$R_1 = -\frac{2I_\sim}{c} \ln r \int_{L_P} H_l^{(Q)} dl + \int_{L_P} f H_l^{(Q)} dl.$$

Когда r стремится к нулю, второй интеграл исчезает, так как, преобразуя его к интегралу по площади круга, мы имеем

$$\int_{L_P} f H_l^{(Q)} dl = \int_P \int_P \left[\frac{\partial (f H_z^{(Q)})}{\partial y} - \frac{\partial (f H_y^{(Q)})}{\partial z} \right] dS,$$

так как ни f , ни $H^{(Q)}$ около точки P особенностей не имеют, то подынтегральная функция конечна, а область стремится к нулю как $2\pi r^2$. Что же касается первого члена, то

$$\int_{L_P} H_l^{(Q)} dl = \frac{4\pi}{c} \int_P J_p^{(Q)} dS,$$

где $J_p^{(Q)}$ — плотность тока в пределах кружка P , создаваемого полем тока в Q .

Эта плотность тока конечна, и предел, к которому стремится этот интеграл, есть

$$\frac{4\pi}{c} J_p^{(Q)} \cdot 2\pi r^2,$$

где $J_p^{(Q)}$ — значение $J_p^{(Q)}$ в точке P .

Поэтому и первый член в R_1 стремится к нулю, так как

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 \ln r = 0;$$

при рассмотрении интеграла

$$R_2 = - \int_{L_P} A_p^{(Q)} \frac{\partial A_p^{(P)}}{\partial n} dl = - \int_{L_P} A_p^{(Q)} H_p^{(P)} dl$$

мы можем положить

$$A_p^{(Q)} = A_p^{(Q)} + \alpha,$$

где α стремится к нулю с r , а $A_P^{(Q)}$ есть значение $A_P^{(Q)}$ в точке P .

Тогда

$$R_2 = - A_P^{(Q)} \int_{L_P} H_l^{(P)} dl - \int_{L_P} \alpha H_l^{(P)} dl.$$

Так как

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{L_P} H_l^{(P)} dl = \frac{4\pi I_{\sim}}{c}$$

конечно, то

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{L_P} \alpha H_l^{(P)} dl = 0,$$

так как по сравнению с предыдущими, все элементы интеграла умножены на исчезающую величину, таким образом,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{L_P} \left(A_P^{(Q)} \frac{\partial A_P^{(Q)}}{\partial n} - A_P^{(P)} \frac{\partial A_P^{(Q)}}{\partial n} \right) dl = - \frac{4\pi I_{\sim}}{c} A_P^{(Q)}.$$

Совершенно так же докажем, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{L_Q} \left(A_Q^{(P)} \frac{\partial A_Q^{(Q)}}{\partial n} - A_Q^{(P)} \frac{\partial A_Q^{(P)}}{\partial n} \right) dl = \frac{4\pi I_{\sim}}{c} A_Q^{(P)}.$$

Таким образом, получаем из (152), что, если стремиться радиусы кружков P и Q к нулю, в пределе получается

$$\frac{4\pi I_{\sim}}{c} (A_Q^{(P)} - A_P^{(Q)}) = 0, \quad (153)$$

что и доказывает теорему.

В следующем параграфе мы дадим основной материал для расчета вектор-потенциала и магнитного поля, наблюдаемого на поверхности земли, если ток находится на глубине h под землей. На основании только что доказанной теоремы мы можем применить те же методы расчета для вычисления вектор-потенциала поля кабеля, лежащего на поверхности земли, в точках под землей.

§ 17. ДВЕ СРЕДЫ; КАБЕЛЬ ПОД ЗЕМЛЕЙ

Применительно к поискам месторождений руд желательно иметь оценку того ослабления, которое испытывает вторичное магнитное поле, т. е. поле тока, индуктированного в руде, и наблюдаемое на поверхности земли. Это ослабление происходит вследствие поглощения в проводящей земле, причем, если наблюдения ведутся на расстояниях, небольших по сравнению с длиной волны в среде, то применение результатов § 8 может дать только грубую ориентировку.

Мы рассмотрим случай прямолинейного кабеля, расположенного на глубине h под землей. Чтобы не вычислять все заново, воспользуемся формулой (101), переименовав местами k и k_0 , так что на место μ_0 встанет μ и наоборот, причем после замены мы снова положим $k_0 = 0$ и направим ось Z вниз (рис. 32). Тогда подынтегральное выражение в (100) получит вид

$$W = (e^{-|h-z|\mu} + e^{-(h+z)\mu}) \frac{\cos \lambda y}{\mu} + \frac{2(\lambda^2 - \lambda\mu)}{k^2} \cdot \frac{e^{-(h+z)\mu}}{\mu} \cos \lambda y. \quad (154)$$

При $z < h$, т. е. вблизи поверхности земли, имеем

$$|h-z| = h-z$$

и выражение W приводится к виду

$$W = \cos \lambda y \frac{e^{-h\mu}}{k^2 \mu} [k^2 e^{z\mu} + e^{-z\mu} (k^2 + 2\lambda^2 - 2\lambda\mu)].$$

Для вычисления магнитного поля нам еще понадобятся

$$-\frac{\partial W}{\partial y} = \lambda \sin \lambda y \frac{e^{-h\mu}}{k^2 \mu} [k^2 e^{z\mu} + e^{-z\mu} (k^2 + 2\lambda^2 - 2\lambda\mu)];$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \cos \lambda y \frac{e^{-h\mu}}{k^2} [k^2 e^{z\mu} - e^{-z\mu} (k^2 + 2\lambda^2 - 2\lambda\mu)].$$

Полагая в этих выражениях $z=0$ и подставляя в (100), получаем после простых выкладок

$$(A_x)_{z=0} = \frac{4I_{\sim}}{ck^2} \int_0^{\infty} e^{-h\mu} (\mu - \lambda) \cos \lambda y d\lambda; \quad (155)$$

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} \right)_{z=0} = (H_y)_{z=0} = \frac{4I_{\sim}}{ck^2} \int_0^{\infty} e^{-h\mu} (\mu - \lambda) \cos \lambda y \lambda d\lambda; \quad (156)$$

$$-\left(\frac{\partial A_x}{\partial y} \right)_{z=0} = (H_z)_{z=0} = \frac{4I_{\sim}}{ck^2} \int_0^{\infty} e^{-h\mu} (\mu - \lambda) \sin \lambda y \lambda d\lambda. \quad (157)$$

В этих интегралах мы положим

$$\cos \lambda y = \frac{e^{i\lambda y} + e^{-i\lambda y}}{2};$$

$$\sin \lambda y = \frac{e^{i\lambda y} - e^{-i\lambda y}}{2i}$$

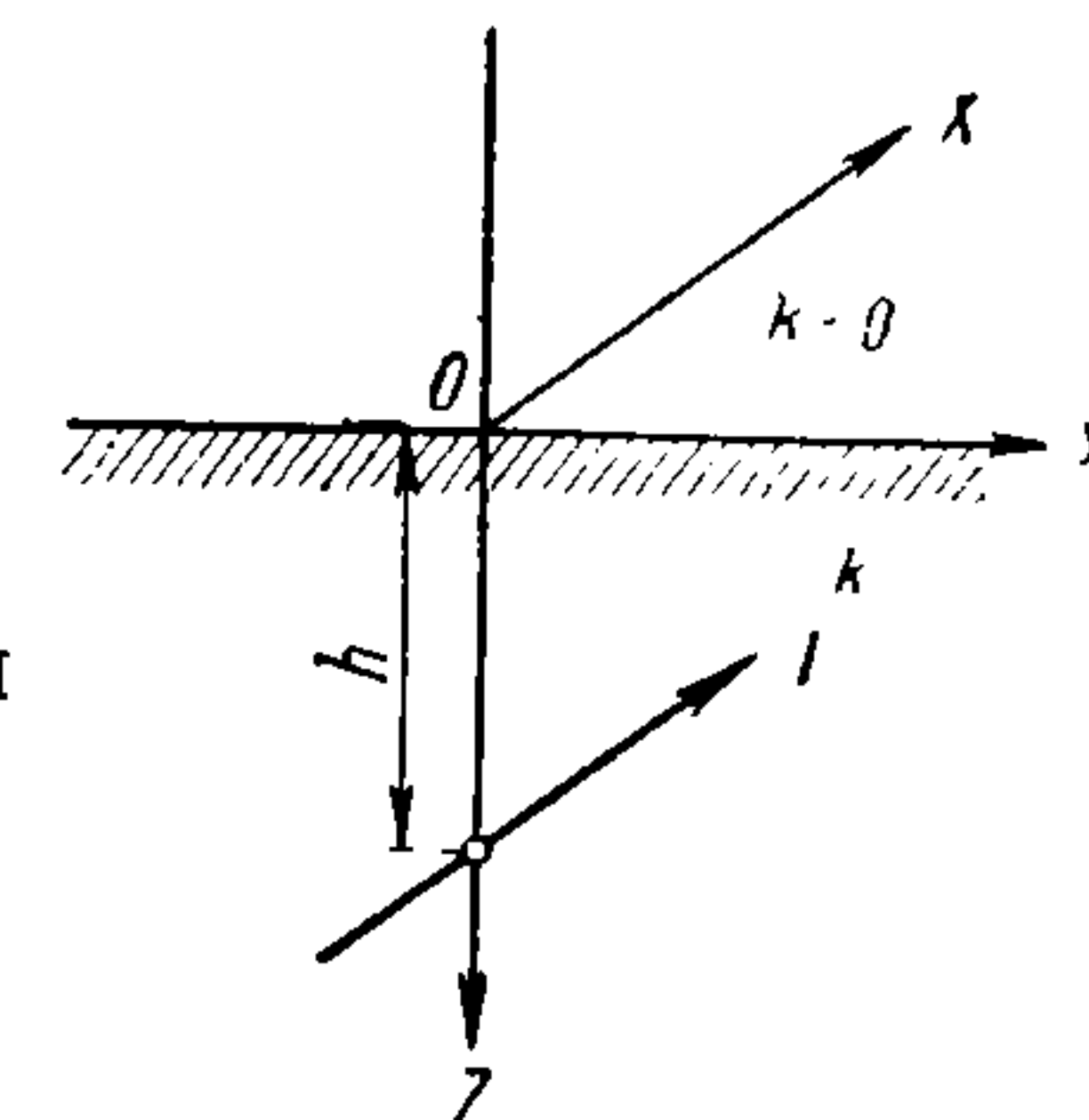


Рис. 32.

и после простых преобразований получим формулы

$$(A_x)_{z=0} = \frac{2I_{\sim}}{ck^2} \left[\int_0^{\infty} e^{-h\mu+i\lambda y} (\mu - \lambda) d\lambda + \int_0^{\infty} e^{-h\mu-i\lambda y} (\mu - \lambda) d\lambda \right];$$

$$(H_y)_{z=0} + i(H_z)_{z=0} = \frac{4I_{\sim}}{ck^2} \int_0^{\infty} e^{-h\mu+i\lambda y} (\mu - \lambda) \lambda d\lambda;$$

$$(H_y)_{z=0} - i(H_z)_{z=0} = \frac{4I_{\sim}}{ck^2} \int_0^{\infty} e^{-h\mu-i\lambda y} (\mu - \lambda) \lambda d\lambda.$$

Обозначая

$$F(y) = \frac{1}{k^2} \int_0^{\infty} e^{-(h\mu+i\lambda y)} (\mu - \lambda) d\lambda,$$

мы можем написать

$$(A_x)_{z=0} = \frac{2I_{\sim}}{c} [F(y) + F(-y)] \quad (158)$$

и, вводя обозначение

$$\Phi(y) = \frac{1}{k^2} \int_0^{\infty} e^{-(h\mu+i\lambda y)} (\mu - \lambda) \lambda d\lambda,$$

можем написать для составляющих магнитного поля у поверхности земли

$$(H_y)_{z=0} = \frac{2I_{\sim}}{c} [\Phi(y) + \Phi(-y)]; \quad (159)$$

$$(H_z)_{z=0} = i \frac{2I_{\sim}}{c} [\Phi(y) - \Phi(-y)]. \quad (160)$$

Вектор-потенциал и поле у нас вычисляются для той среды, где находится кабель, т. е. для земли, но в силу непрерывности их на границе эти же значения имеют место и в воздухе у самой земли.

Изучение интегралов F и Φ проведем параллельно.* Первая подстановка

$$\lambda = \frac{k}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right); \quad \mu = \frac{k}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right)$$

вместе с обозначениями $h + iy = re^{i\alpha}$; $h - iy = re^{-i\alpha}$ (рис. 33) приводит к выражениям

$$F(y) = F^*(\alpha) = \frac{1}{2} \int_1^{\infty} e^{-\frac{kr}{2} \left(te^{i\alpha} + \frac{1}{te^{i\alpha}} \right)} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt;$$

$$\Phi(y) = \Phi^*(\alpha) = \frac{k}{4} \int_1^{\infty} e^{-\frac{kr}{2} \left(te^{i\alpha} + \frac{1}{te^{i\alpha}} \right)} \left(1 - \frac{1}{t^4} \right) dt.$$

* Основные подстановки и ход рассуждений принадлежит проф. В. А. Фоку, который еще в 1932 г. занимался по просьбе автора этим вопросом и любезно предоставил свои выкладки.

Далее вводим новую переменную подстановкой $u = te^{i\alpha}$ и обозначение $kr = \rho$, причем мы помним, что $\text{Re } \rho = r \text{Re } k > 0$, после чего получаем

$$F^*(\alpha) = \frac{1}{2} \int_{e^{i\alpha}}^{\infty} e^{-\frac{\rho}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right)} \left(\frac{1}{u} + \frac{e^{2i\alpha}}{u^3} \right) du;$$

$$\bar{\Phi}^*(\alpha) = \frac{k}{4} \int_{e^{i\alpha}}^{\infty} e^{-\frac{\rho}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right)} \left(1 - \frac{e^{3i\alpha}}{u^4} \right) du.$$

Избирая путь интегрирования в плоскости комплексной переменной u , как показано на рис. 34 пунктиром, и полагая на участке от $e^{i\alpha}$ до 1

$$u = e^{i\varphi},$$

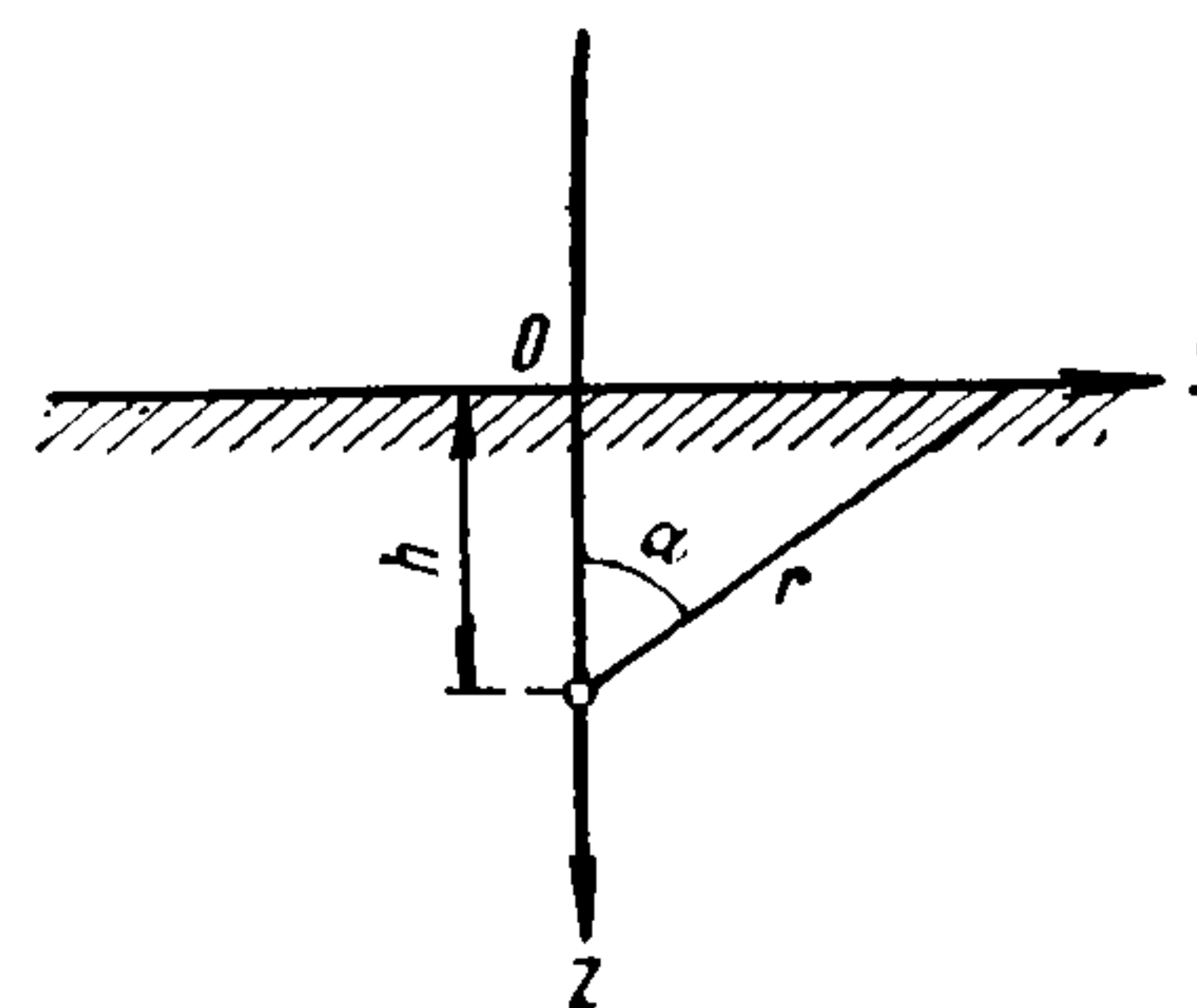


Рис. 33.

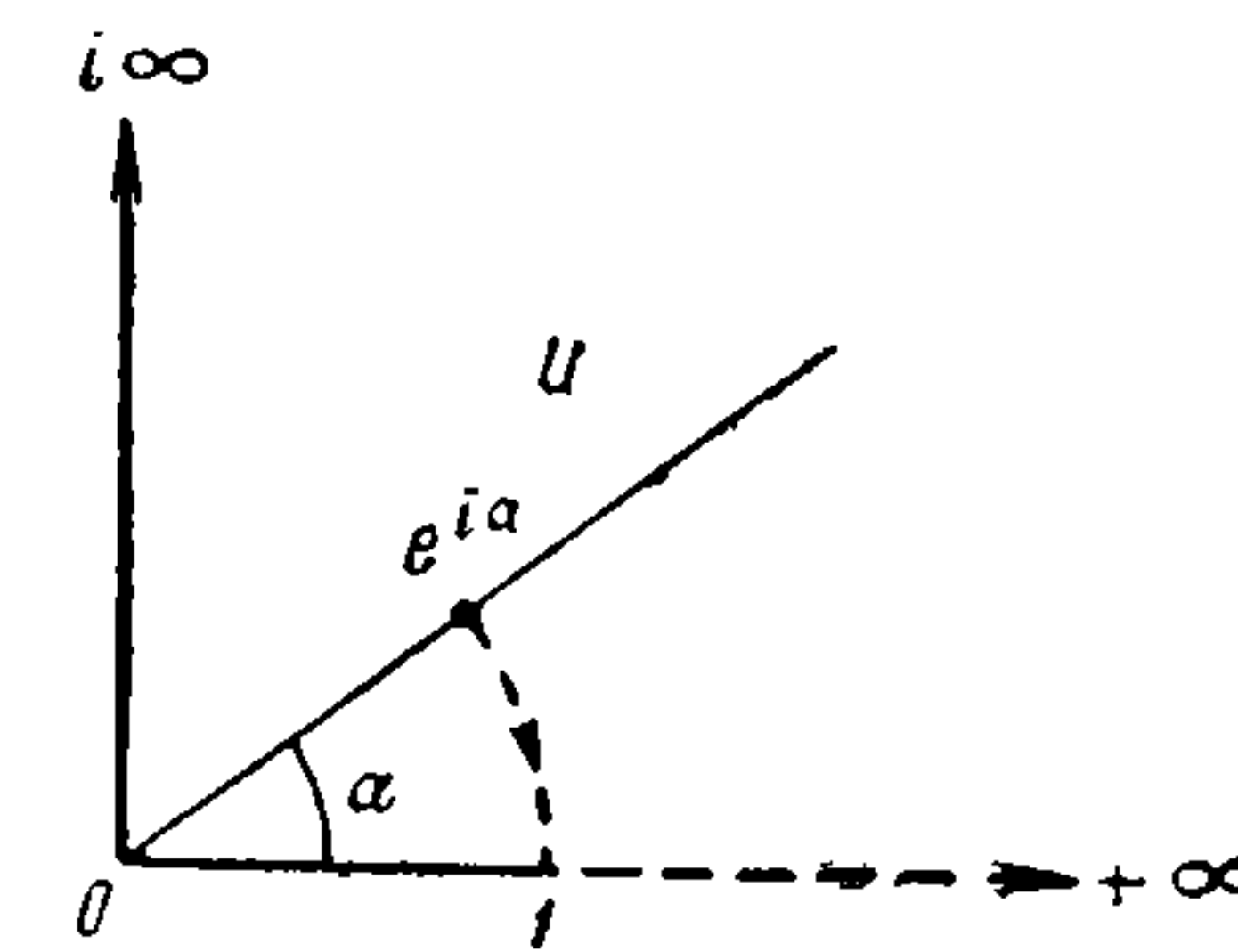


Рис. 34.

после необходимых преобразований приводим интегралы к виду

$$F^*(\alpha) = -\frac{i}{2} \int_0^{\alpha} e^{-\rho \cos \varphi} d\varphi - \frac{ie^{2i\alpha}}{2} \int_0^{\alpha} e^{-\rho \cos \varphi} e^{-2i\varphi} d\varphi + \frac{1}{2} M_1 + \frac{e^{2i\alpha}}{2} M_3; \quad (161)$$

$$\begin{aligned} \Phi^*(\alpha) = & -\frac{ike^{-i\alpha}}{4} \int_0^{\alpha} e^{-\rho \cos \varphi} e^{-i\varphi} d\varphi + \frac{ike^{3i\alpha}}{4} \int_0^{\alpha} e^{-\rho \cos \varphi} e^{-3i\varphi} d\varphi + \\ & + \frac{ke^{-i\alpha}}{4} M_0 - \frac{ke^{3i\alpha}}{4} M_4, \end{aligned} \quad (162)$$

где M_n означают интегралы вида

$$M_n(\rho) = \int_1^{\infty} e^{-\frac{\rho}{2} \left(u + \frac{1}{u} \right)} \frac{du}{u^n}.$$

Эти интегралы сводятся к известным функциям; интегрируя по частям, имеем

$$M_n = -\frac{1}{n-1} \int_1^{\infty} e^{-\frac{\rho}{2} \left(u + \frac{1}{u}\right)} du^{-(n-1)} =$$

$$= -\frac{1}{n-1} e^{-\frac{\rho}{2} \left(u + \frac{1}{u}\right)} u^{-(n-1)} \Big|_1^{\infty} -$$

$$-\frac{\rho}{2(n-1)} \int_1^{\infty} e^{-\frac{\rho}{2} \left(u + \frac{1}{u}\right)} \left(\frac{1}{u^{n-1}} - \frac{1}{u^{n+1}}\right) du$$

или

$$M_n = \frac{e^{-\rho}}{n-1} - \frac{\rho}{2(n-1)} M_{n-1} + \frac{\rho}{2(n-1)} M_{n+1},$$

отсюда получаем рекуррентную формулу

$$M_{n+1} = M_{n-1} + \frac{2(n-1)}{\rho} M_n - 2 \frac{e^{-\rho}}{\rho}.$$

Применив подстановку

$$t = \frac{1}{2} \left(u + \frac{1}{u}\right),$$

получаем

$$M_1 = \int_1^{\infty} e^{-\rho t} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = K_0(\rho).$$

Взяв производную от M_1 в его первоначальной форме

$$K'_0(\rho) = M'_1 = \frac{\partial}{\partial \rho} \int_1^{\infty} e^{-\frac{\rho}{2} \left(u + \frac{1}{u}\right)} \frac{du}{u} = -\frac{1}{2} M_0 - \frac{1}{2} M_2$$

и выражая M_2 по рекуррентной формуле ($n=1$)

$$M_2 = M_0 - \frac{2e^{-\rho}}{\rho},$$

получаем

$$M_0 = -K'_0(\rho) + \frac{e^{-\rho}}{\rho}.$$

Зная M_0 и M_1 , по той же рекуррентной формуле получаем

$$M_2 = -K'_0(\rho) - \frac{e^{-\rho}}{\rho};$$

$$M_3 = K_0(\rho) - \frac{2}{\rho} K'_0(\rho) - \frac{2e^{-\rho}}{\rho} \left(1 + \frac{1}{\rho}\right);$$

$$M_4 = \frac{4}{\rho} K_0(\rho) - \left(1 + \frac{8}{\rho^2}\right) K'_0(\rho) - \frac{3e^{-\rho}}{\rho} \left(1 + \frac{8}{3\rho} + \frac{8}{3\rho^2}\right).$$

В дальнейшем проще вычислять сразу суммы и разность (158), (159) и (160), причем перемена знака у y соответствует перемене знака у α . При комбинировании интегралов, оставшихся в (161) и (162), можно выделить некоторые интегралов, которые берутся в конечном виде, и присоединить их к выражениям, которые происходят от членов с функциями M .

После довольно длительных выкладок, которые мы здесь не приводим, удастся привести результаты к более или менее простому виду, если ввести обозначения

$$\rho = \kappa r e^{i\pi/4} = \xi e^{i\pi/4}; \quad \xi = \kappa r = \frac{\kappa h}{\cos \alpha};$$

$$\varepsilon = \frac{\xi}{\sqrt{2}} \cos \alpha = \frac{\kappa h}{\sqrt{2}}$$

и ввести функции

$$p(\varepsilon) = \frac{1 - e^{-\varepsilon} [(1 + \varepsilon) \cos \varepsilon + \varepsilon \sin \varepsilon]}{\varepsilon^2}; \quad (163)$$

$$q(\varepsilon) = \frac{e^{-\varepsilon} [(1 + \varepsilon) \sin \varepsilon - \varepsilon \cos \varepsilon]}{\varepsilon^2}; \quad (164)$$

$$P(\varepsilon) = \frac{2e^{-\varepsilon}}{\varepsilon^2} (1 + \varepsilon) (\varepsilon \sin \varepsilon + \cos \varepsilon) - \frac{2}{\varepsilon^2}; \quad (165)$$

$$Q(\varepsilon) = \frac{2e^{-\varepsilon}}{\varepsilon^2} (1 + \varepsilon) (\varepsilon \cos \varepsilon - \sin \varepsilon); \quad (166)$$

$$s_n(\varepsilon, \alpha) = \int_0^{\alpha} e^{-\varepsilon \cos \varphi / \cos \alpha} \cos \left(\frac{\varepsilon \cos \varphi}{\cos \alpha} \right) \cos n\varphi d\varphi; \quad (167)$$

$$t_n(\varepsilon, \alpha) = \int_0^{\alpha} e^{-\varepsilon \cos \varphi / \cos \alpha} \sin \left(\frac{\varepsilon \cos \varphi}{\cos \alpha} \right) \cos n\varphi d\varphi. \quad (168)$$

Табличный материал для этих функций (табл. 6—9) мы даем в конце этой главы, так что вычисления по окончательным формулам, приведенным ниже, потребуют только численных выкладок. С этими обозначениями и сокращениями мы получаем

$$F^*(\alpha) + F^*(-\alpha) = \left[\ker \xi + \cos 2\alpha \left(\ker \xi - \frac{2}{\xi} \ker' \xi + \cos^2 \alpha q(\varepsilon) \right) + \right. \\ \left. + s_2(\varepsilon, \alpha) \sin 2\alpha \right] + i \left[\ker \xi + \cos 2\alpha \left(\ker \xi + \frac{2}{\xi} \ker' \xi + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{\xi^2} - p(\varepsilon) \cos^2 \alpha \right) - t_2(\varepsilon, \alpha) \sin 2\alpha \right]; \quad (169)$$

$$\Phi^*(\alpha) + \Phi^*(-\alpha) = \frac{\cos^2 \alpha}{h} \left\{ (1 - 4 \sin^2 \alpha) \left[\frac{4}{\xi} \ker' \xi - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \ker \xi + Q(\varepsilon) \cos^2 \alpha \right] - 2 \sin^2 \alpha (e^{-\varepsilon} \cos \varepsilon - \xi \ker' \xi) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\varepsilon \operatorname{tg} \alpha}{2 \cos \alpha} [(s_1(\varepsilon, \alpha) + t_1(\varepsilon, \alpha) + (4 \cos^2 \alpha - 1)(s_3(\varepsilon, \alpha) + t_3(\varepsilon, \alpha))] + \\
& + i \frac{\cos^2 \alpha}{h} \left\{ -(1 - 4 \sin^2 \alpha) \left[\frac{4}{\xi} \operatorname{ker}' \xi + 2 \operatorname{kei} \xi + \frac{4}{\xi^2} + P(\varepsilon) \cos^2 \alpha \right] - \right. \\
& - 2 \sin^2 \alpha (e^{-\varepsilon} \sin \varepsilon + \xi \operatorname{kei} \xi) - \frac{\varepsilon \operatorname{tg} \alpha}{2 \cos \alpha} [(s_1(\varepsilon, \alpha) - t_1(\varepsilon, \alpha)) + \\
& \left. + (4 \cos^2 \alpha - 1)(s_3(\varepsilon, \alpha) - t_3(\varepsilon, \alpha))] \right\}; \quad (170)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i [\Phi^*(\alpha) - \Phi^*(-\alpha)] = & -\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{h} \left\{ (4 \cos^2 \alpha - 1) \left[\frac{4}{\xi} \operatorname{kei}' \xi - 2 \operatorname{ker} \xi + \right. \right. \\
& \left. \left. + \cos^2 \alpha Q(\varepsilon) \right] - 2 \cos^2 \alpha (e^{-\varepsilon} \cos \varepsilon - \xi \operatorname{ker}' \xi) - \frac{\varepsilon}{2 \sin \alpha} [(s_1 + t_1) - \right. \\
& \left. - (1 - 4 \sin^2 \alpha)(s_3 + t_3)] \right\} + i \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{h} \left\{ (4 \cos^2 \alpha - 1) \left[\frac{4}{\xi} \operatorname{ker}' \xi + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 \operatorname{kei} \xi + \frac{4}{\xi^2} + P(\varepsilon) \cos^2 \alpha \right] - 2 \cos^2 \alpha [e^{-\varepsilon} \sin \varepsilon + \xi \operatorname{kei}' \xi] + \right. \\
& \left. + \frac{\varepsilon}{2 \sin \alpha} [(s_1 - t_1) - (1 - 4 \sin^2 \alpha)(s_3 - t_3)] \right\}. \quad (171)
\end{aligned}$$

Заметим, что функции ker , kei , ker' и kei' входят в формулы (169), (170) и (171), за исключением отдельно стоящих ker и kei в (169), в тех же комбинациях, что и в формулы (140) и (143). Таблицы функций $a_z^{(0)}$ и $b_z^{(0)}$ (см. табл. 2) для наших целей интерполируются достаточно точно. Интерполяция нашей таблицы ker и kei потребует привлечения разностей высших порядков для $\xi > 2,4$; для значений $\xi < 2$ (кроме табл. 4, 5) можно еще указать на таблицы функций her и hei .

