

**Исследования
распространения
сейсмических волн
в анизотропных
средах**



«НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ТРУДЫ ИНСТИТУТА ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ

Выпуск 798

ИССЛЕДОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Ответственный редактор
доктор технических наук И. С. Чичинин



НОВОСИБИРСК
«НАУКА»
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
1992

УДК 550.834

Исследования распространения сейсмических волн в анизотропных средах.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1992.— 192 с.

ISBN 5—02—030008—X.

В сборнике анализируются экспериментальные данные о поляризации поперечных волн в реальных средах и делается вывод, что наиболее адекватно поляризация поперечных волн описывается с помощью анизотропных гиротропных моделей. Вводится и обсуждается новое понятие — сейсмическая гиротропия. Решается задача об источнике на поверхности гиротропного полупространства. Приводятся некоторые экспериментальные данные, характеризующие гиротропию терригенных пород, слагающих ЗМС. Рассмотрен также ряд вопросов, относящихся к анизотропным средам: поляризационная обработка обменных отраженных волн, определение параметров анизотропии по данным АК, особенности распространения поперечных волн в вертикально-неоднородных средах и алгоритмы расчета лучей в средах слоисто-однородных.

Сборник рассчитан на широкий круг лиц, занимающихся теоретическими и экспериментальными исследованиями распространения сейсмических волн; в первую очередь он адресуется специалистам в области многоволновых сейсмических исследований.

Рецензенты

доктор геолого-минералогических наук *А. В. Тригубов*
доктор физико-математических наук *Б. Г. Михайленко*

Утверждено к печати Институтом геологии и геофизики СО РАН

И $\frac{1803020000-029}{042(02)-92}$ 306—91 II полугодие

© Издательство «Наука», 1992

ISBN 5—02—030008—X

ПРЕДИСЛОВИЕ

Актуальность изучения распространения волн в анизотропных упругих средах общепризнанна. Особую важность эти проблемы приобретают при проведении многоволновых сейсмических исследований, когда используются не только продольные волны, но и поперечные.

В анизотропных средах, как известно, распространяется не одна поперечная волна, а две квазипоперечных. Различия в их распространении часто приводят к сложной волновой картине при регистрации поперечных волн на трех компонентах. При этом, как правило, обнаруживается, что поляризация волн имеет «аномальный» характер, т. е. она не соответствует характеристикам применяемых направленных источников поперечных волн и не объясняется известными данными о строении среды. Отклонения от ожидаемой поляризации состоят в том, что регистрируются интенсивные побочные компоненты смещений: x , z при Y -возбуждении, y — при X , Z -возбуждении, хотя, согласно теории, такого не должно быть в средах с горизонтально или полого залегающими отложениями.

Среди исследователей сложилось мнение, что «аномальная» поляризация поперечных волн обязана своим происхождением ориентированной вертикальной трещиноватости. Вертикальную трещиноватость считают универсальным свойством пород, ее появление связывают с неравномерностью поля тектонических напряжений. В этом случае поляризацию поперечных волн описывают в рамках модели трансверсально-изотропной среды с горизонтальной осью симметрии или с помощью модели анизотропной среды ромбического типа симметрии.

Однако возможен и другой подход к пониманию явления аномальной поляризации поперечных волн. Он состоит в описании распространения упругих волн с учетом пространственной дисперсии. В первом приближении учет пространственной дисперсии заключается в том, что в обобщенный закон Гука добавляется член, содержащий производные деформаций по пространственным координатам. Упругие среды, описываемые законом Гука в таком виде, называются гиротропными. Главное свойство гиротропных сред состоит в том, что в них поляризация волн является эллиптической, а в некоторых направлениях — круговой,

при этом направления обхода для двух поперечных волн противоположны, так что различают левую и правую поляризации. В результате сложения двух круговых колебаний с левой и правой поляризациями и различными скоростями распространения возникает «вращение вектора смещений» — аналог хорошо известного в оптике явления «вращения плоскости поляризации», наблюдаемого в оптически активных средах.

Большая часть работ сборника посвящена изучению распространения объемных волн в анизотропных гиротропных средах. И. Р. Оболенцева вводит понятие «сейсмическая гиротропия», описывает гиротропные модели и свойства распространяющихся в них упругих волн. И. С. Чичинин, М. М. Немирович-Данченко продолжают обсуждение особенностей распространения упругих волн в гиротропных средах и решают задачу об источнике, действующем на поверхности трансверсально-изотропного гиротропного полупространства. Предварительно они излагают методику решения подобных задач и в качестве примера рассматривают направленные источники, распределенные на поверхности трансверсально-изотропного негиротропного полупространства. В статье Г. И. Резяпова описаны эксперименты, поставленные с целью изучения явления гиротропии при распространении поперечных волн по оси симметрии среды, т. е. в скважине по вертикали, и приводятся определенные из эксперимента константы гирации. С гиротропными свойствами среды, как нам представляется, связаны и описанные В. П. Скавинским, Юн Ен Дином особенности поляризации рефрагированных поперечных волн и отраженных PS -волн, а также факт возникновения SP -волны при Y -возбуждении. Все указанные выше эксперименты были выполнены в 1987, 1988 гг. на геофизическом полигоне ТОЭГИ ИГиГ СО АН СССР около села Альмяково в Томской области. Геологическое строение участка работ и свойства отложений, слагающих верхнюю часть разреза, описаны в статье В. В. Безходарнова, Н. А. Макаренко.

Изучению поляризации обменных PS -волн в других сейсмогеологических условиях — на склоне соляного купола в Прикаспийской впадине — посвящены статьи А. А. Никольского и А. В. Шитова. Авторы отмечают связь найденных направлений векторов поляризации со строением среды. Векторы поляризации, как правило, ориентированы в направлениях восстания — падения отложений у одной волны и простирания — у другой. Обработка данных выполнена на основе анизотропной модели (без гиротропии), хотя разброс полученных данных, по-видимому, связан с гиротропными свойствами верхней части разреза. Не исключено также, что образование побочных компонент смещений происходит в процессе отражения, что возможно в случае контакта двух сред, одна из которых является гиротропной. Этот вопрос подлежит дальнейшему изучению.

Вопросам обработки экспериментальных данных посвящена также статья С. И. Масловой, которая рассматривает в методиче-

ском плане способы аппроксимации тонкослоистых отложений эффективными моделями трансверсально-изотропных сред. Кроме того, в данной работе приводятся параметры анизотропных моделей, полученные автором путем обработки представительного экспериментального материала — данных акустического каротажа 24 скважин. Эти данные важны для проведения математического моделирования, ибо сейсморазведчикам надо знать, какие из особенностей распространения волн в анизотропных средах (а они очень разнообразны) могут наблюдаться в случае реальных геологических сред, описываемых с помощью анизотропных моделей.

Последней работой из тех, в которых изучается распространение волн в анизотропных средах, является статья А. Ф. Дурьнина. В ней путем анализа результатов математического моделирования рассмотрено поведение лучей и времен пробега рефрагированных волн трех типов (P , SV , SH) в трансверсально-изотропных средах, эквивалентных тонкослоистым. Наиболее интересно различие кинематических характеристик поперечных волн SV и SH , по которому можно распознавать наличие анизотропии и, как следует из работы, находить упругие константы, характеризующие тонкую слоистость среды. Для более надежного определения параметров полезно использовать также и продольные волны — в комплексе с поперечными. По одним продольным волнам, как известно, трудно различать неоднородность и анизотропию.

Для того чтобы кинематическая интерпретация рефрагированных поперечных волн двух типов стала возможной, надо прежде всего иметь годографы этих волн. Как показывает опыт, регистрация рефрагированных поперечных волн на трех компонентах не вызывает затруднений, они возбуждаются не только направленными источниками, но и обычными взрывами в скважинах. Однако поляризация поперечных волн «аномальна», и «аномальна» она, как мы считаем, вследствие гиротропии. Таким образом, встает задача разделения эффектов гиротропии и анизотропии.

Сборник завершается двумя статьями по вычислительной проблематике. Их актуальность очевидна, так как хорошо развитое программно-алгоритмическое обеспечение является необходимым инструментом исследований, особенно при изучении таких сложных объектов, как анизотропные среды.

И. Р. Оболенцева

СЕЙСМИЧЕСКАЯ ГИРОТРОПИЯ

ОБ ЭФФЕКТИВНОЙ МОДЕЛИ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ, АДЕКВАТНО ОПИСЫВАЮЩЕЙ ПОЛЯРИЗАЦИЮ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН

Несмотря на достигнутое на сегодняшний день значительное продвижение в познании и математическом описании процессов распространения сейсмических волн в реальных геологических средах, можно утверждать, что ни один из существующих способов описания среды и распространения в ней упругих волн не описывает достаточно адекватно поляризацию поперечных волн. При этом речь идет не о средах сложного строения (сильно неоднородных, произвольно-анизотропных, гетерогенных и т. п.), а об обычных средах, например слоисто-однородных (с горизонтальной или слабонаклонной слоистостью) или умеренно неоднородных (по вертикали и в горизонтальных плоскостях) — изотропных либо трансверсально-изотропных. Такими моделями аппроксимируются осадочные толщи платформенных областей, являющиеся объектами поиска месторождений нефти и газа.

Распространение волн в средах указанного типа, как известно, должно достаточно хорошо описываться лучевым методом в нулевом приближении [18]. Однако поляризация поперечных волн не укладывается в рамки такого описания. Ниже будут подробно охарактеризованы наблюдаемые особенности поляризации поперечных волн. Попытка уточнить поляризацию путем добавления следующего члена лучевого ряда [12, 19, 20] не дает желаемого результата и не может его дать в принципе. Причина состоит в том, что следующий член лучевого ряда «исправляет» поляризацию поперечных волн не в ту сторону, отклоняя векторы смещения к направлениям нормалей к поверхностям фронта. Добавляются примесные компоненты: продольные для поперечных волн, поперечные для продольных (см. [9] и др.). Между тем основное несоответствие между экспериментально наблюдаемой поляризацией и предсказываемой лучевым методом состоит в том, что смещения поперечных волн отклоняются от «должных» направлений в плоскости фронта.

В данной работе предлагается новое для сейсморазведки и сейсмологии описание геологической среды. Оно основывается на учете пространственной дисперсии — зависимости тензора напряжений в данной точке однородной упругой среды от напряжений в ее окрестности. Это предположение довольно естественно, так как реальная среда не есть сплошное тело.

Учет пространственной дисперсии приводит к изменению закона Гука (добавлению членов, зависящих от производных деформаций) и соответственно уравнений движения. Тензор Кристоффеля приобретает мнимую добавку, и векторы поляризации, являющиеся решением уравнений Кристоффеля, становятся комплексными. Колебания в плоских гармонических волнах из линейных превращаются в эллиптические.

Упругие среды, в которых возможна эллиптическая поляризация однородных плоских волн, называют гиротропными. Наиболее ярко выраженное свойство гиротропных сред состоит в так называемом «вращении плоскости поляризации» поперечных волн. Оно обусловлено тем, что по некоторым направлениям (в собственно гиротропных средах по всем направлениям) могут распространяться циркулярно поляризованные поперечные волны со встречным направлением вращения и различными скоростями. Именно это свойство и представляет для нас наибольший интерес.

Указанное явление хорошо изучено в оптике и известно как «вращение плоскости поляризации». Среда, обладающая этим свойством, называют оптически активными. При распространении упругих волн в кристаллах возможны проявления акустической активности (она наблюдалась для α -кварца при длине волны порядка микрометра и частоте 28,9 ГГц [24]).

Предположение о том, что геологические среды могут быть акустически активными (вернее, сейсмически активными), было высказано мной в [14] и имело непосредственной целью объяснение экспериментов, описанных в [22]. В работе [17] были рассмотрены вопросы расчета (описан алгоритм, приведена программа) времен пробега и комплексных векторов поляризации упругих волн в однородной гиротропной среде.

В настоящей статье приводятся некоторые соображения относительно возможных моделей гиротропных сред и описываются особенности поляризации волн в гиротропных средах. Приводимые формулы используются в статье Г. И. Резяпова (см. наст. сборник) для обработки экспериментов, поставленных специально для изучения поляризации поперечных волн на оси симметрии среды, т. е. в ЗМС на вертикали. Геологическое строение участка работ хорошо известно (см. статью В. В. Безходарнова, Н. А. Макаренко в наст. сборнике). Свойства упругих волн в гиротропной трансверсально-изотропной среде рассматриваются также в статье И. С. Чичинина, М. М. Немировича-Данченко (см. наст. сборник), посвященной решению задачи об источнике на поверхности гиротропного полупространства. Из других статей, так или иначе связанных с гиротропией, ее проявлениями в наблюдаемых волновых полях, отметим работу В. П. Скавинского, Юн Ен Дина и укажем на возможность учета гиротропии при интерпретации данных, описанных в работе А. А. Никольского, А. В. Шитова.

Мысль о том, что поляризация поперечных волн в реальных средах наилучшим образом может быть описана с помощью

гиротропии, возникла не сразу. Ее появлению предшествовали многолетние попытки объяснить наблюдаемую картину поляризации поперечных волн на основе известных теоретических положений, а именно линейности поляризации в однородной среде и рассмотрению наблюдаемой нелинейности как результата интерференции отдельных волн [5, 18] или отклонений среды от идеальной модели (неоднородность, анизотропия, неупругость и т. п.). Главный недостаток такого взгляда на среду связан с неприменимостью модели сплошной среды при изучении поляризации волн. И в этом нет ничего неестественного. Модель сплошной среды пригодна для описания кинематики волн, но оказывается неудовлетворительной для описания динамики, а именно поляризации поперечных волн.

Чтобы введение новой, гиротропной модели геологической среды было достаточно обоснованным, рассмотрим сначала, в чем состоят основные черты наблюдаемой поляризации поперечных волн.

«АНОМАЛЬНАЯ» ПОЛЯРИЗАЦИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН

Явление, получившее название аномальной поляризации поперечных волн [15, 21, 23, 25, 36, 37, 40 и др.], состоит в том, что поляризация поперечных волн не отвечает поляризационным характеристикам применяемых источников поперечных волн [23] и априорным данным о строении среды (полученным, например, из наблюдений продольных волн). Так, при Y -возбуждении получают записи одинаковой интенсивности как на y -, так и на x -приборах; то же относится и к X -, Z -возбуждению, когда регистрируются интенсивные y -компоненты смещений. К тому же, как это ни парадоксально, «аномальность» поляризации является скорее правилом, а не исключением, так что на практике аномальной скорее можно назвать «правильную» поляризацию, соответствующую предписаниям теории. («Незаконные» компоненты смещений были названы побочными, а «законные» — основными.) Аномалии поляризации наблюдаются для всех типов волн: прямых, проходящих, рефрагированных, отраженных, регистрируемых в скважинах и на наземных расстановках. Наибольшие изменения поляризация претерпевает в верхней части разреза.

Приведем кратко в хронологическом порядке основные известные нам факты регистрации аномально поляризованных поперечных волн (поперечных в какой-либо части своего пути). Ввиду того что к настоящему времени таких наблюдений очень много, укажем лишь на некоторые, наиболее яркие или типичные эксперименты. Если читатель видел когда-либо трехкомпонентные записи волнового поля от направленных (заранее известных) источников, то он, наверное, тоже может привести аналогичные примеры.

По-видимому, первые упоминания о непростом характере поляризации поперечных волн содержатся в работе [3]. В ней опи-

саны скважинные наблюдения при возбуждении волн горизонтально направленными ударами вблизи устья скважины и на удалении. Изучались неглубоко залегающие терригенные породы со значительным содержанием глин, и авторами отмечается для некоторых интервалов глубин несинфазность импульсов поперечных волн, регистрируемых на двух компонентах.

Исследования поляризации на склонах соляных куполов в Прикаспийской впадине. С конца 50-х — начала 60-х годов ВНИИ Геофизикой, Институтом геологии и геофизики СО АН СССР под руководством Н. Н. Пузырева были начаты большие и планомерные исследования с помощью поперечных и обменных волн. Позднее к этим работам был привлечен ряд производственных организаций и в первую очередь СибГЭ (ныне ПО Сибнефтегеофизика).

Первыми достаточно детальными работами, при которых была обнаружена и изучена аномальная поляризация волн, явились круговые наблюдения обменной волны типа PS , отраженной от наклонной ($\varphi = 10^\circ$) границы. Эксперименты проводились в 1964 г. в Западном Казахстане в районе соляного купола Теркобай [2]. Была зарегистрирована поразительная картина: волна PS одинаково отчетливо прослеживалась как на радиальной (x) компоненте, так и на тангенциальной (y). На y -компоненте она была слабее в среднем в 2 раза и смещена по фазе относительно x -компоненты. Согласно расчетам, такая поляризация могла быть только в случае наклона границы на угол $\varphi = 30-40^\circ$ — в рамках изотропной модели среды. Стало очевидно, что причиной аномальной поляризации может быть анизотропия упругих свойств.

Об анизотропии отложений свидетельствовали расхождения времен и кажущихся скоростей рефрагированных и головных волн, зарегистрированных в пределах изучаемой площади при наблюдениях Xx , Yy и отождествляемых с волнами SV и SH . Обычно наблюдалось, что $V_{SH}^* > V_{SV}^*$, $t_{SH} < t_{SV}$ и различия времен $t_{SH} - t_{SV}$ росли по мере удаления от источника [21, 37]. Скважинные наблюдения позволили изучить скорости SV - и SH -волн на вертикали и на наклонных лучах. В результате получены индикатрисы лучевых скоростей P -, SV - и SH -волн [23] и выяснено, что они соответствуют модели трансверсально-изотропной среды. Дополнительная проверка (с помощью неравенств Бэкуса [28]) на соответствие трансверсально-изотропной среды тонкослойной для $\lambda \gg h$ показала, что причиной анизотропии, по кинематическим данным, может быть тонкая слоистость отложений. Изучались терригенные отложения, представленные в основном чередованием глинистых и песчаных разностей. Но АК и другие виды каротажа показали, что дифференцированность отложений невысока и не дает таких значений параметров анизотропии, какие получились при обработке скважинных наблюдений в сейсморазведочном диапазоне частот и рефрагированных волн на наземных профилях.

В последующие годы экспериментальные исследования в Прикаспийской впадине продолжались, и число наблюдений ано-

должны играть напряжения, связанные с ростом соляных куполов.

Зарубежные исследования по азимутальной анизотропии осадочных отложений. В 80-е годы появилось значительное количество зарубежных публикаций о поляризации поперечных и обменных волн, регистрируемых на x -, y -, z -расстановках от X -, Y -, Z -вибраторов [29, 32—34, 41]. Большая часть работ выполнена по системе многократных перекрытий и обработана по ОГТ, имеются наблюдения ВСП [29, 33]. Из названных работ следует, что в преобладающем большинстве случаев поперечные волны имели достаточно большую интенсивность на побочных компонентах. Более того, из четырех временных разрезов ОГТ: Xx , Xy , Yy , Yx — лучшими оказывались разрезы Xy , Yx . Были зарегистрированы волны SP от Y -вибратора (!), их временные разрезы оказались лучше разрезов PS -волн [32].

Наличие побочных компонент смещений поперечных волн в указанных работах объясняется азимутальной анизотропией. Причину азимутальной анизотропии все авторы видят [27, 29, 31, 33, 34 и др.] в ориентированной вертикальной трещиноватости пород. Земная кора, особенно ее верхняя часть, считается пронизанной системой вертикальных трещин разного уровня (от микротрещин до видимых невооруженным глазом). Это, по-видимому, тектоническая трещиноватость. Трещины выравниваются в ориентированные системы благодаря действию неравномерно распределенных горизонтальных напряжений, которые закрывают одни трещины и открывают другие, плоскости которых перпендикулярны наименьшим напряжениям. По-видимому, первым из исследователей, обратившим особое внимание на трещины в земной коре, был С. Крэммин [30]; ему принадлежит много работ по исследованию анизотропии, обусловленной трещиноватостью.

Особая роль в возникновении азимутальной анизотропии отводится песчаникам [38]. Относительно глинистых пород, которые всегда считались наиболее анизотропными среди осадочных отложений (скорости V_s по вертикали и горизонтали могут отличаться на 40%), делается вывод, что их анизотропия трансверсально-изотропного типа с осью симметрии, нормальной напластованиям, не играет почти никакой роли в формировании особенностей наблюдаемой поляризации поперечных волн. Важна только азимутальная анизотропия. Приводятся примеры [41], когда различие скоростей двух поперечных волн в горизонтальной плоскости на 2—3% вызывает для глубинных отражений (на времени порядка 4 с) изменение времени на 120 мс.

Предложены способы обработки наблюдений ОГТ и ВСП в средах с азимутальной анизотропией [27, 35], которые сводятся к ее коррекции, т. е. к приведению полученных временных разрезов ОГТ или данных ВСП к тому виду, который они имели бы в отсутствие азимутальной анизотропии*. Подчеркивается,

* По вопросам поляризационной обработки см. статьи А. А. Никольского и А. А. Никольского, А. В. Шитова, помещенные в наст. сборнике.

что распознавание расщепления волн и его устранение путем соответствующей обработки позволяют пересмотреть возникшее ранее отрицательное отношение к поперечным волнам и даже отказ от их использования вследствие неустойчивого и часто необъяснимого поведения [27]. Азимутальная анизотропия расценивается как хороший индикатор трещиноватости, что представляет большой разведочный интерес, так как трещины — пути движения углеводородов, горячих вод и т. п. [31 и др.].

Математический аппарат, используемый при объяснении характера наблюдаемой поляризации поперечных волн и положенный в основу обработки данных [39], состоит в разложении исходного вектора смещений (его направление совпадает с направлением силы источника) на направления, параллельные и перпендикулярные плоскостям трещин; рассматривается вертикальный луч, ибо обрабатываются суммарные временные разрезы ОГТ.

О связи «аномальной» поляризации поперечных волн с геологическим строением среды. Что же все-таки следует из приведенного обзора экспериментальных данных? Попытаемся подвести некоторые итоги. Для этого сначала перечислим, какие факторы могут в принципе привести к аномальной поляризации поперечных волн, или, иначе, появлению заметных побочных компонент смещений.

Нельзя, конечно, отрицать, что некоторую роль, вообще говоря, может играть сильная горизонтальная неоднородность среды, в результате которой должны образоваться небольшие примесные компоненты типа y при x -смещении, x — при y -смещении (такие расчеты еще никем не выполнены). Подобным образом какую-то роль при наличии горизонтальной асимметрии могут играть «нелучевые эффекты», возбуждение волн вблизи границ раздела и т. п.

Побочные компоненты, естественно, могут появляться при недостаточно «чистом» источнике.

Главный фактор для изотропных сред — значительный наклон отражающих или преломляющих границ (не менее 20°), непараллельность разных границ друг другу. В этом случае побочные компоненты образуются за счет наклона лучевой плоскости относительно дневной поверхности или одних границ относительно других. В случае докритических отражений поляризация должна быть линейной, в случае закритических — нелинейной, в связи с различием аргументов коэффициентов отражения SV - и SH -составляющих смещений поперечной волны (по определению, для каждой границы SV -смещение находится в плоскости падения — отражения, а SH — перпендикулярно этой плоскости). Наличие в среде тонкослоистых пачек ведет к еще большим изменениям поляризации.

В трансверсально-изотропных средах появление побочных компонент смещений отраженных волн связано с несовпадением нормалей к отражающим границам с осями симметрии контак-

тирующих сред. Побочные компоненты могут быть и при горизонтальной слоистости. Значительных амплитуд побочные компоненты достигают в результате интерференции *SV*- и *SH*-волн. Необходимые временные сдвиги быстрее всего достигаются при горизонтальном положении оси анизотропии. В этом случае максимальные различия скоростей *SV*- и *SH*-волн приходятся на диапазон направлений лучей отраженных волн. То же относится к средам ромбической системы симметрии, в которых скорости двух поперечных волн на вертикали не равны. Среда двух типов: трансверсально-изотропная с горизонтальной осью симметрии и ромбическая с вертикальной и горизонтальными осями и (или) плоскостями симметрии — называют азимутально анизотропными. Строго говоря, трансверсально-изотропную среду с наклонной осью симметрии также следует называть азимутально анизотропной.

Каким моделям отвечают вышеописанные экспериментальные данные? Очевидно, что модели изотропных сред с наклонными отражающими границами не подходят в большинстве случаев, так как наклоны границ слишком малы. Трансверсально-изотропные среды с наклонными осями симметрии, не совпадающими с нормальными к отражающим границам, могли бы быть подходящими моделями, но для этого нужно, чтобы несогласное залегание отложений преобладало над согласным и было их типичной чертой, чего, вообще говоря, не наблюдается. Горизонтальные оси симметрии в трансверсально-изотропных средах означают вертикальную упорядоченность строения среды: вертикальную слоистость, вертикальную трещиноватость. Вертикальная слоистость встречается редко. Вертикальную трещиноватость, как уже отмечалось, зарубежные исследователи считают главной чертой строения земной коры вообще и осадочных отложений в частности. Остается еще орторомбический тип симметрии. Если признать повсеместную вертикальную трещиноватость и горизонтальную или слабо наклонную слоистость (а последнее бесспорно), то получается, что все среды должны принадлежать ромбической системе симметрии.

Значит, главный вопрос состоит в том, насколько распространена в осадочных породах ориентированная вертикальная трещиноватость. Хорошо известно, что вертикальная трещиноватость свойственна доломитам, известнякам. Встречается она и в терригенных породах, например песчаниках. Основная причина возникновения трещиноватости — тектонические движения. Трещины тектонического происхождения часто образуют правильные геометрические сетки. Отмечается связь трещиноватости с напряженным состоянием среды, ростом структур.

Если объяснять аномальную поляризацию поперечных волн ориентированной вертикальной трещиноватостью, то для экспериментов, выполненных в Прикаспийской впадине на склонах соляных куполов, такое объяснение представляется в общих чертах вполне удовлетворительным. Хотя имеются и некоторые не-

соответствия. Например, поляризация волн в сенон-туронских известняках оказывается гораздо менее аномальной, чем в альбских глинах. На участках, примыкающих к сбросам, поляризация приближается к поляризации в изотропной среде. Не отмечается видимой связи аномалий поляризации со строением среды.

Зарубежные исследователи в ряде случаев демонстрируют непосредственную связь поляризации поперечных волн с направлениями трещиноватости. Например, в работе [33], посвященной изучению анизотропии при ВСП, трещины документировались путем телевизионной съемки в скважине. При работах ОГТ, описанных в [34], трещины были изучены на обнажении пород вблизи сейсмических профилей. Их направления соответствовали региональной сети трещин, связанной со складчатостью. Однако в большинстве случаев нет сведений о наличии трещиноватости, и наличие трещин постулируется на том основании, что распределение напряжений в земле неизотропно и если существует направление преобладающих горизонтальных напряжений, то должна возникать и ориентированная вертикальная трещиноватость.

Оставляя открытым вопрос о вертикальной трещиноватости как универсальном свойстве осадочных отложений, отметим еще некоторые проявления аномальной поляризации, которые не имеют никакой (по крайней мере видимой) связи с вертикальной трещиноватостью.

Из наблюдений в глубоких скважинах (Л. Ю. Бродов, К. А. Лебедев) известно, что на некоторых границах — горизонтальных или почти горизонтальных — образуются отраженные PS -волны, имеющие заметные y -компоненты смещений, которые по мере удаления от границы возрастают.

Известно (из упоминавшейся выше работы [32], а также наблюдений, выполненных ТОЭГИ и описанных в статье В. П. Скавинского, Юн Ен Дина), что в условиях горизонтально-слоистого терригенного разреза при вибрационном Y -возбуждении регистрируются очень чистые и достаточно интенсивные отраженные обменные волны типа SP , при этом они образуются на всех границах.

В Западной Сибири при работах с вибрационными источниками разной направленности (X , Y , Z) регистрируются рефрактированные поперечные волны, имеющие значительные побочные компоненты смещений; времена вступлений на обеих компонентах близки и не имеют тенденции к закономерному изменению по мере удаления от источника. (Примеры таких записей приводятся в названной статье В. П. Скавинского, Юн Ен Дина.)

Наконец, отметим один очень интересный факт, установленный И. С. Чичининым и описанный в работе [4]: поворот вектора смещений при изменении частоты вибратора. Наблюдения были выполнены в скважине на глубине 84 м под вибратором; на глубине 3 м также наблюдался поворот, но очень небольшой.

Все эти наблюдения, как будет ясно из дальнейшего, получают естественное объяснение при аппроксимации среды гиро-

тропной моделью. Гиротропная модель не противоречит и вертикальной трещиноватости и даже, наоборот, позволяет подходить более дифференцированно к различным ее видам, а также другим анизотропным моделям реальных сред.

МОДЕЛИ ГИРОТРОПНЫХ СРЕД

О пространственной дисперсии упругих свойств. Если закон Гука, связывающий тензор напряжений σ с тензором деформаций e ,

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl} e_{kl} \quad (1)$$

записать в виде

$$\sigma(r) = \int_0^{\infty} a(r, r') e(r') dr', \quad (2)$$

то этим будет учтено влияние соседних с r точек r' на напряжения в точке r . Соседними считаются точки, расположенные в достаточной близости к точке r .

При написании выражения (2) мы исходили из аналогии с оптикой [1, 8]. В оптике уравнение связи между электрической индукцией D и напряженностью электрического поля E имеет вид

$$D(r) = \int_0^{\infty} \varepsilon(r, r') E(r') dr',$$

где ε — тензор диэлектрической проницаемости. Последующие рассуждения и формулы будут также построены на аналогиях.

Запись закона Гука в виде (2) ставит вопрос о том, насколько удалены от r точки r' и каково происхождение вкладов этих точек.

В оптике точки r' определяются расстояниями $|r - r'| = s$, на которых процессы в соседних центрах являются ощутимо связанными взаимодействием (s — постоянная кристаллической решетки, радиус молекулярного действия, длина свободного пробега электрона или экситона и т. п.). Для кристаллов постоянные решетки имеют величину порядка нескольких ангстрем (для кварца $a = 4,903 \text{ \AA}$, $c = 5,393 \text{ \AA}$, $\text{\AA} = 10^{-8} \text{ см}$).

Величина эффектов пространственной дисперсии определяется безразмерным параметром s/λ (λ — длина волны, s — характерный размер области влияния). Для кристаллов отношение s/λ имеет величину порядка 10^{-3} — 10^{-2} .

В геологической среде поле напряжений в окрестности точки r должно существовать как результат микронеоднородности среды. Что понимать в данном случае под микронеоднородностью? По-видимому, надо выделять объекты двух видов: зерна и слои.

Для терригенных пород размеры зерен 10^2 — 10^{-4} мм: гравий, галька 100—2 мм, пески 2—0,05, алевриты 0,05—0,005, глины 0,005—0,0001 мм (по данным А. Б. Рухина, 1956 г.). Слои могут иметь мощности от миллиметров до метров, десятков — сотен метров. Очевидно, что в создании микронеоднородности участвуют слои мощностью $h \ll \lambda$. Особую роль должны играть тонкие слои, слойки и ориентированные уплощенные частицы, создающие слоистость. Наличие всех этих объектов приводит к сложной геометрии пространства, заполненного породой и называемого геологической средой. Вместо сплошной среды возникает сплошная среда с дефектами, на языке топологии односвязное многообразие превращается в многосвязное.

Для понимания механизмов взаимодействия всех элементов, вносящих свои вклады в тензор напряжений в точке r , необходимо развитие микроскопической теории; в настоящее время она еще находится в зачаточном состоянии. Однако учет пространственной дисперсии вполне возможен и на уровне феноменологического описания и оказывается очень плодотворным. В этом отношении сейсмика, по-видимому, следует за оптикой. В оптике построение феноменологической теории [26] намного опередило развитие микроскопических теорий, создаваемых лишь в последнее время применительно к кристаллам разных типов [8], молекулярным объектам, плазме и т. д. Даже для такого эталонного объекта, как кварц, физикам до сих пор не удалось до конца разобраться в механизме возникновения гиротропии, т. е. выделить в его структуре какой-либо фрагмент в качестве носителя гиротропии [8].

Уравнение (2) учитывает пространственную дисперсию. Аналогичным образом учитывается частотная дисперсия:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t a(t, t') e(t') dt', \quad (3)$$

т. е. зависимость напряжения в данный момент времени от напряжений в предшествующее время.

Объединение уравнений (2) и (3) приводит к учету частотной и пространственной дисперсии:

$$\sigma(r, t) = \int_{-\infty}^t \int_0^{\infty} a(t - t', r - r') e(r', t') dr' dt'. \quad (4)$$

Если напряжения σ и деформации e представить в виде $\exp[i(\omega t - \mathbf{k}r)]$, то для фурье-образов получается равенство

$$\sigma(\omega, \mathbf{k}) = a(\omega, \mathbf{k}) e(\omega, \mathbf{k}), \quad (5)$$

где

$$a(\omega, \mathbf{k}) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp[-i(\omega T - \mathbf{k}R)] a(T, R) dR dT, \\ R = r - r', T = t - t'.$$

Связь между напряжениями и деформациями может быть представлена в виде ряда

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{r}, \omega) = & c_{ijkl}(\omega) e_{kl}(\mathbf{r}, \omega) + b_{ijkln}(\omega) \frac{\partial e_{kl}(\mathbf{r}, \omega)}{\partial r_n} + \\ & + d_{ijklnm}(\omega) \frac{\partial^2 e_{kl}(\mathbf{r}, \omega)}{\partial r_n \partial r_m} + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Второй член ряда отражает пространственную дисперсию первого порядка, или гиротропию, третий — пространственную дисперсию второго порядка и т. д. Для тензора модулей упругости \mathbf{a} можно записать

$$a_{ijkl}(\omega, \mathbf{k}) = c_{ijkl}(\omega) + ib_{ijklm}(\omega) k_m + d_{ijklmn}(\omega) k_m k_n; \quad (7)$$

при $\mathbf{k} \rightarrow 0$ $a_{ijkl}(\omega, \mathbf{k}) \rightarrow c_{ijkl}(\omega)$.

В данной работе мы ограничимся двумя членами разложений (6), (7), т. е. будем рассматривать гиротропную среду. Говоря точнее, будем рассматривать однородную гиротропную среду.

Для неоднородной гиротропной среды закон Гука представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\mathbf{r}, \omega) = & c_{ijkl}(\omega) e_{kl}(\mathbf{r}, \omega) + b_{ijklm}^0(\mathbf{r}, \omega) \frac{\partial e_{kl}(\mathbf{r}, \omega)}{\partial r_m} + \\ & + \frac{\partial}{\partial r_m} \{ b_{ijklm}^0(\mathbf{r}, \omega) e_{kl}(\mathbf{r}, \omega) \}. \end{aligned} \quad (8)$$

Тензор акустической гирации. Итак, пространственная дисперсия упругих свойств среды (в первом приближении), или, иначе, гиротропия, описывается дополнительным слагаемым в законе Гука:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} e_{kl} + b_{ijkln} \frac{\partial e_{kl}}{\partial x_n}. \quad (9)$$

Закон Гука в формулировке (9) приводится в [24]. Далее мы будем в основном следовать этой работе.

Тензор \mathbf{b} , характеризующий гиротропию, назван в [24] тензором акустической гирации. Его свойства внутренней симметрии определены следующим образом. Полагается, что тензор \mathbf{b} , как и тензор модулей упругости \mathbf{c} , симметричен по первой (ij) и второй (kl) паре индексов. На основании этого тензор деформаций \mathbf{e} заменяется тензором дисторсий $\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{r}$ и записываются закон Гука

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + b_{ijkln} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_n} \quad (10)$$

и уравнения движения $\partial \sigma_{ij} / \partial x_j = \rho \partial^2 u_i / \partial t^2$:

$$c_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_l} + b_{ijkln} \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_i \partial x_l \partial x_n} = \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Подставив в (11) решение в виде плоских волн

$$\mathbf{u} = u_0 A \exp[(2\pi i/\lambda)(\mathbf{n}\mathbf{r} - Vt)], \quad (12)$$

получим уравнения Кристоффеля

$$[c_{ijkl}n_i n_l + (2\pi i/\lambda) b_{ijkl} n_i n_l n_m] A_k = \rho V^2 A_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (13)$$

Из (13) видно, что тензор Кристоффеля, стоящий в квадратных скобках, стал комплексным. Отсюда следует, что для того чтобы собственные значения этого тензора (т. е. квадраты фазовых скоростей) остались действительными, необходимо, чтобы он был эрмитов. Это означает, что при перестановке первой и второй пар индексов тензор \mathbf{b} должен менять знак, т. е. $b_{\lambda\mu m} = -b_{\mu\lambda m}$. Таким образом, в [24] делается вывод, что тензор \mathbf{b} симметричен по первой и второй паре индексов и антисимметричен относительно перестановки этих пар индексов, т. е. его симметрия есть $\{[V^2]^2\}V$ — по символике Яна.

Далее в [24] обращается внимание на то, что слагаемое с тензором \mathbf{b} в уравнениях движения (11) симметрично по индексам i, l, n . Поэтому в дальнейших рассмотрении тензор \mathbf{b} симметрии $\{[V^2]^2\}V$ заменяется симметризованным тензором акустической гирации \mathbf{b} с симметрией $[V^3]\{V^2\}$. Этот тензор симметричен по первому, четвертому и пятому индексам и антисимметричен по второму и третьему индексам. Антисимметричность относительно перестановки первой и второй пар индексов свелась к антисимметричности по двум индексам, один из которых входит в первую пару, а другой — во вторую пару индексов.

Антисимметричный тензор пятого ранга может быть выражен через тензор четвертого ранга с помощью соотношения дуальности

$$b_{ijkln} = \delta_{jks} g_{siln}, \quad (14)$$

где δ_{jks} — символ Леви — Чивита, а тензор \mathbf{g} называется псевдотензором акустической гирации. Поскольку в уравнениях (13) перед элементами тензора \mathbf{b} стоит множитель $2\pi/\lambda$, в [24] переход от тензора \mathbf{b} к тензору \mathbf{g} делается путем замены

$$(2\pi/\lambda) b_{ijkln} = \delta_{jks} g_{siln}. \quad (15)$$

Подстановка (14) в (10) показывает, что тензор напряжений несимметричен: $\sigma_{ji} \neq \sigma_{ij}$.

Гиротропные свойства сред определяются тензором \mathbf{g} . Его внутренняя симметрия $\epsilon V[V^3]$, т. е. это псевдотензор четвертого ранга, симметричный по трем последним индексам. Он имеет в общем случае 30 независимых компонент.

Для центросимметричных сред тензор \mathbf{g} равен нулю, т. е. среды, имеющие центр симметрии, не могут быть гиротропными. Если из 32 точечных групп симметрии и 7 предельных групп исключить имеющие центр симметрии, то останется 21 ацентричная точечная группа и 4 предельных. Поскольку мы изучаем не кристаллы, а земную кору и, в частности, осадочные от-

ложения, то, очевидно, надо рассмотреть только те группы симметрии, которые соответствуют типичным случаям геологического строения. Это предельные группы ∞ , ∞m , $\infty 2$, $\infty \infty$. Группы ∞ , ∞m , $\infty 2$ характеризуют осесимметричные среды (с осью симметрии ∞ — бесконечного порядка), причем в группе ∞m к оси симметрии ∞ добавляются плоскости симметрии m , проходящие через ось симметрии ∞ , а в группе $\infty 2$ — оси симметрии 2 (второго порядка), перпендикулярные оси симметрии ∞ . Группа симметрии $\infty \infty$ характеризует изотропную гиротропную среду («правую» или «левую»).

Тензор g в общем случае (для группы 1) имеет следующий вид (таблица Д.17 в [24]):

$$g = \begin{pmatrix} g_{1111} & g_{1222} & g_{1333} & g_{1122} & g_{1233} & g_{1311} & g_{1133} & g_{1211} & g_{1322} & g_{1123} \\ g_{2111} & g_{2222} & g_{2333} & g_{2122} & g_{2233} & g_{2311} & g_{2133} & g_{2211} & g_{2322} & g_{2123} \\ g_{3111} & g_{3222} & g_{3333} & g_{3122} & g_{3233} & g_{3311} & g_{3133} & g_{3211} & g_{3322} & g_{3123} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Для предельных групп число независимых компонент тензора g убывает и становится равным в случае наименее симметричной группы ∞ — шести, для группы $\infty 2$ — четырем, для группы ∞m — двум; самая симметричная группа $\infty \infty$ имеет одну независимую компоненту. Ниже приводится вид псевдотензора акустической гирации g для всех перечисленных предельных групп:

$$g_{\infty} = \begin{pmatrix} 3g_{1122} & 3g_{1122} & 0 & g_{1122} & g_{1233} & 0 & g_{2233} & g_{1211} & 0 & 0 \\ -3g_{1211} & 3g_{1122} & 0 & -g_{1211} & g_{2233} & 0 & -g_{1233} & g_{1122} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{3333} & 0 & 0 & g_{3311} & 0 & 0 & g_{3311} & 0 \end{pmatrix}; \quad (17)$$

$$g_{\infty 2} = \begin{pmatrix} 3g_{1122} & 0 & 0 & g_{1122} & 0 & 0 & g_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3g_{1122} & 0 & 0 & g_{2233} & 0 & 0 & g_{1122} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{3333} & 0 & 0 & g_{3311} & 0 & 0 & g_{3311} & 0 \end{pmatrix}; \quad (18)$$

$$g_{\infty m} = \begin{pmatrix} 0 & 3g_{1211} & 0 & 0 & g_{1233} & 0 & 0 & g_{1211} & 0 & 0 \\ -3g_{1211} & 0 & 0 & -g_{1211} & 0 & 0 & -g_{1233} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (19)$$

$$g_{\infty \infty} = \begin{pmatrix} 3g_{2233} & 0 & 0 & g_{2233} & 0 & 0 & g_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3g_{2233} & 0 & 0 & g_{2233} & 0 & 0 & g_{2233} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3g_{2233} & 0 & 0 & g_{2233} & 0 & 0 & g_{2233} & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Для групп ∞ , $\infty 2$, $\infty \infty$ вид псевдотензора и тензора совпадает, поэтому тензоры g_{∞} , $g_{\infty 2}$, $g_{\infty \infty}$ взяты из таблицы Д.17 в [24]. Для группы ∞m псевдотензор g получен методом прямой проверки Фуми.

Псевдотензор g путем применения теории представлений групп разлагают на неприводимые части [24]:

$$g = g^{\{4\}} + g^{\{31\}}; \quad (21)$$

$$g^{\{4\}} = g_{(ijkl)}, \quad g^{\{31\}} = g_{ijkl} - g_{(ijk)l}; \quad (22)$$

Разложение псевдотензора акустической гирации: g на неприводимые тензоры различных рангов для ацентричных предельных групп симметрии

Группа	\tilde{I}	v	\tilde{D}	s	\tilde{N}
∞	ρ	$(0, 0, p_3)$	2	1	1
∞m	0	$(0, 0, p_3)$	0	1	0
$\infty 2$	ρ	0	2	0	1
$\infty \infty$	ρ	0	0	0	0

Псевдодевиатор D

Септор S

Псевдононор \tilde{N}

1	2	3	11	22	33	23	11	22	33	23	13	12	
$-a$	0	0	1	0	0	0	0	$-3c$	$-c$	$4c$	0	0	0
	$-a$	0	2	0	0	0	2		$-3c$	$4c$	0	0	0
		$2a$	3	$-e$	$-e$	$2e$	3			$-8c$	0	0	0

псевдотензор $g^{(4)}$ симметричен по всем индексам, а $g^{(31)}$ — по трем последним. Далее следует разложение тензора g на шесть частей:

$$g_{ijkl} = \tilde{I}^{(4)} \delta_{(ij} \delta_{kl)} + \tilde{D}^{(4)}_{(ij} \delta_{kl)} + \tilde{N}^{(4)}_{ijkl} + \delta_{ni(j} \delta_{kl)} V_n^{(31)} + (\tilde{D}^{(31)}_{(ij} \delta_{kl)} - \tilde{D}^{(31)}_{(ij} \delta_{kl)}) + \delta_{ni(j} S^{(31)}_{kl)n}, \quad (23)$$

три из которых принадлежат тензору $g^{(4)}$, а три — тензору $g^{(31)}$. Каждая из частей состоит из неприводимых тензоров различных рангов: псевдоскаляра $\tilde{I}^{(4)}$, псевдодевиаторов $\tilde{D}^{(4)}$, $\tilde{D}^{(31)}$, псевдононора $\tilde{N}^{(4)}$, вектора $V^{(31)}$, септора $S^{(31)}$. Из этих частей тензор g составляется с точностью до численных коэффициентов однозначно.

В зависимости от группы симметрии в разложение (23) входят различные части. Для предельных групп ∞ , $\infty 2$, ∞m , $\infty \infty$ они указаны в таблице. Нулями обозначены отсутствующие составляющие, для вектора указаны компоненты, параллельные оси симметрии $\infty \parallel X_3$; для псевдодевиаторов, септоров и псевдононоров выписано число независимых компонент.

Самой важной для нас частью является псевдоскалярная ($\tilde{I} = \rho$), так как она ответственна за акустическую активность, т. е. способность вращать плоскость поляризации. В изотропной среде (группа $\infty \infty$) это единственная гиротропная константа. Если она не равна нулю, то в изотропной гиротропной среде для каждого направления вектор смещений должен поворачиваться по мере распространения. Вращение вектора поляризации, как следует из таблицы, возможно и в осесимметричных средах групп ∞ , $\infty 2$ при распространении вдоль оси симметрии. В этих средах свой вклад во вращение, кроме псевдоскаляра \tilde{I} , могут вносить также псевдодевиатор \tilde{D} и псевдононор \tilde{N} .

Группы симметрии, для которых псевдоскаляр $\bar{I} = \rho \neq 0$, называются энантиоморфными. Энантиоморфизм определяется как свойство некоторых кристаллов существовать в модификациях, являющихся зеркальными отражениями друг друга (правые и левые модификации). Например, кварц классов 32 и 622 может быть левым и правым. Энантиоморфные кристаллы обладают оптической активностью. Классическим примером является кварц. Собственно говоря, само явление оптической активности было открыто Араго в экспериментах с кварцем [8]. Кварц обладает и акустической активностью, которая проявляется в 100 раз сильнее, чем оптическая [24].

Оптическая активность наблюдается также в растворах. Очень показателен эксперимент с раствором сахара [11]. Линейно поляризованный свет, проходя через раствор, остается линейно поляризованным, но направление поляризации поворачивается примерно на 10° на каждый сантиметр раствора. Интересны эксперименты Луи Пастера с кристалликами винной кислоты [11]. Луи Пастер обнаружил, что оптически неактивная форма винной кислоты является смесью равного числа молекул винной кислоты, имеющих левую и правую спиральность. Разделив с помощью пинцета кристаллики с левой и правой спиральностью и приготовив растворы из тех и других, он увидел, что они поворачивают плоскость поляризации света на один и тот же угол, но в противоположных направлениях. Хорошо известен также факт наличия у органических молекул правой спиральности [11].

Вообще в настоящее время оптическая активность молекулярных объектов изучена очень хорошо и является инструментом исследования в стереохимии, биофизике, биохимии и т. д. Гиротропии кристаллов посвящена монография [8], в которой даются обзор и анализ экспериментальных сведений о гиротропии различных типов кристаллов, механизмах ее появления и т. п. Феноменологическая теория распространения света в гиротропных кристаллах изложена Ф. И. Федоровым [26]. К сожалению, по вопросам акустической гиротропии литература не столь обстоятельна, автору данной статьи известны только сведения из [24]. Работы по оптической гиротропии могут быть полезны для специалистов по сейсморазведке с точки зрения познания общих закономерностей этого явления, а также проведения аналогий.

Аксиальный вектор акустической гирации. Уравнения Кристоффеля для гиротропной среды, как видно из (13), отличаются от соответствующих уравнений для анизотропной среды без гиротропии мнимой добавкой $(2\pi/\lambda) b_{ijkl} n_i n_j n_k n_l$. Согласно (14), она может быть представлена как $\delta_{jks} g_{silm} n_i n_j n_k n_l$. Величину Q_s ,

$$Q_s = g_{silm} n_i n_j n_k n_l, \quad s = 1, 2, 3, \quad (24)$$

называют аксиальным вектором акустической гирации [24]. Мнимая добавка $\delta_{jks} Q_s$ к тензору Кристоффеля определяет особенности распространения волн, вносимые гиротропией.

Найдем вид вектора Q в средах с осевой симметрией (предельные группы $\infty 2$, ∞m , ∞) и в изотропной гиротропной среде ($\infty \infty$). Подставив в (24) выражения (17)–(20), получим

$$\begin{aligned} \infty 2: Q_1 &= 3n_1 [g_{1122} (n_1^2 + n_2^2) + g_{2233} n_3^2], \\ Q_2 &= 3n_2 [g_{1122} (n_1^2 + n_2^2) + g_{2233} n_3^2], \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} Q_3 &= n_3 [3g_{3311} (n_1^2 + n_2^2) + g_{3333} n_3^2]; \\ \infty m: Q_1 &= 3n_2 [g_{1211} (n_1^2 + n_2^2) + g_{1233} n_3^2], \\ Q_2 &= -3n_1 [g_{1211} (n_1^2 + n_2^2) + g_{1233} n_3^2], \\ Q_3 &= 0; \end{aligned} \quad (26)$$

$$\infty: Q = Q_{\infty 2} + Q_{\infty m}; \quad (27)$$

$$\infty \infty: Q = 3g_{2233} \mathbf{n} = g_{3333} \mathbf{n}. \quad (28)$$

Перейдем к сферической системе координат (R, θ, φ) . Пусть единичный вектор волновой нормали \mathbf{n} имеет координаты R, θ, φ , $R = 1$. Его декартовы координаты свяжем со сферическими формулами

$$n_1 = \sin \theta \cos \varphi, \quad n_2 = \sin \theta \sin \varphi, \quad n_3 = \cos \theta. \quad (29)$$

Подставим (29) в (25)–(28) и разложим вектор Q по ортам $\mathbf{R}_1, \theta_1, \varphi_1$ сферической системы координат, направив орты \mathfrak{R}_1, Φ_1 , как обычно, в сторону возрастания углов θ, φ :

$$\begin{aligned} \infty 2: Q_R &= 3f_1(\theta) \sin^2 \theta + f_2(\theta) \cos^2 \theta, \\ Q_\theta &= [-3f_1(\theta) + f_2(\theta)] \sin \theta \cos \theta, \\ Q_\varphi &= 0; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \infty m: Q_\varphi &= -f_3(\theta) \sin \theta, \\ Q_R &= Q_\theta = 0; \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \infty: Q_R &= 3f_1(\theta) \sin^2 \theta + f_2(\theta) \cos^2 \theta, \\ Q_\theta &= [-3f_1(\theta) + f_2(\theta)] \sin \theta \cos \theta, \\ Q_\varphi &= -f_3(\theta) \sin \theta; \end{aligned} \quad (32)$$

$$\infty \infty: Q_R = 3g_{2233} = g_{3333}, \quad Q_\theta = Q_\varphi = 0; \quad (33)$$

$$\begin{aligned} f_1(\theta) &= g_{1122} \sin^2 \theta + g_{2233} \cos^2 \theta, \\ f_2(\theta) &= g_{3311} \sin^2 \theta + g_{3333} \cos^2 \theta, \\ f_3(\theta) &= g_{1211} \sin^2 \theta + g_{1233} \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (34)$$

Характер поведения вектора Q в пространстве для групп симметрии $\infty 2$ и ∞m изображен на рис. 1. Из этого рисунка и формул (30) видно, что в среде $\infty 2$ векторы Q находятся в меридиональных плоскостях и отклоняются от направления \mathbf{n} везде, кроме «полюсов» ($\theta = 0, 180^\circ$) и «экватора» ($\theta = 90^\circ$). Углы отклоне-

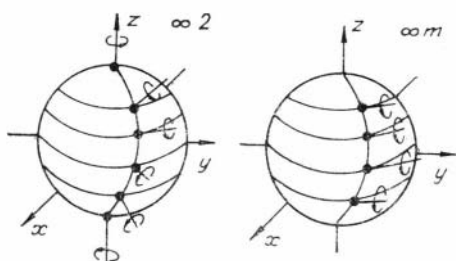


Рис. 1. Аксиальный вектор акустической гирации Q в средах группы симметрии $\infty 2, \infty m$.

ния δ определяются отношением компоненты Q_θ к компоненте Q_R :

$$\delta = \begin{cases} \arctg r, & \text{если } 0 \leq \theta \leq 90^\circ, \\ \pi + \arctg r, & \text{если } 90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ, \end{cases} \quad (35)$$

$$r = \frac{-3f_1(\theta) + f_2(\theta)}{3f_1(\theta) \sin^2 \theta + f_2(\theta) \cos^2 \theta} \operatorname{tg} \theta.$$

В среде ∞m векторы Q , как следует из рисунка и формул (31), находятся в горизонтальных плоскостях и направлены по касательным к сфере. В среде с осью симметрии ∞ вектор Q имеет все три компоненты (см. формулы (32)). В изотропной гиротропной среде направления n и Q совпадают (см. (33)).

Векторы Q — аксиальные векторы, т. е. они определяют не направление, как полярные, или обычные, векторы, а направление вращения. В отличие от полярных векторов аксиальные векторы инвариантны относительно инверсии и отражения в плоскости, перпендикулярной вектору. Это означает, что для векторов Q верхних полушфер, преобразованных в векторы Q нижних полушфер путем инверсии с центром в точке O , начале координат, или путем отражения в плоскости Oxy , направления вращения вокруг этих векторов сохраняются (см. рис. 1).

Уравнения Кристоффеля. Использование аксиального вектора акустической гирации Q позволяет записать уравнения Кристоффеля (13) в более компактном виде [24]. Введем обозначения $\Lambda = (\Lambda_{jk})$ для приведенного тензора Кристоффеля в среде без гиротропии и $\bar{D} = (D_1, D_2, D_3)$ для приведенного аксиального вектора акустической гирации:

$$\Lambda_{jk} = c_{ijkl} \rho^{-1} n_i n_l, \quad D_s = Q_s \rho^{-1}. \quad (36)$$

Тогда тензор Кристоффеля $K = (K_{jk})$ для гиротропной среды можем записать в следующем виде:

$$K_{jk} = \Lambda_{jk} + i \delta_{jks} D_s, \quad (37)$$

а уравнения (13) так же, как в анизотропной среде без гиротропии:

$$(K_{jk} - V^2 \delta_{jk}) A_k = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (38)$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} + iD_3 & \Lambda_{13} - iD_2 \\ \Lambda_{21} - iD_3 & \Lambda_{22} & \Lambda_{23} + iD_1 \\ \Lambda_{31} + iD_2 & \Lambda_{32} - iD_1 & \Lambda_{33} \end{pmatrix} \quad (39)$$

эрмитов, следовательно, его собственные значения, т. е. квадраты фазовых скоростей, — действительные числа. (Тензор \mathbf{b} , как указывалось выше, вводился именно так, чтобы тензор \mathbf{K} был эрмитовым.) Векторы поляризации \mathbf{A} , являющиеся собственными векторами тензора \mathbf{K} , — комплексные числа, как это видно из (38).

