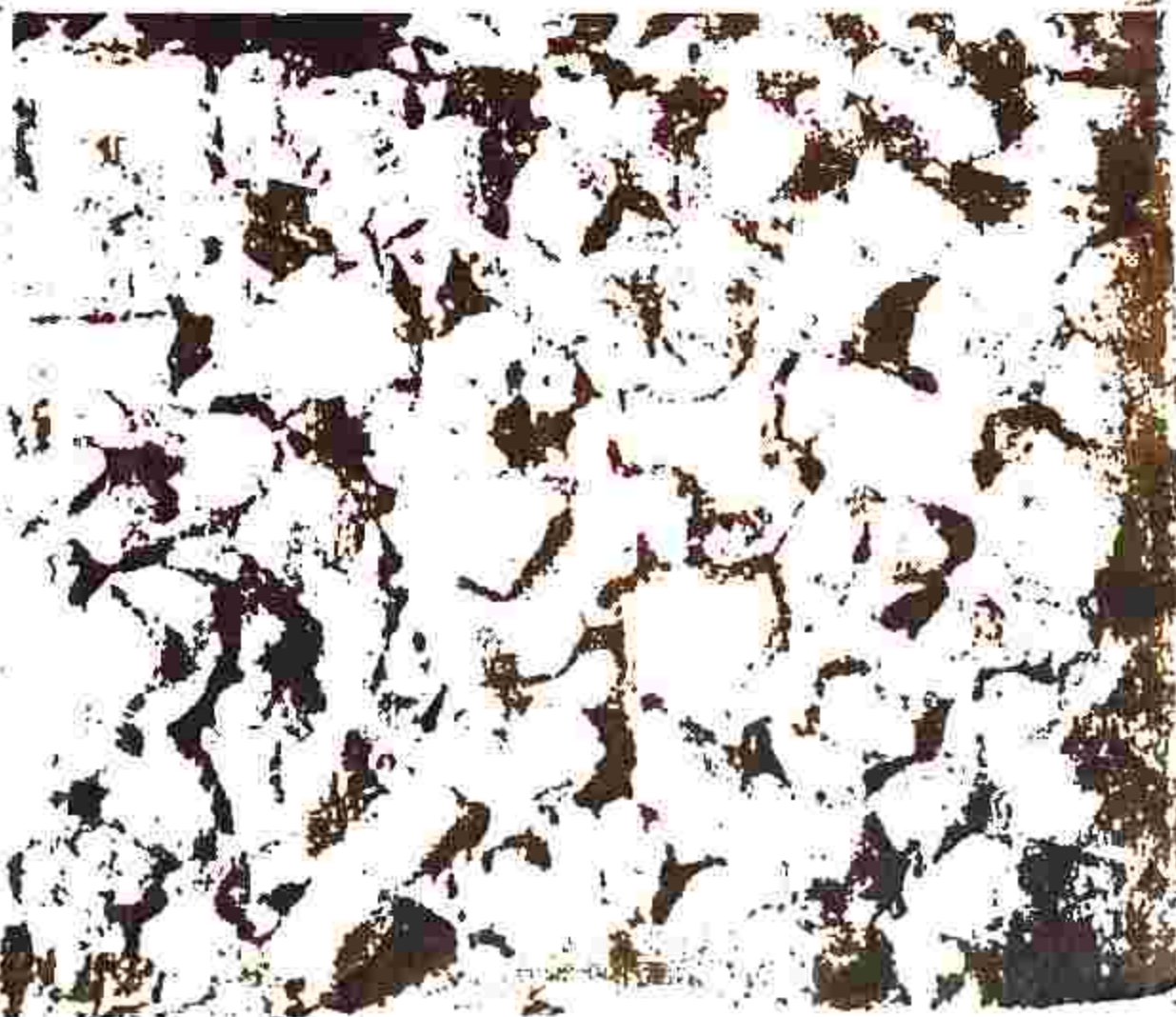


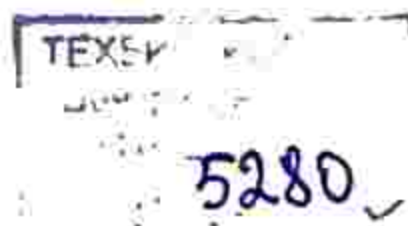
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ  
ОСНОВЫ  
ТАМПОНАЖА  
ГОРНЫХ ПОРОД



6171  
B22

И. И. ВАХРАМЕЕВ

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТАМПОНАЖА ГОРНЫХ ПОРОД



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НЕДРА»  
Москва 1968



Теоретические основы тампонажа горных пород. Вахрамеев И. И.  
Изд-во «Недра», 1968 стр. 291

Область применения тампонажа горных пород в горном деле с каждым годом расширяется. Однако в технической литературе последнего времени освещены лишь отдельные теоретические вопросы проектирования и расчета тампонажа горных пород.

В книге расширен круг вопросов теоретического обоснования тампонажа горных пород. Рассмотрены некоторые вопросы геометрии фильтрации горных пород, описаны методики расчета различных схем нагнетания при тампонаже, даны способы определения радиусов распространения тампонажных растворов. Установлены формулы для определения расстояний между тампонажными скважинами и количества скважин. В книге найдла широкое отражение функция времени при тампонаже горных пород. Даны расчетные зависимости для определения давлений на забоях и разломах тампонажных скважин.

Материал книги основан на законах и формулах подземной гидравлики при тампонаже горных пород применительно к твердеющим жидкостям (испелитин, растворы смолы). При изложении материала учтены геологические особенности тампонажных растворов. Значительная часть теоретических выводов проверена экспериментально.

Рис. 106 табл. II, библиогр. 11.

Предлагаемая работа ставит задачей — дать теоретические основы для проектирования и организации тампонажа методом нагнетания.

Формирование подземной водонепроницаемой завесы, создаваемой тампонажем, обусловлено двумя процессами: физико-химическим и гидравлическим. Физико-химический процесс связан со способами твердения и сгущения нагнетаемых растворов, получением оптимальных составов растворов и назначением устойчивых скоростей движения растворов в пористой среде; гидравлический — с движением растворов. Физико-химический процесс хорошо освещен в технологической литературе, относящейся к данному вопросу; гидравлический — менее изучен. Поэтому предметом нашего исследования служит гидравлический процесс формирования подземных завес.

Возможные случаи устройства тампонажа нагнетанием твердеющих жидкостей через скважину в горном деле сводятся к двум принципиальным схемам: схеме бокового нагнетания, когда жидкость в поры грунта поступает через боковую поверхность скважины, и схеме донного нагнетания, при которой жидкость проникает в грунт только через дно забоя. Опыт устанавливает, что в большинстве случаев однородной пористой среды эти схемы дают пространственные симметричные потоки. Поэтому для аналитического исследования пространственных систем в работе применяется гидромеханический метод источников, простой и наглядный. Источники обладают ценным свойством независимости действия, в силу которого на источники можно налагать любые потоки. В советской технической литературе метод источников высоко оценен проф. А. Я. Миловичем.



## I. Область применения тампонажа в горном деле

Река, проложившая русло в лежачем боку горных выработок, при подъемах уровня воды во время летних ливневых паводков или весенних половодий может затопить расположенные рядом с ней открытые разрезы горных работ. При нормальных уровнях воды, если горные породы лежачего бока состоят из рыхлых несцементированных образований или трещиноватой скалы, затопление открытых и подземных работ происходит инфильтрацией воды из реки по трещинам и порам фильтрующих пород. Наблюдения показывают, что аллювиальные воды, образующие подземные потоки среди рыхлых речных отложений в долинах рек, озер и заболоченных низин, представляют серьезный и обильный источник обводнения горных выработок, расположенных в долинах рек. Обычно эти воды залегают неглубоко среди песков разной крупности и гальки. Питание этих вод происходит главным образом за счет инфильтрации в глубину из поверхностных водотоков. Аллювиальные воды могут вызвать не только обводнение, но и затопление рудников.

Мероприятия для борьбы с обводнением горных работ инфильтрацией поверхностного стока носят не только механический характер, т. е. простую откачку воды насосами из затопленных недр на поверхность земли, но часто имеют и гидротехническое направление, заключающееся в изоляции источника обводнения от горных работ. Если принять во внимание, что фильтрационные пути аллювиальных вод находятся сравнительно неглубоко от земной поверхности, а проводящей средой их служат рыхлые грунты, большей частью крупнозернистые, то созданием неглубоких подземных противофильтрационных завес во многих случаях можно предотвратить обводнение (рис. 1).

Иногда реку приходится отводить в сторону от района горных работ, например, когда под руслом ее залегает рудное тело. Через раздельную гряду рыхлых грунтов или трещиноватую скалу в выработки могут поступать инфильтрацией воды из верхнего бьефа подпорного сооружения или из водоотводящего канала.

Поэтому параллельно с отводом реки необходимо рассматривать защитные мероприятия против инфильтрации. Правильный выбор типа водонепроницаемых покрытий дна и откосов водоотводящих каналов зависит от многих условий. Должны быть приняты во

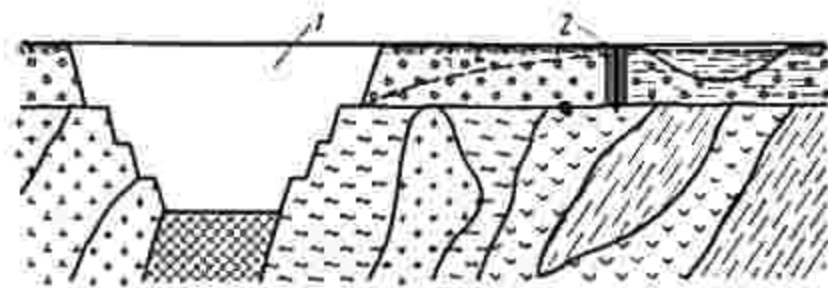


Рис. 1. Защита горных работ от затопления инфильтрацией поверхностного стока:  
1 — открытые разработки, 2 — фронтальная завеса методом нагнетания

внимание геологические и гидрологические особенности реки, характер и состав слагающих пород в основании и боках водоотводных сооружений, величина расходов реки, объем строительных работ и сроки их осуществления. В определенных гидрогеологи-

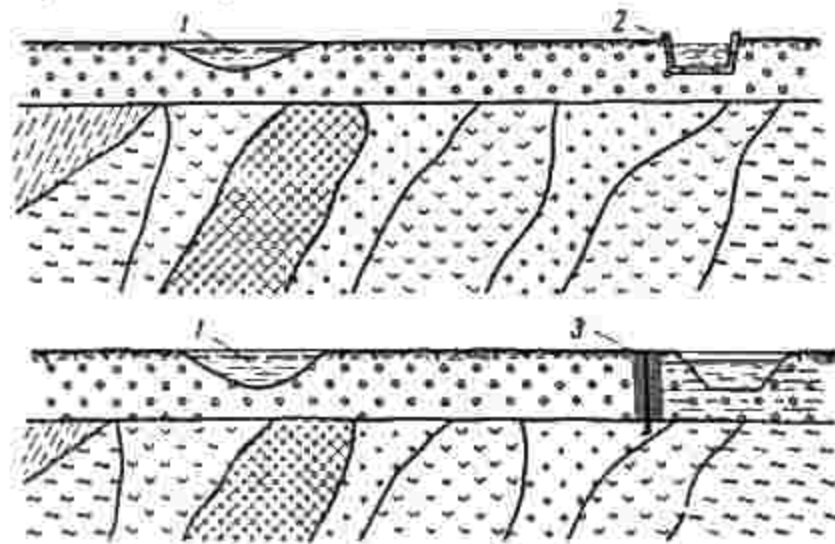


Рис. 2. Противофильтрационная подземная завеса в бортах водоотводящего канала:  
1 — старое русло, 2 — вариант железобетонного русла, 3 — завеса методом нагнетания

ческих условиях противофильтрационные подземные завесы, устраняемые тампонажем, как площадные под дном каналов, так и фронтальные в бортах могут заменить дорогостоящие железобетонные и бетонные облицовки водоотводящих каналов, а также найти применение в других операциях, связанных с отводом рек (рис. 2).



Следует выделить обводнение горных выработок карстовыми водами. Вследствие процесса растворения, вода в карстовых породах создает разветвленную сеть трещин. По трещинам воды открыты источников проникают внутрь и совершают движение, подчиняясь законам гидравлики. Горные выработки, находящиеся в зоне этих пород, всегда испытывают чрезмерное обводнение. Борьба с обводнением становится особенно трудной, если площадь распространения карстовых пород значительна и сопровождается широким выходом этих пород на земную поверхность, обнаженную для непосредственного воздействия атмосферных и текучих вод. Здесь особенно важно тщательное и широкое изучение простирающихся закарстованной области и выяснение очагов наиболее вероятной связи карстовых пород с атмосферными и особенно текучими водами. При карстовом обводнении подземные водопроницаемые завесы могут быть радикальным средством борьбы против подтопления горных выработок (рис. 3). В Кизеловском каменноугольном бассейне несколько участков шахт № 1 и 6 пройдены в закарстованных известняках с притоком воды до 300 м<sup>3</sup>/ч под прикрытием простых глинистых завес. В 1961 г. на тех же рудниках при строительстве вертикального ствола шахты № 9 в закарстованных породах с успехом использована цементационная кольцевая завеса.

При борьбе с карстовыми водами подземный тампонаж можно использовать не только для местного ограждения горных работ, но и для более широкой фронтальной изоляции закарстованных берегов рек, являющихся вероятными очагами распространения текучих вод в карстах.

При проектировании и расчетах тампонажа в карстах необходимо иметь в виду две возможности: область трещин малых сечений, более или менее равномерно распределенных, в которых движение нагнетаемых растворов сохраняет характер сплошного фильтрационного потока и может быть рассчитано по методам гидромеханики, и область пустот (жаверн) больших размеров, тампонируемые которых носят конструктивный характер, не поддающийся гидромеханическому анализу. Экономические соображения при выборе системы осушения карстов также играют важную роль и нередко решающую при установлении окончательного варианта осушения: тампонаж, мощный водоотлив или отвод водного источника в сторону от закарстованных пород. При проведении выработок в глубоких горизонтах пластовых вод подземные противофильтрационные завесы могут найти эффективное использование. Цементационные завесы применялись при проходке ствола через водоносные опоки в Егоршинском угольном районе на Урале, в Донбассе на шахте № 6 Буденновского рудоуправления и на шахте «Максимовская-Пологая» при проходке стволов в песчаных и глинистых сланцах, известняках и песчаниках на различных глубинах, при строительстве некоторых железорудных рудников Курской магнитной аномалии.

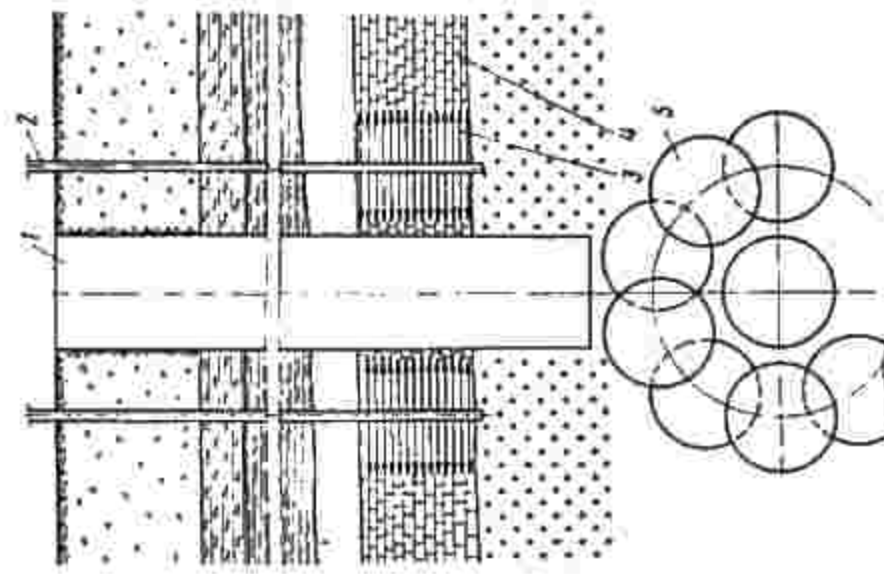


Рис. 1. Подземная завеса вокруг пробуренного ствола шахты на глубоком горизонте грунтовыми водами (представляет опускание воды). 1 — ствол; 2 — скважина; 3 — завеса; 4 — трещиноватые водоносные породы; 5 — кольцевая цементационная завеса.

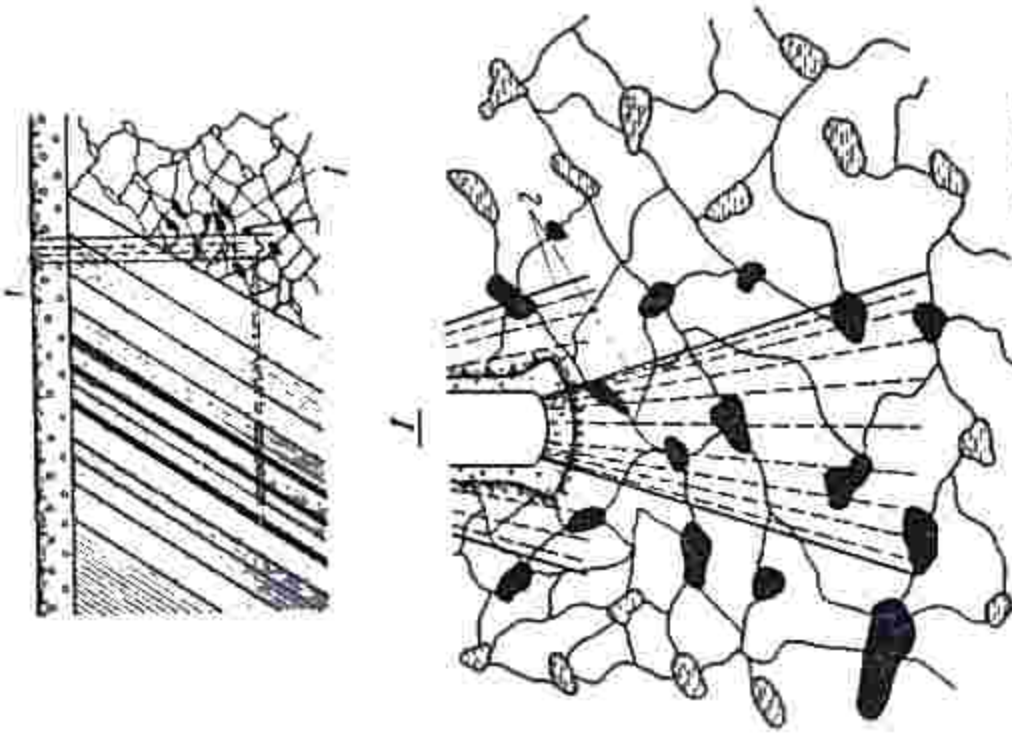


Рис. 2. Подземная завеса при борьбе с карстовым обводнением. 1 — ствол шахты; 2 — скважина.



При проходке стволов бурением спускаю железобетонной крепи должен предшествовать боковой тампонаж вокруг ствола, если последний пересекает зону трещиноватых водоносных пород. В эти трещиноватые породы может легко выдавиться глинистый раствор, заполняющий ствол (рис 4).

Тампонаж нагнетанием цементных растворов применяется для водонепроницаемости и заделки пустот за стенками стволов и других горных выработок. Этот вид тампонажа применялся при проходке стволов шахт Лениногорского и Зырянского комбинатов, а также на строительстве московского метрополитена. При борьбе с подземными пожарами на медноколчеданных рудниках Урала заделка пустот горных пород глинизацией дала положительные результаты. Существует еще одна область строительного дела — основания инженерных сооружений и промышленных зданий, в которой тампонаж может найти широкое применение в качестве противофильтрационной защиты и меры усиления несущей способности грунтов.

## 2. Среда нагнетания

Тампонаж нагнетанием можно производить из цементных суспензий, битумов, глинистых и силикатных растворов. По прошествии некоторого времени большинство этих составов затвердевает. Цементные суспензии и некоторые силикатные растворы не только заполняют пустоты в горных породах, но и связывают отдельные фракции пород и цементируют их в единое плотное тело, чем увеличивают прочность пород. Связывающее влияние битумов незначительно, но значение их, как противофильтрационных уплотнителей, исключительно велико.

В отечественной и мировой практике известны многочисленные случаи уплотнения грунтов при помощи нагнетания жидкого битума (асфальта) даже в основаниях напорных гидротехнических сооружений. Проф. Н. Г. Трупаков пишет: «Битумизацию целесообразно применять для тампонажирования больших трещин и карстовых пустот, трещин с движущейся в них водой; пустот в гравийно-галечниковых отложениях; пород, содержащих агрессивные подземные воды, вредно действующие на цемент».

Физико-механические свойства нагнетаемых составов различны. Цементные суспензии, глинистые растворы и их смеси с отощающими добавками относятся к дисперсным структурным жидкостям, законы движения которых отличны от законов гидравлики однородной вязкой жидкости. Битум также представляет высокодисперсный коллоидный раствор. Но при высоких температурах он в значительной мере приближается к однородной жидкости. И если расплавленный битум можно принять удовлетворяющим закону внутреннего трения Ньютона, то для цементных суспензий, глинистых растворов и их смесей, обладающих пластическими свойствами, закон трения принимается в форме Шведова—

Бингама. Поэтому коэффициент фильтрации расплавленного битума, при равенстве всех прочих условий, зависит только от вязкости, тогда как коэффициенты фильтрации цементных суспензий, глинистых растворов и смесей зависят и от скорости. Эти различия осложняют решение общей задачи. Но при некоторых условиях механизм, управляющий движением вязких однородных и пластических дисперсных жидкостей, характеризуется сходными между собой уравнениями. Это позволяет нарисовать единую, практически точную схему движения вязких жидкостей при нагнетании в грунт через скважину и получить однородные уравнения для определения расчетных элементов подземных завес.

Тампонаж нагнетанием возможен в любых трещиноватых скальных породах, независимо от их петрографического состава (песчаниках, сланцах, известняках, гранитах, гранитоидеях, габбро и др.), а также в обломочных, щебенистых и гравелистых грунтах, обладающих достаточной шириной трещин и пор для прохождения по ним растворов. Возможность проникновения дисперсных жидкостей в трещины или поры грунта определяется соотношением между минимальным размером трещины или пор и размером зерен твердой фазы в жидкости. Согласно ТУ на производство гидротехнических работ цементация скальных пород возможна с просветом трещин не менее  $(0,15-0,25) \cdot 10^{-3}$  м. Цементация рыхлых пород — крупнозернистых песков и галечника возможна при минимальной крупности зерен этих грунтов не менее  $4 \cdot 10^{-3}$  м. Экспериментами установлено, что цементация таких пород тонкой суспензией не исключена при крупности зерен до  $2 \cdot 10^{-3}$  м (при отсутствии глинистых и мелкопесчаных частиц). Для битумизации предельная величина просветов трещин и пор находится в зависимости от вязкости битума, так как при остывании битума вязкость резко увеличивается и проникновение его в узкие трещины и поры становится невозможным.

Степень обводненности горных пород влияет на выбор материала для подземной противофильтрационной завесы.

Цементация производится в сухих или насыщенных грунтовой водой горных породах при отсутствии значительных скоростей грунтовых потоков. А. Н. Адамович и Д. В. Колтунов считают, что допустимой действительной скоростью потока подземных вод для цементации является скорость порядка 200 м/сутки. При более значительных скоростях возможен размыв цемента. По ТУ на производство гидротехнических работ цементация горных пород разрешается при скоростях движения подземных вод, не превышающих 600 м/сутки. Такое значение предельной скорости подтверждается расчетом вымывающих скоростей и, наоборот, битумизация успешно применяется в горных породах, заполненных водой, при значительных скоростях грунтовых потоков, когда, вследствие уноса цемента водой, применение цементации малоэффективно, или когда существует опасность разрушения цемента агрессивным действием грунтовых вод (агрессивность выщелачи-



вающая, общекислотная, углекислая, сульфатная и магниевая).

При тампонажировании горных пород с очень крупной трещиноватостью применяются не только густые цементные суспензии, но и смеси их с отошающими добавками — песком или суглинком и сульфатами. Применение отошающих добавок при тампонажировании крупных трещин оправдывается экономическими соображениями и смягчением усадочных деформаций при схватывании цементного камня со стенками трещин. Количество и качество вводимых добавок регламентируется ТУ и описано в специальной литературе. Когда размеры трещин и пустот в горных породах настолько велики, что обуславливают громадное расходование цемента, или когда трещины и пустоты заполнены продуктами выщелачивания горных пород — глинами, трудно поддающимися промывке, в этих случаях вместо цементации применяют глинизацию. Глина лучше и равномернее связывается с глинистыми отложениями в трещинах. При больших напорах подземных вод лучше сначала произвести предварительное вымывание глины, а затем осуществить цементацию.

Экономические соображения являются дополнительным фактором, существенно влияющим на выбор типа завесы.

Силикатизация в первую очередь применима в породах с тонкими трещинами и порами, а также несвязных грунтов, куда цементный раствор или битум не могут проникнуть. Силикатизация с успехом применяется для укрепления средне- и крупнозернистых песчаных грунтов. Особенно хорошо поддаются силикатизации породы, содержащие кварц, песок и гравий, цеолитовые породы, разрушенный гранит и различные песчаники. При силикатизации нагнетаются один или два раствора. Для однорастворной силикатизации применяется раствор калиевой или натровой соли кремневой кислоты. При двурстворной силикатизации в качестве реактива для жидкого стекла применяется хлористый кальций.

Грунтовые условия при устройстве подземных водонепроницаемых завес весьма разнообразны. Математическая же обработка вопросов, связанных с нагнетанием жидкости в грунт и ее растеканием по периферии, возможна только для однородной грунтовой среды, т. е. среды, геометрическую структуру которой, хотя бы в осредненных представлениях, можно считать одинаковой: например, обломочные, щебенчатые и гравелистые грунты, скальные породы с более или менее равномерно распределенной трещиноватостью. В противоположность им можно выделить скальные породы с крупными трещинами и пустотами, носящими индивидуальный характер.

Всякий естественный рыхлый грунт состоит из совокупности фракций нескольких размеров. Но можно выделить действующий диаметр фракции, которым обусловлена величина пор, непосредственно передающих ток жидкости. Этим путем неоднородный

грунт приводится к условной гидравлической однородности, определяемой величиной действующего диаметра. Методика определения действующего диаметра грунтов составит одну из тем дальнейшего изложения данной работы.

В связи с этим необходимо подчеркнуть, что изучение физико-механического состава грунтов (пористости, гранулометрии) при организации тампонажных работ должно составлять одно из первоочередных мероприятий.

Исследование несвязных грунтов не может вызывать сколь-нибудь серьезных затруднений. В распоряжение инженера представлены надежные средства: пробы из шурфов и образцы из разведочных скважин. Определенные затруднения могут возникнуть при исследовании трещиноватости горных пород, так как керны колонкового бурения не всегда могут выявить степень трещиноватости, не говоря уже о поглощательной способности трещиноватых пород. А здесь важно знать весь комплекс вопросов: распространение и характер трещиноватости, размеры трещин и их взаимную связь, систему господствующего направления. В этом случае значительную помощь могут оказать графики трещиноватости по зарисовкам и документации крупных разведочных выработок: штолен, шурфов, шахт и т. п. Для определения же водопоглощаемости горных пород могут быть привлечены гидравлические и электродинамические методы.

### 3. Изученность вопроса

В истории горной практики много примеров успешного применения тампонажа. Но если цементация горных пород имеет сравнительно давнее прошлое (конец восьмидесятых годов прошлого столетия), то битумизация — более новый прием строительной техники, возникший в тридцатых годах этого столетия. Конструктивное оформление механических установок для цементации, битумизации и глинизации горных пород многими авторами решено с исчерпывающей полнотой. Широко освещены и технологические основы организации этих работ.

Среди многочисленных литературных источников, посвященных рассмотрению этих вопросов, ведущая роль принадлежит работам советских ученых. Из этих работ необходимо отметить новые технические условия и нормы проектирования цементационных противодиффузионных завес (ТУ 24-112-48), составленные Всесоюзным научно-исследовательским институтом гидротехники (ВНИИГ) им. Б. Е. Веденеева при авторстве А. Н. Адамовича и В. П. Аравина. Это издание ТУ и Н отражает новейшие технические достижения по производству цементационных работ и проектированию цементационных завес и основано на большом опытном материале по цементации оснований отечественных плотин (Сулак, Старокрымской, Пермской, ТкварчелГЭС и др.).

Из последних изданий нормативного материала необходимо от-



метить технические условия на производство гидротехнических работ ТУ-31-54. Эти ТУ охватывают цементацию скальных пород и гравелистогалечных грунтов в основаниях и береговых примыканиях гидротехнических сооружений.

Капитальным трудом, рассматривающим в одном из разделов цементацию, глинизацию и битумизацию горных пород при проходке стволов шахт, является книга А. Ф. Вайполдина и В. А. Цибельского «Проходка шахт специальными способами», изданная в 1947 г. Книга — не только учебное пособие для студентов горных вузов, но и практическое пособие для инженерно-технических работников горных предприятий и проектных организаций. Богатый фактический материал, использующий отечественный опыт проходки шахт в сложных гидрогеологических условиях, делает книгу особенно ценной и полезной.

Специально цементации посвящена книга Н. Г. Трупака «Цементация трещиноватых пород в горном деле». В этом труде обобщен опыт цементации трещиноватых пород при проведении вертикальных, наклонных и горизонтальных горных выработок. Даны технологические основы цементации, рассмотрено цементационное оборудование, приведены многочисленные примеры цементации водоносных пород в горном деле.

Применение цементации в гидротехническом строительстве рассматривается в книге А. Н. Адамовича и Д. В. Колтунова «Цементация оснований гидросооружений». В этом большом труде даны основные положения по проектированию цементационных завес. Изложены способы производства цементационных работ и освещены результаты многочисленных исследований в области цементации грунтов. Так как технологические основы цементационных завес достаточно общие, то книга представляет несомненный интерес и для специалистов горного дела.

Виднейшим специалистом в области битумизации горных пород является Б. П. Шрейбер — автор нового метода прогрева битумизационных скважин жидким теплоносителем. Б. П. Шрейберу принадлежит ряд работ по битумизации горных пород, опубликованных в разных изданиях периодической печати СССР. В 1953 г. издана монография Б. П. Шрейбера «Битумизация в горной промышленности», в которой наряду с изложением некоторых теоретических основ битумизационных завес рассмотрена и технология последних.

Вопросы глинизации горных пород рассмотрены в работе И. Н. Сидорова «Проходка шахты «Капитальная» № 1 (Кизел). Обширный фактический материал по глинизации собран в книге И. А. Андриякова «Проходка шахт методом глинизации». Из новых работ надо отметить книгу Е. Л. Шншова «Тампонаж горных пород способом глинизации», обобщающую богатый опыт применения глинизации в горном деле СССР.

Силикатизации грунтов посвящена обширная литература как более раннего периода, так и позднего. Из ранних необходимо

отметить работы М. Стаматю и Б. Ржаницына, а также ряд статей разных авторов, опубликованных в журналах «Метрострой» и отражающих опыт этого строительства по применению силикатирования грунтов (Гертнер, Исар и др.). Из более поздних — книгу Б. А. Ржаницына «Силикатизация песчаных грунтов» и В. В. Аскалонова «Однорастворный способ силикатизации глин и лёссов».

Зарубежный опыт применения подземного тампонажа, главным образом цементации, освещен в многочисленных журнальных статьях зарубежной печати. Среди последних несомненный и большой интерес представляют работы, посвященные цементационному тампонажу при проходке глубоких стволов некоторых южно-африканских шахт в зоне карстовых доломитов, например рудника Вентерспост, шахты в Блифоорютцихте. Использование цементации в гидротехническом строительстве показано в журналах ENR и PASCE.

Имеющаяся литература по вопросам тампонажа подробно освещает технологические основы организации подземных завес. Методы производства этих работ, разработанные советскими инженерами, доведены до весьма простых схем, возможных для осуществления в любых производственных условиях.

Однако теоретические основы проектирования и расчета тампонажа затронуты в литературе крайне недостаточно. Можно отметить, что до последнего времени отсутствует единая теория о растекании дисперсной жидкости при нагнетании в грунт через скважину. Нет аналитического решения для определения ширины простирания подземного потока при нагнетании. Теоретически не решен вопрос о расстоянии между скважинами подземной завесы и о необходимой величине давления в скважине. Не выявлены скорости растекания инфильтрационного потока, что важно знать для определения сроков твердения нагнетаемой жидкости, т. е. отсутствует гидравлика подземных завес, осуществляемых тампонажем.

Исключения составляют ТУ и Н проектирования цементационных противофильтрационных завес. Последние дают исчерпывающий ответ не только на вопросы организации цементационных завес, но рассматривают и основные вопросы проектирования: расстояния между скважинами, давление в скважинах, консистенцию цементной суспензии и др. Эти данные зависят здесь от величины удельного водопоглощения скважины, которая должна быть получена на основании опытных нагнетаний при исследовательских работах. Удельное водопоглощение скважины является основной независимой переменной, в функции которой находятся все остальные элементы цементационной завесы.

Величина удельного водопоглощения скважины, на которую ориентированы ТУ и Н проектирования цементационных завес, не может служить достаточным аргументом при проектировании битумизационных и глинизационных завес, так как условия дви-



ления цементной суспензии, битума и глинистого раствора различны. Эти различия, обусловленные разницей в вязкости рассматриваемых жидкостей, будут особенно заметны в сечениях малых форм, к которым относятся каналы пор несвязных грунтов и тонкие трещины скальных пород.

Публикуемый ниже материал ставит задачей в известной мере восполнить отмеченные пробелы и является первой попыткой получить унифицированную гидравлическую схему движения жидкости большой вязкости при нагнетании ее в грунт через скважину.

Послереволюционный период ознаменован появлением многочисленных работ советских ученых, посвященных вопросам фильтрации и инфильтрации в грунтах. Кроме работ, принадлежащих школе акад. Н. Н. Павловского и относящихся к общей теории фильтрации и движения грунтовых вод, с начала тридцатых годов этого столетия в СССР появляются работы школы подземных гидравликов (пластовой гидравлики), возглавляемой акад. Л. С. Лейбензоном. В 1934 г. акад. Лейбензон опубликовал первую в мировой литературе монографию «Нефтепромысловая механика», посвященную систематическому изложению широких вопросов пластовой гидравлики. После издания книги акад. Лейбензона, на протяжении последних 20 лет опубликовано много других работ, рассматривающих различные вопросы подземной гидравлики (Каменицкий, Дависон, Щелкачев, Миллионщиков и др.). Завершением этих работ является вышедшая из печати в 1949 г. новая книга профессоров В. Н. Щелкачева и Б. Б. Лапука «Подземная гидравлика». По справедливому отзыву акад. Лейбензона, эта книга «не только обобщает все, что сделано в области подземной нефтяной гидравлики, но и поднимает ее на новую ступень».

Обычно при всех расчетах движения грунтовых вод жидкость и пористая среда считаются несжимаемыми. Однако исследования акад. Л. С. Лейбензона и проф. В. Н. Щелкачева с несомненностью устанавливают, что с изменением пластового давления изменяются плотность жидкостей, насыщающих пласт, и объем его порового пространства, т. е. меняется пористость пласта. Поэтому движение грунтового потока в некоторых случаях можно рассматривать как движение упругой жидкости в упругой пористой среде. Вопросам движения жидкости с учетом упругих сил посвящены работы Л. С. Лейбензона и В. Н. Щелкачева. В этом отношении несомненный и большой интерес представляет и работа проф. Н. Н. Веригина, рассматривающая нагнетание вязких растворов в горные породы с учетом упругих сил.

Из иностранной литературы последнего времени надо отметить внимание на книге американского физика Мориса Маскета «Течение однородных жидкостей в пористой среде», в которой строго математически рассмотрены многие вопросы теории фильтрации и ее практические приложения. Несмотря на ряд недо-

статков, отмеченных советской критикой, книга Маскета может быть полезной для инженера и ученого, работающих в области фильтрации в пористой среде.

#### 4. Принципиальные схемы нагнетания

При организации тампонажа методом нагнетания преимущественным распространением пользуется схема бокового нагнетания (рис. 5). Находясь под большим давлением, нагнетаемая в скважину жидкость проникает в трещины и пустоты горных пород через всю боковую поверхность скважины. При этой схеме известны два полуварианта нагнетания: зажимной (бесциркуляционный) и циркуляционный.

При зажимном способе жидкость не может совершать обратного движения между скважиной и резервуаром, из которого она засасывается тампонажным насосом. При тонкой трещиноватости горных пород необходимо применять зажимной способ тампонажа. При циркуляционном — часть нагнетаемой жидкости, не поглощенной породой, возвращается обратно в резервуар, откуда снова засасывается насосом и направляется в скважину. Благодаря этому создается циркуляция в скважине и предотвращается осаждение цемента. Для заполнения крупных трещин применяется циркуляционный способ.

Независимо от способов циркуляции жидкости в скважине, для организации тампонажа по схеме бокового нагнетания необходимо выполнение следующих работ:

- пробурить скважины для направляющих труб;
- в скважинах посредством заливки цементного раствора укрепить направляющие трубы;
- через направляющие трубы пробурить скважины для нагнетания;
- через сальник на верхнем конце каждой направляющей трубы

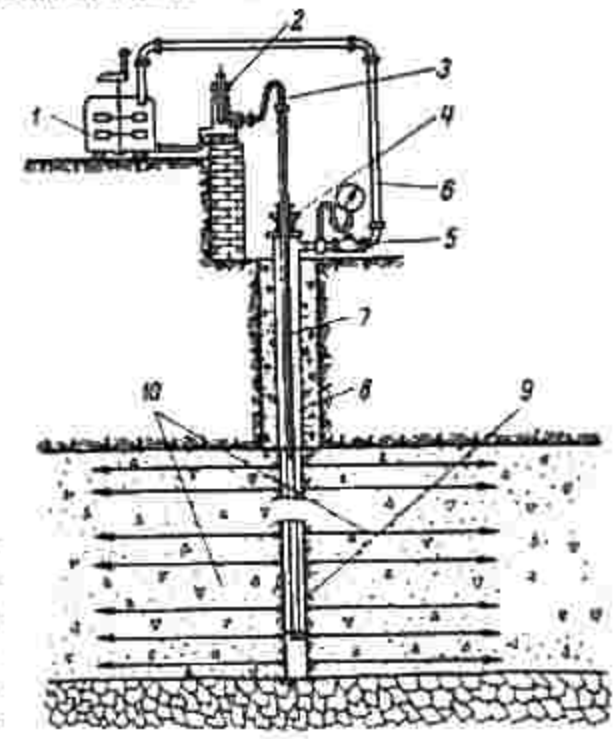


Рис. 5. Схема бокового нагнетания:  
1 — растворонасосная установка, 2 — насос, 3 — гибкий шланг, 4 — сальник, 5 — клапан, 6 — обратный трубопровод, 7 — инжектор, 8 — направляющая труба, 9 — скважина, 10 — зона тампонажирования



ввести иньектор и по нему под давлением подать нагнетаемую жидкость к забою скважины.

Тампонаж методом бокового нагнетания возможно осуществить с поверхности земли, из забоя шахты или иных горных выработок. При этом длина тампонируемых заходов (участков породы по вертикали) колеблется от 10—20 м для цементационных и до 30—40 м для битумизационных завес. Нагнетательные скважины, если породы не обваливаются, не крепятся. В случае же неустойчивых пород стенки скважины закрепляются обсадными трубами с круглыми или щелевыми отверстиями для прохода нагнетаемого раствора.

Во всех случаях верхняя граница нагнетания должна опираться на надежный предохранительный целик горной породы, защищающий от прорыва тампонажной жидкости на поверхность земли или в забой выработки. При отсутствии естественного прочного целика устраиваются кирпичные, бетонные или железобетонные предохранительные подушки-упоры.

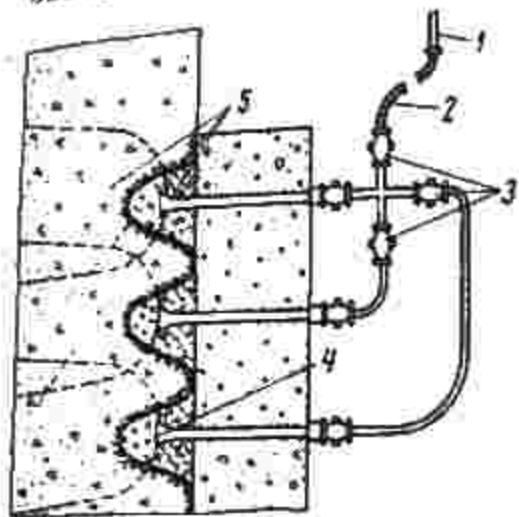


Рис. 6. Схема донного нагнетания:  
1 — труба для цементного раствора, 2 — гибкий шланг, 3 — краны, 4 — фильтр, 5 — зона тампонажания

Схема бокового нагнетания находит преимущественное применение при предварительной цементации, глинизации и битумизации пород и грунтов для проведения через них горных выработок. Та же схема с успехом может быть использована при устройстве фронтальных и площадных подземных завес при борьбе с инфильтрацией воды через дно и борта отводящих русел и берега рек, на оползневых откосах карьеров. И, наоборот, при последующем тампонаже горных пород в практике шахтостроения обычно применяется схема донного нагнетания (рис. 6).

Последующим тампонажем называют уплотнение пород и грунтов, осуществляемое после проходки горных выработок. Последующий тампонаж преследует заложение пустот в закрепленном пространстве. В частности, метод последующей цементации или силикатизации применяется в случаях необходимости устранения фильтрации и придания прочности самой бетонной или кирпичной крепи. Тампонажные трубки заделывают в крепь во время или после ее возведения. Нагнетаемый по трубкам раствор передается в трещины горной породы непосредственно без устройства особых скважин для нагнетания.

Производительность тампонажа по способу донного нагнетания меньше сравнительно со схемой бокового уплотнения. Но орга-

низация работ по схеме донного нагнетания значительно проще. Схема донного нагнетания может найти широкое применение при устройстве неглубоких подземных водонепроницаемых завес, фронтальных и площадных, при силикатизации грунтов, а также для придания водонепроницаемости откосам и дну ирригационных каналов.

Применительно к этим двум схемам нагнетания и рассматриваются в дальнейшем гидромеханические решения поставленной задачи.

### 5. Формулы Маага, Адамовича, Каранфилова и Луговского

В существующих представлениях движение цементных суспензий (растворов) в трещинах горных пород и поровых каналах несвязных грунтов отождествляется с движением обычной воды, только кинематическая вязкость суспензий принимается в несколько раз больше воды. Кинематическая вязкость цементных суспензий для этих расчетов чаще всего определяется стандартным вискозиметром типа СПВ-5 (рис. 7). По этому вискозиметру кинематическая вязкость суспензий получается равной

$$\nu = \frac{t}{t_0} \nu_0,$$

- где  $\nu$  — кинематическая вязкость цементной суспензии,  $\text{м}^2/\text{сек}$ ;  
 $t$  — время истечения  $500 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$  цементной суспензии из вискозиметра, сек;  
 $t_0$  — время истечения  $500 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$  чистой воды из того же вискозиметра ( $t_0 = 18,2 \text{ сек}$ );  
 $\nu_0$  — кинематическая вязкость воды,  $\text{м}^2/\text{сек}$ .

Если цементная суспензия имеет густую консистенцию, то истечение ее струйкой прерывается, и она начинает вытекать каплями. Концом наблюдения в этом случае считается момент прерыва струи.

Определив таким способом вязкость цементной суспензии, многие исследователи предложили формулы для расчета радиуса цементации в функции вязкости. При этом к процессу движения

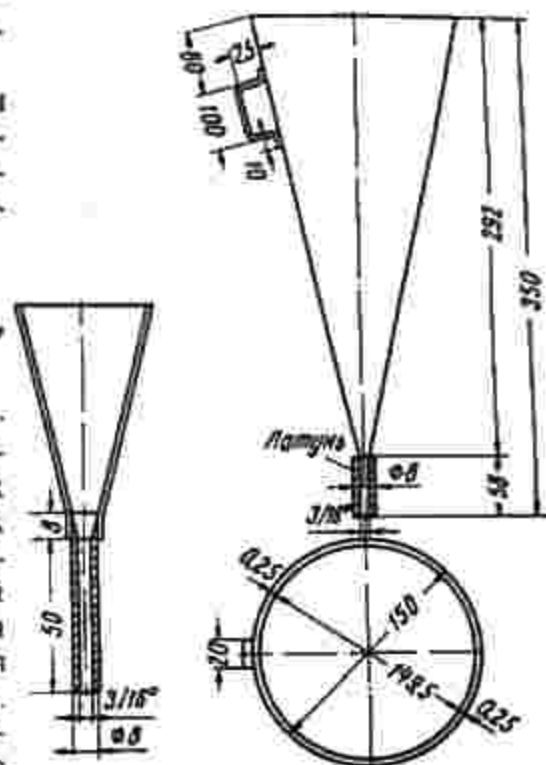


Рис. 7. Стандартный вискозиметр типа СПВ-5

Центр  
5280



нагнетаемой суспензии они подходили по-разному. Одни считали, что поскольку скорость движения цементной суспензии в пористой среде по мере удаления от скважины все время уменьшается, то цемент осядет и затвердевает в процессе ламинарного режима. Другие полагали, что для проникновения и движения в трещинах и порках цементные растворы должны иметь турбулентный режим. Хотя схватывание и твердение цементных растворов происходит только при ламинарном движении, но этот процесс занимает только короткое время. Поэтому при расчетах цементации известные формулы исходят или из ламинарного или турбулентного движения нагнетаемых суспензий и пользуются формулами для однородных жидкостей — воды, но с увеличенной вязкостью.

Для схемы бокового нагнетания широко известными являются формулы Маага, Адамовича, Каранфилова и Луговского. Все эти формулы получены из уравнения Дюпюи, обладают структурным сходством, причем во всех формулах вязкость вытесняемой воды не учитывается. Формулы Адамовича и Луговского предусматривают турбулентный характер движения цементных растворов в трещиноватых или обломочных породах. Формулы Маага и Каранфилова имеют в виду ламинарную фильтрацию.

Формула Маага

$$R = \sqrt{\frac{3ktHr_0 \frac{\gamma_0}{\nu}}{\varphi}} \quad (1,1)$$

Формула Адамовича

$$R = \sqrt{\frac{2kt \frac{\gamma_0}{\nu} \sqrt{Hr_0}}{\varphi}} \quad (2,1)$$

Формула Луговского

$$R = \sqrt{\frac{2,6k_{np} \gamma_0 \sqrt{H}}{\mu \varphi}} \quad (3,1)$$

Формула Каранфилова

$$R = \sqrt{\frac{0,64ktH \frac{\gamma_0}{\nu}}{\beta m}} \quad (4,1)$$

В этих формулах обозначено:

- $\mu$  — динамическая вязкость нагнетаемого раствора (суспензии), н·сек/м<sup>2</sup>;
- $\nu_0$  и  $\nu$  — кинематическая вязкость воды и раствора, м<sup>2</sup>/сек;
- $\gamma$  — удельный вес раствора, н/м<sup>3</sup>;
- $H$  — напор нагнетания, м;
- $\varphi$  — активная пористость грунта;

$t$  — время нагнетания, сек;

$k$  — коэффициент фильтрации грунта в естественном состоянии, м/сек;

$k_{np}$  — коэффициент проницаемости грунта;

$m$  — объемная пористость грунта;

$\beta$  — степень заполнения пор раствором.

Если с точки зрения структуры формулы Маага и Каранфилова для ламинарной фильтрации не вызывают принципиальных замечаний, то формулы Адамовича и Луговского для квадратичного закона фильтрации имеют существенную неточность.

В формулах Адамовича (2,1) и Луговского (3,1) турбулентной фильтрации, удовлетворяющей квадратичному закону Краснопольского (Шези)

$$w = k_b \sqrt{J},$$

коэффициент  $k_b$  отождествляется с коэффициентом  $k$  линейного закона фильтрации Дарси. В формуле Адамовича этот коэффициент равен

$$k_b = k \frac{\gamma_0}{\nu},$$

а в формуле Луговского

$$k_b = k_{np} \frac{\gamma}{\mu}.$$

При квадратичном законе фильтрации коэффициент  $k_b$  зависит только от свойств пористой среды и не зависит от свойств фильтрующихся жидкостей. Допущения, принятые этими авторами, не отвечают закономерностям, основанным на принципе однородности размерностей. Обратимся к численному анализу радиусов цементации, получающихся по формулам этих авторов. В табл. 1 вычислены радиусы цементации для различной проницаемости пористой среды при напоре нагнетания  $H=80$  м вод. ст., длительности изгнетания  $t=1$  ч, пористости среды  $\varphi=0,05$  ( $\beta=1$ ), радиусе скважины  $r_0=0,05$  м и цементной суспензии состава Ц:В=1:2 (по весу). Для этой суспензии Адамович принимает отношение вязко-

сти  $\frac{\gamma_0}{\nu}=5$ . Последуем его примеру и рассчитаем радиусы цементации. Для формулы Луговского возьмем тот же коэффициент фильтрации, что и для формулы Адамовича

$$\frac{k_{np} \gamma}{\mu} = k \frac{\gamma_0}{\nu}.$$

Радиусы цементации зависят от характера и размера пустот и трещин горных пород, консистенции раствора, давления при нагнетании и др. По табл. 1 большие значения радиусов цементации не соответствуют небольшим коэффициентам фильтрации рассмот-



Таблица 1

Принятая мг/сек	Коэффициент фильтрации для воды $\gamma \times 10^{-4}$	$\frac{\gamma}{\mu}$	Радиус цементации $R$ , м	
			по Адамовичу	по Луговскому
100	$0,102 \cdot 10^{-2}$	0,20	7,70	6,00
500	$0,510 \cdot 10^{-2}$	0,20	17,20	13,40
1000	$1,020 \cdot 10^{-2}$	0,20	24,30	19,00
1500	$1,530 \cdot 10^{-2}$	0,20	29,50	23,00
2000	$2,040 \cdot 10^{-2}$	0,20	34,30	26,80

реальной пористой среды, не превышающим в лучшем случае коэффициент фильтрации для мелкого гравия ( $0,03$  м/сек), и небольшому напору нагнетания. А. И. Адамович и Д. В. Колтунов указывают, что в породах с относительно слабой трещиноватостью расстояния между скважинами принимаются равными 5—6 м с возможным сближением до 2,5—1,25 м. В условиях повышенной трещиноватости расстояния между скважинами рекомендуются не более 7—8 м с возможным сближением до 3—2 м.

Группа возражает против больших расстояний между скважинами известна, но они должны быть надежно обоснованы. А формула Адамовича (2.1), несмотря на то, что она оперирует повышенными гидравлическими градиентами турбулентной фильтрации, не гарантирует надежно обоснованных решений для параметров цементации. Получаемые по этой формуле радиусы цементации являются завышенными, а значения забойного давления, наоборот, заниженными. К той же категории относится и формула турбулентной фильтрации Луговского (3.1), хотя она по сравнению с формулой Адамовича дает более низкие значения радиусов цементации. Автор формулы полагает, что для того, чтобы обусловить параллельное продвижение цементного раствора в трещинах горных пород и порых несвязных грунтов, движение раствора должно быть турбулентным. Он считает, что гидравлические градиенты турбулентной фильтрации в состоянии обусловить необходимую величину забойного давления, так как вязкость цементного раствора в «десятки тысяч раз» больше вязкости воды, что не соответствует действительности.

С точки зрения особенностей нагнетания цементных суспензий формулы ламинарной фильтрации Маага (1.1) и Каранфилова (4.1) также не могут дать правильных решений параметров нагнетания. Несоответствия в величинах радиусов цементации и забойных давлений могут быть еще большими сравнительно с данными формул Адамовича и Луговского, так как гидравлические градиенты ламинарной фильтрации значительно меньше градиентов турбулентной фильтрации.

Причина всех этих несоответствий и противоречий заключается в том, что вся группа рассмотренных формул Маага, Адамовича,

Луговского и Каранфилова выведена для однородных — гомогенных, так называемых истинных жидкостей, следующих закону внутреннего трения Ньютона. Цементная суспензия и глинистые растворы являются дисперсными — гетерогенными или, как их называют, структурными, пластическими жидкостями, подчиняющимися закону трения Шведова—Бингама.

Исследования показывают, что потеря давления при движении таких жидкостей состоит из двух частей: потери на преодоление вязких напряжений и потери на пластические напряжения. Первые зависят от величины расхода нагнетаемого раствора, вторые — только от реологических свойств структурной жидкости.

Установлено, что потеря давления на преодоление пластических напряжений неизмеримо выше потерь на вязкие напряжения. Большая величина пластических напряжений создает впечатление кажущейся высокой вязкости цементных суспензий.

Таким образом, формулы Маага, Адамовича, Луговского и Каранфилова для практических расчетов можно использовать только для однородных вязких жидкостей, силикатных растворов и битумных эмульсий, т. е. жидкостей, не обладающих структурой. Для расчета же нагнетания цементных суспензий и глинистых растворов эти формулы не могут дать правильных результатов. Для расчета нагнетаний этих жидкостей необходим новый подход, основанный на учете реологических свойств пластических жидкостей.



## I. Фильтрационные уравнения

Движение жидкости в грунтовой среде принято фиктивно сплошным (через все сечение фильтра), установившимся и неразрывным, удовлетворяющим уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1, II)$$

где  $u$ ,  $v$  и  $w$  — компоненты полной скорости  $W$  в направлении соответствующих координатных осей.

Грунт считается однородным, обладающим в проницаемой области одинаковым гидравлическим сопротивлением по всем направлениям. Движение жидкости в грунтовой среде происходит с малыми скоростями, при которых силы инерции пренебрежимо малы, а сопротивления, обусловленные трением, пропорциональны первой степени скорости. На этих основаниях представляется возможным пренебречь инерционными членами в уравнениях движения и ввести в рассмотрение потенциальное течение жидкости, удовлетворяющее уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (2, II)$$

где  $\varphi$  — потенциал скорости, представляющий некоторую функцию координат точки.

Последнее уравнение выражает, что движение жидкости в грунтовой среде будет происходить нормально к поверхностям, для которых потенциал скорости является величиной постоянной.

Для большинства случаев практики решение задачи возможно ограничить предположением, что проницаемая среда не насыщена естественной грунтовой водой (грунт сухой). Для подобного ограничения есть основания, так как нагнетание обычно сопровождается большими значениями напорных градиентов в фильтрационном потоке жидкости. Движение же естественных грунтовых вод имеет место при весьма малых градиентах. Поэтому деформирующее действие последних на фильтрационный поток сква-

жины будет проявляться весьма слабо. В этих случаях вязкостью вытесняемой воды можно пренебречь.

Но в некоторых случаях движение естественных грунтовых вод сопровождается большими градиентами, с влиянием которых необходимо считаться. В последних случаях должна быть поставлена отдельная задача о движении нагнетаемой жидкости в условиях водной агрессии.

При нагнетании в сухой грунт фильтрационный поток захватывает значительное пространство проницаемой среды. В последней возникает гидродинамическое давление, передающее напор от вышележащих слоев нижележащим. На пограничных поверхностях, отделяющих зону фильтрации от сухого грунта, возможно возникновение капиллярного напряжения. Но сравнительно с большой величиной напорных градиентов фильтрационного потока это напряжение не будет играть решающей роли. Кроме того, в крупнозернистой среде последнее проявляется вообще слабо. Поэтому влияние капиллярного движения жидкости исключено.

В основу исследования принято уравнение линейной фильтрации в пористой среде Дарси

$$W = kJ = -k \frac{dH}{dS}, \quad (3, II)$$

где  $W$  — полная или результирующая скорость в рассматриваемой точке потока;

$k$  — для данной среды (грунта и жидкости) некоторый постоянный коэффициент пропорциональности, именуемый коэффициентом фильтрации;

$H$  — полный гидродинамический напор в рассматриваемой точке пласта, равный сумме высот пьезометрической, геометрической и скоростной относительно плоскости сравнения  $H = \frac{p}{\gamma} + h + h_w$ ;

$\frac{dH}{dS}$  — гидравлический градиент, предполагающий уменьшение напора по направлению движения и поэтому взятый со знаком минус.

По уравнениям проф. Н. Е. Жуковского компоненты полной скорости в направлениях соответствующих координатных осей определяются равными

$$\left. \begin{aligned} u &= -k \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\gamma} + h + h_w \right) = -k \frac{\partial H}{\partial x}; \\ v &= -k \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{p}{\gamma} + h + h_w \right) = -k \frac{\partial H}{\partial y}; \\ w &= -k \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{p}{\gamma} + h + h_w \right) = -k \frac{\partial H}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (4, II)$$



Из сопоставления уравнений (1, 2 и 4) следует, что значение потенциала скорости  $\varphi$  определяется выражением

$$\varphi = -k \left( \frac{p}{\gamma} + h + h_w \right) = -kH, \quad (5.11)$$

так как скорость по любому направлению равна производной в этом направлении<sup>1</sup>

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (6.11)$$

т. е. приходим к уравнению Лапласа в новой редакции

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0, \quad (7.11)$$

Из предыдущего видно, что величина  $H$ , входящая во все поименованные уравнения, является также функцией координат. Функция  $H$ , имеющая весьма важное значение в гидродинамике грунтовых вод, носит название напорной функции. Напорная функция  $H$  и потенциал скорости  $\varphi$  являются гармоническими функциями. Поэтому решение какого-либо одного из уравнений (2) или (7) определяет сразу все неизвестные элементы движения. В частности, решение функции  $\varphi$  определяет систему эквипотенциальных линий.

Движение реальной жидкости сопровождается потерей напора на гидравлические сопротивления. Так как напорная функция  $H$  связана с функцией потенциала  $\varphi$  зависимостью  $\varphi = -kH$ , то распределение напоров  $H$  в реальном потоке будет отвечать тому же закону распределения эквипотенциалей, т. е. линии равных напоров повторяют эквипотенциалы. Скорости движения вязких жидкостей в порах грунта очень малы. Исключения составляют «особые точки». Но сфера действия особых точек, как будет видно из последующего изложения, весьма ограничена. Поэтому практически величиной скоростного напора грунтовых вод  $h_w = \frac{w^2}{2g}$  можно пренебречь. При этих условиях система эквипотенциалей,

пересчитанная по формуле  $H = \frac{\varphi}{k}$  в систему линий равных напоров, будет определять распределение пьезометрических напоров

$$H_p = \frac{p}{\gamma} + h$$

над той или иной плоскостью сравнения<sup>2</sup>.

<sup>1</sup> А иначе говоря, при дифференцировании по осям  $X, Y, Z$ , не нарушая правильности конечного истолкования, потенциал можно брать либо положительным, либо отрицательным.

<sup>2</sup> Давление  $\gamma H_p$  называется приведенным

$$p^* = \gamma H_p = p + \gamma h.$$

Если напоры отсчитывать от одной и той же плоскости сравнения, например горизонтальной  $y-z$ , проходящей через начало координат (рис. 8), то разность численных значений двух смежных линий  $H$  дает величину потерь напора на рассматриваемом участке.

Определение функции потенциала  $\varphi$  или напорной функции  $H$  представляет одну из важнейших задач подземной гидромеханики. Для различных движений подземных вод аналитические зависимости этих функций определяются по-разному. Но для

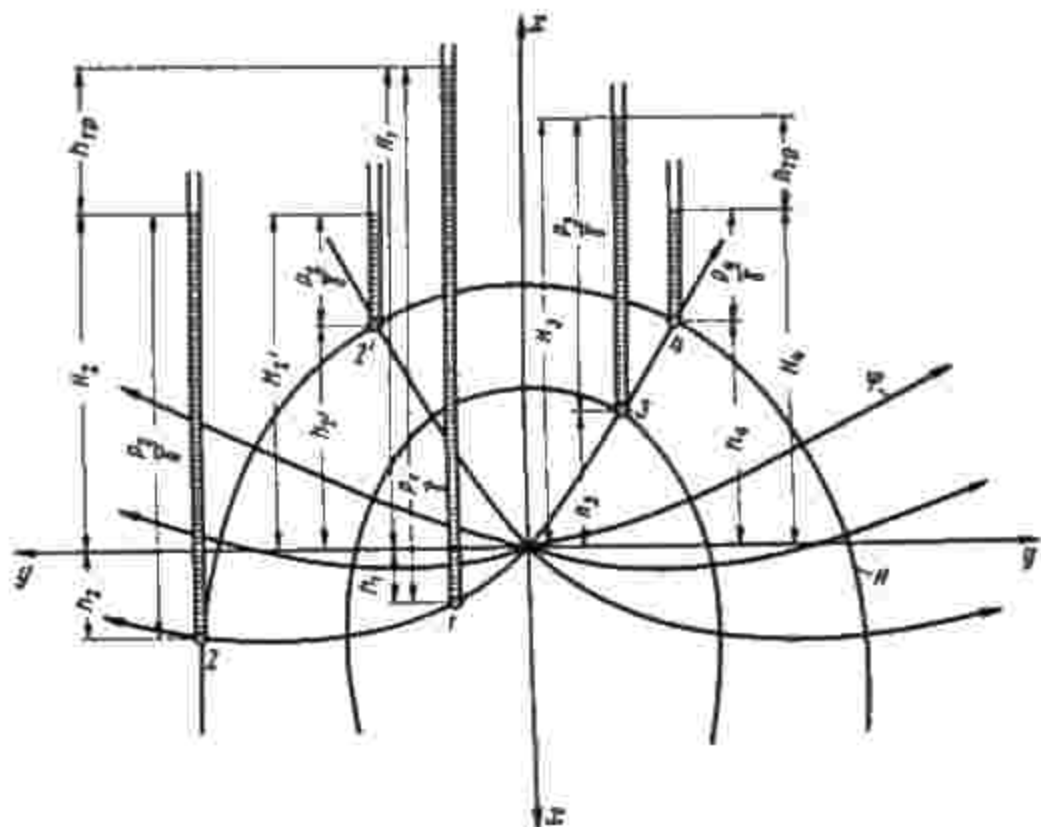


Рис. 8. Порядок изменения пьезометрических напоров

простых схем движения, для которых закон изменения скорости подземного потока известен, функция потенциала дает простые решения путем непосредственного интегрирования уравнений (6.11) или аналогичных им для любого выбранного направления скорости. К числу таких течений относится система источников — прямолинейного и пространственного (точечного), принятых в качестве основных гидромеханических схем для нагнетания.

Книга, по замыслу автора, в известной степени должна выполнить роль учебного пособия для студентов вузов (по специальности), а с другой стороны — служить техническим руководством для инженеров горных специальностей. Поэтому автор счел полезным предпослать изложению главной темы три параграфа с кратким изложением основных теоретических сведений об источниках.



## 2. Функция прямолинейного источника

При боковом изгибании имеет место пространственный поток жидкости. Но этот поток можно расчленить на ряд составляющих таким образом, что во всех плоскостях, параллельных той или иной координатной плоскости, будут иметь место тождественные течения. Решение сводится к плоской задаче.

Внутреннее содержание фильтрационного потока определяется линиями равного потенциала  $\varphi$  и линиями тока  $\psi$ . Если система эквипотенциалов рисует скоростные условия потока, то объемное содержание его характеризуется функцией тока  $\psi$ .

Так как рассматривается плоское движение, пусть в плоскости  $xy$ , то для последнего будут иметь место два компонента скорости:

$$\left. \begin{aligned} u &= -k \frac{\partial H}{\partial x}; \\ v &= -k \frac{\partial H}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (8, II)$$

Потенциал скорости  $\varphi$  определяется функцией, частная производная которой по любому направлению равна составляющей скорости в этом направлении

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \quad (9, II)$$

Отсюда потенциал скорости определим выражением

$$\varphi = -k \left( \frac{p}{\gamma} + h \right) = -kH. \quad (10, II)$$

При установившемся движении жидкости функция  $\varphi$  является функцией одних координат точки. Поэтому можно написать выражение полного дифференциала функции  $\varphi$

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = u dx + v dy. \quad (11, II)$$

Функцию тока можно определить как расход жидкости. Этот расход протекает между двумя линиями токов, лежащими в одной плоскости. И так как движение является плоскопараллельным, то можно рассматривать единичный расход на единицу ширины потока в плоскости чертежа.

Пусть линии тока  $\psi$  и  $\psi + d\psi$  (рис. 9) пересекают эквипотенциал  $\varphi$  в точках  $a$  и  $b$  с координатами  $x, y$  и  $x+dx, y+dy$ . Элементарный расход  $d\psi$ , протекающий между этими линиями тока, можно представить алгебраической суммой элементарных расходов через площадки  $ac$  и  $bc$

$$d\psi = uac + vbc.$$

Но  $ac = dy$  и  $bc = -dx$ . Следовательно, получим

$$d\psi = u dy - v dx. \quad (12, II)$$

Функция тока, как и сопряженная с ней функция потенциала, в установившемся движении является также функцией одних координат точки. Полный дифференциал этой функции напишется в виде

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx - \frac{\partial \psi}{\partial y} dy. \quad (13, II)$$

Сопоставляя выражения для  $d\psi$  из уравнений (12 и 13, II), будем иметь

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (14, II)$$

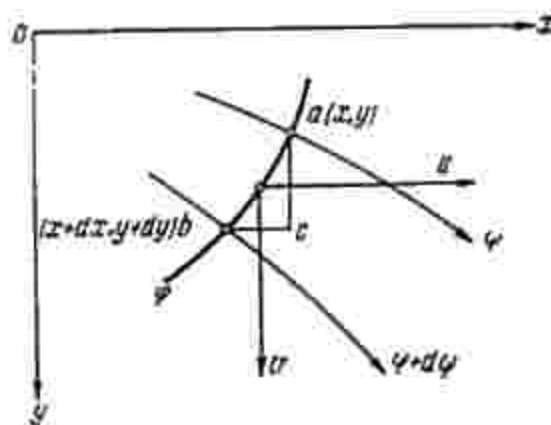


Рис. 9. Определение функции тока в плоском движении

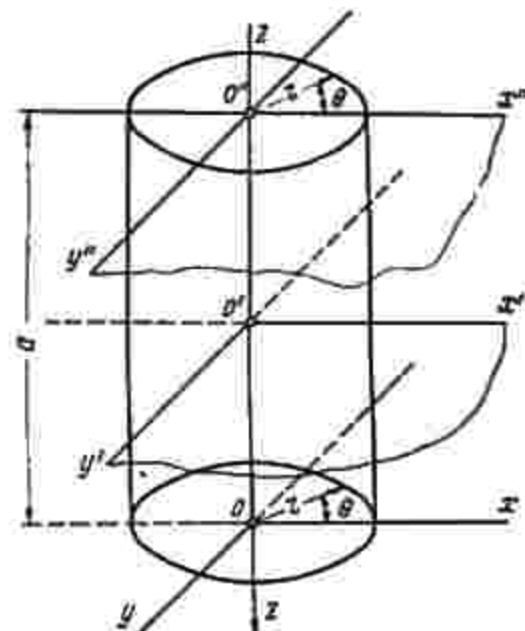


Рис. 10. Схема прямолинейного источника

И, наконец, из сопоставления уравнений (9, II) и (14, II) получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (15, II)$$

Это — известные из теории функций комплексного переменного уравнения Коши—Римана

Зависимости, выраженные уравнениями (11, II) и (12, II), имеют большое значение в теории плоского потенциального движения.

Под источником в плоском течении разумеется точка, из которой жидкость вытекает равномерно во все стороны на плоскости. Следовательно, линиями тока подобного источника являются прямые радиальные линии. А так как линии равного потенциала должны быть и нормальны, то эквипотенциальная поверхность такого потока в пространстве будет представлять боковую поверхность



прямого кругового цилиндра с осью, проходящей через начало координат и нормальной к плоскости чертежа (рис. 10).  
 Во всех плоскостях, параллельных плоскости  $xoy$ , будут иметь место одинаковые течения. Поэтому ось  $oz$ , нормальная к плоскости  $xoy$ , является совокупностью непрерывного ряда источников — точек одного и того же знака и, по терминологии проф. А. Я. Милевича, в пространственном отношении представляет прямолинейный источник.  
 Расход прямолинейного источника получается как расход через боковую поверхность прямого кругового цилиндра высотой  $h$

$$Q = 2\pi r h W,$$

где  $r$  — радиус или расстояние от источника;  
 $W$  — полная или радиальная скорость, направленная наружу.  
 Единичный расход или расход на единицу ширины потока получается равным

$$q = 2\pi r W,$$

откуда полная, или радиальная, скорость

$$W = \frac{q}{2\pi r}. \quad (16, II)$$

Расход  $q$  называется мощностью источника.  
 Для определения функции потенциала надо компоненты радиальной скорости  $u$  и  $v$  выразить в форме функций  $x$  и  $y$  и их интегрировать.

Компоненты скорости:

$$u = \frac{q}{2\pi r} \cos \theta = \frac{q}{2\pi x} \cos^2 \theta = \frac{q}{2\pi} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2};$$

$$v = \frac{q}{2\pi r} \sin \theta = \frac{q}{2\pi y} \sin^2 \theta = \frac{q}{2\pi} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Тогда по уравнению (11, II) имеем

$$d\varphi = \frac{q}{2\pi} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy \right). \quad (17, II)$$

Интегрируем уравнение, имея в виду, что первый член его есть частная производная по  $x$ , второй — частная производная по  $y$ . Поэтому при интегрировании первого члена полагаем  $y = \text{const}$ , при интегрировании второго —  $x = \text{const}$ .  
 Таким образом, имеем

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{q}{2\pi} \ln(x^2 + y^2)$$

или, подставив  $r^2 = x^2 + y^2$ , получим

$$\varphi = \frac{q}{2\pi} \ln r. \quad (18, III)$$

При  $\varphi = \text{const}$  значение  $r = \text{const}$ . Поэтому эквипотенциали с уравнением  $\varphi = \text{const}$  будут окружностями, описанными вокруг центра источника  $o$ .

Для определения функции тока согласно уравнению (12, II) имеем

$$d\psi = \frac{q}{2\pi} \left( -\frac{x}{x^2 + y^2} dy + \frac{y}{x^2 + y^2} dx \right). \quad (19, II)$$

Интегрирование дает

$$\psi = \frac{q}{2\pi} \arctg \frac{y}{x} = \frac{q}{2\pi} \theta. \quad (20, II)$$

Для каждой горизонтальной плоскости спектр линий тока будет представлен системой радиальных прямых, удовлетворяющих уравнению (20, II).

Прямолинейный источник представляет значительный интерес, так как большинство схем бокового нагнетания могут быть просто и наглядно решены при помощи этого метода.

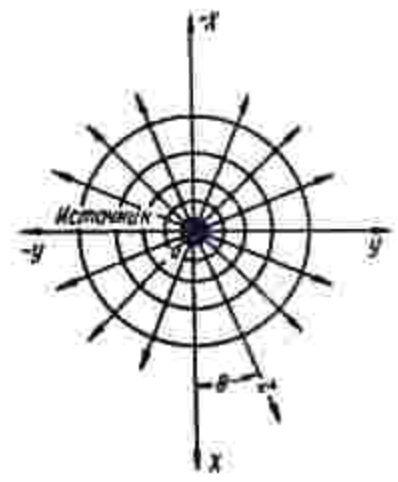


Рис. 11. Диаметральное сечение поля точечного источника и параллельно-осевого потока

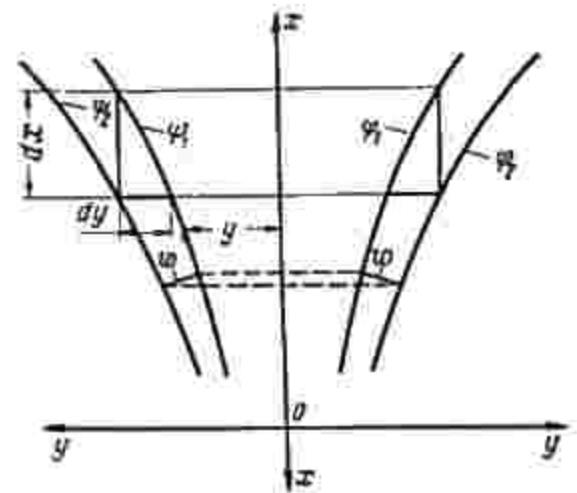


Рис. 12. Определение функции тока симметричных пространственных полей

При рассмотрении схем бокового нагнетания в комбинации с ними может иметь место прямолинейный равномерный поток, параллельный той или другой оси, например  $x$ .

Для этого случая имеем

$$u = U = \text{const}; \quad v = 0.$$

Тогда получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = U; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0.$$



Следовательно,

$$\begin{aligned} d\varphi &= U dx; \\ \dot{\varphi} &= U v. \end{aligned} \quad (21, II)$$

Соответственно получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial y} &= U; \quad \frac{\partial \dot{\varphi}}{\partial x} = 0; \quad d\dot{\varphi} = U dy; \\ \psi &= U y. \end{aligned} \quad (22, II)$$

Линии тока прямые, параллельные  $x$

### 3. Функции точечного источника

Большинство схем зонного магнетизма опирается на пространственные симметричные поля течения от источника — точки, деформированные действием силы тяжести. При условиях симметрии достаточно рассмотрения одной меридиональной плоскости поля.

Приняты следующие обозначения (рис. 11):

$x$  и  $y$  — координаты любой точки потока относительно центра источника;

$r$  — радиус-вектор или расстояние от точки потока до центра источника;

$\theta$  — угол между радиусом-вектором и осью  $x$ -ов;

$Q$  — секундный расход жидкости, вытекающей из источника.

Источник-точка дает равномерное радиальное растекание жидкости во все стороны пространства. Поэтому скорость в любой точке пространства на расстоянии  $r$  от источника будет определена расходом жидкости  $Q$  через поверхность сферы радиуса  $r$

$$v_{\text{ист}} = \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Эту скорость можно выразить через потенциал, взяв отрицательный знак

$$\frac{Q}{4\pi r^2} = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

При симметрии движения относительно начала координат функция  $\varphi$  является функцией только одной переменной  $r$ . Поэтому можно написать

$$d\varphi = -\frac{Q}{4\pi r^2} dr.$$

После интегрирования получаем потенциал скорости источника

$$\psi = \frac{Q}{4\pi r} = \text{const.} \quad (23, II)$$

Для определения функции тока источника  $\psi$  надо воспользоваться свойством поля течения, симметричного относительно оси вращения. Поверхности тока таких полей будут состоять из совокупности линий тока, образующих вокруг оси симметрии поверхности вращения.

На рис. 12 изображено меридиональное сечение некоторого пространственного поля течения, симметричного относительно оси  $x$ . Две линии тока  $\psi_2$  и  $\psi_1$  находятся на расстоянии друг от друга  $ds$ . Количество жидкости между этими линиями тока  $d\psi$ .

Площадь живого сечения потока между заданными линиями тока равна  $2\pi y ds$ . Скорость, перпендикулярная к  $ds$ , пусть будет  $\omega$ . Тогда имеем уравнение расхода жидкости

$$d\dot{\psi} = \omega 2\pi y ds,$$

откуда

$$\omega = \frac{1}{2\pi y} \frac{d\dot{\psi}}{ds}. \quad (24, II)$$

Это уравнение справедливо для любой точки симметричного поля и выражает через функцию  $\psi$  скорость в любом направлении меридионального сечения пространственного поля.

Для определения компонентов скорости необходимо взять частные производные  $\psi$  по направлениям, ортогональным заданному:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi y} \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial y}; \\ v &= -\frac{1}{2\pi y} \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (25, II)$$

Отрицательный знак в последнем уравнении поставлен потому, что положительному приращению  $d\psi$  будет соответствовать отрицательное приращение  $dx$ .

Компонент скорости  $w$ , перпендикулярный к меридиональной плоскости, равен нулю.

Так как распределение скоростей одинаково во всех меридиональных плоскостях, проходящих через ось вращения, то достаточно исследовать одну такую плоскость. Течение жидкости в этой плоскости отображает течение во всем пространственном потоке. Применим уравнение (24, II) для определения функции тока источника. По этому уравнению скорость источника  $v_{\text{ист}} = \frac{Q}{4\pi r^2}$  можно представить в виде

$$\frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{1}{2\pi y} \frac{d\dot{\psi}}{ds}$$

или

$$\frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{1}{2\pi r \sin \theta} \frac{d\dot{\psi}}{ds},$$

так как  $y = r \sin \theta$ .



Здесь  $z$  обозначает направление, перпендикулярное заданному, т. е. направлению  $+90^\circ$  относительно радиуса  $r$ . Так как бесконечно малое смещение, перпендикулярное к  $r$ , в пределе равно  $rd\theta$ , то будем иметь

$$\frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{1}{2\pi r \sin \theta} \frac{d\psi}{rd\theta}$$

или

$$d\psi = \frac{Q}{2} \sin \theta d\theta.$$

Выполняя интегрирование, получим

$$\psi = \left| -\frac{Q}{2} \cos \theta \right|_0^\theta$$

или

$$\psi = \frac{Q}{2} (1 - \cos \theta) = \text{const}, \quad (26, II)$$

т. е. линиями тока будут бесконечно простирающиеся прямые, исходящие из источника.

Для идеальной жидкости источник дает бесконечное радиальное протекание жидкости в пространстве. Для реальной жидкости сказывается трение. Кроме того, ощутима сила тяжести, налагающаяся на поток источника. Действие силы тяжести равносильно рассмотрению равномерного вертикального течения, происходящего при гидравлическом градиенте, равном единице.

Поэтому необходимо отметить функции равномерного вертикального течения в пространстве.

Пусть постоянная скорость такого течения будет равна  $U$ . Компоненты скорости:

$$u = U = \text{const}; \quad v = 0; \quad \omega = 0.$$

Взяв отрицательный знак потенциала, будем иметь

$$U = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Потенциал скорости равномерного вертикального течения равен

$$\varphi = -Ux = \text{const}. \quad (27, II)$$

Функция тока  $\psi$  этого течения определяется аналогично предыдущему по уравнению (24, II)

$$U = \frac{1}{2\pi y} \frac{\partial \psi}{\partial y} = u.$$

Так как функция  $\psi$  при  $U = \text{const}$ ,  $v = 0$  и  $\omega = 0$  является функцией только  $y$ , то можно написать

$$d\psi = 2\pi y U dy,$$

откуда

$$\psi = \pi U y^2 = \text{const}. \quad (28, III)$$

Линии тока прямые, параллельные оси  $x$ .

#### 4. Функции несовершенных источников

Глубина скважины при нагнетании твердеющих жидкостей не может быть слишком большой из-за трудностей, связанных с организацией циркуляции тампонирующих растворов в скважине. В связи с этим там, где мощность тампонируемого пласта слишком велика, скважины бурятся небольшой глубины, и тампонирование пласта производится отдельными вертикальными заходками. Между нижним концом скважины и границей подстилающей непроницаемой породы будет находиться толща проницаемых грунтов. Такие скважины называются гидродинамически несовершенными.

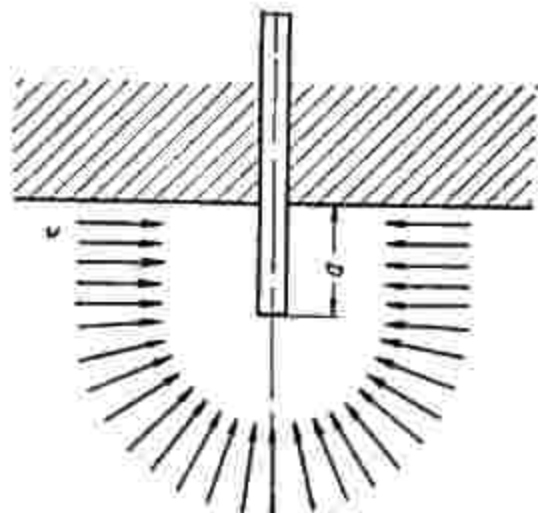


Рис. 13. Дебит несовершенной скважины как сумма плоско-радиального и радиально-полусферического потоков

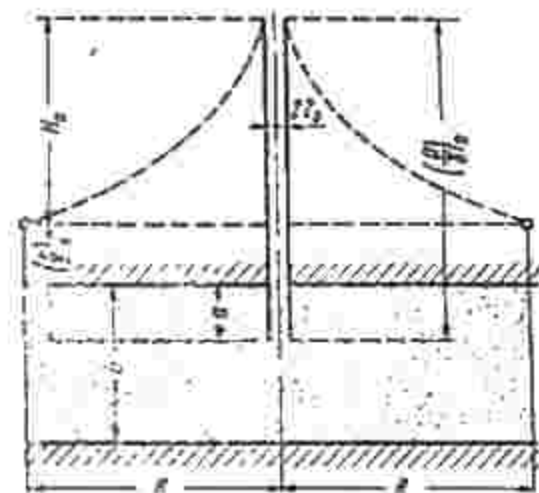


Рис. 14. Гидродинамически несовершенная скважина, вскрытая на глубину  $h$  и пласт конечной мощности

В новейшей литературе имеются довольно обширные исследования, посвященные проблеме гидродинамически несовершенных скважин. По отзывам проф. В. И. Щелкачева, существующие решения этой проблемы с достаточной степенью точности могут служить не только для качественной характеристики явления, но и для количественной оценки влияния несовершенства скважины на ее дебит.

Большинство этих решений выполнено для дренирующих скважин. Но так как перестановка местами краевых напоров для напорных потоков, подобно тому, как перестановка электродов на пластинке не изменяет проводимость системы, то каждое из имеющихся решений в пределах их точности можно применить и для нагнетательных скважин.

Имеющиеся решения проблемы несовершенных скважин можно разбить на три направления:

поиски строго математических решений распределения потенциала и определения дебита несовершенной скважины;



приближенные решения, основанные на принципе суммирования элементарных потоков несовершенной скважины — бокового плоско-радиального и донного радиально-полусферического; эмпирические решения, ставящие задачей нахождение поправочных коэффициентов к совершенным скважинам для определения дебита несовершенных.

Во избежание дальнейших повторений необходимо отметить, что идея определения дебита несовершенной дренирующей скважины суммированием плоско-радиального и радиально-полусферического потоков (рис. 13) в свое время была предложена проф. Ч. Слехтером

$$Q = 2\pi k H_0 \left( \frac{r_0}{1 - \frac{r_0}{R}} + \frac{a}{\ln \frac{R}{r_0}} \right) \quad (29, II)$$

где  $r_0$  — радиус скважины;  
 $R$  — радиус действия скважины;  
 $a$  — глубина вскрытой части пласта;  
 $H_0$  — перепад давления (напор), равный  $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_R - \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0$

Но подобное решение слишком приближенно и могло быть сделано в период, когда еще не существовало точных гидромеханических представлений о поле несовершенных скважин. При этом предположении между плоским радиальным и радиально-полусферическим потоком должна существовать горизонтальная граница раздела двух течений. Но этого быть не может, так как пьезометрические давления, создаваемые линейным стоком (отрицательным источником) и точечным полустоком, на этой границе раздела имели бы слишком разную величину. Расход же, отбираемый дном скважины, как это показал Форхгеймер, чрезвычайно мал и не заслуживает внимания.

Из эмпирических решений для определения дебита несовершенных скважин необходимо остановить внимание на формуле Козени. Используя уравнение Дюпюи для совершенных скважин и вводя поправочные коэффициенты, Козени получил формулы для несовершенных дренирующих колодцев со свободной депрессионной поверхностью и артезианских — напорных. Имея в виду неизменяемость проводимости системы при перестановке местами электродов на пластинке, формулу Козени можно применить к несовершенной нагнетательной скважине, поменяв местами крайние напоры.

В соответствии с обозначениями по рис. 14 формула Козени для нагнетательной несовершенной скважины имеет вид

$$Q = \frac{2\pi k a H_0}{\ln \frac{R}{r_0}} \left( 1 + 7 \sqrt{\frac{r_0}{2b}} \sqrt{\frac{a}{b} \cos \frac{\pi a}{2b}} \right) \quad (30, II)$$

В соответствующем разделе практические приложения формулы Козени для нагнетательных тампонажных скважин будут указаны

Наибольшее значение имеют теоретические решения несовершенных скважин, основанные на теории потенциала. К числу таких относятся:

открытый забой, вскрывший кровлю пласта неограниченной мощности (весьма большой);

гидродинамически несовершенная скважина, вскрывшая на глубину  $a$  пласт неограниченной мощности;

гидродинамически несовершенная скважина, вскрывшая на глубину  $a$  пласт конечной мощности;

открытый забой, вскрывший кровлю пласта с конечной мощностью.

Этими схемами охватываются все наиболее часто встречающиеся практические случаи нагнетания из несовершенных скважин.

**Открытый забой.** Когда скважина только вскрывает пласт очень большой мощности открытым забоем, течение жидкости из скважины можно представить пространственным полусточником (рис. 15). Функции поля такого течения находятся тем же путем, что рассмотрен в параграфе 3 настоящей главы. Только вместо скорости через сферу надо взять скорость полусферы

$$w_{\text{полуст}} = \frac{Q}{2\pi r^2}$$

Во всем остальном аналогично функциям источника получим

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi r} = \text{const}, \quad (31, II)$$

$$\psi = Q(1 - \cos \theta). \quad (32, II)$$

Определяемые этими функциями линии тока и эквипотенциали дают систему простирающихся из полусточника прямых линий и систему пересекающих их концентрических полуокружностей. Но эти функции отвечают полусферическому дну забоя. Такую форму дна можно сделать или искусственно путем специальной обработки грунта забоя (прострел), или чаще всего сам рыхлый грунт в результате выноса или фильтрационного уплотнения может образовать полушаровую форму.

Но возможен и другой случай, когда дно забоя будет иметь плоскую форму, что соответствует палачию в окрестностях забоя твердых скальных пород. Для течения через плоское дно забоя

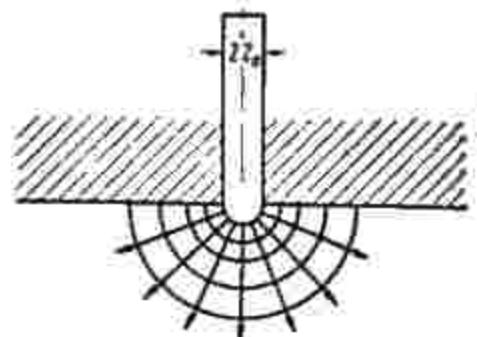


Рис. 15. Открытый забой, вскрывший кровлю пласта неограниченной мощности



(колодца) проф. Ф. Форхгеймер нашел, что линиями токов служат гиперболы, а эквипотенциалами — софокусные им полуэллипсы с фокусами на краях забоя.

Не приводя теоретических выводов Форхгеймера, отметим, что функция потенциала для рассматриваемого течения с высокой степенью точности может быть выражена уравнением

$$\varphi = \frac{2kH_0}{c} \arcsin \frac{r_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (33, II)$$

(удовлетворяет уравнению Лапласа с точностью до константы  $r_0^2$ ).

При достаточно больших значениях  $\sqrt{x^2 + y^2} = r$  величина  $\arcsin \frac{r_0}{r}$  становится равной  $\frac{r_0}{r}$  и тогда можно принять

$$\varphi = \frac{2kH_0}{c} \frac{r_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (34, II)$$

Т. е. на большом удалении от забоя гиперболы можно заменить прямыми, а эллипсы — полуокружностями.

**Несовершенная скважина в пласте неограниченной мощности.** В пласте бесконечной глубины скважина всегда будет несо-

вершенной. Для теоретического исследования такой скважины вдоль оси ее размещаются пространственные источники. Для источника в точке  $\zeta$  на оси скважины потенциал скорости выражается уравнением

$$\varphi = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{y^2 \sqrt{(\zeta - x)^2 + r^2}} \quad (35, II)$$

где  $r^2 = y^2 + z^2$ . Поле течения симметрично относительно вертикальной оси вращения  $x$ .

Горизонтальная плоскость  $x=0$  представляет твердую стенку. Из гидродинамики известно, что течение из источника вблизи плоской горизонтальной стенки эквивалентно комбинационному течению двух источников равной силы, симметрично расположенных на одной вертикальной прямой (рис. 16). Поэтому продолжив ось скважины вверх и взяв инте-

грал от выражения (35, II), в пределах  $-a, a$ , найдем потенциал комбинационного течения

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{q(\zeta) d\zeta}{\sqrt{(\zeta - x)^2 + r^2}} \quad (36, II)$$

Интенсивность источников  $q(\zeta)$  надо подобрать так, чтобы на поверхности цилиндра радиуса  $r_0$  иметь постоянное значение потенциала. Кроме того, на дне цилиндра должно выполняться определенное условие. В такой постановке задача является сложной.

Обычно интенсивность  $q$  принимают постоянной вдоль всей скважины. Тогда интеграл (36, II) легко вычисляется

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi a} \ln \frac{\sqrt{\left(\frac{a-x}{r}\right)^2 + 1} + \frac{a-x}{r}}{\sqrt{\left(\frac{a+x}{r}\right)^2 + 1} - \frac{a+x}{r}} \quad (37, II)$$

где  $Q = qa$  — расход скважины.

Поверхностями равного потенциала являются эллипсоиды вращения с фокусами в точках  $(0, 0, a)$  и  $(0, 0, -a)$ . То есть поверхность скважины заменяется поверхностью узкого эллипсоида.

Взяв в формуле (37, II)  $x=0$ , получим распределение потенциала вдоль кровли пласта (для удаленной области от скважины)

$$\varphi_{(0, r)} = \frac{Q}{2\pi a} \ln \frac{\sqrt{a^2 + r^2} + a}{r} \quad (38, II)$$

Академик П. Я. Полубаринова-Кочина отмечает, что для уточнения решения задачи необходимо задаться иным распределением интенсивности. При этом к концам отрезка  $(-a, a)$  значение  $q(\zeta)$  должно увеличиваться. Если распределение  $q(\zeta)$  принять аналогичным плоской задаче

$$q(\zeta) = \frac{q_0}{\sqrt{a^2 - \zeta^2}}$$

то получится новое решение функции потенциала в виде эллиптического интеграла тем более точное, чем меньше радиус скважины.

Зная распределение потенциала, во всех рассмотренных задачах не трудно найти величину нагнетаемого расхода.

**Несовершенная скважина в пласте ограниченной мощности.** Среди этой группы задач (рис. 14) известны теоретические решения Глоговского и Маскета. Решение Глоговского основано на применении рядов Бесселя; решение Маскета — на методе конформных отображений. Решение Глоговского более изящно. Решение Маскета более просто для практических расчетов. Учитывая последнее, достаточно ограничиться рассмотрением решения Маскета.

Решение Маскета опирается на аналогию распределения электрического потенциала в широких цилиндрических дисках при частично проникающем электроде. Используя метод конформных отображений бесконечного ряда элементарных стоков (источников) вдоль оси скважины, Маскет дает уравнения распределения

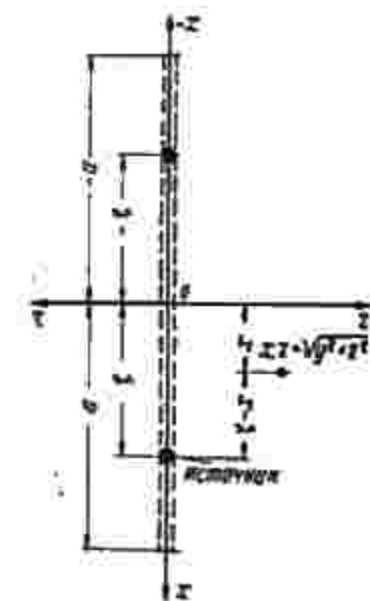


Рис. 16. Несовершенная скважина в пласте неограниченной мощности



потенциала для области поля вблизи скважины ( $r < 2b$ ) и для удаленной области ( $r > 2b$ ): уравнения (8) и (9) гл. V. Но эти уравнения не представляют еще окончательного решения проблемы, так как они получены в предположении постоянства расхода по длине скважины и не дают равномерного распределения потенциала по поверхности забоя. При пользовании этими уравнениями необходимо раньше произвести эмпирическое перераспределение расходов по длине скважины. Необходимость такого перераспределения связана с тем, что в нижнюю часть скважины поступление жидкости из нескрытой части пласта происходит с значительно большей концентрацией, чем в верхнюю. То же самое происходит и при нагнетании жидкости в пласт через несовершенную скважину. Только после перераспределения расходов на расстоянии от скважины, равном двойной мощности пласта, распределение потенциала становится равномерным по всей глубине пласта, и течение жидкости принимает плоско-радиальный характер. Но процесс перераспределения расходов весьма трудоемкий и точное решение задачи несовершенной скважины чрезвычайно затруднено. Поэтому Маскет дает

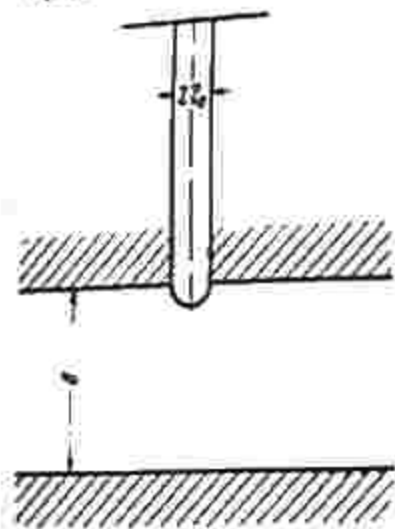


Рис 17. Открытый забой в пласте ограниченной мощности

упрощенные, но вполне точные формулы (точность 0,5%) для распределения потенциалов на основных контурах пласта. При помощи нескольких расчетов по уравнениям Маскета (8) и (9) с перераспределенными расходами Маскет установил, что для удовлетворения условий постоянства потенциалов на внутреннем ( $r = r_0$ ) и внешнем контуре ( $r > 2b$ ) пласта интенсивность распределения расхода  $q$  по длине скважины можно принять постоянной, но тогда для потенциала на поверхности скважины надо взять «среднеэффективное» значение, получающееся на расстоянии  $3/4$  интервала от кровли пласта до дна скважины, т. е.  $x = \frac{3}{4} b$ .

Приближенные формулы Маскета для выравненных потенциалов имеют вид:

$$\varphi = q \left[ 2 \ln \frac{4b}{r_0} - \ln \frac{\Gamma(0,875h) \Gamma(0,125h)}{\Gamma(1-0,875h) \Gamma(1-0,125h)} \right]; \quad (39, II)$$

для удаленной области ( $r > 2b$ )

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi b} \ln \frac{4b}{r}. \quad (40, II)$$

Здесь  $Q$  — полный расход несовершенной скважины при постоянной интенсивности  $q$ , равный  $Q = 4\pi qa$ ;  
 $b$  — мощность всего тампонируемого пласта;  
 $a$  — глубина вскрытой части;  
 $r$  — текущий радиус;  
 $R$  — радиус действия скважины;

$$h = \frac{a}{b} \text{ — относительное вскрытие пласта;}$$

$\Gamma$  — «гамма функция», табулированная во многих справочниках, например, Я. Н. Шпильрейна.

Зная потенциалы на двух контурах пласта, не представляет труда найти и величину нагнетаемого расхода.

**Открытый забой в пласте ограниченной мощности.** Все зависимости для этой схемы (рис 17) могут быть получены из решения Маскета, если иметь в виду, что относительное вскрытие пласта здесь равно  $h = \frac{r_0}{b}$ , т. е.  $a = r_0$ .

Но существуют и самостоятельные формулы, описывающие открытый полусферический забой в пласте конечной мощности. При этом следует иметь в виду указание проф. В. Н. Щелкачева, что дебит скважины с открытым полусферическим забоем в пласте конечной мощности можно определять с точностью до 1—2% по формулам открытого полусферического забоя в пласте неограниченной мощности, если только  $b > 200 r_0$ .



При гидравлических расчетах цементации, глинизации и битумизации горных пород существенную роль играют геометрические элементы фильтрации в пористой среде: действующий диаметр несвязных зернистых грунтов  $D_0$ , коэффициент проницаемости  $k_{зр}$ , через который связывается коэффициент фильтрации пористой среды  $k$ , диаметр поры  $d_0$  и толщина (раскрытие) трещины  $\delta$ .

Вопрос о коэффициенте проницаемости практически сводится к исследованию образцов и кернов горных пород. Для определения коэффициента проницаемости существуют различные конструкции приборов. Описание их и методику проведения лабораторных исследований можно найти в специальной литературе.

### 1. Действующий диаметр зернистых грунтов

Грунтовой массив состоит из фракций разной крупности. Для возможности математической обработки многомерную среду необходимо привести к одному размеру зерен. Таковым в подземной гидравлике является диаметр приведенного равновеликого шара, играющий роль действующего диаметра частицы. При установлении диаметра необходимо иметь в виду, что в природе о неоднородности грунта имеет значение не только разноразмерность частиц, но и степень равномерности распределения мелких частиц между крупными. В соответствии с этим рассмотрим две параллельные схемы формирования грунтового массива.

**Первая схема формирования.** Можно представить массив рыхлого грунта, образованный зернами разной крупности, но составленным таким образом, что диаметр самых мелких частиц не меньше поперечных размеров поры между самыми крупными зернами данного грунта (рис. 18, а). В этом случае неоднородность частиц, измеряемая отношением диаметров самых крупных и самых мелких, не может быть слишком большой. Известно, что наибольший диаметр круга, вписанного в диаметральное сечение поры между однородными шаровыми частицами при угле конфигурации  $\theta = 90^\circ$ , равен  $d = 0,414 D$ , а наименьший при  $\theta = 60^\circ$  —  $d = 0,155 D$ , где  $D$  — диаметр частиц. Первое значение соответству-

ет наибольшей пористости однородного массива  $m = 0,477$ , второе — наименьшей  $m = 0,258$ \*. Следовательно, коэффициенты неоднородности частиц могут изменяться от  $k_{\min} = \frac{1}{0,414} = 2,42$  до

$$k_{\max} = \frac{1}{0,155} = 6,45.$$

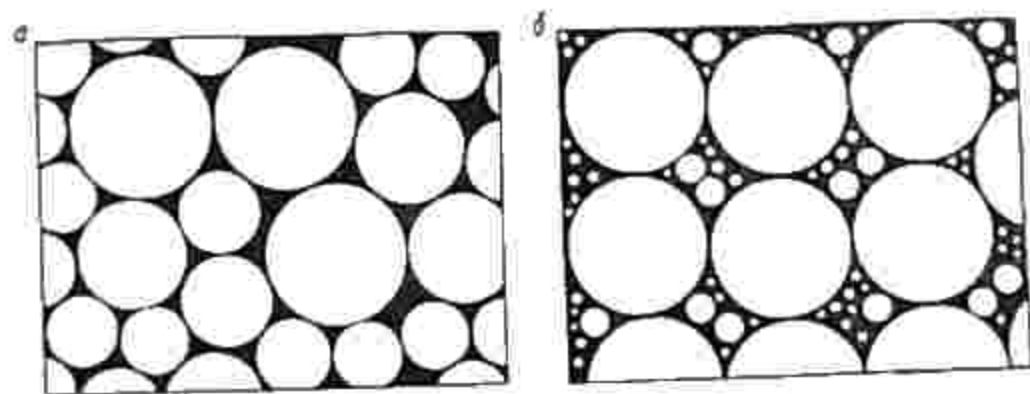


Рис. 18. Схемы формирования пор

В таком массиве рыхлой среды самые мелкие частицы не могут заполнить поры между крупными, а вместе с ними образуют сеть замкнутых самостоятельных пор, т. е. каждая частица участвует в общем расnore массива. Поэтому действующий диаметр зерна в этой схеме может быть принят равным среднему значению из всех частиц по уравнению

$$D_0 = \frac{\sum D_i q_i}{100}, \quad (1,11)$$

где  $D$  — диаметр отдельных фракций грунта;  
 $q$  — процент фракций.