Функции her и hei связаны с ker и kei соотношениями

$$\operatorname{ker} \xi = -\frac{\pi}{2} \operatorname{her} \xi;$$

$$\operatorname{kei} \xi = \frac{\pi}{2} \operatorname{her} \xi.$$

Сопоставляя полученные результаты, мы можем представить магнитное поле подземного тока в виде выражений

$$(H_y)_{z=0} = \frac{2I_{\sim}}{ch} \cos^2 \alpha (R_y + iI_y); \quad (172)$$

$$(H_z)_{z=0} = \frac{2I_{\sim}}{ch} \sin \alpha \cos \alpha (R_z + iI_z), \quad (173)$$

где R_y , I_y , R_z , I_z даются фигурными скобками формул (170) и (171) с соответственными знаками. Легко проверить, что при $\varkappa = 0$, т. е. при $\varepsilon = 0$, $\xi = 0$ формулы (170) и (171) дают

$$R_y = R_z = 1; \quad I_y = I_z = 0.$$

Этот случай соответствует отсутствию поглощения. Формулы

$$(H_y^{(0)})_{z=0} = \frac{2I_{\sim}}{ch} \cos^2 \alpha; \quad (H_z^{(0)})_{z=0} = \frac{2I_{\sim}}{ch} \cos \alpha \sin \alpha$$

легко получить элементарным путем. Комплексные величины $R_y + iI_y$, $R_z + iI_z$ являются поправочными множителями, учитывающими поглощение в земле. Приводимые табл. 6—9 построены так, чтобы при систематических вычислениях задаваться величинами ε и $\operatorname{tg} \alpha$. В связи с теоремой взаимности можно заметить, что вычисляя по (169) и (158) вектор-потенциал, мы получаем его значение для случая кабеля, лежащего на земле, в точках под землей на глубине h , под точками поверхности с приведенным расстоянием от кабеля $\varkappa y = \xi = \sqrt{2\varepsilon} \operatorname{tg} \alpha$ (рис. 35).

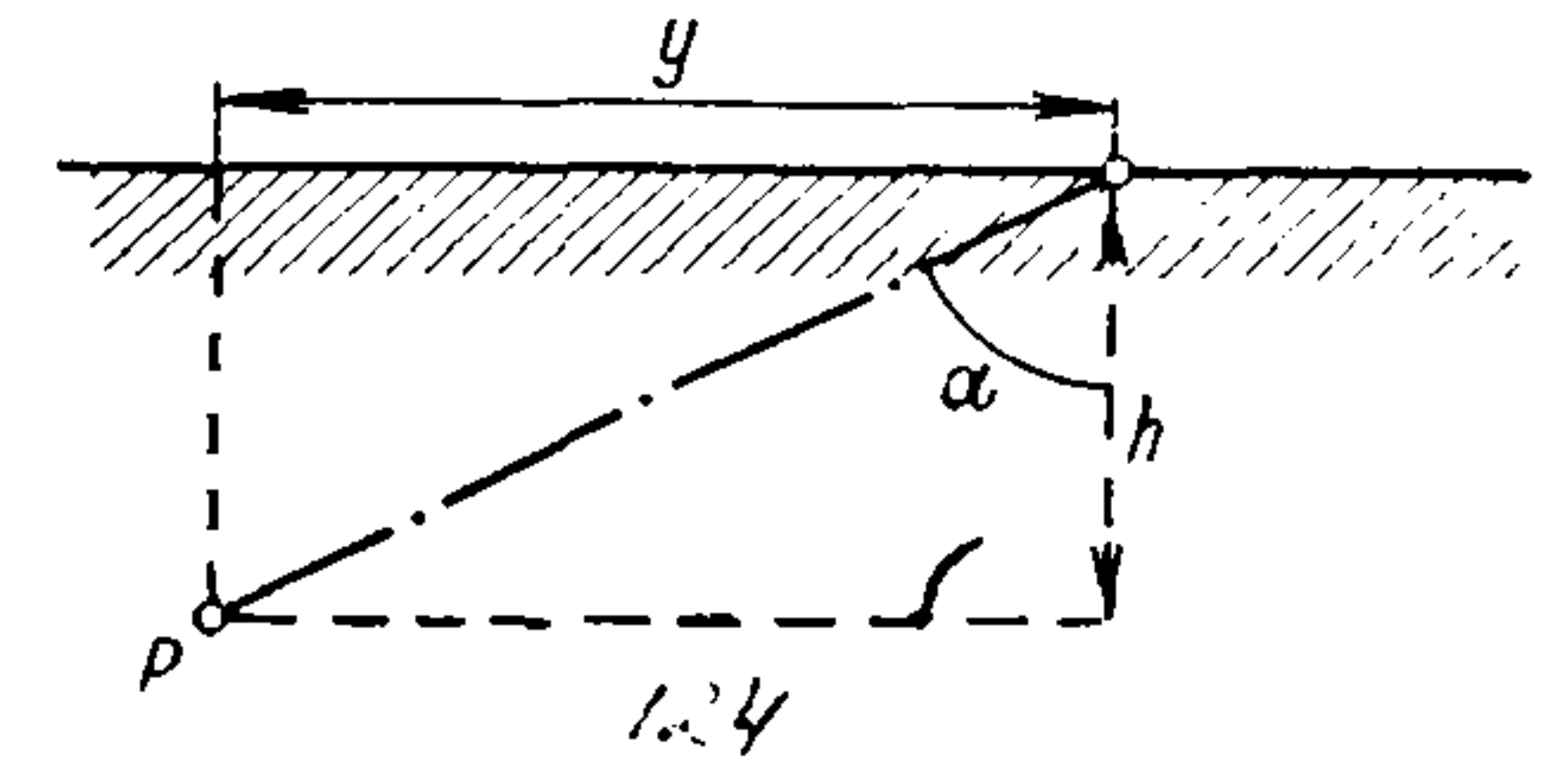


Рис. 35.

В качестве иллюстрации приводим результат расчета магнитного поля непосредственно над погруженным в землю кабелем. При $\alpha = 0$ мы имеем $H_z = 0$,

$$\begin{aligned}
H_y = \frac{2I_{\sim}}{ch} \left(\frac{4}{\xi} \operatorname{kei}' \xi - 2 \operatorname{ker} \xi + Q(\varepsilon) - i \left(\frac{4}{\xi} \operatorname{ker}' \xi + \right. \right. \\
\left. \left. + 2 \operatorname{kei} \xi + \frac{4}{\xi^2} + P(\varepsilon) \right) \right),
\end{aligned}$$

причем

$$\xi = \varkappa h; \quad \varepsilon = \frac{\varkappa h}{\sqrt{2}}.$$

Взяв отношение этого H_y к тому значению, которое получается без учета поглощения, а именно

$$H_y^{(0)} = \frac{2I_{\sim}}{ch},$$

мы получаем

$$\frac{H_y}{H_y^{(0)}} = R_y^{(0)} + iI_y^{(0)}.$$

Даем табл. 10 величин $R_y^{(0)}$ и $I_y^{(0)}$, а также величин

$$m = \sqrt{R_y^{(0)2} + I_y^{(0)2}};$$

$$\psi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{I_y^{(0)}}{R_y^{(0)}},$$

т. е. поправочного множителя амплитуды и сдвига фазы поля относительно тока вследствие поглощения. Последние две величины представлены на фазовой диаграмме рис. 36, причем отметки на кривой дают ξ .

Таблица 4

| x | $\ker x$ | $\operatorname{kei} x$ | x | $\ker x$ | $\operatorname{kei} x$ |
|------|----------|------------------------|------|----------|------------------------|
| 0,00 | ∞ | -0,7854 | 0,49 | 0,8743 | -0,6749 |
| 0,01 | 4,7211 | -0,7853 | 0,50 | 0,8559 | -0,6716 |
| 0,02 | 4,0280 | -0,7849 | 0,51 | 0,8379 | -0,6682 |
| 0,03 | 3,6227 | -0,7844 | 0,52 | 0,8203 | -0,6649 |
| 0,04 | 3,3351 | -0,7837 | 0,53 | 0,8032 | -0,6615 |
| 0,05 | 3,1122 | -0,7828 | 0,54 | 0,7864 | -0,6581 |
| 0,06 | 2,9301 | -0,7819 | 0,55 | 0,7700 | -0,6547 |
| 0,07 | 2,7761 | -0,7808 | 0,56 | 0,7539 | -0,6513 |
| 0,08 | 2,6429 | -0,7796 | 0,57 | 0,7382 | -0,6478 |
| 0,09 | 2,5255 | -0,7783 | 0,58 | 0,7229 | -0,6444 |
| 0,10 | 2,4205 | -0,7769 | 0,59 | 0,7078 | -0,6409 |
| 0,11 | 2,3256 | -0,7753 | 0,60 | 0,6931 | -0,6374 |
| 0,12 | 2,2390 | -0,7737 | 0,61 | 0,6787 | -0,6340 |
| 0,13 | 2,1595 | -0,7721 | 0,62 | 0,6646 | -0,6305 |
| 0,14 | 2,0859 | -0,7703 | 0,63 | 0,6508 | -0,6270 |
| 0,15 | 2,0174 | -0,7684 | 0,64 | 0,6372 | -0,6234 |
| 0,16 | 1,9535 | -0,7665 | 0,65 | 0,6239 | -0,6199 |
| 0,17 | 1,8935 | -0,7645 | 0,66 | 0,6109 | -0,6164 |
| 0,18 | 1,8370 | -0,7625 | 0,67 | 0,5982 | -0,6128 |
| 0,19 | 1,7837 | -0,7603 | 0,68 | 0,5857 | -0,6093 |
| 0,20 | 1,7331 | -0,7581 | 0,69 | 0,5734 | -0,6057 |
| 0,21 | 1,6851 | -0,7559 | 0,70 | 0,5614 | -0,6022 |
| 0,22 | 1,6395 | -0,7535 | 0,71 | 0,5496 | -0,5986 |
| 0,23 | 1,5959 | -0,7512 | 0,72 | 0,5380 | -0,5950 |
| 0,24 | 1,5542 | -0,7487 | 0,73 | 0,5267 | -0,5915 |
| 0,25 | 1,5143 | -0,7463 | 0,74 | 0,5155 | -0,5879 |
| 0,26 | 1,4761 | -0,7437 | 0,75 | 0,5046 | -0,5843 |
| 0,27 | 1,4393 | -0,7411 | 0,76 | 0,4939 | -0,5807 |
| 0,28 | 1,4040 | -0,7385 | 0,77 | 0,4833 | -0,5771 |
| 0,29 | 1,3700 | -0,7358 | 0,78 | 0,4730 | -0,5735 |
| 0,30 | 1,3372 | -0,7331 | 0,79 | 0,4628 | -0,5700 |
| 0,31 | 1,3056 | -0,7303 | 0,80 | 0,4529 | -0,5664 |
| 0,32 | 1,2750 | -0,7275 | 0,81 | 0,4431 | -0,5628 |
| 0,33 | 1,2455 | -0,7247 | 0,82 | 0,4335 | -0,5592 |
| 0,34 | 1,2169 | -0,7218 | 0,83 | 0,4241 | -0,5556 |
| 0,35 | 1,1892 | -0,7189 | 0,84 | 0,4148 | -0,5520 |
| 0,36 | 1,1623 | -0,7159 | 0,85 | 0,4057 | -0,5484 |
| 0,37 | 1,1363 | -0,7129 | 0,86 | 0,3968 | -0,5448 |
| 0,38 | 1,1110 | -0,7099 | 0,87 | 0,3880 | -0,5413 |
| 0,39 | 1,0865 | -0,7069 | 0,88 | 0,3793 | -0,5377 |
| 0,40 | 1,0626 | -0,7038 | 0,89 | 0,3709 | -0,5341 |
| 0,41 | 1,0394 | -0,7007 | 0,90 | 0,3625 | -0,5305 |
| 0,42 | 1,0169 | -0,6976 | 0,91 | 0,3543 | -0,5269 |
| 0,43 | 0,9949 | -0,6944 | 0,92 | 0,3463 | -0,5234 |
| 0,44 | 0,9735 | -0,6912 | 0,93 | 0,3384 | -0,5198 |
| 0,45 | 0,9527 | -0,6880 | 0,94 | 0,3306 | -0,5162 |
| 0,46 | 0,9323 | -0,6847 | 0,95 | 0,3230 | -0,5127 |
| 0,47 | 0,9125 | -0,6815 | 0,96 | 0,3155 | -0,5091 |
| 0,48 | 0,8932 | -0,6782 | 0,97 | 0,3081 | -0,5056 |
| | | | 0,98 | 0,3008 | -0,5021 |

Продолжение табл. 4

| x | $\ker x$ | $\operatorname{kei} x$ | x | $\ker x$ | $\operatorname{kei} x$ |
|------|----------|------------------------|------|----------|------------------------|
| 0,99 | 0,2937 | -0,4985 | 1,62 | 0,0212 | -0,2970 |
| 1,00 | 0,2867 | -0,4950 | 1,64 | 0,0166 | -0,2914 |
| 1,01 | 0,2798 | -0,4915 | 1,66 | 0,0121 | -0,2860 |
| 1,02 | 0,2731 | -0,4880 | 1,68 | 0,0078 | -0,2806 |
| 1,03 | 0,2664 | -0,4845 | 1,70 | 0,0037 | -0,2752 |
| 1,04 | 0,2599 | -0,4810 | 1,72 | -0,0003 | -0,2699 |
| 1,05 | 0,2534 | -0,4775 | 1,74 | -0,0041 | -0,2647 |
| 1,06 | 0,2471 | -0,4740 | 1,76 | -0,0078 | -0,2596 |
| 1,07 | 0,2409 | -0,4705 | 1,78 | -0,0113 | -0,2545 |
| 1,08 | 0,2348 | -0,4670 | 1,80 | -0,0147 | -0,2494 |
| 1,09 | 0,2287 | -0,4636 | 1,82 | -0,0180 | -0,2444 |
| 1,10 | 0,2228 | -0,4601 | 1,84 | -0,0211 | -0,2395 |
| 1,11 | 0,2170 | -0,4567 | 1,86 | -0,0240 | 0,2347 |
| 1,12 | 0,2113 | -0,4533 | 1,88 | -0,0269 | 0,2299 |
| 1,13 | 0,2057 | -0,4498 | 1,90 | -0,0297 | 0,2251 |
| 1,14 | 0,2002 | -0,4464 | 1,92 | -0,0323 | 0,2205 |
| 1,15 | 0,1948 | -0,4430 | 1,94 | -0,0348 | 0,2159 |
| 1,16 | 0,1894 | -0,4396 | 1,96 | -0,0372 | 0,2113 |
| 1,17 | 0,1842 | -0,4362 | 1,98 | -0,0395 | 0,2068 |
| 1,18 | 0,1790 | -0,4329 | 2,00 | -0,0417 | 0,2024 |
| 1,19 | 0,1739 | -0,4295 | 2,02 | -0,0437 | -0,1980 |
| 1,20 | 0,1689 | -0,4262 | 2,04 | -0,0457 | -0,1937 |
| 1,22 | 0,1592 | -0,4195 | 2,06 | -0,0476 | -0,1895 |
| 1,24 | 0,1498 | -0,4129 | 2,08 | -0,0494 | -0,1853 |
| 1,26 | 0,1407 | -0,4063 | 2,10 | -0,0511 | -0,1812 |
| 1,28 | 0,1319 | -0,3998 | 2,12 | -0,0527 | -0,1771 |
| 1,30 | 0,1235 | -0,3933 | 2,14 | -0,0542 | -0,1731 |
| 1,32 | 0,1153 | -0,3869 | 2,16 | -0,0557 | -0,1692 |
| 1,34 | 0,1073 | -0,3805 | 2,18 | -0,0571 | -0,1653 |
| 1,36 | 0,0997 | -0,3742 | 2,20 | -0,0583 | -0,1614 |
| 1,38 | 0,0923 | -0,3679 | 2,22 | -0,0595 | -0,1577 |
| 1,40 | 0,0851 | -0,3617 | 2,24 | -0,0607 | -0,1539 |
| 1,42 | 0,0782 | -0,3555 | 2,26 | -0,0617 | -0,1503 |
| 1,44 | 0,0716 | -0,3494 | 2,28 | -0,0627 | -0,1467 |
| 1,46 | 0,0651 | -0,3433 | 2,30 | -0,0637 | -0,1431 |
| 1,48 | 0,0589 | -0,3373 | 2,32 | -0,0645 | -0,1396 |
| 1,50 | 0,0529 | -0,3314 | 2,34 | -0,0653 | -0,1362 |
| 1,52 | 0,0472 | -0,3255 | 2,36 | -0,0661 | -0,1328 |
| 1,54 | 0,0416 | -0,3197 | 2,38 | -0,0668 | -0,1295 |
| 1,56 | 0,0362 | -0,3139 | 2,40 | -0,0674 | -0,1262 |
| 1,58 | 0,0310 | -0,3082 | | | |
| 1,60 | 0,0260 | -0,3026 | | | |

Примечание. Табл. 4 вычислена на основании таблицы из сб. Шлильрейна и проверена, а также продолжена интерполяцией табл. 5. Для вычисления $\ker x$ в интервале 0—0,2 лучше пользоваться формулой $\ker x = -2,302585 \lg x + 0,11593 + 0,1964 x^2$.

Таблица 5

| x | $\ker x$ | $\operatorname{kei} x$ | $\ker' x$ | $\operatorname{kei}' x$ |
|-----|-------------|------------------------|------------|-------------------------|
| 0,0 | ∞ | -0,7853982 | ∞ | 0 |
| 0,1 | 2,4204740 | -0,7768506 | -9,9609593 | 0,1459758 |
| 0,2 | 1,7331427 | -0,7581249 | -4,9229485 | 0,2229268 |
| 0,3 | 1,3372186 | -0,7331019 | -3,2198652 | 0,2742921 |
| 0,4 | 1,0626239 | -0,7038002 | -2,3520699 | 0,3095140 |
| 0,5 | 0,8559059 | -0,6715817 | -1,8197998 | 0,3332038 |
| 0,6 | 0,6931207 | -0,6374495 | -1,4563586 | 0,3481644 |
| 0,7 | 0,5613783 | -0,6021755 | -1,1909433 | 0,3563095 |
| 0,8 | 0,4528821 | -0,5663672 | -0,9873351 | 0,3590425 |
| 0,9 | 0,3625148 | -0,5305111 | -0,8258687 | 0,3574432 |
| 1,0 | 0,2867062 | -0,4949946 | -0,6946039 | 0,3523699 |
| 1,1 | 0,2228445 | -0,4601295 | -0,5859053 | 0,3445210 |
| 1,2 | 0,1689456 | -0,4261636 | -0,4946432 | 0,3344739 |
| 1,3 | 0,1234554 | -0,3932918 | -0,4172274 | 0,3227118 |
| 1,4 | 0,0851260 | -0,3616648 | -0,3510551 | 0,3096416 |
| 1,5 | 0,0529349 | -0,3313956 | -0,2941816 | 0,2956081 |
| 1,6 | 0,0260299 | -0,3025655 | -0,2451147 | 0,2809038 |
| 1,7 | 0,0036911 | -0,2752288 | -0,2026818 | 0,2657772 |
| 1,8 | -0,0146961 | -0,2494171 | -0,1659424 | 0,2504385 |
| 1,9 | -0,0296614 | -0,2251422 | -0,1341282 | 0,2350657 |
| 2,0 | -0,0416645 | -0,2024001 | -0,1066010 | 0,2193079 |
| 2,1 | -0,0511065 | -0,1811726 | -0,0828234 | 0,2047897 |
| 2,2 | -0,0583388 | -0,1614307 | -0,0623373 | 0,1901137 |
| 2,3 | -0,0636705 | -0,1431357 | -0,0447479 | 0,1758638 |
| 2,4 | -0,0673735 | -0,1262415 | -0,0297123 | 0,1621069 |
| 2,5 | -0,0696880 | -0,1106961 | -0,0169298 | 0,1488954 |
| 2,6 | -0,0708257 | -0,0964429 | -0,0061358 | 0,1362689 |
| 2,7 | -0,0709736 | -0,0834219 | 0,0029043 | 0,1242558 |
| 2,8 | -0,0702963 | -0,0715707 | 0,0103990 | 0,1128748 |
| 2,9 | -0,0689390 | -0,0608255 | 0,0165342 | 0,1021362 |
| 3,0 | -0,0670292 | -0,0511219 | 0,0214762 | 0,0920431 |
| 3,1 | -0,0646786 | -0,0423955 | 0,0253738 | 0,0825922 |
| 3,2 | -0,0619848 | -0,0345823 | 0,0283603 | 0,0737752 |
| 3,3 | -0,0590329 | -0,0276197 | 0,0305554 | 0,0655794 |
| 3,4 | -0,0558966 | -0,0214463 | 0,0320662 | 0,0579881 |
| 3,5 | -0,0526393 | -0,0160026 | 0,0329886 | 0,0509821 |
| 3,6 | -0,0493156 | -0,0112311 | 0,0334087 | 0,0445394 |
| 3,7 | -0,0459717 | -0,0070767 | 0,0334030 | 0,0386364 |
| 3,8 | -0,0426469 | -0,0034867 | 0,0330400 | 0,0332480 |
| 3,9 | -0,03937361 | -0,00041081 | 0,03238046 | 0,02834832 |
| 4,0 | -0,03617885 | 0,00219840 | 0,03147849 | 0,02391062 |
| 4,1 | -0,03308440 | 0,00438582 | 0,03038179 | 0,01990804 |
| 4,2 | -0,03010758 | 0,00619361 | 0,02913242 | 0,01631367 |
| 4,3 | -0,02726177 | 0,00766127 | 0,02776730 | 0,01310084 |
| 4,4 | -0,02455689 | 0,00882562 | 0,02631868 | 0,01024331 |
| 4,5 | -0,02199988 | 0,00972092 | 0,02481454 | 0,00771543 |
| 4,6 | -0,01959503 | 0,01037886 | 0,02327908 | 0,00549226 |
| 4,7 | -0,01734441 | 0,01082872 | 0,02173300 | 0,00354976 |
| 4,8 | -0,01524819 | 0,01109740 | 0,02019391 | 0,00186478 |
| 4,9 | -0,01330490 | 0,01120953 | 0,01867661 | 0,00041522 |
| 5,0 | -0,01151173 | 0,01118759 | 0,01719340 | -0,00081998 |
| 5,1 | -0,00986474 | 0,01105201 | 0,01575436 | -0,00186079 |
| 5,2 | -0,00835911 | 0,01082128 | 0,01436757 | -0,00272605 |
| 5,3 | -0,00698928 | 0,01051206 | 0,01303935 | -0,00343349 |

Продолжение табл. 5

| x | $\ker x$ | $\operatorname{kei} x$ | $\ker' x$ | $\operatorname{kei}' x$ |
|-----|-------------|------------------------|--------------|-------------------------|
| 5,4 | -0,00574913 | 0,01013929 | 0,01177446 | -0,00399969 |
| 5,5 | -0,00463216 | 0,00971631 | 0,01057633 | -0,00444016 |
| 5,6 | -0,00363156 | 0,00925496 | 0,00944717 | -0,00476928 |
| 5,7 | -0,00274038 | 0,00876572 | 0,00838818 | -0,00500041 |
| 5,8 | -0,00195158 | 0,00825774 | 0,00739967 | -0,00514584 |
| 5,9 | -0,00125812 | 0,00773902 | 0,00648121 | -0,00521689 |
| 6,0 | -0,00065304 | 0,00721649 | 0,00563171 | -0,00522392 |
| 6,1 | -0,00012953 | 0,00669606 | 0,00484957 | -0,00517637 |
| 6,2 | 0,00031905 | 0,00618275 | 0,00413275 | -0,00508283 |
| 6,3 | 0,00069912 | 0,00568017 | 0,00347886 | -0,00495105 |
| 6,4 | 0,00101683 | 0,00519358 | 0,00288523 | -0,00478803 |
| 6,5 | 0,001278080 | 0,004723992 | 0,002348995 | -0,004600032 |
| 6,6 | 0,001488446 | 0,004274219 | 0,001867130 | -0,004392632 |
| 6,7 | 0,001653215 | 0,003845947 | 0,001436521 | -0,004170782 |
| 6,8 | 0,001777354 | 0,003440398 | 0,001053999 | -0,003938849 |
| 6,9 | 0,001865512 | 0,003058385 | 0,000716382 | -0,003700651 |
| 7,0 | 0,001922022 | 0,002700365 | 0,000420510 | -0,003459509 |
| 7,1 | 0,001950901 | 0,002366486 | 0,000163267 | -0,003218285 |
| 7,2 | 0,001955861 | 0,002056629 | -0,000058386 | -0,002979421 |
| 7,3 | 0,001940312 | 0,001770454 | -0,000247403 | -0,002744978 |
| 7,4 | 0,001907373 | 0,001507429 | -0,000406628 | -0,002516671 |
| 7,5 | 0,001859888 | 0,001266868 | -0,000538787 | -0,002295904 |
| 7,6 | 0,001800431 | 0,001047959 | -0,000646478 | -0,002083800 |
| 7,7 | 0,001731326 | 0,000849790 | -0,000732165 | -0,001881234 |
| 7,8 | 0,001654654 | 0,000671373 | -0,000798170 | -0,001688855 |
| 7,9 | 0,001572275 | 0,000511664 | -0,000846677 | -0,001507120 |
| 8,0 | 0,001485834 | 0,000369584 | -0,000879724 | -0,001336313 |
| 8,1 | 0,001396782 | 0,000244032 | -0,000899210 | -0,001176567 |
| 8,2 | 0,001306386 | 0,000133902 | -0,000906891 | -0,001027888 |
| 8,3 | 0,001215743 | 0,000038090 | -0,000904388 | -0,000890168 |
| 8,4 | 0,001125797 | -0,000044491 | -0,000893190 | -0,000763209 |
| 8,5 | 0,001037349 | -0,000114902 | -0,000874656 | -0,000646733 |
| 8,6 | 0,000951070 | -0,000174175 | -0,000850022 | -0,000540398 |
| 8,7 | 0,000867511 | -0,000223306 | -0,000820407 | -0,000443813 |
| 8,8 | 0,000787120 | -0,000263248 | -0,000786819 | -0,000356543 |
| 8,9 | 0,000710249 | -0,000294910 | -0,000750159 | -0,000278127 |
| 9,0 | 0,000637164 | -0,000319153 | -0,000711231 | -0,000208079 |
| 9,1 | 0,000568055 | -0,000336788 | -0,000670745 | -0,000145903 |
| 9,2 | 0,000503046 | -0,000348579 | -0,000629326 | -0,000091093 |
| 9,3 | 0,000442203 | -0,000355236 | -0,000587517 | -0,000043145 |
| 9,4 | 0,000385540 | -0,000357420 | -0,000545789 | -0,000001559 |
| 9,5 | 0,000333029 | -0,000355743 | -0,000504544 | 0,000034158 |
| 9,6 | 0,000284604 | -0,000350768 | -0,000464122 | 0,000064485 |
| 9,7 | 0,000240168 | -0,000343010 | -0,000424806 | 0,000089887 |
| 9,8 | 0,000199598 | -0,000332940 | -0,000386830 | 0,000110811 |
| 9,9 | 0,000162751 | -0,000320983 | -0,000350379 | 0,000127684 |
| 10 | 0,000129466 | -0,000307524 | -0,000315597 | 0,000140914 |

Примечание. Табл. 5 составлена по литературным данным, проверена и местами перевычислена В. А. Фоком

$$K_0\left(xe^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \ker x + i \operatorname{kei} x$$

$$-e^{i\frac{\pi}{4}} K_1\left(xe^{i\frac{\pi}{4}}\right) = \ker' x + i \operatorname{kei}' x.$$