Таким образом, задав направление волновой нормали \mathbf{n} и тензор модулей упругости \mathbf{c} , псевдотензор акустической гирации \mathbf{g} , плотность ρ , можно, используя формулы (25) — (28), (36), (37), найти тензор Кристоффеля \mathbf{K} (см. (39)). Вычисляя его собственные значения и собственные векторы, будем иметь решение задачи о распространении плоских волн в однородной анизотропной гиротропной среде.

Лучевая скорость. По определению лучевая скорость \mathbf{v} есть групповая скорость:

$$v_\nu = \frac{\partial \omega}{\partial k_\nu} \quad (\nu = 1, 2, 3), \quad (40)$$

где $\mathbf{k} = k\mathbf{n}$ — волновой вектор; $k = |\mathbf{k}| = \omega/V^{(r)}$, $V^{(r)}$ — фазовая скорость волны типа r ($r = 1, 2, 3$). Отсюда $V^{(r)} = \omega/k$ и, подставляя это выражение для $V^{(r)}$ в уравнения Кристоффеля (13), получим

$$\omega^2 = (\lambda_{jlnm} k_j k_m + i \delta_{lns} h_{sjmq} k_j k_m k_q / k) A_n A_l^*, \quad (41)$$

где $\lambda_{jlnm} = c_{jlnm} \rho^{-1}$; $h_{sjmq} = g_{sjmq} \rho^{-1}$; A_n — компонента вектора поляризации волны типа r ; A_l^* — комплексно сопряженная с A_n компонента.

Чтобы найти вектор лучевой скорости $\mathbf{v}^{(r)}$, согласно определению (40), надо продифференцировать (41). В результате получается следующее выражение (см. [17]):

$$v_\nu^{(r)} = \frac{\partial \omega}{\partial k_\nu} = \lambda_{jvlm} p_l A_m A_j^* + i \delta_{jms} h_{svql} p_l A_m A_j^* n_q, \quad (42)$$

в котором $\mathbf{p} = \mathbf{n}/V^{(r)}$ — вектор рефракции волны типа r . Величины $v_\nu^{(r)}$ — действительные числа, так как в суммы $A_m A_j^*$ входят действительные слагаемые $A_m A_j^*$ при $m = j$ и пары комплексных $A_m A_j^*$, $A_j A_m^*$, $m \neq j$, с мнимыми частями противоположных знаков.

Вычисление времени пробега и смещений в однородной среде. Параметрический способ расчета состоит в задании волновой нормали и вычислении вектора лучевой скорости по формуле (42). Затем на найденном направлении луча можно рассчитать время

пробега в любой его точке. Двухточечный способ, при котором вычисляется время пробега между двумя заданными точками, требует нахождения величины лучевой скорости v для заданного направления луча l , $l = v/v$, $v = |v|$.

Связь между фазовой и лучевой скоростями, выражавшаяся в анизотропной среде без гиротропии известной формулой

$$v_i = \partial V / \partial n_i,$$

в гиротропной среде имеет вид (см. [17]):

$$v_i = V n_i + \partial V / \partial n_j (\delta_{ji} - n_j n_i). \quad (43)$$

Чтобы рассчитать время пробега вдоль луча между двумя точками в гиротропной среде, надо найти волновую нормаль, отвечающую данному лучу l . Волновая нормаль находится из уравнения (43). Наиболее простой путь — использование способа итераций для решения системы уравнений относительно компонент волновой нормали n :

$$n_i^{(k+1)} = V^{-1} [v l_i - \partial V / \partial n_j (\delta_{ij} - n_i^{(k)} n_j^{(k)})], \quad k = 0, 1, \dots$$

В качестве начального приближения естественно брать значение $n^{(0)}$ для негиротропной среды.

Программы для расчета в однородной гиротропной среде времен пробега и векторов смещений, а также трехкомпонентных сейсмограмм приведены в указанной выше работе [17].

Закон Снеллиуса. Чтобы рассчитывать лучи и смещения в слоисто-однородной гиротропной среде, надо иметь выражение для закона отражения — преломления на границе двух гиротропных сред. Как известно, закон отражения — преломления выводится из граничных условий контакта двух сред, а именно из равенства показателей экспонент всех волн: падающей и отраженных, преломленных. В системе координат, выбранной таким образом, чтобы нормаль к границе и волновая нормаль падающей волны лежали в одной плоскости (плоскости падения), волновая нормаль имеет две компоненты. Пусть плоскостью падения будет плоскость $x_1 x_3$ (x_3 — нормаль к границе). Тогда закон Снеллиуса состоит в выполнении равенства

$$n_1 / V = p_1 = \text{const} \quad (44)$$

для всех волн — падающей и отраженных, преломленных; p_1 — касательные к границе компоненты векторов рефракции $p = n/V = (p_1, 0, p_3)$ всех названных волн, V — фазовые скорости. Для гиротропных сред они несколько отличаются от соответствующих фазовых скоростей в анизотропных (или изотропных) средах без гиротропии.

Волновые нормали отраженных и преломленных волн в гиротропных средах можно найти так же, как для просто анизотропных сред. Эта задача сводится к вычислению нормальных к границе компонент p_3 векторов рефракции отраженных и прелом-

ленных волн. Компоненты p_3 векторов рефракции \mathbf{p} находятся как корни характеристического многочлена тензора Кристоффеля.

Характеристический многочлен матрицы \mathbf{K} (см. (39)) имеет вид

$$M = -V^6 + C_2V^4 + C_4V^2 + C_6 = 0; \quad (45)$$

$$C_2 = \Lambda_{11} + \Lambda_{22} + \Lambda_{33},$$

$$C_4 = \Lambda_{12}^2 + \Lambda_{13}^2 + \Lambda_{23}^2 - \Lambda_{11}\Lambda_{22} - \Lambda_{11}\Lambda_{33} - \Lambda_{22}\Lambda_{33} + D_1^2 + D_2^2 + D_3^2,$$

$$C_6 = \det(\Lambda_{ij}) + \Lambda_{11}D_1^2 + \Lambda_{22}D_2^2 + \Lambda_{33}D_3^2 - 2(\Lambda_{12}D_1D_2 + \Lambda_{13}D_1D_3 + \Lambda_{23}D_2D_3). \quad (46)$$

Добавки к коэффициентам C_4, C_6

$$\Delta C_4 = D_1^2 + D_2^2 + D_3^2,$$

$$\Delta C_6 = \Lambda_{11}D_1^2 + \Lambda_{22}D_2^2 + \Lambda_{33}D_3^2 - 2(\Lambda_{12}D_1D_2 + \Lambda_{13}D_1D_3 + \Lambda_{23}D_2D_3)$$

обязаны гиротропии.

В средах с осевой симметрией, т. е. трансверсально-изотропных, тензор Кристоффеля Λ определяется формулами

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} &= \lambda_{11}n_1^2 + \lambda_{66}n_2^2 + \lambda_{44}n_3^2; & \Lambda_{12} &= (\lambda_{11} - \lambda_{66})n_1n_2; \\ \Lambda_{22} &= \lambda_{66}n_1^2 + \lambda_{11}n_2^2 + \lambda_{44}n_3^2; & \Lambda_{13} &= (\lambda_{13} + \lambda_{44})n_1n_3; \\ \Lambda_{33} &= \lambda_{44}(n_1^2 + n_2^2) + \lambda_{33}n_3^2; & \Lambda_{23} &= (\lambda_{13} + \lambda_{44})n_2n_3; \\ \Lambda_{ij} &= \Lambda_{ji}; & \lambda_{ij} &= c_{ij}\rho^{-1}, \end{aligned} \quad (47)$$

а приведенные векторы акустической гирации $\mathbf{D} = \mathbf{Q}\rho^{-1}$ для осесимметричных сред ацентричных групп — формулами (25) — (28).

Поскольку рассматриваемые среды имеют осевую симметрию, в коэффициенты (46) многочлена M входят суммы $n_1^2 + n_2^2$. Будем считать, что в системе координат x_1x_3 , построенной в плоскости падения, роль компоненты n_1^2 играет сумма $n_1^2 + n_2^2$, входящая в коэффициенты (46), а тензоры \mathbf{c} и \mathbf{g} заданы в системе координат x_1x_3 .

В случае среды без гирации уравнение для нахождения компонент p_3 векторов рефракции отраженных и преломленных волн получалось в результате деления многочлена M (см. (45)) на V^6 . Поступая аналогично:

$$M_1 = C_6V^{-6} + C_4V^{-4} + C_2V^{-2} - 1,$$

можно видеть, что многочлен M_1 , кроме компонент $p_3 = n_3/V$ в четных степенях, будет содержать также компоненты n_3^2 , так как в гиротропные слагаемые $\Delta C_4, \Delta C_6$ величины n_3 входят соответственно в степенях 6, 8, а скорости V — в степенях 4, 6 (см. формулы (46) в совокупности с (47) и (25) — (28)). Следовательно, задача не решается.

Чтобы понять, почему это происходит, вернемся к формуле (15). Следуя [24], мы полагали, что $2\pi/\lambda = \text{const}$. Однако на самом деле $2\pi/\lambda = \omega/V$, вследствие чего формулы (15), (24) принимают вид

$$\begin{aligned}\omega b_{ijkln}/V &= \delta_{jks} g_{siln}/V; \\ Q_s &= g_{siln} n_i n_l n_m / V.\end{aligned}\quad (48)$$

Изменяются и выражения (37) для тензора Кристоффеля K :

$$K_{jk} = \Lambda_{jk} + i\delta_{jks} D_s = \Lambda_{jk} + i\delta_{jks} g_{siln} n_i n_l n_m / V.$$

Квадраты фазовых скоростей теперь не будут находиться как собственные значения тензора (39). Они будут решениями уравнения $\det(K - V^2\delta) = 0$, где K — полином 8-й степени. (Более подробно см. статью И. С. Чичина и М. М. Немировича-Данченко в наст. сборнике.) Таким образом в гиротропной среде распространяются не три волны, как в анизотропной среде без гирации, а четыре. Четвертая волна, как показано в упомянутой статье, имеет малую скорость, вследствие чего она вряд ли может регистрироваться в экспериментах. Однако при решении задач об отражении — преломлении и излучении источниками эту волну, несомненно, надо принимать во внимание.

Векторы поляризации четырех типов волн находятся из уравнений (38) при подстановке в них соответствующих значений фазовых скоростей V .

Вернемся к решению задачи о нахождении компонент p_3 векторов рефракции отраженных и преломленных волн. Учет соотношений (48) делает полиномы M и M_1 полиномами восьмой степени относительно V и p_3 , четвертой — относительно V^2 , p_3^2 . Следовательно, задача решается так же, как в анизотропной среде без гирации [17], но с тем отличием, что отражаются и преломляются четыре волны. После нахождения корней p_3^2 из них отбирается тот корень, который соответствует искомой волне по типу колебаний ($r = 1, 2, 3 \rightarrow qP, qSV, SH$) и направлению лучевой скорости (отраженная или преломленная волна).

После нахождения векторов рефракции отраженных и преломленных волн можно рассчитывать коэффициенты отражения — преломления. Функцию направленности источника можно рассчитать, применяя алгоритм, описанный в статье И. С. Чичина, М. М. Немировича-Данченко. Остается получить формулы для геометрического расхождения в слоисто-однородной среде (для однородной среды в предположении $\omega/V = \text{const}$ в (15) они получены и приведены в [17]). Тогда можно будет рассчитывать смещения в слоисто-однородных гиротропных средах. Однако, как это следует из [24] и нашего, пока небольшого, опыта расчетов для однородных гиротропных сред, влияние гиротропии на кинематику волн и геометрическое расхождение невелико. Главный эффект возникает благодаря особенностям поляризации поперечных волн в гиротропных средах, а различия

времен прихода двух поперечных волн, обусловленные гиротропией, хотя и являются, как правило, небольшими, определяют условия интерференции этих двух поперечных волн.

ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВОЛН В ГИРОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Влияние гиротропии на фазовые скорости и поляризацию. Для анализа особенностей поляризации волн в гиротропной среде используем приближенные формулы, позволяющие увидеть изменения поляризации, вносимые гиротропией. Будем следовать [24], т. е. для облегчения задачи пренебрежем четвертой волной.

Обратимся к системе уравнений Кристоффеля (38), из которой находятся направления смещений трех типов волн. Запишем ее в развернутом виде, выделив гиротропные добавки:

$$\begin{aligned} (\Lambda_{11} - V^2)A_1 + (\Lambda_{12} + iD_3)A_2 + (\Lambda_{13} - iD_2)A_3 &= 0; \\ (\Lambda_{21} - iD_3)A_1 + (\Lambda_{22} - V^2)A_2 + (\Lambda_{23} + iD_1)A_3 &= 0; \\ (\Lambda_{31} + iD_2)A_1 + (\Lambda_{32} - iD_1)A_2 + (\Lambda_{33} - V^2)A_3 &= 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Теперь решим задачу о собственных значениях и собственных векторах тензора Λ , т. е. найдем фазовые скорости V_{0r} и векторы поляризации $A_0^{(r)}$, $r=1, 2, 3$, трех изонормальных волн в среде без гиротропии. После этого перейдем к ортонормированному базису, определяемому собственными векторами тензора Λ , или, иначе, построенному на векторах поляризации $A_0^{(1)}$, $A_0^{(2)}$, $A_0^{(3)}$. Тензор Λ в этом базисе имеет диагональный вид

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} V_{01}^2 & 0 & 0 \\ 0 & V_{02}^2 & 0 \\ 0 & 0 & V_{03}^2 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

С учетом выражения (50) представим уравнения (49) в новом базисе:

$$\begin{aligned} (V_{01}^2 - V^2)A_1 + iD_3A_2 - iD_2A_3 &= 0; \\ -iD_3A_1 + (V_{02}^2 - V^2)A_2 + iD_1A_3 &= 0; \\ iD_2A_1 - iD_1A_2 + (V_{03}^2 - V^2)A_3 &= 0. \end{aligned} \quad (51)$$

Приравнивая определитель системы (51) нулю, получим

$$\begin{aligned} (V_{01}^2 - V^2)(V_{02}^2 - V^2)(V_{03}^2 - V^2) - [D_1^2(V_{01}^2 - V^2) + \\ + D_2^2(V_{02}^2 - V^2) + D_3^2(V_{03}^2 - V^2)] = 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Решение уравнения (52) и системы уравнений (51) можно записать, не прибегая к численным методам, если принять во внимание малость компонент тензора гирации g относительно компонент тензора модулей упругости c (для кварца $g_{3333}/c_{44} \approx 0,01$).

Вследствие этого будут малы отношения D_i/V^2 . Положим также, что малы и отношения вида $D_i/(V_{0j}^2 - V_{0k}^2)$, $i \neq j \neq k$. Для этого надо, чтобы $V_{0j} \neq V_{0k}$, т. е. чтобы волновая нормаль \mathbf{n} была достаточно удалена от акустических осей среды.

Пусть индекс $r=3$ относится к квазипродольной волне. Тогда для квазипоперечных волн ($r=1, 2$) найдем (см. [24])

$$\begin{aligned} V_1^2 &= V_{01}^2 - \frac{D_2^2}{V_{03}^2 - V_{01}^2} - \frac{D_3^2}{V_{02}^2 - V_{01}^2}; \\ V_2^2 &= V_{02}^2 - \frac{D_3^2}{V_{01}^2 - V_{02}^2} - \frac{D_1^2}{V_{03}^2 - V_{02}^2}; \\ A^{(1)} &= A_0^{(1)} + i \frac{D_3}{V_{02}^2 - V_{01}^2} A_0^{(2)} - i \frac{D_2}{V_{03}^2 - V_{01}^2} A_0^{(3)}; \\ A^{(2)} &= A_0^{(2)} + i \frac{D_1}{V_{03}^2 - V_{02}^2} A_0^{(3)} - i \frac{D_3}{V_{01}^2 - V_{02}^2} A_0^{(1)}, \end{aligned} \quad (53)$$

или, ввиду того, что $V_{03}^2 \gg V_{01}^2$, $V_{03}^2 \gg V_{02}^2$,

$$\begin{aligned} V_1^2 &\approx V_{01}^2 - \frac{D_3^2}{V_{02}^2 - V_{01}^2}; \quad V_2^2 \approx V_{02}^2 + \frac{D_3^2}{V_{02}^2 - V_{01}^2}; \\ A^{(1)} &\approx A_0^{(1)} + i \frac{D_3}{V_{02}^2 - V_{01}^2} A_0^{(2)}; \quad A^{(2)} \approx A_0^{(2)} + i \frac{D_3}{V_{03}^2 - V_{01}^2} A_0^{(1)}. \end{aligned} \quad (54)$$

Из формул (53), (54) видно, что в гиротропной среде поверхности фазовых скоростей двух квазипоперечных волн раздвигаются относительно их положения в среде без гиротропии, при этом сдвиги в ту и другую сторону примерно равны. Поляризация становится эллиптической. Эллипсы в первом приближении одинаковы для обеих волн и примерно ортогональны, направления обхода встречные. Отношения полуосей определяются величиной $D_3/(V_{01}^2 - V_{02}^2)$. По мере удаления от акустических осей, для которых $V_{01} = V_{02}$, эллипсы становятся более вытянутыми.

Для квазипродольной волны ($r=3$)

$$\begin{aligned} V_3^2 &= V_{03}^2 - \frac{D_1^2}{V_{02}^2 - V_{03}^2} - \frac{D_2^2}{V_{01}^2 - V_{03}^2}; \\ A^{(3)} &= A_0^{(3)} - i \frac{D_1}{V_{02}^2 - V_{03}^2} A_0^{(2)} + i \frac{D_2}{V_{01}^2 - V_{03}^2} A_0^{(1)}, \end{aligned} \quad (55)$$

а при учете неравенств $V_{03}^2 \gg V_{01}^2$, $V_{03}^2 \gg V_{02}^2$

$$V_3^2 \approx V_{03}^2; \quad A^{(3)} \approx A_0^{(3)}. \quad (56)$$

Распространение поперечных волн вдоль акустических осей существенно отличается от распространения во всех других направлениях. В трансверсально-изотропных средах всегда есть

акустическая ось, совпадающая с осью симметрии ∞ , и может быть акустическая ось между направлениями $\theta = 0$ и $\theta = 90^\circ$, если кривые фазовых скоростей $V_{SV}(\theta)$, $V_{SH}(\theta)$ пересекаются, т. е. существует конус направлений, для которого $V_{02} = V_{01}$.

Рассмотрим сначала распространение вдоль акустической оси, не совпадающей с осью симметрии ∞ . В этом случае, как показано в [24], фазовые скорости и векторы поляризации двух квазипоперечных волн ($r = 1, 2$) определяются выражениями

$$V_{1,2}^2 = V_{01}^2 \pm D_3 - \frac{D_1^2}{2(V_{03}^2 - V_{01}^2)}; \quad (57)$$

$$A_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e_1 \mp i \left(1 \mp \frac{D_1^2}{2D_3(V_{03}^2 - V_{01}^2)} \right) e_2 \pm \frac{D_1}{V_{03}^2 - V_{01}^2} A_{03} \right],$$

в которых индекс $r = 3$ относится к квазипродольной волне, а орты e_1 и e_2 находятся в плоскости, ортогональной орту $e_3 = A_{03}$, и направлены так, что компонента D_2 вектора D обращается в нуль.

Формулы (57) показывают, что поляризация волн 1, 2 близка к круговой вследствие малости выражений $D_1/(V_{03}^2 - V_{01}^2)$, а направления вращения противоположны; квадраты скоростей отклоняются в обе стороны от значения V_{01}^2 в среде без гиротропии на величины D_3 .

Для квазипродольной волны ($r = 3$)

$$V_3^2 = V_{03}^2 - \frac{D_1^2}{V_{01}^2 - V_{03}^2}; \quad A_3 = A_{03} - i \frac{D_1}{V_{01}^2 - V_{03}^2} e_2, \quad (58)$$

т. е. влияние гиротропии такое же, как для квазипоперечных волн вдали от акустической оси.

Распространение волн вдоль оси симметрии трансверсально-изотропной среды характеризуется самым ярким эффектом — круговой поляризацией двух поперечных волн с противоположными направлениями вращения. На оси симметрии $D = g_{3333} \rho^{-1} n = g_{3333} \rho^{-1} e_3$ (см. (25)–(28)). Поэтому формулы (57) переходят в следующие простые выражения:

$$V_{1,2}^2 = V_{01}^2 \pm D; \quad A_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1 \mp i e_2). \quad (59)$$

Для продольной волны получим из (58) при $D_1 = 0$:

$$V_3 = V_{03}; \quad A_3 = A_{03},$$

т. е. фазовая скорость и поляризация такие же, как в негиротропной среде.

Поляризация поперечных волн, распространяющихся по оси симметрии среды. Пусть вдоль оси симметрии z из точки $z = 0$

начинает распространяться со скоростью V гармоническая поперечная волна с линейной поляризацией (по оси x):

$$\mathbf{u}(t) = U \exp [i\omega(t - z/V)] \mathbf{e}_1.$$

Известно (см., например, [11, 13, 26]), что линейно поляризованную волну можно представить как суперпозицию двух волн с круговой поляризацией — левой и правой:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) = & (U/2) \{ \exp [i\omega(t - z/V)] \mathbf{e}_1 + \exp [i(\omega t + \pi/2 - \omega z/V)] \mathbf{e}_2 \} + \\ & + (U/2) \{ \exp [i\omega(t - z/V)] \mathbf{e}_1 + \exp [i(\omega t - \pi/2 - \omega z/V)] \mathbf{e}_2 \}, \end{aligned}$$

или в более краткой записи

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) = & (U/2) \{ (\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2) \exp [i\omega(t - z/V)] \} + \\ & + (U/2) \{ (\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2) \exp [i\omega(t - z/V)] \}, \end{aligned}$$

так как $\exp [i(\pi/2)] = i$, $\exp [-i(\pi/2)] = -i$.

Будем рассматривать колебания вида $\operatorname{Re} \exp [i\omega(t - z/V)]$. Тогда

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1(t) + \mathbf{u}_2(t);$$

$$\mathbf{u}_1(t) = u [\cos \omega(t - z/V) \mathbf{e}_1 + \sin \omega(t - z/V) \mathbf{e}_2]; \quad (60)$$

$$\mathbf{u}_2(t) = u [\cos \omega(t - z/V) \mathbf{e}_1 - \sin \omega(t - z/V) \mathbf{e}_2], \quad (61)$$

где $u = u_1 = u_2 = U/2$.

Если скорости распространения колебаний $u_1(t)$ и $u_2(t)$ не равны и $V_1 = V + \Delta V$, а $V_2 = V - \Delta V$, то, согласно (59), формулы (60), (61) описывают распространение двух поперечных волн вдоль оси симметрии \mathbf{e}_3 гиротропной среды.

Колебания по осям x и y имеют вид:

$$\begin{aligned} u_x(t) = & u [\cos \omega(t - z/V_1) + \cos \omega(t - z/V_2)]; \\ u_y(t) = & u [\sin \omega(t - z/V_1) - \sin \omega(t - z/V_2)]. \end{aligned} \quad (62)$$

В точке $z = 0$ колебание происходит по оси x :

$$u_x(t) = 2u \cos \omega t = U \cos \omega t, \quad u_y(t) = 0. \quad (63)$$

Далее, вследствие различия скоростей V_1 и V_2 начинает появляться колебание по оси y . Выполнив тригонометрические преобразования в формулах (62) и введя обозначения

$$\varphi_1 = -\omega z/V_1; \quad \varphi_2 = -\omega z/V_2, \quad (64)$$

увидим, что

$$\begin{aligned} u_x(t) = & U \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \cos \left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right); \\ u_y(t) = & U \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \cos \left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right). \end{aligned} \quad (65)$$

Получается, что колебание $u_y(t)$ синфазно с колебанием $u_x(t)$,

акустическая ось, совпадающая с осью симметрии ∞ , и может быть акустическая ось между направлениями $\theta = 0$ и $\theta = 90^\circ$, если кривые фазовых скоростей $V_{SV}(\theta)$, $V_{SH}(\theta)$ пересекаются, т. е. существует конус направлений, для которого $V_{02} = V_{01}$.

Рассмотрим сначала распространение вдоль акустической оси, не совпадающей с осью симметрии ∞ . В этом случае, как показано в [24], фазовые скорости и векторы поляризации двух квазипоперечных волн ($r = 1, 2$) определяются выражениями

$$V_{1,2}^2 = V_{01}^2 \pm D_3 - \frac{D_1^2}{2(V_{03}^2 - V_{01}^2)}; \quad (57)$$

$$A_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[e_1 \mp i \left(1 \mp \frac{D_1^2}{2D_3(V_{03}^2 - V_{01}^2)} \right) e_2 \pm \frac{D_1}{V_{03}^2 - V_{01}^2} A_{03} \right],$$

в которых индекс $r = 3$ относится к квазипродольной волне, а орты e_1 и e_2 находятся в плоскости, ортогональной орту $e_3 = A_{03}$, и направлены так, что компонента D_2 вектора D обращается в нуль.

Формулы (57) показывают, что поляризация волн 1, 2 близка к круговой вследствие малости выражений $D_1/(V_{03}^2 - V_{01}^2)$, а направления вращения противоположны; квадраты скоростей отклоняются в обе стороны от значения V_{01}^2 в среде без гиротропии на величины D_3 .

Для квазипродольной волны ($r = 3$)

$$V_3^2 = V_{03}^2 - \frac{D_1^2}{V_{01}^2 - V_{03}^2}; \quad A_3 = A_{03} - i \frac{D_1}{V_{01}^2 - V_{03}^2} e_2, \quad (58)$$

т. е. влияние гиротропии такое же, как для квазипоперечных волн вдали от акустической оси.

Распространение волн вдоль оси симметрии трансверсально-изотропной среды характеризуется самым ярким эффектом — круговой поляризацией двух поперечных волн с противоположными направлениями вращения. На оси симметрии $D = g_{3333} \rho^{-1} n = g_{3333} \rho^{-1} e_3$ (см. (25) — (28)). Поэтому формулы (57) переходят в следующие простые выражения:

$$V_{1,2}^2 = V_{01}^2 \pm D; \quad A_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_1 \mp i e_2). \quad (59)$$

Для продольной волны получим из (58) при $D_1 = 0$:

$$V_3 = V_{03}; \quad A_3 = A_{03},$$

т. е. фазовая скорость и поляризация такие же, как в негиротропной среде.

Поляризация поперечных волн, распространяющихся по оси симметрии среды. Пусть вдоль оси симметрии z из точки $z = 0$

начинает распространяться со скоростью V гармоническая поперечная волна с линейной поляризацией (по оси x):

$$\mathbf{u}(t) = U \exp [i\omega(t - z/V)] \mathbf{e}_1.$$

Известно (см., например, [11, 13, 26]), что линейно поляризованную волну можно представить как суперпозицию двух волн с круговой поляризацией — левой и правой:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) = & (U/2) \{ \exp [i\omega(t - z/V)] \mathbf{e}_1 + \exp [i(\omega t + \pi/2 - \omega z/V)] \mathbf{e}_2 \} + \\ & + (U/2) \{ \exp [i\omega(t - z/V)] \mathbf{e}_1 + \exp [i(\omega t - \pi/2 - \omega z/V)] \mathbf{e}_2 \}, \end{aligned}$$

или в более краткой записи

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) = & (U/2) \{ (\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2) \exp [i\omega(t - z/V)] \} + \\ & + (U/2) \{ (\mathbf{e}_1 - i\mathbf{e}_2) \exp [i\omega(t - z/V)] \}, \end{aligned}$$

так как $\exp [i(\pi/2)] = i$, $\exp [-i(\pi/2)] = -i$.

Будем рассматривать колебания вида $\text{Re} \exp [i\omega(t - z/V)]$. Тогда

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1(t) + \mathbf{u}_2(t);$$

$$\mathbf{u}_1(t) = u [\cos \omega(t - z/V) \mathbf{e}_1 + \sin \omega(t - z/V) \mathbf{e}_2]; \quad (60)$$

$$\mathbf{u}_2(t) = u [\cos \omega(t - z/V) \mathbf{e}_1 - \sin \omega(t - z/V) \mathbf{e}_2], \quad (61)$$

где $u = u_1 = u_2 = U/2$.

Если скорости распространения колебаний $u_1(t)$ и $u_2(t)$ не равны и $V_1 = V + \Delta V$, а $V_2 = V - \Delta V$, то, согласно (59), формулы (60), (61) описывают распространение двух поперечных волн вдоль оси симметрии \mathbf{e}_3 гиротропной среды.

Колебания по осям x и y имеют вид:

$$\begin{aligned} u_x(t) = & u [\cos \omega(t - z/V_1) + \cos \omega(t - z/V_2)]; \\ u_y(t) = & u [\sin \omega(t - z/V_1) - \sin \omega(t - z/V_2)]. \end{aligned} \quad (62)$$

В точке $z = 0$ колебание происходит по оси x :

$$u_x(t) = 2u \cos \omega t = U \cos \omega t, \quad u_y(t) = 0. \quad (63)$$

Далее, вследствие различия скоростей V_1 и V_2 начинает появляться колебание по оси y . Выполнив тригонометрические преобразования в формулах (62) и введя обозначения

$$\varphi_1 = -\omega z/V_1; \quad \varphi_2 = -\omega z/V_2, \quad (64)$$

увидим, что

$$\begin{aligned} u_x(t) = & U \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \cos \left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right); \\ u_y(t) = & U \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \cos \left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right). \end{aligned} \quad (65)$$

Получается, что колебание $u_y(t)$ синфазно с колебанием $u_x(t)$,

а амплитуды колебаний относятся как тангенсы полуразности фаз:

$$\frac{u_y}{u_x} = \operatorname{tg} \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}. \quad (66)$$

Таким образом, по оси z распространяется линейно поляризованная волна, вектор смещений которой по мере увеличения длины пути z вращается в плоскости xy от оси x по часовой стрелке или против в зависимости от того, какая из двух скоростей V_1 , V_2 больше. При разности фаз $\varphi_1 - \varphi_2 = 90^\circ$ он повернется на 45° и колебания по осям x и y будут иметь одинаковую амплитуду; при разности фаз $\varphi_1 - \varphi_2 = 180^\circ$ колебания будут происходить только по оси y ; если $\varphi_1 - \varphi_2 = 360^\circ$, колебания опять происходят только по оси x , но меняется знак: $u_x(t) = -U \cos \omega t$, и т. д.

Различают правую и левую поляризации. Существует два противоположных определения левой и правой поляризации (см. [24]). Будем придерживаться того определения, согласно которому у правополяризованной волны конец вектора вращается по правому винту, а у левополяризованной — по левому. Это означает следующее. Задаем правую систему координат xyz с осями e_1 , e_2 , e_3 . Если волна распространяется в сторону положительного направления оси z ($n = e_3$) и при этом конец вектора смещений поворачивается от положительного направления оси x (e_1) к положительному направлению оси y (e_2), то волна имеет правую поляризацию; у волны с левой поляризацией поворот происходит в противоположную сторону. В этом случае говорят, что правая волна поляризована по оси $+z$, а левая по оси $-z$ [11].

Формула (60) определяет волну с правой поляризацией (по $+z$), а формула (61) — волну с левой поляризацией (по $-z$). У кругового колебания (60) компонента по оси x опережает компоненту по оси y на 90° , а у кругового колебания (61) компонента по оси x отстает от компоненты по оси y на 90° .

Плоскость, проходящая через волновую нормаль и исходный вектор смещений поперечной волны (плоскость zx), называется плоскостью поляризации. Поэтому описанный эффект в оптике и акустике называют вращением плоскости поляризации. Свойство среды «поворачивать» вектор смещений называют соответственно оптической и акустической активностью. В работе [14] по отношению к геологической среде был использован термин «акустическая активность», во-первых, с целью преемственности понятия, а во-вторых, потому, что название «сейсмическая активность» может ассоциироваться с сейсмичностью земной коры. По-видимому, более подходящим будет термин «упругая активность».

Понятие «гиротропия» шире, чем понятие «акустическая активность». В монографии Ф. И. Федорова [26] дается следующее определение оптической гиротропии, которое применимо и к сейсмической гиротропии: «Гиротропией называется свойство мате-

риальных сред, проявляющееся в том, что распространяющиеся в них по всем (или почти по всем) направлениям однородные плоские волны при отсутствии диссипации энергии имеют эллиптическую поляризацию».

Понятие «пространственная дисперсия» еще шире, чем понятие «гиротропия» (см. [1]). Оно связано с более точной формулировкой закона Гука, в которой при описании связи между напряжениями и деформациями в данной точке учитывается влияние среды в окрестности данной точки. Закон Гука представляется в виде ряда, в котором члены, содержащие производные деформаций, описывают пространственную дисперсию первого, второго порядка и т. д. Пространственная дисперсия первого порядка названа гиротропией.

Итак, упругая активность, описываемая выражениями (65), состоит в повороте вектора смещений (63) на угол, определяемый формулой (66). Поскольку этот угол зависит от длины пути, т. е. он накапливается на отрезке пути, то обозначим его $\delta\alpha$. При малых поворотах в пределах $[-90^\circ, 90^\circ]$

$$\delta\alpha = \operatorname{arctg} \frac{u_y}{u_x} = \frac{\delta\varphi}{2} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}, \quad (67)$$

$\varphi_1 - \varphi_2$ — разность фаз колебаний по осям x и y (см. (62), (64)).

Найдем зависимость угла $\delta\alpha$ от параметров. Согласно (64)

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \omega h \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right), \quad (68)$$

где h — длина пути.

Скорости V_1, V_2 определяются в соответствии с (59) зависимостью

$$V_{1,2}^2 = V_0^2 \pm D, \quad D = Q_0^{-1} = g_{3333} \rho^{-1}, \quad (69)$$

отсюда

$$V_1 = (V_0^2 + D)^{1/2}; \quad V_2 = (V_0^2 - D)^{1/2}.$$

Ввиду того что $D \ll V_0^2$, примем

$$V_1 = V_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{D}{V_0^2} \right); \quad V_2 = V_0 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{D}{V_0^2} \right), \quad (70)$$

Тогда для разности фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ можем записать

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\omega h}{V_0} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2} \frac{D}{V_0^2}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{D}{V_0^2}} \right) \quad (71)$$

и, пренебрегая величиной $D^2/(4V_0^4)$, получим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\omega h D}{V_0^3}. \quad (72)$$

Отсюда

$$\delta\alpha = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \frac{\omega h D}{2V_0^3}, \quad (73)$$

а угол поворота на единицу длины пути

$$\alpha = \frac{\omega D}{2V_0^3}. \quad (74)$$

Если ввести безразмерный относительный параметр D/V_0^2 , позволяющий записать выражения (69) в виде

$$V_{1,2}^2 = V_0^2 (1 \pm D/V_0^2), \quad (75)$$

то (74) можно представить в более наглядной форме:

$$\alpha = \frac{\omega (D/V_0^2)}{2V_0}. \quad (76)$$

Интересно и такое представление:

$$\alpha = \frac{\pi}{\lambda} \frac{D}{V_0^2} = \frac{\pi}{\lambda} (V_1 - V_2)/V_0, \quad (77)$$

где λ — длина волны.

Величину α называют удельным вращением плоскости поляризации [8, 24]. Как следует из приведенных формул, удельное вращение прямо пропорционально частоте колебаний, обратно пропорционально средней скорости распространения двух поперечных волн $V_0 = (V_1 + V_2)/2$ и прямо пропорционально относительному изменению за счет гиротропии квадрата средней скорости.

Можно утверждать, исходя из аналогии с оптикой, что материальная константа D так же, как псевдотензор акустической гирации \mathbf{g} (и равным образом тензор акустической гирации \mathbf{b}), зависит от частоты. Собственно говоря, тензоры \mathbf{g} , \mathbf{b} — не тензоры, а тензор-функции частоты. По-видимому, они являются также тензор-функциями и других параметров, таких, как давление, температура и т. п. Если тензоры модулей упругости зависят от этих параметров, то и тензоры акустической гирации должны от них зависеть. Для тензоров гирации скорее всего важна зависимость от параметров, характеризующих микронеоднородность среды (пористость, геометрию порового пространства, упругие свойства зерен, вещества, заполняющего поры и т. п.).

Если константа D является функцией частоты, то прямая пропорциональная зависимость $\alpha \sim \omega$ может не наблюдаться, а быть иной или даже отсутствовать при $D \sim \omega^{-1}$. О величине константы D в осадочных породах (ЗМС) и ее зависимости от частоты в настоящем сборнике приводятся некоторые полученные нами данные (см. статью Г. И. Резяпова).

До сих пор мы рассматривали гиротропную среду без поглощения. Однако если иметь в виду применение положений теории

к экспериментальным данным, их сопоставление, то учет поглощения необходим. Сделаем это на простейшем уровне, введя экспоненциальные множители в выражения для смещений. В средах без гиротропии это эквивалентно введению комплексных скоростей. В оптике в гиротропной среде комплексным делается параметр гирации, равный разности показателей преломления двух волн — с правой и левой поляризациями. В этом случае говорят о «комплексном вращении» [8].

Поступая аналогичным образом, положим, что параметр гирации $D/V_0 = V_1 - V_2$ есть комплексная величина. Определим скорости V_1, V_2 следующим образом:

$$V_1 = V_0 + a - ib; \quad V_2 = V_0 - a - ib, \quad (78)$$

знак «—» перед b взят для того, чтобы обе волны были затухающими. Посмотрим, к каким изменениям в распространении поперечных волн по оси симметрии среды приведет введение поглощения.

Выделим действительные и мнимые части величин V_1^{-1}, V_2^{-1} :

$$\begin{aligned} V_1^{-1} &= a_1 + ib_1; & V_2^{-1} &= a_2 + ib_2; \\ a_1 &= \frac{V_0 + a}{(V_0 + a)^2 + b^2}; & b_1 &= \frac{b}{(V_0 + a)^2 + b^2}; \\ a_2 &= \frac{V_0 - a}{(V_0 - a)^2 + b^2}; & b_2 &= \frac{b}{(V_0 - a)^2 + b^2}. \end{aligned} \quad (79)$$

Используя введенные обозначения, получим следующие выражения для смещений в волнах 1 и 2:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= u(e_1 - ie_2) \operatorname{Re} \exp[i\omega(t + h(a_1 + ib_1))] = \\ &= u \exp(-\omega hb_1) [\cos(\omega t + ha_1) e_1 + \sin(\omega t + ha_1) e_2]; \\ u_2(t) &= u(e_1 + ie_2) \operatorname{Re} \exp[i\omega(t + h(a_2 + ib_2))] = \\ &= u \exp(-\omega hb_2) [\cos(\omega t + ha_2) e_1 - \sin(\omega t + ha_2) e_2]. \end{aligned} \quad (80)$$

Таким образом, в гиротропной среде поглощение не одинаково для двух волн из-за различия скоростей $V_1 = V_0 + a, V_2 = V_0 - a$. Коэффициенты поглощения определяются формулами

$$\beta_1 = \omega b_1 = \frac{\omega \operatorname{Im} V_1}{|V_1|^2}; \quad \beta_2 = \omega b_2 = \frac{\omega \operatorname{Im} V_2}{|V_2|^2}, \quad (81)$$

где $\operatorname{Im} V_1 = \operatorname{Im} V_2 = b, |V_1|^2 = (V_0 + a)^2 + b^2, |V_2|^2 = (V_0 - a)^2 + b^2$. У волны 1 с большей скоростью поглощение меньше, чем у волны 2 с меньшей скоростью.

Главный эффект — различие амплитуд двух круговых колебаний. Это означает, что суммарное колебание не будет иметь линейную поляризацию, как в среде без поглощения.

Колебания $u_1(t)$, $u_2(t)$ в проекциях на оси x , y согласно (80) определяются выражениями:

$$\begin{aligned} u_x(t) &= u [\exp(-\omega hb_1) \cos \omega(t + ha_1) + \\ &\quad + \exp(-\omega hb_2) \cos \omega(t + ha_2)]; \\ u_y(t) &= u [\exp(-\omega hb_1) \sin \omega(t + ha_1) - \\ &\quad - \exp(-\omega hb_2) \sin \omega(t + ha_2)]. \end{aligned} \quad (82)$$

Представим их как колебания с заданными амплитудами и фазами:

$$u_x(t) = A_1 \cos(\omega t + \delta_1); \quad u_y(t) = A_2 \cos(\omega t + \delta_2), \quad (83)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= [E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]^{1/2}, \\ \cos \delta_1 &= (E_1 \cos \varphi_1 + E_2 \cos \varphi_2)/A_1, \\ \sin \delta_1 &= (E_1 \sin \varphi_1 + E_2 \sin \varphi_2)/A_1, \\ A_2 &= [E_1^2 + E_2^2 - 2E_1E_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)]^{1/2}, \\ \cos \delta_2 &= (E_1 \sin \varphi_1 - E_2 \sin \varphi_2)/A_2, \\ \sin \delta_2 &= (E_1 \cos \varphi_1 - E_2 \cos \varphi_2)/A_2; \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} E_1 &= \exp(-\omega hb_1), \quad E_2 = \exp(-\omega hb_2), \\ \varphi_1 &= \omega ha_1, \quad \varphi_2 = \omega ha_2. \end{aligned} \quad (85)$$

Сравнение выражений (83) с выражениями (65) для среды без поглощения показывает, что в поглощающей среде у колебаний $u_x(t)$, $u_y(t)$ фазы δ_1 , δ_2 не одинаковы, а отношения амплитуд A_2/A_1 меняются по более сложному закону. При $E_1 = E_2 = 1$ (т. е. при $b = 0$) формулы (83) — (85) переходят в формулы (65).

Для определения вида кривой, описываемой концом вектора $\mathbf{u}(t) = u_x(t)\mathbf{e}_1 + u_y(t)\mathbf{e}_2$, исключим ωt из уравнений (83). Это можно сделать, определив ωt из первого уравнения и подставив полученное выражение во второе уравнение. Можно также разрешить уравнения (83) относительно $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$, возвести выражения для $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ в квадрат и сложить; получится соотношение, равное единице, которое содержит $u_x^2(t)$, $u_y^2(t)$ и $u_x(t)u_y(t)$. Получается следующее уравнение:

$$\frac{u_x^2(t)}{A_1^2} + \frac{u_y^2(t)}{A_2^2} - 2 \frac{u_x(t)u_y(t)}{A_1A_2} \cos \delta = \sin^2 \delta, \quad (86)$$

где $\delta = \delta_2 - \delta_1$ — разность фаз колебаний (83). Поскольку значения $u_x(t)$, $u_y(t)$ ограничены, не превышают соответственно значений A_1 , A_2 , то кривая второго порядка (86) есть эллипс.

Эллипс определяется отношением полуосей и углом, образуемым большей осью с осью Ox .

Полуоси эллипса выражаются через параметры колебания (84) следующими формулами:

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(A_1^2 + A_2^2 + \sqrt{(A_1^2 + A_2^2)^2 - 4A_1^2 A_2^2 \sin^2 \delta} \right) / 2; \\ B^2 &= \left(A_1^2 + A_2^2 - \sqrt{(A_1^2 + A_2^2)^2 - 4A_1^2 A_2^2 \sin^2 \delta} \right) / 2. \end{aligned} \quad (87)$$

Связь между величиной отношения полуосей эллипса B/A и параметрами колебания A_2/A_1 , $\delta = \delta_2 - \delta_1$, наглядно видна из соотношения, следующего из (87):

$$\frac{(B/A)^2}{[1 + (B/A)^2]^2} = \frac{(A_2/A_1)^2}{[1 + (A_2/A_1)^2]^2} \sin^2 \delta. \quad (88)$$

При $\sin^2 \delta = 1$, т. е. для $\delta = \pi/2 + \pi l$, $l = 0, 1, 2, \dots$, отношение полуосей эллипса равно отношению амплитуд колебаний (83); уравнение эллипса принимает канонический вид

$$\frac{u_x^2(t)}{A_1^2} + \frac{u_y^2(t)}{A_2^2} = 1.$$

Если при этом $A_1 = A_2$, то имеем два круговых колебания противоположных направлений обращения.

При $\sin^2 \delta = 0$, т. е. для $\delta = \pi l$, $l = 0, 1, 2, \dots$, колебание становится линейно поляризованным.

Эллиптическая поляризация так же, как круговая, может быть правой и левой. Придерживаясь тех же определений, что и в случае круговой поляризации, найдем, что при $\sin \delta > 0$ имеем правую волну, при $\sin \delta < 0$ — левую.

Угол, образуемый большой осью эллипса с осью Ox , определяется через параметры колебания (83) формулой

$$\operatorname{tg} 2\kappa = \frac{2A_1 A_2}{A_1^2 - A_2^2} \cos \delta. \quad (89)$$

Подставив в (89) выражения (84), (85) для $A_1, A_2, \delta = \delta_2 - \delta_1$, найдем

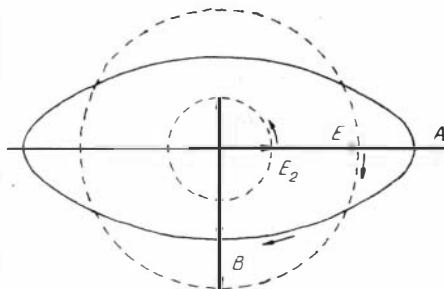
$$\operatorname{tg} 2\kappa = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (90)$$

и, следовательно,

$$\kappa = (\varphi_2 - \varphi_1) / 2. \quad (91)$$

Мы получили тот же результат, что и для линейно поляризованного колебания (65) в среде без поглощения. Таким образом, акустически активная (упруго активная) поглощающая гиротропная среда на оси симметрии обладает свойством вращать эллипс поляризации. Эллипс имеет либо правое, либо левое направление вращения в зависимости от того, у какой из двух образующих его круговых волн (левой или правой) амплитуда больше.

Рис. 2. Сложение двух круговых колебаний с противоположными направлениями обхода и разными амплитудами.



Между амплитудами круговых колебаний $u_1(t)$, $u_2(t)$ (см. формулы (80), (85)) и полуосями эллипса существует зависимость

$$E_1 = (A + B)/2; E_2 = (A - B)/2, \quad (92)$$

т. е. радиус большой окружности равен полусумме полуосей эллипса, а радиус малой окружности — их полуразности (рис. 2).

Гармонические колебания (83), как следует из вышеизложенного, можно представлять в виде комплексных чисел

$$\mathcal{H} = (A_2/A_1) \exp i(\delta_2 - \delta_1) \quad (93)$$

и в виде параметров эллипса B/A , κ . Используют то представление, которое более удобно при решении конкретной задачи. В случае импульсных колебаний вычисляются их спектры $u_x(t) \rightarrow S_1(\omega)$, $u_y(t) \rightarrow S_2(\omega)$ и тогда

$$\mathcal{H}(\omega) = (|S_2(\omega)|/|S_1(\omega)|) \exp i(\arg S_2(\omega) - \arg S_1(\omega)) \quad (94)$$

и соответственно находятся $B/A(\omega)$, $\kappa(\omega)$. Более подробно со способами описания поляризации волн можно ознакомиться по работам [11, 26].

Параметры гирации a , b (см. формулы (78)), отличающие гиротропную поглощающую среду со скоростями на оси симметрии $V_{1,2} = V_0 \pm a - bi$ от негиротропной со скоростью V_0 , могут быть найдены по параметрам колебаний $u_x(t)$, $u_y(t)$. Связь параметров гирации с параметрами колебаний для гармонических колебаний дается формулами (79), (82) — (85), а также (87), (89) — (92); для импульсных колебаний предварительно выполняется преобразование (94). Для нахождения параметров a , b будем использовать параметры эллипсов поляризации B/A , κ .

Наиболее легкий путь решения данной задачи состоит в использовании выражений (85). Амплитуды круговых колебаний E_1 , E_2 и их фазы φ_1 , φ_2 связаны с параметрами эллипса формулами (92), (91). Используя эти зависимости, составим систему уравнений

$$\frac{\exp(-\omega h b_1)}{\exp(-\omega h b_2)} = \frac{1 + B/A}{1 - B/A}, \quad (95)$$

$$\omega h (a_2 - a_1) = 2\kappa.$$

Перейдем к параметрам a , b в соответствии с формулами (79).

В результате получим

$$\omega h b \left(\frac{1}{(V_0 - a)^2 + b^2} - \frac{1}{(V_0 + a)^2 + b^2} \right) = \ln \frac{1 + B/A}{1 - B/A}, \quad (96)$$

$$\omega h \left(\frac{V_0 - a}{(V_0 - a)^2 + b^2} - \frac{V_0 + a}{(V_0 + a)^2 + b^2} \right) = 2\kappa.$$

Если поглощение мало, $b \ll V_0 \pm a$, можно пренебречь величиной b^2 , и тогда система уравнений (96) имеет решение

$$a = \sqrt{\left(\frac{\omega h}{2\kappa}\right)^2 + V_0^2} - \frac{\omega h}{2\kappa} \quad (a > 0);$$

$$b = \frac{(V_0 - a)^2 (V_0 + a)^2 \ln \frac{1 + B/A}{1 - B/A}}{4\omega h V_0 a}. \quad (97)$$

Если же мнимая добавка b к скоростям $V_0 \pm a$ не мала, решение определяется по формулам

$$b = ((M^2 + 4V_0^2 P)^{1/2} - M)/(2P);$$

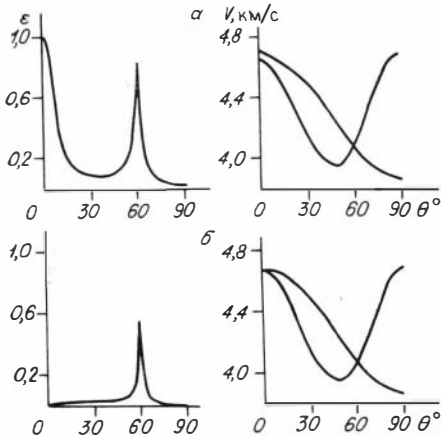
$$a = (V_0^2 - b^2 - Mb)^{1/2}, \quad (98)$$

где

$$M = 4\kappa V_0/L; \quad L = \ln \frac{1 + B/A}{1 - B/A};$$

$$P = 1 + [(M^2 + 4V_0^2)L/(4\omega h V_0)]^2.$$

О поляризации поперечных волн в направлениях, отличных от оси симметрии среды. Распространение поперечных волн двух типов в анизотропной гиротропной среде (без поглощения) по произвольным направлениям, как это было показано выше путем анализа приближенных формул, характеризуется эллиптической поляризацией. В направлениях акустических осей, не совпадающих с осями симметрии, эллиптическая поляризация приближается к круговой (см. формулы (57)).



В произвольных направлениях эллиптичность мала, если малы компоненты тензора акустической гирации g сравнительно с компонентами тензора модулей упругости c ; это видно из формул (53), (54).

Рис. 3. Отношения полуосей эллипсов поляризации ϵ и фазовые скорости V в зависимости от направления волновой нормали в средах групп симметрии $\infty 2$, ∞ при $g_{3333} \neq 0$ (а) и в среде группы симметрии ∞m (б).

Таким образом, степень вытянутости эллипсов поляризации зависит от направления распространения. Зависит она и от типа симметрии среды, и эта зависимость наиболее существенна. В осесимметричных средах различных групп симметрии ($\infty 2$, ∞m , ∞) вытянутость эллипса может быть различной. Она определяется в основном тем, равна нулю или не равна компонента g_{3333} тензора g (см. формулы (17) — (19)). В группе ∞m эта компонента всегда равна нулю, вследствие чего при распространении по оси симметрии поляризация останется такой же, как в среде без гиротропии, т. е. линейной. В группах $\infty 2$, ∞ константа g_{3333} является одной из констант, в частном случае она может быть равна нулю. Тогда распространение по оси симметрии ничем не отличается от распространения в средах с симметрией ∞m .

На рис. 3 приведены кривые $\varepsilon(\theta)$, характеризующие зависимость отношения полуосей эллипсов поляризации от направления распространения, задаваемого углом θ между осью симметрии и волновой нормалью. Эллипсы двух поперечных волн очень близки, хотя и не совпадают, на рис. 3 нанесены значения $\varepsilon(\theta) = (\varepsilon_1(\theta) + \varepsilon_2(\theta))/2$, т. е. средние для двух волн. Параметры $\varepsilon_1(\theta)$, $\varepsilon_2(\theta)$ определялись по соотношениям мнимых и действительных частей векторов поляризации $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ двух поперечных волн; векторы поляризации вычислялись как собственные векторы тензора Кристоффеля K (см. (39)).

Кривая эллиптичности на рис. 3, а построена для среды группы симметрии $\infty 2$, все четыре константы тензора g ненулевые. Кривая на рис. 3, б характеризует эллиптичность поляризации в среде группы ∞m . Сравнивая эти кривые, видим, что главное отличие относится к распространению по оси симметрии $\theta = 0$: в среде $\infty 2$ $\varepsilon = 1$, поляризация двух волн круговая со встречным направлением вращения, а в среде ∞m $\varepsilon = 0$, поляризация линейная. В направлении $\theta = 60^\circ$, являющемся направлением акустической оси, в обеих средах поляризация приближается к круговой. В остальных направлениях поляризация близка к линейной. В плоскости, перпендикулярной оси симметрии ∞ , т. е. при $\theta = 90^\circ$, поляризация практически линейная.

Расчеты для других моделей, в частности для группы ∞ , показали, что все кривые имеют такой же вид, как изображенные на рис. 3. Поляризация определяется значением константы g_{3333} и наличием акустической оси на направлениях между $\theta = 0$ и $\theta = 90^\circ$. Уменьшение или увеличение значений констант g_{ijkl} ведет соответственно к уменьшению или увеличению значений показателя эллиптичности $\varepsilon(\theta)$.

Кроме показателей эллиптичности, на рис. 3 показаны кривые фазовых скоростей $V_1(\theta)$, $V_2(\theta)$ двух поперечных волн. В среде с $g_{3333} \neq 0$ (см. рис. 3, а) кривые $V_1(\theta)$, $V_2(\theta)$ раздвинуты на оси симметрии, т. е. при $\theta = 0$. В среде симметрии ∞m (см. рис. 3, б) $g_{3333} = 0$, и на оси симметрии $V_1 = V_2$. В остальном поведение кривых $V_1(\theta)$, $V_2(\theta)$ отличается от их поведения

в трансверсально-изотропной негиротропной среде весьма незначительно.

В изотропных гиротропных средах (группа $\infty\infty$), как уже отмечалось, для всех направлений распространения поляризация двух волн круговая ($\epsilon = 1$) с противоположными направлениями вращения.

Анизотропные гиротропные среды (группы $\infty 2, \infty$) по терминологии, применяемой в оптике [26], обладают естественной гиротропией. В них разворот вектора смещений зависит от направления распространения и не накапливается. У отраженной волны поворот не удваивается, а уничтожается. То же, если рассуждать по аналогии, должно относиться и к рефрагированной волне. Наблюдаемые повороты векторов смещений могут быть связаны с различиями параметров среды на пути вниз и вверх, ввиду чего «раскручивание» не равно «закручиванию».

В оптике, кроме естественной гиротропии, рассматривают также собственную и вынужденную гиротропию [26]. В этом случае связь полей и индукций для плоских волн осуществляется посредством тензоров, которые в отличие от тензоров для сред с естественной гиротропией не зависят от направления и скорости распространения волн. Следовательно, их свойства целиком определяются свойствами среды. Полагают, что собственная гиротропия должна быть связана с существованием в среде некоторого постоянного внутримолекулярного или межмолекулярного поля. Вынужденная гиротропия возникает под влиянием внешних воздействий. В средах с вынужденной и собственной гиротропией при отражении суммарный поворот не равен нулю. По-видимому, в геологической среде при наличии постоянных и появляющихся полей напряжений также возможна собственная и вынужденная гиротропия.