Коэффициент неоднородности грунта можно выразить нормальным отношением диаметров самых крупных и самых мелких частиц

$$k = \frac{D_{\max}}{D_{\min}}.$$

Можно представить изменение величины диаметра  $d$  в функции объемной пористости, имея в виду зависимость  $m$  от угла конфигурации шаров  $\theta$ . Решение получится в виде показательного уравнения

$$d = 1,36m^{1,5}D.$$

\* Объемная пористость массива  $m$  с углом конфигурации шаров  $\theta$  связана геометрической формулой Слэтера

$$m = 1 - \frac{\pi}{6(1 - \cos \theta) \sqrt{1 + 2 \cos \theta}}.$$



Критерием, определяющим принадлежность грунта к данной схеме, может служить или соотношение диаметров самых мелких и самых крупных частиц, удовлетворяющих условию

$$D_{\min} > 1,36m^{1,4} D_{\max} \quad (2,III)$$

или величина коэффициента неоднородности, удовлетворяющая требованию

$$k < \frac{1}{1,36m^{1,4}} \quad (3,III)$$

Здесь  $D_{\min}$  и  $D_{\max}$  — диаметры самых мелких и самых крупных частиц грунта по механическому составу.

Критерии (2—3,III) получены из рассмотрения геометрически правильного массива из идеальных шаров. В реальном массиве, образованном фракциями неправильной (угловатой) формы, неизбежны отклонения. Поэтому для реального массива, пользуясь упрощенными представлениями, можно принимать приближенные соотношения: для диаметра поры  $d = mD$  и критериев

$$\left. \begin{aligned} D_{\min} > mD_{\max} \\ k < \frac{1}{m} \end{aligned} \right\} \quad (4,III)$$

К рассмотренной схеме грунтового массива относится небольшая часть естественных, хорошо отсортированных крупнозернистых грунтов: крупные пески, гравий, галька, а также искусственные образования из щебня и каменной наброски.

**Вторая схема формирования массива.** Большое распространение в природе имеет вторая схема формирования грунтового массива, когда значительное количество более мелких частиц имеет диаметры меньше поперечных размеров пор, образованных более крупными зернами. При таком положении мелкие частицы заполняют поры между крупными (рис. 18, б). Степень плотности заполнения зависит от процентного содержания мелких частиц в грунте и характера распределения их по разрядам крупности. В этом случае действующий диаметр зерна будет связан мелкими частицами, заполняющими поры между крупными. Математическая обработка для этой схемы грунтового массива осложнена многообразием частиц и неправильностью их формы. Но возможно получить решение, основанное на осредненных представлениях о массиве.

Допустим, что грунтовой скелет состоит из крупных зерен, образующих наибольшую величину пор. Объемная пористость массива в этом состоянии  $m_{\max}$ . Тогда объем пор в кубической единице такого грунта равен  $1 - m_{\max}$ , а объем самих зерен  $1 - (1 - m_{\max})$ . Для заполнения промежутков между крупными зернами с заданной пористостью  $m$  необходимо иметь объем мелких частиц, равный  $1 - m_{\max} (1 - m)$ . При одинаковых значениях удельных весов

для крупных и мелких частиц процентное весовое распределение частиц обеих категорий будет пропорционально их объемам

$$A_{\text{круп}} : B_{\text{мелк}} = (1 - m_{\max}) : m_{\max} (1 - m)$$

Так как

$$A_{\text{круп}} = 100 - B_{\text{мелк}}$$

то

$$(1 - m_{\max}) B_{\text{мелк}} = m_{\max} (1 - m) (100 - B_{\text{мелк}})$$

Откуда

$$B_{\text{мелк}} = \frac{100m_{\max}(1-m)}{1-m+m_{\max}} \quad (5,III)$$

По уравнению (5,III) определяется процентное содержание мелких частиц, необходимое для заполнения пор между крупными в соответствии с естественным значением пористости грунта  $m$ .

Плотность несвязных грунтов, песков, гравия, гальки и грубо-обломочного материала колеблется в широких пределах и зависит от условий напластования, осаждения и главным образом от скорости осаждения. Чем быстрее осаждается материал, тем он рыхлее; чем медленнее, тем плотнее. Форма частиц также влияет на плотность осаждения. Хорошо обработанный округленный материал дает более высокую плотность, необработанный — обуславливает более рыхлую среду. Но несомненно, что в начальной стадии формирования несвязных неоднородных грунтов оседающий материал предварительно сортируется по крупности зерна. В первую очередь наиболее свободно и рыхло отлагаются крупные зерна, а затем промежутки между ними заполняются и уплотняются более мелкими частицами. Крупные зерна образуют скелет-каркас или решетку грунтового массива. Так как начальная стадия формирования каркаса сопровождается проявлением силы тяжести (грануляции), то отдельные крупные зерна ее принимают устойчивое положение, касаясь между собой и образуя замкнутую сквозную систему крупных пор. Такой каркас вполне устойчив. Дальнейший процесс заполнения крупных пор более мелкими частицами происходит под влиянием статических сил давления, фильтрационных сил и токов жидкости. На этом основании за величину пористости  $m_{\max}$  скелета-каркаса неоднородного грунтового массива необходимо принимать максимальные значения, свойственные для частиц данной формы и осевших в свободном состоянии.

На рис. 19 показан каркас-решетка кварцевого щебня. Средний диаметр равновеликого шара  $D = 9,5 \cdot 10^{-3}$  м. Неоднократные измерения показали, что в наиболее рыхлом состоянии (свободном оседании) его объемная пористость 0,508, в наиболее плотном (за счет вибрационного уплотнения) 0,444. Изменение пористости такого скелета достигает всего 14,6%. Каркас-решетка не только устойчив, но и консервативен.



Для всех несвязных грунтовых образований надо брать соответствующие пробы. Из них отсортировать наиболее крупные зерна и для таких каркасов определять пористость  $m_{max}$  в соответствии с формулой (6.11).

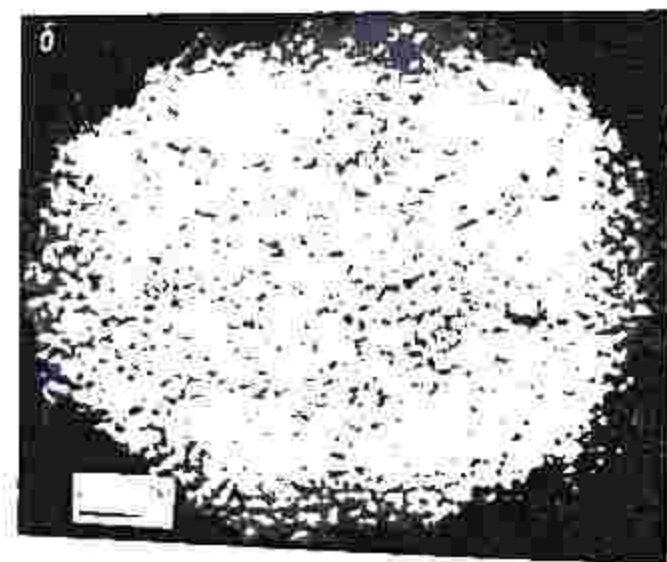
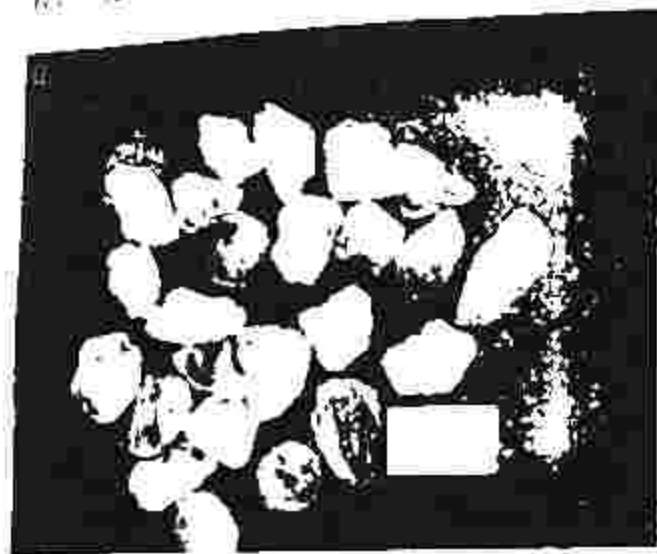


Рис. 19. Каркас-решетка (а) и заполнитель кварцевого щебня (б)

В соответствии с опытом и практическими наблюдениями по образованию рыхлых, хорошо отсортированных крупнозернистых массивов (щебень, каменные наброски) в качестве пористости  $m_{max}$  каркаса-решетки можно принимать значения:

Окатанные пески	0,35—0,40
Речные пески и гравий	0,40—0,50
Щебень	0,50—0,55
Грубообломочный материал	0,50—0,60

Если полученное процентное содержание мелких частиц  $V_{мелк}$  нанести на кривую механического состава грунта, то по-

следняя будет разбита на участок крупных частиц и участок мелких, отвечающих заданному распределению  $V_{мелк}$  (рис. 20).

В этом случае действующий диаметр зерна связан мелкими частицами и может быть определен как средний на участке мелких

$$D_0 = \frac{\sum Dq}{V_{мелк}} \quad (6.11)$$

где  $D$  — диаметр грунтовых частиц от самых мелких до граничного значения, определяемого процентным числом  $V_{мелк}$ ;  $q$  — процент отдельных фракций.

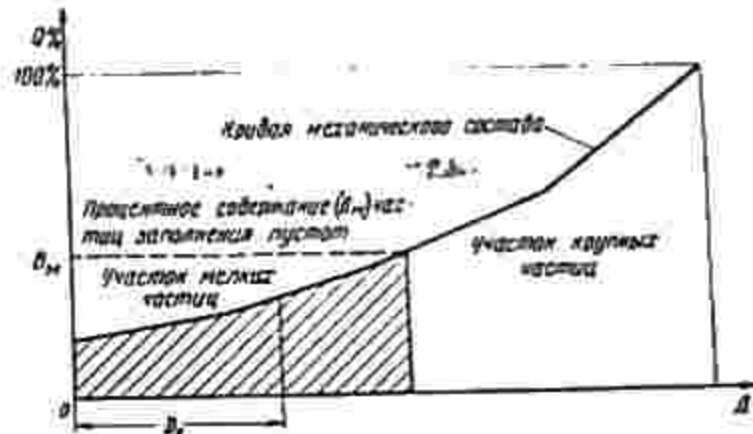


Рис. 20. Вторая схема формирования грунтового массива

Критерием для второй схемы будет служить соотношения, обратные выражениям (2—4.111), если значения  $D_{min}$  и  $D_{max}$  отнести к средним значениям диаметров на участках мелких и крупных частиц.

Рассмотренной схемой грунтового массива охватываются естественные неоднородные грунты — пески, гравий, щебень, а также искусственные образования из обломочного материала.

Приведенными соображениями не исчерпывается проблема неоднородности грунта и связанная с ней методика определения действующего диаметра зерна, поскольку рассмотрены только две предельные схемы формирования массива. Но в значительной мере высказанные суждения могут быть полезными при оценке объективных условий фильтрации в пористой среде. Намеченный подход физически правильно объясняет влияние неоднородности частиц на подпроводимость, так как в основу его положено реальное распределение фракций в грунтовом массиве.

Предлагаемый метод вносит ясность в понятие действующего диаметра зерна, устраняет ограниченность и произвольность, которые имеют место в определениях неоднородности грунта и эффективной крупности зерна, введенных в практику Газеном.

Метод является общим, одинаково пригодным для обеих кате-



горий грунта с равномерным распределением зерен (первая схема) и неравномерным, когда мелкие зерна составляют значительную часть образования (вторая схема).  
 Для иллюстрации рассмотренных зависимостей приводится пример определения действующего диаметра зерна для гравия и гальки, взятых в русловых обнажениях уральских рек Чусовой и Косью. Гранулометрические составы этих грунтов изображены кривыми на рис. 21.

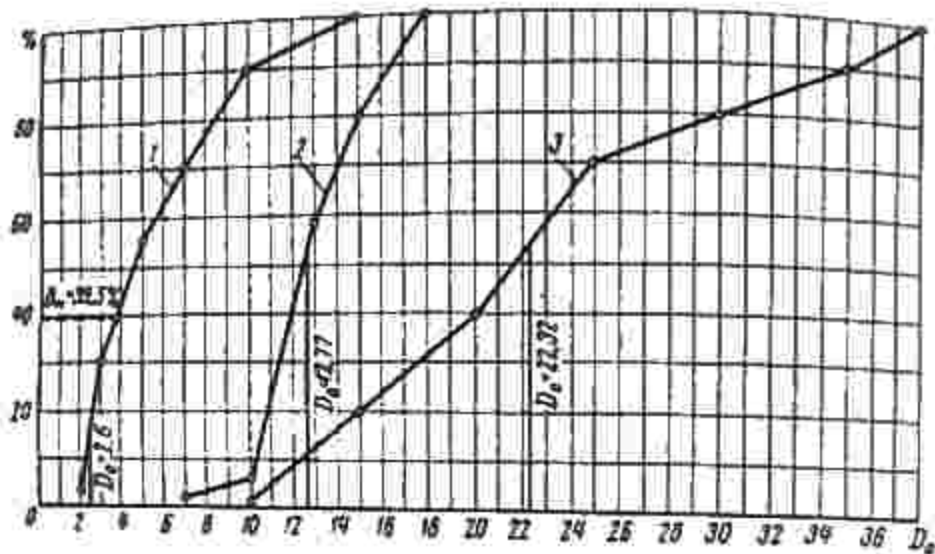


Рис. 21. Кривые механического состава крупнозернистых грунтов: 1 — гравий р. Чусовой; 2, 3 — галька р. Косья.

Пример определения действующего диаметра гравия и гальки. На рис. 21 кривая 1 представляет образец гравия аллювиального типа с естественной пористостью  $m = 0,35$ . Неоднородность состава этого образца  $k = 15 : 2 = 7,5$  велика для того, чтобы можно было отнести его к первой схеме формирования массива, когда отношение диаметров самых крупных и самых мелких зерен должно быть не более

$$k < \frac{1}{1,36 \cdot 0,35^{1,6}} = 3,95.$$

Поэтому действующий диаметр фильтрации этого гравия будет правильно определить по второй схеме в зависимости от процентного содержания мелких частиц.

$$V_{\text{мелк}} = \frac{100 \cdot 0,5 \cdot (1 - 0,35)}{1 - 0,35 \cdot 0,5} = 39,5\%.$$

Пористость скелета-решетки принята  $m_{\text{скел}} = 0,5$ . Граничное значение диаметра мелких частиц по кривой гранулометрического состава равно  $3,8 \cdot 10^{-3}$  м. Действующий диаметр

$$D_{0(1)} = \frac{1 \cdot 3 + 2,5 \cdot 27 + 3,4 \cdot 9,5^3}{39,5 \cdot 10^3} = 2,6 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Диаметры отдельных фракций взяты средними между смежными гранулометрическими пределами.

Кривые 2 и 3 рис. 21 характеризуют гальку из р. Косья. Коэффициенты неоднородности их, выраженные отношением диаметров самых крупных и самых мелких, равны 2,57 и 3,8, что меньше предельных коэффициентов неоднородности для шаровых частиц, соответствующих естественной пористости рассматриваемых галечников  $m_{(2)} = 0,33$  и  $m_{(3)} = 0,34$ .

$$k_{(2)} = \frac{1}{1,36 \cdot 0,33^{1,6}} = 4,32; \quad k_{(3)} = \frac{1}{1,36 \cdot 0,34^{1,6}} = 4,13.$$

Поэтому эти галечники можно отнести к первой схеме формирования массива, и действующие диаметры зерна определить по уравнению (1, III):

$$D_{0(2)} = \frac{3,5 \cdot 2 + 8,5 \cdot 4 + 11,5 \cdot 52 + 14 \cdot 22 + 16,5 \cdot 20}{100 \cdot 10^3} = 12,77 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

$$D_{0(3)} = \frac{5 \cdot 1 + 12,5 \cdot 19 + 17,5 \cdot 23 + 22,5 \cdot 30 + 27,5 \cdot 10 + 32,5 \cdot 10 + 36,5 \cdot 10}{100 \cdot 10^3} = 22,32 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Рассмотренные методы определения действующего диаметра зерна остаются справедливыми также для щебня и других типов грубообломочных пород. В зависимости от степени неоднородности механического состава могут применяться первая или вторая схемы формирования массива.

## 2. Коэффициент фильтрации несвязных грунтов

При гидравлических расчетах цементации и глинизации несвязных грунтов приходится иметь дело с коэффициентом фильтрации грунтов. Через этот коэффициент определяется коэффициент проницаемости среды

$$k_{\text{пр}} = k \frac{\mu}{\gamma} \quad (7, III)$$

где  $\mu$  — динамическая вязкость,  $\text{н} \cdot \text{сек}/\text{м}^2$ ;  
 $\gamma$  — удельный вес жидкости,  $\text{н}/\text{м}^3$ .

Теория подобия и размерностей устанавливает зависимость между всеми факторами, определяющими движение жидкости:

$$l = \lambda \frac{p}{\gamma} \frac{1}{l} u^2 \quad (8, III)$$

Применительно к фильтрации в несвязных грунтах за линейный размер потока  $l$  большинством исследователей (Г. М. Ломизе, Д. М. Минц и др.) принимается гидравлический радиус потока в пористой среде

$$r = \frac{m}{S} = \frac{m d_{\text{экив}}}{6 \alpha (1 - m)} \quad (9, III)$$

где  $d_{\text{экив}}$  — эквивалентный диаметр шара;  
 $m$  — объем пор (объемная пористость);  
 $S$  — поверхность фракций идеального грунта;  
 $\alpha$  — коэффициент формы ( $> 1$ ).



В качестве характерной скорости обычно принимается средняя скорость потока в поровых каналах

$$v = \frac{w}{m} \quad (10, III)$$

При подстановке  $l=r$  и  $u=0$  в уравнение (8, III), получается формула для расчета движения жидкости в пористой среде

$$l = \lambda \frac{\rho}{\gamma} \frac{6z(1-m)}{m^2 d_{max}} w^2 \quad (11, III)$$

Принимая коэффициент сопротивления  $\lambda$  (по Д. М. Минцу) равным

$$\lambda = \frac{5.1}{Re}$$

и число Рейнольдса

$$Re = \frac{v r \rho}{\eta}$$

находим

$$l = \frac{184.2 m^2 (1-m)^2}{\gamma m^2 d_{max}^2} w \quad (12, III)$$

Перепишав уравнение (12, III) в форме уравнения Дарси

$$w = h l = \frac{\gamma m^2 d_{max}^2}{184.2 m^2 (1-m)^2} l$$

получаем коэффициент фильтрации

$$k = \frac{\gamma m^2 d_{max}^2}{184.2 m^2 (1-m)^2} \quad (13, III)$$

Выражение (13, III) представляет собой современную унифицированную формулу для определения коэффициента фильтрации несвязных грунтов

Если в формуле (13, III) коэффициент фильтрации выразить через коэффициент проницаемости, то

$$k_{sp} = \frac{m^2 d_{max}^2}{184.2 (1-m)^2} \quad (14, III)$$

Д. М. Минц считает возможным определить эквивалентный диаметр шара  $n$  соотношением

$$\frac{1}{d_{eq}} = \sum \frac{p_i}{d_i} \quad (15, III)$$

где  $p_i$  — относительное весовое содержание различных фракций с диаметром зерен  $d_i$ .

Для однородных грунтов  $d_{max}$  равен диаметру приведенного шара  $D_0$ . Формулы (13 и 14, III) могут служить для определения коэффициентов фильтрации и проницаемости пористой среды при расчетах тампонажа несвязных грунтов. Решающим параметром, определяющим степень точности расчетов по этим формулам, является коэффициент формы зерен пористой среды. Правильно определить его можно только на основании опытных данных по фильтрации.

В табл. 2 приведены числовые значения коэффициентов формы для однородных песков. Данные заимствованы из опытов М. Маскета по мелким пескам, Кребера и Е. А. Замарина по средним пескам, В. М. Насберга, М. И. Тарлецкой и В. А. Казакова по крупным речным и морским пескам. Для всех песков по формуле

$$z = \sqrt{\frac{\gamma m^2 d_{max}^2}{184.2 k (1-m)^2}} \quad (16, III)$$

вычислены коэффициенты формы.

Таблица 2

№ грун-ты	Автор	$m$	$D_0, \mu$	$k, \text{м дин}$	$z$	Примечание
1	М. Маскет	0.40	$0.114 \cdot 10^{-2}$	$0.007 \cdot 10^{-2}$	1.17	Ср. 1.38
2	"	0.40	$0.134 \cdot 10^{-2}$	$0.003 \cdot 10^{-2}$	1.39	
3	"	0.40	$0.164 \cdot 10^{-2}$	$0.009 \cdot 10^{-2}$	1.65	
4	"	0.40	$0.189 \cdot 10^{-2}$	$0.020 \cdot 10^{-2}$	1.15	
5	"	0.40	$0.237 \cdot 10^{-2}$	$0.023 \cdot 10^{-2}$	1.32	
6	"	0.40	$0.314 \cdot 10^{-2}$	$0.033 \cdot 10^{-2}$	1.48	
7	"	0.40	$0.370 \cdot 10^{-2}$	$0.050 \cdot 10^{-2}$	1.53	Ср. 1.27
8	Кребер	0.392	$0.570 \cdot 10^{-2}$	$0.154 \cdot 10^{-2}$	1.18	
9	Замарин	0.410	$0.660 \cdot 10^{-2}$	$0.232 \cdot 10^{-2}$	1.36	
10	Кребер	0.392	$0.900 \cdot 10^{-2}$	$0.374 \cdot 10^{-2}$	1.20	
11	Замарин	0.410	$1.100 \cdot 10^{-2}$	$0.660 \cdot 10^{-2}$	1.23	
12	Кребер	0.392	$1.350 \cdot 10^{-2}$	$0.649 \cdot 10^{-2}$	1.38	
13	Насберг	0.365	$0.650 \cdot 10^{-2}$	$0.141 \cdot 10^{-2}$	1.23	Ср. 1.22
14	"	0.375	$1.470 \cdot 10^{-2}$	$1.000 \cdot 10^{-2}$	1.19	
15	"	0.367	$2.470 \cdot 10^{-2}$	$2.000 \cdot 10^{-2}$	1.24	
16	"	0.352	$1.400 \cdot 10^{-2}$	$5.607 \cdot 10^{-2}$	1.23	
17	"	0.365	$5.500 \cdot 10^{-2}$	$10.000 \cdot 10^{-2}$	1.23	

Из табл. 2 видно более высокая амплитуда колебаний коэффициентов формы для песков Маскета 1.15—1.65, более низкая — Замарина—Кребера 1.18—1.38 и незначительная — Насберга 1.19—1.24. Морские пески в опытах Насберга представлены хорошо окатанными зёрнами. В опытах Е. А. Замарина и Кребера взяты речные пески. Пески М. Маскета — малоокатанной формы, наверное, с большим содержанием остроугольных частиц (горные пески).

По всей вероятности, остроугольная форма фракций, характерная для щебеночных грунтов, резко увеличивает значения коэф-



фракций формы. Для проверки этого положения определены коэффициенты фильтрации и по формуле (16, III) вычислены коэффициенты формы для кварцевого песка и кварцевого щебня (рис. 22). Эти образцы получены дроблением кварца. Крупность песка и щебня изменялась от  $1,25$  до  $9,5 \cdot 10^{-2}$  м (по ситам). Расчеты коэффициентов формы и коэффициентов фильтрации производились по среднему объему каждой фракции.

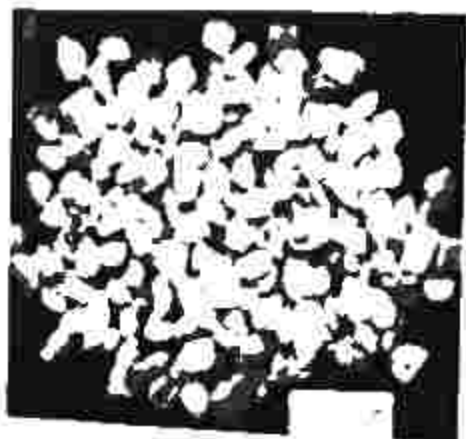
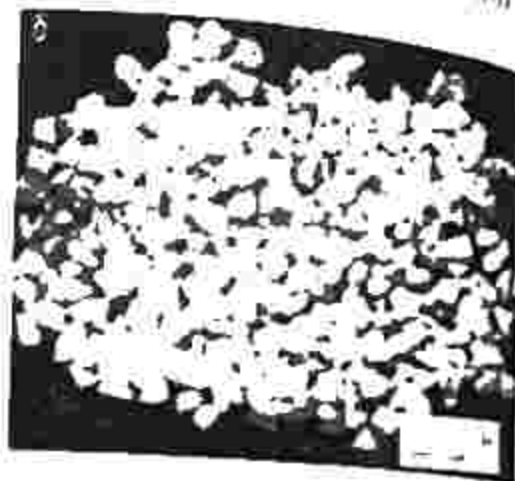
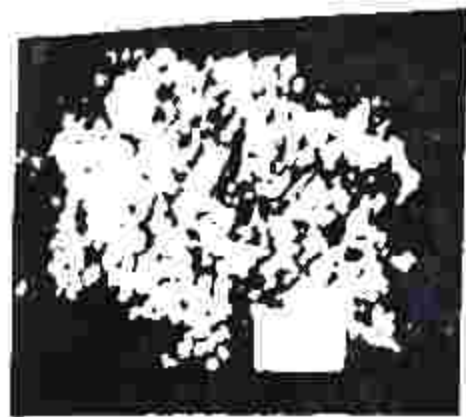


Рис. 21. Зернистый песок и щебень в опытах по определению коэффициентов формы  
 $\alpha_{10} = 1,25$  м,  $\alpha_{20} = 0,25$  м,  $\alpha_{30} = 0,15$  м,  $\alpha_{40} = 0,075$  м

крупности, определяемого точным взвешиванием 20 фракций каждого сорта<sup>1</sup>. Определение коэффициентов фильтрации производилось методом налива в цилиндрах диаметром  $0,10$  м и высотой  $0,30$  м ( $f=1$ ). Замеряя объем воды, профильтровавшейся в цилиндре за известное время, и отнеся объем к единице времени (секунде), получаем средний расход. Делением расхода на площадь поперечного сечения цилиндра устанавливается средний коэффициент фильтрации. Для устранения влияния подпора в боковой поверхности

<sup>1</sup> 10 гальки и 10 малых размеров. Определялся вес каждой фракции и вычислялся средний вес, объем и диаметр приведенного шара. Удельный вес кварцевого щебня  $26 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^3$ .

цилиндра на уровне верхнего основания фильтра сделан вырез с наружным лотком для сброса излишней воды сверх нормальной высоты фильтра (рис. 23). Данные определений и вычис-

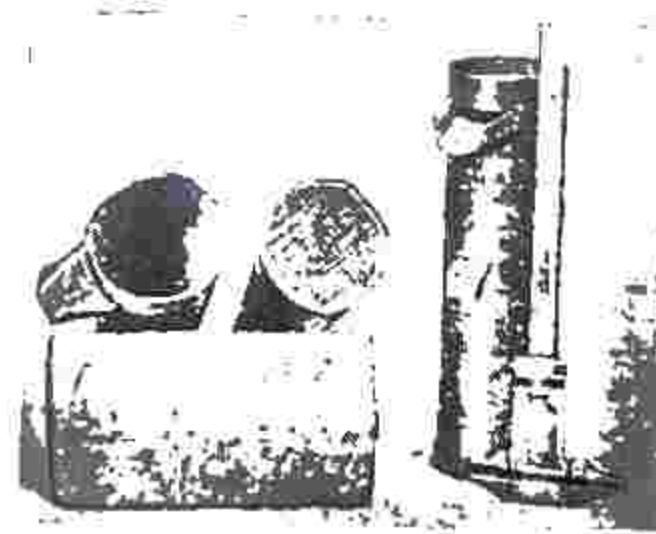


Рис. 23. Фильтрационный аппарат

лений фильтрации в кварцевых песках и щебне и коэффициентов форм представлены в табл. 3.

Таблица 3

№ группы	Отверстия сит $d_{\text{с}}$ , м	Расчетный $D_{\text{с}}$ , м	$\alpha$	$\beta$ , м/сек	$\beta_{\text{ср}}$ , м/сек	$\epsilon$
1	$(2-0,5) \cdot 10^{-2}$	$1,00 \cdot 10^{-2}$	0,388	$0,26 \cdot 10^{-2}$	$0,26 \cdot 10^{-2}$	1,58
2	$(5-2) \cdot 10^{-2}$	$3,15 \cdot 10^{-2}$	0,401	$1,63 \cdot 10^{-2}$	$1,47 \cdot 10^{-2}$	2,32
2			0,401	$1,35 \cdot 10^{-2}$		
2			0,404	$1,43 \cdot 10^{-2}$		
3	$(5-3) \cdot 10^{-2}$	$4,75 \cdot 10^{-2}$	0,422	$2,10 \cdot 10^{-2}$	$2,20 \cdot 10^{-2}$	3,09
3			0,422	$2,22 \cdot 10^{-2}$		
3			0,422	$2,27 \cdot 10^{-2}$		
4	$(7-5) \cdot 10^{-2}$	$6,20 \cdot 10^{-2}$	0,396	$2,81 \cdot 10^{-2}$	$2,64 \cdot 10^{-2}$	3,20
4			0,396	$2,46 \cdot 10^{-2}$		
4			0,411	$3,06 \cdot 10^{-2}$		
5	$(10-6) \cdot 10^{-2}$	$7,00 \cdot 10^{-2}$	0,411	$3,13 \cdot 10^{-2}$	$3,09 \cdot 10^{-2}$	3,65
5			0,411	$3,04 \cdot 10^{-2}$		
5			0,411	$3,04 \cdot 10^{-2}$		
6	$(10-7) \cdot 10^{-2}$	$8,00 \cdot 10^{-2}$	0,380	$3,50 \cdot 10^{-2}$	$3,33 \cdot 10^{-2}$	3,37
6			0,380	$3,16 \cdot 10^{-2}$		
6			0,424	$5,69 \cdot 10^{-2}$		
7	$(12-7) \cdot 10^{-2}$	$9,20 \cdot 10^{-2}$	0,424	$4,82 \cdot 10^{-2}$	$5,26 \cdot 10^{-2}$	3,90
7			0,424	$4,82 \cdot 10^{-2}$		

Примечание. Сита  $(0,5 \times 12) \cdot 10^{-2}$  м с сетчатой структурой



Если морские, речные и горные пески (табл. 2) сохраняют более или менее устойчивые значения  $\alpha$ , незначительно отклоняющиеся от единицы (1,22 и 1,38), то кварцевые дробленые пески и щебень характеризуются чрезвычайно высокой амплитудой колебаний коэффициентов формы 1,58—3,9. Вместе с этим наблюдается возрастание численной величины коэффициентов  $\alpha$  с увеличением диаметров фракций. Если в более тонких песках опытов М. Маскета тенденция к увеличению  $\alpha$  только намечалась, то в

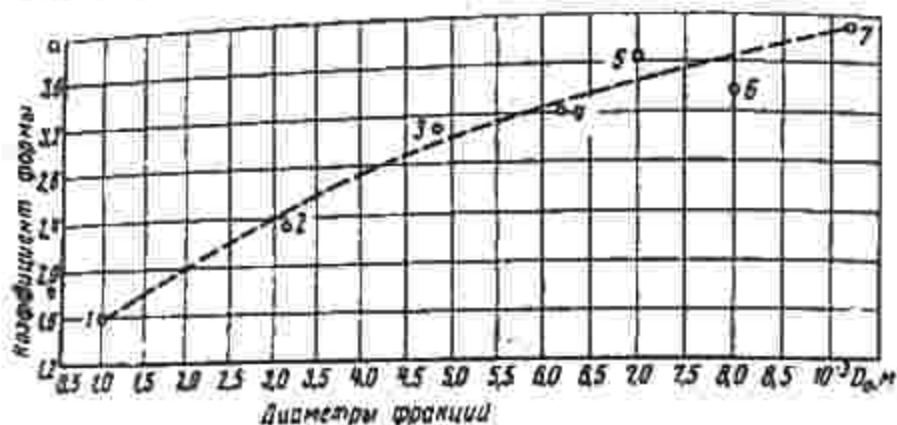


Рис. 21 Коэффициенты формы кварцевых песков и щебня

крупнозернистом материале кварца она отчетливо подчеркнута. Коэффициенты формы растут с увеличением размеров фракций. Причина таких изменений заключается в следующем.

Вследствие полигональности форм фракций и преобладания в них остроугольных и призматических частиц с плоскими гранями сечения пор заклиниваются или принимают форму узких щелей. Это отчетливо видно из рис. 22. В результате живые сечения пор уменьшаются по величине и растут медленнее диаметра фракций. С другой стороны, с увеличением полигональности фракций возрастает величина боковой поверхности зерен, что обуславливает уменьшение гидравлического радиуса пор. И, наконец, при увеличении размеров фракций и неправильности их форм удлиняются траектории струй. Все вместе взятое создает отставание коэффициента фильтрации от диаметра фракций, что и определяет увеличение коэффициента формы при возрастании диаметров фракций щебенистых грунтов (до известного предела, рис. 24).

Повсеместным распространением в природе пользуется группа неоднородных грунтов, состоящих из фракций разных диаметров.

В табл. 4 вычислены коэффициенты формы неоднородных грунтов, данные по которым заимствованы из опытов Е. А. Замарина и В. С. Истоминой.

Не для всех грунтов опытов В. С. Истоминой в ее монографии указаны коэффициенты фильтрации (грунты 9, 10, 12—17). Но зато приводятся данные о средних диаметрах пор. Поэтому

Таблица 4

№ грун- тов	Автор	m	$d_{10}, \mu$	$\lambda$	$k, \mu/cm$	$d_{10}, \mu$	$\alpha$
1	Е. А. Замарин	0,476	$0,074 \cdot 10^{-2}$	3,70	$0,0135 \cdot 10^{-2}$	$0,111 \cdot 10^{-2}$	1,21
2	»	0,423	$0,074 \cdot 10^{-2}$	3,47	$0,0062 \cdot 10^{-2}$	$0,075 \cdot 10^{-2}$	1,39
3	»	0,422	$0,076 \cdot 10^{-2}$	3,33	$0,0150 \cdot 10^{-2}$	$0,123 \cdot 10^{-2}$	0,97
4	»	0,423	$0,074 \cdot 10^{-2}$	3,17	$0,0078 \cdot 10^{-2}$	$0,109 \cdot 10^{-2}$	1,21
5	»	0,458	$0,101 \cdot 10^{-2}$	2,95	$0,0120 \cdot 10^{-2}$	$0,144 \cdot 10^{-2}$	1,25
6	»	0,462	$0,214 \cdot 10^{-2}$	1,72	$0,0250 \cdot 10^{-2}$	$0,163 \cdot 10^{-2}$	1,22
7	»	0,489	$0,256 \cdot 10^{-2}$	1,39	$0,0382 \cdot 10^{-2}$	$0,142 \cdot 10^{-2}$	0,98
8	»	0,437	$0,265 \cdot 10^{-2}$	1,34	$0,0777 \cdot 10^{-2}$	$0,315 \cdot 10^{-2}$	0,96
9	В. С. Истомина	0,375	$0,055 \cdot 10^{-2}$	3,63	$0,0034 \cdot 10^{-2}$	$0,087 \cdot 10^{-2}$	1,12
10	То же (Д. п. 10)	0,433	$0,056 \cdot 10^{-2}$	2,32	$0,0044 \cdot 10^{-2}$	$0,092 \cdot 10^{-2}$	1,41
11	» (Д. п. 1)	0,453	$0,070 \cdot 10^{-2}$	3,20	$0,0053 \cdot 10^{-2}$	$0,038 \cdot 10^{-2}$	1,36
12	» (Д. п. 5)	0,425	$0,077 \cdot 10^{-2}$	2,45	$0,0050 \cdot 10^{-2}$	$0,107 \cdot 10^{-2}$	1,50
13	» (Д. п. 9)	0,400	$0,060 \cdot 10^{-2}$	3,33	$0,0055 \cdot 10^{-2}$	$0,128 \cdot 10^{-2}$	1,47
14	» (П. п. 4)	0,290	$0,064 \cdot 10^{-2}$	9,70	$0,0061 \cdot 10^{-2}$	$0,114 \cdot 10^{-2}$	0,76
15	» (П. п. 5)	0,360	$0,094 \cdot 10^{-2}$	4,37	$0,0188 \cdot 10^{-2}$	$0,214 \cdot 10^{-2}$	1,07
16	» (П. п. 2)	0,370	$0,120 \cdot 10^{-2}$	3,60	$0,0293 \cdot 10^{-2}$	$0,202 \cdot 10^{-2}$	0,78
17	» (Д. п. 7)	0,315	$0,070 \cdot 10^{-2}$	6,71	$0,0400 \cdot 10^{-2}$	$0,178 \cdot 10^{-2}$	0,47
18	» (Гр. г. 23)	0,277	$0,240 \cdot 10^{-2}$	47,90	$0,0500 \cdot 10^{-2}$	$0,590 \cdot 10^{-2}$	1,08
19	» (Гр. с. 7)	0,300	$0,270 \cdot 10^{-2}$	26,0	$0,0710 \cdot 10^{-2}$	$0,920 \cdot 10^{-2}$	1,76
20	» (Гр. г. 29)	0,300	$1,000 \cdot 10^{-2}$	38,0	$0,970 \cdot 10^{-2}$	$1,250 \cdot 10^{-2}$	0,62
21	В. С. Истомина						
22	» (Ск. 1)	0,296	$2,150 \cdot 10^{-2}$	7,67	$1,600 \cdot 10^{-2}$	$6,710 \cdot 10^{-2}$	2,45
	» (Ск. 2)	0,319	$3,800 \cdot 10^{-2}$	10,25	$4,300 \cdot 10^{-2}$	$10,900 \cdot 10^{-2}$	2,82

Примечание: Коэффициент неоднородности  $\lambda$  для грунтов из опытов Е. А. Замарина соответствует отношению  $d_{10}/d_{15}$ , а В. С. Истоминой  $d_{45}/d_{10}$ , где  $d_{10}$  и  $d_{45}$  — пятидесяти- и шестидесятипроцентные ординаты гравилометрических кривых.

представилась возможность по формулам В. С. Истоминой восстановить средние значения коэффициентов фильтрации для всех грунтов.

Для грунтов табл. 4 расчетный диаметр фракций определен по эквивалентной формуле (15, III). В нескольких случаях отмечается занижение коэффициентов формы ( $\alpha < 1$ ), что противоречит смыслу формулы (9, III). Некоторое влияние на заниженные значения коэффициентов  $\alpha$  могли оказать производственные неточности, связанные с определением параметра фильтрации (пористости, гидравлических градиентов, скоростей фильтрации). Но в основном, заниженные значения коэффициентов формы — результат неточностей по определению самого эквивалентного диаметра фракций неоднородных грунтов.

Надо признать, что принцип эквивалентности, основанный на учете боковой поверхности всех фракций, входящих в механический состав грунта данного объема, соответствует принципу осреднения гидравлического радиуса, положенному в основу формулы (9, III). Но такое осреднение не всегда правильно отражает действительную величину пор. Там, где крупность неоднородных



фракций настолько велика, что самые мелкие из них не могут заполнить поры между крупными, а вместе с ними образуют единую сеть пор, метод осреднения дает хорошие результаты. Но там, где мелкие частицы заполняют поры между крупными, метод простого осреднения не может дать верных решений. В этом случае действующий диаметр зерна, определяющий фильтрацию, будет связан не всеми размерами частиц, входящих в данный объем грунта, а только некоторыми из них, формирующими поры. Для этой схемы действующий диаметр зерна определяется по кривой распределения (6, III).

Если и для неоднородных грунтов ограничиться осредненными значениями коэффициентов формы, то последние можно получить из табл. 4 путем исключения значений  $\alpha$  меньше единицы. Осредненные значения коэффициентов  $\alpha$  составляют для неоднородных песков 1,30 и гравелисто-галечниковых грунтов 1,85. В заключение можно отметить, что чем ближе форма зерна к шаровой, тем точнее определение коэффициента фильтрации по формулам (13 и 14, III) и тем устойчивее значения коэффициента формы.

Для полигональной формы фракций, содержащих остроугольные и призматические частицы, коэффициенты формы увеличиваются с возрастанием диаметров фракций.

Действующие диаметры неоднородных грунтов рекомендуется определять по кривой распределения

На основании табличного анализа можно рекомендовать следующие осредненные значения коэффициентов формы для рассмотренных категорий несвязных грунтов:

Морские окатанные пески	1,22
Речные окатанные пески	1,27
Неоднородные речные пески	1,30
Горные пески с большим содержанием остроугольных частиц	1,39
Неоднородные гравелисто-галечные грунты	1,85
Дробленый кварцевый песок (1-3,15) $10^{-3}$ м	1,95
Дробленый кварцевый щебень	3,44

Отмеченными формулами и установленными значениями характерных коэффициентов можно с достаточной степенью точности определять коэффициенты фильтрации несвязных грунтов, предназначенных для гаммопирования.

### 3. Диаметры пор

Одним из параметров, определяющих проникновение структурных жидкостей в пористую среду несвязных грунтов, является диаметр пор. Исследователи давно стремились изучить внутреннюю структуру каналов-пор проницаемой среды. Первой теоретической работой, характеризующей абсолютные размеры пор несвязных грунтов, составленных из однородных шаров, является построение Слехтера. Позднее Н. Н. Павловский дал модель фильтрационного потока в однородном массиве несвязных грун-

тов. В этой модели главные фильтрационные ходы увязаны с водой поперечных каналов-пор и установлена их особая роль в распределении давления внутри всего массива.

С тех пор исследователи, принимая грунтовой массив состоящим из отдельных частиц и поровых каналов круглого сечения, дали ряд формул, определяющих абсолютные размеры этих каналов.

Б. Ф. Караулов, производя подбор фильтров дренажей гидротехнических сооружений, средние размеры пор определяет по высоте капиллярного поднятия воды в грунте.

А. Н. Патрашев и С. М. Кузнев определяют диаметры фильтрационных ходов в грунтах через коэффициент фильтрации грунта по формуле ламинарного движения жидкости в цилиндрической трубе

$$d_0 = \sqrt{\frac{32 \cdot k}{m \cdot g}} \quad (17, III)$$

где  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости;

$m$  — объемная пористость.

В. С. Истоминна ставит задачей получить абсолютные размеры поровых каналов, исходя из переменного сечения фильтрационного хода, периодически сужающегося и расширяющегося

$$d_0 = \sqrt{\frac{96 \cdot k}{g m'}} \quad (18, III)$$

Для грунтов с максимальной молекулярной влагоемкостью  $w_n \leq 3\%$  действительная пористость определяется по формуле Л. С. Лейбензона.

$$m' = m \left( 1 - 0,114 \frac{1 - m}{m} \right) \quad (19, III)$$

В обеих формулах диаметр пор определяется в функции одного коэффициента фильтрации пористой среды. В практической деятельности, связанной с вопросами инъектирования грунтов, необходимо иметь зависимость диаметра поры и от размеров зерна. В нашу задачу входит получение такой зависимости.

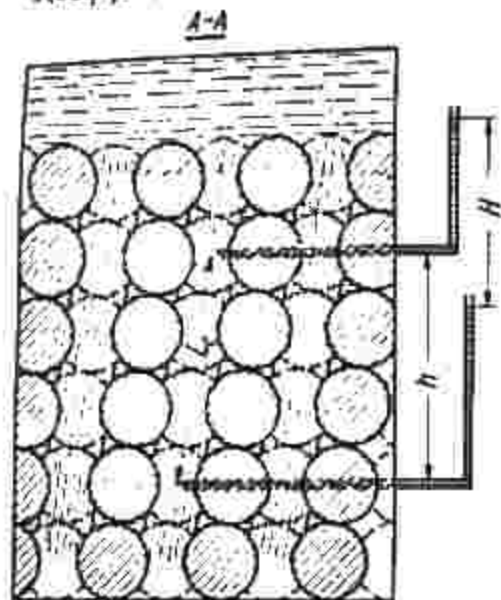
При рассмотрении движения жидкости в массиве пористой среды, образованной фракциями неправильных геометрических форм, приходится иметь дело с осредненными параметрами движения. Оператором осредненного движения служит приведенный массив пористой среды, представленный единой формой и размером твердых фракций и единой системой расположения их. Форма фракций обычно принимается шаровой. Единый размер их выражается через диаметр равновеликого шара. А единство системы расположения фракций обусловлено постоянной величиной объемной пористости. В таком массиве находится система взаимно связанных идентичных каналов-пор одинаковой длины (рис. 25).



Формулы (17 и 18, III) соответствуют закону, определяющему движение жидкости в пористой среде и вытекающему из теории подобия и размерностей (8, III):

$$l = \lambda \frac{\rho}{\gamma} \frac{1}{l} u^2.$$

Коэффициент сопротивления  $\lambda$  в формуле Патрашева—Кулиева (17, III) принят равным  $\lambda_1 = \frac{32}{Re}$  и соответствует теорети-



ческому значению этого коэффициента для цилиндрической трубы.

В формуле (18, III) этот коэффициент для трубы с переменным сечением равен

$$\lambda_2 = \frac{96}{Re}.$$

Оба значения отвечают линейному параметру  $l$ , в качестве которого взят диаметр фильтрационной трубки. В пересчете на гидравлический радиус они составляют

$$\lambda = \frac{2}{Re} \text{ и } \lambda = \frac{6}{Re}.$$

Проф. Д. М. Минц в качестве универсальной величины коэффициента сопротивления  $\lambda$  для несвязных грунтов различной геометрической структуры принимает значение

$$\lambda = \frac{5,1}{Re}$$

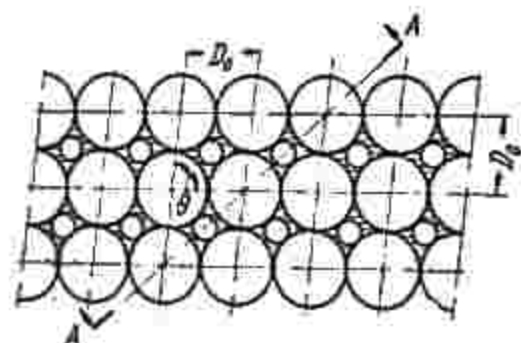


Рис. 25. Приведенный массив фильтрации

Коэффициент сопротивления  $\lambda_1 = \frac{2}{Re}$ , принятый Патрашевым—Кулиевым для фильтрационного хода, является явно заниженным. Коэффициент сопротивления в формуле (18, III) фактически получается больше нечисленного  $\frac{6}{Re}$ , так как в этой формуле участвует действительная пористость  $m'$ , в среднем равная 0,85  $m$  и повышающая величину коэффициента сопротивления до  $\lambda_2 = \frac{7,2}{Re}$ . Среднее значение  $\lambda = \frac{4,6}{Re}$  очень близко к данным

проф. Минца. На этом основании для приведенного массива пористой среды целесообразно принять коэффициент сопротивления

$$\lambda = \frac{5,1}{Re},$$

отвечающий линейному параметру, выраженному через гидравлический радиус, и

$$\lambda = \frac{81,6}{Re} \quad (20, III)$$

для параметра, представленного средним диаметром фильтрационного хода. Тогда осредненное ламинарное движение жидкости в порах можно выразить уравнением

$$v_0 = \frac{g l_0 d_0^2}{81,6 \nu} \quad (21, III)$$

Скорость  $v_0$  в порах можно заменить через расход жидкости и площадь живого сечения поры

$$v_0 = \frac{4 q_0}{\pi d_0^2}.$$

Расход  $q_0$  можно выразить через скорость фильтрации  $w$ , если рассматривать площадь всего фильтрующего пласта  $F$ :

$$v_0 = \frac{4 w F}{\pi d_0^2}.$$

Из геометрических представлений (рис. 25) видно, что площадь части пласта, ограниченной каждым отдельным каналом пор, равна

$$F = \sin \theta D_0^2,$$

где  $D_0$  — диаметр шаровых частиц;  
 $\theta$  — угол конфигурации частиц.

Значения углов  $\theta$  соответственно самому свободному и самому тесному расположению шаровых частиц изменяются от 90 до 60° и являются мерой плотности залегания частиц. Угол  $\theta$  связан с объемной пористостью массива известной геометрической формулой Слихтера

$$m = 1 - \frac{\pi}{6 (1 - \cos \theta) \sqrt{1 + 2 \cos \theta}}$$

из которой видно, что в массиве однородных шаров пористость не зависит от их размера, а зависит только от угла конфигурации шаров. Поэтому угол  $\theta$  является функцией одной пористости  $m$ . Площадь фильтрующего пласта пропорциональна квадра-



ту диаметра образующей фракции и некоторой функции объемной пористости

$$F = f(m) D_0^2$$

Решение этой функции для разных углов  $\theta$  и соответствующих им значений пористости  $m$  приводит к показательному уравнению вида

$$F = 1,25m^{0,3}D_0^2$$

Средняя скорость в порах

$$v_0 = \frac{1,62m^{0,3}D_0^2}{d_0^2} \quad (22, III)$$

Так как фильтрационные струи в поровых каналах проходят путь между отдельными шарами, огибая их, то длина траекторий струй зависит от степени плотности залегания шаров. По Сликтеру, длина этой траектории равна

$$L = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \left( 1,195 - \frac{0,39\theta}{\pi} \right) h,$$

где  $h$  — нормальная высота массива, измеряемая между верхним и нижним основаниями водопроницающего пласта.

В пересчете на пористость получается уравнение

$$L = \frac{0,75}{m^{0,40}} h.$$

Величина  $\frac{0,75}{m^{0,4}}$  указывает, что в это число раз должен быть уменьшен гидравлический уклон  $I$ , измеряемый пьезометрами по нормальной высоте массива, т. е. должно быть

$$I_0 = \frac{m^{0,40}}{0,75} I. \quad (23, III)$$

Подстановка  $v_0$  и  $I_0$  в уравнение (21, III) приводит к зависимости, позволяющей по заданным значениям действующего диаметра зерна  $D_0$  и коэффициента фильтрации  $k$  определить средний диаметр пор проницаемой среды

$$d_0 = \sqrt{\frac{98vD_0^2k}{gm^{0,1}}} \quad (24, III)$$

Это — диаметр, близко характеризующий абсолютные размеры пор несвязных грунтов. Индивидуальные особенности, обусловленные неправильностью геометрической структуры грунтовых фракций, в каждом отдельном случае корректируются соответствующими значениями коэффициентов фильтрации, присущими той или иной категории грунта.

В табл. 5 представлен фактический материал по фильтрации в однородных песчаных грунтах, использованный ранее при составлении табл. 2. Для всех этих песков по формуле (24, III) вычислены средние диаметры пор  $d_0$ .

Таблица 5

№ групп	Автор	$m$	$D_0, \mu$	$k, \mu^2/сек$	$d_0, \mu$	$mD_0, \mu$	$\frac{d_0}{mD_0}$
1	Маскет	0,40	$0,114 \cdot 10^{-2}$	$0,007 \cdot 10^{-2}$	$0,053 \cdot 10^{-2}$	$0,016 \cdot 10^{-2}$	1,26
2	"	0,40	$0,131 \cdot 10^{-2}$	$0,001 \cdot 10^{-2}$	$0,059 \cdot 10^{-2}$	$0,05 \cdot 10^{-2}$	1,26
3	"	0,40	$0,161 \cdot 10^{-2}$	$0,007 \cdot 10^{-2}$	$0,078 \cdot 10^{-2}$	$0,067 \cdot 10^{-2}$	1,16
4	"	0,40	$0,189 \cdot 10^{-2}$	$0,020 \cdot 10^{-2}$	$0,101 \cdot 10^{-2}$	$0,076 \cdot 10^{-2}$	1,32
5	"	0,40	$0,237 \cdot 10^{-2}$	$0,023 \cdot 10^{-2}$	$0,118 \cdot 10^{-2}$	$0,095 \cdot 10^{-2}$	1,24
6	"	0,40	$0,314 \cdot 10^{-2}$	$0,033 \cdot 10^{-2}$	$0,146 \cdot 10^{-2}$	$0,126 \cdot 10^{-2}$	1,16
7	"	0,40	$0,390 \cdot 10^{-2}$	$0,050 \cdot 10^{-2}$	$0,182 \cdot 10^{-2}$	$0,156 \cdot 10^{-2}$	1,17
8	Кребер	0,392	$0,570 \cdot 10^{-2}$	$0,154 \cdot 10^{-2}$	$0,293 \cdot 10^{-2}$	$0,224 \cdot 10^{-2}$	1,30
9	Насберг	0,365	$0,650 \cdot 10^{-2}$	$0,141 \cdot 10^{-2}$	$0,303 \cdot 10^{-2}$	$0,237 \cdot 10^{-2}$	1,28
10	Замарин	0,430	$0,660 \cdot 10^{-2}$	$0,232 \cdot 10^{-2}$	$0,343 \cdot 10^{-2}$	$0,235 \cdot 10^{-2}$	1,21
11	Кребер	0,392	$0,900 \cdot 10^{-2}$	$0,374 \cdot 10^{-2}$	$0,455 \cdot 10^{-2}$	$0,332 \cdot 10^{-2}$	1,39
12	Замарин	0,410	$1,100 \cdot 10^{-2}$	$0,660 \cdot 10^{-2}$	$0,560 \cdot 10^{-2}$	$0,450 \cdot 10^{-2}$	1,29
13	Кребер	0,392	$1,30 \cdot 10^{-2}$	$0,649 \cdot 10^{-2}$	$0,640 \cdot 10^{-2}$	$0,529 \cdot 10^{-2}$	1,22
14	Насберг	0,395	$1,450 \cdot 10^{-2}$	$1,000 \cdot 10^{-2}$	$0,740 \cdot 10^{-2}$	$0,565 \cdot 10^{-2}$	1,31
15	То же	0,367	$2,450 \cdot 10^{-2}$	$2,000 \cdot 10^{-2}$	$1,145 \cdot 10^{-2}$	$0,900 \cdot 10^{-2}$	1,28
16	"	0,352	$4,400 \cdot 10^{-2}$	$5,600 \cdot 10^{-2}$	$1,980 \cdot 10^{-2}$	$1,540 \cdot 10^{-2}$	1,29
17	"	0,365	$5,500 \cdot 10^{-2}$	$10,000 \cdot 10^{-2}$	$2,580 \cdot 10^{-2}$	$2,000 \cdot 10^{-2}$	1,29

Располагая диаметром пор, крупностью и пористостью материала, можно составить уравнение, выражающее зависимость  $d_0$  от пористости  $m$  и размеров фракций  $D_0$ . Исходя из обычных геометрических представлений, такую зависимость удобно представить через параметр  $mD_0$ .

На рис. 26 по данным табл. 5 построен график этой зависимости, показывающий замечательную согласованность одной прямой для всех крупностей песка и позволяющий для всех однородных песков выразить ее одним уравнением

$$d_0 = 1,25mD_0. \quad (25, III)$$

Анализ табличных данных отмечает весьма небольшие амплитуды колебаний угловых коэффициентов прямой, выражающей линейную зависимость диаметра поры от параметра  $mD_0$ . Наибольшая величина этих отклонений не превышает  $\pm 7\%$  от среднего значения 1,25. Осредненное уравнение (25, III) достаточно точно определяет средний диаметр поры для всей песчаной группы несвязных грунтов.

В уравнение (24, III) можно подставить коэффициент фильтрации  $k$  для идеального грунта из шаровых частиц. Этот коэффициент определяется уравнением (13, III) при коэффициенте формы шара  $\alpha = 1$ .



После подстановки и соответствующих сокращений получается

$$d_0 = 0,855 D_0 \frac{m^{0,725}}{(1-m)^{0,5}} \quad (26, III)$$

Это — средний диаметр порового канала в идеальном грунте из шаров — идеальная пора.

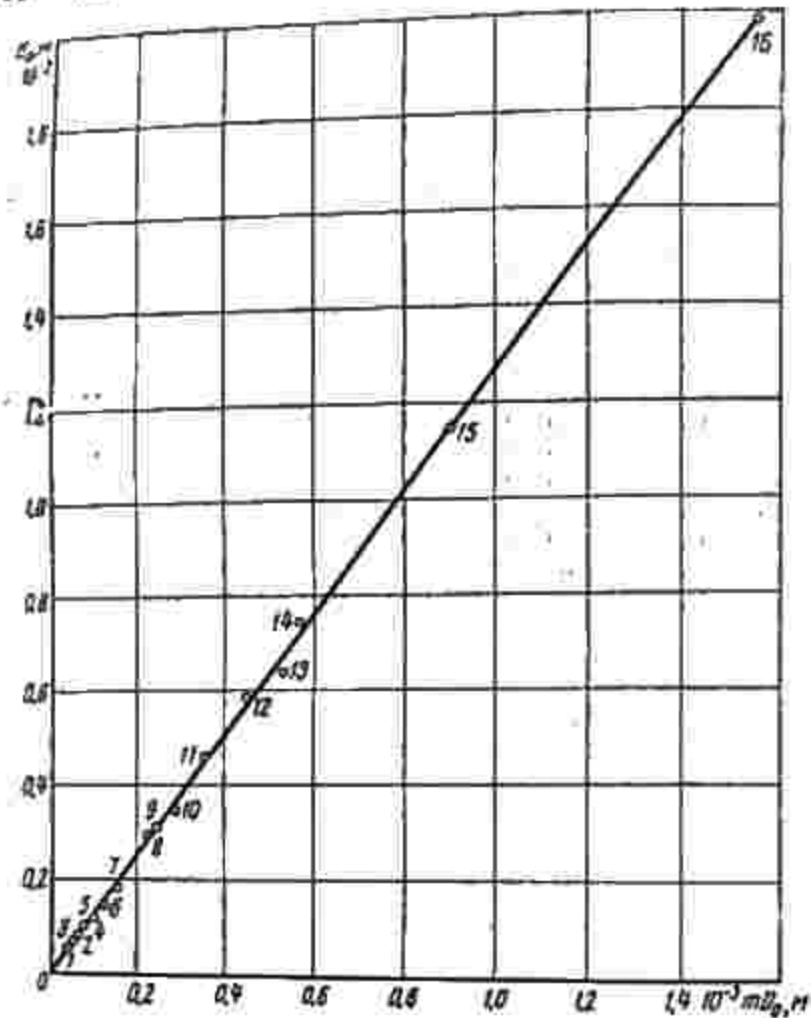


Рис. 26. Средние диаметры пор однородных песков

В табл. 6 приводится параллельное сопоставление диаметров идеальных и реальных пор для всех крупностей рассмотренных песков и вычислены их отношения  $\frac{d_0}{d}$ .

Во всех случаях диаметр идеальной поры больше диаметра поры песчаных грунтов. Наиболее устойчивые значения диаметров реальных пор имеют пески из опытов Насберга — крупные речные и морские. Эти пески более окатаны. Средний диаметр их пор на 10% меньше диаметра идеальной поры. Наибольшие отклонения от идеальной поры относятся к пескам опытов Маскета

Таблица 6

№ грун-тов	Автор	m	$D_0, \text{ м}$	$d, \text{ м}$	$d_0, \text{ м}$	$\frac{d_0}{d}$
1	Маскет	0,40	$0,114 \cdot 10^{-2}$	$0,058 \cdot 10^{-2}$	$0,055 \cdot 10^{-2}$	1,12
2	>	0,40	$0,139 \cdot 10^{-2}$	$0,069 \cdot 10^{-2}$	$0,079 \cdot 10^{-2}$	1,14
3	>	0,40	$0,168 \cdot 10^{-2}$	$0,078 \cdot 10^{-2}$	$0,076 \cdot 10^{-2}$	1,23
4	>	0,40	$0,189 \cdot 10^{-2}$	$0,101 \cdot 10^{-2}$	$0,109 \cdot 10^{-2}$	1,06
5	>	0,40	$0,237 \cdot 10^{-2}$	$0,118 \cdot 10^{-2}$	$0,135 \cdot 10^{-2}$	1,14
6	>	0,40	$0,314 \cdot 10^{-2}$	$0,146 \cdot 10^{-2}$	$0,178 \cdot 10^{-2}$	1,22
7	>	0,40	$0,390 \cdot 10^{-2}$	$0,182 \cdot 10^{-2}$	$0,222 \cdot 10^{-2}$	1,22
8	Кребер	0,392	$0,570 \cdot 10^{-2}$	$0,293 \cdot 10^{-2}$	$0,315 \cdot 10^{-2}$	1,03
9	Насберг	0,365	$0,650 \cdot 10^{-2}$	$0,303 \cdot 10^{-2}$	$0,335 \cdot 10^{-2}$	1,10
10	Замарин	0,430	$0,660 \cdot 10^{-2}$	$0,343 \cdot 10^{-2}$	$0,405 \cdot 10^{-2}$	1,18
11	Кребер	0,392	$0,900 \cdot 10^{-2}$	$0,455 \cdot 10^{-2}$	$0,500 \cdot 10^{-2}$	1,10
12	Замарин	0,410	$1,100 \cdot 10^{-2}$	$0,580 \cdot 10^{-2}$	$0,640 \cdot 10^{-2}$	1,10
13	Кребер	0,392	$1,370 \cdot 10^{-2}$	$0,640 \cdot 10^{-2}$	$0,770 \cdot 10^{-2}$	1,17
14	Насберг	0,395	$1,430 \cdot 10^{-2}$	$0,740 \cdot 10^{-2}$	$0,795 \cdot 10^{-2}$	1,04
15	>	0,367	$2,450 \cdot 10^{-2}$	$1,145 \cdot 10^{-2}$	$1,270 \cdot 10^{-2}$	1,11
16	>	0,352	$4,400 \cdot 10^{-2}$	$1,90 \cdot 10^{-2}$	$2,200 \cdot 10^{-2}$	1,11
17	>	0,365	$5,500 \cdot 10^{-2}$	$2,580 \cdot 10^{-2}$	$2,850 \cdot 10^{-2}$	1,10

(до 23%). Сказывается наличие в этих песках остроугольных частиц. Но и в этих песках средний диаметр пор только на 16% меньше диаметра идеальной поры. Среднее отношение диаметров идеальной и реальной пор для всей песчаной группы составляет 1,13. Таким образом, хорошо отсортированные песчаные грунты с точностью до 13% моделируют массив однородных шаров.

В табл. 7 представлен материал (диаметры пор неоднородных грунтов) по фильтрации в неоднородных песчаных, гравелистых и гравелисто-галечниковых грунтах, ранее использованный при составлении табл. 4.

Для всех неоднородных грунтов вычислены также средние диаметры пор (21, III) и определены отношения  $\frac{d_0}{mD_0}$ . Действующие диаметры грунтов вычислены по формулам (5 и 6, III), относящимся ко второй схеме формирования грунтового массива. Пористость каркаса решетки  $m_{max}$  принята для песков опытов Замарина 0,5; для мелких песков опытов Истоминой 0,45 и гравелисто-галечниковых грунтов, характеризующихся по опытам Истоминой очень большой плотностью, — 0,40.

Для каждой категории рассмотренных грунтов средние значения угловых коэффициентов  $\frac{d_0}{mD_0}$  различны: для песков Замарина этот коэффициент составляет 1,22; для песков Истоминой 1,36 и для гравелисто-галечниковых грунтов 1,16. Но в целом для всей неоднородной песчано-гравелисто-галечниковой формации среднее значение углового коэффициента получается равным 1,26.



Таблица 7

№ п/п	Дифф.	$n$	$K_{филт}$	$D_0, \mu$	$k, \mu/\text{сек}$	$d_0, \mu$	$mD_0, \mu$	$\frac{d_0}{mD_0}$
1	Дамбрег	0,478	34,4	$0,118 \cdot 10^{-2}$	$0,0135 \cdot 10^{-2}$	$0,072 \cdot 10^{-2}$	$0,056 \cdot 10^{-2}$	1,28
2	"	0,423	36,7	$0,107 \cdot 10^{-2}$	$0,0062 \cdot 10^{-2}$	$0,057 \cdot 10^{-2}$	$0,015 \cdot 10^{-2}$	1,26
3	"	0,422	36,9	$0,136 \cdot 10^{-2}$	$0,0150 \cdot 10^{-2}$	$0,050 \cdot 10^{-2}$	$0,057 \cdot 10^{-2}$	1,40
4	"	0,423	36,6	$0,154 \cdot 10^{-2}$	$0,0078 \cdot 10^{-2}$	$0,071 \cdot 10^{-2}$	$0,065 \cdot 10^{-2}$	1,10
5	"	0,454	35,0	$0,150 \cdot 10^{-2}$	$0,0180 \cdot 10^{-2}$	$0,037 \cdot 10^{-2}$	$0,069 \cdot 10^{-2}$	1,26
6	"	0,462	35,0	$0,235 \cdot 10^{-2}$	$0,0250 \cdot 10^{-2}$	$0,118 \cdot 10^{-2}$	$0,103 \cdot 10^{-2}$	1,10
7	"	0,489	33,8	$0,255 \cdot 10^{-2}$	$0,0332 \cdot 10^{-2}$	$0,137 \cdot 10^{-2}$	$0,124 \cdot 10^{-2}$	1,11
8	"	0,435	36,0	$0,360 \cdot 10^{-2}$	$0,0777 \cdot 10^{-2}$	$0,194 \cdot 10^{-2}$	$0,156 \cdot 10^{-2}$	1,24
9	Историна	0,375	33,8	$0,042 \cdot 10^{-2}$	$0,0034 \cdot 10^{-2}$	$0,043 \cdot 10^{-2}$	$0,031 \cdot 10^{-2}$	1,38
10	"	0,433	31,6	$0,073 \cdot 10^{-2}$	$0,0044 \cdot 10^{-2}$	$0,043 \cdot 10^{-2}$	$0,032 \cdot 10^{-2}$	1,34
11	"	0,453	31,0	$0,071 \cdot 10^{-2}$	$0,0353 \cdot 10^{-2}$	$0,044 \cdot 10^{-2}$	$0,032 \cdot 10^{-2}$	1,38
12	"	0,428	32,0	$0,078 \cdot 10^{-2}$	$0,0350 \cdot 10^{-2}$	$0,016 \cdot 10^{-2}$	$0,033 \cdot 10^{-2}$	1,39
13	"	0,400	33,0	$0,087 \cdot 10^{-2}$	$0,0035 \cdot 10^{-2}$	$0,049 \cdot 10^{-2}$	$0,034 \cdot 10^{-2}$	1,44
14	"	0,290	36,8	$0,171 \cdot 10^{-2}$	$0,0061 \cdot 10^{-2}$	$0,072 \cdot 10^{-2}$	$0,050 \cdot 10^{-2}$	1,44
15	"	0,360	34,4	$0,188 \cdot 10^{-2}$	$0,0188 \cdot 10^{-2}$	$0,079 \cdot 10^{-2}$	$0,068 \cdot 10^{-2}$	1,45
16	"	0,370	31,0	$0,262 \cdot 10^{-2}$	$0,0293 \cdot 10^{-2}$	$0,131 \cdot 10^{-2}$	$0,097 \cdot 10^{-2}$	1,33
17	"	0,315	31,0	$0,720 \cdot 10^{-2}$	$0,0400 \cdot 10^{-2}$	$0,249 \cdot 10^{-2}$	$0,226 \cdot 10^{-2}$	1,10
18	"	0,277	32,5	$0,740 \cdot 10^{-2}$	$0,0500 \cdot 10^{-2}$	$0,252 \cdot 10^{-2}$	$0,204 \cdot 10^{-2}$	1,24
19	"	0,300	31,8	$1,030 \cdot 10^{-2}$	$0,0710 \cdot 10^{-2}$	$0,333 \cdot 10^{-2}$	$0,325 \cdot 10^{-2}$	1,02
20	"	0,300	31,8	$3,60 \cdot 10^{-2}$	$0,970 \cdot 10^{-2}$	$1,17 \cdot 10^{-2}$	$1,080 \cdot 10^{-2}$	1,09
21	"	0,296	31,6	$3,90 \cdot 10^{-2}$	$1,600 \cdot 10^{-2}$	$1,385 \cdot 10^{-2}$	$1,150 \cdot 10^{-2}$	1,20
22	"	0,319	31,2	$4,70 \cdot 10^{-2}$	$4,300 \cdot 10^{-2}$	$0,880 \cdot 10^{-2}$	$1,500 \cdot 10^{-2}$	1,25

\* Среднее значение углового коэффициента 1,26.

что почти соответствует ранее определенному значению для однородных песков 1,25

На этом основании для всей рассмотренной группы песчано-гравелисто-галечниковых грунтов можно принять единую зависимость для диаметра пор, выраженную уравнением (25, III). Общность зависимости (25, III) для однородных и неоднородных грунтов одной и той же формации также подчеркивает правильность предложенной модели для определения действующего диаметра неоднородных грунтов.

В наших исследованиях рассмотрена песчано-гравелисто-галечниковая группа псевдизных грунтов и для этой последней значение углового коэффициента  $\frac{d_0}{mD_0}$  равно 1,25. Для других формаций каменного материала (щебня и грубообломочного) функция  $d_0 = f(mD_0)$  будет выражена другими значениями постоянных параметров, например, для песков и щебня, полученных дроблением кварца и рассмотренных в табл. 3. Если для шаровой формы зерен или близкой к ней диаметр пор пропорционален диаметру образующих фракций, то для кварцевых песков и щебня такой простой зависимости нет. По данным табл. 3 по основной формуле (24, III) вычислены абсолютные размеры пор кварцевых

песков и щебня и графически определена зависимость  $d_0 = f(mD_0)$ . Эта зависимость выражена двумя ветвями прямых (рис. 27). Для песков  $(1-3,15) \cdot 10^{-2}$  м прямая отвечает уравнению

$$d_0 = 0,84mD_0 + 0,13 \cdot 10^{-2}, \quad (27, III)$$

для щебня  $(3,15-9,2) \cdot 10^{-2}$  м

$$d_0 = 0,64mD_0 + 0,38 \cdot 10^{-2}. \quad (28, III)$$

Эти два уравнения наглядно отражают структурные особенности щебеночной формации псевдизных грунтов, ранее отмеченные при анализе данных табл. 3. В частности, уравнение (28, III) может приближенно характеризовать изменение пор и пористости

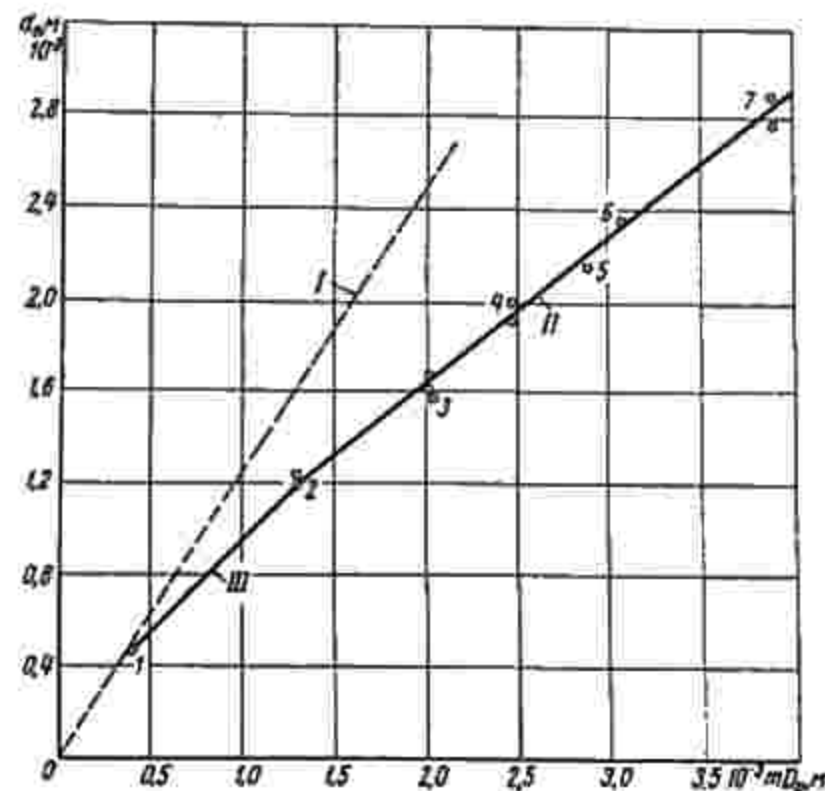


Рис. 27. Средние диаметры пор кварцевых песков и щебня: I — песчано-гравелисто-галечниковые грунты, II — дробленый кварцевый щебень, III — дробленый кварцевый песок

среди, образованной кусковым материалом. В этом нас убеждает характер изменения коэффициентов формы щебеночных грунтов, отмеченных в табл. 3. С увеличением диаметра фракций коэффициент формы стремится к постоянной величине (порядка 4-4,5). Основное уравнение (24, III) зависимости диаметра пор от величины действующего диаметра грунта и коэффициента фильтрации является универсальным, позволяющим для всех случаев псевдизных грунтов обоснованно определять средний диаметр пор.



#### 4. Геометрические параметры трещиноватости

При цементации и глинизации трещиноватых горных пород инженер всегда сталкивается с вопросами геометризации естественной трещиноватости. Среди геометрических параметров трещиноватости наибольшее значение имеет средняя толщина или среднееобъемное раскрытие трещин горных пород  $\delta$ . Только при знании этой величины можно правильно рассчитать и организовать цементацию и глинизацию трещиноватых пород, т. е. определить давление, радиусы цементации и подобрать соответствующую консистенцию нагнетаемого раствора.

Наиболее общим методом определения параметров трещиноватости является визуальный метод, основанный на непосредственном измерении геометрических элементов трещиноватости на стенках обнажений горных пород, карьеров и горных выработок. Но для полного изучения геометрии трещиноватости одного визуального метода недостаточно. Его необходимо дополнить лабораторным изучением образцов пород, взятых с соответствующих участков визуальных наблюдений. Некоторую помощь при изучении трещиноватости глубинных пород могут оказать керны, получаемые при колонковом бурении. Естественные трещины толщиной до нескольких миллиметров в кернах даже сравнительно мягких пород просматриваются с достаточной полнотой.

Наряду с геометрическими приемами определения элементов трещиноватости можно использовать гидравлический метод. Сущность его заключается в том, что по одной из развернутых формул для коэффициента фильтрации или коэффициента проницаемости устанавливаются геометрические элементы трещиноватости. Выбор того или иного способа определения геометрических параметров трещиноватости зависит от местных условий.

Прежде чем перейти к изложению методики, необходимо дать хотя бы краткие указания по классификации трещиноватости, так как правильно составленная классификация трещиноватости облегчает ориентировку в структуре подземной среды.

Геологи и гидрогеологи предложили различные схемы классификации трещиноватости горных пород. К числу наиболее разработанных относится классификация А. С. Храмушева и схема Н. В. Бобкова. Но обе они в той или иной степени противоречат генетическому принципу построения классификации, совершенно необходимому в области подземного строительства, к которому относится тампонаж горных пород. Для определения возможности и интенсивности проникновения тампонажного раствора по трещинам горных пород необходимо знать геометрические формы и размеры трещиноватости, а также шероховатости ее стенок. Поэтому генетическая схема трещиноватости должна быть дополнена морфологической характеристикой.

Таким образом, чтобы связать трещиноватость с естественно-историческими процессами трещинообразования и определить гео-

метрию трещиноватости, классификация должна быть генетико-морфологической. К такой классификации очень близко приближается классификация трещиноватости, предложенная геологом Е. Н. Пермяковым и построенная на большом опытном материале.

**Геометрически-визуальный метод.** Геометрически-визуальный метод основан на непосредственных наблюдениях и геометрических измерениях элементов трещиноватости. Предпосылкой для него служит наличие в районе предполагаемых работ обнаженных трещиноватых горных пород. Когда естественных обнажений нет, для изучения трещиноватости приходится закладывать специальные разведочные выработки (шахты, штольни) или буровые скважины большого диаметра с привлечением прогрессивных способов просматривания стенок скважины (перископы и фотографирование). Особенно эффективным представляется способ фотографирования стенок скважины, для которого возможно устройство простого и надежного прибора. В каждой выработке или обнажении выбираются два характерных участка, различно ориентированных, протяжением 20—30 м. Техническая документация по каждому участку предполагает получение общих и специальных характеристик.

После сбора общих характеристик данного обнажения (стратиграфо-литологическое описание, условия залегания слоев, схематический план обнажения) переходят к получению специальных характеристик. На участке обнажения (стенке выработки) измеряются подряд все трещины. В однообразной толще высоких обнажений замеры берутся на какой-либо определенной высоте от основания обнажения. При наличии слоев разного литологического состава и возраста замеры приурочиваются к различным горизонтам, с разделением на группы. В ограниченных пространствах горных выработок замеры производятся по всей высоте стенок.

Камеральная обработка материалов, собранных при геометрически-визуальном изучении трещиноватых пород, имеет целью получение расчетных таблиц геометрических параметров трещиноватости по всем обследованным участкам.

Для записи рекомендуется определенная форма таблиц (образец таблиц приводится). В таблицу записываются все трещины на участке, толщину которых можно измерить. Каждая таблица даст средние значения геометрических элементов трещиноватости на данном участке. В результате представляется возможным установить толщину трещин  $\delta$ , клиновидность трещины  $\lambda$ , извилистость трещины  $\epsilon$ , абсолютную шероховатость стенок  $e$ , густоту  $q$ .

Дополнением к таблицам служат геологические описания участков, составляемые по данным полевых записей, схематические планы обследованных участков, зарисовки трещин на стенках выработок (обнажений) и фотоснимки характерных участков трещиноватости. Для наглядности геологических описаний строят



Образцы рабочих таблиц

Наименование участка		Размеры участка		Длина трещины I		Толщина трещины II		Густота		Шероховатость	
№ трещины	Группы трещин	Длина трещины		по прямому расхождению	по отклонению	максимальная	минимальная	средняя	длина	относительная	линейная
		азимут	угол								

Примечание. 1. Линейная шероховатость ( $\mu$ ) заносится после лабораторных измерений. Густота трещин вычисляется по каждому участку (стенке) и записывается в соответствующую графу таблицы.  
2. Густота трещин данного направления определяется выражением  $\mu = n/l$ , где  $n$  — число трещин одного направления на 1 м длины стенки как среднее из числа трещин на 20–30 м протяженности;  $l$  — средняя ширина трещины.

пространственные стереографические проекции систем трещин, диаграммы и розы трещиноватости. На розах трещиноватости показывается простирание трещин; на диаграммах — простирание, угол и азимут падения трещин. Диаграммы более показательны. Они изображаются в виде круга, на котором по дуге окружности откладывается азимут направления падения, по радиусам — углы падения, а по перпендикулярам к направлению падения строятся линии простирания трещин. На рис. 28 показан один из вариантов построения диаграммы трещиноватости.

Специальной задачей является определение абсолютной шероховатости стенок трещины, т. е. средней линейной величины выступов шероховатости. Для лабораторного определения абсолютной шероховатости можно рекомендовать получение сленков шероховатости на свинцовых пластинках (рис. 29) с последующим измерением высоты выступов шероховатости микрометром.

Операции по измерению производятся в последовательности:

- растоплавляется свинец (на электроплитке);
- ровным слоем заливается выбранная площадка на образце породы;
- после остывания снимается свинцовый слиток;
- намечается место установки ножек микрометра по гладкой стороне свинцового слитка;
- замеряется размер шероховатости  $a_{\text{абсолют}}$  (рис. 30);
- через увеличительное стекло в замеренном месте постепенно срезаются ровная площадка на высоту всего выступа шероховатости;

1. Примечание: парафин менее удобен вследствие большой его деформируемости.

еще раз в том же месте замеряется микрометром размер  $a_{\text{абсолют}}$ .

Разность замеров  $a_{\text{абсолют}}$  и  $a_{\text{линейная}}$  дает линейную величину выступа шероховатости.

Расчетная величина шероховатости  $e$  получается как среднеарифметическая из пяти — семи замеров в разных местах образца.

Важным объектом лабораторных работ является определение

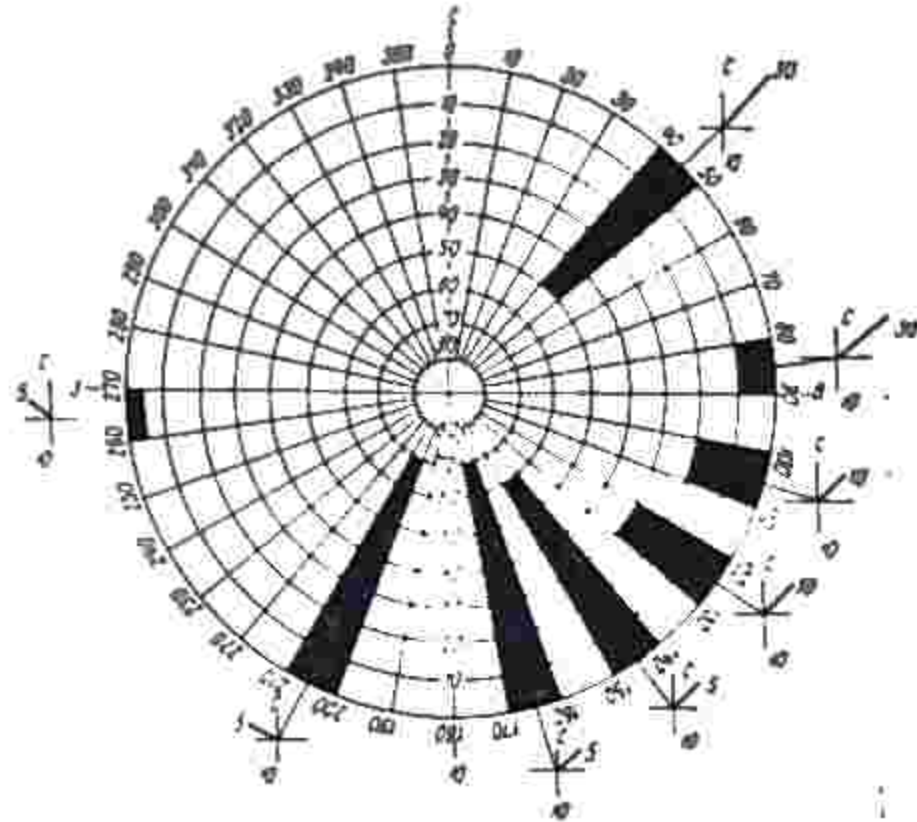


Рис. 28. Один из вариантов построения диаграммы трещиноватости (азимуты линий простирания даны в процентах)

коэффициента скважности трещиноватых пород. Так как по своей геометрической форме трещиноватость очень близко подходит к щели, то, ориентируясь на среднюю величину толщины трещин, с достаточной степенью точности плоскостную пустотность  $m$  можно принять равной объемной скважности породы. Способы определения коэффициента скважности различны. В лабораторных условиях объемное значение пустотности можно определять методом насыщения.

Коэффициент скважности можно получить также методом парафинирования образца из соотношения удельного и объемного веса горной породы. Объемное значение скважности можно определять по объему (проценту) выхода керна при колонковом бурении, так как керн является важнейшим геологическим докумен-



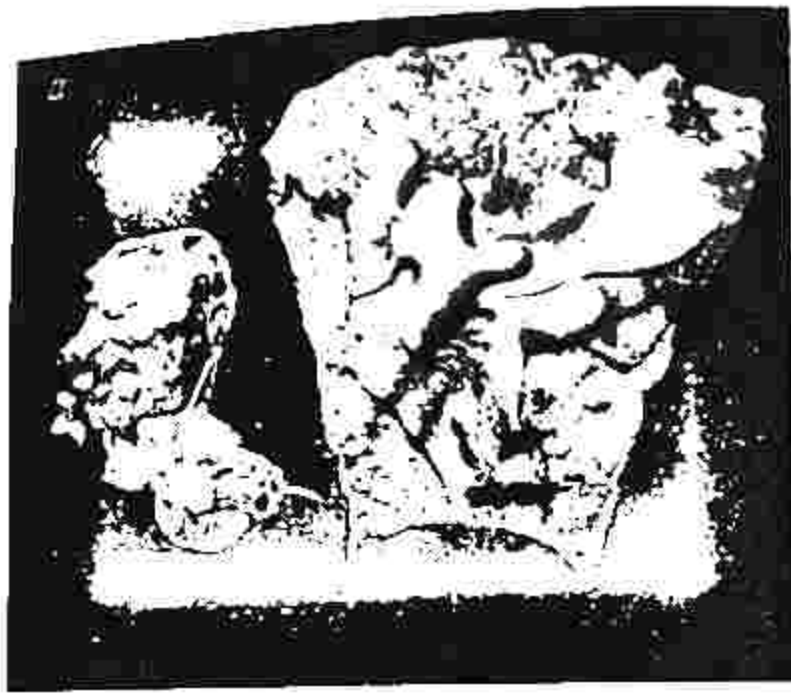


Рис. 28. Определение абсолютной шероховатости методом синцовых слепков;  
а — гранит; б — базальт

том, и процент выхода его всегда известен, по крайней мере, для нерастворимых горных пород. Некоторые указания на коэффициент скважности может дать густота трещин, если последняя вычисляется на участках небольшой протяженности. Так как густота представляет собой среднюю площадь сечения трещин на  $1 \text{ м}^2$  стенки, то сумма густот по всем направлениям приблизительно выражает коэффициент скважности.

Наконец, возможен и геометрический прием определения скважности. После того как на полевых схемах сделаны зарисовки трещин обследуемой стенки обнажения, надо составить геометрический рисунок трещиноватости и для него подобрать соответствующую формулу пустотности

$$m = \delta f(\alpha),$$

где  $f(\alpha)$  — некоторая функция характерного размера рисунка трещиноватости,

$\delta$  — средняя толщина трещин.

Например, для рисунка трещиноватости в форме квадратов со стороной  $a$  получается

$$m = \frac{2\delta}{a}.$$

В результате тщательно проведенных геометрических наблюдений и хорошо обработанных полевых материалов удалось получить весь комплекс геометрических элементов трещиноватости, необходимых для составления проекта цементации (глинизации) горных пород.

**Гидравлический метод определения просветности трещин.** В тех случаях, когда визуально-геометрическое изучение трещиноватости исключено или данных полевых обследований недостаточно, для определения просвета трещин может служить гидравлический метод. Предполагается, что коэффициент фильтрации или коэффициент проницаемости горных пород, подлежащих тампонированию, известен. Определение коэффициентов составляет предмет гидрогеологических исследований, методика их проведения хорошо известна и подробно рассмотрена в специальной гидрогеологической литературе. Рассматриваются две возможности гидравлических определений толщины (раскрытия).

**Осредненная зависимость.** При проведении опытов с зернистыми (несвязными) грунтами и шероховатыми щелями проф. Г. М. Ломизе установил, что в пределах с уменьшением тол-

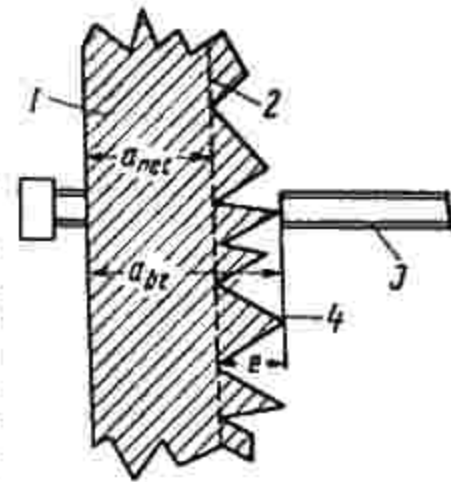


Рис. 30. Замер абсолютной шероховатости:  
1 — синцовый слепок, 2 — срезаемая площадка, 3 — окуляр микрометра, 4 — выстиг шероховатости



шины (раскрытия) щели  $\delta$  и порное движение в щели приближается к явлению фильтрации в зернистой (несвязной) однородной среде. Сложность и изменчивость очертаний русла в трещиноватой среде действуют аналогично неправильностям и беспорядочности формы поровых пространств при фильтрации через зернистую среду. Поэтому фильтрацию в зернистом однородном грунте проф. Г. М. Ломизе рассматривает как предельный случай для движения в шероховатых трещинах. Когда установление геометрических характеристик трещиноватой породы затруднено, для определения средней толщины трещин можно получить усредненную зависимость, рассматривая фильтрацию воды в зернистых однородных грунтах как предельный случай для движения в шероховатых трещинах. Для этой операции могут служить формулы (24 и 25, III).

Из формулы (24, III) следует

$$k = \frac{gm^{0.1}d_0^1}{98 \cdot D_0^2}$$

Диаметр поры песчано-гравелистой формации грунтов определяется уравнением (25, III).

$$d_0 = 1,25mD_0$$

Отсюда получим

$$k = \frac{gm^{2.1}d_0^2}{62,8v} \quad (29, III)$$

Заменяя  $k$  через  $k_{оп} = k \frac{\mu}{\gamma}$ , найдем

$$k_{оп} = 0,016m^{2.1}d_0^2 \quad (30, III)$$

Заменяя диаметр поры гидравлическим радиусом, получим

$$k_{оп} = 0,256m^{2.1}r_0^2 \quad (31, III)$$

В этих формулах обозначено:

- $m$  — объемная пустотность (скважность);
- $\mu$  — динамическая вязкость,  $n \cdot \text{сек}/\text{м}^2$ ;
- $\nu$  — кинематическая вязкость,  $\text{м}^2/\text{сек}$ .

Известно, что коэффициент гидравлического сопротивления при ламинарном движении жидкости в прямоугольных вытянутых сечениях в 1,5 раза больше коэффициента сопротивления круглого сечения (Шиллер, Рихтер, Дэвис и Уайт). Поэтому коэффициент фильтрации для прямоугольного сечения щели при равенстве всех прочих условий будет в 1,5 раза меньше коэффициента фильтрации для круглого сечения поры. На этом основании для трещины надо принять

$$k_{оп} = \frac{0,256m^{2.1}r_0^2}{1,5} = 0,171m^{2.1}r_0^2$$

Для щели прямоугольного сечения при неограниченных размерах в направлении горизонтальных осей ( $x, z$ ) гидравлический радиус равен  $r_0 = \frac{\delta}{2}$ . Поэтому будем иметь

$$k_{оп} = 0,043m^{2.1}\delta^2$$

Откуда

$$\delta = 4,83 \sqrt{\frac{k_{оп}}{m^{2.1}}} \quad (32, III)$$

Эта формула определяет среднее значение толщины (раскрытия) трещины шероховатой пористой среды при заданных значениях проницаемости и скважности при равномерно распределенной трещиноватости. Табл. 8 представляет сводку опытных коэффициентов фильтрации трещиноватых пород для воды, заимствованных из книги Г. М. Ломизе. При пересчете принята динамическая вязкость воды  $\mu = 0,00128 \text{ н} \cdot \text{сек}/\text{м}^2$ , отвечающая температуре  $10^\circ \text{C}$ , и удельный вес  $\gamma = 9810 \text{ н}/\text{м}^3$ . В табл. 8 по формуле (32, III) вычислены значения средней толщины трещины для этих пород при разных значениях скважности.

Полученная величина толщины трещин невелика, вполне соответствует малым коэффициентам фильтрации и не предел для рассмотренных пород, но при одинаковых значениях коэффициента фильтрации в значительной мере зависит от скважности породы.

Определение средней толщины трещин по формуле шероховатых щелей. Формула (32, III) определяет толщину трещины безотносительно шероховатости стенок, т. е. в условиях той шероховатости и извилистости, которые создает пористая среда из зернистых грунтов.

Определения можно уточнить, если ввести в расчет линейную шероховатость, извилистость и клиновидность трещиноватости исследуемой породы, предоставляемые полевыми обследованиями.

Основываясь на работах Г. М. Ломизе, можно определить среднюю толщину трещин  $\delta$  всей трещиноватой породы

$$\delta = \sqrt{\frac{12k_{оп}}{m}} \sqrt{\varepsilon_m^2 + \varepsilon_\gamma^2 + \varepsilon_\kappa^2 + \varepsilon_\iota^2 + \varepsilon_\kappa^2} \quad (33, III)$$

где  $\varepsilon_m, \varepsilon_\gamma, \varepsilon_\kappa, \varepsilon_\iota, \varepsilon_\kappa$  — коэффициенты, учитывающие влияние шероховатости, типа шероховатости, клиновидности, извилистости и местных потерь.

Формула (33, III) содержит ряд коэффициентов, большинство которых определяется по данным полевым обследованиям. Рассмотрим каждый из этих коэффициентов в отдельности. Коэффициент шероховатости, по Ломизе, выражается формулой

$$\varepsilon_m = 1 + 6 \left( \frac{e}{\delta} \right)^{1.5} \quad (34, III)$$



Таблица 8

№ породы	Минералогический состав	Коэффициент фильтрации, $\mu$ сек	Коэффициент проницаемости, догсу*	Связность, $m$	Средняя толщина трещины, $\mu$
1	2	3	4	5	6
1	Трещиноватые порфиновые сланцы	$8,6 \cdot 10^{-3}$	11,18	0,05 0,03	$0,36 \cdot 10^{-3}$ $0,66 \cdot 10^{-3}$
2	Гранодиорит выветрившийся	$1 \cdot 10^{-3}$	1,3	0,05 0,03	$0,12 \cdot 10^{-3}$ $0,23 \cdot 10^{-3}$
3	Гранито-гнейс сланцы трещиноватый	$2 \cdot 10^{-3}$	26,0	0,05	$0,55 \cdot 10^{-3}$
4	Порфирит выветрившийся	$1,2 \cdot 10^{-3}$	0,16	0,05 0,03	$0,044 \cdot 10^{-3}$ $0,079 \cdot 10^{-3}$
5	Известняк заарстонавый, трещиноватость малая	$3,6 \cdot 10^{-3}$	4,68	0,10 0,05	$0,12 \cdot 10^{-3}$ $0,23 \cdot 10^{-3}$
6	То же, трещиноватость средняя	$5,3 \cdot 10^{-4}$	68,9	0,10 0,05	$0,45 \cdot 10^{-3}$ $0,90 \cdot 10^{-3}$
7	То же, трещиноватость большая	$2,4 \cdot 10^{-2}$	3120	0,10 0,05	$3,05 \cdot 10^{-3}$ $6,08 \cdot 10^{-3}$
8	Известняк трещиноватый	$1,9 \cdot 10^{-4}$	24,7	0,05 0,03	$0,54 \cdot 10^{-3}$ $0,99 \cdot 10^{-3}$
9	Песчанка выветрившийся, трещиноватость средняя	$8,6 \cdot 10^{-3}$	11,18	0,05 0,03	$0,36 \cdot 10^{-3}$ $0,66 \cdot 10^{-3}$
10	Песчанка выветрившийся, трещиноватость большая	$1,3 \cdot 10^{-3}$	16,9	0,05 0,03	$0,45 \cdot 10^{-3}$ $0,82 \cdot 10^{-3}$
11	Сланец глинистый выветрившийся, трещиноватость малая	$5 \cdot 10^{-6}$	0,65	0,05 0,03	$0,038 \cdot 10^{-3}$ $0,16 \cdot 10^{-3}$
12	Сланец глинистый, выветрившийся, трещиноватость средняя	$9 \cdot 10^{-6}$	1,17	0,05 0,03	$0,12 \cdot 10^{-3}$ $0,23 \cdot 10^{-3}$
13	Сланец песчаный, выветрившийся, трещиноватость средняя	$4 \cdot 10^{-3}$	5,2	0,05 0,03	$0,25 \cdot 10^{-3}$ $0,45 \cdot 10^{-3}$
14	Сланец песчаный, выветрившийся, трещиноватость большая	$4,6 \cdot 10^{-4}$	59,8	0,05 0,03	$0,84 \cdot 10^{-3}$ $1,54 \cdot 10^{-3}$
15	Глины песчаные трещиноватые (левон)	$4 \cdot 10^{-6}$	0,52	0,05 0,03	$0,079 \cdot 10^{-3}$ $0,143 \cdot 10^{-3}$
16	Мергели и мергелистые известняки	$1,52 \cdot 10^{-3}$	197,6	0,10 0,05	$0,77 \cdot 10^{-3}$ $1,56 \cdot 10^{-3}$

\* Напоминание, что  $\mu = 1,02 \cdot 10^{-12}$  д.с.

Входящая в этот коэффициент линейная шероховатость определяется лабораторным исследованием образцов, взятых из обнажений, по свинцовым слепкам.

Коэффициент клиновидности

$$e_k = \frac{1}{16} \frac{(1+n)^4}{n^2} \frac{1+1,2M}{1+6\left(\frac{e}{\delta_c}\right)^{1,5}}, \quad (35, III)$$

где

$$M = \frac{\left(\frac{e}{\delta_c}\right)^{1,5} (1-n^{3,5}) (1+n)^{0,5}}{n^{1,5} (1-n)}$$

Как видно, коэффициент клиновидности  $e_k$  в основном определяется средней величиной клиновидности

$$n = \frac{\delta_{min}}{\delta_{max}}$$

и получается непосредственно по данным полевых обследований из соответствующих таблиц (см. образец рабочей таблицы).

Среднеобъемное раскрытие трещины переменного сечения

$$\delta_{c,0} = \frac{\delta_{min} + \delta_{max}}{2}$$

величина также известная по полевым данным. Если клиновидность имеется на всем протяжении трещиноватости, тогда  $\delta_{c,0} = \delta$ .

Среднее значение коэффициента извилистости  $e_l$  получается по данным полевых обследований как отношение средней длины трещины по ветвлению к средней длине по прямому расстоянию

$$e_l = \frac{l_{вет}}{l_{пр}}, \quad (36, III)$$

По данным Г. М. Ломизе, среднее значение коэффициента извилистости изотропной трещиноватости приближается к извилистости фильтрационных путей в зернистых грунтах и составляет  $e_l = 1,25$  с возможными колебаниями этой величины от 1 до 1,5.