Таблица 6

| ε | $\operatorname{tg} \alpha$ | | | | | | | | |
|---------------|----------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|---------|
| | 0,0 | 0,25 | 0,50 | 0,75 | 1,00 | 1,25 | 1,50 | 1,75 | 2,00 |
| 0,0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 0,2 | 0,2828 | 0,2916 | 0,3162 | 0,3536 | 0,4000 | 0,4528 | 0,5099 | 0,5701 | 0,6325 |
| 0,4 | 0,5657 | 0,5831 | 0,6324 | 0,7071 | 0,8000 | 0,9055 | 1,0198 | 1,1402 | 1,2649 |
| 0,6 | 0,8485 | 0,8747 | 0,9487 | 1,0607 | 1,2000 | 1,3583 | 1,5297 | 1,7103 | 1,8974 |
| 0,8 | 1,1314 | 1,1662 | 1,2649 | 1,4142 | 1,6000 | 1,8111 | 2,0396 | 2,2804 | 2,5299 |
| 1,0 | 1,4142 | 1,4578 | 1,5811 | 1,7678 | 2,0000 | 2,2639 | 2,5495 | 2,8505 | 3,1623 |
| 1,2 | 1,6971 | 1,7493 | 1,8973 | 2,1213 | 2,4000 | 2,7166 | 3,0594 | 3,4206 | 3,7948 |
| 1,4 | 1,9799 | 2,0409 | 2,2135 | 2,4749 | 2,8000 | 3,1694 | 3,5694 | 3,9907 | 4,4273 |
| 1,6 | 2,2627 | 2,3324 | 2,5297 | 2,8284 | 3,2000 | 3,6222 | 4,0793 | 4,5608 | 5,0597 |
| 1,8 | 2,5456 | 2,6240 | 2,8460 | 3,1820 | 3,6000 | 4,0750 | 4,5892 | 5,1309 | 5,6922 |
| 2,0 | 2,8284 | 2,9155 | 3,1622 | 3,5355 | 4,0000 | 4,5277 | 5,0991 | 5,7010 | 6,3246 |
| 2,2 | 3,1113 | 3,2071 | 3,4784 | 3,8891 | 4,4000 | 4,9805 | 5,6090 | 6,2711 | 6,9571 |
| 2,4 | 3,3941 | 3,4986 | 3,7946 | 4,2426 | 4,8000 | 5,4333 | 6,1189 | 6,8412 | 7,5896 |
| 2,6 | 3,6770 | 3,7902 | 4,1108 | 4,5962 | 5,2000 | 5,8861 | 6,6288 | 7,4113 | 8,2220 |
| 2,8 | 3,9598 | 4,0818 | 4,4271 | 4,9497 | 5,6000 | 6,3388 | 7,1387 | 7,9814 | 8,8545 |
| 3,0 | 4,2426 | 4,3733 | 4,7433 | 5,3033 | 6,0000 | 6,7916 | 7,8486 | 8,5515 | 9,4870 |
| 3,5 | 4,9497 | 5,1022 | 5,5338 | 6,1872 | 7,0000 | 7,9235 | 8,9234 | 9,9767 | 10,1194 |
| 4,0 | 5,6569 | 5,8311 | 6,3244 | 7,0711 | 8,0000 | 9,0555 | 10,1982 | | |
| 4,5 | 6,3640 | 6,5600 | 7,1149 | 7,9550 | 9,000 | 10,1874 | | | |
| 5,0 | 7,0711 | 7,2889 | 7,9054 | 8,8388 | 10,0000 | | | | |
| 5,5 | 7,7782 | 8,0177 | 8,6960 | 9,7227 | | | | | |
| 6,0 | 8,4853 | 8,7466 | 9,4865 | 10,6066 | | | | | |
| 6,5 | 9,1924 | 9,4755 | 10,2771 | | | | | | |
| 7,0 | 9,8995 | 10,2044 | | | | | | | |
| 7,5 | 10,6066 | | | | | | | | |

Таблица 7

| $\operatorname{tg} \alpha$ | 0,0 | 0,25 | 0,50 | 0,75 | 1,00 |
|----------------------------|----------|--------|--------|---------|---------|
| $\sin \alpha$ | 0,0000 | 0,2425 | 0,4472 | 0,6000 | 0,7071 |
| $\sin^2 \alpha$ | 0,0000 | 0,0588 | 0,2000 | 0,3600 | 0,5000 |
| $\sin 2\alpha$ | 0,0000 | 0,4706 | 0,8000 | 0,9600 | 1,0000 |
| $1/\sin \alpha$ | ∞ | 4,1231 | 2,2361 | 1,6667 | 1,4142 |
| $1 - 4 \sin^2 \alpha$ | 1,0000 | 0,7647 | 0,2000 | -0,4400 | -1,0000 |
| $\cos \alpha$ | 1,0000 | 0,9701 | 0,8944 | 0,8000 | 0,7071 |
| $\cos^2 \alpha$ | 1,0000 | 0,9412 | 0,8000 | 0,6400 | 0,5000 |
| $\cos 2\alpha$ | 1,0000 | 0,8824 | 0,6000 | 0,2800 | 0,0000 |
| $1/\cos \alpha$ | 1,0000 | 1,0308 | 1,1180 | 1,2500 | 1,4142 |
| $4 \cos^2 \alpha - 1$ | 3,0000 | 2,7647 | 2,2000 | 1,5600 | 1,0000 |

Продолжение табл. 7

| $\operatorname{tg} \alpha$ | 1,25 | 1,50 | 1,75 | 2,00 |
|----------------------------|---------|---------|---------|---------|
| $\sin \alpha$ | 0,7809 | 0,8320 | 0,8682 | 0,8944 |
| $\sin^2 \alpha$ | 0,6098 | 0,6923 | 0,7538 | 0,8000 |
| $\sin 2\alpha$ | 0,9756 | 0,9231 | 0,8615 | 0,8000 |
| $1/\sin \alpha$ | 1,2806 | 1,2019 | 1,1518 | 1,1180 |
| $1 - 4 \sin^2 \alpha$ | -1,4390 | -1,7692 | -2,0154 | -2,2000 |
| $\cos \alpha$ | 0,6247 | 0,5547 | 0,4961 | 0,4472 |
| $\cos^2 \alpha$ | 0,3902 | 0,3077 | 0,2462 | 0,2000 |
| $\cos 2\alpha$ | -0,2195 | -0,3847 | -0,5077 | -0,6000 |
| $1/\cos \alpha$ | 1,6008 | 1,8028 | 2,0156 | 2,2361 |
| $4 \cos^2 \alpha - 1$ | 0,5610 | 0,2308 | -0,0154 | -0,2000 |

Таблица 8

| ε | $e^{-\varepsilon} \sin \varepsilon$ | $e^{-\varepsilon} \cos \varepsilon$ | $p(\varepsilon)$ | $q(\varepsilon)$ | $P(\varepsilon)$ | $Q(\varepsilon)$ |
|---------------|-------------------------------------|-------------------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| 0,0 | 0,0000 | 1,0000 | 0,0000 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 0,2 | 0,1627 | 0,8024 | 0,1144 | 0,8676 | 0,0965 | -0,1305 |
| 0,4 | 0,2610 | 0,6174 | 0,1951 | 0,7405 | 0,1318 | -0,2463 |
| 0,6 | 0,3099 | 0,4530 | 0,2482 | 0,6223 | 0,1234 | -0,3388 |
| 0,8 | 0,3223 | 0,3130 | 0,2791 | 0,5152 | 0,0864 | -0,4044 |
| 1,0 | 0,3096 | 0,1988 | 0,2929 | 0,4204 | 0,0333 | -0,4432 |
| 1,2 | 0,2807 | 0,1091 | 0,2938 | 0,3379 | -0,0261 | -0,4576 |
| 1,4 | 0,2430 | 0,0419 | 0,2853 | 0,2676 | -0,0846 | -0,4514 |
| 1,6 | 0,2018 | -0,0059 | 0,2705 | 0,2086 | -0,1373 | -0,4291 |
| 1,8 | 0,1610 | -0,0376 | 0,2517 | 0,1600 | -0,1814 | -0,3951 |
| 2,0 | 0,1231 | -0,0563 | 0,2307 | 0,1204 | -0,2153 | -0,3536 |
| 2,2 | 0,0896 | -0,0652 | 0,2090 | 0,0889 | -0,2388 | -0,3082 |
| 2,4 | 0,0613 | -0,0669 | 0,1872 | 0,0640 | -0,2526 | -0,2619 |
| 2,6 | 0,0383 | -0,0636 | 0,1671 | 0,0449 | -0,2576 | -0,2170 |
| 2,8 | 0,0204 | -0,0573 | 0,1480 | 0,0303 | -0,2554 | -0,1753 |
| 3,0 | 0,0070 | -0,0493 | 0,1307 | 0,0196 | -0,2473 | -0,1377 |
| 3,5 | -0,0106 | -0,0283 | 0,0950 | 0,0042 | -0,2113 | -0,0649 |
| 4,0 | -0,0139 | -0,0120 | 0,0697 | -0,0013 | -0,1671 | -0,0213 |
| 4,5 | -0,0109 | -0,0023 | 0,0524 | -0,0024 | -0,1266 | 0,0002 |
| 5,0 | -0,0065 | 0,0019 | 0,0412 | -0,0019 | -0,0995 | 0,0077 |
| 6,0 | -0,0007 | 0,0024 | 0,0274 | -0,0005 | -0,0562 | 0,0058 |
| 7,0 | 0,0006 | 0,0007 | 0,0202 | 0,0000 | -0,0392 | 0,0014 |
| 8,0 | 0,0003 | 0,0000 | 0,0155 | 0,0001 | -0,0305 | -0,0002 |

Таблица 9

| ε | s_1 | s_2 | s_3 | t_1 | t_2 | t_3 |
|-----------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\operatorname{tg} \alpha = 0,25$ | | | | | | |
| 0,0 | 0,2425 | 0,2353 | 0,2235 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 0,2 | 0,1936 | 0,1879 | 0,1784 | 0,0401 | 0,0389 | 0,0370 |
| 0,4 | 0,1480 | 0,1436 | 0,1363 | 0,0640 | 0,0600 | 0,0590 |

Продолжение табл. 9

| ε | s_1 | s_2 | s_3 | t_1 | t_2 | t_3 |
|---------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,6 | 0,1076 | 0,1044 | 0,0991 | 0,0756 | 0,0733 | 0,0696 |
| 0,8 | 0,0734 | 0,0712 | 0,0676 | 0,0781 | 0,0758 | 0,0721 |
| 1,0 | 0,0457 | 0,0443 | 0,0420 | 0,0745 | 0,0723 | 0,0686 |
| 1,2 | 0,0241 | 0,0233 | 0,0221 | 0,0670 | 0,0650 | 0,0617 |
| 1,4 | 0,0082 | 0,0080 | 0,0075 | 0,0575 | 0,0556 | 0,0530 |
| 1,6 | -0,0029 | -0,0029 | -0,0028 | 0,0473 | 0,0458 | 0,0435 |
| 1,8 | -0,0102 | -0,0099 | -0,0094 | 0,0373 | 0,0361 | 0,0342 |
| 2,0 | -0,0143 | -0,0138 | -0,0132 | 0,0281 | 0,0272 | 0,0258 |
| 2,2 | -0,0160 | -0,0156 | -0,0148 | 0,0200 | 0,0194 | 0,0184 |
| 2,4 | -0,0161 | -0,0156 | -0,0149 | 0,0134 | 0,0130 | 0,0128 |
| 2,6 | -0,0151 | -0,0146 | -0,0139 | 0,0080 | 0,0078 | 0,0074 |
| 2,8 | -0,0134 | -0,0130 | -0,0123 | 0,0039 | 0,0038 | 0,0036 |
| 3,0 | -0,0113 | -0,0110 | -0,0104 | 0,0009 | 0,0008 | 0,0008 |
| 3,5 | -0,0062 | -0,0060 | -0,0057 | -0,0028 | -0,0028 | -0,0026 |
| 4,0 | -0,0024 | -0,0023 | -0,0022 | -0,0033 | -0,0032 | -0,0030 |
| 4,5 | -0,0003 | -0,0003 | -0,0003 | -0,0024 | -0,0024 | -0,0022 |
| 5,0 | 0,0005 | 0,0006 | 0,0005 | -0,0014 | -0,0013 | -0,0013 |
| 5,5 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0006 | -0,0006 | -0,0005 | -0,0005 |
| 6,0 | 0,0005 | 0,0005 | 0,0005 | -0,0001 | -0,0001 | -0,0001 |
| 6,5 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| 7,0 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0001 |
| 7,5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| 8,0 | -0,0000 | -0,0000 | -0,0000 | 0,0001 | -0,0001 | 0,0001 |

$\text{tg } \alpha = 0,50$

| | | | | | | |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,0 | 0,4472 | 0,4000 | 0,3279 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 0,2 | 0,3520 | 0,3146 | 0,2574 | 0,0772 | 0,0692 | 0,0564 |
| 0,4 | 0,2639 | 0,2355 | 0,1922 | 0,1215 | 0,1089 | 0,0896 |
| 0,6 | 0,1867 | 0,1663 | 0,1352 | 0,1411 | 0,1263 | 0,1037 |
| 0,8 | 0,1226 | 0,1089 | 0,0881 | 0,1432 | 0,1280 | 0,1049 |
| 1,0 | 0,0718 | 0,0636 | 0,0509 | 0,1339 | 0,1195 | 0,0977 |
| 1,2 | 0,0335 | 0,0293 | 0,0230 | 0,1178 | 0,1050 | 0,0855 |
| 1,4 | 0,0061 | 0,0050 | 0,0032 | 0,0985 | 0,0876 | 0,0711 |
| 1,6 | -0,0120 | -0,0012 | -0,0098 | 0,0786 | 0,0698 | 0,0564 |
| 1,8 | -0,0231 | -0,0209 | -0,0175 | 0,0598 | 0,0529 | 0,0426 |
| 2,0 | -0,0284 | -0,0255 | -0,0211 | 0,0431 | 0,0380 | 0,0304 |
| 2,2 | -0,0298 | -0,0266 | -0,0219 | 0,0290 | 0,0255 | 0,0202 |
| 2,4 | -0,0284 | -0,0254 | -0,0206 | 0,0177 | 0,0155 | 0,0121 |
| 2,6 | -0,0254 | -0,0226 | -0,0183 | 0,0091 | 0,078 | 0,0059 |
| 2,8 | -0,0216 | -0,0191 | -0,0154 | 0,0028 | 0,0022 | 0,0014 |
| 3,0 | -0,0175 | -0,0154 | -0,0123 | -0,0015 | -0,0015 | -0,0015 |
| 3,5 | -0,0083 | -0,0072 | -0,0057 | -0,0059 | -0,0054 | -0,0044 |
| 4,0 | -0,0024 | -0,0020 | -0,0015 | -0,0054 | -0,0048 | -0,0039 |
| 4,5 | 0,0004 | 0,0004 | 0,0004 | -0,0034 | -0,0030 | -0,0024 |
| 5,0 | 0,0012 | 0,0011 | 0,0009 | -0,0016 | -0,0012 | -0,0010 |
| 5,5 | 0,0011 | 0,0010 | 0,0008 | -0,0004 | -0,0004 | -0,0002 |
| 6,0 | 0,0007 | 0,0006 | 0,0005 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| 6,5 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 |
| 7,0 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 |
| 7,5 | -0,0000 | -0,0000 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| 8,0 | -0,0001 | -0,0000 | -0,0000 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0000 |

$\text{tg } \alpha = 0,75$

| | | | | | | |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 0,6000 | 0,4800 | 0,3120 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 0,2 | 0,4619 | 0,3679 | 0,2366 | 0,1100 | 0,0898 | 0,0602 |
| 0,4 | 0,3354 | 0,2656 | 0,1680 | 0,1692 | 0,1363 | 0,0902 |

Продолжение табл. 9

| ε | s_1 | s_2 | s_3 | t_1 | t_2 | t_3 |
|---------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,6 | 0,2273 | 0,1784 | 0,1102 | 0,1916 | 0,1536 | 0,1004 |
| 0,8 | 0,1401 | 0,1084 | 0,0644 | 0,1890 | 0,1507 | 0,0972 |
| 1,0 | 0,0735 | 0,0553 | 0,0303 | 0,1710 | 0,1355 | 0,0860 |
| 1,2 | 0,0255 | 0,0175 | 0,0065 | 0,1451 | 0,1141 | 0,0710 |
| 1,4 | -0,0066 | -0,0076 | -0,0086 | 0,1164 | 0,0907 | 0,0551 |
| 1,6 | -0,0262 | -0,0224 | -0,0171 | 0,0884 | 0,0682 | 0,0401 |
| 1,8 | -0,0361 | -0,0297 | -0,0208 | 0,0634 | 0,0482 | 0,0271 |
| 2,0 | -0,0392 | -0,0316 | -0,0208 | 0,0423 | 0,0315 | 0,0166 |
| 2,2 | -0,0378 | -0,0300 | -0,0190 | 0,0256 | 0,0184 | 0,0086 |
| 2,4 | -0,0337 | -0,0263 | -0,0161 | 0,0129 | 0,0086 | 0,0029 |
| 2,6 | -0,0283 | -0,0218 | -0,0127 | 0,0039 | 0,0018 | -0,0009 |
| 2,8 | -0,0225 | -0,0170 | -0,0095 | -0,0021 | -0,0026 | -0,0031 |
| 3,0 | -0,0170 | -0,0126 | -0,0066 | -0,0056 | -0,0051 | -0,0046 |
| 3,5 | -0,0063 | -0,0043 | -0,0016 | -0,0077 | -0,0061 | -0,0039 |
| 4,0 | -0,0007 | -0,0002 | 0,0006 | -0,0055 | -0,0041 | -0,0022 |
| 4,5 | 0,0013 | 0,0012 | 0,0010 | -0,0028 | -0,0020 | -0,0008 |
| 5,0 | 0,0014 | 0,0011 | 0,0007 | -0,0009 | -0,0006 | -0,0000 |
| 5,5 | 0,0010 | 0,0007 | 0,0003 | -0,0000 | 0,0001 | 0,0002 |
| 6,0 | 0,0005 | 0,0003 | 0,0001 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0002 |
| 6,5 | 0,0001 | 0,0001 | -0,0000 | 0,0003 | 0,0002 | 0,0001 |
| 7,0 | -0,0000 | -0,0000 | -0,0000 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0000 |
| 7,5 | -0,0000 | -0,0000 | -0,0000 | 0,0001 | 0,0000 | 0,0000 |
| 8,0 | -0,0000 | -0,0000 | -0,0000 | -0,0000 | 0,0000 | -0,0000 |

$\text{tg } \alpha = 1,0$

| | | | | | | |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,0 | 0,7071 | 0,5000 | 0,2357 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 0,2 | 0,5289 | 0,3694 | 0,1667 | 0,1387 | 0,1008 | 0,0520 |
| 0,4 | 0,3727 | 0,2551 | 0,1062 | 0,2071 | 0,1488 | 0,0740 |
| 0,6 | 0,2356 | 0,1570 | 0,0582 | 0,2266 | 0,1607 | 0,0764 |
| 0,8 | 0,1326 | 0,0839 | 0,0234 | 0,2153 | 0,1502 | 0,0675 |
| 1,0 | 0,0578 | 0,0320 | 0,0007 | 0,1867 | 0,1278 | 0,0533 |
| 1,2 | 0,0075 | -0,0018 | -0,0124 | 0,1509 | 0,1009 | 0,0380 |
| 1,4 | -0,0231 | -0,0214 | -0,0181 | 0,1145 | 0,0742 | 0,0240 |
| 1,6 | -0,0390 | -0,0305 | -0,0190 | 0,0814 | 0,0507 | 0,0127 |
| 1,8 | -0,0446 | -0,0326 | -0,0169 | 0,0536 | 0,0314 | 0,0043 |
| 2,0 | -0,0435 | -0,0303 | -0,0134 | 0,0319 | 0,0169 | -0,0012 |
| 2,2 | -0,0386 | -0,0257 | -0,0095 | 0,0158 | 0,0065 | -0,0044 |
| 2,4 | -0,0318 | -0,0203 | -0,0059 | 0,0047 | -0,0002 | -0,0057 |
| 2,6 | -0,0247 | -0,0150 | -0,0029 | -0,0024 | -0,0041 | -0,0058 |
| 2,8 | -0,0181 | -0,0103 | -0,0007 | -0,0063 | -0,0060 | -0,0052 |
| 3,0 | -0,0124 | -0,0064 | 0,0008 | -0,0080 | -0,0064 | -0,0041 |
| 3,5 | -0,0031 | -0,0007 | 0,0020 | -0,0071 | -0,0046 | -0,0014 |
| 4,0 | 0,0007 | 0,0011 | 0,0015 | -0,0040 | -0,0021 | 0,0002 |
| 4,5 | 0,0014 | 0,0011 | 0,0006 | -0,0016 | -0,0005 | 0,0007 |
| 5,0 | 0,0011 | 0,0006 | 0,0000 | -0,0003 | 0,0001 | 0,0005 |
| 5,5 | 0,0006 | 0,0002 | -0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0003 |
| 6,0 | 0,0002 | 0,0000 | -0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0001 |
| 6,5 | 0,0000 | -0,0000 | -0,0001 | 0,0002 | 0,0001 | -0,0000 |
| 7,0 | -0,0000 | -0,0000 | -0,0000 | 0,0001 | 0,0000 | -0,0000 |
| 7,5 | -0,0000 | -0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -0,0000 |
| 8,0 | -0,0000 | -0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -0,0000 |

$\text{tg } \alpha = 1,25$

| | | | | | | |
|-----|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 0,7809 | 0,4878 | 0,1460 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 0,2 | 0,5651 | 0,3436 | 0,0871 | 0,1639 | 0,1077 | 0,0410 |
| 0,4 | 0,3745 | 0,2180 | 0,0389 | 0,2361 | 0,1516 | 0,0520 |

Продолжение табл. 9

| ε | s_1 | s_2 | s_3 | t_1 | t_2 | t_3 |
|---------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,6 | 0,2224 | 0,1201 | 0,0049 | 0,2482 | 0,1548 | 0,0456 |
| 0,8 | 0,1104 | 0,0505 | -0,0152 | 0,2253 | 0,1354 | 0,0316 |
| 1,0 | 0,0344 | 0,0058 | -0,0239 | 0,1856 | 0,1065 | 0,0161 |
| 1,2 | -0,0122 | -0,0194 | -0,0247 | 0,1415 | 0,0763 | 0,0028 |
| 1,4 | -0,0370 | -0,0304 | -0,0208 | 0,1002 | 0,0495 | -0,0067 |
| 1,6 | -0,0465 | -0,0323 | -0,0147 | 0,0655 | 0,0283 | -0,0123 |
| 1,8 | -0,0465 | -0,0290 | -0,0083 | 0,0386 | 0,0128 | -0,0144 |
| 2,0 | -0,0411 | -0,0233 | -0,0027 | 0,0191 | 0,0027 | -0,0141 |
| 2,2 | -0,0335 | -0,0170 | 0,0015 | 0,0061 | -0,0032 | -0,0121 |
| 2,4 | -0,0255 | -0,0113 | 0,0042 | -0,0018 | -0,0060 | -0,0094 |
| 2,6 | -0,0182 | -0,0067 | 0,0057 | -0,0060 | -0,0067 | -0,0066 |
| 2,8 | -0,0122 | -0,0033 | 0,0060 | -0,0077 | -0,0062 | -0,0039 |
| 3,0 | -0,0075 | -0,0010 | 0,0057 | -0,0094 | -0,0051 | -0,0018 |
| 3,5 | -0,0009 | 0,0013 | 0,0034 | -0,0052 | -0,0021 | 0,0013 |
| 4,0 | 0,0010 | 0,0012 | 0,0012 | -0,0024 | -0,0003 | 0,0018 |
| 4,5 | 0,0010 | 0,0005 | -0,0001 | -0,0008 | 0,0003 | 0,0011 |
| 5,0 | 0,0006 | 0,0001 | -0,0004 | -0,0001 | 0,0003 | 0,0006 |
| 5,5 | 0,0003 | -0,0000 | -0,0004 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 |
| 6,0 | 0,0001 | -0,0000 | -0,0002 | 0,0001 | 0,0000 | -0,0000 |
| 6,5 | 0,0000 | -0,0000 | -0,0001 | 0,0001 | -0,0000 | -0,0001 |
| 7,0 | 0,0000 | -0,0000 | -0,0000 | 0,0000 | -0,0000 | -0,0001 |
| 7,5 | -0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -0,0000 |
| 8,0 | -0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -0,0000 |

$\operatorname{tg} \alpha = 1,5$

| | | | | | | |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,0 | 0,8321 | 0,4615 | 0,0640 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 0,2 | 0,5840 | 0,3054 | 0,0156 | 0,1861 | 0,1118 | 0,0298 |
| 0,4 | 0,3628 | 0,1749 | -0,0200 | 0,2576 | 0,1484 | 0,0295 |
| 0,6 | 0,1971 | 0,0793 | -0,0391 | 0,2586 | 0,1410 | 0,0150 |
| 0,8 | 0,0823 | 0,0176 | -0,0439 | 0,2228 | 0,1130 | -0,0027 |
| 1,0 | 0,0106 | -0,0165 | -0,0389 | 0,1732 | 0,0794 | -0,0174 |
| 1,2 | -0,0284 | -0,0309 | -0,0287 | 0,1234 | 0,0485 | -0,0267 |
| 1,4 | -0,0450 | -0,0330 | -0,0170 | 0,0806 | 0,0245 | -0,0303 |
| 1,6 | -0,0476 | -0,0284 | -0,0063 | 0,0476 | 0,0079 | -0,0293 |
| 1,8 | -0,0427 | -0,0212 | 0,0019 | 0,0241 | -0,0020 | -0,0253 |
| 2,0 | -0,0346 | -0,0138 | 0,0074 | 0,0088 | -0,0069 | -0,0198 |
| 2,2 | -0,0250 | -0,0076 | 0,0104 | -0,0003 | -0,0084 | -0,0140 |
| 2,4 | -0,0182 | -0,0031 | 0,0112 | -0,0049 | -0,0078 | -0,0088 |
| 2,6 | -0,0120 | -0,0001 | 0,0107 | -0,0067 | -0,0062 | -0,0044 |
| 2,8 | 0,0073 | 0,0015 | 0,0092 | -0,0068 | -0,0044 | -0,0012 |
| 3,0 | -0,0041 | 0,0022 | 0,0074 | -0,0060 | -0,0028 | 0,0009 |
| 3,5 | -0,0002 | 0,0018 | 0,0031 | -0,0033 | -0,0001 | 0,0029 |
| 4,0 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0005 | -0,0014 | 0,0006 | 0,0023 |
| 4,5 | 0,0006 | 0,0001 | -0,0005 | -0,0005 | 0,0005 | 0,0012 |
| 5,0 | 0,0004 | -0,0001 | -0,0006 | -0,0001 | 0,0002 | 0,0004 |
| 5,5 | 0,0002 | -0,0001 | -0,0004 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 6,0 | 0,0001 | -0,0001 | -0,0002 | 0,0001 | 0,0000 | -0,0001 |
| 6,5 | 0,0000 | -0,0000 | -0,0001 | 0,0001 | -0,0000 | -0,0001 |
| 7,0 | 0,0000 | 0,0000 | -0,0000 | 0,0000 | -0,0000 | -0,0001 |
| 8,0 | -0,0000 | 0,0000 | -0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -0,0000 |

$\operatorname{tg} \alpha = 1,75$

| | | | | | | |
|-----|--------|--------|---------|--------|--------|--------|
| 0,0 | 0,8682 | 0,4308 | -0,0045 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 0,2 | 0,5800 | 0,2640 | -0,0435 | 0,2057 | 0,1141 | 0,0193 |
| 0,4 | 0,3404 | 0,1307 | -0,0668 | 0,2725 | 0,1413 | 0,0084 |

Продолжение табл. 9

| ε | s_1 | s_2 | s_3 | t_1 | t_2 | t_3 |
|---------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,6 | 0,1664 | 0,0407 | -0,0714 | 0,2602 | 0,1229 | -0,0128 |
| 0,8 | 0,0540 | -0,0102 | -0,0619 | 0,1218 | 0,0872 | -0,0322 |
| 1,0 | -0,0096 | -0,0322 | -0,0449 | 0,1542 | 0,0512 | -0,0443 |
| 1,2 | -0,0390 | -0,0359 | -0,0261 | 0,1019 | 0,0225 | -0,0481 |
| 1,4 | -0,0472 | -0,0301 | -0,0094 | 0,0608 | 0,0033 | -0,0452 |
| 1,6 | -0,0439 | -0,0209 | 0,0030 | 0,0317 | -0,0073 | -0,0380 |
| 1,8 | -0,0358 | -0,0119 | 0,0110 | 0,0131 | -0,0114 | -0,0291 |
| 2,0 | -0,0267 | -0,0148 | 0,0149 | 0,0023 | -0,0116 | -0,0201 |
| 2,2 | -0,0186 | 0,0000 | 0,0157 | -0,0032 | -0,0096 | -0,0122 |
| 2,4 | -0,0122 | 0,0027 | 0,0145 | -0,0053 | -0,0069 | -0,0061 |
| 2,6 | -0,0076 | 0,0038 | 0,0123 | -0,0056 | -0,0043 | -0,0017 |
| 2,8 | -0,0044 | 0,0039 | 0,0096 | -0,0050 | -0,0022 | 0,0012 |
| 3,0 | -0,0023 | 0,0034 | 0,0071 | -0,0041 | -0,0006 | 0,0027 |
| 3,5 | -0,0001 | 0,0016 | 0,0023 | -0,0021 | 0,0010 | 0,0033 |
| 4,0 | 0,0003 | 0,0003 | 0,0000 | -0,0010 | 0,0009 | 0,0022 |
| 4,5 | 0,0004 | -0,0002 | -0,0006 | -0,0004 | 0,0005 | 0,0010 |
| 5,0 | 0,0003 | -0,0002 | -0,0005 | -0,0001 | 0,0002 | 0,0003 |
| 5,5 | 0,0002 | -0,0002 | -0,0004 | -0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 6,0 | 0,0001 | -0,0001 | -0,0002 | 0,0001 | -0,0000 | -0,0001 |
| 6,5 | 0,0000 | -0,0000 | -0,0000 | 0,0001 | -0,0000 | -0,0001 |
| 7,0 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -0,0000 | -0,0001 |
| 7,5 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -0,0000 | -0,0000 |
| 8,0 | -0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -0,0000 |