Для более ясного представления о степени влияния гиротропии на распространение поперечных волн на рис. 4 приводится трехкомпонентная сейсмограмма двух поперечных волн, рассчитанная по программе из [17]. Модули упругости c_{ij} трансверсально-изотропной среды и удаления источник — приемник (см. рис. 4, *в*) выбраны такими, что две волны разделялись во времени. Годографы волн изображены на рис. 4, *б*, а на сейсмограммах (см. рис. 4, *а*) кружками с черточками отмечены вступления основной и дополнительной волн.

В анизотропной негиротропной среде на y -компоненте не было бы никакой записи, так как Z -источник не возбуждает волну SH . За счет гиротропии, а точнее вследствие эллиптичности поляризации, появляется y -компонента у волны SV и, самое главное, появляется волна SH , имеющая также и x -компоненту. Интенсивность волны SH в среднем составляет $1/3$ интенсивности SV -волны. Поскольку источник находится внутри среды на достаточном удалении от дневной поверхности, считаем среду безграничной и смещение в точке источника находим, вычисляя проекции вектора силы на направления векторов поляризации

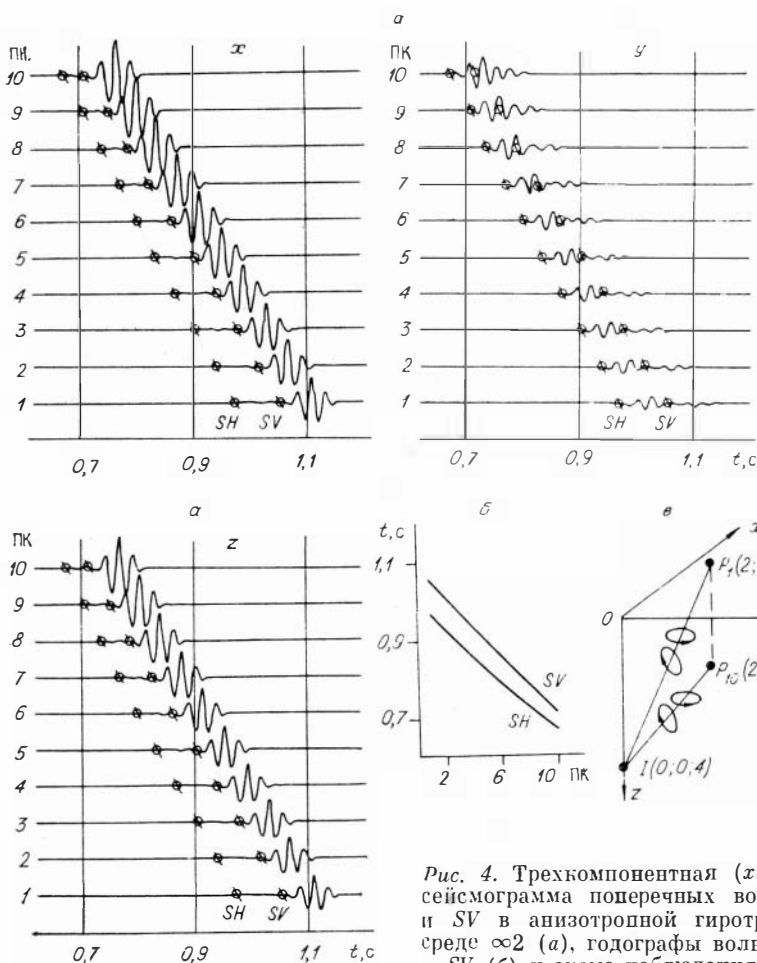


Рис. 4. Трехкомпонентная (x, y, z) сейсмограмма поперечных волн SH и SV в анизотропной гиротропной среде $\infty 2$ (а), годографы волн SH и SV (б) и схема наблюдения (в).

Компоненты приведенных тензоров модулей упругости $\lambda_{11} = 32,504$; $\lambda_{33} = 39,657$; $\lambda_{13} = 4,466$; $\lambda_{14} = 21,809$; $\lambda_{26} = 14,925$ и акустической гирации $h_{1122} = h_{2233} = h_{3311} = 0,100$; $h_{3333} = 0,209$ (в $\text{км}^2 \text{с}^{-2}$).

рассчитываемых волн. В начальный момент времени существуют две поперечные волны с эллиптической поляризацией: у одной волны большая ось эллипса находится в плоскости xz , малая направлена по y (SV -волна), у второй волны большая ось эллипса направлена по y , малая находится в плоскости xz (SH -волна); сумма всех смещений равна смещению, создаваемому источником. По прошествии некоторого времени волны разделяются вследствие различия скоростей, и их записи выглядят так, как изображено на рис. 4.

Изучение гиротропии сейсмических сред только начато. Некоторые данные относительно возможности описания реальной среды гиротропной моделью приводятся в статье Г. И. Резяпова, публикуемой в настоящем сборнике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агранович В. М., Гинзбург В. Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов.— М.: Наука, 1965.— 374 с.
2. Бахаревская Т. М., Бродов Л. Ю., Оболенцева И. Р., Пузырев Н. Н. Экспериментальное изучение поляризации обменной волны типа *PS*, отраженной от наклонной границы раздела // Поперечные и обменные волны в сейсморазведке.— М.: Недра, 1967.— С. 203—209.
3. Берденникова Н. И., Куличихина Т. Н. Изучение кинематических и динамических характеристик поперечных и продольных волн в скважинах // Экспериментальные исследования поперечных и обменных волн.— Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962.— С. 31—63.
4. Васильев В. И., Евчатов Г. П., Окунева В. Ф. и др. Экспериментальные исследования процесса возбуждения сейсмических волн вибрационным источником // Вопросы возбуждения сейсмических волн вибрационным источником.— Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1976.— С. 65—86.
5. Гальперин Е. П. Поляризационный метод сейсмических исследований.— М.: Недра, 1977.— 279 с.
6. Гречка В. Ю., Оболенцева И. Р. Математическое моделирование отраженных волн в слоисто-однородных трансверсально-изотропных средах // Физика Земли.— 1987.— № 7.— С. 50—59.
7. Гречка В. Ю., Оболенцева И. Р. Результаты математического моделирования трехмерных полей смещений отраженных *PS*- и *SS*-волн в трансверсально-изотропных средах // Многоволновые сейсмические исследования.— Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1987.— С. 20—25.
8. Кизель В. А., Бурков В. П. Гиротропия кристаллов.— М.: Наука, 1980.— 304 с.
9. Киселев А. П. Примесные компоненты упругих волн // Физика Земли.— 1983.— № 9.— С. 51—56.
10. Клем-Мусатов К. Д., Оболенцева И. Р., Айзенберг А. М. Расчет полей упругих волн для одной модели анизотропной среды // Динамические характеристики сейсмических волн.— Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1973.— С. 73—98.
11. Крауфорд Ф. Волны.— М.: Наука, 1984.— 512 с.
12. Кучер В. И. Алгоритмы вычисления примесных составляющих 1-го приближения лучевого метода в случае изотропных кусочно-неоднородных сред // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн.— Л.: Наука, Ленингр. отд-ние, 1989.— Вып. 28.— С. 8—21.
13. Най Дж. Физические свойства кристаллов и их описание при помощи тензоров и матриц.— М.: Мир, 1967.— 358 с.
14. Оболенцева И. Р. О возможной связи аномальной поляризации поперечных волн с акустической активностью среды // Теория и практика виброрейсмического зондирования земной коры.— Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1983.— С. 139—149.
15. Оболенцева И. Р., Горшкалев С. Б., Никольский А. А. Особенности пространственной поляризации поперечных и обменных волн и проблемы их поляризационной обработки // Многоволновые сейсмические исследования.— Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1987.— С. 25—29.
16. Оболенцева И. Р., Гречка В. Ю. Изучение трехмерных волновых полей отраженных *PS*- и *SS*-волн в трансверсально-изотропных средах // Геология и геофизика.— 1987.— № 8.— С. 107—116.
17. Оболенцева И. Р., Гречка В. Ю. Лучевой метод в анизотропной среде (алгоритмы, программы).— Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1989.— 225 с.
18. Петрашень Г. П. О лучевом методе и поляризации объемных сейсмических волн // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн.— Л.: Наука, Ленингр. отд-ние, 1981.— Вып. 21.— С. 5—54.
19. Петрашень Г. П., Кучер В. И., Каштан Б. М. Вычисление примесных составляющих I приближения лучевого метода в случае изотропных произвольно-неоднородных упругих сред/Препринт ЛОМИ Р—6—88.— Л., 1988.— 18 с.

20. Петрашень Г. И., Кучер В. И., Кантан Б. М. То же/Препринт ЛОМИ Р—11—88.—Л., 1938.—16 с.
21. Пузырев Н. Н., Оболенцева И. Р., Тригубов А. В., Горшкалева С. Б. Экспериментальные исследования анизотропии скоростей в осадочных отложениях по наблюдениям на поперечных волнах // Геология и геофизика.—1983.—№ 11.—С. 8—19.
22. Резяпов Г. И. Экспериментальное изучение поляризации поперечных волн, возбуждаемых горизонтальным вибратором // Теория и практика вибросейсмического зондирования земной коры.—Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1988.—С. 130—139.
23. Сейсмическая разведка методом поперечных и обменных волн // Пузырев Н. Н., Тригубов А. В., Бродов Л. Ю. и др.—М.: Недра, 1985.—277 с.
24. Сиротин Ю. И., Шаскольская М. П. Основы кристаллофизики.—М.: Наука, 1979.—639 с.
25. Тригубов А. В., Горшкалева С. Б. Экспериментальное исследование анизотропии осадочных пород с использованием скважинных наблюдений // Математические проблемы интерпретации данных сейсморазведки.—Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.—С. 206—217.
26. Федоров Ф. П. Теория гиротропных сред.—Минск: Изд-во АН БССР, 1975.—364 с.
27. Alford R. M. Shear data in the presence of azimuthal anisotropy: Dilley, Texas // Proc. of the 56th Annual SEG Meeting.—Houston, 1986.—P. 476—479.
28. Backus G. E. Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering // J. Geophys. Res.—1962.—Vol. 67, N 11.—P. 4427—4440.
29. Becker D. F., Perelberg A. I. Seismic detection of subsurface fractures // Proc. of the 56th Annual SEG Meeting.—Houston, 1986.—P. 466—468.
30. Crampin S. A review of wave motion in anisotropic and cracked elastic media // Wave motion.—1981.—Vol. 3.—P. 343—391.
31. Crampin S., Bush I. Shear waves revealed: extensive dilatancy anisotropy confirmed // Proc. of the 56th Annual SEG Meeting.—Houston.—1986.—P. 481—484.
32. Frasier C. W., Winterstein D. F. Analysis of conventional and converted mode reflections at Putah Sink, California, using three-component data // Ibid.—P. 396—400.
33. Johnston D. H. VSP detection of fracture-induced velocity anisotropy // Ibid.—P. 464—468.
34. Lynn H. B., Thomsen L. A. Reflection shear-wave data along the principal axes of azimuthal anisotropy // Ibid.—P. 473—476.
35. Naville Ch. Detection of anisotropy using shear-wave splitting in VSP surveys: requirements and applications // Ibid.—P. 391—394.
36. Obolentseva I. R., Grechka V. Yu., Nickolsky A. A. Investigation of 3D wavefields of reflected shear-waves and converted waves: mathematical modelling and reflection data processing // Geophys. J. Roy. Astron. Soc.—1987.—Vol. 91.—P. 543—554.
37. Puzyrev N. N., Obolentseva I. R., Trigubov A. V., Gorshkalev S. B. On the anisotropy of sedimentary rocks from shear-wave analysis // Ibid.—1984.—Vol. 76.—P. 243—252.
38. Rai C. S., Hanson K. E. Shear-wave birefringence: a laboratory study // Proc. of the 56th Annual SEG Meeting.—Houston, 1986.—P. 471—473.
39. Thomsen L. Reflection seismology in azimuthally anisotropic media // Ibid.—P. 468—470.
40. Trigubov A. V., Gorshkalev S. B. Seismic observations of the anisotropy of sediments // Physics of the Earth and planetary interiors.—1988.—Vol. 51.—P. 93—100.
41. Willis H. A., Rethford G. L., Bielanski E. Azimuthal anisotropy: occurrence and effect on shear-wave data quality // Proc. of the 56th Annual SEG Meeting.—Houston.—1986.—P. 479—480.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ УПРУГИХ ВОЛН ИСТОЧНИКОМ, РАСПРЕДЕЛЕННЫМ НА ПОВЕРХНОСТИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Задачи по определению волнового поля точечных источников, расположенных на поверхности $z = 0$ трансверсально-изотропного полупространства с осью симметрии z , рассматривались в работе [2]. Там получены расчетные формулы для следующих двух случаев задания силы при $z = 0$:

$$\overline{\mathcal{F}}(r, t) = \frac{\delta(r)}{\pi r} \varepsilon(t) e_z; \quad (1)$$

$$\overline{\mathcal{F}}(r, t) = \frac{\delta(r)}{\pi r^2} a(t) e_r,$$

где $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$; $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака; $\varepsilon(t) = 1$ при $t \geq 0$ и $\varepsilon(t) = 0$ при $t < 0$; $a(t) = t$ при $t \geq 0$ и $a(t) = 0$ при $t < 0$.

Главной побудительной причиной написания предлагаемой работы была необходимость иметь для трансверсально-изотропной среды формулы, описывающие поле излучения источника типа горизонтальной силы, так как в настоящее время источники с горизонтальной ориентацией силы хорошо реализуются при помощи сейсмических вибраторов, а также направленных импульсных воздействий, применяемых при многоволновых сейсмических исследованиях. В работах [1, 2] приведены общие соображения о том, как решить задачу об излучении горизонтально направленного источника в случае трансверсально-изотропного полупространства. Однако эти соображения в [1, 2] не доведены до расчетных формул. Поэтому настоящую работу можно рассматривать как продолжение исследований, начатых в [1, 2].

Методика решения, используемая в данной работе, отличается от применявшейся в [1, 2] и может представлять самостоятельный интерес. Вследствие этого решение задачи излагается достаточно подробно. Главная особенность предлагаемого решения, как читатель увидит из дальнейшего, состоит в том, что здесь активно используется спектральное представление исследуемых процессов. Вызвано это тем, что в настоящее время в геофизике спектральные представления развиты до такой степени, что во многих случаях знание спектра Фурье исследуемого процесса является более предпочтительным, чем знание этого процесса во временном представлении. А это означает, что при решении динамических задач вместо двукратных интегралов можно ограничиться рассмотрением однократных интегралов, что существенно упрощает задачу. Но чтобы воспользоваться таким

упрощением, надо упомянутому однократному интегралу придать четкий физический смысл спектра, что и сделано в данной работе. Для изотропных сред подобные задачи рассмотрены в монографии автора [3].

1. ИСХОДНЫЕ ФОРМУЛЫ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Приведем кратко основные формулы и уравнения, используемые далее. Для удобства сравнения с [2] применяются в основном те же обозначения, что в [2].

1.1. Запись формулы, описывающей закон Гука, в общем случае производится путем следующих рассуждений. Напряжения и деформации в сплошной среде описываются при помощи тензоров второго ранга, τ_{ik} и ξ_{kl} . Линейная связь двух тензоров второго ранга в общем случае выражается при помощи тензора четвертого ранга, т. е.

$$\tau_{ik} = c_{iklm}\xi_{lm}, \quad \xi_{lm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_m} + \frac{\partial U_m}{\partial x_l} \right). \quad (2)$$

Тензор четвертого ранга (c_{iklm}) имеет 81 компоненту и симметричен по первой и второй парам индексов и их перестановке:

$$c_{iklm} = c_{kilm} = c_{ikml} = c_{lmik}. \quad (3)$$

В общем случае число независимых компонент тензора (c_{iklm}) равно 21. Именно такое количество компонент входит в симметричную матрицу (c_{jn}), с помощью которой записывается закон Гука в «физической» формулировке, утверждающей, что деформации пропорциональны напряжениям. Мы будем пользоваться далее законом Гука в виде

$$\tau_{ik} = c_{iklm} \frac{\partial U_m}{\partial x_l}. \quad (4)$$

1.2. Уравнения движения частиц внутри сплошной среды имеют вид

$$\frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} = \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}, \quad \text{или} \quad c_{iklm} \frac{\partial^2 U_m}{\partial x_k \partial x_l} = \rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2}; \quad (5)$$

они называются также волновыми уравнениями.

1.3. Упругая среда называется трансверсально-изотропной (поперечно-изотропной), если она имеет ось симметрии ∞ (бесконечного порядка), т. е. совмещается сама с собой при повороте на любой угол вокруг этой оси.

В трансверсально-изотропной среде из упомянутых выше 81 компоненты тензора модулей упругости отличны от нуля 21 компонента (табл. 1). Независимыми являются пять модулей упругости: c_{11} , c_{33} , c_{44} , c_{66} , c_{13} ; в работе [2] вместо них используются константы Ламэ λ , μ и параметры l , m , p , введенные так,

Ненулевые компоненты тензора модулей упругости трансверсально-изотропной среды в различных обозначениях

c_{ijkl}	c_{mnp}	λ, μ, l, m, p
$c_{1111} \ c_{2222}$	$c_{11} \ c_{22}$	$\lambda + 2\mu$
c_{3333}	c_{33}	$\lambda + 2\mu - p$
$c_{1122} \ c_{2211}$	$c_{12} \ c_{21}$	λ
$c_{1133} \ c_{3311} \ c_{2233} \ c_{3322}$	$c_{13} \ c_{31} \ c_{23} \ c_{32}$	$\lambda - l$
$c_{2323} \ c_{3223} \ c_{2332} \ c_{3232}$	c_{44}	$\mu - m$
$c_{3131} \ c_{1331} \ c_{3113} \ c_{1313}$	c_{55}	$\mu - m$
$c_{1212} \ c_{2112} \ c_{1221} \ c_{2121}$	c_{66}	μ

что при $l \rightarrow 0, m \rightarrow 0, p \rightarrow 0$ табл. 1 превращается в соответствующую таблицу для изотропной упругой среды.

Используя табл. 1, можно записать уравнения движения (5) для $i = 1, 2, 3$ [2]. Мы эти уравнения далее запишем в более удобной для нас форме (формулы (11)).

1.4. Граничные условия рассматриваемой задачи заданы следующим образом:

$$\tau_{3k}(x_1, x_2, t)|_{x_3=0} = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0, \\ \mathcal{F}_k(x_1, x_2, t) & \text{при } t > t_0. \end{cases} \quad (6)$$

Запишем компоненты τ_{3k} по формуле (4), используя табл. 1:

$$\begin{aligned} \tau_{31} &= (\mu - m) \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \right) \Big|_{x_3=0} = \mathcal{F}_1(x_1, x_2, t); \\ \tau_{32} &= (\mu - m) \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_3=0} = \mathcal{F}_2(x_1, x_2, t); \\ \tau_{33} &= \left[(\lambda + 2\mu - p) \frac{\partial U_3}{\partial x_3} + (\lambda - l) \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + (\lambda - l) \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \right] \Big|_{x_3=0} = \\ &= \mathcal{F}_3(x_1, x_2, t). \end{aligned} \quad (7)$$

Теперь нашу задачу можно сформулировать математически. Она состоит в том, что надо определить в точках полупространства $x_3 \geq 0$ поле смещения $U_i(x_1, x_2, x_3, t)$, $i = 1, 2, 3$, которое внутри среды удовлетворяет уравнениям движения (5), а на поверхности полупространства ($x_3 = 0$) удовлетворяет граничным условиям (7).

Как указывалось вначале, в работе [2] были получены формулы, описывающие поле смещения, когда на поверхности полупространства действуют точечные осесимметричные источники, заданные формулами (1). Наша главная задача, как указыва-

лось, состоит в том, чтобы получить формулы, описывающие поле смещения источника, имеющего горизонтальную ориентацию силы. Решая задачу с граничными условиями (7), мы сможем найти поля смещений, создаваемые источниками, распределенными на поверхности полупространства $x_3 = 0$, при любой ориентации воздействий, в том числе для горизонтальной силы.

2. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПЕРЕМЕННЫХ

2.1. Пусть поле смещения, излучаемое источником, заданным в виде (7), описывается некоторой векторной функцией $U(x_1, x_2, x_3, t)$. Представим себе, что в точке $x_1 = x'_1, x_2 = x'_2$ в момент времени $t = t'$ удалось «сфотографировать» смещения $U(x_3)$ по всей линии $-\infty \leq x_3 < \infty$. Зарегистрированные таким образом функции $U_i(x_3)$ можем обрабатывать дальше как угодно и в том числе подвергнуть их преобразованиям Фурье:

$$U_i(x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_i(k_3) e^{jk_3 x_3} dk_3; \quad (8)$$

$$\tilde{U}_i(k_3) = \int_{-\infty}^{\infty} U_i(x_3) e^{-jk_3 x_3} dx_3.$$

Напомним, что эти интегралы существуют (сходятся), если функция $U_i(x_3)$ удовлетворяет условиям Дирихле и, кроме того, интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U_i(x_3)| dx_3 \quad (9)$$

сходится. Следует заметить, что реальное поле смещения всегда удовлетворяет условиям Дирихле и интеграл (9) от такого поля всегда сходится, так как при больших расстояниях R функция $U_i(x_3)$ уменьшается пропорционально $1/R^{1+\alpha}$ за счет геометрического расхождения ($1/R$) и затухания ($\alpha > 0$), поскольку в природе не существует непоглощающих сред.

Обратим внимание еще на одно обстоятельство. Переменную k_3 называют волновым числом, так как ей можно придавать смысл $k_3 = \omega/V_3$, где V_3 — кажущаяся скорость волны при наблюдении ее вдоль направления оси x_3 . Но говорить, что всегда $k_l = \omega/V_l$, было бы неверно. И в самом деле, представим себе, что $U_i(x_3)$ — топографический рельеф местности по профилю x_3 и нам почему-то понадобилось этот рельеф представлять в виде его «спектра» $\tilde{U}_i(k_3)$. Понятно, что в этом случае привлекать такие понятия, как круговая частота ω и кажущаяся скорость V_3 , нет никакого смысла.

Преобразования типа (8) можно, очевидно, использовать не только по оси x_3 , но и по осям x_1 , x_2 и t . Поэтому можем записать

$$U_i(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_i(k_1, k_2, k_3, \omega) e^{-j\omega t + jk_1 x_1} dk_1 dk_2 dk_3 d\omega, \quad (10)$$

где

$$jk_1 x_1 \equiv j(k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3) \equiv j(k_x x + k_y y + k_z z).$$

Знак перед $j\omega t$ выбираем «минус», а перед $jk_1 x_1$ — «плюс» просто ради последующих удобств. Такая возможность выбора связана с тем, что в преобразованиях типа (8) неважно, какой знак стоит в первом интеграле перед $jk_3 x_3$. Важно только то, что если в первом интеграле выбрали, например, знак «минус», то во втором интеграле (8) надо ставить знак «плюс», и наоборот.

Заметим, что интеграл типа (9) по времени t может не существовать при рассмотрении каких-либо экзотических примеров (например, таких, какие задаются формулами (1)). В этих случаях вместо преобразования Фурье может быть использовано преобразование Лапласа. Мы здесь не будем останавливаться на исследовании особенностей таких теоретических (искусственных) примеров; важно то, что при рассмотрении реальных сигналов подобных проблем не существует.

2.2. Применим четырехкратное интегральное преобразование (10) к волновым уравнениям (5). Чтобы не иметь дело со знаком мнимости j , временно используем обозначения $jk_1 \equiv q_1$, $jk_2 \equiv q_2$ и $jk_3 \equiv q_3$; тогда

$$\begin{aligned} &(\lambda + 2\mu) q_1^2 \tilde{U}_1 + \lambda q_1 q_2 \tilde{U}_2 + (\lambda - l) q_1 q_3 \tilde{U}_3 + (\mu - m) q_3^2 \tilde{U}_1 + \\ &+ (\mu - m) q_3 q_1 \tilde{U}_3 + \mu q_2 q_1 \tilde{U}_2 + \mu q_2^2 \tilde{U}_1 = -\rho \omega^2 \tilde{U}_1; \\ &(\lambda + 2\mu) q_2^2 \tilde{U}_2 + \lambda q_2 q_1 \tilde{U}_1 + (\lambda - l) q_2 q_3 \tilde{U}_3 + (\mu - m) q_3 q_2 \tilde{U}_3 + \\ &+ (\mu - m) q_3^2 \tilde{U}_2 + \mu q_1^2 \tilde{U}_2 + \mu q_1 q_2 \tilde{U}_1 = -\rho \omega^2 \tilde{U}_2; \\ &(\lambda + 2\mu - p) q_3^2 \tilde{U}_3 + (\lambda - l) q_3 q_1 \tilde{U}_1 + (\lambda - l) q_3 q_2 \tilde{U}_2 + \\ &+ (\mu - m) q_2^2 \tilde{U}_3 + (\mu - m) q_2 q_3 \tilde{U}_2 + (\mu - m) q_1 q_3 \tilde{U}_1 + \\ &+ (\mu - m) q_1^2 \tilde{U}_3 = -\rho \omega^2 \tilde{U}_3, \end{aligned} \quad (11)$$

т. е. мы здесь все операции дифференцирования произвели под знаком интеграла (10), потом приравняли друг к другу подынтегральные выражения.

Полученные уравнения (11) дальше удобно будет представлять в виде

$$\begin{aligned} a_{11} \tilde{U}_1 + a_{12} \tilde{U}_2 + a_{13} \tilde{U}_3 &= 0; \\ a_{21} \tilde{U}_1 + a_{22} \tilde{U}_2 + a_{23} \tilde{U}_3 &= 0; \\ a_{31} \tilde{U}_1 + a_{32} \tilde{U}_2 + a_{33} \tilde{U}_3 &= 0; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
a_{11}(\lambda + 2\mu)q_1^2 + (\mu - m)q_3^2 + \mu q_2^2 + \rho\omega^2 &\equiv \mathcal{A} + (\lambda + \mu)q_1^2; \\
a_{12} &= (\lambda + \mu)q_1q_2; \quad a_{13} = (\lambda + \mu - m - l)q_1q_3; \\
a_{21} &= (\lambda + \mu)q_1q_2; \quad a_{22} = (\lambda + 2\mu)q_2^2 + (\mu - m)q_3^2 + \mu q_1^2 + \rho\omega^2 = \\
&= \mathcal{A} + (\lambda + \mu)q_2^2, \quad a_{23} = (\lambda + \mu - l - m)q_2q_3; \\
a_{31} &= (\lambda + \mu - l - m)q_1q_3; \quad a_{32} = (\lambda + \mu - l - m)q_2q_3; \\
a_{33} &= \rho\omega^2 + (\mu - m)(q_1^2 + q_2^2) + (\lambda + 2\mu - p)q_3^2; \\
q_r^2 &= q_1^2 + q_2^2, \quad \mathcal{A} = \rho\omega^2 + (\mu - m)q_3^2 + \mu q_r^2.
\end{aligned}$$

2.3. Рассмотрим систему уравнений (12). Условием существования решения $\bar{U}_i \neq 0$ при $i = 1, 2, 3$ является, как известно, равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов a_{kl} системы, т. е.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} = |a_{kl}| &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\
&- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} = 0.
\end{aligned} \tag{13}$$

Число корней этого уравнения, как увидим дальше, определяет количество волн, которые могут существовать в рассматриваемой среде. Способ, позволяющий довольно быстро определить эти корни, состоит в следующем.

Распишем первый член уравнения (13) в виде

$$\begin{aligned}
\text{чл.1} &= a_{11}a_{22}a_{33} = a_{33} [\mathcal{A} + (\lambda + \mu)q_1^2] [\mathcal{A} + (\lambda + \mu)q_2^2] = \\
&= a_{33} [\mathcal{A}^2 + (\lambda + \mu)\mathcal{A}q_r^2 + (\lambda + \mu)^2q_1^2q_2^2], \quad q_r^2 \equiv q_1^2 + q_2^2.
\end{aligned}$$

Возьмем шестой член уравнения (13):

$$\text{чл.6} = -a_{33}(\lambda + \mu)^2q_1^2q_2^2.$$

Следовательно,

$$\text{чл.1} + \text{чл.6} = a_{33} [\mathcal{A} + (\lambda + \mu)q_r^2] \cdot \mathcal{A}.$$

Посмотрим на слагаемые

$$\begin{aligned}
\text{чл.2} + \text{чл.3} &= a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} = \\
&= 2(\lambda + \mu)(\lambda + \mu - l - m)^2q_1^2q_2^2q_3^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{чл.4} &= -a_{13}a_{22}a_{31} = -(\lambda + \mu - l - m)^2 [q_1^2q_3^2\mathcal{A} + \\
&+ (\lambda + \mu)q_1^2q_2^2q_3^2];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{чл.5} &= -a_{11}a_{23}a_{32} = -(\lambda + \mu - l - m)^2 [q_2^2q_3^2\mathcal{A} + \\
&+ (\lambda + \mu)q_1^2q_2^2q_3^2].
\end{aligned}$$

Из этих формул видно, что

$$\text{чл.2} + \dots + \text{чл.5} = -(\lambda + \mu - l - m)^2q_3^2q_r^2 \cdot \mathcal{A}.$$

Поэтому $\mathcal{D} = \text{чл.1} + \dots + \text{чл.6} = \mathcal{A} \cdot \mathfrak{M} = 0$.

Отсюда

$$\mathcal{A} \equiv \rho\omega^2 + (\mu - m)q_3^2 + \mu q_r^2 = 0; \quad (14)$$

$$\mathfrak{M} = a_{33} [\mathcal{A} + (\lambda + \mu)q_r^2] - (\lambda + \mu - l - m)^2 q_r^2 q_3^2 = 0. \quad (15)$$

2.4. Приступим к исследованию уравнений (14), (15).

Рассмотрим сначала уравнение (14). Это уравнение при подстановке $q_r^2 = (jk_r)^2 = -k_r^2 = -(k_1^2 + k_2^2)$, $q_3^2 = -k_3^2$, приобретает вид

$$\mu k_r^2 + (\mu - m)k_3^2 = \rho\omega^2, \quad k_3^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu - m} - \frac{\mu}{\mu - m}k_r^2. \quad (16)$$

Из двух корней $\pm k_3$ физике рассматриваемого процесса отвечает только один, который обозначим через α_1 :

$$\alpha_1 = \begin{cases} + \left(\frac{\rho\omega^2}{\mu - m} - \frac{\mu}{\mu - m}k_r^2 \right)^{1/2}, & \rho\omega^2 \geq \mu k_r^2; \\ j \left(\frac{\mu}{\mu - m}k_r^2 - \frac{\rho\omega^2}{\mu - m} \right)^{1/2}, & \mu k_r^2 > \rho\omega^2. \end{cases} \quad (17)$$

Необходимость именно такого выбора корня становится очевидной, если иметь в виду, что волновым числам k_i можно придавать следующий смысл:

$$k_1 = \frac{\omega}{V_\Phi(\theta)} \sin \theta \cos \varphi; \quad k_2 = \frac{\omega}{V_\Phi(\theta)} \sin \theta \sin \varphi; \\ k_3 = \frac{\omega}{V_\Phi(\theta)} \cos \theta; \quad k_r = \frac{\omega}{V_\Phi(\theta)} \sin \theta, \quad (18)$$

где $V_\Phi(\theta)$ — фазовая скорость волны по направлению θ (по оси z угол $\theta = 0$).

При правильном выборе знака корня (16) экспонента $\exp(-j\omega t + jk_i x_i)$ в подынтегральном выражении (10) при $x_1 = x_2 = 0$, $\theta = 0$ должна иметь вид $\exp[-j\omega(t - z/V_\Phi)]$, т. е. имеем волну, которая по оси z бежит от источника со скоростью $V_\Phi^{(z)}$.

Подставляя $\alpha_1 = V_\Phi^{-1}\omega \cos \theta$ и $k_r = V_\Phi^{-1}\omega \sin \theta$ в первое из равенств (17), получим хорошо известную формулу

$$V_\Phi(\theta) = \left(\frac{\mu - m}{\rho} \right)^{1/2} \left(\cos^2 \theta + \frac{\mu}{\mu - m} \sin^2 \theta \right)^{1/2}, \quad (19)$$

которая описывает зависимость фазовой скорости поперечной SH волны от направления ее распространения, т. е. от угла θ .

Таким образом, волна, соответствующая корню α_1 , в вертикальном и горизонтальном направлениях имеет разные фазовые скорости. В изотропной среде ($m = 0$) эти скорости становятся одинаковыми.

Выше, при выводе формулы (10), указывалось, что волновое число k_i имеет более широкий смысл, чем это выражено формулами (18), что очевидно хотя бы потому, что по формулам (18) переменная k_i может меняться только от $-\omega V_\Phi^{-1}$ до $+\omega V_\Phi^{-1}$,

а в качестве переменной интегрирования в (10) она должна пробегать от $-\infty$ до $+\infty$. Следует заметить, что знаки в (17) выбраны так, что при $\mu k_r^2 > \rho\omega^2$ имеет место

$$\exp(j\alpha_1 z) = \exp\left[-\left(\frac{\mu}{\mu-m} k_r^2 - \frac{\rho\omega^2}{\mu-m}\right)^{1/2}\right],$$

т. е. функция α_1 при $k_r^2 > \rho\omega^2\mu^{-1}$ обеспечивает быстрое затухание подынтегрального выражения (10). Таким образом, при расчетах переменную k_r следует в основном варьировать в пределах от $-(\rho\omega^2\mu^{-1})^{1/2}$ до $+(\rho\omega^2\mu^{-1})^{1/2}$.

Перейдем к рассмотрению уравнения (15). После подстановки в него a_{33} из (12), уравнение (15) выглядит следующим образом:

$$ak_3^4 - bk_3^2 + c = 0, \quad (20)$$

$$a = \lambda_2\mu_2, \quad b = (\lambda_2 + \mu_2)\Omega^2 - k_r^2(2\mu_2\lambda_1 - \varepsilon_1), \quad c = \\ = \Omega^4 - k_r^2\Omega^2(\lambda_1 + \mu_2) + k_r^4\lambda_1\mu_2;$$

$$\lambda_2 = \lambda + 2\mu - p, \quad \mu_2 = \mu - m, \quad \lambda_1 = \lambda + 2\mu, \quad \Omega^2 = \omega^2\rho, \\ \varepsilon_1 = p\lambda_1 + 2m\lambda + l^2 - 2l(\lambda + \mu - m).$$

Отсюда

$$k_3^2 = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad k_3 = \pm \left[\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right]^{1/2}. \quad (21)$$

Из этих четырех корней можно выделить два корня α_2 и α_3 , знаки которых устанавливаются так же, как в (17):

$$\alpha_2 = \left[\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right]^{1/2}; \quad \alpha_3 = \left[\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right]^{1/2}. \quad (22)$$

Определим фазовые скорости волн, которые соответствуют корням α_2 и α_3 . Выше утверждалось, что для волны, идущей в вертикальном направлении, справедливо $k_r^2 = 0$. Как видно из (20), при $\frac{\partial}{\partial r} = 0$ имеет место

$$b = (\lambda_2 + \mu_2)\Omega^2, \quad c = \Omega^4.$$

Подставляя эти значения в (22), получим

$$\alpha_2 = (\Omega^2/\mu_2)^{1/2} = \left(\frac{\omega^2\rho}{\mu-m}\right)^{1/2}; \quad \alpha_3 = \left(\frac{\Omega^2}{\lambda_2}\right)^{1/2} = \left(\frac{\omega^2\rho}{\lambda+2\mu-p}\right)^{1/2}. \quad (23)$$

Отсюда видно, что волны, соответствующие корням α_2 и α_3 , по оси z идут со скоростями

$$V_{S_2}^{(2)} = \left(\frac{\mu-m}{\rho}\right)^{1/2}; \quad V_{P_3}^{(2)} = \left(\frac{\lambda+2\mu-p}{\rho}\right)^{1/2}. \quad (24)$$

Для волны, идущей в горизонтальном направлении, как указывалось, справедливо $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Равенство нулю корней урав-

нения $ax^2 + bx + c = 0$ означает, что $c = 0$. Из (20) видно, что

$$c = k_r^4 \lambda_1 \mu_2 - k_r^2 \Omega^2 (\lambda_1 + \mu) + \Omega^4 = 0. \quad (25)$$

Этот полином разлагается на множители:

$$c = (\lambda_1 k_r^2 - \Omega^2) (k_r^2 - \mu_2^{-1} \Omega^2) = 0. \quad (26)$$

Поэтому

$$(k_r)_S = \left(\frac{\omega^2 \rho}{\mu - m} \right)^{1/2}; \quad (k_r)_P = \left(\frac{\omega^2 \rho}{\lambda + 2\mu} \right)^{1/2}. \quad (27)$$

Отсюда

$$V_{S2}^{(r)} = \left(\frac{\mu - m}{\rho} \right)^{1/2}; \quad V_{P3}^{(r)} = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \right)^{1/2}. \quad (28)$$

Таким образом, волна, соответствующая корню α_2 , в вертикальном и горизонтальном направлениях бежит с одинаковой скоростью $V_{S2} = \rho^{-1/2} (\mu - m)^{1/2}$. В промежуточных направлениях скорость этой волны может отличаться от указанной.

Волна, соответствующая третьему корню α_3 , является продольной, так как в выражение для ее скорости входит λ — модуль, характеризующий сжимаемость среды. Как видно из (24) и (28), эта волна в вертикальном и горизонтальном направлениях распространяется не с одинаковой скоростью.

2.5. Вернемся к четырехкратному интегралу (10). Оказалось, что переменная k_3 в подынтегральном выражении (10) не может считаться независимой, она, оказывается, может принимать лишь вполне определенные значения: $\pm k_3^{(r)}$, $n = 1, 2$ и 3. Известно, что при использовании интегральных преобразований Фурье любую функцию $f(x)$, заданную в точках $x = x_n$, удобно представлять в форме

$$f(x) = \sum_n f(x_n) \delta(x - x_n),$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Удобство состоит в том, что в этом случае к последовательности ординат $f(x_n)$, $n = 1, 2, \dots$, можно применять весь аппарат спектральных представлений, разработанный для непрерывных функций $f(x)$. Мы в формуле (10) уже применили преобразование Фурье к функции $\tilde{U}_i(k_3)$, которая, оказывается, существует лишь в отдельных точках $k_3 = k_3^n$. Поэтому, чтобы преобразование (10) было законным, подынтегральную функцию $f(k_3) = \tilde{U}_i(k_1, k_2, k_3) \exp(\tilde{j} k_3 x_3)$ надо понимать как выражение следующего вида:

$$f(k_3) = \sum_n \tilde{U}_i(k_1, k_2, k_3^{(n)}) e^{\tilde{j} k_3^{(n)} x_3} \delta(k_3 - k_3^{(n)}). \quad (29)$$

При таком представлении подынтегрального выражения (10) переменную k_3 можем считать независимой, она пробегает значения от $-\infty$ до $+\infty$. Вообще говоря, интеграл (10) по k_3 мож-

но взять, так как по определению δ -функции

$$\delta(k_3 - \alpha) = \begin{cases} \infty, & k_3 = \alpha; \\ 0, & k_3 \neq \alpha, \end{cases} \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(k_3 - \alpha) dk_3 = 1. \quad (30)$$

Но, когда возьмем интеграл (10) по dk_3 , подынтегральное выражение в оставшемся трехкратном интеграле существенно усложнится, особенно если это мы бы стали делать на стадии формул (12). Поэтому брать интеграл (10) по dk_3 лучше не торопиться.

2.6. Выше мы выяснили, что корни α_n являются функциями переменной k_r . Эта переменная $k_r^2 = k_1^2 + k_2^2$ при интегрировании (10) должна пробегать значения от 0 до $+\infty$. Поэтому нам недостаточно знать корни α_n только в двух точках (при $k_r = 0$ и $k_r = \omega/V_{p,s}$), а надо иметь формулы для $\alpha_2(k_r)$ и $\alpha_3(k_r)$ при всех k_r , подобные формуле (17) для $\alpha_1(k_r)$. Конечно, используя формулы (22), можно вычислить на ЭВМ значения α_2 и α_3 в отдельных точках $k_r^{(i)}$, а потом построить функции $\alpha_2(k_r)$ и $\alpha_3(k_r)$. Но это не во всех случаях может оказаться удобным. Поэтому ниже приведено описание одного очень простого по идее способа, который может оказаться полезным.

Итак, надо из уравнения $\mathcal{D}(k_r, \alpha_n(k_r)) = 0$ определить функцию $\alpha_n(k_r)$, например $\alpha_3(k_r)$. В точке $k_r = 0$ величина $\alpha_3(k_r)$ известна, обозначим ее через α_0 , а функцию $\alpha_3(k_r)$ представляем в виде

$$\alpha_3^2(k_r) = \alpha_0^2 + x. \quad (31)$$

Разложим функцию $\mathcal{D}(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$. В первом приближении уравнение $\mathcal{D}(x) = 0$ можем представить в виде

$$\mathcal{D}(x) = \mathcal{D}(0) + \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{D}(x)|_{x=0} \cdot x = 0.$$

Отсюда

$$x = -\mathcal{D}(0)/\dot{\mathcal{D}}(0) \text{ и } \alpha_3^2 = \alpha_0^2 + x. \quad (32)$$

Применим этот приближенный способ для нахождения функции $\alpha_1(k_r)$, которую мы знаем точно (см. (17)).

В данном случае в соответствии с (14) рассматриваем уравнение

$$\mathcal{A} = \rho\omega^2 - (\mu - m)\alpha_1^2 - \mu k_r^2 = 0.$$

Обозначив $\alpha_1^2 = \alpha_0^2 + x$, будем иметь $\mathcal{A} = -(\mu - m)$. Поэтому

$$x = -\frac{\mathcal{A}(0)}{\dot{\mathcal{A}}(0)} = \frac{1}{\mu - m} [\rho\omega^2 - (\mu - m)\alpha_0^2 - \mu k_r^2];$$

$$\alpha_1^2 = \alpha_0^2 + x = \frac{\rho\omega^2}{\mu - m} - \frac{\mu}{\mu - m} k_r^2.$$

Сравнивая эту формулу с (17), можем видеть, что вышеописанный приближенный метод дает точное выражение для $\alpha_1(k_r)$.

3. МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Из предыдущего раздела вытекает, что четырехмерный спектр $\tilde{U}_i(k_1, k_2, k_3, \omega)$, фигурирующий в подынтегральном выражении (10), не является функцией от «частоты» k_3 , так как эта «частота» в изотропной среде может принимать только два значения: α_1 и α_3 , а в анизотропной среде — три значения: α_1 , α_2 и α_3 , определяемые формулами (17) и (22). Поэтому указанный четырехмерный спектр должен иметь вид (29), т. е.

$$\tilde{U}_i(k_1, k_2, k_3, \omega) = \sum_{n=1}^3 \tilde{U}_i^{(n)}(k_1, k_2, \alpha_n, \omega) \delta(k_3 - \alpha_n). \quad (33)$$

Нам надо определить $\tilde{U}_i^{(n)}$ при $i = 1, 2, 3$ и $n = 1, 2, 3$, т. е. девять неизвестных функций. Граничные условия (7) дадут нам всего лишь три уравнения. Поэтому, чтобы задача была разрешимой, количество неизвестных надо сократить до трех. Это можно сделать следующим образом.

Представим себе, что из общего волнового поля $U(x, y, z, t)$ нам удалось каким-то образом выделить волну, соответствующую, например, корню α_1 , т. е. поле $U(x, y, z, t, \alpha_1)$. Удовлетворяет ли это поле системе уравнений (11)? Да, конечно. Но тогда мы можем, используя эти уравнения, определить, например, $U_1(\alpha_1)$, $U_2(\alpha_1)$ через $U_3(\alpha_1)$. Так и сделаем.

Для волны α_1 выражение (10) в соответствии с (33) представим в виде

$$U_i(x_1, \alpha_1) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_i(\alpha_1) \delta(k_3 - \alpha_1) e^{-j\omega t + jk_1 x_1} dk_1 dk_2 dk_3 d\omega. \quad (34)$$

Используя это определение, производим все операции дифференцирования, предусмотренные уравнениями движения (5), т. е. получим систему (12) из трех уравнений, каждое из которых стоит под знаком четырехкратного интеграла. После этого интеграл по dk_3 предлагается взять. Тогда указанные уравнения будут находиться под знаком трехкратного интеграла, только в них вместо q_3 надо будет подставить $j\alpha_1$. Далее, приравнивая подынтегральные выражения нулю, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11} \tilde{U}_x^{(n)} + a_{12} \tilde{U}_y^{(n)} + a_{13} \tilde{U}_z^{(n)} &= 0, \\ a_{21} \tilde{U}_x^{(n)} + a_{22} \tilde{U}_y^{(n)} + a_{23} \tilde{U}_z^{(n)} &= 0; \\ a_{31} \tilde{U}_x^{(n)} + a_{32} \tilde{U}_y^{(n)} + a_{33} \tilde{U}_z^{(n)} &= 0, \end{aligned} \quad (35)$$

коэффициенты a_{ik} которой те же, что в (12), только в них вместо q_3 надо подставить $j\alpha_n$. В формулах (35) вместо $U_i^{(1)}$ подставлено $U_i^{(n)}$, так как предполагается, что вышеописанные рассуждения мы выполнили 3 раза: для α_1 , α_2 и α_3 .

Посмотрим на систему (35) для волны α_1 . Величина α_1 является корнем уравнения $\mathcal{A} = 0$ (см. (14), (17)). Поэтому в формулах (35) следует иметь в виду, что

$$a_{11}^{(1)} = -(\lambda + \mu)k_x^2; \quad a_{22}^{(1)} = -(\lambda + \mu)k_y^2; \quad a_{33}^{(1)} = \rho\omega^2 + \\ + (\mu - m)q_r^2 + (\lambda + 2\mu - p)q_3^2 = mk_r^2 - (\lambda + \mu + m - p)\alpha_1^2.$$

Тогда система (35) для рассматриваемой волны будет выглядеть так:

$$k_x \tilde{U}_x^{(1)} + k_y \tilde{U}_y^{(1)} + \frac{\lambda + \mu - l - m}{\lambda + \mu} \cdot \alpha_1 \tilde{U}_z^{(1)} = 0; \\ k_x \tilde{U}_x^{(1)} + k_y \tilde{U}_y^{(1)} + \frac{\lambda + \mu - l - m}{\lambda + \mu} \cdot \alpha_1 \tilde{U}_z^{(1)} = 0; \quad (36) \\ k_x \tilde{U}_x^{(1)} + k_y \tilde{U}_y^{(1)} + \frac{\lambda + \mu + m - p}{\lambda + \mu - l - m} \cdot \alpha_1 \tilde{U}_z^{(1)} = 0.$$

Как видим, первые два уравнения системы (35) для волны α_1 превращаются в одно уравнение. Оставшиеся второе и третье уравнения системы (36) могут совместно существовать только при условии

$$\tilde{U}_z^{(1)} = 0; \quad \tilde{U}_x^{(1)} = -\frac{k_y}{k_x} \tilde{U}_y^{(1)}. \quad (37)$$

Самым любопытным является то, что компонента U_z для волны α_1 , оказывается, равна нулю независимо от типа источника (ведь характеристики источника мы еще не задавали!). Забегая несколько вперед, отметим, что когда параметры анизотропии $l, m, p \rightarrow 0$, волна α_1 превращается в поперечную SH -волну, волна α_2 — в поперечную SV -волну, а волна α_3 — в продольную волну. В связи с этим следует здесь остановиться еще на одном прелюбопытнейшем обстоятельстве.

Спрашивается, как в однородной изотропной среде решается обсуждаемый здесь вопрос, т. е. граничных условий всего лишь три, а искомых неизвестных — шесть: U_{Px}, U_{Py}, U_{Pz} и U_{Sx}, U_{Sy}, U_{Sz} ? Очень просто: предполагается или доказывается, что продольная волна $U_P = \text{grad } \Phi$, а поперечная волна $U_S = \text{rot } \psi$, причем $\psi = \psi_y e_y + \psi_z e_z$, $\psi_x = 0$ (см. [3]). В итоге имеем три неизвестные функции (Φ, ψ_y, ψ_z) и три уравнения — граничные условия. Задача оказывается разрешимой. А почему же в случае анизотропной среды нельзя воспользоваться этим приемом?

И в самом деле, пусть $U^{(1)} = \text{rot } \psi$. Но для любой роторной функции справедливо $\text{div}(\text{rot } \psi) = 0$, т. е. $\text{div } U^{(1)} = 0$, или

$$\frac{\partial}{\partial x} U_x^{(1)} + \frac{\partial}{\partial y} U_y^{(1)} + \frac{\partial}{\partial z} U_z^{(1)} = 0.$$

Отсюда

$$k_x \tilde{U}_x^{(1)} + k_y \tilde{U}_y^{(1)} + \alpha_1 \tilde{U}_z^{(1)} = 0. \quad (38)$$

Другими словами, если бы было допустимо, что $U^{(1)} = \text{rot } \psi$, то

уравнения (36) должны превратиться в одно уравнение (38). Из (36) видно, что эти три уравнения превратятся в одно уравнение только в случае $l = m = p = 0$. Следовательно, $U^{(1)} \neq \text{rot } \psi$.

Перейдем к рассмотрению волн α_2 и α_3 . Компоненты U_x и U_y этих волн выразим через U_z , используя первые два уравнения системы (35):

$$\begin{aligned} \tilde{U}_x^{(2,3)} &= \frac{a_{12}a_{23} - a_{13}a_{23}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \tilde{U}_z^{(2,3)} = \frac{vk_x\alpha_{2,3}}{B_{2,3}} \tilde{U}_z^{(2,3)}, \\ \tilde{U}_y^{(2,3)} &= \frac{vk_y\alpha_{2,3}}{B_{2,3}} \tilde{U}_z^{(2,3)}, \quad v \equiv \lambda + \mu - l - m; \end{aligned} \quad (39)$$

$$B_{2,3} = \mathcal{A}_{2,3} - (\lambda + \mu)k_r^2 \equiv \omega^2\rho - (\lambda + 2\mu)k_r^2 - (\mu - m)\alpha_{2,3}.$$

Можно показать, что третье уравнение системы (35) не противоречит этим формулам. Выше говорилось, что при $l, m, p \rightarrow 0$ волна α_2 превращается в поперечную SV -волну, а волна α_3 — в продольную волну. При этом выражения (39) для волны α_3 трансформируются в формулы

$$\tilde{U}_{Px} = k_x p_z^{-1} \tilde{U}_{Pz}; \quad \tilde{U}_{Py} = k_y p_z^{-1} \tilde{U}_{Pz}, \quad p_z = \left(\frac{\omega^2}{V_P^2} - k_r^2 \right)^{1/2},$$

полученные в [3].

Здесь напрашивается следующий вопрос: могли бы мы в случае изотропной среды решить данную задачу описываемым способом, т. е. не используя потенциалы Φ и ψ ? Ведь в этом случае $\alpha_1 = \alpha_2$, и две системы (35) для волн α_1 и α_2 превратились бы в одно единственное уравнение.

Ответ таков: компоненты U_{Px} и U_{Py} продольной волны мы бы выразили через U_{Pz} по формуле (39), а для поперечной волны воспользовались бы уравнением (38) и компоненту U_{sx} выразили бы через U_{sy} и U_{sz} . В результате мы будем иметь три неизвестных (\tilde{U}_{Pz} , \tilde{U}_{sy} и \tilde{U}_{sz}) и три граничных условия. Как видим, задача решается и без потенциалов Φ и ψ .

Теперь можем подойти к рассмотрению граничных условий (7). Нам надо, чтобы в граничных условиях (7) слева и справа от знака равенства стояли одинаковые интегральные преобразования (чтобы можно было приравнять друг к другу подынтегральные выражения).

В соответствии с формулами (10), (29) и (34) функции \tilde{U}_i^n имеют следующий смысл:

$$\begin{aligned} U_i^{(n)}(x, y, z, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_i^{(n)}(k_x, k_y, \alpha_n, \omega) e^{\varphi} dk_x dk_y d\omega, \quad (40) \\ \varphi &\equiv -i\omega t + j(k_x x + k_y y + k_z z). \end{aligned}$$

Поэтому плотность силы источника в граничных условиях (7)

целесообразно представлять в виде:

$$\mathcal{F}_i(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_i(k_x, k_y, \omega) e^{-j\omega t + jk_x x + jk_y y} dk_x dk_y d\omega. \quad (41)$$

Первое из условий (7) надо теперь понимать так:

$$\tau_{zx} = (\mu - m) \left[\frac{\partial}{\partial z} \sum_{n=1}^3 U_x^{(n)} + \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=1}^3 U_z^{(n)} \right]_{z=0} = \mathcal{F}_x(x, y, t).$$

Подставляя сюда (40) и (41), получим

$$\tilde{\tau}_{zx} = (\mu - m) \left[\sum_n j\alpha_n \tilde{U}_x^{(n)} + jk_x \sum_n \tilde{U}_z^{(n)} \right] = T_x(k_x, k_y, \omega). \quad (42)$$

Второе и третье условия (7) расписываются аналогично:

$$\tilde{\tau}_{zy} = (\mu - m) \sum_n (jk_y \tilde{U}_z^{(n)} + j\alpha_n \tilde{U}_y^{(n)}) = T_y(k_x, k_y, \omega);$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{zz} &= (\lambda + 2\mu - p) \sum_n j\alpha_n \tilde{U}_z^{(n)} + (\lambda - l) \sum_n (jk_x \tilde{U}_x^{(n)} + jk_y \tilde{U}_y^{(n)}) = \\ &= T_z(k_x, k_y, \omega). \end{aligned} \quad (43)$$

Из системы уравнений (42), (43) нам надо определить девять неизвестных функций $\tilde{U}_i^{(n)}$, $i = 1, 2, 3$ и $n = 1, 2, 3$. Используя формулы (37) и (39), количество неизвестных сокращаем до трех, в результате чего получаем следующую систему:

$$\begin{aligned} b_{11} \tilde{U}_y^{(1)} + b_{12} \tilde{U}_z^{(2)} + b_{13} \tilde{U}_z^{(3)} &= \frac{T_x}{j(\mu - m)}; \\ b_{21} \tilde{U}_y^{(1)} + b_{22} \tilde{U}_z^{(2)} + b_{23} \tilde{U}_z^{(3)} &= \frac{T_y}{j(\mu - m)}; \\ b_{31} \tilde{U}_y^{(1)} + b_{32} \tilde{U}_z^{(2)} + b_{33} \tilde{U}_z^{(3)} &= \frac{T_z}{j(\lambda + 2\mu - p)}; \end{aligned} \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} b_{11} &= -\frac{k_y}{k_x} \alpha_1; & b_{12} &= \frac{k_x}{B_2} (B_2 + \nu \alpha_2^2); & b_{13} &= \frac{k_x}{B_3} (B_3 + \nu \alpha_3^2); \\ b_{21} &= \alpha_1; & b_{22} &= \frac{k_y}{B_2} (B_2 + \nu \alpha_2^2); & b_{23} &= \frac{k_y}{B_3} (B_3 + \nu \alpha_3^2); \\ b_{31} &= 0; & b_{32} &= \frac{\alpha_2}{B_2} (B_2 + \gamma_2 \nu k_r^2); & b_{33} &= \frac{\alpha_3}{B_3} (B_3 + \gamma_2 \nu k_r^2); \\ \gamma_2 &\equiv \frac{\lambda - l}{\lambda + 2\mu - p}; & \nu &\equiv \lambda + \mu - l - m. \end{aligned}$$

Решение этой системы запишем в виде

$$\tilde{U}_y^{(1)} = \frac{\mathcal{D}_1}{\mathcal{D}_0}; \quad \tilde{U}_z^{(2)} = \frac{\mathcal{D}_2}{\mathcal{D}_0}; \quad \tilde{U}_z^{(3)} = \frac{\mathcal{D}_3}{\mathcal{D}_0}, \quad (45)$$

где \mathcal{D}_0 — определитель системы (44), \mathcal{D}_i — определитель, получающийся из $\{b_{ik}\}$ заменой i -го столбца столбцом свободных членов.