Г. М. Ломизе считает, что изученный им тип шероховатости приближенно характеризует пределы влияния этого фактора на водопроницаемость трещиноватой породы для большого числа естественных шероховатостей. Поэтому при практических расчетах возможно принимать  $e_m = 1$ .

Для фактических величин линейной шероховатости сделано определение абсолютной шероховатости некоторых образцов горных



пород методом свинцовых слепков. Результаты оказались следующие (м):

Глинистый сланец	(0,045—0,078) · 10 <sup>-3</sup>
Песчаник	(0,066—0,100) · 10 <sup>-3</sup>
Диабаз	(0,104—0,126) · 10 <sup>-3</sup>
Мрамор	(0,107—0,138) · 10 <sup>-3</sup>
Известняк	0,229 · 10 <sup>-3</sup>
Гранит	0,451 · 10 <sup>-3</sup>
Базальт	(0,732—1,376) · 10 <sup>-3</sup>

Влияние местных неправильностей фильтрационных ходов в трещинах, по Г. М. Ломизе, учитывается коэффициентом  $\epsilon_m$ . Определение этого коэффициента в полевых условиях невозможно. Поэтому можно ограничиться его лабораторными значениями. По указанию Г. М. Ломизе, значения коэффициента  $\epsilon_m$  в пределах 6—9 достаточны для трещин даже с большими абсолютными значениями местных потерь.

Таким образом, формула (33, III) позволяет определить среднюю толщину трещины в общем случае изотропной трещиноватости горных пород по физико-механическим характеристикам среды, большинство которых может быть снято в натуре.

При отсутствии клиновидности коэффициент  $\epsilon_n$  равен единице — формула переходит в формулу для прямых шероховатых щелей:

$$\delta = 3,46 \sqrt{\frac{k_{пр}}{m}} \sqrt{1 + 6 \left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^{1,5}} \sqrt{\epsilon_l \epsilon_m} \quad (37, III)$$

Для клиновидной трещиноватости на всем протяжении

$$\delta = 3,46 \sqrt{\frac{k_{пр}}{m}} \sqrt{\frac{1}{16} \frac{(1+n)^4}{n^2} \left[ 1 + 1,2 \frac{\left(\frac{\epsilon}{\delta}\right)^{1,5} (1-n^{3,5}) (1+n)^{0,5}}{n^{1,5} (1-n)} \right] \times \sqrt{\epsilon_l \epsilon_m}} \quad (38, III)$$

В табл. 9 по формуле (38, III) определено среднеобъемное раскрытие трещин некоторых ранее рассмотренных горных пород при двух значениях скважности  $m$  и клиновидности  $n$  (0,6—0,3). Коэффициент извилистости  $\epsilon_l$  принят равным 1,3 коэффициент местных сопротивлений  $\epsilon_m=8$ . Абсолютная шероховатость этих пород принята по данным наших определений.

Параллельное сопоставление результатов расчета по двум формулам позволит судить о степени приближения осредненной зависимости (32, III) к формуле (38, III). Табличные данные показывают, что зависимость (32, III) дает правильные значения средней толщины трещин в интервалах клиновидности 0,6—0,3 и абсолютной шероховатости (0,45—0,13) · 10<sup>-3</sup> м. При шероховатостях, меньших 0,13 · 10<sup>-3</sup> м, в указанных интервалах клиновидности осредненная зависимость (32, III) дает завышенную толщину трещин сравнительно с формулой (38, III). Таким обра-

Таблица 9

№ пород	Породы	Коэффициент проницаемости, мд/м	Скважность, м	Абсолютная шероховатость, м	Клиновидность, n	Средняя толщина трещин, м	
						12 (III)	36 (III)
1/1	Трещиноватые порфировые сланцы	11,18	0,05 0,03	0,13 · 10 <sup>-3</sup>	0,6 0,3	0,36 · 10 <sup>-3</sup> 0,66 · 10 <sup>-3</sup>	0,31 · 10 <sup>-3</sup> 0,49 · 10 <sup>-3</sup>
2/3	Гранито-гнейс сильно трещиноватый	26	0,05 0,03	0,45 · 10 <sup>-3</sup>	0,6 0,3	0,55 · 10 <sup>-3</sup> 1,02 · 10 <sup>-3</sup>	0,63 · 10 <sup>-3</sup> 0,99 · 10 <sup>-3</sup>
3/6	Известняк закварцованный, трещиноватость средняя	68,9	0,10 0,05	0,23 · 10 <sup>-3</sup>	0,6 0,3	0,45 · 10 <sup>-3</sup> 0,90 · 10 <sup>-3</sup>	0,53 · 10 <sup>-3</sup> 0,93 · 10 <sup>-3</sup>
4/8	То же, трещиноватость большая	3120	0,10 0,05	0,23 · 10 <sup>-3</sup>	0,6 0,3	3,05 · 10 <sup>-3</sup> 6,08 · 10 <sup>-3</sup>	2,35 · 10 <sup>-3</sup> 4,50 · 10 <sup>-3</sup>
5/9	Песчаник известняковидный, трещиноватость средняя	11,18	0,05 0,03	0,10 · 10 <sup>-3</sup>	0,6 0,3	0,36 · 10 <sup>-3</sup> 0,66 · 10 <sup>-3</sup>	0,27 · 10 <sup>-3</sup> 0,45 · 10 <sup>-3</sup>
6/14	Сланец песчанистый, известняковидный, трещиноватость большая	59,8	0,05 0,03	0,06 · 10 <sup>-3</sup>	0,6 0,3	0,84 · 10 <sup>-3</sup> 1,51 · 10 <sup>-3</sup>	0,43 · 10 <sup>-3</sup> 0,79 · 10 <sup>-3</sup>
7/16	Мергель известняковидный	197,6	0,10 0,05	0,23 · 10 <sup>-3</sup>	0,6 0,3	0,77 · 10 <sup>-3</sup> 1,50 · 10 <sup>-3</sup>	0,78 · 10 <sup>-3</sup> 1,10 · 10 <sup>-3</sup>



зом, в тех случаях, когда получение фактических данных о геометрических параметрах трещиноватости по тем или иным причинам исключено, осредненная зависимость (32, III) надежна для определения средней толщины трещин в широком диапазоне клиновидности и шероховатости.

Отметим, что по Г. М. Ломизе предельное отношение  $\frac{e}{\delta_{с.о}}$  должно удовлетворять условию

$$\frac{e}{\delta_{с.о}} < \frac{2n}{n+1} \quad (39, III)$$

Для всех значений  $\delta$ , полученных в табл. 9, этот критерий удовлетворяется.

Можно считать, что весь комплекс геометрических параметров трещиноватости, необходимый для проекта тампонажа горных пород, может быть получен геометрически-визуальным методом обследования обнажений в разрезах, штольнях, шахтах и скважинах.

В частности, через буровые скважины параметры трещиноватости можно определить прогрессивными методами прослеживания: перископами с вмонтированными в них фотоаппаратами и масштабами, механическими трещиноискателями и др. Для определения клиновидности трещин  $n$  достаточно установить два характерных размера  $\delta_{\min}$  и  $\delta_{\max}$ . Абсолютная шероховатость стенок трещины «е» определяется описанным выше способом по образцам горной породы, взятым из скважины с разломом по трещинам. Труднее определить извилистость трещин  $\epsilon$ . Это можно сделать приближенно фотографированием очертаний фасадных трещин на стенках скважины. При этом методика геометрически-визуального метода обследования и способ определения абсолютной шероховатости пород просты.

В дополнение к геометрически-визуальному методу получена осредненная зависимость (32, III) для определения средней толщины трещин. И, наконец, показана возможность применения для гидравлического определения средней толщины трещин горных пород развернутых формул (37 и 38, III) Г. М. Ломизе.

Поясним полученные зависимости примером определения средней толщины трещиноватости.

Водоносная порода представлена толщей мергелей, среднее значение коэффициента фильтрации которых по данным полевых откачек составляет  $k = 0,005$  м/сек. Средняя величина скважности  $m = 0,07$ . Коэффициент извилистости  $\epsilon_1 = 1,5$ . Средняя величина клиновидности  $n = 0,4$ . Линейная шероховатость стенок  $e = 0,4 \cdot 10^{-2}$  м.

Определить среднюю толщину трещин этого массива.

1 По осредненной зависимости (32, III). Среднему значению коэффициента фильтрации  $k = 0,005$  м/сек соответствует средняя величина коэффициента проницаемости (7, III)

$$k_{ср} = \frac{0,005 \cdot 0,03128}{9810} = \frac{0,000064}{9810 \cdot 1,02 \cdot 10^{-12}} = 640 \text{ дарси.}$$

(Динамическая вязкость воды  $\mu = 0,00128$  н сек/м<sup>2</sup>, удельный вес  $\gamma = 9810$  н/м<sup>3</sup>).

Средняя толщина трещин (32, III)

$$\delta = 4,83 \sqrt{\frac{640 \cdot 1,02 \cdot 10^{-12}}{0,07^2 \cdot 1}} = 0,002 \text{ м.}$$

2 По формуле прямых шероховатых щелей (37, III). Коэффициент местных сопротивлений взял  $\epsilon_m = 9$ . При отсутствии клиновидности средняя толщина трещин по формуле (37, III) получается равной

$$\delta = 3,46 \sqrt{\frac{640 \cdot 1,02 \cdot 10^{-12}}{0,07}} \sqrt{1 + 6 \left(\frac{0,0004}{\delta}\right)^{1,5}} \sqrt{1,5 \cdot 9}.$$

Формула приводится к виду

$$\delta = 0,03123 \sqrt{1 + 6 \left(\frac{0,0004}{\delta}\right)^{1,5}}.$$

Уравнение решается графически  $\delta = 0,0016$  м.

3 По формуле клиновидных щелей (38, III). Подставляя в формулу (38, III) значение  $n = 0,4$ , получим

$$\delta = 3,46 \sqrt{\frac{640 \cdot 1,02 \cdot 10^{-12}}{0,07}} \sqrt{1,50 \left[1 + 9 \left(\frac{e}{\delta}\right)^{1,5}\right]} \sqrt{1,5 \cdot 9}$$

$$\delta = 0,00151 \sqrt{1 + 9 \left(\frac{e}{\delta}\right)^{1,5}}.$$

Решение уравнения дает  $\delta = 0,0021$  м.

Как видно, при значении клиновидности  $n$ , равном 0,4, осредненная зависимость (32, III) и формула клиновидных щелей (38, III) дают идентичные значения толщины  $\delta$ .



Термин боковое нагнетание означает плоское радиальное движение несжимаемой жидкости из скважины. Такое движение имеет место от гидродинамически совершенной скважины в однородной пористой среде, не возмущенной посторонними влияниями. В условиях такого движения достаточно исследовать движение в одной горизонтальной плоскости, так как любая из них дает аналогичную картину движения.

Жидкость с постоянным коэффициентом фильтрации в практике тампонажа грунтов и горных пород встречается довольно часто. Некоторые силикатные растворы, как например, жидкое стекло, некоторые эмульсии, применяемые для инъекций грунтов, антропогенные жидкости и др. в стадии движения можно рассматривать жидкостями с постоянными коэффициентами фильтрации. Схватывание и твердение их происходит только в состоянии покоя. Расплавленный битум на определенных интервалах температуры и длины потока можно представить жидкостью с постоянным осредненным коэффициентом фильтрации. Переменное значение коэффициента фильтрации для некоторых дисперсных жидкостей можно привести к эквивалентному постоянному значению. Поэтому рассмотрение движения жидкостей с переменными коэффициентами фильтрации должно предшествовать исследованию движения с постоянными коэффициентами фильтрации, что и выполняет гл. IV. Тем более, что некоторые зависимости этого случая движения будут служить теоретической базой для рассмотрения сложных схем с переменными параметрами движения.

Отметим, что в главе рассматриваются системы скважин, преимущественно применяемые в шахтном строительстве, главным образом скважины с круговым контуром фронта инъеции.

## 1. Многоскважинное нагнетание в проницаемую толщу, зажатую в плотных породах

Нагнетание предполагается в сухую ненасыщенную породу. Но если пренебречь вязкостью вытесняемой воды и рассматривать напор нагнетания как разность забойного и пластового давления.

то все последующие уравнения будут применимы и для расчета нагнетания в водоносный пласт.

Для всех последующих решений будем считать, что движение жидкости в пласте происходит в установившемся режиме<sup>1</sup>, а действие силы тяжести уравновешено реакцией горизонтального подпора. Тогда к этим системам можно применить функции прямолинейного источника.

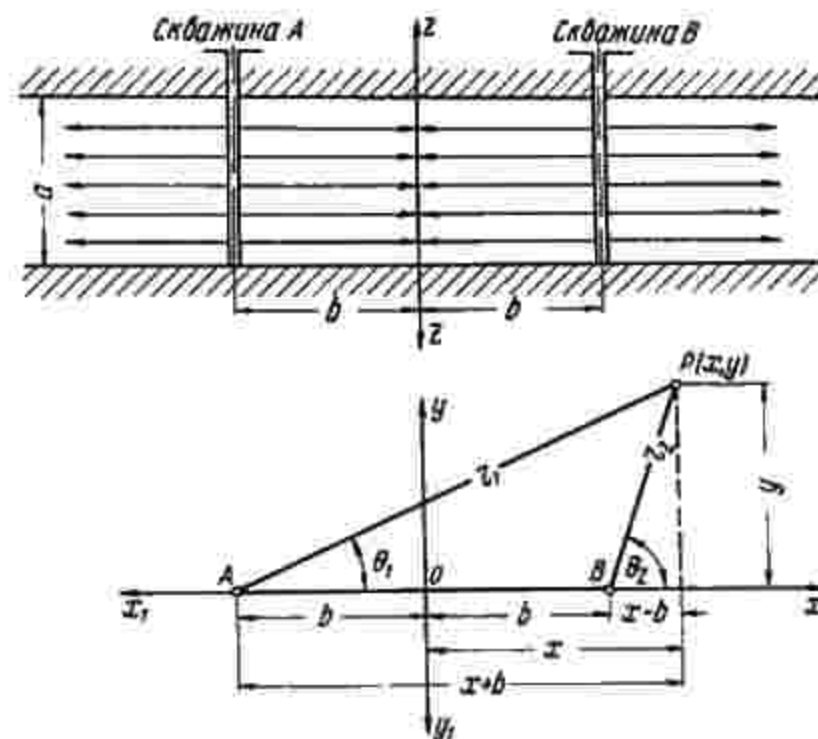


Рис. 31. Схема двух взаимодействующих источников

При рассмотрении вопроса о взаимодействии нагнетательных скважин, организованных по схеме линейного источника возможна постановка двух задач. К первой относится исследование поля и построение гидромеханической сетки для безграничной среды. При этом решении не ставятся предварительных условий по обязательной форме внешних контуров инфильтрации. Это наиболее общее решение вопроса о взаимодействии нагнетательных скважин. Гидромеханическая сетка поля дает не только картину распределения давления в инфильтрационном потоке, но и наглядное представление в форме эквипотенциалей, одна из которых на некотором интервале времени может служить внешним контуром инфильтрации.

Вторая задача заключается в нахождении аналитических ре-

<sup>1</sup> Упругость жидкостей и сжимаемость пласта не учитываются. Перераспределение давлений в пласте наступает мгновенно.



шеним взаимодействии скважин с учетом обязательной формы внешнего контура инфильтрации. При этом методе задача состоит в том, чтобы найти такую комбинацию распределения источников и стоков, при которой одна из эквипотенциалей комбинированного поля служила бы изобарой действительного поля. Так, например, можно получить внешний контур инфильтрации в форме прямой линии, для чего источники зеркально отражаются таким же количеством симметрично расположенных стоков. Круговой контур инфильтрации возможен при комбинации источников и стоков, расположенных несимметрично к последнему.

Ограничимся исследованием, относящимся к случаю организации течения в горном деле при проходе шахтных стволов. Это — взаимодействие скважин с круговым контуром инфильтрации.

**Две взаимодействующие скважины.** В простейшем виде схема взаимодействующих скважин может быть решена рассмотрением двух прямолинейных источников равной силы, расположенных в безграничной среде на одной прямой (рис. 31). При этом условии встречные потоки взаимодействующих скважин образуют разделяющую линию, как бы плоскую стенку, которая и отклоняет течение в сторону.

Функции тока и потенциала, согласно теории сложения потенциальных течений, будут иметь вид

$$\psi = \frac{q}{2\pi} (\theta_1 + \theta_2), \quad (1, IV)$$

$$\varphi = \frac{q}{2\pi} (\ln r_1 + \ln r_2) = \frac{q}{2\pi} \ln r_1 r_2. \quad (2, IV)$$

Построение линий тока по уравнению (1, IV), при заданном расстоянии между источниками (скважинами)  $2b$ , проще и легче всего сделать графически.

Обозначая  $\psi$  через  $\psi_r$ , получим решение в приведенных условиях

$$\psi_r = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2\pi}. \quad (3, IV)$$

Изменяя значение углов  $\theta_1$  и  $\theta_2$  в долях  $\pi$  и определяя их для направлений основных — осевых линий тока, можно установить

Таблица 10

Наименование линии	Вверх от оси $xx_1$		Вниз от оси $xx_1$		
	$\theta_1, \theta_2$	$\psi_r$	Наименование линии	$\theta_1 + \theta_2$	$\psi_r$
$Bx$	0	0	$Ax_1$	$2\pi$	1,0
$AB$ и $oy$	$\pi$	0,5	$AB$ и $oy_1$	$3\pi$	1,5
$Ax_1$	$2\pi$	1,0	$Bx$	$4\pi$	2,0

пределы и порядок изменения функции  $\psi_r$  для всего поля течения. Применительно к обозначениям рис. 31 вычисленные значения  $\psi_r$  указаны в табл. 10.

Промежуточные линии тока между основными получаются графически по точкам пересечения двух лучей: одного из  $B$  под углом  $\theta_2$  и второго из  $A$  под углом  $\theta_1 = 2\pi - \theta_2$ .

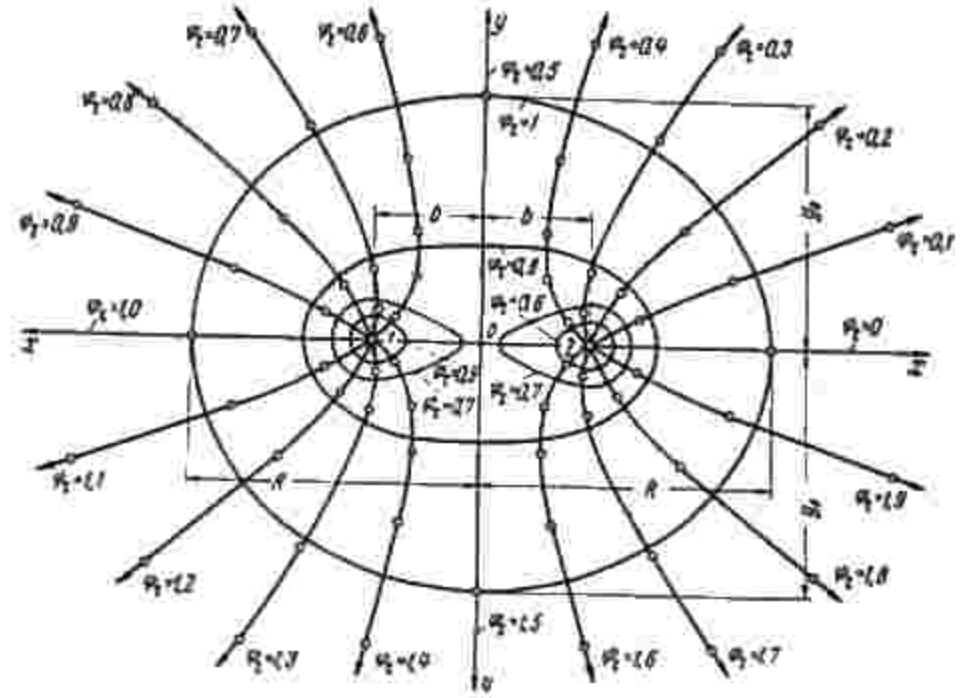


Рис. 32. Плоское поле двух взаимодействующих источников

На рис. 32 вычислено и построено все плоское поле течения двух взаимодействующих скважин. При переходе к действительным значениям  $\psi$  численные величины  $\psi_r$  надо помножить на  $q$ . Аналитическое решение уравнения (20, II) для рассматриваемого поля двух источников<sup>1</sup> приводит к семейству равнобочных гипербол, уравнение которых в декартовых координатах получает вид

$$(x^2 - y^2 - b^2) \lg \frac{2\pi\psi}{q} - 2xy = 0. \quad (4, IV)$$

В приведенных условиях

$$(x^2 - y^2 - b^2) \lg 2\pi\psi_r - 2xy = 0. \quad (5, IV)$$

Придавая  $\psi_r$  ряд значений от нуля до 2, найдем все семейство гипербол, как и указано на рис. 33.

$$\psi = \frac{q}{2\pi} \left[ \arctg \frac{y}{x+b} + \arctg 2 \frac{y}{x-b} \right].$$



Потенциальная функция выражена уравнением

$$\varphi = \frac{q}{2\pi} \ln r_1 r_2.$$

Для построения эквипотенциалей радиусы-векторы  $r_1$  и  $r_2$  надо выразить через координаты точки (рис. 31).

$$r_1 = \sqrt{(x+b)^2 + y^2} \quad \text{и} \quad r_2 = \sqrt{(x-b)^2 + y^2}.$$

Функция  $\varphi$  приводится к виду

$$\varphi = \frac{q}{2\pi} \ln \sqrt{(x+b)^2 + y^2} \sqrt{(x-b)^2 + y^2}. \quad (6, IV)$$

В приведенных условиях

$$\varphi_r = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x+b)^2 + y^2} \sqrt{(x-b)^2 + y^2}. \quad (7, IV)$$

Последнее уравнение после несложных преобразований можно представить в виде

$$(x^2 + y^2)^2 + 2(y^2 - x^2)b^2 + b^4 = 10^{\frac{2\pi\varphi_r}{2.303}}. \quad (8, IV)$$

Уравнение (8, IV) выражает семейство лемнискатных кривых или кассиондов в декартовых координатах. Различным значениям  $\varphi_r$  будут соответствовать различные кривые одного и того же семейства.

Для точек, расположенных на оси  $y$  ( $x=0$ ), будем иметь

$$y = \sqrt{10^{\frac{2\pi\varphi_r}{2.303}} - b^2}. \quad (9, IV)$$

Для точек на оси  $x$  ( $y=0$ ) при  $x > b$  получим

$$x = \sqrt{10^{\frac{2\pi\varphi_r}{2.303}} + b^2}. \quad (10, IV)$$

Для тех же точек, но при  $x < b$

$$x = \sqrt{b^2 - 10^{\frac{2\pi\varphi_r}{2.303}}}. \quad (11, IV)$$

Значения функции  $\varphi_r$  изменяются от  $-\infty$  в центрах источников до  $+\infty$  на бесконечном удалении от них.

Используя уравнения (9—11, IV) и задавая ряд численных значений функции  $\varphi_r$  на осях  $y$  и  $x$ , можно получить ряд точек, соответствующих заданным значениям  $\varphi_r$  и по ним экстраполировать все эквипотенциальные кривые.

Построения для некоторых значений  $\varphi_r$  выполнены на рис. 33.

Для перехода к действительным  $\varphi$  численные величины  $\varphi_r$  умножаются на  $q$ . Координаты же точек сохраняют действительную величину (в масштабе  $b$ ).

По уравнению (6, IV) напор в любой точке плоского поля равен

$$H = -\frac{q}{2\pi k} \ln \sqrt{(x+b)^2 + y^2} \sqrt{(x-b)^2 + y^2}.$$

Для точек, находящихся на внешнем контуре инфильтрации, напор имеет постоянное значение. Величину напора можно выразить через любую точку этого контура. Точку возьмем на оси  $x$  ( $y=0$ ). Расстояние до этой точки от начала координат по оси  $x$

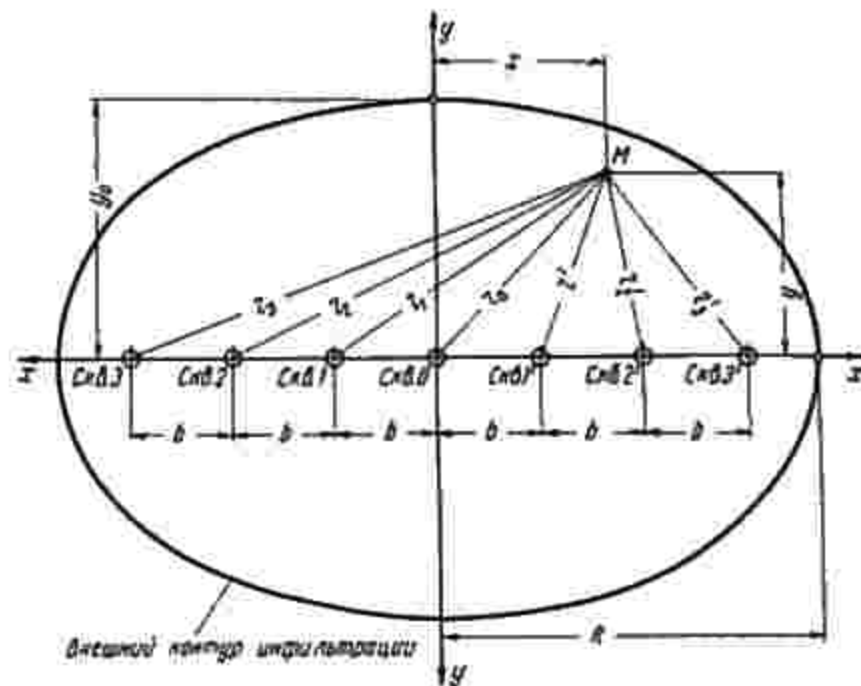


Рис. 33. Прямой ряд взаимодействующих источников

обозначим через  $R$ . Тогда напор на внешнем контуре инфильтрации будет

$$H_R = -\frac{q}{2\pi k} \ln (R^2 - b^2).$$

Последние два уравнения по-прежнему выражают закон распределения пьезометрических напоров. В горизонтальном потоке разность напоров для двух любых напорных поверхностей дает изменение пьезометрических давлений

$$H - H_R = \left(\frac{p}{\gamma}\right) - \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R.$$

Подставляя соответствующие значения  $H$ , будем иметь

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{q}{2\pi k} \ln \frac{R^2 - b^2}{\sqrt{[(x+b)^2 + y^2][(x-b)^2 + y^2]}} + \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R. \quad (12, IV)$$



Это уравнение может служить для построения изобар поля в конкретно заданных границах внешнего контура инфильтрации. Границы контура инфильтрации по осям  $x$  и  $y$  на некотором интервале времени определяются расстояниями  $R$  и  $y_0$ . Значение  $y_0$  получается из тех соображений, что напоры в крайних точках контура по осям  $x$  и  $y$  равны, т. е.

$$= \frac{q}{2\pi k} \ln(R^2 - b^2) = - \frac{q}{2\pi k} \ln(y_0^2 + b^2).$$

откуда

$$y_0 = \sqrt{R^2 - 2b^2}. \quad (13, IV)$$

В окрестностях источников эквипотенциали (изобары) также близки к окружностям. С точностью до тысячной доли процента большая ось соответствующего овала равна малой, если радиус скважины не превышает  $0,001b$ . Поэтому начальную эквипотенциаль можно принять в форме окружности радиуса  $r_0$ . Координата  $x$  для нее равна  $x = b + r_0$ . Координата  $y = 0$ .

Пьезометрическое давление на контуре забоя или, что то же, величина рабочего давления в скважине определяется равной

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 = \frac{q}{2\pi k} \ln \frac{R^2 - b^2}{2br_0 + r_0^2} + \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R.$$

Величина  $r_0^2$  мала по сравнению с  $2br_0$ . Пренебрегая ею, получим

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 = \frac{q}{2\pi k} \ln \frac{R^2 - b^2}{2br_0} + \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R. \quad (14, IV)$$

При симметрии поля относительно оси  $y$  и равенстве забойных давлений обеих скважин, последние будут равнодебитны. Расход каждой скважины определяется из уравнения (14, IV)

$$Q = \frac{2\pi k a H_0}{\ln \frac{R^2 - b^2}{2br_0}}. \quad (15, IV)$$

где  $H_0 = \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R$ .

Скоростные условия поля. Компоненты скорости по осям  $x$  и  $y$  равны

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{q}{2\pi} \ln \sqrt{(x+b)^2 + y^2} \sqrt{(x-b)^2 + y^2},$$

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{q}{2\pi} \ln \sqrt{(x+b)^2 + y^2} \sqrt{(x-b)^2 + y^2}.$$

После дифференцирования получим

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{x+b}{(x+b)^2 + y^2} + \frac{x-b}{(x-b)^2 + y^2} \right]; \\ v &= \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{1}{(x+b)^2 + y^2} - \frac{1}{(x-b)^2 + y^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (16, IV)$$

Скорость фильтрации в любой точке пласта определяется формулой

$$w = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{q}{\pi} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{(x+b)^2 + y^2} \sqrt{(x-b)^2 + y^2}} = \frac{q}{\pi} \frac{r}{r_1 r_2}. \quad (17, IV)$$

Скорости фильтрации  $u$  и  $v$  для движения частиц жидкости по осям  $x$  при  $y=0$  и  $x>b$  и  $y$  при  $x=0$  определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{q}{\pi} \frac{x}{x^2 - b^2}; \\ v &= \frac{q}{\pi} \frac{y}{y^2 + b^2}. \end{aligned} \right\} \quad (18, IV)$$

Вследствие симметрии инфильтрационных потоков из скважин относительно центра поля  $o$  скорость фильтрации в этой точке должна быть равна нулю. Точка  $o$  носит название критической точки или точки равновесия. Точка равновесия делит расстояние между двумя взаимодействующими скважинами прямо пропорционально их дебитам. Разумеется, что в случае неравнодебитности скважин изображенное на рис. 32 гидродинамическое поле перестало бы быть симметричным относительно оси  $y$ . Решение несимметричного поля выполняется также методом сложения потенциальных течений двух стоков, но разной силы ( $q_1$  и  $q_2$ ).

При увеличении расстояний  $R$  и  $y_0$  влияние членов  $2b^2$  и  $b^2$  в формулах (13 и 14, IV) становится незначительным. При больших значениях  $R$  и  $y_0$  последними можно пренебречь. Тогда эти формулы принимают вид

$$H_0 = \frac{q}{2\pi k} \ln \frac{R^2}{2br_0} + \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R. \quad (19, IV)$$

Расход скважины

$$Q = \frac{2\pi k a H_0}{\ln \frac{R^2}{2br_0}}. \quad (20, IV)$$

Это — упрощенные формулы. Пользоваться ими можно в том случае, когда расстояния скважин от внешнего контура инфильтрации достаточно большие, а расстояние между скважинами невелико. В этой конструкции формулы величина  $R$  выражает среднее расстояние от скважин до обозначенного контура инфильтрации.



Прямолинейный ряд взаимодействующих скважин. Рассмотрим взаимодействие ряда скважин, симметрично расположенных на оси  $x$  по ту и другую сторону от центральной скважины в начале координат. Суммированный потенциал комбинационного потока при обозначениях по рис. 33 для любой точки плоского поля равен

$$\varphi = \frac{q}{2\pi} \ln r_0 r_1 r_2 \dots r_n r'_1 r'_2 \dots$$

Переходя от потенциала к напору и представляя радиусы-векторы через координаты точки, получим

$$H = -\frac{q}{2\pi k} \ln \sqrt{y^2 + x^2} \sqrt{y^2 + (b+x)^2} \sqrt{y^2 + (2b+x)^2} \dots \\ \dots \sqrt{(x-b)^2 + y^2} \sqrt{(x-2b)^2 + y^2} \dots$$

Постоянное значение напора на внешнем контуре фильтрации по-прежнему характеризуем точкой на оси  $x$  ( $x=R, y=0$ )

$$H_R = -\frac{q}{2\pi k} \ln R(R+b)(R+2b) \dots (R-b)(R-2b)$$

Аналогично предыдущему случаю получаем, что разность напоров для двух напорных поверхностей определяет величину изменения пьезометрических давлений

$$H - H_R = \frac{p}{\gamma} - \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R$$

Подставляя соответствующие значения  $H$ , будем иметь

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{q}{2\pi k} \ln \frac{R}{\sqrt{y^2 + x^2}} \frac{R+b}{\sqrt{y^2 + (b+x)^2}} \frac{R+2b}{\sqrt{y^2 + (2b+x)^2}} \dots \\ \dots \frac{R-b}{\sqrt{(x-b)^2 + y^2}} \frac{R-2b}{\sqrt{(x-2b)^2 + y^2}} + \dots + \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R \quad (21, IV)$$

По этому уравнению можно вычислить и построить все изобары поля. В частности, для точек на осях  $y$  и  $x$  получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\gamma} &= \frac{q}{2\pi k} \left[ \ln \frac{R}{y} + \ln \frac{R^2 - b^2}{y^2 + b^2} \frac{R^2 - (2b)^2}{y^2 + (2b)^2} \dots \right] + \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R; \\ \frac{p}{\gamma} &= \frac{q}{2\pi k} \left[ \ln \frac{R}{x} + \ln \frac{R^2 - b^2}{x^2 - b^2} \frac{R^2 - (2b)^2}{x^2 - (2b)^2} \dots \right] + \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R \end{aligned} \right\} (22, IV)$$

При  $x < b$  второе уравнение будет иметь вид

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{q}{2\pi k} \left[ \ln \frac{R}{x} + \ln \frac{R^2 - b^2}{b^2 - x^2} \frac{R^2 - (2b)^2}{2b^2 - x^2} \dots \right] + \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R$$

Первое уравнение относится к оси  $y$ , второе — к оси  $x$ . Внешний контур фильтрации также является изобарой. По оси  $x$  он

определяется расстоянием  $R$ . По оси  $y$  — расстоянием  $y_0$ , получаемым из соотношения равенства напоров в крайних точках контура:

$$H_x = -\frac{q}{2\pi k} \ln R(R^2 - b^2)[R^2 - (2b)^2],$$

$$H_y = -\frac{q}{2\pi k} \ln y_0(y_0^2 + b^2)[y_0^2 + (2b)^2],$$

откуда

$$\frac{y_0}{R} = \frac{R^2 - b^2}{y_0^2 + b^2} \frac{R^2 - (2b)^2}{y_0^2 + (2b)^2} \quad (23, IV)$$

Это уравнение можно обобщить и дать в сокращенной записи

$$\frac{y_0}{R} = \prod_{i=1}^m \frac{R^2 - (ib)^2}{y_0^2 + (ib)^2} \quad (24, IV)$$

Здесь  $m$  — число скважин, расположенных по одну сторону ряда. Полное число скважин  $2m+1$ .

Уравнение легко решается графически.

Функция тока комбинационного течения, получаемая суммированием функций отдельных источников, в приведенной форме будет

$$\psi_r = \frac{1}{2\pi} \left( \arctg \frac{y}{x} + \arctg \frac{y}{x+b} + \arctg \frac{y}{x+2b} + \dots + \arctg \frac{y}{x-b} + \arctg \frac{y}{x-2b} + \dots \right) \quad (25, IV)$$

где  $\psi_r = \frac{\Psi}{q}$  изменяется от нуля до величины, равной числу источников.

Без особых затруднений уравнение решается графически.

Начальные эквипотенциалы вблизи скважины по форме близки к окружности. Поэтому принимая начальную эквипотенциаль за окружность радиуса  $r_0$  и относя точку этой эквипотенциали к оси  $y$  с координатами  $y=r_0, x=0$ , из первого уравнения (22, IV) получим величину пьезометрического давления на контуре центральной скважины (0)

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 = \frac{q}{2\pi k} \left[ \ln \frac{R}{r_0} + \ln \frac{R^2 - b^2}{r_0^2 + b^2} \frac{R^2 - (2b)^2}{r_0^2 - (2b)^2} \dots \right] + \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R$$

Величина  $r_0^2$  слишком мала по сравнению со значениями  $b^2, (2b)^2$  и т. д., ею можно пренебречь. Расчетное уравнение будет иметь вид

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 = \frac{q}{2\pi k a} \left[ \ln \frac{R}{r_0} + \ln \frac{R^2 - b^2}{b^2} \frac{R^2 - (2b)^2}{(2b)^2} \dots \right] + \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R \quad (26, IV)$$



В сокращенной записи получим

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 = \frac{Q}{2\pi ka} \left[ \ln \frac{R}{r_0} + \sum_{i=1}^m \ln \frac{R^2 - (ib)^2}{(ib)^2} \right] + \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R \quad (27, IV)$$

Забойное давление периферийных скважин можно определить по второму уравнению (22, IV), относя точку к окружности радиуса  $r_0$  с координатами  $y=0$  и  $x=ib+r_0$ :

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 = \frac{Q}{2\pi ka} \left[ \ln \frac{R}{ib+r_0} + \ln \frac{R^2 - b^2}{(ib+r_0)^2 - b^2} \times \frac{R^2 - (2b)^2}{(ib+r_0)^2 - (2b)^2} \dots \right] + \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R \quad (28, IV)$$

При равнодебитности скважин цепочки забойные давления, вообще говоря, будут разные. В табл. II и на графиках рис. 34

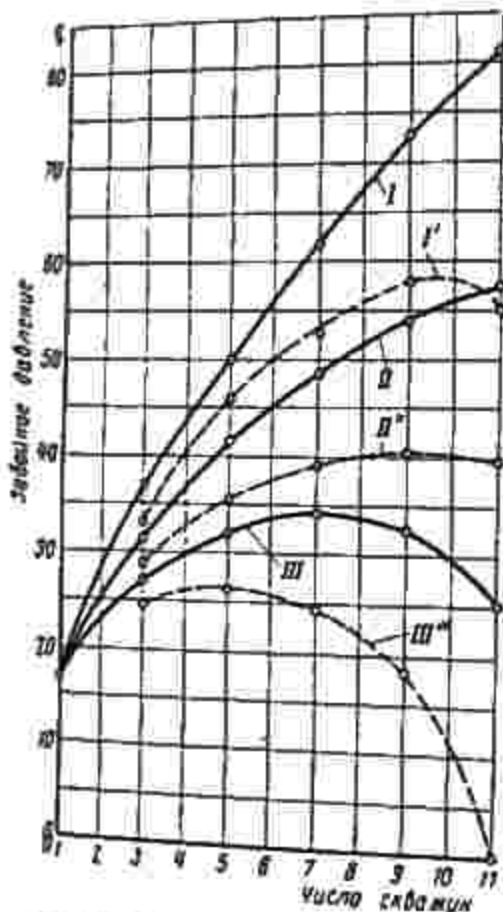


Рис. 34 Забойное давление центральной и крайних скважин, расположенных на одной прямой, при разных значениях интервала  $b$   
 кривые I и I' — для  $b=0,5$  м, II и II' — для  $b=1$  м, III и III' — для  $b=2$  м

сделано сравнение величин забойных давлений для центральной и крайних скважин ряда, симметрично расположенных на одной прямой в долях  $q$  при следующих данных:  $r_0=0,05$  м;  $R=10$  м и  $k=0,0005$  м/сек. Давления вычислены для одного и того же расхода  $q = \frac{Q}{n}$  при  $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 = 0$ . Кривые I, II и III относятся к центральной скважине, кривые I', II' и III' — к крайним.

Забойные давления всех скважин уменьшаются при увеличении расстояния между ними и при возрастании числа скважин. При этом забойное давление центральной скважины при увеличении числа скважин более резко возрастает для малых расстояний между скважинами. Это дает основание полагать, что при равенстве всех прочих условий расходы взаимодействующих скважин будут более резко уменьшаться при уменьшении расстояний между скважинами. В то же время расходы на скважину уменьшаются с увеличением общего количества скважин цепочки. Забойное давление крайних скважин меньше давления центральной.

Таблица II

Число скважин	Расстояние между скважинами $b$					
	0,5 м		1 м		2 м	
	центральная	крайние	центральная	крайние	центральная	крайние
3	36,7	33,0	31,5	29,0	27,0	24,6
5	50,0	46,1	41,5	35,5	32,0	26,2
7	62,2	52,5	48,5	39,0	34,0	24,4
9	72,6	58,0	54,0	40,5	32,5	18,4
11	81,0	55,0	57,3	39,5	25,2	0

При больших расстояниях до внешнего контура инфильтрации  $R$  и малых расстояниях между скважинами  $b$  большая разница в величине забойных давлений центральной и крайних скважин цепочки исчезает. Как показывают табличные данные (скважины 3 и 5 при  $b=0,5$  м), разница в давлениях в этом случае не превышает 8—10%. Только при этих условиях  $\left(\frac{R}{b} > 20\right)$  скважины можно считать равнодебитными при более или менее равных значениях забойных давлений и суммарный расход цепочки определять по забойному давлению центральной скважины из уравнения (27, IV)

$$\Sigma Q = \frac{2\pi ka (2m+1) H_0}{\ln \frac{R}{r_0} + \sum_{i=1}^m \ln \frac{R^2 - (ib)^2}{(ib)^2}} \quad (29, IV)$$

где  $H_0 = \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R$

Из анализа тех же данных следует, что для длинной цепочки скважин, расположенных на прямой при равных и достаточно малых расстояниях друг от друга, суммированное движение жидкости из скважин можно рассматривать как линейное. Наглядной иллюстрацией этого положения может служить рис. 35, позаимствованный из книги М. Маскета и показывающий распределение давления в бесконечном линейном ряду скважин с одинаковым интервалом между ними. На расстоянии от скважин, равном общему интервалу  $b$ , кривые равного давления для практических целей можно считать параллельными прямыми, как это и имеет место в прямолинейном равномерном потоке.

Для бесконечной цепочки скважин с одинаковым расстоянием между ними проф. И. А. Чарный дал формулу для расхода скважины

$$Q = \frac{2\pi ka}{\gamma} \frac{P_0 - P_R}{\ln \frac{0,5b}{\pi r_0} + \frac{\pi R}{0,5b}} \quad (30, IV)$$



при  $R \geq 0,5 b$ .  
 Скоростные условия поля. Приближенные формулы. Функция  
 потенциала скорости

$$\varphi = \frac{q}{2\pi} \ln \sqrt{y^2 - x^2} \sqrt{y^2 + (b+x)^2} \sqrt{y^2 + (2b+x)^2} \dots$$

$$\dots \sqrt{y^2 + (x-b)^2} \sqrt{y^2 + (x-2b)^2} \dots$$

Компоненты скорости по осям  $x$  и  $y$  определяются соответствующим дифференцированием

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

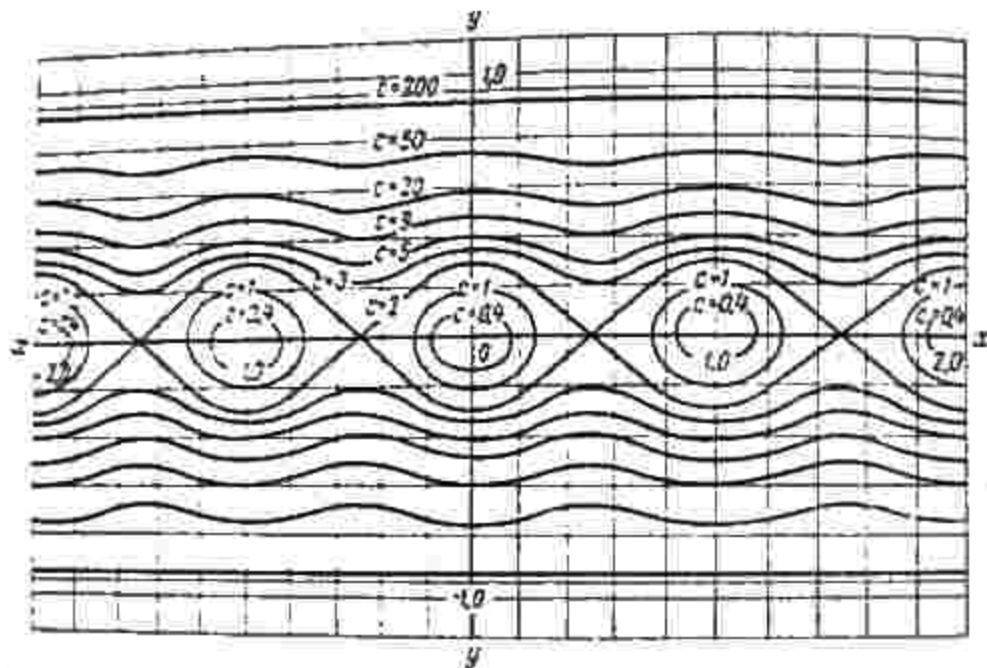


Рис. 22. Контуры равного давления относительно единичного линейного ряда скважин с одинаковым расстоянием между ними (давление  $p = 1$  ат)

После дифференцирования находим

$$u = \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{b+x}{(b+x)^2 + y^2} + \frac{2b+x}{(2b+x)^2 + y^2} + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{x-b}{(x-b)^2 + y^2} + \frac{x-2b}{(x-2b)^2 + y^2} + \dots \right];$$

$$v = \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{y}{(b+x)^2 + y^2} + \frac{y}{(2b+x)^2 + y^2} + \dots + \right.$$

$$\left. + \frac{y}{(x-b)^2 + y^2} + \frac{y}{(x-2b)^2 + y^2} + \dots \right].$$

Скорости фильтрации для точек по осям  $x(y=0)$  и  $y(x=0)$  равны

$$u = \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{1}{x} + \sum_{i=1}^m \frac{2x}{x^2 - (ib)^2} \right];$$

$$v = \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{1}{y} + \sum_{i=1}^m \frac{2y}{y^2 + (ib)^2} \right]. \quad (31, IV)$$

Когда  $b$  настолько мала по сравнению с  $R$ , что ею можно пренебречь и выражение  $R^2 - (ib)^2$  принять равным  $R^2$ , тогда из уравнения (27, IV) получаем приближенную формулу для расчета взаимодействующих скважин прямолинейного ряда

$$\left( \frac{p}{\gamma} \right)_0 = \frac{Q}{2\pi h \mu} \left[ \ln \frac{R}{r_0} + \sum_{i=1}^m \ln \frac{R^2}{(ib)^2} \right] + \left( \frac{p}{\gamma} \right)_R \quad (32, IV)$$

Соответственно суммарный расход

$$\Sigma Q = \frac{2\pi h \mu (2m+1) H_0}{\ln \frac{R}{r_0} + \sum_{i=1}^m \ln \frac{R^2}{(ib)^2}} \quad (33, IV)$$

Формулы не учитывают никакой определенной формы внешнего контура инфильтрации. Чем больше значения  $R$  по сравнению с  $b$ , тем лучше будут совпадать результаты вычислений по точной и приближенной формулам.

**Симметричные скважины с круговым контуром инфильтрации.**  
 При бурении шахтных стволов в сложных гидрогеологических условиях может встретиться необходимость устройства на месте ствола водонепроницаемой завесы с правильным внешним круговым контуром. В простейшем виде такую завесу можно получить двумя взаимодействующими скважинами, расположенными симметрично по отношению к центру внешнего кругового контура инфильтрации (рис. 36).

Внешний контур с радиусом  $R$  по-прежнему эквипотенциаль. Но эквипотенциалью является и окружность забоя скважины. Имеем две граничные эквипотенциальные кривые: круговой контур инфильтрации — конечная и круговой контур скважины (любой) — начальная. Между ними находится интересующее нас поле течения. Задача сводится к построению такого поля течения, в котором эквипотенциальными служили бы концентрические окружности. Тогда одну из них можно принять за конечную, другую — за начальную. В гидродинамике доказывается, что такое поле можно получить комбинацией источника и стока.



Проф. В. Н. Шелтячев и Г. В. Пыхачев дают решения для определения взаимного расстояния источника и стока, обусловливающего отображение их в окружностях внешнего контура и контура скважины. Приближенные решения, при которых предполагается, что  $r_0 < R - b$ , ограничиваются отображением стока (источника) только в окружности внешнего контура. При этом расстояния последних от общего центра должны удовлетворять соотношению  $A_1 D \cdot A_1' D = R^2$ .

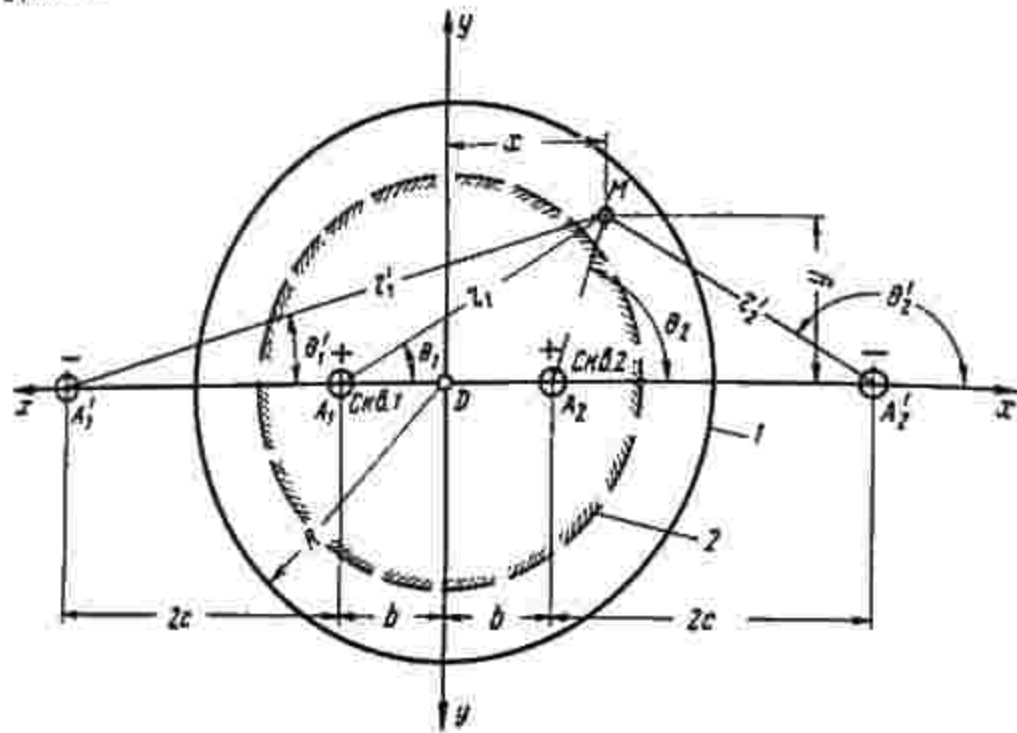


Рис. 10. Две взаимодействующие скважины с круговым контуром фильтрации. 1 — внешний круговой контур инфильтрации; 2 — контур ствола

Выразив длины  $A_1 D$  и  $A_1' D$  через заданные значения

$$A_1 D = b, \quad A_1' D = 2c + b,$$

получим

$$\begin{aligned} b(2c + b) &= R^2, \\ 2c &= \frac{R^2 - b^2}{b}. \end{aligned} \quad (34, IV)$$

На этих основаниях представим комбинированную схему поля двумя парами сопряженных источников и стоков. Круговую эквипотенциаль радиуса  $R$  примем непроницаемой стенкой и будем рассматривать течение во внутреннем пространстве за этой стенкой. Функция потенциала комбинированного поля напишется аналогично предыдущему суммированием отдельных функций

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi a} (\ln r_1 - \ln r_1' + \ln r_2 - \ln r_2')$$

или

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi a} \ln \frac{r_1}{r_1'} \frac{r_2}{r_2'}$$

Напорная функция

$$H = -\frac{Q}{2\pi ak} \ln \frac{r_1}{r_1'} \frac{r_2}{r_2'}$$

Разность напоров для двух напорных поверхностей дает изменение пьезометрического давления

$$\frac{p}{\gamma} - \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R = H - H_R.$$

Для внешнего контура инфильтрации имеем:

$$\begin{aligned} r_1 &= R - b; & r_1' &= \frac{R^2 - b^2}{b} - (R - b) = \frac{R(R - b)}{b}; \\ r_2 &= 2b + (R - b) = R + b; & r_2' &= \frac{R^2 - b^2}{b} + 2b + (R - b) = \\ & & &= \frac{R(R + b)}{b}; \end{aligned}$$

$$H_R = -\frac{Q}{2\pi ak} \ln \frac{(R - b)b}{R(R - b)} \frac{(R + b)b}{R(R + b)}$$

$$H_R = -\frac{Q}{2\pi ak} \ln \frac{b^2}{R^2}.$$

Взяв разность напоров, получим

$$\frac{p}{\gamma} - \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R = -\frac{Q}{2\pi ak} \ln \frac{r_1}{r_1'} \frac{r_2}{r_2'} + \frac{Q}{2\pi ak} \ln \frac{b^2}{R^2},$$

откуда при  $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_R = 0$  будем иметь

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{Q}{2\pi ak} \left( \ln \frac{b^2}{R^2} - \ln \frac{r_1}{r_1'} \frac{r_2}{r_2'} \right). \quad (35, IV)$$

Это уравнение определяет величину пьезометрического давления в любой точке пласта (массива) и может служить для построения изобар рассматриваемого поля. В частности, для определения забойных давлений равнодебитных скважин надо принять (соответственно для левой и правой скважины обратные значения)

$$\begin{aligned} r_1 &= r_0; & r_1' &= \frac{R^2 - b^2}{b}; \\ r_2 &= 2b; & r_2' &= \frac{R^2 - b^2}{b} + 2b = \frac{R^2 + b^2}{b}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 &= \frac{Q}{2\pi ak} \left[ \ln \frac{b^2}{R^2} - \ln \frac{r_0 b}{(R^2 - b^2)} \frac{2b^2}{(R^2 + b^2)} \right] + \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R; \\ \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 &= \frac{Q}{2\pi ak} \ln \frac{R^2 - b^2}{2R^2 b r_0} + \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R. \end{aligned} \quad (36, IV)$$



Расходы скважин при перепаде давления  $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R = H_0$

будут 
$$Q_1 = Q_2 = \frac{2\pi akH_0}{\ln \frac{R^2 - b^2}{2R^2br_0}} \quad (37,IV)$$

Функция тока комбинированного поля может быть решена суммированием функций токов двух пар источников и стоков

$$\psi = \frac{Q}{2\pi a} \left( \operatorname{arctg} \frac{y}{x+b} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x-b} - \operatorname{arctg} \frac{y}{2c+b+x} - \operatorname{arctg} \frac{y}{2c+b-x} \right) \quad (38,IV)$$

Это уравнение решается графически. Функция потенциала скорости в декартовых координатах

$$\varphi = \frac{q}{2\pi} \left[ \ln \sqrt{(x+b)^2 + y^2} + \ln \sqrt{(x-b)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(2c+b+x)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(2c+b-x)^2 + y^2} \right]$$

Компоненты скорости по осям  $x$  и  $y$

$$u = \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{b+x}{(b+x)^2 + y^2} + \frac{x-b}{(x-b)^2 + y^2} - \frac{2c+b+x}{(2c+b+x)^2 + y^2} - \frac{2c+b-x}{(2c+b-x)^2 + y^2} \right];$$

$$v = \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{y}{(b+x)^2 + y^2} + \frac{y}{(x-b)^2 + y^2} - \frac{y}{(2c+b+x)^2 + y^2} - \frac{y}{(2c+b-x)^2 + y^2} \right] \quad (39,IV)$$

Скорости фильтрации для точек на осях  $x(y=0)$  и  $y(x=0)$

$$u = \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{2x}{x^2 - b^2} - \frac{2(2c+b)}{(2c+b)^2 - x^2} \right];$$

$$v = \frac{q}{2\pi} \left[ \frac{2y}{b^2 + y^2} - \frac{2y}{(2c+b)^2 + y^2} \right] \quad (40,IV)$$

**Кольцевая батарея скважин.** При проходке стволов шахт может иметь место также схема нагнетательных скважин, расположенных по окружности на равных расстояниях между собой. Рассмотрим взаимодействие батарей, составленной из четырех скважин, симметрично расположенных относительно общего центра на окружности радиуса  $R_0$  (рис. 37). При этом никаких ограничений для формы внешнего контура инфильтрации нет. Инфильтрацию рассматриваем так, как она получается при нагнетании жидкости в безграничную среду, зажатую между плотными породами.

По-прежнему разность пьезометрических напоров для двух точек поля определяет разность пьезометрических давлений для этих точек

$$H - H_R = \frac{p}{\gamma} - \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R$$

Напор для любой точки поля  $M(x, y)$ :

$$H = -\frac{Q}{2\pi ak} \ln r_1 r_2 r_3 r_4$$

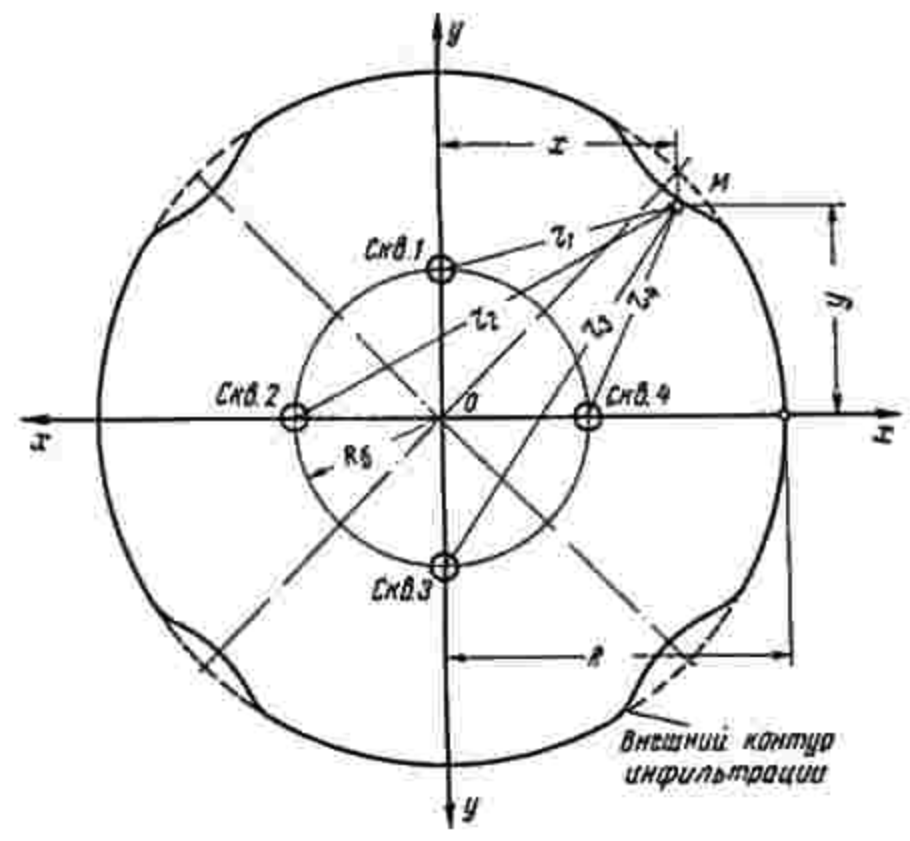


Рис. 37. Кольцевая батарея скважин

В соответствии с обозначениями рис. 37 будем иметь

$$H = -\frac{Q}{2\pi ak} \ln \sqrt{(y-R_0)^2 + x^2} \sqrt{y^2 + (x+R_0)^2} \times \sqrt{y^2 + (x-R_0)^2}$$

Напор на внешнем контуре инфильтрации имеет постоянное значение и может быть выражен через любую координату по оси  $x$  или  $y$ . Обозначая расстояние по оси  $x$  до точки на внешнем контуре через  $R$  и принимая координату  $y=0$ , из предыдущего уравнения получим

$$H_R = -\frac{Q}{2\pi ak} \ln (R^2 - R_0^2)$$



Пьезометрическое давление в любой точке инфильтрационного потока определяется уравнением

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{Q}{2\pi ak} \ln \frac{R^2 - R_0^2}{(y - R_0)^2 + x^2} \sqrt{(y + R_0)^2 + x^2} + \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R \quad (41, IV)$$

Для точек, расположенных на оси  $y(x=0)$ , пьезометрическое давление

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{Q}{2\pi ak} \ln \frac{R^2 - R_0^2}{y^2 - R_0^2} + \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R \quad (42, IV)$$

Для точек — на оси  $x(y=0)$

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{Q}{2\pi ak} \ln \frac{R^2 - R_0^2}{x^2 - R_0^2} + \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R \quad (43, IV)$$

Для точек, расположенных на биссектрисах поля ( $x=y$ ),

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{Q}{2\pi ak} \ln \frac{R^2 - R_0^2}{4y^2 + R_0^2} + \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R \quad (44, IV)$$

Из последнего уравнения следует, что давление в точке пересечения биссектрисы поля с внешним контуром инфильтрации на расстоянии  $R_1$  от центра равно

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)_1 = \frac{Q}{2\pi ak} \ln \frac{R^2 - R_0^2}{R_1^2 + R_0^2} + \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R \quad (45, IV)$$

так как  $4y^2 = 4R_1^2 \sin^2 45^\circ = R_1^2$ .

Для того чтобы и в этой точке внешнего контура давление  $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_1$  равнялось  $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_R$ , необходимо, чтобы  $R_1$  было меньше  $R$ .

Простирание инфильтрационного потока по осям  $x$  и  $y$  одинаково и оценивается радиусом  $R$  от центра поля. Простираение по биссектрисам немного меньше.

На рис. 38 показан общий характер поля течения четырех равнодебитных взаимодействующих скважин и по формулам (41—45, IV) вычислены изобары для значений

$$\frac{Q}{2\pi ak} = 1, \quad \frac{R}{R_0} = 10 \text{ и } \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R = 0.$$

Анализ формул и вычисленных значений изобар позволяет сделать вывод, что даже для сравнительно небольших отношений  $\frac{R}{R_0}$  разница в величине давлений для точек центральных осей и биссектрис поля получается очень малой, и изобары можно

принять за окружности, concentричные кольцевой батарее скважин. Благодаря симметрии расположения скважин инфильтрационный поток делится на четыре одинаковые части. Биссектрисы поля являются нейтральными линиями тока. Главные линии тока направлены по координатным осям. При использовании метода

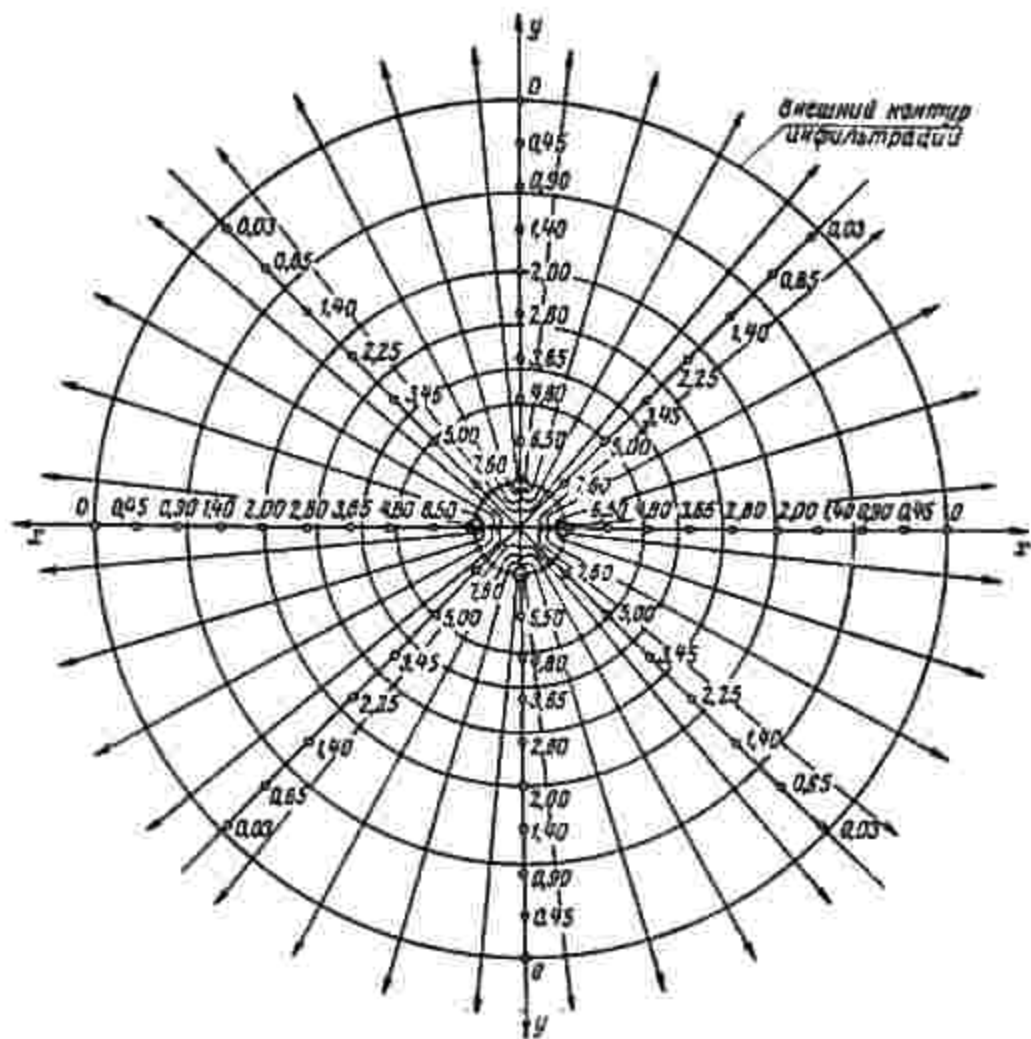


Рис. 38. Общий характер поля течения четырех равнодебитных взаимодействующих скважин

квадратичности ортогональной сетки вычерчивание промежуточных линий тока не представляет затруднений.

Давление на забое получим из основного уравнения (41, IV), если координату  $y$  принять равной  $y = R_0 + r_0$ , а координату  $x = 0$

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 = \frac{Q}{2\pi ak} \ln \frac{R^2 - R_0^2}{r_0(2R_0 + r_0) [(R_0 + r_0)^2 + R_0^2]} + \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R$$



Величина  $r_0$  слишком мала по сравнению с  $R_0$ . Пренебрегая последней, будем иметь

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 = \frac{Q}{2\pi ak} \ln \frac{R^n - R_0^n}{4R_0^2 r_0} + \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R \quad (46,IV)$$

Уравнение (46,IV) можно обобщить и распространить на случай любого числа симметричных скважин на окружности радиуса  $R_0$ . Легко доказать, что для случая  $n$  скважин, расположенных на равных расстояниях вдоль окружности радиуса  $R_0$ , получим

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 = \frac{Q}{2\pi ak} \ln \frac{R^n - R_0^n}{nR_0^{n-1} r_0} + \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R \quad (47,IV)$$

По этому уравнению определяется величина забойного давления для  $n \geq 2$  скважин, симметрично расположенных на окружности радиуса  $R_0$ .

Расход каждой скважины при  $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R = H_0$

$$Q = \frac{2\pi ak n H_0}{\ln \frac{R^n - R_0^n}{nR_0^{n-1} r_0}} \quad (48,IV)$$

Суммарный расход всех  $n$  скважин

$$\Sigma Q = \frac{2\pi ak n H_0}{\ln \frac{R^n - R_0^n}{nR_0^{n-1} r_0}} \quad (49,IV)$$

В тех случаях, когда величина  $R_0^n$  слишком мала по сравнению с величиной  $R^n$ , уравнение (49,IV) получает более простой вид

$$\Sigma Q = \frac{2\pi ak n H_0}{\ln \frac{R^n}{nR_0^{n-1} r_0}} \quad (50,IV)$$

При этих условиях уравнение (50,IV) справедливо для любого количества скважин  $n \geq 1$ , расположенных на равных расстояниях по окружности радиуса  $R_0$  (даже для одной скважины).

Из уравнения (50,IV) видно, что увеличение числа скважин батарей в некоторое число раз не означает, что в это же число раз увеличится расход каждой взаимодействующей скважины, а следовательно, и суммарный расход всей батареи. Можно прийти к выводу, что оптимальное значение расхода кольцевой батареи будет соответствовать некоторому определенному числу сква-

жин  $n$ , по всей вероятности, небольшому числу их. Заметный рост суммарного расхода скважин можно получить увеличением радиуса батарей. Но это не всегда возможно по условиям нагнетания.

*Скоростные условия поля.* Функция потенциала скорости для четырехскважинной симметричной системы равна

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi a} \ln \sqrt{(y - R_0)^2 + x^2} \sqrt{y^2 + (x + R_0)^2} \sqrt{(y + R_0)^2 + x^2} \times \\ \times \sqrt{y^2 + (x - R_0)^2}$$

Компоненты скорости по осям  $x$  и  $y$

$$\left. \begin{aligned} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{Q}{2\pi a} \left[ \frac{x}{(y - R_0)^2 + x^2} + \frac{x + R_0}{y^2 + (x + R_0)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x}{(y + R_0)^2 + x^2} - \frac{x - R_0}{y^2 + (x - R_0)^2} \right]; \\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{Q}{2\pi a} \left[ \frac{y - R_0}{(y - R_0)^2 + x^2} + \frac{y}{y^2 + (x + R_0)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{y + R_0}{(y + R_0)^2 + x^2} + \frac{y}{y^2 + (x - R_0)^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (51,IV)$$

Скорости фильтрации в любых точках осей  $x(y=0)$  и  $y(x=0)$  после несложных преобразований получаются равными

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{Q}{2\pi a} \frac{4x^2}{x^4 - R_0^4}; \\ v &= \frac{Q}{2\pi a} \frac{4y^2}{y^4 - R_0^4}. \end{aligned} \right\} \quad (52,IV)$$

Уравнения легко обобщаются на случай любого числа  $n$  симметричных скважин

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{Q}{2\pi a} \frac{n x^{n-1}}{x^n - R_0^n}; \\ v &= \frac{Q}{2\pi a} \frac{n y^{n-1}}{y^n - R_0^n}. \end{aligned} \right\} \quad (53,IV)$$

Как видно, скорости фильтрации для любых точек, расположенных на главных линиях тока, равны между собой

$$u_x = v_y = \frac{Q}{2\pi a} \frac{n r^{n-1}}{r^n - R_0^n} \quad (54,IV)$$

Здесь  $r$  — расстояние рассматриваемой точки по осям  $x$  и  $y$  от центра окружности батарей.

Найдем скорость фильтрации для точек, лежащих на биссектрисе поля или на нейтральной линии тока.



Компоненты скорости для точек на биссектрисе поля, определяемые из уравнений (51, IV) при  $x=y$ , равны

$$u \quad v = \frac{Q}{2\pi a} \frac{8y^2}{4y^4 + R_0^4} \quad (55, IV)$$

Скорость фильтрации для этих точек

$$v_{\text{фильтрации}} = \sqrt{u^2 + v^2} = \frac{Q}{2\pi a} \frac{8y^2\sqrt{2}}{4y^4 + R_0^4} \quad (56, IV)$$

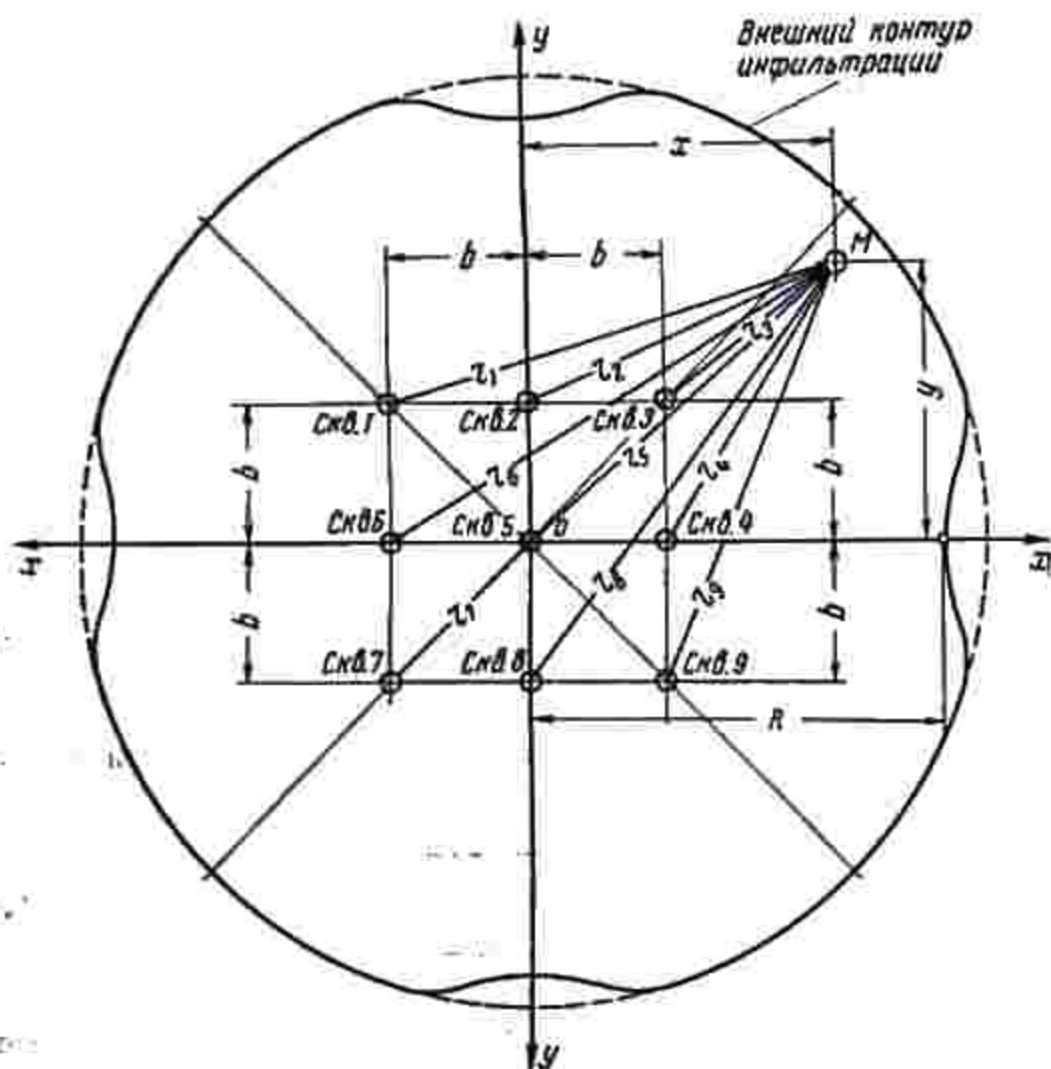


Рис. 29. Батарея скважин по квадратной сетке

Так как  $y=r \sin 45^\circ$ , то обобщенная формула на случай  $n$  симметричных скважин будет иметь вид

$$v_{\text{фильтрации}} = \frac{Q}{2\pi a} \frac{nr^{n-1}}{r^n + R_0^n} \quad (57, IV)$$

Из уравнения (57, IV) видно, что скорости фильтрации для главных и нейтральных линий тока не равны между собой.

Во всех случаях, когда  $r < R_0$ , соответствующие разности имеют обратные знаки.

**Батарея по квадратной сетке.** Для того чтобы закончить раздел о многоскважинном нагнетании, остается привести основные расчетные формулы для небольшой группы скважин, расположенных по квадратной сетке (рис. 29). Этот случай может иметь место при организации площадных завес для профилактического заиливания выработанных пространств. Здесь нагнетание производится через несколько рядов скважин.

Для определения забойного давления может служить уравнение

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 = \frac{Q}{2\pi ak} \ln \frac{2R^n}{(n-1)r_0 b^{n-1}} + \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R \quad (58, IV)$$

где  $n$  — полное число скважин батареи.

Расход отдельной скважины и суммарный расход всей батареи будут

$$Q = \frac{2\pi a k H_0}{\ln \frac{2R^n}{(n-1)r_0 b^{n-1}}} ; \quad \sum Q = \frac{2\pi a k n H_0}{\ln \frac{2R^n}{(n-1)r_0 b^{n-1}}} \quad (59, IV)$$

Из сравнения уравнений (59, IV) с аналогичными уравнениями для кольцевой батареи (48—50, IV) видно, что расходы квадратной батареи при всех прочих равных условиях меньше расходов кольцевой батареи. Этот вывод вполне согласуется с более стесненными условиями течения потока из скважин прямолинейной батареи.

Необходимо отметить, что при равенстве забойных давлений расходы батарей по квадратной сетке с числом скважин больше четырех не для всех скважин батареи будут одинаковы. Но, когда расстояния между скважинами малы по сравнению с радиусом действия  $R$ , разницей можно пренебречь и скважины считать равнодебитными. В этом смысле и следует понимать уравнения (59, IV).

**Коэффициенты интерференции.** Рассмотренными схемами охвачены все наиболее типичные случаи взаимодействия, которые могут встретиться при организации тампонажа горных пород методом нагнетания твердеющих жидкостей через скважины. С помощью рассмотренных уравнений можно изучать взаимодействие между скважинами малых групп, симметричных относительно общего центра поля.

Анализ выполненных решений позволяет сделать ряд обобщений. При уменьшении расстояний между взаимодействующими скважинами расходы отдельных скважин и суммарный расход



всех скважин уменьшаются (уравнения 20, 29, 33, 37, 48, 50, 59, IV). Расходы на скважину уменьшаются с увеличением общего количества скважин в группе (уравнения 29, 33, 50, 59, IV). В обратном отношении изменится величина забойных давлений. При равенстве расходов взаимодействующей и одиночной скважин забойное давление взаимодействующей и одиночной скважин всегда больше давлений одиночной.

Поэтому влияние взаимодействия можно выразить коэффициентом интерференции, если взять отношение забойных давлений взаимодействующей и одиночной скважин, а расходы их принять одинаковыми.

$$\beta = \left(\frac{p}{\gamma}\right)' : \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0$$

при  $Q = Q$  и  $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_R = 0$ .

Коэффициенты интерференции для разных случаев взаимодействия легко вычисляются из формул для забойного давления взаимодействующих скважин, рассмотренных ранее, и из формулы забойного давления одиночной скважины, которое получается из уравнения (50, IV) при  $l = 1$ .

$$p_0 = \frac{\gamma Q}{2\pi kh} \ln \frac{R}{r_0} + p_R \quad (60, IV)$$

Для двух скважин (19, IV)

$$\beta = \frac{\ln \frac{R^2}{2br_0}}{\ln \frac{R}{r_0}} \quad (61, IV)$$

Для линейного ряда скважин (27, IV)

$$\beta = \frac{\ln \frac{R}{r_0} + \sum_{i=1}^m \ln \frac{R^2 - (ib)^2}{(ib)^2}}{\ln \frac{R}{r_0}} \quad (62, IV)$$

Для бесконечной цепочки скважин при  $R \geq 0,5b$  (30, IV)

$$\beta = \frac{\ln \frac{0,5b}{r_0} + \frac{\pi R}{0,5b}}{\ln \frac{R}{r_0}} \quad (63, IV)$$

Для симметричных скважин с круговым контуром фильтрации (37, IV)

$$\beta = \frac{\ln \frac{R^2 - b^2}{2R^2 br_0}}{\ln \frac{R}{r_0}} \quad (64, IV)$$

Для кольцевой батареи скважин (49, IV)

$$\beta = \frac{\ln \frac{R^n - R_0^n}{nR_0^{n-1} r_0}}{\ln \frac{R}{r_0}} \quad (65, IV)$$

Для батареи по квадратной сетке (59, IV)

$$\beta = \frac{\ln \frac{2R^n}{(n-1)r_0 b^{n-1}}}{\ln \frac{R}{r_0}} \quad (66, IV)$$

Все обозначения взяты в соответствии с исходными формулами.

**Критическая скорость.** При принятом методе исследования скорости фильтрации в проницаемой среде, определяемые рассмотренными формулами, не могут быть больше критической величины, определяющей переход линейной (ламинарной) фильтрации в турбулентную. Современными значениями критической скорости линейной фильтрации в пористой среде считаются критерии проф. В. Н. Шелкачева и акад. М. Д. Миллионщикова.

По Шелкачеву, критическая скорость

$$w_{кр} = \frac{m^{2,3} \nu Re_{кр}}{10 \sqrt{k_{sp}}} \quad (67, IV)$$

По Миллионщикову

$$w_{кр} = \frac{m^{1,5} \nu Re_{кр}}{\sqrt{k_{sp}}} \quad (68, IV)$$

Здесь  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости;  
 $m$  — объемная пористость (скважность) среды;  
 $Re_{кр}$  — критическое значение числа Рейнольдса.

Критические значения чисел  $Re$ , выше которых нарушается линейный закон фильтрации Дарси, для формулы Шелкачева колеблются в пределах от 1 до 12 и в среднем составляют 6,5; для формулы Миллионщикова — от 0,022 до 0,29 и в среднем равны 0,156.

Относительно широкие пределы колебаний критических значений чисел  $Re$  объясняются зависимостью их от структуры порового пространства пористой среды, аналогично тому, как в трубной гидравлике величина  $Re_{кр}$  зависит от степени шероховатости стенок трубы. С другой стороны, переход от одного режима фильтрации к другому в пористой среде происходит плавно, что также затрудняет установление строго определенного критического значения  $Re_{кр}$ .

Так как нарушение линейного закона фильтрации при боковом нагнетании жидкости может иметь место только в самых ближай-



ших окрестностях забоя (что не имеет решающего значения), то определенные критических скоростей  $\omega_{кр}$  по средним значениям критических чисел  $Re_{кр}$  дает вполне надежные решения. Скорости фильтрации во всех рассмотренных схемах регулируются расходами нагнетания.

**Несовершенная скважина в пласте ограниченной мощности.** При большой мощности проницаемого слоя тампонажная скважина будет гидродинамически несовершенной. Для решения вопросов, связанных с назначением глубины заходки отдельных скважин, и выяснения влияния несовершенства скважины на производительность нагнетания необходимо рассмотреть хотя бы один тип таких скважин. Этот случай нагнетания является наиболее общим. Расчет нагнетания производится по уравнениям Маскета (39—40, II). Аналогично предыдущему разность напоров для двух напорных поверхностей дает изменение приведенных давлений. Исходя отсюда и на основании уравнений (39 и 40, II), при обозначениях по рис. 14 получаем

$$p^* = \gamma \left\{ \frac{Q}{4\pi ak} \left[ 2 \ln \frac{4b}{r_0} - \ln \Phi(h) \right] - \frac{Q}{2\pi bk} \ln \frac{4b}{r} \right\} + p_R^* \quad (69, IV)$$

где

$$\Phi(h) = \frac{\Gamma(0,875h) \Gamma(0,125h)}{\Gamma(1-0,875h) \Gamma(1-0,125h)}$$

$h = \frac{a}{b}$  — относительное вскрытие пласта;

$\Gamma$  — «гамма-функция», табулированная в математических справочниках.

Этим уравнением определяется давление в любой точке пласта удаленной области от скважины для  $r \geq 2b$ .

При  $r = R$  получается давление на забое скважины

$$p_0^* = \frac{\gamma Q}{2\pi bk} \left\{ \frac{1}{2h} \left[ 2 \ln \frac{4b}{r_0} - \ln \Phi(h) \right] - \ln \frac{4b}{R} \right\} + p_R^* \quad (70, IV)$$

Отсюда находится расход нагнетания

$$Q = \frac{2\pi bk (p_0^* - p_R^*)}{\gamma \left\{ \frac{1}{2h} \left[ 2 \ln \frac{4b}{r_0} - \ln \Phi(h) \right] - \ln \frac{4b}{R} \right\}} \quad (71, IV)$$

Для удобства пользования формулами Маскета на рис. 40 дан график функции  $\ln \Phi(h)$  в зависимости от величины относительного вскрытия пласта.

Из эмпирических решений для этой схемы нагнетания иногда пользуются формулой Козени (30, II). Маскет отмечает, что формула Козени дает правильные значения дебитов несовершенных скважин при простой конструкции формулы. В этом доля преимуществ формулы Козени. Поэтому представляет практический ин-

терес сопоставить результаты вычислений по формулам Маскета и Козени.

На рис. 41 представлены графики производительности несовершенных скважин в функции относительного вскрытия пласта и полкой мощности массива, составленные по формулам Маскета и Козени для перепада

давления  $H_0 = 5$  м при радиусе скважины  $r_0 = 0,1$  м, коэффициенте фильтрации  $k = 0,016 \times 10^{-2}$  м/сек и радиусе инъекции  $R = 10$  м. Рис. 41, а и табл. 12 дают зависимость расходов (м<sup>3</sup>/сек) скважины от относительной величины вскрытия для трех значений мощности массива 5, 10 и 15 м. С увеличением вскрытия расходы скважин повышаются для всех мощностей массива и при полном вскрытии соответственно составляют  $5,45 \cdot 10^{-3}$ ;  $10,9 \cdot 10^{-3}$  и  $16,35 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>/сек. Абсолютная величина расходов для малых вскрытий больше по Маскету, для

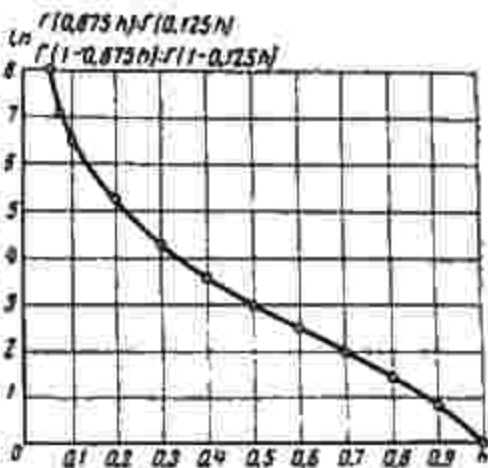


Рис. 40. График логарифмической функции  $\Phi(h)$  в формуле (70, IV)

Таблица 12

$h = \frac{a}{b}$	$b = 5$ м			$b = 10$ м	
	плоско-радиальное	Маскет	Козени	плоско-радиальное	Маскет
0,1	$0,81 \cdot 10^{-3}$	$1,26 \cdot 10^{-3}$	$0,66 \cdot 10^{-3}$	$1,09 \cdot 10^{-3}$	$1,91 \cdot 10^{-3}$
0,2	$1,09 \cdot 10^{-3}$	$1,96 \cdot 10^{-3}$	$1,42 \cdot 10^{-3}$	$2,18 \cdot 10^{-3}$	$3,20 \cdot 10^{-3}$
0,4	$2,18 \cdot 10^{-3}$	$3,08 \cdot 10^{-3}$	$2,95 \cdot 10^{-3}$	$4,36 \cdot 10^{-3}$	$5,42 \cdot 10^{-3}$
0,5	$2,72 \cdot 10^{-3}$	$3,60 \cdot 10^{-3}$	$3,70 \cdot 10^{-3}$	$5,42 \cdot 10^{-3}$	$6,5 \cdot 10^{-3}$
0,6	$3,27 \cdot 10^{-3}$	$4,10 \cdot 10^{-3}$	$4,33 \cdot 10^{-3}$	$6,54 \cdot 10^{-3}$	$7,6 \cdot 10^{-3}$
0,8	$4,36 \cdot 10^{-3}$	$4,88 \cdot 10^{-3}$	$5,20 \cdot 10^{-3}$	$8,72 \cdot 10^{-3}$	$9,36 \cdot 10^{-3}$
1,0	$5,45 \cdot 10^{-3}$	$5,45 \cdot 10^{-3}$	$5,45 \cdot 10^{-3}$	$10,90 \cdot 10^{-3}$	$10,90 \cdot 10^{-3}$

Продолжение табл. 12

$h = \frac{a}{b}$	$b = 10$ м		$b = 15$ м	
	Козени	плоско-радиальное	Маскет	Козени
0,1	$1,25 \cdot 10^{-3}$	$1,63 \cdot 10^{-3}$	$2,53 \cdot 10^{-3}$	$1,83 \cdot 10^{-3}$
0,2	$2,65 \cdot 10^{-3}$	$3,27 \cdot 10^{-3}$	$4,36 \cdot 10^{-3}$	$3,83 \cdot 10^{-3}$
0,4	$5,45 \cdot 10^{-3}$	$6,54 \cdot 10^{-3}$	$7,70 \cdot 10^{-3}$	$7,90 \cdot 10^{-3}$
0,5	$6,80 \cdot 10^{-3}$	$8,15 \cdot 10^{-3}$	$9,30 \cdot 10^{-3}$	$9,80 \cdot 10^{-3}$
0,6	$8,05 \cdot 10^{-3}$	$9,81 \cdot 10^{-3}$	$11,00 \cdot 10^{-3}$	$11,60 \cdot 10^{-3}$
0,8	$9,90 \cdot 10^{-3}$	$13,05 \cdot 10^{-3}$	$13,90 \cdot 10^{-3}$	$14,50 \cdot 10^{-3}$
1,0	$10,90 \cdot 10^{-3}$	$16,35 \cdot 10^{-3}$	$16,35 \cdot 10^{-3}$	$16,35 \cdot 10^{-3}$



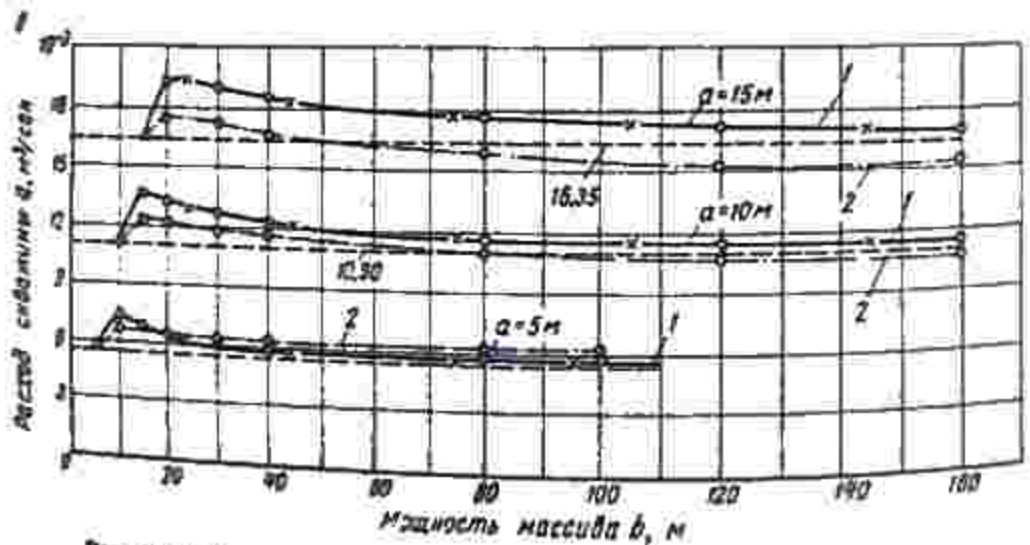
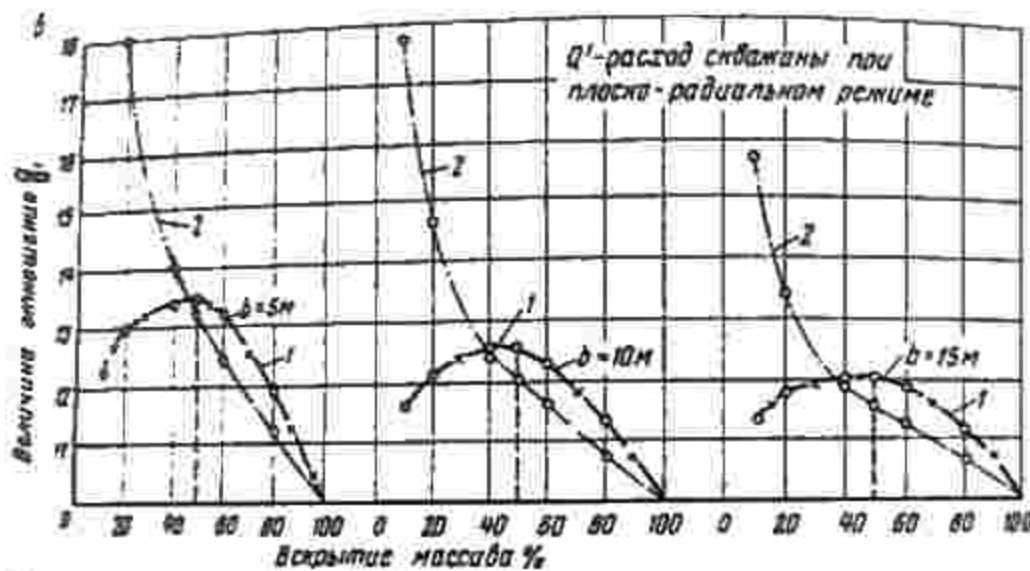
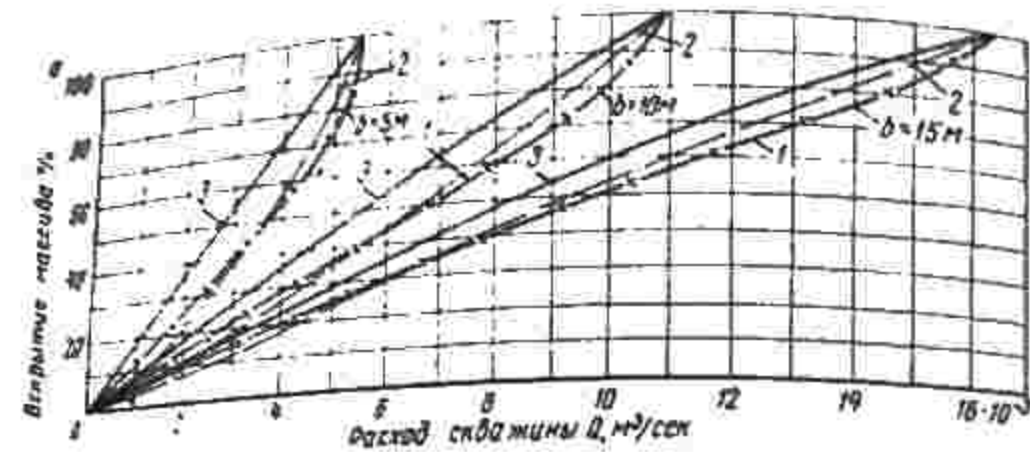


Рис. 41. Производительность несовершенных скважин по Маскету и Козени: 1 — расходы по Козени; 2 — расходы по Маскету; 3 — при плоско-радиальном массиве

больших вскрытий по Козени. Но в общем разница незначительна и не превышает 5–6%.

Кривые, рис. 41, б и табл. 13 определяют величину относительного превышения поглощаемых расходов несовершенной скважины над расходами плоско-радиального течения при изменении степени вскрытия массива. Относительное превышение расходов для формул Маскета и Козени определяется по-разному. Если по Маскету отношение  $Q/Q'$  неизменно увеличивается с уменьшением вскрытия массива, то по Козени для этого отношения существует максимум, соответствующий пятидесятипроцентной ординате вскрытия. Пожалуй, в этом и заключаются основные различия в характере распределения расходов несовершенных скважин, рисуемые формулами Маскета и Козени. При всем этом относительный прирост расходов для обеих формул увеличивается с уменьшением мощности массива.

Таблица 13

$\delta = \frac{a}{b}$	$\delta = 5 \text{ м}$		$\delta = 10 \text{ м}$		$\delta = 15 \text{ м}$	
	Маскет	Козени	Маскет	Козени	Маскет	Козени
0,1	2,33	1,22	1,77	1,16	1,26	1,13
0,2	1,80	1,30	1,46	1,22	1,34	1,17
0,4	1,41	1,35	1,24	1,25	1,14	1,20
0,5	1,32	1,36	1,20	1,26	1,14	1,21
0,6	1,25	1,32	1,16	1,23	1,12	1,18
0,8	1,12	1,19	1,07	1,13	1,06	1,11
1,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Рис. 41, в и табл. 14 изображают важную зависимость расходов ( $\text{м}^3/\text{сек}$ ) несовершенной скважины от мощности массива при фиксированном вскрытии 5, 10 и 15 м. Кривые этой зависимости показывают, что по мере увеличения мощности массива величина расходов несовершенной скважины вначале увеличивается. Быстро достигнув максимума по обеим формулам, начинает уменьшаться. При этом по формуле Козени она асимптотически приближается к прямой, выражающей расход плоско-радиального течения при фиксированной величине вскрытия; по Маскету — стремится к некоторому пределу, который может опускаться даже ниже расхода плоско-радиального течения. Отмеченная особенность распределения расходов представляет второе различие формул Маскета и Козени. Максимум расхода по Козени несколько больше сравнительно с величиной, определяемой формулой Маскета. Место фазы максимума не остается постоянным, а смещается в зависимости от фиксированного вскрытия массива. В рассмотренных трех случаях максимумы расходов относятся к относительной величине вскрытий 0,5, 0,67 и 0,75.



Таблица 14

Мощность пласта, м	a = 5 м		a = 10 м		a = 15 м	
	Маскета	Козени	Маскета	Козени	Маскета	Козени
5	5,45 · 10 <sup>-3</sup>	5,45 · 10 <sup>-3</sup>	10,90 · 10 <sup>-3</sup>	10,90 · 10 <sup>-3</sup>	16,35 · 10 <sup>-3</sup>	16,35 · 10 <sup>-3</sup>
10	6,75 · 10 <sup>-3</sup>	7,00 · 10 <sup>-3</sup>	12,0 · 10 <sup>-3</sup>	13,30 · 10 <sup>-3</sup>	17,40 · 10 <sup>-3</sup>	19,30 · 10 <sup>-3</sup>
15	6,54 · 10 <sup>-3</sup>	6,55 · 10 <sup>-3</sup>	12,00 · 10 <sup>-3</sup>	13,00 · 10 <sup>-3</sup>	17,40 · 10 <sup>-3</sup>	19,30 · 10 <sup>-3</sup>
20	6,53 · 10 <sup>-3</sup>	6,30 · 10 <sup>-3</sup>	11,70 · 10 <sup>-3</sup>	12,50 · 10 <sup>-3</sup>	17,10 · 10 <sup>-3</sup>	19,00 · 10 <sup>-3</sup>
30	6,35 · 10 <sup>-3</sup>	6,00 · 10 <sup>-3</sup>	11,0 · 10 <sup>-3</sup>	12,10 · 10 <sup>-3</sup>	16,60 · 10 <sup>-3</sup>	18,50 · 10 <sup>-3</sup>
40	6,30 · 10 <sup>-3</sup>	5,75 · 10 <sup>-3</sup>	10,50 · 10 <sup>-3</sup>	11,45 · 10 <sup>-3</sup>	15,80 · 10 <sup>-3</sup>	17,50 · 10 <sup>-3</sup>
50	6,05 · 10 <sup>-3</sup>	5,65 · 10 <sup>-3</sup>	10,60 · 10 <sup>-3</sup>	11,25 · 10 <sup>-3</sup>	15,20 · 10 <sup>-3</sup>	17,00 · 10 <sup>-3</sup>
100	6,05 · 10 <sup>-3</sup>	5,60 · 10 <sup>-3</sup>	10,60 · 10 <sup>-3</sup>	11,10 · 10 <sup>-3</sup>	15,20 · 10 <sup>-3</sup>	16,90 · 10 <sup>-3</sup>
120	—	—	—	—	—	—
160	—	—	—	—	—	—

В результате рассмотренных сопоставлений можно заключить, что обе группы кривых в основном повторяют друг друга.