$\operatorname{tg} \alpha = 2,0$

| | | | | | | |
|-----|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0,0 | 0,8944 | 0,4000 | -0,0895 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| 0,2 | 0,5716 | 0,2231 | -0,0907 | 0,2230 | 0,1153 | 0,0098 |
| 0,4 | 0,3124 | 0,0888 | -0,1023 | 0,2818 | 0,1318 | 0,0107 |
| 0,6 | 0,1344 | 0,0069 | -0,0932 | 0,2549 | 0,1024 | 0,0371 |
| 0,8 | 0,0285 | -0,0316 | -0,0708 | 0,1950 | 0,0610 | 0,0562 |
| 1,0 | -0,0245 | -0,0412 | -0,0440 | 0,1323 | 0,0250 | 0,0640 |
| 1,2 | -0,0438 | -0,0354 | -0,0194 | 0,0805 | 0,0005 | -0,0616 |
| 1,4 | -0,0448 | -0,0239 | -0,0007 | 0,0434 | -0,0125 | -0,0525 |
| 1,6 | -0,0375 | -0,0123 | 0,0114 | 0,0197 | -0,0166 | -0,0404 |
| 1,8 | -0,0281 | -0,0033 | 0,0174 | 0,0061 | -0,0160 | -0,0280 |
| 2,0 | -0,0195 | 0,0022 | 0,0190 | -0,0007 | -0,0126 | -0,0174 |
| 2,2 | -0,0128 | 0,0051 | 0,0178 | -0,0035 | -0,0086 | -0,0086 |
| 2,4 | -0,0081 | 0,0060 | 0,0150 | -0,0043 | -0,0050 | -0,0028 |
| 2,6 | -0,0049 | 0,0056 | 0,0118 | -0,0040 | -0,0022 | 0,0005 |
| 2,8 | -0,0029 | 0,0046 | 0,0086 | -0,0034 | -0,0004 | 0,0026 |
| 3,0 | -0,0017 | 0,0035 | 0,0059 | -0,0027 | 0,0007 | 0,0035 |
| 3,5 | -0,0003 | 0,0012 | 0,0016 | -0,0015 | 0,0014 | 0,0032 |
| 4,0 | 0,0002 | 0,0001 | -0,0001 | -0,0008 | 0,0010 | 0,0019 |
| 4,5 | 0,0003 | -0,0002 | -0,0006 | -0,0004 | 0,0005 | 0,0008 |
| 5,0 | 0,0002 | -0,0002 | -0,0005 | -0,0001 | 0,0002 | 0,0003 |
| 5,5 | 0,0002 | -0,0002 | -0,0003 | 0,0000 | -0,0000 | -0,0000 |
| 6,0 | 0,0001 | -0,0001 | -0,0002 | 0,0000 | -0,0000 | -0,0001 |
| 6,5 | 0,0000 | -0,0000 | -0,0000 | 0,0000 | -0,0000 | -0,0001 |
| 7,0 | -0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -0,0000 | -0,0001 |
| 7,5 | -0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | -0,0000 | -0,0000 |
| 8,0 | -0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |

Примечание. Таблица функций $s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3$ была вычислена вычислительным бюро НИИММ при ЛГУ на средства издательского отдела ЛГУ, которым автор приносит свою благодарность.

| ξ | R_y^0 | I_y^0 | m | ψ |
|-------|---------|---------|-------|--------|
| 0,0 | 1,000 | -0,000 | 1,000 | 0°,0 |
| 0,1 | 0,951 | -0,050 | 0,952 | 3,0 |
| 0,2 | 0,899 | -0,100 | 0,905 | 6,5 |
| 0,3 | 0,845 | -0,146 | 0,857 | 9,8 |
| 0,4 | 0,789 | -0,189 | 0,811 | 13,4 |
| 0,5 | 0,733 | -0,227 | 0,767 | 17,1 |
| 0,6 | 0,676 | -0,259 | 0,724 | 21,0 |
| 0,7 | 0,620 | -0,286 | 0,682 | 24,8 |
| 0,8 | 0,565 | -0,309 | 0,643 | 28,6 |
| 0,9 | 0,511 | -0,325 | 0,606 | 32,5 |
| 1,0 | 0,459 | -0,338 | 0,570 | 36,4 |
| 1,1 | 0,409 | -0,346 | 0,536 | 40,3 |
| 1,2 | 0,361 | -0,351 | 0,504 | 44,2 |
| 1,3 | 0,315 | -0,352 | 0,473 | 48,2 |
| 1,4 | 0,273 | -0,351 | 0,445 | 52,2 |
| 1,5 | 0,232 | -0,346 | 0,417 | 56,3 |
| 1,6 | 0,195 | -0,339 | 0,391 | 60,2 |
| 1,7 | 0,160 | -0,330 | 0,367 | 64,2 |
| 1,8 | 0,128 | -0,319 | 0,344 | 68,2 |
| 1,9 | 0,099 | -0,307 | 0,323 | 72,3 |
| 2,0 | 0,073 | -0,293 | 0,302 | 76,2 |
| 2,2 | 0,027 | -0,266 | 0,267 | 84,2 |
| 2,4 | -0,009 | -0,234 | 0,234 | 92,2 |
| 2,6 | -0,036 | -0,201 | 0,204 | 100,2 |
| 2,8 | -0,056 | -0,170 | 0,179 | 108,5 |
| 3,0 | -0,070 | -0,140 | 0,157 | 116,5 |
| 3,2 | -0,077 | -0,113 | 0,137 | 124,6 |
| 3,4 | -0,081 | -0,088 | 0,120 | 132,7 |
| 3,6 | -0,081 | -0,066 | 0,104 | 140,8 |
| 3,8 | -0,078 | -0,047 | 0,091 | 148,9 |
| 4,0 | -0,073 | -0,031 | 0,079 | 157,0 |
| 4,5 | -0,057 | -0,003 | 0,058 | 177,0 |
| 5,0 | -0,038 | +0,032 | 0,050 | 220,0 |

В. А. Фок

О РАСЧЕТЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА ПРИ НАЛИЧИИ ПЛОСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА

Для вычисления электромагнитного поля при наличии плоской поверхности раздела (токи в земле, беспроводная телеграфия) естественно применять метод интегрального представления искомого решения в виде интеграла Фурье, содержащего бесселевы функции. Этот метод с особым успехом применялся А. Зоммерфельдом [57]. В работе В. А. Фока, В. Р. Бурсиана [см. 1 ч., 105] задача об определении электромагнитного поля переменного тока в цепи с двумя заземлениями привела к интегралам зоммерфельдовского типа, и значения этих интегралов на поверхности земли были выражены через произведения бесселевых функций первого и третьего рода. Ввиду того что результаты указанной работы могут оказаться полезными при исследовании решений различных задач данного типа, мы изложим их здесь в несколько дополненном виде.

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим бесконечно тонкий кабель, уложенный произвольным образом на поверхности земли и заземленный на концах. Действующая в кабеле электродвижущая сила возбуждает в нем силу тока I , которую будем считать заданной. Земная поверхность принимается за бесконечную плоскость. Оба полупространства, разделенные земной поверхностью (верхнее полупространство — воздух, нижнее — земля) предполагаются однородными и изотропными. Требуется найти электромагнитное поле во всем пространстве.

Для математической постановки задачи рассмотрим особые точки и особые линии поля. Особыми точками являются электроды (заземленные концы кабеля). Вблизи них электрическое поле должно обращаться в бесконечность, притом так, что интеграл

$$\iint \left(\sigma E_n + \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{\partial E_n}{\partial t} \right) dS = \pm I, \quad (1)$$

взятый по поверхности бесконечно малой сферы с центром в электроде, был равен полной силе тока I (взятой для одного электрода

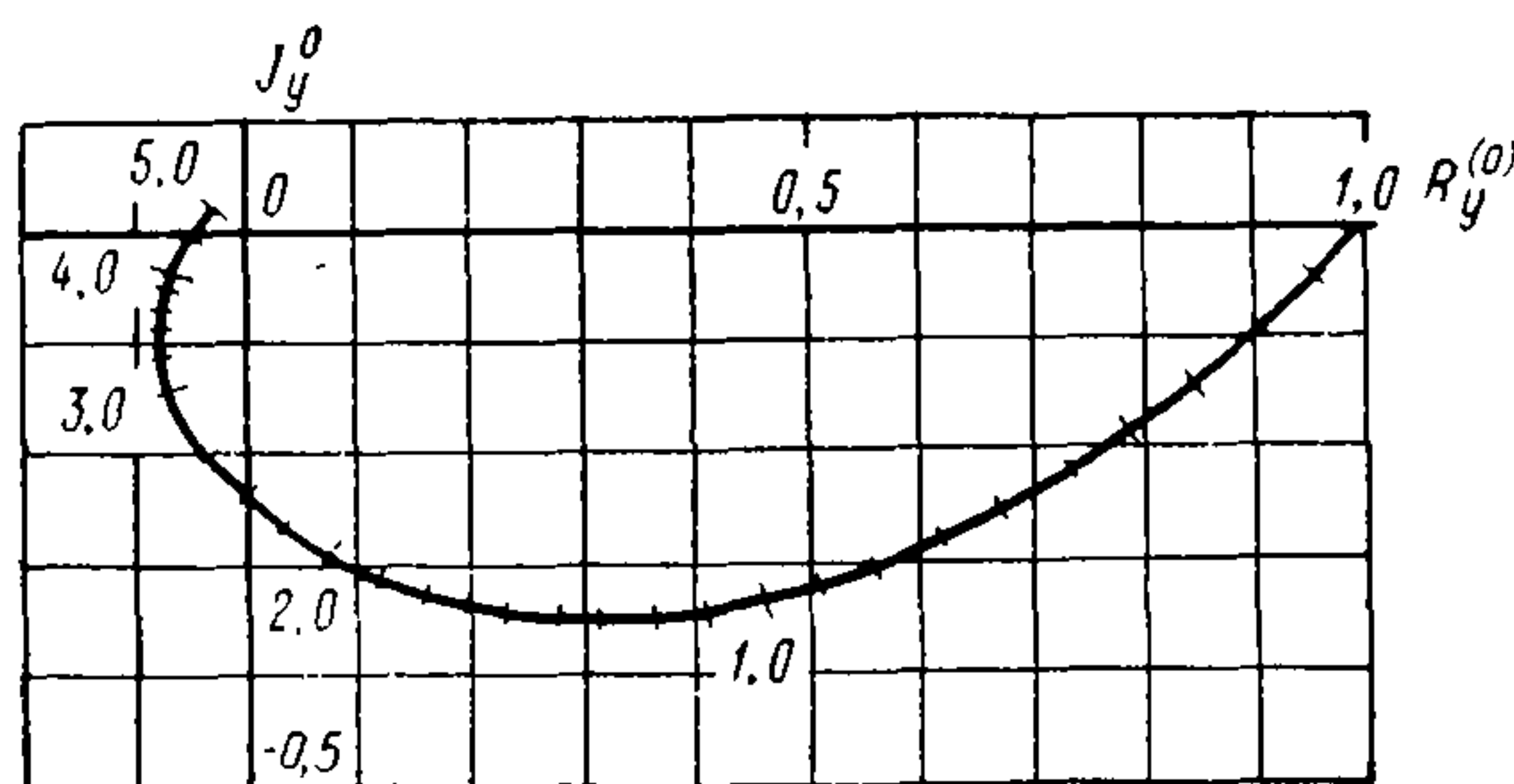


Рис. 36.

с положительным, а для другого с отрицательным знаком). Здесь величина σE_n есть плотность тока проводимости, а величина $\frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{\partial E_n}{\partial t}$ — плотность тока смещения. Из равенства (1) вытекает, что вблизи электрода (на бесконечно малом расстоянии r от него) напряженность электрического поля должна быть порядка $1/r^2$.

Далее, особой линией является кабель: вблизи него обращается в бесконечность магнитное поле, притом так, что криволинейный интеграл

$$\int H_s ds = \frac{4\pi}{c} I, \quad (2)$$

взятый по бесконечно малой замкнутой кривой охватывающей кабель, должен быть равен умноженной на $4\pi/c$ силе тока I . Отсюда следует, что напряженность магнитного поля возрастает по мере приближения к кабелю как $1/r$, где r — расстояние от точки наблюдения до кабеля.

Обратимся теперь к уравнениям Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \text{rot } \mathbf{H}; & \text{div } \mu \mathbf{H} &= 0; \\ -\frac{\mu}{c} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= \text{rot } \mathbf{E}; & \text{div } \varepsilon \mathbf{E} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Величины относящиеся к нижнему полупространству (земля) мы будем обозначать буквами без штрихов, величины же, относящиеся к верхнему полупространству (воздух) будем отмечать штрихами. Для воздуха будет $\sigma' = 0$; но чтобы избежать затруднений, связанных с расходимостью некоторых интегралов, мы будем считать $\sigma' > 0$ и лишь в окончательном результате приравняем σ' к нулю. Магнитные проницаемости земли и воздуха мы будем считать одинаковыми (и равными единице).

Так как мы интересуемся периодическим решением, положим

$$I = I_0 e^{-i\omega t}; \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}. \quad (4)$$

Для краткости введем обозначения

$$\frac{4\pi\sigma}{c} - i \frac{\omega\varepsilon}{c} = l; \quad -\frac{i\omega\mu l}{c} = -\frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2} - j \frac{4\pi\sigma\omega\mu}{c^2} = k^2, \quad (5)$$

причем будем считать вещественную часть k положительной. В силу предположения, что $\sigma > 0$,

$$\text{Re } k > 0 \quad (6)$$

знак равенства здесь исключен. С обычно употребляемой величиной k_0 только что введенная величина k связана соотношением $k_0 = ik$. Использование k вместо k_0 имеет преимущество, т. к. все вычисления можно вести в предположении, что k вещественно и положительно.

Из предположения $\mu = \mu'$ вытекает равенство

$$\frac{k^2}{l} = \frac{k'^2}{l'}. \quad (7)$$

Сокращая обе части уравнений Максвелла на временной множитель, мы получим

$$\left. \begin{aligned} l\mathbf{E}_0 &= \text{rot } \mathbf{H}_0; & \text{div } \mathbf{H}_0 &= 0; \\ -k^2\mathbf{H}_0 &= l \text{rot } \mathbf{E}_0; & \text{div } \mathbf{E}_0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Равенства (1) и (2), определяющие особенности поля, принимают теперь вид

$$\iint l E_{on} dS = \pm \frac{4\pi}{c} I_0; \quad (9)$$

$$\int H_{os} ds = \frac{4\pi}{c} I_0. \quad (10)$$

Совместим поверхность земли с плоскостью XY и направим ось Z вертикально вверх. Тогда предельные условия на поверхности земли (при $z = 0$) будут иметь вид

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{H}'_0; \quad E_{ox} = E'_{ox}; \quad E_{oy} = E'_{oy}; \quad lE_{oz} = l'E'_{oz}. \quad (11)$$

Введем вектор \mathbf{A} , составляющие которого удовлетворяют уравнению

$$\Delta \mathbf{A} - k^2 \mathbf{A} = 0 \quad (12)$$

в земле и аналогичному уравнению в воздухе; положив

$$\mathbf{H}_0 = \text{rot } \mathbf{A}; \quad l\mathbf{E}_0 = \text{grad div } \mathbf{A} - k^2 \mathbf{A}, \quad (13)$$

мы удовлетворим уравнениям Максвелла.

Далее, если мы потребуем, чтобы на земной поверхности было

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}'; \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} &= \frac{\partial A'_x}{\partial z}; \quad \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A'_y}{\partial z}; \\ \frac{1}{k^2} \text{div } \mathbf{A} &= \frac{1}{k'^2} \text{div } \mathbf{A}', \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

то будут удовлетворены и предельные условия (11) для поля.

Нужно еще позаботиться о том, чтобы решение имело необходимые особенности. Положим

$$\left. \begin{aligned} \text{div } \mathbf{A} &= \frac{2I_0 k^2}{c(k^2 + k'^2)} \left(\frac{e^{-kr_1}}{r_1} - \frac{e^{-kr_2}}{r_2} \right) + \varphi; \\ \text{div } \mathbf{A}' &= \frac{2I_0 h'^2}{c(k^2 + k'^2)} \left(\frac{e^{-k'r_1}}{r_1} - \frac{e^{-k'r_2}}{r_2} \right) + \varphi', \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где r_1 и r_2 — расстояния от точки наблюдения до первого и второго заземления (электрода). Тогда условие (9) будет выполняться, если функции ϕ и ϕ' везде конечные.

Обозначим буквой C разность

$$A - \frac{I_0}{c} \int_{(1)}^{(2)} \frac{ds}{r} = C, \quad (16)$$

где криволинейный интеграл берется вдоль кабеля от первого заземления до второго; символ ds обозначает векторный линейный элемент, r — его удаление от точки наблюдения. Если мы потребуем, чтобы вектор C и его первые производные по координатам оставались конечными при приближении к кабелю (за исключением, быть может, его концов), то будет удовлетворено и условие (10).

Следует отметить, что условия (14), (15) и (16) не являются независимыми. Для выполнения требований (9), (10) и (11) они достаточны, но не необходимы.

Можно показать [57], что поставленные нами условия определяют вектор A , а с ним и электромагнитное поле, однозначным образом.

РЕШЕНИЕ В ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛАХ

Переходя к выводу выражения для вектора A , мы займемся сперва его горизонтальными составляющими A_x и A_y . Следуя Зоммерфельду, мы построим решение $\Pi(\rho, z)$ (где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$) волнового уравнения, которое непрерывно вместе со своей нормальной производной на земной поверхности, а в начале координат обращается в бесконечность как $1/r$. Значение этой функции в нижней среде (в земле) мы обозначим через Π , а значение в верхней среде (в воздухе) через Π' . Таким образом, искомая функция должна удовлетворять следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Pi - k^2 \Pi &= 0 & \text{при } z < 0; \\ \Delta \Pi' - k'^2 \Pi' &= 0 & \text{при } z > 0; \\ \Pi(\rho, z) - \frac{e^{-k\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}} &= \text{конечной функции (при } z \leq 0); \\ \Pi'(\rho, z) - \frac{e^{-k'\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}} &= \text{конечной функции (при } z > 0); \\ \Pi(\rho, 0) &= \Pi'(\rho, 0); \\ \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}\right)_{z=0} &= \left(\frac{\partial \Pi'}{\partial z}\right)_{z=0}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Эти уравнения определяют функцию $\Pi(\rho, z)$ единственным образом. Если мы будем искать $\Pi(\rho, z)$ в виде определенного интеграла,

содержащего бesselову функцию $J_0(\lambda, \rho)$, мы придем к выражению полученному Зоммерфельдом

$$\left. \begin{aligned} \Pi(\rho, z) &= \int_0^\infty \frac{2J_0(\lambda\rho) e^{z\sqrt{\lambda^2+k^2}}}{\sqrt{\lambda^2+k^2} + \sqrt{\lambda^2+k'^2}} \lambda d\lambda = \\ &= \frac{e^{-k\sqrt{\rho^2+z^2}}}{\sqrt{\rho^2+z^2}} + (k^2 - k'^2) \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda\rho) e^{z\sqrt{\lambda^2+k^2}}}{(\sqrt{\lambda^2+k^2} + \sqrt{\lambda^2+k'^2})^2} \cdot \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2+k'^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Это выражение справедливо при $z < 0$. Соответствующее выражение для $\Pi'(\rho, z)$, справедливое при $z > 0$, получается из (18) заменой k на k' (и обратно) и заменой z на $-z$. Все квадратные корни берутся с положительной вещественной частью.

Горизонтальные составляющие вектор-потенциала A могут быть теперь выражены через Π . Ось кабеля является у нас особенной линией. Пусть параметрические уравнения соответствующей кривой имеют вид

$$x = \zeta(s); \quad y = \eta(s); \quad z = 0 \quad (s_1 \leq s < s_2). \quad (19)$$

Можем тогда положить (при $z < 0$)

$$\left. \begin{aligned} A_x &= \frac{I_0}{c} \int_{s_1}^{s_2} \Pi(\sqrt{(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2}, z) \zeta'(s) ds; \\ A_y &= \frac{I_0}{c} \int_{s_1}^{s_2} \Pi(\sqrt{(x-\zeta)^2 + (y-\eta)^2}, z) \eta'(s) ds \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

и аналогично при $z > 0$. В самом деле, эти выражения удовлетворяют условиям (14) и (16), если только A_z не будет иметь особенностей на линии кабеля.

Для определения вертикальной составляющей A_z мы должны помимо условия непрерывности $A_z = A'_z$ при $z = 0$ использовать также и последнее из условий (14). В силу непрерывности A_x и A_y это условие дает

$$\frac{1}{k^2} \cdot \frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{1}{k'^2} \cdot \frac{\partial A'_z}{\partial z} = \left(\frac{1}{k'^2} - \frac{1}{k^2} \right) \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} \right) \quad (\text{при } z = 0).$$

Вычисляя входящее в правую часть выражение, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} &= \frac{I_0}{c} \int_{(1)}^{(2)} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} d\zeta + \frac{\partial \Pi}{\partial y} d\eta \right) = \\ &= - \frac{I_0}{c} \int_{(1)}^{(2)} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \zeta} d\zeta + \frac{\partial \Pi}{\partial \eta} d\eta \right) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = \frac{I_0}{c} [\Pi(\rho_1, z) - \Pi(\rho_2, z)], \quad (21)$$

где ρ_1 и ρ_2 — горизонтальные проекции расстояний точки наблюдения от обоих концов кабеля.

Таким образом, условия для A_z на поверхности земли принимают вид

$$k'^2 \frac{\partial A_z}{\partial z} - k^2 \frac{\partial A'_z}{\partial z} = \frac{I_0}{c} (k^2 - k'^2) [\Pi(\rho_1, 0) - \Pi(\rho_2, 0)]; \quad (22a)$$

$$A_z = A'_z. \quad (22b)$$

Уравнения (22) будут удовлетворяться, если мы положим

$$A_z = \frac{I_0}{c} [F(\rho_1, z) - F(\rho_2, z)] \quad (23)$$

и подчиним $F(\rho, z)$ волновому уравнению (12) и предельным условиям

$$\left. \begin{aligned} F &= F'; \\ k'^2 \frac{\partial F}{\partial z} - k^2 \frac{\partial F'}{\partial z} &= (k^2 - k'^2) \Pi(\rho, 0). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Определяя отсюда функцию $F(\rho, z)$, получаем для нее (при $z < 0$) выражение

$$F(\rho, z) = \int_0^\infty \frac{2(k^2 - k'^2) J_0(\lambda \rho) e^{z\sqrt{\lambda^2 + k^2}} \lambda d\lambda}{(\sqrt{\lambda^2 + k^2} + \sqrt{\lambda^2 + k'^2})(k^2 \sqrt{\lambda^2 + k'^2} + k'^2 \sqrt{\lambda^2 + k^2})}. \quad (25)$$

Соответствующее выражение для $z > 0$ получается из (25) заменой множителя $e^{z\sqrt{\lambda^2 + k^2}}$ на $e^{-z\sqrt{\lambda^2 + k'^2}}$.

Из формул (21) и (23) следует, что величина $\text{div } \mathbf{A}$ может быть представлена в виде

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{I_0}{c} [\Phi(\rho_1, z) - \Phi(\rho_2, z)], \quad (26)$$

где $\Phi(\rho, z)$ имеет значение

$$\Phi(\rho, z) = \Pi(\rho, z) + \frac{\partial F}{\partial z}. \quad (27)$$

Из формул (18) и (25) получается для Φ интегральное представление

$$\Phi(\rho, z) = \int_0^\infty \frac{2k^2 J_0(\lambda \rho) e^{z\sqrt{\lambda^2 + k^2}}}{k^2 \sqrt{\lambda^2 + k'^2} + k'^2 \sqrt{\lambda^2 + k^2}} \lambda d\lambda. \quad (28)$$

Соответствующее выражение, справедливое при $z > 0$, получается из (28) перестановкой k и k' и заменой z на $-z$.

Функцию $\Phi(\rho, z)$ можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\rho, z) &= \frac{2k^2}{k^2 + k'^2} \cdot \frac{e^{-kr}}{r} + \Phi_0(\rho, z) \quad z < 0; \\ \Phi'(\rho, z) &= \frac{2k'^2}{k^2 + k'^2} \cdot \frac{e^{-k'r}}{r} + \Phi'_0(\rho, z) \quad z > 0, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где функции Φ_0 и Φ'_0 остаются везде конечными. При этом будет

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = \frac{k^4}{k^2 + k'^2} F(\rho, z); \quad \frac{\partial \Phi'_0}{\partial z} = \frac{k'^4}{k^2 + k'^2} F'(\rho, z). \quad (30)$$

Из формул (26) и (29) видно, что величина $\text{div } \mathbf{A}$ имеет требуемую особенность, так что условия (15) уже содержатся в остальных условиях. Формулы (18), (20), (25) и (23) определяют электромагнитное поле для рассматриваемой задачи единственным образом.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Определенные интегралы, через которые выражается решение нашей задачи, встречаются также в многочисленных других задачах; можно сказать, что они встречаются каждый раз, когда приходится вычислять поле в двух полупространствах, разделенных бесконечной плоскостью. Так, например, задачи об электрической и магнитной, горизонтальной и вертикальной антеннах, рассмотренные Зоммерфельдом в его статье об электромагнитных колебаниях [57], приводят к интегралам того же типа. Поэтому всякое преобразование этих интегралов, облегчающее их вычисление, представляется полезным и для других задач.

В случае больших «численных расстояний», т. е. в волновой зоне, общее исследование интегралов лучше всего проводить по способу указанному Вейлем [72] (разложение на плоские волны). Мы не будем, однако, рассматривать общего случая, а остановимся на двух важных частных случаях и рассмотрим, во-первых, поле на земной поверхности (при $z = 0$) и, во-вторых, поле квазистационарное ($k' = 0$; $k = |k| \frac{1-i}{\sqrt{2}}$). В этих случаях интегралы можно существенно упростить и частично выразить в конечном виде через известные функции.

Поле на земной поверхности

Особенно важно знание поля при $z = 0$, так как именно на земной поверхности проводится в обычных условиях его измерение. Кроме того, если волновая функция и ее нормальная производная известны при $z = 0$, то ее высшие производные могут быть получены из волнового уравнения и волновая функция может быть аналитически продолжена в область $z > 0$ или $z < 0$. Таким путем получается разложение волновой функции в ряд Тейлора по степеням z , для высот (z , соответственно, глубин), малых по сравнению с длиной

волны и с расстоянием до особых точек, этим рядом можно пользоваться для численных расчетов.