Задача в принципе решена. Вспоминая использованные обозначения, можно теперь компоненты искомого поля смещения написать в виде интегралов типа (40), в которые будут входить лишь известные величины и функции. Дальше будем заниматься приведением формул (45) к «рабочему» виду. Для машинного счета волнового поля в ближней зоне источника получаемые дальше «рабочие» формулы, по-видимому, не имеют особых преимуществ по сравнению с (45). Они нужны главным образом для получения асимптотических формул (см. (60) — (74)), описывающих волновое поле в дальней зоне.

Итак, нам надо формулы (44) и (45) привести к «рабочему» виду.

В связи с тем что в системе уравнений (44) коэффициент $b_{31} = 0$, определитель системы \mathcal{D}_0 имеет четыре члена:

$$\mathcal{D}_0 = b_{11}b_{22}b_{33} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{13}b_{21}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33}. \quad (46)$$

Слагаемые этого выражения целесообразно рассматривать попарно:

$$\begin{aligned} b_{11}b_{22}b_{33} - b_{11}b_{23}b_{32} &= b_{11} \frac{k_y}{B_2 B_3} \mathcal{D}_{Ra}; \\ -b_{13}b_{21}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33} &= -b_{21} \frac{k_x}{B_2 B_3} \mathcal{D}_{Ra}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\mathcal{D}_0 = -\frac{\alpha_1}{k_x B_2 B_3} k_r^2 \mathcal{D}_{Ra}, \quad (47)$$

$$\mathcal{D}_{Ra} = \alpha_3 (R_3 + \nu \alpha_2^2) (B_3 + \gamma_1 \nu k_r^2) - \alpha_2 (B_3 + \nu \alpha_3^2) (B_2 + \nu \gamma_1 k_r^2).$$

Аналогичным образом определяем функции \mathcal{D}_i и по формулам (45) находим компоненты $\tilde{U}_y^{(1)}$, $\tilde{U}_z^{(2)}$ и $\tilde{U}_z^{(3)}$ векторов смещений. Дальше по формулам (37) и (39) определяем все компоненты смещений. Получаемые формулы представлены для удобства обозрения в табличной форме (табл. 2).

При всех расчетах свойства анизотропной среды целесообразно сопоставлять с соответствующими характеристиками изотропной среды. Для изотропной среды ($l, m, p \rightarrow 0$) необходимые формулы приведены в строке 11 табл. 2. Подставляя эти формулы в соответствующие выражения, приведенные в табл. 2, получим компоненты $U_i^{(n)}$ смещения для изотропной среды: знаменатель Рэлея для изотропной среды обозначен через \mathcal{D}_{Ri} . Функцию \mathcal{D}_{Ra} , фигурирующую в табл. 2, можем называть знаменателем Рэлея для анизотропной среды.

Для изотропной среды задача, подобная описываемой, рассматривалась в работе [3] для случаев $T_x \neq 0$, $T_z \neq 0$, $T_y = 0$. Полученные там формулы можно привести к такому же виду, как они записаны в строках 2, 6 и 9 таблицы, можно и наоборот, фор-

Формулы, определяющие смещение точек среды для волн $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

1	$U_i^{(n)}(x, y, z, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_i^{(n)} e^{j(k_x x + k_y y + \alpha_n z)} dk_x dk_y,$ $U_i^{(n)}(r, \varphi, z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \tilde{U}_i^{(n)} e^{j\alpha_n z} k dk$
2	$\tilde{U}_x^{(1)} = -\frac{k_y}{k_x} \tilde{U}_y^{(1)}; \quad \tilde{U}_y^{(1)} = \frac{1}{\alpha_1} \left(t_x \frac{k_x k_y}{k^2} - t_y \frac{k_x^2}{k^2} \right); \quad \tilde{U}_z^{(1)} = 0; \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2$
3	$\frac{k_x^2}{k^2} \rightarrow 2^{-1} J_0(kr) - 2^{-1} J_2(kr) \cos 2\varphi; \quad \frac{k_x k_y}{k^2} \rightarrow -2^{-1} J_2 \sin 2\varphi;$ $\frac{k_y^2}{k^2} \rightarrow 2^{-1} J_0 + 2^{-1} J_2 \cos 2\varphi;$ $\frac{k_x}{k} \rightarrow j J_1(kr) \cos \varphi; \quad \frac{k_y}{k} \rightarrow j J_1(kr) \sin \varphi; \quad 1 \rightarrow J_0(kr)$
4	$\tilde{U}_x^{(1)} = \frac{1}{2\alpha_1} \{ -t_x [J_0(kr) - J_2(kr) \cos 2\varphi] - t_y J_2(kr) \sin 2\varphi \};$ $\tilde{U}_y^{(1)} = \frac{1}{2\alpha_1} \{ -t_x J_2 \sin 2\varphi - t_y (J_0 - J_2 \cos 2\varphi) \};$ $\alpha_1 = \left(\frac{\rho \omega^2}{\mu - m} - \frac{\mu}{\mu - m} k^2 \right)^{1/2}$
5	$U_x^{(1)}(R, \theta, \varphi, \omega) = L^{(1)} (-t_x 2 \sin^2 \varphi + t_y \sin 2\varphi);$ $L^{(1)} = -j (4\pi R \gamma_1 C)^{-1} \exp [j f_1(k_0) R]; \quad \gamma_1^2 = (\mu - m)^{-1} \mu;$ $C^2 = \gamma_1^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta;$ $U_y^{(1)}(R, \theta, \varphi, \omega) = L^{(1)} (t_x \sin 2\varphi - t_y 2 \cos^2 \varphi); \quad k_0 = C^{-1} S_0 \sin \theta;$ $S_0^2 = \mu^{-1} \rho \omega^2 = \omega^2 V_s^{-2}$
6	$\tilde{U}_z^{(2)} = b_2 \left(t_x C_2 \frac{k_x}{k} + t_y C_2 \frac{k_y}{k} - t_z \varepsilon_2 \right) k^{-1}; \quad \left \quad b_2 = B_2 \mathcal{D}_{Ra}^{-1}; \quad C_2 = \alpha_3 Q_1; \right.$ $\tilde{U}_x^{(2)} = \frac{\nu \alpha_2}{B_2} k_x \tilde{U}_z^{(2)}; \quad \tilde{U}_y^{(2)} = \frac{\nu \alpha_2}{B_2} k_y \tilde{U}_z^{(2)}; \quad \left. \varepsilon_2 = k Q_2; \quad \nu = \lambda + \mu - l - m. \right.$ <p style="text-align: center;">При $l, m, p \rightarrow 0$: $\nu \alpha_2 B_2^{-1} = -s_2 k^{-2}$;</p> $\tilde{U}_z^{(2)} = \frac{j}{\mu D_{Ri}} [(k_x T_x + k_y T_y) B - 2k^2 p_z T_z]$

7	$\begin{aligned} \tilde{U}_z^{(2)} &= b_2 k^{-1} [t_x C_2 j J_1(kr) \cos \varphi + t_y C_2 j J_1(kr) \sin \varphi - t_z \varepsilon_2 J_0(kr)]; \\ \tilde{U}_x^{(2)} &= a_2 [t_x C_2 2^{-1} (J_0 - J_2 \cos 2\varphi) - t_y C_2 2^{-1} J_2 \sin 2\varphi - t_z \varepsilon_2 j J_1 \cos \varphi]; \\ \tilde{U}_y^{(2)} &= a_2 [t_x C_2 (-2^{-1}) J_2 \sin 2\varphi + t_y C_2 2^{-1} (J_0 + J_2 \cos 2\varphi) - \\ &\quad - t_z \varepsilon_2 j J_1 \sin \varphi]; \quad a_2 = \frac{\nu \alpha_2}{B_2} b_2 \end{aligned}$
8	$\begin{aligned} U_z^{(2)}(R, \theta, \varphi, \omega) &\approx b_2(k_0) k_0^{-1} [t_x(k_0) C_2(k_0) \cos \varphi + \\ &\quad + t_y(k_0) C_2(k_0) \sin \varphi - t_z(k_0) \varepsilon_2(k_0)] \cdot L^{(2)}; \\ U_x^{(2)} &\approx a_2(k_0) [t_x(k_0) C_2(k_0) \cos^2 \varphi + t_y(k_0) C_2(k_0) 2^{-1} \sin 2\varphi - \\ &\quad - t_z(k_0) \varepsilon_2(k_0) \cos \varphi] \cdot L^{(2)}; \\ U_y^{(2)} &\approx a_2(k_0) [t_x(k_0) C_2(k_0) 2^{-1} \sin 2\varphi + t_y(k_0) C_2(k_0) \sin^2 \varphi - \\ &\quad - t_z(k_0) \varepsilon_2(k_0) \sin \varphi] \cdot L^{(2)}; \\ L^{(2)} &= \frac{k_0^{1/2}}{2\pi R} [\ddot{f}_2(k_0) \sin \theta]^{-1/2} \cdot \exp[(j f_2(k_0) R)] \end{aligned}$
9	$\begin{aligned} \tilde{U}_z^{(3)} &= b_3 \left(t_x C_3 \frac{k_x}{k} + t_y C_3 \frac{k_y}{k} - t_z \varepsilon_3 \right) k^{-1}; \quad b_3 = B_3 \mathcal{D}_{Ra}^{-1}; \quad C_3 = \alpha_2 Q_3; \\ \tilde{U}_x^{(3)} &= \frac{\nu \alpha_3}{B_3} k_x \tilde{U}_z^{(3)}; \quad \tilde{U}_y^{(3)} = \frac{\nu \alpha_3}{B_3} k_y \tilde{U}_z^{(3)}; \quad \varepsilon_3 = k Q_4. \end{aligned}$ <p>При $l, m, p \rightarrow 0$: $\nu \alpha_3 B_3^{-1} = p_z^{-1}$; $\tilde{U}_z^{(3)} = (j \mu \mathcal{D}_{Ri})^{-1} [2 p_z \varepsilon_z (k_x T_x + k_y T_y) + B p_z T_z]$</p>
10	$\begin{aligned} t_x &= j(\mu - m)^{-1} T_x(k); \quad t_y = j(\mu - m)^{-1} T_y(k); \\ t_z &= j(\lambda + 2\mu - p)^{-1} T_z(k); \quad Q_1 = B_3 + \gamma_2 \nu k^2; \\ Q_2 &= B_3 + \nu \alpha_3^2; \quad Q_3 = B_2 + \gamma_2 \nu k^2; \quad Q_4 = B_2 + \nu \alpha_2^2; \\ B_{2,3} &= \omega^2 \rho - (\lambda + 2\mu) k^2 - (\mu - m) \alpha_{2,3}^2; \\ \mathcal{D}_{Ra} &= \alpha_3 Q_1 Q_4 - \alpha_2 Q_2 Q_3; \quad \nu = \lambda + \mu - l - m; \\ \gamma_2 &= (\lambda - l)(\lambda + 2\mu - p)^{-1}; \\ f_n(k) &= \alpha_n(k) \cos \theta + k \sin \theta; \quad \frac{\partial}{\partial k} f_n(k) _{k=k_0} = 0; \\ \ddot{f}_n(k_0) &= \frac{\partial^2}{\partial k^2} f_n(k) _{k=k_0} \end{aligned}$

11	При $l, m, p \rightarrow 0$: $\alpha_1 = \alpha_2 = (s_0^2 - k^2)^{1/2} \equiv s_z$; $\alpha_3 = (p_0^2 - k^2)^{1/2} \equiv p_z$; $s_0 = \frac{\omega}{V_S}$; $p_0 = \frac{\omega}{V_P}$; $B_2 = -(\lambda + \mu) k^2$; $B_3 = (\lambda + \mu) p_z^2$; $Q_1 = (\lambda + \mu) \gamma^2 B$; $Q_2 = 2(\lambda + \mu) p_z^2$; $Q_3 = -(\lambda + \mu) 2\gamma^2 k^2$; $Q_4 = (\lambda + \mu) B$; $B = s_0^2 - 2k^2$; $\mathcal{D}_{Ra} = \gamma^2 (\lambda + \mu)^2 p_z \mathcal{D}_{Ri}$; $\mathcal{D}_{Ri} = B^2 + 4k^2 p_z s_z$; $\gamma = \frac{V_S}{V_P}$; $V_S^2 = \rho^{-1} \mu$; $V_P^2 = \rho^{-1} (\lambda + 2\mu)$
----	--

мулы указанных строк преобразовать так, чтобы они совпали с формулами в [3].

Любопытно отметить, что в [3] формулы для поперечной волны имеют весьма громоздкий вид, т. е. они по сравнению с формулами табл. 2 менее «красивы». Теперь становится понятно, что громоздкость формул в [3] является следствием того, что там мы рассматривали только изотропную среду и под поперечной волной понимали сумму $U^{(1)} + U^{(2)}$, т. е. складывали две волны, имеющие неодинаковую природу. Отсюда можно сделать следующий вывод: в изотропной среде волны $U^{(1)}$ и $U^{(2)}$ целесообразно рассматривать отдельно, хотя они имеют одинаковую скорость распространения.

4. ПРИВЕДЕНИЕ ДВУКРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ К ОДНОКРАТНОМУ ИНТЕГРАЛУ ФУРЬЕ — БЕССЕЛЯ

Наши дальнейшие действия будут таковы. В этом разделе покажем, что двукратный интеграл Фурье, записанный в строке 1 табл. 1, всегда (по крайней мере, во всех рассматриваемых нами случаях) преобразуется в однократный интеграл Фурье — Бесселя, также записанный в строке 1. Потом, в следующем разделе, этот однократный интеграл возьмем в асимптотическом приближении для точек, расположенных вдали от источника. Дальше займемся рассмотрением частных случаев.

Напомним, что формулами Фурье — Бесселя называется следующая пара интегралов:

$$f(r) = \int_0^{\infty} F(k) J_n(kr) k dk;$$

$$F(k) = \int_0^{\infty} f(r) J_n(kr) r dr. \quad (48)$$

Такие преобразования существуют или законны, если функция удовлетворяет условиям Дирихле и, кроме того, интеграл

$$\int_0^{\infty} |f(r)| r dr \quad (49)$$

сходится (существует). Выше говорилось (см. формулы (8) и (9)), что реальное поле смещения в сейсмических процессах всегда удовлетворяет этим условиям, поэтому возможность использования преобразования (48) не вызывает сомнения. Индекс n функции Бесселя $J_n(kr)$ в преобразованиях (48) может быть выбран любым. В наших формулах, как покажем дальше, величина n будет получаться автоматически.

Итак, сначала занимаемся функциями $\widetilde{U}_i^{(n)}(k_x, k_y)$, которые приведены в строках 2, 6 и 9 табл. 2. Как видно из этих формул, указанные функции представляют собой сумму вида

$$\widetilde{U}_i^{(n)} = \sum_{l=1}^3 t_l N_l(k_r, \alpha_n) \left(\frac{k_x}{k_r}\right)^q \cdot \left(\frac{k_y}{k_r}\right)^p. \quad (50)$$

Здесь для нас существенно то, что N_l является функцией переменной $k_r = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$, т. е. переменные k_x и k_y в N_l по отдельности не входят. Таким же свойством обладает функция α_n , что видно из формул (14), (15) и (17) — (22). Это, как увидим дальше, существенно упрощает преобразование двукратного интеграла Фурье в однократный интеграл Фурье — Бесселя. Предполагается, что частотная характеристика $t_l \equiv aT_l(k_x, k_y)$ тоже является функцией k_r , т. е. $t_l(k_r)$. В [3] показано, что такое предположение не очень ограничивает выбор источников.

Имея в виду эти соображения, рассмотрим двукратный интеграл Фурье от одного из слагаемых суммы (50):

$$U_{il}^{(n)}(x, y, z, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} t_l(k_r) N_{il}^{(n)}(k_r) \left(\frac{k_x}{k_r}\right)^q \left(\frac{k_y}{k_r}\right)^p e^{i\varphi} dk_x dk_y, \quad (51)$$

$$\varphi \equiv j(k_x x + k_y y + \alpha_n z).$$

Следуя [3], произведем в (51) замену переменных интегрирования по формулам

$$\begin{aligned} k_x &= k_r \cos \psi, \quad k_y = k_r \sin \psi, \quad dk_x dk_y = k_r dk_r d\psi, \\ x &= r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (52)$$

Тогда интеграл (51) будет выглядеть следующим образом:

$$U_{il}^{(n)}(x, y, z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} t_l N_{il}^{(n)} e^{j\alpha_n z} C(k_r, r) k_r dk_r; \quad (53)$$

$$\begin{aligned}
 C(k_r r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \cos^q \psi \sin^p \psi e^{jk_r r \cos(\psi-\varphi)} d\psi = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^q(\psi' + \varphi) \sin^p(\psi' + \varphi) e^{jk_r r \cos \psi'} d\psi'. \quad (54)
 \end{aligned}$$

Чтобы взять интеграл (54), надо вспомнить следующие положения математики. Известно, что

$$\begin{aligned}
 \cos(\mu \cos \theta) &= J_0(\mu) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i J_{2i}(\mu) \cos 2i\mu; \\
 \sin(\mu \cos \theta) &= -2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i J_{2i-1}(\mu) \cos(2i-1)\mu.
 \end{aligned} \quad (55)$$

Кроме того,

$$\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \cos n\mu \cos l\mu d\mu = \begin{cases} 2\pi, & n = l = 0; \\ \pi, & n = l \neq 0; \\ 0, & n \neq l, \end{cases} \quad (56)$$

$$\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \sin n\mu \cos l\mu d\mu = 0,$$

где n и l — любые целые числа. Справедливость формул (56) доказывается путем подстановки в эти интегралы выражений $\cos \alpha \cos \beta = 2^{-1} \cos(\alpha - \beta) + 2^{-1} \cos(\alpha + \beta)$; $\sin \alpha \cos \beta = 2^{-1} \sin(\alpha - \beta) + 2^{-1} \sin(\alpha + \beta)$. При интегрировании результат, отличный от нуля, дает единственный член, $2^{-1} \cos(\alpha - \beta)$, и то только в том случае, когда $\alpha = \beta$.

Чтобы взять интеграл (54), надо, очевидно, подынтегральное выражение подвести под действие формул (56). Пусть, например, $q = 2$ и $p = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
 \cos^2(\psi + \varphi) &= 2^{-1} [1 + \cos(2\psi + 2\varphi)] = \\
 &= 2^{-1} (1 + \cos 2\psi \cos 2\varphi - \sin 2\psi \sin 2\varphi). \quad (57)
 \end{aligned}$$

Экспоненту в (54) представляем в виде

$$\exp(jk_r r \cos \psi) = \cos(k_r r \cos \psi) + j \sin(k_r r \cos \psi)$$

и разлагаем в ряды (55). Далее эти ряды умножаем на (57) и полученные произведения рассматриваем с учетом формул (56). При этом можно увидеть, что

$$\begin{aligned}
 C(k_r r)_{q=2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(\psi' + \varphi) e^{jk_r r \cos \psi'} d\psi' = \\
 &= 2^{-1} [J_0(k_r r) - J_2(k_r r) \cos 2\varphi]. \quad (58)
 \end{aligned}$$

Этот результат можем записать в виде

$$\frac{k_x^2}{k_r^2} = \cos^2 \psi = 2^{-1} [1 + \cos(2\psi' + 2\varphi)] \rightarrow 2^{-1} (J_0 - J_2 \cos 2\varphi). \quad (59)$$

Аналогичным образом имеем

$$\frac{k_y^2}{k_r^2} = \sin^2 \psi = 2^{-1} [1 - \cos(2\psi' + 2\varphi)] \rightarrow 2^{-1} (J_0 + J_2 \cos 2\varphi).$$

Полученные таким образом переходы приведены в строке 3 табл. 2.

Теперь, глядя на формулы для $\tilde{U}_i^{(n)}(k_x, k_y)$, можем сразу написать соответствующие формулы для $\tilde{\tilde{U}}_i^{(n)}(k_r, \varphi)$, т. е. формулы, записанные в строках 2 и 6 табл. 2, переписываем в строках 4 и 7 с учетом соотношений, приведенных в строке 3. (Как раз для этого, т. е. для удобства выполнения описываемой процедуры, рассматриваемые формулы и представлены в табличной форме). Заметим, что для волны α_3 в табл. 2 приведены лишь формулы $\tilde{U}_i^{(3)}(k_x, k_y)$, а формулы $\tilde{\tilde{U}}_i$ не записаны, так как переход $\tilde{U}_i^{(3)} \rightarrow \tilde{\tilde{U}}_i^{(3)}$ осуществляется точно так же, как при преобразовании строки 6 в строку 7.

5. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ВОЛНОВОЕ ПОЛЕ СМЕЩЕНИЯ ВДАЛИ ОТ ИСТОЧНИКА

Из формул, приведенных в строках 4 и 7 табл. 2, видно, что после перехода от двукратных интегралов к однократным интегралам Фурье — Бесселя компоненты смещения волны α_n при использовании источника t_i определяются формулой типа

$$U_{il}^{(n)}(r, z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} t_i N_{il}^{(n)} t^{j\alpha_n z} J_\nu(kr) k dk. \quad (60)$$

Ниже приведено описание способа, позволяющего взять интеграл (60), когда точка наблюдения находится далеко от источника. В дальней зоне интересующее нас поле смещения удобно рассматривать по направлениям, т. е. в сферической системе координат (R, θ, φ) . Поэтому в подынтегральное выражение в (60) следует подставить $z = R \cos \theta$, $r = R \sin \theta$. Тогда процесс вычисления интегралов (60) можно представить следующим образом: задано какое-то направление $\theta = \theta_3$, $\varphi = \varphi_3$ и в этом направлении требуется найти величину смещения $U_{il}^{(n)}(R, \theta, \varphi, \omega)$ на различных расстояниях R .

В этой работе мы не будем останавливаться на рассмотрении поверхностной волны. Поверхностная волна (волна Рэлея), как известно, «возникает» из формул (60) за счет резкого выброса

функции $N_{il}^{(n)}$ в окрестности точки $k = k_R$, где знаменатель Рэлея (47) равен нулю. Здесь мы будем интересоваться только объемными волнами (α_1 , α_2 и α_3), которые «рождаются» из (60) из-за поведения осциллирующих множителей $J_\nu(kr)$ и $\exp(j\alpha_n z)$. Причем, когда мы занимаемся выделением этих осциллирующих компонент, функцию $N_{il}^{(n)}$ можем считать плавной, ее выбросами и флуктуацией можем пренебречь [3].

Сначала рассмотрим случай, когда $|kr| \gg 1$. В этом случае функция Бесселя выражается формулой

$$J_\nu(kr) \approx \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} \cos \eta = M(kr) \cdot (e^{j\eta} + e^{-j\eta}), \quad (61)$$

$$\eta \equiv kr - 2^{-1}\nu\pi - 2^{-2}\pi, \quad M(kr) = (2\pi kr)^{-1/2}. \quad (62)$$

При подстановке этой формулы в (60) интеграл в (60) станет суммой двух интегралов. Сначала сосредоточим внимание на рассмотрении первого из этих интегралов, в котором стоит экспонента $\exp(j\eta)$.

В подынтегральном выражении (60) теперь будет фигурировать экспонента $\exp[j\alpha_n(k)z + jkr]$. Подставив туда $z = R \cos \theta$ и $r = R \sin \theta$, будем иметь

$$\begin{aligned} \alpha_n(k)z + kr &= R \cdot f(k), \\ f(k) &= \alpha_n(k) \cos \theta + k \sin \theta. \end{aligned} \quad (63)$$

Поскольку предполагается, что функции $t_l(k)$ и $N_{il}^{(n)}(k)$, стоящие в подынтегральном выражении (60), очень плавные, то основной вклад в величину интеграла дадут те участки, на которых функция $\exp[jf(k, \theta)R]$ почти постоянна или слабо осциллирует. Центры таких участков найдем как «частоты» k_0 , при которых

$$\frac{\partial}{\partial k} f(k, \theta) |_{k=k_0} = 0. \quad (64)$$

Рассмотрим один из таких участков. На этом участке в окрестности «частоты» k_0 функцию $f(k, \theta)$ разложим в ряд Тейлора

$$f(k) = f(k_0) + (k - k_0) f'(k_0) + 2^{-1}(k - k_0)^2 f''(k_0) + \dots \quad (65)$$

и ограничимся тремя членами этого ряда. Учитывая, что $f'(k_0) = 0$, формулу (60) можем записать в виде

$$U_{il}^{(n)} \approx \frac{I_\nu}{2\pi} e^{jf(k_0)R} \int_0^\infty t_l N_{il}^{(n)} M e^{j2^{-1}(k-k_0)^2 f''(k_0)R} k dk, \quad (66)$$

где $I_\nu = \exp(-j\pi\nu/2 - j\pi/4)$.

Во втором интеграле, где будет стоять $\exp(-j\eta)$, условие (64) выполняется на «частоте» $k = -|k_0|$. Эта «частота» находится вне интервала интегрирования в (66). Поэтому второй интеграл мо-

жем отбросить, так как он даст величину, намного меньшую, чем первый. Дальше используется табличный интеграл

$$I_R = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jax^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{jax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{j\pi/4}. \quad (67)$$

Чтобы подвести выражение (66) под действие формулы (67), следует предположить, что функция $t_l N_{il}^{(n)} M k$ настолько полагая, что в пределах эффективной ширины интегрирования ее можно считать постоянной, равной $t_l(k_0) N(k_0) M(k_0) k_0$, и вынести за знак интеграла. Тогда

$$U_{il}^{(n)} \approx I_{\nu} t_l(k_0) N_{il}^{(n)}(k_0) M(k_0) k_0 e^{j f(k_0) R} \cdot I'_R, \\ I'_R = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{j2^{-1}(k-k_0)^2 j(k_0) R} dk. \quad (68)$$

Переменную интегрирования заменяем по формуле $k - k_0 = x$ и, полагая, что точка k_0 находится не очень близко к точке $k = 0$, нижний предел интегрирования расширяем до $-\infty$. Тогда, используя табличный интеграл (67), получим

$$U_{il}^{(n)} \approx I_{\nu} \cdot t_l(k_0) N_{il}^{(n)}(k_0) M(k_0) \cdot \frac{k_0}{(2\pi R j(k_0))^{1/2}} e^{j f(k_0) R + j\pi/4}.$$

Подставим сюда из (62) функцию

$$M(k_0) = (2\pi k_0 r)^{-1/2} = (2\pi k_0 R \sin \theta)^{-1/2}.$$

Тогда

$$U_{il}^{(n)} \approx I_{\nu} t_l(k_0) N_{il}^{(n)}(k_0) \cdot \frac{1}{2\pi R} \cdot \left(\frac{k_0}{j(k_0) \sin \theta} \right)^{1/2} \cdot e^{j f(k_0) R + j\pi/4}. \quad (69)$$

Задача решена, интеграл взят. Очевидно, при необходимости можно повысить точность вычисления этого интеграла, учитывая последующие члены ряда (65), а также можно учесть наклон подынтегральной функции при переходе от формулы (66) к (68) и т. д.

Расчетные формулы, полученные вышеописанным способом для волн α_1 и α_2 при использовании источника $t_l = t_x, t_y$ и t_z , приведены в табл. 2 в строках 5 и 8. Для волны α_3 расчетные формулы имеют такой же вид, как и для α_2 , но только вместо $\tilde{U}_i^{(2)}$ надо использовать формулы $\tilde{U}_i^{(3)}$, приведенные в строке 9 табл. 2.

А как взять интеграл (60) при $kr \approx 0$? Заметим, что в изотропной среде асимптотические формулы, полученные вышеописанным способом, дают правильные результаты даже при $\theta \rightarrow 0$ [3]. Можно ли это делать в анизотропных средах — пока неизвестно. Поэтому для случая $\theta = 0$ ($r = 0$) целесообразно вывести

отдельную формулу, не связанную с (69). Это можно сделать следующим образом.

Прежде всего обратим внимание на физический смысл функции $f(k_0)$, фигурирующей в экспоненте выражения (69). Функция $f(k_0)$ имеет размерность волнового числа, поэтому ее можно представить как $f(k_0) = \omega/V_{\pi}(\theta)$, где $V_{\pi}(\theta)$ — скорость волны, бегущей по лучу \vec{R} . Причем $V_{\pi}(\theta)$ является лучевой скоростью волны (69), т. е. той скоростью, с которой по направлению θ распространяется основная энергия данной волны.

То, что $V_{\pi}(\theta) = \omega/f(k_0)$ является лучевой скоростью, можно доказать, написав явный вид функции $V_{\pi}(\theta)$, если лучевая скорость для данной волны была определена раньше другими методами. В трансверсально-изотропной среде выражения для лучевых скоростей трех типов волн (SV , SH , P) известны. Для SH -волны лучевая скорость выражается формулой

$$V_{\pi}^* = \mu^{1/2} \rho^{-1/2} \left(\sin^2 \theta + \frac{\mu}{\mu - m} \cos^2 \theta \right)^{-1/2}. \quad (70)$$

Найдем для волны α_1 явный вид скорости $V_{\pi} = \omega/f(k_0)$. Подставив выражение (17) для α_1 в уравнение (64), определим «частоту» k_0 :

$$k_0 = \frac{\omega \rho^{1/2}}{\mu^{1/2} C} \cdot \sin \theta, \quad C \equiv \left(\sin^2 \theta + \frac{\mu}{\mu - m} \cos^2 \theta \right)^{1/2}. \quad (71)$$

Поэтому

$$f(k_0) = \alpha_1(k_0) \cos \theta + k_0 \sin \theta = \omega \rho^{1/2} \mu^{-1/2} C.$$

Отсюда

$$V_{\pi}(\theta) \equiv \omega/f(k_0) = \rho^{-1/2} \mu^{1/2} C^{-1}. \quad (72)$$

Как видим, $V_{\pi}(\theta) = V_{\pi}^*(\theta)$.

Важным для нас выводом из вышеизложенного является то, что «спектры» $\tilde{U}_i^{(n)}$ и $\tilde{\tilde{U}}_i^{(n)}$ волн нам известны, они приведены в табл. 2. Если нас интересует интенсивность волны, идущей в направлении θ , то мы должны для этого направления найти «частоту» k_0 и оценить ординату $\tilde{\tilde{U}}_i^{(n)}(k)$ на «частоте» k_0 . Это сразу даст приближенный ответ на поставленный вопрос, так как мы знаем, что в направлении θ пойдут в основном те составляющие спектра $\tilde{U}_i^{(n)}(k)$, которые расположены вблизи «частоты» k_0 .

Теперь определить интенсивность волны, идущей в направлении $\theta = 0$, — задача проще простого.

В направлении $\theta = 0$ «частота» $k_0 = 0$. Это вытекает из того, что переменная k входит в выражения для α_n всегда в виде k^2 или k^4 , k^6 (см. (17), (20) — (22)). Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial k} \alpha_n(k^2) = 2k \frac{\partial}{\partial k^2} \alpha_n(k^2). \quad (73)$$

Поэтому условие (64) можно записать в виде

$$2k \frac{\partial}{\partial k^2} \alpha_n(k^2) \cos \theta + \sin \theta = 0.$$

Отсюда видно, что при $\theta = 0$ величина $k = 0$.

Точка наблюдения у нас находится на оси z , $r = 0$. Учитывая, что при $r = 0$ функции Бесселя $J_0(kr) = 1$, $J_1(kr) = 0$ и $J_2(kr) = 0$, в строках 4 и 7 табл. 2 можно оставить только те члены, у которых множителем является $J_0(kr)$, остальные члены равны нулю. Отобранные таким образом выражения подставляем во второй интеграл строки 1 табл. 2. В результате вместо (60) будем иметь следующее выражение:

$$U_{il}^{(n)}(z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} t_l(k) N_{il}^{(n)}(k) e^{j\alpha_n z} k dk. \quad (74)$$

Мы уже знаем, что в направлении $\theta = 0$ главную роль играют составляющие спектра $t_l(k) N_{il}^{(n)}(k)$, расположенные около «частоты» $k = k_0 = 0$. Поэтому

$$U_{il}^{(n)}(z, \omega) \approx [t_l(k) N_{il}^{(n)}(k)]_{k=0} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{j\alpha_n z} k dk. \quad (75)$$

Функцию $\alpha_n(k)$ разложим в ряд Тейлора в окрестности точки $k = 0$:

$$\alpha_n(k) \approx \alpha_{n0} + \dot{\alpha}_n(0)k + 2^{-1}\ddot{\alpha}_n(0)k^2. \quad (76)$$

В силу (73) величина $\dot{\alpha}_n(0) = 0$. Подставим формулу (76) в (75) и воспользуемся формулой

$$\int_0^{\infty} e^{jpx^2} x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{jpy} dy = -\frac{1}{2jp}.$$

Тогда

$$U_{il}^{(n)}(z, \omega) \approx [t_l(k) N_{il}^{(n)}(k)]_{k=0} \cdot \frac{j e^{j\alpha_{n0} z}}{2\pi \ddot{\alpha}_n(0) z}. \quad (77)$$

Методику применения (69) и (77) рассмотрим на примере волны α_1 .

Из (17) и (63) легко определяется

$$\ddot{f}(k) = -\gamma_1 s_0^2 (s_0^2 - k^2)^{-3/2} \cos \theta, \quad \gamma_1 = \mu(\mu - m)^{-1}, \quad s_0^2 = \omega^2 \rho / \mu. \quad (78)$$

Подставляя сюда «частоту» $k = k_0$, по (71) получим

$$\ddot{f}(k_0) = - (s_0 \gamma_1^2 \cos^2 \theta)^{-1} C^3.$$

Следовательно, множитель, фигурирующий в (69), будет равен

$$(\ddot{f}(k_0) \sin \theta)^{-1/2} k_0^{1/2} = -js_0 \gamma_1 C^{-2} \cos \theta. \quad (79)$$

При $\theta \rightarrow 0$ он равен $-js_0 \gamma_1^{-1}$. В формуле (77) вместо этого множителя стоит множитель $\ddot{\alpha}_n^{-1}(0)$, который для волны α_1 равен $-s_0 \gamma_1^{-1}$. Подставляя эту формулу в (77), а множитель (79) — в формулу (69), можем видеть, что формулы (69) и (77) при $\theta = 0$ и $I_\infty = I_0$ полностью совпадают друг с другом.

Таким образом, несмотря на ограничение $kr \gg 1$, связанное с применением формулы (62), формула (69) «работает» также при $r = 0$.

Исследование свойств волн $U^{(n)}(R, \theta, \omega)$ вдали от источника с использованием полученных здесь асимптотических формул выполнено М. М. Немировичем-Данченко и описано в его статье «Методика расчета...», публикуемой в настоящем сборнике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каштан Б. М., Ковтун А. А., Решетников В. В. Эталонные задачи для вычисления полей сосредоточенных источников в однородной трансверсально-изотропной упругой среде // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн.—Л.: Наука: Ленингр. отделение, 1987.— Вып. 27.— С. 22—44.
2. Петрашень Г. И., Каштан Б. М., Ковтун А. А., Мухина И. В. Метод контурных интегралов в случае трансверсально-изотропных упругих сред с осью симметрии, нормальной границам раздела // Там же.— 1984.— Вып. 24.— С. 4—91.
3. Чичинин И. С. Вибрационное излучение сейсмических волн.— М.: Недра, 1984.— 224 с.

М. М. НЕМИРОВИЧ-ДАНЧЕНКО

МЕТОДИКА РАСЧЕТА P -, SV - И SH -ВОЛН В ДАЛЬНОЙ ЗОНЕ ПРИ ВЕРТИКАЛЬНОМ И ГОРИЗОНТАЛЬНОМ ВОЗДЕЙСТВИЯХ НА ПОВЕРХНОСТИ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В статье И. С. Чичинина в настоящем сборнике [5] дано решение задачи о полях смещений, возбуждаемых в упругом однородном трансверсально-изотропном полупространстве источником, находящимся на его поверхности и задаваемым в виде $T(x, y, z, t)$, т. е. сила источника распределена и в каждой точке поверхности может быть задана произвольно направленным вектором плотности силы. Получены асимптотические формулы для смещений вдали от источника. В настоящей работе, являющейся продолжением статьи И. С. Чичинина, излагается методика вы-

полнения расчетов на основе полученных им выражений и приводятся расчетные формулы для источников типа вертикальной и горизонтальной силы, широко используемых в практике сейсмических исследований. Для типичных моделей трансверсально-изотропных сред рассчитаны функции направленности указанных источников и показана их зависимость от упругих параметров.

1. РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ

В табл. 2 из [5] приведены асимптотические формулы для x -, y -, z -компонент векторов смещений $U^{(1)}$, $U^{(2)}$, $U^{(3)}$ (соответственно SH -, SV - и P -волн) в точках (R, θ, φ) . Поскольку при расчетах полей смещений лучевые координаты R, θ, φ (R — расстояние от источника до заданной точки; θ — полярный угол, отсчитывается от оси z ; φ — азимут, отсчитывается от оси x) часто предпочтительнее декартовых x, y, z , приведем также выражения для векторов смещений U в сферических координатах. Формулы перехода от x -, y -, z -компонент некоторого вектора U к R -, θ -, φ -компонентам имеют вид

$$\begin{aligned} U_R &= (U_x \cos \varphi + U_y \sin \varphi) \sin \theta + U_z \cos \theta; \\ U_\theta &= (U_x \cos \varphi + U_y \sin \varphi) \cos \theta - U_z \sin \theta; \\ U_\varphi &= -U_x \sin \varphi + U_y \cos \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Применяя эти формулы к строчкам 5—9 табл. 2 [5], будем получать необходимые выражения для U_R -, U_θ -, U_φ -компонент векторов смещений. При этом будем рассматривать два случая направления силы: вертикальный источник ($T_x = T_y = 0, T_z \neq 0$) и горизонтальный источник (либо $T_x = T_z = 0, T_y \neq 0$, либо $T_y = T_z = 0, T_x \neq 0$). Система координат $Oxyz$ задается таким образом, чтобы либо ось x , либо ось y были ориентированы по направлению действия горизонтальной силы. Начало координат O совмещается с центром источника.

Компоненты векторов смещений при вертикальном воздействии

Пусть $T_x = T_y = 0, T_z \neq 0$.

Для вектора $U^{(1)}$ из строчки 5 табл. 2 в [5] имеем $U_x^{(1)} = U_y^{(1)} = 0$ (волна SH при Z -силе в среде не возникает).

Для вектора $U^{(2)}$ получим

$$\begin{aligned} U_x^{(2)} &= -L^{(2)} t_2 a_2 \varepsilon_2 \cos \varphi; \\ U_y^{(2)} &= -L^{(2)} t_2 a_2 \varepsilon_2 \sin \varphi; \\ U_z^{(2)} &= -L^{(2)} t_2 b_2 k_0^{-1} \varepsilon_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Применяя к (2) преобразование (1), будем иметь

$$\begin{aligned} U_R^{(2)} &= L^{(2)} t_z (-a_2 \varepsilon_2 \sin \theta - b_2 k_0^{-1} \varepsilon_2 \cos \theta); \\ U_\theta^{(2)} &= L^{(2)} t_z (-a_2 \varepsilon_2 \cos \theta + b_2 k_0^{-1} \varepsilon_2 \sin \theta); \\ U_\varphi^{(2)} &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

используемые здесь обозначения такие же, как в [5], а именно:

$$\begin{aligned} a_2 &= \nu \alpha_2 b_2 B_2^{-1}; \quad b_2 = B_2 \mathcal{D}_{Ra}^{-1}; \quad \varepsilon_2 = k_0 Q_2; \quad Q_2 = B_3 + \nu \alpha_3^2; \\ B_{2,3} &= \omega^2 \rho - (\lambda + 2\mu) k_0^2 - (\mu - m) \alpha_{2,3}^2; \quad \mathcal{D}_{Ra} = \alpha_3 Q_1 Q_4 - \alpha_2 Q_2 Q_3; \\ Q_1 &= B_3 + \gamma_2 \nu k_0^2; \quad Q_3 = B_2 + \gamma_2 \nu k_0^2; \quad Q_4 = B_2 + \nu \alpha_2^2; \\ \nu &= \lambda + \mu - l - m; \quad \gamma_2 = (\lambda - l)(\lambda + 2\mu - p)^{-1}; \\ t_z &= j(\mu - m)^{-1} T_z(k); \end{aligned} \quad (4)$$

$$L^{(2)} = k_0^{1/2} (2\pi R)^{-1} [\ddot{f}_2(k_0) \sin \theta]^{-1/2} \exp [j f_2(k_0) R],$$

где λ , μ , l , m , p — упругие константы ($\lambda = c_{11} - 2c_{66}$, $\mu = c_{66}$, $l = c_{12} - c_{13}$, $m = c_{66} - c_{44}$, $p = c_{11} - c_{33}$); ρ — плотность; ω — круговая частота; k_0 — значение переменной k_r (компоненты волнового вектора \mathbf{k}) в седловой точке (см. [5]).

О функциях $f_2(k_0)$, $\ddot{f}_2(k_0)$ и о вычислении k_0 для волны SV , а также для волны P написано в разделе 2 «Методика расчетов».

Для вектора $U^{(2)}$ (волна SV) основной является компонента $U_\theta^{(2)}$, в реальных средах $U_\theta^{(2)} \gg U_R^{(2)}$ (либо, по меньшей мере, $U_\theta^{(2)} > U_R^{(2)}$). В изотропной среде $U_R^{(2)} = 0$.

Для вектора $U^{(3)}$, по аналогии с $U^{(2)}$, запишем

$$\begin{aligned} U_R^{(3)} &= L^{(3)} t_z (-a_3 \varepsilon_3 \sin \theta - b_3 k_0^{-1} \varepsilon_3 \cos \theta); \\ U_\theta^{(3)} &= L^{(3)} t_z (-a_3 \varepsilon_3 \cos \theta + b_3 k_0^{-1} \varepsilon_3 \sin \theta); \\ U_\varphi^{(3)} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $a_3 = \nu \alpha_3 b_3 B_3^{-1}$; $b_3 = B_3 \mathcal{D}_{Ra}^{-1}$; $\varepsilon_3 = k_0 Q_4$;

$$L^{(3)} = k_0^{1/2} (2\pi R)^{-1} [\ddot{f}_3(k_0) \sin \theta]^{-1/2} \exp [j f_3(k_0) R],$$

см. также формулы (4).

Для квази- P -волны основной является компонента $U_R^{(3)}$, обычно $U_R^{(3)} \gg U_\theta^{(3)}$ (либо $U_R^{(3)} > U_\theta^{(3)}$). В изотропной среде $U_\theta^{(3)} = 0$.

Компоненты векторов смещений при горизонтальном воздействии

Пусть $T_x = T_z = 0$, $T_y \neq 0$.

Для волны SH имеем

$$U_x^{(1)} = L^{(1)} t_y \sin 2\varphi; \quad U_y^{(1)} = -L^{(1)} t_y 2 \cos^2 \varphi.$$

Отсюда $U_x \cos \varphi + U_y \sin \varphi = 0$ и потому $U_R^{(1)} = U_\theta^{(1)} = 0$, а

$$U_\varphi^{(1)} = -2L^{(1)} t_y \cos \varphi, \quad (6)$$

где

$$L^{(1)} = -j(4\pi R \gamma_1 c)^{-1} \exp[jf_1(k_0)R];$$

$$\gamma_1 = [\mu(\mu - m)^{-1}]^{1/2}; \quad C = (\gamma_1^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^{1/2}.$$

Для вектора $U^{(2)}$ имеем

$$U_x^{(2)} = 1/2 L^{(2)} t_y a_2 c_2 \sin 2\varphi;$$

$$U_y^{(2)} = L^{(2)} t_y a_2 c_2 \sin^2 \varphi; \quad (7)$$

$$U_z^{(2)} = L^{(2)} t_y b_2 k_0^{-1} c_2 \sin \varphi.$$

Отсюда

$$U_R^{(2)} = L^{(2)} t_y (a_2 \varepsilon_2 \sin \theta + b_2 k_0^{-1} c_2 \cos \theta) \sin \varphi;$$

$$U_\theta^{(2)} = L^{(2)} t_y (a_2 c_2 \cos \theta - b_2 k_0^{-1} c_2 \sin \theta) \sin \varphi; \quad (8)$$

$$U_\varphi^{(2)} = 0.$$

Здесь $c_2 = \alpha_3 Q_1$, $t_y = j(\mu - m)^{-1} T_y(k)$; остальные обозначения см. в формулах (4).

Аналогично для вектора $U^{(3)}$ получим

$$U_R^{(3)} = L^{(3)} t_y (a_3 c_3 \sin \theta + b_3 k_0^{-1} c_3 \cos \theta) \sin \varphi;$$

$$U_\theta^{(3)} = L^{(3)} t_y (a_3 c_3 \cos \theta - b_3 k_0^{-1} c_3 \sin \theta) \sin \varphi; \quad (9)$$

$$U_\varphi^{(3)} = 0,$$

где $c_3 = \alpha_2 Q_3$.

Угол φ в формулах (6) — (9) — это угол между направлениями Ox и OM' ; где M' — проекция точки $M(R, \theta, \varphi)$ на плоскость xy . Сила направлена по оси Oy . Поперечная волна SH будет иметь максимальную амплитуду при регистрации по линии Ox , т. е. при $\varphi = 0$; для волн P и SV максимальные амплитуды должны быть на линии Oy , т. е. при $\varphi = \pi/2$.

2. МЕТОДИКА РАСЧЕТОВ

Приведенные выше формулы для компонент векторов смещений могут быть записаны в общем виде

$$U_n = C_n I_n R^{-1} \exp(j\Phi_n) T(k), \quad (10)$$

где C_n — множитель, зависящий от упругих постоянных среды: $C_1 = (2\pi\mu^{1/2}(\mu - m)^{1/2})^{-1}$, $C_{2,3} = [2\pi(\mu - m)]^{-1}$ — для горизонтальной силы, $C_{2,3} = [2\pi(\lambda + 2\mu - p)]^{-1}$ — для вертикальной силы; I_n — комплексная амплитуда ($C_n I_n$ — функция направленности источника для волны типа n); Φ_n — фаза; R — расстояние

от источника до точки наблюдения; $n = 1$ для SH -волны, $n = 2$ для SV , $n = 3$ для P -волны.

Из формул (2)–(9) видно, что для вычисления функций I_n и Φ_n необходимо знать k_0 . Точка k_0 — это седловая точка, в окрестности которой производилось интегрирование при получении асимптотических формул [5]. Значение k_0 определяется из уравнения

$$\partial f(k)/\partial k = 0, \quad (11)$$

где $f(k) = \alpha_n(k) \cos \theta + k \sin \theta$, $\alpha_n(k)$ — корни характеристического уравнения (13) из [5]:

$$\alpha_1 = (\rho\omega^2 c_{44}^{-1} - c_{66} c_{44}^{-1} k^2)^{1/2}; \quad (12)$$

$$\alpha_{2,3} = [(2a)^{-1} (b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})]^{1/2}; \quad (13)$$

$$a = c_{33} c_{44}; \quad c = (\rho\omega^2)^2 - \rho\omega^2 (c_{11} + c_{44}) k^2 + c_{11} c_{44} k^4;$$

$$b = \rho\omega^2 (c_{33} + c_{44}) + [c_{44}^2 - c_{11} c_{33} - (c_{13} + c_{44})^2] k^2. \quad (14)$$

Следовательно, мы для всякого угла θ ($0 < \theta < \pi/2$) ищем корни уравнения (11), и для волн SV и P эти корни находятся только приближенно (кроме точного значения $k_0 = 0$ при $\theta = 0$). Но возможен другой подход, а именно: для всякого значения k_0 из интервала действительных значений функций (13) находить из уравнения (11) угол θ . Тогда параметр k_0 будет «точным», а луч θ будет искаться приближенно. По смыслу эти подходы адекватны, но в случае петель на $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$ второй подход предпочтительнее. Мы же будем пользоваться первым подходом, и в рамках данной статьи условимся, что уравнение (11) для каждого θ имеет лишь один корень. Корень ищется на ЭВМ методом деления отрезка пополам. При этом рекомендуется в интервале $0^\circ < \theta < 10^\circ$ искать k_0 с точностью 10^{-4} , а для всех других значений с точностью 10^{-3} . Вблизи 0° и 90° приведенными формулами пользоваться нельзя (фактический интервал расчетов составил у автора [$1^\circ, 75^\circ$]).

В [5] показано, что функцию $f_n(k_0)$ можно представить в виде

$$f_n(k_0) = \omega V_{ln}(\theta),$$

где $V_{ln}(\theta)$ — лучевая скорость волны α_n . Поэтому экспоненту из множителя $L^{(2)}$ (см. формулы (4)) можно записать так: $\exp [j\omega R V_{l2}^{-1}(\theta)]$.

После нахождения корней k_0 для волн SV и P вычисляются значения $\alpha_2(k_{0SV})$, $\alpha_3(k_{0P})$, $\alpha_2(k_{0P})$ и $\alpha_3(k_{0SV})$, затем все остальные величины, определяемые формулами (4).

Для вектора $U^{(1)}$ величины I_1 , Φ_1 определяются аналитически:

$$I_{SH} = C^{-1} \equiv (\gamma_1^2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^{-1/2}, \quad \gamma_1^2 = \mu(\mu - m)^{-1};$$

$$\Phi_{SH} = f_1(k_0) R = s_0 C R = \omega R V_{l1}^{-1}(\theta), \quad s_0^2 = \mu^{-1} \rho \omega^2. \quad (15)$$

Для векторов $U^{(2)}$ и $U^{(3)}$ значения функций $f(k_0)$, $\dot{f}(k_0)$ и $\ddot{f}(k_0)$ нужно искать приближенно после нахождения k_0 . Приведем формулы для $f_{2,3}(k)$, $\dot{f}_{2,3}(k)$ и $\ddot{f}_{2,3}(k)$:

$$f_{2,3}(k) = \alpha_{2,3}(k) \cos \theta + k \sin \theta;$$

$$\dot{f}_{2,3}(k) = \dot{\alpha}_{2,3}(k) \cos \theta + \dot{\sin} \theta; \quad \ddot{f}_{2,3}(k) = \ddot{\alpha}_{2,3}(k) \cos \theta.$$

$$\text{Здесь } \dot{\alpha}_{2,3}(k) = 2^{-1} \alpha_{2,3}^{-1}(k) \dot{e}, \quad \dot{e} = (2a)^{-1} (\dot{b} \pm 2^{-1} g^{-1/2} \dot{g}),$$

$$g = b^2 - 4ac, \quad \dot{g} = 2b\dot{b} - 4a\dot{c};$$

$$\ddot{\alpha}_{2,3}(k) = -4^{-1} \alpha_{2,3}^{-3}(k) \dot{e}^2 + 2^{-1} \alpha_{2,3}^{-1}(k) (2a)^{-1} [\ddot{b} \pm \pm (-4)^{-1} g^{-3/2} \dot{g}^2 \pm 2^{-1} g^{-1/2} (2\dot{b}^2 + 2b\ddot{b} - 4a\ddot{c})],$$

$$\dot{b} = -2 [c_{11}c_{33} - c_{44}^2 + (c_{13} + c_{43})^2] k;$$

$$\ddot{b} = -2 [c_{11}c_{33} - c_{44}^2 + (c_{13} + c_{43})^2],$$

$$\dot{c} = -2\rho\omega^2 (c_{11} + c_{44})k + 4c_{11}c_{44}k^3,$$

$$\ddot{c} = -2\rho\omega^2 (c_{11} + c_{44}) + 12c_{11}c_{44}k^2;$$

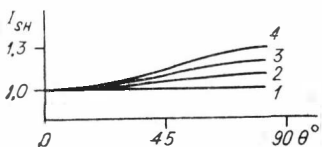
величины a , b , c определены формулами (14).

3. АМПЛИТУДЫ P -, SV -и SH -ВОЛН В ФУНКЦИИ УПРУГИХ ПАРАМЕТРОВ

Поля смещений упругих волн в трансверсально-изотропных средах с вертикальной осью симметрии, возбуждаемые направленными источниками типа вертикального и горизонтального воздействий на поверхности полупространства, изучались в работах [1, 3, 4]. В статье [1] приведены графики смещений для P -, SV -волн при Z -возбуждении и P -, SV -, SH -волн при горизонтальном (X , Y) возбуждении. В работе [4] даны графики смещений P - и SV -волн для Z -силы, в [3] также для Z -силы приведены теоретические сейсмограммы. Модели, для которых выполнялись расчеты в [1, 3, 4], охватывают разнообразный набор параметров трансверсально-изотропных сред; рассмотрены и модели с петлями на лучевых индикатрисах SV -волн.

В настоящей работе расчеты выполнены для источников типа вертикальной и горизонтальной силы с целью изучения связи между функциями направленности источников и параметрами среды. При этом задавались модели, представляющие интерес для сейсморазведки. К таким моделям относятся модели трансверсально-изотропных сред, эквивалентных для длинных волн ($\lambda \gg h$, h — мощность слоя) тонкослоистым средам. Следует указать, что среди моделей, для которых рассчитывались функции направленности источников в [1, 3, 4], почти нет таких моделей. Так, из всех моделей табл. 1 в [1] только одной модели (№ 3) может быть поставлена в соответствие тонкослоистая среда.

Рис. 1. Графики функции направленности волны SH (1 — $K_{SH} = 1,0$; 2 — $K_{SH} = 1,1$; 3 — $K_{SH} = 1,2$; 4 — $K_{SH} = 1,3$).



На рис. 1—3 изображены амплитуды смещений основных компонент P -, SV - и SH -волн при вертикальном и горизонтальном воздействиях для моделей сред, параметры которых приведены в табл. 1. Эти модели представляют среды с умеренной анизотропией, т. е. коэффициенты анизотропии K_P не превышают 1,1, а коэффициенты K_{SV} , $K_{SV} = [(c_{11} + c_{33} - 2c_{13})/c_{44}]^{1/2}/2$, не выходят за границу значений 1,12—1,18. Подбор значений параметров K выполнялся с помощью табл. 1 из статьи А. Ф. Дурьина [2]. При этих значениях параметров индикатрисы лучевых скоростей SV -волн не имеют петель и выпуклы. Значения γ_z заданы в достаточно широком интервале ($\gamma_z = 0,2—0,55$). Задано минимальное количество значений параметров, охватывающих достаточно широкие области их изменения. В каждой серии из четырех кривых кривые для моделей 1 соответствуют практически изотропной среде.