**Интерференция несовершенных скважин в пласте ограниченной мощности.** Так как гидродинамически несовершенные скважины в пластах ограниченной мощности имеют большое значение в практике тампонажа горных пород, то рассмотрим для них также вопросы интерференции.

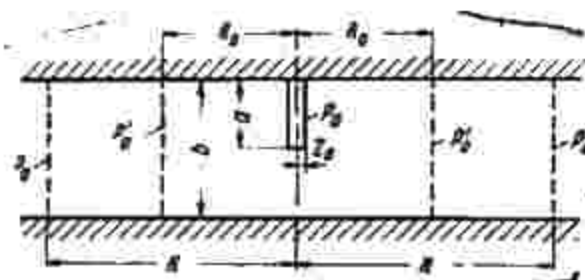


Рис. 42 К расчету интерференции несовершенных скважин

Интерпретируя упрощенную формулу Маскета (71, IV), проф. И. А. Чарный подверг математическому анализу проблему взаимодействия дренирующих несовершенных скважин. Окружая несовершенную скважину концентрической цилиндрической поверхностью радиуса  $R_0 \gg b$ , проф. Чарный вводит в рассмотрение группу фиктивных скважин с плоско-радиальным течением, на которые и распространяет закон интерференции совершенных скважин.

Интерпретируя упрощенную формулу Маскета (71, IV), проф. И. А. Чарный подверг математическому анализу проблему взаимодействия дренирующих несо-

вершенных скважин. Окружая несовершенную скважину концентрической цилиндрической поверхностью радиуса  $R_0 = b$  (рис. 42), будем считать, что в интервале  $R > r > R_0$  движение фильтрационного потока происходит по законам плоско-радиального течения, а влияние несовершенства скважины проявляется только в интервале  $R_0 > r > r_0$ . Поэтому по закону неразрывности потока можно написать

$$Q' \cdot \frac{2\pi kb}{\gamma} \frac{p_0^* - p_R^*}{\ln \frac{R}{R_0}} = \frac{2\pi kb}{\gamma} \frac{p_0^{**} - p_R^{**}}{\varepsilon_0} \quad (72, IV)$$

где  $Q'$  — расход фиктивной скважины;

$p_0^{**}$  — постоянное (усредненное) давление на поверхности фиктивной скважины радиуса  $R_0$ .

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2h} \left[ 2 \ln \frac{4b}{r_0} - \ln \Phi(h) \right] - \ln \frac{4b}{R_0}$$

Из решения уравнения (72, IV) находим

$$p_0^{**} - p_R^* = \frac{\ln \frac{R}{R_0}}{\varepsilon_0} (p_0^* - p_R^*) = \delta (p_0^* - p_R^*);$$

$$p_0^{**} = \frac{\varepsilon_0 p_0^* + p_R^*}{1 + \delta}$$

где

$$\delta = \frac{\ln \frac{R}{R_0}}{\varepsilon_0} \quad (73, IV)$$

При известном давлении  $p_0^*$  по формуле плоско-радиального течения определяем дебит фиктивной скважины

$$Q' = \frac{2\pi kb}{\gamma} \frac{p_0^{**} - p_R^*}{\ln \frac{R}{R_0}};$$

$$Q' = \frac{2\pi kb}{\gamma} \frac{\delta}{1 + \delta} \frac{p_0^* - p_R^*}{\ln \frac{R}{R_0}} \quad (74, IV)$$

Степенью точности метода фиктивных скважин может служить отношение  $\frac{Q'}{Q}$ , где  $Q$  — дебит, вычисленный для заданных условий по основной формуле Маскета (71, IV), а  $Q'$  — дебит, вычисленный для тех же условий по формуле (74, IV).

В соответствии с принятым обозначением  $\varepsilon_0$  основную формулу (71, IV) можно представить в виде

$$Q = \frac{2\pi kb (p_0^* - p_R^*)}{\gamma \varepsilon_0 R};$$

$$\varepsilon_R = \frac{1}{2h} \left[ 2 \ln \frac{4b}{r_0} - \ln \Phi(h) \right] - \ln \frac{4b}{R}$$

Из уравнений (71 и 74, IV) с учетом обозначения  $\delta$  будем иметь

$$\varphi = \frac{Q'}{Q} = \frac{\varepsilon_R}{\varepsilon_0 (1 + \delta)} \quad (75, IV)$$



Для примера взяты три пласта ограниченной мощности  $b=3$ , 5 и 10 м при относительном вскрытии  $h=0,25$ . Радиус  $R_0$  принят равным  $b$ , радиус скважины  $r_0=0,05$  м. Значения определены для разных радиусов предельного растекания жидкости  $R$ . Данные вычислений сгруппированы в табл. 15.

Таблица 15

Параметры скважины	$b=10$ м			$b=5$ м			$b=3$ м		
	$R, \text{ м}$			$R, \text{ м}$			$R, \text{ м}$		
	20	30	40	10	20	30	10	15	20
$\epsilon_R$	16,67	17,07	17,36	13,91	14,60	15,00	12,52	12,92	13,21
$\epsilon_0$	15,97	15,97	15,97	13,21	13,21	13,21	11,32	11,32	11,32
$\epsilon_0$	0,043	0,069	0,106	0,053	0,105	0,135	0,106	0,142	0,167
$\epsilon$	1,01	1,01	0,99	1,00	1,00	1,00	0,96	0,99	1,00

$\epsilon_0$  выражается по уравнению (72, IV)  
 $\epsilon$  — степень точности метода фиктивных скважин

Как видно из данных таблицы, величина ошибки, обусловленной применением уравнения фиктивной скважины (74, IV), не превышает четырех процентов. Метод фиктивных скважин позволяет выполнить расчет интерференции для любой схемы расположения скважин. Он особенно прост в случае равнодебитных скважин, работающих при одних и тех же вскрытиях.

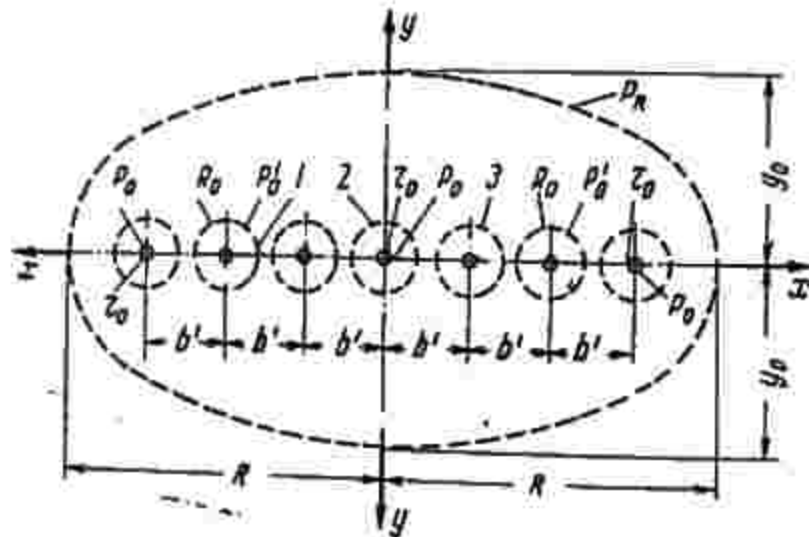


Рис. 43. Интерференция несовершенных скважин:  
 1, 2, 3 — фиктивные скважины

Каждая несовершенная скважина ( $r_0$ ) при этом методе оказывается окруженной совершенной скважиной радиуса  $R_0$ , на поверхности которой давление  $p_0^{**}$  принимается равномерно распределенным (рис. 43). В результате между контурами  $R$  и  $R_0$  движение происходит по законам плоского течения. Дебит фиктивной

совершенной взаимодействующей скважины можно выразить уравнением

$$Q_{\phi} = \frac{2\epsilon kb}{\gamma} \frac{1}{\beta} \frac{p_0^{**} - p_R}{\ln \frac{R}{R_0}}$$

где  $\beta$  — коэффициент интерференции, определяемый в зависимости от схемы взаимодействия по формулам (61—66, IV).

Давление  $p_0^{**}$  связано с дебитом несовершенной скважины, определяемым по формуле Маскета при  $R=R_0$ :

$$Q_{\mu} = \frac{2nkb}{\gamma} \frac{p_0^{**} - p_0}{\epsilon_0}$$

где  $\epsilon_0$  по уравнению (72, IV).

Из равенства  $Q_{\phi} = Q_{\mu}$  находим

$$p_0^{**} - p_R = \beta \frac{\ln \frac{R}{R_0}}{\epsilon_0} (p_0^{**} - p_0)$$

Обозначая  $\beta \frac{\ln \frac{R}{R_0}}{\epsilon_0} = z$ , получим

$$p_0^{**} = \frac{z p_0 + p_R}{1+z} \quad (76, IV)$$

При этих условиях дебит взаимодействующей несовершенной скважины будет

$$Q_{\text{вза}} = \frac{2\epsilon kb}{\gamma} \frac{z}{1+z} \frac{p_0^{**} - p_R}{\beta \ln \frac{R}{R_0}} \quad (77, IV)$$

или

$$Q_{\text{вза}} = \frac{z}{1+z} (Q_{\text{сов}})_{R_0}$$

где  $(Q_{\text{сов}})_{R_0}$  — дебит совершенной скважины радиуса  $R_0$ , но с тем же противодавлением  $p_0^{**}$ , что и в данной несовершенной скважине.

Интерференцию можно оценить числом  $i$ , представляющим отношение дебита взаимодействующей скважины к дебиту одиночно работающей скважины того же радиуса:

$$R_0 i = \frac{Q_{\text{вза}}}{Q_{\text{од}}}$$

Пример взаимодействия несовершенных скважин. В качестве примера составим интерференцию однородной цепочки из семи несовершенных и совершен-



ны скважин при  $R = 50$  м,  $r_0 = 0,15$  м,  $b = 5$  м,  $h = 0,25$ ,  $R_0 = 5$  м и расстояния между скважинами  $b' = 10$  м. Допустим, что все скважины равнодебитны. По формуле (62, IV) находим коэффициент

$$\beta = \frac{\ln \frac{R}{R_0} + \sum_{i=1}^3 \ln \frac{R^2 - (ib')^2}{(ib')^2}}{\ln \frac{R}{R_0}}$$

$$\beta = \frac{\ln \frac{50}{5} + \sum_{i=1}^3 \ln \frac{50^2 - (i10)^2}{(i10)^2}}{\ln \frac{50}{5}} = 3,85.$$

По формуле (72, IV) значение  $\varepsilon_0$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{0,5} \left[ 2 \ln \frac{20}{0,05} - 4,7 \right] - \ln \frac{20}{5} = 13,21.$$

Располагая значениями  $\beta$  и  $\varepsilon_0$ , определим  $\alpha$

$$\alpha = \frac{3,85}{13,21} \ln \frac{50}{5} = 0,67.$$

По формуле (77, IV) расход  $Q_{\text{в.г.}}$

$$Q_{\text{в.г.}} = \frac{0,67}{1,67 \cdot 3,85} \frac{2\pi kb}{\tau} \frac{p_0^* - p_R^*}{\ln \frac{R}{R_0}} = 0,104 \frac{2\pi kb}{\tau} \frac{p_0^* - p_R^*}{\ln \frac{R}{R_0}}$$

Для одиночной скважины в тех же условиях коэффициент  $\beta = 1$ . Поэтому для  $\alpha$  и  $Q_{\text{од}}$  согласно формуле (77, IV) получим

$$\alpha = \frac{1}{13,21} \ln \frac{50}{5} = 0,174;$$

$$Q_{\text{од}} = \frac{0,174}{1,174 \cdot 1} \frac{2\pi kb}{\tau} \frac{p_0^* - p_R^*}{\ln \frac{R}{R_0}} = 0,148 \frac{2\pi kb}{\tau} \frac{p_0^* - p_R^*}{\ln \frac{R}{R_0}}$$

Интерференция оценивается числом

$$i = \frac{Q_{\text{в.г.}}}{Q_{\text{од}}} = \frac{0,104}{0,148} = 0,702.$$

Для совершенных скважин в тех же условиях, но при  $r_0 = 0,05$  м находим

$$\beta = \frac{\ln \frac{50}{0,05} + \sum_{i=1}^3 \ln \frac{50^2 - (i10)^2}{(i10)^2}}{\ln \frac{50}{0,05}} = 1,96.$$

Интерференция совершенных скважин

$$i = \frac{Q_{\text{в.г.}}}{Q_{\text{од}}} = \frac{1}{1,96} = 0,51.$$

Интерференция несовершенных скважин меньше, нежели совершенных, работающих в тех же условиях. Это означает, что расход взаимодействующей несовершенной скважины больше расхода взаимодействующей совершенной.

Рассмотрены пласты средней мощности, встречаемые при тампонаже горных пород, и пласты малой мощности мелкозернистых грунтов, уплотнение которых производится инъекцией из неглубо-

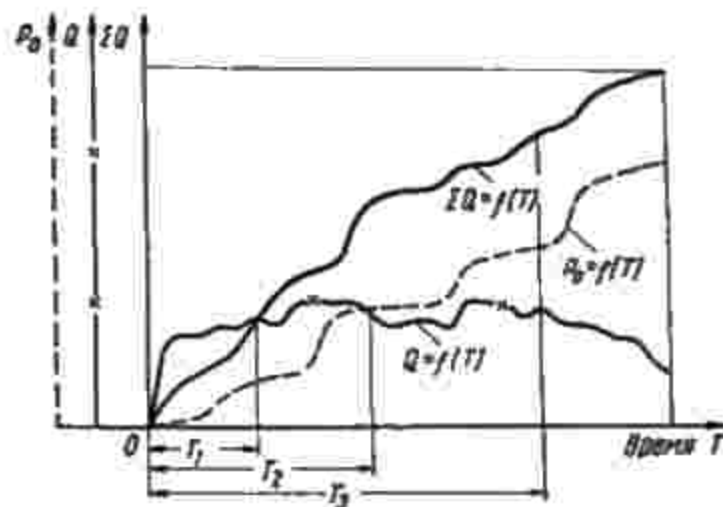


Рис. 44. График поглощения жидкости пластом

ких скважин. Исследование проведено для больших и малых радиусов предельного растекания нагнетаемой жидкости. Таким образом, применение метода фиктивных скважин для расчета интерференции несовершенных нагнетательных скважин вполне возможно даже при малой мощности пласта, при предельно малом радиусе  $R_0 = b$  и сравнительно малых значениях радиусов растекания жидкости  $R$ . Исключения составляют системы с малыми расстояниями между скважинами  $b' < 2b$ , для которых расчет интерференции производится по аналогии с совершенными.

Так как расход скважины является функцией времени, то при нагнетании через группу несовершенных скважин необходимо составлять производственный график поглощения жидкости пластом (рис. 44)<sup>1</sup>. На этом графике по оси абсцисс откладывается время от начала нагнетания, а по оси ординат — поглощаемое количество жидкости. Площадь, ограниченная координатными осями и кривой, определяет суммарное количество жидкости, принятое пластом. При помощи такого графика для данного участка тампонажа можно правильно установить взаимосвязь расходов и

<sup>1</sup> Такой график полезно составлять вообще для всех случаев тампонажа, независимо от схемы нагнетания.



времени несовершенных скважин. Такой график позволяет судить не только о количественных изменениях расходов по времени, но и о характере распределения расходов по времени.

## 2. Фактор времени при нагнетании, Радиусы фронта инъекции

Во всех предыдущих решениях внешняя граница области движения (внешний контур фильтрации) принималась заданной одной из эквипотенциалей течения с известным значением напора пластовых вод. При нагнетании жидкости из скважины граница области фильтрации не постоянна, а является подвижной и положение ее определяется продолжительностью или временем нагнетания.

Так как по мере увеличения времени нагнетания радиус действия скважины  $R$  увеличивается, то в зависимости от постановки задачи будут изменяться по времени или расход нагнетаемой жидкости  $Q$ , или величина забойного давления  $p_0$ . Следовательно, и давление в любой точке поля  $p$  является функцией времени. В общем виде движение нагнетаемой жидкости в пласте пористой среды является неустановившимся.

Рассматривая жидкость и пористую среду абсолютно несжимаемыми, вправе предположить, что перераспределение давлений в пласте наступает мгновенно. Тогда состояние движения несжимаемой жидкости в несжимаемой пористой среде в каждый момент времени не зависит от истории движения, а зависит только от граничных условий в тот же момент. Поэтому неустановившийся процесс изменения давлений при этих условиях можно рассматривать как последовательную смену стационарных состояний. В соответствии с этим и сам метод расчета неустановившегося движения будет носить название метода последовательной смены стационарных состояний.

Установим закон движения частиц жидкости по времени. По линейному закону скорость фильтрации в пористой среде выражается уравнением (3, II)

$$w = -k \frac{dh}{ds}$$

Для горизонтального пласта геометрический напор (высоту) можно исключить, а величиной скоростного напора в пористой среде ввиду малости пренебречь. При этих условиях скорость фильтрации будет

$$w = -k \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds}$$

С другой стороны, скорость фильтрации можно выразить через действительную среднюю скорость в поре (10, III)

$$w = mv,$$

где  $m$  — объемная пористость (скважность),

А так как  $v = \frac{ds}{dt}$ , то

$$w = m \frac{ds}{dt} \quad (78, IV)$$

Здесь  $t$  — момент времени.

Исключая из последних двух уравнений  $w$ , найдем

$$\left. \begin{aligned} m \frac{ds}{dt} &= -k \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds}; \\ m \frac{ds}{dt} &= -\frac{k_{np}}{\rho} \frac{dp}{ds}. \end{aligned} \right\} \quad (79, IV)$$

Эти уравнения и могут быть использованы для решения неустановившегося движения несжимаемой жидкости при нагнетании в несжимаемую проницаемую среду, если под  $s$  подразумевать соответствующие значения радиуса-вектора движущейся точки для той или иной рассматриваемой схемы движения<sup>1</sup>.

**Две взаимодействующие скважины.** Установим законы движения частиц жидкости вдоль осей  $x$  и  $y$ , т. е. вдоль главной ( $x$ ) и нейтральной ( $y$ ) линии тока<sup>2</sup>. Для этого в уравнениях (79, IV) значение  $s$  заменяется соответственно через  $x$  и  $y$  Пьезометрическое давление выражено уравнением (12, IV). Дифференцируя по  $x$  и  $y$ , получаем значения градиентов давления. Для оси  $x$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= -\frac{\gamma Q}{\pi a k} \cdot \frac{x}{x^2 - b^2}; \\ m \frac{dx}{dt} &= \frac{Q}{\pi a} \cdot \frac{x}{x^2 - b^2}. \end{aligned} \right\} \quad (80, IV)$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим

$$t_x = \frac{\pi a m}{Q} \left[ \frac{1}{2} (x^2 - x_0^2) - b^2 \ln \frac{x}{x_0} \right], \quad (81, IV)$$

где  $t_x$  — время движения частицы жидкости вдоль оси  $x$  между точками с координатами  $x$  и  $x_0$  (рис. 45).

Для оси  $y$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dy} &= -\frac{\gamma Q}{\pi a k} \cdot \frac{y}{y^2 + b^2}; \\ m \frac{dy}{dt} &= \frac{Q}{\pi a} \cdot \frac{y}{y^2 + b^2}. \end{aligned} \right\} \quad (82, IV)$$

$$t_y = \frac{\pi a m}{Q} \left[ \frac{1}{2} (y^2 - y_0^2) + b^2 \ln \frac{y}{y_0} \right], \quad (83, IV)$$

<sup>1</sup> Градиент давления есть величина векторная. Абсолютное значение  $\frac{dp}{ds}$  равно модулю вектора градиента давления.

<sup>2</sup> Для метода последовательной смены стационарных состояний, при котором движение в каждый момент времени рассматривается установившимся, линии тока гидродинамического поля представляют траектории движения частиц жидкости.



где  $t_0$  — время движения вдоль оси  $y$  между точками с координатами  $y$  и  $y_0$ .  
Уравнения (80 и 82, IV) можно получить прямой подстановкой в правую часть их компонентов векторов скоростей по осям  $x$  и  $y$  из уравнений (18, IV).

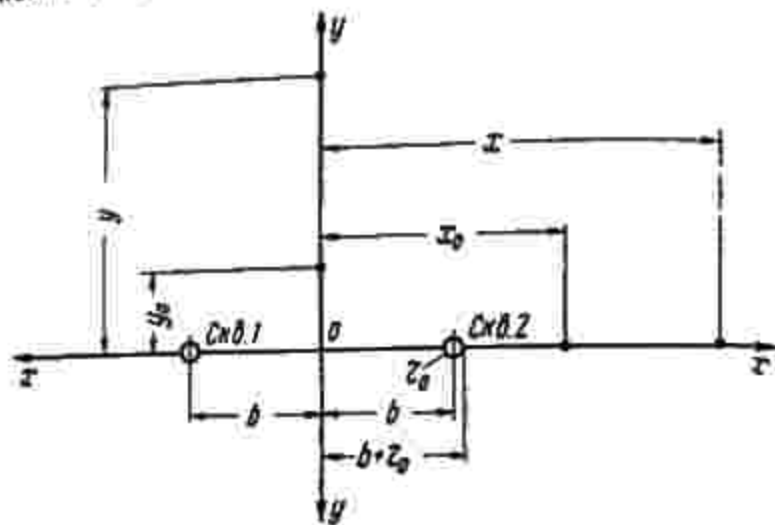


Рис. 45. Движение частицы жидкости по осевым линиям тока

Для того чтобы найти время  $T$  движения частицы жидкости по оси  $x$  от стенки скважины 2 вправо, надо  $x_0$  принять равным  $x_0 = b + r_0$ .

$$T = \frac{\pi \alpha m}{Q} \left[ \frac{1}{2} (x^2 - b^2 - 2br_0 - r_0^2) - b^2 \ln \frac{x}{b + r_0} \right].$$

Пренебрегая малой величиной  $r_0$  и  $r_0^2$  и обозначая  $x = R_x$ , определяем радиус фронта инъекции по оси  $x$  для времени нагнетания  $T$

$$R_x = \sqrt{\frac{2QT}{\pi \alpha m} + b^2 + 2br_0 + 2b^2 \ln \frac{R_x}{b}}. \quad (84, IV)$$

В тех случаях, когда величина  $2br_0$  становится слишком малой по сравнению с суммой остальных членов подрадикального выражения, уравнению (84, IV) можно придать вид

$$R_x = \sqrt{\frac{2QT}{\pi \alpha m} + b^2 \left( 1 + 2 \ln \frac{R_x}{b} \right)}. \quad (85, IV)$$

Для определения времени движения  $T$  частицы жидкости по оси  $y$  вверх от центра поля надо  $y_0$  принять равным несколько больше нуля, так как центр  $O$  — особая точка. Не вводя лишних параметров, ограничим  $y_0$  величиной  $y_0 = r_0$

$$T = \frac{\pi \alpha m}{Q} \left[ \frac{1}{2} (y^2 - r_0^2) + b^2 \ln \frac{y}{r_0} \right].$$

Величиной  $r_0^2$  ввиду малости можно пренебречь. Радиус фронта инъекции по оси  $y$  для времени нагнетания  $T$  будет

$$R_y = \sqrt{2 \left( \frac{QT}{\pi \alpha m} - b^2 \ln \frac{R_y}{r_0} \right)}. \quad (86, IV)$$

Проф. В. Н. Шелкачев дает метод получения закона движения частицы жидкости вдоль любой гиперболической линии тока двухскважинной симметричной системы

Основываясь на этом методе, проектируем на ось  $y$  частицу жидкости, движущуюся по любой из кривых, описываемых уравнением (5, IV). Пользуясь известными зависимостями гидродинамики, находим скорость движения проекции точки по оси  $y$ . Закон движения проекции движущейся частицы по оси  $y$  применительно к нагнетательным скважинам (источникам) запишется уравнением

$$t = \frac{\pi \alpha m}{Q} \left[ (B^2 + 1) y^2 + B y \sqrt{(B^2 + 1) y^2 + b^2} - \frac{B b^2}{\sqrt{B^2 + 1}} \ln \left( y + \sqrt{y^2 + \frac{b^2}{B^2 + 1}} \right) \right]. \quad (87, IV)$$

Здесь

$$B = \frac{1}{\lg 2 \pi \frac{b}{r_0}}, \quad (88, IV)$$

где значения приведенных функций тока  $\varphi_r$  изменяются от нуля до 2 (см. рис. 32)

Для определения времени движения  $T$  проекции частицы жидкости вверх от оси  $x$  надо  $y_0$  принять равным нулю. При этих условиях получим

$$T = \frac{\pi \alpha m}{Q} \left[ (B^2 + 1) y^2 + B y \sqrt{(B^2 + 1) y^2 + b^2} - \frac{B b^2}{\sqrt{B^2 + 1}} \ln \frac{y + \sqrt{y^2 + \frac{b^2}{B^2 + 1}}}{\sqrt{\frac{b^2}{B^2 + 1}}} \right].$$

Из этого уравнения можно определить ординату  $y$  продвижения проекции частицы жидкости на ось  $y$ . Она и будет искомой



ординатой  $y$  движения для частицы жидкости по любой из линий тока, соответствующей заданному интервалу времени  $T$ :

$$y = \sqrt{\frac{QT}{\text{лат.}(B^2+1)} - \frac{By \sqrt{(B^2+1)y^2 + b^2}}{B^2+1}} + \frac{Bb^2}{\sqrt{(B^2+1)^3}} \ln \frac{y + \sqrt{y^2 + \frac{b^2}{B^2+1}}}{\sqrt{\frac{b^2}{B^2+1}}} \quad (89, IV)$$

Положение частицы жидкости на линии тока для заданного интервала времени  $T$  определяется пересечением ординаты  $y$  с соответствующей линией тока, характеризуемой значением  $B$  (88, IV). При помощи расчетов по формулам (85, 86 и 89, IV) можно определить последовательные положения продвигающегося контура инъецируемой жидкости для разных интервалов времени нагнетания и получить картину всего процесса инъецирования породы (грунта) по времени.

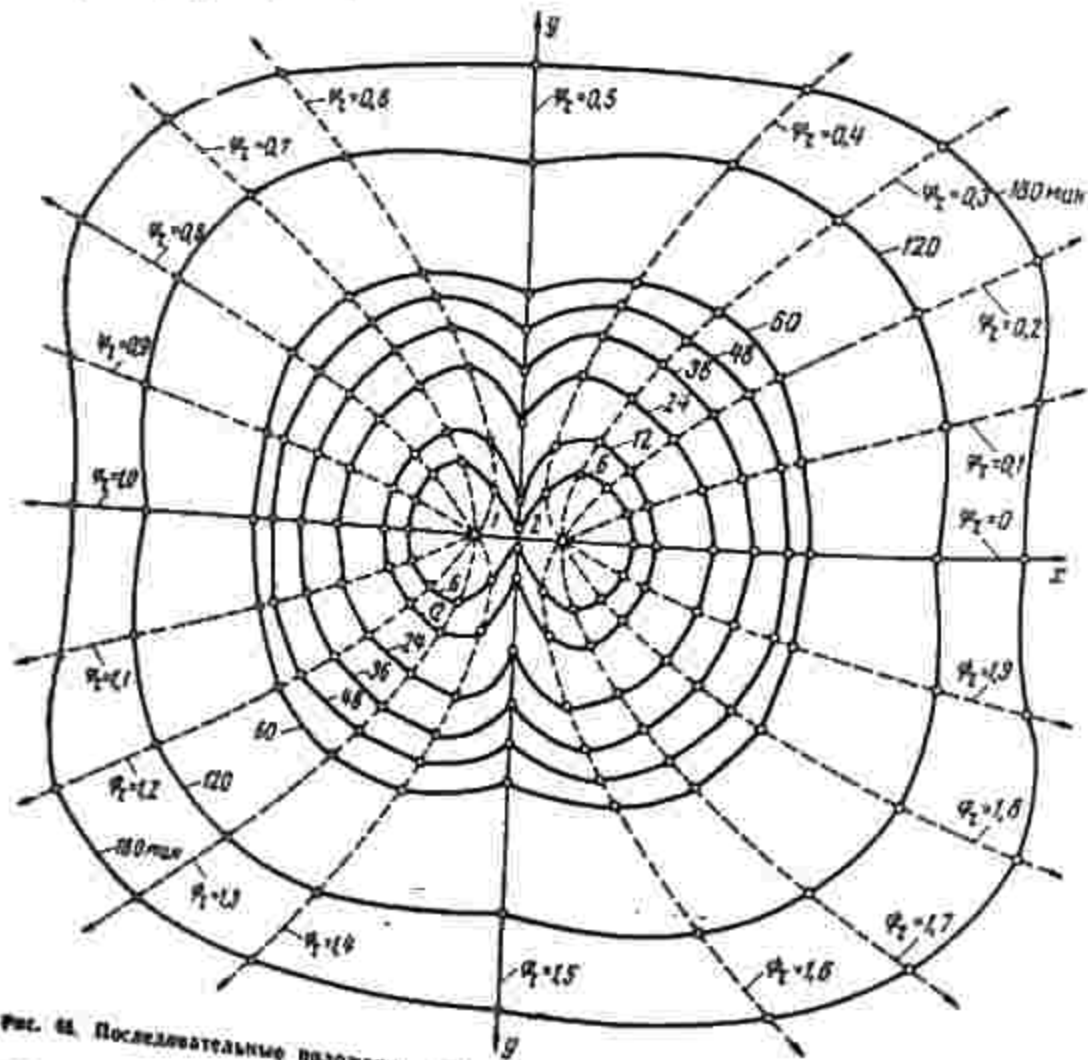


Рис. 46. Последовательные положения контура инъециции при нагнетании из двух равнодебитных скважин

Пример инъециции из двух равнодебитных скважин. На рис. 46 по этим формулам выполнены построения для двух равнодебитных скважин с расходом нагнетания каждой  $Q=0,020 \text{ м}^3/\text{сек}=72 \text{ м}^3/\text{ч}$  при мощности пласта  $a=3 \text{ м}$ , коэффициенте скважности  $m=0,1$ , расстоянии между скважинами по оси  $x$   $b=2 \text{ м}$  и радиусе скважины  $r_w=0,05 \text{ м}$ . Данные вычислений приводятся в табл. 16.

Таблица 16

$t, \text{ ч}$	$R_y, \text{ м}$	Ординаты $y, \text{ м}$				$R_x, \text{ м}$	$\frac{R_x}{R_y}$
		$r_r=0,4$	$r_r=0,3$	$r_r=0,2$	$r_r=0,1$		
0,1	0,323	2,0	2,95	2,40	1,30	5,20	16,10
0,2	1,60	4,05	4,30	3,25	1,80	6,60	4,10
0,4	4,80	6,95	6,15	4,70	2,50	8,70	1,82
0,6	7,05	8,70	7,60	5,70	3,05	10,40	1,48
0,8	8,80	10,00	8,80	6,60	3,60	11,80	1,34
1,0	10,40	11,00	9,90	7,35	3,90	12,70	1,22
2,0	15,90	16,00	14,00	13,30	5,50	18,00	1,13
3,0	20,00	19,30	17,30	12,70	6,65	21,70	1,08

Отметим, что уравнения (85, 86 и 89, IV) легче всего решаются графическим способом. Графически  $R_x$ ,  $R_y$  и  $y$  находим путем построения кривых  $\sqrt{F}$  правых частей уравнений при разных значениях  $R_x$ ,  $R_y$  и  $y$ . Пересечение кривой с прямой, проведенной из начала координат под углом  $45^\circ$ , дает точку, абсцисса которой равна  $R_x$  или  $R_y$  или  $y$ .

В табл. 16 вычислены отношения радиусов контура инъециции по осям  $x$  и  $y$ , определяющие степень равномерности продвижения фронта инъециции при нагнетании из двух равнодебитных скважин. В первые моменты времени нагнетания продвижение контура инъециции по оси  $y$  значительно отстает от оси  $x$ . Вдоль оси  $y$  образуются языки выклинивания и требуется более или менее значительное время для выравнивания фронта инъециции. Только через три часа нагнетания простираение потока по осям  $x$  и  $y$  становится примерно одинаковым ( $R_x:R_y=1,08$ ). Образование языков по оси  $y$  представляет своеобразную особенность инъецирования пород (грунтов) по схеме двух скважин. При нагнетании быстро твердеющих жидкостей эта особенность могла бы стать большой неприятностью, так как при ограниченном времени нагнетания таких жидкостей возводимая непроницаемая завеса по оси  $y$  будет иметь тонкие перешейки, угрожающие прорывом воды. Из уравнения (86, IV) следует, что интенсивность образования таких перешейков уменьшается с увеличением расхода нагнетания и уменьшением расстояния между скважинами.

Поэтому при нагнетании быстро твердеющих жидкостей на первые моменты нагнетания необходимо обращать серьезное внимание, особенно при тампонаже мелкозернистых несвязных грунтов, не допуская коагулирования растворов, осаждения твердой фазы на стенках пор и преждевременного затвердевания иных



жидкостей. Одним из надежных средств предотвращения обводнения фронта инъекции в первые моменты нагнетания является увеличение расходов нагнетания, так как при небольших радиусах контура инъекции величина забойных давлений и давление насосов в первые моменты нагнетания невелики и не лимитируют расходных характеристик насосов.

Скважины с круговым внешним контуром фильтрации. Рассмотренная схема взаимодействия и относящиеся к ней формулы (85—89, IV) имеют в виду неограниченную область растекания извлекаемой жидкости. Этот случай нагнетания наиболее общий и, как видно, сопровождается образованием языков выклинивания по оси  $y$ , затухающим по мере продвижения фронта инъекции с увеличением продолжительности нагнетания.

Положение меняется для двух симметричных скважин с круговым внешним контуром области фильтрации, который может иметь место при соответствующих инженерных и гидрогеологических условиях тампонируемой среды. Рассмотрим этот случай нагнетания, ограничившись анализом условий движения жидкости по осевым линиям тока.

Скорости фильтрации для точек на осях  $x$  и  $y$  для этой схемы нагнетания выражены уравнениями (40, IV). Подставляя в них значения  $C$  из уравнения (34, IV) и обозначая  $x=R_x$  и  $y=R_y$ , находим законы движения частиц жидкости по этим осям:

$$t_x = \frac{\pi am}{2Q} [(R+b)^2]_{R_x}^R; \quad (90, IV)$$

$$t_y = \frac{\pi am}{Q} \left[ \frac{R^2}{2} + b^2 \ln(R^2 - b^2) \right]_{R_y}^R. \quad (91, IV)$$

Для того чтобы определить время  $T$  движения частицы жидкости по оси  $x$  от стенки скважины 2 вправо, надо  $R_0$  принять равным  $R_0 = b + r_0$

$$T = \frac{\pi am}{2Q} [(R_x + b)^2 - (2b + r_0)^2].$$

Пренебрегая малыми величинами  $r_0^2$  и  $2r_0$ , находим радиус фронта инъекции по оси  $x$

$$R_x = -b + \sqrt{\frac{2QT}{\pi am} + 4b^2}. \quad (92, IV)$$

Для определения времени  $T$  движения по оси  $y$  можно  $R_0$  принять равным нулю

$$T = \frac{\pi am}{Q} \left[ \frac{R^2}{2} - b^2 \ln \frac{R^2 - b^2}{b^2} \right].$$

Радиус фронта инъекции по оси  $y$  для времени нагнетания  $T$  равен

$$R_y = \sqrt{\frac{2QT}{\pi am} + b^2 \ln \frac{R^2 - b^2}{b^2}}. \quad (93, IV)$$

С помощью формул (92 и 93, IV) определяются последовательные положения контура инъекции на осях  $x$  и  $y$  для разных интервалов времени нагнетания.

Пример инъекции из двух скважин с круговым контуром фильтрации. В табл. 17 определены последовательные положения контура инъекции по осям  $x$  и  $y$  для аналогичных данных предыдущего примера.

Таблица 17

$T, \text{ч}$	$R_y, \text{м}$	$R_x, \text{м}$	$\frac{R_y}{R_x}$	$T, \text{ч}$	$R_y, \text{м}$	$R_x, \text{м}$	$\frac{R_y}{R_x}$
0,1	4,70	3,60	1,30	0,8	11,60	9,70	1,20
0,2	6,20	4,60	1,29	1,0	13,03	11,00	1,18
0,4	8,46	6,75	1,25	2,0	18,00	15,90	1,13
0,6	10,20	8,38	1,22	3,0	21,75	19,70	1,10

Данные таблицы позволяют заключить, что неравномерность продвижения фронта инъецирующей жидкости по схеме двух скважин с круговым контуром

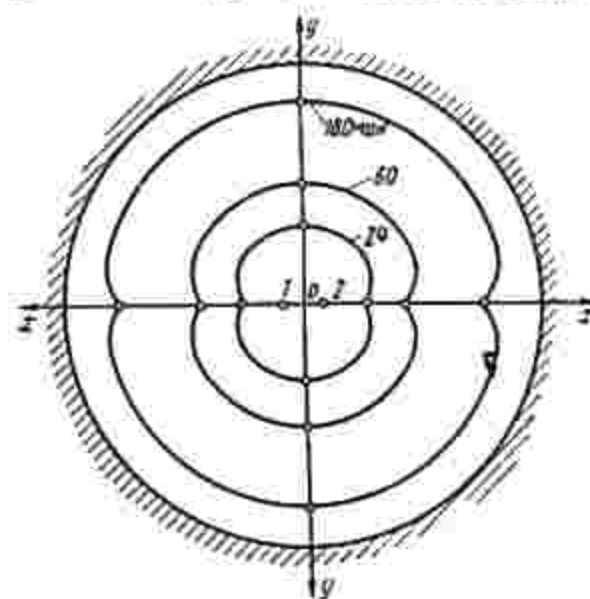


Рис. 47. Две скважины (1 и 2) с круговым внешним контуром фильтрации

Кольцевая батарея скважин. Легко доказать, что каждая прямая, проходящая через центр поля и две диаметрально противоположные скважины, будет главной линией тока, а прямая, проходящая через середину между двумя соседними скважинами, — нейтральной линией тока. Вследствие полной симметрии расположения скважин инфильтрационный поток из них делится на  $n$  одинаковых частей. Нейтральные линии и являются границами, разделяющими потоки к смежным скважинам. Так выглядит гидродинамическое поле симметричной кольцевой батареи (рис. 48).



Скорости фильтрации для точек, лежащих на главных и нейтральных линиях тока, выражены уравнениями (54 и 57, IV):

$$v_{г.з} = \frac{Q}{2\pi a} \frac{nr^{n-1}}{r^n - R_0^n};$$

$$v_{н.т.р} = \frac{Q}{2\pi a} \frac{nr^{n-1}}{r^n + R_0^n}.$$

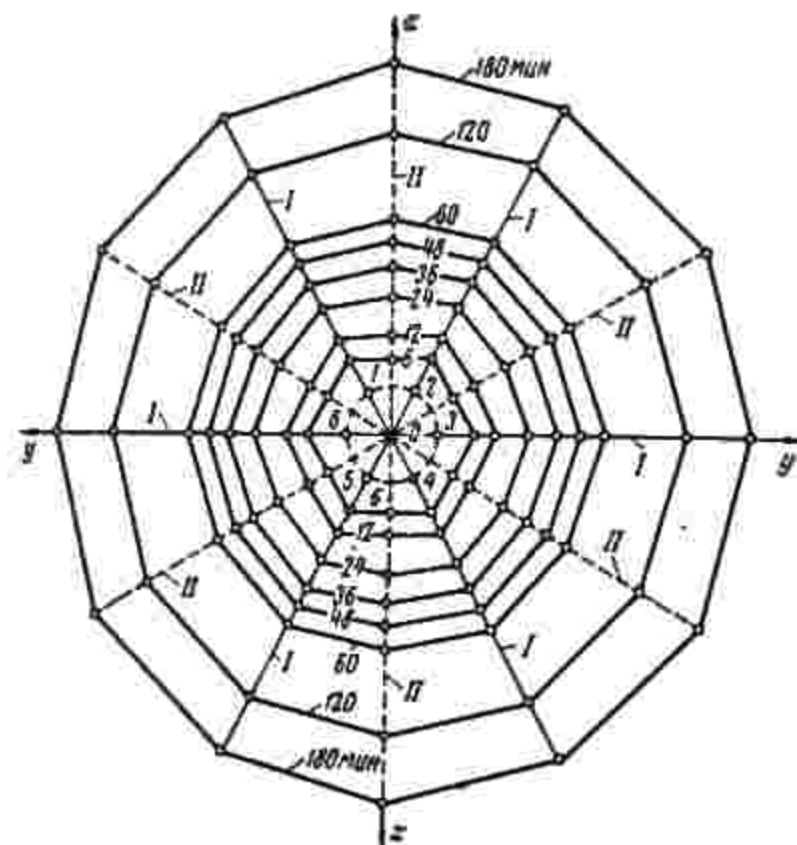


Рис. 48. Последовательные положения контура инъеции при нагнетании из батареи шести равнодебитных скважин (I-VI); I — главные и II — нейтральные линии тока

Законы движения частиц жидкости по этим линиям напишутся уравнениями:

$$m \frac{dr}{dt} = \frac{Q}{2\pi a} \frac{nr^{n-1}}{r^n - R_0^n}; \quad (94, IV)$$

$$m \frac{dr}{dt} = \frac{Q}{2\pi a} \frac{nr^{n-1}}{r^n + R_0^n}. \quad (95, IV)$$

Выполняя интегрирование, находим время движения частиц жидкости вдоль главных и нейтральных линий тока между двумя любыми точками на них с радиусами-векторами  $r_1$  и  $r_2$ :

$$t_{г.з} = \frac{\pi m}{nQ} \left[ (r_2^n - r_1^n) - \frac{2R_0^n}{n-2} \left( \frac{1}{r_1^{n-2}} - \frac{1}{r_2^{n-2}} \right) \right]; \quad (96, IV)$$

$$t_{н.т.р} = \frac{\pi m}{nQ} \left[ (r_2^n - r_1^n) + \frac{2R_0^n}{n-2} \left( \frac{1}{r_1^{n-2}} - \frac{1}{r_2^{n-2}} \right) \right]. \quad (97, IV)$$

Необходимо отметить, что формулы (54 и 57, IV) справедливы для любого количества скважин  $n \geq 2$ , симметрично расположенных на окружности батареи. При  $n=2$  они переходят в уравнения для двух симметричных скважин (18, IV). Формулы (96 и 97, IV) справедливы только для  $n > 2$ . При  $n=2$  они приводят к неопределенности вида  $\infty$ . После раскрытия неопределенности получается частный случай решения задачи для  $n=2$ , соответствующий ранее рассмотренному в уравнениях (81 и 83, IV).

Для того чтобы определить время  $T$  движения частицы жидкости по главной линии тока от стенки скважины в глубь поля, надо  $r_1$  принять равным  $r_1 = R_0 + r_0$ . Но  $r_0$  слишком мало по сравнению с  $R_0$ . Пренебрегая  $r_0$  и обозначая  $r_2 = R_{г.з.}$ , найдем радиус фронта инъеции по главным линиям тока для времени нагнетания  $T$

$$R_{г.з.} = \sqrt{\frac{nQT}{\pi m} + \frac{2R_0^n}{n-2} \left( \frac{1}{R_0^{n-2}} - \frac{1}{R_{г.з.}^{n-2}} \right) + R_0^2}. \quad (98, IV)$$

Для определения радиуса фронта инъеции по нейтральным линиям надо  $r_1$  принять  $r_1 = R_0$

$$R_{н.т.р.} = \sqrt{\frac{nQT}{\pi m} - \frac{2R_0^n}{n-2} \left( \frac{1}{R_0^{n-2}} - \frac{1}{R_{н.т.р.}^{n-2}} \right) + R_0^2}. \quad (99, IV)$$

Для точек, расположенных внутри кольца батареи  $R_0$ , члены в скобках  $\frac{1}{R_0^{n-2}}$  и  $\frac{1}{R^{n-2}}$  меняют знаки. Для решения уравнений (98 и 99, IV) также рекомендуется графический прием, тем более, что при значениях  $R \gg R_0$  влияние дроби  $\frac{1}{R^{n-2}}$  становится очень малым, и оба уравнения переходят в простые квадратные.

Пример инъеции из батареи шести равнодебитных скважин. Этим путем в табл. 18 вычислены радиусы фронта инъеции по осевым линиям тока симметричной шестискважинной батареи при следующих данных: расход каждой скважины  $Q = 72 \text{ м}^3/\text{ч}$ , радиус окружности симметричного расположения скважин  $R_0 = 5 \text{ м}$ , мощность пласта  $a = 3 \text{ м}$ , коэффициент скважности  $m = 0,1$ . Начиная с  $T = 0,6 \text{ ч}$  влиянием дроби  $\frac{1}{R^{n-2}}$  можно пренебречь, решив уравнения для  $R$



квдратными. Допущенная неточность составляет менее 0,2%. Как видно, неравномерность продвижения фронта инъекции по этой схеме взаимодействия скважин очень невелика. Требуется совсем незначительное время нагнетания (0,4-0,6 ч), чтобы очертания внешнего контура потока, текущего из батарей симметричных скважин, получили круговую форму.

Таблица 18

$t, \text{ч}$	$R_{Tz, \text{м}}$	$R_{\text{н.тр.}, \text{м}}$	$\frac{R_{Tz}}{R_{\text{н.тр.}}}$
0,1	9,10	7,80	1,17
0,2	11,35	10,20	1,11
0,4	14,93	14,00	1,06
0,6	17,65	16,98	1,04
0,8	20,10	19,45	1,035
1,0	22,39	21,70	1,03
2,0	30,90	30,50	1,01
3,0	37,50	37,39	1,005

Таблица 19

$t, \text{ч}$	$R_x, \text{м}$	$R_y, \text{м}$	$\frac{R_x}{R_y}$
0,05	4,55	2,55	1,79
0,1	5,75	4,45	1,30
0,2	7,70	6,10	1,27
0,4	10,30	9,00	1,15
0,6	12,50	11,20	1,12
0,8	14,20	13,10	1,08
1,0	15,65	14,70	1,07
2,0	22,30	21,00	1,06
3,0	26,60	26,00	1,02

Радиальный характер общего течения устанавливается очень быстро. На рис. 48 точки последовательного положения фронта инъекции на главных и нейтральных линиях тока для наглядности условно соединены прямыми линиями. Но и этих представлений вполне достаточно, чтобы составить представление о весьма близком приближении контуров инъекции к форме круга почти на всем интервале времени нагнетания.

Особенности продвижения фронта инъекции из прямолинейного ряда скважин. Траектории движения частиц жидкости из прямолинейного ряда взаимодействующих скважин, даже при небольшом числе их, имеют очень сложную форму. Получить законы движения в замкнутой форме (без разложения функций в ряды) возможно лишь для простейших траекторий, в частности для траекторий, совпадающих с осями  $x$  и  $y$ .

Рассматриваются три равнодебитные скважины, симметрично расположенные на оси  $x$ . Скорости фильтрации для точек на осях  $x$  и  $y$  представлены уравнениями (31, IV). После соответствующих подстановок и интегрирования уравнения (78, IV) законы движения по этим осям найдутся выражениями

$$t_x = \frac{2-am}{3Q} \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{b^2}{3} \ln(3x^2 - b^2) \right]_{x_0}^x. \quad (100, IV)$$

$$t_y = \frac{2-am}{3Q} \left[ \frac{y^2}{2} - \frac{b^2}{3} \ln(3y^2 + b^2) \right]_{y_0}^y. \quad (101, IV)$$

Радиусы фронта инъекции по осям  $x$  и  $y$  составят

$$R_x = \sqrt{\frac{3QT}{\pi am} + b^2 \left( 1 + \frac{2}{3} \ln \frac{3R_x^2 - b^2}{2b^2} \right)}. \quad (102, IV)$$

$$R_y = \sqrt{\frac{3QT}{\pi am} - \frac{2b^2}{3} \ln \frac{3R_y^2 + b^2}{b^2}}. \quad (103, IV)$$

Пример инъекции из трех скважин на одной прямой. В табл. 19 вычислены радиусы  $R_x$  и  $R_y$  последовательного положения фронта инъекции для трехскважинной батареи при расходе каждой скважины  $Q = 72 \text{ м}^3/\text{ч}$ , расстоянии между скважинами  $b = 2 \text{ м}$ , мощности пласта  $a = 3 \text{ м}$  и коэффициенте скважности  $m = 0,1$ .

Вычисления устанавливают, что незначительные выклинивания воды продвигающегося фронта инъекции при этой схеме нагнетания могут иметь место по оси  $y$  (рис. 49). Но и то лишь в первые моменты нагнетания. Сравнительно быстро

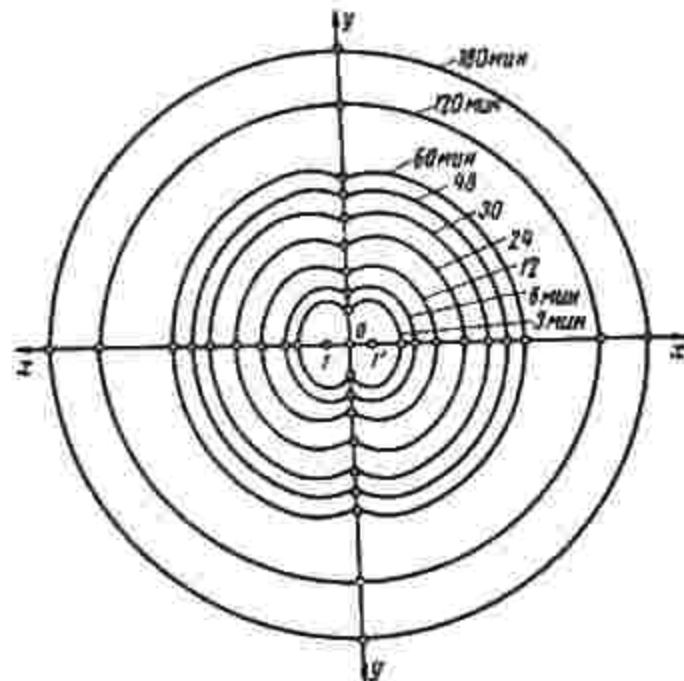


Рис. 48 Последовательные положения контура инъекции при нагнетании из прямолинейной батареи трех (1, 0; 1') равнодебитных скважин

контуры инъекции принимают форму, близкую к круговой. Наличие центральной скважины в значительной степени способствует более равномерному продвижению фронта инъекции. В этом отношении трехскважинная прямолинейная схема представляет значительные преимущества по сравнению с двухскважинной, рассмотренной уравнениями (85, 86 и 89, IV).

Тем же порядком могут быть исследованы продвижение фронта инъекции и радиусы контура инъекции по времени  $R_x$  и  $R_y$  при нагнетании из любого числа скважин прямолинейного ряда и батарей скважин, расположенных по квадратной сетке.

Серия выполненных примеров дает основание заключить, что для всех типичных схем нагнетания при установившемся горизонтальном движении однородной несжимаемой жидкости стабилизация фильтрационного потока из скважины устанавливается сравнительно быстро. Определив радиусы фронта инъекции для заданного времени нагнетания, по формулам п. 1 можно рассчитать и все остальные параметры нагнетания ( $p$ ,  $p_0$  и  $Q$ ).

### 3. Расчет нагнетания в условиях вытеснения воды

Во всех предыдущих схемах нагнетания грунт рассматривался сухим, а если и насыщенным, то вязкостью вытесняемой воды пренебрегалось. Рассмотрим условия нагнетания инъецируемой



жидкости в водоносный пласт с учетом вязкости вытесняемой воды. Упругость воды и пористой среды не учитывается.

При рассмотрении нагнетания в условиях вытеснения воды практически могут встретиться два случая в водоносном пласте, в который нагнетается инъецируемая жидкость, существует постоянный поток грунтовой воды с большими значениями напорных

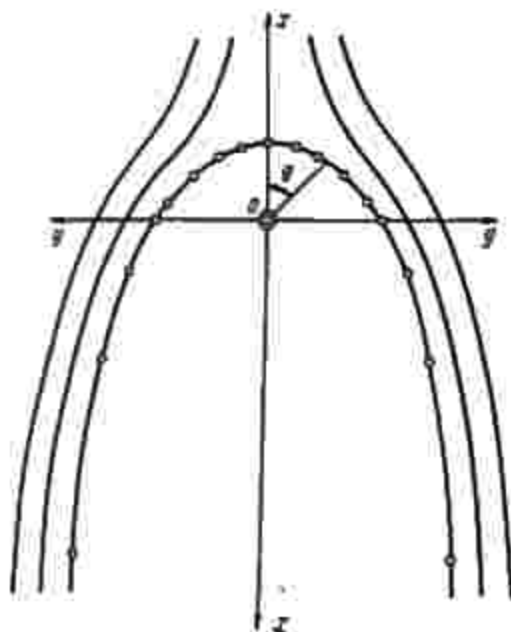


Рис. 50. Вытеснение одиночной скважиной потока грунтовых вод.

градиентов, и второй случай, когда зеркало кластовых вод, находясь со всех сторон на одном уровне, представляет неподвижный бассейн. Последнее оба случая; учитываем различие в вязкостях нагнетаемой жидкости и вытесняемой воды. По-прежнему пласт считаем горизонтальным. Нагнетание инъецируемой жидкости происходит при больших напорах, что обуславливает образование в проницаемой среде больших градиентов давления, значительно превосходящих градиенты давления, зависящие от разности удельных весов нагнетаемой жидкости и воды. При этих условиях контакт двух жидкостей можно считать вертикальным,

несмотря даже на значительную разницу их плотностей.

Нагнетание в условиях вытеснения потока грунтовых вод. Расчетная схема нагнетания представлена комбинированным плоским полем источника, на течение которого накладывается равномерный прямолинейный поток с постоянной скоростью  $U$ . Расположим источник в начале координат и возьмем прямолинейный поток в направлении оси  $-x$  (рис. 50).

Комбинированное поле по правилам сложения потенциальных течений будет выражено функциями

$$\psi = -Uy + \frac{q}{2\pi} \theta; \quad (104, IV)$$

$$\varphi = -Ux + \frac{q}{2\pi} \ln r. \quad (105, IV)$$

Полагая  $\psi = \text{const}$ , легко построить любую линию тока. Обозначив  $\psi = \psi_0$ , получим

$$\psi_0 = -Uy + \frac{q}{2\pi} \theta,$$

откуда

$$y = \frac{q}{U} \left( \frac{\theta}{2\pi} - \frac{1}{2} r \right). \quad (106, IV)$$

При  $\theta=0$  и  $\theta=2\pi$  получаем начальную линию тока с  $\psi_r=0$  справа от оси  $x$  (для углов  $0-180^\circ$ ) и  $\psi_r=1$  слева от оси  $x$  (для углов  $180-360^\circ$ ). Этой линии принадлежит критическая точка на оси  $x$ , в которой скорости, вызванные источником и прямолинейным потоком, равны и противоположно направлены, т. е.

$$U = \frac{q}{2\pi r} \cos \theta = \frac{q}{2\pi x_A} \cos^2 \theta.$$

При  $\theta=0$  и  $\cos \theta=1$  определяем координату критической точки ( $y_0=0$ )

$$x_A = \frac{q}{2\pi U}. \quad (107, IV)$$

При значении  $\theta=\pi$  получим широтное простираание потока

$$y_{\max} = \frac{q}{2U} = \pi x_A. \quad (108, IV)$$

Это будет наибольшая полуширина потока, достигаемая в бесконечности при  $x=-\infty$ . Деформированное встречным потоком течение жидкости из скважины происходит внутри разделяющей линии тока и направлено к открытой ее стороне.

Эквипотенциальные линии вычисляются по уравнению (96, IV).

Обозначив  $\varphi = \varphi_r \frac{q}{2\pi}$ , получим

$$\varphi_r \frac{q}{2\pi} = -Ux + \frac{q}{2\pi} \ln r.$$

Отсюда определяются координаты эквипотенциалей

$$x = \frac{q}{2\pi U} (\ln r - \varphi_r). \quad (109, IV)$$

Последнее уравнение можно представить в виде

$$x = x_A \left( \ln \frac{r}{\cos \theta} - \varphi_r \right). \quad (110, IV)$$

Численные значения  $\varphi_r$  в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Уравнение решается подбором или графически. При переходе к действительным величинам приведенные значения  $\varphi_r$  умножаются на  $q$ , а  $\varphi$  на  $\frac{q}{2\pi}$ . Координаты точек сохраняют действительную величину.

В табл. 20 по уравнению (106, IV) вычислены координаты приведенной функции тока  $\varphi_r$  в единичных условиях ( $\frac{q}{U}=1$ ) для разделяющей линии тока. При переходе к действительным значениям координат табличные величины  $y_r$  и  $x_r$  умножаются на  $\frac{q}{U}$ . Из



таблицы видно, что при углах  $\theta > 170^\circ$  широтные координаты получают значения, мало отличающиеся от максимальной величины  $\mu_{\max} = 0.5$ .

Таблица 20

Углы		Координаты		Углы		Координаты	
$\theta$	$\alpha$	$\nu_r$	$x_r = \nu_r \cdot \text{ctg } \theta$	$\theta$	$\alpha$	$\nu_r$	$x_r = \nu_r \cdot \text{ctg } \theta$
0	0	0	0,159	110	0,61	0,305	-0,111
20	0,11	0,055	0,151	130	0,72	0,360	-0,302
40	0,22	0,110	0,131	150	0,83	0,415	-0,720
60	0,33	0,165	0,095	170	0,94	0,470	-2,680
80	0,44	0,220	0,039	180		0,500	
90	0,50	0,250	0				

Пьезометрическое давление в любой точке потока, создаваемое источником нагнетаемой (инъектируемой) жидкости, равно

$$\frac{p'}{\gamma} = \frac{q}{2\pi k} \ln \frac{R}{r}$$

Пьезометрическое давление в напорном потоке грунтовой воды определяется из решения уравнения (3, II). При  $U = \text{const}$  для горизонтального пласта имеем

$$U = -k_n \frac{dH}{ds} = -\frac{k_n}{\gamma_n} \frac{dp}{ds}$$

откуда

$$dp = -\frac{\gamma_n U}{k_n} ds$$

Интегрируя уравнение

$$\int_{p_0}^{p'} dp = -\frac{\gamma_n U}{k_n} \int_0^x dx,$$

получим

$$p' = p_0 - \frac{\gamma_n U}{k_n} x,$$

где  $p_0$  — давление в линейном потоке на контуре скважины.

Полное пьезометрическое давление в любой точке инфильтрационного потока

$$\frac{p}{\gamma} = \left( \frac{p_0}{\gamma_n} - \frac{U}{k_n} x \right) + \frac{q}{2\pi k} \ln \frac{R}{r}. \quad (111, IV)$$

Для определения рабочего давления на забое скважины надо принять  $r = r_0$  и  $x = r_0$

$$\left( \frac{p}{\gamma} \right)_0 = \left( \frac{p_0}{\gamma} - \frac{U}{k_n} r_0 \right) + \frac{q}{2\pi k} \ln \frac{R}{r_0}$$

Величина  $\frac{U}{k_n} r_0$  слишком мала по сравнению с величиной  $\frac{p_0}{\gamma}$ .

Ею можно пренебречь и поэтому при  $q = \frac{Q}{a}$  получим

$$\left( \frac{p}{\gamma} \right)_0 = \frac{p_0}{\gamma} + \frac{Q}{2\pi a k} \ln \frac{R}{r_0}. \quad (112, IV)$$

Компоненты результирующей скорости в рассматриваемом потоке равны

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -U + \frac{q}{2\pi r} \cos \theta; \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{q}{2\pi r} \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (113, IV)$$

Ниже источника обе составляющие скорости по оси  $x$  одного знака

$$u = U + \frac{Q}{2\pi a r}$$

Скорость  $U$  постоянна, скорость  $\frac{Q}{2\pi a r}$  затухающая. Обозначая по условиям технологии тампонажа наименьшую возможную скорость фильтрации через  $u_{\min}$ , определяем предельную глубину нагнетания  $R$

$$x = R = \frac{Q}{2\pi a (u_{\min} - U)}. \quad (114, IV)$$

Уравнение указывает, что тампонаж породы в условиях вытеснения потока грунтовых вод возможен в том случае, если скорость фильтрации инъектируемой жидкости на расстоянии  $R$  от источника (скважины)  $u_{\min}$  будет больше скорости потока грунтовых вод  $U$ . Тогда в грунтовом потоке воды может быть получен затампонируемый участок пористой среды длиной  $x = R$  (114, IV) и шириной  $y$  по уравнению (106, IV). На этой уплотненной полосе могут выполняться те или иные проходческие горные работы, если широтное простирание ее достаточно для производства этих работ. Если ширина полосы недостаточна, надо инъекцию проводить из двух рядом расположенных скважин.

В этом случае расстояние между смежными скважинами, исходя из требований плотности контакта соприкасающихся потоков, можно принять в пределах (1,6—1,7)  $y$ , т. е.

$$2b = B = (1,6 + 1,7) \frac{Q^0}{2\pi a U},$$

так как при отсчетах углов  $\theta$  от 0 до  $180^\circ$  функция начальной (раздельной) линии тока равна 0. Полное простирание затампонируемого участка при этих условиях равно

$$y_0 = (3,6 - 3,7) y = (3,6 - 3,7) \frac{Q^0}{2\pi a U}. \quad (115, IV)$$



Рабочее давление на забоях скважин в соответствии с уравнением (61, IV)

$$H_0 = \frac{p_0}{\gamma_n} + \frac{Q}{2\pi ak} \ln \frac{R^2}{2br_0}, \quad (116, IV)$$

где  $\frac{p_0}{\gamma_n}$  — давление в грунтовой воде на контуре скважины;  
 $Q$  — расход нагнетания каждой скважины;  
 $k$  — коэффициент фильтрации нагнетаемой (тампонажной) жидкости;  
 $R$  — глубина нагнетания.  
 Так приближенно, но с достаточной практической точностью, решается задача о двухскважинном вытеснении потока грунтовых вод. Аналогично можно рассмотреть и линейный ряд скважин, применив формулу (62, IV).

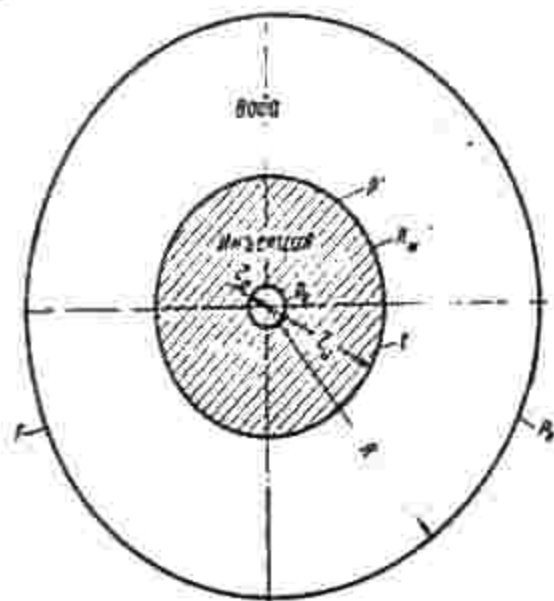


Рис. 51. Схема пласта и задачи о вытеснении воды инъекцией

(рис. 51). Приняв изобару, совпадающую с контуром инъекции, сначала за контур предельного растекания, а затем за скважину большого диаметра, по известным формулам одиночной скважины получим распределение давления в обеих областях

$$p_1 = p_0 - \frac{\gamma Q}{2\pi ak} \ln \frac{r}{r_0}, \quad (117, IV)$$

$$p_2 = p_R + \frac{p' - p_R}{\ln \frac{R}{r_н}} \ln \frac{R}{r}, \quad (118, IV)$$

где  $p'$  — давление на контуре инъекции  $r_н$ ;  
 $a$  — мощность водоносного пласта;  
 $p_R$  — давление на контуре предельного распространения (пластовое).

Расход

$$Q = \frac{2\pi ak (p_0 - p')}{\gamma \ln \frac{r_н}{r_0}}$$

После подстановки значения  $Q$  в уравнение (117, IV) найдем

$$p_1 = p_0 - \frac{p_0 - p'}{\ln \frac{r_н}{r_0}} \ln \frac{r}{r_0}. \quad (119, IV)$$

На контуре инъекции скорости фильтрации инъецируемой жидкости и воды одинаковы

$$w_1 = \frac{Q}{2\pi ar_н} = \frac{k (p_0 - p')}{\gamma r_н \ln \frac{r_н}{r_0}};$$

$$w_2 = \frac{k_н}{\gamma_n} \frac{p' - p_R}{\ln \frac{R}{r_н}} \frac{1}{r_н}.$$

Приравняв эти уравнения, находим неизвестное давление  $p'$

$$p' = \frac{k_н p_0 \ln \frac{R}{r_н} + k_н \gamma p_R \ln \frac{r_н}{r_0}}{k_н \gamma \ln \frac{r_н}{r_0} + k_н \ln \frac{R}{r_н}}. \quad (120, IV)$$

Подставляя эту величину в уравнения (118—119, IV), получим формулы распределения

$$p_1 = p_0 - \frac{(p_0 - p_R) \ln \frac{r}{r_н}}{\ln \frac{r_н}{r_0} + \frac{\gamma_н}{\gamma} \frac{k}{k_н} \ln \frac{R}{r_н}}; \quad (121, IV)$$

$$p_2 = p_R + \frac{(p_0 - p_R) \ln \frac{R}{r}}{\frac{\gamma}{\gamma_н} \frac{k_н}{k} \ln \frac{r_н}{r_0} + \ln \frac{R}{r_н}}. \quad (122, IV)$$

Так как радиус  $r_н$  контура инъекции по мере увеличения времени нагнетания растет, то давления в любой точке  $r$  обеих областей изменяются по времени. Процесс вытеснения воды при нагнетании тампонажной жидкости является неустановившимся.

Найдем скорость и дебит нагнетания. Для области инъекции имеем

$$w = \frac{Q}{2\pi ar},$$

где  $r_н > r > 0$ .



Поэтому можно написать

$$\omega = \frac{k(\rho_0 - \rho')}{\gamma r \ln \frac{r_0}{r}}$$

После подстановки значения  $\rho'$  из уравнения (120, IV) получим

$$\omega = \frac{kk_s(\rho_0 - \rho_R)}{\left(k_{0\gamma} \ln \frac{r_0}{r_u} + k_{1\gamma} \ln \frac{R}{r_u}\right)r} \quad (123, IV)$$

То же значение скорости получим и по зоне воды, если возьмем соотношение

$$\omega = \frac{k_u}{\gamma_u} \frac{\partial \rho_2}{\partial r}$$

Дифференцируя по  $r$  уравнение (122, IV), найдем скорость  $\omega$  (123, IV).

Дебит скважины при нагнетании получается из уравнения расхода

$$Q = 2\pi ar\omega$$

$$Q = \frac{2\pi akk_s(\rho_0 - \rho_R)}{\left(k_{0\gamma} \ln \frac{r_0}{r_u} + k_{1\gamma} \ln \frac{R}{r_u}\right)} \quad (124, IV)$$

Расход при нагнетании зависит от радиуса  $r_u$ , т. е. от положения фронта инъеции. С увеличением  $r_u$  расход  $Q$  уменьшается.

Если в уравнениях (121—124, IV) вязкость воды принять равной вязкости нагнетаемой жидкости  $\mu_w = \mu$ , то эти уравнения переходят в уравнения одножидкостной системы. Если коэффициент фильтрации выразить через коэффициент проницаемости, то уравнение (124, IV) получает вид

$$Q = \frac{2\pi ak_{np}(\rho_0 - \rho_R)}{\mu \ln \frac{r_0}{r_u} + \mu_w \ln \frac{R}{r_u}} \quad (125, IV)$$

где  $k_{np}$  — проницаемость.

При  $\mu_w = \mu$  уравнение выражает расход в одножидкостной системе.

Найдем закон движения инъеции по времени. Скорость движения контура инъеции равна

$$v = \frac{dr_u}{dt} = \frac{\omega}{m}$$

Подставляя сюда значение скорости на контуре инъеции из формулы (123, IV), получим

$$m \frac{dr_u}{dt} = \frac{kk_s(\rho_0 - \rho_R)}{\left(k_{0\gamma} \ln \frac{r_0}{r_u} + k_{1\gamma} \ln \frac{R}{r_u}\right)r_u}$$

Разделяя переменные, находим

$$dt = \frac{m \left(k_{0\gamma} \ln \frac{r_0}{r_u} + k_{1\gamma} \ln \frac{R}{r_u}\right) r_u dr_u}{kk_s(\rho_0 - \rho_R)} \quad (126, IV)$$

При этом при  $t=0$   $r_u=r_0$ , при  $t=T$   $r_u=R$ .

Для того чтобы найти время движения, уравнение (126, IV) надо интегрировать

$$\int_0^T dt = \frac{m}{kk_s(\rho_0 - \rho_R)} \int_{r_0}^R \left(k_{0\gamma} \ln \frac{r_0}{r_u} + k_{1\gamma} \ln \frac{R}{r_u}\right) r_u dr_u$$

В результате интегрирования имеем

$$T = \frac{m}{2kk_s(\rho_0 - \rho_R)} \left[ r_u^2 (k_{1\gamma} \ln R - k_{0\gamma} \ln r_u) - k_{1\gamma} r_u^2 \ln \frac{R}{r_u} + r_u^2 \ln r_u (k_{0\gamma} - k_{1\gamma}) + (r_u^2 - r_0^2) \frac{k_{1\gamma} - k_{0\gamma}}{2} \right] \quad (127, IV)$$

Уравнение можно несколько упростить, если коэффициенты фильтрации выразить через коэффициент проницаемости пористой среды

$$T = \frac{m}{2k_{np}(\rho_0 - \rho_R)} \left[ r_u^2 (\mu \ln R - \mu \ln r_u) - \mu r_u^2 \ln \frac{R}{r_u} + (1 - \mu_w) r_u^2 \ln r_u + \left(\frac{\mu_w - \mu}{2}\right) (r_u^2 - r_0^2) \right] \quad (128, IV)$$

Уравнения (127 и 128, IV) по заданной величине  $(\rho_0 - \rho_R)$  позволяют найти значения времени  $t$ , отвечающие любому положению фронта инъеции в интервале  $R > r_u > r_0$ . Для этих значений времени по формулам (121—124, IV) легко найти распределение давления в пласте, определить скорость фильтрации инъецирующей жидкости и расход скважины при нагнетании, подставив в указанные формулы соответствующие значения  $r_u$ .

Внося в уравнения (127 и 128, IV) вместо  $r_u$  радиус предельного распространения инъеции  $R$ , найдем время  $T$  вытеснения всей воды

$$T = \frac{m}{2kk_s(\rho_0 - \rho_R)} \left[ R^2 (k_{1\gamma} \ln R - k_{0\gamma} \ln r_0) - k_{1\gamma} R^2 \ln \frac{R}{r_0} + R^2 \ln R (k_{0\gamma} - k_{1\gamma}) + (R^2 - r_0^2) \frac{k_{1\gamma} - k_{0\gamma}}{2} \right]$$



$$T = \frac{m}{2k_{ар}(\rho_0 - \rho_R)} \left[ R^2 (\mu_0 \ln R - \mu \ln r_0) - \mu_0 r_0^2 \ln \frac{R}{r_0} + (\mu - \mu_0) R^2 \ln R + \left( \frac{\mu_0 - \mu}{2} \right) (R^2 - r_0^2) \right] \quad (129, IV)$$

При  $\mu_0 = \mu$  уравнения переходят в формулы, определяющие время продвижения контура иньекции в случае одножидкостной системы

$$T = \frac{m_0}{2k_{ар}(\rho_0 - \rho_R)} \ln \frac{R}{r_0} (R^2 - r_0^2) \quad (130, IV)$$

(Величиной  $r_0^2$  ввиду малости можно пренебречь.)

По схеме нагнетания в условиях вытеснения воды порядок решения задачи следующий. Заданы перепад давления  $(\rho_0 - \rho_R)$

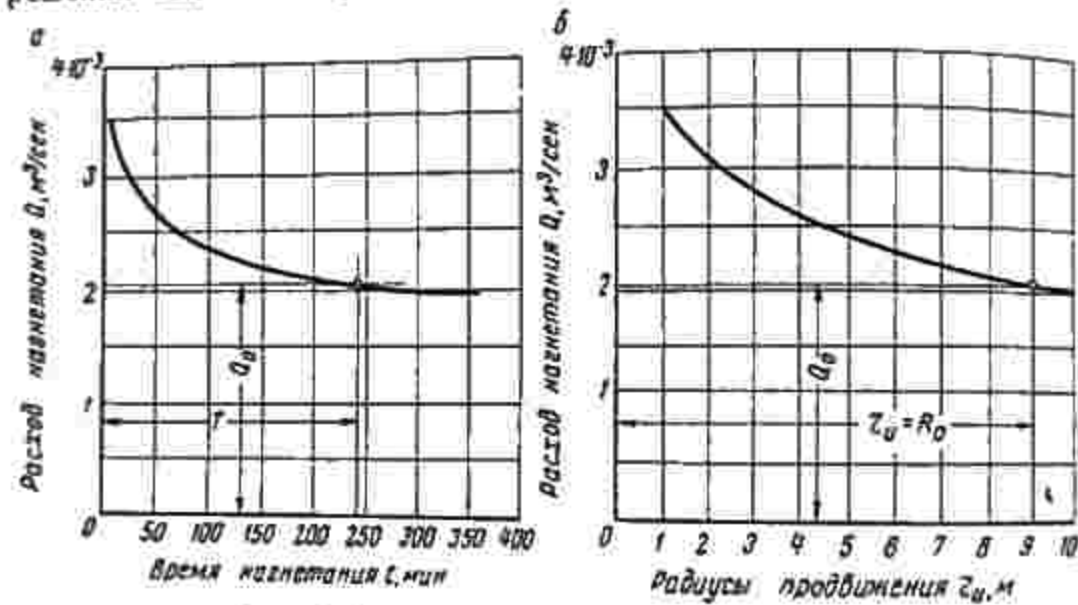


Рис. 52 Кривые распределения расходов: а— $Q=f(t)$ ; б— $Q=f(z)$

и время нагнетания  $T$ . Определить радиус иньекции  $R$  и найти распределение расходов нагнетания по времени. Взяв некоторую длину радиуса, разбиваем ее на несколько участков  $r_{н1}, r_{н2}, r_{н3}$  и т. д. Для каждого участка по формулам (124 или 125, IV) надо вычислить расходы нагнетания, а по формулам (127 или 128, IV) определить время движения для каждого участка. При известных значениях  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  и  $t_1, t_2, t_3, \dots$  построить кривую  $Q=f(t)$ . По этой кривой найти расход  $Q_0$ , отвечающий заданному времени  $T$ . При известных значениях  $Q$  и  $r$ , построить вторую кривую  $Q=f(r_n)$ . По этой кривой определить длину радиуса иньекции  $r_n = R_0$ , отвечающую расходу  $Q_0$ .

Пример построения кривых  $Q=f(t)$  и  $Q=f(r_n)$ . На рис. 52 показаны кривые распределения расходов во времени  $t$  и по длине радиуса продвижения  $r_n$ , вычисленные по формулам (128, IV и 125, IV) для нагнетания иньектирующей

жидкости в водоносный пласт мощностью  $a=3$  м и проницаемостью  $k_{ар}=12$  дарси при перепаде давления  $(\rho_0 - \rho_R) = 49 \cdot 10^4$  н/м<sup>2</sup>. Динамические вязкости воды 0,001 н·сек/м<sup>2</sup>, иньекции — 0,01 н·сек/м<sup>2</sup>. Радиус нагнетательной трубы  $r_0 = 0,05$  м и радиус предельного распространения  $R = 10$  м. Для времени нагнетания 4 ч радиус определяется равным  $Q_0 = 2,1 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>/сек при радиусе распространения  $R_0 = 9$  м.

Факторы, влияющие на скорость продвижения фронта иньекции в условиях вытеснения. Уравнение (129, IV) устанавливает время продвижения фронта иньекции при вытеснении воды иньектируемой жидкостью. Уравнение (130, IV) определяет время продвижения фронта нагнетаемой жидкости в одножидкостной системе, например при вытеснении воды водой. Первое время обозначим через  $T$ , второе через  $T_0$  и найдем отношение  $\frac{T}{T_0}$  при одних и тех же значениях  $(\rho_0 - \rho_R)$  и  $m$ . Это отношение времени может характеризовать степень интенсивности продвижения фронта иньекции в условиях вытеснения воды.

Разделив уравнение (129, IV) на уравнение (130, IV), будем иметь

$$\frac{T}{T_0} = \frac{k_{ар, в}}{k_{ар}} \times \frac{R^2 (\mu_0 \ln R - \mu \ln r_0) - \mu_0 r_0^2 \ln \frac{R}{r_0} + (\mu - \mu_0) R^2 \ln R - \left( \frac{\mu_0 - \mu}{2} \right) (R^2 - r_0^2)}{\mu_0 \ln \frac{R}{r_0} (R^2 - r_0^2)}$$

Обозначив  $\frac{\mu}{\mu_0} = \mu_0$  и пренебрегая в выражении  $(R^2 - r_0^2)$  величиной  $r_0^2$ , уравнение приводим к виду

$$\frac{T}{T_0} = \frac{k_{ар, в}}{k_{ар}} \frac{\left( \mu_0 - \frac{r_0^2}{R^2} \right) \ln \frac{R}{r_0} - \frac{\mu_0 - 1}{2}}{\ln \frac{R}{r_0}}$$

Величина  $\frac{r_0^2}{R^2}$  слишком мала по сравнению с  $\mu_0$ , ею можно пренебречь

$$\frac{T}{T_0} = \frac{k_{ар, в}}{k_{ар}} \frac{\mu_0 \ln \frac{R}{r_0} - \frac{\mu_0 - 1}{2}}{\ln \frac{R}{r_0}}$$

Путем простых преобразований будем иметь

$$\frac{T}{T_0} = \frac{k_{ар, в} \rho_0}{k_{ар}} \left[ 1 - \frac{\mu_0 - 1}{2 \mu_0 \ln \frac{R}{r_0}} \right] \quad (131, IV)$$



В этом уравнении:  
 $k_{пр}$  — коэффициент проницаемости пористой среды по отношению к нагнетаемой жидкости, м<sup>2</sup>;  
 $k_{пр в}$  — по отношению к воде, м<sup>2</sup>;  
 $\mu_0 = \frac{\mu}{\mu_0}$  — относительная вязкость;  
 $R$  — радиус предельного распространения фронта инъекции, м;  
 $r_0$  — внутренний радиус нагнетательной трубы (скважины), м.

Из уравнения (131, IV) видно, что эффект продвижения фронта инъекции в условиях вытеснения воды прежде всего зависит от коэффициента

$$a = \frac{k_{пр в}}{k_{пр}} \mu_0.$$

В американской литературе такой коэффициент называется коэффициентом подвижности.

По определению и физическому смыслу коэффициента проницаемости пористой среды  $k_{пр}$  величина его не должна зависеть от природы однородной жидкости. Она является константой, определяемой только структурой пористой среды. По словам Маскета, это обстоятельство только недавно нашло свое признание в литературе. Тем не менее проф. Р. Е. Коллингз учитывает разницу в коэффициентах проницаемости среды «по отношению к определенной, представляющей интерес жидкости» (слова Маскета). В отечественной литературе также имеются указания на влияние характера жидкостей на результаты измерения величины коэффициента проницаемости. Существуют различные объяснения причин, вызывающих изменение проницаемости. К числу этих причин обыкновенно относят перегруппировку зерен породы при фильтрации, явления суффозии, выпадение из жидкости взвешенных каносов и закупорку ими поровых каналов, отложение на поверхности зерен породы смолистых веществ, имеющих в некоторых жидкостях, разбухание пород, содержащих глинистые примеси и др. Так как эти явления не постоянны, а зависят от времени, то и коэффициент проницаемости пористой среды является функцией времени. Но на каком-то ограниченном интервале времени для однородных жидкостей возможно считать коэффициент проницаемости постоянным, не зависящим от природы жидкостей. На этих основаниях коэффициенты проницаемости по отношению к однородным жидкостям будем считать постоянными и учитывать только различие в вязкостях

$$\mu_0 = \frac{\mu}{\mu_0}.$$

При этих условиях отношение времени вытеснения определяется уравнением

$$\frac{T}{T_0} = \mu_0 \left[ 1 - \frac{r_0 - 1}{2r_0 \ln \frac{R}{r_0}} \right]. \quad (132, IV)$$

Отметим, что при  $\mu_0 = 1$  отношение  $\frac{T}{T_0}$  равно единице и отражает одножидкостную систему. Из других факторов, обуславливающих интенсивность продвижения фронта инъекции в условиях вытеснения воды, некоторым значением пользуется радиус скважины  $r_0$ .

Таблица 21

$\frac{\mu}{\mu_0}$	$r_0$ , м	$R$ , м	$\frac{T}{T_0}$	$\frac{\mu}{\mu_0}$	$r_0$ , м	$R$ , м	$\frac{T}{T_0}$
3	0,05	5	2,77	3	0,10	5	2,75
	0,05	10	2,80		0,10	10	2,78
	0,05	15	2,83		0,10	15	2,80
5	0,05	20	2,84	5	0,10	20	2,81
	0,05	5	4,45		0,10	5	4,35
	0,05	10	4,53		0,10	10	4,45
10	0,05	15	4,55	10	0,10	15	4,50
	0,05	20	4,57		0,10	20	4,51
	0,05	5	9,02		0,10	5	8,85
	0,05	10	9,15		0,10	10	9,03
	0,05	15	9,21		0,10	15	9,10
	0,05	20	9,25		0,10	20	9,15
	5,00	20	6,75		10,00	20	7,20

В табл. 21 по формуле (132, IV) вычислены отношения  $\frac{T}{T_0}$  для различных значений  $\mu_0$ ,  $R$  и  $r_0$ . Табличные данные характеризуют интенсивность продвижения фронта инъекции в условиях вытеснения воды. Из рассмотрения этих данных видно, что различие в вязкости инъецируемой жидкости и воды существенно влияет на время вытеснения, причем время вытеснения воды почти пропорционально относительной вязкости  $\mu_0$ , т. е. вытеснение происходит тем медленнее, чем больше вязкость инъецируемой жидкости. Последнее вполне закономерно, так как скорость фильтрации при равенстве всех прочих условий обратно пропорциональна вязкости жидкости (12, III). Радиус нагнетательной скважины  $r_0$  сравнительно мало влияет на интенсивность продвижения фронта инъекции. При увеличении радиуса скважины вдвое уменьшение отношения  $\frac{T}{T_0}$  не превышает 2,5%. И только при увеличении ра-



туса скважины в сто раз, когда последняя превращается в шахту, интенсивность продвижения фронта инъекции увеличивается на 25—30%.

Последняя горизонтальная строка таблицы с радиусами шахты 5 и 10 м представляет интерес в том отношении, что характерные для нее цифры табличных данных справедливы для круговой батареи скважин. Профессором В. Шелкачевым доказано, что условия притока жидкости к такой шахте весьма близки к условиям притока к расположенной по окружности группе скважин.

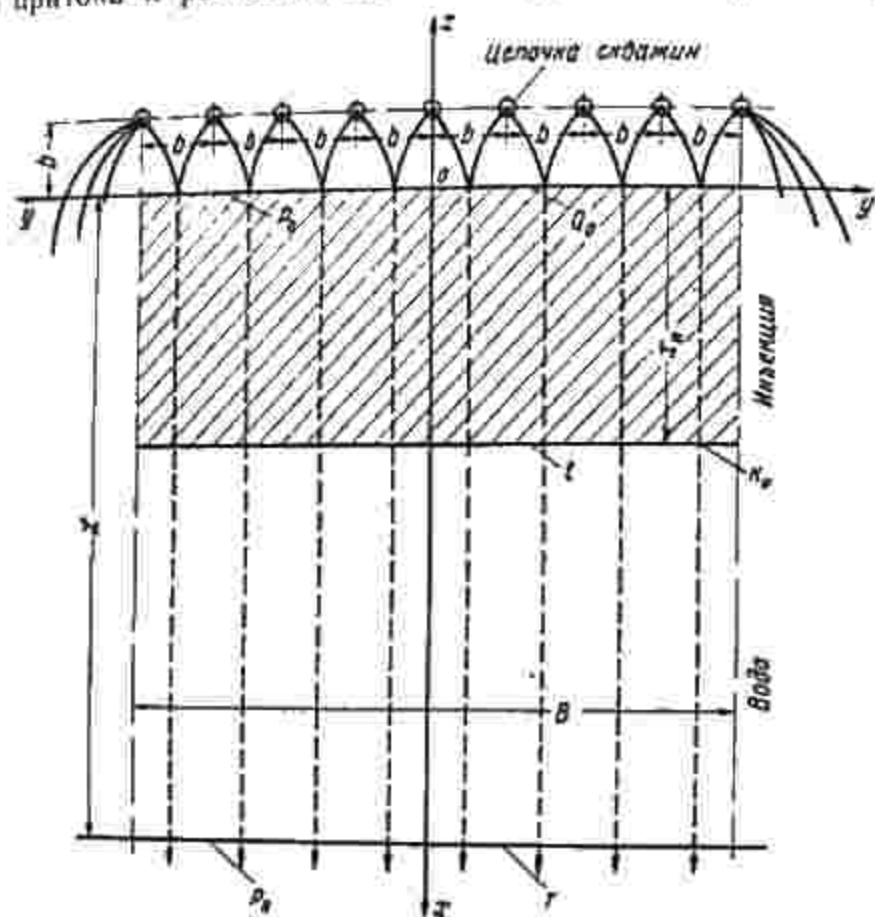


Рис. 52. Схема пласта к одномерной задаче о вытеснении воды инъекцией

даже при сравнительно небольшом числе их. Поэтому формулы вытеснения для одиночной скважины, рассмотренные в двух последних параграфах, будут справедливы и для кольцевой батареи скважин, если за радиус скважины  $r_0$  принять радиус круговой батареи  $r_0 = R_0$ .

Таким образом, решение осесимметричной задачи о вытеснении воды при нагнетании инъектирующей жидкости из одиночной скважины позволяет определить время вытеснения воды целой группой скважин, расположенных по окружности.

Вытеснение воды прямолинейным рядом инъекционных скважин. Условия вытеснения воды прямолинейным рядом инъекционных

скважин следует рассмотреть, так как в практике горного дела постановка такой задачи не исключена. Известно, что если нагнетание производится одновременно из ряда скважин, расположенных на прямой при равных и достаточно малых расстояниях друг от друга (рис. 53), то на расстоянии от скважин, равном общему интервалу  $b$ , движение жидкости в пористой среде приближенно можно рассматривать линейным.

Установим вначале основные гидравлические соотношения для линейного потока однородной жидкости. Представим плоский горизонтальный фильтрационный поток шириной  $B$ . В начальном сечении его действует постоянное давление  $p_0$  на контуре предельного растекания  $p_R$ . По формуле (3, II) при координатных осях по рис. 53 получим

$$dp = - \frac{\gamma U}{k} dx.$$

Учитывая, что  $F = aB$ , где  $a$  — мощность пласта и  $U = \text{const}$ , будем иметь

$$dp = - \frac{\gamma Q}{aBk} dx.$$

Интегрируя это уравнение в пределах от  $p_0$  до  $p$  и от 0 до  $x$ , найдем

$$p = p_0 - \frac{\gamma Q}{aBk} x.$$

При  $x = L$  давление  $p$  равно  $p_R$ . Поэтому дебит фильтрационного потока равен

$$Q = \frac{aBk}{\gamma} \frac{p_0 - p_R}{L}. \quad (133, IV)$$

Подставив значение  $Q$  во все предыдущие уравнения, находим градиент давления, давление и скорость фильтрации в любой точке плоского потока однородной жидкости

$$\frac{dp}{dx} = - \frac{p_0 - p_R}{L},$$

$$p = p_0 - \frac{p_0 - p_R}{L} x$$

или

$$p = p_R + \frac{p_0 - p_R}{L} (L - x),$$

$$w = \frac{Q}{F} = \frac{k}{\gamma} \frac{p_0 - p_R}{L}.$$



Основываясь на этих формулах, можно написать формулы распределения давления и скорости фильтрации в области инъекции и вытесняемой воды.

Аналогично предыдущему приняв изобару, совпадающую с контуром инъекции, за контур предельного растекания, напишем формулы распределения давления и скорости в области инъекции

$$p_1 = p_0 - \frac{\rho_0 - \rho'}{\gamma_0} x; \quad (134, IV)$$

$$\omega_1 = \frac{k}{\gamma} \cdot \frac{\rho_0 - \rho'}{x}; \quad (135, IV)$$

Для области водоносности можно написать

$$p_2 = p_R + \frac{\rho' - p_R}{L - x} (L - x); \quad (136, IV)$$

$$\omega_2 = \frac{k_0}{\gamma_0} \cdot \frac{\rho' - p_R}{L - x}; \quad (137, IV)$$

Так как жидкости несжимаемы, а потоки неразрывны, то при одномерности движения скорости фильтрации тампонажной жидкости и воды в каждый данный момент времени во всех точках пласта одинаковы

$$\omega_1 = \omega_2, \\ \frac{k}{\gamma} \cdot \frac{\rho_0 - \rho'}{x} = \frac{k_0}{\gamma_0} \cdot \frac{\rho' - p_R}{L - x}.$$

Решая это уравнение относительно давления  $\rho'$ , получим

$$\rho' = \frac{\gamma_0 k p_0 (L - x) + \gamma k_0 p_R x}{\gamma k_0 x + \gamma_0 k (L - x)}. \quad (138, IV)$$

Подставив значение  $\rho'$  в уравнения (134—137, IV), найдем распределение давления в областях инъекции и водоносности и скорость фильтрации

$$p_1 = p_0 - \frac{\gamma k_0 (\rho_0 - p_R)}{\gamma k_0 x + \gamma_0 k (L - x)} x; \quad (139, IV)$$

$$p_2 = p_R + \frac{\gamma_0 k (\rho_0 - p_R)}{\gamma k_0 x + \gamma_0 k (L - x)} (L - x); \quad (140, IV)$$

$$\omega = \frac{k_0 k (\rho_0 - p_R)}{\gamma k_0 x + \gamma_0 k (L - x)}. \quad (141, IV)$$

Расход жидкости  $Q$  определяется умножением скорости фильтрации на площадь живого сечения пласта  $aB$

$$Q = \frac{k_0 k a B (\rho_0 - p_R)}{\gamma k_0 x + \gamma_0 k (L - x)} \quad (142, IV)$$

Если коэффициенты фильтрации выразить через коэффициент проницаемости пласта, то последнее уравнение будет иметь вид

$$Q = \frac{k_{np} a B (\rho_0 - p_R)}{\mu x + \mu_0 (L - x)} \quad (143, IV)$$

Если вязкость воды принять равной вязкости нагнетаемой жидкости  $\mu_0 = \mu$ , то уравнения (139—143, IV) переходят в уравнения одножидкостной системы

Теперь можно установить закон движения инъекции по времени. Скорость движения фронта инъекции

$$v = \frac{dx_0}{dt} = \frac{\omega}{m}$$

Подставляя значение скорости фильтрации из уравнения (141, IV), получим

$$m \frac{dx_0}{dt} = \frac{k_0 k (\rho_0 - p_R)}{\gamma k_0 x_0 + \gamma_0 k (L - x_0)}$$

Разделив переменные, будем иметь

$$dt = \frac{m [\gamma k_0 x_0 + \gamma_0 k (L - x_0)] dx_0}{k_0 k (\rho_0 - p_R)} \quad (144, IV)$$

Граничные условия будут при  $t=0$   $x_0=0$ , при  $t=T$   $x_0=L$ .

Для определения времени движения уравнение (144, IV) надо интегрировать

$$\int_0^t dt = \frac{m}{k_0 k (\rho_0 - p_R)} \int_0^L [\gamma k_0 x_0 + \gamma_0 k (L - x_0)] dx_0, \\ t = \frac{m}{k_0 k (\rho_0 - p_R)} \left[ (\gamma k_0 - \gamma_0 k) \frac{x_0^2}{2} + \gamma_0 k L x_0 \right]. \quad (145, IV)$$

Внося в это уравнение вместо  $x_0$  длину предельного распространения инъекции  $L$ , найдем время  $T$  вытеснения всей воды

$$T = \frac{m}{k_0 k (\rho_0 - p_R)} \cdot \frac{\gamma k_0 + \gamma_0 k}{2} L^2. \quad (146, IV)$$

При замене коэффициентов фильтрации коэффициентом проницаемости получим

$$T = \frac{m}{2k_{np} (\rho_0 - p_R)} (\mu + \mu_0) L^2. \quad (147, IV)$$

При  $\mu = \mu_0$  уравнение переходит в формулу, определяющую время продвижения контура инъекции в случае одножидкостной системы

$$T = \frac{m \mu}{k_{np} (\rho_0 - p_R)} L^2. \quad (148, IV)$$



Уравнение (147, IV) позволяет при известной величине перепада давления  $(p_0 - p_R)$  найти длину продвижения фронта инъекции  $L$  для заданного времени нагнетания  $T$

$$L = \sqrt{\frac{2k_{np}(p_0 - p_R)T}{m(\mu + \mu_w)}} \quad (149, IV)$$

Если через  $T_0$  обозначим время вытеснения воды водой (148, IV при  $\mu = \mu_w$ ), то отношение  $\frac{T}{T_0}$  будет характеризовать интенсивность продвижения фронта инъекции в линейном потоке в условиях вытеснения воды

$$\frac{T}{T_0} = \frac{\mu_0 + 1}{2} \quad (150, IV)$$

где  $\mu_0 = \frac{\mu}{\mu_w}$ .

Формулы (147—150, IV) позволяют приближенно, но с достаточной практической степенью точности определить время, длину и интенсивность продвижения фронта инъекции в условиях вытеснения воды прямолинейным рядом инъекционных скважин. А по формулам (143—145, IV) можно построить кривые распределения расходов по времени и длине потока  $Q = f(t)$  и  $Q = f(x_n)$ , определяющие радиусы инъекции для любого заданного времени нагнетания.

Постоянный перепад давления определяется уравнением (143, IV)

$$p_0 - p_R = \frac{Q}{k_a k_{aB}} [\gamma k_a x_n + \gamma_w k (L - x_n)] \quad (151, IV)$$

Если за расчетный расход  $Q$  принять расход, отвечающий длине предельного продвижения инъекции  $L$ , то необходимая величина давления  $p_0$  в начальном сечении прямолинейного потока находится из уравнения (151, IV) при  $x_n = L$

$$p_0 = p_R + \frac{\gamma Q_0}{k_a B} L \quad (152, IV)$$

Ту же величину давления получим, если за расчетный расход инъекции принять расход, отвечающий начальному сечению линейного потока при  $x_n = 0$ .

$$p_0 = p_R + \frac{\gamma_w Q_0}{k_a aB} L \quad (153, IV)$$

Для полноты представлений необходимо режим линейной части фильтрационного потока увязать с общим режимом на забоях инъекционных скважин

При малых расстояниях между скважинами линейного ряда и большом расстоянии до внешнего контура фильтрации ( $R \gg b$ ) скважины всей цепочки можно считать равнодебитными при более или менее равных значениях забойных давлений.

Поэтому, заменяя цепочку равнодебитных скважин системой одиночных, по формуле (121, IV) можно написать выражение для давления в любой точке контура инъекции в условиях вытеснения воды

$$p = p_0' - \frac{(p_0' - p_R) \ln \frac{r}{r_0}}{\beta \left( \ln \frac{r_w}{r_0} + \frac{\gamma_w}{\gamma} + \frac{k}{k_w} \ln \frac{R}{r_w} \right)} \quad (154, IV)$$

где  $\beta$  — коэффициент интерференции линейного ряда скважин;  
 $p_0'$  — давление на забоях скважин.

Коэффициент интерференции можно определить по формуле, аналогичной (62, IV). Но для этого надо сначала найти значение  $R$ , отвечающее  $x_0 = b + L$  (24, IV)<sup>1</sup>.

Для данного случая коэффициент  $\beta$  можно получить непосредственно из соотношения напоров для точек, расположенных на оси  $x$ :

$$H_{r_0} - H_{r_n} = \left( \frac{p}{\gamma} \right)_{r_0} - \left( \frac{p}{\gamma} \right)_{r_n} + \sum_{i=1}^m \ln \frac{x_0^2 + (ib)^2}{(ib)^2} \quad (155, IV)$$

$$\beta = 1 + \frac{\sum_{i=1}^m \ln \frac{x_0^2 + (ib)^2}{(ib)^2}}{\ln \frac{x_0}{r_0}}$$

где  $m$  — количество скважин по одну сторону ряда (полное количество скважин  $2m + 1$ ).

По формуле (154, IV) можно определить давление  $p_0$  на контуре начального сечения линейного потока ( $r = r_n = b$ ).

Зная давление  $p_0$  на контуре начального сечения, по уравнению (153, IV) находим расход на этом контуре

$$Q_0 = \frac{k_a aB (p_0 - p_R)}{\gamma_w L}$$

Располагая известной величиной перепада давления  $(p_0 - p_R)$ , по формулам (143 и 145, IV) вычисляются расходы линейного потока  $Q_0$ , отвечающие разным значениям времени  $t$  и расстояний  $x_n$ .

Расход  $Q'$  на забоях скважин в начале нагнетания ( $t = 0$ ,  $r_n = r_0$ ) в условиях вытеснения можно определить по уравнению (125, IV), если ввести в него коэффициент интерференции

$$Q' = \frac{2\pi a k_{np} (p_0' - p_R) (2m + 1)}{\beta \left( \mu \ln \frac{r_w}{r_0} + \mu_w \ln \frac{x_0}{r_w} \right)} \quad (156, IV)$$

<sup>1</sup> Обозначение координатных осей в рассматриваемом случае иное по отношению к формулам (62 и 24, IV).