Итак, мы полагаем $z = 0$. Все интегралы, входящие в наши формулы, могут быть тогда выражены через следующий определенный интеграл:

$$L_\nu = \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) \left(\frac{\sqrt{\lambda^2+k^2} - \sqrt{\lambda^2+k'^2}}{\sqrt{\lambda^2+k^2} + \sqrt{\lambda^2+k'^2}} \right)^\nu \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2+k^2} \sqrt{\lambda^2+k'^2}}. \quad (31)$$

Выражения эти получаются либо в конечном виде, либо в виде рядов, которые можно затем суммировать. Покажем, что при

$$\operatorname{Re}(k) > \operatorname{Re}(k') \geq 0 \quad (32)$$

справедлива следующая формула:

$$L_\nu = I_\nu \left(\rho \frac{k-k'}{2} \right) K_\nu \left(\rho \frac{k+k'}{2} \right), \quad (33)$$

где $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ — бесселевы функции от мнимого аргумента, которые можно определить посредством равенств

$$I_\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} \operatorname{ch}(xt) (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} dt; \quad (34)$$

$$K_\nu(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_1^\infty e^{-xt} (t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}} dt. \quad (35)$$

Мы используем здесь обозначения Ватсона [7]; с обычными функциями Бесселя и Ханкеля функции I_ν и K_ν связаны следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} I_\nu(x) &= e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} J_\nu(ix); \\ K_\nu(x) &= \frac{\pi}{2} e^{\frac{1}{2}(\nu+1)\pi i} H_\nu^{(1)}(ix). \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Для доказательства формулы (33) нам будут нужны приведенная у Ватсона формула

$$M_\nu = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda\rho) \lambda d\lambda}{(\lambda^2+\kappa^2)^{\nu+1}} = \frac{\rho^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \cdot \frac{K_\nu(\kappa\rho)}{\kappa^\nu} \quad (37)$$

([7], формула (2), с. 477), а также справедливая при $\operatorname{Re}(a) > \operatorname{Re}(b)$ теорема сложения бесселевых функций (там же, формула (8), с. 398)

$$\left. \begin{aligned} &\frac{K_\nu(\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\vartheta})}{(\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\vartheta})^\nu} = \\ &= 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{m=0}^\infty (\nu+m) \frac{K_{\nu+m}(a)}{a^\nu} \frac{I_{\nu+m}(b)}{b^\nu} C_m^\nu(\cos\vartheta). \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Входящие в последнюю формулу полиномы $C_m^\nu(\cos\nu)$ определяются из равенства

$$(1-2\alpha\cos\vartheta+\alpha^2)^{-\nu} = \sum_{m=0}^\infty \alpha^m C_m^\nu(\cos\vartheta), \quad (39)$$

они удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_0^\pi \sin^{2\nu}\vartheta C_m^\nu(\cos\vartheta) C_n^\nu(\cos\vartheta) d\vartheta = \frac{\pi \Gamma(2\nu+n)}{2^{2\nu-1} (\nu+n) n! \Gamma^2(\nu)} \delta_{mn}, \quad (40)$$

которое в соединении с формулой (38) приводит к

$$\left. \begin{aligned} &\int_0^\pi \frac{K_\nu(\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\vartheta})}{(\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\vartheta})^\nu} C_n^\nu(\cos\vartheta) \sin^{2\nu}\vartheta d\vartheta = \\ &= \frac{\pi}{2^{2\nu-1}} \cdot \frac{\Gamma(2\nu+n)}{n! \Gamma(\nu)} \cdot \frac{K_{\nu+n}(a) I_{\nu+n}(b)}{a^\nu b^\nu}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

В частности, при $n=0$ мы имеем $C_0^\nu=1$ и

$$\left. \begin{aligned} &\int_0^\pi \frac{K_\nu(\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\vartheta})}{(\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\vartheta})^\nu} \sin^{2\nu}\vartheta d\vartheta = \\ &= \sqrt{\pi} 2^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \frac{K_\nu(a) I_\nu(b)}{a^\nu b^\nu}. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Для доказательства формулы (33) положим в равенстве (37)

$$\kappa^2 = k^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + k'^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}, \quad (43)$$

умножим обе части этого равенства на $\sin^{2\nu} d\vartheta$ и проинтегрируем по ϑ от 0 до π , получим соотношение вида

$$\int_0^\pi M_\nu \sin^{2\nu}\vartheta d\vartheta = \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) A \lambda d\lambda, \quad (44)$$

где введено временное обозначение

$$A = \int_0^{\pi} \frac{\sin^{2\nu} \vartheta d\vartheta}{\left(\lambda^2 + k^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + k'^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}\right)^{\nu+1}}. \quad (45)$$

Если положить для краткости

$$\alpha = \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2} - \sqrt{\lambda^2 + k'^2}}{\sqrt{\lambda^2 + k^2} + \sqrt{\lambda^2 + k'^2}}, \quad |\alpha| < 1, \quad (46)$$

то будет

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha} \right) &= \frac{\sqrt{\lambda^2 + k^2}}{\sqrt{k^2 - k'^2}}; \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha} \right) &= \frac{\sqrt{\lambda^2 + k'^2}}{\sqrt{k^2 - k'^2}} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

и интеграл A запишется в виде

$$A = \left(\frac{4\alpha}{k^2 - k'^2} \right)^{\nu+1} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \vartheta d\vartheta}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \vartheta)^{\nu+1}}.$$

Посредством подстановки

$$\cos \vartheta = x = \alpha(1 - t^2) + t \sqrt{1 - \alpha^2(1 - t^2)};$$

$$\frac{1 - x^2}{1 + \alpha^2 - 2\alpha x} = 1 - t^2;$$

$$\frac{dx}{(1 + \alpha^2 - 2\alpha x)^{3/2}} = \frac{1}{1 - \alpha^2} \left(1 + \frac{\alpha t}{\sqrt{1 - \alpha^2(1 - t^2)}} \right) dt$$

интеграл A может быть упрощен;

$$A = \left(\frac{4\alpha}{k^2 - k'^2} \right)^{\nu+1} \frac{1}{1 - \alpha^2} \int_{-1}^{+1} (1 - t^2)^{\nu - \frac{1}{2}} dt.$$

Вследствие

$$\frac{4\alpha}{k^2 - k'^2} \cdot \frac{1}{1 - \alpha^2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + k^2} \sqrt{\lambda^2 + k'^2}}$$

получаем окончательно

$$A = \left(\frac{4}{k^2 - k'^2} \right)^{\nu} \frac{\alpha^{\nu}}{\sqrt{\lambda^2 + k^2} \sqrt{\lambda^2 + k'^2}} \cdot \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\nu + 1)}. \quad (48)$$

Если ввести это значение A в интеграл (44) и воспользоваться обозначениями (31), (46) и (37), то получится

$$\left. \begin{aligned} L_{\nu} &= \int_0^{\infty} J_0(\lambda \rho) \alpha^{\nu} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2} \sqrt{\lambda^2 + k'^2}} = \\ &= \left(\frac{k^2 - k'^2}{4} \right)^{\nu} \frac{\Gamma(\nu + 1)}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi} M_{\nu} \sin^{2\nu} \vartheta d\vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

а подставив сюда выражение для M_{ν} из правой части формулы (37), будем иметь

$$L_{\nu} = \frac{\left(\rho \frac{k^2 - k'^2}{8}\right)^{\nu}}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi} \frac{K_{\nu}(x\rho)}{x^{\nu}} \sin^{2\nu} \vartheta d\vartheta. \quad (50)$$

Интеграл в правой части может быть вычислен при помощи соотношения (42), если в нем положить

$$a = \rho \frac{k + k'}{2}; \quad b = \rho \frac{k - k'}{2}. \quad (51)$$

В результате мы получаем формулу [см. I ч., 105]

$$L_{\nu} = \int_0^{\infty} J_0(\lambda \rho) \rho^{\nu} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2} \sqrt{\lambda^2 + k'^2}} = I_{\nu} \left(\rho \frac{k - k'}{2} \right) K_{\nu} \left(\rho \frac{k + k'}{2} \right), \quad (52)$$

которую мы имели в виду доказать. Формула эта справедлива, при условии (32), для всех значений ν , для которых интеграл сходится, т. е. для всех ν с вещественной частью $\text{Re}(\nu) > -3/4$. Но в дальнейшем мы будем пользоваться ею только для целых и полужелых значений ν .

Применим полученную формулу к вычислению (при $z = 0$) интегралов, через которые выражено решение нашей задачи. Рассмотрим сперва интеграл Π (формула 18). Напишем Π в виде

$$\Pi(\rho, 0) = \int_0^{\infty} J_0(\lambda \rho) \varphi \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2} \sqrt{\lambda^2 + k'^2}}, \quad (53)$$

где

$$\varphi = \frac{2 \sqrt{\lambda^2 + k^2} \sqrt{\lambda^2 + k'^2}}{\sqrt{\lambda^2 + k^2} + \sqrt{\lambda^2 + k'^2}}. \quad (54)$$

Если φ выражается через величину α (46) в виде суммы

$$\varphi = \sum_{\nu} \varphi_{\nu} \alpha^{\nu}, \quad (55)$$

то интеграл (53) будет равен

$$\Pi(\rho, 0) = \sum_{\nu} \varphi_{\nu} I_{\nu} \left(\rho \frac{k-k'}{2} \right) K_{\nu} \left(\rho \frac{k+k'}{2} \right). \quad (56)$$

В нашем случае простое вычисление дает

$$\varphi = \frac{1}{2} \sqrt{k^2 - k'^2} (\alpha^{-1/2} - \alpha^{+1/2}), \quad (57)$$

так что сумма (55) будет конечной, и мы получаем

$$\Pi(\rho, 0) = \frac{1}{2} \sqrt{k^2 - k'^2} (I_{-1/2} K_{-1/2} - I_{1/2} K_{1/2}), \quad (58)$$

где аргументы бесселевых функций подразумеваются [они будут те же, что в (56)]. Если выразить здесь функции Бесселя через показательную функцию, получается простая формула [см. I ч., 105]

$$\Pi(\rho, 0) = \frac{2}{k^2 - k'^2} \cdot \frac{1}{\rho^3} [1 + k'\rho] e^{-ik'\rho} - (1 + k\rho) e^{-k\rho}. \quad (59)$$

При $k' \rightarrow k$ это выражение стремится к пределу, равному $e^{-k\rho}/\rho$, как это и должно быть.

Аналогичным образом можно вычислить и значение при $z = 0$ нормальной производной от Π . Используя сокращенное обозначение (46), мы можем написать

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)_0 = \frac{k^2 - k'^2}{4} \int_0^{\infty} J_0(\lambda\rho) (1 - \alpha^2) \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2} \sqrt{\lambda^2 + k'^2}} \quad (60)$$

и, следовательно, [см. I ч., 105]

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)_0 = \frac{k^2 - k'^2}{4} \left[I_0 \left(\rho \frac{k-k'}{2} \right) K_0 \left(\rho \frac{k+k'}{2} \right) - I_2 \left(\rho \frac{k-k'}{2} \right) K_2 \left(\rho \frac{k+k'}{2} \right) \right]. \quad (61)$$

Сложнее вычисляются интегралы Φ и F [формулы (28) и (25)], так как знаменатель в них содержит выражение

$$N = k^2 \sqrt{\lambda^2 + k'^2} + k'^2 \sqrt{\lambda^2 + k^2}, \quad (62)$$

и нам придется разлагать по степеням α обратную величину этого выражения; напомним $\Phi(\rho, -0)$ в виде

$$\Phi(\rho, -0) = \int_0^{\infty} J_0(\lambda\rho) \varphi \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2} \sqrt{\lambda^2 + k'^2}}. \quad (63)$$

Величина φ будет теперь равна

$$\varphi = \frac{2k^2 \sqrt{\lambda^2 + k^2} \sqrt{\lambda^2 + k'^2}}{k^2 \sqrt{\lambda^2 + k'^2} + k'^2 \sqrt{\lambda^2 + k^2}} \quad (64)$$

или, если ее выразить через α ,

$$\varphi = \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + k'^2}} \cdot \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{1 - \alpha^2}{1 - q\alpha}; \quad (65)$$

положили здесь для краткости

$$q = \frac{k^2 - k'^2}{k^2 + k'^2}. \quad (66)$$

Поскольку квадрат «комплексного показателя преломления», т. е. выражение

$$n^2 = \frac{k^2}{k'^2} = \varepsilon + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}, \quad (67)$$

имеет положительную вещественную часть, будет $|q| < 1$.

Разложение φ по степеням α имеет вид

$$\varphi = \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + k'^2}} \left[\sqrt{q} \alpha^{-1/2} + \frac{1}{\sqrt{q}} \alpha^{1/2} + \left(q - \frac{1}{q} \right) \sum_{m=0}^{\infty} q^{m+\frac{1}{2}} \alpha^{m+\frac{1}{2}} \right], \quad (68)$$

если мы теперь обозначим через S сумму

$$S = 2 \sum_{m=0}^{\infty} q^{m+\frac{1}{2}} I_{m+\frac{1}{2}} \left(\rho \frac{k-k'}{2} \right) K_{m+\frac{1}{2}} \left(\rho \frac{k+k'}{2} \right), \quad (69)$$

то мы будем иметь

$$\Phi(\rho, -0) = \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + k'^2}} \left[\sqrt{q} I_{-1/2} K_{-1/2} + \frac{1}{\sqrt{q}} I_{1/2} K_{1/2} + \frac{1}{2} \left(q - \frac{1}{q} \right) S \right]. \quad (70)$$

Сумма S допускает простое представление. В самом деле, положив в теореме сложения (38) $\nu = 1/2$ и использовав сокращенное обозначение (43), мы будем иметь

$$\frac{e^{-\kappa\rho}}{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{\rho}{\kappa}} K_{1/2}(\kappa\rho) = \frac{4}{\sqrt{k^2 - k'^2}} \sum_{m=0}^{\infty} \left(m + \frac{1}{2} \right) \times \left. \begin{aligned} & \times I_{m+\frac{1}{2}} \left(\rho \frac{k-k'}{2} \right) K_{m+\frac{1}{2}} \left(\rho \frac{k+k'}{2} \right) P_m \cos \vartheta, \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

где P_m — полиномы Лежандра.

С другой стороны, величину q^m в сумме S можно представить в виде

$$q^m = \int_0^{\pi} \left(m + \frac{1}{2} \right) P_m(\cos \vartheta) \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{1 - 2q \cos \vartheta + q^2}}. \quad (72)$$

Вводя выражение (72) в формулу (69) и используя (71), мы получим

$$S = \frac{k^2 - k'^2}{2\sqrt{k^2 + k'^2}} \int_0^\pi \frac{e^{-\kappa\rho}}{\kappa} \cdot \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{\sqrt{1 - 2q \cos \vartheta + q^2}}. \quad (73)$$

В интеграле (73) мы можем взять в качестве переменной интегрирования величину κ , получим тогда простое выражение

$$S = \int_{k'}^k e^{-\kappa\rho} \frac{d\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - h^2}}, \quad (74)$$

где положено для краткости

$$h^2 = \frac{k^2 k'^2}{k^2 + k'^2}. \quad (75)$$

В формуле (70) мы можем выразить бесселевы функции через $e^{-k\rho}$ и $e^{-k'\rho}$ и ввести туда выражение (74) для S . В результате мы получим для $\Phi(\rho, -0)$ следующее явное выражение:

$$\Phi(\rho, -0) = \frac{2k^2}{k^4 - k'^4} \left[\frac{1}{\rho} (k^2 e^{-k'\rho} - k'^2 e^{-k\rho}) - \right. \\ \left. - kk'h \int_{k'}^k e^{-\kappa\rho} \frac{d\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - h^2}} \right]. \quad (76)$$

Значение $\Phi(\rho, +0)$ получается из формулы (76) после умножения на k'^2/k^2 . Когда k' стремится к k , выражение (76) приводится к $e^{-k\rho}/\rho$, как и должно быть*.

Переходим к вычислению значения при $z=0$ функции $F(\rho, z)$, определяемой формулой (25). Напишем $F(\rho, 0)$ в виде

$$F(\rho, 0) = \int_0^\infty J_0(\lambda\rho) \varphi \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2} \sqrt{\lambda^2 + k'^2}}, \quad (77)$$

в этом случае функция φ равна

$$\varphi = \frac{q(1 - \alpha^2)}{1 - q\alpha}. \quad (78)$$

Разложение φ в степенной ряд мы будем писать в виде

$$\varphi = \frac{1}{2} \left(q + \frac{1}{q} \right) + \alpha + \frac{1}{2} \left(q - \frac{1}{q} \right) \left[1 + 2 \sum_{m=1}^\infty q^m \alpha^m \right] \quad (79)$$

* При $k' \rightarrow k$ члены с показательными функциями стремятся к $e^{-k\rho} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{k}{2} \right)$, а вычитаемый член с интегралом имеет предел $\frac{k}{2} e^{-k\rho}$.

и получим для $F(\rho, 0)$ выражение

$$F(\rho, 0) = \frac{1}{2} \left(q + \frac{1}{q} \right) I_0 K_0 + I_1 K_1 + \frac{1}{2} \left(q - \frac{1}{q} \right) T, \quad (80)$$

где через T обозначен ряд

$$T = I_0 \left(\rho \frac{k-k'}{2} \right) K_0 \left(\rho \frac{k+k'}{2} \right) + 2 \sum_{m=1}^\infty q^m I_m \left(\rho \frac{k-k'}{2} \right) K_m \left(\rho \frac{k+k'}{2} \right). \quad (81)$$

Заметим, что величина q^m может быть представлена в виде

$$q^m = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1 - q^2}{1 - 2q \cos \vartheta + q^2} \cos m\vartheta d\vartheta. \quad (82)$$

Введем это выражение в ряд (81) и воспользуемся теоремой сложения

$$K_0(\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \vartheta}) = K_0(a) I_0(b) + 2 \sum_{m=1}^\infty K_m(a) I_m(b) \cos m\vartheta, \quad (83)$$

получаемой предельным переходом $\nu \rightarrow 0$ из формул (38) и (39), справедливых при $\text{Re}(a) > \text{Re}(b)$. Мы получим тогда для величины T выражение

$$T = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi K_0(\kappa\rho) \frac{1 - q^2}{1 - 2q \cos \vartheta + q^2} d\vartheta, \quad (84)$$

где, как и раньше, величина κ имеет значение (43).

Если выразить q через k и k' , то формула (84) дает

$$T = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi K_0(\kappa\rho) \frac{k^2 k'^2 d\vartheta}{k^4 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + k'^4 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}}, \quad (85)$$

а выражение (80) для $F(\rho, 0)$ принимает вид*

$$F(\rho, 0) = \frac{k^4 + k'^4}{k^4 - k'^4} I_0 \left(\rho \frac{k-k'}{2} \right) K_0 \left(\rho \frac{k+k'}{2} \right) + \\ + I_1 \left(\rho \frac{k-k'}{2} \right) K_1 \left(\rho \frac{k+k'}{2} \right) - \frac{2k^2 k'^2}{k^4 - k'^4} T. \quad (86)$$

Укажем на некоторые свойства функций S и T . При конечных значениях k и k' функция S — целая трансцендентная функция от ρ ; но при $k \rightarrow \infty$ будет

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S = K_0(k'\rho), \quad (87)$$

* Ср. уравнение (24 bis) [см. I ч., 105], в котором следует исправить опечатки.

так что в этом предельном случае появляется логарифмическая особенность при $\rho = 0$. Подобным же образом ведет себя функция S при $k' \rightarrow \infty$.

Функция T обращается при $\rho = 0$ в логарифмическую бесконечность. Ее можно представить в виде

$$T = K_0(h\rho) - \int_0^{\infty} J_0(\lambda\rho) \frac{h^2}{\lambda^2 + h^2} \cdot \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2} \sqrt{\lambda^2 + k'^2}}, \quad (88)$$

откуда следует, что при $\rho \rightarrow 0$ будет

$$\lim [T - K_0(h\rho)] = \frac{1}{2} \lg \frac{k^2 + k'^2}{(k + k')^2}. \quad (89)$$

В предельном случае $k \rightarrow \infty$ интеграл в формуле (88) исчезает, а величина h становится равной k' . Мы получаем соотношение, подобное выражению (87), а именно

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T = K_0(k'\rho), \quad (90)$$

причем это соотношение имеет место, вследствие уравнения (89), также и при исчезающих ρ .

Функции S и T удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$-\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dS}{d\rho} \right) + h^2 \rho S = \frac{hk}{k'} e^{-k\rho} - \frac{hk'}{k} e^{-k'\rho}; \quad (91)$$

$$-\frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dT}{d\rho} \right) + h^2 \rho T = -h^2 \rho I_0 \left(\rho \frac{k-k'}{2} \right) K_0 \left(\rho \frac{k+k'}{2} \right). \quad (92)$$

Мы выразили значения функций F и Φ при $z = 0$ через S и T и через известные функции [формулы (76) и (86)]. Но эти выражения могут служить также и для определения значений

$$\frac{\partial F}{\partial z} \text{ и } \frac{\partial \Phi}{\partial z} \text{ при } z = +0 \text{ и } z = -0,$$

в самом деле, первые производные от F и Φ по z определяются согласно выражениям (27) и (30) через F и Φ . Высшие производные от этих функций по z при $z = 0$ могут быть вычислены с помощью волнового уравнения; при этом весьма удобно пользоваться соотношениями (91) и (92).

Квазистационарный случай

При исследовании токов в земле важную роль играет случай квазистационарного поля. Как известно, этот случай характеризуется тем, что можно пренебречь максвелловым током смещения по сравнению с током проводимости. Можно считать, что предположения квазистационарности выполняются тогда, когда рассматриваемые расстояния малы по сравнению с длиной волны в воздухе.

В квазистационарном случае можно положить

$$k' = 0; \quad k = \frac{\sqrt{2\pi\sigma\omega\mu}}{c} (1 - i), \quad (93)$$

и все формулы существенно упрощаются. В выведенных выше выражениях для поля на поверхности земли обращаются в нуль члены, содержащие величины S и T ; в самом деле, эти величины обращаются при $k' \rightarrow 0$ в бесконечность только как $\lg k'$, а множители при них обращаются в нуль как k'^2 .

Выпишем наши формулы для рассматриваемого случая. Мы имеем

$$\Pi(\rho, 0) = \frac{2}{k^2 \rho^3} [1 - (1 + k\rho) e^{-k\rho}]; \quad (94)$$

$$\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)_0 = \frac{k^2}{4} \left[I_0 \left(\frac{k\rho}{2} \right) K_0 \left(\frac{k\rho}{2} \right) - I_2 \left(\frac{k\rho}{2} \right) K_2 \left(\frac{k\rho}{2} \right) \right]; \quad (95)$$

$$\Phi(\rho, -0) = \frac{2}{\rho}; \quad (96)$$

$$F(\rho, 0) = I_0 \left(\frac{k\rho}{2} \right) K_0 \left(\frac{k\rho}{2} \right) + I_1 \left(\frac{k\rho}{2} \right) K_1 \left(\frac{k\rho}{2} \right). \quad (97)$$

Таким образом, в этом случае все величины выражаются через элементарные функции и через табулированные функции

$$\left. \begin{array}{l} \text{ber}(x); \text{ bei}(x); \text{ ber}'(x); \text{ bei}'(x); \\ \text{ker}(x); \text{ kei}(x); \text{ ker}'(x); \text{ kei}'(x). \end{array} \right\} \quad (98)$$

Магнитное поле, определяемое формулами (20), (23), а также (94), (95), (96), (97), вычислялось в Ленинградском геофизическом институте для случая, когда кабель образует три стороны полуквадрата; для стороны квадрата, а также для величины $|k|$ были взяты различные значения. Но поскольку назначение настоящей работы главным образом теоретическое, мы не будем здесь входить в обсуждение полученных численных результатов.

В квазистационарном случае поле выражается через известные функции также и в области ниже земной поверхности ($z < 0$). Все величины приводятся тогда к двум интегралам

$$P = \int_0^{\infty} J_0(\lambda\rho) e^{z\sqrt{\lambda^2 + k^2}} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2}} = I_0 \left(k \frac{r+z}{2} \right) K_0 \left(k \frac{r-z}{2} \right); \quad (99)$$

$$Q = \int_0^{\infty} J_0(\lambda\rho) e^{z\sqrt{\lambda^2 + k^2}} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + k^2}} = \frac{e^{-kr}}{r} \quad (100)$$

Вторая формула хорошо известна. Для доказательства первой формулы достаточно заметить, что обе ее части представляют регулярные решения волнового уравнения при $z < 0$ и совпадают при $z = 0$. Легко проверить также совпадение их нормальных производных при $z = 0$.

Функции $\Phi(\rho, z)$ и $F(\rho, z)$ могут быть выражены, в силу их интегральных представлений (28) и (25), через производные от P и от Q . Мы имеем

$$\Phi(\rho, z) = 2 \frac{\partial P}{\partial z}; \quad (101)$$

$$F(\rho, z) = \frac{2}{k^2} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right). \quad (102)$$

Для вычисления производных положим

$$u = k \frac{r+z}{2}; \quad v = k \frac{r-z}{2}, \quad (103)$$

тогда

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u}{r}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{v}{r}, \quad (104)$$

и мы получаем для Φ и F выражения

$$\Phi(\rho, z) = \frac{2}{r} [u I_1(u) K_0(v) + v I_0(u) K_1(v)]; \quad (105)$$

$$F(\rho, z) = \frac{2z}{k^2 r^3} [(1+kr) e^{-kr} - u I_1(u) K_0(v) - v I_0(u) K_1(v)] + \left. \begin{aligned} &+ \frac{2(u^2+v^2)}{k^2 r^2} I_0(u) K_0(v) + \frac{4uv}{k^2 r^2} I_1(u) K_1(v). \end{aligned} \right\} \quad (106)$$

Значение $\Pi(\rho, z)$ получается отсюда по формуле (27). Поведение величин P и Q [формулы (99) и (100)] на больших расстояниях неодинаково. В самом деле, асимптотическое выражение для P имеет вид

$$P \sim \frac{1}{k\rho} e^{kz} = \frac{1}{k\rho} e^{-k|z|}. \quad (107)$$

Величина P соответствует, таким образом, возбуждению, которое сперва распространяется в верхней среде без поглощения, а затем проникает сквозь поверхность земли вниз, причем оно испытывает ослабление по показательному закону. Величина же Q соответствует возбуждению, распространяющемуся исключительно в нижней среде. Подобно самим величинам P и Q ведут себя и их производные по z , через которые выражается поле. Таким образом, и в самом электромагнитном поле можно отличить возбуждение, проникающее сверху, от возбуждения, распространяющегося сквозь нижнюю среду. Вблизи источников оба возбуждения компенсируются так, что результирующее поле обращается там в бесконечность надлежащего (а не более высокого) порядка. Следует ожидать, что такое положение вещей сохраняется и в нестационарном случае.

При $z > 0$ величины F' и Π' не выражаются в конечном виде через известные функции даже и в квазистационарном случае. Но для этих величин можно вывести всюду сходящееся разложение по возрастающим степеням kr (с логарифмическими членами), а также асимптотические разложения по убывающим степеням kr . Этих разложений мы приводить не будем, так как они не представляют особого интереса.

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА В. А. ФОКА

В теории электромагнитных методов прикладной геофизики много внимания уделяется электромагнитным полям точечных дипольных источников, расположенных на плоской поверхности однородной и изотропной проводящей среды, занимающей половину пространства. Такая среда схематически изображает землю, а расположенный над нею изолятор — воздух. Можно вообразить себе бесконечное множество положений дипольных источников поля относительно земной поверхности, однако для нужд теории электроразведки почти во всех случаях достаточно изучение полей горизонтального электрического диполя и двух магнитных диполей, горизонтального и вертикального. Вычисления этих трех полей выбраны в качестве примеров применения метода В. А. Фока при решении конкретных задач.

Подробные описания полей дипольных источников можно найти в литературе, посвященной методам электроразведки. Они приведены, например, в монографии А. В. Вешева [11].

Помещенное ниже описание применяемых при расчетах операций и их последовательности составлено так, чтобы читатель мог без труда связать разбираемые примеры с основным текстом книги и приведенными в ней формулами. В целях экономии изложения одно из полей рассмотрено более подробно, а в описаниях двух остальных делаются ссылки на однотипность применяемых преобразований. В конце описания полей приведены таблицы вычисленных значений их компонентов.

Электромагнитные поля различных источников на поверхности однородного земного полупространства часто называют *нормальными полями*. Этот термин употребляется в дальнейшем изложении только в указанном его значении.

При расчетах обычно используется правосторонняя система координат $X Y Z$, плоскость $X Y$ которой совпадает с земной поверхностью, а ось $O Z$ — направлена из земли в воздух. Интегральную форму решений удобно искать, пользуясь цилиндрическими координатами z, ρ и φ , где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\text{tg } \varphi = y/x$. При выводе интегралов дипольный источник помещается на оси $O Z$, но, во избежание ошибок, не в начале координат. Будем считать его находящимся в воздушном полупространстве в точке $z = h$. Переход к $h = 0$ делается после получения решения в интегралах. Воздушное полупространство удобно поначалу считать заполненным средой с ненулевой проводимостью и осуществить переход к воздуху-изолятору в уже готовом выражении.

Векторные моменты диполей \mathbf{p}_e и \mathbf{p}_m , физический смысл которых пояснен в курсе В. Р. Бурсиана (с. 273), определим равенствами $\mathbf{p}_e = \mathbf{p}_e x$ — горизонтальный электрический диполь, $\mathbf{p}_m = \mathbf{p}_m x$ — горизонтальный магнитный диполь и $\mathbf{p}_m = \mathbf{p}_m z$ — вертикальный магнитный диполь, в которых x и z — единичные векторы на одноименных с ними осях.

Следуя способу обозначений В. А. Фока, будем отличать величины относящиеся к воздушному полупространству, штрихом.

В трудах, где дается подробное описание метода решений в форме определенных интегралов зоммерфельдовского типа (например, Ф. Франк и Р. Мизес [см. I ч., 106]) показано, что в полях вертикальных диполей можно обойтись векторным потенциалом, имеющим одну составляющую A_z , обладающую полной симметрией относительно оси $O Z$, а в полях горизонтальных диполей, ориентированных вдоль оси $O X$, векторный потенциал должен иметь две составляющие A_x и A_z . Из них A_x также обладает полной симметрией относительно $O Z$, а A_z имеет симметрию такую же, как $\text{cos } \varphi$.

Такой выбор векторных потенциалов обеспечивает достаточность системы независимых пограничных уравнений для получения существующего во всем пространстве и единственного решения задачи.

Поле вертикального магнитного диполя. Вектор-потенциалы $A^{*'} и A^* определяются равенствами$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \text{rot } A^{*'} \\ \mathbf{E} &= \text{rot } A^*. \end{aligned} \quad (1)$$

Применение обычной калибровки дает дополнительно (стр. 244)

$$\mathbf{H}' = \frac{c}{i\omega} (k'^2 \mathbf{A}' - \text{grad div } \mathbf{A}')$$

и

$$\mathbf{H} = \frac{c}{i\omega} (k^2 \mathbf{A} - \text{grad div } \mathbf{A}).$$

Вектор-потенциалы \mathbf{A}' и \mathbf{A} имеют только составляющую вдоль оси OZ , поэтому векторы \mathbf{E}' и \mathbf{E} имеют в системе цилиндрических координат только составляющие E'_φ и E_φ , а векторы \mathbf{H}' и \mathbf{H} в тех же условиях имеют составляющие H'_ρ , H'_z , H_ρ и H_z .