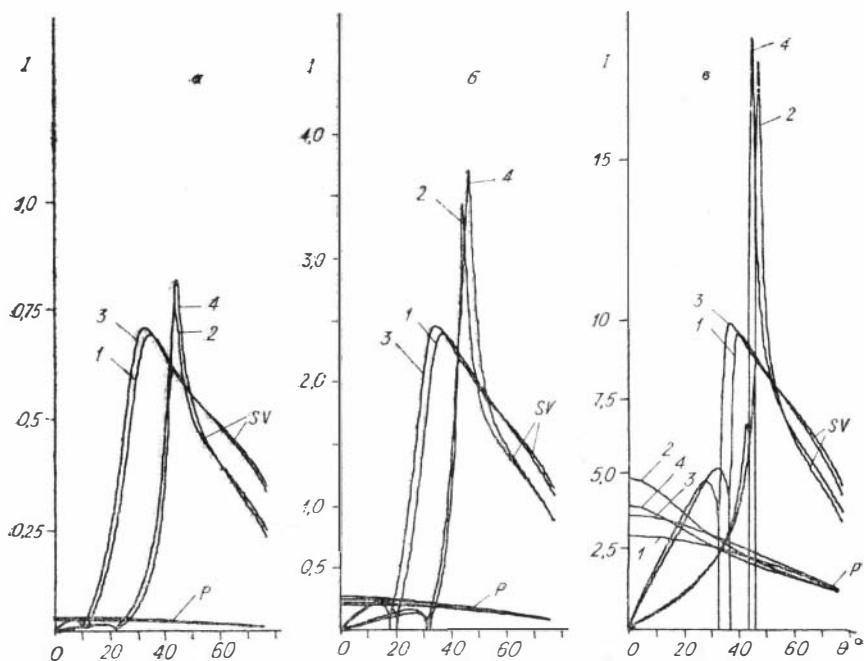


Рис. 2. Графики функций направленности волн P и SV при вертикальном возбуждении для значений $\gamma_z = 0,2$ (а), $\gamma_z = 0,3$ (б), $\gamma_z = 0,55$ (в). Цифрами указаны номера моделей из табл. 1.

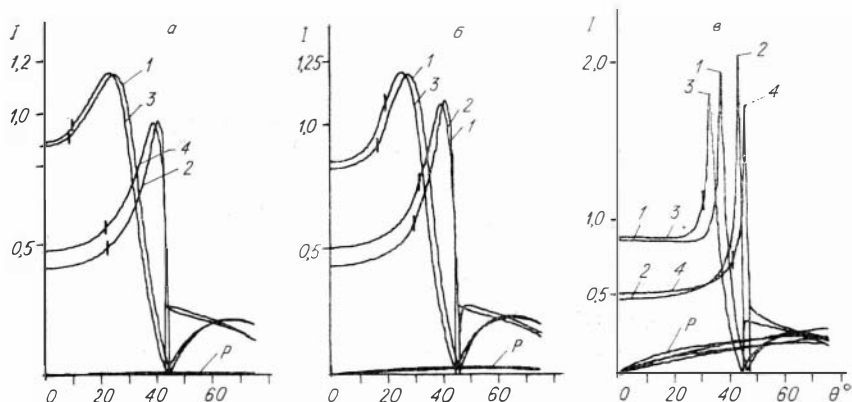


Рис. 3. Графики функций направленности волн P и SV при горизонтальном возбуждении для значений $\gamma_z = 0,2$ (а), $\gamma_z = 0,3$ (б), $\gamma_z = 0,55$ (в). Цифрами указаны номера моделей из табл. 1.

Функции направленности источников зависят, с точностью до постоянных множителей C_n (см. (10)), от трех параметров: $\gamma_z = (c_{44}/c_{33})^{1/2}$; $K_P = (c_{11}/c_{33})^{1/2}$; $K_I = (c_{13}/c_{33})^{1/2}$ (либо γ_z , K_P , K_{SV} , либо трех отношений модулей упругости) для P - и SV -волн и от одного коэффициента $K_{SH} = (c_{66}/c_{44})^{1/2}$ для волн SH . Приводимые графики рассчитаны при $C_n = 1$. По оси абсцисс отложены значения углов θ , образуемых лучами с осью z .

Функции направленности для SH -волн имеют, согласно определяющему их выражению (15), довольно простой вид (см. рис. 1).

Амплитуды смещений P -, SV -волн при Z -возбуждении (см. рис. 2) в общем ведут себя так же, как в случае изотропной среды:

Таблица 1
Эффективные упругие параметры трансверсально-изотропных сред

№ модели	γ_z	K_P	K_{SV}	K_I
1	0,2	1,00	1,01	0,9580
2		1,00	1,13	0,9480
3		1,10	1,04	1,0090
4		1,10	1,18	0,9971
1	0,3	1,00	1,03	0,900
2		1,00	1,12	0,880
3		1,10	1,03	0,955
4		1,10	1,15	0,930
1	0,55	1,00	1,02	0,61
2		1,00	1,12	0,49
3		1,10	1,02	0,69
4		1,10	1,13	0,58

сохраняются форма кривых, соотношения амплитуд P - и SV -волн, характер зависимости от γ (в данном случае от γ_z), а именно рост амплитуд P -волн и одновременный рост амплитуд SV -волн в областях до нулевых точек, сдвиг нулевых точек вправо, выравнивание величин первых и вторых максимумов. Таковы кривые амплитуд SV -волн для малых значений K_{SV} . В каждой серии из четырех кривых для $\gamma_z = \text{const}$ это две левые кривые с пологими экстремумами (вторыми максимумами). Друг от друга они отличаются значениями K_P ($K_P = 1$ и $K_P = 1,1$); как видим, от K_P зави-

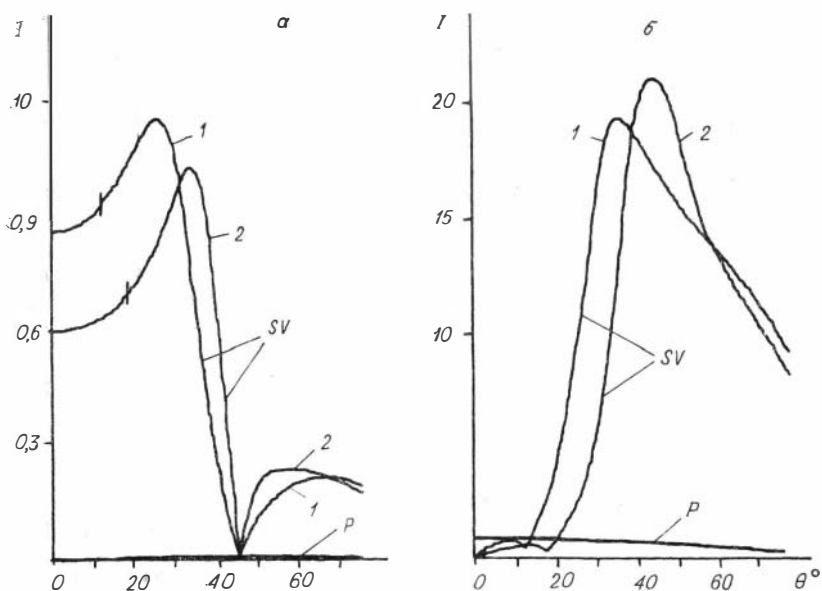


Рис. 4. Графики функций направленности волн P и SV в тонкослойных средах при горизонтальном (a) и вертикальном (b) возбуждении. Цифры соответствуют номерам групп моделей из табл. 2.

симось слабая. Одна из двух кривых фактически соответствует изотропной среде (см. табл. 1).

При больших значениях K_{SV} у кривых амплитуд SV -волн появляются новые черты относительно изотропных сред. При $\gamma_z = 0,2$ и $\gamma_z = 0,3$ возрастает вогнутость кривых после нулевых точек и вторые максимумы становятся более узкими, с ростом γ_z их величина растет. При $\gamma_z = 0,55$ переход к нулевым точкам происходит очень резко, а вторые максимумы становятся совсем узкими и большими. Влияние коэффициента K_P сводится к незначительному смещению кривых относительно друг друга.

Зависимость амплитуд P - и SV -волн от параметров при X -возбуждении (см. рис. 3) в общем следует тем же закономерностям, что и в случае Z -возбуждения. В каждой серии из четырех кривых для $\gamma_z = \text{const}$ выделяются пары кривых, соответствующие малым и большим значениям K_{SV} ; с ростом γ_z пары кривых сближаются. Для больших значений K_{SV} кривые амплитуд SV -волн расположены выше, чем для малых значений.

Качественные отличия от изотропных сред состоят в следующем. Нулевые значения амплитуд SV -волн приходятся не на $\theta = 45^\circ$, а несколько сдвинуты относительно 45° . После нулевых точек кривые амплитуд SV -волн в случае больших значений K_{SV} идут резко вверх, достигая половины значения при $\theta = 0^\circ$, а затем начинают почти линейно убывать.

Излучение P -волн, как и в изотропной среде, в среднем слабее в десятки раз, только при $\gamma_z = 0,55$ излучаются P - и SV -волны равной амплитуды в интервале углов $\theta = 60-75^\circ$.

Параметры трансверсально-изотропных сред, эквивалентных тонкослоистым ($\gamma_z = 0,2$)

№ группы моделей	$\frac{\Delta v_S}{v_S}$	$\frac{\Delta v_P}{v_P}$	n_S	n_P	v_1	K_P	K_{SV}	K_I
1	0,1	0,1	1,22	1,22	0,20	1,003	1,019	0,959
		0,2		1,50	0,17	1,006	1,019	0,960
		0,3		1,85	0,15	1,009	1,020	0,962
2	0,2	0,1	1,50	1,22	0,23	1,006	1,079	0,955
		0,2		1,50	0,20	1,013	1,080	0,959
		0,3		1,85	0,17	1,020	1,080	0,962

Как известно, основной причиной анизотропности осадочных отложений является их тонкая слоистость ($h \ll \lambda$). На рис. 4 приведены графики функций направленности источников типа вертикальной и горизонтальной силы для P - и SV -волн для трансверсально-изотропных сред с $\gamma_z = 0,2$, эквивалентных тонкослоистым.

Задавались непосредственно параметры, характеризующие тонкую слоистость, и по ним вычислялись значения упругих параметров. Те и другие параметры приведены в табл. 2. Рассмотрены модели с разной скоростной дифференциацией отложений по скоростям v_P , v_S . Параметры $\Delta v_P/v_P$, $\Delta v_S/v_S$ задают флуктуации скоростей, обусловленные тонкой слоистостью, относительно средних значений v_P , v_S . Эти параметры можно пересчитать в характеристики тонких слоев двухкомпонентной периодической среды (со слоями 1, 2 одинаковой толщины и плотности):

$$n_P = \frac{v_{P1}}{v_{P2}} = \frac{v_P + \Delta v_P}{v_P - \Delta v_P}; \quad n_S = \frac{v_{S1}}{v_{S2}} = \frac{v_S + \Delta v_S}{v_S - \Delta v_S}; \quad \gamma_1 = \gamma_z \sqrt{\frac{1 + n_S^2}{1 + n_P^2}},$$

а по параметрам n_P , n_S , γ_1 найти по известным формулам нужные упругие параметры трансверсально-изотропной среды. (Более подробно эти вопросы освещены в статье [2].)

Рассматривая рис. 4, можно видеть, что изменение скоростной дифференциации среды в заданных пределах, не очень больших, не ведет к сколько-нибудь значительным изменениям кривых амплитуд P - и SV -волн. Более существенна дифференциация по скоростям v_S , чем v_P : вместо шести кривых на графиках изображены две, так как для всех значений $\Delta v_P/v_P$ кривые сливаются.

Кривые, изображенные на рис. 4, являются частным случаем семейств кривых, представленных на рис. 2, 3. Они должны занять среди этих кривых промежуточное положение, определяемое значениями параметров γ_z , K_P , K_I .

Функции направленности для SH -волн — действительные числа. Для P - и SV -волн они становятся комплексными, начиная с некоторых значений, отмеченных черточками на рис. 3, 4, а. Интервалы действительных значений приблизительно такие же, как в изотропных средах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бродов Л. Ю., Ковтун А. А., Тихонов А. А. Некоторые результаты численного моделирования для поперечно-изотропных сред // Физика Земли.— 1986.— № 11.— С. 48—57.
2. Дурьнин А. Ф. Лучи и годографы рефрагированных P -, SV - и SH -волн в трансверсально-изотропных средах, эквивалентных тонкослоистым.— Настоящий сборник.
3. Каштан Б. М., Ковтун А. А., Решетников В. В. Эталонные задачи для вычисления полей сосредоточенных источников в однородной трансверсально-изотропной упругой среде // Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн.— Л.: Наука. Ленингр. отделение, 1987.— Вып. 27.— С. 22—44.
4. Петрашень Г. И., Каштан Б. М., Ковтун А. А., Мухина И. В. Метод контурных интегралов в случае трансверсально-изотропных упругих сред с осью симметрии, нормальной границам раздела // Там же. 1984.— Вып. 24.— С. 4—91.
5. Чичинин И. С. Использование спектральных представлений для решения задачи об излучении упругих волн источником, распределенным на поверхности трансверсально-изотропного полупространства.— Настоящий сборник.

И. С. ЧИЧИНИН, М. М. НЕМИРОВИЧ-ДАНЧЕНКО

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ УПРУГИХ ВОЛН ИСТОЧНИКОМ, ДЕЙСТВУЮЩИМ НА ПОВЕРХНОСТИ ГИРОТРОПНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В данной работе, по-видимому, впервые рассматривается задача об излучении упругих волн источником, распределенным на поверхности гиротропной среды. Необходимость решения такой задачи вызвана тем, что, как оказывается [1—4], модель гиротропной среды наиболее адекватно описывает реально наблюдаемую поляризацию поперечных волн. Задача решается при помощи метода, изложенного в [7]. Используются такие же обозначения.

1. ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В гиротропной среде, как известно [5], закон Гука выражается формулой

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} \frac{\partial U_k}{\partial x_l} + b_{ijklm} \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_l \partial x_m}, \quad (1)$$

а уравнения движения имеют вид

$$c_{ijkl} \frac{\partial^2 U_k}{\partial x_i \partial x_l} + b_{ijklm} \frac{\partial^3 U_k}{\partial x_i \partial x_l \partial x_m} = \rho \frac{\partial^2 U_j}{\partial t^2}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (2)$$

Зададим граничные условия:

$$\tau_{3j}(x_1, x_2, x_3, t)|_{x_3=0} = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_0 \\ \mathcal{T}_j(x_1, x_2, t) & \text{при } t \geq 0, \end{cases} \quad (3)$$

$$j = 1, 2, 3; \quad x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z.$$

Наша задача состоит в том, чтобы найти поле смещения, т. е. функции $U_j(x_1, x_2, x_3, t)$, $j = 1, 2, 3$, удовлетворяющие уравнениям движения (2) и граничным условиям (3).

Для решения этой задачи используем формулу (10) из [7], т. е. считаем, что функция U_j по всем трем переменным x_1 , x_2 и x_3 и по времени t представима в форме интеграла Фурье:

$$U_j(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}_j(k_1, k_2, k_3, \omega) \times \\ \times e^{-j\omega t + \tilde{j}k_l x_l} dk_1 dk_2 dk_3 d\omega, \quad (4)$$

$k_l x_l \equiv k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 \equiv k_x x + k_y y + k_z z$; \tilde{j} — знак мнимости (так как j уже занят в качестве индекса).

Подставляя эту формулу в уравнения движения (2) и приравнивая друг другу подынтегральные выражения, получим

$$c_{ijkl} q_i q_l \tilde{U}_k + b_{ijklm} q_i q_l q_m \tilde{U}_k + \rho \omega^2 \tilde{U}_j = 0, \quad (5)$$

$$j = 1, 2, 3; \quad q_m = \tilde{j} k_n, \quad n = 1, 2, 3.$$

Дальше слагаемые этого уравнения надо сгруппировать так, чтобы получилась следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11} \tilde{U}_1 + a_{12} \tilde{U}_2 + a_{13} \tilde{U}_3 &= 0; \\ a_{21} \tilde{U}_1 + a_{22} \tilde{U}_2 + a_{23} \tilde{U}_3 &= 0; \\ a_{31} \tilde{U}_1 + a_{32} \tilde{U}_2 + a_{33} \tilde{U}_3 &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$a_{ik} = a_{ik}^{(0)} + \beta_{ik},$$

$a_{ik}^{(0)}$ — элементы, соответствующие среде без гирации, формулы для них приведены в [7]; β_{ik} — поправки за гирацию, т. е. при $b \rightarrow 0$ имеет место $(\beta_{ik}) \rightarrow 0$.

Величины β_{ik} , очевидно, выражаются через элементы тензора гирации b . Чтобы получить формулы для β_{ik} , займемся тензором b .

2. ТЕНЗОР ГИРАЦИИ

Тензор гирации b , как известно [5], связан с псевдотензором акустической гирации g формулой

$$(2\pi/\lambda_1) b_{ijklm} = \delta_{jk} g_{silm}, \quad (7)$$

Псевдотензор гирации g для осесимметричной среды (∞)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ε_{11} $3e_1$	ε_{12} $3e_2$	0	ε_{14} e_1	ε_{15} e_4	0	ε_{17} e_5	ε_{18} e_2	0	●
ε_{21} $-3e_2$	ε_{22} $3e_1$	0	ε_{24} $-e_4$	ε_{25} e_5	0	ε_{27} $-e_4$	ε_{28} e_1	0	●
0	●	ε_{33} e_3	0	0	ε_{36} e_6	0	0	ε_{39} e_6	0

где λ_1 — некоторая постоянная, имеющая размерность длины;
 δ_{jks} — тензор Леви — Чевита:

$$\delta_{jks} = \begin{cases} 1 & \text{при } jks = 123, 231, 312; \\ -1 & \text{при } jks = 132, 213, 321; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (8)$$

В работе [2] показано, что для задач сейсмики интересна модель среды, определяющаяся псевдотензором g , элементы которого приведены в табл. 1. По заданным элементам псевдотензора g можно по формулам (7), (8) определить элементы тензора b . Они приведены в табл. 2. Поясним, как это делается.

Пусть, например, задан элемент g_{2133} (см. строку 2, столбец 7 в табл. 2). По индексам этого элемента сразу можем записать: b_{1jks} и δ_{jks} . Формула (8) дает $\delta_{312} = 1$ и $\delta_{132} = -1$. Следовательно, элементу g_{2133} соответствуют два элемента: b_{13133} и b_{11333} .

Таблица 2

Связь псевдотензора гирации g с тензором гирации b для осесимметричной среды (∞)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	g_{1111}	g_{1222}	0	g_{1122}	g_{1233}	0	g_{1133}	g_{1211}	0	0
	b_{12311}	b_{22322}	0	b_{12322}	b_{22333}	0	b_{12333}	b_{22311}	0	0
	b_{13211}	b_{23222}	0	b_{13222}	b_{23233}	0	b_{13233}	b_{23211}	0	0
	$\pm \varepsilon_{11}$	$\pm \varepsilon_{12}$		$\pm \varepsilon_{14}$	$\pm \varepsilon_{15}$		$\pm \varepsilon_{17}$	$\pm \varepsilon_{18}$		
2	g_{2111}	g_{2222}	0	g_{2122}	g_{2233}	0	g_{2133}	g_{2211}	0	0
	b_{13111}	b_{23122}	0	b_{13122}	b_{23133}	0	b_{13133}	b_{23111}	0	0
	b_{11311}	b_{21322}	0	b_{11322}	b_{21333}	0	b_{11333}	b_{21311}	0	0
	$\pm \varepsilon_{21}$	$\pm \varepsilon_{22}$		$\pm \varepsilon_{24}$	$\pm \varepsilon_{25}$		$\pm \varepsilon_{27}$	$\pm \varepsilon_{28}$		
3	0	0	g_{3333}	0	0	g_{3311}	0	0	g_{3322}	0
			b_{31233}			b_{21211}			b_{31222}	
			b_{32133}			b_{32111}			b_{32122}	
		$\pm \varepsilon_{33}$			$\pm \varepsilon_{36}$			$\pm \varepsilon_{39}$		

Причем если $g_{2133} = \alpha$, где α — какое-то число, то $b_{13133} = = (\lambda_1/2\pi)\alpha \equiv \varepsilon_{27}$, $b_{11333} = -\varepsilon_{27}$. В табл. 2 эти числа ($+\varepsilon_{27}$ и $-\varepsilon_{27}$) написаны в виде $\pm\varepsilon_{27}$.

3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Теперь можно приступить к тому, чтобы записать уравнения движения (5), (6) для тензора g из табл. 2. Необходимые для этого элементы c_{ijkl} тензора модулей упругости c возьмем из [7]. Чтобы написать первое уравнение ($j=1$) системы (5), целесообразно выписать все отличные от нуля элементы c_{ijkl} и b_{ijklm} с

Формулы для вычисления

	1	2	3	4	
$j = 1$	1	c_{1111}	c_{3113}	c_{2112}	c_{1122}
	2	$c_{11} = \lambda + 2\mu$	$c_{55} = \mu - m$	$c_{66} = \mu$	$c_{12} = \lambda$
	3	$q_1^2 U_1$	$q_3^2 U_1$	$q_2^2 U_1$	$q_1 q_2 U_2$
	4		$q_3 U_1$		
	1'	c_{3131}	b_{11311}	b_{21322}	b_{11322}
	2'	$c_{55} = \mu - m$	$-\varepsilon_{21}$	$-\varepsilon_{22}$	$-\varepsilon_{24}$
	3'	$q_1 q_3 U_3$	$q_1^3 U_3$	$q_2^3 U_3$	$3q_1 q_2^2 U_3$
	4'	$q_1 U_3$			
$j = 2$	1	c_{2211}	c_{1212}	b_{32133}	b_{32111}
	2	$c_{12} = \lambda$	$c_{66} = \mu$	$-\varepsilon_{33}$	$-\varepsilon_{36}$
	3	$q_2 q_1 U_1$	$q_1 q_2 U_1$	$q_3^3 U_1$	$3q_3 q_1^2 U_1$
	4			$q_3^2 U_1$	$q_1^2 U_1$
	1'	c_{3232}	b_{12311}	b_{22322}	b_{12322}
	2'	$c_{44} = \mu - m$	ε_{11}	ε_{12}	ε_{14}
	3'	$q_3 q_2 U_3$	$q_1^3 U_3$	$q_2^3 U_3$	$3q_1 q_2^2 U_3$
	4'	$q_2 U_3$			
$j = 3$	1	$\frac{2}{3}c_{3311}$	c_{1313}	b_{13111}	b_{23122}
	2	$c_{31} = \lambda - l$	$c_{55} = \mu - m$	ε_{21}	ε_{22}
	3	$q_3 q_1 U_1$	$q_1 q_3 U_1$	$q_1^3 U_1$	$q_2^3 U_1$
	4	$q_1 U_1$			
	1'	c_{2323}	b_{13211}	b_{23222}	b_{13222}
	2'	$c_{44} = \mu - m$	$-\varepsilon_{11}$	$-\varepsilon_{12}$	$-\varepsilon_{14}$
	3'	$q_2 q_3 U_2$	$q_1^3 U_2$	$q_2^3 U_2$	$3q_1 q_2^2 U_2$
	4'				

индексом $j = 1$. В выделенной таким образом последовательности надо элементы c и b сгруппировать так, чтобы сначала шли элементы с индексами $k = 1$, затем $k = 2$ и $k = 3$, т. е. чтобы в этой таблице сразу же формировалось первое уравнение системы (6). Сгруппированные описанным способом последовательности элементов представлены в табл. 3 (см. строки 1, 1' при $j = 1$).

Под каждым элементом c_{ijkl} в этой таблице приведена его запись в двухиндексной форме, а также через модули упругости λ , μ и параметры l , m , p [7]. Под элементами b_{ijklm} в строках 2, 2' приведены их обозначения через константы ε_{ij} , определяе-

Т а б л и ц а 3

смещений

5	6	7	8	9
c_{2121} $c_{66} = \mu$ $q_1 q_2 U_2$	b_{31233} ε_{33} $q_3^3 U_2$ $q_3^2 U_2$	b_{31211} ε_{36} $3q_3 q_1^2 U_2$ $q_1^2 U_2$	b_{31222} ε_{39} $3q_3 q_2^2 U_2$ $q_2^2 U_2$	c_{1133} $c_{13} = \lambda - l$ $q_1 q_3 U_3$
b_{21333} $-\varepsilon_{25}$ $3q_2 q_3^2 U_3$	b_{11333} $-\varepsilon_{27}$ $3q_1 q_3^2 U_3$	b_{21311} $-\varepsilon_{28}$ $3q_2 q_1^2 U_3$		$\rho \omega^2 U_1$ $-T_1$
b_{32122} $-\varepsilon_{39}$ $3q_3 q_2^2 U_1$ $q_2^2 U_1$	c_{2222} $c_{22} = \lambda + 2\mu$ $q_2^2 U_2$	c_{3223} $c_{44} = \mu - m$ $q_3^2 U_2$ $q_3 U_2$	c_{1221} $c_{66} = \mu$ $q_1^2 U_2$	c_{2233} $c_{23} = \lambda - l$ $q_2 q_3 U_3$
b_{22333} ε_{15} $3q_2 q_3^2 U_3$	b_{12333} ε_{17} $3q_1 q_3^2 U_3$	b_{22311} ε_{18} $3q_2 q_1^2 U_3$		$\rho \omega^2 U_2$ $-T_2$
b_{23133} ε_{25} $3q_2 q_3^2 U_1$	b_{13133} ε_{27} $3q_1 q_3^2 U_1$	b_{23111} ε_{28} $3q_2 q_1^2 U_1$	b_{13122} ε_{24} $3q_1 q_2^2 U_1$	c_{3322} $c_{32} = \lambda - l$ $q_3 q_2^2 U_2$ $q_2 U_2$
b_{13233} $-\varepsilon_{17}$ $3q_1 q_3^2 U_2$	c_{3333} $c_{33} = \lambda + 2\mu - p$ $q_3^2 U_3$ $q_3 U_3$	c_{2332} $c_{44} = \mu - m$ $q_2^2 U_3$	c_{1331} $c_{55} = \mu - m$ $q_1^2 U_3$	$\rho \omega^2 U_3$ $-T_3$

мые из табл. 1 и 2. Например, в группе $j = 1$ в строке 1 и столбце 7 табл. 3 находится элемент b_{31211} , под ним в строке 2 поставлен элемент ε_{36} . Это означает, что $b_{31211} = \varepsilon_{36}$, а величина ε_{36} для псевдотензора \mathbf{g} выбранного вида определяется значением e_6 из табл. 1. Рассматриваемый элемент \mathbf{b} входит в слагаемое $3b_{31211}q_3q_1^2\tilde{U}_2 = 3\varepsilon_{36}q_3q_1^2\tilde{U}_2$ первого ($j = 1$) уравнения системы (5). Следовательно, чтобы получить это слагаемое, надо величину ε_{36} умножить на член $3q_3q_1^2\tilde{U}_2$, который стоит под ε_{36} в строке 3. Множитель 3 в этих формулах появляется вследствие симметричности тензора \mathbf{b} по первому, четвертому и пятому индексам [5]. (Тензор \mathbf{g} , связанный с тензором \mathbf{b} соотношением (7), симметричен по второму, третьему и четвертому индексам.)

Чтобы получить первое уравнение ($j = 1$) $a_{11}\tilde{U}_1 + a_{12}\tilde{U}_2 + a_{13}\tilde{U}_3 = 0$ системы (6), надо элементы c_{ijkl} умножить на $q_iq_j\tilde{U}_k$ и элементы b_{ijklm} — на $nq_iq_jq_m\tilde{U}_k$ ($n = 1$ либо $n = 3$); все такие произведения, полученные в 18 ячейках группы $j = 1$, надо просуммировать и сумму приравнять нулю. Второе и третье уравнения системы (6) в табл. 3 определяются ячейками с индексами $j = 2$ и $j = 3$. Таким образом, табл. 3 можно рассматривать как таблицу элементов $a_{ik} = a_{ik}^0 + \beta_{ik}$ системы уравнений (6). Такое представление удобно тем, что из табл. 3 хорошо видно происхождение каждого сомножителя или слагаемого, входящего в тот или иной элемент a_{ik} . В строках 4, 4' приведены необходимые выражения для записи граничных условий (3). Ими займемся несколько позже.

В работе [7] система, подобная (6), но для трансверсально-изотропной среды без гирации, использована для определения значений $k_3 = \alpha_n$, при которых выражение (4) описывает реальные волны. Таких значений k_3 для задачи, решаемой в [7], оказалось три: α_1 , α_2 и α_3 . Или, другими словами, определитель $\mathcal{D}(a_{ik}^0)$ системы представляет собой полином шестой степени: $\mathcal{D}(a_{ik}^0) = M_0k_z^6 + M_2k_z^4 + M_4k_z^2 + M_6$, т. е. уравнение $\mathcal{D}(a_{ik}^0) = 0$ имеет три пары корней. В каждой паре только один корень соответствует физическому смыслу рассматриваемой задачи, другими словами, при использовании этого корня в [7] получается волна, бегущая от источника, а не наоборот.

В нашем случае определитель, составленный из элементов $a_{ik} = a_{ik}^0 + \beta_{ik}$, имеет вид

$$\mathcal{D}(a_{ik}) = a_{33}^0 \{ \mathcal{A} \cdot [\mathcal{A} + (\lambda + \mu)q_r^2] + \beta_{12}^2 \} + 2(a_{12}^0\beta_{23}\beta_{31} + a_{23}^0\beta_{12}\beta_{31}) - \mathcal{A}v^2q_r^2q_3^2 + (\beta_{13}^2 + \beta_{23}^2)\mathcal{A} + (\lambda + \mu)(q_1^2\beta_{23}^2 + q_2^2\beta_{13}^2), \quad (9)$$

$$\mathcal{A} = \rho\omega^2 + \mu q_r^2 + (\mu - m)q_3^2, \quad q_r^2 = q_1^2 + q_2^2, \quad q_i = \tilde{j}k_i,$$

$$v = \lambda + \mu - l - m.$$

При выводе формулы (9) учтено, что $\beta_{21} = -\beta_{12}$, $-\beta_{13} = \beta_{31}$, $-\beta_{32} = \beta_{23}$ (см. табл. 3). В среде без гирации ($\beta_{ik} = 0$) выражение (9) совпадает с соответствующим выражением в [7].

Из табл. 3 видно, что $a_{33}^0 \sim q_3^2$, $\mathcal{A} \sim q_3^2$, $\beta_{12}^2 \sim q_3^4$, $\beta_{13}^2 \sim q_3^4$, $\beta_{23}^2 \sim q_3^4$. Следовательно, определитель (9) представляет собой полином восьмой степени: $\mathcal{D}(a_{ik}) = M_0 q_3^8 + \dots + M_8$. Поэтому уравнение $\mathcal{D} = 0$ будет иметь восемь корней $g_3^{(n)}$. Таким образом, в гиротропной трансверсально-изотропной среде переменная q_3 тоже, оказывается, может принимать лишь вполне определенные значения $g_3^{(n)}$. В таких случаях, как показано в [7], подынтегральное выражение в (4) следует представлять в виде

$$\tilde{U}_i = \sum_n \tilde{U}_i(k_1, k_2, \alpha_n) \delta(q_3 - \tilde{j}\alpha_n), \quad (10)$$

где через $\tilde{j}\alpha_n$ обозначены те корни $g_3^{(n)}$, которые дают волны, соответствующие физическому смыслу рассматриваемой задачи.

Полином $\mathcal{D}(a_{ik})$ имеет восьмую степень относительно q_3 и четвертую относительно q_3^2 . В среде без гирации полином $\mathcal{D}(a_{ik}^0)$ был третьей степени относительно q_3^2 и его корни соответствовали трем типам волн: продольной qP и поперечным qSV и SH . По аналогии можно предположить, что в случае гиротропной среды четвертый корень q_3^2 полинома $\mathcal{D}(a_{ik})$ соответствует четвертой волне.

Для того чтобы выяснить характер корня q_3^2 , исследуем уравнение $\mathcal{D}(a_{ik}) = 0$ для одного простейшего частного случая, а именно для вертикального направления, для которого $q_1 = 0$, $q_2 = 0$ и $q_3 \neq 0$. При этом для наглядности воспользуемся понятием фазовой скорости. Фазовой скоростью волны, как известно, называю функцию $V_\Phi(\theta)$, которая входит в волновые числа k_i следующим образом:

$$k_x \equiv -j q_1 = \frac{\omega}{V_\Phi} \sin \theta \cos \varphi; \quad k_y = \frac{\omega}{V_\Phi} \sin \theta \cos \varphi; \quad k_z = \frac{\omega}{V_\Phi} \cos \theta. \quad (11)$$

Случай $q_1 = q_2 = 0$, $q_3 \neq 0$ означает, что $\theta = 0$, т. е. волновой фронт перпендикулярен оси z . Нам надо определить величины V_Φ , удовлетворяющие уравнению $\mathcal{D}(a_{ik}^0 + \beta_{ik}) = 0$.

Из табл. 3, а также из формул (9) видно, что при $q_1 = q_2 = 0$ элементы a_{ik} существенно упрощаются:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \mathcal{A} = \rho\omega^2 - (\mu - m)k_z^2 = (\mu - m)\omega^2(V_\Phi^2 - V_{S1}^2)V_\Phi^{-2}V_{S1}^{-2}; \\ a_{12} &= \beta_{12} = \varepsilon_{33}q_3^3 = -\tilde{j}\omega^3V_\Phi^{-3}\varepsilon_{33} = -\tilde{j}(\mu - m)\omega^2V_\Phi^{-3}V_{S1}V_\Phi; \\ a_{13} &= 0; \quad a_{21} = -a_{12}; \quad a_{22} = \rho\omega^2 - (\mu - m)k_z^2 = a_{11}; \\ & \quad a_{31} = 0; \quad a_{32} = 0; \quad a_{23} = 0; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} a_{33} &= \rho\omega^2 + (\lambda + 2\mu - p)q_3^2 = (\lambda + 2\mu - p)\omega^2(V_\Phi^2 - V_{P1}^2)V_\Phi^{-2}V_{P1}^{-2}; \\ & \quad V_{S1}^2 = (\mu - m)\rho^{-1}; \quad V_{P1}^2 = (\lambda + 2\mu - p)\rho^{-1}; \end{aligned}$$

$\gamma_8 \equiv \omega\varepsilon_{33}V_{S1}^{-1}(\mu - m)^{-1}$ — безразмерный параметр.

При этих значениях уравнение $\mathcal{D}(a_{ik}) = 0$ выглядит следующим образом:

$$[(V_\Phi^2 - V_{S1}^2)^2 V_\Phi^2 - \gamma_\epsilon^2 V_{S1}^6] (V_\Phi^2 - V_{P1}^2) = 0. \quad (13)$$

Отсюда видно, что пара корней $V_\Phi = \pm V_{P1}$ соответствует продольной волне. Другие шесть корней находятся из уравнения

$$x^2(x + V_{S1}^2) - C = 0, \quad x \equiv V_\Phi^2 - V_{S1}^2, \quad C \equiv \gamma_\epsilon^2 V_{S1}^6. \quad (14)$$

Решение этого уравнения дает

$$x_1 \simeq \gamma_\epsilon V_{S1}^2; \quad x_2 \simeq \gamma_\epsilon V_{S1}^2; \quad x_3 \simeq \gamma_\epsilon^2 V_{S1}^2 + V_{S1}^2.$$

Следовательно, корни уравнения (13) определяются формулами

$$V_{\Phi 1}^2 \simeq V_{S1}^2 + \gamma_\epsilon V_{S1}^2; \quad V_{\Phi 2}^2 \simeq V_{S1}^2 - \gamma_\epsilon V_{S1}^2; \quad V_{\Phi 3}^2 = V_{P1}^2; \quad V_{\Phi 4}^2 \simeq \gamma_\epsilon^2 V_{S1}^2. \quad (15)$$

По оценкам, приведенным в [5], безразмерный параметр γ_ϵ представляет собой величину порядка 10^{-2} . Из (15) выбираем корни, которые по физическому смыслу соответствуют скоростям волн, идущих от источника:

$$V_{\Phi 1} = (V_{S1}^2 + \gamma_\epsilon V_{S1}^2)^{1/2}; \quad V_{\Phi 2} = (V_{S1}^2 - \gamma_\epsilon V_{S1}^2)^{1/2}; \quad V_{\Phi 3} = V_{P1}; \\ V_{\Phi 4} = \gamma_\epsilon V_{S1}. \quad (16)$$

В среде без гирации ($\gamma_\epsilon = 0$) первые два корня $V_{\Phi 1}$, $V_{\Phi 2}$ соответствуют поперечным (SH и qSV) волнам, скорости которых в вертикальном направлении в трансверсально-изотропной среде равны величине $V_{S1} = (\mu - m)^{1/2} \rho^{-1/2}$. Величина $V_{\Phi 4}$ очень мала по сравнению со скоростями первых трех волн.

Таким образом, в выражении (10) теперь будет четыре слагаемых. Когда это выражение подставим в интеграл (4), интеграл по переменной k_3 возьмется и формула (4) будет выглядеть следующим образом:

$$U_j(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int \left(\sum_n \tilde{U}_j^{(n)} e^{\tilde{j}\alpha n z} \right) \times \\ \times e^{-\tilde{j}\omega t + q_1 x_1 + q_2 x_2} dk_1 dk_2 d\omega. \quad (17)$$

Пространственный спектр $\tilde{U}_j^{(n)}$ при всех n , очевидно, удовлетворяет уравнениям движения (5) и (6). Поэтому так же, как в [7], две компоненты $\tilde{U}_j^{(n)}$ каждой волны можем выразить через третью, используя, например, первые два уравнения системы (6):

$$\tilde{U}_1^{(1)} = h_1^{(1)} \tilde{U}_2^{(1)}; \quad \tilde{U}_3^{(1)} = h_3^{(1)} \tilde{U}_2^{(1)}; \\ \tilde{U}_j^{(n)} = h_j^{(n)} \tilde{U}_3^{(n)}, \quad n = 2, 3, 4; \quad j = 1, 2. \quad (18)$$

Коэффициенты $h^{(n)}$ известны. Остается определить по граничным условиям четыре функции $\tilde{U}_2^{(1)}$, $\tilde{U}_3^{(n)}$ ($n = 2, 3, 4$) и тогда

все 12 функций $\tilde{U}_j^{(n)}$ станут известными. После этого, используя интегральное преобразование (17), можно будет определить полное волновое поле $\tilde{U}_j^{(n)}(x_1, x_2, x_3, t)$, излучаемое источником.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Граничные условия (3), очевидно, тоже надо представить в спектральной форме. Для этого формулу (4) для смещения подставим в выражения (1) и (3) для напряжений:

$$\tau_{3j} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} (c_{3jkl} q_l \tilde{U}_k + b_{3jklm} q_l q_m \tilde{U}_k) \cdot \exp(-j\tilde{\omega}t + q_1 x_1 + q_2 x_2 + q_3 x_3) dk_1 dk_2 dk_3 d\omega. \quad (19)$$

Чтобы записать подынтегральное выражение в явном виде, надо выделить все элементы c_{3jkl} и b_{3jklm} , которые отличны от нуля. Пусть, например, такими элементами являются c_{3113} и b_{31211} . Тогда соответствующие слагаемые, входящие в (19), будут выглядеть так: $c_{3113} q_3 \tilde{U}_1$ и $b_{31211} q_1^2 \tilde{U}_2$. Описываемая процедура представлена в табл. 3 (см. строки 4, 4'). Выражения, стоящие в строках 4, 4', надо умножить на соответствующие коэффициенты $c_{\lambda\mu}$ и $\varepsilon_{\gamma\nu}$, находящиеся в строках 2, 2'. В результате четырехмерный спектр $\tilde{\tau}_{3j}$ тензора напряжений будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{3j} &= b_{j1} \tilde{U}_1 + b_{j2} \tilde{U}_2 + b_{j3} \tilde{U}_3, \quad j = 1, 2, 3; \\ b_{11} &= (\mu - m) q_3; \quad b_{12} = \varepsilon_{33} q_3^2 + \varepsilon_{36} q_1^2 + \varepsilon_{39} q_2^2, \quad b_{13} = (\mu - m) q_1; \\ b_{21} &= -b_{12}; \quad b_{22} = (\mu - m) q_3; \quad b_{23} = (\mu - m) q_2; \\ b_{31} &= (\lambda - l) q_1; \quad b_{32} = (\lambda - l) q_2; \quad b_{33} = (\lambda + 2\mu - p) q_3. \end{aligned} \quad (20)$$

Плотность $\mathcal{F}_j(x, y, t)$ силы источника тоже представим в спектральной форме:

$$\mathcal{F}_j(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} T_j(k_x, k_y, \omega) e^{-j\tilde{\omega}t + q_x x + q_y y} d\omega dk_x. \quad (21)$$

Далее, чтобы в граничных условиях (3) слева и справа стояли однотипные интегралы, в выражении (19) интеграл по dk_3 придется взять (используя формулу (10)), хотя это усложняет вид формул:

$$\tau_{3j} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^4 \tau_{3j}^{(n)} e^{j\tilde{\omega} n x_3} \right) e^{-j\tilde{\omega}t + q_1 x_1 + q_2 x_2} dk_1 dk_2 d\omega. \quad (22)$$

На поверхности полупространства ($x_3 = 0$) выражения (21) и (22) равны друг другу. Приравнивая их и вынося знаки интегри-

рования за общую скобку, получим

$$\sum_{n=1}^4 b_{j1}^{(n)} \tilde{U}_1^{(n)} + \sum_{n=1}^4 b_{j2}^{(n)} \tilde{U}_2^{(n)} + \sum_{n=1}^4 b_{j3}^{(n)} \tilde{U}_3^{(n)} = T_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (23)$$

Для сокращения количества искоемых компонент $\tilde{U}_k^{(n)}$ до четырех, воспользуемся формулами (18). Произведя перегруппировку слагаемых в этих суммах, получим систему уравнений:

$$\sigma_{j1} \tilde{U}_2^{(1)} + \sigma_{j2} \tilde{U}_3^{(2)} + \sigma_{j3} \tilde{U}_3^{(3)} + \sigma_{j4} \tilde{U}_3^{(4)} = T_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (24)$$

Имеем три уравнения, а неизвестных у нас четыре. Поэтому необходимо еще одно уравнение. Его мы можем найти путем следующих рассуждений.

Известно, что в изотропной и трансверсально-изотропных средах тензор напряжений симметричен: $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. В гиротропной среде $\tau_{ij} - \tau_{ji} \neq 0$ [2]. Но на границе, разделяющей гиротропную среду и среду без гирации, надо положить $\tau_{ij} - \tau_{ji} = 0$. Поэтому на поверхности $x_3 = 0$ рассматриваемого полупространства следует считать

$$\tau_{31} - \tau_{13} = 0; \quad \tau_{32} - \tau_{23} = 0. \quad (25)$$

Расписав эти элементы по формуле (1) и воспользовавшись затем интегральным преобразованием (17) и формулами (18), получим два уравнения типа (24), только у них в правой стороне будет стоять нуль. С учетом этих двух уравнений и трех уравнений (24) получим систему из пяти уравнений:

$$\begin{aligned} \sigma_{j1} \tilde{U}_2^{(1)} + \sigma_{j2} \tilde{U}_3^{(2)} + \sigma_{j3} \tilde{U}_3^{(3)} + \sigma_{j4} \tilde{U}_3^{(4)} &= T_j, \\ j = 1, 2, \dots, 5; \quad T_4 &= T_5 = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Решая эту систему при $j = 1, 2, 3, 4$ либо $j = 1, 2, 3, 5$, определим искоемые четыре компоненты $\tilde{U}_k^{(n)}$. Остальные компоненты волнового поля могут быть определены по формулам (18).

Поставленная задача в принципе решена. Способы расчета и результаты расчетов предполагается описать в последующих работах. В этой же работе дальше ограничимся рассмотрением одного частного вопроса.

5. СВОЙСТВА ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН, ИДУЩИХ ОТ У-ИСТОЧНИКА ВЕРТИКАЛЬНО ВНИЗ

Известно, что для определения интенсивности волны в некоторой точке (R, θ) , расположенной далеко от источника, надо сначала найти седловую точку, т. е. «частоту» k_0 , соответствующую углу θ . Эта «частота» важна тем, что интенсивность волны в направлении θ будет в основном определяться компонентами спектра, расположенными на «частотах» $k = k_0^{(0)}$. В работе [7] показано, что для волн, идущих вниз (фронт волны перпендикулярен оси z), седловая точка равна нулю: $k_r = k_0 = 0$. Форму-

лы для пространственных спектров $\tilde{U}(k)$ при подстановке $k_r = 0$ могут существенно упроститься, и появится возможность получить более или менее наглядные выражения. Но чтобы подставлять $k = k_0 = 0$, надо иметь явные формулы для $\tilde{U}_j^{(m)}(k)$. Их у нас нет. Поэтому такие подстановки будем делать в исходных формулах, следя при этом, чтобы при $k \rightarrow 0$ не получались неопределенности типа деления на нуль.

Следует заметить, что когда $T_x = 0$, $T_z = 0$, $T_y \neq 0$, указанные неопределенности типа деления на нуль легче устранить, если компоненты волн определять не согласно (18), а несколько по-другому:

$$\tilde{U}_1^{(1)} = h_1^{(1)} \tilde{U}_2^{(1)}; \quad \tilde{U}_1^{(2,3)} = h_1^{(2,3)} \tilde{U}_2^{(2,3)}; \quad \tilde{U}_3^{(2,3)} = h_3^{(2,3)} \tilde{U}_2^{(2,3)}. \quad (27)$$

При этом не просто сразу приравниваем $q_1 = 0$ и $q_2 = 0$, а считаем, что точка наблюдения приближается к оси z со стороны с азимутом $\varphi = \pi/2$. Поэтому в формулах для a_{ij} переменную k_x сразу приравниваем нулю, а переменную k_y (или q_2) устремляем к нулю только на стадии формул (27).

В формулах (27) полагаем $U_z^{(1)} = 0$, $U_j^{(4)} = 0$, так как эти компоненты в трансверсально-изотропной среде равны нулю, а коэффициенты гирации, как упоминалось выше, составляют величины порядка 10^{-2} . Поэтому в среде с гирацией, если даже $U_z^{(1)} \neq 0$, она будет очень малой величиной по сравнению с $U_1^{(1)}$ или $U_2^{(1)}$.

Коэффициент $h_1^{(1)}$ определяется из первого уравнения ($a_{11}\tilde{U}_1 + a_{12}\tilde{U}_2 = 0$) системы (6). Элементы a_{ik} приведены в табл. 3, т. е.

$$-h_1^{(1)} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{(\lambda + \mu) q_1 q_2 + \varepsilon_{33} q_3^2 + q_3 (\varepsilon_3 q_1^2 + \varepsilon_{13} q_2^2) \cdot 3}{\rho \omega^2 + \mu q_r^2 + (\mu - m) q_3^2 + (\lambda + \mu) q_1^2}.$$

Здесь, как видим, вполне можем приравнять $q_1 = 0$ и $q_2 = 0$, не боясь упомянутых выше неопределенностей:

$$h_1^{(1)} = - \frac{\varepsilon_{33} q_3^3}{\rho \omega^2 + (\mu - m) q_3^2}. \quad (28)$$

Для волны α_1 функция $q_3 = \tilde{j} \alpha_1$. На оси z в соответствии с (11) имеем

$$\alpha_1 = \omega V_{S1}^{-1} (1 + \gamma_\varepsilon)^{-1/2} \approx \omega V_{S1}^{-1} (1 - 2^{-1} \gamma_\varepsilon), \quad \rho V_{S1}^2 = \mu - m. \quad (29)$$

Поэтому

$$\rho \omega^2 + (\mu - m) q_3^2 = \rho \omega^2 - (\mu - m) \omega^2 V_{S1}^{-2} (1 - \gamma_\varepsilon) = (\mu - m) \omega^2 V_{S1}^{-2} \gamma_\varepsilon; \quad (30)$$

$$\varepsilon_{33} q_3^3 = -\tilde{j} \varepsilon_{33} \alpha_1^3 \approx \tilde{j} \varepsilon_{33} \omega^3 V_{S1}^{-3} = -\tilde{j} (\mu - m) \omega^2 V_{S1}^{-2} \gamma_\varepsilon.$$

Отсюда $h_1^{(1)} = \tilde{j}$. Необычность или непривычность такого результата состоит в следующем.

Представим себе, что горизонтальный Y -вибратор возбуждает поперечную волну. На глубине z по центру источника в изотропной и трансверсально-изотропной средах мы должны наблюдать поперечную волну только на y -приемнике, компонента этой волны должна равняться нулю. В гиротропной среде, как видим, картина другая: мы будем наблюдать как U_{Sy} , так U_{Sx} -компоненты, причем, поскольку $\tilde{U}_{Sx} = h_1^{(1)} \tilde{U}_{Sy}$ и $|h_1^{(1)}| = 1$, эти компоненты будут иметь одинаковую интенсивность.

Займемся рассмотрением волны α_2 . Коэффициенты $h_1^{(2)}$ и $h_3^{(2)}$ определим из первых двух уравнений системы (6):

$$h_1^{(n)} = \frac{-a_{12}a_{23} + a_{13}a_{22}}{a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}}; \quad h_3^{(n)} = \frac{-a_{11}a_{22} + a_{21}a_{12}}{a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13}}. \quad (31)$$

Элементы a_{11} и a_{21} , как мы видели выше, при $q_1 = 0$ и $q_2 = 0$ являются конечными величинами, причем $a_{11} = a_{22}$. Рассмотрим элементы a_{13} и a_{23} (см. в табл. 3 множители компоненты U_3 с индексами $j = 1$ и $j = 2$):

$$\begin{aligned} a_{13} &= \nu q_1 q_3 - q_3^2 (\varepsilon_{25} q_2 + \varepsilon_{27} q_1) \cdot 3 - (\varepsilon_{21} q_1^3 + \varepsilon_{22} q_2^3 + (\varepsilon_{28} q_1^2 q_2 + \varepsilon_{24} q_1 q_2^2) \cdot 3); \\ a_{23} &= \nu q_2 q_3 + q_3^2 (\varepsilon_{15} q_2 + \varepsilon_{17} q_1) \cdot 3 + \varepsilon_{11} q_1^3 + \varepsilon_{12} q_2^3 + (\varepsilon_{14} q_1 q_2^2 + \varepsilon_{18} q_1^2 q_2) \cdot 3, \\ \nu &= \lambda + \mu - l - m. \end{aligned}$$

Как указывалось выше, полагаем $q_1 = 0$, а переменную q_2 считаем малой величиной, причем члены, содержащие q_2^1 , сохраняем, а члены, содержащие q_2^2 и q_2^3 , считаем пренебрежимо малыми. Тогда

$$a_{13} \approx -q_3^2 \varepsilon_{25} q_2; \quad a_{23} = \nu q_3 q_2 + q_3^2 \varepsilon_{15} q_2 \approx \nu q_3 q_2. \quad (32)$$

В последней формуле принято во внимание соображение $|\nu q_3| \gg \gg |\varepsilon_{15} q_3^2|$, так как постоянные ε_{ik} гирации являются малыми величинами. Теперь формулы (31) приобретают вид

$$h_1^{(2,3)} = -\frac{a_{22} \varepsilon_{25} q_3 + a_{12} \nu}{a_{11} \nu + a_{21} \varepsilon_{25} q_3}; \quad h_3^{(2,3)} = H^{(2,3)} \cdot \frac{1}{q_2}, \quad (33)$$

$$H^{(2,3)} = (-a_{11} a_{22} + a_{21} a_{12}) (a_{11} \nu q_3 + a_{21} \varepsilon_{25} q_3^2)^{-1}.$$

Как видим, в выражении $h_1^{(2,3)}$ опасный множитель q_2 сократился, а в $h_3^{(2,3)}$ мы его выделили отдельно. Он сократится на стадии формулы (37) при $T_z = 0$, т. е. при рассмотрении источника горизонтальной силы: $T_y \neq 0$, $T_x = 0$.

Оценим величину $h_1^{(2)}$. Для волны α_2 функция $q_3 = \tilde{f} \alpha_2$; в соответствии с (16)

$$\alpha_2 = \omega V_{S1}^{-1} (1 - \gamma_\varepsilon)^{-1/2} \approx \omega V_{S1}^{-1} (1 + 2^{-1} \gamma_\varepsilon) \quad (34)$$

(сравни с формулой (29)),

$$a_{11} = a_{22} = \rho \omega^2 + (\mu - m) q_3^2 = -(\mu - m) \omega^2 V_{S1}^{-2} \gamma_\varepsilon = -C \gamma_\varepsilon; \quad (35)$$

$$a_{12} = -a_{21} = \varepsilon_{33} q_3^3 \approx -\tilde{j} C \gamma_\varepsilon, \quad C \equiv (\mu - m) \omega^2 V_{S1}^{-2}.$$

Следовательно,

$$h_1^{(2)} = -\frac{-C \gamma_\varepsilon \cdot \varepsilon_{25} q_3 - \tilde{j} C v \gamma_\varepsilon}{-v C \gamma_\varepsilon + \tilde{j} C \gamma_\varepsilon \cdot \varepsilon_{25} q_3} \approx -\frac{-\tilde{j} C v \gamma_\varepsilon}{-v C \gamma_\varepsilon} = -\tilde{j}. \quad (36)$$

Здесь мы пренебрегли членами, в которые входит произведение $\gamma_\varepsilon \cdot \varepsilon_{25}$, полагая, что коэффициенты γ_ε и ε_{25} представляют собой малые величины. Как видим, компоненты $U_1^{(2)}$ и $U_2^{(2)}$ волны α_2 тоже будут одинаковыми (по амплитуде).

Теперь надо попытаться оценить величины $\tilde{U}_2^{(1)}$ и $\tilde{U}_2^{(2)}$ друг относительно друга и выявить их связь с силой T_y источника. Систему уравнений типа (26) будем решать, полагая, что амплитуда четвертой (новой) волны мала по сравнению с амплитудами других трех волн. В связи с тем, что мы используем соотношения (27), вместо системы (26) будем иметь несколько иную систему:

$$\begin{aligned} \sigma_{j1} U_2^{(1)} + \sigma_{j2} U_2^{(2)} + \sigma_{j3} U_2^{(3)} &= T_j, \quad j = 1, 2, 3; \\ T_1 &= 0, \quad T_2 \equiv T_y \neq 0, \quad T_3 = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

При $q_1 = 0$, $q_2 \rightarrow 0$ и $q_3 = j \alpha_n \neq 0$ формулы для элементов σ_{jk} оказываются не очень громоздкими, и решение системы (37) выглядит следующим образом:

$$\tilde{U}_y^{(1)} = \tilde{U}_y^{(2)} = \frac{1}{2\tilde{j}\mu_1\alpha_{1,0}} T_y, \quad \tilde{U}_y^{(3)} \approx 0, \quad (38)$$

где $\mu_1 \equiv \mu - m = \rho V_{S1}^2$; $\alpha_{1,0} = \omega / V_{S1}$.