Время подвода контура инъеции от забоя скважины к начальному сечению линейного потока можно найти по уравнению (128, IV) при перепаде давления  $(p_0 - p_n)$ ,  $R = x_0$  и  $r_n = b$ :

$$t = \frac{m^2 b}{2k_{\text{эф}}(p_0 - p_R)} \left[ b^2 (\mu_n \ln x_0 - \mu \ln r_0) - \mu_n r_0^2 \ln \frac{x_0}{r_0} + (\mu - \mu_n) b^2 \ln b + \left( \frac{\mu_n - \mu}{2} \right) (b^2 - r_0^2) \right]. \quad (157, IV)$$

Так может быть решена задача о вытеснении воды прямолинейным рядом инъеционных скважин. Имея цепочку равнодебитных инъеционных скважин, можно полагать, что на расстоянии  $b$  от оси цепочки в фильтрационном потоке инъеции устанавливается режим, описываемый линейными уравнениями (139—152, IV).

Рассмотренными вопросами ограничено содержание четвертой главы, посвященной проблеме плоско-радиального течения из скважины. Наиболее характерной чертой последнего является наличие обширной области высоких градиентов давления на большом расстоянии от скважины. Это обстоятельство положительно отражается на работе взаимодействующих скважин, которые в условиях плоско-радиального течения обуславливают значительные радиусы суммарного действия.

## Глава V ДОННОЕ НАГНЕТАНИЕ ЖИДКОСТИ С ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ФИЛЬТРАЦИИ

Если в грунт на достаточную глубину заложить вертикальную трубу с непроницаемыми стенками и открытым дном и затем нагнетать в нее жидкость под постоянным давлением, то через некоторое время в грунте установится движение фильтрационного потока со свободной поверхностью и постоянным расходом. Точного решения свободной поверхности этого пространственного течения не найдено.

В. В. Ивакин в качестве свободной поверхности потока при нагнетании из трубы принял поверхность «полутела Прандтля». Но, строго говоря, эта поверхность не может быть свободной поверхностью открытого грунтового потока, так как на ней не выполняется условие постоянства давления.

В. М. Насберг нашел решение, обеспечивающее постоянство давления на свободной поверхности. Но в задаче В. М. Насберга не выполняется другая, не менее важная сторона вопроса. Во внутренней области гидродинамического поля распределение давления не соответствует реальности. К сожалению, для наших целей воспользоваться схемой В. М. Насберга не представляется возможным. Поэтому в дальнейшем мы базируемся на решении В. В. Ивакина, использовавшего сложение параллельно-осевого потока и источника.

### 1. Нагнетание при неограниченной глубине проницаемого слоя

Функции результирующего течения в соответствии с формулами второй главы определяются сложением соответствующих величин:

$$\varphi = -Ux + \frac{Q}{4\pi r}, \quad (1, V)$$

$$\psi = \pi U y^2 + \frac{Q}{2} (1 - \cos \theta). \quad (2, V)$$

Скорость равномерного вертикального течения в грунтовой среде, параллельного оси  $x$  и происходящего под влиянием силы тяжести ( $l=1$ ), равна  $U=k$ .



Из уравнения (2.V) можно получить все линии тока, если для каждой из них определить значения констант  $\psi$ . Результирующее течение симметрично относительно оси  $x$  и характеризуется наличием на ней критической точки  $A$  (рис. 54), в которой вследствие сложения двух равных и противоположно направленных ком-

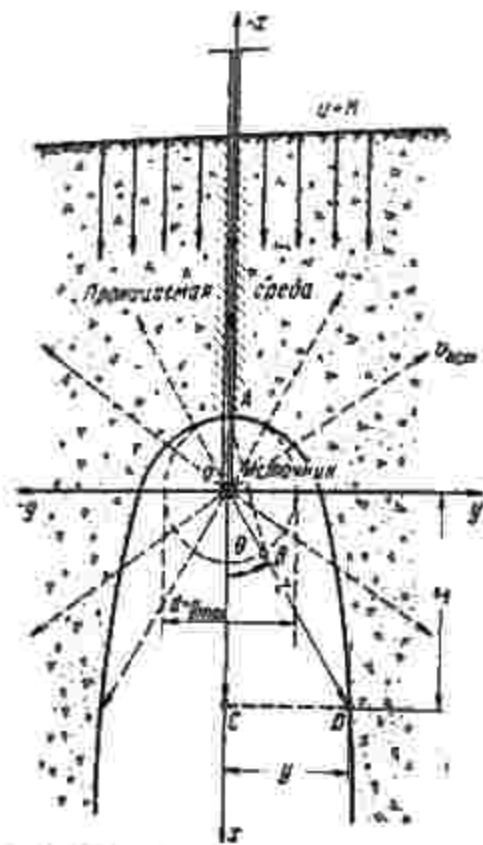


Рис. 54. Схема источника с параллельно-осевым потоком при нагнетании в грунт через скважину

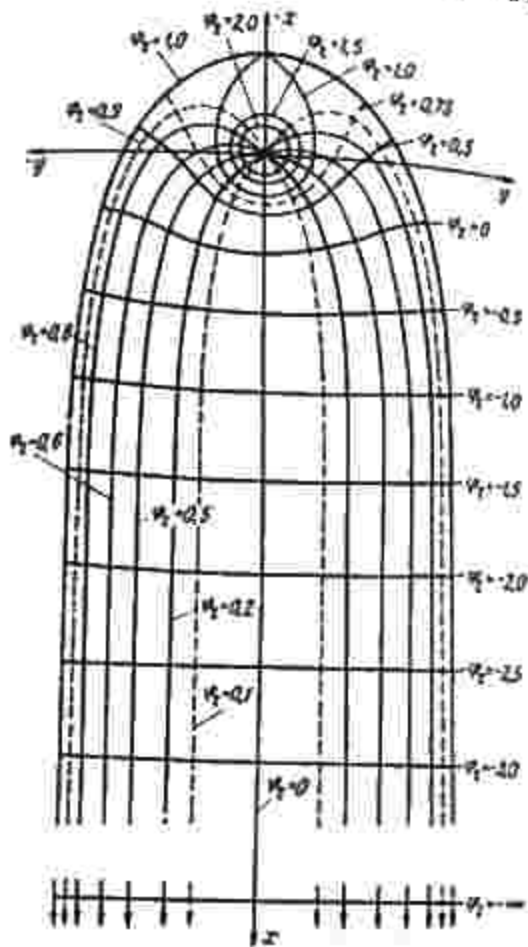


Рис. 55. Меридиональное сечение комбинационного поля течения источника с параллельно-осевым потоком

понентов скорость равна нулю. Эта точка принадлежит крайней разделительной линии тока. Значение  $\psi$  для нее определяется постановкой в уравнение (2.V) координат точки  $A$  [ $y=0$  и  $\theta=180^\circ$  ( $\cos \theta = -1$ )]

$$\psi = \pi k \cdot 0 + \frac{Q}{2} \cdot 2 = Q.$$

Диаметрально противоположная точка с координатами  $y=0$  и  $\theta=0$  ( $\cos \theta = 1$ ) определяет  $\psi$  центральной (осевой) линии тока

$$\psi = \pi k \cdot 0 + \frac{Q}{2} \cdot 0 = 0.$$

Следовательно, значения  $\psi$  находятся в пределах от 0 до  $Q$  и могут быть выражены соотношением

$$\psi = \psi_r Q,$$

где величина  $\psi_r$  изменяется от 0 до 1.

Уравнение линий тока принимает вид

$$\psi_r Q = \pi k y^2 + \frac{Q}{2} (1 - \cos \theta).$$

При  $x = y \operatorname{ctg} \theta$  координаты линий тока будут

$$\left. \begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{Q}{\pi k}} \sqrt{\psi_r - \frac{1 - \cos \theta}{2}}; \\ x &= \sqrt{\frac{Q}{\pi k}} \sqrt{\psi_r - \frac{1 - \cos \theta}{2}} \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \right\} \quad (3.V)$$

Значение предельного угла  $\theta_0$ , соответствующего конечной глубине нагнетания  $x=a$  при  $\psi_r=1$ , получается из уравнения

$$\cos \theta_0 = \frac{\pi k}{Q} a^2 \left( \sqrt{1 + \frac{2Q}{\pi k a^2}} - 1 \right). \quad (4.V)$$

Наибольшее значение  $y$  соответствует точке, определяемой значениями  $\theta=0$  и  $x=\infty$ :

$$y_{\max} = \sqrt{\frac{Q}{\pi k}}. \quad (5.V)$$

Это наибольший радиус вертикального цилиндрического потока в бесконечности.

Значение ординаты  $x$ , отвечающее положению точки  $A$ , определяется из соображений, что в этой точке ( $\theta=180^\circ$ ) компонент скорости  $u$  равен нулю

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

При замене  $r = \frac{x}{\cos \theta}$  и  $\cos \theta = -1$  из уравнения (1.V) имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -kx - \frac{Q}{4\pi x} \right) = -k + \frac{Q}{4\pi x^2} = 0,$$

откуда

$$x_A = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{Q}{\pi k}} = \frac{1}{2} y_{\max}. \quad (6.V)$$

Построение линий тока можно сделать в приведенных условиях при  $\frac{Q}{\pi k} = 1$ . Функцию  $\psi_r$  в этом случае можно назвать при-



веденной линией тока. Приведенные координаты линий тока будут выражены уравнениями

$$\left. \begin{aligned} y_r &= \sqrt{\psi_r - \frac{1 - \cos \theta}{2}}; \\ x_r &= \sqrt{\psi_r - \frac{1 - \cos \theta}{2}} \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \right\} (7.V)$$

Для перехода от приведенных линий тока к действительным числовые значения  $\psi_r$  необходимо умножить на  $Q$ , а приведенные координаты на  $\sqrt{\frac{Q}{\pi k}}$ .

На рис. 55 в приведенных условиях выполнено построение всего поля течения меридионального сечения фильтрационного потока для источника с осевым потоком. Форма разделительной поверхности потока приближается к поверхности эллипсоида вращения, переходящей в бесконечности в поверхность цилиндрического тела вращения («полутело Прандтля»). Необходимо отметить, что разделительная линия тока может быть построена графически (см. рис. 54). Для этого из центра источника надо описать окружность диаметром

$$d = y_{\max} = \sqrt{\frac{Q}{\pi k}}.$$

Простыми геометрическими соотношениями легко доказать, что хорда  $AB$  равна

$$AB = y_{\max} \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{Q}{\pi k}} \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}.$$

Поэтому радиус  $OB$  надо довести до точки  $D$ , где горизонтальное расстояние  $CD$  будет равно  $AB$ . Остальные точки разделительной линии определяются аналогично.

Для построения эквипотенциальных линий необходимо установить пределы изменения  $\varphi$  в уравнении (1.V). Для этой цели могут служить значения предельных координат осевой линии тока:

$$\left. \begin{aligned} \theta = 180^\circ; & x = -0,5 \sqrt{\frac{Q}{\pi k}}; & \theta = 0; & \\ \theta = 90^\circ; & x = 0 \sqrt{\frac{Q}{\pi k}}; & y = 0 \sqrt{\frac{Q}{\pi k}}; & \\ & & x = \infty \sqrt{\frac{Q}{\pi k}}. & \end{aligned} \right\}$$

При подстановке этих величин в уравнение (1.V) и при замене  $r = \frac{x}{\cos \theta} = \frac{y}{\sin \theta}$  получим

$$\varphi_{100} = k \sqrt{\frac{Q}{\pi k}}; \quad \varphi_{90} = \infty k \sqrt{\frac{Q}{\pi k}}; \quad \varphi_0 = -\infty k \sqrt{\frac{Q}{\pi k}}$$

Следовательно, значения  $\varphi$  для рассматриваемого поля течения находятся в пределах от  $+\infty k \sqrt{\frac{Q}{\pi k}}$  до  $-\infty k \sqrt{\frac{Q}{\pi k}}$  и могут быть выражены соотношением

$$\varphi = \varphi_r k \sqrt{\frac{Q}{\pi k}}.$$

Уравнение потенциала получает вид

$$\varphi_r k \sqrt{\frac{Q}{\pi k}} = -kx + \frac{Q \cos \theta}{4\pi x}.$$

Из этого уравнения определяются координаты эквипотенциалей

$$\left. \begin{aligned} x &= 0,5 \sqrt{\frac{Q}{\pi k}} (\sqrt{\varphi_r^2 + \cos \theta} - \varphi_r); \\ y_r &= x \operatorname{tg} \theta. \end{aligned} \right\} (8.V)$$

Аналогично линиям тока построение эквипотенциалей можно выполнить в приведенных условиях при  $\sqrt{\frac{Q}{\pi k}} = 1$  (рис. 55). Функция  $\varphi_r$  может быть названа приведенной линией потенциала. Численные значения ее изменяются от  $+\infty$  до  $-\infty$ . Приведенные координаты будут

$$\left. \begin{aligned} x_r &= 0,5 (\sqrt{\varphi_r^2 + \cos \theta} - \varphi_r); \\ y_r &= x_r \operatorname{tg} \theta. \end{aligned} \right\} (9.V)$$

Для перехода от приведенных линий потенциала к действительным числовые значения  $\varphi_r$  умножаются на  $k \sqrt{\frac{Q}{\pi k}}$  а приведенные координаты — на  $\sqrt{\frac{Q}{\pi k}}$ .

Давление в скважине. Движение жидкости от источника в проницаемую среду удовлетворяет закону потенциального движения, выраженному уравнением (2.II), и происходит на основе полученных эквипотенциалей. Поэтому, изображая функцию потенциала через напор

$$\varphi = -kx + \frac{Q \cos \theta}{4\pi x} = kH,$$

можно определить значение напора для любой точки фильтрационного потока

$$H = -x + \frac{Q \cos \theta}{4\pi kx}. \quad (10.V)$$

В соответствии с принятыми ранее положениями скоростным напором при движении жидкости в пористой среде пренебрегают



ся. Поэтому уравнение (10,V) определяет распределение пьезометрических напоров. Отметим некоторые особенности изменения их.

Пьезометрические напоры изменяются от  $+\infty$  в центре источника до  $-\infty$  на бесконечном удалении вниз от источника. Поэтому начисление пьезометрических напоров необходимо вести от плоскости сравнения, проходящей через центр источника. То-

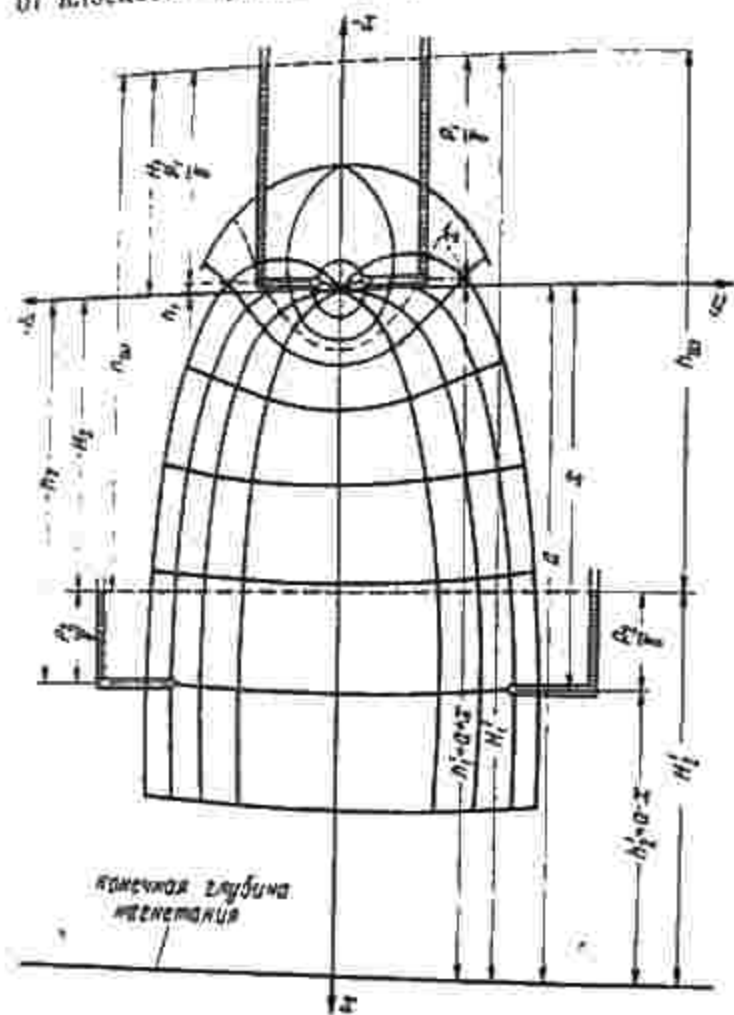


Рис. 56. Изменение напоров в поле течения источника с параллельно осевым потоком

гда отрицательные напоры будут определены отрицательными значениями геометрических высот. Такое начисление напоров отвечает картине бесконечного течения, направленного сверху вниз.

Для частных случаев, когда рассматривается конечная глубина нагнетания, можно исключить отрицательные напоры, взяв новую плоскость сравнения на уровне нижней границы нагнетания. Если расстояние источника до этой плоскости обозначить через  $a$ , то значение напора в новой системе отсчета будет

$$H' = a - x + \frac{Q \cos \theta}{4\pi kx}$$

Конечно, способы отсчета напоров не меняют сущности вопроса и приводят к одним и тем же результатам (рис. 56).

В критической точке  $A$  ( $\cos \theta = -1$ ), если иметь в виду уравнение (10,V), напор равен

$$H = 0,5 \sqrt{\frac{Q}{rk}} + \frac{Q}{4\pi k 0,5 \sqrt{\frac{Q}{rk}}} = \sqrt{\frac{Q}{rk}}$$

Пьезометрическое давление в этой точке равно

$$\frac{p}{\gamma} = H - h = \sqrt{\frac{Q}{rk}} - 0,5 \sqrt{\frac{Q}{rk}} = 0,5 \sqrt{\frac{Q}{rk}}, \quad (11,V)$$

т. е. равно геометрической высоте точки  $A$  над центром источника. Это давление больше нуля и имело бы место только в том случае, когда разделительная поверхность тока представляла жесткую непроницаемую стенку. В действительности она является свободной. Область пористой среды, лежащая выше этой поверхности, не насыщена жидкостью. Поэтому давление в этой области, равно как и на самой свободной поверхности, должно быть постоянным. В условиях ненасыщенной пористой среды оно должно равняться атмосферному, принимаемому за нуль. В этом и заключается неточность решения. В. В. Ивакина, допускающего возможность существования на открытой поверхности давления больше атмосферного.

За нулевой линией напора, проходящей вблизи источника, влияние осевого потока превалирует и течение подчиняется силе тяжести.

В области источника получается сгущение линий тока и линий напора. Отсюда все следствия: здесь на небольшом протяжении происходит большое падение напора. Вероятно, в области источника ламинарный закон движения вязкой жидкости перестает действовать, и здесь существует особый турбулентный слой жидкости. Но эта область невелика и практического значения при решении общей задачи иметь не может.

По уравнению (10,V) пьезометрическое давление в любой точке потока в пределах разделительной поверхности будет

$$\frac{p}{\gamma} = -x + \frac{Q \cos \theta}{4\pi kr} + x = \frac{Q}{4\pi kr}, \quad (12,V)$$

Здесь  $r$  — расстояние от точки потока до центра источника. Давление в жидкости определяется только давлением источника. Воздействие же осевого потока, замещающего силу тяжести, на течение источника сказывается автоматически, так как движение вниз происходит под действием силы тяжести.

В центре источника напор равен  $+\infty$ . Но бесконечное значение напора получается тогда, когда имеем математическую точку ( $x=0, y=0$ ). Это — особая точка. Практически напор вблизи источника можно ограничить некоторым конечным значением.



В окрестностях источника эквипотенциальные линии близки по форме к окружности, т. е. в пространственном потоке эквипотенциалами вблизи источника являются поверхности шара. Поэтому заменяя начальную эквипотенциаль сечением шара с радиусом  $r_0$  по уравнению (12,V) получим пьезометрическое давление для точек, лежащих на этом контуре:

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 = \frac{Q}{4\pi k} \frac{1}{r_0}. \quad (13,V)$$

Таким образом, если пренебречь неточностью в распределении давления на разделительной поверхности, то уравнение (13,V) определяет величину забойного давления в скважине при нагнетании по схеме пространственного источника, возмущенного действием силы тяжести при бесконечном простирании проницаемой среды.

Установим степень допущенной неточности. Оценку можно сделать относительно забойного давления в скважине. Тогда в соответствии с уравнениями (11 и 13,V) отношение давлений в верхней критической точке купола растекания  $p_{кр}$  и в скважине  $p_0$  равно

$$\frac{p_{кр}}{p_0} = \sqrt{\frac{r_0}{\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0}}. \quad (14,V)$$

При обычно малых значениях  $r_0$  (0,03—0,05 м) и больших  $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0$  (20—50 м и больше) отношение  $\frac{p_{кр}}{p_0}$  не превышает 0,03—0,05. Во всех других точках разделительной линии тока, принимаемой за кривую свободной поверхности, отношение  $\frac{p_{кр}}{p_0}$  будет меньше 0,03—0,05, а в бесконечно удаленной точке — нуль. Т. е. получается, что давления на разделительной линии тока, хотя и не являются строго постоянными, но составляют весьма малую величину от полного перепада давления  $p_0$  в пределах 3—5% и изменяются вдоль разделительной линии тока очень мало. Поэтому решение В. В. Иванина может быть использовано не только для качественной оценки донного нагнетания, но и для количественных определений рабочих давлений в скважинах, расстояний между взаимодействующими скважинами и других элементов нагнетания (конечно, по прошествии некоторого времени после начала нагнетания, когда течение жидкости будет близким к установившемуся).

Скоростные условия фильтрационного потока. В соответствии с распределением напоров находится скоростной режим инфильтрационного потока. Последний определен двумя направлениями скоростей. Вблизи источника преобладает радиальное направление скорости, так как здесь очень велико влияние источника. Но

последнее быстро теряется, уступая место осевому вертикальному движению, замещающему действие силы тяжести. Поэтому сравнительно на небольшом удалении от источника поток приобретает вертикальное направление.

Результирующая скорость в любой точке меридионального сечения комбинированного поля течения равна  $w = \sqrt{u^2 + v^2}$  и направлена по касательной к линии тока, проходящей через эту точку.

Вертикальная и горизонтальная составляющие результирующей скорости (вдоль осей  $x$  и  $y$ ) по уравнениям (4,II и 10,V) равны

$$u = -\frac{\partial}{\partial x} k \left( -x + \frac{Q \cos \theta}{4\pi k x} \right);$$

$$v = \frac{\partial}{\partial y} k \left( -x + \frac{Q \cos \theta}{4\pi k x} \right).$$

Подставляя  $x = r \cos \theta$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  и выполняя дифференцирование по  $x$  и  $y$ , получим

$$\left. \begin{aligned} u &= k \left( 1 + \frac{Q}{4\pi k} \frac{x}{r^3 (x^2 + y^2)^2} \right) = k + \frac{Q \cos^3 \theta}{4\pi r^3}; \\ v &= \frac{Q}{4\pi} \frac{y}{r^3 (x^2 + y^2)^2} = \frac{Q \sin^3 \theta}{4\pi r^3}. \end{aligned} \right\} \quad (15,V)$$

Эти зависимости дают возможность определить скорость в любой точке инфильтрационного потока.

Пределы применимости схемы. Рассмотренные выше формулы (12 и 13,V) для определения давления внутри фильтрационного потока и расчета забойного предполагают бесконечное простирание проницаемой среды. В этом случае течение вертикального потока, замещающего действие силы тяжести, является действительно свободным, ничем не ограниченным. Деформирующее влияние его на течение источника исключительно велико. Поэтому сравнительно на небольшом расстоянии от источника комбинированный поток принимает характер куполообразного растекания. В пределах внутренней области разделительной поверхности давление быстро падает от максимального на контуре забоя скважины до небольших величин сравнительно на коротких расстояниях от источника. В этом заключается основная особенность распределения давления в потоке, создаваемом пространственным источником. Но во всей внутренней области давление больше нуля.

Автором выполнено большое количество опытных нагнетаний через шаровой перфорированный иньектор и через круглое отверстие трубы. И во всех этих случаях очертания фильтрационных потоков отвечают рассмотренным формулам комбинированного течения пространственного источника и параллельно-осевого по-



тока. Они все сохраняют куполообразный характер растекания жидкости с критической точкой подъема.

Рассмотренная схема нагнетания может найти применение для тапонирования неглубоких пластов невязких грунтов средней крупности (пески, галька, щебень) и скальных пород с равномерно распределенной трещиноватостью. Экономическое и конструктивное достоинство этой схемы заключается в том, что при ней сокращается метраж бурения скважины на величину, равную глубине нагнетания. Из рассмотренных уравнений видно, что ширина простирания фильтрационного потока определяется в основном расходом жидкости. Для увеличения производительности скважины ее забой можно организовать шаровой формы при помощи прострела. Радиус кругового сечения забоя скважины может быть определен из уравнения (8.V) при значении  $\theta = 0$

$$r_0 = 0.5 \sqrt{\frac{Q}{\pi k} (1 + \varphi_r^2 + 1 - \varphi_r)}.$$

Для  $\varphi_r$  необходимо взять величину одной из промежуточных круговых эквипотенциалей ( $\varphi_r = 1.5 - 3$ , см. рис. 55).

Фронтальная, или площадная, завеса по этой схеме нагнетания может быть получена пересечением фильтрационных потоков смежных скважин при рядовом или кольцевом их расположении. Одиночная скважина создает ширину простирания фильтрационного потока  $2y$ , определяемую уравнением (3.V) при  $\varphi_r = 1$ . Расстояние между двумя смежными скважинами не может быть больше  $2y$ . Но так как граничная поверхность фильтрационных потоков имеет форму эллипсоидов вращения, то для плотности сопряжения фильтрационные потоки смежных скважин должны заходить друг за друга. Поэтому расчетное расстояние между смежными скважинами должно быть меньше  $2y$ . Это расстояние можно определить графически наложением разделительных линий двух смежных потоков. В среднем при достаточно однородных грунтах это расстояние возможно принять в пределах (1.6—1.7)  $y$

$$B = (1.6 - 1.7) \sqrt{\frac{Q}{\pi k}} \sqrt{\frac{1 + \cos \theta_0}{2}} \quad (16.V)$$

Значение угла  $\theta_0$  соответствует конечной глубине нагнетания (4.V). Таково решение вопроса о размещении скважин, вытекающее из рассмотренной модели скважины.

## 2. Взаимодействие источников, возмущенных силой тяжести

Течение из невозмущенных взаимодействующих источников описывалось бы простыми уравнениями, вытекающими из сложения функций течения  $\varphi$  и  $\psi$  от каждого источника, и не представляло бы большого труда построить всю гидродинамическую сет-

ку поля (рис. 57). Но такой вид течения встречается очень редко, только при движении легких газов. В тяжелых жидкостях поток из источников деформируется действием силы тяжести, и течение принимает вертикальное направление

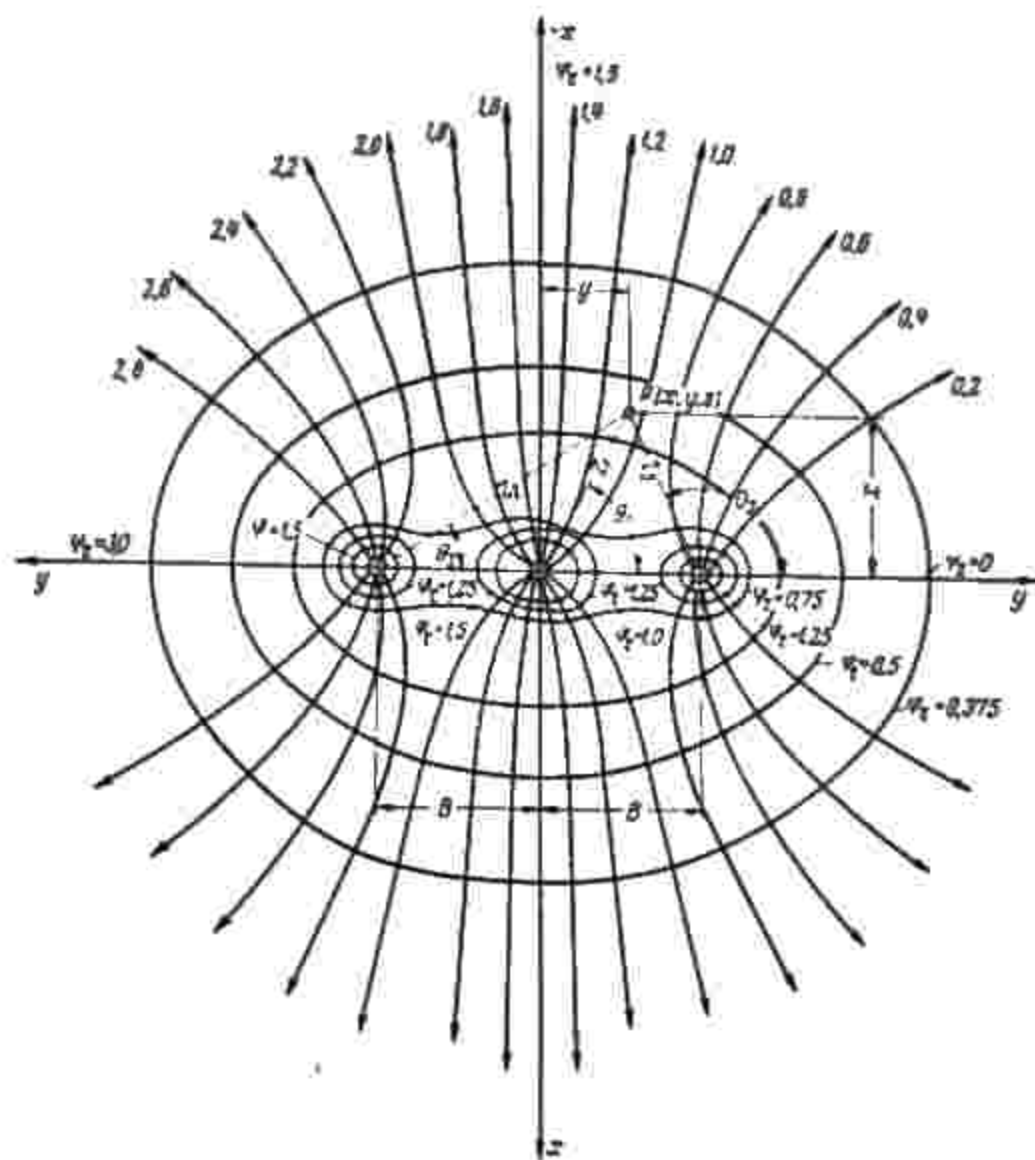


Рис. 57. Поле течения трех пространственных источников, не возмущенных силой тяжести

Непредлинные представления о характере течения взаимодействующих потоков из источников, деформированных силой тяжести при неограниченной глубине проницаемого слоя, дает опыт. Эксперимент показал, что общий поток сохраняет куполообразную форму растекания из отдельных забоев. В верхней части разделительная поверхность потока имеет волнистый характер с числом волн по числу источников, в горизонтальных сечениях — ко-



сит характер бисеквитообразных кривых. Из всего этого видно, что при горизонтальном расположении взаимодействующих точечных источников, возмущенных действием силы тяжести, симметрия по току относительно общей вертикальной оси вращения нарушена. Это обстоятельство создает большие трудности для анализа несимметричных пространственных полей течения, так как функция тока  $\psi$  для них не удовлетворяет уравнению Лапласа. Строгое математическое решение поверхностей тока взаимодействующих источников, возмущенных силой тяжести, исключено. Разделительная поверхность может быть решена только приближенно, косвенным путем.

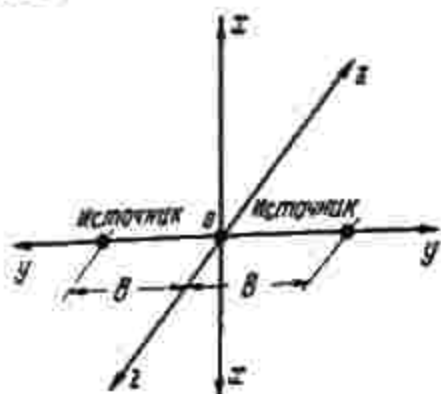


Рис. 58. Схема трех источников на горизонтальной прямой

Изучение течения из деформированных взаимодействующих источников надо начать с исследования потенциала, функция которого независима от условий симметрии поля. Для этого используем сложение потенциалов точечных источников и параллельно-осевого потока, замещающего действие силы тяжести. При этом еще раз подчеркнем, что здесь допускается неточность. Как было разъяснено в предыдущих параграфах, при существовании на свободной поверхности фильтрационного потока атмосферного давления граничные условия на этой поверхности должны быть линейны, т. е. фильтрационный потенциал должен быть функцией высоты. Это условие в схеме В. В. Ивашкина не выполняется. Но получающаяся неточность выражается всего лишь в пределах 3—5% от расчетной величины забойного давления и не имеет сколько-нибудь существенного значения. Тем более, что неточность в распределении давления относится главным образом к верхней части купола растекания, которая меньше всего принимает участие в формировании завесы. Внутри же разделительной поверхности рассмотренные формулы полностью отвечают сферическому течению жидкости в неограниченной среде, на которое сила тяжести накладывается автоматически.

**Давления на забоях и дебиты скважин.** Для комбинированного поля течения трех источников, расположенных на горизонтальной прямой, и вертикального потока, замещающего действие силы тяжести, функция потенциала для вертикальных сечений потока в плоскостях  $xoy$  и  $xoz$  (рис. 58) будет

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + (B + y)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + (B - y)^2}} \right) - kx,$$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + z^2 + B^2}} \right) - kx, \quad (17.V)$$

где  $kx$  — потенциал равномерного течения, параллельного оси  $x$ . При обозначениях  $\varphi = \varphi_r \frac{Q}{\pi h B^2}$ ,  $x = \alpha B$ ,  $y = \beta B$  и  $z = \gamma B$  уравнения приводятся к виду

$$\alpha = \frac{Q}{\pi h B^2} \left( \frac{1}{4\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \frac{1}{4\sqrt{\alpha^2 + (1 + \beta)^2}} + \frac{1}{4\sqrt{\alpha^2 + (1 - \beta)^2}} - \varphi_r \right),$$

$$\alpha = \frac{Q}{\pi h B^2} \left( \frac{1}{4\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} + \frac{2}{4\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2 + 1}} - \varphi_r \right).$$

Для решения уравнений можно применить графический метод построения кривых  $F_1$  и  $F_2$ . Обозначив постоянный комплекс  $\frac{Q}{\pi h B^2}$  через  $A$ , получим

$$\alpha + \varphi_r A = \frac{A}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + (1 + \beta)^2}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + (1 - \beta)^2}} \right);$$

$$\alpha + \varphi_r A = \frac{A}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}} + \frac{2}{\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2 + 1}} \right). \quad (18.V)$$

Уравнения (18.V) являются основным решением для построения эквипотенциалов в двух взаимно перпендикулярных плоскостях сечений потока  $xoy$  и  $xoz$ . Значения приведенной функции  $\varphi_r$  изменяются от  $+\infty$  в центрах источников до  $-\infty$  на бесконечном расстоянии вниз от источников. Построение эквипотенциалов можно выполнить по точкам, взятым по сетке поля. Пользуясь уравнениями (18.V), можно без особых затруднений получить поле эквипотенциалов для любого количества источников, расположенных на горизонтальной прямой.

Из уравнений (17.V) получаются значения напоров для любой точки потока. В частности, для точек, расположенных на вертикальных осях источников, напоры равны:

для центрального на оси  $x(x, y=0, z=0)$

$$H'_n = \frac{Q}{4\pi k} \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + B^2}} \right) - x;$$

для крайних  $(x, y=B, z=0)$

$$H'_{np} = \frac{Q}{4\pi k} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + B^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + (2B)^2}} \right) - x.$$

В окрестностях источников эквипотенциалы по форме близки к окружности. Принимая за начальные эквипотенциалы круговое сечение шара радиуса  $r_0$ , получим напоры на контурах забоев

$$H'_n = \frac{Q}{4\pi k} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{2}{\sqrt{r_0^2 + B^2}} \right) - r_0;$$

$$H'_{np} = \frac{Q}{4\pi k} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + B^2}} + \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + (2B)^2}} \right) - r_0.$$



При плоскости сравнения, взятой по оси источников  $y$ , пьезометрическое давление на контурах забоев определяется равным

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{p}{\gamma}\right)'_{\text{ос}} &= \frac{Q}{4\pi k} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{2}{\sqrt{r_0^2 + B^2}} \right); \\ \left(\frac{p}{\gamma}\right)'_{\text{опр}} &= \frac{Q}{4\pi k} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + B^2}} + \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + (2B)^2}} \right). \end{aligned} \right\} (19.V)$$

Уравнения (19.V) выражают необходимую величину забойного давления в скважине для неограниченной глубины нагнетания при взаимодействии трех источников равной силы, расположенных на горизонтальной прямой. Уравнения (19.V) можно развить дальше, написав по аналогии с рис. 58 выражения напора для тех же точек при сколько-нибудь большом количестве источников нечетного ряда ( $n > 1$ )

$$H' = \frac{Q}{4\pi k} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_6} + \frac{1}{r_7} + \dots \right) - x.$$

Для центрального источника ( $x, y=0, z=0$ )

$$H'_a = \frac{Q}{4\pi k} \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + B^2}} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + (2B)^2}} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + (3B)^2}} + \dots \right) - x.$$

Для крайних ( $x, y = \frac{n-1}{2} B, z=0$ )

$$H'_{\text{кр}} = \frac{Q}{4\pi k} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + B^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + (2B)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + (3B)^2}} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + (4B)^2}} + \dots \right) - x.$$

Соответственно рабочее давление в скважинах будет

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{p}{\gamma}\right)'_{\text{ос}} &= \frac{Q}{4\pi k} \left( \frac{1}{r_0} + \sum \frac{2}{\sqrt{r_0^2 + (iB)^2}} \right); \\ \left(\frac{p}{\gamma}\right)'_{\text{опр}} &= \frac{Q}{4\pi k} \left( \frac{1}{r_0} + \sum \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + (mB)^2}} \right). \end{aligned} \right\} (20.V)$$

Здесь  $i$  — ряд целых чисел, последовательно взятых от 1 и кончая  $\frac{n-1}{2}$ ;

$m$  — ряд целых чисел, взятых от 1 и кончая  $n-1$ ;

$n$  — число источников нечетного ряда.

Расстояние между источниками можно также выразить через  $r_0 (B = \delta r_0)$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{p}{\gamma}\right)'_{\text{ос}} &= \frac{Q}{4\pi k r_0} \left( 1 + \sum \frac{2}{\sqrt{1 + (i\delta)^2}} \right); \\ \left(\frac{p}{\gamma}\right)'_{\text{опр}} &= \frac{Q}{4\pi k r_0} \left( 1 + \sum \frac{1}{\sqrt{1 + (m\delta)^2}} \right). \end{aligned} \right\} (21.V)$$

Выражение  $\frac{Q}{4\pi k r_0}$  есть забойное давление одиночной скважины.

Из уравнений видно, что при взаимодействии забойное давление в скважинах больше давления одиночно работающей скважины. При равенстве расходов всех скважин наибольшую величину давления имеет центральная скважина (ось  $x$ ). К периферии давление в скважинах уменьшается. Наименьшей величины давление достигает в крайних скважинах.

Давление увеличивается с уменьшением расстояния между скважинами. При достаточно больших расстояниях давление стремится к постоянной величине — давлению одиночной скважины

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)'_0 = \frac{Q}{4\pi k r_0} = \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0.$$

И, наоборот, при достаточно малых расстояниях, когда можно приближенно считать  $r_1 = r_2 = r_3 = \dots$ , давление стремится к постоянной величине, равной суммарному давлению  $n$  одиночных скважин:

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)'_0 = \frac{nQ}{4\pi k r_0} = n \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0.$$

Увеличение числа источников (при равенстве прочих условий) повышает величину давления более резко для малых расстояний.

При равенстве забойных давлений взаимодействующей и одиночной скважины ( $p'_0 = p_0$ ) расход взаимодействующей меньше расхода одиночной. Если для сравнения взять центральную скважину, то из первого уравнения (21.V) следует

$$\left. \begin{aligned} Q'_a &= \frac{4\pi k r_0 \left(\frac{p}{\gamma}\right)'_0}{1 + \sum \frac{2}{\sqrt{1 + (i\delta)^2}}}; \\ Q'_a &= \frac{Q}{1 + \sum \frac{2}{\sqrt{1 + (i\delta)^2}}}. \end{aligned} \right\} (22.V)$$

так как  $4\pi k r_0 \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 = Q$ . Знаком штрих обозначены расчетные элементы взаимодействующих скважин.

Если забойные давления всех скважин сделать равными, то расходы, поглощаемые скважинами, не будут равными между собой: наибольший расход будет иметь крайние скважины, наимень-



ший — центральная. При  $(\frac{p}{r})'_{ок} = (\frac{p}{r})'_{окр}$  из уравнений (21, V) получим

$$Q'_{кр} = Q'_a \frac{1 + \sum_1 \frac{2}{1 + (i\delta)^2}}{1 + \sum_1 \frac{1}{1 + (m\delta)^2}} \quad (23, V)$$

В табл. 22 по уравнениям (21—22, V) вычислены значения расходов и давлений для разного количества равнодебитных источников и расстояний между ними в функции расхода и давления одиночной скважины, принятых за единицу.

Данные табл. 22 показывают, что при больших расстояниях между скважинами ( $\delta \geq 40$ ) разница в величине забойных давлений центральной и крайних скважин находится в пределах 1—2%. При этих условиях забойные давления смежных скважин можно принимать одинаковыми. То же замечание следует сделать и относительно расходов скважин с одинаковым забойным давлением: при больших расстояниях между скважинами разница в величине расходов весьма незначительна.

**Высота подъема жидкости. (Критическая точка).** Высота подъема жидкости из центральной скважины определяется координатой критической точки, для которой

$$u = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Функция потенциала комбинированного потока для трех возмущенных источников равна

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \right) - kx.$$

Для точек, расположенных на оси  $x$  при  $x < 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  и при значениях  $r_2 = r_3 = \sqrt{B^2 + x^2}$  и  $r_1 = \frac{-x}{\cos 180^\circ} = x$ , имеем

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{2}{\sqrt{B^2 + x^2}} + \frac{1}{x} \right) + kx.$$

Для критической точки получим

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{2}{\sqrt{B^2 + x^2}} + \frac{1}{x} \right) + kx \right] = 0.$$

Выполняя дифференцирование, приходим к уравнению

$$\frac{Q}{4\pi} \left[ \frac{2x_A}{\sqrt{B^2 + x_A^2}^3} + \frac{1}{x_A^2} \right] - k = 0,$$

откуда

$$x'_A = 0,5 \sqrt{\frac{Q}{\pi k}} \sqrt{\frac{2(x'_A)^3}{\sqrt{B^2 + (x'_A)^2}^3} + 1}. \quad (24, V)$$

Выражение  $0,5 \sqrt{\frac{Q}{\pi k}}$  представляет высоту критической точки одиночно работающей скважины. Высота критической точки увеличивается при взаимодействии скважин как результат одновременного действия на эту точку скоростей нескольких источников. Предельного значения она достигает при  $B = 0$  (совмещении трех скважин вместе)

$$x'_{A(max)} = 0,5 \sqrt{3 \frac{Q}{\pi k}} = 0,865 \sqrt{\frac{Q}{\pi k}}.$$

И наоборот, при больших увеличениях  $B$  она стремится к постоянному значению высоты критической точки одиночной скважины.

Таким образом, при взаимодействии трех равнодебитных скважин, в зависимости от расстояния между ними, высота критической точки центральной скважины может изменяться в пределах от  $0,5 \sqrt{\frac{Q}{\pi k}}$  до  $0,865 \sqrt{\frac{Q}{\pi k}}$ .

Таблица 22

Число скважин	$\delta = 0$		$\delta = 5$			$\delta = 10$		
	$Q'$	$(\frac{p}{r})'_a$	$Q'$	$(\frac{p}{r})'_a$	$(\frac{p}{r})'_{кр}$	$Q'$	$(\frac{p}{r})'_a$	$(\frac{p}{r})'_{кр}$
1	1	1	—	—	—	—	—	—
3	—	—	0,72	1,392	1,294	0,831	1,20	1,15
5	—	—	0,63	1,588	1,409	0,77	1,30	1,209
7	—	—	0,58	1,721	1,482	0,733	1,367	1,245

Число скважин	$\delta = 20$			$\delta = 30$			$\delta = 40$		
	$Q'$	$(\frac{p}{r})'_a$	$(\frac{p}{r})'_{кр}$	$Q'$	$(\frac{p}{r})'_a$	$(\frac{p}{r})'_{кр}$	$Q'$	$(\frac{p}{r})'_a$	$(\frac{p}{r})'_{кр}$
1	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	0,91	1,10	1,075	0,94	1,066	1,05	0,955	1,05	1,037
5	0,87	1,15	1,105	0,91	1,10	1,059	0,93	1,076	1,051
7	0,84	1,183	1,123	0,887	1,122	1,082	0,92	1,084	1,06



Иследуем граничные условия на поверхности купола растекания. Пьезометрическое давление в критической точке центральной скважины равно

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)'_{кр} = \frac{Q}{4\pi k} \left( \frac{1}{x_1} + \frac{2}{\sqrt{x_1^2 + B^2}} \right).$$

Для случая предельного расположения скважин при  $B=0$  и  $x_1 = 0,865 \sqrt{\frac{Q}{\pi k}}$  будем иметь

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)'_{кр} = \frac{3Q}{4\pi k} \frac{1}{x_1} = \frac{Q}{4\pi k} \frac{1}{0,865 \sqrt{\frac{Q}{\pi k}}} = 0,865 \sqrt{\frac{Q}{\pi k}}.$$

Как видно, остаточное давление в критической точке больше, чем при одиночной скважине. Оно снова равно высоте критической точки над центром источника. Но одновременно увеличивается и давление на забое; для центральной скважины при  $B=0$  равно

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)'_0 = \frac{3Q}{4\pi k r_0}.$$

При этих условиях можно определить величину отношения

$$\frac{p'_{кр}}{p_0} = \frac{0,865 \sqrt{\frac{Q}{\pi k}} 4\pi k r_0}{3Q} = 0,577 \sqrt{\frac{r_0}{\left(\frac{p}{\gamma}\right)'_0}}.$$

Таким образом, относительная величина давления в критической точке купола разделительной поверхности при трех интерферирующих скважинах даже несколько меньше соответствующей величины для той же точки при работе одиночной скважины. Происходит это потому, что рост забойного давления центральной скважины идет быстрее, нежели увеличение высоты критической точки. При значениях  $r_0$  в пределах 0,03—0,05 м, а  $\left(\frac{p}{\gamma}\right)'_0 = 20$ —50 м и более отношение  $p'_{кр} : p_0$  не превышает 0,02—0,03; т. е. в данном случае остаточное давление на свободной поверхности не выходит за пределы 2—3% от наибольшего давления на забое. Поэтому применение метода сложения функций потенциалов точечных источников и параллельно-осевого потока, замещающего действие силы тяжести, для расчета взаимодействующих скважин вполне закономерно и обосновано.

Вышеприведенный анализ относится к трем источникам. Но тем же путем можно провести исследование и для любого количества источников, расположенных на горизонтальной прямой. Эффект взаимодействия. Данные табл. 22 устанавливают, что

уменьшение расстояния между скважинами влечет повышение величины забойного давления. В предельном случае совмещения всех смежных источников в одном забойное давление было бы равно суммарному давлению  $n$ -го количества одиночно работающих скважин. И, наоборот, при давлении забойных давлений

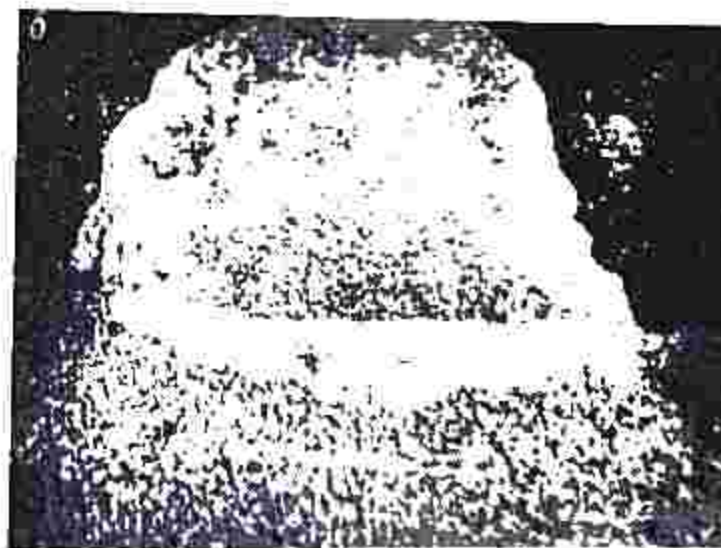
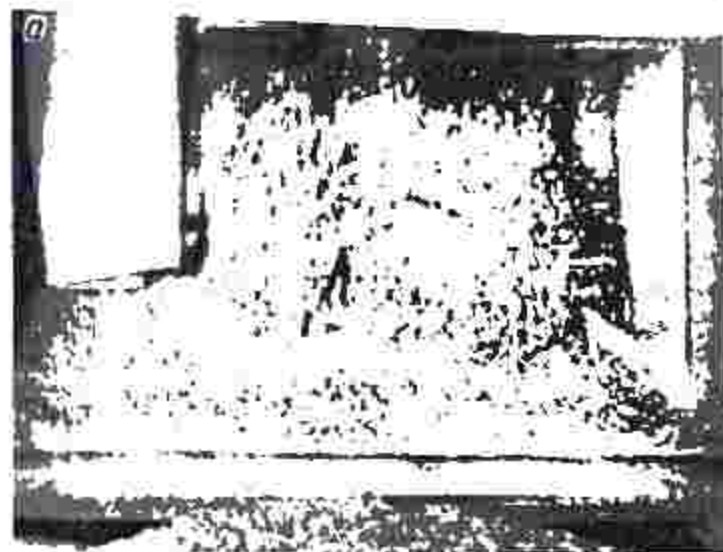


Рис. 22. Взаимодействие четырех источников

всех скважин расходы последних увеличиваются от центра к периферии. Наименьшим расходом обладает центральная скважина (22. V) и наибольшим — крайние (23. V). В результате взаимодействия происходит изменение и формы разделительной поверхности. Рассмотрим некоторые опытные данные по одновременному нагнетанию цементной суспензии через несколько труб ( $r_0 =$



$=0,035$  м), установленных по схеме точечных источников. Цементная суспензия характеризуется относительным весом 1,29. Пористая среда — отсортированный кварцевый щебень  $d=4 \cdot 10^{-2}$  м. Рис. 59 относится к схемам источников, расположенных по квадратной сетке и окружности:  $a$  — общий вид затвердевшего сталактита, полученного нагнетанием суспензии из четырех труб, расставленных по углам квадрата при расстоянии между ними

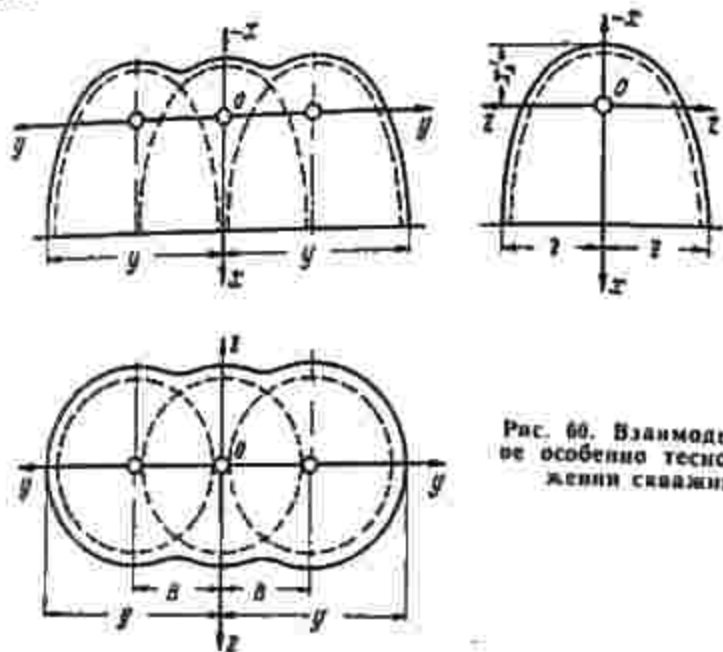


Рис. 60. Взаимодействие при особенно тесном расположении скважин ( $B=1$ )

0,22 м;  $b$  — представляет отпечаток фильтрационного потока из четырех труб, симметрично расположенных по окружности радиуса 0,20 м. В обоих случаях потоки имеют общую куполообразную разделительную поверхность высотой 0,65 м.

Даже качественной характеристики этих экспериментов вполне достаточно, чтобы составить правильное представление о взаимодействии потоков. Со всей очевидностью приходим к заключению, что, в зависимости от расстояния между источниками и величины расходов их, разделительная поверхность взаимодействующих фильтрующих потоков имеет несколько форм. На основе анализа представляется возможным наметить общую схему взаимодействия пространственных источников, возмущенных действием силы тяжести. Рассмотрим два расположения скважин: на горизонтальной прямой и на окружности.

**Скважины на прямой.** В качестве характеристического параметра, в функции которого оценивается эффект взаимодействия, может быть принят безразмерный комплекс  $\frac{Q}{pkB^2}$ .

Рис. 60 характеризует случай, когда расстояние между скважинами  $B=1$ , а комплекс  $\frac{Q}{pkB^2}$  также равен 1. Это случай не особенно тесного расположения скважин, хотя принятое расстояние

и меньше рекомендуемого уравнением (16, V) для организации фронтальной завесы  $B=1,6-1,7$ .

Разделительная линия тока ортогональна к эквипотенциальным сечениям потока  $xoy$  и  $xoz$  (18, V), надо нанести разделительные линии отдельных скважин (7, V) и их корректировать в соответствии с условиями ортогональности. Отправными пунктами такого корректива могут служить характеристические точки на результирующей разделительной поверхности (критическая точка на оси  $x$  при нечетном ряде источников, точка перегиба разделительной линии на той же оси при четном ряде). Из сопоставления депрессии взаимодействующих скважин с пересекающимися разделительными кривыми одиночных скважин можно считать, что значение комплекса  $\frac{Q}{pkB^2}=1$  является пределом, за которым волнистый характер разделительной поверхности переходит к плавному очертанию.

Рис. 61 представляет случай тесного расположения скважин с расстоянием между ними  $B=0,58$  при комплексе  $\frac{Q}{pkB^2}=3$ . Высота критической точки на 42% больше высоты соответствующей точки одиночно работающей скважины. Здесь должна быть хорошо выражена плавная разделительная поверхность результирующего потока.

Рис. 62 имеет в виду расстояние между скважинами  $B=0,32$  и комплекс  $\frac{Q}{pkB^2}=10$ . Высота критической точки на 62% больше высоты аналогичной точки «депрессии» одиночной скважины. Так как предельному случаю совмещения трех источников в одном отвечает высота критической точки  $0,865$  (при  $\frac{Q}{pk}=1$ ), а в рассматриваемой схеме она равна 0,81, то разность между ними составляет около 6%. Разделительная поверхность потока по рис. 62 близка по форме к депрессии предельной схемы взаимодействия ( $B=0$ ). В этом случае будет иметь форму «депрессии» одиночной скважины с утроенным расходом. Такая поверхность симметрична относительно вертикальной оси  $x$  и может быть построена по уравнению (3, V)

$$y = \sqrt{3 \frac{Q}{pk}} \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} = 1,73 \sqrt{\frac{Q}{pk}} \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

Так как величина  $1,73 \sqrt{\frac{Q}{pk}}$  равна двойной высоте критической точки, то для построения поверхности можно также применить уравнение

$$y = 2x_s \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \quad (25, V)$$



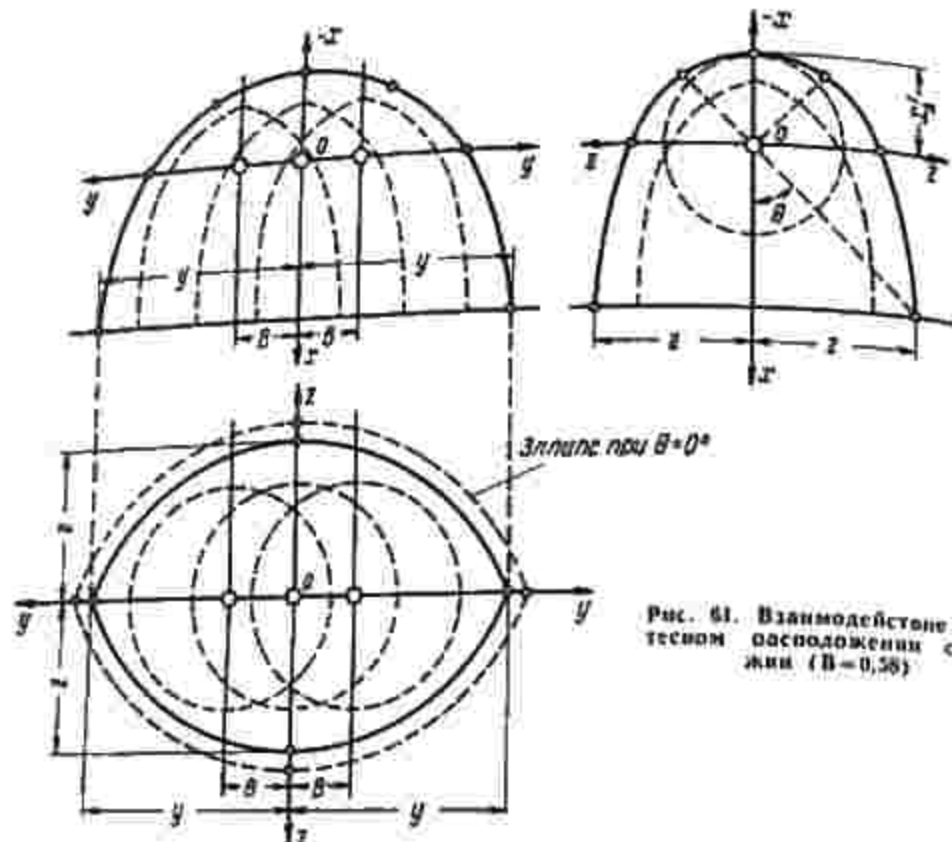


Рис. 61. Взаимодействие при тесном расположении скважин ( $B=0,58$ )

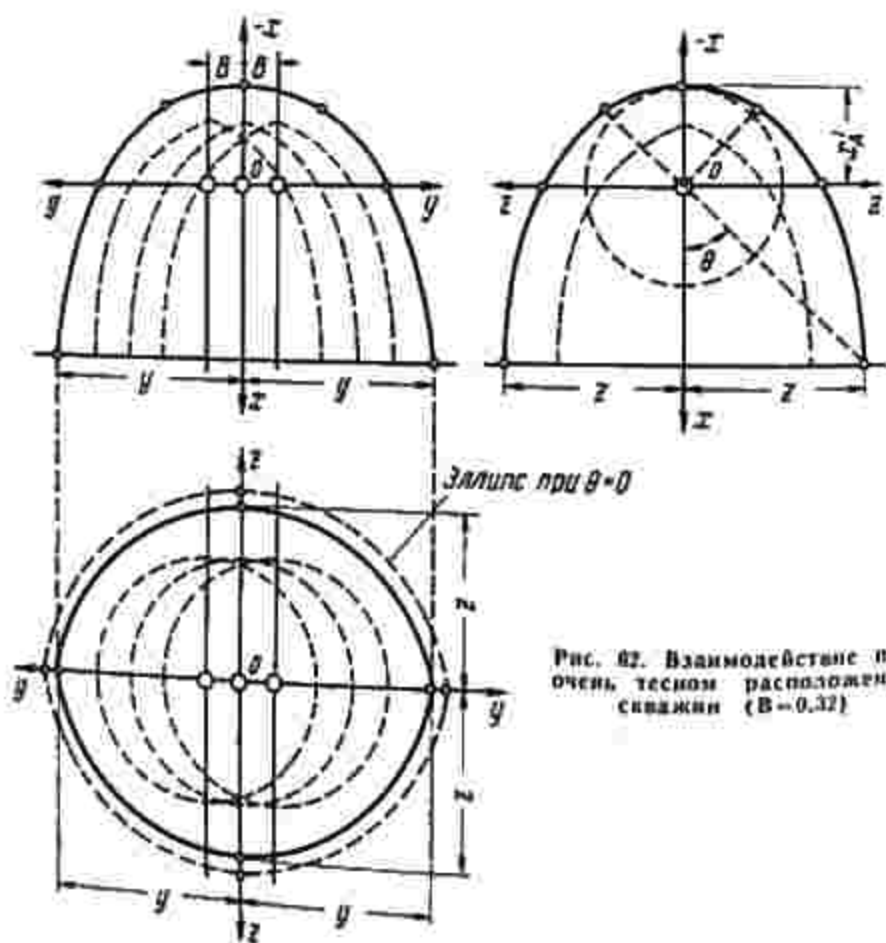


Рис. 62. Взаимодействие при очень тесном расположении скважин ( $B=0,32$ )

Получающаяся по этим уравнениям разделительная поверхность имеет форму поверхности эллипсоида вращения, в бесконечности переходящей в поверхность цилиндрического тела вращения.

Симметричная форма разделительной поверхности возможна только для предельного случая или близкого к нему — совмещения источников ( $B=0$ ). При разрезании скважин последние изменяют форму. Круговые сечения ее сплющиваются и переходят в эллипсы, т. е. поверхность эллипсоида вращения заменяется поверхностью трехосного эллипсоида. Математическое решение такой поверхности возможно, но сложно. В связи с этим можно дать приближенный, но более простой способ построения разделительной поверхности взаимодействующих скважин в диапазоне изменения комплекса  $\frac{Q}{\pi k B^2} > 1$ .

Будем считать, что разделительная поверхность рассматриваемых потоков близка к поверхности трехосного эллипсоида, экваториальное сечение которого находится в бесконечности. Все горизонтальные сечения такого эллипсоида представляются эллипсами. Экваториальное сечение эллипсоида определяется соотношениями, что в бесконечности скорости от источников равны нулю и расход через экваториальное сечение обусловлен только скоростью вертикального равномерного течения  $U=k$ , замещающего действие силы тяжести. С другой стороны, расход через это сечение равен суммарному расходу источников. Поэтому для экваториального сечения эллипсоида можно написать

$$nQ = k\pi ab,$$

откуда определяется полуось  $a$  экваториального эллипса

$$a = \frac{nQ}{\pi kb}, \quad (26, V)$$

- где  $n$  — количество равнодебитных источников;  
 $Q$  — расход одного источника;  
 $a$  — большая полуось эллипса (по оси  $y$ );  
 $b$  — меньшая полуось (по оси  $z$ ).

Для определения полуоси эллипса  $b$  рассмотрим вертикальное сечение эллипсоида плоскостью  $xoz$ . В этом сечении каждая точка меридиональной кривой эллипсоида находится под воздействием симметричных скоростей от источников и вертикальной скорости равномерного течения  $U=k$ . Векторы скоростей от источников всегда расположены в одной плоскости, проходящей через ось  $y$ . Результирующая скоростей от источников представляет скорость по стенке  $xoz$  (компоненты, перпендикулярные к стенке, взаимно уравновешены). Изменение этой результирующей скорости непрерывное. Поэтому рассматривая результирующую скорость по стенке как скорость некоторого фиктивного источника,



не делаем большой ошибки, если для меридиана в сечении  $xoz$  возьмем ранее рассмотренное уравнение одиночной скважины

$$z = \sqrt{\frac{Q_0}{\pi k}} \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

Так как величину  $\sqrt{\frac{Q_0}{\pi k}}$  можно принять равной двойной высоте критической точки, то получим

$$z = 2x'_A \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \quad (27.V)$$

где  $x'_A$  — высота критической точки купола растекания, определяемая уравнением (24.V);

$\theta$  — угол между радиусом-вектором и осью  $x$ .

Для экваториального сечения полуоси  $b$  соответствует координата  $z$  при  $\theta=0$ , т. е.

$$b = 2x'_A$$

Имея численные значения полуосей экваториального эллипса, можно вычислить расстояние фокусов от начала координат  $c$  и эксцентриситет  $\lambda$ .

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\lambda = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{2x'_A}{nQ}\right)^2} \quad (28.V)$$

Уравнение (27.V) можно применить для построения меридиональной кривой разделительной поверхности в плоскости  $xoz$ . Меридиональная кривая в плоскости  $xoy$  может быть получена как огибающая точки концов больших осей промежуточных эллипсов в заданных сечениях эллипсоида. Построение промежуточных эллипсов производится при постоянном эксцентриситете, равном эксцентриситету экваториального эллипса (28.V). При этом условия координаты  $y$  меридиональной кривой «депрессии» в плоскости  $xoy$  определяются уравнением

$$\lambda = \frac{\sqrt{y^2 - z^2}}{y} = \text{const},$$

откуда

$$y = \sqrt{\frac{z^2}{1 - \lambda^2}} = \sqrt{\frac{(2x'_A)^2 (1 + \cos \theta)}{2(1 - \lambda^2)}} \quad (29.V)$$

Уравнениями (27 и 29.V) описывается приближенное решение разделительной поверхности при тесном расположении взаимодействующих скважин, расположенных на горизонтальной прямой. Построенные по этому методу разделительные кривые очень хорошо удовлетворяют условиям ортогональности при нанесении их на поле эквипотенциалей.

Пример вычисления меридиональной кривой разделительной поверхности трех взаимодействующих скважин. Для примера на рис. 63 изображена меридиональная кривая разделительной поверхности в плоскости  $xoy$  для случая тесного расположения трех равнодебитных скважин при расстоянии между ними  $B = 0,58$  и значении комплекса  $\frac{Q}{\pi k B^2} = 3$  (при  $\frac{Q}{\pi k} = 1$ ).

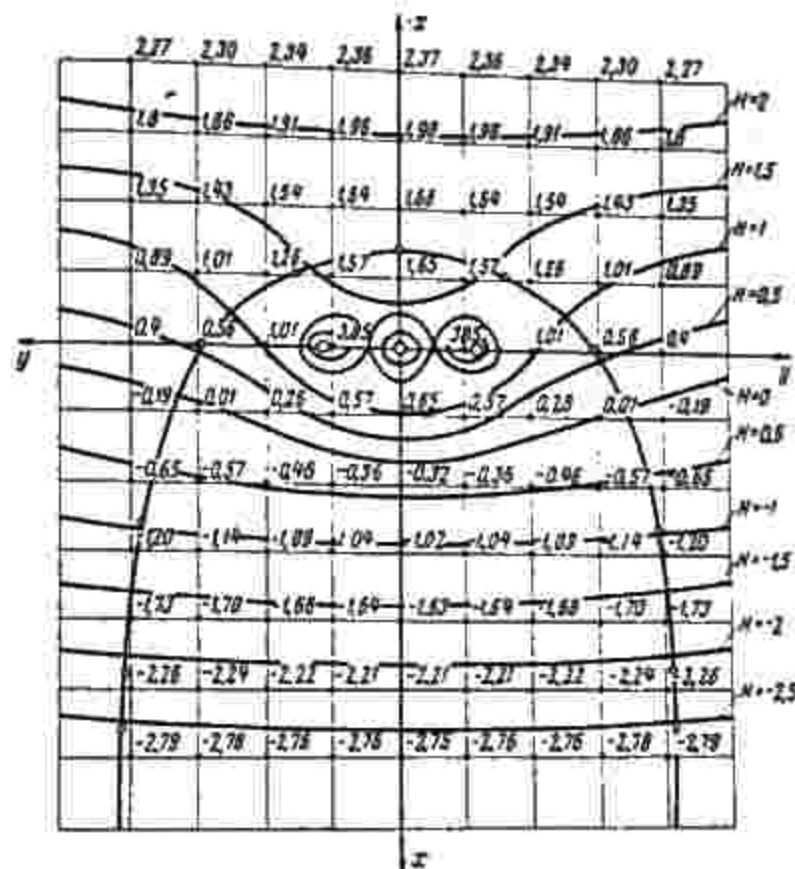


Рис. 63. Меридиональная кривая депрессионной поверхности в плоскости  $xoy$

Высота критической точки по уравнению (24.V) равна  $x'_A = 0,71$ . Для экваториального эллипса полуоси равны

$$b = 2x'_A = 2 \cdot 0,71 = 1,42; \quad a = \frac{nQ}{\pi k b} = \frac{3,1}{1,42} = 2,11.$$

Эксцентриситет эллипса (28.V)

$$\lambda = \sqrt{1 - \frac{1,42^2}{3^2}} = 0,74.$$

Координаты меридиональных кривых разделительной поверхности, вычисленные по уравнениям (27—29.V) приводятся в табл. 23

Необходимо подчеркнуть, что уравнения (26—29.V), равно как и ранее рассмотренное уравнение для определения критической точки трех источников (24.V), имеют в виду равнодебитные сква-



Таблица 23

#	Плоскость, $zoz$		Плоскость, $zoу$		$x=2 \operatorname{ctg} \alpha$
	$z_{01}$	$z$	$\lambda$	$\gamma$	
27	0,891	1,39	0,74	2,07	2,73
30	0,666	1,37	0,74	2,05	2,36
45	0,707	1,31	0,74	1,94	1,31
90	0	1,00	0,74	1,49	0
135	-0,707	0,542	0,74	0,81	-0,542

жины. Но суть дела не меняется, если в расчет ввести и неравнодебитные, получающиеся при равенстве забойных давлений всех скважин ряда.

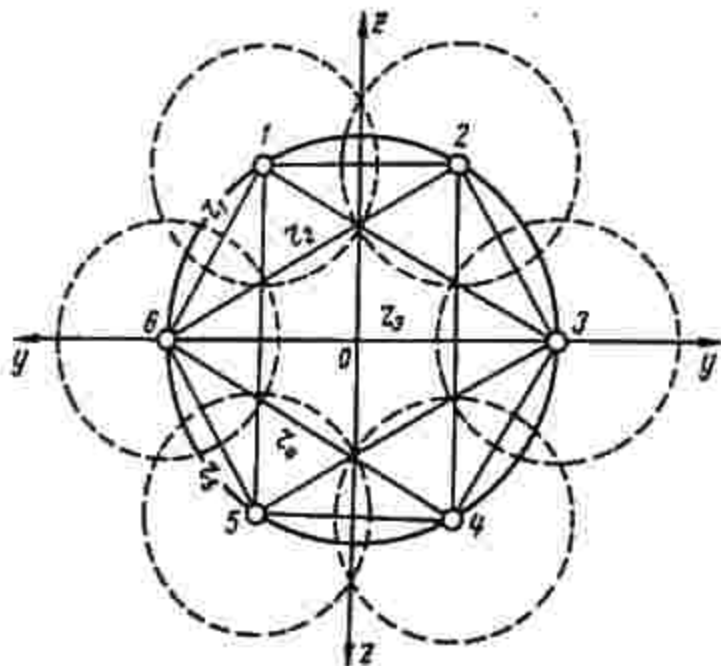


Рис. 64. Группа из шести симметричных скважин при  $R_0 = 1,5r_0$

**Скважины на окружности.** Очевидно, при большом числе скважин и малом расстоянии между ними расположение последних выгодно замечать по окружности небольшого диаметра. При этом можно получить результирующий поток большого простирания. Такой поток получен в нашем эксперименте при одновременном нагнетании суспензии из четырех труб с внутренним диаметром 0,035 м, расположенных по окружности радиуса 0,156 и 0,20 м (см. рис. 59).

Установим некоторые теоретические зависимости для источников, симметрично расположенных по окружности радиуса  $R_0$ . Рассмотрим, например, шесть симметричных скважин (рис. 64).

Забойное давление для шести скважин равно

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)'_0 = \frac{Q}{4\pi k} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{2}{r_{1,5}} + \frac{2}{r_{2,4}} + \frac{1}{r_2} \right);$$

$$r_{1,5} = R_0 2 \sin \frac{180}{6} = R_0 2 \cdot 0,5 = R_0;$$

$$r_{2,4} = R_0 2 \sin \frac{180}{3} = R_0 2 \cdot 0,866 = 1,73 R_0;$$

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)'_0 = \frac{Q}{4\pi k} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{3,66}{R_0} \right). \quad (30.V)$$

По условиям симметрии все скважины равнодебитны и имеют одинаковое забойное давление. Радиус  $R_0$  можно выразить в долях  $r_0$ , если ввести соотношение  $R_0 = \epsilon r_0$ .

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)'_0 = \frac{Q}{4\pi k r_0} \left( 1 + \frac{3,66}{\epsilon} \right). \quad (31.V)$$

Из уравнения (31.V) видно, что при больших значениях  $R_0$  ( $\epsilon \geq 40$ ) забойные давления симметричных взаимодействующих скважин только на один процент больше одиночно работающих скважин. И, наоборот, при малых значениях  $R_0$  величина забойных давлений резко увеличивается. Например, при  $\epsilon = 5$  забойное давление взаимодействующих скважин на 73% больше давления одиночных.

С уменьшением величины радиуса батарей скважин  $R_0$  видоизменяется и характер разделяющей поверхности результирующего потока. При относительно редком расположении взаимодействующих скважин, когда пересекаются между собой потоки только двух смежных скважин, разделяющая поверхность результирующего фильтрационного потока сохраняет волнистый характер с пиками на осях отдельных скважин. В центре поля находится свободный незатампированный участок породы (рис. 64,  $R_0 = 1,5r_0$ ). При тесном расположении скважин одновременно, средний пересечение потоков всех шести скважин одновременно, средний участок поля заполняется инжектирующей жидкостью. Вначале образуется кратер с дном, расположенным ниже отдельных скважин. При дальнейшем уменьшении расстояния между скважинами появляется критическая точка на отрицательной ветви ( $x < 0$ ) центральной вертикальной оси потока  $x$  (рис. 65,  $R_0 = 0,7r_0$ ). Высота этой точки зависит от величины комплекса  $\frac{Q}{\pi k}$  и радиуса

батарей скважин  $R_0$ .

Найдем высоту критической точки  $A$  на оси  $x$  при разных зна-



чениях радиуса  $R_0$ . При  $x < 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  и при значениях  $r = \sqrt{R_0^2 + x^2}$  для точки  $A$  будем иметь

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi} \frac{6}{\sqrt{R_0^2 + x^2}} + kx;$$

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{Q}{4\pi} \frac{6}{\sqrt{R_0^2 + x^2}} + kx \right] = 0.$$

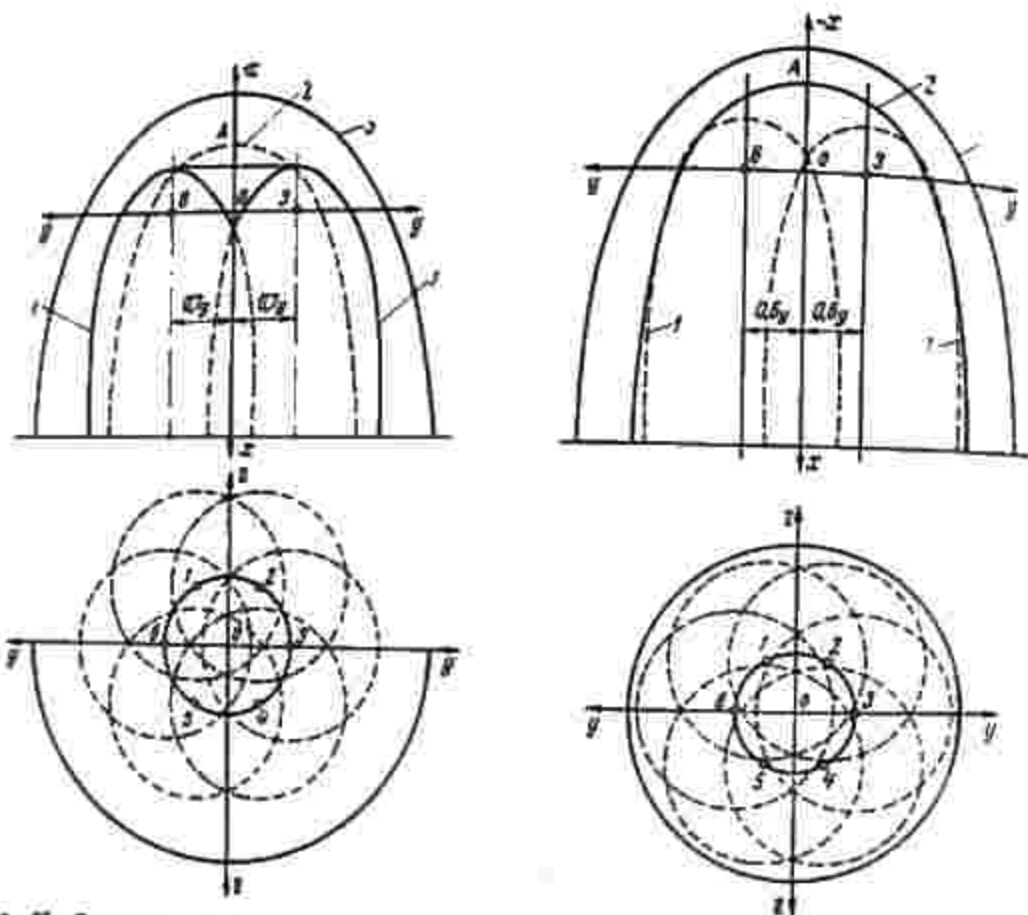


Рис. 65. Группа из шести симметричных скважин при  $R_0 = 0,7r$ .

Рис. 66. Группа из шести симметричных скважин при  $R_0 = 0,8r$ .

После дифференцирования находим

$$\frac{Q}{4\pi k} \frac{6x}{\sqrt{R_0^2 + x^2}} = 1,$$

откуда

$$x'_A = \frac{\sqrt{(R_0^2 + x'_A)^2}}{1,5 \frac{Q}{\pi k}}. \quad (32, V)$$

Предельного значения высота критической точки достигает при  $R_0 = 0$ , т. е. при совмещении всех шести скважин вместе,

$$x'_A = 1,22 \sqrt{\frac{Q}{\pi k}}.$$

Выразив  $R_0$  и  $x'_A$  через ширину простираения потока одиночной скважины  $y = \sqrt{\frac{Q}{\pi k}}$  уравнение (32, V) приводим к единичным условиям

$$\zeta = \frac{\sqrt{\frac{Q}{\pi k}} \sqrt{(\zeta^2 + \tau^2)^3}}{1,5}. \quad (33, V)$$

где  $\zeta = \frac{R_0}{\sqrt{\frac{Q}{\pi k}}}$ ,  $\tau = \frac{x'_A}{\sqrt{\frac{Q}{\pi k}}}$ .

При  $\sqrt{\frac{Q}{\pi k}} = 1$  коэффициенты  $\zeta$  и  $\tau$  имеют значение «приведенных» координат

$$\tau_r = \frac{\sqrt{(\zeta^2 + \tau^2)^3}}{1,5}. \quad (34, V)$$

Для перехода к действительным величинам приведенные значения  $\zeta_r$  и  $\tau_r$  надо multiply на  $\sqrt{\frac{Q}{\pi k}}$ .

По уравнению (34, V) в табл. 24 вычислены единичные координаты  $\tau_r$  для различных значений  $\zeta_r$  для симметричной шести-скважинной батареи.

Таблица 24

$\zeta_r$	1,0	0,7	0,6	0,5	0,3	0
$\tau_r$	Критической точки нет	0,73	0,88	1,06	1,18	1,22

Решение уравнения (34, V) указывает, что при  $\zeta_r = 1$  критической точки нет. Разделительная поверхность продолжает сохранять волнистый характер. Кратер заполнен жидкостью, но уровень ее в нем не поднимается выше оси источников. При  $\zeta_r = 0,7$  образуется критическая точка с высотой  $0,73 \sqrt{\frac{Q}{\pi k}}$ , которая на 46% больше высоты одиночной скважины. При этом значении  $\zeta_r$  разделительная поверхность результирующего потока, возможно,



не имеет еще симметричной формы тела вращения (рис. 65). Из-за значения  $\xi = 0,6$  разделительную поверхность потока можно считать симметричной (рис. 66). На этих рисунках цифрой 1 обозначены разделительные поверхности одиночных скважин, цифрой 2 — поверхность результирующего потока, а цифрой 3 — поверхность при предельном положении скважин — совмещении всех шести вместе.

Исследование формы свободной поверхности фильтрационных потоков, полученных при опытном нагнетании жидкости из четырех скважин, симметрично расположенных по окружности малых радиусов (см рис. 59), дает основание заключить, что эта поверхность является круто падающей и, скорее всего, приближается к поверхности эллипсоида вращения, а не к поверхности параболоида, более пологой. Из сопоставления с ними графических построений разделительных поверхностей, выполненных на рис. 65 и 66 для фиктивных источников, можно сделать вывод, что начиная с радиуса батареи  $R_0 = 0,7 \sqrt{\frac{Q}{\pi k}}$ , разделительную поверхность взаимодействующих скважин можно принимать за симметричную поверхность эллипсоида вращения и строить ее для любого меридионального сечения по формуле

$$y = 2x'_1 \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \quad (35, V)$$

где  $x'_1$  — высота критической точки взаимодействующих скважин.

При радиусах батарей  $R_0 > 0,7 \sqrt{\frac{Q}{\pi k}}$  общей куполообразной поверхности «депрессии» с центральной критической точкой не наблюдается. Здесь по аналогии с линейным расположением скважин могут рассматриваться два случая. Случай свободного расположения скважин по окружности  $R_0 = (1,5-1)y$ , для которого разделительная поверхность результирующего потока без большой погрешности может быть получена пересечением «депрессий» одиночных скважин, и случай стесненного расположения скважин при  $R_0 = (1-0,7)y$ . Для второго случая разделительная поверхность будет иметь волнистую форму с кратером в середине. Для меридиональных сечений  $хоу$  и  $хоз$  поверхность может быть построена графическим способом, аналогичным рассмотренному для линейного ряда скважин и основанным на принципе ортогональности. Для построения эквипотенциалов служат уравнения (17, V) при соответствующем значении  $B$ , выраженном через радиус  $R_0$ :  $B = R_0 2 \sin \frac{180}{n}$ , где  $n$  — число скважин батареи. Все предыдущие рассуждения были основаны на гидродинамической схеме сложения потенциальных течений пространственного источника и вертикального потока, замещающего действие силы тяжести. Подходя к вопросу строго формально, автор не имеет

права применять метод суперпозиции к потокам со свободной поверхностью, граничные условия на которой нелинейны. Об этом было разъяснено подробно. Но сделаем это, исходя из соображений, что получающиеся неточности от нелинейности граничных условий весьма невелики и не могут внести сколько-нибудь существенных погрешностей в расчетные параметры нагнетания. Полученные приближенные решения подкупают своей простотой, они хорошо укладываются с опытными данными и удовлетворяют основным условиям сферического течения из источника.

Эти высказывания ни в коем случае не снимают задачи дальнейших поисков более строгого решения движения жидкости из пространственного источника, возмущенного действием силы тяжести. Последующие направления исследования могут идти по линии уточнения распределения фиктивных стоков (задача В. М. Насбергз) или по линии использования для пространственной задачи некоторых аналогий плоской задачи. Например, плоская задача о движении фильтрационного потока из нагнетательной (оросительной) трубы в среду с атмосферным давлением теоретически решена Б. К. Ризенкампом.

### 3. Пространственный источник в поле осевого потока вблизи стенки

При ограниченной глубине проницаемого слоя, когда последний подстилается плотной скальной породой, на течение источника будет влиять не только действие силы тяжести, но и тормозящее влияние подстилающей непроницаемой плотной породы — горизонтальной стенки. Это влияние проявится в том, что струйки, набегающие из источника на стенку, будут последней отклоняться в сторону. Характер растекания фильтрационного потока здесь предопределен действием силы тяжести и горизонтальной составляющей результирующей скорости.

Схему нагнетания вблизи стенки можно встретить при устройстве неглубоких завес в проницаемых грунтах, лежащих на водонепроницаемой горной породе. Широкое применение эта схема может найти при тампонировании узких пространств грунта под фундаментами зданий и сооружений.

Из гидродинамики известно, что течение из источника вблизи плоской горизонтальной стенки эквивалентно течению двух источников равной силы, расположенных на равных расстояниях на одной вертикальной прямой. Тогда комбинированное пространственное поле течения источника вблизи стенки определяется суммированием соответствующих функций двух источников равной силы

$$\psi = \frac{Q}{2} (2 - \cos \theta_1 - \cos \theta_2); \quad (36, V)$$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad (37, V)$$



где  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы-векторы от точки потока до центров источников;

$\theta_1$  и  $\theta_2$  — углы между радиусами-векторами и осью  $x$ .

Деформирующее действие силы тяжести на поток пространственного источника учитывается вертикальным потоком, налагающимся на течение источника. При бесконечном простирании проницаемой однородной среды движение вертикального потока является равномерным и параллельным, идущим из бесконечности в бесконечность. И если в грунтовой среде такое движение происходит при гидравлических градиентах, равных единице, то это значит, что в любом горизонтальном сечении этого потока пьезометрическое давление равно нулю, так как оно полностью расходуется на преодоление сопротивлений. Такое движение не может изменить своего первоначального направления.

При ограниченной глубине проницаемого слоя, подстилающегося водопроницаемым пластом, на течение параллельного потока будет оказывать тормозящее влияние горизонтальная стенка. Натекая на стенку, поток должен изменить направление своего движения из вертикального в горизонтальное. Эквивалентный поток, замещающий действие силы тяжести, будет иметь форму осевого потока, натекающего на стенку, с соответствующим перераспределением давления внутри потока. Такой поток и должен суммироваться с течением двух симметричных источников равной силы, расположенных на одной вертикальной прямой.

Но раньше чем перейти к решению комбинированного течения источников и осевого потока, надо рассмотреть отдельно схему осевого потока вблизи стенки и исследовать ее особенности.

**Осевой поток вблизи плоской стенки.** Точного решения для фильтрационного осевого потока вблизи плоской стенки со свободной поверхностью нет. На этот раз также приходится ограничиться рассмотрением приближенного решения задачи, основываясь на некоторых схемах наземных потоков. Для фильтрационного потока из источника, расположенного в неограниченной пористой среде, за свободную поверхность течения принималась поверхность «полутела Прандтля», описываемая уравнениями (1—2, V).

Для рассматриваемого случая фильтрационного течения перед стенкой за свободную поверхность принимаем начальную поверхность тока осесимметричного потока, натекающего на стенку. Эквипотенциалами такого потока являются криволинейные поверхности. По Прандтлю, такая поверхность выражается уравнением

$$\varphi = \frac{1}{2} (Ax^2 + By^2 + Cz^2), \quad (38, V)$$

В задачу входит исследование всего поля течения этого потока. Вторые частные производные от  $\varphi$  по  $x$ ,  $y$  и  $z$  равны

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = A; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = B; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = C.$$

По уравнению Лапласа сумма их равна нулю

$$A + B + C = 0.$$

Из общих представлений о форме рассматриваемого потока можно заранее заключить, что поток должен быть симметричным относительно вертикальной оси  $x$ . Из этого следует, что коэффициенты  $B$  и  $C$  должны быть равны между собой. Тогда  $A$  становится равным  $-2B$ . Уравнение функции потенциала принимает вид

$$\varphi = \frac{B}{2} (-2x^2 + y^2 + z^2). \quad (39, V)$$

Для определения функции тока  $\psi$  можно выразить скорость через эту функцию. Для этого необходимо взять частную производную  $\psi$  по направлению, образующему угол  $90^\circ$  относительно заданного направления скорости, и разделить ее на длину окружности слоя течения, проходящую через данную точку, т. е. на  $2\pi y$ . Взяв в качестве скорости компонент  $u$ , функцию тока получим в следующем виде:

$$u = \frac{1}{2\pi y} \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

Компонент скорости  $u$  равен

$$u = -\frac{B}{2} \frac{\partial}{\partial x} (-2x^2 + y^2 + z^2) = 2Bx.$$

Имеем

$$2Bx = \frac{1}{2\pi y} \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$d\psi = 4\pi Bxydy,$$

так как компонент  $U=2Bx$  не зависит от  $y$ .

После интегрирования получим

$$\psi = 4\pi Bxy^2 = \text{const.} \quad (40, V)$$

Из уравнения (40, V) видно, что линиями тока будет семейство кубических гипербол с осями  $x$  и  $y$  в качестве асимптот.

Поток является симметричным относительно оси вращения, совпадающей с осью  $x$ . Поэтому можно ввести в рассмотрение меридиональное сечение, для которого ( $z=0$ )

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{B}{2} (-2x^2 + y^2); \\ \psi &= 2\pi Bxy^2. \end{aligned} \right\} \quad (41, V)$$

Эти уравнения выражают функции поля течения осевого потока вблизи плоской горизонтальной бесконечной стенки.

Движение жидкости — установившееся. Это подчеркивает постоянство коэффициента  $B$ .



Функция тока представлена уравнением

$$\psi = 2\pi Bxy^2.$$

Переходя к системе смешанных координат (рис. 67), получаем

$$\psi = 2\pi By^3 \operatorname{ctg} \theta.$$

Правая часть уравнения выражает расход потока через площадь живого сечения  $dy^2$  при осевой скорости  $2By \operatorname{ctg} \theta$ . Функцию  $\psi$  можно обозначить через  $\psi_r Q$  при изменении  $\psi_r$  от 0 до 1

$$\psi_r Q = 2\pi By^3 \operatorname{ctg} \theta.$$

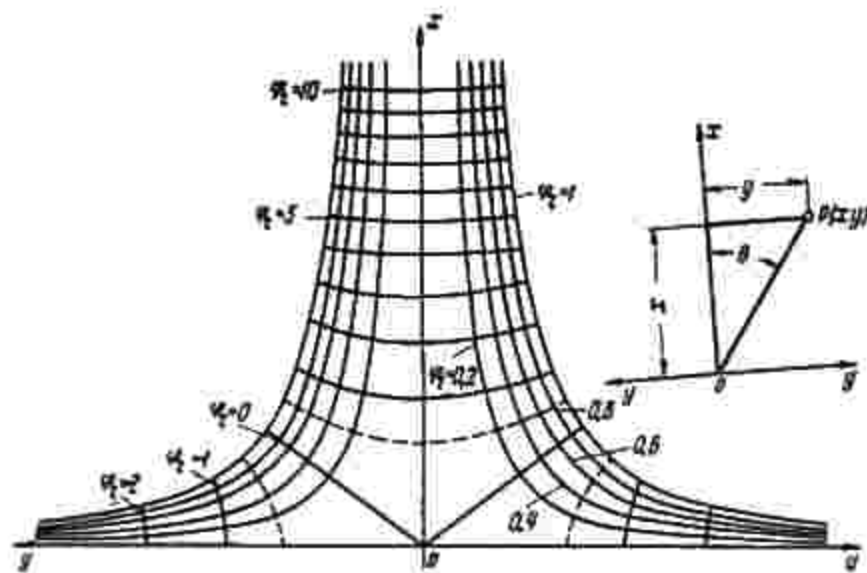


Рис. 67. Меридиональное сечение осевого потока вблизи плоской стенки

Из этого уравнения определяются координаты точек любой линии тока

$$y = \sqrt[3]{\frac{Q}{2\pi B}} \sqrt[3]{\frac{\psi_r}{\operatorname{ctg} \theta}} \quad (42, V)$$

при  $x = y \operatorname{ctg} \theta$ .

Координаты начальной линии тока получаются при  $\psi_r = 1$ .

Решение можно выполнить в приведенных условиях при  $\sqrt[3]{\frac{Q}{2\pi B}} = 1$

$$\left. \begin{aligned} y_r &= \sqrt{\frac{\psi_r}{\operatorname{ctg} \theta}}; \\ x &= y_r \operatorname{ctg} \theta. \end{aligned} \right\} \quad (43, V)$$

Для перехода к действительным линиям  $\psi$  приведенные величины  $\psi_r$  умножаются на  $Q$ , а приведенные координаты на  $\sqrt[3]{\frac{Q}{2\pi B}}$ .

Для построения эквипотенциалей имеем уравнение

$$\bar{\varphi} = \frac{B}{2} (-2x^2 + y^2) = \frac{B}{2} x^2 (\operatorname{tg}^2 \theta - 2).$$

При дифференцировании по осям  $x, y, z$ , не нарушая правильности конечного истолкования, потенциал можно взять положительным или отрицательным.

Воспользовавшись этим правилом, изменим знак потенциала на обратный

$$\varphi = \frac{B}{2} (2x^2 - y^2) = \frac{B}{2} x^2 (2 - \operatorname{tg}^2 \theta).$$

Получим убывающую функцию потенциала, что соответствует характеру изменения напорной функции  $H$ .

Функцию потенциала  $\varphi$  обозначим

$$\varphi = \varphi_r B \sqrt[3]{\left(\frac{Q}{2\pi B}\right)^2};$$

$$\varphi_r \sqrt[3]{\left(\frac{Q}{2\pi B}\right)^2} = \frac{x^2}{2} (2 - \operatorname{tg}^2 \theta).$$

Из этого уравнения определяем координаты эквипотенциалей

$$\left. \begin{aligned} x_r &= \sqrt[3]{\frac{Q}{2\pi B}} \sqrt{\frac{2\varphi_r}{2 - \operatorname{tg}^2 \theta}}; \\ y &= x \operatorname{tg} \theta. \end{aligned} \right\} \quad (44, V)$$

Значения  $\varphi_r$  изменяются от  $+\infty$  до  $-\infty$ .  
В приведенных условиях имеем

$$\left. \begin{aligned} x_r &= \sqrt{\frac{2\varphi_r}{2 - \operatorname{tg}^2 \theta}}; \\ y_r &= x_r \operatorname{tg} \theta. \end{aligned} \right\} \quad (45, V)$$

Для точек на стенке ( $x=0$ ) получим

$$\left. \begin{aligned} y &= \sqrt[3]{\frac{Q}{2\pi B}} \operatorname{tg} \theta \sqrt{\frac{2\varphi_r}{2 - \operatorname{tg}^2 \theta}}; \\ y_r &= \operatorname{tg} \theta \sqrt{\frac{2\varphi_r}{2 - \operatorname{tg}^2 \theta}}. \end{aligned} \right\} \quad (46, V)$$



Для перехода к действительным значениям  $\varphi$  приведенные величины  $\varphi$ , умножаются на  $B \sqrt{\left(\frac{Q}{2\pi B}\right)^2}$ , а координаты точек

— на  $\sqrt{\frac{Q}{2\pi B}}$ .

На рис. 67 в приведенных условиях выполнено построение некоторых эквипотенциалей. Выражая напорную функцию через  $\frac{\varphi}{k}$ , получим уравнение для определения напора в любой точке фильтрационного потока

$$H = \frac{B}{2k} (2x^2 - y^2). \quad (47, V)$$

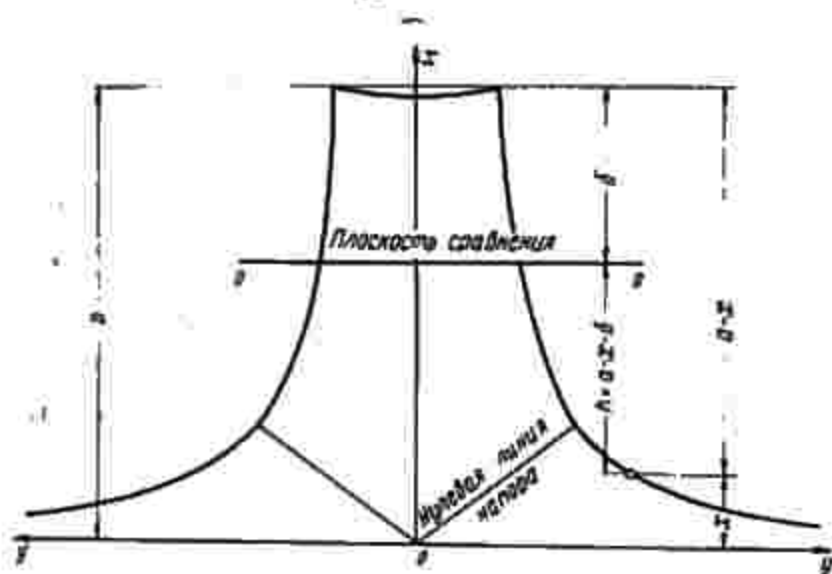


Рис. 68. Схема к определению пьезометрического давления в осевом потоке вблизи стенки

Напоры изменяются от  $+\infty$  до  $-\infty$ . Рассматривая движение в конечных пределах, начальной и конечной эквипотенциалам должны приписать значения напоров, определяемые уравнением (47, V).

Нулевая линия напора проходит через начало координат. Она делит поле течения на два участка: верхний — с положительными напорами, нижний — с отрицательными. Отрицательные напоры определены отрицательным значением геометрических напоров (рис. 68). Пьезометрическое давление определяется уравнением

$$\frac{p}{\gamma} = H - (-h) = \frac{B}{2k} (2x^2 - y^2) + h.$$

Геометрический напор  $h$  можно выразить через вертикальную координату точки, если обозначить

$$h = a - x - \delta,$$

где  $a$  — расстояние от стенки до центра начального сечения потока;

$x$  — вертикальная координата точки;

$\delta$  — расстояние от центра начального сечения до плоскости сравнения.

При этих обозначениях получим

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{B}{2k} (2x^2 - y^2) + a - x - \delta. \quad (48, V)$$

Значение  $\delta$  можно определить из условий на той или иной границе области движения фильтрационного потока. Среди постоянных величин  $a$  и  $k$ , определяющих распределение давления в фильтрационном потоке, натекающем на стенку, находится и коэффициент  $B$ . Для его определения может служить расход фильтрации. Из уравнения (40, V) при значениях  $\psi_r = 1$ ,  $x = a$  и  $y = y_0$  имеем

$$Q = 2\pi B a y_0^2,$$

где  $y_0$  — радиус начального сечения потока.

Этот расход отвечает условиям неравномерного движения (в присутствии стенки), при котором начальная скорость равна  $2Ba$ . Тот же самый расход жидкости в условиях равномерного движения (в отсутствии стенки) определяется равным

$$Q = \pi k y_0^2.$$

Приравнивая эти значения, находим  $B$

$$B = \frac{k}{2a}. \quad (49, V)$$

В соответствии с распределением напоров находится и скоростной режим поля осевого потока. Компоненты результирующей скорости для любой точки потока равны

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{B}{2} \frac{\partial}{\partial x} (2x^2 - y^2) = -\frac{kx}{a}; \\ v &= -\frac{B}{2} \frac{\partial}{\partial y} (2x^2 - y^2) = \frac{ky}{2a}. \end{aligned} \right\} \quad (50, V)$$

Наибольшее значение вертикальный компонент скорости имеет при  $x = a$  и равен  $k$ . По мере приближения к стенке он убывает и в критической точке (точке останова) равен нулю. Горизонтальный компонент увеличивается с удалением от оси потока  $x$ . При постоянной величине расхода площади живых сечений фильтрационного потока по стенке  $2\pi y, x$ , неизменно уменьшаются по длине стенки. Начальная линия тока представляет, таким образом, своеобразную кривую спада.