Граничные условия на плоскости $z = 0$ сводятся к двум уравнениям [(23) ч. II].

$$\left. \begin{aligned} A^{*'} &= A^*; \\ \frac{\partial A^{*'}}{\partial z} &= \frac{\partial A^*}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Решения для обоих полупространств находятся методом разделения переменных в уравнениях

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 A^{*'}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A^{*'}}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 A^{*'}}{\partial z^2} - k'^2 A^{*'} &= 0; \\ \frac{\partial^2 A^*}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A^*}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 A^*}{\partial z^2} - k^2 A^* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Получаемые при этом характеристические числа λ имеют сплошной спектр от 0 до ∞ и решения представляются в форме определенных интегралов по λ

$$A^{*'}_{(z>0)} = \beta \int_0^\infty (f_0(\lambda) e^{-|h-z|\sqrt{\lambda^2+k'^2}} + f_1(\lambda) e^{-z\sqrt{\lambda^2+k'^2}}) J_0(\lambda\rho) d\lambda;$$

$$A^*_{(z<0)} = \beta \int_0^\infty f_2(\lambda) e^{z\sqrt{\lambda^2+k^2}} J_0(\lambda\rho) d\lambda.$$

В ближайшей окрестности точки $z = h$; $\rho = 0$, в которой расположен магнитный диполь, векторный потенциал должен мало отличаться от $\frac{i\omega p_M}{c} \cdot \frac{e^{-k'R}}{R}$,

где $R = \sqrt{\rho^2 + (h-z)^2}$ (стр. 273). Это требование удовлетворяется, если положить

$$\beta = -\frac{i\omega p_M}{c} \text{ и } f_0(\lambda) = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+k'^2}}, \text{ так как [см. I ч., 106]}$$

$$\frac{e^{-k'R}}{R} = \int_0^\infty \frac{\lambda e^{-|h-z|\sqrt{\lambda^2+k'^2}}}{\sqrt{\lambda^2+k'^2}} J_0(\lambda\rho) d\lambda.$$

Подставив найденные значения β и $f_0(\lambda)$, подчинив $A^{*'} и A^* условиям (3), выполнив простые алгебраические операции и положив $h = 0$, мы получим$

$$\left. \begin{aligned} A^{*'} &= -\frac{i\omega p_M}{c} \int_0^\infty \frac{2e^{-z\sqrt{\lambda^2+k'^2}}}{\sqrt{\lambda^2+k'^2} + \sqrt{\lambda^2+k^2}} J_0(\lambda\rho) \lambda d\lambda; \\ A^* &= -\frac{i\omega p_M}{c} \int_0^\infty \frac{2e^{z\sqrt{\lambda^2+k^2}}}{\sqrt{\lambda^2+k'^2} + \sqrt{\lambda^2+k^2}} J_0(\lambda\rho) \lambda d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Если среда в полупространстве $z > 0$ изолятор, то

$$\left. \begin{aligned} A^{*'} &= -\frac{i\omega p_M}{c} \int_0^\infty \frac{2e^{-z\lambda}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2+k^2}} J_0(\lambda\rho) \lambda d\lambda; \\ A^* &= -\frac{i\omega p_M}{c} \int_0^\infty \frac{2e^{z\sqrt{\lambda^2+k^2}}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2+k^2}} J_0(\lambda\rho) \lambda d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

При вычислениях \mathbf{H} и \mathbf{E} на земной поверхности достаточно знать на ней, например, A^* и $\frac{\partial A^*}{\partial z}$, так как $\frac{\partial^2 A^*}{\partial z^2}$ может быть вычислена с помощью уравнений (4)

$$A^*_{(z=0)} = -\frac{i\omega p_M}{c} \int_0^\infty \frac{2\lambda J_0(\lambda\rho)}{\lambda + \sqrt{\lambda^2+k^2}} d\lambda;$$

$$\frac{\partial A^*}{\partial z}_{(z=0)} = -\frac{i\omega p_M}{c} \int_0^\infty \frac{2\lambda \sqrt{\lambda^2+k^2}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2+k^2}} J_0(\lambda\rho) d\lambda.$$

Обратившись к работе В. А. Фока [формула (18)], находим

$$A^*_{(z=0)} = -\frac{i\omega p_M}{c} \Pi(\rho, 0);$$

$$\frac{\partial A^*}{\partial z}_{(z=0)} = -\frac{i\omega p_M}{c} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial z} \right)_{z=0}$$

и далее там же [формулы (94) и (95)]

$$A^*_{(z=0)} = -\frac{i\omega p_M}{c\rho} \cdot \frac{2}{k^2\rho^2} [1 - (1+k\rho)e^{-k\rho}]; \quad (7)$$

$$\frac{\partial A^*}{\partial z}_{(z=0)} = -\frac{i\omega p_M}{c\rho^2} \cdot \frac{k^2\rho^2}{4} \left[I_0\left(\frac{k\rho}{2}\right) K_0\left(\frac{k\rho}{2}\right) - I_2\left(\frac{k\rho}{2}\right) K_2\left(\frac{k\rho}{2}\right) \right]. \quad (8)$$

Составляющие E_φ , H_ρ и H_z напряженности электрического и магнитного полей вычисляются с помощью формул (1), (2), (7), (8) и уравнения (4). После элементарных, но трудоемких преобразований получим

$$E_\varphi = -\frac{i\omega p_M}{c\rho^2} E_\varphi^{(0)};$$

$$E_\varphi^{(0)} = \frac{2}{k^2\rho^2} [3 - (3+3k\rho+k^2\rho^2)e^{-k\rho}]; \quad (9)$$

$$H_\rho = \frac{p_M}{\rho^3} H_\rho^{(0)};$$

$$H_\rho^{(0)} = -h^2\rho^2 \left[I_1\left(\frac{k\rho}{2}\right) K_1\left(\frac{k\rho}{2}\right) - I_2\left(\frac{k\rho}{2}\right) K_2\left(\frac{k\rho}{2}\right) \right]; \quad (10)$$

$$H_z = \frac{p_M}{\rho^3} H_z^{(0)};$$

$$H_z^{(0)} = -\frac{2}{k^2\rho^2} [9 - (9+9k\rho+4k^2\rho^2+k^3\rho^3)e^{-k\rho}]. \quad (11)$$

В табл. 2, где приведена числовая иллюстрация полученных результатов, даны значения функций $E_\varphi^{(0)}$, $H_\rho^{(0)}$ и $H_z^{(0)}$. Аналогично составлены таблицы числовых значений и в двух других полях.

Поле горизонтального магнитного диполя. Вектор-потенциалы $A^{*'}$ и A^* в обоих полупространствах связаны граничными условиями на плоскости $z = 0$ (стр. 245)

$$\left. \begin{aligned} k'^2 A_x^{*'} &= k^2 A_x^*; \\ \frac{\partial A_x^{*'}}{\partial z} &= \frac{\partial A_x^*}{\partial z}; \\ A_z^{*'} &= A_z^*; \\ \frac{\partial A_x^{*'}}{\partial x} + \frac{\partial A_z^{*'}}{\partial z} &= \frac{\partial A_x^*}{\partial x} + \frac{\partial A_z^*}{\partial z}. \end{aligned} \right\} (12)$$

Векторы E и H связаны с вектор-потенциалом соотношениями (1) и (2). Составляющие $A_x^{*'}$ и A_x^* удовлетворяют уравнениям типа (4), а составляющие $A_z^{*'}$ и A_z^* — уравнениям, в которых участвует производная по угловой координате φ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_z^{*'}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial A_z^{*'}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 A_z^{*'}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_z^{*'}}{\partial z^2} - k'^2 A_z^{*'} &= 0; \\ \frac{\partial^2 A_z^*}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial A_z^*}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 A_z^*}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 A_z^*}{\partial z^2} - k^2 A_z^* &= 0. \end{aligned}$$

Решения, как в предыдущем случае, находятся методом разделения переменных и представляются в виде определенных интегралов по параметру λ . Выраженные через неопределенные коэффициенты, но с учетом особенности в точке $z = h, \rho = 0$ они имеют вид

$$A_x^{*'} = -\frac{i\omega p_M}{c} \int_0^\infty \left(\frac{\lambda e^{-|h-z| \sqrt{\lambda^2+k'^2}}}{\sqrt{\lambda^2+k'^2}} + f_1(\lambda) e^{-z \sqrt{\lambda^2+k'^2}} \right) J_0(\lambda \rho) d\lambda;$$

$$A_z^{*'} = -\frac{i\omega p_M}{c} \cos \varphi \int_0^\infty f_2(\lambda) e^{-z \sqrt{\lambda^2+k'^2}} J_1(\lambda \rho) d\lambda;$$

$$A_x^* = -\frac{i\omega p_M}{c} \int_0^\infty f_3(\lambda) e^{z \sqrt{\lambda^2+k^2}} J_0(\lambda \rho) d\lambda;$$

$$A_z^* = -\frac{i\omega p_M}{c} \cos \varphi \int_0^\infty f_4(\lambda) e^{z \sqrt{\lambda^2+k^2}} J_1(\lambda \rho) d\lambda.$$

Неизвестные функции $f_1(\lambda), f_2(\lambda), f_3(\lambda)$ и $f_4(\lambda)$ находятся после подчинения решений граничным условиям (12). При $h = 0$ и $k' = 0$ решения в определенных интегралах принимают вид:

$$A_x^{*'} = -\frac{i\omega p_M}{c} \int_0^\infty 2e^{-\lambda z} J_0(\lambda \rho) d\lambda = -\frac{2i\omega p_M}{c \sqrt{\rho^2+z^2}};$$

$$A_z^{*'} = -\frac{i\omega p_M}{c} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \int_0^\infty \frac{2e^{-\lambda z}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2+k'^2}} J_0(\lambda \rho) d\lambda;$$

$$A_x^* = 0;$$

$$A_z^* = -\frac{i\omega p_M}{c} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \int_0^\infty \frac{2e^{z \sqrt{\lambda^2+k^2}}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2+k^2}} J_0(\lambda \rho) d\lambda.$$

Вычисления E и H на границе $z = 0$ могут быть выполнены, если известны компоненты векторного потенциала и их производные по z на этой плоскости, например $A_x^{*'}$, $A_z^{*'}$ и $\frac{\partial A_z^{*'}}{\partial z}$. Пользуясь формулами (18) и (25), по данным В. А. Фока можем записать

$$\left. \begin{aligned} A_x^{*'}(z=0) &= -\frac{2i\omega p_M}{c\rho}; \\ \frac{\partial A_x^{*'}}{\partial z}(z=0) &= 0; \\ A_z^{*'}(z=0) &= -\frac{i\omega p_M}{c\rho} \cos \varphi \frac{\partial F(\rho, 0)}{\partial \rho}; \\ \frac{\partial A_z^{*'}}{\partial z}(z=0) &= \frac{i\omega p_M}{c} \cos \varphi \frac{\partial \Pi(\rho, 0)}{\partial \rho}. \end{aligned} \right\} (13)$$

Развернутое выражение для функций $F(\rho, 0)$ и $\Pi(\rho, 0)$ дано у В. А. Фока [формулы (94) и (97)].

Пользуясь соотношениями (1) и (2), можно выразить $E_\rho, E_\varphi, H_\rho, H_\varphi$ и H_z на плоскости $z = 0$ аналогично предыдущему случаю через экспоненциальную функцию, модифицированную функцию Бесселя и функцию Макдональда:

$$E_\rho = -\frac{i\omega p_M}{c\rho^2} \sin \varphi E_\rho^{(0)};$$

$$E_\varphi^{(0)} = 2I_1\left(\frac{k\rho}{2}\right) K_1\left(\frac{k\rho}{2}\right); \quad (14)$$

$$E_\varphi = -\frac{i\omega p_M}{c\rho^2} \cos \varphi E_\varphi^{(0)};$$

$$E_\rho^{(0)} = -2 \left[3I_1\left(\frac{k\rho}{2}\right) K_1\left(\frac{k\rho}{2}\right) + k\rho I_1\left(\frac{k\rho}{2}\right) K_0\left(\frac{k\rho}{2}\right) - 1 \right]; \quad (15)$$

$$H_\rho = \frac{p_M}{\rho^3} \cos \varphi H_\rho^{(0)};$$

$$H_\rho^{(0)} = 4 - \frac{2}{k^2 \rho^2} [12 - (12 + 12k\rho + 5k^2 \rho^2 + k^3 \rho^3) e^{-k\rho}]; \quad (16)$$

$$H_\varphi = \frac{p_M}{\rho^3} \sin \varphi H_\varphi^{(0)};$$

$$H_{\varphi}^{(0)} = -2 \left\{ 1 - \frac{1}{k^2 \rho^2} [3 - (3 + 3k\rho + k^2 \rho^2) e^{-k\rho}] \right\}; \quad (17)$$

$$H_z = -\frac{P_M}{\rho^3} \cos \varphi H_z^{(0)};$$

$$H_z^{(0)} = k^2 \rho^2 \left[I_1 \left(\frac{k\rho}{2} \right) K_1 \left(\frac{k\rho}{2} \right) - I_2 \left(\frac{k\rho}{2} \right) K_2 \left(\frac{k\rho}{2} \right) \right]. \quad (18)$$

Горизонтальный электрический диполь. Вектор-потенциал в поле горизонтального электрического диполя, направленного по оси Ox , тоже имеет две составляющие A_x и A_z с такой же симметрией, как в поле горизонтального магнитного диполя. Он задается равенством

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad (19)$$

к которому после обычной калибровки добавляется равенство (стр. 242, 243)

$$\mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \left(\frac{1}{k^2} \text{grad div } \mathbf{A} - \mathbf{A} \right). \quad (20)$$

Составляющие A'_x , A'_z , A_x и A_z векторных потенциалов удовлетворяют таким же уравнениям, как одноименные составляющие векторного потенциала в поле горизонтального магнитного диполя.

Граничные условия сводятся к уравнениям

$$A'_x = A_x;$$

$$A'_z = A_z;$$

$$\frac{\partial A'_x}{\partial z} = \frac{\partial A_x}{\partial z};$$

$$\frac{1}{k'^2} \left(\frac{\partial A'_x}{\partial x} + \frac{\partial A'_z}{\partial z} \right) = \frac{1}{k^2} \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right),$$

выполняемым при $z = 0$.

В точке расположения диполя $z = h$, $\rho = 0$ вектор-потенциал имеет особенность $\beta \frac{e^{-k'R}}{R}$, причем $\beta = \frac{P_{\Sigma}}{c}$.

Решения строятся так же, как в двух разобранных ранее случаях. В окончательном виде, после перехода к диполю на поверхности земли и воздушной изолятору,

$$A'_x = \frac{P_{\Sigma}}{c} \int_0^{\infty} \frac{2\lambda e^{-2\lambda}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + k^2}} J_0(\lambda, \rho) d\lambda;$$

$$A'_z = \frac{P_{\Sigma}}{c} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \int_0^{\infty} \frac{2e^{-2\lambda}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + k^2}} J_0(\lambda, \rho) d\lambda;$$

$$A_x = \frac{P_{\Sigma}}{c} \int_0^{\infty} \frac{2\lambda e^z \sqrt{\lambda^2 + k^2}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + k^2}} J_0(\lambda, \rho) d\lambda;$$

$$A_z = \frac{P_{\Sigma}}{c} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \rho} \int_0^{\infty} \frac{2e^z \sqrt{\lambda^2 + k^2}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + k^2}} J_0(\lambda, \rho) d\lambda.$$

Формулы В. А. Фока применяются и в этом случае почти так же, как в предыдущих. После преобразований, которые должны быть ясны из разбора полей магнитных диполей, и после использования соотношений (19) и (20) получаем окончательные выражения для составляющих E_{ρ} , E_{φ} , H_{ρ} , H_{φ} и H_z :

$$E_{\rho} = \frac{P_{\Sigma}}{\pi \sigma \rho^3} \cos \varphi E_{\rho}^{(0)};$$

$$E_{\rho}^{(0)} = \frac{1}{2} [1 + (1 + k\rho) e^{-k\rho}]; \quad (21)$$

$$E_{\varphi} = \frac{P_{\Sigma}}{\pi \sigma \rho^3} \sin \varphi E_{\varphi}^{(0)};$$

$$E_{\varphi}^{(0)} = \frac{1}{2} [2 - (1 + k\rho) e^{-k\rho}]; \quad (22)$$

$$H_{\rho} = \frac{2\rho_{\Sigma}}{c\rho^2} \sin \varphi H_{\rho}^{(0)};$$

$$H_{\rho}^{(0)} = 6I_1 \left(\frac{k\rho}{2} \right) K_1 \left(\frac{k\rho}{2} \right) + k\rho \left[I_1 \left(\frac{k\rho}{2} \right) K_0 \left(\frac{k\rho}{2} \right) - I_0 \left(\frac{k\rho}{2} \right) K_1 \left(\frac{k\rho}{2} \right) \right]; \quad (23)$$

$$H_{\varphi} = \frac{2\rho_{\Sigma}}{c\rho^2} \cos \varphi H_{\varphi}^{(0)};$$

$$H_{\varphi}^{(0)} = 2I_1 \left(\frac{k\rho}{2} \right) K_1 \left(\frac{k\rho}{2} \right); \quad (24)$$

$$H_z = \frac{2\rho_{\Sigma}}{c\rho^2} \sin \varphi H_z^{(0)};$$

$$H_z^{(0)} = -\frac{2}{k^2 \rho^2} [3 - (3 + 3k\rho + k^2 \rho^2) e^{-k\rho}]. \quad (25)$$

В этих формулах σ обозначает электропроводность проводящего пространства (земли).

Расчеты нормальных полей дипольных источников, сведенные в табл. 1, 2, 3, опубликованы в монографии А. В. Вешева [11]. В таблицах, перепечатанных из этой монографии, даны вещественные и мнимые части функций $E^{(0)}$ и $H^{(0)}$ в квазистационарных полях. Так как в этом случае аргумент волнового числа всегда равен $\pi/4$, то в качестве независимого переменного взят модуль произведения $k\rho$, обозначенный через ξ . Шаг ξ скачкообразно возрастает при увеличении ξ , ξ изменяется в пределах $0 \leq \xi \leq 20$.

В таблицах нормального поля горизонтального магнитного диполя (табл. 1) опущена составляющая H_z , которая, как легко убедиться из формул (10) и (18), отличается от составляющей H_{ρ} в поле вертикального магнитного диполя (табл. 2) только множителем $\cos \varphi$ и знаком. При вычислении H_z в поле горизонтального диполя можно использовать таблицу $H_{\rho}^{(0)}$ в поле вертикального диполя. Величины электрической и магнитной компонент нормального поля горизонтального электрического диполя приведены в табл. 3.

Способ вычисления нормальных полей дипольных источников при помощи приведенных таблиц показан в формулах (9) — (11), (14) — (18) и (21) — (25).

Таблица 1

| ξ | H_p^0 | | H_φ^0 | |
|-------|---------|---------|---------------|----------|
| | Re | Im | Re | Im |
| 0 | 2,000 | 0 | -1 | 0 |
| 0,2 | 2,000 | 0,001 | -1,001 | -0,0092 |
| 0,4 | 1,996 | 0,006 | -1,005 | -0,0340 |
| 0,6 | 1,988 | 0,019 | -1,015 | -0,0701 |
| 0,8 | 1,980 | 0,019 | -1,033 | -0,1135 |
| 1,0 | 1,970 | 0,080 | -1,059 | -0,1609 |
| 1,2 | 1,962 | 0,130 | -1,093 | -0,2093 |
| 1,4 | 1,960 | 0,193 | -1,133 | -0,257 |
| 1,6 | 1,966 | 0,267 | -1,180 | -0,300 |
| 1,8 | 1,982 | 0,350 | -1,232 | -0,339 |
| 2,0 | 2,009 | 0,438 | -1,287 | -0,373 |
| 2,4 | 2,102 | 0,628 | -1,402 | -0,422 |
| 2,8 | 2,246 | 0,808 | -1,518 | -0,445 |
| 3,2 | 2,433 | 0,962 | -1,626 | -0,446 |
| 3,6 | 2,649 | 1,076 | -1,721 | -0,430 |
| 4,0 | 2,880 | 1,143 | -1,802 | -0,400 |
| 4,8 | 3,321 | 1,130 | -1,916 | -0,322 |
| 5,6 | 3,670 | 1,003 | -1,977 | -0,242 |
| 6,0 | 3,797 | 0,907 | -1,994 | -0,207 |
| 7,0 | 3,988 | 0,655 | -2,009 | -0,139 |
| 8,0 | 4,048 | 0,448 | -2,008 | -0,097 |
| 9,0 | 4,008 | 0,311 | -2,004 | -0,073 |
| 10 | 4,003 | 0,232 | -2,001 | -0,058 |
| 12 | 3,999 | 0,160 | -2,000 | -0,041 |
| 16 | 4,000 | 0,094 | -2,000 | -0,023 |
| 20 | 4,000 | 0,060 | -2,000 | -0,015 |
| 0 | 1,0000 | 0 | -1,0000 | 0 |
| 0,2 | 0,9961 | -0,0133 | -1,004 | -0,00834 |
| 0,4 | 0,9848 | -0,0397 | -1,014 | -0,0200 |
| 0,6 | 0,9668 | -0,0714 | -1,030 | -0,0279 |
| 0,8 | 0,9432 | -0,1050 | -1,048 | -0,0296 |
| 1,0 | 0,9148 | -0,1381 | -1,067 | -0,0240 |
| 1,2 | 0,8827 | -0,1695 | -1,084 | -0,0110 |
| 1,4 | 0,8479 | -0,1981 | -1,099 | +0,0086 |
| 1,6 | 0,8112 | -0,2235 | -1,110 | +0,0339 |
| 1,8 | 0,7733 | -0,2454 | -1,117 | 0,0639 |
| 2,0 | 0,7350 | -0,2638 | -1,118 | 0,0973 |
| 2,4 | 0,6593 | -0,2904 | -1,104 | 0,1693 |
| 2,8 | 0,5875 | -0,3048 | -1,070 | 0,2413 |
| 3,2 | 0,5218 | -0,3093 | -1,019 | 0,3064 |
| 3,6 | 0,4634 | -0,3064 | -0,956 | 0,3605 |
| 4,0 | 0,4123 | -0,2980 | -0,886 | 0,4013 |
| 4,8 | 0,3312 | -0,2725 | -0,741 | 0,4439 |
| 5,6 | 0,2734 | -0,2435 | -0,612 | 0,4438 |
| 6,0 | 0,2512 | -0,2295 | -0,556 | 0,4337 |
| 7,0 | 0,2095 | -0,1985 | -0,448 | 0,3930 |
| 8,0 | 0,1808 | -0,1739 | -0,374 | 0,3475 |
| 9,0 | 0,1598 | -0,1546 | -0,325 | 0,3078 |
| 10 | 0,1434 | -0,1394 | -0,290 | 0,2760 |
| 12 | 0,1191 | -0,1166 | -0,241 | 0,2307 |
| 16 | 0,0889 | -0,0879 | -0,1789 | 0,1748 |
| 20 | 0,0709 | -0,0704 | -0,1425 | 0,1404 |

Таблица 2

| ξ | E_φ^0 | | H_p^0 | | H_φ^0 | |
|-------|---------------|----------|-----------|----------|---------------|----------|
| | Re | Im | Re | Im | Re | Im |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -1 | 0 |
| 0,1 | 0,99991 | -0,00249 | -0,000020 | -0,00250 | -1,0002 | -0,00231 |
| 0,2 | 0,9993 | -0,00925 | -0,000252 | -0,00992 | -1,0013 | -0,00850 |
| 0,3 | 0,9978 | -0,01995 | -0,00106 | -0,02212 | -1,0041 | -0,01747 |
| 0,4 | 0,995 | -0,0340 | -0,00291 | -0,03879 | -1,0091 | -0,02817 |
| 0,5 | 0,991 | -0,0509 | -0,00625 | -0,0596 | -1,0165 | -0,0396 |
| 0,6 | 0,985 | -0,0701 | -0,01154 | -0,0841 | -1,0266 | -0,0510 |
| 0,7 | 0,977 | -0,0911 | -0,01919 | -0,1099 | -1,0291 | -0,0614 |
| 0,8 | 0,967 | -0,1135 | -0,0295 | -0,1422 | -1,0539 | -0,0702 |
| 0,9 | 0,955 | -0,1369 | -0,0429 | -0,1746 | -1,0709 | -0,0768 |
| 1,0 | 0,941 | -0,1609 | -0,0593 | -0,2087 | -1,0897 | -0,0808 |
| 1,2 | 0,907 | -0,2093 | -0,1024 | -0,2789 | -1,1307 | -0,0790 |
| 1,4 | 0,867 | -0,257 | -0,1589 | -0,3482 | -1,1734 | -0,06371 |
| 1,6 | 0,820 | -0,300 | -0,2282 | -0,4126 | -1,2144 | -0,0334 |
| 1,8 | 0,768 | -0,339 | -0,3085 | -0,4684 | -1,2502 | +0,0105 |
| 2,0 | 0,713 | -0,373 | -0,3976 | -0,5129 | -1,2785 | +0,0654 |
| 2,2 | 0,656 | -0,401 | -0,4928 | -0,5437 | -1,2951 | 0,1327 |
| 2,4 | 0,598 | -0,422 | -0,5911 | -0,5609 | -1,3003 | 0,2062 |
| 2,6 | 0,539 | -0,436 | -0,6897 | -0,5616 | -1,2926 | 0,2839 |
| 2,8 | 0,482 | -0,445 | -0,7859 | -0,5498 | -1,2717 | 0,3631 |
| 3,0 | 0,427 | -0,448 | -0,8762 | -0,5231 | -1,2457 | 0,4412 |
| 3,2 | 0,374 | -0,446 | -0,9610 | -0,4838 | -1,1927 | 0,5157 |
| 3,4 | 0,325 | -0,440 | -1,0360 | -0,4337 | -1,1367 | 0,5846 |
| 3,6 | 0,279 | -0,430 | -1,1008 | -0,3746 | -1,0718 | 0,6461 |
| 3,8 | 0,236 | -0,416 | -1,1544 | -0,3085 | -0,9997 | 0,6990 |
| 4,0 | 0,1982 | -0,400 | -1,1964 | -0,2374 | -0,9223 | 0,7425 |
| 4,2 | 0,1640 | -0,382 | -1,2267 | -0,1656 | -0,8414 | 0,7761 |
| 4,4 | 0,1337 | -0,363 | -1,2455 | -0,0882 | -0,7588 | 0,7998 |
| 4,6 | 0,1071 | -0,342 | -1,2534 | -0,0136 | -0,6762 | 0,8137 |
| 4,8 | 0,0841 | -0,322 | -1,2520 | +0,0590 | -0,5950 | 0,8185 |
| 5,0 | 0,0645 | -0,301 | -1,2398 | 0,1316 | -0,5167 | 0,8147 |
| 5,6 | 0,0227 | -0,242 | -1,1614 | 0,3065 | -0,3077 | 0,7611 |
| 6,0 | 0,00641 | -0,207 | -1,0839 | 0,3959 | -0,1962 | 0,7273 |
| 7,0 | -0,00936 | -0,1392 | -0,8624 | 0,5147 | -0,0203 | 0,5160 |
| 8,0 | -0,00844 | -0,0972 | -0,6681 | 0,5212 | +0,0398 | 0,3508 |
| 9,0 | -0,00424 | -0,0728 | -0,5333 | 0,4746 | 0,0396 | 0,2382 |
| 10,0 | -0,001161 | -0,0582 | -0,4506 | 0,4178 | 0,0217 | 0,1735 |
| 12,0 | +0,000353 | -0,0413 | -0,3664 | 0,3357 | -0,0005 | 0,1187 |
| 14,0 | -0,000095 | -0,0307 | -0,3149 | 0,2903 | -0,0017 | 0,0917 |
| 16,0 | -0,000011 | -0,0234 | -0,2736 | 0,2575 | -0,0001 | 0,0708 |
| 18,0 | 0,000006 | -0,01852 | -0,2413 | 0,2305 | +0,0001 | 0,0556 |
| 20,0 | 0,000000 | -0,01500 | -0,2162 | 0,2083 | 0,0000 | 0,0450 |

| ξ | H_0^0 | | H_0^1 | | H_0^2 | | E_0^1 | | E_0^2 | |
|-------|---------|---------|---------|-----------|-----------|----------|---------|-------------|---------|-----------|
| | Re | Im | Re | Im | Re | Im | Re | Im | Re | Im |
| 0,2 | 0,502 | 0,00417 | 0,4981 | -0,006677 | 0,498 | -0,000 | 0,999 | -0,0086 | 1,00 | 0,0173 |
| 0,4 | 0,507 | 0,00999 | 0,4924 | -0,01983 | 0,500 | -0,01 | 0,994 | -0,0325 | 1,01 | 0,0650 |
| 0,6 | 0,515 | 0,0140 | 0,4835 | -0,03571 | 0,4922 | -0,033 | 0,982 | -0,0653 | 1,04 | 0,131 |
| 0,8 | 0,523 | 0,0148 | 0,4716 | -0,05249 | 0,4839 | -0,058 | 0,961 | -0,103 | 1,08 | 0,205 |
| 1,0 | 0,534 | 0,0119 | 0,4574 | -0,06905 | 0,4704 | -0,081 | 0,933 | -0,141 | 1,13 | 0,282 |
| 1,2 | 0,542 | 0,0055 | 0,4415 | -0,08473 | 0,455 | -0,106 | 0,898 | -0,177 | 1,20 | 0,354 |
| 1,4 | 0,550 | -0,0045 | 0,4240 | -0,09908 | 0,434 | -0,128 | 0,857 | -0,208 | 1,29 | 0,416 |
| 1,6 | — | — | — | — | 0,4106 | -0,149 | 0,811 | -0,233 | 1,38 | 0,467 |
| 1,8 | 0,559 | -0,0319 | 0,3867 | -0,1227 | 0,3842 | -0,170 | 0,764 | -0,252 | 1,47 | 0,504 |
| 2,0 | 0,559 | -0,0487 | 0,3675 | -0,1319 | 0,3565 | -0,186 | 0,716 | -0,263 | 1,57 | 0,526 |
| 2,4 | 0,551 | -0,0850 | 0,3296 | -0,1452 | 0,2988 | -0,2108 | 0,688 | -0,267 | 1,66 | 0,534 |
| 2,8 | 0,535 | -0,1206 | 0,2938 | -0,1524 | 0,2410 | -0,2226 | 0,623 | -0,265 | 1,75 | 0,529 |
| 3,2 | 0,510 | -0,1533 | 0,2609 | -0,1547 | 0,1869 | -0,2232 | 0,581 | -0,256 | 1,84 | 0,513 |
| 3,6 | 0,4778 | -0,1800 | 0,2316 | -0,1531 | 0,1393 | -0,2148 | 0,544 | -0,243 | 1,91 | 0,486 |
| 4,0 | 0,4430 | -0,2006 | 0,2062 | -0,1490 | 0,09919 | -0,1999 | 0,510 | -0,226 | 1,98 | 0,452 |
| 4,4 | 0,4062 | -0,214 | 0,1842 | -0,1431 | 0,06679 | -0,1814 | 0,482 | -0,206 | 2,04 | 0,412 |
| 4,8 | 0,3701 | -0,222 | 0,1655 | -0,1362 | 0,04201 | -0,1589 | 0,459 | -0,184 | 2,08 | 0,368 |
| 5,2 | 0,3368 | -0,223 | 0,1499 | -0,1290 | 0,02389 | -0,1404 | 0,441 | -0,161 | 2,12 | 0,321 |
| 5,6 | 0,3061 | -0,2223 | 0,1367 | -0,1218 | 0,01136 | -0,1210 | 0,427 | -0,137 | 2,14 | 0,275 |
| 6,0 | 0,2780 | -0,2170 | 0,1256 | -0,1148 | 0,003194 | -0,1035 | 0,418 | -0,114 | 2,16 | 0,228 |
| 7,0 | 0,2241 | -0,1965 | 0,1047 | -0,09925 | -0,004682 | -0,06957 | 0,411 | -0,0721 | 2,18 | 0,144 |
| 8,0 | 0,1873 | -0,1738 | 0,09042 | -0,08695 | -0,004217 | -0,04858 | 0,414 | -0,0367 | 2,17 | 0,0735 |
| 10 | 0,1449 | -0,1380 | 0,07170 | -0,06966 | -0,001160 | -0,02913 | 0,425 | -0,00982 | 2,15 | 0,0196 |
| 12 | 0,1200 | -0,1153 | 0,05955 | -0,05831 | +0,000176 | -0,02066 | 0,440 | +0,00872 | 2,12 | -0,0174 |
| 16 | 0,0896 | -0,0872 | 0,04444 | -0,04393 | -0,000006 | -0,01173 | 0,456 | +0,0198 | 2,09 | -0,0396 |
| 20 | 0,0711 | -0,0701 | 0,03549 | -0,03522 | 0,0000001 | -0,00750 | 0,504 | -0,000311 | 1,99 | 0,000622 |
| | | | | | | | 0,500 | -0,00000346 | 2,00 | 0,0000109 |

КРАТКИЙ ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР ТЕОРИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ МЕТОДОВ

После опубликования работ В. Р. Бурсиана и В. А. Фока прошло почти сорок лет. За это время электромагнитные методы превратились в самостоятельный раздел прикладной геофизики со своей разветвленной теорией. Последняя представляет собой совокупность решений соответствующим образом выбранных задач электродинамики, в которые введены важные для практики и выраженные на языке физики геологические условия.