Теперь воспользуемся формулой (77) из [7], определяющей смещение $U_{il}^{(n)}(z, \omega)$ частиц среды вдали от источника в точке $[z, \theta = 0]$ через пространственный спектр $\tilde{U}_{il}^{(n)}(k)$ этого смещения при использовании T_l -источника:

$$U_{il}^{(n)} = \frac{1}{2\pi z} \cdot \frac{1}{\alpha_n(\theta)} \left[\frac{1}{2} \tilde{U}_{il}^{(n)}(k) \right]_{k=0} \cdot e^{j\alpha_n z}. \quad (39)$$

В связи с тем что коэффициент гирации γ_ε — величина очень малая, можем считать, что функции $\alpha_1(k_r)$ и $\alpha_2(k_r)$ при $k_r \approx 0$ ведут себя так же, как соответствующие функции в среде без гирации, а именно

$$\ddot{\alpha}_1(k)_{k=0} = \ddot{\alpha}_2(k)_{k=0} = -\left(\frac{\omega}{V_{S1}}\right)^{-1}. \quad (40)$$

Поэтому в нашем случае

$$\frac{1}{\ddot{\alpha}_n(0)} \cdot \left[\frac{1}{2} \tilde{U}_{il}^{(1,2)}(k) \right]_{k=0} = \frac{1}{\ddot{\alpha}_1(0)} \cdot \frac{T_y}{2\tilde{j}\mu_1\alpha_{1,0}} = \frac{\tilde{j}}{2\mu_1} \cdot T_y,$$

и формула (39) приобретает вид

$$U_y^{(1,2)}(z, \omega) = \frac{\tilde{j}}{4\pi\mu_1 z} \left[T_y(k, \omega) \right]_k=0 \cdot \exp \left[\tilde{j} \frac{\omega}{V_{S1}} \left(1 \pm \frac{\gamma_\varepsilon}{2} \right) z \right].$$

Будем считать, что размеры источника Y -силы малы. Тогда, как известно [6], $T_y(k, \omega) = F_y(\omega)$, где $F_y(\omega)$ — временной спектр силы $F_y(t)$ источника. Если используемый источник — вибративный, то $F_y(\omega)$ — амплитуда силы Y -вибратора на частоте ω . Поэтому в случае использования такого вибратора будем иметь

$$U_y^{(1,2)}(z, t) = \frac{\tilde{j}}{4\pi\mu_1 z} F_y(\omega) \exp \left\{ -j\omega \left[t - \frac{z}{V_{S1}} \left(1 \pm \frac{\gamma_\varepsilon}{2} \right) \right] \right\}. \quad (41)$$

Теперь вспомним, что $\tilde{U}_x^{(1)} = \tilde{j}\tilde{U}_y^{(1)}$ и $\tilde{U}_x^{(2)} = -\tilde{j}\tilde{U}_y^{(2)}$. Следовательно, x -сейсмоприемник, установленный на глубине z по центру вибратора, будет регистрировать процесс:

$$\begin{aligned} U_x &= U_x^{(1)} + U_x^{(2)} = \frac{F_y(\omega)}{4\pi\mu_1 z} \left(-e^{\tilde{j}\kappa z} + e^{-\tilde{j}\kappa z} \right) e^{-\tilde{j}\omega \left(t - \frac{z}{V_{S1}} \right)} = \\ &= \frac{\tilde{j}}{2\pi\mu_1 z} \cdot F_y(\omega) e^{-\tilde{j}\omega \left(t - \frac{z}{V_{S1}} \right)} \sin \kappa z, \quad \kappa = \frac{\omega}{V_{S1}} \cdot \frac{\gamma_\varepsilon}{2}. \end{aligned} \quad (42)$$

А на выходе y -сейсмоприемника получим

$$U_y = U_y^{(1)} + U_y^{(2)} = \frac{\tilde{j}}{2\pi\mu_1 z} F_y(\omega) e^{-\tilde{j}\omega \left(t - \frac{z}{V_{S1}} \right)} \cos \kappa z. \quad (43)$$

Как видим, несмотря на то, что источник имеет y -ориентацию, коэффициент гирации γ_ε — очень малая величина, тем не менее на какой-то глубине z , где $\kappa z = m\pi/2$, «законная» компонента U_y будет равна нулю, а на x -сейсмоприемнике будут наблюдаться максимальные колебания. На другой глубине, где $\kappa z = m\pi$, все будет наоборот.

Формулы (42) и (43) можно толковать и так: вниз идут две волны, одна со скоростью $V_{S1}^{(1)} = V_{S1}(1 + \gamma_\varepsilon)^{1/2}$, другая имеет скорость $V_{S1}^{(2)} = V_{S1}(1 - \gamma_\varepsilon)^{1/2}$. Представим себе, что из-за разности скоростей эти волны на каких-то расстояниях разделились во времени. Выделив на импульсной сейсмограмме первую волну $U^{(1)}(t)$, мы рассматриваем ее спектральную компоненту на частоте ω :

$$\begin{aligned} U^{(1)}(\omega) &= U_y^{(1)} e_y + U_x^{(1)} e_x = \operatorname{Re} \{ (e_y + \tilde{j}e_x) U_0(\omega) \} = \\ &= U_0 \cos [\omega(t - z/V_{S1})] e_y + U_0 \cos [\omega(t - z/V_{S1}) + \pi/2] e_x. \end{aligned}$$

В какой-то момент времени t_i , при котором $\omega(t_i - z/V_{S1}) = 2\pi i$, будем иметь $U_y = U_0$, $U_x = 0$. В следующий момент времени $t'_i = t_i + \Delta t$, $\omega\Delta t = \pi/2$, увидим: $U_y = 0$, $U_x = -U_0$, дальше при $t''_i = t_i + 2\Delta t$: $U_y = -U$, $U_x = 0$ и т. д. Как видим, вектор вра-

щается, вращается он против часовой стрелки, совершая полный оборот за один период колебания. Рассуждая так же, легко показать, что во второй волне вектор смещения $U^{(2)}$ вращается по часовой стрелке.

Продолжим рассмотрение первой волны $U^{(1)}$. Пусть эта волна, зарегистрированная на y -сейсмоприемнике, имеет вид $U_y^{(1)}(t) = U_0 \exp[-\omega^2(t-t_0)^2] \cos[\omega(t-t_0)]$. Из приведенных выше формул вытекает, что на x -сейсмоприемнике эта волна будет выглядеть следующим образом:

$$U_x^{(1)}(t) = U_0 \exp[-\omega^2(t-t_0)^2] \sin[\omega(t-t_0)].$$

Чтобы происходила задержка во времени одной волны (α_1) относительно другой (α_2) без искажения их формы, величина $\varkappa \equiv \omega \gamma_\varepsilon (2V_{s1})^{-1}$ должна быть пропорциональна частоте ω , т. е. безразмерный параметр γ_ε в рабочем диапазоне частот не должен зависеть от частоты ω . Поскольку этот безразмерный параметр вводится по формуле $\gamma_\varepsilon = \omega \varepsilon_{33} V_{s1}^{-1} (\mu - m)$ (см. (12)), то параметр гирации ε_{33} должен быть $\sim \omega^{-1}$. Как ведут себя эти параметры в сейсмическом диапазоне частот в действительности — об этом имеются пока лишь некоторые данные, описанные в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Оболенцева И. Р. О возможной связи аномальной поляризации поперечных волн с акустической активностью среды // Теория и практика вибросейсмического зондирования земной коры.— Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1988.— С. 139—149.
2. Оболенцева И. Р. Сейсмическая гиротропия.— Настоящий сборник.
3. Оболенцева И. Р., Гречка В. Ю. Лучевой метод в анизотропной среде (алгоритмы, программы).— Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1989.— С. 192—207.
4. Резяпов Г. И. Экспериментальное изучение причин аномальной поляризации поперечных волн, распространяющихся в ЗМС по вертикали.— Настоящий сборник.
5. Сиротян Ю. И., Шаскольская М. П. Основы кристаллофизики.— М.: Наука, 1979.— 640 с.
6. Чичинин И. С. Вибрационное изучение сейсмических волн.— М.: Недра, 1984.— 224 с.
7. Чичинин И. С. Использование спектральных представлений для решения задачи об излучении упругих волн источником, распределенным на поверхности трансверсально-изотропного полупространства.— Настоящий сборник.

ГЕОЛОГО-ГЕОФИЗИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ВЕРХНЕЙ ЧАСТИ РАЗРЕЗА ГЕОФИЗИЧЕСКОГО ПОЛИГОНА НА ЮГО-ВОСТОКЕ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ

Полигон Томского отдела экспериментальных геофизических исследований (ТОЭГИ) Института геологии и геофизики СО АН СССР находится вблизи с. Альмяково Первомайского района Томской области (рис. 1). Эта правобережная часть Среднего Приобья сравнительно слабо изучена в геолого-геофизическом отношении в связи с проблематичностью перспектив нефтегазоносности слагающих ее мезозойских и палеозойских платформенных образований до глубины 1,5—2,5 км [6 и др.]. Однако данные [5, 7, 8 и др.] свидетельствуют о достаточно типичных сейсмогеологических условиях района для Западно-Сибирского региона в целом, а расположенность участка полигона в зоне сочленения различных тектонических, структурно-литологических, геоморфологических и других геологических элементов разных порядков предоставляет возможность экспериментального изучения широкого круга научных и методических проблем сейсмики.

Независимо от глубины исследований верхняя часть разреза (ВЧР) и, особенно, зона малых скоростей (ЗМС) часто оказывают решающее влияние на поле упругих волн при его формировании и приеме на дневной поверхности, определяя зачастую возможности сейсмических методов при решении тех или иных геологических задач.

Основные направления исследований ТОЭГИ, в особенности по изучению упругой анизотропии и гиротропии осадочных пород, по обоснованию методов высокоразрешающей сейсморазведки (ВРС) и др., также требуют некоторого освещения строения ВЧР полигона, в связи с чем нами принята работа по анализу и обобщению геолого-геофизических сведений [1, 5, 7, 8 и др.], а в 1988—1989 гг. выполнены

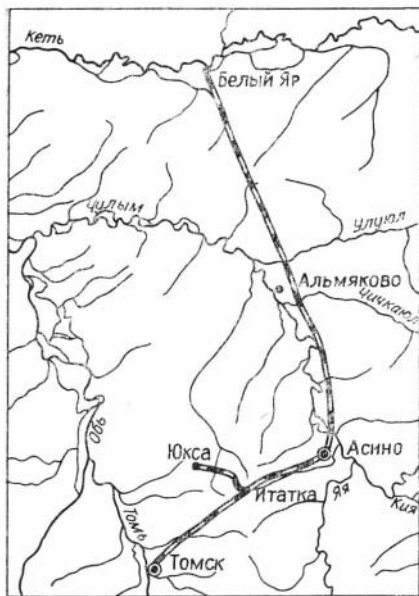
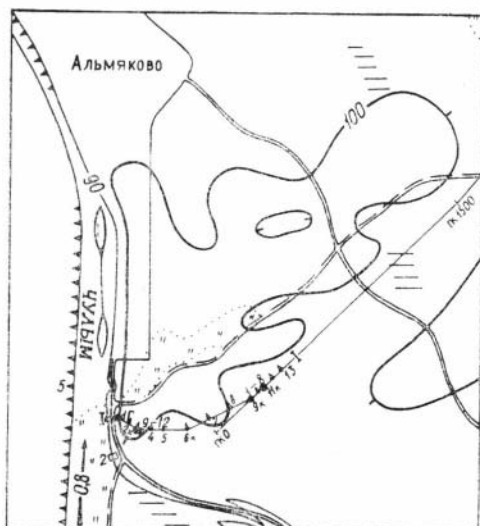


Рис. 1. Обзорная карта района геофизического полигона ТОЭГИ.

Рис. 2. План участка полигона с профилями и пунктами геолого-геофизических наблюдений.

1 — профиль опытно-методических сейсморазведочных работ [1];
 2 — горизонтальная проекция геолого-геофизического разреза ВЧР;
 3 — скважина и ее номер; 4 — группа скважин с их номерами;
 5 — участок отбора ориентированных проб грунта и его номер;
 6 — пункт размещения вибраторов; 7 — горизонталь с абсолютной отметкой поверхности (м);
 8 — пункты ВЭЗ с их номерами (с буквой «к» — круговые ВЭЗ).



некоторые дополнительные исследования с учетом перспективных потребностей в информации для уже полученных и планируемых экспериментальных данных.

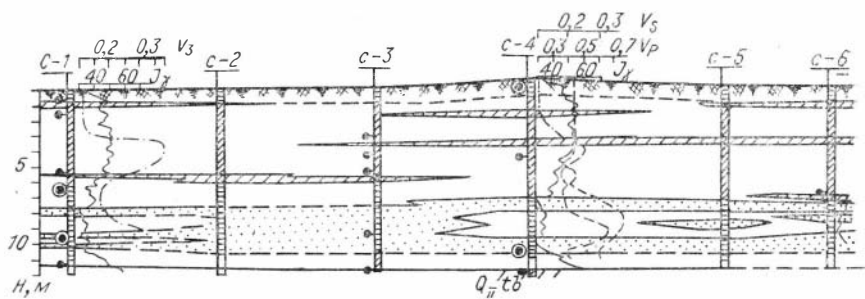
Таким образом, приводимые ниже сведения можно рассматривать в качестве базовой геолого-геофизической информации, которую следует учитывать при рассмотрении содержащихся в настоящем сборнике статей.

Геофизический полигон расположен на юго-восточной окраине Западно-Сибирской равнины (платформы), граничащей здесь с отрогами Кузнецкого Алатау. В орографическом отношении это — западная часть Чулымо-Енисейского плато, являющегося крупной несогласной морфоструктурой, располагающейся в зоне глубокого прогиба фундамента [4].

В тектоническом отношении это — западная окопечность Киселевского поднятия (структура второго—третьего порядка), граничащего на севере со Степановским поднятием, на юге — с Тегульдетской впадиной (структуры второго порядка). Участок полигона находится в зоне простираения трех крупных параллельных разломов фундамента субмеридионального направления, во многом определявших геологическое развитие района вплоть до кайнозоя.

Основная площадка полигона расположена на правом обрывистом берегу р. Чулым, высота которого достигает 20 м и более от уреза воды (рис. 2).

По данным Томской комплексной экспедиции [8] участок отнесен к III надпойменной террасе (Q_{II}^3) р. Чулым. Рельеф его слабоволнистый, заболоченность (в радиусе первых километров) слабая. Площадка полигона покрыта смешанным лесом с преобладанием сосны и березы.



Обрыв берега у с. Альяково представляет собой единственное в районе обнажение III террасы, описываемое следующим образом [8]:

Глубина, м	Характеристика пород
0—0,2	Почвенно-растительный слой
0,2—2,2	Супесь буровато-серая, плотная; с 1 м — с прослоями песка тонкозернистого, глинистого, имеются остатки корней растений
2,2—13,5	Песок буровато- и желтовато-серый, от тонко- до среднезернистого, кварц-полевошпатовый; в интервале 2,2—6,0 м — прослойки и линзочки гравелистого песка мощностью 3—5 см; есть растительные остатки; с 6 м — песок средний, косослоистый (за счет присутствия в нем 1—4-сантиметровых прослоев тонкозернистого глинистого песка)

Ниже залегают зеленовато- и синевато-серые глины тобольской свиты ($Q_{II}tb$). Они плотные, жирные, иногда песчанистые, даже слабо ожелезненные, с мелкими растительными остатками; изредка встречаются прослойки синевато-серых мелкозернистых песков. Эти отложения вскипают при воздействии соляной кислотой (что указывает на их карбонатность). Мощность этих отложений в районе 8—20 м [5, 8].

Примерно такое же строение самой верхней части разреза (ЗМС) установлено в августе 1988 г. бурением до глубины 12—14 м (см. рис. 2—4). Бурение производилось шнеком диаметром 168 мм (установкой УГБ-50) с отбором образцов нарушенной структуры (25 шт.), по которым выполнены анализы в грунтоведческой лаборатории Томского треста инженерно-строительных изысканий (ТомскТИСИЗ).

Почти все скважины подвергались гамма-каротажу (прибором СРП-68-03) с шагом наблюдения $\Delta h = 0,2$ м. Интенсивность естественного гамма-излучения J_γ на графиках рис. 3, 4 дана в делениях шкалы прибора, в абсолютные значения она может быть ориентировочно переведена, исходя из следующих данных прошлых лет [5, 8]: для песчаных пород — 4—5 мкР/ч, для глинистых (супесь, суглинки) — 8—10 мкР/ч.

Следует отметить, что расчленение рыхлых пород ВЧР, проводившееся при различных региональных и поисково-съёмочных работах [5, 8 и др.] на основе общегеологической классификации, часто оказывается недостаточно детальным для анализа

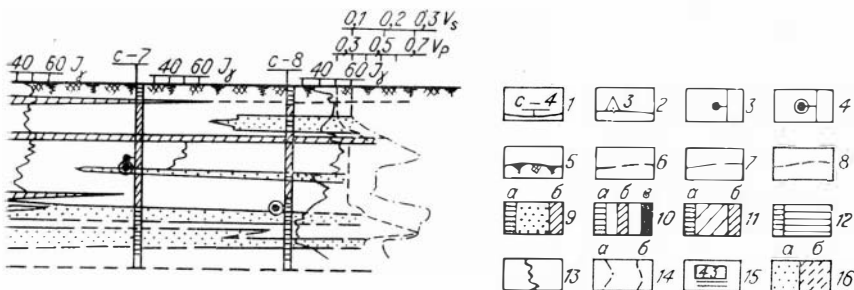


Рис. 3. Геолого-геофизический разрез по линии 1—8 (см. рис. 2).

1 — скважина и ее номер; 2 — пункт ВЭЗ и его номер (с буквой «а» — круговое ВЭЗ); 3, 4 — места отбора проб из скважин для грунтоведческого (3) и минералогического (4) анализов; 5 — почвенно-растительный слой под дневной поверхностью; 6—8 — границы: 6 — стратиграфическая, 7 — литологическая, 8 — между разновидностями (по состоянию) грунтов; 9—12 — грунты: 9 — песок средний и мелкий маловлажный (а) и влажный (б), 10 — супесь твердая (а), пластинчатая (б), текучая (в), 11 — суглинок твердый и полутвердый (а), туго- и мягкопластичный (б), 12 — глина твердая и полутвердая; 13, 14 — графики изменения с глубиной: 13 — интенсивности естественного гамма-излучения J_γ в делениях шкалы прибора, 14 — скоростей распространения упругих поперечных (а) V_S и продольных (б) V_P волн, км/с; 15 — геоэлектрическая граница и значение УЭС слоя, Ом · м; 16 — присутствие песчаных (а) или глинистых (б) частиц в суглинках и супесях.

причин появления анизотропии, гиротропии пород и т. п. Наиболее приемлемой для изучения физики волновых процессов в рыхлых грунтах классификацией является, по-видимому, инженерно-геологическая в соответствии с ГОСТом [6]. Она разделяет на основе количественных показателей состава, состояния и свойств рыхлые грунты на довольно большое число разновидностей, соседние из которых могут существенно отличаться по скоростям упругих волн и другим сейсмоакустическим параметрам. В дальнейшем мы и будем ориентироваться на эту классификацию, называя отложения ВЧР, как правило, грунтами и используя соответствующую терминологию.

С поверхности до глубины 5—7 м на площадке полигона развиты супеси пластичные с естественной (т. е. полной, природ-

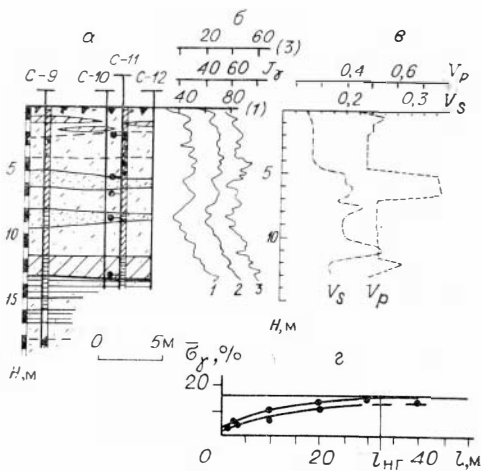


Рис. 4. Строение ЗМС вблизи вибраторной группы на площадке полигона (а) с графиками гамма- (б) и сейсмодатанных (в) данных (кривые гамма-картажа 1—3 получены в скважинах 12, 11 и 10 соответственно); г — оценка интервала горизонтальной литологической неоднородности l_{HG} . Усл. обозн. см. на рис. 3.



Рис. 5. Изменение с глубиной природной влажности w (1) и числа пластичности I_p (2) грунтов ЗМС площадки полигона. Большие точки соответствуют образцам из скважин 10—12 вблизи вибраторной группы (см. рис. 2).

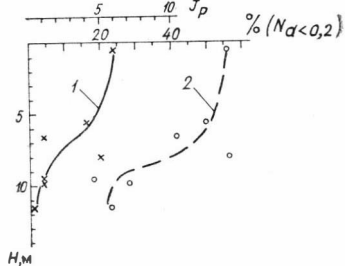


Рис. 6. Сопоставление графиков изменения с глубиной числа пластичности (1) и процентного содержания частиц размером менее 0,2 мм (2) в супесчаных грунтах ЗМС площадки полигона.

ной) влажностью 12—20 % и числом пластичности 4—7, т. е. близкие к суглинку, который присутствует здесь в виде тонких прослоев и прослоек, почти не фиксируемых визуально при линейковом бурении и выделенных в основном по данным гамма-каротажа (см. рис. 3, 4). Ниже глинистость грунтов уменьшается, супеси с числами пластичности 1—3 часто переходят в песок, но и здесь встречаются прослойки суглинка. С глубины 11—12 м появляются прослойки голубовато-серых суглинков и глин, что указывает на переход к среднечетвертичным образованиям тобольской свиты ($Q_{II}tb$).

Общий характер изменения с глубиной литологического состава и состояния грунтов ЗМС для участка полигона в целом отражен на рис. 5, где также отражен тот факт, что на участке группы скважин 9—12 (вблизи экспериментальных вибраторов) естественная влажность грунтов несколько выше, чем у аналогичных грунтов более отдаленного от береговой линии участка полигона вблизи скважин 1—8.

Шесть проб существенно песчаных грунтов (см. рис. 3, 6) подвергались минералогическому анализу в Томском университете. Все пробы содержат заметные количества глинистого материала и могут быть отнесены к мономиктовым глинистым кварцевым пескам либо к мономиктовым песчанистым супесям и суглинкам. Структуры песчаной фракции преимущественно мелко- и среднезернистые. Типична разнородность, выраженная в появлении небольшого количества (первые проценты) более крупных обломков гравийной фракции размером до 3—5 мм. (Все же показатель степени неоднородности гранулометрического состава песков C_v , определяемый по [6], не превышает 0,3, что позволяет классифицировать песчаные грунты на участке скважин 1—8 как однородные пески.) Минеральный состав прост. Суммарное содержание обломков кварца составляет 91—97 %; количество обломков полевых шпатов весьма незначи-

тельно — не более 3—5 %; остальной объем выполнен рудными минералами: магнетит или титаномагнетит до 3 %, единичные зернышки лимонита, гематита, апатита, граната, циркона, очень редко турмалина. Характерная особенность — наличие трех морфологических разновидностей кварца:

1) прозрачный кварц, по внешнему виду напоминающий горный хрусталь; плохо окатан, порой сохраняет хорошую огранку, осколки имеют «льдистый» облик, составляет 35—45 % общего количества кварца;

2) молочно-белый кварц, хорошо окатан, непрозрачен; 30—35 %;

3) желтовато-буроватый кварц, хорошо окатан, трещиноват; 25—30 %.

До 5—7 % общей суммы кварцевых зерен составляют обломки микрокварцитов — высокосиликатных горных пород.

Следует отметить, что столь высокое содержание кварца в песчаной фракции поверхностных отложений площадки полигона является их специфической особенностью, так как пески похожего состава встречаются в районе среднего течения Чулыма очень редко [5, 8].

В сентябре 1989 г. на участке полигона выполнялось вертикальное электрическое зондирование (ВЭЗ) симметричной установкой $AMNB$ длиной до 200 м (максимальный разнос питающих электродов AB), что обеспечило глубинность исследований до 80—100 м. В силу коррелируемости между электрическими (электропроводящими) и упругими свойствами, а также между электрическими и другими показателями литолого-физических характеристик грунтов Среднего Приобья [2, 10 и др.] с помощью ВЭЗ удалось уточнить сейсмогеологическую характеристику ВЧР участка до глубины 50—100 м, что отражено на рис. 7.

Коэффициент увеличения разносов (длины) установки ВЭЗ $k = AB_{i+1}/AB_i$ не превышал 1,31, что обеспечило наибольшую возможную детальность метода при вертикальном расчленении разреза. Количественная интерпретация кривых ВЭЗ при этом производилась с помощью совмещенных двухслойных палеток с палетками LCN и LCQ [9].

Заметим, что характеризующие удельным электрическим сопротивлением (ρ , или УЭС) объемы грунтов (пород) примерно совпадают с объемами, характеризующимися наблюдаемыми полями упругих волн от импульсных источников, по крайней мере до глубины 30—40 м, где эти объемы, характеризующиеся электро- и сейсмометрией (т. е. по ρ и v_i), варьируют в пределах (увеличиваясь сверху вниз): в плане — от 3—7 до 20—30 м, по глубине — от 0,5—1,0 до 2—5 м [2, 10].

С помощью круговых зондирований (КВЭЗ), т. е. путем выполнения 3—4 ВЭЗ вокруг одного центра в различных направлениях (азимутах) разносов, оценивалась горизонтальная анизотропия электрических свойств поверхностных отложений.

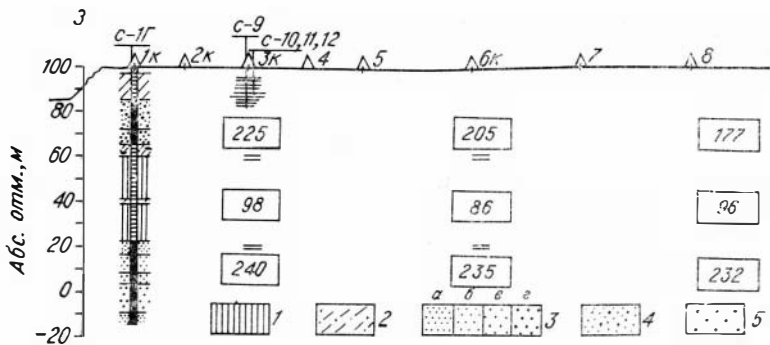


Рис. 7. Геолого-геофизический разрез ВЧР по линии I — I.

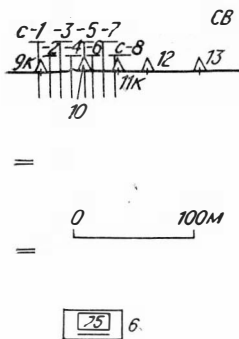
1 — глина; 2 — алевроит серый с прослоями лигнита; 3 — песок (а — тонкий, б — мелкий, в — средний, г — крупный); 4, 5 — гравий мелкий (4) и крупный (5) хорошо окатанный, кремнисто-кварцевый состава, насыщенный водой. Остальные усл. обозн. см. на рис. 3.

Учитывая коррелируемость эффективного УЭС грунта со скоростью упругих продольных волн (в соизмеримых объемах среды, соответствующих длинам волн [2]), следует ожидать, что изменения величины v_p в одном и том же пункте наблюдения в зависимости от азимута луча могут достигать: с поверхности до глубины 5—6 м — 15—20 %, на глубинах до 18—20 м — 3—7 %, до 25—30 м — 2—4 %.

Следует отметить, что при бурении глубокой скважины 1 Г документация ее велась довольно грубо, без выделения супесей и суглинков, которые в основном и составляют толщу рыхлых четвертичных отложений, но которые необоснованно относились к пескам и глинам [1]. Поэтому на рис. 7 разрез скважины 1 Г принят с учетом уточнений по ВЭС, гамма-каротажу и на основе интерполяции разрезов обнажения берега в 30 м от данной скважины и группы скважин 9—12.

Кроме результатов уже описанных геолого-геофизических наблюдений, для уточнения литолого-физического строения участка полигона использовались материалы различных сейсмометрических наблюдений, главным образом микросейсмокаротажа на рефрагированных продольных (P) и поперечных горизонтально поляризованных (SH) волнах (см. статью Г. И. Резяпова в наст. сборнике). Методика наблюдений и обработка материалов соответствовали при этом рекомендациям [3], широко апробированным в инженерной сейсморазведке [2 и др.]. Результаты обработки этих данных представлены на рис. 3, 4 в виде графиков изменения с глубиной скоростей упругих волн v_p и v_s , графики иллюстрируют существенную неоднородность скоростного строения разреза ЗМС.

Вообще характерной особенностью ЗМС площадки полигона (как и большинства кайнозойских образований Среднего Приобья) является существенная локальная литолого-физическая неоднородность (микронеоднородность) разреза как по глубине,



так и в плане (см. рис. 3—7). В частности, на это указывают описание обнажений берегового обрыва, появление песка на глубине до 5 м в восточной части профиля I—I, данные ВЭЗ и каротажей. Литологическую изменчивость грунтов в плане представляется возможным оценить количественно — по изменению среднеквадратического отклонения σ_{γ} величины естественной радиоактивности (J_{γ}), зафиксированной на одних и тех же глубинах в различных скважинах, в зависимости от расстояния

между этими скважинами (см. рис. 4, з). Экстраполируя эту зависимость в нулевое расстояние, можно, кстати, приближенно оценить и погрешность измерения J_{γ} . По-видимому, интервалы пространственной неоднородности, т. е. расстояния, на которых показатели интересующих нас свойств (в данном случае упругих) существенно изменяют свои значения (на 30 % и более), могут составлять для наиболее изменчивых участков ЗМС полигона: в плане — менее 10—15 м, в разрезе — менее 1—1,5 м. Это обстоятельство необходимо учитывать при проведении тех или иных экспериментальных сейсмических наблюдений, сопоставляя ожидаемые длины упругих волн с указанными интервалами неоднородности.

Сведения о неоднородности среды, в частности микронеоднородности, нужны для понимания особенностей экспериментально наблюдаемой «аномальной» поляризации поперечных волн, ее связи с анизотропией и гиротропией (см. статью И. Р. Оболенцевой «Сейсмическая гиротропия» в настоящем сборнике). Экспериментальному изучению поляризации поперечных волн, выполненному на участке геофизического полигона ТОЭГИ, посвящена работа В. П. Скавинского, Юн Ен Дина «Об обменных отраженных *PS*- и *SP*-волнах...» (см. наст. сборник).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баянов А. С., Кулаков В. Ф., Резяпов Г. И. Отчет о работах опытно-методической сейсморазведочной партии № 25/84 в Первомайском районе Томской области. летом 1984 г.— Томск: ПГО «Томскнефтегазгеология», Томский геофизический трест, 1985.— 148 с.
2. Безходарнов В. В., Козин Е. С., Резяпов Г. И. Исследования строительных свойств грунтов Среднего Приобья геофизическими методами // Исследования по строительной механике и строительным конструкциям.— Томск: Изд-во Том. ун-та, 1987.— С. 10—14.
3. Бондарев В. П. Рекомендации по применению сейсмической разведки для изучения физико-механических свойств рыхлых грунтов в естественном залегании для строительных целей.— М.: Стройиздат, 1974.— 142 с.
4. Гвоздецкий Н. А., Михайлов П. И. Физическая география СССР: Азиатская часть.— М.: Мысль, 1970.— 543 с.
5. Головеров А. Г., Колпаков В. Я. и др. Геология и полезные ископаемые среднего течения р. Чулым: Отчет по групповой геологической съемке

- масштаба 1 : 200 000 Тегульдетской площади по работам 1976—1982 гг.— Томск: Том. геолого-разведочная экспедиция, 1982.— Т. 1.— 359 с.
6. ГОСТ 25100-82. Грунты. Классификация.— Июль, 1982.— 9 с.
 7. Сурков В. С., Ягерь О. Г. Фундамент и развитие платформенного чехла Западно-Сибирской плиты.— М.: Недра, 1981.— 208 с.
 8. Фадеев А. И., Горяева А. М. Геологическое строение и полезные ископаемые бассейна нижнего течения р. Чулым в районе устьев рек Улу-Юл и Чичка-Юл: Отчет Чичка-Юльской геолого-съемочной партии по работам 1962—1963 гг.— Томск: Томская комплексная экспедиция, 1963.— 196 с.
 9. Хмелевской В. К. Ускоренный способ графических построений и интерпретации кривых электрических зондирований. Экспресс-информация. Сер.: Региональная, разведочная и промысловая геофизика.— М.: Изд. ВИАМС, 1970.— № 57.— 8 с.
 10. Ширяев В. Ф., Безходаров В. В. Оценка интервалов параметрической неоднородности грунтов на основе автокорреляционного анализа результатов геофизических и опытных исследований // Геофизические методы в гидрогеологии, инженерной геологии и гидротехнике.— Ереван, 1985.— С. 113—115.

Г. И. РЕЗЯПОВ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ПРИЧИН АНОМАЛЬНОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ЗМС ПО ВЕРТИКАЛИ

В настоящей статье приводятся результаты экспериментов, ведущихся на продолжении ряда лет в Первомайском районе Томской области на полигоне ТОЭГИ в с. Альямяково. За последние два года получены результаты, позволяющие, по нашему мнению, объяснить некоторые черты наблюдаемой аномальной поляризации поперечных волн.

По результатам экспериментов, проведенных в 1987 г. [6], показано, что аномальная поляризация поперечных волн может быть связана со строением среды на глубине и в ЗМС, причем влияние ЗМС на поляризацию соизмеримо с влиянием остальной части пути или даже превышает его. В связи с этим в 1988 г. основное внимание было уделено изучению волнового поля в ЗМС. Дополнительно изучены геологическое строение отложений, слагающих ЗМС, и их скоростная характеристика по продольным и поперечным волнам (результаты этих исследований приводятся в настоящем сборнике [1]). Существенно улучшено техническое оснащение экспериментов: сейсмические колебания регистрировались сейсмической станцией ИСН-24 (венгерского производства) в цифровой форме с шагом дискретизации по времени 0,5 и 0,25 мс, при изучении скоростной характеристики разреза использовался снаряд ССК-1 с регулируемым прижимом к стенке скважины.

В экспериментах использовались вибрационные и импульсные (ударные) источники колебаний.

Методика экспериментов с вибрационным источником колебаний была такой же, как при ранее проведенных работах [6]. Вибратор располагался над скважиной 1987 г. в различных азимутах, всего отработано четыре азимута: 0, 30, 60 и 90°. Прием колебаний в скважине под вибратором проводился шестикомпонентными снарядами (шесть горизонтальных сейсмоприемников СГ-10 с шагом по азимуту 30°), расположенными на глубинах от 0,5 до 15 м с шагом по глубине, равным 3 м, на цифровую сеймостанцию ИСН-24 при шаге дискретизации 0,5 мс на фиксированных частотах от 10 до 45 Гц через 5 Гц. Этот диапазон частот в дальнейшем будем называть низкочастотным.

Имевшийся в нашем распоряжении макет «Вибролокатора» не позволяет работать на частотах выше 50 Гц, поэтому исследования в высокочастотной области проведены с ударным источником. Методика этих экспериментов заключалась в следующем. Возбуждение поперечных волн производилось ударами по торцам прижатого к грунту бруса (прижимное усилие более 300 кг). Брус располагался в различных азимутах над скважиной (отработано шесть азимутов с шагом 30°). Прием колебаний был таким же, как при использовании вибратора, только шаг дискретизации по времени уменьшен до 0,25 мс.

При изучении скоростной характеристики разреза использовались также горизонтальные и вертикальные удары, регистрация колебаний проводилась с шагом по глубине, равным 0,5 м, трехкомпонентным скважинным снарядом ССК-1. Интервальные скорости рассчитывались непосредственно по непродольным годографам (вынос ПВ 1м) по программам, учитывающим вертикальный градиент скорости. Результаты изучения скоростной характеристики приводятся в настоящем сборнике [1].

При обработке результатов экспериментов полевые магнитограммы с сеймостанции ИСН-24 вводились в ЭВМ. Первичная обработка импульсных разнонаправленных «+» и «-» воздействий заключалась в определении взаимных сдвигов и выравнивании амплитуд по продольной волне, после чего получались разностные сейсмограммы. На рис. 1, а приведены фрагменты сейсмограмм с записями прямой поперечной волны, иллюстрирующие процесс получения разностных сейсмограмм. Они зарегистрированы в скважине на глубинах 6 и 12 м. На зависимых основной компоненты (возбуждение по оси X и прием по оси x) как импульсы от $\pm X$ -воздействий, так и разностный импульс X имеют почти правильную форму косинус-импульсов. На побочной компоненте (возбуждение по оси X , прием по оси y) импульсы от разнонаправленных воздействий имеют сложную интерференционную форму; на временах, меньших времени прихода поперечной волны, регистрируется необращающаяся волна, природа которой пока неясна. Разностный импульс на побочной

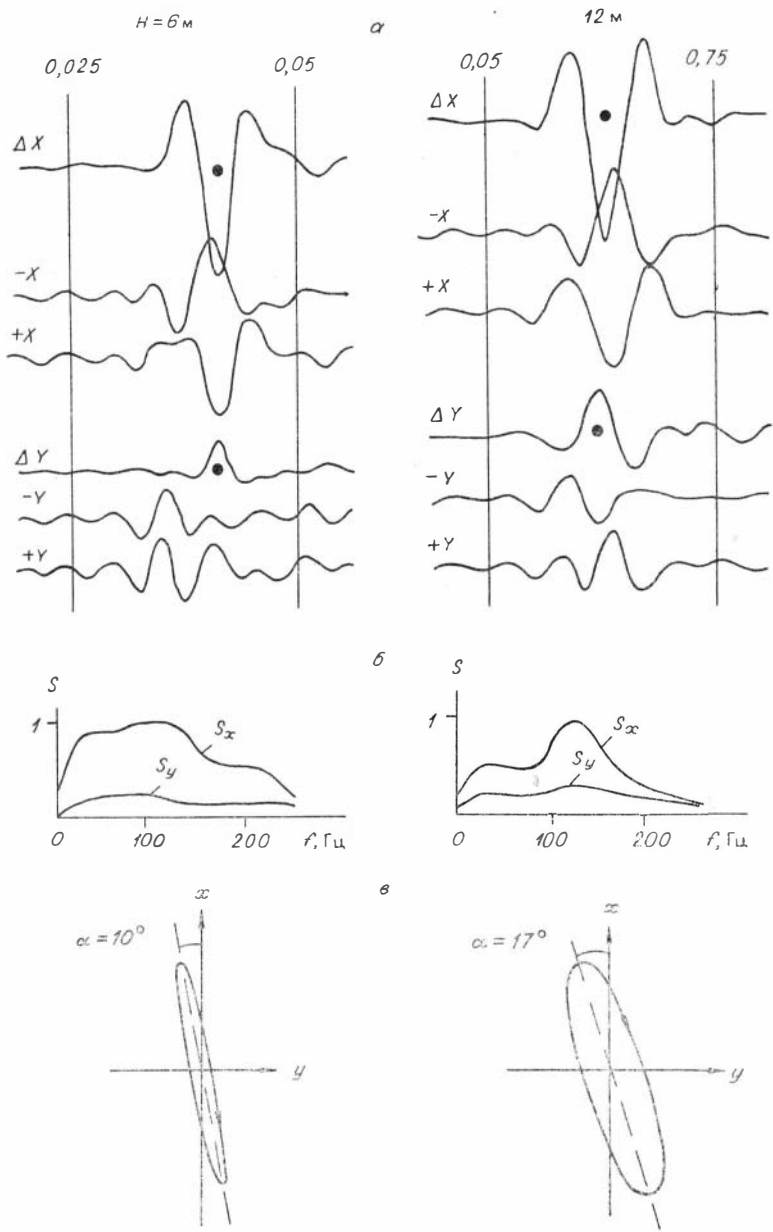


Рис. 1. Вычитание разнонаправленных воздействий (а), спектры колебаний на основной S_x и побочной S_y компонентах (б), траектории движения частиц (в).

компоненте имеет ту же форму, что и на основной. Для последующей обработки использовались разностные записи.

Предварительный анализ полученных записей и их спектров показал, что форма колебаний не стабильна и меняется с изменением азимута воздействия и глубины приема. Примером могут служить записи на рис. 1, а и их спектры на рис. 1, б для двух глубин. Траектории движения частиц, как правило, имеют сложный вид, из-за этого изучение поляризации по импульсным записям оказалось весьма затруднительным и не позволяло выявить какие-либо закономерности. Поэтому анализировались гармонические колебания, которым, как известно, должны соответствовать траектории движения частиц в виде эллипсов.

Для нахождения амплитуд и фаз гармоник использовались спектры S_x , S_y основной и побочной компонент. Гармоническая векторная волна, согласно теории колебаний, определяется комплексным числом $r(\omega) = \exp i\delta(\omega)$, где $r(\omega) = |S_y(\omega)|/|S_x(\omega)|$, $\delta(\omega) = \arg S_y(\omega) - \arg S_x(\omega)$. По параметрам r , δ находились параметры эллипсов, характеризующих колебания на разных частотах. Вычислялись отношения полуосей эллипсов (B/A) и углы (χ), образуемые большими осями эллипсов с направлением оси Ox (X — направление воздействия). Использовались формулы (см. [5]):

$$\frac{B}{A} = \left[\frac{1 + r^2 - [(1 + r^2)^2 - 4r^2 \sin^2 \delta]^{1/2}}{1 + r^2 + [(1 + r^2)^2 - 4r^2 \sin^2 \delta]^{1/2}} \right]^{1/2}; \quad (1)$$

$$2\tilde{\chi} = \begin{cases} \arctg [2r \cos \delta / (1 + r^2)], & \text{если } \cos \delta > 0, \\ \pi + \arctg [2r \cos \delta / (1 + r^2)], & \text{если } \cos \delta < 0, \end{cases} \quad (2)$$

поскольку искомые углы 2χ должны находиться в интервалах $[0, \pi]$ либо $[0, -\pi]$, углы $2\tilde{\chi}$, найденные по формуле (2), пересчитывались в углы 2χ по формулам приведения:

$$\begin{aligned} \text{если } 2\tilde{\chi} > \pi, & \text{ то } 2\chi = 2\tilde{\chi} - 2\pi; \\ \text{если } 2\tilde{\chi} < -\pi, & \text{ то } 2\chi = 2\pi + 2\tilde{\chi}. \end{aligned}$$

Записи, полученные при вибрационном возбуждении на фиксированных частотах, также представлялись в виде параметров эллипсов.

Изучение эллипсов поляризации, полученных для различных частот, глубин и при разных направлениях возбуждения, позволило выявить некоторые закономерности в их поведении. Отчетливо прослеживается тенденция к увеличению угла поворота большой оси эллипса с увеличением частоты и глубины. (Зависимость угла поворота эллипса от глубины уже отмечалась при описании рис. 1.) Отношение полуосей эллипса меняется не столь закономерно, как угол поворота. Зависимость от азимута воздействия хотя и наблюдается, но не имеет регулярного характера.

Наличие побочных компонент смещений при распространении по вертикали многие исследователи объясняют наличием азимутальной анизотропии, связанной с вертикальной трещиноватостью. Другой причиной появления побочных компонент, на наш взгляд более вероятной для изучаемых отложений, может быть их неоднородность и микронеоднородность — по вертикали и по горизонтали. Изучение геологического строения разреза показало [1], что среда отличается высокой степенью неоднородности в отношении как тонкой слоистости, так и состава песчаных и глинистых фракций и их чередования и переслаивания. Такие среды И. Р. Оболенцевой предложено описывать с помощью гиротропных моделей [4, 5]. Для ответа на вопрос о правомерности аппроксимации среды гиротропной моделью решающую роль играет изучение характера поляризации поперечных волн при распространении их по оси симметрии среды, в данном случае по вертикали. Полученные данные показывают, что они отвечают модели гиротропной среды с поглощением, так как наблюдаются не линейно поляризованные колебания, а эллипсы, которые разворачиваются относительно направления воздействия по мере увеличения длины пути; на больших частотах повороты больше.

По параметрам эллипсов поляризации определялись параметры поглощающей гиротропной среды a , b [5], входящие в выражения

$$V_{1,2} = V_0 + \Delta V, \quad \Delta V = \pm a - bi, \quad (3)$$

для скоростей двух поперечных волн на оси симметрии среды (V_0 — скорость в трансверсально-изотропной среде (без гиротропии) на вертикали, ΔV — «гиротропная добавка», состоящая из действительной части $\pm a$ и мнимой b).

В гиротропной непоглощающей среде $b = 0$, а

$$V_{1,2}^2 = V_0^2 \pm Q/\rho = V_0^2 \pm g_{3333}/\rho, \quad (4)$$

где $Q = Q_3$ — компонента аксиального вектора акустической гирации Q ; g_{3333} — компонента псевдотензора акустической гирации g . Отсюда следует, что константы a и Q/ρ связаны зависимостью $Q/\rho = 2Va + a^2 \approx 2Va$.

Параметры a , b определялись по формулам (98) из [5]. Для их вычисления задавались следующие величины: h — глубина точки наблюдения; V_0 — средняя скорость в среде без гиротропии в интервале от поверхности до глубины h ; ω — круговая частота колебаний; B/A , \varkappa — параметры эллипса на частоте ω .

Вычисления параметров a , b производились по записям колебаний от вибратора в диапазоне частот $f = 15-40$ Гц (низкочастотном) и от ударов в диапазоне частот $f = 60-180$ Гц (высокочастотном). На рис. 2 приводятся графики функций $a(f)$, $b(f)$ до глубин 6 м и 12 м. Нанесены значения, осредненные по всем азимутам; показаны средние значения и отклонения от средних значений. Кривые в низкочастотном диапазоне, как это

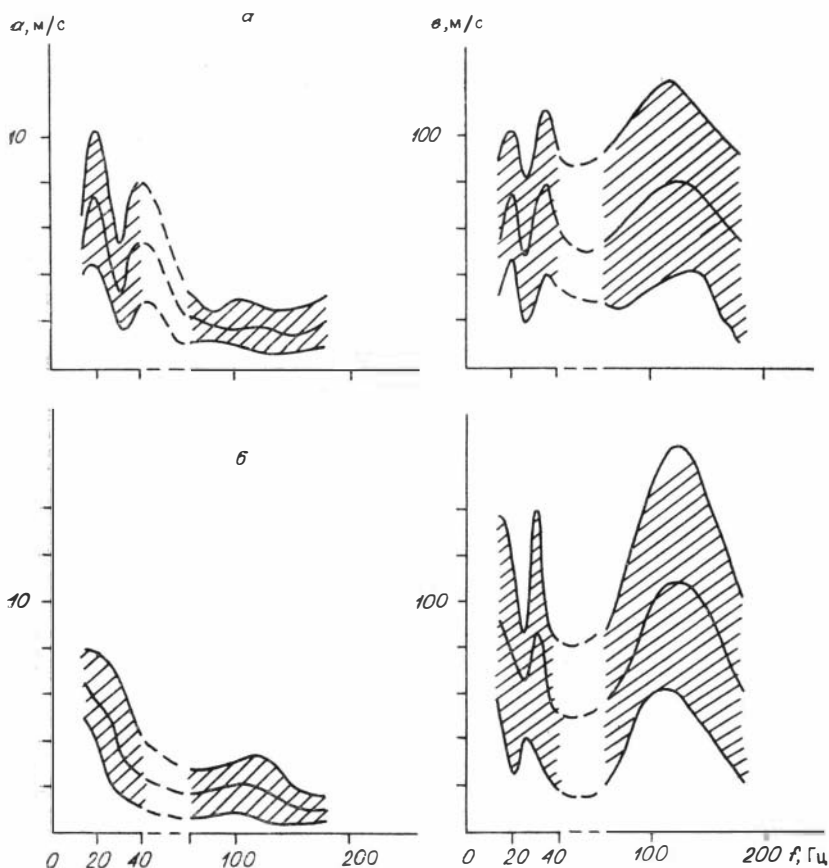


Рис. 2. Параметры гирации a , b для поглощающей среды в зависимости от частоты f для среды до глубины 6 м (а) и 12 м (б).

видно из шкалы на оси абсцисс, в 2 раза растянуты по горизонтали по сравнению с кривыми в высокочастотном диапазоне; они строились с шагом 5 Гц, в то время как кривые на высоких частотах — с шагом 30 Гц.

Согласно графикам на рис. 2, величина действительной части ΔV не превышает 10 м/с при средней скорости поперечных волн до этих глубин 155—175 м/с и убывает с частотой, отклонение от среднего значения составляет 30 %. Величина мнимой части ΔV изменяется в значительных пределах с отклонением от среднего значения более чем на 50 %.

Таким образом, параметры $a = \text{Re } \Delta V$ и $b = \text{Im } \Delta V$ оказались различающимися на порядок. Малые значения параметра a (относительно V_0) представляются соответствующими модели и явлению гиротропии, они хорошо согласуются со значениями ΔV для кварца, приведенными в [8, с. 543]. Значения параметра по-

глощения b (также в сравнении с V_0) кажутся чрезмерно большими. Параметр b , вообще говоря, не связан с гиротропией. Поэтому, пренебрегая значением a в формулах (3) для ΔV и положив $V_{1,2} = V = V_0 - bi$, можем найти коэффициенты поглощения по формуле для изотропной среды $\beta = \omega \operatorname{Im} V(\omega) / |V(\omega)|^2$.

Получаются следующие значения (м^{-1}):

	Частота f , Гц			
	60	90	120	150
До глубины 6 м	0,72	1,32	1,87	1,90
До глубины 12 м	0,57	1,23	1,83	2,13

Логарифмические декременты поглощения $\theta = \beta \cdot \lambda$ на этих же частотах соответственно равны:

До глубины 6 м	1,90	2,40	2,49	2,00
До глубины 12 м	1,72	2,45	2,75	2,56

Эти значения хорошо согласуются с приводимыми в литературе [3, 7, с. 72] данными о поглощении поперечных волн, а также с выполненными нами расчетами коэффициентов поглощения β и декрементов θ по затуханию амплитуд импульсов на основной компоненте в рассматриваемых интервалах глубин.

Характерной чертой полученных зависимостей $a(f)$, $b(f)$ (см. рис. 2) является большой разброс значений для разных азимутов воздействий. Скорее всего этот разброс, по крайней мере значений a , является характеристикой самой гиротропной модели и связан с природой гиротропии.

Параметры гиротропной среды являются частотно зависимыми (см. рис. 2). Для среды до глубины 12 м в таблице приведены значения материальной константы Q/ρ , определяемой выражением (4), а также удельного вращения плоскости поляризации α , определенные по поворотам эллипсов, для различных частот из диапазона 15—180 Гц. Значения α осреднены по азимутам, кроме значений для частот 60—180 Гц; в этом интервале частот значения α имеют разные знаки для разных азимутов и поэтому не осреднялись, приведены значения для одного из азимутов. Впервые вращение вектора поляризации в зависимости от частоты

Дисперсия компоненты Q_3 аксиального вектора акустической гирации Q и удельного вращения α

Частота f , Гц	$Q/\rho \times 10^{-5}$, $\text{м}^2\text{с}^{-2}$	α , град/м	Частота f , Гц	$Q/\rho \times 10^{-5}$, $\text{м}^2\text{с}^{-2}$	α , град/м
15	235	0,42	60	69	0,47
20	204	0,68	90	72	-0,71
25	184	0,89	120	74	0,91
30	123	0,61	150	40	0,47
35	109	0,73	180	46	-2,80
40	90	1,05			

П р и м е ч а н и е. Значения α со знаком «+» соответствуют левой поляризации, со знаком «-» правой, согласно определению, принятому в [5].

наблюдал И. С. Чичинин [2]. Однако в то время это явление осталось не понятым.

Экспериментальные исследования гиротропии реальных сред, описанные в данной работе, будут продолжены.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безходарнов В. В., Макаренко Н. А. Геолого-геофизическая характеристика верхней части разреза геофизического полигона на юго-востоке Томской области.— Настоящий сборник.
2. Васильев В. П., Евчатов Г. П., Окунева В. Ф. и др. Экспериментальные исследования процесса возбуждения сейсмических волн вибрационным источником // Вопросы возбуждения сейсмических волн вибрационным источником.— Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1976.— С. 65—86.
3. Кондратьев О. К. Сейсмические волны в поглощающих средах.— М.: Недра, 1986.— 175 с.
4. Оболенцева И. Р. О возможной связи аномальной поляризации поперечных волн с акустической активностью среды // Теория и практика вибросейсмического зондирования земной коры.— Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1988.— С. 139—149.
5. Оболенцева И. Р. Сейсмическая гиротропия.— Настоящий сборник.
6. Резяпов Г. И. Экспериментальное изучение поляризации поперечных волн, возбуждаемых горизонтальным вибратором // Теория и практика вибросейсмического зондирования земной коры.— Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1988.— С. 130—139.
7. Сейсморазведка: Справочник геофизика.— М.: Недра, 1981.— 464 с.
8. Сиротин Ю. И., Шаскольская М. П. Основы кристаллофизики.— М.: Наука, 1979.— 639 с.

В. П. СКАВИНСКИЙ, ЮН ЕН ДИН

ОБ ОБМЕННЫХ ОТРАЖЕННЫХ PS - И SP -ВОЛНАХ ПРИ ВИБРАЦИОННОМ X -, Y -, Z -ВОЗБУЖДЕНИИ И ТРЕХКОМПОНЕНТНОЙ (x, y, z) РЕГИСТРАЦИИ

В практике многоволновой сейсморазведки методом отраженных волн в основном используются монотипные PP -, SH - и обменные PS -волны и накоплен определенный опыт [5, 10]. В последнее время в этот комплекс вовлекаются обменные SP -волны [3], что должно привести к повышению надежности кинематической интерпретации и расширению возможностей анализа и использования динамических характеристик волн.

Впервые обменные SP -волны наблюдались в 1970—1971 гг. сотрудниками Института геологии и геофизики СО АН СССР в южной части Прикаспийской впадины в районе соляного купола Теркобай [8]. На профиле, идущем вкрест простирания пород, на удалениях от источника $r \geq 600$ м была зарегистрирована на z -компоненте волна SP , отраженная от горизонта III (угол наклона $\sim 20^\circ$, глубина залегания порядка 500 м). Применялся траншейный источник типа X -силы с последующим

вычитанием воздействий $+X$ и $-X$. Во взаимных точках волна SP увязывалась с волной PS , полученной при $\pm X$, а также $\pm Y$ -воздействиях и зарегистрированной на x -компоненте.

Следующими были работы, выполненные в 1980 г. в США на газовом месторождении Пуа Синк вблизи Дэвиса (Калифорния) [11]. Использовались вертикальные (Z) и горизонтальные Y -вибраторы и трехкомпонентная (x, y, z) регистрация. Наблюдения производились методом ОГТ для получения временных разрезов по волнам P, SH и $P-SV$. Комплексование P - и SH -волн применялось для обнаружения залежей газа по яркому пятну на P -волнах и отсутствию его на SH -волнах; дополнение продольных волн обменными PS предполагало улучшение прослеживания сбросов. Наиболее ярким и неожиданным результатом этих работ явилось то, что были зарегистрированы волны SP от Y -вибратора. Эти волны оказались очень «чистыми» сравнительно с волнами PS (выше отношение сигнал — помеха) и позволили получить временные разрезы, характеризующиеся высокой разрешенностью и повышенной глубиной.