Комбинированное течение источника и осевого потока вблизи стенки. Основываясь на предыдущих решениях, получим

$$\psi = \frac{Q}{2} (2 - \cos \theta_1 - \cos \theta_2) + 2\pi Bxy^2; \quad (51.V)$$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{B}{2} (2x^2 - y^2). \quad (52.V)$$

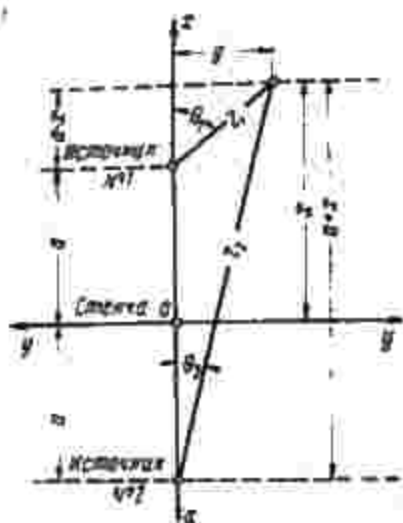


Рис. 68. Схема источника и осевого потока вблизи стенки

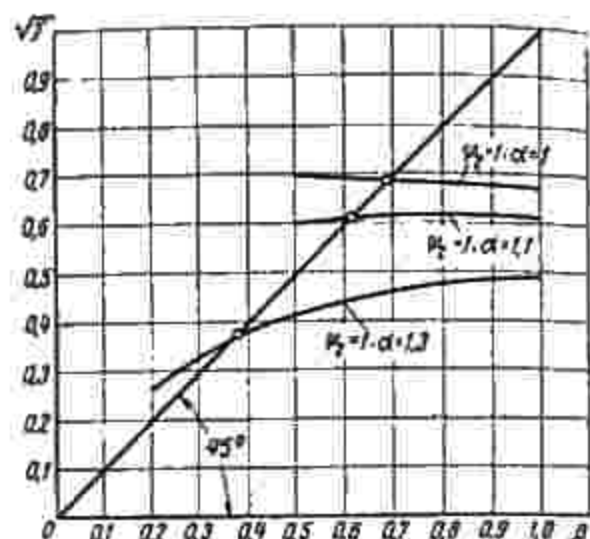


Рис. 70. Схема к решению уравнения (57.V)

Относя начало координат к общему центру на стенке, при обозначениях по рис. 69 получим

$$\cos \theta_1 = \frac{a-x}{r_1} = \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + y^2}};$$

$$\cos \theta_2 = \frac{a+x}{r_2} = \frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2 + y^2}};$$

откуда

$$\psi = \frac{Q}{2} \left( 2 - \frac{a-x}{\sqrt{(a-x)^2 + y^2}} - \frac{a+x}{\sqrt{(a+x)^2 + y^2}} \right) + 2\pi Bxy^2.$$

Обозначая  $\psi = \psi_r Q$  и принимая  $B = \frac{k}{2a}$ , имеем

$$y^2 = \frac{Qa}{-k} \left[ \frac{\psi_r}{a} - \frac{1}{a} + \frac{a-x}{2x\sqrt{(a-x)^2 + y^2}} + \frac{a+x}{2x\sqrt{(a+x)^2 + y^2}} \right].$$

Выразим  $x$  и  $y$  через  $a$ , полагая

$$x = \alpha a, \quad y = \beta a.$$

В этих обозначениях будем иметь

$$\beta^2 = \frac{Q}{\pi k a^2} \left[ \frac{\psi_r}{a} - \frac{1}{a} + \frac{1-\alpha}{2\alpha\sqrt{(1-\alpha)^2 + \beta^2}} + \frac{1+\alpha}{2\alpha\sqrt{(1+\alpha)^2 + \beta^2}} \right].$$

Это уравнение позволяет вычислить коэффициент  $\beta$ , а следовательно, и координату  $y$  при заданных значениях  $\alpha$  (или  $x$ ) для любых величин  $a$  и комплекса  $\frac{Q}{\pi k a^2}$

$$\beta = \sqrt{\frac{Q}{\pi k a^2}} \times \sqrt{\frac{\psi_r}{a} - \frac{1}{a} + \frac{1-\alpha}{2\alpha\sqrt{(1-\alpha)^2 + \beta^2}} + \frac{1+\alpha}{2\alpha\sqrt{(1+\alpha)^2 + \beta^2}}}. \quad (53.V)$$

Для решения уравнения применяется графический метод. Графически  $\beta$  находим путем построения кривой  $\sqrt{F}$  правой части уравнения при разных значениях  $\beta$ . Пересечение кривой с прямой, проведенной из начала координат под углом  $45^\circ$ , дает точку, абсцисса которой равна корню уравнения. На рис. 70 приводятся решения  $\beta$  для некоторых значений  $\alpha$  для случая, когда  $\frac{Q}{\pi k a^2} = 1$ .

Уравнение (53.V) является основным для построения линий тока рассматриваемого поля течения. Значения приведенной функции  $\psi_r$  изменяются от 1 для разделительной линии и до 0 для стенки. Отметим, что для перехода от величин  $\alpha$  и  $\beta$ , соответствующих единичному значению безразмерного комплекса  $\frac{Q}{\pi k a^2}$ , к действительным при других значениях комплекса, прямой пропорциональности не существует.

Положение критической точки разделительной поверхности определяется условием, что компонент вертикальной скорости здесь равен нулю.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{k}{4a} (2x^2 - y^2) \right] = 0.$$

Подставляя значения радиусов  $r_1$  и  $r_2$ , выраженных через координаты точки, и выполняя дифференцирование, получаем

$$\frac{Q}{2\pi} \frac{a^2 + x^2}{(a^2 - x^2)^2} - \frac{kx}{a} = 0.$$

Выражая  $x$  через  $a$  ( $x = \alpha a$ ), имеем

$$\frac{Q}{\pi k a^2} = \frac{2\alpha(1-\alpha^2)^2}{1+\alpha^2}. \quad (54.V)$$

Это уравнение определяет  $\alpha$ , а следовательно, и  $x$  для любых значений комплекса  $\frac{Q}{\pi k a^2}$ .



Для единичного значения  $\frac{Q}{\pi ka^2}$   
 $\alpha = 1,425.$

Критическую точку можно выразить через безразмерное значение  $\alpha_{кр}$ , если ввести переходный коэффициент

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{кр} &= 1,425\tau \sqrt{\frac{Q}{\tau ka^2}}; \\ \alpha_{кр} &= 1,425\tau \sqrt{\frac{Q}{\tau k}}. \end{aligned} \right\} (55, V)$$

или

Значения переходного коэффициента  $\tau$  берутся из табл. 25 интерполяцией или определяются по рис. 71. В табл. 26 для случая  $\frac{Q}{\pi ka^2} = 1$  вычислены координаты начальной линии тока

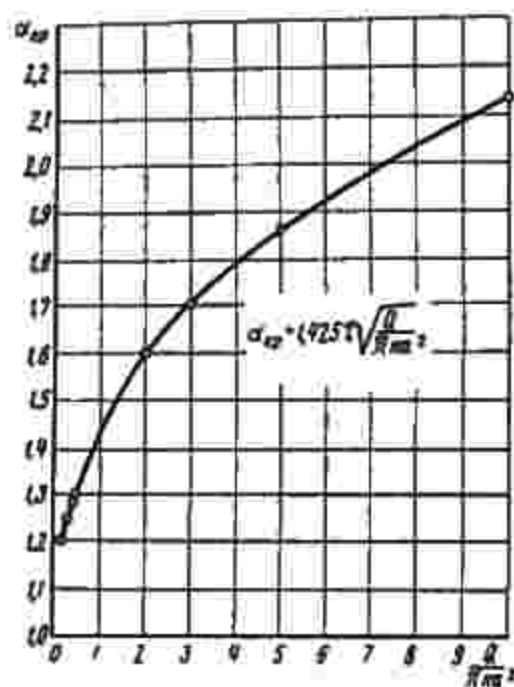


Рис. 71. График зависимости безразмерной координаты  $\alpha_{кр}$  от безразмерного параметра  $\frac{Q}{\pi ka^2}$ .

( $\psi_r = 1$ ) комбинированного течения осевого потока и источника вблизи стенки.

На рис. 72 изображено меридиональное сечение этого поля. Как и следовало ожидать, теоретическое исследование комбинированного поля источника вблизи стенки приводит к течению, ограниченному начальной линией тока. Несколько она удовлетворяет граничным условиям свободной поверхности, будет видно из дальнейшего.

Течение от источника внутри разделительной поверхности веерообразно расходится во все стороны и, достигнув критической точки подъема, опускается вниз и тонким слоем разливается по стенке. Разделительная поверхность имеет куполообразную распластанную форму. Положение критической точки ниже по

сравнению со свободным источником.

Таблица 25

$\frac{Q}{\pi ka^2}$	0,2	0,3	0,4	0,5	1	2	3	5	10
$\tau_{кр}$	1,90 1,205	1,60 1,25	1,42 1,28	1,30 1,31	1 1,425	0,79 1,60	0,69 1,70	0,58 2,855	0,48 2,14

Таблица 26

$x$	$y$	$\tau$	$y$	$\tau$	$y$
1,425	0	1,000	0,690	0,200	1,630
1,400	0,165	0,800	0,840	0,100	2,050
1,300	0,370	0,600	1,000	0,050	2,670
1,200	0,500	0,700	1,215	0	$\infty$
1,100	0,610	—	—	—	—

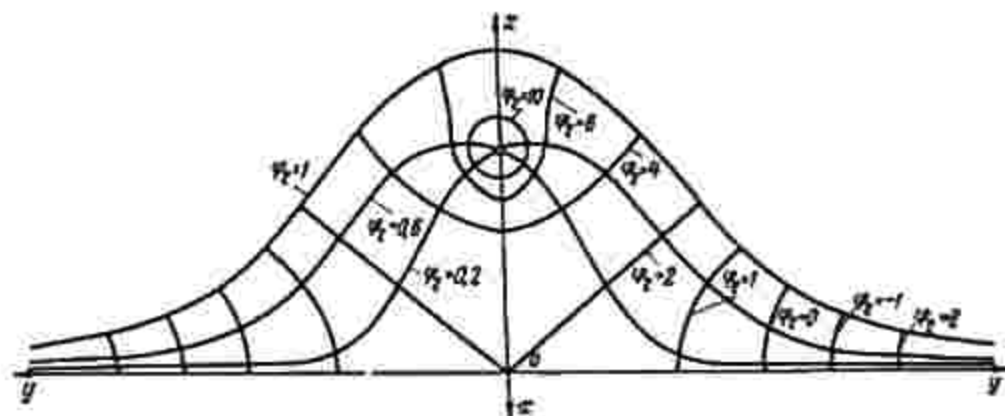


Рис. 72. Меридиональное сечение поля течения осевого потока и источника вблизи стенки

Для построения эквипотенциалей

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{(a-x)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(a+x)^2 + y^2}} \right] + \frac{k}{4a} (2x^2 - y^2).$$

Обозначая функцию  $\varphi = \varphi_r \frac{Q}{4\pi a}$  и выражая  $x$  и  $y$  через  $\alpha$  ( $x = \alpha a$ ,  $y = \beta a$ ), получим

$$\frac{Q}{\pi ka^2} = \frac{2\alpha^2 - \beta^2}{\varphi_r \left[ \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha)^2 + \beta^2}} - \frac{1}{\sqrt{(1+\alpha)^2 + \beta^2}} \right]}$$

откуда

$$\beta = \sqrt{2\alpha^2 - \frac{Q}{\pi ka^2} \left[ \varphi_r - \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha)^2 + \beta^2}} - \frac{1}{\sqrt{(1+\alpha)^2 + \beta^2}} \right]}. (56, V)$$

Значения  $\varphi_r$  изменяются от  $+\infty$  в центре источника до  $-\infty$  на бесконечно большом удалении по стенке. Применяя для решения уравнения тот же графический метод, при заданных  $\alpha$  можем вычислить  $\beta$ , а следовательно, и  $y$  для любых значений  $\varphi_r$ .



В частности, для определения координаты  $y$  по стенке при  $x=0$  имеем уравнение

$$\beta = \sqrt{\frac{Q}{\pi k a^2}} \sqrt{\frac{2}{V1-\rho^2}} - \Phi_r. \quad (57, V)$$

На рис. 72 для единичных условий выполнено построение некоторых эквипотенциалей.

Распределение пьезометрического давления. Напор в любой точке фильтрационного потока определяется уравнением

$$H = \frac{Q}{\pi k} \left[ \frac{1}{4 \sqrt{(a-x)^2 + y^2}} + \frac{1}{4 \sqrt{(a+x)^2 + y^2}} \right] + \frac{2x^2 - y^2}{4a}. \quad (58, V)$$

Напоры изменяются от  $+\infty$  в центре источника до  $-\infty$  на бесконечном расстоянии по стенке. Нулевая линия напора в комбинированной схеме по сравнению со схемой осевого потока сме-

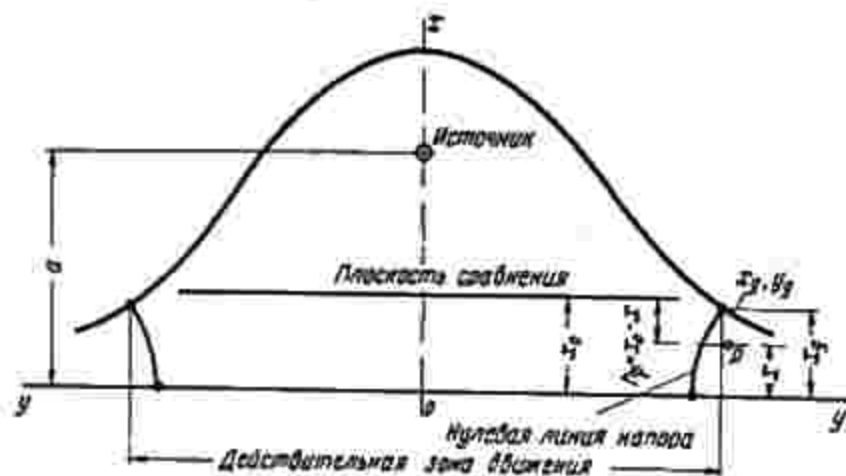


Рис. 73. Схема к определению пьезометрического давления в потоке источника вблизи стенки

щена от центра стенки дальше по течению потока. Относя отрицательные напоры к отрицательным значениям геометрических высот, плоскость сравнения надо взять выше начала координат на некотором расстоянии от стенки  $x_0$  (рис. 73). Расстояние  $x_0$  надо подобрать так, чтобы на поверхности начальной линии тока наилучшим образом выполнялись граничные условия. Уравнение распределения пьезометрического давления в потоке будет

$$\frac{p}{\gamma} = H - (-h) = H + x_0 - x$$

или

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{Q}{\pi k} \left[ \frac{1}{4 \sqrt{(a-x)^2 + y^2}} + \frac{1}{4 \sqrt{(a+x)^2 + y^2}} \right] + \frac{2x^2 - y^2}{4a} + x_0 - x. \quad (59, V)$$

Выразив координаты точки через расстояние  $a$ , уравнение (59, V) получим

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{Q}{\pi k a} \left[ \frac{1}{4 \sqrt{(1-\rho)^2 + \beta^2}} + \frac{1}{4 \sqrt{(1+\rho)^2 + \beta^2}} \right] + a \left[ \frac{2\rho^2 - \beta^2}{4} + \alpha_0 - a \right]. \quad (60, V)$$

По этому уравнению определяется пьезометрическое давление в любой точке фильтрационного потока при заданных параметрах нагнетания  $Q$ ,  $k$  и  $a$ .

В частности, давление в начале координат (точке останова)

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{Q}{2\pi k a} + \alpha_0 a. \quad (61, V)$$

Движение жидкости по стенке ( $x=0$ ) происходит с уменьшением давления

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{Q}{\pi k a} \frac{1}{2 \sqrt{1+\beta^2}} + a \left( \alpha_0 - \frac{\beta^2}{4} \right), \quad (62, V)$$

По достижении  $y$  известного предела давление на стенке может стать отрицательным, что невозможно. Предельное значение  $\beta_{\max}$  находим, полагая

$$\frac{Q}{\pi k a} \frac{1}{2 \sqrt{1+\beta_{\max}^2}} + a \left( \alpha_0 - \frac{\beta_{\max}^2}{4} \right) = 0. \quad (63, V)$$

На контуре начальной эквипотенциали ( $x=a+r_0$ ,  $y=0$ ) давление равно

$$\left( \frac{p}{\gamma} \right)_0 = \frac{Q}{4\pi k} \frac{2(a+r_0)}{2ar_0+r_0^2} + \frac{(a+r_0)^2}{2a} + \alpha_0 - a. \quad (64, V)$$

Первый член этого уравнения определяет давление свободного источника вблизи стенки. Последующие члены уравнения выражают давление от осевого потока, замещающего действие силы тяжести. Но при ближайшем рассмотрении этой части уравнения можно заключить, что сумма последних трех членов мало отличается от нуля: величина  $x_0$  несколько меньше  $\frac{a}{2}$ , зато выражение  $\frac{(a+r_0)^2}{2a}$  несколько больше  $\frac{a}{2}$ . В целом сумма близка к нулю и в пределах точности ею можно пренебречь.

Таким образом, рабочее (забойное) давление источника вблизи стенки надо принять равным

$$\left( \frac{p}{\gamma} \right)_0 = \frac{Q}{4\pi k} \frac{2(a+r_0)}{2ar_0+r_0^2}. \quad (65, V)$$

Влияние стенки на поток источника является затухающим.



Возвратимся к уравнению (60,V) и выясним, насколько оно удовлетворяет граничным условиям на свободной поверхности фильтрационного потока. Рабочую зону движения потока ограничим нулевой эквипотенциалью ( $H=0$ ), так как дальнейшие участки тонкого слоя тапонируемой породы вряд ли могут иметь практическое значение. Взяв точку нулевой эквипотенциали на начальной линии тока, по уравнению (53,V) определим длину рабочей зоны  $\beta_0$ .

При известных значениях координат  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  по уравнению (60,V) вычисляется расстояние  $a_0$  от стенки до плоскости срав-

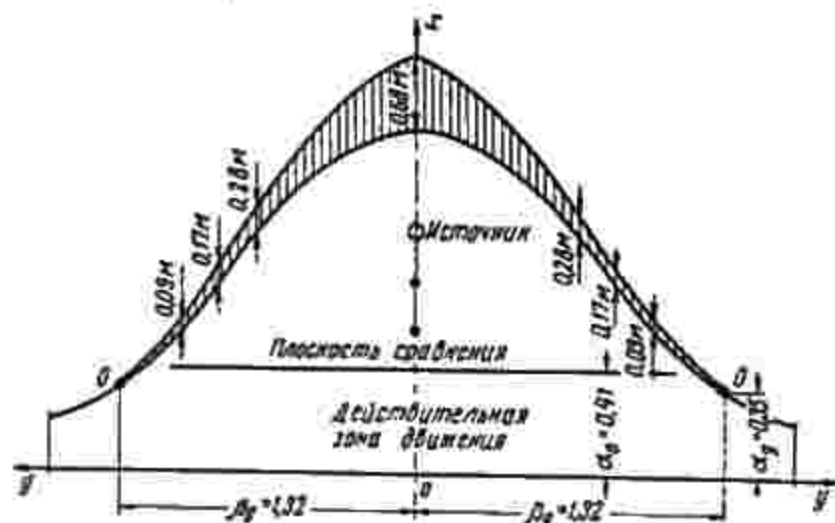


Рис. 74. Пьезометрическая линия «излишнего» давления на свободной поверхности

нения. Пьезометрическое давление в точке начальной линии тока ( $\alpha_0, \beta_0$ ) равно нулю. В идеальном случае последнюю можно было бы принять за свободную поверхность фильтрационного потока. Тогда и в других точках ее, в пределах рабочей зоны движения (63,V), давления по уравнению (60,V) должны быть равны нулю. Если этого не получается, это будет означать нелинейность граничных условий на свободной поверхности. Числовые значения вычисленных давлений могут служить критерием приближенности решения.

На рис. 74 представлена начальная линия тока для потока источника вблизи стенки при значении комплекса  $\frac{Q}{\pi k a^2} = 1$ . Допустим,  $a = 1$  м и  $\frac{Q}{\pi k} = 1$  м<sup>2</sup>. По уравнению (60,V) вычислена пьезометрическая линия и изображена на рисунке. Наибольшее «излишнее» давление (против нуля) имеет критическая точка купола растекания, в которой последнее равно 0,68 м. В то же время величина рабочего (забойного) давления при радиусе нагнетательной трубы  $r_0 = 0,03$  м по формуле (65,V) для рассматривас-

мого случая определяется равной 8,25 м; т. е. «излишнее» давление в критической точке составляет 8,2% от забойного.

С увеличением комплекса  $\frac{Q}{\pi k a^2}$  высота критической точки купола растекания возрастает. Увеличивается и доля «излишнего» давления в критической точке купола. Но одновременно растет и величина забойного давления. Даже при большом значении комплекса  $\frac{Q}{\pi k a^2} = 10$  доля «излишнего» давления в критической точке купола не превышает 6% от забойного.

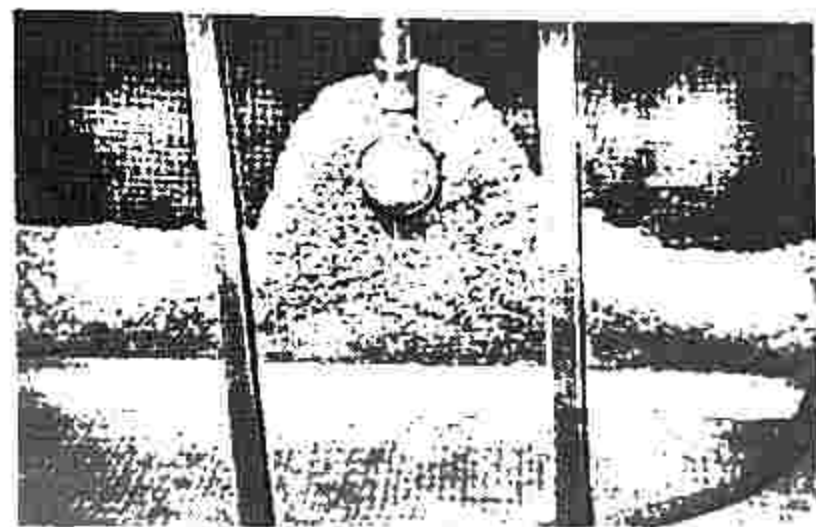


Рис. 75. Разрез щебеночного сталактита цементно-песчаным раствором по схеме источника вблизи стенки

Как видно, такая величина «излишнего» давления на поверхности купола растекания не представляет собой чрезмерной величины, и начальная линия тока в пределах допустимой точности при практических расчетах в действительной зоне движения может быть принята за свободную поверхность фильтрационного потока из источника вблизи горизонтальной стенки.

Опыт убеждает в достоверности принятых решений. Рис. 75 представляет вертикальный разрез щебеночного сталактита, цементированного раствором по схеме источника вблизи стенки. Относительный вес цементной суспензии в этом эксперименте 1,689. Среда нагнетания — щебень крупностью 0,004, 0,013 и 0,022 м.

Комбинация источника и осевого потока вблизи стенки отвечает реальной картине течения из источника вблизи стенки.

Скоростные условия поля. Скоростное поле течения возможно исследовать дифференцированием функции потенциала

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{(a-x)^2 + y^2}} + \frac{1}{\sqrt{(a+x)^2 + y^2}} \right] + \frac{h}{4a} (2x^2 - y^2).$$



Частные производные этой функции дают компоненты результирующей скорости по осям  $x$  и  $y$  для любой точки меридионального сечения поля.

Представляет интерес отметить некоторые частные значения скоростей

$$\begin{aligned} u' &= \frac{Q}{2\pi} \frac{a^2 + x^2}{(a^2 - x^2)^2} - \frac{kx}{a}; \\ u'' &= -\frac{Q}{2\pi} \frac{2ax}{(a^2 - x^2)^2} - \frac{kx}{a}, \end{aligned} \quad (66.V)$$

При  $x=0$  осевая нисходящая скорость равна нулю. Скорость, нормальная к непроницаемой твердой стенке, всегда равна нулю, в то время как скорость скольжения по стенке может быть сколько угодно большой. Последняя возникает в результате сложения двух симметричных скоростей из источников, для любой точки на стенке, направленных под равными углами:

$$v = \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{(a^2 + y^2)^2} + \frac{ky}{2a}. \quad (67.V)$$

Знак минус нисходящей скорости означает направление.

**Взаимодействие источников.** Напорная функция комбинированного течения, представленного рядом взаимодействующих источников, расположенных на горизонтальной прямой вблизи плоской стенки и возмущенных действием силы тяжести, получается суммированием функций составляющих течений. На каждую точку поля действуют попарно скорости от всех источников — прямые и отраженные.

При обозначениях по рис. 76 напор в любой точке потока равен

$$H = \frac{Q}{4\pi k} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1'} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2'} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_3'} + \dots \right) + \frac{1}{4a} (2x^2 - y^2).$$

В частности, для точек, расположенных по оси  $x$ , получим ( $x > a, y = 0$ )

$$\begin{aligned} H &= \frac{Q}{4\pi k} \left[ \frac{2x}{x^2 - a^2} + \sum \frac{2}{\sqrt{(a-x)^2 + (ib)^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \sum \frac{2}{\sqrt{(a+x)^2 + (ib)^2}} \right] + \frac{x^2}{2a}. \end{aligned} \quad (68.V)$$

Здесь  $i$  — ряд целых чисел, последовательно взятых от 1 и кончая  $\frac{n-1}{2}$ ;  $n$  — число источников нечетного ряда.

Пьезометрическое давление для любой точки потока определяется исключением из уравнения (68.V) геометрического напора.

В соответствии с уравнением (59.V) пьезометрическое давление для точек, расположенных на оси  $x$ , при  $x > a$  и  $y = 0$  будет равно

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{Q}{4\pi k} \left[ \frac{2x}{x^2 - a^2} + \sum \frac{2}{\sqrt{(a-x)^2 + (ib)^2}} + \sum \frac{2}{\sqrt{(a+x)^2 + (ib)^2}} \right] + \frac{x^2}{2a} + x_0 - x.$$

На контуре начальной эквипотенциали центрального забоя при координатах точки  $x = a + r_0, y = 0$  и значении суммы  $\left[ \frac{(a+r_0)^2}{2a} + x_0 - a \right]$ , близком к нулю (64.V), пьезометрическое давление равно

$$\left( \frac{p}{\gamma} \right)_0 = \frac{Q}{4\pi k} \left[ \frac{a+r_0}{2ar_0 + r_0^2} + \sum \frac{2}{\sqrt{r_0^2 + (ib)^2}} + \sum \frac{2}{\sqrt{(2a+r_0)^2 + (ib)^2}} \right]. \quad (69.V)$$

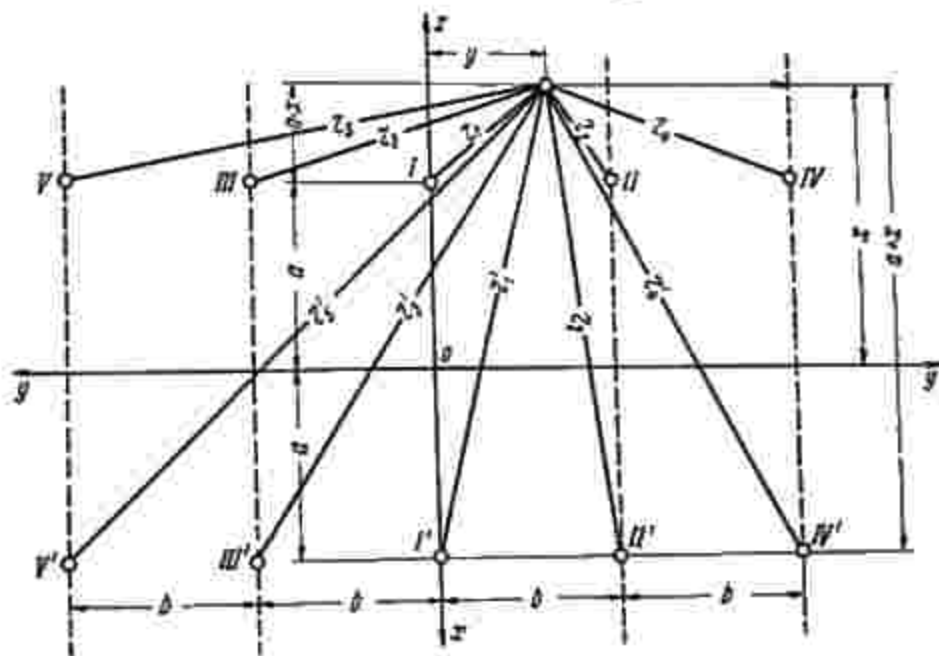


Рис. 76. Схема взаимодействия источников вблизи стенки

Это — рабочее или забойное давление. При исследовании раздельной поверхности могут служить соображения, приведенные в п. 2. Очевидно, и в данном случае при неособенно тесном расположении скважин не получим единой куполообразной поверхности: она будет сохранять волнистообразный характер. И только при тесном расположении скважин перейдет в общую куполообразную поверхность. Поэтому аналогично п. 2 можно отметить, что при неособенно тесном расположении скважин конфигу-



рацию результирующего потока можно изображать простым пересечением потоков одиночных скважин. На рис. 77 изображено пересечение разделительных поверхностей двух смежных скважин при неособенно тесном расположении их. В качестве контролирующего размера можно принять горизонтальное расстояние  $\beta_g$ , ограничивающее зону действительного движения. Потенциалы и соответствующие им напоры (давления) должны быть просуммированы по формулам (68—69, V).

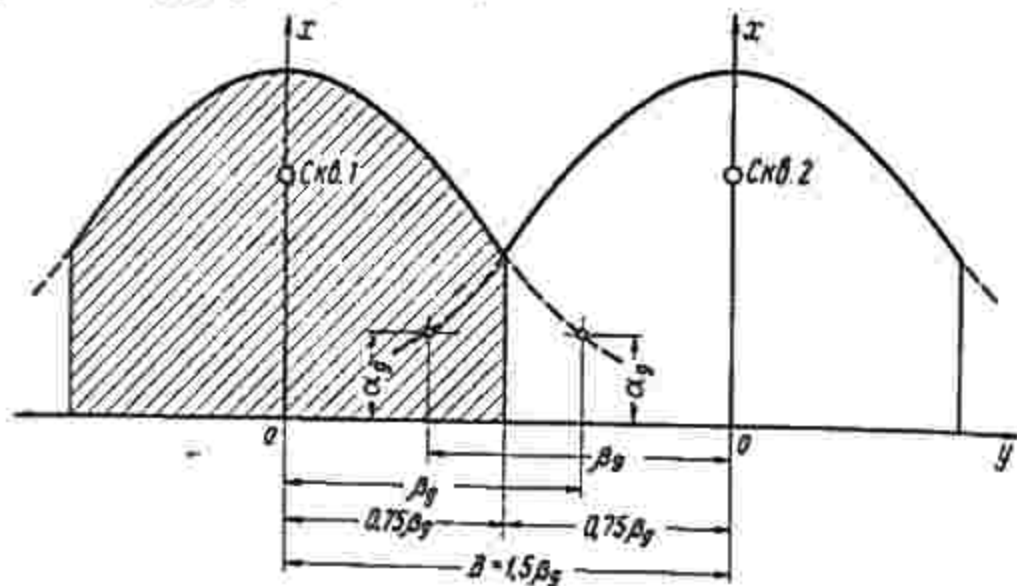


Рис. 77. Определение расстояния между смежными скважинами (при не особенно тесном их расположении)

Рассмотренная схема может найти применение при устройстве неглубоких распластаных площадных завес вблизи водоупора. Заполнение межскважинных воронок верхних частей завесы при необходимости можно производить шахматной скважиной.

Некоторые дополнительные замечания по схеме донного нагнетания. В пятой главе рассмотрены все основные схемы нагнетания, характеризующие сферическое течение из источника, деформированное действием силы тяжести. Исключение представляет случай нагнетания в горизонтальную щель, где действие силы тяжести уравновешено реакциями горизонтальных стенок щели.

Основной особенностью течения из пространственного источника является высокая концентрация градиентов давления (потенциала) вблизи контура скважины (круга малого радиуса). В то время как для плоско-радиального течения из скважины характерно наличие обширной области высоких градиентов давления на большом расстоянии от скважины. Эта особенность накладывает своеобразный отпечаток и на все комбинированные схемы пространственного источника. В частности, на схемы взаимодействия источников, для которых, в связи с отмеченной особенностью, эффект взаимодействия становится исчезающе малым

даже при сравнительно небольших расстояниях между источниками.

Большое количество проведенных экспериментов устанавливает вторую особенность течения из пространственного источника — быструю стабилизацию потока, быстрый переход из неустановившейся фазы движения к установившемуся течению. Вследствие этого глубина проникновения нагнетаемой жидкости в грунт (радиус инъеции) мало влияет на зависимость забойного давления от расхода нагнетания.

Теоретически функция времени при нагнетании жидкости из пространственного источника, деформированного действием силы тяжести, устанавливается из закона движения частицы жидкости вдоль основной линии тока (положительного направления оси  $x$  рис. 55).

Вертикальный компонент скорости по этой оси по уравнению (15, V) равен

$$u = k \left( 1 + \frac{Q}{4\pi k} \frac{1}{x^2} \right).$$

Закон движения частицы жидкости вдоль этой оси

$$u = m \frac{dx}{dt}.$$

При подстановке получим

$$dt = \frac{m}{k} \frac{dx}{1 + \frac{A}{x^2}}, \quad (70, V)$$

где  $A = \frac{Q}{4\pi k} = r_0 H_0 = \text{const}$  [уравнение (13, V)].

Проинтегрировав уравнение в пределах по  $t$  от 0 до  $T$  и по  $x$  от 0 до  $R$ , найдем время движения жидкости из забоя вдоль оси  $x$  при постоянном расходе нагнетания  $Q$  и постоянном давлении на забое  $H_0$

$$T = \frac{m}{k} \left( R - \sqrt{\frac{Q}{4\pi k}} \arctg \frac{R}{\sqrt{\frac{Q}{4\pi k}}} \right). \quad (71, V)$$

Отсюда определяется радиус фронта инъеции для данного момента времени  $T$  при тех же условиях для  $Q$  и  $H_0$

$$R = \frac{kT}{m} + \sqrt{r_0 H_0} \arctg \frac{R}{\sqrt{r_0 H_0}}. \quad (72, V)$$

Так как радиальное направление скорости из источника, деформированного действием силы тяжести, быстро теряется и поток на небольшом удалении от него принимает общее вертикальное направление, то уравнения (71 и 72, V) с достаточной степенью точности определяют картину движения по времени всего комбинированного потока.



При нагнетании твердеющих жидкостей в грунт через скважину (цементных и глинистых суспензий, расплавленных битумов) приходится иметь дело с переменным значением коэффициента фильтрации  $k$ , так как изменяется вязкость этих жидкостей по длине потока. Также может изменяться и проницаемость пласта по длине потока за счет изменения гранулометрического состава грунтов или изменения размеров трещин горных пород. Во всех этих случаях коэффициент фильтрации зависит от длины потока  $s$ . Он может изменяться или непрерывно по длине потока, или же зонально с разрывом функции непрерывности. Но в том и другом случае потенциальный характер общего течения и фильтрационного потока не нарушится, так как движение по-прежнему выражается линейным законом фильтрации, удовлетворяющим уравнению Лапласа.

Решение полей течения с переменными значениями коэффициента фильтрации опирается на теорию потенциала в слоистой среде. Для простых полей течений могут быть использованы элементарные функции, получающиеся из приложений уравнения Лапласа. Вследствие этого подход к решению полей течения с переменными значениями коэффициента  $k$  различен.

В тех случаях, когда в пределах данной области коэффициент фильтрации  $k$  изменяется непрерывно по длине потока  $s$ , для решений могут быть использованы ранее установленные зависимости для однородной среды, но с внесением в них соответствующих функций  $k(s)$ .

При зональном изменении коэффициента  $k$  для каждой зоны должны выполняться независимые решения уравнения Лапласа. Но на контурах, разделяющих зоны, решения должны быть согласованы. Согласованность этих решений предполагает соблюдение двух условий:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= p_2; \\ k_1 \frac{\partial p_1}{\partial n} &= k_2 \frac{\partial p_2}{\partial n}. \end{aligned} \right\} \quad (1.VI)$$

Первое условие выражает постоянство давления (потенциала) на границе раздела двух зон, так как давление в жидкости при переходе через границу изменяется непрерывно. Сама по себе граница раздела не может создать никакого дополнительного напряжения. Второе условие формулирует известное положение, что нормаль скорости на поверхности разрыва непрерывности должна быть непрерывной. Это означает, что каждая частица жидкости, попадающая из одной зоны в другую, должна попасть в данную зону именно в той точке, в которой она поступает на раздел между зонами. Этим обеспечивается преемственность течения потока.

Применение уравнений (1.VI) к зональной системе течения с переменными коэффициентами фильтрации  $k$  дает возможность определить неизвестное давление на границах раздела зон и вычислять давления в любых точках поля, необходимые для построения линий равных напоров или семейства изобар. Для всех последующих решений важно знать, как изменяется коэффициент  $k$ : изменяется ли он только в одном направлении и зависит от одной координаты, или же коэффициент  $k$  зависит от всех координат  $k(x, y, z)$ .

Проницаемая среда, сложенная несвязными зернистыми группами (пески, галька, щебень), представляется изотропной (однородной). В такой среде возможно учитывать только линейные изменения коэффициентов фильтрации  $k$ . Трещиноватые горные породы в общем виде являются анизотропными. Учет трещиноватости их можно делать при помощи тензора проницаемости. Но ввиду сложности этих операций обычно ограничиваются определением лишь главных тензоров направленной проницаемости. Анализ большого количества фактических материалов по трещиноватости горных пород позволяет сделать вывод, что даже и в анизотропной среде системы трещин горных пород, независимо от возраста и состава их, образуют относительно правильные геометрические сетки с определенной пространственной ориентировкой. Вследствие этого главные тензоры трещиноватости устанавливаются сравнительно легко, а коэффициенты проницаемости трещиноватых горных пород осредняются.

В книге ограничимся рассмотрением линейных изменений коэффициентов фильтрации (проницаемости).

### 1. Пространственный источник в поле с двумя сферическими зонами коэффициентов фильтрации

Считаем, что шарообразная зона I окружает забой и ее внешняя граница имеет шаровую поверхность радиуса  $R_1$ . Шарообразная зона II простирается до конца движения жидкости и ограничена шаровыми поверхностями радиусов  $R_1$  и  $R_2$ . Также принята шаровыми поверхностями радиусов  $R_1$  и  $R_2$ . Также считаем, что геометрические напоры исключены и давление от источника выражает пьезометрическое давление в жидкости.



Допустим вначале, что коэффициент фильтрации  $k$  меняется скачкообразно. Среды изображено на рис. 78. Для решения такой задачи может послужить уравнение (12.V). Благодаря пространственной симметрии поля источника относительно центра, давление в любой точке потока, определяемое этим уравнением, является функцией только расстояния  $r$  между этой точкой и центром. Поэтому из уравнения (12.V) непосредственно получается градиент давления

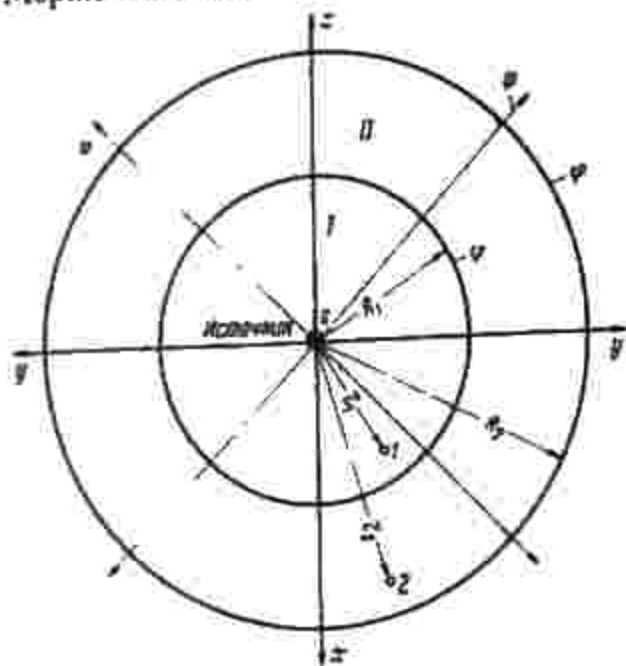


Рис. 78. Меридиональное сечение потока источника в поле с двумя зонами (I и II) коэффициента  $k$

Интегрируя в пределах от  $(\frac{p}{\gamma})_0$  до  $(\frac{p}{\gamma})_{R_1}$  и от  $r_0$  до  $R_1$ , получим перепад давления на участке первой зоны. Интегрируя в пределах от  $(\frac{p}{\gamma})_{R_1}$  до  $(\frac{p}{\gamma})_{R_2}$  и от  $R_1$  до  $R_2$ , получим перепад давления на участке второй зоны

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - \left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_1} = \frac{Q}{4\pi k_1} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{R_1}\right),$$

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_1} - \left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_2} = \frac{Q}{4\pi k_2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Сумма этих давлений определяет полную величину забойного давления для нагнетания в грунт заданного расхода  $Q$  при двух значениях коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$ .

При  $(\frac{p}{\gamma})_{R_2} = 0$  имеем

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{R_1 - r_0}{k_1 r_0 R_1} + \frac{R_2 - R_1}{k_2 R_1 R_2}\right). \quad (3.VI)$$

При  $k_1 = k_2$  эта формула, как и следовало ожидать, вырождается в формулу давления (13.V), если принять во внимание, что величина  $r_0$  слишком мала по сравнению с  $R_2$ .

Обозначив  $(\frac{p}{\gamma})_0 = H_0$ , получим выражение для расхода забоя

$$Q = \frac{4\pi H_0}{\frac{R_1 - r_0}{k_1 r_0 R_1} + \frac{R_2 - R_1}{k_2 R_1 R_2}}. \quad (4.VI)$$

Введем эквивалентную величину коэффициента фильтрации  $k_0^*$  для того, чтобы расход скважины можно было определить по формуле однородного поля

$$Q = 4\pi k_0^* r_0 H_0.$$

Приравняв правые части двух последних равенств, находим эквивалентное значение  $k_0^*$

$$k_0^* = \frac{R_1 R_2}{\frac{R_2}{k_1} (R_1 - r_0) + \frac{r_0}{k_2} (R_2 - R_1)}. \quad (5.VI)$$

В тех случаях, когда значения  $R_1$  и  $R_2$  достаточно больше сравнительно с радиусом забоя  $r_0$ , последним можно пренебречь и получить более простое выражение

$$k_0^* = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \left(\frac{r_0}{R_1} - \frac{r_0}{R_2}\right)}. \quad (6.VI)$$

Формула (6.VI) легко обобщается на случай  $n$  сферических зон вокруг забоя с различными значениями коэффициентов  $k_1, k_2, \dots, k_n$ . При этом суммы, стоящие в знаменателе формулы, будут состоять не из двух, а из  $n$  соответствующих слагаемых.

Рассмотренные зависимости интересны в том отношении, что они позволяют характеризовать призабойную зону проницаемой среды, если она имеет коэффициент фильтрации  $k$ , отличный от коэффициентов остальной части среды. В реальных условиях нагнетания твердеющих жидкостей в грунт через скважину в призабойной зоне всегда будет иметь место более высокое значение коэффициента  $k$ . Различия в зонах могут быть вызваны и механическим составом грунта.

Чтобы учесть влияние на производительность нагнетательной скважины различия коэффициентов среды  $k$  призабойной зоны и остальной части среды, надо сравнить расход скважины в условиях однородного значения коэффициента  $k$  с расходом скважины в условиях неоднородного.

В условиях неоднородной среды расход скважины будем определять по формуле (4.VI). Обозначим расход скважины через  $Q_1$  и  $Q_2$  при коэффициентах фильтрации  $k_1$  и  $k_2$ .

Расходы  $Q_1$  и  $Q_2$  в этих условиях определяются формулами

$$Q_1 = 4\pi k_1 r_0 H_0,$$

$$Q_2 = 4\pi k_2 r_0 H_0.$$



Пользуясь этими формулами и формулой (4.VI), составим соотношение

$$\frac{Q}{Q_2} = \frac{1}{r_0 \left( \frac{k_2}{k_1} \frac{R-r_0}{r_0 R_1} + \frac{R_2-R_1}{R_1 R_2} \right)} \quad (7.VI)$$

$$\frac{Q}{Q_1} = \frac{1}{r_0 \left( \frac{R_1-r_0}{r_0 R_1} + \frac{k_1}{k_2} \frac{R_2-R_1}{R_1 R_2} \right)} \quad (8.VI)$$

Формула (7.VI) отвечает на вопрос, как влияет изменение коэффициента фильтрации призабойной зоны с величины  $k_2$  (общее значение для всего массива) до величины  $k_1$  на расход скважины. Формула (8.VI) позволяет выяснить другой вопрос: как велика будет ошибка в расходе скважины, подсчитанном по коэффициенту  $k_1$  призабойной зоны, если во всей остальной части пласта коэффициент фильтрации отличен от такого в призабойной зоне. В табл. 27 подсчитаны отношения  $\frac{Q}{Q_2}$  по формуле (7.VI)

при  $R_2=10$  м,  $r_0=0,05$  м для разных значений  $R_1$  и  $\frac{k_1}{k_2}$ .

Таблица 27

$R_1, \text{ м}$ \diagdown $\frac{k_1}{k_2}$	0,01	0,1	0,5	2	10	20
0,25	0,0124	0,122	0,556	1,68	3,63	4,25
0,50	0,011	0,110	0,525	1,83	5,35	7,10
1,00	0,0105	0,104	0,512	1,91	7,10	10,80
5,00	0,0101	0,101	0,500	1,99	9,55	18,30

Из таблицы видно, что уменьшение коэффициента фильтрации в призабойной зоне вызывает большое снижение производительности забоя. Например, уменьшение коэффициента  $k_1$  в 10 раз ( $k_1=0,1 k_2$ ) в радиусе  $R_1=0,5$  м уменьшает расход скважины в девять раз — на 89%. При малых значениях отношения  $\frac{k_1}{k_2}$  увеличение радиуса зоны  $R_1$  слабо влияет на производительность скважины.

Увеличение коэффициента фильтрации в призабойной зоне чрезвычайно резко повышает величину расхода скважины. Десятикратное увеличение коэффициента  $k_1$  ( $k_1=10 k_2$ ) в кольцевой зоне радиуса 0,5 м увеличивает расход скважины в 5,38 раза.

При этом надо отметить, что при высоких значениях коэффициента фильтрации призабойной зоны  $k_1$  ( $\frac{k_1}{k_2} > 2$ ) расход скважины непрерывно растет с увеличением радиуса этой зоны.

Таким образом, улучшение физических и механических условий призабойной зоны резко увеличивает производительность нагнетательной скважины. И чем больше разница в значениях коэффициента  $k$  призабойной зоны и остальной части массива, тем на большей длине этой зоны будет иметь место прогрессирующее увеличение расхода. В табл. 28 подсчитаны отношения  $\frac{Q}{Q_1}$  по формуле (8.VI) при тех же граничных значениях поля ( $R_2=10$  м и  $r_0=0,05$  м) для разных значений  $R_1$  и  $\frac{k_1}{k_2}$ .

Таблица 28

$R_1, \text{ м}$ \diagdown $\frac{k_1}{k_2}$	0,01	0,1	0,5	2	10	20
0,25	1,25	1,22	1,11	0,830	0,363	0,212
0,50	1,11	1,10	1,05	0,916	0,538	0,356
1,00	1,06	1,05	1,02	0,955	0,710	0,538
5,00	1,01	1,01	0,99	0,985	0,958	0,911

Данные таблицы показывают, во сколько раз истинный расход скважины  $Q$  отличается от расхода  $Q_1$ , вычисленного по коэффициенту  $k_1$ , одинаковому для всего массива. Из данных таблицы видно, что ошибка в подсчете расхода по коэффициенту  $k_1$  меньше при малых значениях  $k_1$ , когда  $k_2 > k_1$ . И наоборот, неточность в определении  $Q$  становится очень большой при высоких значениях  $k_1$ , т. е. при  $k_2 < k_1$ . Так, например, при  $R_1=0,5$  м и при  $k_1=0,1 k_2$  расход  $Q$  составляет 110% от дебита  $Q_1$ . Ошибка в подсчете 10%. При том же значении радиуса  $R_1=0,5$  м, но при  $k_1=10 k_2$  истинный расход скважины составляет 53,8% от расхода  $Q_1$ . Ошибка в подсчете 46,2%. Таким образом, расчеты нагнетания по формуле однородного поля оказываются более точными при  $k_2 > k_1$ , чем при  $k_2 < k_1$ .

Поле симметрично относительно вертикальной оси вращения. Для любой меридиональной плоскости линии тока и эквипотенциали по-прежнему представляют радиальные прямые и концентрические окружности. Для их построения остаются в силе формулы (23 и 26.II). Пьезометрическое давление для точек первой и второй зон получим из уравнения (2.VI) Подставив в уравне-



ние (2,VI) значение расхода  $Q$ , выраженное через величину перепада давления  $H_0 = \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R$ , найдем

$$d\left(\frac{p}{\gamma}\right) = -r_0 \left[ \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - \left(\frac{p}{\gamma}\right)_R \right] \frac{dr}{r^2}. \quad (9,VI)$$

Принтегрировав уравнение в соответствующих пределах, получим значения давлений в любых точках первой и второй зон

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{p}{\gamma}\right)_1 &= \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - r_0 \left[ \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - \left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_1} \right] \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right); \\ \left(\frac{p}{\gamma}\right)_2 &= \left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_1} - R_1 \left[ \left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_1} - \left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_2} \right] \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{r_2} \right). \end{aligned} \right\} (10,VI)$$

Здесь  $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_1}$  — неизвестное давление на границе раздела зон.

Для определения этого давления воспользуемся уравнением (1,VI), выражающим непрерывность нормали скорости. А так как нормалью скорости  $k$  поверхности раздела зон будет служить полная радиальная скорость, то можно написать

$$k_1 \left[ \frac{d\left(\frac{p}{\gamma}\right)_1}{dr} \right]_{r=R_1} = k_2 \left[ \frac{d\left(\frac{p}{\gamma}\right)_2}{dr} \right]_{r=R_1}. \quad (11,VI)$$

Дифференцируя уравнения (10,VI) по  $r$  и подставляя значения производных при  $r=R_1$  в формулу (11,VI), получим уравнение для определения неизвестного давления  $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_1}$

$$\begin{aligned} d\left(\frac{p}{\gamma}\right)_1 &= -r_0 \left[ \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - \left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_1} \right] \frac{dr}{r_1^2}; \\ d\left(\frac{p}{\gamma}\right)_2 &= -R_1 \left[ \left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_1} - \left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_2} \right] \frac{dr}{r_2^2}. \end{aligned}$$

Найдем

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_1} = \frac{k_1 r_0 \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 + k_2 R_1 \left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_2}}{k_1 r_0 + k_2 R_1}. \quad (12,VI)$$

Подставляя найденное значение  $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_1}$  в формулы (10,VI), будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{p}{\gamma}\right)_1 &= \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - k_2 r_0 R_1 \left[ \frac{\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - \left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_2}}{k_1 r_0 + k_2 R_1} \right] \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right); \\ \left(\frac{p}{\gamma}\right)_2 &= \left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_1} - k_1 r_0 R_1 \left[ \frac{\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - \left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_2}}{k_1 r_0 + k_2 R_1} \right] \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{r_2} \right). \end{aligned} \right\} (13,VI)$$

Эти уравнения позволяют определить давление в любой точке каждой из двух зон. При  $r_1=r_0$  приходим к давлению на забое. При  $r_1=R_1$  получаем давление на границе раздела. При  $r_2=R_2$  будем иметь давление в конце растекания жидкости, равное  $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_2}$ .

И, наконец, при равенстве коэффициентов  $k_1=k_2$  уравнения переходят в формулу давления для однородной среды. По уравнениям (13,VI) можно построить все семейство изобар, имеющих форму концентрических окружностей.

## 2. Пространственный источник в поле с непрерывным изменением коэффициента фильтрации

В данном параграфе предполагается, что коэффициент фильтрации  $k$  зависит только от радиуса  $k=k(r)$ . При этих условиях поле остается симметричным относительно вертикальной оси вращения и для его исследования можно применить уравнение (2,VI)

$$d\left(\frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{Q}{4\pi k r^2} dr.$$

Подставляя в это уравнение функцию  $k$ , интегрируя его в пределах от  $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0$  до  $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_R$  и от  $r_0$  до  $R$  и принимая остаточное давление  $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_R$  равным нулю, получим давление на забое

$$H_0 = \frac{Q}{4\pi} \int_{r_0}^R \frac{dr}{k(r)r^2}. \quad (14,VI)$$

Расход скважины

$$Q = \frac{4\pi H_0}{\int_{r_0}^R \frac{dr}{k(r)r^2}}. \quad (15,VI)$$

Аналогично предыдущему, приравняв правые части уравнения (15,VI) и уравнения расхода в однородном поле ( $Q = 4\pi k'_0 r_0 H_0$ ), найдем эквивалентное значение коэффициента  $k'_0$

$$k'_0 = \frac{1}{r_0 \int_{r_0}^R \frac{dr}{k(r)r^2}}. \quad (16,VI)$$

Относительно линий тока и эквипотенциалей справедливы замечания п. 1.



Пьезометрическое давление в любой точке поля определяется интегрированием уравнения (2, VI) в пределах от  $(\frac{p}{\gamma})_0$  до  $(\frac{p}{\gamma})$  и от  $r_0$  до  $r$

$$\frac{p}{\gamma} = \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - \frac{Q}{4\pi} \int_{r_0}^r \frac{dr}{k(r)r^2}$$

Подставляя вместо  $(\frac{p}{\gamma})_0$  выражение из уравнения (2, VI), получим

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{Q}{4\pi} \left[ \int_{r_0}^R \frac{dr}{k(r)r^2} - \int_{r_0}^r \frac{dr}{k(r)r^2} \right] \quad (17, VI)$$

По этому уравнению можно построить все семейство концентрических изобар. Таким образом, для решения схемы необходимо произвести единичное интегрирование. Но для этого необходимо знать функцию  $k(r)$ .

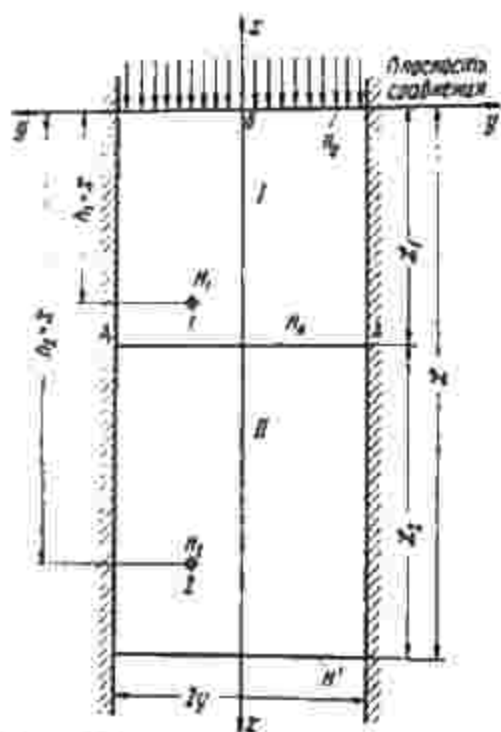


Рис. 79 Вертикальный осевой поток с двумя зонами (I и II) коэффициента  $k$

### 3. Осевой одномерный поток в поле с переменными значениями коэффициента

В тех случаях, когда пограничные условия обеспечивают одномерность потока, может иметь место схема осевого одномерного потока с переменными значениями коэффициента фильтрации  $k$ . Для первых представлений допустим только две зоны коэффициента  $k$  (рис. 79). Длины зон I и II обозначим через  $L_1$  и  $L_2$ , коэффициенты фильтрации  $k_1$  и  $k_2$ . Простираемое диаметром  $2y$ , постоянно. Потенциал скорости равномерного вертикального течения (27, II)

$$\varphi = -Ux,$$

где  $U$  — скорость равномерного течения.  
Напорная функция

$$H = -\frac{Ux}{k}$$

Слагая  $U$  и  $k$  постоянными, продифференцируем уравнение по  $x$

$$dH = -\frac{U}{k} dx,$$

откуда

$$U = -k \frac{dH}{dx}$$

Переходим к двухзональному полю. Вследствие одномерности и неразрывности движения нормаль скорости к поверхности раздела зон в уравнении (1, VI) может быть заменена полной вертикальной скоростью  $U$ . При этом последняя будет одинакова в зонах I и II. Вследствие этого можно написать

$$U = -k_1 \frac{dH_1}{dx} = -k_2 \frac{dH_2}{dx} \quad (18, VI)$$

Имея в виду равномерность фильтрации на участках, можно получить гидравлическое выражение напоров для точек зон I и II

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= H_0 - \frac{H_0 - H_A}{L_1} x; \\ H_2 &= H_A - \frac{H_A - H'}{L_2} (x - L_1); \end{aligned} \right\} \quad (19, VI)$$

где  $H_0$  — пьезометрический напор потока в начале движения;

$H'$  — то же, в конце движения;

$H_A$  — пьезометрический напор на границе раздела A—A.

Продифференцировав по  $x$  величины напоров  $H_1$  и  $H_2$ , определяемые формулами (19, VI), и пользуясь соотношениями (18, VI), найдем

$$H_A = \frac{k_1 H_0 L_2 + k_2 H' L_1}{k_1 L_2 + k_2 L_1}$$

Подставив это выражение в формулы (19, VI), определяем напоры  $H_1$  и  $H_2$  в любой точке каждой из двух зон

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= H_0 - \frac{k_2 (H_0 - H')}{k_1 L_2 + k_2 L_1} x \\ H_2 &= H' + \frac{k_1 (H_0 - H')}{k_1 L_2 + k_2 L_1} (L - x); \end{aligned} \right\} \quad (20, VI)$$

где  $L$  — полная длина потока.

Уравнение (18, VI) устанавливает, что напорные градиенты в зонах I и II обратно пропорциональны величинам коэффициентов фильтрации. При  $k_1 < k_2$  в зоне I градиенты будут больше, линии равных напоров расположатся теснее и разница величины напоров на участке будет больше, чем в зоне II. При  $k_1 > k_2$  получилась бы обратная картина.



Имея в виду уравнение (18, VI) и любую из формул (20, VI) определим скорость фильтрации и расход фильтрационного потока

$$U = \frac{k_1 k_2 (H_0 - H')}{k_1 L_2 + k_2 L_1} = \frac{H_0 - H'}{\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2}}; \quad (21, VI)$$

$$Q = \frac{H_0 - H'}{\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2}} \pi y^2. \quad (22, VI)$$

Введем в рассмотрение эквивалентную величину коэффициента фильтрации  $k'_0$ , при помощи которой можно определить истинные расходы и напоры рассматриваемого потока в предположении однородного поля

$$Q = U' F = \frac{H_0 - H'}{L} k'_0 \pi y^2. \quad (23, VI)$$

Приравняв правые части уравнения (22 и 23, VI), получим

$$k'_0 = \frac{L}{\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2}}. \quad (24, VI)$$

Если по длине потока имеется не две, а несколько зон с разными коэффициентами фильтрации  $k_i$  и различной длины, то формула (24, VI) переходит в обобщенную

$$k'_0 = \frac{\sum_{i=1}^n L_i}{\sum_{i=1}^n \frac{L_i}{k_i}}, \quad (25, VI)$$

где  $L_i$  — длина отдельных зон потока;

$k_i$  — соответствующие им коэффициенты фильтрации.

Обратимся к анализу уравнений (20, VI). Принимая по-прежнему, что отрицательное значение напорной функции  $H = -\frac{Ux}{k}$  обусловлено отрицательной величиной геометрического напора, плоскость сравнения возьмем в начале движения потока (в начале координат). Из уравнений (20, VI) исключим геометрические напоры при помощи соотношений (рис. 79)

$$H_1 = \frac{p_1}{\gamma} - h_1 = \frac{p_1}{\gamma} - x;$$

$$H_2 = \frac{p_2}{\gamma} - h_2 = \frac{p_2}{\gamma} - x;$$

$$H_0 = \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0; \quad H' = \left(\frac{p}{\gamma}\right)' - h' = \left(\frac{p}{\gamma}\right)' - L.$$

Пьезометрическое давление в точках зон I и II равно

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_1}{\gamma} &= \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - x \left( \frac{k_2 \left[ \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - \left(\frac{p}{\gamma}\right)' + L \right] - 1}{k_1 L_2 + k_2 L_1} \right); \\ \frac{p_2}{\gamma} &= \left(\frac{p}{\gamma}\right)' + (L - x) \left( \frac{k_1 \left[ \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - \left(\frac{p}{\gamma}\right)' + L \right] - 1}{k_1 L_2 + k_2 L_1} \right), \end{aligned} \right\} (26, VI)$$

где  $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0$  — давление в начале движения;

$\left(\frac{p}{\gamma}\right)'$  — остаточное давление в конце движения потока.

Нетрудно видеть, что при равенстве коэффициентов  $k_1$  и  $k_2$  уравнения (26, VI) вырождаются в однозональные формулы напорной фильтрации, происходящей при пьезометрическом уклоне, равном

$$\frac{\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - \left(\frac{p}{\gamma}\right)'}{L}.$$

При этом пьезометрическое давление в жидкости

$$\frac{p}{\gamma} = \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - x \frac{\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - \left(\frac{p}{\gamma}\right)'}{L};$$

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right) = \left(\frac{p}{\gamma}\right)' + (L - x) \frac{\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - \left(\frac{p}{\gamma}\right)'}{L}. \quad (27)$$

Безразлично, которой из формул пользоваться.

При одинаковой величине коэффициентов фильтрации  $k_1$  и  $k_2$  и нулевых значениях давлений  $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0$  и  $\left(\frac{p}{\gamma}\right)'$  приходим к нулевым значениям пьезометрических давлений в любых точках потока

$$\frac{p_1}{\gamma} = \frac{p_2}{\gamma} = 0.$$

Этот случай отвечает безнапорной фильтрации в однородной среде, происходящей под влиянием силы тяжести. Градиенты давления здесь равны нулю, а гидравлический уклон равен единице. Вертикальная скорость фильтрации  $U$  равна коэффициенту фильтрации  $k$ .

$$U = \frac{L}{\frac{L_1}{k} + \frac{L_2}{k}} = \frac{kL}{L_1 + L_2} = k.$$



Это — случай фиктивного осевого вертикального потока в однородной среде, замещающего действие силы тяжести.

Допустим теперь, что оба значения давлений  $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0$  и  $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_L$  равны нулю, но коэффициенты  $k_1$  и  $k_2$  имеют разную величину. В этом случае путем простых преобразований уравнения (26, VI) приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_1}{\gamma} &= x \frac{L_2(k_1 - k_2)}{k_1L_2 + k_2L_1}; \\ \frac{p_2}{\gamma} &= (L - x) \frac{L_1(k_1 - k_2)}{k_1L_2 + k_2L_1}. \end{aligned} \right\} \quad (28, VI)$$

Последние формулируют важный вывод, относящийся к случаю безнапорной фильтрации в замкнутой среде с переменными коэффициентами фильтрации. При  $k_1 > k_2$  давления во всех точках потока имеют положительную величину, больше нуля. Движение фильтрационного потока происходит с восстановлением пьезометрического давления. В пределах зоны I давление в жидкости возрастает по длине потока и наибольшей величины достигает на границе раздела зон. В пределах зоны II давление уменьшается и в конце потока становится снова равным нулю. В пределах зоны I движение жидкости происходит с гидравлическими уклонами меньше единицы. В пределах зоны II — с гидравлическими уклонами больше единицы.

Рассмотрим еще поле осевого одномерного потока с непрерывным изменением коэффициента фильтрации  $k$  вдоль оси  $x$

$$k = f(x).$$

Напорная функция та же

$$H = -\frac{Ux}{k(x)},$$

но  $k$  теперь функция  $x$ .

Полагая  $U$  постоянным, дифференцируем уравнение по  $x$

$$dH = -\frac{U}{k(x)} dx,$$

откуда

$$U = -k(x) \frac{dH}{dx}. \quad (29, VI)$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$U = \frac{H_0 - H'}{\int_0^L \frac{dx}{k(x)}}. \quad (30, VI)$$

Для безнапорной фильтрации необходимо принять  $H_0 = 0$  и  $H' = -L$

$$U = \frac{L}{\int_0^L \frac{dx}{k(x)}} = k'_0. \quad (31, VI)$$

Расход фильтрационного потока можно выразить так:

$$Q = FU = -Fk(x) \frac{dH}{dx}.$$

Интегрируя, найдем

$$H_0 - H' = \frac{Q}{F} \int_0^L \frac{dx}{k(x)}. \quad (32, VI)$$

Зная функциональную зависимость коэффициента  $k$  от координаты  $x$  и выполнив интегрирование, можно определить расход фильтрации. Зная расход и интегрируя уравнение (32, VI) в других пределах, найдем величину пьезометрического напора для любой точки поля

$$H = H_0 - \frac{Q}{F} \int_0^x \frac{dx}{k(x)}. \quad (33, VI)$$

Переход от напоров к давлению производится при помощи соотношений, отмеченных ранее. Так как скорость потока  $U$  постоянна, то функция тока рассмотренного осевого течения по-прежнему может быть выражена уравнением

$$\psi = \pi U y^2.$$

Потенциал скорости

$$\varphi = -Ux.$$

Линии тока — вертикальные прямые, эквипотенциалы — горизонтальные, в плане — окружности.

Формулы (25 и 31, VI) определяют среднее пластовое значение коэффициента фильтрации  $k'_0$ : первая — со скачкообразно изменяющимися значениями  $k$ , вторая — с непрерывно изменяющимися  $k$  по длине потока. Осредненные значения коэффициента фильтрации  $k'_0$ , устанавливаемые этими формулами, могут быть использованы при расчете полей с переменными коэффициентами.

#### 4. Пространственный источник в поле с плоскими границами раздела зон

В данном разделе рассматривается течение пространственного источника в поле с плоскими границами раздела коэффициентов фильтрации  $k$ . Случай — наиболее часто встречающийся в прак-



тике. Решение схем, предпринятое в предыдущих разделах, было простым вследствие радиальной симметрии сферических зон раздела. Вопрос значительно усложняется при наличии плоских границ раздела неоднородной среды. Для каждой зоны надо выполнять независимые решения уравнения Лапласа. На границе раздела зон эти решения должны быть согласованы. Согласованность достигается применением условий, выраженных уравнениями (I, VI).

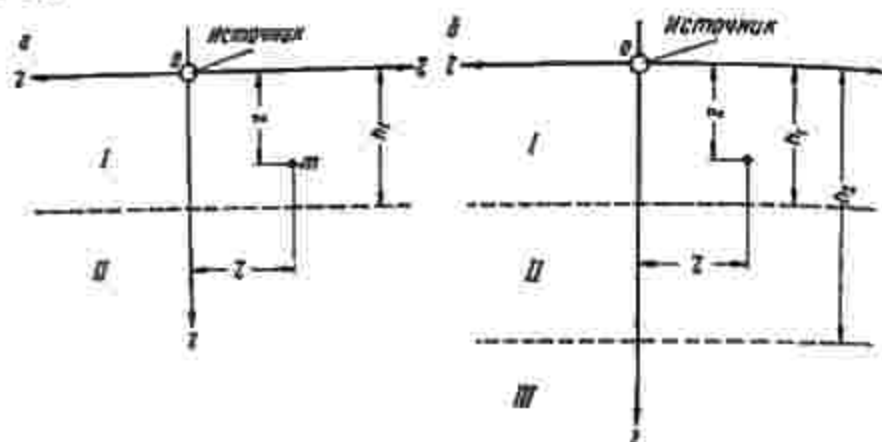


Рис. 80. Пространственный источник в поле с плоскими границами раздела зон:  
а — перспективная схема, б — трехзональная схема

**Двухзональная схема.** Допустим, что имеем две зоны параметра  $k$ , разделенные плоской границей раздела (рис. 80). Решение такой системы достигается интегрированием уравнения Лапласа с применением цилиндрических функций Бесселя. Источник помещен в зоне I. Начало цилиндрической системы координат находится в центре источника. Ось  $z$  направлена вниз по вертикали к поверхности раздела среды. Обозначим напорную функцию источника через  $H'$ . Уравнение Лапласа в цилиндрической системе координат при аксиальной симметрии

$$\frac{\partial^2 H'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H'}{\partial r} + \frac{\partial^2 H'}{\partial z^2} = 0. \quad (34, VI)$$

В задачу входит получить функции  $H'$  для каждой зоны пронизываемой среды. Искомые функции должны удовлетворять следующим условиям:

во всех точках пространства функции конечны и непрерывны за исключением бесконечно удаленных точек, в которых эти функции равны нулю, и начала координат, где находится центр источника. Здесь функции  $H'$  обращаются в бесконечность;

на границах раздела зон должны выполняться условия согласованности, выраженные уравнениями (I, VI):

$$[H'_1]_{z=h_1} = [H'_2]_{z=h_1}; \quad (35, VI)$$

$$\left[ k_1 \frac{\partial H'_1}{\partial z} \right]_{z=h_1} = \left[ k_2 \frac{\partial H'_2}{\partial z} \right]_{z=h_1}. \quad (36, VI)$$

При помощи метода Фурье, изображающего функцию  $H'$  в виде произведения двух функций, зависящих каждая в отдельности от координаты  $r$  или  $z$ , дифференциальное уравнение (34, VI) приводится к интегральному виду

$$H' = \int_0^{\infty} A(m) I_0(mr) e^{mz} dm + \int_0^{\infty} B(m) I_0(mr) e^{-mz} dm, \quad (37, VI)$$

где  $A(m)$  и  $B(m)$  — некоторые функции переменной интегрирования, различные для разных зон;

$I_0(mr)$  — функция Бесселя первого рода нулевого порядка от аргумента  $mr$ .

Функция  $H'_1$  для зоны I должны обращаться в бесконечность в начале координат при

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r^2 + z^2}.$$

Второй член уравнения (37, VI)

$$\int_0^{\infty} I_0(mr) e^{-mz} dm$$

представляет известный из теории функций интеграл Вебера — Лишица и он равен выражению

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r^2 - z^2}.$$

Кроме того, для зоны I значение  $z$  не может принимать бесконечно больших положительных величин. Поэтому для этой зоны функция  $H'_1$  получается равной

$$H'_1 = q \int_0^{\infty} I_0(mr) e^{-mz} dm + \int_0^{\infty} A_1(m) I_0(mr) e^{mz} dm, \quad (38, VI)$$

где  $q$  — постоянная, подлежащая определению из условий задачи.

Для зоны II член, содержащий  $e^{mz}$ , при  $z \rightarrow \infty$  беспрестанно растет, в то время как функция  $H'_2$  стремится к нулю. Поэтому для этой зоны должны иметь

$$H'_2 = \int_0^{\infty} B_2(m) I_0(mr) e^{-mz} dm. \quad (39, VI)$$

Для окончательного решения функций надо найти выражения величин  $A(m)$  и  $B(m)$ . Они определяются граничными условиями. По уравнению (35, VI) имеем

$$q \int_0^{\infty} I_0(mr) e^{-mh_1} dm + \int_0^{\infty} A_1(m) I_0(mr) e^{mh_1} dm = \int_0^{\infty} B_2(m) I_0(mr) e^{-mh_1} dm.$$



Это уравнение можно представить в виде

$$\int_0^{\infty} [q e^{-mh_1} + A_1(m) e^{mh_1} - B_2(m) e^{-mh_1}] I_0(mr) dm = 0.$$

Так как полученное равенство должно выполняться при всех значениях  $r$ , то отсюда имеем

$$q e^{-mh_1} + A_1(m) e^{mh_1} - B_2(m) e^{-mh_1} = 0. \quad (40, VI)$$

Это уравнение служит для определения функций  $A(m)$  и  $B(m)$ . Второе уравнение получим из второго условия согласованности (36, VI).

Дифференцируя по  $z$  выражения (38 и 39, VI), находим

$$\frac{\partial H_1'}{\partial z} = -q \int_0^{\infty} m I_0(mr) e^{-mz} dm + \int_0^{\infty} mA_1(m) I_0(mr) e^{mz} dm;$$

$$\frac{\partial H_2'}{\partial z} = - \int_0^{\infty} m B_2(m) I_0(mr) e^{-mz} dm.$$

Второе условие согласованности дает

$$\begin{aligned} -k_1 q \int_0^{\infty} m I_0(mr) e^{-mh_1} dm + k_1 \int_0^{\infty} mA_1(m) I_0(mr) e^{mh_1} dm = \\ = -k_2 \int_0^{\infty} m B_2(m) I_0(mr) e^{-mh_1} dm. \end{aligned}$$

Это уравнение переписывается в виде

$$\int_0^{\infty} [-k_1 q e^{-mh_1} + k_1 A_1(m) e^{mh_1} + k_2 B_2(m) e^{-mh_1}] m I_0(mr) dm = 0.$$

Последнее равенство также должно удовлетворяться при всех значениях  $r$ . Поэтому получим

$$-k_1 q e^{-mh_1} + k_1 A_1(m) e^{mh_1} + k_2 B_2(m) e^{-mh_1} = 0. \quad (41, VI)$$

Решая уравнения (40 и 41, VI) относительно  $A(m)$  и  $B(m)$  и обозначая отношение

$$\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} = M,$$

$$A_1(m) = qM e^{-2mh_1}, \quad (42, VI)$$

находим

$$B_2(m) = q(1 + M).$$

Подставляя значения  $A_1(m)$  и  $B_2(m)$  в соответствующие функции  $H'$ , находим их окончательные выражения

$$\left. \begin{aligned} H_1' &= q \int_0^{\infty} I_0(mr) e^{-mz} dm + qM \int_0^{\infty} I_0(mr) e^{-m(2h_1-z)} dm; \\ H_2' &= q(1 + M) \int_0^{\infty} I_0(mr) e^{-mz} dm. \end{aligned} \right\} (43, VI)$$

К каждому из интегралов можно применить формулу Вебера — Липшица. Первый интеграл равен

$$\int_0^{\infty} I_0(mr) e^{-mz} dm = \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}};$$

второй

$$\int_0^{\infty} I_0(mr) e^{-m(2h_1-z)} dm = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (2h_1-z)^2}}.$$

Постоянная величина  $q$  определяется из тех соображений, что при весьма малых значениях  $R$  ( $r \rightarrow 0, z \rightarrow 0$ ) напорная функция источника должна дать значения, близкие к значениям невозмущенного источника, т. е.

$$[H_1']_{r=0, z=0} = \frac{Q}{4\pi k_1 R} = \frac{q}{R},$$

откуда

$$q = \frac{Q}{4\pi k_1}.$$

где  $Q$  — расход источника.

С учетом сделанных замечаний получим напорные функции

$$H_1' = \frac{Q}{4\pi k_1} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \frac{M}{\sqrt{r^2 + (2h_1 - z)^2}} \right]; \quad (44, VI)$$

$$H_2' = \frac{Q}{4\pi k_1} \frac{1 + M}{\sqrt{r^2 + z^2}}. \quad (45, VI)$$

В практических случаях нагнетания, когда последнее ограничено заданной глубиной предельного растекания жидкости  $R$ , напорные функции будут представлены разностью напоров в двух точках — в любой точке поля и точке, находящейся на внешнем контуре фильтрации. Ориентируя глубину  $R$  по оси  $z$ , будем иметь

$$H_1' = \frac{Q}{4\pi k_1} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \frac{M}{\sqrt{r^2 + (2h_1 - z)^2}} - \frac{1 + M}{R} \right]; \quad (46, VI)$$

$$H_2' = \frac{(1 + M)Q}{4\pi k_1} \left[ \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{1}{R} \right]. \quad (47, VI)$$



Пользуясь уравнениями (44—47, VI), можно определить напор, а следовательно, и давление, создаваемое источником в любой точке двухзонального поля. Те же уравнения служат и для построения линий равного напора.

Теперь надо найти функции тока источника. Определение последних не вызывает затруднений, если обратить внимание на следующие особенности напорных функций двухзонального поля.

Из уравнений (44—45, VI) видно, что напорные функции источника приведены к безграничной однородной среде, характеризуемой коэффициентом фильтрации зоны I. Уравнение (44, VI) показывает, что напорная функция для зоны I складывается из функции свободного источника и функции источника, помещенного в точке зеркального отражения действительного источника вниз от границы раздела с расходом, равным расходу действительного источника, умноженным на величину M. Уравнение (45, VI) устанавливает, что напорная функция для зоны II равна функции источника с расходом, равным действительному, умноженному на величину (1+M).

Таким же образом будут складываться и сопряженные им функции тока для обеих зон рассматриваемого поля. На этом основании функцию тока для зоны I, в полярной системе координат при обозначениях по рис. 80, можно представить в виде суммы двух функций

$$\psi_1 = \frac{Q}{2}(1 - \cos \theta_1) + \frac{MQ}{2}(1 - \cos \theta_2). \quad (48, VI)$$

Построение линий токов для зоны I по этому уравнению проще всего выполнить графически. Точка любой линии тока определяется пересечением двух лучей: одного из действительного источника под углом  $\theta_1$ , косинус которого задается, и другого из отраженного источника под углом  $\theta_2$ , косинус которого равен

$$\cos \theta_2 = \frac{Q - Q \cos \theta_1 + MQ - 2\psi_1}{MQ}.$$

Функцию  $\psi_1$  можно обозначить через  $\psi_r, Q$  и получить решение в приведенных условиях

$$\cos \theta_2 = \frac{1 - \cos \theta_1 + M - 2\psi_r}{M}. \quad (49, VI)$$

Из этого построения определяются значения приведенной функции для осевой центральной линии тока: выше источника  $\psi_r = 1+M$ , ниже  $\psi_r = 0$ .

Для перехода от приведенных линий тока к действительным числовые значения  $\psi_r$  надо умножить на действительную величину расхода источника Q. Для аналитического решения уравнения (48, VI)  $\cos \theta_2$  надо выразить через координаты точки

$$F + 0,5 \cos \theta_1 = -0,5M \frac{2h_1 - x}{\sqrt{y^2 + (2h_1 - x)^2}},$$

где  $F = \psi_r - 0,5 - 0,5M$ .

Решение этого уравнения относительно радиуса вектора  $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$  приводит к формулам координат точек линий тока

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{2h_1 (B \pm \sqrt{B^2 - AC}) \cos \theta_1}{A}; \\ y &= \frac{2h_1 (B \pm \sqrt{B^2 - AC}) \sin \theta_1}{A}. \end{aligned} \right\} \quad (50, VI)$$

Коэффициенты имеют значения

$$A = (F + 0,5 \cos \theta_1)^2 - 0,25M^2 \cos^2 \theta_1;$$

$$B = \cos \theta_1 [(F + 0,5 \cos \theta_1)^2 - 0,25M^2];$$

$$C = \frac{B}{\cos \theta_1}.$$

Соответственно для зоны II поля функция тока будет

$$\left. \begin{aligned} \psi_2 &= \frac{Q(1+M)}{2}(1 - \cos \theta_1); \\ \psi_r &= \frac{1+M}{2}(1 - \cos \theta_1). \end{aligned} \right\} \quad (51, VI)$$

Линии тока в этой зоне прямые, проходящие через точки пересечения линий тока зоны I с границей раздела. Направление этих линий отвечает радиусам-векторам из начала координат, проведенных под углами

$$\cos \theta_1 = 1 - \frac{2\psi_r}{1+M}.$$

На границе раздела зон изходятся общие точки, принадлежащие одним и тем же линиям тока. Поэтому линии тока зоны II представляют продолжение прямых, соединяющих начало координат с точками пересечения линий тока зоны I границы раздела. На рис. 81 выполнено таким способом построение двухзонального поля течения источника при следующих данных:

$$\frac{Q}{4\pi k_1} = 0,6 \text{ м}^2; \quad M = 0,33 \text{ и } h_1 = 0,6 \text{ м}.$$

Особенностью поля с плоской границей раздела зон является своеобразный характер распределения напоров (давления). Для того чтобы жидкость могла преодолеть зоны с различными коэффициентами фильтрации k, не требуется особенно большого давления на забое. Последнее немного отличается от давления свободного источника. Но решающим является перераспределение давления по длине фильтрационного потока, постепенное восстановление его к границе раздела зон. За восстановлением давления следует фиктивный источник, зеркально отраженный от действительного, с напряжением, определяемым соотношением коэффици-



тупов фильтрации  $M$ . Для возможности движения потока в зоне II с пониженным коэффициентом фильтрации  $k_2$  на границе раздела зон устанавливается пьезометрическое давление, определяемое расходом обоих источников

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{(1+M)Q}{4\pi k_1} \frac{1}{\sqrt{r^2 + h_1^2}}$$

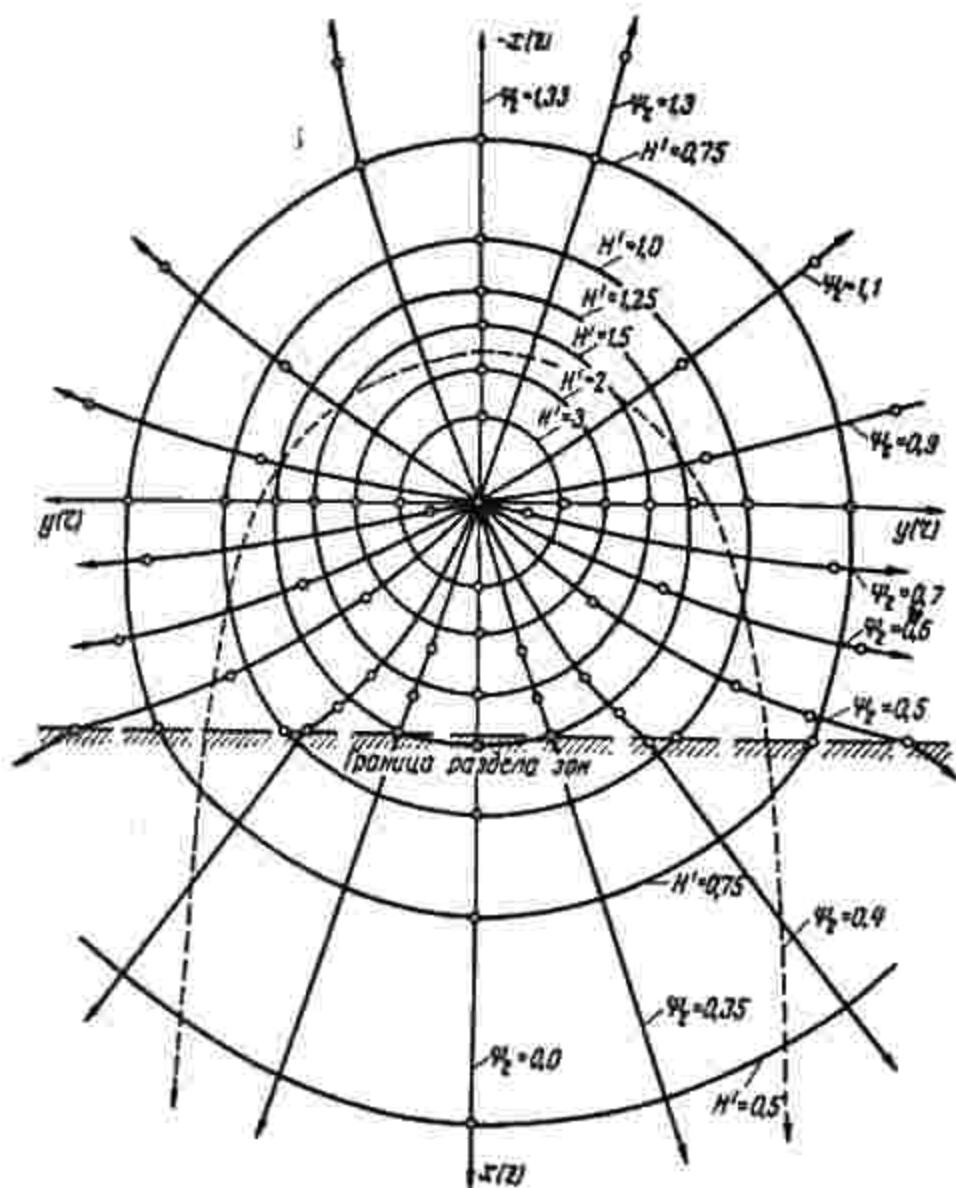


Рис. 51. План течения пространственного источника для двух зон коэффициента фильтрации  $k$

Этим обстоятельством определяется и характер деформированного течения из источника.

Деформированный поток источника в двухслойной среде. Для того чтобы решить схему деформированного течения из источника,

надо найти функцию осевого потока, замещающего действие силы тяжести. Такую функцию можно получить из уравнения напора

$$H' = \frac{p}{\gamma} - x,$$

если пьезометрическую высоту принять по формуле (28, VI), отвечающей двухзональной схеме безнапорной фильтрации при  $k_1 > k_2$ . В этом случае для обеих зон получим

$$\left. \begin{aligned} H_1' &= -x \frac{k_2 L}{k_1 L_2 + k_2 L_1}; \\ H_2' &= -L \frac{k_1(x - L_1) + k_2 L_1}{k_1 L_2 + k_2 L_1}. \end{aligned} \right\} (52, VI)$$

Уравнения удовлетворяют всем условиям на границе раздела зон. При  $x = L_1$  имеем

$$\begin{aligned} H_1' &= H_2' = -\frac{k_2 L_1 L}{k_1 L_2 + k_2 L_1}; \\ -k_1 \frac{\partial H_1'}{\partial x} &= -k_2 \frac{\partial H_2'}{\partial x} = \frac{L}{\frac{L_1}{k_1} + \frac{L_2}{k_2}} = k_0 = \text{const.} \end{aligned}$$

Уравнения (52, VI) представляют двухслойную среду с конечной глубиной простираения  $L_2$  зоны II. Нас интересует случай безнапорной фильтрации с неограниченной глубиной простираения  $L_2 \rightarrow \infty$  зоны II. Для этого случая фильтрации из уравнений (52, VI) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} H_1' &= -\frac{k_2}{k_1} x; \\ H_2' &= -x + \frac{k_1 - k_2}{k_1} L_1. \end{aligned} \right\} (53, VI)$$

При  $x = L_1$  на границе раздела зон условия согласованности дают

$$H_1' = H_2' = -\frac{k_2}{k_1} L_1;$$

$$-k_1 \frac{\partial H_1'}{\partial x} = -k_2 \frac{\partial H_2'}{\partial x} = k_2 = \text{const.}$$

Таким образом, при неограниченной глубине зоны II осевая скорость потока, замещающего действие силы тяжести, для обеих зон получается равной коэффициенту фильтрации  $k_2$  зоны II.



В свете отмеченных особенностей функции деформированного течения источника, в пределах практической точности, о чем разъяснено в гл. V, будут равны:

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= -\frac{k_2}{k_1}x + \frac{Q}{4\pi k} \left[ \frac{1}{\sqrt{y^2+x^2}} + \frac{M}{\sqrt{y^2+(2h_1-x)^2}} \right]; \\ H_2 &= -x + \frac{k_1-k_2}{k_1}h_1 + \frac{(1+M)Q}{4\pi k_1} \frac{1}{\sqrt{y^2+x^2}}; \end{aligned} \right\} (54,VI)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_1 &= \frac{Q}{2}(1-\cos\theta_1) + \frac{MQ}{2}(1-\cos\theta_2) + \pi k_2 y; \\ \psi_2 &= \frac{(1+M)Q}{2}(1-\cos\theta_1) + \pi k_2 y. \end{aligned} \right\} (55,VI)$$

Уравнений (54 и 55,VI) достаточно для того, чтобы решить и построить все двухзонное поле источника, деформированное действием силы тяжести. На восходящей ветви осевой линии тока будет существовать критическая точка, в которой скорость от источников уравновешена скоростью осевого потока, а горизонтальные компоненты скорости равны нулю. Положение критической точки определяется уравнением

$$-k_1 \frac{\partial H_1}{\partial x} = 0.$$

Напор в критической точке ( $y=0$ ) равен

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= x \frac{k_2}{k_1} + \frac{Q}{4\pi k_1} \left( \frac{1}{x} + \frac{M}{2h_1+x} \right); \\ k_1 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{k_2}{k_1}x + \frac{Q}{4\pi k_1} \left( \frac{1}{x} + \frac{M}{2h_1+x} \right) \right] &= 0. \end{aligned} \right\} (56,VI)$$

Дифференцируя, получим

$$\frac{Q}{4\pi k_2} = \frac{x^2(2h_1+x)^2}{Mx^2+(2h_1+x)^2}. \quad (57,VI)$$

Из этого уравнения графическим приемом определяется иско-  
мое значение  $x$ .

Горизонтальные координаты разделительной кривой для зоны I фильтрации находятся из уравнения

$$y = \sqrt{\frac{Q}{\pi k_2}} \times \sqrt{\psi_r - 0,5(1+M) + 0,5 \left[ \frac{x}{\sqrt{y^2+x^2}} + M \frac{2h_1-x}{\sqrt{y^2+(2h_1-x)^2}} \right]}.$$

Для этой кривой значение приведенной функции тока  $\psi$ , равно  $(1+M)$ . Поэтому имеем

$$y = \sqrt{\frac{Q}{\pi k_2}} \times \sqrt{0,5(1+M) + 0,5 \left[ \frac{x}{\sqrt{y^2+x^2}} + M \frac{2h_1-x}{\sqrt{y^2+(2h_1-x)^2}} \right]}. \quad (58,VI)$$

При данных значениях  $x$  уравнение легко решается графически.

Для зоны II фильтрации горизонтальные координаты разделительной кривой равны

$$y = \sqrt{\frac{Q}{\pi k_2}} \sqrt{(1+M) \frac{1+\cos\theta_1}{2}}. \quad (59,VI)$$

На рис. 81 пунктиром показана разделительная кривая деформированного потока источника. Верхняя часть разделительной поверхности вместе с куполом растекания более пологая по сравнению с поверхностью потока в однородной среде. Это результат внутреннего подпора, при котором происходит движение потока в зоне I поля.

Рабочее давление в скважине определяется из уравнений (46 и 54,VI), если в них принять  $r=y=0$  и  $z=x=r_0$ , а величиной  $\frac{k_2}{k_1} r_0$ , как очень малой, пренебречь. При неограниченной глубине нагнетания давление на забое равно

$$H_0 = \left( \frac{p}{\gamma} \right)_0 = \frac{Q}{4\pi k_1} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{M}{2h_1-r_0} \right). \quad (60,VI)$$

При ограничении нагнетания глубиной  $R$  давление уменьшается

$$H_0 = \left( \frac{p}{\gamma} \right)_0 = \frac{Q}{4\pi k_1} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{M}{2h_1-r_0} - \frac{1+M}{R} \right). \quad (61,VI)$$

Давление на внешнем контуре фильтрации  $\left( \frac{p}{\gamma} \right)_R$  равно нулю

Широтное простирание потока, определяемое горизонтальной координатой разделительной кривой  $y_0$  на уровне заданной глубины нагнетания, получается из уравнения (59,VI), если вместо  $\cos\theta_1$  подставить выражение

$$\cos\theta_1 = \frac{R}{\sqrt{R^2+y_0^2}};$$

$$y_0 = \sqrt{\frac{(1+M)Q}{\pi k_2}} \sqrt{\frac{\sqrt{R^2+y_0^2}+R}{2\sqrt{R^2+y_0^2}}}. \quad (62,VI)$$

Глубина  $R$  ориентирована по оси  $x$ .



В заключение представляет интерес произвести сопоставление производительности скважины в условиях двухслойной среды и скважины в однородной среде при разных соотношениях коэффициентов фильтрации и различной мощности зоны I.

Расход скважины при двухзональной схеме (60, VI)

$$Q = \frac{4\pi k_1 H_0}{\frac{1}{r_0} + \frac{M}{2h_1 - r_0}}$$

Расход той же скважины в однородной среде

$$Q = 4\pi k_1 r_0 H_0$$

Отношение расходов

$$\frac{Q}{Q_1} = \frac{1}{1 + \frac{M}{2\alpha - 1}}$$

где  $\alpha = \frac{h_1}{r_0}$  — относительная величина мощности зоны I, выраженная через радиус скважины.

В табл. 29 даны отношения расходов  $\frac{Q}{Q_1}$  двухслойной среды к расходам однородной для разных значений  $\alpha$  и  $M$ . Для наглядности также указаны отношения коэффициентов  $\frac{k_1}{k_2}$ .

Таблица 29

$\alpha$	$M$	$\frac{k_1}{k_2}$				
		0	0,33	0,60	0,90	1,00
		1	2	4	20	$\infty$
1	1	0,752	0,626	0,529	0,500	0,500
2	1	0,900	0,832	0,770	0,752	0,752
3	1	0,938	0,895	0,848	0,835	0,835
5	1	0,968	0,935	0,903	0,902	0,902
10	1	0,986	0,970	0,952	0,951	0,951
20	1	0,990	0,980	0,972	0,971	0,971

С увеличением мощности зоны I расход скважины увеличивается для всех значений  $M$ . При постоянной мощности той же зоны расход скважины растет с уменьшением коэффициентов  $M$ , т. е. при уменьшении отношения  $\frac{k_1}{k_2}$ . Максимального значения расход достигает при величине  $M$ , равной нулю, т. е. при  $k_1 = k_2$  и  $\frac{k_1}{k_2} = 1$ . В этом случае расход равен расходу скважины в одно-

родной среде. В другом крайнем положении при  $M=1$  или  $k_2=0$  и  $\frac{k_1}{k_2} = \infty$  граница раздела зон становится непроницаемой и рас-

ход скважины достигает наименьшего значения, соответствующего расходу источника вблизи плоской горизонтальной стенки. При больших значениях мощности зоны I расходы выравниваются для всех значений  $M$  и стремятся к постоянной величине, равной расходу источника в однородной среде при неограниченной глубине проницаемого слоя.

Опыт подтверждает теоретическое распределение давлений и расходов при нагнетании жидкости в среду с переменными значениями коэффициента фильтрации  $k$ . Очертание деформированного потока, полученное из опыта, весьма близко отвечает теоретической форме разделительной поверхности. По-прежнему это — поток с ограниченным куполом растекания, быстро переходящим в цилиндрическое тело вращения. Увеличение напорных градиентов, необходимых для движения потока в зоне II с пониженным значением коэффициента фильтрации  $k$ , контролируется перераспределением давления на границе раздела зон. По этим причинам деформированный поток источника не может получить большого широтного развития, а остается ограниченным сравнительно небольшим радиусом горизонтального простиранья.

Трехзональное поле. Аналогичным путем можно найти решения для трехзональной схемы с плоскими границами раздела (см. рис. 80). Используя метод Фурье, также составляются напорные функции для каждой зоны поля, выраженные через функции Бесселя. Функции переменной интегрирования  $A$  и  $B$  определяются из граничных условий. При интегрировании уравнений напорных функций приходится иметь дело с разложением дроби в ряд

$$\frac{1}{1 - MNe^{-2m(h_2 - h_1)}} = 1 + MNe^{-2m(h_2 - h_1)} + M^2N^2e^{-4m(h_2 - h_1)} + \dots + \dots$$

При интегрировании в дальнейшем уравнений Бесселя получаются интегралы типа

$$\int_0^{\infty} I_0(mr) e^{-m(CH_2 - Dh_1 - s)} dm$$

К каждому из этих интегралов надо применить формулу Вебера — Липшица

$$\int_0^{\infty} I_0(mr) e^{-m(CH_2 - Dh_1 - s)} dm = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (CH_2 - Dh_1 - s)^2}}$$



В окончательном виде зональные напорные функции в цилиндрической системе координат получаются равными

$$H_1' = \frac{Q}{4\pi k_1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} + \frac{G-1}{\sqrt{r^2 + (2h_1 - z)^2}} + G(1+M) \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{N^\tau M^{\tau-1}}{\sqrt{r^2 + [2h_1(p\tau - \tau + 1) - z]^2}} \right\}; \quad (63, VI)$$

$$H_2' = \frac{GQ}{4\pi k_1} \left\{ \sum_{\tau=1}^{\infty} \frac{N^\tau M^{\tau-1}}{\sqrt{r^2 + [2h_1(p\tau - \tau + 1) - z]^2}} + \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{N^\tau M^\tau}{\sqrt{r^2 + [2h_1(p\tau - \tau) + z]^2}} \right\}; \quad (64, VI)$$

$$H_3' = \frac{GQ(1+N)}{4\pi k_1} \sum_{\tau=0}^{\infty} \frac{N^\tau M^\tau}{\sqrt{r^2 + [2h_1(p\tau - \tau) + z]^2}}. \quad (65, VI)$$

В этих уравнениях обозначают

$$M = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \quad N = \frac{k_2 - k_3}{k_2 + k_3},$$

$$G = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}, \quad p = \frac{h_2}{h_1},$$

где  $k_1, k_2, k_3$  — коэффициенты фильтрации каждой из трех зон;  
 $p$  — относительная мощность зоны II;  
 $\tau$  — последовательный порядок целых чисел:  $\tau=0, 1, 2, 3, \dots$

Ограничивая решения той или иной степенью точности, можно брать соответствующее число членов каждого ряда. Нужно отметить, что члены рядов быстро убывают. Поэтому решение уравнений (63—65, VI) даже при небольшом числе их дает достаточную точность. Но надо иметь в виду, что число членов в рядах не может быть строго одинаковым для всех зон, так как при подходе к границам раздела зон давление изменяется непрерывно и на границах раздела должно иметь одинаковую величину.