Над созданием теории работали многие отечественные и зарубежные ученые. Перечисление всех работ и авторов перегрузило бы настоящий обзор и отвлекло бы внимание читателей от основной темы, затронутых в теории вопросов и степени их разработанности.

В обзоре упоминаются только те легко доступные нашим читателям труды, которые вместе с тем достаточны для получения полного представления о методах, состоянии и содержании теории.

Основное применение электроразведки во всех ее модификациях имеет геологопоисковый и отчасти геологоразведочный характер. Теория, развитая в работах В. Р. Бурсиана и В. А. Фока, не ограничена какой-либо областью применения электромагнитных полей в геологии. Так же развивалась теория и в дальнейшем, но постепенно в ней обозначались два основных направления, соответствующие двум главнейшим применениям электроразведки — поиску тектонических структур, благоприятных для скопления нефти и газа, и поиску рудных месторождений.

Специфика объектов применения электроразведки отразилась не только на ее теории, но и, что важно прежде всего, на технике и методике работ. В электроразведке часто различают ее две главные специализированные отрасли, *структурную* и *рудную*. Этого деления, несмотря на его неточность, мы придерживаемся в дальнейшем.

Основной задачей в *структурной электроразведке* является изучение положения и формы поверхности погребенной толщи горных пород, являющейся одновременно геологическим и геоэлектрическим опорным горизонтом. В *рудной электроразведке* требуется обнаружить погребенный локализованный объект, отличающийся от вмещающих пород электрическими свойствами, характеризовать эти свойства и получить сведения о положении объекта относительно земной поверхности.

В настоящем обзоре речь идет о низкочастотных электромагнитных методах, т. е. о таких, в которых используются квазистационарные поля. Они применяются в структурной и рудной электроразведке. В последней они особенно хорошо приспособлены для поисков тел с пониженным удельным сопротивлением и для выделения в обособленную группу тел с резко пониженным удельным сопротивлением.

В теории структурной электроразведки центральной является задача зондирования, т. е. определение глубины залегания кровли опорного горизонта. В теории рудной электроразведки такое же место занимает задача о разделении тел по их электропроводности без непосредственного соприкосновения с телом или взятым из него образцом. Следующей за ней по значению является задача об определении пространственных характеристик тела и его положения относительно земной поверхности.

Выгоды применения нестационарных полей * в структурной электроразведке были поняты только после второй мировой войны. Этим определились и сроки разработки теории структурных электромагнитных методов. Почти одновременно стала технически возможной реализация преимуществ нестационарных полей и в рудной электроразведке. Соответственно возрос интерес к их теории.

В течение десятилетия 1935—1945 гг. электромагнитные методы и их теория развивались медленно. Интерес, возникший к ним между 1924 г. и 1935 г., был вызван первыми попытками применить переменный ток для поисков рудных месторождений. В эту раннюю пору развития электроразведки еще трудно было

* Здесь и далее под нестационарными понимаются все поля, изменяющиеся во времени, в том числе переменные.

представить с какими сложностями она встретится при изучении рудных объектов, однако уже к 1925 г. стало ясно, что нестационарные электромагнитные поля в земле имеют сложное строение и требуют специального изучения.

Главной темой первых теоретических работ были электродинамические основы теории электроразведки и так называемые нормальные поля. К исследованиям этого цикла относятся в большей своей части труд В. Р. Бурсиана и статья В. А. Фока, публикуемые в настоящем издании. В них заложены основы многих современных достижений теории и практики электромагнитных методов.

В десятилетия 1935—1945 гг. можно отметить два факта, сыгравших в дальнейшем значительную роль.

Начиная с 1936 г. было сделано несколько попыток использовать нестационарное земное электромагнитное поле при поисках структур для нефтяной промышленности. В 1941—1945 гг. на основе этих опытов родился во Франции метод теллурических токов — первый из магнитотеллурических методов в структурной электроразведке.

Второе обстоятельство, подтолкнувшее развитие электромагнитных методов и их теории, было связано с повышением требований к методу зондирования на постоянном токе со стороны промышленности. Глубина зондирования все время возрастала, и вместе с нею росла вредная роль помех, возникавших при наблюдениях полей и при их интерпретации. К ним в первую очередь относились помехи:

- связанные с установлением электромагнитного поля в земле;
- связанные с наложением теллурических токов на поле постоянного тока;
- вносимые в геологическую интерпретацию зондирования наличием в земле непроводящего экрана, залегающего над изучаемой структурой песчано-глинисто-песчаной с нею.

Наличие долго длящихся переходных состояний поля в земле после включений и выключений постоянного тока в заземленной линии побудило геофизиков серьезно заняться изучением уступающих полей. Удовлетворительное решение задачи об установлении постоянного электромагнитного поля в земле было получено в 1945 г. К этому времени А. Н. Тихоновым и С. М. Шейнманном независимо одно от другого были закончены два теоретических исследования. В том же году теория была впервые применена С. М. Шейнманном на практике при глубинных зондированиях с осциллографической записью наблюдений на Северном Кавказе. Работы опубликованы позднее [40, 48]. Исследования А. Н. Тихонова и С. М. Шейнманна положили начало развитию теории электроразведки с помощью устанавливаемых полей.

Наличие помех, связанных с теллурическими и блуждающими промышленными токами, явилось причиной разработки и создания мощных генераторных установок на автомобилях и осциллографических приемных устройств. После их создания появилась возможность возбуждения в земле достаточно интенсивных устанавливаемых полей и их регистрации. Параллельно, при поисках выхода из тупика, в котором оказались зондирования постоянным током, столкнувшись с проблемой непроводящего экрана, увеличился интерес к нестационарным полям, для которых такие экраны не являются непроходимым препятствием.

В рудной электроразведке первое увлечение переменными токами прошло довольно быстро. Причиной разочарования были неудачи, вызванные, в первую очередь, технической неподготовленностью для использования наиболее выгодных свойств нестационарных полей. С 1935 г. по 1945 г. сделано много попыток (иногда удачных) внедрить в рудную электроразведку методы постоянного тока. В целом результаты были тоже неудовлетворительными. Обнаружено, что в согласии с теорией И. Н. Гуммеля, В. Р. Бурсиана, А. И. Заборовского аномалии, вызванные очень хорошо проводящими рудными телами, не отличались от аномалий, вызванных другими, менее проводящими, геологическими образованиями, и что избирательность методов постоянного тока по отношению к рудным телам недостаточна.

Преимущества нестационарных и, в частности, переменных электромагнитных полей можно было теоретически показать уже в то время, но подлинный интерес к ним возродился только после войны, когда заметно возросли технические возможности электроразведки.

Впервые на практике преимущество нестационарных полей над стационар-

ными в рудной электроразведке доказано скандинавскими геофизиками в 1947—1948 гг.

Началом создания специальной теории электромагнитных зондирований с помощью нестационарных токов следует считать появление интерпретационной схемы А. Н. Тихонова [41] и Л. Каньяра [52] для магнитотеллурического поля.

В схеме Тихонова — Каньяра земля рассматривается как среда, состоящая из однородных горизонтальных слоев, а магнитотеллурическое поле отождествляется с плоской электромагнитной волной. В практике структурной электроразведки обычно пользуются частным вариантом этой схемы, в котором самый нижний слой среды считается бесконечно мощным и непроводящим электричества.

На такой основе построена интерпретационная теория магнитотеллурического зондирования и профилирования. Теория проста, окончательные формулы представляют собой результат применения алгебраических действий к гиперболическим функциям комплексного переменного.

В схеме Тихонова — Каньяра непроводящее основание не является полным изолятором: суммарный ток в нем отличен от нуля, несмотря на то что плотность тока в каждой его точке равна нулю. Возможен и другой непротиворечивый вариант этой схемы, в котором непроводник предполагается полным изолятором. Идея Тихонова — Каньяра полностью использована на практике после появления в 1959 г. чувствительного магнитометра для записи короткопериодных вариаций земного магнитного поля. Интерпретационным параметром в схеме Тихонова — Каньяра является входной импеданс земного полупространства, т. е. отношение напряженности электрического поля к напряженности магнитного поля в точках земной поверхности. Измерения импеданса без короткопериодного магнитометра были невозможны.

Теоретические основы магнитотеллурического профилирования и зондирования, обстоятельно изложенные в двух монографиях М. Н. Бердичевского [1, 3], позволяють удовлетворительно интерпретировать наблюдения при условии, что границы между отдельными средами в земной коре мало отличаются от горизонтальных плоскостей. Простота исходной схемы обеспечила простоту интерпретационного аппарата и теории в целом, но она же явилась препятствием при истолковании наблюдений в более сложных средах.

В среде, для которой построена теория Тихонова — Каньяра, непроводящий тонкий экран не влияет на поле, наблюдаемое над ним, в том числе на земной поверхности. В действительности, как показал опыт работы магнитотеллурическим методом, непроводящий экран не влияет на поле лишь в том случае, когда его поверхность приближается к цилиндрической и напряженность электрического поля параллельна ее образующим (E -поляризованное поле). Если напряженность электрического поля перпендикулярна к образующим цилиндрической поверхности, то входной импеданс отражает только изменения положения непроводящего экрана относительно земной поверхности.

Потребовалось обобщение теории и отказ от условия горизонтальности границ. В настоящее время найдены достаточно общие решения задачи о поле первично плоской волны при наличии в земле негоризонтальной границы. Они сводятся к решению интегральных уравнений Фредгольма первого [21] или второго рода [49]. Практическое значение общих решений сравнительно невелико из-за их сложности. Построены также приближенные решения для границы, мало отклоняющейся от средней плоскости [35] и для случая более общего [51]. Получены решения для наклонной плоской границы, приближенное [2] и строгое [50].

В настоящее время исследование поля первично плоской волны над негоризонтальной границей еще не закончено.

Схема Тихонова — Каньяра принесла пользу при разработке теории электромагнитных зондирований с помощью искусственно созданных полей. Теория эта почти совпадает с теорией магнитотеллурического зондирования в варианте Тихонова — Каньяра, когда она применяется к дальней зоне электромагнитного поля.

Существование дальней зоны в электромагнитном поле на поверхности однородной земли было отмечено еще А. Зоммерфельдом, но названия она тогда не получила. В. А. Фок указывает в своей работе на существование двух типов

возбуждения, создающих поле на земной поверхности или вблизи от нее в земном полупространстве. Возбуждение первого рода распространяется от источника поля до точки наблюдения, не покидая проводящей среды. Возбуждение второго рода распространяется в изоляторе вдоль границы с проводящей средой и переходит в нее в точке наблюдения или в ее проекции на граничную плоскость. Возбуждение первого рода расходуется на всем пути от источника до точки наблюдения на образование тепла. На достаточно большом расстоянии оно практически исчезает. Возбуждение второго рода ответвляется непрерывно на всем пути в проводящую среду и тоже уменьшается, но не так интенсивно, как возбуждение первого рода. Начиная с некоторого расстояния от источника, поле на земной поверхности или вблизи от нее существует только за счет возбуждения второго рода.

Совокупность точек, в которых поле обладает указанным свойством, называется его *дальней зоной*. Очевидно, что дальняя зона должна существовать в любом поле, если в среде имеется незамкнутая граница между изолятором и проводящей частью.

Существование дальней зоны в поле на границе изолятора и проводящей среды, состоящей из горизонтальных слоев, доказывается строго применением теорем об асимптотических свойствах интегралов, содержащих бесселеву функцию [45], к интегралам зоммерфельдовского типа. В этом случае в дальней зоне любая составляющая электромагнитного поля представляется в форме произведения функции волновых чисел и мощностей слоев, имеющей такой же вид, как в теории магнитотеллурического поля, на несущественный множитель, зависящий от координат источника и точки наблюдения.

Проводя наблюдения поля на участке земной поверхности, далеко отстоящем от источника поля, можно пренебречь изменениями координат точки наблюдения. Эта интерпретация не отличается от интерпретации магнитотеллурического зондирования. Если применяется переменное поле, то зондирование является в чистом виде частотным. При использовании устанавливаемого поля оно является чисто временным. Взаимное расположение источника поля и точки наблюдения в этом случае не играет принципиальной роли.

Теория электромагнитных зондирований изложена полно в работах Л. Л. Ваньяна [5] и Л. Л. Ваньяна и Л. З. Бобровникова [6]. В первой сведена воедино теория зондирования переменным током, во второй — теория зондирования устанавливаемым полем. Интерпретационный аппарат в работах Л. Л. Ваньяна и Л. З. Бобровникова разработан только для дальней зоны поля. Зондирование в дальней зоне, несмотря на их теоретическую простоту и привлекательность, не удовлетворило полностью запросы практики. Главным препятствием для их применения явилась трудность создания достаточно интенсивных полей в дальних зонах. Сказалась также жесткость ограничений, положенных в основу схемы Тихонова — Капьяра.

Исследованиям переменных электромагнитных полей на поверхности горизонтально слоистой земной толщи посвящены также работы С. Стефанеску [61], Л. Слехтера [59], Л. Слехтера совместно с Л. Кноповым [60], Л. Б. Гасаненко и Г. П. Шолпо [16], Д. Н. Шахсуварова [47] и др. Устанавливаемые поля рассмотрены в работах А. Н. Тихонова и О. А. Скугаревской [43, 44] и А. А. Кауфмана и Г. М. Морозовой [33].

Для геофизиков, специально занимающихся теорией электромагнитных методов, может быть особенно интересной работа Л. Слехтера [59], в которой изучено поле магнитного диполя на поверхности проводящего полупространства, электропроводность и магнитная проницаемость которого являются функциями глубины. Для практики наиболее ценны работы Л. Слехтера и Л. Кнопова [60], Л. Б. Гасаненко и Г. П. Шолпо [16, 17], Д. Н. Шахсуварова [47], А. А. Кауфмана и Г. М. Морозовой [33].

Д. Н. Шахсуваров сделал числовые расчеты переменных электромагнитных полей дипольных источников, расположенных на поверхности горизонтально-слоистого земного полупространства и составил альбом интерпретационных графиков (палеток), с помощью которых можно интерпретировать электромагнитные зондирования при произвольном взаимном расположении источника и точки наблюдения.

А. А. Кауфман и Г. М. Морозова [33] изучили поле установления на поверх-

ности горизонтально-слоистого проводящего полупространства в самых близких к источнику точках. Практически такое поле можно наблюдать после выключения постоянного тока. Их исследования показали, что информация, получаемая с помощью зондирования устанавливаемым полем в ближней зоне, не беднее информации, получаемой в дальней зоне. Результаты исследований сведены в небольшую по объему монографию, в которой изложен метод решения задачи, и в два альбома интерпретационных графиков.

К теории структурной электроразведки примыкает ряд задач, которые можно отнести также и к теории рудной электроразведки. В. И. Дмитриев [18—22], пользуясь указанными выше свойствами электромагнитных полей в дальней зоне, рассмотрел поле прямолинейного тока в бесконечном кабеле на поверхности земли в случае горизонтальных плоских границ. Еще больше связана с теорией рудной электроразведки задача о проводящей бесконечно тонкой пластине, ограниченной только с одной стороны бесконечной прямой (проводящая полуплоскость). Строгие решения задач о проводящей полуплоскости получены в предположении бесконечности ее продольной проводимости.

Случай первичного поля в форме плоской волны изучен В. Н. Никитиной [34] и В. И. Дмитриевым [20]. В. Н. Никитина предполагает, что бесконечно проводящая полуплоскость находится в проводящей среде. Задача сводится к решению интегрального уравнения, при составлении которого использовано данное В. Р. Бурсианом решение задачи о прямолинейном токе в бесконечном кабеле (см. § 9, 17, ч. II).

Поля дипольных источников в присутствии проводящей полуплоскости рассматривались Р. Тессером [63, 62] и Дж. Весли [70]. Р. Тессер воспользовался методом, предложенным П. Клеммовым [53], а Дж. Весли нашел более изящное решение, базирующееся на понятии двойного пространства Римана. В задачах Тессера и Весли вмещающая среда — изолятор. Сходные задачи решены Т. Сениором [58], Ю. В. Вандакуровым [4] и Я. Янковским [55]. Более сложную задачу решили В. И. Дмитриев и Е. В. Захаров [23], изучившие поле прямолинейного тока в бесконечно длинном кабеле в присутствии плоских проводников.

Общим для всех перечисленных задач и для задач теории структурной электроразведки является задание в их условиях физических свойств объекта. Полуплоскость предполагается бесконечно проводящей, толща в основании среды непроводящей и т. д. Назначение этой части теории — дать метод изучения пространственных свойств объектов. Если, к примеру, известно, что тело приближается по форме к прямоугольной пластине, то, пользуясь соответствующими решениями, можно найти направление падения и оценить его угол. Если излучается поверхность непроводящей толщи, то определяется глубина ее залегания и форма.

Задачи о проводящей полуплоскости имеют и другое практическое значение, не связанное прямо с полевой практикой. Обычные аналитические методы не всегда дают хороший результат в теории рудной электроразведки. Иногда задачи неразрешимы принципиально, но чаще расчеты полей не окупаются из-за их дороговизны. В этих случаях большую помощь оказывает физическое моделирование, проводимое в соответствии с законами подобия электромагнитных полей. При этом не все параметры моделей могут быть выбраны совершенно строго. Так, например, моделируя поля в присутствии пластин с бесконечными размерами, нельзя оценить погрешность, вносимую конечными размерами реальных моделей, если физические наблюдения не сравниваются со строгими расчетами. Роль расчетных опорных точек играют решения задач о полях вблизи от проводящей полуплоскости.

Строгие решения Тессера и Весли были дополнены Дж. Уэйтом [67] и Весли [71], построившими приближенное решение той же задачи в предположении, что продольная проводимость полуплоскости конечна.

В таком виде решения задачи о проводящей полуплоскости приобретают новое значение и могут быть отнесены к другому, наиболее важному разделу теории рудной электроразведки. В нем изучается связь электромагнитных полей с физическими свойствами рудных тел. При этом преследуются две цели: найти совокупность подчиненных геофизикам и геологам условий, обеспечивающих наиболее четкую и по возможности однозначную зависимость вторичных полей от электропроводности объекта; разработать интерпретационный аппарат, с по-

мощью которого можно оценить электропроводность объекта, располагая наблюдениями электромагнитного поля.

Задачи, входящие в этот раздел теории, имеют, как правило, строгое с аналитической точки зрения решение, но в их постановке допускаются упрощающие предположения, делающие решения сугубо приближенными. Такое построение теории вполне оправдано с точки зрения преследуемой в ней цели. Решение входящих в нее задач в более общем виде встречается со значительными трудностями, преодоление которых, как правило, не окупается пользой, приносимой теорией для практики. Опыт показал, что в большинстве случаев можно ограничиться менее строго обоснованными, наполовину интуитивными выводами.

Затруднения, с которыми встретились геофизики при решении задач теории рудной электроразведки, настолько велики, что даже в упрощенной постановке разрешимы только самые простые задачи. В связи с этим в арсенал методов теории рудной электроразведки было введено упоминавшееся выше физическое моделирование полей, роль которого очень велика. Отдельные аналитические решения имеют в основном значение опорных точек.

Наиболее полно с геофизической точки зрения сформулированы условия в задачах, в которых рассматривается проводящее тело в виде бесконечного кругового цилиндра. В них предполагается, что цилиндр находится в проводящей среде с меньшей электропроводностью, заполняющей все пространство или его половину.

Поле плоской волны в проводящей среде, заполняющей полное пространство, в присутствии проводящего цилиндрического тела, рассмотрел Б. С. Светов [38]. Решение Б. С. Светова является частным случаем известного общего решения задачи о дифракции электромагнитной волны на цилиндрическом теле. Предположив частоту поля низкой, Б. С. Светов вывел некоторые закономерности, имеющие большое значение в теории рудной электроразведки. В частности, он наглядно показал существование двух типов вторичных полей (аномалий) — электрического и магнитного, или индукционного. Вторичные поля электрического типа обязаны своим существованием гальванической связи проводящего тела с окружающей его средой. Они существуют не только в нестационарных, но и в стационарных первичных полях. Связь их с временными параметрами (частотой, временем, протекшим между выключением постоянного тока и наблюдением и т. д.) мало благоприятна для определений физических свойств рудных тел по частотным или переходным характеристикам полей.

Вторичные поля магнитного типа могут появиться только в нестационарных первичных полях. Изучение их зависимости от выбора момента наблюдения или частоты позволило разработать практически осуществимые способы оценки электропроводностей.

Задача о цилиндрическом проводнике в проводящем полупространстве, в которое из непроводящего полупространства проникает электромагнитная волна, решена Б. П. Дьяконовым [25]. Тот же автор решил аналогичную задачу, предположив, что источником первичного поля является прямолинейный ток в бесконечном кабеле [27]. Е. В. Захаров изучил влияние слоистости вмещающей среды на дифракцию электромагнитной волны около цилиндра [28]. Задача о цилиндре в поле прямолинейного тока, однако без учета влияния границы между проводящей и непроводящей средами, решена Дж. Уэйтом [68]. Дж. Уэйт, в достаточной мере произвольно, отбросил часть слагаемых в своем решении, что привело к недооценке роли вторичных полей электрического типа. Б. П. Дьяконов рассмотрел также искажения, вносимые в поле волны проводящей сферой, находящейся в проводящем полупространстве [26].

Анализ собственных решений, а также решений, полученных другими авторами, позволил Б. С. Светову найти главные критерии для отбора первичных полей, в которых обеспечивается преобладающая роль аномалий магнитного типа по сравнению с аномалиями электрического типа [38, 39]. В том же направлении провели ряд исследований Ф. М. Каменецкий и В. Ф. Коваленко [30], которые показали, что аномалии индукционного типа, вызванные вторичными токами в рудных телах, особенно хорошо наблюдаются в устанавливаемом поле.

В идеальном случае, когда аномалии электрического типа отсутствуют

полностью, физические свойства среды, вмещающей искомый проводящий объект, мало существенны. Строгое решение дает для этого случая отсутствие токов во вмещающей среде, которая должна быть непроводником. Поскольку благоприятен для рудной электроразведки случай преобладающей роли аномалий магнитного типа, то в теории изучаются почти исключительно вторичные поля, вызванные индукционными токами в проводниках, находящихся в изоляторе.

Строгие аналитические решения получены для сферического и цилиндрического проводников в однородном магнитном поле (Дж. Уэйт [64]; Ф. М. Каменецкий, А. А. Кауфман и Ю. В. Якубовский [32]; С. Уорд [69]), в поле прямолинейного тока в бесконечном кабеле [65] и в поле магнитного диполя [56, 66, 69, 68].

Наиболее полно вторичные поля от проводящих тел различной формы исследованы с помощью физического моделирования. В основу этого метода положен принцип подобия электромагнитных полей, применение которого облегчается наличием в среде единственного проводника — модели рудного тела. Результаты физического моделирования полей изложены в работах Е. Хедstroma и Д. Паразниса [54], Б. С. Светова [37, 39], В. И. Векслера [8], А. Б. Великина и Ю. И. Булгакова [9] и др.

Одним из важных выводов теории являются особые свойства критерия подобия электромагнитных полей, позволяющие использовать его в качестве интерпретационного параметра. Совместное изучение аналитических решений и результатов модельных опытов показало, что, вводя в критерии подобия несущественные постоянные множители, можно привести частотные и переходные характеристики вторичных полей к почти полному совпадению, несмотря на большие различия формы проводящих тел, вызвавших эти поля (Б. С. Светов [38, 39]). Это важное свойство вторичных полей положено в основу оценки физических свойств объекта, независимо от его формы.

Современная теория электромагнитных методов является разветвленной дисциплиной, в которой используются классические аналитические приемы, современные методы, основанные на широком применении электронных цифровых машин и физическое моделирование. Опыт построения теории научил геофизиков соблюдать осторожность при усложнении исходных условий решаемых задач. Как правило, детали формы и расположения тел и сравнительно небольшие вариации физических констант мало отражаются на вычисляемых и наблюдаемых полях. Точность и детальность геологической интерпретации ограничена природой электромагнитных полей. Вместе с тем геофизики окончательно поняли, что, не располагая достаточно развитой теорией, они не могут выбрать оптимальную методику полевых работ и научиться извлекать из полевых наблюдений максимум полезной геологической информации. Все современные работы по теории электромагнитных методов уходят корнями в те основы, которые были заложены работами В. Р. Бурсиана. Курс В. Р. Бурсиана представляет собою лучшее из всех имеющихся сегодня изложений этих основ.

Так же многие из решаемых в наше время задач требуют применения методов исследования, разработанных В. А. Фоком и изложенных в его статьях. Для очень многих, изучающих теорию электромагнитных методов или работающих в этой области, обращенные к трудам В. Р. Бурсиана и В. А. Фока будут очень полезными и намного сократят затраты времени и труда.

Тем, кто захочет детально ознакомиться с теорией электромагнитных методов в ее современном состоянии, можно порекомендовать обратиться к трудам советских геофизиков [1, 3, 5, 6, 33, 10, 11, 12, 39].

ЛИТЕРАТУРА

К ПЕРВОЙ ЧАСТИ

1. Альпин Л. М. Заметки по теории электрической разведки. М.—Л., ОНТИ, 1935.
2. Альпин Л. М. К теории электрического каротажа буровых скважин. Тр. ВКГР, вып. II (18). М., ОНТИ НКТП, 1938.
3. Альпин Л. М. Негоризонтальные поверхности раздела и палетки КЗЛ. Прикл. геофизика, № 1, М., ГСГТ, 1940.
4. Альпин Л. М. Каротажные кривые сопротивления для наклонного пласта. Прикл. геофизика, вып. 4. М., Гостоптехиздат, 1948.
5. Альпин Л. М. Теория дипольных зондирований. М., Гостоптехиздат, 1950.
6. Альпин Л. М. Теория поля. М., «Недра», 1966.
7. Альпин Л. М., Комаров С. Г. Альбом палеток БКЗ. М., Гостоптехиздат, 1953.
8. Блох И. М. Дипольное электропрофилирование. М., Гостоптехиздат, 1957.
9. Блох И. М. Электропрофилирование методом сопротивлений. М., Гостоптехиздат, 1962.
10. Богданов А. И. Графический метод интерпретации некоторых типов трехслойных кривых вертикальных электрзондирований. Мат-лы ЦНИГРИ, Геофизика, № 8. М.—Л., Гостоптехиздат, 1940.
11. Богданов А. И. Графический способ построения и интерпретации трехслойных кривых вертикального электрического зондирования. М., Гостоптехиздат, 1948.
12. Бурсиан В. Р. Нормальное поле прямолинейного бесконечно длинного кабеля. М.—Л.—Новосибирск, Госгоргеолнефтеиздат, 1934.
13. Бурсиан В. Р. К вычислению кривых электробурения. Уч. зап. ЛГУ, № 8, сер. физ. наук, вып. 2, 1936.
14. Бурсиан В. Р. К вопросу о распределении потенциала на оси скважины при наличии фильтрационных электродвижущих сил. БНГ, вып. III. М.—Л., НКТП ОНТИ, 1936.
15. Бурсиан В. Р. К вопросу о распределении потенциала вдоль оси скважины при наличии диффузионных (контактных) э. д. с. БНГ, вып. III. М.—Л., НКТП ОНТИ, 1936.
16. Бурсиан В. Р., Пылаев А. М. Определение глубины и отношения полей в методе индукции с помощью палетки. М.—Л.—Новосибирск, Госгоргеолнефтеиздат, 1933.
17. Бурсиан В. Р. и др. Физические и экспериментальные основания метода эквипотенциальных линий. Мат-лы по общей и прикл. геологии, вып. 137. Л., 1929.
18. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. I. М., ИЛ, 1949.
19. Вейнберг А. К. Магнитная проницаемость, электропроводность, диэлектрическая проницаемость и теплопроводность среды, содержащей сферические и эллипсоидальные включения. ДАН СССР, т. 169, № 3, 1966.
20. Вешев А. В. Влияние рельефа на результаты работ комбинированным профилированием. Уч. зап. ЛГУ, № 278. Вопр. геофизики, вып. 11, 1959.
21. Вешев А. В. Влияние рельефа на результаты работ дипольным осевым профилированием. Уч. зап. ЛГУ, № 286. Вопр. геофизики, вып. 12, 1960.