В последние годы (с 1986 г.) обменные SP -волны были зарегистрированы в Новосибирской области при работах с использованием комплекса «Вибролокатор-2» [3]. Применялись вибрационное X -возбуждение и прием на z -компоненте. Для сравнения волн SP с волнами PS последние возбуждались при Z -ориентации силы вибратора и регистрировались на x -компоненте. Г. П. Евчатовым с соавторами [3] отмечается, что в кинематическом отношении волны SP и PS эквивалентны, но различаются по динамическим характеристикам, в частности преобладающие частоты волн SP ниже, чем волн PS .

Для условий Западной Сибири, ввиду трудностей возбуждения чисто поперечных (SS) волн из-за заболоченности большей части территории, применение обменных волн представляет собой наиболее оптимальную модификацию многоволновой сейсморазведки. Эффективность комплексного применения волн PP и PS была показана в работах [1, 2]. Применение комплекса волн PP и SP , по-видимому, будет более рациональным, чем PP и PS , ввиду большей технологичности полевых работ [3].

Из приведенного обзора данных о применении волн SP видно, что их изучение имеет несколько аспектов и включает вопросы анализа кинематических и динамических характеристик, обработки, интерпретации, информативности, комплексования с другими волнами и т. п. Часть этих проблем рассмотрена Г. П. Евчатовым и др. [3] (применительно к условиям Западной Сибири). В настоящей работе ставится задача экспериментального изучения особенностей поляризационных свойств волн SP сравнительно с волнами PS . Приводимые данные представляют интерес с точки зрения характеристики реальной среды, тех ее особенностей, которые вызывают аномальную поляризацию поперечных волн [6, 7, 9]. Как известно, экспериментально наблюдаемая поляризация поперечных волн

Рис. 1. Схематическое изображение строения среды и основных групп волн. Вертикальными линиями со стрелками выделен интервал наблюдения.

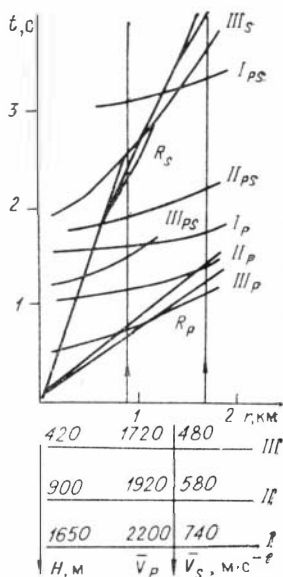
(поперечных в той или иной части пути) имеет сложный характер и пока не объясняется достаточно хорошо ни одной из предложенных моделей. Вполне возможно, что ближе всего к действительности находится модель гиротропной среды*. Тогда приводимые нами сейсмограммы имеют к этому непосредственное отношение.

Эксперименты были проведены осенью 1988 г. в Томской области на Альямовском геофизическом полигоне. В качестве источника колебаний использовался один из первых макетов вибратора комплекса «Вибролокатор». Амплитуда силы вибратора равна $5 \cdot 10^4$ Н в диапазоне 25—46 Гц, ниже 25 Гц амплитуда силы вибратора уменьшается по квадратическому закону. Вибраторы комплекса «Вибролокатор» позволяют оперативно изменять ориентацию силы. Применялось X-, Y-, Z-возбуждение и трехкомпонентная (x , y , z) регистрация. Наблюдения проводились на расстановке длиной 800 м в интервале расстояний от источника 900—1700 м. Шаг между точками наблюдения — 25 м, база группирования сейсмоприемников — 30 м (по 20 приборов в группе); тип сейсмоприемников: СВ-10Ц, СГ-10.

Модель среды и соответствующие ей основные группы волн изображены на рис. 1. Характеристика разреза составлена по данным работ ОГТ, выполненных на данном участке ранее силами ТОЭГИ и Томского геофизического треста.

На рис. 2 приводится сейсмограмма Z_z , на которой видны продольные волны: рефрагированная R_p и отраженные II_p , I_p ; волны II_p и I_p регистрируются в интервале 0,75—1,8 с. На времени 3,15—3,3 с видна отраженная волна I_{PS} . Следует отметить, что при наблюдениях по системе многократных перекрытий и обработке по ОГТ получают временные разрезы вполне удовлетворительного качества, чего нельзя сказать о приводимых здесь сейсмограммах ОТВ.

Обменные волны типа PS зарегистрированы на сейсмограммах Z_x (рис. 3, а): волна II_{PS} — в интервале 2,4—2,7 с с кажущейся скоростью $V_k \approx 2,6$ км/с и волна I_{PS} — в интервале времени 3,2—3,5 с, $V_k \approx 5,6$ км/с. Волна I_{PS} прослеживается не пол-



* См. статья И. Р. Оболенцевой; Г. И. Резяпова; И. С. Чичина и М. М. Немировича-Дапченко в наст. сборнике.

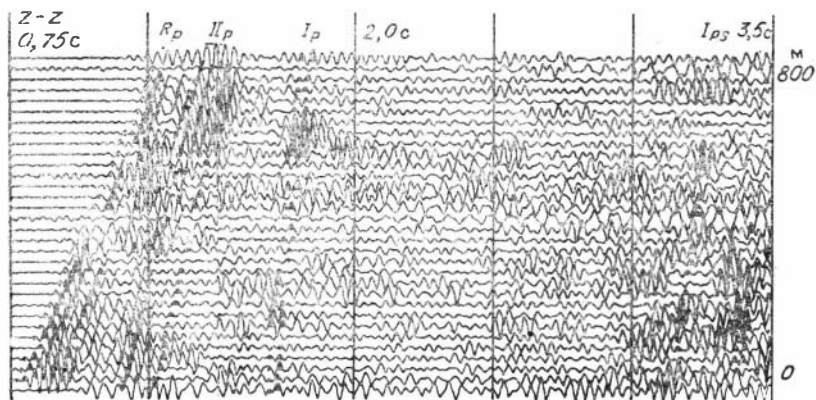


Рис. 2. Сейсмограмма, полученная при вертикальном Z -возбуждении и z -приеме (Zz).

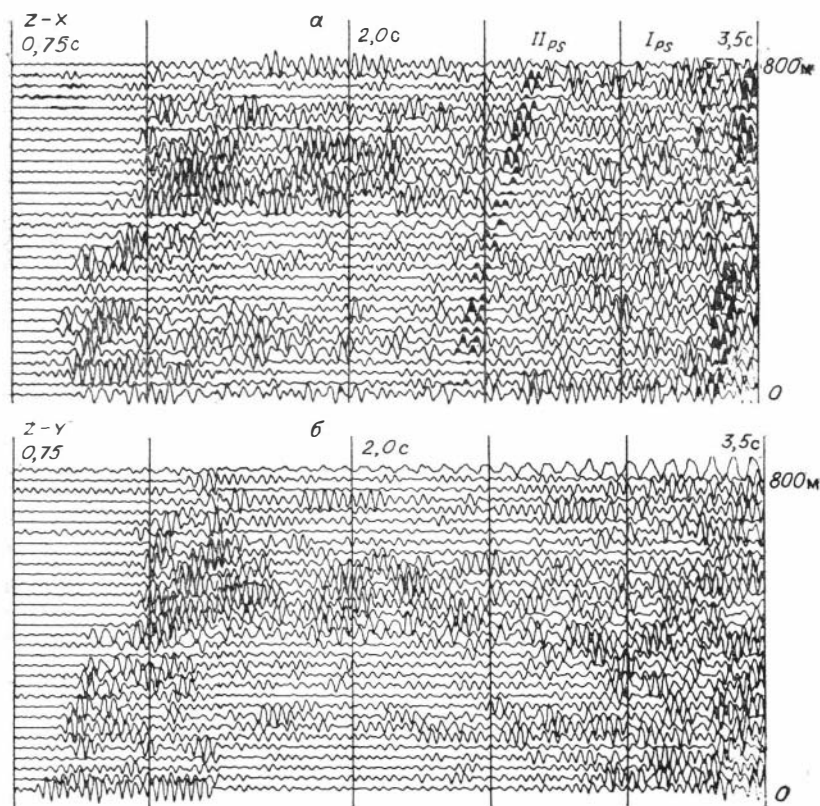


Рис. 3. Сейсмограммы, полученные при вертикальном Z -возбуждении и x -приеме (Zx) (а), y -приеме (б).

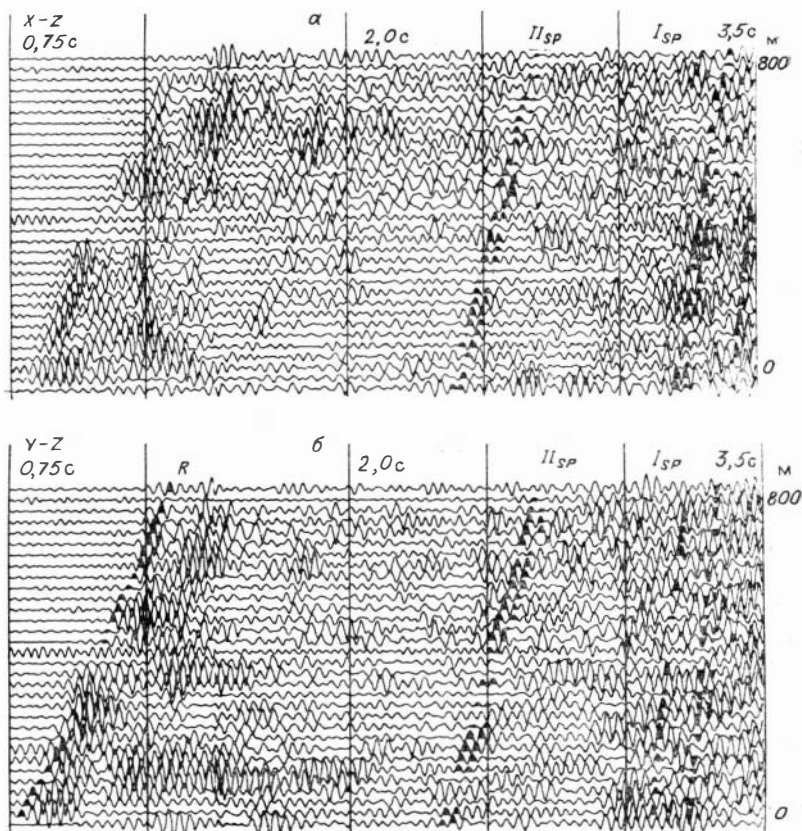


Рис. 4. Сейсмограммы, полученные при горизонтальном X- (а) и Y-возбуждении (б) и z-приеме.

ностью; вообще говоря, видны две близкие волны, а в середине расстановки оси синфазности отсутствуют. На сейсмограмме Zy (рис. 3, б) запись менее регулярна, чем на сейсмограмме Zx . Оси синфазности волн II_{PS} , I_{PS} только намечаются. Иными словами, побочные компоненты волн PS слабы.

Теперь обратимся к рис. 4, на котором изображены сейсмограммы Xz и Yz . Сравнивая их с сейсмограммами Zx и Zy (см. рис. 3), видим, что на всех сейсмограммах присутствуют одни и те же оси синфазности. Следовательно, волны на рис. 4 являются обмещными типа SP : волна II_{SP} и волна I_{SP} . Сравнение рис. 4 с рис. 3, а также показывает, что волны SP от Y- и X-источников более выразительны, чем волна PS на x-компоненте. Наиболее же удивительным является сам факт регистрации волн SP при Y-возбуждении и то, что волны SP от Y-вибратора прослеживаются ничуть не хуже, а даже лучше, чем от X-вибратора (сравни рис. 4, а и 4, б).

Интенсивности волн PS и SP , отраженных от границы II и зарегистрированных в интервале наблюдений (см. рис. 1),

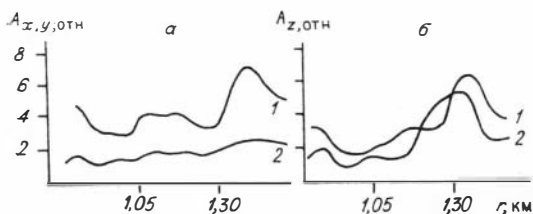


Рис. 5. Амплитуды обменных волн, отраженных от горизонта II.

а — волна PS на компонентах x (1) и y (2); б — волна SP от источников X (1) и Y (2).

изображены на рис. 5. Они рассчитывались по соответствующим трассам волн PS и SP (см. рис. 3, 4) вдоль их осей синфазности как квадратные корни из энергии во временных окнах $\Delta t = 20$ мс. Вид кривых интенсивностей (1 на рис. 5, а для волны PS и 1, 2 на рис. 3, б для волны SP) соответствует ожидаемому для данной модели среды, что можно оценить по таблицам и графикам из работы [4]. Для кривых характерно нарастание интенсивности до максимума в конце расстановки. Интенсивности волн PS и SP — одного порядка. Их количественное сравнение было бы возможным, так как амплитуда силы вибратора была одинаковой как при горизонтальной ориентации силы (X, Y), так и при вертикальной (Z), однако параметры регистрирующего тракта не вполне идентичны в основном из-за различий в чувствительности вертикальных и горизонтальных сейсмоприемников.

Интенсивность волны PS на y -компоненте находится на уровне фона колебаний на сейсмограмме Zy (см. рис. 5, а). Интенсивности волн SP (на z -компоненте) при Y - и X -возбуждении почти одинаковы и даже на некоторых расстояниях интенсивность при Y -возбуждении выше (см. рис. 5, б).

Таким образом, выполненные эксперименты позволяют сделать следующие выводы. Первый вывод состоит в том, что среда на участке работ обладает свойствами, приводящими к аномальной поляризации. По-видимому, регистрация SP -волн при

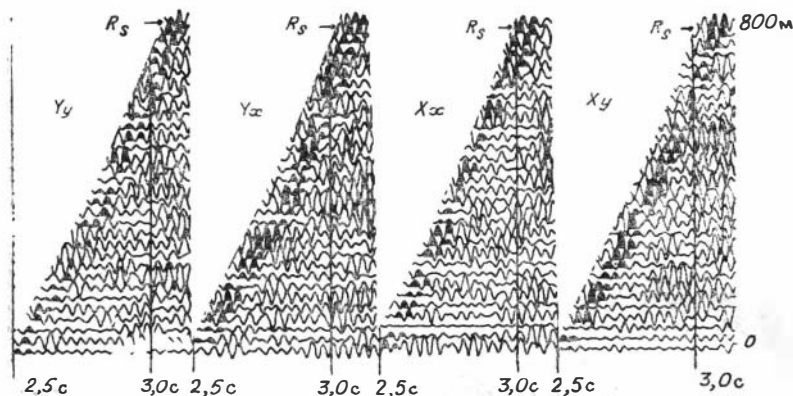


Рис. 6. Рефрагированные поперечные волны на сейсмограммах Xx, Xy, Yx, Yy .

Y -возбуждении связана с гиротропией среды в верхней части разреза, а возможно, и в более глубоких его частях. Наличием гиротропии, по-видимому, можно объяснить и аномальную поляризацию поперечных рефрагированных волн (рис. 6), имеющих большие побочные компоненты: x при Y -возбуждении и y при X -возбуждении (см. также [6, 9]). Напомним, что SP -волны от Y -вибратора наблюдались и другими исследователями [11], что убеждает в неслучайном характере этого явления. Вторым выводом из проведенных работ связан с первым и носит практический характер: можно рекомендовать к производственному применению комплексирование PP - и SP -волн, возбуждаемых соответственно Z - и Y -вибраторами и регистрируемых на z -компоненте.

В проведении экспериментальных полевых работ участвовали кроме авторов А. В. Игнатьев и А. П. Полушин. В написании статьи приняла участие И. Р. Оболенцева.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баянов А. С. Опыт комплексирования методов продольных и обменных волн в Пудинском нефтегазоносном районе // Геология и геофизика.— 1985.— № 3.— С. 120—124.
2. Баянов А. С., Кондрашов В. А., Оболенцева И. Р., Степанова Э. Б. Результаты комплексного использования продольных и обменных отраженных волн в Пудинском нефтегазоносном районе // Многоволновые сейсмические исследования.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987.— С. 169—174.
3. Евчатов Г. П., Моргунова О. В., Сагайдачный В. К. и др. Вопросы комплексирования волн в условиях Западной Сибири // Теория и практика вибросейсмического зондирования земной коры.— Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1988.— С. 114—123.
4. Материалы количественного изучения динамики сейсмических волн // Под рук. и ред. Г. И. Петрашеня.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1957.— Т. II.— С. 41—64, 119—142; 1958.— Т. III.— С. 32—39, 65—71.
5. Многоволновые сейсмические исследования.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987.— 213 с.
6. Оболенцева И. Р. О возможной связи аномальной поляризации поперечных волн с акустической активностью среды // Теория и практика вибросейсмического зондирования земной коры.— Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1988.— С. 139—149.
7. Оболенцева И. Р., Горшкалев С. Б., Никольский А. А. Особенности пространственной поляризации поперечных и обменных волн и проблемы их поляризационной обработки // Многоволновые сейсмические исследования.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987.— С. 25—29.
8. Пузырев Н. Н., Тригунов А. В., Лебедева Г. Н. Трехкомпонентная регистрация сейсмических волн различных типов от симметричных и несимметричных источников // Экспериментальные и теоретические исследования отраженных волн.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1975.— С. 5—28.
9. Резянов Г. И. Экспериментальное изучение поляризации поперечных волн, возбуждаемых горизонтальным вибратором // Теория и практика вибросейсмического зондирования земной коры.— Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1988.— С. 130—139.
10. Сейсмическая разведка методом поперечных и обменных волн // Пузырев Н. Н., Тригунов А. В., Бродов Л. Ю. и др.— М.: Недра, 1985.— 277 с.
11. Frasier C. W., Don D. F. Analysis of conventional and converted mode reflections at Putah Sink, California, using three-component data/Proceedings the 56th Annual SEG Meeting, Houston.— 1986.— P. 396—400.

ПОЛЯРИЗАЦИОННАЯ ОБРАБОТКА ОБМЕННЫХ ОТРАЖЕННЫХ PS -ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

В настоящее время обработка данных двухкомпонентной регистрации отраженных PS -волн проводится в основном двумя способами. Первый способ заключается в том, что каждую из наблюдаемых компонент отдельно обрабатывают по стандартному (для обменных волн) графу, в результате чего получают два временных разреза. Второй способ предусматривает нахождение для каждой пары x - и y -компонент такого угла поворота системы координат, при котором отношение сигнал/помеха либо энергия имеют максимальное значение [1]. В этом случае получают один результативный временной разрез — разрез следящей компоненты. Кроме того, известны алгоритмы поляризационной фильтрации [10], в которых находятся параметры эллипсов (в трехмерном случае — эллипсоидов), аппроксимирующих траектории движения частиц, производятся поворот записей по направлению большей оси эллипса и выделение с помощью фильтра линейно поляризованных колебаний по этому направлению.

Возникает вопрос — каковы области применения указанных методик? В первом способе предполагается наличие двух поперечных волн с поляризацией одной из них вдоль профиля, а другой — под углом 90° к нему (по направлениям ориентации сейсмоприемников) [3]. Наличие двух поперечных волн — квази- SV и SH — можно объяснить анизотропией упругих свойств среды. Однако, если исходить из существующих представлений, эти волны не будут поляризованы: одна (квази- SV) — по x , другая (SH) — по y . Причина состоит в том, что при падении P -волны на отражающую границу образование двух поперечных волн (PSV и PSH), а не одной (PSV) возможно только, если ось анизотропии (имеется в виду трансверсально-изотропная среда) не находится в плоскости xz . Однако в этом случае волны PSV и PSH поляризованы не в плоскости xz и по y , а в плоскости, проходящей через волновую нормаль и ось анизотропии (SV), и перпендикулярно этой плоскости (SH). Таким образом, обе волны имеют как x -, так и y -компоненты. Однако y -компонента на границе мала. Распространяясь от границы до дневной поверхности с разными скоростями (в случае анизотропии среды над отражающей границей), волны приобретают взаимный временной сдвиг, за счет чего в точке наблюдения запись на y -компоненте (побочной) может стать соизмеримой по амплитуде с записью на x -компоненте (основной) [6]. Отсюда ясна неправомочность отождествления x -компоненты с SV -волной, а y -компоненты — с волной SH . Однокомпонентная (x)

регистрация PS -волны не приведет к потере информации только в тех случаях, когда вторая компонента отсутствует или она мала, например в случае горизонтально-слоистой (или слабо паклонной) среды и при наблюдениях вкрест простирания границы. Однако и для таких сред нередки случаи, когда PS -волна присутствует и на y -компоненте.

Второй способ обработки основан на предположении, что имеется одна поперечная линейно поляризованная волна, смещения в которой ориентированы произвольно по отношению к осям x и y регистрирующей системы и осложнены помехой пелинейной поляризации. Теоретически этот метод пригоден для обработки данных метода обменных волн как в изотропной, так и в анизотропной моделях. Но наличие в последней двух практически ортогональных и близких по форме волн делает проблематичным корректное разделение SV - и SH -волн, что, в свою очередь, ставит под сомнение возможность применения метода для анизотропных сред.

Поляризационная фильтрация также рассчитана на существование одной линейно поляризованной волны, которую требуется выделить на фоне нелинейно поляризованных помех.

Многочисленными экспериментами установлено [7, 8], что большинство реальных сред являются трансверсально-изотропными или орторомбическими с произвольным (контролируемым геологическими факторами) наклоном элементов симметрии и произвольными наклонами границ. В таких средах образуются две квазипоперечные волны, имеющие разные скорости распространения и взаимно ортогональные направления поляризации. Обработка полевых материалов (PS - и SS -волн) для таких моделей по приведенным выше методикам вызывает заметные искажения временных разрезов, которые связаны с тем, что в общем случае поляризация SV - и SH -волн не совпадает с направлениями ориентации сейсмоприемников, а в результате их интерференции осложняется волновое поле.

На первом этапе обработки обменных и поперечных волн для анизотропных сред определяются направления векторов поляризации и разделяется волновое поле на SV - и SH -волны (в общем случае — волны S_1 и S_2). Для прямых поперечных волн, регистрируемых в скважинах, такие алгоритмы описаны в [5, 14]. При обработке отраженных PS - и SS -волн, ввиду сложности их волновых полей, эти алгоритмы дают существенные погрешности. Возможности разделения отраженных SS -волн показаны в [9], а PS -волн в работах Р. Гарота 1987 г. Оба метода ориентированы на обработку суммарных временных разрезов. Однако, как показывают исследования, практически все преобразования исходных трасс приводят к искажению их динамических и кинематических особенностей, которые, в свою очередь, искажают результаты поляризационной обработки. Тем не менее оба метода позволяют определить средние углы поляризации, поворот на которые исходных временных разрезов приводит к существенному улучшению их качества.

Для поляризационной обработки данных, получаемых при работах методами отраженных SS - и PS -волн, был разработан специальный алгоритм [4], в котором разделение выполняется до суммирования по ОГТ.

В основе алгоритма [4] разделения отраженных SV - и SH -волн лежит предположение о подобии их формы записи. В качестве признаков, характеризующих форму колебаний, в указанной работе рассматриваются амплитудные и фазовые спектры, автокорреляционные функции и преобладающие частоты. Сопоставление результатов, полученных при расчетах с использованием названных признаков, показало достаточно хорошее совпадение направлений векторов поляризации, определяемых по различным критериям подобия волн. При этом наиболее устойчивые результаты получаются при использовании функции взаимной корреляции амплитудных спектров, наименее устойчивые — при использовании преобладающих частот. Под устойчивостью результатов здесь понимается стабильность определяемых значений углов при вариациях времен начала групп колебаний и их длины, а также ряда других параметров, таких как интервал и шаг изменения частот при вычислении амплитудных спектров, шаг изменения угла поворота системы координат и т. п.

Практика показала, что наиболее оптимальным (в смысле минимизации затрат машинного времени и получения качественных результатов) является следующий порядок обработки. На первом этапе используется достаточно быстрый алгоритм определения углов поляризации, в котором в качестве критерия подобия волн вычисляется функция взаимной корреляции автокорреляционных функций. Полученные результаты позволяют оценить интервал изменения углов для каждого пункта приема (ПП) и общую закономерность их изменения вдоль профиля. На втором этапе производится уточнение определенных на первом этапе параметров с использованием более устойчивого, но и более медленного алгоритма, в котором вычисляется функция взаимной корреляции амплитудных спектров x - и y -компонент.

Алгоритм определения углов поляризации состоит в следующем [4].

1. Выделение групп колебаний на x - и y -компонентах, соответствующих PS -волне от исследуемого горизонта.

2. Вычисление полярной сейсмограммы

$$\begin{aligned} x'(\alpha, t) &= x(t) \cos \alpha + y(t) \sin \alpha; \\ y'(\alpha, t) &= -x(t) \sin \alpha + y(t) \cos \alpha, \end{aligned} \quad (1)$$

где α — угол поворота системы координат.

3. Вычисление для трасс $x'(\alpha, t)$ и $y'(\alpha, t)$ функции автокорреляции

$$R_x(\alpha, \tau) = \frac{1}{n-\tau} \sum_{i=1}^{n-\tau} [x'(\alpha, t_i) \cdot x'(\alpha, t_{i+\tau})]; \quad (2)$$

$$R_y(\alpha, \tau) = \frac{1}{n-\tau} \sum_{i=1}^{n-\tau} [y'(\alpha, t_i) \cdot y'(\alpha, t_{i+\tau})],$$

или амплитудных спектров

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \left\{ \sum_{i=1}^n [x'(\alpha, t_i) \cdot \sin \omega t_i]^2 + \sum_{i=1}^n [x'(\alpha, t_i) \cdot \cos \omega t_i]^2 \right\}^{1/2}; \\ S_y(\omega) &= \left\{ \sum_{i=1}^n [y'(\alpha, t_i) \cdot \sin \omega t_i]^2 + \sum_{i=1}^n [y'(\alpha, t_i) \cdot \cos \omega t_i]^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (3)$$

4. Вычисление функции взаимной корреляции

$$B(\alpha) = \frac{1}{m-\delta} \sum_{i=1}^{m-\delta} [R_x(\alpha, \tau_i) \cdot R_y(\alpha, \tau_{i+\delta})],$$

или

$$B(\alpha) = \frac{1}{m-\delta} \sum_{i=1}^{m-\delta} [S_x(\alpha, \omega_i) \cdot S_y(\alpha, \omega_{i+\delta})], \quad (4)$$

где m — количество сдвигов (частот), для которых определялись автокорреляционные функции (амплитудные спектры); δ — разность сдвигов, при которых автокорреляционные функции (амплитудные спектры) принимают максимальные значения в области первого положительного экстремума.

Здесь следует отметить, что автокорреляционные функции вычисляются лишь для сдвигов, лежащих в окрестности видимого периода волны T , что позволяет, с одной стороны, автоматически отбраковать трассы, у которых соотношение сигнал/помеха мало, так как автокорреляционные функции таких трасс не будут иметь положительного экстремума в окрестности $\tau = T$, и, с другой стороны, критерий подобия «настраивается» на полезную волну, исключая из сопоставления волны с большими и меньшими периодами. Для амплитудных спектров по аналогии вычисления производятся лишь для частот, лежащих в окрестности преобладающей частоты.

5. Определяется угол поворота α , который соответствует максимальному значению $B(\alpha)$.

Несложные преобразования этого алгоритма позволяют увеличить быстродействие реализующей его программы почти на порядок. Подставим (1) в (2):

$$\begin{aligned} R_x(\alpha, \tau) &= \frac{1}{n-\tau} \sum_{i=1}^{n-\tau} \{x(t_i)x(t_{i+\tau}) \cos^2 \alpha + y(t_{i+\tau})y(t_i) \sin^2 \alpha + \\ &\quad + [x(t_i)y(t_{i+\tau}) + x(t_{i+\tau})y(t_i)] \sin \alpha \cos \alpha\}; \\ R_y(\alpha, \tau) &= \frac{1}{n-\tau} \sum_{i=1}^{n-\tau} \{x(t_i)x(t_{i+\tau}) \sin^2 \alpha + y(t_i)y(t_{i+\tau}) \cos^2 \alpha - \\ &\quad - [x(t_i)y(t_{i+\tau}) + x(t_{i+\tau})y(t_i)] \sin \alpha \cos \alpha\}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \sum [x(t_i) x(t_{i+\tau})] &= R_x(\tau); \quad \sum [y(t_i) y(t_{i+\tau})] = R_y(\tau); \\ \sum [x(t_i) y(t_{i+\tau})] &= B_{xy}(\tau); \quad \sum [x(t_{i+\tau}) y(t_i)] = B_{yx}(\tau) = B_{xy}(\tau), \end{aligned}$$

окончательно имеем

$$R_x(\alpha, \tau) = R_x(\tau) \cos^2 \alpha + [B_{xy}(\tau) + B_{xy}(-\tau)] \sin \alpha \cos \alpha + R_y(\tau) \sin^2 \alpha; \quad (5)$$

$$R_y(\alpha, \tau) = R_x(\tau) \sin^2 \alpha - [B_{xy}(\tau) + B_{xy}(-\tau)] \sin \alpha \cos \alpha + R_y(\tau) \cos^2 \alpha.$$

Таким образом, в приведенном выше алгоритме определения углов поляризации пункты 2 и 3 заменяются вычислением $R_x(\tau)$, $R_y(\tau)$ и $B_{xy}(\tau)$ исходных x -, y -компонент и вычислением $R_x(\alpha, \tau)$, $R_y(\alpha, \tau)$ по формулам (5) и (6).

Аналогичные преобразования возможны и для алгоритма, использующего в качестве критерия подобия волн функцию взаимной корреляции амплитудных спектров. Для этого достаточно подставить (1) в (3):

$$\begin{aligned} S_x(\alpha, \omega) &= \left\{ \sum_{i=1}^n [(x(t_i) \cos \alpha + y(t_i) \sin \alpha) \sin \omega t_i]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n [(x(t_i) \cos \alpha + y(t_i) \sin \alpha) \cos \omega t_i]^2 \right\}^{1/2}; \\ S_y(\alpha, \omega) &= \left\{ \sum_{i=1}^n [(-x(t_i) \sin \alpha + y(t_i) \cos \alpha) \sin \omega t_i]^2 + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n [(-x(t_i) \sin \alpha + y(t_i) \cos \alpha) \cos \omega t_i]^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} S_x(\alpha, \omega) &= \{ [S_1(\omega) \cos \alpha + S_3(\omega) \sin \alpha]^2 + \\ &\quad + [S_2(\omega) \cos \alpha + S_4(\omega) \sin \alpha]^2 \}^{1/2}; \\ S_y(\alpha, \omega) &= \{ [S_3(\omega) \cos \alpha - S_1(\omega) \sin \alpha]^2 + \\ &\quad + [S_4(\omega) \cos \alpha - S_2(\omega) \sin \alpha]^2 \}^{1/2}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} S_1(\omega) &= \sum_{i=1}^n x(t_i) \cos \omega t_i; \quad S_2(\omega) = \sum_{i=1}^n x(t_i) \sin \omega t_i; \\ S_3(\omega) &= \sum_{i=1}^n y(t_i) \cos \omega t_i; \quad S_4(\omega) = \sum_{i=1}^n y(t_i) \sin \omega t_i. \end{aligned}$$

На рис. 1 приведен пример разделения SH - и SV -волн. (Здесь и далее использованы материалы работ, проведенных трестом «Сибнефтегеофизика» Миннефтепрома в 1983—1984 гг. на юго-западном склоне соляного купола Танатар, расположенного в Прикаспийской впадине.)

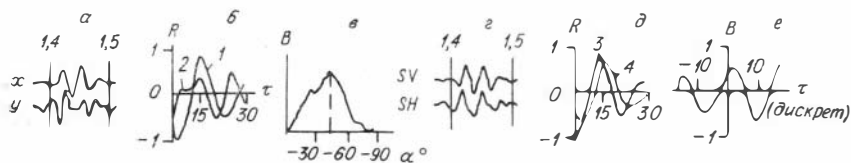


Рис. 1. Разделение x - и y -компонент на SV - и SH -волны.

a — исходные группы колебаний; b — автокорреляционные функции исходных сигналов; c — функция взаимной корреляции автокорреляционных функций; d — SV - и SH -волны; e — автокорреляционные функции SV - и SH -волн; e — функция взаимной корреляции SV - и SH -волн. 1 — $R_x(\tau)$; 2 — $R_y(\tau)$; 3 — $R_{SV}(\tau)$; 4 — $R_{SH}(\tau)$.

Группы x - и y -колебаний, зарегистрированные ортогональными горизонтальными сейсмоприемниками (см. рис. 1, a), соответствуют PS -волне, отраженной от III горизонта (подшвы неокома) и наблюдаемой на удалении 1100 м от 31-го пункта взрыва 21-го профиля. Даже визуально отмечается резкое различие форм записи x - и y -компонент. Это подтверждают и функции автокорреляции $R_x(\tau)$ и $R_y(\tau)$, изображенные на рис. 1, b . Результат вычисления функции взаимной корреляции $B(\alpha)$ по формуле (4) с использованием формул (5) при изменении τ от положения положительного экстремума в окрестности $\tau = 15$ на ± 5 сдвигов представлен на рис. 1, c . Максимальное значение $B(\alpha)$ принимает при угле $\alpha = -41^\circ$. Поворот системы координат, в которой определены x - и y -компоненты, на найденный угол путем подстановки его в (1) приводит к разделению SV - и SH -волн. Эти волны изображены на рис. 1, d . Как видно из рис. 1, d , на котором изображены автокорреляционные функции разделенных волн, положительный экстремум $R_{sv}(\tau)$ соответствует сдвигу $\tau = 14$, а $R_{sh}(\tau)$ — сдвигу $\tau = 16$ (сдвиги приведены в дискретах, один дискрет равен 2 мс). Таким образом, SV - и SH -волны имеют различные периоды и, следовательно, различные преобладающие частоты. Для правильного вычисления $B(\alpha)$ необходим учет разности этих сдвигов δ , как это сделано в (4).

Время запаздывания одной волны относительно другой можно определить путем вычисления функции их взаимной корреляции:

$$B(\tau) = \frac{1}{n - \tau} \sum_{i=1}^{n-\tau} SV(t_i) \cdot SH(t_{i+\tau}) \quad (7)$$

при сдвиге SH -волны влево и

$$B(\tau) = \frac{1}{n - \tau} \sum_{i=1}^{n-\tau} SV(t_{i+\tau}) \cdot SH(t_i) \quad (8)$$

при сдвиге SV -волны влево.

Совместный анализ графика $B(\tau)$ (см. рис. 1, e) и формы сигналов позволяют сделать заключение о запаздывании SV -волны относительно SH на 3 дискрета, т. е. на 6 мс. Непосредственно по графику $B(\tau)$ определить время запаздывания не представля-

ется возможным, так как $B(\tau)$ является периодической функцией с экстремумами, близкими по величине.

Описанная методика разделения SV - и SH -волн была опробована на 21-м профиле участка Танатар.

Определение параметров поляризации велось по группам колебаний, соответствующим обменной волне PS от III отражающего горизонта, который на временных разрезах x - и y -компонент отмечается интенсивными, хорошо коррелируемыми осями синфазности. Времена прихода волны плавно изменяются вдоль профиля от 1,22 до 1,29 с. Группы колебаний, соответствующие исследуемому горизонту, выделялись по алгоритму, приведенному в [4]. Обработке подвергались только трассы с удалениями 800 м и более. Это связано с тем, что алгоритм разделения волн в его настоящем виде работает лишь при соотношении сигнал/помеха не менее 1,5. Обработываемый же материал на удалениях меньше 800 м содержит интенсивную поверхностную волну, совпадающую по времени прихода с полезной волной. Традиционные полосовые и веерные фильтры, применяемые для подавления помех, заметно искажают динамику волн, в результате чего записи становятся непригодными для поляризационной обработки.

Результатом обработки являются углы поворота α и времена запаздывания τ одной волны относительно другой. При этом угол характеризует смещения одной из двух волн, в то время как смещения в другой волне ортогональны смещениям в первой. Следует отметить, что определяемые направления смещений строго соответствуют истинным при вертикальном подходе лучей. Однако при наличии зоны малых скоростей (ЗМС) лучи PS -волн (PSV , PSH) почти вертикальны, а проекции смещений SV и SH на плоскость имеют примерно те же азимуты, что до прохождения ЗМС [2, 6]. Кроме углов векторов поляризации α и временных сдвигов τ в процессе обработки вычисляются также преобладающие частоты волны SV и SH и отношения их амплитуд.

На рис. 2 представлены результаты вычисления угла поляризации α с использованием в качестве признака подобия волн функции взаимной корреляции амплитудных спектров, определяемых по формулам (6). Точками отмечены значения углов, отнесенных к координате пункта приема или пункта взрыва. На каждый пункт приема (взрыва) собраны значения углов для удалений взрыв — прибор от 800 до 1275 м. Вычисления проводились при переборе углов от -90° до 0 с шагом 5° .

При анализе общей картины возникают два вопроса: какова общая закономерность изменения углов вдоль профиля и чем объясняется существенный разброс значений α , отнесенных к одному пикету.

Касаясь общей закономерности, можно отметить, что, несмотря на значительный разброс значений углов на каждом ПВ (рис. 2, а) и ПП (рис. 2, б), левее пикета 95 все они группируются вокруг условной линии, проходящей через значение $\alpha =$

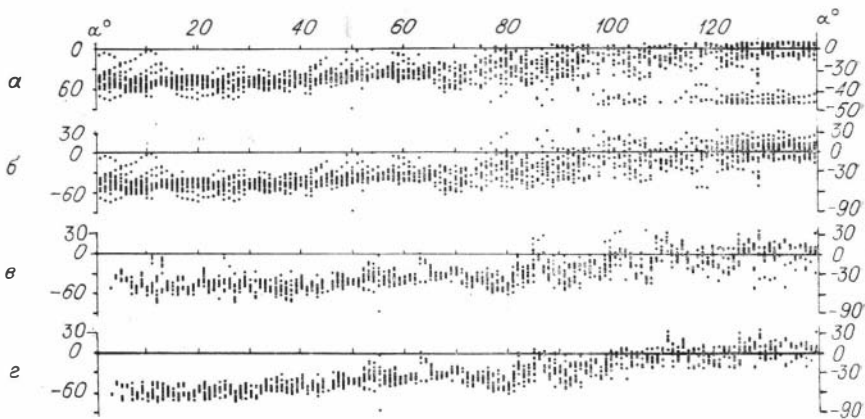


Рис. 2. Распределение углов поляризации для 21-го профиля.

a — первичное распределение, сгруппированное по ОПВ; *b* — то же, после приведения четверти поворота; *c* — после сортировки по ОПП; *d* — то же, после отбраковки.

$= -50^\circ$ на пикете 1 и $\alpha = -10^\circ$ на пикете 95. Далее эта линия раздваивается: одна ветвь уходит к 0° , а другая — к -90° . Это связано с тем, что все признаки подобия, в том числе функция взаимной корреляции амплитудных спектров, которая использовалась нами для разделения волн, являются периодическими функциями и имеют максимальные значения в каждой четверти. При переходе от одного максимума признака к соседнему, т. е. при повороте разделенных волн на $\pm 90^\circ$, компоненты меняются местами и одна из них обращается. Происходит это следующим образом: $0^\circ - (x, y)$; $90^\circ - (\bar{y}, x)$; $180^\circ - (\bar{x}, \bar{y})$; $270^\circ - (y, \bar{x})$. Здесь через \bar{x} и \bar{y} обозначены обращенные сигналы.

Для определения истинного положения максимума признака подобия, т. е. выбора единственного из четырех возможных, необходимы дополнительные условия. На рис. 3 представлены некоторые из параметров, которые зависят от угла поворота системы координат и, по-видимому, могли бы дать ответ на вопрос о выборе четверти. Однако в статье [2] показано, что соотношение амплитуд (см. рис. 3, *a*) A_{SV}/A_{SH} как для незначительных изменений углов входа-выхода (различных удалений ПВ — ПП) обменных волн, так и для наклона оси анизотропии может изменяться в широких пределах и быть как больше, так и меньше единицы. Следовательно, соотношение амплитуд не может быть критерием выбора четверти угла поворота. Зависимости между углом поляризации и преобладающей частотой (см. рис. 3, *b*) к настоящему времени не установлено. Величина и знак разности преобладающих частот SV- и SH-волн (см. рис. 3, *c*) также зависят от угла поворота сложным образом и без дополнительных исследований не могут быть привлечены к определению четверти. Наиболее естественными, хотя и не всегда выполняющимися, являются предположения о постоянстве знака времени запаздывания одной волны относительно другой и о постоянстве знака

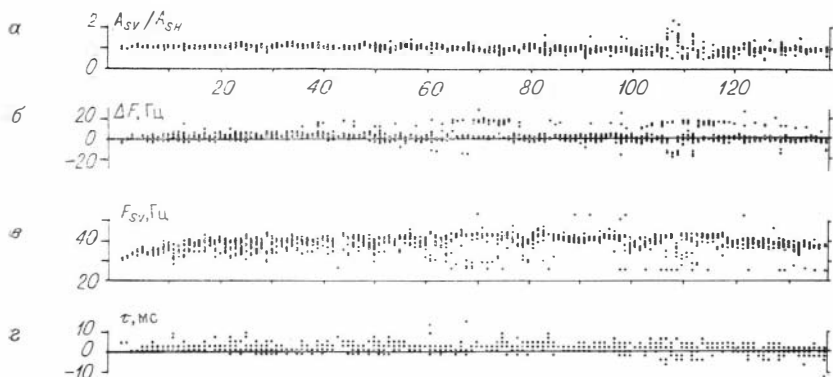


Рис. 3. Распределение параметров, вычисляемых в процессе поляризационной обработки.

a — соотношение амплитуд A_{SV}/A_{SH} ; b — разность преобладающих частот SV - и SH -волн; c — преобладающая частота SV -волны; d — время запаздывания SV - относительно SH -волны.

первого вступления каждой из волн на достаточно большом протяжении профиля.

Учитывая эти предположения, рассмотрим поведение времени запаздывания одной волны относительно другой (см. рис. 3, d). Абсолютное большинство значений τ имеет положительный знак, и лишь правее пикета 95 положительных и отрицательных значений τ приблизительно равное количество. Обратимся к рис. 4, на котором изображены группы волн, соответствующие 125-му пункту взрыва, повернутые на определенный по описываемому алгоритму угол $\alpha = -85^\circ$ (см. рис. 4, a) и на угол, соответствующий соседнему экстремуму функции взаимной корреляции амплитудных спектров, равный 5° (см. рис. 4, e). Рядом изображены функции взаимной корреляции этих волн, вычисленные по формулам (7) и (8) (см. рис. 4, b , z). Видно, что при повороте на угол -85° SV - и SH -волны имеют разные знаки первых вступлений и волна SV приходит раньше SH . В то же время визуальный анализ всего материала показал, что для профиля в целом характерны обратные соотношения. Поворот осей координат на угол 90° приводит к обращению SV - и SH -волн и смене знака τ .

Подобный анализ и последующий поворот всех трасс, не удовлетворяющих общему поведению SV - и SH -волн, на угол 90° , привел к трансформации закономерности изменения углов

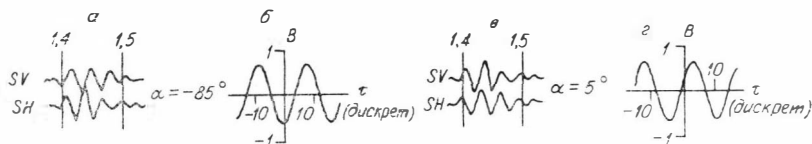
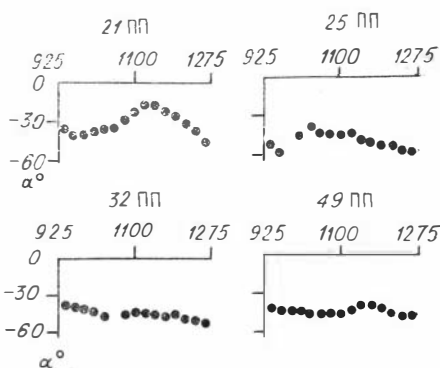


Рис. 4. Выбор угла поворота α , удовлетворяющего выдвинутой гипотезе. a , b — SV - и SH -волны и функция их взаимной корреляции для угла поворота системы координат $\alpha = -85^\circ$; e , z — то же, для угла поворота $\alpha = 5^\circ$.

Рис. 5. Типичные зависимости угла поляризации от расстояния взрыв — прибор.



поляризации к виду, изображенному на рис. 2, б. Сравнительная последний с рис. 2, а, можно видеть, что ветвь, уходящая к $\alpha = -90^\circ$, исчезла.

Здесь следует отметить тот факт, что проведенное нами отождествление *SV*- и *SH*-волн весьма условно и соответствует не реальному волновому полю, а лишь нашей гипотезе о нем. Однако это не имеет принципиального значения, так как изменение гипотезы не изменит закономерности изменения углов поляризации в целом, а приведет лишь к изменению всех углов на профиле или отдельных его частях на 90° . Окончательное решение, как уже сказано выше, может быть принято только при совместном анализе результатов обработки площадных наблюдений и сейсмогеологических данных.

Для выяснения причин достаточно большого разброса значений α , относящихся к одному пикету, нами совместно анализировались распределения, сгруппированные по общему пункту взрыва (см. рис. 2, б) и по общему пункту приема (см. рис. 2, в). Сопоставляя эти распределения, можно констатировать, что разброс α , отнесенных к одному пикету, меньше на рис. 2, в, т. е. на распределении, сгруппированном по ОПП. Этот факт можно объяснить, если учесть, что для *PS*-волн участок границы, от которого происходит отражение, в случае ОПП значительно меньше, чем при ОПВ, и связан сам разброс значений α с анизотропией упругих свойств среды.

На рис. 5 представлены типичные зависимости угла поляризации α от расстояния ПП — ПВ. Эти зависимости не противостоят теоретическим выводам, которые приведены в [2, 6], и показывают, что направления векторов поляризации зависят не только от типа анизотропии упругих свойств и наклона осей, но и от углов, образуемых *S*-лучами *PS*-волны с осями анизотропии (т. е. от ПП — ПВ).

Вернемся к рис. 3. На фоне достаточно плавного и компактного изменения всех параметров встречаются значения, которые выпадают из общей закономерности. Например, основная часть преобладающих частот F_{SV} (см. рис. 3, в) имеет значения от 30 до 40 Гц; значения же, не попадающие в этот интервал, не вписываются и в общую закономерность. Аналогичные интервалы можно выделить и для других параметров: для сдвигов τ (см. рис. 3, г) он равен 0—3, для отношения амплитуд A_{SV}/A_{SH} (см. рис. 3, а) — 0,3—1,5, для разности преобладающих частот (см.

рис. 3, б) — —5—5 Гц. Совместный анализ указанных зависимостей и волновых полей до и после поворота позволил сформулировать критерии отбраковки выделенных групп колебаний:

— резкое отличие времен начала и конца выделенной группы колебаний от времен на других трассах этой же сейсмограммы ОПВ, что наблюдается при наличии интенсивной помехи или при слиянии нескольких групп волн в одну;

— линейность поляризации, которая наблюдается при запаздывании одной волны относительно другой на время, кратное полупериоду колебаний, или при различии амплитуд x - и y -компонент при любом из углов поворота в 4—5 раз (в [4] показано, что в этих случаях одного критерия подобия недостаточно, так как он всегда будет максимальным при угле, на котором происходит выравнивание амплитуд за счет «перекачки» одной компоненты на другую);

— значительное различие преобладающих частот SV - и SH -волн, что характерно для областей с низким соотношением сигнал/помеха, приводящим к значительному смещению положительного экстремума амплитудного спектра или автокорреляционной функции от положения, определяемого периодом исследуемой волны;

— одновременные выскоки всех параметров от их средних значений, что часто наблюдается при малых соотношениях сигнал/помеха.

На рис. 2, г показано распределение углов поляризации α , скомпонованное по ОПП, после отбраковки по перечисленным критериям.

В заключение отметим, что для правильной интерпретации параметров, получаемых в результате поляризационной обработки PS -волн, требуется пройти стадию накопления экспериментального материала и выявления корреляционных связей между этими параметрами и особенностями строения среды. Без таких данных невозможна однозначная интерпретация, так как конкурирующих моделей может быть несколько. Однако уже сейчас ясно, что развитие описанной методики позволит улучшить качество временных разрезов, с одной стороны, и извлечь дополнительную геологическую информацию из таких параметров, как направления поляризации, времена запаздывания, отношения амплитуд, разница частот SV - и SH -волн, с другой стороны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гальперин Е. И. Поляризационный метод сейсмических исследований.— М.: Недра, 1977.— 171 с.
2. Гречка В. Ю., Оболонцева П. Р. Математическое моделирование отраженных волн в слоисто-однородных трансверсально-изотропных средах // Изв. АН СССР. Физика Земли.— 1987.— № 7.— С. 50—59.
3. Нефедкина Т. В., Пономарева Л. П., Горшкалев С. Б. Выделение малоамплитудных сбросов по данным многоволновой сейсморазведки в Прикаспийской впадине // Многоволновые сейсмические исследования.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987.— С. 174—180.

4. Никольский А. А. К вопросу об обработке PS - и SS -волн в анизотропных средах // Алгоритмические проблемы обработки данных сейсморазведки.— Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1987.— С. 66—79.
5. Оболенцева И. Р., Горшкалев С. Б. Алгоритм разделения интерферирующих квазипоперечных волн в анизотропных средах // Изв. АН СССР. Физика Земли.— 1986.— № 11.— С. 101—105.
6. Оболенцева И. Р., Гречка В. Ю. Изучение трехмерных волновых полей отраженных PS - и SS -волн в трансверсально-изотропных средах (по результатам математического моделирования) // Геология и геофизика.— 1987.— № 8.— С. 107—116.
7. Пузырев Н. Н., Оболенцева И. Р., Тригубов А. В., Горшкалев С. Б. Экспериментальные исследования анизотропии скоростей в осадочных отложениях по наблюдениям на поперечных волнах // Там же.— 1983.— № 11.— С. 8—19.
8. Сейсмическая разведка методом поперечных и обменных волн/Пузырев Н. Н., Тригубов А. В., Бродов Л. Ю. и др.— М.: Недра, 1985.— 277 с.
9. Alford R. M. Shear data in presence of azimuthal anisotropy: Dilley, Texas // Proceedings of the 56th Annual SEG Meeting, Houston.— 1986.— P. 476—479.
10. Flinn E. A. Signal analysis using rectilinearity and direction of particle motion // Proceedings of the IEEE.— 1965.— Vol. 12.— P. 2085—2087.
11. Naville Ch. Detection of anisotropy using shear-wave splitting in VSP surveys: requirements and applications // Proceedings of the 56th Annual SEG Meeting, Houston.— 1986.— P. 391—394.

А. А. НИКОЛЬСКИЙ, А. В. ШИТОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРАВЛЕНИЙ ВЕКТОРОВ ПОЛЯРИЗАЦИИ SV - И SH -ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ПЛОЩАДНЫХ РАБОТ

В предыдущей статье [2] подробно изложен алгоритм поляризационной обработки обменных отраженных PS -волн, рассчитанный на анизотропные среды и состоящий в преобразовании исходных x -, y -трасс в записи разделенных SV - и SH -волн. В данной работе приводятся некоторые результаты обработки по этому алгоритму площадных двухкомпонентных наблюдений PS -волн.

В качестве исходного материала мы использовали полевые магнитограммы по 17, 20, 21 и 23-му профилям, полученные опытно-методической партией ПО Сибнефтегеофизика Миннефтепрома в 1982—1984 гг. в районе соляного купола Танатар (Прикаспийская впадина).

На 17, 20 и 21-м профилях работы проводились с использованием левосторонней фланговой системы с выносом пункта взрыва на 100 м. Пункты взрыва и пункты приема располагались по профилю с шагом 25 м. На каждом пункте приема устанавливалось две группы горизонтальных сейсмоприемников: сейсмоприемники одной группы ориентировались по профилю и предназначались для записи x -компоненты, другой — под углом 90° к про-

филю для записи y -компоненты. На каждом ПВ производилось по два взрыва. Для одного взрыва записывалось по 24 ПП x - и y -компонент, причем для первого взрыва удаления составляли 700—1275 м, а для второго — 100—675 м.

На 23-м профиле использовалась центральная система наблюдений, вынос пункта взрыва равнялся 100 м. Пункты взрыва и пункты приема располагались с шагом 50 м. Для каждого ПВ также производилась запись двух магнитограмм, каждая из которых содержала по 24 трассы x - и y -компонент. При первом взрыве записывались трассы левой расстановки, при втором — правой.

Обработка производилась по полному графу, включающему в себя следующие операции.

1. Отождествление по предварительным покомпонентным x - и y -временным разрезам линий t_0 , соответствующих III отражающему горизонту (подошва неокома).

2. Анализ волнового поля x - и y -компонент на исходных сейсмограммах ОПВ с целью выбора участков уверенного прослеживания годографов, соответствующих выбранным линиям t_0 . Эти участки составили: для 17-го и 20-го профилей — от 900 до 1275 м (16 трасс); для 21-го профиля — от 925 до 1275 м (15 трасс) и для 23-го профиля — 800—1250 м (10 трасс левой расстановки и 10 трасс правой расстановки). На дальнейшую обработку поступали только выбранные трассы. Вне указанных удалений исследуемая PS -волна интерферирует с интенсивной поверхностной волной.

3. Определение начального и конечного времен групп волн, соответствующих исследуемому горизонту для каждой из трасс по алгоритму, приведенному в [1].

4. Предварительная оценка закономерностей распределения углов поляризации, частот SV - и SH -волн, отношений их амплитуд и взаимных временных сдвигов с использованием в качестве критерия подобия волн функции взаимной корреляции автокорреляционных функций. Предварительная обработка производилась при переборе значений углов поворота системы координат от -90° до 0 с поиском положительных экстремумов автокорреляционных функций, начиная со сдвига 7 (что соответствует частоте 71 Гц при шаге дискретизации, равном 0,002 с) и кончая сдвигом 30 (16 Гц). Это позволило в дальнейшем ограничить диапазон изменения частот от 22 до 52 Гц, а также выбрать для каждого профиля интервалы перебора углов.

5. Вычисление углов поляризации, частот SV - и SH -волн, отношений их амплитуд и взаимных временных сдвигов с использованием функции взаимной корреляции амплитудных спектров при переборе углов поворота системы координат и частот в пределах, определенных на предыдущем этапе.

6. Анализ полученных распределений углов поляризации α , временных сдвигов между SV - и SH -волнами и форм сигналов с целью решения вопроса о правильности выбора четверти поворота.