Принимая  $\tau$  в пределах 1—2 и полагая  $h_2 = 2h_1$ , после увязки граничных условий получаем следующие значения напорных функций по зонам в системе прямоугольных координат.

$$H_1' = \frac{Q}{4\pi k_1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{y^2 + x^2}} + \frac{G-1}{\sqrt{y^2 + (2h_1 - x)^2}} + \frac{G(1+M)N}{\sqrt{y^2 + (4h_1 - x)^2}} + \frac{G(1+M)N^2M}{\sqrt{y^2 + (6h_1 - x)^2}} \right\}. \quad (66, VI)$$

Для зоны II при  $z < 1,5 h_1$

$$H_2' = \frac{GQ}{4\pi k_1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{y^2 + x^2}} + \frac{NM}{\sqrt{y^2 + (2h_1 + x)^2}} + \frac{N^2M^2}{\sqrt{y^2 + (4h_1 + x)^2}} + \frac{N}{\sqrt{y^2 + (4h_1 - x)^2}} + \frac{N^2M}{\sqrt{y^2 + (6h_1 - x)^2}} \right\}. \quad (67, VI)$$

Для зоны II при  $z > 1,5 h_1$

$$H_2' = \frac{GQ}{4\pi k_1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{y^2 + x^2}} + \frac{NM}{\sqrt{y^2 + (2h_1 + x)^2}} + \frac{N}{\sqrt{y^2 + (4h_1 - x)^2}} + \frac{N^2M}{\sqrt{y^2 + (6h_1 - x)^2}} \right\}. \quad (68, VI)$$

Для зоны III

$$H_3' = \frac{GQ(1+N)}{4\pi k_1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{y^2 + x^2}} + \frac{NM}{\sqrt{y^2 + (2h_1 + x)^2}} \right\}. \quad (69, VI)$$

Снова трехзональное поле источника приведено к однородной среде, представленной коэффициентом фильтрации зоны I. Но напорные функции на этот раз выражены более сложной системой комбинированных функций действительного и отраженного источников, расположенных по обе стороны от горизонтальной оси поля.

Рабочее давление в скважине получается из уравнения (63, VI) при замене в нем  $z=r_0$  и  $r=0$ . Для частного случая ( $h_2=2h_1$ ) по уравнению (66, VI) это давление равно ( $y=0, x=r_0$ )

$$H_0 = \left( \frac{p}{\gamma} \right)_0 = \frac{Q}{4\pi k_1} \left( \frac{1}{r_0} + \frac{G-1}{2h_1 - r_0} + \frac{G(1+M)N}{4h_1 - r_0} + \frac{G(1+M)N^2M}{6h_1 - r_0} \right). \quad (70, VI)$$

Аналогично предыдущему глубину  $h$  зоны I можно выразить через радиус забоя скважины  $r_0$ , приняв  $h_1 = ar_0$ . Тогда получим

$$H_0 = \frac{Q}{4\pi k_1 r_0} \left( 1 + \frac{G-1}{2a-1} + \frac{G(1+M)N}{4a-1} + \frac{G(1+M)N^2M}{6a-1} \right). \quad (71, VI)$$

При необходимости точно исчислить величину забойного давления при ограниченной глубине нагнетания  $R$ , находящейся в зоне III, в уравнение (70, VI) необходимо внести поправку. Ориентируя глубину  $R$  по оси  $x$ , величину забойного давления для частного случая ( $h_2=2h_1$ ) найдем из уравнений (66 и 69, VI):

$$H_0 = \frac{Q}{4\pi k_1} \left[ \frac{1}{r_0} + \frac{G-1}{2h_1 - r_0} + G(1+M)N \left( \frac{1}{4h_1 - r_0} + \frac{NM}{6h_1 - r_0} \right) - G(1+N) \left( \frac{1}{R} + \frac{NM}{2h_1 + R} \right) \right]. \quad (72, VI)$$



Для дальнейшего анализа полезно сопоставить величину рабочего давления для трехзональной и двухзональной систем.

При равенстве параметра  $\frac{Q}{4\lambda k_1 r_0}$  отношение величин этих давлений дает

$$\frac{H_{02}}{H_{01}} = \frac{1 + \frac{G-1}{2\alpha-1} + \frac{G(1+M)N}{4\alpha-1} + \frac{G(1+M)N^2M}{6\alpha-1}}{1 + \frac{M}{2\alpha-1}} \quad (73.VI)$$

В табл. 30 вычислены отношения забойных давлений  $\frac{H_{02}}{H_{01}}$  для трехслойной и двухслойной среды для разных значений коэффициентов  $M$ ,  $N$  и  $G$  и разной мощности зоны  $I$ .

Величина забойного давления для трехслойной среды, при равенстве всех прочих условий, больше, чем для двухслойной.

Таблица 30

α	M	0.33	0.60	0.90
	N	0.70	0.80	0.90
G		1.33	1.60	1.90
2		1.18	1.33	1.54
3		1.13	1.23	1.37
5		1.05	1.14	1.24
10		1.05	1.08	1.13
20		1.03	1.05	1.05
30		1.02	1.03	1.05

С увеличением мощности зоны  $I$  разница в величине давлений уменьшается. С увеличением коэффициентов  $M$  и  $N$ , т. е. с уменьшением проницаемости зон  $II$  и  $III$ , давления для трехслойной среды значительно повышаются. В среднем увеличение давления для трехслойной среды относительно двухслойной для малых мощностей зоны  $I$  составляет 25%, для больших

мощностей — в пределах 6%. Но эти данные относятся к случаю, когда мощность зоны  $II$  равна мощности ( $h_2=2h_1$ ) зоны  $I$ . С уменьшением мощности зоны  $II$  разница в величине давлений увеличится в пользу трехслойной схемы.

Таким образом, можно прийти к заключению, что с увеличением числа промежуточных зон с прогрессирующим уменьшением коэффициентов фильтрации последует дальнейшее возрастание величины забойного давления в скважине. То же самое следует сказать и о ширине простирания деформированного потока, так как величина фиктивных расходов источников, определяющих горизонтальное сечение деформированного потока, с каждой новой зоной будет возрастать.

Опыт подтверждает тенденцию потока к уширению при возрастании числа промежуточных зон. Параллельное сопоставление потоков в двухслойной и трехслойной среде показывает общее уширение разделительной поверхности потока в трехслойной среде. Во всех прочих отношениях поток источника в трехслойной среде по-прежнему ограничен небольшим радиусом растекания

и сохраняет все типичные черты пространственного поля, деформированного силой тяжести.

Практическое решение поля с плоскими границами раздела зон. При большом количестве зон точное решение поля с применением интегральных уравнений Бесселя становится чрезвычайно затрудненным из-за большого количества коэффициентов  $A$  и  $B$ , подлежащих определению на границах раздела зон. Да и само решение напорных функций осложнено многочисленностью интегралов. В этих случаях для упрощения решения многозонального поля можно воспользоваться средним значением пластового коэффициента фильтрации  $k'_0$ , определяемого формулой (25.VI):

$$k'_0 = \frac{\sum_{i=1}^n L_i}{\sum_{i=1}^n \frac{L_i}{k_i}}$$

Построение и определение расчетных элементов поля производится как для однородной среды по формулам гл. V.

В табл. 31 вычислены забойные давления для трехслойной ( $H_0$ ) и фиктивно-однородной ( $H'_0$ ) среды по точной формуле (72.VI) и по осредненному значению коэффициента фильтрации  $k'_0$ . Здесь же указаны значения отношений давлений  $\frac{H'_0}{H}$ .

Таблица 31

α	M	0.300			0.170			0.111		
		0.333			0.167			0.142		
N		1.200			1.180			1.110		
G										
		$H'_0$	$H_0$	$\frac{H'_0}{H}$	$H'_0$	$H_0$	$\frac{H'_0}{H}$	$H'_0$	$H_0$	$\frac{H'_0}{H}$
3		7.30	3.60	2.03	16.40	10.60	1.54	12.60	10.20	1.24
6		12.60	6.00	2.10	28.50	18.00	1.58	21.90	17.60	1.24
12		7.70	3.70	2.05	17.60	11.00	1.60	15.20	11.00	1.38
20		13.00	6.20	2.10	29.50	18.40	1.60	25.70	18.40	1.38

Сопоставление результатов расчета трехзонального поля по точным формулам и по формулам осредненной среды с коэффициентом  $k'_0$  показывает, что давление из забое по осредненному значению  $k'_0$  получается больше, чем по точной формуле (72.VI). При этом разница в значениях давлений, подсчитанных по точной и осредненной формулам, уменьшается с уменьшением коэф-



коэффициентов  $M$  и  $N$ , т. е. с уменьшением абсолютной разницы эквивалентных коэффициентов фильтрации  $k$ .

Можно полагать, что с увеличением числа зон разница конечных результатов исчезает. Наличие плоских границ раздела зон, на которых давление мало увеличивается по длине потока, но перераспределяется по длине потока. Для числа зон более трех осредненные формулы правильно отражают конечные результаты. Поэтому они рекомендуются для расчета многозональных полей.

К тому же типу полей, где коэффициенты фильтрации чередуются по вертикали, относится схема поля с непрерывным изменением коэффициента  $k$  вдоль оси  $x$ . В этом случае расчет поля можно также вести по осредненному значению коэффициента фильтрации  $k'_0$ , определяемому формулой (31, VI)

$$k'_0 = \frac{L}{\int_0^L \frac{dx}{k(x)}}$$

В обе формулы осредненного коэффициента фильтрации  $k'_0$  входит длина потока  $L$ . Поэтому при этих расчетах надо принять соответствующую формулу и для давления, получаемую из уравнения (2, VI):

$$H'_0 = \frac{Q}{4\pi k'_0} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{R} \right), \quad (74, VI)$$

где  $R=L$ .

### 5. Поле линейного источника при переменных значениях коэффициента фильтрации

Движение рассматривается установившимся, гравитационный фактор исключен. В каждой горизонтальной плоскости течение идентично. Кольцевые области с коэффициентами фильтрации  $k_1$ ,  $k_2$  и радиусами  $R_1$ ,  $R_2$  окружают скважину прямолинейного источника длиной  $a$  (рис. 82). Так как распределение давления в каждой кольцевой области будет обладать радиальной симметрией, то общим для всей системы решением уравнения Лапласа будет служить функция потенциала прямолинейного источника

$$\varphi = \frac{q}{2\pi} \ln r,$$

где  $q = \frac{Q}{a}$  — расход на единицу длины источника.

Переходя от потенциала к давлению, для каждой области течения можно принять распределение пьезометрического давления

$$\frac{p}{\gamma} = c \ln r + b,$$

где  $c$  и  $b$  — некоторые константы, подлежащие определению из граничных условий на границах раздела зон.

Двухзональная схема. Исследуем вначале двухзональную схему. Для точек зон I и II можно написать

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{p}{\gamma} \right)_1 &= c_1 \ln r + b_1; \\ \left( \frac{p}{\gamma} \right)_2 &= c_2 \ln r + b_2. \end{aligned} \right\} (75, VI)$$

Движение потока ограничено граничными условиями

$$\text{при } r = r_0 \left( \frac{p}{\gamma} \right)_1 = \left( \frac{p}{\gamma} \right)_0;$$

$$\text{при } r = R_2 \left( \frac{p}{\gamma} \right)_2 = \left( \frac{p}{\gamma} \right)_{R_2}.$$

Здесь  $r_0$  — радиус забоя;  $R_2$  — радиус предельного растекания (контура фильтрации).

Уравнения (75, VI) должны удовлетворять граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{p}{\gamma} \right)_0 &= c_1 \ln r_0 + b_1; \\ \left( \frac{p}{\gamma} \right)_{R_2} &= c_2 \ln R_2 + b_2. \end{aligned} \right\} (76, VI)$$

Кроме этих уравнений к системе должны быть приложены условия согласованности, выраженные уравнениями (1, VI). По первому из них для границы раздела зон при  $r = R_1$  должны иметь

$$c_1 \ln R_1 + b_1 = c_2 \ln R_2 + b_2. \quad (77, VI)$$

По второму уравнению (1, VI)

$$k_1 \frac{\partial \left( \frac{p}{\gamma} \right)_1}{\partial r} = k_2 \frac{\partial \left( \frac{p}{\gamma} \right)_2}{\partial r}.$$

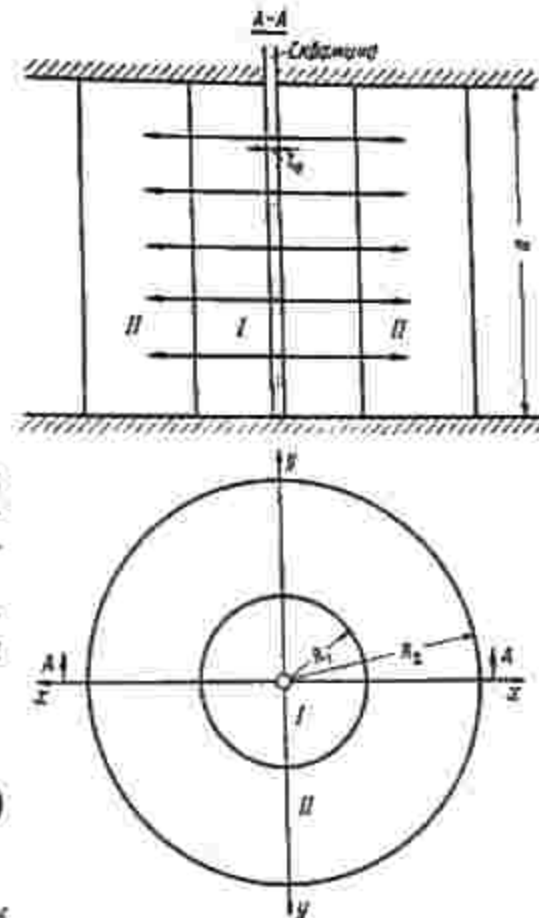


Рис. 82. Поле линейного источника с переменными коэффициентами  $k$



так как нормаль скорости к поверхности раздела будет в данном случае представлять радиальную скорость.

Дифференцируя уравнения (75,VI) и заменяя  $r=R_1$ , получим

$$k_1 c_1 = k_2 c_2 \quad (78,VI)$$

Для определения неизвестных коэффициентов  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $b_1$  и  $b_2$  служат четыре уравнения (76—78,VI). Решая их совместно, находим значения констант. Подставляя последние в уравнения (75,VI), получим формулы для определения давления в любых точках зон I и II:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{p}{\gamma}\right)_1 &= \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - \frac{\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - \left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_2}}{\ln \frac{R_1}{r_0} + \frac{k_1}{k_2} \ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{r}{r_0} \\ \left(\frac{p}{\gamma}\right)_2 &= \left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_2} + \frac{k_1 \left[ \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - \left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_2} \right]}{\ln \frac{R_1}{r_0} + \frac{k_1}{k_2} \ln \frac{R_2}{R_1}} \ln \frac{R_2}{r_0} \end{aligned} \right\} \quad (79,VI)$$

При  $r=r_0$  из первого уравнения получим давление на забое  $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0$ . При  $r=R_2$  находим конечную величину давления  $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_2}$ . При  $r=R_1$  имеем равенство давлений на поверхности раздела. При равенстве  $k_1=k_2$  уравнения переходят в формулы давления в однородной среде.

Обозначив постоянный коэффициент уравнений через  $B$ , приведем уравнения (79,VI) к виду

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{p}{\gamma}\right)_1 &= \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - B \ln \frac{r}{r_0}; \\ \left(\frac{p}{\gamma}\right)_2 &= \left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_2} + \frac{k_1}{k_2} B \ln \frac{R_2}{r} \end{aligned} \right\} \quad (80,VI)$$

где

$$B = \frac{\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - \left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_2}}{\ln \frac{R_1}{r_0} + \frac{k_1}{k_2} \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

По уравнению (80,VI) можно построить все семейство изобар двухзонного поля.

Для определения функции тока прямолинейного источника воспользуемся уравнением (12,II).

$$d\psi = udy - vdx.$$

Полная радиальная скорость  $w$  находится из уравнения (80,VI):

$$w = -k \frac{\partial \left(\frac{p}{\gamma}\right)}{\partial r}$$

$$w_1 = -k_1 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 - B \ln \frac{r}{r_0} \right] = k_1 B \frac{1}{r};$$

$$w_2 = -k_2 \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_2} + \frac{k_1}{k_2} B \ln \frac{R_2}{r} \right] = k_1 B \frac{1}{r}.$$

Скорости определяются единой формулой для обеих зон. Компоненты радиальной скорости

$$u = w \cos \theta = k_1 B \frac{1}{r} \cos \theta = k_1 B \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$v = w \sin \theta = k_1 B \frac{1}{r} \sin \theta = k_1 B \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Подставляя их в уравнение (12,II) и интегрируя, найдем

$$\psi = k_1 B \int \frac{xdy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{ydx}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$\psi = k_1 B \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = k_1 B \theta. \quad (81,VI)$$

Все линии тока — радиальные прямые. Расход жидкости через скважину определяется радиальной скоростью источника и боковой поверхностью забоя

$$Q = k_1 B \frac{1}{r} 2\pi ar = 2\pi a B k_1. \quad (82,VI)$$

Подставляя значение коэффициента  $B$  и принимая давление на внешнем контуре инфильтрации  $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_{R_2}$  равным нулю, имеем

$$Q = \frac{2\pi a \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0}{\frac{1}{k_1} \ln \frac{R_1}{r_0} + \frac{1}{k_2} \ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (83,VI)$$

При равенстве  $k_1=k_2=k$  из формулы (83,VI) получим расход источника в однородной среде

$$Q = \frac{2\pi ah \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0}{\ln \frac{R_2}{r_0}}$$



Из формулы (83.VI) величина забойного давления

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 = \frac{Q \left[ \frac{1}{k_1} \ln \frac{R_1}{r_0} + \dots + \frac{1}{k_n} \ln \frac{R_n}{R_1} \right]}{2\pi a} \quad (84.VI)$$

Приравняв правые части уравнений расходов двухслойной и однородной среды, получим эквивалентное значение коэффициента фильтрации  $k'_0$ , определяющее заданный расход скважины,

$$k'_0 = \frac{\ln \frac{R_2}{r_0}}{\frac{1}{k_1} \ln \frac{R_1}{r_0} + \frac{1}{k_2} \ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (85.VI)$$

Многозональная кольцевая схема. Формулы (83 и 85.VI) легко обобщаются на случай любого количества кольцевых зон с различными значениями коэффициентов фильтрации  $k_1, k_2, \dots, k_n$ . Для  $n$ -го количества зон уравнения расхода и обобщенного коэффициента фильтрации будут иметь вид

$$Q = \frac{2\pi \left(\frac{p}{\gamma}\right)_0}{\frac{1}{k_1} \ln \frac{R_1}{r_0} + \frac{1}{k_2} \ln \frac{R_2}{R_1} + \dots + \frac{1}{k_n} \ln \frac{R_n}{R_{n-1}}}; \quad (86.VI)$$

$$k'_0 = \frac{\ln \frac{R_n}{r_0}}{\frac{1}{k_1} \ln \frac{R_1}{r_0} + \frac{1}{k_2} \ln \frac{R_2}{R_1} + \dots + \frac{1}{k_n} \ln \frac{R_n}{R_{n-1}}} \quad (87.VI)$$

Обобщенным коэффициентом  $k'_0$  и заданным расходом  $Q$  может быть определено забойное давление скважины в условиях многослойной среды

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)_0 = \frac{Q \ln \frac{R_n}{r_0}}{2\pi a k'_0} \quad (88.VI)$$

В тех случаях, когда коэффициент фильтрации  $k$  изменяется непрерывно вдоль радиуса и функция  $k(r)$  известна, для определения пьезометрического давления в жидкости надо исходить из уравнения

$$d\left(\frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{Q}{2\pi a} \frac{1}{k} \frac{1}{r} dr.$$

Подставив вместо  $k$  функцию  $k(r)$  и интегрируя, находим величину пьезометрического давления при непрерывном изменении коэффициента фильтрации  $k$

$$\left(\frac{p}{\gamma}\right)_R - \left(\frac{p}{\gamma}\right)_r = -\frac{Q}{2\pi a} \int_r^R \frac{1}{k(r)} \frac{1}{r} dr.$$

И, наконец, принимая давление на внешнем контуре фильтрации  $\left(\frac{p}{\gamma}\right)_R$  равным нулю, получим давление в любой точке потока

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{Q}{2\pi a} \int_r^R \frac{1}{k(r)} \frac{1}{r} dr. \quad (89.VI)$$

Линейный источник в двухслойном пласте. Пласт состоит из двух слоев (I и II) мощностью  $a_1$  и  $a_2$  с коэффициентами фильтрации  $k_1$  и  $k_2$  (рис. 83). Вследствие радиальности движения жидкости из скважины в каждом из слоев справедливы формулы

$$\left. \begin{aligned} q &= \frac{2\pi k (\rho_0 - p_R)}{\gamma \ln \frac{R}{r_0}}; \\ p &= p_0 - \frac{\rho_0 - p_R}{\ln \frac{R}{r_0}} \ln \frac{r}{r_0}, \end{aligned} \right\} \quad (90.VI)$$

где  $p_0$  — давление на забое скважины;

$p_R$  — пластовое давление;

$R$  — радиус тампонажа.

Так как коэффициент фильтрации не входит в формулу (90.VI), поэтому она определяет давление  $p$  в любой точке двухслойного пласта с радиусом-вектором  $r$ . Распределение давлений одинаково в обоих слоях и пьезометрическая поверхность депрессии является общей для обоих слоев. Радиальная скорость линейного источника

$$w = \frac{q}{2\pi r}.$$

Подставляя значение расхода, находим

$$w = \frac{k (\rho_0 - p_R)}{\gamma \ln \frac{R}{r}} \frac{1}{r}.$$

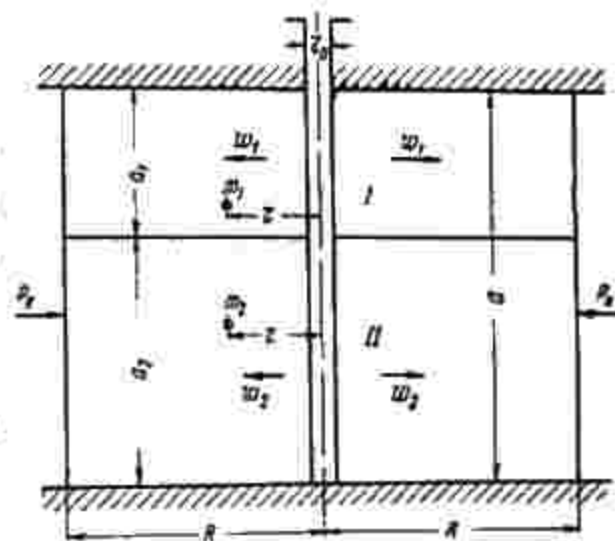


Рис. 83. Линейный источник в двухслойном пласте

Из этой формулы видно, что скорости фильтрации в соответствующих точках двух слоев, при одном и том же значении радиуса-вектора  $r$ , будут различны и прямо пропорциональны



коэффициентам фильтрации слоев:

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= \frac{k_1 (p_0 - p_R)}{\gamma \ln \frac{R}{r}} \cdot \frac{l}{r} ; \\ w_2 &= \frac{k_2 (p_0 - p_R)}{\gamma \ln \frac{R}{r}} \cdot \frac{l}{r} . \end{aligned} \right\} (91, VI)$$

Дебит скважины определяется суммой расходов в пределах каждого слоя

$$Q = Q_1 + Q_2 = 2\pi r (w_1 a_1 + w_2 a_2)$$

или

$$Q = \frac{2\pi (k_1 a_1 + k_2 a_2) (p_0 - p_R)}{\gamma \ln \frac{R}{r_0}} . \quad (92, VI)$$

Такая формула впервые была дана для артезианских скважин проф. Г. Н. Каменским.

Введем эквивалентное значение коэффициента фильтрации  $k'_0$  при помощи которого можно было бы определить расход скважины по формуле однородной среды

$$Q = \frac{2\pi a k'_0 (p_0 - p_R)}{\gamma \ln \frac{R}{r_0}} .$$

Сравнивая две последние формулы, находим эквивалентное значение  $k'_0$  для многослойного пласта по вертикали

$$k'_0 = \frac{k_1 a_1 + k_2 a_2}{a} . \quad (93, VI)$$

Формулы (92 и 93, VI) легко обобщаются для случая  $n$  слоев с различными коэффициентами фильтрации.

Заключив на этом главу о расчете полей с переменными значениями коэффициентов фильтрации  $k$ , необходимо отметить, что теми же методами могут быть исследованы и более сложные — комбинированные схемы взаимодействующих источников пространственных или линейных, или сочетание их с другими возмущающими факторами. Но если исследование сложных систем встречает определенные математические трудности даже в условиях однородной среды, то тем более сложно решение их для схем с переменными коэффициентами  $k$ . Поэтому при решении сложных систем надлежит применять эквивалентные значения коэффициентов фильтрации  $k'_0$ . Используя эквивалентные значения  $k'_0$ , можно сложную схему заменить более простой и отнести ее к фиктивно-однородной среде, не нарушая практической точности конечных результатов. По этим соображениям в предыдущих разделах этой главы указаны эквивалентные значения коэффициентов для всех основных систем нагнетания.

## Глава VII НАГНЕТАНИЕ СТРУКТУРНЫХ ЖИДКОСТЕЙ С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ФИЛЬТРАЦИИ ПО ДЛИНЕ ПОТОКА

### 1. Механические свойства структурных жидкостей

Большинство твердеющих жидкостей, нагнетаемых в грунт через скважину, являются дисперсными. Они образованы жидкой средой и твердой фазой. Законы движения дисперсных жидкостей значительно отличаются от законов истинных жидкостей. Главные различия обусловлены механическими свойствами. Жидкость обладает подвижностью частиц. Однако для реальной жидкости эта подвижность не абсолютна: для взаимного перемещения частиц требуется некоторая затрата энергии. Это свойство реальной жидкости называется вязкостью или внутренним трением и является основной причиной сопротивлений, возникающих при движении реальных жидкостей.

Закон внутреннего трения, сформулированный Ньютоном,

$$\tau = \mu \frac{du}{dn}$$

устанавливает, что касательное напряжение, действующее между двумя смежными слоями жидкости, пропорционально динамической вязкости жидкости  $\mu$  и относительной скорости их движения  $\frac{du}{dn}$ , называемой градиентом скорости (по нормали к направлению движения слоев). Закон Ньютона подтверждается для большинства однородных истинных (гомогенных) жидкостей. Для жидкостей неоднородных дисперсных (гетерогенных), представляющих смесь жидкой и твердой фаз, явление внутреннего трения не подчиняется закону Ньютона.

Исследования разных авторов показывают, что взвешенные частицы твердой фазы видоизменяют вязкость неоднородной жидкости. С появлением твердой фазы в жидкости происходит не только количественное увеличение вязкости, но меняется и сам закон, характеризующий вязкость. Математическое выражение этих особенностей двухфазных жидкостей сводится к двум положениям:



1. Вязкость двухфазных жидкостей становится переменной и зависит от градиента скорости

$$\mu = f_1\left(\frac{du}{dn}\right).$$

2. Двухфазные жидкости обладают упругими напряжениями, сохраняя даже в состоянии покоя касательные напряжения, уподобляясь твердым телам. Поэтому вязкость двухфазной жидкости является функцией и упругих напряжений

$$\mu = f_2(\tau).$$

Неоднородные жидкости с твердой фазой, удовлетворяющие отмеченным особенностям, получили название структурных или пластических жидкостей. Изучение движения таких жидкостей проводится методами реологии — науки, объединяющей законы гидравлики, теории пластичности и упругости.

Разными авторами предложены зависимости, определяющие закон внутреннего трения структурных жидкостей. Одной из таких зависимостей является закон Шведова — Бингама

$$\tau = \mu \frac{du}{dn} + \tau_0, \quad (1, VII)$$

где  $\tau$  — касательное напряжение в жидкости;

$\tau_0$  — начало текучести или предельное напряжение сдвига, при котором начинается течение вещества;

$\mu$  — структурная или пластическая вязкость.

Из этого уравнения, графически представленного на рис. 84, следует, что при  $\tau < \tau_0$  вещество, подчиняющееся закону Шведова — Бингама, ведет себя как твердое тело. Движение структурной жидкости начинается, когда величина касательных напряжений в жидкости презойдет величину  $\tau_0$ . Но наибольшие касательные напряжения возникают в слоях жидкости, прилегающих к стенкам трубы или иных русел, в то время как на некотором расстоянии от них напряжения будут меньше. Поэтому напряжения на стенке достигают величины  $\tau > \tau_0$ , а напряжения в остальной центральной массе жидкости остаются  $\tau = \tau_0$ . В этом состоянии центральная часть потока будет скользить с постоянной скоростью как твердое тело по пристенным слоям. Такой вид движения называют структурным режимом. По мере увеличения средней скорости течения потока толщина центрального ядра, движущегося как твердое тело, становится весьма малой и структурный режим переходит в турбулентный. Между структурным и турбу-

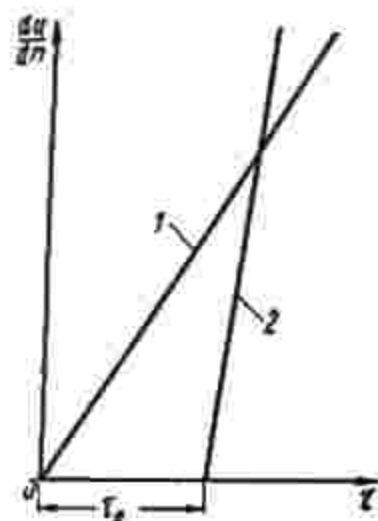


Рис. 84 Зависимость между напряжением сдвига и градиентом скорости по законам Ньютона (1) и Шведова — Бингама (2)

лентным режимами существует небольшая переходная зона, в наземных потоках (трубах) именуемая квазиламинарной. Если по аналогии с законом Ньютона считать, что

$$\tau = \frac{du}{dn} = \mu',$$

где под  $\mu'$  можно понимать некоторую эффективную вязкость, от которой зависят касательные напряжения, возникающие между слоями в потоке, то из уравнения (1, VII) получим зависимость эффективной вязкости структурной жидкости от градиента скорости. Для этого уравнение (1, VII) надо разделить на  $\frac{du}{dn}$

$$\mu' = \mu + \tau_0 \frac{du}{dn}. \quad (2, VII)$$

Аналогично тому как в истинных жидкостях число Рейнольдса  $Re$  является критерием механического подобия и динамической характеристикой потока, так и для структурных жидкостей можно ввести в рассмотрение параметр Рейнольдса, если в обычное выражение числа  $Re$  внести эффективную вязкость

$$Re_{стр} = \frac{vl}{\nu'} = \frac{vly}{\mu'g}$$

В этом виде число  $Re_{стр}$  учитывает все пластические свойства жидкости. Идея использования эффективной вязкости при установлении числа  $Re_{стр}$  для структурных жидкостей была впервые высказана Бабатом и Колдвелом в 1939 г. Так как значение эффективной вязкости зависит от градиента скорости, то в зависимости от закона осреднения градиента скорости по сечению можно получить различные выражения числа  $Re_{стр}$ . Для расчетов, связанных с определением гидравлических потерь, можно принять выражение  $Re_{стр}$ , получаемое с учетом распространения градиента скорости до оси потока. Для круглой трубы

$$\left| \frac{du}{dn} \right|_{стр} = \frac{v}{r}.$$

Эффективная вязкость

$$\mu'_{стр} = \mu + \tau_0 \frac{v}{r} = \mu + \frac{\tau_0 r}{v}.$$

При этом число  $Re_{стр}$  для структурного потока получает вид

$$Re'_{стр} = \frac{vly}{g\left(\mu + \frac{\tau_0 r}{v}\right)} = \frac{vly}{g\tau^2 \left(1 + \frac{\tau_0 r}{\mu v}\right)}, \quad (3, VII)$$

где  $r$  и  $d$  — радиус и диаметр трубы;  
 $v$  — средняя скорость в трубе;  
 $\gamma$  — удельный вес жидкости.



Возможен второй вариант — осреднение градиента скорости в пределах притрубного слоя жидкости. Для этого осреднения значение градиента скорости получается равным

$$\left. \frac{du}{dr} \right|_{cp} = - \frac{\Delta p}{4L\mu} (r - r_0),$$

где  $\Delta p$  — перепад гидродинамического давления;  
 $L$  — длина потока;  
 $r_0$  — радиус «твердого» ядра потока;

$$r_0 = \frac{2L\tau_0}{\Delta p} = \frac{2\tau_0}{\gamma l},$$

Внося выражение осредненного градиента в формулу эффективной вязкости, получим

$$\mu'_{cp} = \mu + \tau_0 \cdot \frac{\rho}{4L\mu} (r - r_0) = \mu \left[ 1 + \frac{4\tau_0 L}{\Delta p (r - r_0)} \right],$$

Последняя формула легко приводится к виду

$$\mu'_{cp} = \mu \left( \frac{N+1}{N-1} \right),$$

где

$$N = \frac{r}{r_0} = \frac{d\gamma l}{4\tau_0}.$$

Соответственно параметр Рейнольдса для потока структурной жидкости принимает вид

$$Re'_{стр} = \frac{v\gamma l}{\mu'_{cp} g} = \frac{v\gamma}{g\mu} \left( d - \frac{4L\tau_0}{\Delta p} \right) \frac{N-1}{N+1},$$

так как линейным размером Рейнольдсова параметра будет величина притрубного слоя жидкости, равная

$$l = d - 2r_0 = d - \frac{4L\tau_0}{\Delta p}.$$

Путем несложных преобразований получим

$$Re'_{стр} = \frac{v\gamma l}{g\mu} \cdot \frac{(N-1)^2}{N(N+1)} \quad (4, VII)$$

По степени дисперсности неоднородные жидкости с жидкой средой и твердой фазой делятся на три категории: глинистые растворы размером твердых частиц не более  $10^{-6}$  м; коллоиды размером твердых частиц от  $10^{-6}$  до  $10^{-7}$  м; суспензии с более крупными размерами твердых частиц. Тампонажными жидкостями при уплотнении грунтов и горных

пород в большинстве случаев служат цементные растворы, глинистые растворы, нефтяные и дисперсные битумы.

Если считать, что размеры цементных частиц в среднем составляют не менее  $0,00005$  м, то цементные растворы являются настоящих коллоидных частиц в  $0,0001 \cdot 10^{-3}$  м можно отнести в коллоидов. Несомненно, к группе коллоидов относятся нефтяные битумы, представляющие высокодисперсный раствор асфальтенов в смолах. Промежуточную группу между суспензиями и коллоидами составляют дисперсные битумы, представляющие высококоагулированные глинисто-битумные и суглинесто-битумные смеси. Все перечисленные жидкие составы являются структурными, подчиняющимися закону Шведова — Бингама, и к ним полностью применимы зависимости, отмеченные выше.

В гл. I отмечалось, что при тампонаже горных пород с очень крупной трещиноватостью применяются не только густые цементные суспензии, но и смеси их с песком или суглинком и супесями. Все эти и подобные им густые пластично-вязкие смеси: глиняное и цементное тесто, глино-песчаные и цементно-песчаные растворы, также относятся к суспензиям, но с очень высоким содержанием дисперсной фазы. Все они включаются в категорию структурных жидкостей и полностью или частично подчиняются закону Шведова — Бингама.

Механические характеристики структурных жидкостей — предельное напряжение сдвига  $\tau_0$  и структурная (пластическая) вязкость  $\mu$  — определяются на вискозиметрах различных систем. В качестве иллюстрации на рис. 85—86 показаны характеристики цементных суспензий и глинистых растворов, составленные на основании собственных исследований и некоторых литературных источников. В табл. 32<sup>1</sup> приведены средние значения  $\tau_0$  и  $\mu$  для пластично-вязких смесей по опытам Г. Б. Нявского.

Таблица 32

Наименование смеси	Предельное напряжение сдвига $\tau_0$ , кг/м <sup>2</sup> при подвижности смеси по стандартному конусу			Вязкость $\mu$ , кг·сек/м <sup>2</sup> при подвижности смеси по стандартному конусу		
	4 см	7 см	10 см	4 см	7 см	10 см
Глиняное тесто . . . . .	—	41	15,75	—	0,54	0,36
Цементное тесто . . . . .	—	14,7	7,35	—	0,3	0,26
Глиняный раствор 1:3 . . . . .	21	12,6	7,35	0,53	0,37	0,27
Цементный раствор 1:3 . . . . .	7,35	5,25	3,15	0,31	0,21	0,175

<sup>1</sup> В соответствии с данными первоисточников система единиц на рис. 85—86 и табл. 32 оставлена метрической.



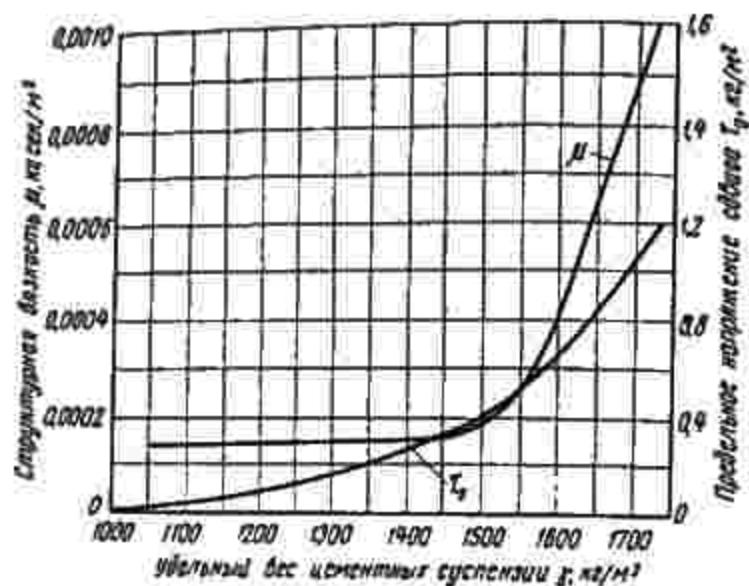


Рис. 85. Реологические характеристики цементных суспензий:  $\tau_0$  — предельное напряжение сдвига,  $\mu$  — структурная вязкость

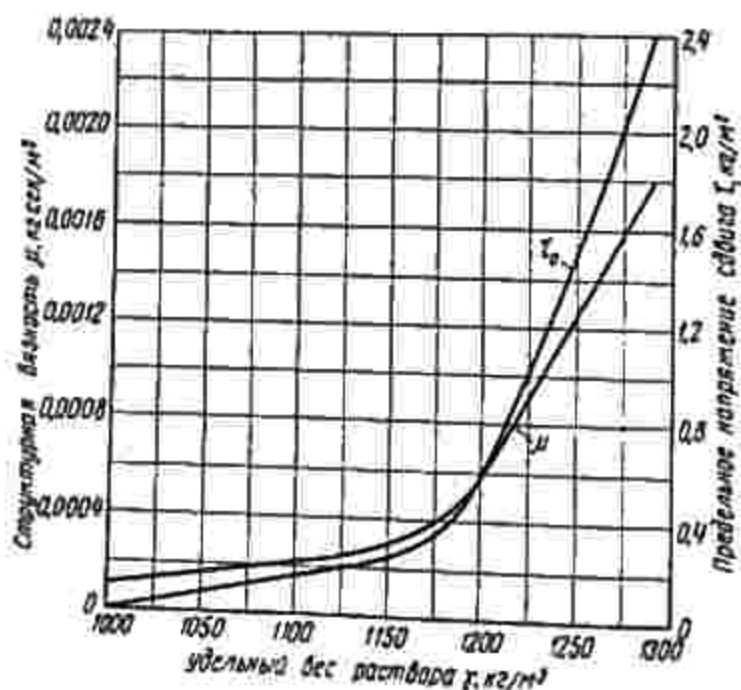


Рис. 86. Реологические характеристики глинистых растворов:  $\tau_0$  — предельное напряжение сдвига,  $\mu$  — структурная вязкость

## 2. Коэффициент фильтрации структурных жидкостей

Глинистые растворы, цементные суспензии, растворы и дисперсные битумы относятся к структурным жидкостям, особенно в движении которых рассмотрены в предыдущем параграфе. Основными, наиболее типичными формами движения этих жидкостей в наземных (трубных) потоках являются структурный и турбулентный режимы. Нефтяной битум также представляет структурную жидкость. Но при высоких температурах, характерных

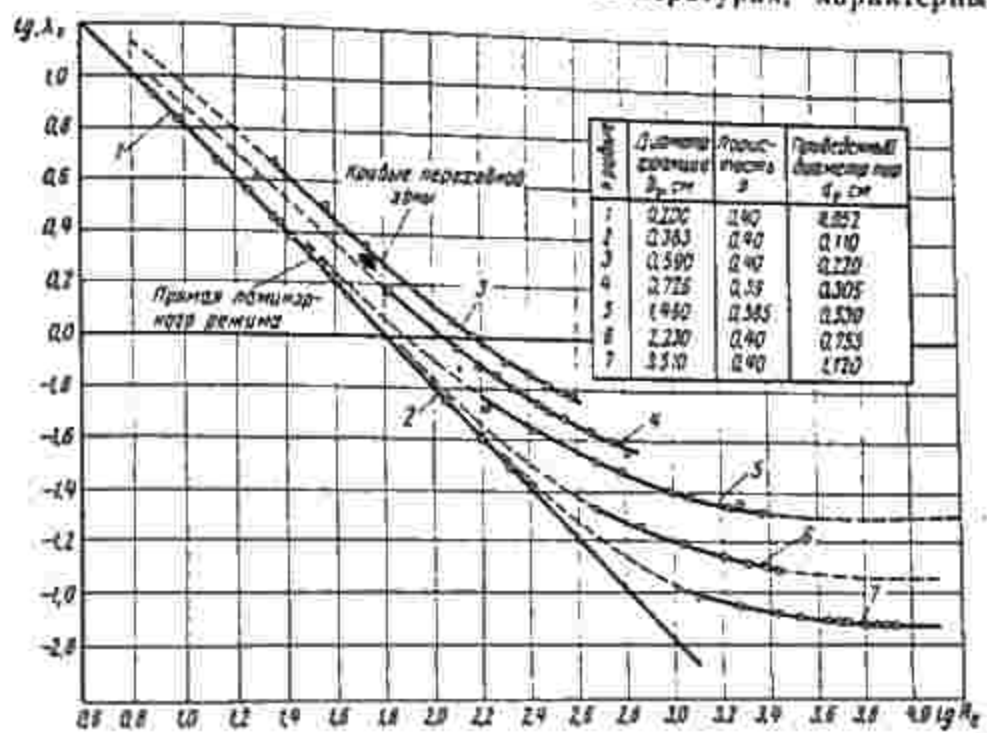


Рис. 87. Коэффициент гидравлического сопротивления  $\lambda_0$  в функции числа  $Re$  по данным С. В. Избаша

для его нагнетания, силы вязкости значительно преобладают над силами предельного напряжения сдвига. Поэтому в пределах высоких температур  $70-180^\circ\text{C}$  битум можно отнести к нетиксотронным растворам и движение его рассматривать удовлетворяющим законам однородных вязких жидкостей.

При нагнетании структурных жидкостей в пористую среду движение их происходит с малыми скоростями даже в крупных порах и трещинах горных пород.

При рассмотрении типичных форм фильтрации воды в крупнозернистых материалах (гравий, галька) наблюдаются большие переходные зоны от ламинарной к турбулентной форме фильтрации. На рис. 87 показан график зависимости числа  $Re$ , построенный для основных кривых фильтрации воды по опыту проф. С. В. Избаша.



баш. Различная длина переходных зон, ясно различимая на этом графике, находится в прямой зависимости от общих условий турбулентности внутри потока. Более крупные поры обуславливают более быстрое распространение турбулентности и более короткую длину промежуточных зон. Вязкость играет обратную роль.

При движении структурных жидкостей в грунтах и трещинах горных пород зоны с возрастающей степенью сопротивлений будут выражены менее резко и в них на очень большом диапазоне скоростей будет сохранен линейный закон фильтрации. Режим турбулентной фильтрации не исключен. Но он возможен только в ближайших окрестностях источников, в областях высоких скоростей фильтрации. Эти области весьма ограничены и большого практического значения не имеют. Поэтому представляется обоснованным для структурной жидкости в порах и трещинах горных пород принять линейный закон фильтрации. Уравнение движения структурного потока определяется законом осреднения градиента скорости. Для движения жидкости в порах и трещинах можно принять осреднение градиента до оси потока

$$\left| \frac{du}{dn} \right|_{\text{ср}} = \frac{v}{r}.$$

Гидравлическую структуру дисперсного потока в пористой среде (пески, галька, щебень) по-прежнему можно выразить общей формулой приведенной схемы фильтрации

$$I_0 = \lambda \frac{1}{d_0} \frac{v_0^2}{g}.$$

Коэффициент гидравлического сопротивления  $\lambda$  представим некоторой величиной  $A$ , получаемой опытным путем,

$$\lambda = \frac{A}{Re_{\text{ср}}} = \frac{A v'}{v_0 d_0}.$$

Заменяя скорость в порах  $v_0$  через скорость фильтрации (22, III)

$$v_0 = \frac{1,6 \omega m^{0,3} D_0^2}{d_0^2}$$

и принимая (23, III)

$$I_0 = \frac{m^{0,4}}{0,75} I,$$

получим выражение скорости фильтрации для структурного потока в порах

$$\omega = \frac{g m^{0,1} d_0^4}{1,2 A v' D_0^2} I. \quad (5, VII)$$

Отсюда коэффициент фильтрации  $k$  получается равным

$$k = \frac{g m^{0,1} d_0^4}{1,2 A v' D_0^2}. \quad (6, VII)$$

Эффективная вязкость  $v'$  равна

$$v' = \frac{g \mu'}{\gamma} = \frac{g \mu \left( 1 + \frac{\tau_0 r_0}{\mu v_0} \right)}{\gamma}.$$

Здесь  $\mu$  — структурная вязкость жидкости;

$\tau_0$  — предельное напряжение сдвига;

$r_0 = \frac{d_0}{2}$  — радиус поры.

Заменяя скорость  $v_0$  через скорость фильтрации, найдем

$$v' = \frac{g \mu \left( 1 + \frac{\tau_0 d_0^2}{3,2 \mu m^{0,3} D_0^2 \omega} \right)}{\gamma}.$$

Последнюю зависимость удобно представить в форме двух констант и переменной скорости  $\omega$

$$v' = \frac{g \mu \left( 1 + BC \frac{1}{\omega} \right)}{\gamma}, \quad (7, VII)$$

где  $B = \frac{\tau_0}{\mu}$  — константа, зависящая от реологических свойств жидкости;

$C = \frac{d_0^2}{3,2 m^{0,3} D_0^2}$  — константа, определяемая геометрическими параметрами среды.

Формулами (6 и 7, VII) определяется функция коэффициента фильтрации структурной жидкости для крупнозернистой среды. Аналогично получается формула и для трещиноватых горных пород. Взяв для них обычную формулу коэффициента фильтрации (7, III)

$$k = k_{\text{пр}} \frac{\gamma}{\mu'},$$

найдем его развернутое выражение для структурного потока.

По первому варианту осреднения градиента скорости для прямоугольного сечения трещины с просветом  $\delta$  получим

$$\left| \frac{du}{dn} \right|_{\text{ср}} = \frac{2v}{\delta}.$$



Скорость потока в трещине можно заменить скоростью фильтрации  $\omega$

$$\left. \frac{du}{dn} \right|_{кр} = \frac{2\omega}{mb}$$

где  $m$  — пористость среды (скважность).

При этих данных эффективная вязкость структурной жидкости

$$\mu' = \mu \left( 1 + \frac{\tau_0}{\mu} \frac{mb}{2} \frac{1}{\omega} \right)$$

Коэффициент фильтрации структурной жидкости для трещиноватых горных пород

$$k = 2k_{ор} \frac{\gamma}{\mu \left( 1 + BC \frac{1}{\omega} \right)} \quad (8, VII)$$

где  $k_{ор}$  — обычный коэффициент проницаемости трещиноватой среды;

$$B = \frac{\tau_0}{\mu} \text{ — реологическая константа;}$$

$$C = \frac{mb}{2} \text{ — геометрическая константа.}$$

Необходимо отметить, что формула (7, III) установлена из соотношений линейной фильтрации однородной жидкости. Может оказаться, что обычные значения параметров, выражающих закон течения однородных жидкостей, будут недостаточны для дисперсных жидкостей. Поэтому в формулу (8, VII) введен коэффициент  $\alpha$ . В первых приближениях величина этого коэффициента может быть принята по аналогии с крупнозернистой средой, для которой при равенстве всех прочих условий имеет место отношение

$$\alpha = \frac{k'_{ор}}{k_{ор}} = \frac{81,6}{A}$$

Число  $A$ , как отмечалось, определяется опытным путем. Скорость  $\omega$  в формулах (7 и 8, VII) выражается известными функциями линейного или пространственного источника.

Для всех основных гидромеханических схем нагнетания скорость  $\omega$  — функция длины радиуса-вектора. Поэтому эффективная вязкость и коэффициент фильтрации  $k$  структурной жидкости — также функции длины радиуса. Это — изменения коэффициента фильтрации структурных жидкостей по длине потока. Они вызваны изменением вязкости нагнетаемой жидкости в связи с изменением скорости по длине потока (закон Шведова — Билгама). Но при нагнетании дисперсных жидкостей в пористую среду могут быть изменения коэффициента фильтрации или проницаемости по времени. При нагнетании цементных суспензий эти изменения обусловлены процессами контактирования и схватывания раствора. Вследствие этого могут изменяться по времени проницаемость среды и реологические характеристики раствора

(структурная вязкость и предельное напряжение сдвига). При этом проницаемость среды уменьшается, а вязкость и напряжение сдвига увеличиваются. При глинизации и силикатизации все эти изменения могут быть вызваны явлениями коагуляции дисперсной фазы.

Строго исследовать влияние обоих факторов (длины и времени) на коэффициент фильтрации затруднительно. Для выяснения характера этих явлений требуется серия сложных экспериментов, которыми пока не располагаем. Поэтому задачу приходится решать отдельно. Сначала исследовать случай, когда коэффициент времени незначителен. Это соответствует тому случаю нагнетания, когда схватывание цементного раствора происходит после окончания инъекции или для глинизации применяются медленно коагулирующие растворы. А. Н. Адамович и Д. В. Колтунов отмечают, что время нагнетания на распространение раствора влияет лишь в ограниченных пределах сроков схватывания цемента.

В дальнейшем, по мере увеличения времени контактирования раствора с породой, проницаемость тампонируемой среды и коэффициент фильтрации резко уменьшаются. Может оказаться, что изменения коэффициента фильтрации по времени будут значительно больше изменений, обусловленных длиной. Поэтому для больших периодов нагнетания необходимо исследовать оба случая изменений  $k$ .

Исследование вопросов, связанных с изменениями параметров пористой среды по времени при нагнетании дисперсных жидкостей, очень сложно и требует больших экспериментов. Описание некоторых из них посвящена отдельная глава данной книги.

### 3. Боковое нагнетание с учетом пластических напряжений структурной жидкости

При непрерывном изменении коэффициента фильтрации по длине потока закон изменения давления при нагнетании из скважины по схеме линейного источника выражается уравнением

$$dp = - \frac{\gamma Q}{2\pi a} \frac{1}{k(r)} \cdot \frac{1}{r} dr, \quad (9, VII)$$

где  $Q$  — расход нагнетания;

$a$  — мощность тампонируемого слоя;

$r$  — радиус распространения нагнетаемой жидкости.

**Структурный поток в крупнозернистых грунтах.** Рассмотрим сначала структурный поток в крупнозернистой среде. В соответствии с формулами (6 и 7, VII) коэффициент фильтрации равен

$$k = \frac{\gamma F}{A\mu \left( 1 + BC \frac{1}{\omega} \right)}, \quad (10, VII)$$



где

$$E = \frac{m^{0.1} d_0^4}{1.2 D_0^2}$$

Скорость фильтрации для схемы линейного источника

$$w = \frac{Q}{2\pi ar}$$

Отсюда имеем

$$k = \frac{\gamma E}{A_\mu \left(1 + BC \frac{2\pi ar}{Q}\right)} \quad (11, VII)$$

Это значение коэффициента  $k$  надо внести в уравнение (9, VII)

$$dp = -\frac{Q}{2\pi a} \frac{A_\mu}{E} \frac{1 + BC \frac{2\pi ar}{Q}}{r} dr \quad (12, VII)$$

Интегрируя уравнение по  $p$  в пределах от  $p_0$  до  $p$  и по  $r$  в пределах от  $r_0$  до  $r$ , получим закон распределения давления по длине потока

$$p = p_0 - \frac{A_\mu}{E} \left[ \frac{Q}{2\pi a} \ln \frac{r}{r_0} + BC(r - r_0) \right] \quad (13, VII)$$

Интегрируя уравнение (12, VII) в других пределах, найдем величину забойного давления  $p_0$

$$p_0 = \frac{A_\mu}{E} \left[ \frac{Q}{2\pi a} \ln \frac{R}{r_0} + BCR \right] + p_R \quad (14, VII)$$

Предполагается, что  $r_0$  мало по сравнению с радиусом предельного растекания  $R$  — радиусом инъекции.

Уравнению (13, VII) можно придать другой вид, если вместо  $p_0$  подставить его значение, определяемое уравнением (14, VII):

$$p = \frac{A_\mu}{E} \left[ \frac{Q}{2\pi a} \ln \frac{R}{r} + BC(R - r) \right] + p_R \quad (15, VII)$$

По уравнению (14, VII) можно определить величину забойного давления при нагнетании структурной жидкости по схеме линейного источника в водоносный грунт, имеющий пластовое давление  $p_R$ , если пренебречь вязкостью вытесняемой воды.

Так как по мере увеличения времени нагнетания радиус цементации (глинизации) увеличивается, то в зависимости от постановки задачи будет изменяться по времени или расход нагнетаемой жидкости  $Q$  или величина забойного давления  $p_0$ . Следовательно, и давление в любой точке поля, определяемое уравнениями (13 и 15, VII), является функцией времени.

По линейному закону скорость фильтрации

$$w = -\frac{A_\mu}{E} \frac{dp}{dr}$$

С другой стороны, скорость фильтрации выражается через скорость в поре

$$w = mv = m \frac{dr}{dt}$$

Исключая из этих двух уравнений  $w$ , будем иметь

$$m \frac{dr}{dt} = -\frac{A_\mu}{E} \frac{dp}{dr}$$

Подставляя значение градиента давления  $\frac{dp}{dr}$  из уравнения 12, VII, в место  $\mu$  — значение эффективной вязкости, получим

$$m \frac{dr}{dt} = \frac{Q}{2\pi ar} \quad (16, VII)$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим закон движения структурной жидкости во времени

$$t = \frac{\tau am}{Q} (r^2 - r_0^2) \quad (17, VII)$$

Пренебрегая малой величиной  $r_0^2$ , принимая  $r=R$  и  $t=T$ , определим радиус инъекции  $R$  для заданного времени нагнетания  $T$  и постоянного расхода  $Q$

$$R = \sqrt{\frac{Q}{\tau am} T} \quad (18, VII)$$

Из уравнения (14, VII) находим расход нагнетания

$$Q = \frac{\left[ \frac{E(p_0 - p_R)}{A_\mu} - BCR \right] 2\pi a}{\ln \frac{R}{r_0}} \quad (19, VII)$$

Подставив значения расхода в уравнение (18, VII), получим величину радиуса инъекции  $R$  при постоянном перепаде давления  $(p - p_R)$  для заданного времени  $T$

$$R = \sqrt{\frac{\left[ \frac{E(p_0 - p_R)}{A_\mu} - BCR \right] 2T}{m \ln \frac{R}{r_0}}} \quad (20, VII)$$

Во всех предыдущих уравнениях  $r_0$  обозначает внутренний радиус нагнетательной скважины (инъектора). Уравнение (20, VII)



решается графически. Таким образом, уравнения (18—20, VII) определяют радиус растекания — инъекции структурной жидкости в крупнозернистой среде, нагнетаемой по схеме линейного источника, в функции постоянного расхода или в функции постоянного перепада давления. В зависимости от этого определяется и величина давления  $p$  в любой точке поля (13—15, VII).

Из уравнения (19, VII) видно, что при постоянном перепаде давления расход нагнетаемой жидкости зависит от радиуса растекания. Но если расход одножидкостной системы в этом случае асимптотически приближается к нулю, то для структурной жидкости расход становится равным нулю значительно раньше, а именно, когда будет достигнуто соотношение

$$\frac{E(p_0 - p_R)}{A\mu} = BCR.$$

Отсюда для плоско-радиального движения определяется предельно возможная величина радиуса нагнетания структурной жидкости  $R_{\max}$  при постоянном перепаде давления

$$R_{\max} = \frac{E(p_0 - p_R)}{ABC\mu}. \quad (21, VII)$$

Подставим в уравнение значения коэффициентов  $E$ ,  $B$  и  $C$ :

$$E = \frac{m^{0.1} d_0^4}{1.2 D_0^2}; \quad B = \frac{\tau_0}{\mu}; \quad C = \frac{d_0^3}{3.2 m^{0.3} D_0^2}.$$

После подстановки получим

$$R_{\max} = \frac{2.66 m^{0.4}}{A} d_0 \left( \frac{p_0 - p_R}{\tau_0} \right). \quad (22, VII)$$

*Пример определения предельного радиуса нагнетания в проницаемой среде — однородной гравий  $D_0 = 0.02$  м, пористостью  $m = 0.4$  (коэффициент фильтрации  $k = 2$  м/сек) Определить предельный радиус нагнетания  $R_{\max}$  для трех составов цементной суспензии  $B : C = 4$ ,  $\tau_0 = 1.77$  н/м<sup>2</sup>;  $B : C = 2$ ,  $\tau_0 = 2.1$  н/м<sup>2</sup> и  $B : C = 1$ ,  $\tau_0 = 3.93$  н/м<sup>2</sup>. Перепад давления постоянный  $(p_0 - p_R) = 98 \cdot 10^4$  н/м<sup>2</sup> (10 ат). Число, характеризующее коэффициент гидравлического сопротивления ( $\lambda_0$ ),  $A = 110$ .*

Средний диаметр пор по формуле (25, III)

$$d_0 = 1.25 \cdot 0.4 \cdot 0.02 = 0.01 \text{ м},$$

$$m^{0.4} = 0.4^{0.4} = 0.693.$$

По формуле (22, VII) предельные радиусы:

$$R_{\max} = \frac{2.66 \cdot 0.693}{110} \cdot 0.01 \frac{98 \cdot 10^4}{1.77} = 93 \text{ м};$$

$$R_{\max} = \frac{2.66 \cdot 0.693}{110} \cdot 0.01 \frac{98 \cdot 10^4}{2.1} = 78.5 \text{ м};$$

$$R_{\max} = \frac{2.66 \cdot 0.693}{110} \cdot 0.01 \frac{98 \cdot 10^4}{3.93} = 41.5 \text{ м}.$$

Как видно, при постоянном перепаде давления предельный радиус нагнетания ограничен величиной предельного напряжения сдвига. Уравнения (18—20, VII) позволяют при нагнетании структурных жидкостей решать ряд практических задач.

1. Заданы расход нагнетания  $Q$  и время  $T$ . По уравнению (18, VII) определяется радиус инъекции, а по уравнению (14, VII) — давление на забое  $p_0$ .

2. Заданы перепад давления  $(p_0 - p_R)$  и время нагнетания  $T$ . По уравнению (20, VII) вычисляется радиус инъекции  $R$ . По уравнениям (18 и 19, VII) — расход  $Q$ .

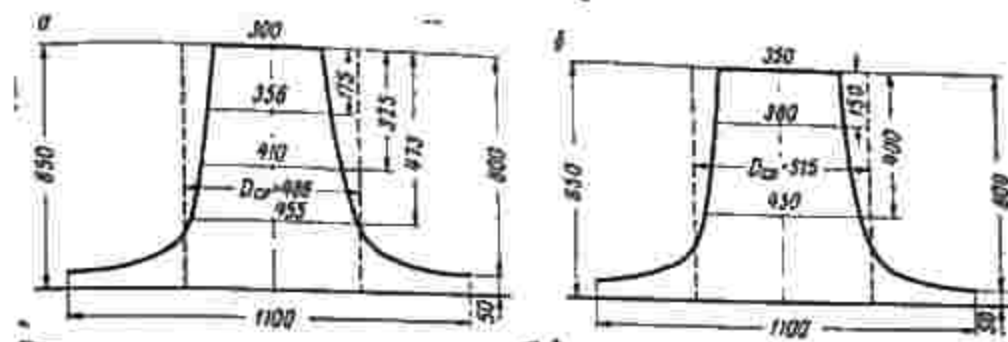


Рис. 88. Очертания фильтрационных потоков по размерам со стеклами: а — эксперимент I; б — эксперимент II

3. Заданы расход нагнетания  $Q$  и радиус инъекции  $R$ . По уравнению (14, VII) определяется расчетная (наибольшая) величина давления на забое  $p_0$ . По уравнению (18, VII) находится время нагнетания  $T$ .

Во всех этих задачах величина пластового давления считается известной так же, как реологические характеристики нагнетаемой жидкости и геометрические элементы пористой среды. На рис. 88 показаны геометрические очертания фильтрационных потоков по размерам, снятым со стекла. Здесь же пунктиром обозначены равновеликие площади диаметральных сечений сталактитов в результате приведения трапециевидных сечений их к прямоугольным.

Для определения числа  $A$ , характеризующего коэффициент гидравлического сопротивления в порах при фильтрации структурной жидкости  $\lambda_0 = \frac{A}{Re_{\text{стп}}}$ , использованы два метода.

По первому, располагая формулой (22, VII), при различных значениях  $A$  (81,6; 100, 115, 150 и 200) вычислялись предельные радиусы растекания суспензии для рассматриваемых экспериментов и сравнивались с полученными значениями простирання опытных потоков. Определение диаметра пор дробленого кварца сделанных потоков. Определено, что вероятные значения параметра  $A$  находятся где-то между 100 и 115, определяющими соответственные предельные радиусы растекания  $R_{\max} = 0.434$  и  $0.376$  м. Значения  $A$ , равные 150 и 200, исключаются, так как



деляют предельные радиусы меньше наблюдаемых ( $R_{ср} = 0.243$  и  $0.258 \text{ м}$ ).

По второму методу вычислены кривые  $Q=f(T)$  при различных значениях числа  $A$ . Для этого по уравнению (19, VII) для разных значений  $R$  определены расходы нагнетаемой жидкости  $Q$ , а по уравнению (18, VII) — время нагнетания  $T$ . Три варианта кривых показаны на рис. 89. Здесь же дана и опытная кривая  $Q=f(T)$ , по-

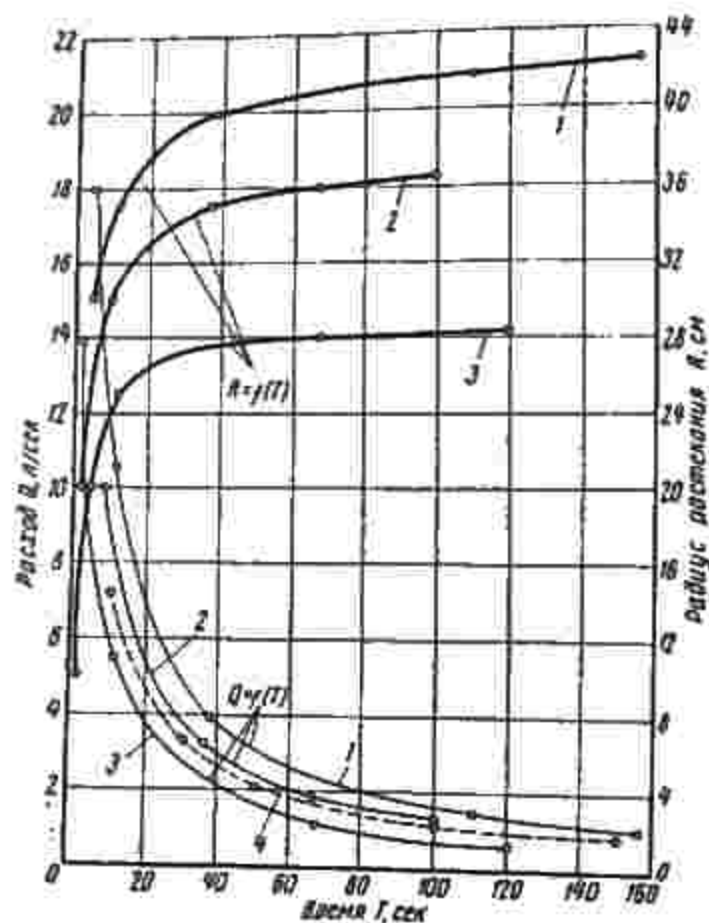


Рис. 89. Кривые  $Q=f(T)$  и  $R=f(T)$  при разных значениях параметра  $A$ :  
1 —  $A=100$ , 2 —  $A=115$ , 3 —  $A=150$ , 4 — опытная кривая.

лученная в эксперименте. Опытная кривая ближе всего приближается к начертанию теоретической кривой для значения  $A=115$ .

Исходя из опыта с линейным источником, наиболее вероятным значением числа  $A$  следует признать число, близкое к 110—115.

**Структурный поток в трещиноватой среде.** Рассмотрим формулы для трещиноватых горных пород. Коэффициент фильтрации структурной жидкости для трещиноватых горных пород представлен формулой (8, VII)

$$k = \frac{\alpha k_{пр} \gamma}{\mu \left(1 + BC \frac{1}{\omega}\right)}$$

при соответствующем значении константы  $C = \frac{m\delta}{2}$ , где  $\delta$  — средняя толщина трещины. С учетом радиальной скорости  $w$

$$k = \frac{\alpha k_{пр} \gamma}{\mu \left(1 + BC \frac{2\pi a r}{Q}\right)} \quad (23, VII)$$

Закон изменения давления

$$dp = - \frac{Q}{2\pi a} \frac{\mu}{\alpha k_{пр}} \frac{1 + BC \frac{2\pi a r}{Q}}{r} dr \quad (24, VII)$$

Распределение давления по длине потока (радиусу) выражается уравнением

$$p = \frac{\mu}{\alpha k_{пр}} \left[ \frac{Q}{2\pi a} \ln \frac{R}{r} + BC(R-r) \right] + p_R \quad (25, VII)$$

Забойное давление

$$p_0 = \frac{\mu}{\alpha k_{пр}} \left[ \frac{Q}{2\pi a} \ln \frac{R}{r} + BCR \right] + p_R \quad (26, VII)$$

Радиус инъекции для заданного времени нагнетания при  $Q = \text{const}$  определяется формулой (18, VII)

$$R = \sqrt{\frac{Q}{\tau a m} T}$$

Расход нагнетания при постоянном перепаде давления равен

$$Q = \frac{\left[ \frac{\alpha k_{пр} (p_0 - p_R)}{\mu} - BCR \right] 2\pi a}{\ln \frac{R}{r_0}} \quad (27, VII)$$

Радиус инъекции при постоянном перепаде давления для заданного времени нагнетания  $T$  находится из уравнения

$$R = \sqrt{\frac{\left[ \frac{\alpha k_{пр} (p_0 - p_R)}{\mu} - BCR \right] 2T}{m \ln \frac{R}{r_0}}} \quad (28, VII)$$

Предельное значение радиуса растекания

$$R_{max} = \frac{2\alpha k_{пр}}{m\omega} \frac{p_0 - p_R}{\tau_0} \quad (29, VII)$$

Во всех поименованных формулах коэффициент  $\alpha$  по-прежнему обозначает отношение проницаемости пористой среды в присутствии структурной жидкости к проницаемости для воды. Для иллюстрации структурной жидкости к проницаемости пластической жидкости приводится пример расчета одиночной скважины в трещиноватых горных породах.



Пример расчета одиночной скважины в трещиноватых горных породах. Проницаемая среда мощностью  $a = 5$  м представляет трещиноватые горные породы с проницаемостью  $k_{np}$  от 100 до 2000 дарси и коэффициентом связности  $m = 0,05$ . Цементная суспензия состава  $B:Ц = 2$  и относительным весом  $\delta = 1,29$ . Структурная вязкость ее  $\mu = 0,00145$  н·сек/м<sup>2</sup>, предельное напряжение сдвига  $\tau_0 = 1,47$  н/м<sup>2</sup>. Постоянный напор нагнетания  $H = 80$  м вод ст., равный  $78,48 \cdot 10^4$  н/м<sup>2</sup>. Длительность нагнетания  $T = 1$  ч.

Средний просвет трещин горных пород при заданных значениях проницаемости и связности определяется по формуле (36, III)

$$z = 4,83 \sqrt{\frac{k_{np}}{m^2 \cdot l}}$$

При постоянном напоре нагнетания  $H$  или постоянном перепаде давления  $(p_0 - p_R)$  для заданного времени нагнетания радиус растекания цементной суспензии или радиус цементации находится по формуле (28, VII)

$$R = \sqrt{\frac{\frac{2k_{np}(p_0 - p_R)}{\mu} - BCR}{m \ln \frac{R}{r_0}} \cdot 2T}$$

где  $\alpha = \frac{81,6}{110} = 0,74$  — отношение проницаемости пористой среды

в присутствии структурной жидкости к проницаемости для воды;

$(p_0 - p_R) = 78,48 \cdot 10^4$  н/м<sup>2</sup> — перепад давления;

$\beta = \frac{\tau_0}{\mu} = \frac{1,47}{0,00145} = 1014$  сек<sup>-1</sup> — реологическая константа;

$C = \frac{m\delta}{2}$  — геометрическая константа;

$r_0 = 0,05$  м — радиус нагнетательной скважины.

Данные вычислений радиуса цементации для  $T = 1$  ч по всем разновидностям горных пород приводятся в табл. 33

Таблица 33

№ п/п	Проницаемость $k_{np}$ дарси	Средний просвет трещины $z$ , м	Константа $C$ , м	Радиус цементации $R$ , м
1	100	$1,1 \cdot 10^{-3}$	$2,75 \cdot 10^{-3}$	1,42
2	500	$2,45 \cdot 10^{-3}$	$6,13 \cdot 10^{-3}$	3,19
3	1000	$3,50 \cdot 10^{-3}$	$8,75 \cdot 10^{-3}$	4,47
4	1500	$4,30 \cdot 10^{-3}$	$10,75 \cdot 10^{-3}$	5,45
5	2000	$4,95 \cdot 10^{-3}$	$12,38 \cdot 10^{-3}$	6,31

Применение для расчета нагнетания формул, учитывающих дисперсную структуру тампонажных жидкостей, позволяет более обоснованно и правильно определять расчетные элементы тампонажа. Новый подход к расчету нагнетания отражает не только физико-механические особенности тампонажных жидкостей, но и разновидности пористой среды.

#### 4. Донное нагнетание структурных жидкостей (Схема пространственного источника)

Нагнетание жидкости по схеме пространственного источника обуславливает быструю стабилизацию течения, быстрый переход к установившемуся движению. Для определения числа  $A$  по этой схеме нагнетания произведено достаточное количество экспериментов. Во всех случаях среда нагнетания состоит из крупнозернистого несвязного материала — щебня кварца.

**Свободный источник.** Предполагается неограниченное простирание пористой среды. Течение из источника, деформированное действием силы тяжести, происходит в полузамкнутой разделительной поверхности с постоянным расходом  $Q$ . При учете радиальных перемещений эффективная вязкость  $\gamma'$  и коэффициент фильтрации  $k$  структурной жидкости будут функцией радиальной скорости, и для определения пьезометрического давления в жидкости может служить уравнение (2, VI)

$$d\left(\frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{Q}{4\pi} \frac{1}{k(r)} \frac{1}{r^2} dr.$$

Для структурной жидкости в крупнозернистой среде коэффициент фильтрации равен

$$k = \frac{\gamma E}{A_2 \left(1 + BC \frac{1}{m}\right)}$$

Радиальная скорость

$$\omega = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

При подстановке последней:

$$k = \frac{\gamma E}{A_2 \left(1 + BC \frac{4\pi r^2}{Q}\right)}$$

Константы  $E$ ,  $B$  и  $C$  имеют прежние значения. Подставляя  $k$  в уравнение (2, VI), получим

$$d\left(\frac{p}{\gamma}\right) = -\frac{Q}{4\pi} \frac{A_2}{\gamma E} \frac{1 + BC \frac{4\pi r^2}{Q}}{r^2} dr. \quad (30, VII)$$

Интегрируя по  $p$  в пределах от  $p_0$  до  $p$  и по  $r$  от  $r_0$  до  $r$ , найдем давление в любой точке фильтрационного потока

$$p = p_0 - \frac{A_2}{E} (r - r_0) \left(\frac{Q}{4\pi r_0^2} + BC\right). \quad (31, VII)$$

Интегрируя уравнение (30, VII) в других пределах, получим величину забойного давления

$$p_0 = \frac{A_2}{E} (R - r_0) \left(\frac{Q}{4\pi r_0 R} + BC\right) + p_R \quad (32, VII)$$



Если принять, что величина  $r_0$  мала по сравнению с  $R$ , то уравнению (32, VII) можно придать вид

$$P_0 = \frac{A_0}{E} \left( \frac{Q}{4\pi r_0} + BCR \right) + P_R \quad (33, VII)$$

Как и раньше, суммарная потеря давления состоит из двух частей: потери на вязкие и пластические напряжения. Первые зависят от величины расхода нагнетаемой жидкости, вторые от реологических и геометрических характеристик жидкости и среды нагнетания.

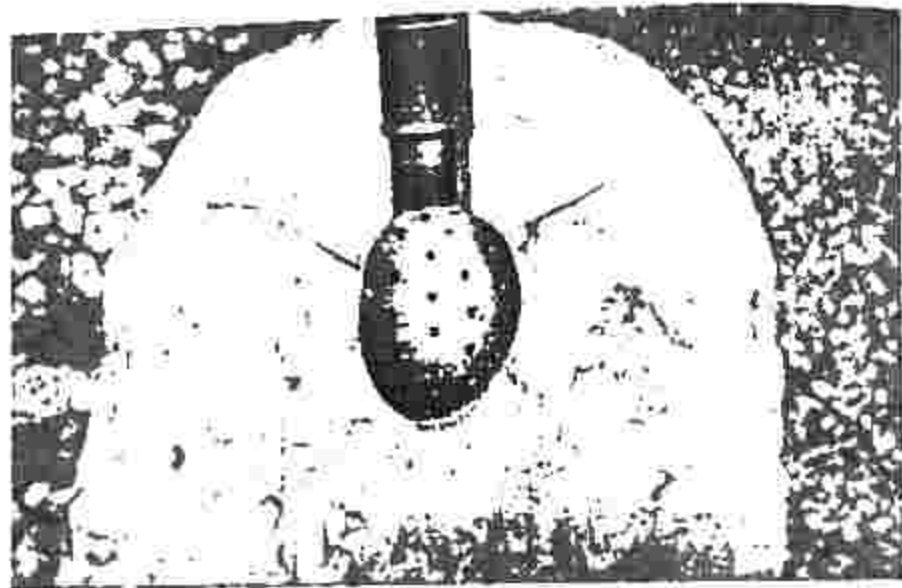


Рис. 90. Поле пространственного источника, возмущенного силой тяжести, при нагнетании цементной суспензии

На рис. 90 показан отпечаток фильтрационного потока в щебеночном массиве, цементированном суспензией относительного веса 1,314 и представленном смесью кварца  $(4-13-22) \cdot 10^{-3}$  м при пористости 0,5. На рис. 91 — общий вид щебеночного массива из смеси кварца  $(4-13-22) \cdot 10^{-3}$  пористостью 0,45, тампонируемого цементной суспензией относительного веса 1,4. Напоры нагнетания составляли 2,35—2,45 м в столбе суспензии. Давление на забоях 2,10—2,20 м. Расходы нагнетания для первого эксперимента 0,002 м<sup>3</sup>/сек, второго — 0,007 м<sup>3</sup>/сек и третьего — 0,0017 м<sup>3</sup>/сек. Все фильтрационные потоки имеют ясно выраженную куполообразную, круто надающую форму.

По уравнению (33, VII) сделано определение числа  $A$  для формулы коэффициента гидравлического сопротивления  $\lambda$  при движении цементных суспензий в поровых каналах указанных массивов

$$A = \frac{P_0 E}{\mu \left( \frac{Q}{4\pi r_0} + BCR \right)} \quad (34, VII)$$

Константы  $B$ ,  $C$  и  $E$  — по формулам (7 и 10, VII). В экспериментах, представленных кварцевым щебнем разной крупности, действующие диаметры зерна  $D_0$  определены по второй схеме формирования поры, когда мелкие зерна заполняют промежутки между крупными. Пористость скелета решетки вята равной

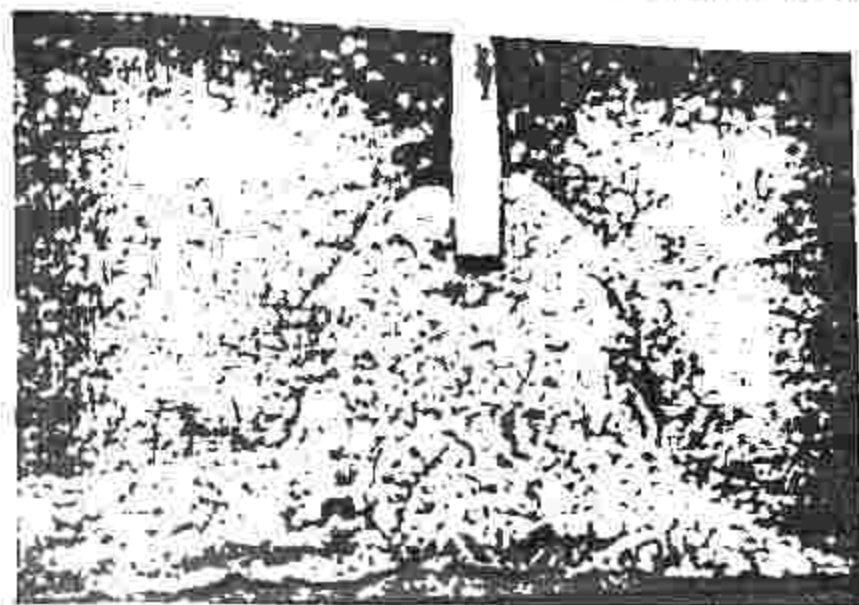


Рис. 91. Поле при истечении цементной суспензии через круглое отверстие трубы

$m_{\max} = 0,55$ . Процентное содержание мелких фракций для заполнения крупных пор по уравнению (5, III) составляет

$$V_{\text{мелк}(1)} = 38\% \text{ и } V_{\text{мелк}(2)} = 40,3\%$$

Действующие диаметры фракций по формуле (6, III) получились равными

$$D_{0(1)} = 5,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$D_{0(2)} = 5,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Диаметры пор для всех экспериментов определены по формуле (28, III) и равны  $d_{01} = 2,26 \cdot 10^{-3}$  м,  $d_{02} = 1,87 \cdot 10^{-3}$  м и  $d_{03} = 1,53 \cdot 10^{-3}$  м. Среднее значение  $A$ , полученное по схеме пространственного источника, определяется равным  $\frac{91 + 124 + 90}{3} = 102$ , что

весьма близко приближается к данным определений предыдущего параграфа по схеме линейного источника.

Течение структурной жидкости из источника, деформированного действием силы тяжести, происходит с постоянным расходом  $Q$ . Деформирующее действие силы тяжести эквивалентно воздействию на поток источника постоянной осевой скорости  $u = k'$ . Постоянно



вное значение коэффициента фильтрации структурной жидкости  $k'$  можно получить из формулы (6, VII), приняв для выражения вязкости структурной жидкости второй вариант осреднения градиента скорости

$$v' = \frac{R\mu}{\gamma} = \frac{k'}{\gamma} \left( \frac{N+1}{N-1} \right)$$

$$\text{где } N = \frac{Id\gamma}{4\tau_0}$$

Для коэффициента фильтрации гидравлический уклон  $I$  равен единице, а вместо диаметра  $d$  надо подставить средний диаметр пор  $d_0$ . При этих условиях

$$k' = \frac{\gamma E}{A\mu} \frac{1 - \frac{4\tau_0}{\gamma d_0}}{1 + \frac{4\tau_0}{\gamma d_0}} \quad (35, VII)$$

Нетрудно видеть, что при  $\tau=0$  формула (35, VII) переходит в формулу коэффициента фильтрации однородной жидкости:  $k = \frac{\gamma E}{A\mu}$ .

Горизонтальное протекание потока по-прежнему определяется диаметрами горизонтальных сечений разделительной поверхности. Для определения последних служит уравнение (3, V) при соответствующем значении  $k'$  (35, VII)

$$y = \sqrt{\frac{QA_{\lambda}}{\tau\gamma E} \frac{1 + \frac{4\tau_0}{\gamma d_0}}{1 - \frac{4\tau_0}{\gamma d_0}}} \times \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} \quad (36, VII)$$

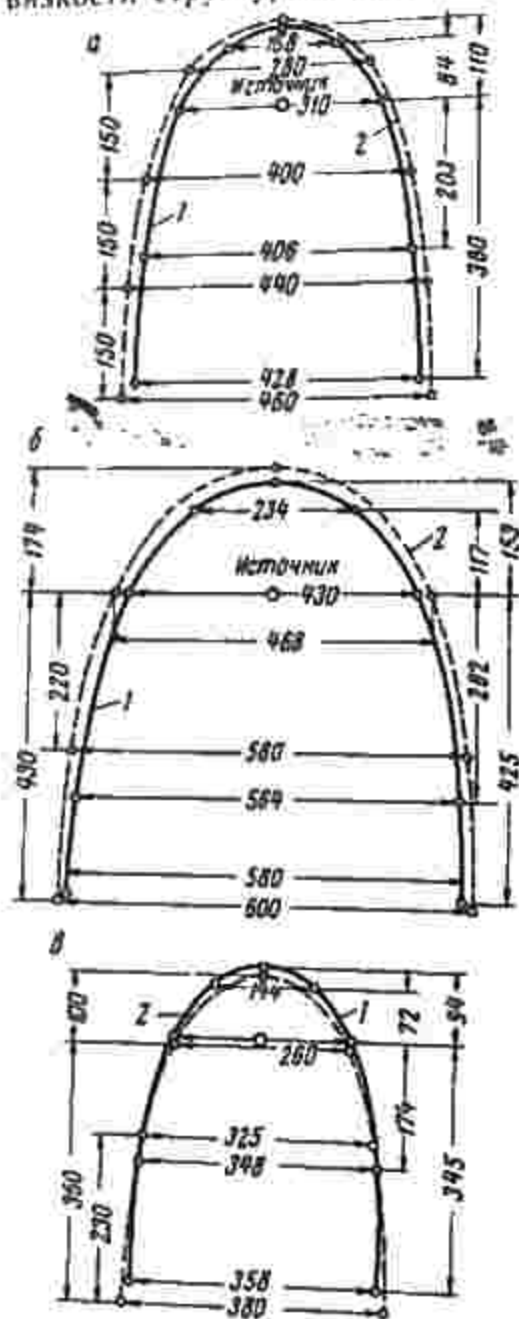


Рис. 92 Опытные и теоретические кривые «депрессии» при нагнетании цементной суспензии по схеме пространственного источника:  
а — эксперимент № 1 б — эксперимент 1;  
в — эксперимент 2 1 — теоретическая кривая 2 — опытная кривая

Вычисленные по уравнению (36, VII) разделительные кривые для всех трех экспериментов свободного источника показали очень хорошее совпадение фактических и теоретических кривых (рис. 92).

Так, отношение горизонтальных размеров депрессионных поверхностей (теоретических к опытным) на нижнем уровне нагнетания составляет 0,93 (а); 0,97 (б) и 0,95 (в), т. е. разница между теоретической и опытной величинами протекания потоков находится в пределах 3—7%, что вполне допустимо.

Подставив вместо  $E$  соответствующее значение, принятое при выводе формулы (10, VII), и приняв за средний диаметр поры  $d_0$  протекания фильтрационного потока при нагнетании по схеме пространственного источника для всей группы песчано-гравелисто-галечниковых грунтов

$$y = \sqrt{\frac{0,5QA_{\lambda}}{\tau\gamma m^2 D_0^2} \frac{1 + \frac{3,2\tau_0}{\gamma m D_0}}{1 - \frac{3,2\tau_0}{\gamma m D_0}}} \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \quad (37, VII)$$

Формула показывает, что горизонтальное протекание фильтрационного потока при всех прочих равных условиях увеличивается с уменьшением диаметра фракций.

Все эксперименты устанавливают чрезвычайно быструю стабилизацию фильтрационного потока. Для приближенного расчета времени движения структурной жидкости из забоя вдоль вертикальной оси  $x$  при постоянном расходе нагнетания и постоянном давлении на забое может служить формула (71, V) при коэффициенте фильтрации  $k'$  по формуле (35, VII)

$$T = \frac{m}{k'} \left( R - \sqrt{\frac{Q}{4-k'}} \operatorname{arctg} \frac{R}{\sqrt{\frac{Q}{4-k'}}} \right) \quad (38, VII)$$

Например, для третьего эксперимента (с однородными фракциями  $4 \cdot 10^{-3}$  м) подстановка в эту формулу численных значений элементов нагнетания определяет  $T = 12,5$  сек.

Отметим, что для второго варианта осреднения протекания фильтрационного потока, принятого для расчета горизонтального протекания фильтрационного потока, коэффициент гидравлического сопротивления  $\lambda$  находится из соотношений

$$\lambda = \frac{A}{Re'_{стр}} = \frac{B}{Re'_{стр}}$$

откуда

$$B = \frac{A Re'_{стр}}{Re'_{стр}} \quad (39, VII)$$

В заключение рассмотренной схемы нагнетания необходимо сказать, что потребовалась очень небольшая величина забойного



давления 2,7 м вод. ст., чтобы полностью заполнить поры щебеночного массива цементной суспензией и практически сделать его водонепроницаемым. На рис. 93 показан образец цементированного щебня, взятый из массива, в который производилось нагнетание цементной суспензии первого эксперимента. Через 16 ч после инъ-ектирования массив не принял воду под давлением 2 ат.



Рис. 93. Образец цементированного щебня при нагнетании цементной суспензии (  $\sigma = 1,311$  ) по схеме пространственного источника

Пример расчета темпонажной скважины в негнзлых грунтах. Для оценки эффективности схемы пространственного источника необходимо сделать расчет нагнетания цементной суспензии в проницаемую среду четырех формаций.

1. Однородный крупнозернистый песок  $D_0 = 0,002$  м,  $m = 0,37$ .
2. Песчано-гравелистая смесь.
3. Песчано-гравелистая смесь

$m = 0,35$	0,002 м . . . . . 18%	$m = 0,36$	0,004 м . . . . . 37%
	0,004 м . . . . . 32%		0,013 м . . . . . 33%
	0,013 м . . . . . 30%		0,022 м . . . . . 30%
	0,022 м . . . . . 20%		

4. Щебеночный грунт  $m = 0,38$ 

0,006 м . . . . . 50%
0,013 м . . . . . 50%

Пористость каркаса решетки второй среды  $m_{max} = 0,5$ , третьей и четвертой — 0,55. Мощность массивов  $\sigma = 3$  м. Коэффициент фильтрации четвертой среды  $k = 0,041$  м/сек. Параметр  $A = 110$ .

Цементная суспензия для первой среды имеет состав 1 : 2 (относительный вес 1,29),  $\mu = 0,00146$  м·сек/м<sup>2</sup>,  $\tau_0 = 1,47$  н/м<sup>2</sup>, для второй, третьей и четвертой 1 : 1 (относительный вес 1,50),  $\mu = 0,00177$  м·сек/м<sup>2</sup>,  $\tau_0 = 3,93$  н/м<sup>2</sup>.

Решение 1. По уравнению (5, III) процентное содержание мелких фракций для заполнения крупных пор в песчано-гравелистых смесях:

Действующие диаметры фракций:  $D_{0,01} = 0,002$  м,  $D_{0,02} = 0,0031$  м,  $D_{0,03} = 0,0053$  м,  $D_{0,04} = 0,0095$  м.  
 Действующие диаметры фракций:  $D_{0,01} = 0,002$  м,  $D_{0,02} = 0,0031$  м,  $D_{0,03} = 0,0053$  м,  $D_{0,04} = 0,0095$  м.  
 Диаметры пор (29, III):  $d_{0,01} = 0,00092$  м,  $d_{0,02} = 0,0014$  м,  $d_{0,03} = 0,0024$  м.  
 Средний диаметр поры щебеночного грунта определяется по уравнению (24, III):

$$d_0 = \sqrt[4]{\frac{98 \cdot 0,0000013 \cdot 0,0095^2 \cdot 0,041}{9,81 \cdot 0,38^{0,1}}} = 0,0026 \text{ м.}$$

2. Горизонтальные координаты раздельной поверхности фильтрационных потоков определяются по уравнению (37, VII) для песчаных и песчано-гравелистых грунтов, по уравнению (36, VII) — для щебня.

При подстановке соответствующих данных эти уравнения для всех четырех сред приводятся к виду:

$$y_1 = 9,4\sqrt{Q} \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}};$$

для второй среды

$$y_2 = 11,4\sqrt{Q} \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}};$$

для третьей среды

$$y_3 = 3,55\sqrt{Q} \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}};$$

для щебня

$$y_4 = 5,11\sqrt{Q} \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}.$$

Значения косинусов углов  $\theta_0$  соответствующих конечной глубине нагнетания  $x = a$ , определяются уравнением (4, V), при  $k = k'$  (35, VII):

$$\cos \theta_0 = \frac{-k'}{Q} a^2 \left( \sqrt{1 + \frac{2Q}{rk'a^2}} - 1 \right).$$

$$k' = \frac{\gamma E}{A \mu} \frac{1 - \frac{4\tau_0}{\gamma d_0}}{1 + \frac{4\tau_0}{\gamma d_0}}.$$

Коэффициенты фильтрации:  $k_1 = 0,00353$  м/сек,  $k_2 = 0,00313$ ;  $k_3 = 0,026$ ,  $k_4 = 0,012$

Косинусы предельных углов  $\theta_0$  равны:

$$\cos \theta_0^I = \frac{0,1}{Q} (\sqrt{1 + 20Q} - 1);$$

$$\cos \theta_0^{II} = \frac{0,098}{Q} (\sqrt{1 + 22,5Q} - 1);$$

$$\cos \theta_0^{III} = \frac{0,733}{Q} (\sqrt{1 + 2,7Q} - 1);$$

$$\cos \theta_0^{IV} = \frac{0,338}{Q} (\sqrt{1 + 5,9Q} - 1).$$



Дальнейшее решение уравнений (I и II) определяется только величиной нагнетаемого расхода  $Q$ , которая в свою очередь обусловлена наличием того или иного технологического оборудования (насосы, растворомешалки и др.) Допустим, что расход нагнетания  $Q$  равен 18 л/сек. Тогда получается:

$$\cos \theta_0^I = 0,915; \quad y_1 = 1,21 \text{ м}; \quad R_1 = 3,27 \text{ м};$$

$$\cos \theta_0^{II} = 0,910; \quad y_2 = 1,49 \text{ м}; \quad R_2 = 3,30 \text{ м};$$

$$\cos \theta_0^{III} = 0,940; \quad y_3 = 0,47; \quad R_3 = 3,20 \text{ м};$$

$$\cos \theta_0^{IV} = 0,930; \quad y_4 = 0,64 \text{ м}; \quad R_4 = 3,23 \text{ м}.$$

3. Давления на забоях скважин определяются уравнением (33, VII). При  $p_D = 0$  они будут равны:

$$p_{0(1)} = 351\,272 \text{ н/м}^2 (3,56 \text{ ат});$$

$$p_{0(2)} = 600\,000 \text{ н/м}^2 (6,13 \text{ ат});$$

$$p_{0(3)} = 333\,000 \text{ н/м}^2 (3,39 \text{ ат});$$

$$p_{0(4)} = 315\,000 \text{ н/м}^2 (3,2 \text{ ат}).$$

Таким образом, сферой применения схемы пространственного источника при тампонаже неспящих грунтов может служить широкая область неспящих грунтов — крупных песков и щебня, характеризуемых коэффициентами фильтрации  $k \leq 0,05 \text{ м/сек}$ .

Схема источника вблизи стенки. Забойное давление можно найти по уравнению (14, VII), включив в последнее коэффициент, учитывающий возмущающее действие стенки. В соответствии с уравнением (65, V) коэффициент влияния стенки определяется в функции расстояния источника до стенки  $a$

$$\varepsilon = \frac{2(\beta + 1)}{2\beta + 1},$$

где  $\beta = \frac{a}{r_0}$ .

Поэтому для определения забойного давления в схеме источника вблизи стенки служат те же уравнения (32 и 33, VII), но модифицированные коэффициентом  $\varepsilon$ :

$$p_0 = \varepsilon \frac{A_s}{E} (R - r_0) \left( \frac{Q}{4\pi r_0 R} + BC \right) + p_R. \quad (40, VII)$$

И если принять, что  $r_0$  мало по сравнению с  $R$ , а  $p_r = 0$

$$p_0 = \varepsilon \frac{A_s}{E} \left( \frac{Q}{4\pi r_0} + BCR \right). \quad (41, VII)$$

По уравнению (41, VII) произведена обработка экспериментальных данных для определения числа  $A$ , характеризующего гидравлические сопротивления при движении структурной жидкости в порах.

Оба эксперимента рис 94 выполнены с тяжелыми суспензиями относительно веса 1,6—1,65. Нагнетание жидкости производилось насосом при давлении 0,4—0,5 ат. Среднее значение числа  $A$ , полученное по схеме источника вблизи стенки,  $\frac{120 + 100}{2} = 110$ . Среднее значение из всех наблюдений по схеме пространственного источника  $\frac{91 + 124 + 90 + 120 + 100}{5} = 105$ . Среднее же по двум схемам — 110. Последнее и надо принять за окончательную величину.

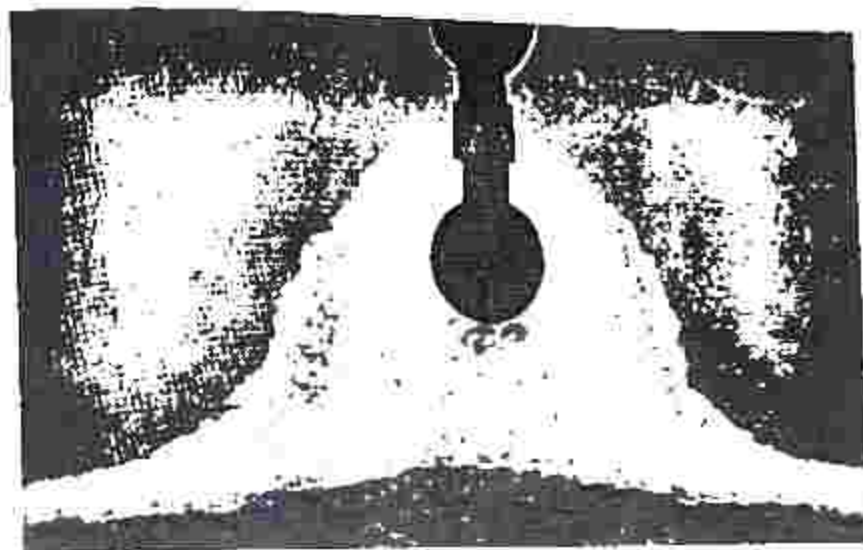


Рис. 94. Поле пространственного источника вблизи плоской стенки при нагнетании цементной суспензии

числа  $A$  для коэффициента гидравлического сопротивления при движении структурной жидкости в поровых каналах крупнозернистой среды  $\lambda_0 = \frac{110}{Re_{стр}}$ .

Эксперимент показывает, что и в данной схеме происходит очень быстрая, почти мгновенная, стабилизация фильтрационного потока. Последний имеет распластанный веерообразную форму. Кривая «депрессии» в этой схеме нагнетания достаточно хорошо отвечает теоретической формуле (53, V) при  $\psi = 1$

$$\beta^2 = \sqrt{\frac{Q}{\pi k' a^2}} \sqrt{\frac{1-\alpha}{2xy(1-x)^2 + \beta^2} + \frac{1+x}{2xy(1+x)^2 + \beta^2}}. \quad (42, VII)$$

Здесь  $\beta = \frac{u}{a}$  и  $\alpha = \frac{x}{a}$ , где  $x$  и  $y$  — координаты кривой депрессии,  $a$  — расстояние от источника (забоя) до стенки.

Постоянное значение коэффициента фильтрации  $k'$  определяется уравнением (35, VII).

На рис. 95 представлены опытные и теоретические кривые «депрессии» при нагнетании цементной суспензии



вблизи стенки (см. рис. 94). Теоретические «депресссионные» кривые построены по уравнению (42, VII). Наглядное сопоставление тех и других подтверждает их близкую сходимость и полную возможность использования комбинационных течений источника и осевого потока вблизи стенки для получения разделительных кривых рассматриваемой схемы нагнетания.

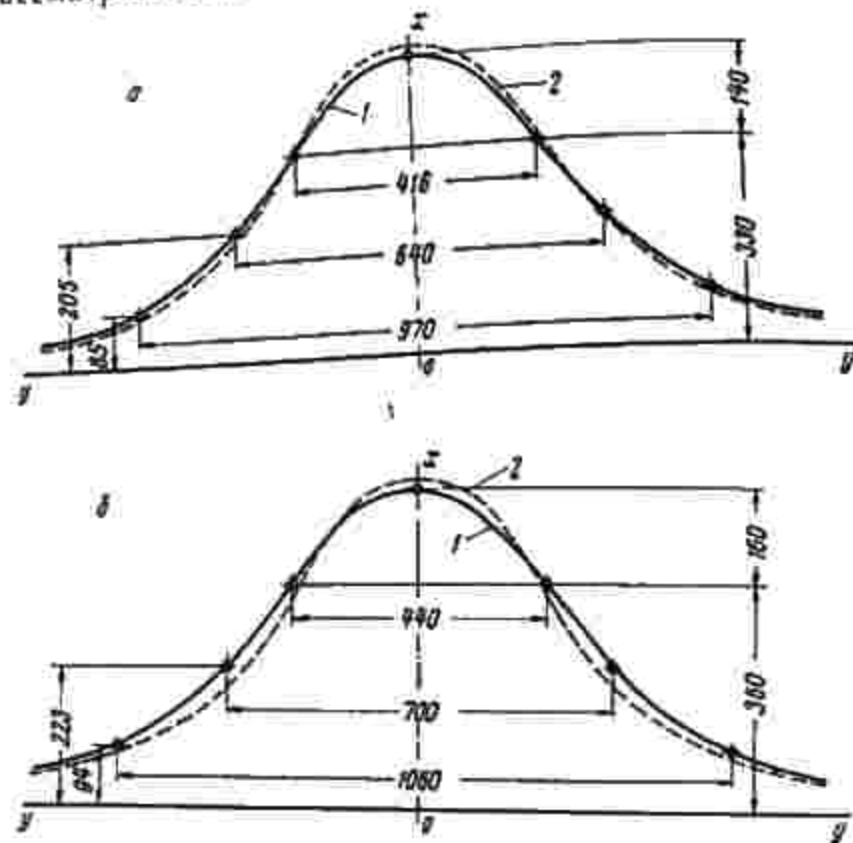


Рис. 85 Опытные и теоретические кривые «депрессии» при нагнетании цементной суспензии по схеме источника вблизи стенки: а — эксперимент 1; б — эксперимент 2; 1 — теоретическая кривая; 2 — опытные данные

Распределение пьезометрического давления в фильтрационном потоке можно найти по уравнениям (60—62, V), если ввести эквивалентное значение коэффициента фильтрации, определяемое уравнением (16, VI):

$$k_0 = \frac{1}{R \int_{r_0}^R \frac{dr}{k(r)r^2}}$$

В это уравнение надо внести функцию  $k(r)$

$$k = \frac{\gamma E}{A_p \left(1 + BC \frac{4\pi r^2}{Q}\right)}$$

Выполняя соответствующее интегрирование и вводя коэффициент влияния стенки  $e$ , найдем эквивалентное значение  $k_0$

$$k_0 = \frac{\gamma E}{A_p \left(1 + \frac{4\pi r_0}{Q} BCR\right)} \quad (43, VII)$$

Подставляя значение  $k_0$  в уравнение (59, V), находим распределение давления  $\frac{p}{\gamma}$ .