22. Вешев А. В. Влияние неоднородности пород при электропрофилировании. Вопр. рудн. геофизики, вып. 2. М., Гостеолтехиздат, 1961.
23. Вешев А. В. Влияние неоднородностей пород на результаты электропрофилирования. Развед. и промысл. геофизика, вып. 43, 1962 (Тр. ВНИИГеофизика).
24. Вешев А. В. Электропрофилирование на постоянном и переменном токе. Л., Недр, 1965.
25. Гасаненко Л. Б. Нормальное поле вертикального гармонического низкочастотного магнитного диполя. Уч. зап. ЛГУ, № 249. Вопр. геофизики, вып. 10, 1958.
26. Гасаненко Л. Б., Молочнов Г. В. Электромагнитное поле горизонтального магнитного диполя над горизонтальнослоистой структурой. Уч. зап. ЛГУ, № 249. Вопр. геофизики, вып. 10, 1958.
27. Гасаненко Л. Б., Молоткова М. Н., Сапожников Б. Г. Нормальное поле бесконечного прямолинейного кабеля (поле в воздухе). Уч. зап. ЛГУ, № 324, вып. 15, 1964.
28. Глазенап. Математические и астрономические таблицы. Л., Изд-во АН СССР, 1932.
29. Григорьева Н. П. Линейный неэквипотенциальный проводник. Тр. ВИРГ, вып. 2. М., Гостеолтехиздат, 1950.
30. Григорьева Н. П. Метод комбинированного профилирования. Тр. ВИРГ, вып. 3. М., Гостеолтехиздат, 1950.
31. Григорьева Н. П. Сравнение аномалий ρ_k над проводящей сферой для различных установок метода постоянного тока. В сб. Геофиз. разведка руд. месторождений. Тр. ВИРГ. М., Гостеолтехиздат, 1953.
32. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1948.
33. Грунторад Я. Влияние плохопроводящих пластов на аномалию естественного электрического поля. Вестн. ЛГУ, № 12, вып. 2, 1957.
34. Грунторад Я. Сравнение методов комбинированного профилирования и профилирования с параллельным перемещением электродов. Уч. зап. ЛГУ, № 249, Вопр. геофизики, вып. 10, 1958.
35. Грунторад Я. Электрическое поле поляризованных проводников в однородных и неоднородных средах. Уч. зап. ЛГУ, № 249. Вопр. геофизики, вып. 10, 1958.
36. Дахнов В. Н. Каротаж скважин. Интерпретация каротажных диаграмм. М., Гостоптехиздат, 1941.
37. Дахнов В. Н. Промысловая геофизика. М., Гостоптехиздат, 1947.
38. Дахнов В. Н. Интерпретация каротажных диаграмм. М., Гостоптехиздат, 1948.
39. Дахнов В. Н. Электрическая разведка нефтяных и газовых месторождений. М.—Л., Госнефтеиздат, 1951; М.—Л., Гостоптехиздат, 1953.
40. Дахнов В. Н. Интерпретация результатов геофизических исследований разрезов скважин. М., Гостоптехиздат, 1955.
41. Дахнов В. Н., Нейман Е. А. Палетки ПКМ-МНИ для определения удельного электрического сопротивления пластов конечной мощности высокого сопротивления. М.—Л., Гостоптехиздат, 1953.
42. Джексон Дж. Классическая электродинамика. М., Мир, 1965.
43. Заборовский А. И. Электроразведка. М., Гостоптехиздат, 1943; 1963.
44. Каленов Е. Н. Опыт графического построения семислойных кривых вертикального зондирования. ЭЛКГР, № 2(6), 1937.
45. Каленов Е. Н. Практические способы интерпретации вертикальных электрических зондирований. ГОНТИ, 1939.
46. Каленов Е. Н. Интерпретация кривых вертикального электрического зондирования. М., Гостоптехиздат, 1957.
47. Комаров С. Г. Боковое каротажное зондирование. АНХ, № 9, 1938.
48. Комаров С. Г. Кажущееся удельное сопротивление пластов конечной мощности и высокого удельного сопротивления. Прикл. геофизика, № 1, М., Гостоптехиздат, 1944.

49. Комаров С. Г. Пласты малого сопротивления. Прикл. геофизика. М.—Л., Гостоптехиздат, 1945.
50. Комаров С. Г. Каротаж по методу сопротивлений. Интерпретация. М.—Л., Гостоптехиздат, 1950.
51. Комаров С. Г. Геофизические методы исследования нефтяных скважин. М.—Л., Гостоптехиздат, 1952.
52. Комри Л. Д. Шестизначные математические таблицы Чемберса. М., «Наука», 1964.
53. Кондорский Е. И. К теории магнитных свойств конгломератов и порошков. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., 14, № 4, 1950.
54. Кондорский Е. И. К теории магнитных свойств горных пород и порошков. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 5, 1952.
55. Краев А. П. Физика земли. Изд. ЛГУ, 1940.
56. Краев А. П. Основы геоэлектрики, ч. I. Л., Гостехиздат, 1951.
57. Краев А. П. Основы геоэлектрики. Л., «Недра», 1965.
58. Крылов А. Н. Расчет балок, лежащих на упругом основании. Изд. 3. Л., Изд-во АН СССР, 1931.
59. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. I. М.—Л., ГТТИ, 1951.
60. Лепешинский Ю. Н. Электроразведка переменным током. Геолгиз, 1933.
61. Липская Н. В. Поле точечного электрода, наблюдаемое на поверхности земли вблизи погруженной сферы. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., т. 8, № 5, 1949.
62. Майэ Р. Математические основания электрической разведки постоянным током. М.—Л., ОНТИ, 1935.
63. Матвеев Б. К., Шкабария Н. Г. Электропрофилирование над шаром, расположенным вблизи контакта двух сред. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 10, 1959.
64. Нестеров Л. Я. Палетка ρ_k . М., ГГРУ, 1931.
65. Нестеров Л. Я., Бибииков Н. С., Усманов А. Ш. Курс электроразведки. Л.—М., ГОНТИ, 1938.
66. Новожилова М. Е. Определение глубины проводников по методу естественного поля. Геофиз. разведка рудн. месторождений. М., Госгеолгиздат, 1953.
67. Новожилова М. Е. Поле поляризованной сферы в присутствии контакта. Вопр. рудн. геофизики, вып. 1. М., Госгеолтехиздат, 1957.
68. Овчинников И. К. Определение размеров и элементов залегания линзы из наблюдений в методе заряженного тела. Тр. и мат-лы Свердл. горного ин-та, 1937.
69. Овчинников И. К. К теории эффективной электропроводности $\bar{\gamma}$, магнитной проницаемости $\bar{\mu}$, диэлектрической постоянной $\bar{\epsilon}$ среды, имеющей инородные включения. Тр. ВИРГ, вып. III. М., Госгеолгиздат, 1950.
70. Оделевский В. И. Расчет обобщенной проводимости гетерогенных систем. ЖТФ, т. 21, вып. 6, 1951.
71. Озерская М. Л. Каротаж пачки тонких пластов высокого сопротивления. БНГ, вып. 1, М., 1936.
72. Оллендорф Ф. Токи в земле. Теория заземлений. М., ГНТИ, 1932.
73. Петровский А. А. Естественное поле, создаваемое рудным телом. Изв. ИПГ, вып. 1. Л., 1925.
74. Петровский А. А. Определение места, глубины залегания и мощности сферической залежи по наблюдению создаваемых ею земных токов. Изв. ИПГ, вып. 3, Л., 1927.
75. Петровский А. А. Расчет искусственного электрического поля, ч. III. Л., Изв. ИПГ, 1927.
76. Петровский А. А. Искусственное электрическое поле с 21 парой электродов. Изв. ИПГ, вып. IV, Л., 1928.
77. Петровский А. А. Магнитные силы в искусственном электрическом поле. Изв. ИПГ, вып. IV, Л., 1928.
78. Петровский А. А. Изолинии естественного электрического поля, создаваемого сферической залежью. Изв. ИПГ, вып. 4. Л., 1928.
79. Петровский А. А., Нестеров Л. Я. Электроразведка постоянным током. М.—Л., НКТП, 1932.
80. Петровский А. А. Специальный курс электричества для разведчиков-геофизиков, ч. IV. Л.—М., ОНТИ, 1935.
81. Поляков А. С. Влияние рельефа на кривые ρ_k комбинированного профилирования. В сб. Геофиз. методы разведки в Казахстане. Алма-Ата, 1958. (Каз. геофиз. трест Каз. республ. НТО Горное).
82. Поляков А. С. Влияние рельефа на результаты метода срединного градиента. Там же, 1958.
83. Пылаев А. М. Руководство по интерпретации вертикальных электрических зондирований. М., «Недра», 1968.
84. Самосюк Г. П., Вешев А. В. Поле точечного источника тока в присутствии сферы. Уч. зап. ЛГУ, № 286, вып. 12, 1960.
85. Сахарников Н. А. Поле точечного источника в неоднородной среде при веерообразном расположении границ раздела. Уч. зап. ЛГУ, № 324, Вопр. геофизики, вып. 15, 1964.
86. Семенов А. С. Влияние структуры на удельное электрическое сопротивление агрегатов. Мат-лы ВСЕГЕИ, Геофизика, № 12. М.—Л., Госгеолгиздат, 1948.
87. Семенов А. С. Теория метода заряженного тела в применении к эквипотенциальным проводникам. Мат-лы ВСЕГЕИ. Геофизика, № 13, М.—Л., Госгеолгиздат, 1948.
88. Семенов А. С. Плотность тока и суммарный ток поляризованных рудных тел. Уч. зап. ЛГУ, № 333. Вопр. геофизики, вып. 17, 1967.
89. Семенов А. С. Электроразведка методом естественного электрического поля. Л., «Недра», 1968.
90. Семенов А. С. Электроразведка в Ленинградском университете. Уч. зап. ЛГУ, Вопр. геофизики, вып. 19, 1969.
91. Семенов А. С. Истоки разведочной (геологической) геофизики. Вестн. ЛГУ, № 6, сер. геол. и геогр., вып. I, 1969.
92. Семенов А. С., Новожилова М. Е. Поле вертикального электрического диполя в анизотропной среде. Вопр. развед. геофизики, вып. 3. М., «Недра», 1964.
93. Семенов А. С., Фокин А. Ф., Вешев А. В. Поле точечного источника в анизотропном полупространстве. Уч. зап. ЛГУ, № 249, Вопр. геофизики, вып. 10, 1958.
94. Семенов А. С. и др. Поле точечного источника тока на плоской дневной поверхности в случае анизотропной среды. Тр. ВИТР, сб. I, Новое в методике и технике геологоразведочных работ. Л., Гостоптехиздат, 1958.
95. Скарятин Р. И. Расчет и сравнение однородности полей Шлюмберге, Лундберга и Петровского. Изв. ИПГ, вып. IV, Л., 1928.
96. Смайт В. Электростатика и электродинамика, М., ИЛ, 1954.
97. Справочник геофизика, т. III. М., Гостоптехиздат, 1963.
98. Стреттон Дж. А. Теория электромагнетизма. М.—Л., ОГИЗ, 1948.
99. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М., ГТТИ, 1954; М., «Наука», 1966.
100. Тарасов Г. А. Влияние наносов в методе естественного электрического поля. Уч. зап. ЛГУ, № 249. Вопр. геофизики, вып. 10, 1958.
101. Тарасов Г. А. Электрическое поле электрического диполя, расположенного вблизи пласта ограниченной мощности. Вопр. рудной геофизики, вып. 1. М., Госгеолтехиздат, 1960.
102. Тарасов Г. А. Электрическое поле над комплексом вертикально поляризованных проводящих сфер. Вопр. рудн. геофизики, вып. 2. М., Госгеолтехиздат, 1961.
103. Темкина Б. С., Езупов Ф. И. Материалы по теории каротажа сопротивлений, полученные в результате сеточного моделирования. Прикл. геофизика, вып. II, Гостоптехиздат, 1954.
104. Фок В. А. Теория определения сопротивления горных работ по способу каротажа. Л., ГТТП, 1933.
105. Фок В. А., Бурсиан В. Р. Электромагнитное поле переменного тока в цепи с двумя заземлениями. Ж. рус. физ.-хим. об-ва, т. 58, вып. 2, 1926.

106. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л.—М., ОНТИ, 1937.
107. Халфин Л. А. Поле точечного источника в присутствии сжатого и вытянутого сфероидов. Изв. АН СССР, сер. геоф., № 6, 1956.
108. Халфин Л. А. Поле точечного источника при паличпи полу-сферической выемки. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 10, 1956.
109. Четырехслойные палетки электрического зондирования и палетки НК и ГВК. М., Гостоптехиздат, 1957.
110. Шахнес К. А. Статические способы интерпретации кривых ВЭЗ. В сб. развед. и промысл. геофизика, вып. 6. Гостоптехиздат, 1953.
111. Шейпманн С. М. Элементы теории электроразведки анизотропных сред. Мат-лы ВСЕГЕИ, Геофизика, 9—10. М.—Л., Госгеолгиздат, 1941.
112. Alfano L. Introduction to the interpretation of resistivity measurements for complicated structural conditions. Geophys. prosp., vol. 7, N 3, 1959.
113. Alfano L. The influence of surface formation on the apparent resistivity values in electrical prospecting. Geophys. prosp., pt. 1, vol. 8, N 4, 1960; pt. 2, vol. 9, N 2, 1961.
114. Ehrenburg D. O., Watson R. I. Mathematical theory of Electrical Field in stratified Media with horizontal homogeneous and isotropic Layers. Techn. Public., N 400 Geophys. prosp. N 27.
115. Hedstrom H. Electrical Prospecting for Gold Quartz Veins and Reefs. Stockholm.
116. Hummel I. N. Der scheinbare spezifische Widerstand. Zs. f. Geophys., Jahr. 5, 1929.
117. Kolbenheyer T. Riešenie okrajovej úlohy odporovej geoelektriky pre sploštený rotačný elipsoid. Geofys. sb., N 33, 1955.
118. Kolbenheyer T. On the boundary problem of geoelectricity for a homogeneously laminated prolate spheroid. N 56, Geofys. sb., 1956.
119. Kolbenheyer T. O okrajovej úlohe odporovej geoelektriky pre pretiahnutý rotačný elipsoid. Mat.-fiz. časopis sav, vol. 6, N 2, 1956.
120. Kolbenheyer T. Über die randwertaufgabe der geoelektrik für ein dreiaxsiges elipsoid. Geofys. sb., N 93, 1958.
121. Neumann C. Hydrodinamische Untersuchungen. Leipzig, 1883.
122. Stefanescu S. S. Das electromagnetische Normalfeld des waagerechten Nilderfrequenz-dipols. Beitr. angew. geophysik, Bd. 9, N. 3/4, 1942. Gerlands Beitr. geophysik, Bd. 61, N 3, 1950.
123. Stefanescu S. S., Schlumberger C. et M. Sur la distribution électrique potentielle autour d'une prise de terre ponctuelle dans un terrain á couches horizontales et isotropes. J. phys., radium, N 4, 1930.
124. Tagg G. F. Interpretation of resistivity measurements. Tech. Public, N 477. Geophys. prosp. N 35.
125. Watson G. Theory of Bessel functions. Cambridge University Press., 1922.

КО ВТОРОЙ ЧАСТИ

1. Бердичевский М. Н. Электрическая разведка методом теллурических токов. М., Гостоптехиздат, 1960.
2. Бердичевский М. Н. Магнитотеллурическое поле в горизонтально-неоднородной среде. Прикл. геофизика, № 31. М., Гостоптехиздат, 1961.
3. Бердичевский М. Н. Электрическая разведка методом магнитотеллурического профилирования. М., Недра, 1968.
4. Вандакуров Ю. В. Дифракция электромагнитных волн, испускаемых произвольно ориентированным электрическим или магнитным диполем на идеально проводящей полуплоскости. ЖЭТФ, вып. 26. М., 1954.
5. Ваньян Л. Л. Основы электромагнитных зондирований. М., «Недра», 1965.
6. Ваньян Л. Л., Бобровников Л. З. Электроразведка по методу становления электромагнитного поля. М., Госгеолтехиздат, 1963.
7. Ватсон Г. Теория бесселевых функций. М., ИЛ, 1949.

8. Векслер В. И. Аномалия в переменном поле от проводящей плоской полосы и круглого диска. Тр. ЦНИГРИ, вып. 34. М., 1959.
9. Великин А. Б., Булгаков Ю. И. Индуктивная электроразведка методом переходных процессов с совмещенными источником и приемником поля. Л., «Недра», 1967.
10. Великин А. Б., Фраптов Г. С. Электромагнитные поля, применяемые в индукционных методах электроразведки. Л., Гостоптехиздат, 1962.
11. Вешев А. В. Электропрофилирование на постоянном и переменном токе. Л., «Недра», 1965.
12. Вешев А. В. и др. Электромагнитное профилирование. Л., «Недра», 1971.
13. Гасаненко Л. Б. Нормальное поле вертикального гармонического низкочастотного магнитного диполя. Вопр. геофизики, Уч. зап. ЛГУ, № 249, сер. физ. и геол. наук, вып. 10, 1958.
14. Гасаненко Л. Б. Поле вертикального гармонического магнитного диполя на поверхности многослойной структуры. Вопр. геофизики. Уч. зап. ЛГУ, № 286, сер. физ. и геол. наук, вып. 11, 1959.
15. Гасаненко Л. Б., Молочнов Г. В. Электромагнитное поле горизонтального магнитного диполя над горизонтальнослоистой структурой. Вопр. геофизики. Уч. зап. ЛГУ, № 249, сер. физ. и геол. наук, вып. 10, 1958.
16. Гасаненко Л. Б., Шолпо Г. П. К вопросу о вычислении электромагнитного поля вертикального низкочастотного магнитного диполя на поверхности двухслойной структуры. Вопр. геофизики. Уч. зап. ЛГУ, № 278, сер. физ. и геол. наук, вып. 11, 1959.
17. Гасаненко Л. Б., Шолпо Г. П. К теории электромагнитных зондирований. Вопр. геофизики, Уч. зап. ЛГУ, № 286, сер. физ. и геол. наук, вып. 12, 1960.
18. Дмитриев В. И. Влияние неоднородностей земли на поле прямолинейного бесконечного длинного кабеля. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 4, 1959.
19. Дмитриев В. И. Решение основной задачи теории индукционного метода электроразведки. Изв. АН СССР, сер. геоф., № 8, 1960.
20. Дмитриев В. И. Дифракция электромагнитных волн на проводящей пластине, расположенной в проводящем пространстве. Изв. АН СССР сер. геофиз., № 6, 1962.
21. Дмитриев В. И. Метод расчета магнитотеллурического поля в неоднородном слое с произвольным изгибом нижней поверхности. Прикл. геофизика, вып. 41. М., «Недра», 1965.
22. Дмитриев В. И. О расчете магнитотеллурического поля в слое с произвольным изгибом нижней поверхности в случае *H*-поляризации. Прикл. геофизика, вып. 51. М., «Недра», 1968.
23. Дмитриев В. И., Захаров Е. В. Дифракция плоского электромагнитного поля на идеально проводящей полосе, погруженной в слоистую среду. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 5, 1967.
24. Дмитриев В. И., Барышникова И. А., Захаров Е. В. Аномальные поля идеально проводящей бесконечно тонкой полосы в индуктивных методах электроразведки. Методы развед. геофизики, вып. 13. Л., «Недра», 1971.
25. Дьяконов Б. П. Дифракция электромагнитных волн на круглом цилиндре в однородном полупространстве. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 9, 1959.
26. Дьяконов Б. П. Дифракция электромагнитных волн на шаре, расположенном в полупространстве. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 11, 1959.
27. Дьяконов Б. П. Влияние поверхности земли на электромагнитное поле цилиндрической неоднородности. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 5, 1960.
28. Захаров Е. В. К дифракции плоского электромагнитного поля на однородном цилиндрическом теле, погруженном в слоистую среду. Изв. АН СССР, Физика Земли, № 1, 1969.
29. Каменецкий Ф. М., Коваленко В. Ф. Неустановившиеся вихревые токи в проводящих покровных отложениях. Изв. вузов, Геология и разведка, № 6. М., 1962.

30. Каменецкий Ф. М., Коваленко В. Ф. Неустановившееся поле незаземленной петли в присутствии проводящего тела, перекрытого слоем наносов. Прикл. геофизика, вып. 35. М., Гостоптехиздат, 1962.
31. Каменецкий Ф. М., Коваленко В. Ф., Якубовский Ю. В. Метод переходных процессов. М., ОНТИ, ВИМС МГиОН СССР, 1963.
32. Каменецкий Ф. М., Кауфман А. А., Якубовский Ю. В. О выборе оптимальной частоты при индуктивных методах электроразведки. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 2, 1957.
33. Кауфман А. А., Морозова Г. М. Теоретические основы метода зондирования становлением поля в ближней зоне. Новосибирск, «Наука», 1970.
34. Никитина В. Н. К дифракции на полуплоскости в поглощающих средах. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 4, 1960.
35. Обухов Г. Г. Магнитотеллурическое поле над пологими структурами (поляризация H). Прикл. геофизика, вып. 44. М., «Недра», 1965.
36. Обухов Г. Г. Магнитотеллурическое поле над пологими вытянутыми структурами (поляризация E). Прикл. геофизика, вып. 46. М., «Недра», 1965.
37. Светов Б. С. Некоторые результаты модельных исследований по индуктивному методу. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 1, 1960.
38. Светов Б. С. О роли способа возбуждения поля в низкочастотном индуктивном методе электроразведки. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 12, 1961.
39. Светов Б. С. и др. Электромагнитные методы разведки в рудной геофизике. М., «Недра», 1966.
40. Тихонов А. Н. О становлении электрического тока в однородном проводящем полупространстве. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 10, 1946.
41. Тихонов А. Н. Об определении электрических характеристик глубоких слоев земной коры. ДАН СССР, т. 73, № 2, 1950.
42. Тихонов А. Н. О становлении электрического тока в неоднородной слоистой среде. Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., т. 14, № 3, 1950.
43. Тихонов А. Н., Скугаревская О. А. О становлении электрического тока в неоднородной слоистой среде. Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., т. 14, № 4, 1950.
44. Тихонов А. Н., Скугаревская О. А. О становлении электрического тока в неоднородной слоистой среде. Изв. АН СССР, геофиз., № 6, 1951.
45. Тихонов А. Н. Об асимптотическом поведении интегралов, содержащих бесселевы функции. ДАН СССР, т. 125, № 5, 1959.
46. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л.—М., ОНТИ, 1937.
47. Шахсуваров Д. Н. Методика интерпретации результатов наблюдений электромагнитного поля при дипольном зондировании. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 5, 1956.
48. Шейнманн С. М. Об установлении электромагнитных полей в земле. Прикл. геофизика, вып. 3. М., Гостоптехиздат, 1947.
49. Шейнманн С. М. Способ расчета псевдоскалярных электромагнитных полей и его применение. Прикл. геофизика, вып. 60. М., «Недра», 1970.
50. Шейнманн С. М. Электромагнитное поле переменного тока, растекающегося в клине. Прикл. геофизика, вып. 61. М., «Недра», 1970.
51. Шейнманн С. М. Расчет электромагнитных полей методом линейной суперпозиции возмущений от малых деформаций граничных поверхностей. Прикл. геофизика, вып. 62. М., «Недра», 1971.
52. S a g n i a r d L. Basic theory of the magnetotelluric method of geophysical prospecting. Geophys. vol. 18, N 3, 1953.
53. C l e m m o w P. C. A note on the diffraction of a cylindrical wave by a perfectly conducting half-plane. Quart. J. mech. appl. math., vol. 3, p. 3, 1950.
54. H e d s f r o m E. H., P a r a s n i s D. S. Some model experiments relating to electromagnetic prospecting with special reference to airborne work. Geophys. prospec., vol. 6, N 4, 1958.
55. J a n k o w s k i J. The diffraction problem on the conducting half-plane in geophysical research. Acta geophys. polon., vol 7, N 1, 1959.
56. M a r c h H. W. The field of a magnetic dipole in the presence of a conducting sphere. Geophys., vol. 18, N 3, 1953.
57. S o m m e r f e l d A. Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie Ann. d. Physik, Bd. 28, S. 665, 1909; Ann. d. Physik, Bd. 81, S. 1135, 1926.
58. S e n i o r T. B. The diffraction of a dipole field by a perfectly conducting half-plane. Quart. j. mech. a appl. math., vol. 4, pt. 1, 1953.
59. S l i c t e r L. B. An electromagnetic interpretation problem in geophysics. Geophys., vol. 16, N 3, 1951.
60. S l i c h t e r L. B., K n o p o f f L. Field of an elternating magnetic dipole on the surface of a layered earth. Geophys., vol. 24, N 4, 1959.
61. S t e f a n e s c u S. S. Études theoriques sur la prospection electrique du sous-sol. Institute geological al Romànici studu tehnice si economice, Geofisica, s. D, N 1, 1947.
62. T e i s s e y r e R. The conducting halfe-plane pblem in geophysical exploration (I). Acta geophys. Polon., vol. 2, N 3, 1954.
63. T e i s s e y r e R. The conducting halfe-plane problem in geophysical exploration (II), Acta geophys. Polon., vol. 2, N 4, 1954.
64. W a i t J. R. A conducting sphere in a time varying magnetic field. Geophys., vol. 16, N 4, 1951.
65. W a i t J. R. The cylindrical ore body in the presence of a cable carrying an oscillating current. Geophys., vol. 18, N 2, 1952.
66. W a i t J. R. A conducting permeable sphere in presence of a coil carrying on oscillating current. Canad. j. phys., vol. 31, 1953.
67. W a i t J. R. On the electromagnetic response of an imperfectly conducting thin dyke. Geophys., vol. 24, N 1, 1959.
68. W a i t J. R. Some solution for eletromagnetic problems involving spheroidal, spherical and cylindrical bodies. U. S. natl. bur. stand. j. res., vol. 64B, N 1, 1960.
69. W a r d S. H. Unique determination of conductivity, susceptibility, size and depth in multifrequency electromagnetic exploration. Geophys., vol. 24, N 3, 1959.
70. W e s l e y J. P. Response of dyke to oscillating dipole. Geophys., vol. 23, N 1, 1958.
71. W e s l e y J. P. Response of thin dyke to oscillating dipole. Geophys., vol. 23, N 1, 1958.
72. W e y l H. Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über einem ebenen Leiter. Ann. Physik, Bd. 60, 1919, S. 481.

Опечатки

| С. | Стро-ка | Напечатано | Должно быть |
|-----|---------|---|--|
| 80 | 1 сп. | $\varphi = \frac{e}{R} + \frac{pR}{R^3} + \dots$ | $\varphi = \frac{e}{R} + \frac{(pR)}{R^3} + \dots$ |
| 144 | 3 св. | $\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \frac{d}{d\xi} \sqrt{1-\xi^2} \frac{dP}{d\xi} =$ $= -mP$ | $\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \frac{d}{d\xi} \left(\sqrt{1-\xi^2} \frac{dP}{d\xi} \right) =$ $= -mP$ |
| 232 | 10 св. | $\operatorname{tg} \omega t_0$ | $\operatorname{tg} 2\omega t_0$ |
| 242 | 13 сп. | $\left(\operatorname{grad} \varphi - \frac{i\omega}{i} \mathbf{A} \right)$ | $\left(\operatorname{grad} \varphi + \frac{i\omega}{c} \mathbf{A} \right)$ |
| 252 | 5 св. | $S_x - S_{x+dx} = \frac{\partial S_x}{\partial x} dx$ | $S_x - S_{x+dx} = - \frac{\partial S_x}{\partial x} dx$ |
| 288 | 2 св. | $\frac{z^2 y^2}{z^2 + y^2}$ | $\frac{z^2 - y^2}{z^2 + y^2}$ |
| 335 | 12 св. | $J_\nu \left(\rho \frac{k-k'}{2} \right)$ | $J_\nu \left(\rho \frac{k-k'}{2} \right)$ |
| 349 | 6 св. | $[1 - (1+k\rho) e^{-k\rho}]$ | $[1 + (1+k\rho) e^{-k\rho}]$ |
| 349 | 13 св. | $\frac{2\rho_2}{c\rho^2} H_z^{(0)}$ | $\frac{2\rho_2}{c\rho^2} \sin \varphi H_z^{(0)}$ |

В. Р. Бурсиан

ВИКТОР РОБЕРТОВИЧ БУРСИАН

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ,
ПРИМЕНЯЕМЫХ В ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКЕ

Ведущий редактор З. К. Андрунина
Технический редактор Н. П. Старостина
Корректоры М. А. Масарская, В. Н. Михалевич
Переплет художника И. А. Гордона

М-23028. Сдано в набор 21/XII 1971 г. Подписано к печати 4/IV 1972 г.
Формат бумаги 60 × 90^{1/16}. Печ. л. 23. Уч.-изд. л. 25,96. Изд. № 136.
Тираж 2000 экз. Бумага № 2. Заказ № 1056. Индекс 1-4-1-Л.

Издательство «Недра». Ленинградское отделение.
193171, Ленинград, С-171, ул. Фарфоровская, 12.
Ленинградская типография № 6 Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР. Московский проспект, 91.

Цена 2 р. 80 к.