Предельный радиус нагнетания для схем пространственных источников. Аналогично тому, как это было сделано для схемы бокового нагнетания (линейного источника), при нагнетании по схеме пространственных источников также может быть установлен предельный радиус растекания цементной суспензии. Из уравнений (33 и 41, VII) имеем:

для свободного источника ( $p_n=0$ )

$$R_{max} = \frac{1}{BC} \left( \frac{p_0 E}{A_p} - \frac{Q}{4\pi r_0} \right) \quad (44, VII)$$

для источника вблизи стенки

$$R_{max} = \frac{1}{BC} \left( \frac{p_0 E}{A_p} - \frac{Q}{4\pi r_0} \right) \quad (45, VII)$$

Второй член выражений, стоящих в скобках, учитывает влияние вязких напряжений в фильтрационном потоке, зависящих от величины расхода нагнетания  $Q$ . Вязкие напряжения неизмеримо малы по сравнению с пластическими напряжениями структурной жидкости. Поэтому и величина  $\frac{Q}{4\pi r_0}$  будет всегда малой по сравнению с первыми членами выражений, стоящих в скобках. Пренебрегая последней, приходим к выражению

$$R_{max} = \frac{1}{BC} \frac{p_0 E}{A_p} \quad (46, VII)$$

аналогичному ранее рассмотренному (21, VII), т. е. предельный радиус нагнетания и в этих схемах ограничен величиной предельного напряжения сдвига.

### 5. Расчет нагнетания структурной жидкости в условиях вытеснения воды

Достаточно рассмотреть основное решение — осесимметричную задачу о вытеснении воды цементной суспензией, нагнетаемой из гидродинамически совершенной скважины в трещиноватую горную породу. Упругость воды и пористой среды не учитывается. Для исследования использован метод последовательной смены стациона-



нарных состояний. Для решения задачи с учетом пластических напряжений в нагнетаемой структурной жидкости применимо уравнение (24, VII)

$$dp = -\frac{Q}{2\pi a} \cdot \frac{\mu}{\alpha k_{np}} \cdot \frac{1 + BC \frac{2\pi ar}{Q}}{r} dr.$$

Обозначив через  $r_c$  радиус контура суспензии в момент времени  $t$ , а через  $R$  — радиус предельного распространения суспензии для момента времени  $T$ , находим распределение давления в области суспензии и водоносности (см. рис. 51). Приняв изобару, совпадающую с контуром суспензии, сначала за контур предельного растекания, а затем за скважину большого диаметра и проинтегрировав исходное уравнение (24, VII) в соответствующих пределах, получим распределение давления в обеих областях:

$$p_1 = p_0 - \frac{\mu_c}{\alpha k_{np}} \left[ \frac{Q}{2\pi a} \ln \frac{r}{r_0} + BC(r - r_0) \right]; \quad (47, VII)$$

$$p_2 = p_R + \frac{p' - p_R}{\ln \frac{R}{r_c}} \ln \frac{R}{r}, \quad (48, VII)$$

где  $p'$  — давление на контуре суспензии  $r_c$ ;

$p_R$  — давление на контуре предельного распространения (пластовое);

$\alpha$  — коэффициент, учитывающий разницу проницаемости среды по суспензии и воде,

$$\alpha = \frac{k'_{np}}{k_{np}} = \frac{81,6}{A}.$$

Прочие обозначения соответствуют обозначениям предыдущих параграфов.

В соответствии с формулой (27, VII) расход нагнетания равен

$$Q = \frac{\left[ \frac{\alpha k_{np} (p_0 - p')}{\mu_c} - BC r_c \right] 2\pi a}{\ln \frac{r_c}{r_0}}.$$

После подстановки значения  $Q$  в уравнение (47, VII) найдем

$$p_1 = p_0 - \left[ \frac{p_0 - p' - MBC r_c}{\ln \frac{r_c}{r_0}} \ln \frac{r}{r_0} + MBC(r - r_0) \right], \quad (49, VIII)$$

где  $M = \frac{\mu_c}{\alpha k_{np}}$ .

На контуре суспензии скорости фильтрации суспензии и воды одинаковы:

$$w_1 = \frac{Q}{2\pi ar_c} = \frac{\frac{\alpha k_{np} (p_0 - p')}{\mu_c} - BC r_c}{r_c \ln \frac{r_c}{r_0}};$$

$$w_2 = \frac{\alpha k_{np}}{\mu_b} \cdot \frac{p' - p_R}{\ln \frac{R}{r_c}} \cdot \frac{1}{r_c}.$$

Приравняв эти уравнения, находим неизвестное давление

$$p' = \frac{\mu_b (p_0 - MBC r_c) \ln \frac{R}{r_c} + \frac{\mu_c}{\alpha} p_R \ln \frac{r_c}{r_0}}{\frac{\mu_c}{\alpha} \ln \frac{r_c}{r_0} + \mu_b \ln \frac{R}{r_c}}. \quad (50, VII)$$

Подставляя эту величину в уравнение (48—49, VII), получим формулы распределения

$$p_1 = p_0 - \left[ \frac{\frac{\mu_c}{\alpha} (p_0 - p_R - MBC r_c)}{\frac{\mu_c}{\alpha} \ln \frac{r_c}{r_0} + \mu_b \ln \frac{R}{r_c}} \ln \frac{r}{r_0} + MBC(r - r_0) \right]; \quad (51, VII)$$

$$p_2 = p_R + \frac{\mu_b (p_0 - p_R - MBC r_c)}{\frac{\mu_c}{\alpha} \ln \frac{r_c}{r_0} + \mu_b \ln \frac{R}{r_c}} \ln \frac{R}{r}. \quad (52, VII)$$

Так как радиус  $r_c$  контура суспензии по мере увеличения времени нагнетания увеличивается, то давления в любой точке  $r$  обеих областей изменяются по времени. Процесс вытеснения воды при нагнетании суспензии (раствора) является неустановившимся.

Находим скорость и дебит нагнетания. Для области цементации

$$w = \frac{Q}{2\pi ar},$$

где  $r_c > r > 0$ . Поэтому

$$w = \frac{\frac{\alpha k_{np} (p_0 - p')}{\mu_c} - BC r_c}{r \ln \frac{r_c}{r_0}}.$$



После подстановки значений  $p'$  из уравнения (50, VII) получим

$$\omega = \frac{k_{np}(p_0 - p_R - MBCr_c)}{\frac{\mu_c}{\alpha} \ln \frac{r_c}{r_0} + \mu_b \ln \frac{R}{r_c}} \cdot \frac{1}{r} \quad (53, VII)$$

То же значение скорости получим и по зоне воды при соотношении

$$\omega = -\frac{k_{np}}{\mu_b} \cdot \frac{dp_b}{dr}$$

Дебит скважины при нагнетании получим из уравнения расхода

$$Q = 2\pi a r \omega, \quad (54, VII)$$

$$Q = \frac{2\pi a k_{np} (p_0 - p_R - MBCr_c)}{\frac{\mu_c}{\alpha} \ln \frac{r_c}{r_0} + \mu_b \ln \frac{R}{r_c}}$$

Расход при нагнетании зависит от радиуса  $r_c$ , т. е. от положения контура суспензии. С увеличением  $r_c$  расход  $Q$  уменьшается.

Если в уравнениях (51—54, VII) вязкость воды принять равной нулю, то уравнения переходят в уравнения одножидкостной системы. И, наконец, если принять  $B=0$  ( $\tau_0=0$ ), уравнения получают вид уравнений для однородной вязкой жидкости (истинной). Найдем закон движения суспензии по времени. Известно, что скорость движения контура суспензии

$$v = \frac{dr_c}{dt} = \frac{\omega}{m}$$

Подставляя значение скорости на контуре суспензии по формуле (53, VII), получим

$$m \frac{dr_c}{dt} = \frac{k_{np} (p_0 - p_R - MBCr_c)}{\frac{\mu_c}{\alpha} \ln \frac{r_c}{r_0} + \mu_b \ln \frac{R}{r_c}} \cdot \frac{1}{r_c}$$

Разделяя переменные, находим

$$dt = \frac{m \left( \frac{\mu_c}{\alpha} \ln \frac{r_c}{r_0} + \mu_b \ln \frac{R}{r_c} \right)}{k_{np} (p_0 - p_R - MBCr_c)} r_c dr_c \quad (55, VII)$$

Для того чтобы найти время движения, уравнение (55, VII) надо интегрировать

$$\int_0^t dt = m \int_{r_0}^{r_c} \frac{\frac{\mu_c}{\alpha} \ln \frac{r_c}{r_0} + \mu_b \ln \frac{R}{r_c}}{k_{np} (p_0 - p_R - MBCr_c)} r_c dr_c \quad (56, VII)$$

Интеграл, стоящий в правой части уравнения (56, VII), в элементарных функциях не вычисляется. Его решение приходится выполнять с помощью рядов. Но можно применить приближенный прием вычисления интеграла. Приведем уравнение (56, VII) к виду

$$t = 2\pi a m \int_{r_0}^{r_c} \frac{\frac{\mu_c}{\alpha} \ln \frac{r_c}{r_0} + \mu_b \ln \frac{R}{r_c}}{2\pi a k_{np} (p_0 - p_R - MBCr_c)} r_c dr_c$$

Заметим, что в соответствии с формулой (54, VII) дробь подынтегрального выражения равна обратной величине расхода нагнетания для радиуса цементации  $r_c$

$$\frac{\frac{\mu_c}{\alpha} \ln \frac{r_c}{r_0} + \mu_b \ln \frac{R}{r_c}}{2\pi a k_{np} (p_0 - p_R - MBCr_c)} = \frac{1}{Q}$$

Поэтому надо интервал интегрирования разбить на несколько участков, внутри которых величина  $Q$  меняется не очень сильно. Тогда  $\frac{1}{Q}$  можно вынести за знак интеграла. Например, взяв небольшой интервал интегрирования в пределах от  $r=r_1$  до  $r=r_2$  и обозначая через  $Q$  среднее значение расхода в этом интервале, получим

$$\Delta t = \frac{2\pi a m}{Q} \int_{r_1}^{r_2} r dr = \frac{\pi a m}{Q} (r_2^2 - r_1^2), \quad (57, VII)$$

где  $\Delta t$  — промежуток времени, в течение которого частица жидкости переместится с расстояния  $r_1$  до  $r_2$  от оси скважины.

Полное время нагнетания  $t$  определяется суммированием времени отдельных интервалов. Формула (57, VII) с последующим суммированием времени на отдельных интервалах позволяет найти значения времени  $t$ , отвечающие любому положению контура суспензии в интервале  $R \geq r_c > r_0$ . Для этих значений времени по формулам (51—54, VII) легко найти распределение давления в пласте, определить скорость фильтрации суспензии и расход скважины при нагнетании, подставив в указанные формулы соответствующие значения  $r_c$ .

Из уравнения (54, VII) следует, что при постоянном перепаде давления  $(p_0 - p_R)$  расход нагнетаемой жидкости зависит от радиуса контура суспензии  $r_c$ . Для структурной жидкости расход становится равным нулю, когда будет иметь место равенство

$$(p_0 - p_R) = MBCr_c$$

В этом случае радиус контура суспензии  $r_c$  и будет предельным радиусом распространения цементной суспензии  $r_c = R_{max}$

$$R_{max} = \frac{p_0 - p_R}{MBC} \quad (58, VII)$$



Подставим в уравнение значения параметров

$$M = \frac{\nu c}{2k_{np}}; \quad B = \frac{\tau_0}{\mu}; \quad C = \frac{m\delta}{2}.$$

После подстановки

$$R_{max} = \frac{2k_{np}}{m\delta} \cdot \frac{p_0 - p_R}{\tau_0}. \quad (59, VII)$$

т. е. пришли к уравнению, аналогичному ранее рассмотренному (29, VII). снова предельный радиус распространения цементной суспензии при заданной величине перепада давления  $(p_0 - p_R)$  и постоянной пористости среды ограничен предельным напряжением сдвига

Коэффициент  $\alpha$  обозначает отношение проницаемости пористой среды по дисперсной жидкости к проницаемости по воде.

Порядок решения задачи в условиях вытеснения аналогичен ранее рассмотренному.

Предполагаемый радиус цементации надо разбить на несколько участков длиной  $r_{c1}, r_{c2}, r_{c3}$  и т. д. Для начала и конца каждого участка по формуле (54, VII) вычислить расходы нагнетания и найти среднее значение расхода на участке  $Q_{ср1}, Q_{ср2}, Q_{ср3}$  и т. д. По формуле (57, VII) определить время движения для каждого участка  $M_1, M_2, M_3$  и т. д. При известных значениях  $Q_{ср1}$  и  $M_1$  построить кривую  $Q = f(t)$ . По кривой найти расход  $Q'$ , отвечающий заданному времени  $T$ . При известных  $Q_{ср1}$  и  $r_{c1}$  построить кривую  $Q = f(r_c)$ . По этой кривой определить длину радиуса цементации  $r_c = R$ , соответствующую расходу  $Q'$  и времени  $T$ .

Так решается вопрос о нагнетании суспензии в условиях вытеснения. Давление на забое за весь период нагнетания остается постоянным; изменяется расход нагнетания.

## 6. Нагнетание структурных жидкостей с учетом упругих сил

Во всех предыдущих рассуждениях силы упругости, возникающие при нагнетании в вытесняемой жидкости и материале пористой среды, не учитывались. Исследования, проведенные акад. Л. С. Лейбензон, проф. В. Н. Щелкачевым и проф. Н. Н. Веригиным, устанавливают, что силы упругости играют некоторую роль. Выясним влияние этих сил, для чего воспользуемся формулами Н. Н. Веригина. Последние получены при помощи решения уравнения Фурье при соблюдении особых краевых условий

Распределение давления в нагнетаемой суспензии и в вытесняемой воде удовлетворяет уравнениям

$$p_1 = p_R - \frac{Q}{4\tau_0 k_{np}} \left[ \nu c \ln \frac{r^2}{r_c^2} + \mu_0 \beta \left( \ln \frac{\gamma}{4a_0} + 0,577 \right) \right]; \quad (60, VII)$$

$$p_2 = p_R - \frac{Q}{4\tau_0 k_{np}} \cdot \mu_0 \beta \left( \ln \frac{r^2}{4a_0 l} + 0,577 \right). \quad (61, VII)$$

Здесь  $Q = \text{const}$  — постоянный дебит скважины;  
 $p_R$  — начальное давление в пласте;  
 $\gamma$  — параметр инъекции  $\gamma = \frac{Q}{\lambda a m}$ ;  
 $\beta$  — коэффициент, зависящий от пьезопроводимости зон суспензии и воды,

$$\beta = e^{\frac{\nu}{4a_0}} - \frac{\nu}{4a_0}.$$

$a_c$  и  $a_b$  — коэффициенты пьезопроводимости зон суспензии и воды,

$$a_c = \frac{k_{np} E_c}{\nu c \left[ m + \frac{E_c}{E_{пор}} \right]}; \quad a_b = \frac{k_{np} E_b}{\mu_0 \left[ m + \frac{E_b}{E_{пор}} \right]}$$

0,577 — постоянная Эйлера,

$E_c, E_b, E_{пор}$  — модули сжимаемости нагнетаемой суспензии (раствора), вытесняемой воды и пористой среды,  $\mu_0 / \mu^2$ .

Прочие обозначения аналогичны обозначениям, принятым в предыдущих разделах.

Радиус распространения суспензии (по Н. Н. Веригину) равен

$$R = \sqrt{\gamma T}. \quad (62, VII)$$

При подстановке значения  $\gamma$

$$R = \sqrt{\frac{Q}{\tau a m} T}. \quad (63, VII)$$

т. е. радиус распространения суспензии в водоносной толще не зависит от упругих сил и определяется формулой одножидкостной системы.

Обращаясь к формуле (60, VII), исследуем по ней величину давления в некоторой точке  $r$ , отвечающую времени нагнетания  $t_c$  и радиусу цементации  $r_c$ . Для этого надо принять  $t = t_c$ . Будем иметь

$$\gamma t_c = r_c^2.$$

После соответствующей подстановки получим

$$p_1 = p_R + \frac{Q}{2\tau_0 k_{np}} \nu c \ln \frac{r_c}{r} + \frac{Q}{4\tau_0 k_{np}} \mu_0 \beta \cdot \left( \ln \frac{4a_0}{\gamma} - 0,577 \right). \quad (64, VII)$$

Из этого уравнения видно, что сумма первых двух членов



$$p_R + \frac{Q}{2\alpha k_{np}} \mu_c \ln \frac{r_c}{r} = p'$$

представляет ни что иное, как давление при нагнетании суспензии без учета упругих сил в случае одножидкостной системы и если вязкостью вытесняемой воды пренебречь. Таким образом, уравнение (66, VII) можно представить в виде

$$p_1 = p' + \frac{Q}{4\alpha k_{np}} \mu_b \beta \left( \ln \frac{4a_b}{\gamma} - 0,577 \right). \quad (65, VII)$$

Второй член этого уравнения определяет увеличение давления за счет упругости и сопротивления, оказываемого вытесняемой водой

$$\Delta p = \frac{Q}{4\alpha k_{np}} \mu_b \beta \left( \ln \frac{4a_b}{\gamma} - 0,577 \right). \quad (66, VII)$$

По данным Н. Н. Веригина, параметр  $\gamma$  неизмеримо меньше коэффициентов пьезопроводимости зон нагнетаемой и вытесняемой жидкости  $\gamma \ll a_c, a_b$ . Поэтому коэффициент  $\beta$  всегда будет очень близким к единице:  $\beta \approx 1$ . Следовательно, увеличение давления за счет упругих сил при  $k_{np} = \text{const}$  обуславливается только пьезопроводимостью зоны вытесняемой воды  $a_b$  и параметром нагнетаемой жидкости  $\mu$ . Эта часть давления не зависит от радиуса цементации. Увеличение проницаемости пористой среды уменьшает добавочное давление. Коэффициент пористости мало влияет на это давление. С увеличением расхода нагнетания влияние упругих сил на величину давления повышается.

В табл. 34 для разных расходов, разной величины проницаемости и пористости среды по формуле (66, VII) вычислены значения добавочного давления  $\Delta p$  на преодоление сил упругости вытесняемой воды. При этом модули сжимаемости воды и пористой среды в пластовых условиях приняты равными  $E_w = 19,62 \times 10^9 \text{ н/м}^2$  и  $E_{пор} = 4,91 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2$ .

Таблица 34

Проницаемость $k_{np}, \text{д}$	Расход нагнетания $Q, \text{м}^3/\text{сек}$	Пористость среды $m$	Параметр $\mu, \text{н}^2/\text{сек}$	Пьезопроводимость $Q_e, \text{м}^3/\text{сек}$	$\Delta p, \text{н/м}^2$
100	$25 \cdot 10^{-3}$	0,10	0,0265	492,7	$6,8 \cdot 10^4 (0,691 \text{ ат})$
1000	$25 \cdot 10^{-3}$	0,10	0,0265	492,7	$0,75 \cdot 10^4 (0,076 \text{ ат})$
2000	$25 \cdot 10^{-3}$	0,10	0,0265	9854	$0,4 \cdot 10^4 (0,041 \text{ ат})$
100	$25 \cdot 10^{-3}$	0,05	0,0530	500	$5,59 \cdot 10^4 (0,57 \text{ ат})$
100	$15 \cdot 10^{-3}$	0,05	0,0318	500	$3,51 \cdot 10^4 (0,358 \text{ ат})$
1000	$15 \cdot 10^{-3}$	0,05	0,0318	5000	$0,44 \cdot 10^4 (0,045 \text{ ат})$
2000	$15 \cdot 10^{-3}$	0,05	0,0318	10000	$0,24 \cdot 10^4 (0,024 \text{ ат})$
100	$10 \cdot 10^{-3}$	0,03	0,0353	505	$0,603 \cdot 10^4 (0,615 \text{ ат})$

Табличные данные говорят о более или менее значительном влиянии упругих сил при малых значениях проницаемости пористой среды и очень незначительной роли упругих сил вытесняемой воды при больших значениях проницаемости.

Таким образом, можно взять уравнения (25 и 26, VII), представляющие давления при нагнетании вязко-пластической жидкости и к правой части их прибавить значение  $\Delta p$ , выражающее увеличение давления за счет упругости и сопротивления вытесняемой воды. В итоге получаются формулы, определяющие полную картину распределения давления при нагнетании вязко-пластической жидкости в условиях вытеснения с учетом упругих сил.

Давление в любой точке зоны цементации

$$p_1 = \frac{Q}{2\alpha k_{np}} \left[ \mu_c \ln \frac{R}{r} + \frac{1}{2} \mu_b \beta \left( \ln \frac{4a_b}{\gamma} - 0,577 \right) \right] + MBCR + p_R. \quad (67, VII)$$

Давление на забое

$$p_0 = \frac{Q}{2\alpha k_{np}} \left[ \mu_c \ln \frac{R}{r_0} + \frac{1}{2} \mu_b \beta \left( \ln \frac{4a_b}{\gamma} - 0,577 \right) \right] + MBCR + p_R. \quad (68, VII)$$

Давление в вытесняемой воде определяется прежней формулой (61, VII).

## 7. Многоскважинное нагнетание структурных жидкостей

Учет взаимодействия скважин при нагнетании структурных жидкостей. Рассмотренные уравнения (14, 26, 33 и 41, VII) служат для определения забойных давлений одиночных или редко расположенных скважин при нагнетании через них структурных жидкостей в пористую среду. При взаимодействующих скважинах можно также применять уравнения одиночных скважин, но с введением в них коэффициентов интерференции  $\beta$ , полученных при рассмотрении инъекции однородной жидкости. При этих условиях забойное давление взаимодействующих скважин бокового нагнетания в крупнозернистых грунтах и трещиноватых породах, организованных по схеме линейного источника, при  $p_R = 0$  определяется формулой

$$p_0 = \beta \frac{A_1}{E} \left( \frac{Q}{2\alpha a} \ln \frac{R}{r_0} + BCR \right); \quad (69, VII)$$

$$p_0 = \beta \frac{\mu}{\alpha k_{np}} \left( \frac{Q}{2\alpha a} \ln \frac{R}{r_0} + BCR \right).$$

Коэффициент интерференции для разных случаев взаимодействия вычисляется по формулам гл. IV; для двух скважин —



(61, IV), линейного ряда скважин — (62, IV), симметричных скважин с круговым контуром фильтрации — (64, IV), кольцевой батареи — (65, IV), батареи по квадратной сетке — (66, IV). Тем же приемом может быть вычислено забойное давление взаимодействующих скважин по схеме пространственных источников в крупнозернистых грунтах:

$$p_0 = \beta \frac{k_s}{E} \left( \frac{Q}{4\pi r_0} + BCR \right); \quad (70, VII)$$

$$p_0 = \beta \frac{k_s}{E} \left( \frac{Q}{4\pi r_0} + BCR \right). \quad (71, VII)$$

Коэффициенты интерференции для данных схем нагнетания можно принять по данным табл. 22 в функции отношения расстояния между скважинами  $B$  к радиусу скважины  $r_0$  ( $\delta = \frac{B}{r_0}$ ). Численные значения коэффициентов интерференции  $\beta$  для схемы донного нагнетания, взятые для центральных скважин, приводятся в табл. 35.

Таблица 35

Число скважин	$\delta$				
	$\delta=5$	$\delta=10$	$\delta=20$	$\delta=30$	$\delta=40$
Три	1,392	1,200	1,100	1,066	1,050
Пять	1,588	1,300	1,150	1,100	1,076
Семь	1,721	1,367	1,183	1,122	1,084

Предлагаемый метод учета влияния взаимодействия скважин со структурной жидкостью, конечно, является приближенным. Но представляется, что он охватывает все основные закономерности интерференции и для решения сложного вопроса о течении пластической жидкости является вполне допустимым.

*Пример исследования кольцевой батареи скважин при нагнетании структурной жидкости.* Пренебрегая вязкостью вытесняемой воды, исследовать последовательное положение фронта цементации горной породы из восьмискважинной батареи при расходе нагнетания каждой скважины  $Q = 18 \text{ м}^3/\text{ч}$  и найти величину забойных давлений. Мощность массива  $a = 12 \text{ м}$ , коэффициент скважности  $m = 0,05$ , коэффициент проницаемости породы  $k_{пр} = 8060 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$ , средняя толщина трещины  $\delta = 0,01 \text{ м}$ . Тампонажная жидкость — цементная суспензия состава 1:1, предельная продолжительность перемешивания ее — 9 ч, относительный вес 1,5,  $\mu = 0,00177 \text{ н сек/м}^2$ ,  $\tau_0 = 3,93 \text{ н/м}^2$ . Радиус кольцевой батареи  $R_0 = 10 \text{ м}$ , диаметр нагнетательных скважин  $r_0 = 0,01 \text{ м}$ . Пластовое давление  $p_R = 0$ .

*Решение 1.* Радиусы фронта цементации по главным и нейтральным линиям токов определяются уравнениями (102 и 103, IV):

$$R_{г.л.} = \sqrt{\frac{nQT}{\pi a m} + R_0^2 + \frac{2}{n-2} R_0^2 \left[ 1 - \left( \frac{R_0}{R_{г.л.}} \right)^{n-2} \right]};$$

$$R_{н.т.р.} = \sqrt{\frac{nQT}{\pi a m} + R_0^2 - \frac{2}{n-2} R_0^2 \left[ 1 - \left( \frac{R_0}{R_{н.т.р.}} \right)^{n-2} \right]}.$$

Для точек внутри кольца батареи члены в квадратных скобках меняют знак. По этим формулам в табл. 36 вычислены радиусы фронта цементации по главным и нейтральным осям поля.

Таблица 36

Время нагнетания $T$ , ч	Радиусы фронта цементации		$\frac{R_{г.л.}}{R_{н.т.р.}}$
	$R_{г.л.}$ , м	$R_{н.т.р.}$ , м	
0,5	12,2	8,3	1,47
1	14,4	12,4	1,16
3	19,0	17,2	1,11
5	22,7	21,2	1,07
7	25,8	24,5	1,05
9	28,5	27,5	1,04

На рис. 96 показано последовательное положение контуров цементации. После девяти часов непрерывного нагнетания контур цементации весьма близко приближается к форме круга с радиусом 28,5 м.

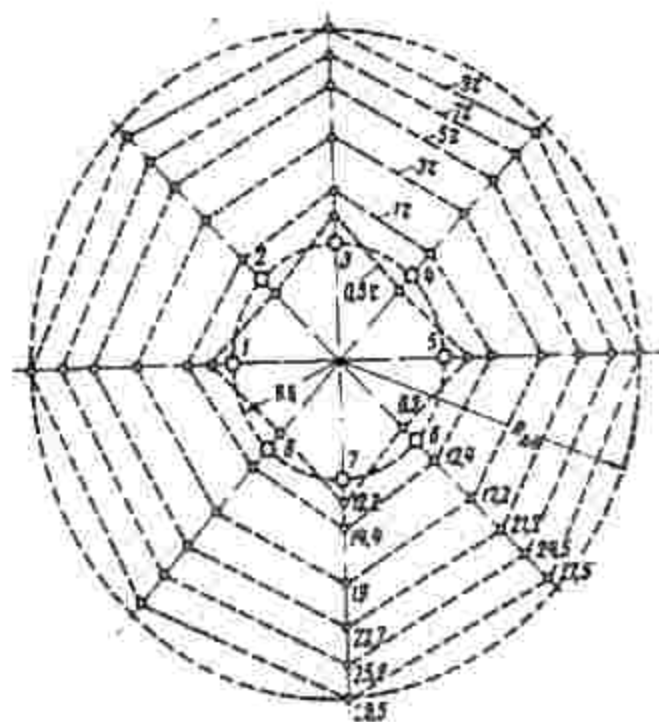


Рис. 96. Последовательные положения контуров цементации при нагнетании цементной суспензии 1:1 из восьми скважин



2. Давления на забоях скважин можно определить по формуле одиночной скважины (26, VII), но с введенной в нее коэффициентом интерференции (65, IV)

$$\beta = \frac{\lg \frac{R^n - R_0^n}{nR_0^{n-1} r_0}}{\lg \frac{R}{r_0}}$$

При  $R_0 = 0$  забойные давления получаются равными

$$p_0 = \frac{p_2}{2k_{ар}} \left[ \frac{Q}{2\pi\alpha} \ln \frac{R}{r_0} + BCR \right],$$

где  $B = \frac{3,93}{0,00177} = 2220 \text{ сек}^{-1}$ ,  $C = \frac{0,05 \cdot 0,01}{2} = 0,00025 \text{ м}$ ;  $\alpha = 0,74$ .

В табл. 37 вычислены величины забойных давлений, отвечающие принятым интервалам времени нагнетания.

Таблица 37

Время нагнетания $T$ , ч	Радиус фронта цементации $R_{г.ц}$ , м	Коэффициент интерференции $\beta$	Забойное давление $p_0$ , $\text{н/м}^2$
1	14,4	1,07	$1,09 \cdot 10^{-6}$ (11,1 ат)
3	19,0	1,41	$1,7 \cdot 10^{-6}$ (17,4 ат)
5	22,7	1,59	$2,56 \cdot 10^{-6}$ (26,1 ат)
7	25,8	1,72	$3,15 \cdot 10^{-6}$ (32,1 ат)
9	28,5	1,82	$3,67 \cdot 10^{-6}$ (37,5 ат)

**Эквивалентное значение коэффициента фильтрации.** При расчете нагнетания структурных жидкостей по схеме линейного источника для сложных задач также можно вести в рассмотрение эквивалентное значение коэффициента фильтрации или коэффициента проницаемости и расчет производить как для одножидкостных систем. Эквивалентное значение коэффициента проницаемости для схемы линейного источника получается из равенства расходов одиночной скважины однородной и структурной жидкости при одних и тех же значениях перепада давления

Расход одножидкостной системы

$$Q = \frac{2\pi a k_{пр} \gamma H_0}{\mu \ln \frac{R}{r_0}}$$

Расход структурной жидкости с непрерывным изменением коэффициента фильтрации в соответствии с уравнением (89, VI) получается равным

$$Q = \frac{2\pi a H_0}{\int_{r_0}^R \frac{1}{k(r)} \cdot \frac{1}{r} dr}$$

Приравняв значения расходов, находим эквивалентное значение коэффициента проницаемости  $k'_{ар}$

$$k'_{ар} = \frac{\mu \ln \frac{R}{r_0}}{T \int_{r_0}^R \frac{1}{k(r)} \cdot \frac{1}{r} dr}$$

В это уравнение надо внести соответствующую функцию  $k(r)$  для трещиноватых пород (23, VII):

$$k = \frac{ak_{ар} T}{\mu \left( 1 + BC \frac{2\pi ar}{Q} \right)}$$

В результате интегрирования находим эквивалентное значение коэффициента проницаемости

$$k'_{ар} = \frac{ak_{ар}}{1 + \frac{2\pi a}{\ln \frac{R}{r_0}} BCR} \quad (72, VII)$$

Например, используя задачу о вытеснении воды одножидкостной инъекцией, можно поставить вопрос о решении вытеснения воды кольцевой батареей скважин структурной жидкости, введя в соответствующие зависимости этого раздела эквивалентное значение проницаемости среды (72, VII).

**Критерии применимости формул гл. VII.** На основании опытных данных установлено, что распределение давления, расход нагнетания и радиусы цементации (глинизации) в значительной мере зависят от пластических напряжений в структурной жидкости. Поэтому формулы и уравнения гл. VII, полученные с учетом пластических напряжений, могут служить теоретической основой при цементации и глинизации горных пород в горном деле. Но вместе с этим надо иметь в виду, что применимость их ограничена линейным законом фильтрации жидкости в порах и трещинах горных пород. В связи с этим необходимо установить критерий применимости рассмотренных формул. В качестве такого можно принять известную формулу критической скорости проф. В. Н. Щелкачева, о которой сообщалось в гл. IV (67, IV)

$$\omega_{кр} = \frac{m^{2,3} \cdot Re_{кр}}{10 \cdot k_{сб}}$$

Эта скорость определяет переход линейной фильтрации в турбулентную. Если вместо кинематической вязкости  $\nu$  ввести в эту формулу эффективную вязкость структурной жидкости  $\nu'$  (7, VII)

$$\nu' = \frac{g^2 \left( 1 + BC \frac{1}{\omega} \right)}{T}$$



то формула (12, IV) будет правомерна для критической скорости фильтрации структурной жидкости. В частности, для трещиноватых горных пород для схемы линейного источника

$$\omega_{кр} = \frac{m^{2.3} g^2 \left(1 + \frac{r_0}{\mu} \cdot \frac{\lambda a m^2 r}{Q}\right) Re_{кр}}{10 \gamma_1 \sqrt{\lambda k_{кр}}} \quad (73, VII)$$

где  $m$  — коэффициент скважности горных пород;  
 $a$  — глубина скважины (мощность пласта);  
 $\delta$  — средняя толщина трещины;  
 $\lambda = \frac{81.6}{105} = 0.776$ ;  
 $r$  — радиус-вектор.

Для крупнозернистой среды для схемы пространственного источника (донного нагнетания) после подстановки соответствующих величин получим

$$\omega'_{кр} = \frac{m^{2.3} g^2 \left(1 + \frac{r_0}{\mu} \cdot \frac{1.25 d_0^3}{m^{0.3} D_0^2} \cdot \frac{r r^2}{Q}\right) Re_{кр}}{10 \gamma_1 \sqrt{\lambda k_{кр}}} \quad (74, VII)$$

Принимая по формуле (25, III) для песчано-гравелистой формации средний диаметр пор равным  $d_0 = 1.25 m D_0$ , получим

$$\omega'_{кр} = \frac{m^{2.3} g^2 \left(1 + 2.44 \frac{r_0}{\mu} m^{2.7} D_0 \frac{r r^2}{Q}\right) Re_{кр}}{10 \gamma_1 \sqrt{\lambda k_{кр}}} \quad (75, VII)$$

где  $D_0$  — действующий диаметр грунта.

Таким образом, критическая скорость в проницаемой среде для структурных жидкостей определяется реологическими характеристиками жидкости  $\gamma$ ,  $\tau_0$  и  $\mu$ .

Для определения критической скорости в кусковом материале необходимо пользоваться формулой (74, VII) с определением среднего диаметра пор по формуле (28, III).

Таблица 38

Относительный вес суспензий	Расходы нагнетания $Q$ , м <sup>3</sup> /сек и скорости фильтрации $\omega(r_0)$ , м/сек			
	$Q = 10 \cdot 10^{-3}$	$15 \cdot 10^{-3}$	$25 \cdot 10^{-3}$	$50 \cdot 10^{-3}$
	$\omega = 0.64 \cdot 10^{-2}$	$0.96 \cdot 10^{-2}$	$1.60 \cdot 10^{-2}$	$3.20 \cdot 10^{-2}$
1,290	$60 \cdot 10^{-2}$	$41.3 \cdot 10^{-2}$	$25.9 \cdot 10^{-2}$	$14.4 \cdot 10^{-2}$
1,314	$67.5 \cdot 10^{-2}$	$46 \cdot 10^{-2}$	$29 \cdot 10^{-2}$	$15.9 \cdot 10^{-2}$
1,400	$92 \cdot 10^{-2}$	$62 \cdot 10^{-2}$	$38.3 \cdot 10^{-2}$	$20.5 \cdot 10^{-2}$
1,600	$202 \cdot 10^{-2}$	$136 \cdot 10^{-2}$	$84 \cdot 10^{-2}$	$45.3 \cdot 10^{-2}$
1,650	$250 \cdot 10^{-2}$	$170 \cdot 10^{-2}$	$106 \cdot 10^{-2}$	$58 \cdot 10^{-2}$

Так как нарушение линейного закона фильтрации вправе ожидать на контуре скважины (здесь наибольшая скорость фильтрации), то в формулах (73—75, VII) надо принять  $r = r_0$ . В качестве критического значения числа  $Re$  для пористой среды надо взять наименьшее из чисел, по проф. Щелкачеву,  $Re_{кр} = 1$ .

Для получения общих представлений о величине критической скорости структурных жидкостей в трещиноватых породах в табл. 38 представлены вычисленные по формуле (73, VII)  $\omega_{кр}$

Продолжение табл. 38

Относительный вес суспензий	Расходы нагнетания $Q$ , м <sup>3</sup> /сек и скорости фильтрации $\omega(r_0)$ , м/сек		
	$100 \cdot 10^{-3}$	$125 \cdot 10^{-3}$	$150 \cdot 10^{-3}$
	$6.40 \cdot 10^{-2}$	$8.00 \cdot 10^{-2}$	$9.60 \cdot 10^{-2}$
1,290	$8.6 \cdot 10^{-2}$	$7.5 \cdot 10^{-2}$	$6.7 \cdot 10^{-2}$
1,314	$9.3 \cdot 10^{-2}$	$8.05 \cdot 10^{-2}$	$7.2 \cdot 10^{-2}$
1,400	$11.6 \cdot 10^{-2}$	$9.85 \cdot 10^{-2}$	$8.7 \cdot 10^{-2}$
1,600	$25.8 \cdot 10^{-2}$	$21.9 \cdot 10^{-2}$	$19.3 \cdot 10^{-2}$
1,650	$34 \cdot 10^{-2}$	$29.2 \cdot 10^{-2}$	$26 \cdot 10^{-2}$

для пласта мощностью  $a = 5$  м с равномерно распределенной трещиноватостью при средней величине просвета трещины  $\delta = 0.005$  м, скважности породы  $m = 0.05$  ( $r_0 = 0.05$ ) и коэффициенте проницаемости  $k_{кр} = 2000 d$  для разных расходов нагнетания.

Как и следовало ожидать, критические скорости возрастают с увеличением плотности суспензий. Особенно резкое увеличение их имеет место в тяжелых суспензиях (относительный вес 1.6—1.65). Табличные данные подтверждают, что линейный закон фильтрации сохраняется даже для легких суспензий (относительный вес 1.29—1.314) при больших расходах нагнетания  $q = (20—25) \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>/сек на каждый метр глубины скважины.

Таким образом, линейный режим фильтрации структурных жидкостей сохраняется на весьма большом диапазоне концентраций растворов и расходов нагнетания. Формулы (73—75, VII) в каждом конкретном случае позволяют установить критические скорости фильтрации структурных жидкостей для заданных параметров нагнетания.



# Глава VIII. МАГНЕТАНИЕ ДИСПЕРСНЫХ ЖИДКОСТЕЙ С КОЭФФИЦИЕНТОМ ФИЛЬТРАЦИИ, ПЕРЕМЕННЫМ ПО ВРЕМЕНИ

При цементации (глинизации) грунтов и горных пород коэффициент фильтрации может изменяться как по длине потока (гл. VII), так и по времени. Изменения по времени могут быть обусловлены процессами контактирования и схватывания раствора, вследствие чего изменяются по времени проницаемость среды и реологические характеристики раствора. При глинизации и силикатизации изменения могут быть вызваны и явлениями коагуляции дисперсной фазы. Во всех этих случаях проницаемость среды уменьшается, а вязкость и напряжение сдвига увеличиваются. Наконец, изменения коэффициента фильтрации по времени могут вызываться явлением оседания цементных частиц в порах и трещинах проницаемой среды в результате отфильтровывания воды из суспензии через пористую породу.

## 1. Процессы контактирования дисперсной жидкости с породой

Здесь обобщаются некоторые результаты лабораторного исследования изменений коэффициента проницаемости пористой среды и вязкости цементной суспензии по времени. Исследовались изменения общего комплекса  $\frac{k_{np}}{\mu}$ .

Общезвестной формулой этот комплекс связан с коэффициентом фильтрации

$$k = k_{np} \frac{\gamma}{\mu}$$

Отсюда

$$\frac{k_{np}}{\mu} = \frac{k}{\gamma} \quad (1, VIII)$$

где  $\mu$  — вязкость цементных суспензий или глинистых растворов. Зная веса цементных суспензий и определяя опытным путем их коэффициенты фильтрации для разных периодов магнетания, можно получить картину изменений комплекса  $\frac{k_{np}}{\mu}$  по времени.

Пористой средой в эксперименте служил дробленый, хорошо отсортированный кварцевый щебень с расчетными диаметрами фракций  $6,2 \cdot 10^{-3}$ ;  $8 \cdot 10^{-3}$  и  $9,2 \cdot 10^{-3}$  м. Расчетные диаметры определялись точным взвешиванием по 20 штук каждой группы объема и диаметра приведенного шара. Средние значения объемной пористости колебались в пределах 0,38—0,424\*. Опытные коэффициенты фильтрации для чистой воды ( $10^\circ \text{C}$ ) и цементных суспензий определялись методом налива ( $l=1$ ).

Средние диаметры пор в массиве щебня

$$d_0 = \sqrt{\frac{98 \cdot D_0^2 k}{g m^{0,1}}} \quad (2, VIII)$$

Физико-механические характеристики щебня приведены в табл. 39.

Таблица 39

№ образцов	Отверстия сит $d_c$ , м	Расчетный диаметр $D_0$ , м	Пористость $m$	Коэффициент фильтрации для воды $k_0$ , м/сек	Средний диаметр пор $d_0$ , м
1	$(7-5) \cdot 10^{-3}$	$6,20 \cdot 10^{-3}$	0,396	$2,46 \cdot 10^{-2}$ $2,81 \cdot 10^{-2}$	$1,93 \cdot 10^{-3}$ $2,00 \cdot 10^{-3}$
2	$(10-7) \cdot 10^{-3}$	$8,00 \cdot 10^{-3}$	0,370	$3,16 \cdot 10^{-2}$ $3,50 \cdot 10^{-2}$	$2,34 \cdot 10^{-3}$ $2,40 \cdot 10^{-3}$
3	$(12-7) \cdot 10^{-3}$	$9,20 \cdot 10^{-3}$	0,424	$4,82 \cdot 10^{-2}$ $5,69 \cdot 10^{-2}$	$2,78 \cdot 10^{-3}$ $2,91 \cdot 10^{-3}$

Для цементной суспензии использован силикатный цемент марки 400. В зависимости от крупности щебня в опытах применялись суспензии с водоцементным отношением от 9 до 4.

Располагая данными табл. 40 объемов, расходов и коэффициентов фильтрации цементных суспензий (за исключением маловероятных значений, отмеченных звездочками), можно для каждой фракции и суспензии в принятых периодах магнетания определить комплекс  $\frac{k}{\gamma} = \frac{k_{np}}{\mu}$  и подобрать аналитическую зависимость изменений этого комплекса по времени. В качестве такой зависимости взято уравнение неустановившегося движения (типа уравнения Буссинеска — Майз  $Q = Q_0 e^{-\beta t}$ ).

$$\frac{k}{\gamma} = \frac{k_{np}}{\mu} = \beta e^{-\beta t} \quad (3, VIII)$$

где  $t$  — момент времени магнетания;  
 $\beta$  — постоянный коэффициент для данной фракции и суспензии, отвечающий начальному значению комплекса  $\frac{k}{\gamma} = \left(\frac{k_{np}}{\mu}\right)_{t=0}$  и сохраняющий размерность последнего

\* Экспериментальная часть работы под руководством автора выполнена канд. техн. наук Л. Б. Писиревой и студентами О. А. Исуповым и М. Д. Добровым. 275



Таблица 40

№ образцов	Расчетный диаметр $D_p$ , м	В, Ц сус-пензии	Относительный вес сус-пензии	Время выветывания $t$ , мин	Объем сус-пензии $W$ , м <sup>3</sup>	Расход сус-пензии $Q$ , м <sup>3</sup> /сек	Коэффициент фильтрации сус-пензии $K$ , м/сек
1	$6,2 \cdot 10^{-3}$	9	1,072	3	$20,9 \cdot 10^{-3}$	$0,116 \cdot 10^{-3}$	$1,54 \cdot 10^{-1}$
				5	$32,7 \cdot 10^{-3}$	$0,107 \cdot 10^{-3}$	$1,36 \cdot 10^{-1}$
				7	$35,8 \cdot 10^{-3}$	$0,06 \cdot 10^{-3}$	$1,14 \cdot 10^{-1}$
1	$6,2 \cdot 10^{-3}$	7	1,092	3	$25,5 \cdot 10^{-3}$	$0,142 \cdot 10^{-3}$	$1,68 \cdot 10^{-1}$
				5	$36,4 \cdot 10^{-3}$	$0,122 \cdot 10^{-3}$	$1,54 \cdot 10^{-1}$
				7	$33,5 \cdot 10^{-3}$	$0,092 \cdot 10^{-3}$	$1,22 \cdot 10^{-1}$
2	$8,0 \cdot 10^{-3}$	7	1,092	3	$25,3 \cdot 10^{-3}$	$0,146 \cdot 10^{-3}$	$1,94 \cdot 10^{-1}$
				5	$27,7 \cdot 10^{-3}$	$0,093 \cdot 10^{-3}$	$1,17 \cdot 10^{-1}$
				7	$42,0 \cdot 10^{-3}$	$0,100 \cdot 10^{-3}$	$1,32 \cdot 10^{-1}$
3	$9,2 \cdot 10^{-3}$	6	1,106	3	$44,5 \cdot 10^{-3}$	$0,248 \cdot 10^{-3}$	$3,14 \cdot 10^{-1}$
				5	$58,5 \cdot 10^{-3}$	$0,195 \cdot 10^{-3}$	$2,59 \cdot 10^{-1}$
				7	$61,0 \cdot 10^{-3}$	$0,145 \cdot 10^{-3}$	$1,92 \cdot 10^{-1}$
2	$8,0 \cdot 10^{-3}$	5	1,128	3	$24,2 \cdot 10^{-3}$	$0,131 \cdot 10^{-3}$	$1,78 \cdot 10^{-1}$
				5	$39,5 \cdot 10^{-3}$	$0,132 \cdot 10^{-3}$	$1,75 \cdot 10^{-1}$
				7	$42,5 \cdot 10^{-3}$	$0,102 \cdot 10^{-3}$	$1,30 \cdot 10^{-1}$
3	$9,2 \cdot 10^{-3}$	4	1,156	3	$50,5 \cdot 10^{-3}$	$0,280 \cdot 10^{-3}$	$3,71 \cdot 10^{-1}$
				5	$59,0 \cdot 10^{-3}$	$0,197 \cdot 10^{-3}$	$2,62 \cdot 10^{-1}$
				7	$61,5 \cdot 10^{-3}$	$0,147 \cdot 10^{-3}$	$1,86 \cdot 10^{-1}$

Естественно, что для  $t=0$  проницаемость пористой среды отвечает ее нормальному значению для не нарушенной цементацией структуры, т. е.

$$k_{np,t=0} = \frac{k_{g,t=0}}{\gamma_0}$$

Таким образом, начальное значение комплекса  $\left(\frac{k_{np}}{\mu}\right)_{t=0}$  определяется коэффициентом фильтрации рассматриваемой среды и удельным весом воды. С другой стороны, опытные значения начального комплекса  $\left(\frac{k_{np}}{\mu}\right)_{t=0} = \beta$  получаются непосредственным вычислением коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  из уравнения (3. VIII) по данным табл. 40.

Из табл. 41 (коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$ ) видно, что значения  $k'_0 = \gamma_0 \beta$ , наиболее близкие к нормальным коэффициентам фильтрации не нарушенной среды, относятся к образцам 1(7), 3(6), 2(5) и 3(4), для которых отклонения между этими коэффициентами не превышают  $-12+4\%$ . Среднее значение отношения  $\frac{\gamma_0 \beta}{k_0}$  для этих образцов составляет 0,95, т. е. весьма близко к единице. Для коэффициента  $\beta$  действительно возможна зависимость

$$\beta = \frac{k_0}{\gamma_0} = \frac{k_{np(0)}}{\gamma_0} \quad (4, VIII)$$

Таблица 41

№ образцов	Расчетный диаметр $D_p$ , м	В, Ц сус-пензии	Опытные коэффициенты (табл. 13)		Коэффициенты фильтрации, м/сек		
			$\alpha$	$\beta$	опытные (табл. 42) $k_0$	$k'_0 = \gamma_0 \beta$	табл. 40 $k_0$
1	$6,2 \cdot 10^{-3}$	9	0,07127	1850	$2,46 \cdot 10^{-2}$	$1,88 \cdot 10^{-1}$	0,76
1	$6,2 \cdot 10^{-3}$	7	0,00180	2490	$2,91 \cdot 10^{-2}$	$2,48 \cdot 10^{-1}$	0,88
2	$8,0 \cdot 10^{-3}$	7	0,00161	2690	$3,50 \cdot 10^{-2}$	$2,67 \cdot 10^{-1}$	0,77
3	$9,2 \cdot 10^{-3}$	6	0,00201	4320	$4,82 \cdot 10^{-2}$	$4,32 \cdot 10^{-1}$	0,90
2	$8,0 \cdot 10^{-3}$	5	0,00245	3290	$3,16 \cdot 10^{-2}$	$3,29 \cdot 10^{-1}$	1,01
3	$9,2 \cdot 10^{-3}$	4	0,00290	560	$5,69 \cdot 10^{-2}$	$5,56 \cdot 10^{-1}$	0,98

где  $k_0$ ,  $k'_{np(0)}$ ,  $\mu_0$  и  $\gamma_0$  — нормальные коэффициенты фильтрации и проницаемости пористой среды, динамическая вязкость и удельный вес воды.

В соответствии со структурой уравнения (3. VIII) коэффициент  $\alpha$  должен иметь размерность  $\text{сек}^{-1}$ . Исходя из логических представлений, можно полагать, что коэффициент  $\alpha$  должен определяться реологическими характеристиками тампонажных растворов и геометрическими параметрами пористой среды.

Влияние реологических характеристик легко учесть отношением  $\frac{\tau_0}{\mu}$ , представляющим размерность  $\text{сек}^{-1}$ , где  $\tau_0$  — предельное напряжение сдвига, а  $\mu$  — структурная вязкость суспензии (раствора). Влияние геометрических параметров можно отразить безразмерным отношением  $\frac{d_m}{d_0}$ , выражающим внутренний масштаб пористой среды, в котором  $d_0$  — средний диаметр пор, а  $d_m$  — средний диаметр частиц твердой фазы суспензии (раствора). Если отношение  $\frac{\tau_0}{\mu}$  характеризует условия контактирования суспензии с породой, то отношение  $\frac{d_m}{d_0}$  отражает условия проникновения и внедрения суспензии в пористую среду. Используя построение логарифмической анаморфозы, зависимость  $\alpha$  от этих факторов можно представить формулой

$$\alpha = A \frac{\tau_0}{\mu} \sqrt{\frac{d_m}{d_0}}$$

Эмпирический коэффициент  $A$  определяется непосредственно из опытных данных (табл. 42).

В окончательном виде предлагаемая формула для коэффициента  $\alpha$  имеет вид

$$\alpha = 6,13 \cdot 10^{-5} \frac{\tau_0}{\mu} \sqrt{\frac{d_m}{d_0}} \quad (5, VIII)$$



Таблица 42

№ образцов	Пористость $m$	Средний диаметр пор $d_p$ , м	Относительный вес суспензии	Реологические характеристики		$\alpha$	$\beta$
				$\alpha$ , н/м <sup>2</sup>	$\beta$ , н сек/м <sup>2</sup>		
1 (7)	3650	$2,00 \cdot 10^{-3}$	1,092	0,26	0,00135	0,00180	0,00006
3 (6)	6250	$2,78 \cdot 10^{-3}$	1,106	0,32	0,00137	0,00204	0,000065
2 (5)	4100	$2,34 \cdot 10^{-3}$	1,128	0,39	0,00139	0,00245	0,00006
3 (4)	7400	$2,91 \cdot 10^{-3}$	1,156	0,52	0,00141	0,00290	0,00006

Примечание. Температура воды принята 10°С. Средний диаметр цементных частиц  $d_m = 0,05 \cdot 10^{-3}$  м.

Мы исследовали влияние давления на коэффициент  $\alpha$ . Но это влияние выражено очень слабо и рассмотрение коэффициента  $\alpha$ , как постоянного, не может привести к большим ошибкам.

Для дальнейшего исследования неустановившегося движения тампонажной жидкости используется метод последовательной смены стационарных состояний.

Закон движения жидкости в пористой среде по схеме линейного источника определяется уравнением

$$dt = \frac{2\pi am}{Q} r dr. \quad (6, VIII)$$

Расход нагнетания  $Q$  с давлением связан уравнением

$$Q = \frac{k_{np}}{\mu} (p_0 - p_R) \frac{2\pi a}{\ln \frac{R}{r_0}}, \quad (7, VIII)$$

где  $\mu$  — вязкость цементной суспензии;

$R$  — фиксированный радиус цементации;

$r_0$  — радиус нагнетательной скважины.

Подстановка (7, VIII) в (6, VIII) приводит к уравнению

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{k_{np}}{\mu} dt = \frac{\ln \frac{R}{r_0}}{(p_0 - p_R)} r dr. \quad (8, VIII)$$

По принятому методу исследования уравнение (8, VIII) можно интегрировать, считая для заданного момента времени  $T$  крайние давления  $p_0$  и  $p_R$  постоянными, как и значение комплекса  $\frac{k_{np}}{\mu}$  для того же момента времени  $T$ . Это значение определяется уравнением (3, VIII). Необходимо подчеркнуть, что уравнение (3, VIII) определяет среднее значение комплекса  $\frac{k_{np}}{\mu}$  для заданного момента времени независимо от радиуса распространения жидкости.

В уравнении (8, VIII) — одна переменная по времени величина  $m$  — пористость (скважность) цементруемой среды. Она изменяется непрерывно. Известны граничные значения  $m$ . Моменту времени  $t=0$  соответствует значение пористости, равное  $m$ . Для момента конца нагнетания  $t=T$  пористость всегда близка к нулю. Поэтому в интервале интегрирования от 0 до  $T$  пористость  $m$  можно принять по теореме о средней, т. е.  $m_{cp} = \frac{m}{2}$ .

Интегрируя уравнение (8, VIII) в пределах от 0 до  $T$  и от  $r_0$  до  $R$  и пренебрегая малой величиной  $r_0^2$ , получим

$$\frac{1}{m_{cp}} \cdot \frac{k_{np}}{\mu} T = \frac{\ln \frac{R}{r_0}}{2(p_0 - p_R)} R^2. \quad (9, VIII)$$

Уравнение (9, VIII) позволяет определить для заданных времени нагнетания  $T$  и перепада давления  $(p_0 - p_R)$  радиус цементации

$$R = \sqrt{\frac{2(p_0 - p_R) k_{np}}{m_{cp} \ln \frac{R}{r_0} \mu} T}.$$

Подставляя из уравнения (3, VIII) значение комплекса  $\frac{k_{np}}{\mu}$  для момента времени  $T$ , найдем

$$R = \sqrt{\frac{2(p_0 - p_R)}{m_{cp} \ln \frac{R}{r_0}} \rho e^{-\alpha T}}. \quad (10, VIII)$$

Уравнение (10, VIII) легко решается графически.

Таблица 43

$p_0$ , н	$m$	$k$ , н/сек	$d_p$ , м	$\frac{n}{\mu}$					
				170	193	235	281	370	570
				9	7	6	5	4	3
$2 \cdot 10^{-2}$	0,400	$0,78 \cdot 10^{-2}$	$0,80 \cdot 10^{-3}$	0,97	0,60	—	—	—	—
$4 \cdot 10^{-2}$	0,400	$1,64 \cdot 10^{-2}$	$1,40 \cdot 10^{-3}$	3,50	2,25	1,03	—	—	—
$6,2 \cdot 10^{-2}$	0,396	$2,81 \cdot 10^{-2}$	$2,03 \cdot 10^{-3}$	7,50	5,10	2,60	1,40	0,35	—
$8 \cdot 10^{-2}$	0,390	$3,16 \cdot 10^{-2}$	$2,34 \cdot 10^{-3}$	9,30	7,00	3,80	1,90	0,70	—
$9,2 \cdot 10^{-2}$	0,424	$5,69 \cdot 10^{-2}$	$2,91 \cdot 10^{-3}$	15,00	11,50	6,50	3,60	1,20	—
$13 \cdot 10^{-2}$	0,407	$10,20 \cdot 10^{-2}$	$3,70 \cdot 10^{-3}$	27,50	20,60	13,00	7,30	2,70	0,30

Примечание. Числа 170, 193 — вершины графы таблицы означают отношения  $\frac{n}{\mu}$  (сек<sup>-1</sup>).

В табл. 43 по уравнению (10, VIII) вычислены радиусы цементации в метрах для дробленых кварцевых песков и щебня ( $p_0 - p_R = 10 \cdot 10^5$  н/м<sup>2</sup>,  $T = 1$  ч). Из данных таблицы видно, что цементация



тация даже сравнительно не крупных кварцевых песков  $D_0=2 \cdot 10^{-3}$  м вполне возможна тонкими цементными суспензиями  $1:9 \div 1:6$  при небольших радиусах цементации 1—0,5 м. С увеличением крупности фракций повышается густота цементной суспензии и увеличиваются радиусы цементации. Но даже для самой крупной фракции  $D_0=13 \cdot 10^{-3}$  м при сравнительно большом времени нагнетания (1 ч) предельным значением водоцементного

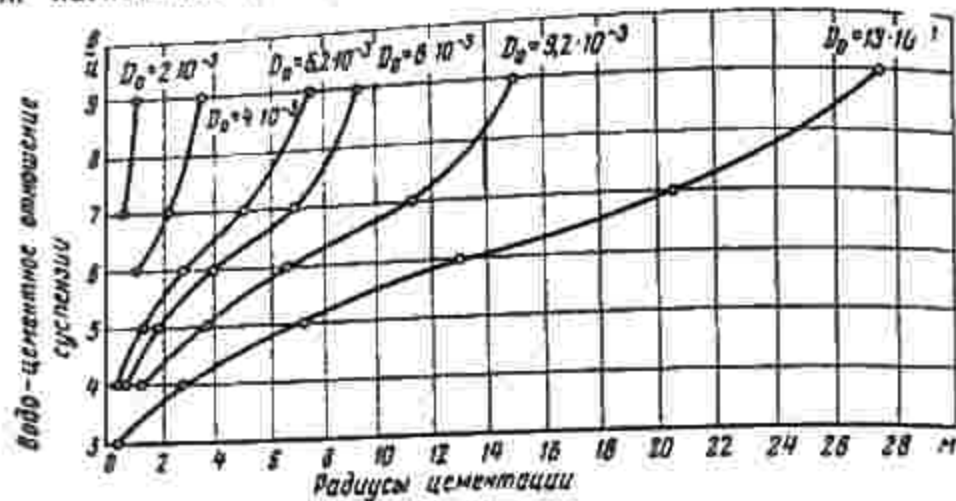


Рис. 97. Радиусы цементации дробленых кварцевых песков и щебня с учетом контактирования (диаметры фракций  $D_0$ , м)

отношения цементной суспензии является 4. На рис. 97 показаны кривые радиусов цементации кварцевых грунтов, построенные по данным табл. 43.

Рассматривая фильтрацию в однородных зернистых грунтах как предельный случай для движения в шероховатых трещинах и приняв вместо  $d_0$  среднюю толщину трещины, можно приближенно распространить уравнение (10.VIII) и на горные породы с равномерно распределенной трещиноватостью

$$\alpha = 6,13 \cdot 10^{-5} \frac{\tau_0}{\mu} \sqrt{\frac{d_m}{h}}$$

Таблица 44

Породы	m	$k_{пр}$ дог/см	$\frac{n}{\alpha}$	$t, \text{ч}$					
				170	193	235	281	370	570
Мергель	0,05	203	$1,40 \cdot 10^{-3}$	3,0	2,00	1,00	—	—	—
Гранит	0,05	2000	$2,62 \cdot 10^{-3}$	17,0	12,5	7,00	3,50	1,20	—
Известняк	0,10	3120	$2,35 \cdot 10^{-3}$	14,5	10,5	5,50	2,80	0,95	—
Известняк	0,05	3120	$4,50 \cdot 10^{-3}$	—	31,5	19,7	12,0	4,70	0,75
Гранит	0,10	3600	$5,50 \cdot 10^{-3}$	—	—	21,5	14,0	6,05	1,00

Табл. 44 (радиусы цементации трещиноватых горных пород в пределах  $p_0 - p_R = 10 \cdot 10^5$  н/м<sup>2</sup>,  $T=1$  ч) дает представление о возможных параметрах цементации трещиноватых горных пород, геометрические параметры и проницаемость которых нам известны.

Как и в предыдущем случае, мелкотрещиноватые породы ( $\delta = 1,4 \cdot 10^{-3}$  м) можно инъецировать тонкими цементными суспензиями  $1:9 \div 1:6$  при небольших радиусах цементации (3—1 м). С увеличением раскрытия трещин радиусы цементации скорее увеличиваются для тонких суспензий и медленнее для жирных составов. При просвете трещин  $(4,5-5,5) \cdot 10^{-3}$  м наиболее рациональными составами суспензии будут служить  $1:5 \div 1:4$  при радиусах цементации 14—5 м. Для крупотрещиноватых пород  $\delta = (10-30) \cdot 10^{-3}$  м, очевидно, не исключены и более тяжелые суспензии  $1:3, 1:2, 1:1$ .

А. Н. Адамович и Д. В. Колтунов указывают, что в породах с относительно слабой трещиноватостью расстояния между скважинами принимаются 5—6 м с возможным сближением до 2,5—1,25 м, в условиях повышенной трещиноватости — не более 7—8 м с возможным сближением до 2—3 м.

Данные автора для наиболее распространенных суспензий  $1:6 \div 1:4$  близки к этим пределам. Таков результат обработки некоторых экспериментальных данных процесса контактирования.

## 2. Неустановившийся процесс тампонажа грунтов

С увеличением времени нагнетания цементной суспензии в проницаемую среду комплекс  $\frac{k_{пр}}{\mu}$  и коэффициент пористости среды  $m$  могут уменьшаться. Если перепад давления  $(p_0 - p_R)$  принят неизменным, то с увеличением времени уменьшается расход нагнетаемой жидкости  $Q$ . Может быть и наоборот: при нагнетании остается постоянным расход  $Q$  и увеличивается перепад давления  $(p_0 - p_R)$ .

Процесс тампонажа грунтов по времени является неустановившимся. Возникает вопрос, какой режим нагнетания контактирующей жидкостей наиболее эффективен.

По первой схеме радиус цементации с учетом контактирования определяется уравнением (10.VIII), а расход нагнетаемой жидкости

$$Q = \beta e^{-\alpha t} (p_0 - p_R) \frac{2\pi a}{\ln \frac{R}{r_0}} \quad (11.VIII)$$

где  $a$  — мощность тампонажного слоя.

В первые моменты нагнетания значения комплекса  $\frac{k_{пр}}{\mu}$  достаточно велики. При уменьшении комплекса  $\frac{k_{пр}}{\mu}$  радиусы цементации



таши, несмотря на увеличение времени нагнетания, сильно снижают свою величину. Увеличивается время контактирования раствора с породой, происходит дальнейшее закупоривание поровых каналов породы и резко сокращается подача раствора. Одновременно с радиусами цементации изменяется и расход нагнетания. В начале нагнетания, когда значения комплекса  $\frac{k_{np}}{\mu}$  велики,

поглощательная способность тампонируемой среды по уравнению II, VIII может оказаться большей, чем допускает производительность насосной цементационной установки. Большие радиусы цементации не обеспечиваются расходом нагнетания.

Первый режим нагнетания возможен в том случае, если величина расхода в начале нагнетания соответствует производительности насосной установки.

Придерживаясь принятого метода исследования, радиус цементации для второго режима нагнетания определяем непосредственно интегрированием уравнения (6, VIII)

$$\frac{1}{\pi} dt = \frac{2\pi a}{Q} r dr.$$

После интегрирования

$$R = \sqrt{\frac{Q}{\pi a m_{cp}} T}. \quad (12, VIII)$$

При заданных  $R$  и  $Q$  величина забойного давления

$$p_0 = \frac{\mu}{k_{np}} \cdot \frac{Q}{2\pi a} \ln \frac{R}{r_0} + p_R.$$

Подставляя обратное значение комплекса  $\frac{k_{np}}{\mu}$  для момента времени  $T$ , найдем

$$p_0 = \frac{e^{\alpha T}}{\beta} \cdot \frac{Q}{2\pi a} \ln \frac{R}{r_0} + p_R, \quad (13, VIII)$$

где  $p_R$  — пластовое давление.

Уравнений (12 и 13, VIII) достаточно, чтобы определить согласованные значения параметров  $R$ ,  $T$  и  $p_0$  по второй схеме нагнетания. Но здесь необходимо отметить следующее.

Проф. Н. Г. Трупак считает, что экономически целесообразно осуществлять цементацию горных пород до полного прекращения притока воды в ствол шахты. Опыт показывает, что снижение притока воды в ствол более чем на 80% от первоначального обходится дороже, чем достижение предела в 80%. Поэтому цементацию грунта (породы) можно ограничить некоторым допустимым пределом комплекса, а  $\frac{k_{np}}{\mu}$  следовательно, и коэффициента фильтрации  $k'_0$ . Величина этого предела зависит от назначения тампонажа и местных условий. Из уравнения (3, VIII) следует

$$k = \gamma_0^2 e^{-\alpha T}. \quad (14, VIII)$$

Это уравнение определяет изменение коэффициента фильтрации цементной суспензии в проницаемой среде. Отношение коэффициентов фильтрации для двух жидкостей в одной и той же среде, но разных вязкостей и удельных весов выражается уравнением

$$\frac{k}{k_0} = \frac{\gamma}{\gamma_0} \cdot \frac{\nu_0}{\nu} = \frac{\nu_0}{\nu}, \quad (15, VIII)$$

где  $\nu_0$  и  $\nu$  — кинематические вязкости жидкостей.

Пользуясь уравнением (15, VIII), можно приближенно<sup>1</sup> пересчитать коэффициенты фильтрации для цементной суспензии в коэффициенты фильтрации для воды

$$k_0 = k \frac{\nu}{\nu_0} = \gamma_0^2 e^{-\alpha T} \frac{\nu}{\nu_0}. \quad (16, VIII)$$

Отношение вязкостей цементной суспензии и воды можно легко получить на полевом вискозиметре типа СПВ-5. Напомним, что для момента времени  $T=0$  уравнение (14, VIII) принимает вид  $k_0 = \gamma_0 \beta$ . Дальнейшее решение задачи выполняется следующим образом. Из уравнения (16, VIII) определяется время нагнетания  $T'_0$ , соответствующее предельному значению коэффициента фильтрации затампонируемой среды  $k'_0$

$$T'_0 = \frac{\lg \frac{\beta \gamma_0 \mu}{k'_0 \nu_0}}{0,434 \alpha}. \quad (17, VIII)$$

После этого по заданному времени  $T'_0$  из уравнения (12, VIII) находим радиус цементации  $R_0$ , а из уравнения (13, VIII) — забойное давление  $p_0$ .

*Пример.* Шебекоцкий массив со средним диаметром приведенного шара  $D_0 = 6,2 \cdot 10^{-2}$  м имеет мощность  $a = 2$  м и объемную пористость  $m = 0,396$ . Коэффициент фильтрации  $k_0 = 2,81 \cdot 10^{-2}$  м/сек. Средний диаметр пор  $d_0 = 2 \cdot 10^{-3}$  м. Предполагается нагнетание цементной суспензии в  $\Pi = 4$ . Отношение реологических характеристик  $\tau_0 / \mu = 370$  сек<sup>-1</sup>. Производительность цементационной установки  $Q = 15 \cdot 10^{-2}$  м<sup>3</sup>/сек. Пластовое давление  $p_R = 0$ .

Коэффициенты:  $\alpha = 0,00358$  сек<sup>-1</sup>,  $\beta = 2,81 \cdot 10^{-2}$  м<sup>3</sup>/кгсек. Для предельного значения коэффициента фильтрации затампонируемой среды  $k'_0 = 0,005 \cdot 10^{-2}$  м/сек (песчаный грунт с примесью глины) время нагнетания по уравнению (18, VIII)

$$T'_0 = \frac{\lg \frac{2,81 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3 \cdot 0,001405}{10^{-2} \cdot 0,005 \cdot 0,0013}}{0,434 \cdot 0,00358} = 1800 \text{ сек.}$$

По уравнению (12, VIII) расчетный радиус цементации

$$R = \sqrt{\frac{15 \cdot 10^{-2} \cdot 1800}{3,14 \cdot 2 \cdot 0,198}} = 4,65 \text{ м.}$$

<sup>1</sup> Так как не учитывается изменение вязкости суспензии от скорости.



По уравнению (13, VIII) забойное давление на конец нагнетания

$$P_0 = \frac{631}{2310} \frac{15000}{6.28 \cdot 203} 2,3 2,27 = 14 \cdot 10^6 \text{ кг/м}^2 = 14 \cdot 10^6 \text{ н/м}^2.$$

Для рассмотренного примера на рис. 98 показаны кривые изменения радиусов цементации и забойного давления в зависимости от времени нагнетания.

При определении промежуточных значений радиусов цементации  $R$ , надо в уравнение (12, VIII) вместо  $m_{\text{ср}}$  подставлять зональные значения пористости  $m_{\text{зр}}$ , соответствующие взятым интервалам времени

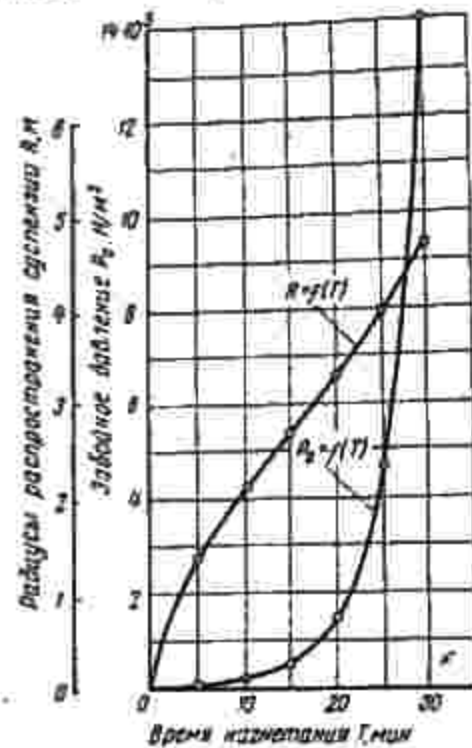


Рис. 98. Кривые параметров нагнетания  $R$  и  $P_0$  в функции времени при  $Q = \text{const}$

$$m_{\text{ср}} = \frac{m(2T - T')}{2T}, \quad (18, \text{VIII})$$

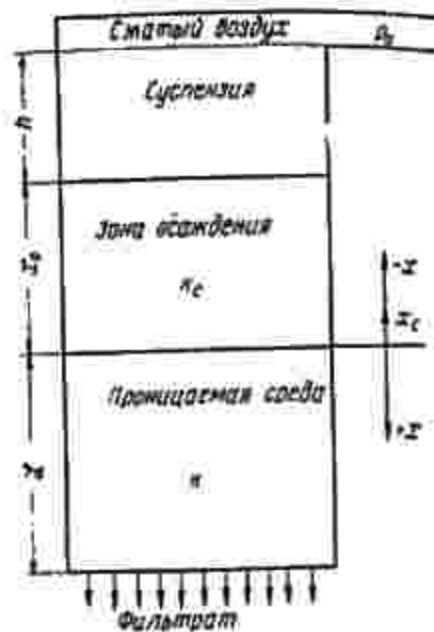


Рис. 99. Зона осаждения при одномерно-вертикальном движении

давления резко возрастает. Практика нагнетания цементных суспензий (растворов) в различные породы полностью подтверждает это явление.

### 3. Фильтрация и осаждение твердого

Процесс тампонирувания грунта можно рассматривать как непрерывный процесс осаждения твердой фазы в порах проницаемой среды. Если размеры твердых частиц в суспензии меньше размеров отверстия поры в проницаемой среде, то цементные (глинистые) частицы осаждаются, а вода отфильтровывается через пористую среду. Можно получить аналитическое решение этого процесса, воспользовавшись теоретическим решением проф. Р. Е. Коллинза (Хаустонский университет, США), сделанным в монографии «Истечение жидкостей через пористые материалы». Нагнетаемая суспензия предполагается гомогенной. Суммарный объем суспензии состоит из объема твердой фазы  $v_s$  и объема жидкости  $v_c$ . Тогда фракция твердого в объеме суспензии составит

$$m_s = \frac{v_s}{v_s + v_c}. \quad (19, \text{VIII})$$

В период фильтрации и процесса осаждения  $v_s$  уменьшается на величину  $dv_s$  за время  $dt$ . За этот период  $v_c$  увеличивается на  $dv_c$ . Если предположить, что состав суспензии остается неизменным, то  $dm_s = 0$  и

$$dv_s = \frac{m_s}{1 - m_s} dv_c. \quad (20, \text{VIII})$$

В процессе фильтрации частицы твердого остаются в порах фильтрующей (тампонируемой) среды.

Рассмотрим сначала одномерное вертикальное движение по закону линейной фильтрации, как это сделано Коллинзом для внешнего осаждения, но последуем схеме внутреннего осаждения (рис. 99), а затем закон осаждения распространим на случай плоско-радиального движения.

Пусть  $\Delta A$  — элемент поверхности, на которой осаждаются частицы, а  $dx_c$  — увеличение в плотности зоны осаждения за время  $dt$ . Так как эта зона расположена внутри фильтрующей (тампонируемой) среды, то только пористость  $m$  объема  $\Delta A dx_c$  действительно относится к зоне осаждающихся частиц. Здесь  $m$  является пористостью всей фильтрующей (тампонируемой) среды. Внутри этого объема осаждаются частицы твердого с пористостью  $m_c$ . Суммарный объем твердого, осажденного на элементе поверхности  $\Delta A$  за время  $dt$ , составляет

$$dv_s = m(1 - m_c) \Delta A dx_c. \quad (21, \text{VIII})$$

где  $T$  — полное время нагнетания;

$T'$  — взятый интервал нагнетания.

Особенностью кривой изменения радиусов цементации является несколько более быстрое увеличение их в начальные моменты нагнетания и замедленные изменения в конце нагнетания. Обратную картину изменений дает функция забойного давления: в начале нагнетания забойное давление растет очень медленно, а в конце — резко увеличивается. В первые моменты нагнетания, когда время контактирования раствора с грунтом еще не велико, проницаемость пористой среды достаточно высокая. В дальнейшем, по мере увеличения времени контактирования, проницаемость тампонируемой среды уменьшается и величина забойного



За время  $dt$  через площадь  $\Delta A$  протекает некоторый объем жидкости. Если скорость фильтрации  $w_n$  на единицу поверхности, то объем жидкости

$$dv_c = -w_n \Delta A dt. \quad (22, VIII)$$

Знак минус взят потому, что  $w_n$  направлена противоположно принятому направлению нормали к  $\Delta A$ . Комбинируя уравнения (21, VIII) или (22, VIII) с (20, VIII), получаем закон осаждения

$$\frac{dx_c}{dt} = - \frac{m_2}{m(1-m_c)(1-m_2)} w_n. \quad (23, VIII)$$

Выражение  $\frac{m_2}{m(1-m_c)(1-m_2)}$  называется внутренним фактором осаждения и обозначается

$$\omega = \frac{m_2}{m(1-m_c)(1-m_2)}. \quad (24, VIII)$$

Так как осаждающиеся частицы твердого с пористостью  $m_c$  сжимаются, то  $m_c$  меняется с дифференциалом давления. Отсюда и фактор осаждения не является постоянным. Однако, как отмечает проф. Р. Е. Коллинз, рассмотрение  $\omega$  постоянным не приводит к значительным погрешностям, если дифференциал давления является постоянным.

Поток жидкости внутри зоны осаждения подчиняется закону Дарси с проницаемостью  $k_c$  для зоны внутреннего осаждения. Проницаемость всей фильтрующей среды  $k$ . По закону Дарси имеем

$$q = - \frac{k_c A}{\mu} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \right), \quad (25, VIII)$$

где  $A$  — поверхность фильтра;

$\rho$  и  $\mu$  — плотность и вязкость фильтрующей жидкости;

$q$  — расход потока, направленного в сторону  $+x$ .

Скорость направлена вниз, как указано на рис. 99. Так как жидкость несжимаема, то  $\frac{\partial q}{\partial x} = 0$  в уравнении непрерывности и  $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0$  в уравнении Лапласа (одномерное движение). Решение этих уравнений дает

$$\left. \begin{aligned} p &= ax + b \quad \text{для } -x_c < x < 0; \\ p' &= a'x + b' \quad \text{для } 0 < x < L. \end{aligned} \right\} \quad (26, VIII)$$

Граничные условия

$$p(-x_c) = p_0 + \rho_c g h; \quad p(0) = p'(0);$$

$$p'(L) = 0; \quad -k_c \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \right)_{x=0} = -k \left( \frac{\partial p'}{\partial x} - \rho g \right)_{x=0}. \quad (27, VIII)$$

Здесь  $p_0$  — давление над суспензией (сжатый воздух);  
 $h$  — глубина суспензии от верхнего уровня ее до уровня зоны осаждения;  
 $\rho_c$  — плотность суспензии.

Используя граничные условия (27, VIII), находим значения констант

$$b' = b; \quad a' = \frac{k_c a + \rho g (k - k_c)}{k};$$

$$b = p_0 + \rho_c g h + ax_c; \quad a = - \frac{p_0 + \rho_c g h + \rho g \left(1 - \frac{k_c}{k}\right) L}{x_c + \frac{k_c}{k} L}. \quad (28, VIII)$$

Теперь можно определить давления в любой точке зоны осаждения и расположенной ниже остальной части проницаемой среды. В частности, давление в зоне осаждения

$$p = - \frac{p_0 + \rho_c g h + \rho g \left(1 - \frac{k_c}{k}\right) L}{x_c + \frac{k_c}{k} L} x + b. \quad (29, VIII)$$

Для зоны осаждения координата  $x$  имеет отрицательный знак. Для уравнения (25, VIII) будем иметь

$$q = \frac{k_c A}{\mu} \frac{p_0 + \rho_c g h + \rho g (x_c + L)}{x_c + \frac{k_c}{k} L}. \quad (30, VIII)$$

Согласно уравнению (23, VIII) получим

$$\frac{dx_c}{dt} = \frac{k_c}{\mu} \frac{p_0 + \rho_c g h + \rho g (x_c + L)}{x_c + \frac{k_c}{k} L} \cdot \frac{m_2}{m(1-m_c)(1-m_2)}, \quad (31, VIII)$$

так как положение поверхности зоны осаждения было взято как  $-x_c$ . Обозначив начальное значение  $h$  через  $h_0$ , можно написать

$$h = h_0 - x_c - \frac{Q}{A(1-m_2)}, \quad (32, VIII)$$

где  $Q = \int_0^t q dt$  — общее количество фильтрата.

Но общее количество фильтрата за время  $t$  можно получить и интегрированием уравнения (23, VIII)

$$\frac{m(1-m_c)(1-m_2)}{m_2} \left| x_c \right|_0^{-x_c} = - \frac{q}{A} \left| t \right|_0^t,$$



откуда при  $qI=Q$

$$Q = \frac{Am(1-m_c)(1-m_s)}{m_s} x_c \quad (33, VIII)$$

В принятой схеме фильтрации высота уровня суспензии не остается постоянной. Поэтому уравнение (32, VIII) со значением  $Q$  по (33, VIII) подставляется в уравнение (31, VIII) вместо значения  $h$ . Полученное уравнение может быть интегрировано при  $\rho_0 = \text{const}$

$$\frac{dx_c}{dt} = \frac{k_c}{\mu} \cdot \frac{\rho_0 + \rho_c g \left( h_0 - z_c - \frac{m(1-m_c)}{m_s} x_c + \rho g (x_c + L) \right)}{x_c + \frac{k_c}{k} L} \omega \quad (34, VIII)$$

Обычно  $\rho_0$  является большой величиной по сравнению с третьим членом числителя дроби, а второй член ее всегда будет близок к нулю. Поэтому без большой погрешности для больших значений  $\rho_0$  можно принять

$$\frac{dx_c}{dt} \approx \frac{k_c \rho_0 \omega}{\mu \left( x_c + \frac{k_c}{k} L \right)} \quad (35, VIII)$$

Напомним, что  $\omega$  здесь обозначает внутренний фактор осаждения.

Интегрирование уравнения (35, VIII) дает

$$x_c = -\frac{k_c}{k} L + \left[ \left( \frac{k_c}{k} L \right)^2 + \frac{2k_c \rho_0 \omega}{\mu} t \right]^{1/2} \quad (36, VIII)$$

Если за определенное время  $t$  измерены  $Q$  и  $x_c$ , то из уравнения (33, VIII) можно определить величину фактора осаждения

$$\omega = \frac{Q}{Ax_c} \quad (37, VIII)$$

Это значение вместе с известными  $L$ ,  $\rho_0$ ,  $k$ ,  $\mu$ ,  $x_c$  и  $t$  может быть использовано в уравнении (36, VIII) для нахождения величины  $k_c$

$$k_c = \frac{x_c^2 \mu k}{2(\rho_0 \omega t - x_c \mu L)} \quad (38, VIII)$$

Может быть решена и обратная задача — при заданных значениях  $k_c$ ,  $t$ ,  $\rho_0$ ,  $\omega$  и  $L$  находить расчетное значение высоты зоны осаждения  $x_c$ .

Плоско-радиальное движение. Закон осаждения можно выразить уравнением

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{m_s}{m(1-m_c)(1-m_s)} \omega r \quad (39, VIII)$$

Формула фактора внутреннего осаждения остается прежней.

$$\omega = \frac{m_s}{m(1-m_c)(1-m_s)}$$

Поток жидкости внутри зоны осаждения также подчиняется закону Дарси с проницаемостью среды осаждения  $k_c$ . Проницаемость всей пористой среды  $k$  (рис. 100).

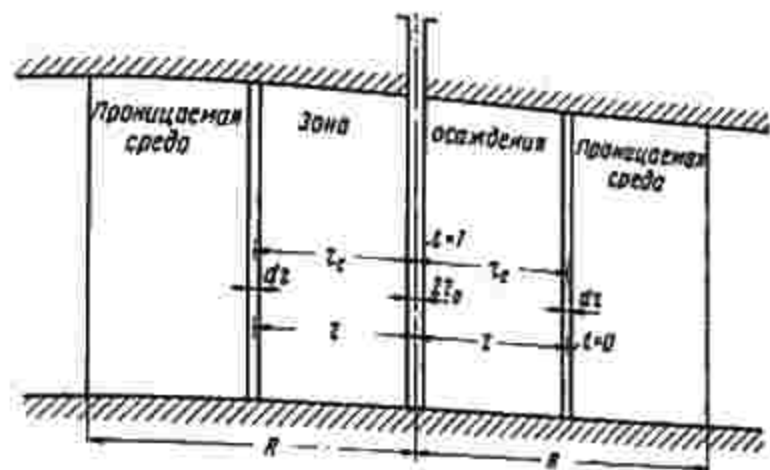


Рис. 100. Зона осаждения при плоско-радиальном движении

Расход жидкости в зоне осаждения на единицу мощности пласта равен

$$q = -\frac{2rk_c r}{\mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} \quad (40, VIII)$$

Так как распределение давления в каждой из кольцевых областей обладает радиальной симметрией, то общим решением уравнения Лапласа для результирующего распределения служат уравнения

$$p = a \ln r + b; \quad p' = a' \ln r + b' \quad (41, VIII)$$

Граничные условия

$$p(r_0) = p_0; \quad p'(R) = p_R;$$

на границе раздела зон

$$p(r) = p'(r); \quad -k_c \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = -k \frac{\partial p'}{\partial r} \quad (42, VIII)$$

Здесь  $p_0$  — забойное давление;

$p_R$  — пластовое давление.

Используя граничные условия (42, VIII), определяем константы

$$\left. \begin{aligned} a' &= \frac{k_c}{k} a; \quad b' = p_R - \frac{k_c}{k} a \ln R; \\ b &= p_0 - a \ln r_0; \quad a = \frac{p_0 - p_R}{\frac{k_c}{k} \ln \frac{r_c}{R} + \ln \frac{r_0}{r_c}} \end{aligned} \right\} \quad (43, VIII)$$



Давление в зоне осаждения будет равно

$$p = p_0 + \frac{p_0 - p_R}{\frac{k_c}{k} \ln \frac{r_c}{R} + \ln \frac{r_0}{r_c}} \ln \frac{r}{r_0} \quad (44, VIII)$$

Для уравнения (40, VIII) на единицу мощности пласта получим

$$q = - \frac{2\pi k_c}{\mu} \frac{p_0 - p_R}{\frac{k_c}{k} \ln \frac{r_c}{R} + \ln \frac{r_0}{r_c}} \quad (45, VIII)$$

По уравнению (39, VIII) будем иметь

$$\frac{dr}{dt} = \frac{k_c}{\mu} \frac{p_0 - p_R}{\frac{k_c}{k} \ln \frac{r_c}{R} + \ln \frac{r_0}{r_c}} \frac{\omega}{r} \quad (46, VIII)$$

Допустим, что в некоторый момент времени, назовем его начальным  $t=0$ , началось осаждение частиц твердой фазы суспензии в порах на расстоянии  $r_c$  от центра скважины (рис. 100). В некоторый момент  $t=T$  зона осаждения достигнет стенки скважины. Поэтому, интегрируя уравнение (46, VIII) при  $t=0$ ,  $r=r_c$  и  $t=T$ ,  $r=r_0$ , находим

$$-r_c^2 + r_0^2 = \frac{k_c}{\mu} \frac{(p_0 - p_R)\omega}{\frac{k_c}{k} \ln \frac{r_c}{R} + \ln \frac{r_0}{r_c}} 2T.$$

Пренебрегая малой величиной  $r_c^2$  сравнительно с  $r_0^2$ , получим

$$r_c = \sqrt{\frac{k_c}{\mu} \frac{(p_0 - p_R)\omega}{\frac{k_c}{k} \ln \frac{R}{r_c} + \ln \frac{r_0}{r_c}} 2T}. \quad (47, VIII)$$

При известных значениях  $\omega$ ,  $k_c$ ,  $k$ ,  $\mu$ ,  $R$  и  $(p_0 - p_R)$  по уравнению (47, VIII) для заданного времени нагнетания  $T$  определяем радиус зоны осаждения  $r_c$ . Уравнение решается графически.

Значение  $k_c$  можно принять по заданной величине коэффициента фильтрации  $k'_0$ . Время  $T'_0$ , соответствующее коэффициенту  $k'_0$ , можно определить по эмпирической формуле (18, VIII)

$$T'_0 = \frac{\lg \frac{\gamma_0 \mu}{k'_0 \mu}}{0,434\pi} = T.$$

Коэффициент проницаемости равен

$$k_{np(0)} = k'_0 \frac{\gamma_0}{\mu} = k_c \quad (48, VIII)$$

где  $\mu_0$  и  $\gamma_0$  — вязкость и удельный вес воды;  
 $\mu$  — вязкость суспензии.

Коэффициенты  $\beta$  и  $\alpha$  имеют прежние значения (4—5, VIII).

Пример. Проницаемая среда — однородный кварцевый шевель крупностью фракций  $D_0 = 6,2 \cdot 10^{-2}$  м и пористостью  $m = 0,396$ . Средний диаметр пор  $d_0 = 2 \cdot 10^{-2}$  м. Коэффициент фильтрации шевельного массива  $k_f = 2,41 \cdot 10^{-1}$  м/сек. Постоянное забойное давление  $(p_0 - p_R) = 1 \cdot 10^6$  н/м<sup>2</sup>. Цементная суспензия состава Т Ж = 1 : 2 по объему. Относительный вес суспензии 1,37. Предельное напряжение сдвига  $\tau_0 = 2,1$  н/м<sup>2</sup>. Динамическая вязкость суспензии  $\mu = 0,00149$  н · сек/м<sup>2</sup>, воды  $\mu_0 = 0,00134$  н · сек/м<sup>2</sup>. Фракция твердого в объеме суспензии (19, VIII).

$$m_s = \frac{1}{1+2} = 0,333.$$

Допустим, что пористость твердой фазы составляет  $m_c = 0,15$ . Внутренний фактор осаждения (24, VIII)

$$\omega = \frac{0,333}{0,396(1-0,15)(1-0,333)} = 1,49.$$

Коэффициент  $\alpha$

$$\alpha = 6,13 \cdot 10^{-2} \frac{2,1}{0,00149} \sqrt{\frac{0,05}{2}} = 0,0137.$$

Коэффициент  $\beta$

$$\beta = \frac{2,81 \cdot 10^{-2}}{10^3} = 2,81 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{кг сек.}$$

Предельное значение коэффициента фильтрации зоны осаждения  $k'_0 = 0,005 \cdot 10^{-2}$  м/сек.

Время нагнетания (18, VIII)

$$T'_0 = T = \frac{\lg \frac{2,81 \cdot 10^{-2} \cdot 10^3 \cdot 0,00149}{10^{-2} \cdot 0,005 \cdot 0,00134}}{0,434 \cdot 0,0137} = 465 \text{ сек.}$$

Коэффициент проницаемости зоны осаждения (48, VIII)

$$k_c = \frac{0,005 \cdot 1,34}{0,001} = 6,7 \quad \beta = 6,7 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2.$$

Радиус зоны осаждения

$$r_c = \sqrt{\frac{6,7 \cdot 10^{-12} \cdot 1 \cdot 10^6 \cdot 1,49 \cdot 930}{0,00149 \left( \frac{6,7}{3760} \lg \frac{100}{r_c} + \lg \frac{r_0}{0,04} \right) 2,3}} = 0,5 \text{ м.}$$

Таким образом, радиус зоны осаждения равен 0,5 м. Полученное значение радиуса хорошо увязывается с многочисленными данными практики.

Теоретическое решение задачи об осаждении твердой фазы при фильтрации дисперсной жидкости в проницаемой среде весьма достоверно.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Адамович А. Н., Колтунов Д. В. Цементация осадочных гидросооружений. Госэнергоиздат, 1953.  
Гиринский Н. К. Определение коэффициента фильтрации. Госгеолгиздат, 1950.  
Истомин В. С. Фильтрационная устойчивость грунтов. Гос. изд-во лит. по строительству и архитектуре, 1957.



Каменский Г. Н., Корчебоков Н. А., Разин К. П. Движение подземных вод в неоднородных пластах ОНТИ, М., 1943.  
 Каранфилов Т. С. Определение величины радиуса закрепления грунтов при постоянном коэффициенте фильтрации. «Гидротехническое строительство», 1951, № 1.  
 Ломизе Г. М. Фильтрация в трещиноватых породах. Госэнергоиздат, 1951.  
 Миллионщиков М. Д. Гидромеханический анализ некоторых способов эксплуатации нефтяных скважин. Институт механики АН СССР, 1945.  
 Насберг В. М. О нагнетании в ненасыщенной водой грунт. Изв. АН СССР, отд. техн. наук, 1951, № 9.  
 Требин Г. Ф. Фильтрация жидкостей и газов в пористых средах. Гостоптехиздат, 1959.  
 Троицкий С. В., Белицкий А. С., Чекин А. И. Общая и горно-рудничная гидрогеология. Госгортехиздат, 1960.  
 Н. Г. Трупаков. Специальные способы проведения горных выработок «Недра», 1964.  
 Шелкачев В. Н. Основные уравнения движения упругой жидкости в упругой пористой среде. ДАН СССР, т. XII, № 2, 1946.  
 Шелкачев В. Н. Упругий режим пластовых водонапорных систем. Госгортехиздат, 1948.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Введение	3
Глава I. Современное состояние вопроса	4
1. Область применения тампонажа в горном деле	4
2. Среда нагнетания	8
3. Изученность вопроса	11
4. Принципиальные схемы нагнетания	15
5. Формулы Маэга, Адамовича, Каранфилова и Луговского	17
Глава II. Теоретические предпосылки	22
1. Фильтрационные уравнения	—
2. Функции прямолинейного источника	26
3. Функции точечного источника	30
4. Функции несовершенных источников	33
Глава III. Некоторые вопросы геометрии фильтрации	40
1. Действующий диаметр зернистых грунтов	—
2. Коэффициент фильтрации несвязных грунтов	47
3. Диаметры пор	54
4. Геометрические параметры трещиноватости	64
Глава IV. Боковое нагнетание жидкости с постоянным коэффициентом фильтрации	78
1. Многоскважинное нагнетание в пронизаемую толщу, зажатую в плотных породах	78
2. Фактор времени при нагнетании. Радиусы фронта вытеснения	114
3. Расчет нагнетания в условиях вытеснения воды	125
Глава V. Донное нагнетание жидкости с постоянным коэффициентом фильтрации	145
1. Нагнетание при неограниченной глубине пронизаемого слоя	145
2. Взаимодействие источников возмущенных силой тяжести	154
3. Пространственный источник в поле осевого потока вблизи стенки	175
Глава VI. Поля течения с переменным коэффициентом фильтрации	194
1. Пространственный источник в поле с двумя сферическими зонами коэффициентов фильтрации	195
2. Пространственный источник в поле с непрерывным изменением коэффициента фильтрации	201
3. Осевой одномерный поток в поле с переменными значащими коэффициента	202
4. Пространственный источник в поле с плоскими границами раздела зон	207
5. Поле линейного источника при переменных значениях коэффициента фильтрации	224
	293



Глава VII Нагнетание структурных жидкостей с переменным коэффициентом фильтрации по длине потока	231
1 Механические свойства структурных жидкостей	231
2 Коэффициент фильтрации структурных жидкостей	237
3 Боковое нагнетание с учетом пластических напряжений структурной жидкости	241
4 Длинное нагнетание структурных жидкостей (схема пространственного источника)	249
5 Расчет нагнетания структурной жидкости в условиях вытеснения воды	259
6 Нагнетание структурных жидкостей с учетом упругих сил	261
7 Многоскважинное нагнетание структурных жидкостей	267
Глава VIII Нагнетание дисперсных жидкостей с коэффициентом фильтрации, переменным по времени	274
1 Процессы контактирования дисперсной жидкости с породой	274
2 Неустойчивый процесс тампонажа грунтов	281
3 Фильтрация и осаждение твердого	285

### ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
18	Формула (1,1)	$R = \sqrt{r}$	$R = \frac{3}{\sqrt{r}}$
36	Формула (35,11)	$\varphi = \frac{q}{\gamma r}$	$\varphi = \frac{q}{4\pi}$
62	Табл. 7, графа 3 справа, 1 снизу	$0,860 \cdot 10^{-2}$	$1,880 \cdot 10^{-2}$
81	1 снизу	$+\operatorname{arctg} 2 \frac{y}{x-b}$	$+\operatorname{arctg} \frac{y}{x-b}$
	2 снизу	на рис. 33.	на рис. 32.
82	4 снизу	на рис. 33.	на рис. 32.
85	3 сверху	$-\frac{1}{(x-b)^2 + y^2}$	$+\frac{1}{(x-b)^2 + y^2}$
		$\frac{P_0^* - P_R^*}{R_0}$	$\frac{P_0^* - P_R^*}{r_0}$
111	Формула (77,IV)	$\beta \ln \frac{R}{R_0}$	$\beta \ln \frac{R}{r_0}$
	3 снизу	$R_0^2 =$	$r_0^2 =$
		$-\left(\frac{\mu_0 - \mu}{2}\right)(R^2 - r_0^2)$	$+\left(\frac{\mu_0 - \mu}{2}\right)(R^2 - r_0^2)$
135	21 сверху	$\mu_0 \ln \frac{R}{r_0} (R^2 - r_0^2)$	$\mu_0 \ln \frac{R}{r_0} (R^2 - r_0^2)$
		2,855	1,855
184	Табл. 25, графа 2 справа, 1 снизу		
247	Формула (26,VII)	$= \frac{\mu}{\alpha k_{np}} \left[ \frac{Q}{2\pi \alpha} \ln \frac{R}{r} + \right.$	$= \frac{\mu}{\alpha k_{np}} \left[ \frac{Q}{2\pi \alpha} \ln \frac{R}{r_0} + \right.$
256	10 сверху	$\frac{P_R = 0}{\alpha k_{np}}$	$\frac{P_R = 0}{\alpha k_{np}}$
261	7 и 8 сверху	$= \frac{\mu_0}{10^6}$	$= \frac{\mu_0}{10^6}$
270	Табл. 37, 4 графа, 1,2,3,4,5 снизу		



## Внимание специалистов-горняков!

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «НЕДРА»  
ВЫХОДЯТ ИЗ ПЕЧАТИ НОВЫЕ КНИГИ

**КОЧЕТОВ В. В.** Погрузка породы при проходке стволов. 10 л.  
Ц 68 коп.

В книге рассмотрены отечественные и зарубежные ствольные погрузочные машины; факторы, влияющие на их производительность; организация погрузки и подъема породы; новые принципы конструирования комбинированных машин, автоматизации их работы и основные положения по безлюдной проходке стволов.

В работе даны рекомендации по совершенствованию технологии погрузки, подъема и оснащения стволов и по снижению стоимости работ.

Книга предназначена для работников производственных, конструкторских и научных организаций угольной, рудной и горнохимической промышленности, а также может быть полезна студентам горных вузов и факультетов.

**ЛЫХИН П. А.** Механизация и организация проведения горизонтальных горных выработок. 15 л. Ц 95 коп.

В книге рассматриваются технические средства механизации и организации проведения горизонтальных горных выработок на шахтах и рудниках, приведены рекомендации по выбору горнопроходческого оборудования и рационального цикла работ с целью повышения производительности труда по отдельным операциям цикла и увеличения скорости проведения выработок.

Книга рассчитана на инженерно-технических работников горнодобывающей промышленности, научных работников и проектировщиков, а также может быть полезной для студентов горных вузов.

*Заказы направляйте заблаговременно по адресу: Москва, Б-150,  
ул. Подбельского, д. 7/20, магазин № 95.*

Издательство «Недра»