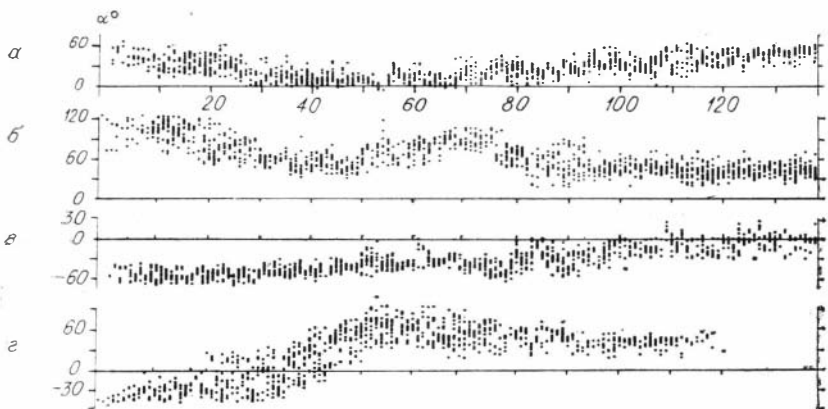


Рис. 1. Распределение углов поляризации вдоль 17 (а), 20 (б), 21 (в) и 23-го (г) профилей.

7. Отбраковка трасс с использованием критериев, перечисленных в [2].

На рис. 1 представлены распределения углов поляризации α по всем профилям, сгруппированные по общему пункту приема. Различное количество точек для различных координат ПП объясняется либо совпадением отдельных значений α , либо отбраковкой части групп колебаний при обработке.

На профиле 17 (см. рис. 1, а) углы поляризации группируются около условной линии, проходящей через значения $\alpha = 45^\circ$ в начале профиля, затем, к пикету 30, уходящей к $\alpha = 15^\circ$, и далее, от пикета 70, плавно достигающей значений $\alpha = 55^\circ$. На профиле 20 (см. рис. 1, б) эта линия начинается при $\alpha = 100^\circ$, к 35-му пикету плавно подходит к $\alpha = 50^\circ$, затем вновь уходит вверх к значениям $\alpha = 90^\circ$ и, начиная с пикета 80, уходит к $\alpha = 45^\circ$. На 21-м профиле (см. рис. 1, в) значения α плавно изменяются от -60° в начале профиля до 0° в конце. И наконец, на 23-м профиле (см. рис. 1, г) углы α плавно изменяются от -45° в начале к 80° в середине и затем к 45° в конце профиля.

Обращает на себя внимание аномально большой разброс значений α между пунктами приема 24 и 70 на 23-м профиле. Этот разброс связан с тем, что в указанном интервале профиля на каждый ПП компоновались значения α от взрывов, производимых справа и слева (центральная система) от ПП, в то время как в начале профиля значения α собирались только с левой расстановки, а в конце профиля — только с правой. В [2] отмечалось, что при группировании по ОПП распределение α характеризует анизотропию упругих свойств среды ограниченного объема, в котором распространяются в качестве поперечных волны PS после отражения. Следовательно, на рис. 1, г между пикетами 24 и 70, по существу, произошло наложение двух закономерностей изменения анизотропных свойств. Однако и каждая закономерность

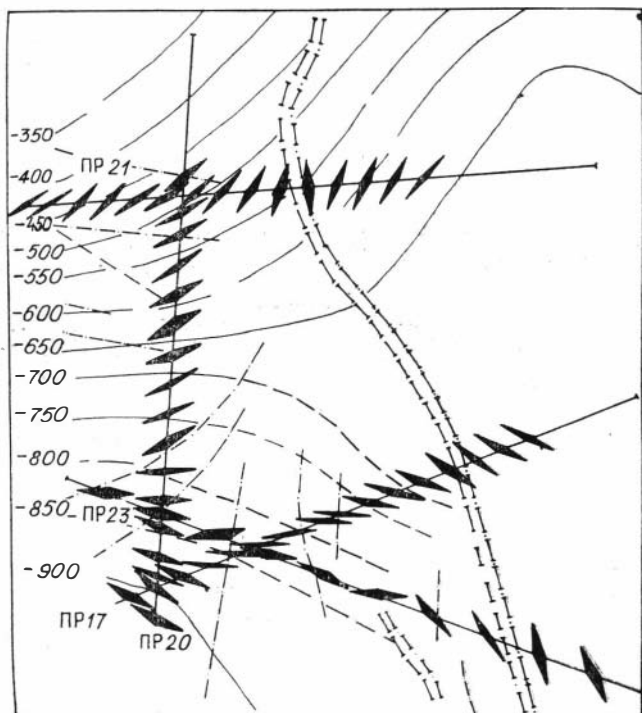


Рис. 2. План изогипс III отражающего горизонта и направления векторов поляризации одной из поперечных волн, полученные в результате поляризационной обработки *PS*-волн.

в отдельности имеет также значительный разброс значений α , хотя и несколько меньший, чем на рис. 1, г. Возможно, этот факт связан с тем, что 23-й профиль ориентирован по простиранию структуры, а в этом случае наклон лучевой плоскости наибольший.

В [2] подчеркивалось, что для выбора четверти поворота системы координат необходимы площадные работы. Первоначально для всех профилей углы поляризации определялись в IV четверти, т. е. от -90 до 0 . Сопоставление полученных углов в точках пересечения профилей и их окрестностях совместно с анализом времен запаздывания одной волны относительно другой позволило для каждого из профилей так изменить углы поляризации на величину $\pm 90^\circ$, что направления поляризации в точках пересечения профилей стали практически одинаковыми, а времена запаздывания одной волны относительно другой в большинстве случаев положительными.

На рис. 2 представлен план изогипс по III отражающему горизонту, на который нанесены линии профилей и направления поляризации волны, приходящей к поверхности наблюдения с запаздыванием относительно второй волны, поляризованной орто-

гонально первой. Векторы поляризации наносились на план в каждой десятой точке для 23-го профиля и в каждой двадцатой для остальных профилей. Стрелки ориентированы в направлении модальных значений углов поляризации, снятых с зависимостей распределения α (см. рис. 1). Ширина стрелки указывает на величину разброса значений α .

Как видно из рис. 2, направления векторов поляризации достаточно хорошо согласуются с направлением простираения изогипс. Таким образом волны SV и SH (или S_1 , S_2) оказываются поляризованными в плоскостях восстания — падения и простираения III горизонта. Связь поляризации с направлениями восстания — падения и простираения пород отмечалась ранее для альбских отложений в районе другого соляного купола — Доссор, в Прикаспийской впадине [3]. Следует отметить некоторую условность используемых нами терминов SV и SH . Вернее говорить о волнах S_1 и S_2 . Названия SV и SH могут оказаться справедливыми в случае трансверсально-изотропной среды с известным положением оси симметрии.

В некоторых местах, например на профиле 20 в областях 20-го и 40-го пикетов, на профиле 23 в областях 50-го и 80-го пикетов, видна связь поляризации с направлением тектонических нарушений. Можно также отметить почти повсеместное повышение разброса значений α в областях, где имеются тектонические нарушения (штрихпунктирные и двойные линии).

Приведенные результаты показывают некоторые возможности поляризационной обработки обменных волн в анизотропных средах. Дальнейшее продвижение вперед в вопросе геологической интерпретации как направлений поляризации, так и других параметров потребует сравнительной оценки соответствия этих данных различным моделям: анизотропным и анизотропным гиротропным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никольский А. А. К вопросу об обработке PS - и SS -волн в анизотропных средах // Алгоритмические проблемы обработки данных сейсморазведки.— Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1987.— С. 66—79.
2. Никольский А. А. Поляризационная обработка обменных отраженных PS -волн в анизотропных средах.— Настоящий сборник.
3. Тригунов А. В., Горшкалев С. Б. Экспериментальное исследование анизотропии осадочных пород с использованием скважинных наблюдений // Математические проблемы интерпретации данных сейсморазведки.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1988.— С. 206—217.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ УПРУГИХ ПАРАМЕТРОВ АНИЗОТРОПИИ ОСАДОЧНЫХ ОТЛОЖЕНИЙ ПО ДАННЫМ АКУСТИЧЕСКОГО КАРОТАЖА (АК)

В последние десятилетия в сейсморазведке и ГСЗ в связи с возросшей детальностью исследований используются все более сложные модели. Большое количество экспериментальных данных указывает на широкое распространение упругой анизотропии, которая проявляется в различии времен прихода, усложнении характера поляризации, особенностях отражения — преломления. Однако сходные явления могут порождаться и другими физическими причинами (сильная неоднородность и т. д.). Выбор адекватной модели связан с необходимостью изучения волновых полей в разных моделях сред, в первую очередь анизотропных. Многообразие проявлений анизотропии в волновых полях и широкий спектр параметров приводят, как справедливо указано в [6], к необходимости целенаправленного создания и изучения набора тестовых или иллюстративных моделей, которые представляли бы с достаточной полнотой основные типы реальных сред. В идеале каждая модель должна определяться практической необходимостью и по возможности отражать физическую природу анизотропии, что, в свою очередь, позволило бы решать качественно новый круг задач интерпретации.

Таким образом, совершенно очевидна необходимость оценить параметры анизотропии реальных сред. Такие оценки получают полевыми наземными наблюдениями отраженных, головных и рефрагированных волн разной поляризации, скважинными наблюдениями (ВСП, АК), а также физическим моделированием и лабораторными измерениями на образцах пород.

Причины анизотропии, как известно, многообразны: ориентация минералов и зерен, ориентация систем трещин на макро- и микроуровнях, тектонические напряжения, тонкая слоистость и др. В каждом конкретном случае в реальной среде действуют один или несколько факторов, что определяет тип симметрии среды и значения упругих констант соответствующей эффективной модели. Естественно предполагать, что анизотропия осадочных пород обусловлена главным образом тонкой слоистостью среды ($h \ll \lambda$). Однако в последнее время некоторые авторы склоняются к тому, что значительный вклад в анизотропию вносят трещиноватость (особенно для карбонатных пород) и микроупорядоченность (для глинистых разностей). Важно уметь оценить вклад того или иного фактора, приводящего к анизотропии.

В данной работе изучается анизотропия осадочных пород, обусловленная их тонкой слоистостью. Наиболее надежные данные для определения упругих констант трансверсально-изотропной среды, эквивалентной для длинных волн тонкослоистой, мо-

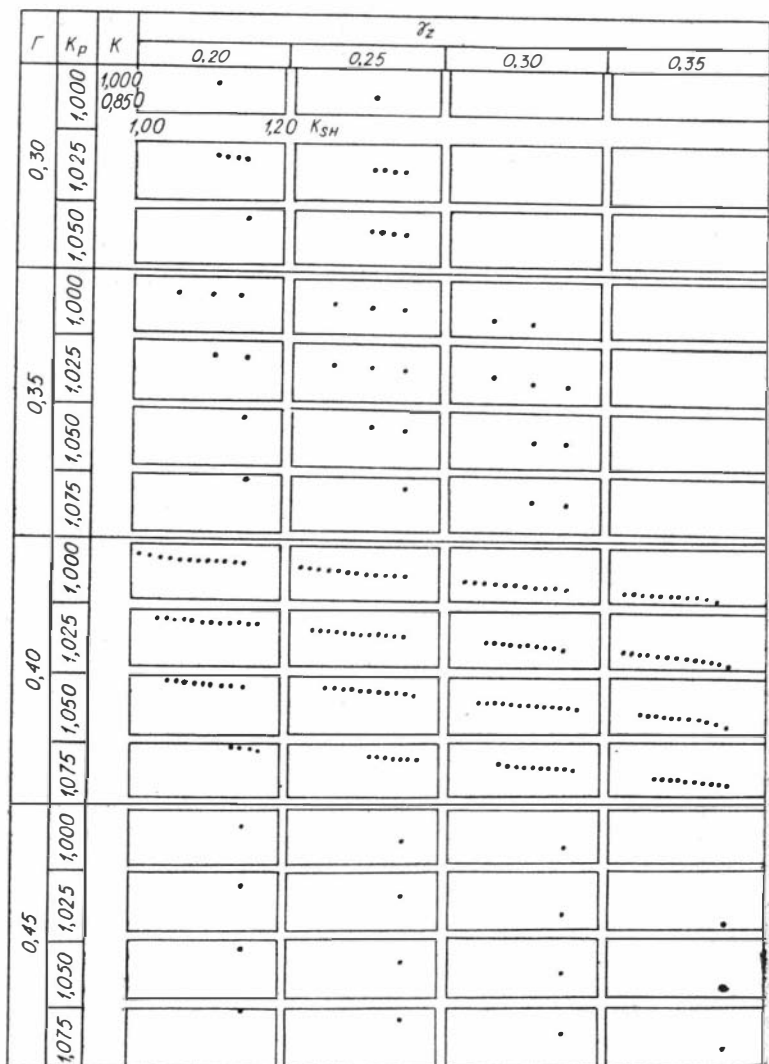


Рис. 2. Области значений параметров трансверсально-изотропных сред, эквивалентных тонкослойным.

меньше. Видна также взаимосвязь различных параметров. Наблюдается рост K_{SH} с ростом K_P и одновременное выпадение малых значений K_{SH} . Так, при $\Gamma = 0,4$ и $\gamma_z = 0,25$ для $K_P = 1$ значения K_{SH} заключены в пределах 1,015—1,15, а для $K_P = 1,075$ — в пределах 1,10—1,17. Сходным образом с ростом K_P убывают значения K_{SV} (т. е. растут значения K) и также сокращается интервал изменения K за счет выпадения больших значений (соответственно малых значений K_{SV}). Например, при тех же значениях $\Gamma = 0,4$ и $\gamma_z = 0,25$ при переходе от $K_P = 1$ до

ру K , вследствие чего каждому фиксированному набору значений параметров Γ , γ_z , K_P , K_{SH} соответствовал интервал значений параметра K .

Задавались следующие пределы изменения параметров:

$$0,2 \leq \Gamma \leq 0,5; \quad 0,2 \leq \gamma_z \leq 0,4;$$

$$1 \leq K_P \leq 1,1; \quad 1 \leq K_{SH} \leq 1,3; \quad 0,6 \leq K \leq 1$$

и следующие шаги их перебора:

$$\Delta\Gamma = 0,05; \quad \Delta\gamma_z = 0,05; \quad \Delta K_P = 0,025; \quad \Delta K_{SH} = 0,005; \quad \Delta K = 0,001.$$

Чтобы несколько сузить искомые области значений параметров, на параметр K накладывались дополнительные ограничения, а именно требовалось найти такие значения K , при которых на индикатрисах лучевых скоростей квази-SV-волн не было бы петель в области углов между осями симметрии. Использовалось условие Масгрейва

$$2ah - d^2 > d[(ah)^{1/2} + 2c_{44}];$$

$$a = c_{11} - c_{44}; \quad h = c_{33} - c_{44}; \quad d = c_{13} + c_{44},$$

являющееся достаточным условием наличия петли. Петель, как известно, не должно быть при $K_{SV} \leq 1,12-1,15$, т. е., согласно (17), при K больше некоторого значения; таким образом, значения K ограничивались снизу. Кроме того, палагалось условие, чтобы индикатрисы лучевых скоростей SV-волн имели бы максимумы (а не минимумы), для этого значения K должны быть ограничены сверху. Для облегчения поиска таких значений K использовалась табл. 1, рассчитанная заранее. (Эта таблица аналогична табл. 3 в [9], но составлена более подробно).

Найденные области значений параметров, удовлетворяющих всем условиям, схематически представлены на рис. 2, из которого прежде всего видно, что максимальное количество областей допустимых значений (γ_z , K_P , K_{SH} , K) приходится на $\Gamma = 0,4$. При всех других значениях параметра Γ таких областей значительно

Т а б л и ц а 1

Интервалы значений параметра K , при которых индикатрисы лучевых скоростей SV-волн не имеют петель и имеют максимумы

K_P	γ_z				
	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
1,000	0,947—0,959	0,915—0,935	0,875—0,905	0,825—0,865	0,765—0,820
1,025	0,959—0,971	0,929—0,947	0,889—0,919	0,840—0,880	0,780—0,835
1,050	0,973—0,983	0,941—0,961	0,903—0,930	0,855—0,895	0,795—0,850
1,075	0,985—0,997	0,955—0,973	0,915—0,945	0,870—0,910	0,810—0,865
1,100	0,997—1,009	0,967—0,987	0,928—0,957	0,885—0,920	0,825—0,880

П р и м е ч а н и е. Отсутствие петель обеспечивается выполнением условия $K > K_1$, а выпуклость — условием $K < K_2$, где $[K_1, K_2]$ — приведенные в таблице интервалы изменений K .

и плотность ρ следующим образом:

$$\begin{aligned} v_{Pz} &= \sqrt{c_{33}/\rho}; \quad \gamma_z = \sqrt{c_{44}/c_{33}}; \\ K &= \sqrt{c_{13}/c_{33}}; \quad K_P = \sqrt{c_{11}/c_{33}}; \quad K_{SH} = \sqrt{c_{66}/c_{44}}, \end{aligned} \quad (16)$$

z — вертикальная ось симметрии. Кроме того, для наглядной характеристики степени анизотропности среды для SV -волн будет использоваться коэффициент

$$K_{SV} = (1/2)\sqrt{(c_{11} + c_{33} - 2c_{13})/c_{44}}, \quad (17)$$

аналогичный коэффициентам K_P , K_{SH} для волн P , SH и равный отношению фазовых скоростей $v_{SV}|_{\beta=45^\circ}/v_{SV}|_{\beta=0^\circ, 90^\circ}$. Применение коэффициента K_{SV} имеет смысл только в случае отсутствия петель на индикатрисах лучевых скоростей волн SV , т. е. когда фазовые и лучевые скорости этих волн близки, что имеет место при $K_{SV} < 1,12-1,15$. При $K_P = 1$ функция $v_{sv}(\beta)$ симметрична относительно $\beta = 45^\circ$ и коэффициент K_{SV} характеризует отношение v_{\max}/v_{\min} , при $K_P \neq 1$ значения K_{SV} записаны по сравнению с v_{\max}/v_{\min} .

Требуется построить модель трансверсально-изотропных сред, эквивалентных для длинных волн ($\lambda \gg h$) тонкослоистым, для которых эффективные упругие параметры (16) являются заданными функциями глубины z . Эта задача решалась двумя способами.

Первый способ состоял в том, что задавались интервалы изменения параметров (16) и из всевозможных комбинаций этих параметров отбирались те, которым соответствуют тонкослоистые среды. Отбор производился путем проверки условий соответствия Бэкуса [13]; эти условия являются необходимыми и достаточными и имеют вид

$$\begin{aligned} 0 < R < \Gamma^2 L^{-1}; \quad 0 < S < \Gamma^2 M; \\ 0 < T < \Gamma^2; \quad T^2 < RS; \\ (\Gamma^2 - T)^2 < (\Gamma^2 L^{-1} - R) \cdot (\Gamma^2 M - S), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$R = C^{-1}; \quad S = (F^2 + 4MC - AC)/(4C); \quad T = (C - F)/(2C),$$

а константы A , C , F , L , M — модули упругости: $A = c_{11}$, $C = c_{33}$, $F = c_{13}$, $L = c_{44}$, $M = c_{66}$; параметр Γ есть предельное значение $\gamma = v_s/v_p$ в изотропных тонких слоях, т. е. $\gamma < \Gamma$.

Условия (18) проанализированы в работе [6]. В частности, там показано, что неравенства (18) зависят не от шести параметров: A , C , F , L , M , Γ , а от пяти: A/C , F/C , L/C , M/C , Γ . В соответствии с этим для проверки условий (18) задавались значения четырех эффективных упругих параметров γ_z , K , K_P , K_{SH} (16) и параметра Γ .

Поиск областей констант, удовлетворяющих условиям (18), производился, как и в [6], путем простого перебора их значений в заданных интервалах. Последним был перебор по парамет-

где

$$p = \frac{\sin \beta_0}{v_0} = \frac{\sin \beta(z)}{v(z)},$$

и, следовательно,

$$\sin \beta(z) = pv(z); \quad \cos \beta(z) = (1 - p^2 v^2(z))^{1/2}.$$

Сходство в поведении функций (12), (13) — быстрый рост при $z \rightarrow z_m$ — вызвано наличием в знаменателях $\cos \beta(z)$, причем для $y''(z)$ в пятой степени. Отсюда следует, что интегрирование по формуле (10) с равномерным шагом $h = (b - a)/n$ недопустимо, и для обеспечения заданной погрешности (11) интервал $[a, b] = [0, z_m - \Delta z]$ надо разбить на отрезки $[z_{i-1}, z_i]$ такой длины, чтобы выполнялось условие

$$h_i^2 y_i''(\xi) = \text{const}, \quad h_i = z_i - z_{i-1}, \quad \xi \in [z_{i-1}, z_i], \quad \text{т. е.}$$

$$h_i \sim 1/\sqrt{y_i''}. \quad (14)$$

Если не делать вышеописанных оценок и действовать на основе качественных рассуждений, то, как показали вычисления, отрезки интегрирования $[z_{i-1}, z_i]$ можно находить по формуле

$$\Delta z_i = \Delta z_{i-1} + 2\Delta z_{\min} \quad (i = 2, \dots, n, \Delta z_1 = \Delta z_{\min}), \quad (15)$$

где отрезок Δz_{\min} выбирается равным отрезку Δz (см. формулы (6)), а увеличение длин Δz_i идет по мере движения от $z = z_m - \Delta z$ к $z = 0$. При расчетах мы полагали $\Delta z_{\min} \leq 10^{-4}$ км. На каждом из отрезков Δz_i интегрирование выполнялось по формуле (10) при $h_i = \Delta z_i/10$. Это обеспечивало требуемую точность вычисления расстояний x порядка 10^{-4} км, а времен t — порядка 10^{-3} с. Погрешности Δx , Δt оценивались путем сравнения значений x , t для изотропной среды с линейной функцией скорости, найденных по аналитическим формулам [10, 115—117] и численно с выбранными параметрами интегрирования.

При расчете годографов по параметрическим формулам (3), (4) получаются массивы значений $x_k(p_k)$, $t_k(p_k)$, $k = 1, \dots, m$. Для сравнения годографов и лучей различных типов волн (P , SV , SH), а также теоретических и экспериментальных данных, надо знать значения $t(x)$ в заданных точках x профиля и иметь лучи, проходящие в эти точки. Очевидно, что эта цель будет достигнута, если построить непрерывные функции $t(x)$, $p(x)$. Функции $t(x)$ получаются непосредственно из $t_k(x_k)$, а для нахождения $p(x)$ по массивам значений $x_k(p_k)$ мы меняли местами аргументы и функции, т. е. задавали $p_k(x_k)$. Далее применялась аппроксимация кубическими сплайнами.

2. МОДЕЛИ ГРАДИЕНТНЫХ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ СРЕД — ДЛИННОВОЛНОВЫХ ЭКВИВАЛЕНТОВ ТОНКОСЛОИСТЫХ

Для описания упругих свойств трансверсально-изотропной среды будем использовать эффективные упругие параметры [10, с. 45—50], которые выражаются через модули упругости c_{ij}

Второе предположение означает замену анизотропной среды изотропной с линейным возрастанием скорости. В этом случае выражения (8) имеют смысл

$$\Delta x = \int_{z_m - \Delta z}^{z_m} \operatorname{tg} \beta(z) dz; \quad \Delta t = \int_{z_m - \Delta z}^{z_m} \frac{1}{\cos \beta(z) v(z)} dz,$$

где $v(z)$ — скорость в изотропной среде, и при линейном возрастании $v(z)$ в интервале Δz от $V_1 = V|_{z=z_m - \Delta z}$ до $V_2 = V|_{z=z_m}$ получим

$$\Delta x = \frac{V_1 \Delta z}{V_2 - V_1} \cdot \frac{q}{p} \Big|_{z=z_m - \Delta z}; \quad (9)$$

$$\Delta t = \frac{\Delta z}{V_2 - V_1} \ln \left[\left(1 + \frac{V_2 - V_1}{V_1} \right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1 + (p^2/q^2)|_{z=z_m - \Delta z}}} \right) \right].$$

Подставляя выражения (9) в (7), найдем значения интегралов $I_{2,x}$, $I_{2,t}$.

Интегралы $I_{1,x}$, $I_{1,t}$ вычислялись путем численного интегрирования по общей формуле трапеций

$$\int_a^b y dx = h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \dots + y_{n-1} \right). \quad (10)$$

Погрешность формулы трапеций, определяемая остаточным членом, равна

$$R = \frac{(b-a)h^2}{12} y''(\xi), \quad \xi \in [a, b]. \quad (11)$$

Вторые производные подынтегральных функций интегралов $I_{1,x}$, $I_{1,t}$ ведут себя качественно так же, как сами подынтегральные функции, изображенные на рис. 1. Это можно наглядно представить, написав формулу $y'' = K(1 + y'^2)^{3/2}$, где K — кривизна, и посмотрев на рис. 1. Количественную оценку нетрудно получить, если заменить заданную градиентную трансверсально-изотропную среду ближайшей изотропной средой с линейным изменением скорости $v(z) = v_0(1 + kz)$ (близость по тензору Кристоффеля $c_{ijk}n_j n_k$ [11]; $\mathbf{n} = (\sin \beta, 0, \cos \beta)$, $\beta = \beta(z)^*$). Тогда, дифференцируя дважды функции

$$y_{1,x} = \operatorname{tg} \beta(z); \quad y_{1,t} = 1/(v(z) \cos \beta(z)), \quad (12)$$

получим

$$\frac{d^2 y_{1,x}}{dz^2} = \frac{3p^2 v_0^2 k^2 \sin^2 \beta(z)}{\cos^5 \beta(z)}; \quad (13)$$

$$\frac{d^2 y_{1,t}}{dz^2} = \frac{p^2 v_0^2 k^2 (6 \sin^4 \beta(z) - 5 \sin^2 \beta(z) + 2)}{\sin^3 \beta(z) \cos^5 \beta(z)},$$

* Для однородных сред такого рода операции рассматриваются в статье В. Ю. Гречки «Расчет лучей...» (см. наст. сборник).

Эти $z(\lambda_{ij})$ однозначны. Задавая значения z_m , найдем значения $\lambda_{11}(z_m)$, $\lambda_{44}(z_m)$, $\lambda_{66}(z_m)$, а следовательно, в силу равенств (5), и значения параметра p для заданного типа волны (P, SV, SH).

Интегралы (3), (4) являются несобственными: подынтегральные выражения обращаются в бесконечность при $z = z_m$, так как в этой точке $q = 0$ (рис. 1). Данное затруднение было преодолено путем разбиения каждого из интегралов в (3), (4) на два интеграла: собственный на отрезке $[0, z_m - \Delta z]$ и несобственный на оставшейся малой части пути, т. е. на отрезке $[z_m - \Delta z, z_m]$, и замены несобственного интеграла его приближенным значением.

Перепишем выражения (3), (4) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} &= \int_0^{z_m} \frac{p}{q} F_1(z) dz = \int_0^{z_m - \Delta z} \frac{p}{q} F_1(z) dz + \\ &+ \int_{z_m - \Delta z}^{z_m} \frac{p}{q} F_1(z) dz = I_{1,x} + I_{2,x}; \\ \frac{t}{2} &= \int_0^{z_m} \frac{1}{q} F_2(z) dz = \int_0^{z_m - \Delta z} \frac{1}{q} F_2(z) dz + \\ &+ \int_{z_m - \Delta z}^{z_m} \frac{1}{qV^2(z)} \cdot V^2(z) F_2(z) dz = I_{1,t} + I_{2,t}. \end{aligned} \quad (6)$$

Интегралы $I_{2,x}$, $I_{2,t}$ — несобственные. Если отрезки интегрирования Δz достаточно малы, то вклады этих интегралов в значения $x/2$, $t/2$ будут небольшими по сравнению с вкладами $I_{1,x}$, $I_{1,t}$. Поэтому вполне допустимо интегралы $I_{2,x}$, $I_{2,t}$ вычислять приближенно. Это можно делать на основе предположений о малом изменении параметров анизотропии $\lambda_{ij}(z)$ в интервале Δz и близости траектории луча в этом интервале к дуге окружности.

Вследствие первого предположения можем записать

$$\begin{aligned} I_{2,x} &= \int_{z_m - \Delta z}^{z_m} \frac{p}{q} F_1(z) dz = F_1|_{z=z_m - \Delta z/2} \Delta x; \\ I_{2,t} &= \int_{z_m - \Delta z}^{z_m} \frac{1}{qV^2(z)} \tilde{F}_2(z) dz = \tilde{F}_2|_{z=z_m - \Delta z/2} \Delta t, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\tilde{F}_2 = V^2 F_2; \Delta x = \int_{z_m - \Delta z}^{z_m} \frac{p}{q} dz; \Delta t = \int_{z_m - \Delta z}^{z_m} \frac{1}{qV^2(z)} dz. \quad (8)$$

Параметр p определим путем задания начального условия $p|_{t=0} = p^0$ в точке $x|_{t=0} = 0$ источника (см. (2)). Запишем его в следующем виде:

$$p = \frac{n_1}{V(n_1)} = \frac{\sin \beta_0}{V(\beta_0)},$$

введя угол β_0 между волновой нормалью \mathbf{n} в точке $x = 0$ и осью симметрии z . Таким образом, задавая углы β_0 и вычисляя фазовые скорости $V(\beta_0)$ для P -, SV -волн по формуле

$$V_{P,SV}(\beta) = \left\{ (1/2) [a + d \pm ((a-d)^2 + 4b^2)^{1/2}] \right\}^{1/2},$$

$$a = \lambda_{33} \cos^2 \beta + \lambda_{44} \sin^2 \beta,$$

$$b = (\lambda_{13} + \lambda_{44}) \sin \beta \cos \beta,$$

$$d = \lambda_{44} \cos^2 \beta + \lambda_{11} \sin^2 \beta$$

(знаки «+» для P -волны и «-» для SV), а для SH -волн по формуле

$$V_{SH}(\beta) = (\lambda_{66} \sin^2 \beta + \lambda_{44} \cos^2 \beta)^{1/2},$$

получим значения p для волны заданного типа.

Глубина максимального проникания луча z_m также может быть определена из условия $p = \text{const}$ вдоль луча. На этой глубине $\beta = 90^\circ$, и

$$p = \frac{\sin \beta}{V(\beta)} = \frac{1}{V|_{\beta=90^\circ}} = \frac{1}{V(z_m)}.$$

Задание p фиксирует значение $V|_{\beta=90^\circ}$, т. е.

$$p_P = \lambda_{11}^{-1/2}; \quad p_{SV} = \lambda_{44}^{-1/2}; \quad p_{SH} = \lambda_{66}^{-1/2}. \quad (5)$$

Зависимости $\lambda_{11}(z)$, $\lambda_{44}(z)$, $\lambda_{66}(z)$ нам известны, это входные данные задачи. Если названные функции $\lambda_{ij}(z)$ однозначны, то по обратным функциям $z(\lambda_{11})$, $z(\lambda_{44})$, $z(\lambda_{66})$ можно найти значения z , которые и будут искомыми значениями z_m . В данной работе расчеты лучей выполнялись только для однозначных функций $\lambda_{ij}(z)$.

Описанный способ параметризации луча основан на задании углов β_0 выхода волновых нормалей из источника. Возможен

и другой способ — это задание глубин максимального проникания z_m . В этом случае никаких затруднений не возникает при расчете лучей для неоднозначных функций $\lambda_{ij}(z)$, так как функ-

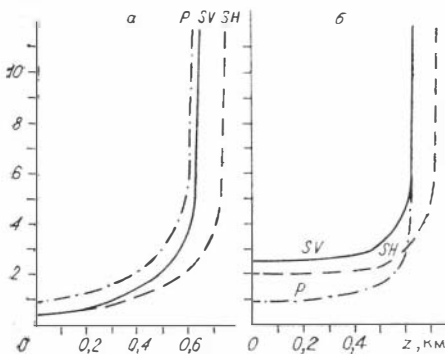


Рис. 1. Вид подынтегральных функций интегралов $I_{1,x}$ (а), $I_{1,t}$ (б), определяющих годографы P -, SV - и SH -волн.

где $(\lambda_{ijkl}) = (c_{ijkl}/\rho)$ — приведенный тензор модулей упругости; $\mathbf{P} = \mathbf{n}/V(\mathbf{n})$ — вектор рефракции (\mathbf{n} — волновая нормаль; $V(\mathbf{n})$ — фазовая скорость); A — вектор поляризации; \mathbf{v} — лучевая скорость.

Расчет луча выполняется путем численного интегрирования (1) с начальными условиями

$$\mathbf{x}|_{\tau=0} = \mathbf{x}^0; \quad \mathbf{P}|_{\tau=0} = \mathbf{P}^0. \quad (2)$$

В случае трансверсально-изотропных сред, характеризующихся модулями упругости $c_{ij}(z)$ (z — ось симметрии среды), решение задачи расчета лучей значительно упрощается и сводится к вычислению определенных интегралов.

Параметрические уравнения годографов рефрагированных волн выглядят следующим образом [14].

Для квази- P -, квази- SV -волн

$$\begin{aligned} x(p) &= 2 \int_0^{z_m} \frac{p(\lambda_{11} + \lambda_{44} - 2\lambda_{11}\lambda_{44}p^2 + Aq^2)}{q(\lambda_{33} + \lambda_{44} - 2\lambda_{33}\lambda_{44}q^2 + Ap^2)} dz; \\ t(p) &= 2 \int_0^{z_m} \frac{D_1 + D_2}{q(\lambda_{33} + \lambda_{44} - 2\lambda_{33}\lambda_{44}q^2 + Ap^2)} dz, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\lambda_{ij} = \lambda_{ij}(z)$ — приведенные модули упругости;

$$A = \lambda_{13}^2 + 2\lambda_{13}\lambda_{44} - \lambda_{11}\lambda_{33};$$

$$B = \lambda_{33} + \lambda_{44} + Ap^2;$$

$$C = 1 - (\lambda_{11} + \lambda_{44})p^2 + \lambda_{11}\lambda_{44}p^4;$$

$$D_1 = 1 - \lambda_{11}p^2 - \lambda_{44}q^2;$$

$$D_2 = 1 - \lambda_{44}p^2 - \lambda_{33}q^2;$$

$$q = \{ (B \mp [B^2 - 4\lambda_{33}\lambda_{44}C]^{1/2}) / (2\lambda_{33}\lambda_{44}) \}^{1/2}.$$

Знак « $-$ » для квази- P -волны, « $+$ » — для квази- SV . Для SH -волны

$$x(p) = 2 \int_0^{z_m} \frac{p\lambda_{66}}{q\lambda_{44}} dz; \quad t(p) = 2 \int_0^{z_m} \frac{1}{q\lambda_{44}} dz, \quad (4)$$

где $\lambda_{44} = \lambda_{44}(z)$, $\lambda_{66} = \lambda_{66}(z)$, $q = [(1 - \lambda_{66}p^2)/\lambda_{44}]^{1/2}$.

Параметры p и q , входящие в формулы (3), (4), являются соответственно горизонтальной и вертикальной компонентами ($p \equiv P_1$, $q \equiv P_3$) вектора рефракции $\mathbf{P}(P_1, 0, P_3)$. Согласно закону Снеллиуса, $p = \text{const}$ вдоль луча.

Для вычисления интегралов (3), (4) необходимо задать параметр p и верхний предел интегрирования z_m — глубину максимального проникания луча.

данных, полученных в различных регионах земного шара, о наличии анизотропии в верхней части земной коры (осадочных породах), в земной коре и верхней мантии ([1, 3, 5, 8, 12, 15] и др.). Во-вторых, повысились требования к детальности изучения геологического разреза [2], в связи с чем возникла необходимость в привлечении новых информативных параметров и, в частности, параметров анизотропии. В-третьих, развитие многоволновых сейсмических исследований [4, 9] привело к осознанию того, что успешное применение поперечных волн требует знания анизотропных свойств среды и, наоборот, используя волны различных типов (продольные, поперечные и обменные), можно получать новые характеристики среды, ее анизотропных свойств.

В данной работе изучаются особенности кинематических характеристик рефрагированных волн трех типов (P , SV , SH), распространяющихся в трансверсально-изотропных средах, модули упругости которых являются функциями глубины; ось анизотропии вертикальна. Как известно, трансверсально-изотропные среды при соответствующем задании их параметров могут служить эффективными моделями тонкослоистых сред, если $\lambda \gg h$ (λ — длина волны, h — мощность тонкого слоя). Для осадочных отложений слоистость — главная их характерная черта, вследствие чего все осадочные породы, особенно терригенные, являются анизотропными — в большей или меньшей степени.

Путем численного моделирования изучено поведение лучей и годографов рефрагированных P -, SV - и SH -волн для различных моделей тонкослоистых сред. Расчеты проводились для волн, проникающих в среду до глубины 1—2 км и выходящих на поверхность на расстояниях до 3—4 км. Такие удаления характерны для проводимых в массовом порядке наблюдений отраженных волн по системам многократных перекрытий. Если изучать рефрагированные волны, регистрируемые в начальной части сейсмограмм, то можно без дополнительных затрат получать данные о тонкой слоистости верхней трети — половины разреза. Наиболее пригодны для этой цели многоволновые наблюдения с использованием направленных источников и трехкомпонентной регистрации. В работе показано, каким образом степень и характер дифференциации разреза по скоростям продольных и поперечных волн влияют на траектории лучей и форму годографов P -, SV - и SH -волн; особое внимание уделяется изучению соотношений между годографами поперечных волн SV и SH .

1. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ЛУЧЕЙ И ВРЕМЕН ПРОБЕГА

Дифференциальные уравнения луча $x_j(\tau)$ (τ — время пробега вдоль луча) в неоднородной анизотропной среде имеют вид [7, 14]

$$\frac{dx_j}{d\tau} = v_j \equiv \lambda_{ijkl} P_k A_l A_i; \quad (1)$$

$$\frac{dP_j}{d\tau} = \eta_j \equiv (-1/2) \frac{\partial \lambda_{ijkl}}{\partial x_j} P_n P_k A_l A_i \quad (j = 1, 2, 3),$$

диапазоном частот. Это позволяет рассчитывать на возможность определения параметров анизотропии (каких — требуется изучить) и использования их для интерпретации с позиций прогнозирования геологического разреза и прямых поисков. Перспективно применение многоволновой сейсморазведки. В этом случае можно будет определять не только коэффициенты K_p , но и другие параметры, что повысит надежность и информативность исследований.

Автор приносит благодарность И. Р. Оболенцевой за внимательное отношение к работе и полезные обсуждения полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах.— М.: Наука, 1984.— 350 с.
2. Баянов А. С., Кондрашов В. А., Оболенцева И. Р., Степанова Э. Б. Результаты комплексного использования продольных и обменных отраженных волн в Пудинском нефтегазоносном районе // Многоволновая сейсморазведка.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.— С. 169—174.
3. Маслова С. И. Об анизотропии юрских отложений юго-восточной части Западно-Сибирской плиты: Материалы конференции молодых ученых Ин-та геологии и геофизики СО АН СССР.— Новосибирск, 1988.— С. 75—88.— Деп. в ВИНТИИ 27.04.88, № 3309-B88.
4. Молотков Л. А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах.— Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1984.— 200 с.
5. Невский М. В. Квазианизотропия скоростей сейсмических волн.— М.: Наука, 1974.— 178 с.
6. Распространение объемных волн и методы расчета волновых полей в анизотропных упругих средах.— Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1984.— 282 с.
7. Ризниченко Ю. В. Сейсморазведка слоистых сред.— М.: Недра, 1985.— 183 с.
8. Рытов С. М. Упругие свойства мелкослоистой среды // Акуст. журн.— 1956.— Т. 2, вып. 1.— С. 71—83.
9. Сибиряков Б. П., Максимов Л. А., Татарников М. А. Анизотропия и дисперсия упругих волн в слоистых периодических структурах.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980.— 70 с.
10. Backus G. E. Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering // J. Geophys. Res.— 1962.— Vol. 67, N 11.— P. 4427—4440.

А. Ф. ДУРЫНИН

ЛУЧИ И ГОДОГРАФЫ РЕФРАГИРОВАННЫХ P -, SV - И SH -ВОЛН В ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ, ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ТОНКОСЛОИСТЫМ

В последние годы резко увеличился интерес сейсмологов к изучению распространения упругих волн в анизотропных средах. Этому способствовали следующие обстоятельства. Во-первых, накопилось довольно большое количество экспериментальных

так как скорости V_s в тонких слоях брались не из наблюдений, за их отсутствием, а рассчитывались по корреляционной формуле как функции скоростей V_p .) Зависимость коэффициентов анизотропии от дифференцированности отложений — основная зависимость, она изучалась многими авторами (см. [5]).

Дифференцированность юрских отложений зависит от количества низкоскоростных угольных пластов и высокоскоростных пластов песчаника и от их распределения по разрезу, т. е. частоты сменяемости одних другими. Исходя из этой связи, можно делать некоторый прогноз относительно коэффициентов анизотропии, зная состав пород, и наоборот. Так, в скв. 3 с самыми большими значениями коэффициентов анизотропии ($K_p = 1,09$; $K_{sv} = 1,22$ — условное значение; $K_{sh} = 1,27$, см. табл. 3) песчаники и угли преобладают над другими породами (59 %, см. табл. 1). То же самое относится и к скв. 14: $K_p = 1,09$; $K_{sv} = 1,16$; $K_{sh} = 1,21$ и 54 % песчаника и угля. Однако, поскольку все породы, в том числе песчаник и углистые разности, имеют довольно большой диапазон изменений скоростей, связь между составом пород и коэффициентом анизотропии не всегда проявляется напрямую.

На графиках параметров анизотропии (см. рис. 1, Б, 4) выделяются экстремальные значения коэффициентов анизотропии: резкие максимумы, приуроченные к угольным пластам, и пологие минимумы, связанные с высокоскоростными песчаниками, которые на достаточно больших интервалах имеют малую степень дифференцированности. Повышенные значения коэффициентов анизотропии, определяемых для квази- P и SV -волн как отношения $V_{||}/V_{\perp}$ (скоростей параллельно и перпендикулярно слоистости), объясняются во многих случаях не только повышением $V_{||}$, но и снижением V_{\perp} на интервале осреднения при вычислении c_{ij} по формулам (1).

Вариации параметров анизотропии по площади видны из сопоставления данных по разным скважинам (см. рис. 4). Характерной чертой кривых параметров анизотропии является наличие трех-четырёх резко выраженных максимумов K_p (а также K_{sv} , K_{sh}), связанных с отдельными пачками отложений; при этом имеются максимумы, которые коррелируются от скважины к скважине. Во всех разрезах наблюдается максимум, соответствующий верхней пачке B_1 васюганской свиты. Выделяется максимум K_p , связанный с границей пачек T_3 , T_4 тюменской свиты; в скважинах 9, 11, 14 его величина меняется в пределах 1,20—1,25; в скв. 10 этот максимум исчезает (нет соответствующего угольного пласта). Имеются максимумы, коррелирующиеся с границами пачек T_4 , T_5 и T_5 , T_6 тюменской свиты.

Таким образом, юрские отложения можно аппроксимировать не только изотропной моделью (совокупность тонкослоистых пачек), как это делается в настоящее время, но и моделью слоисто-однородной трансверсально-изотропной среды, выделяя несколько слоев. Такая аппроксимация содержит меньшее количество параметров и может быть построена в соответствии с используемым

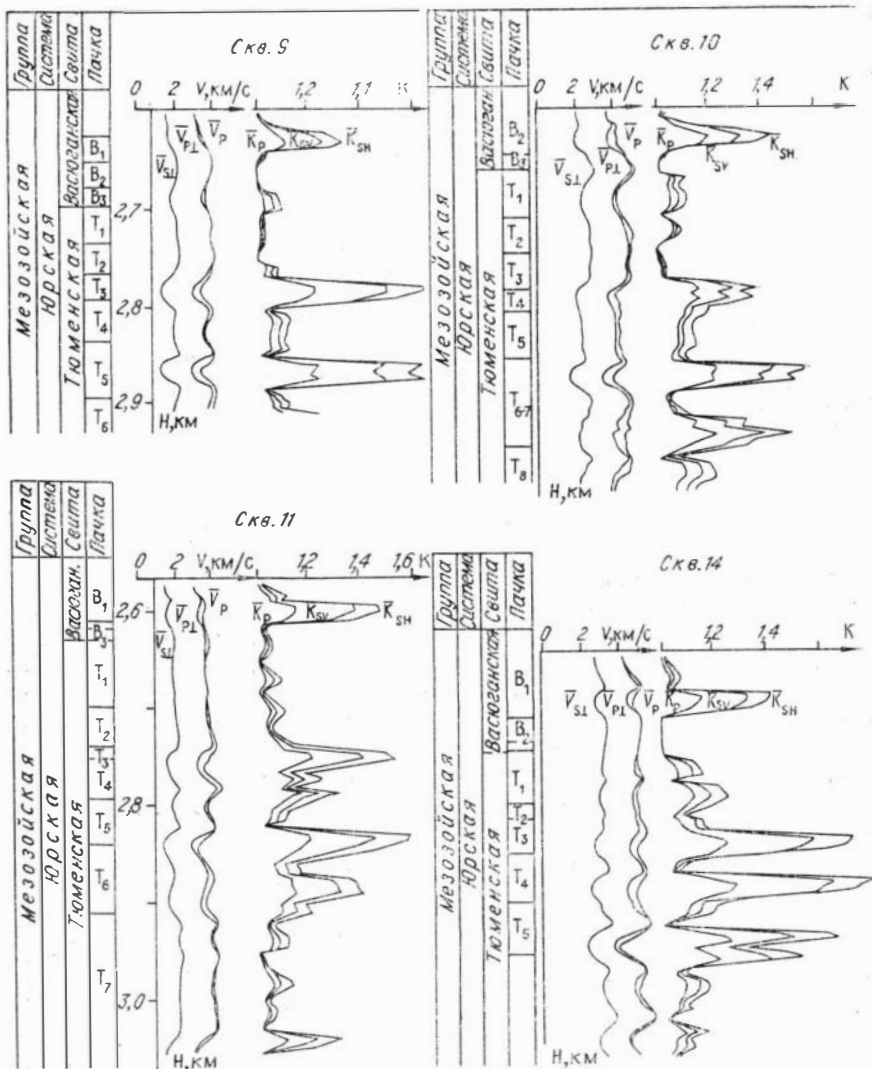


Рис. 4. Коэффициенты анизотропии в функции глубины, вычисленные по данным АК скважин 9, 10, 11, 14 на Нижне-Табганской площади.

Проанализируем вариации коэффициентов анизотропии в функции глубины. Отчетливо прослеживается связь между величиной коэффициентов анизотропии K_p , K_{sv} , K_{sh} и степенью дифференцированности пород (см. рис. 1, Б, 4; табл. 1) — чем больше дифференцированность, тем выше коэффициенты анизотропии, причем возрастают все три коэффициента, располагаясь, как правило, в следующем порядке: $K_{sh} > K_{sv} > K_p$. (Здесь следует напомнить, что приводимые данные несколько идеализированы,

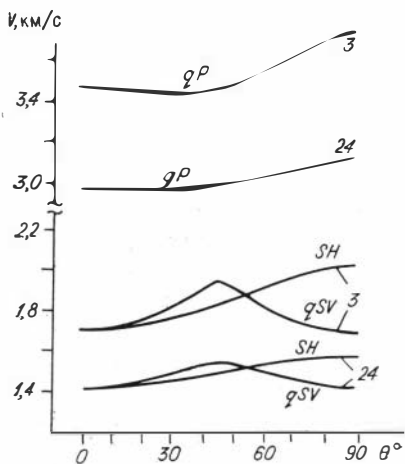


Рис. 3. Индикатрисы лучевых скоростей $V(\theta)$ волн квази- P , квази- SV и SH , рассчитанные по данным АК скважин 3 и 24 (модули упругости см. в табл. 3).

параметров. В таблицах приведены математические ожидания и среднеквадратические отклонения всех параметров. Среднеквадратические отклонения велики. Причина состоит, как видно из приведенного выше фактического материала, в том, что реальная среда значительно сложнее, чем аппрок-

симирующая ее модель. Однако если усложнить модель, она может оказаться практически непригодной для использования.

Анизотропные модели. В настоящее время благодаря развитию лучевого метода [6] появилась возможность исследовать распространение объемных волн для широкого класса анизотропных сред. Однако такие расчеты проводятся пока недостаточно активно, и главная причина состоит в том, что неизвестны (недостаточно известны) модели реальных анизотропных сред и почти нет сведений о значениях параметров анизотропии. Проведение же исследований для произвольно анизотропных сред не имеет смысла, потому что слишком велико многообразие типов симметрии и параметров и далеко не все необычные явления, свойственные анизотропным средам, возможны для реальных сред, анизотропных вследствие той или иной причины.

В данной работе собраны сведения о параметрах анизотропии реальных осадочных пород, анизотропных вследствие тонкой слоистости — главного свойства осадочных отложений. Эти сведения представлены в табл. 3, 4. На рис. 3 изображены типичные индикатрисы лучевых скоростей волн квази- P , квази- SV и SH для значений параметров из этих таблиц.

Упругие параметры, помещенные в табл. 3, 4, характеризуют юрские терригенные отложения мощностью около 300 м как однородный анизотропный слой; даны средние значения констант. Для характеристики изменения упругих свойств с глубиной можно использовать данные АК, изображенные на рис. 1 и 4. В зависимости от того, сохраняются ли средние значения параметров постоянными в данном интервале глубин или наблюдается их заметный рост (или убывание) с глубиной, применяется аппроксимация моделью слоисто-однородной или непрерывной среды.

Из представленных данных следует, что параметры анизотропии юрских отложений подвержены значительным изменениям с глубиной и по площади.

Таблица 3

Модули упругости c_{ij} и эффективные упругие параметры, рассчитанные способом 1 (BM1)

№ сква- жины	$\bar{c}_{11},$ σc_{11}	$\bar{c}_{33},$ σc_{33}	$\bar{c}_{13},$ σc_{13}	$\bar{c}_{44},$ σc_{44}	$\bar{c}_{66},$ σc_{66}	$\bar{K}_P,$ σK_P	$\bar{K}_{SH},$ σK_{SH}	$\bar{K}_{SV},$ σK_{SV}	$\bar{V}_{P\perp},$ $\sigma V_{P\perp}$	$\bar{V}_{S\perp},$ $\sigma V_{S\perp}$
3	33,47 5,34	28,83 7,24	12,71 2,21	6,98 3,01	9,85 1,81	1,09 0,07	1,27 0,27	1,22 0,22	3,53 0,42	1,70 0,38
4	32,71 4,03	28,91 5,17	12,78 1,49	7,38 2,13	9,54 1,41	1,07 0,04	1,16 0,10	1,12 0,08	3,55 0,29	1,78 0,24
7	35,00 7,13	30,10 7,88	13,31 2,48	7,67 2,94	10,23 2,41	1,08 0,05	1,18 0,12	1,14 0,10	3,60 0,41	1,80 0,31
8	34,51 4,13	31,17 4,90	13,50 1,40	8,40 1,98	10,11 1,43	1,06 0,05	1,11 0,10	1,08 0,08	3,68 0,27	1,90 0,22
14	34,00 7,20	29,29 7,88	12,99 2,41	7,43 3,05	9,95 2,49	1,09 0,08	1,21 0,22	1,16 0,17	3,55 0,44	1,76 0,36
24	24,10 5,57	21,87 5,41	10,72 1,60	5,19 1,95	6,44 1,97	1,05 0,03	1,14 0,09	1,11 0,07	3,13 0,36	1,50 0,29

Модули упругости c_{ij} и эффективные упругие параметры, вычисленные двумя описанными способами (BM1 и BM2), представлены в табл. 3, 4. Значения, полученные способом 2, как правило, меньше соответствующих значений, найденных способом 1. Наиболее отчетливо это видно для эффективных упругих

Таблица 4

Модули упругости $M_{c_{ij}}$ и эффективные упругие параметры, рассчитанные способом 2 (BM2)

№ сква- жины	$M_{c_{11}},$ σc_{11}	$M_{c_{33}},$ σc_{33}	$M_{c_{13}},$ σc_{13}	$M_{c_{44}},$ σc_{44}	$M_{c_{66}},$ σc_{66}	$MK_P,$ σK_P	$MK_{SH},$ σK_{SH}	$MK_{SV},$ σK_{SV}	$MV_{P\perp},$ $\sigma V_{P\perp}$	$MV_{S\perp},$ $\sigma V_{S\perp}$
3	29,18 6,16	25,71 7,52	12,32 2,05	6,11 3,03	8,07 2,21	1,08 0,08	1,24 0,24	1,19 0,19	3,28 0,43	1,60 0,35
4	38,59 4,31	25,83 4,94	12,40 1,28	6,28 1,99	7,82 1,58	1,06 0,05	1,14 0,14	1,10 0,10	3,31 0,34	1,64 0,21
7	35,94 6,55	32,34 7,31	14,36 2,03	8,59 3,06	10,39 2,31	1,06 0,07	1,14 0,14	1,10 0,10	3,66 0,39	1,88 0,31
8	34,39 6,68	32,20 7,09	14,20 2,04	8,74 2,72	9,85 2,33	1,04 0,04	1,08 0,08	1,06 0,06	3,65 0,37	1,90 0,29
14	32,33 6,74	29,07 7,69	13,36 2,14	7,45 3,04	9,14 2,39	1,06 0,06	1,16 0,16	1,12 0,12	3,47 0,43	1,76 0,33
24	25,03 4,94	23,14 4,71	11,56 1,31	5,42 1,86	6,56 1,78	1,04 0,04	1,13 0,12	1,10 0,09	3,13 0,33	1,52 0,24
«Сред- няя» скважина	33,60 7,21	30,37 7,70	13,75 2,25	7,49 3,02	9,61 2,47	1,06 0,06	1,14 0,14	1,11 0,11	3,55 0,39	1,82 0,26

Тогда параметры анизотропии являются функциями четырех независимых случайных величин: V_{P1} , V_{P2} , η_1 , η_2 — и могут быть найдены с помощью формул (5), в которых следует положить $\Psi(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$, где $f_i(x_i)$ — функции плотности распределения соответствующих случайных величин.

Математические ожидания и дисперсии модулей упругости и коэффициентов анизотропии K_P , K_{SH} , K_{SV} определяются выражениями

$$M\varphi(V_{P1}, V_{P2}, \eta_1, \eta_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(V_{P1}, V_{P2}, \eta_1, \eta_2) \times \\ \times f_1(V_{P1}) f_2(V_{P2}) f_3(\eta_1) f_4(\eta_2) dV_{P1} dV_{P2} d\eta_1, d\eta_2; \quad (6)$$

$$\sigma^2\varphi(V_{P1}, V_{P2}, \eta_1, \eta_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [M\varphi(V_{P1}, V_{P2}, \eta_1, \eta_2) - \\ - \varphi(V_{P1}, V_{P2}, \eta_1, \eta_2)]^2 f_1(V_{P1}) f_2(V_{P2}) f_3(\eta_1) f_4(\eta_2) dV_{P1} dV_{P2} d\eta_1 d\eta_2.$$

В качестве функций φ в (6) используются для нахождения параметров c_{ij} соответствующие выражения (2), а для коэффициентов анизотропии — формулы

$$K_P = (c_{11}/c_{33})^{1/2}; \quad K_{SH} = (c_{66}/c_{44})^{1/2};$$

$$K_{SV} = [(c_{11} + c_{33} - 2c_{13})/c_{44}]^{1/2}/2.$$

Коэффициент K_{SV} имеет смысл при не очень большой анизотропии; во всяком случае, на индикатрисе лучевой скорости V_{SV} не должно быть петли и функция $V_{SV}(\theta)$ должна быть почти симметричной, что возможно при значениях K_P , близких к единице.

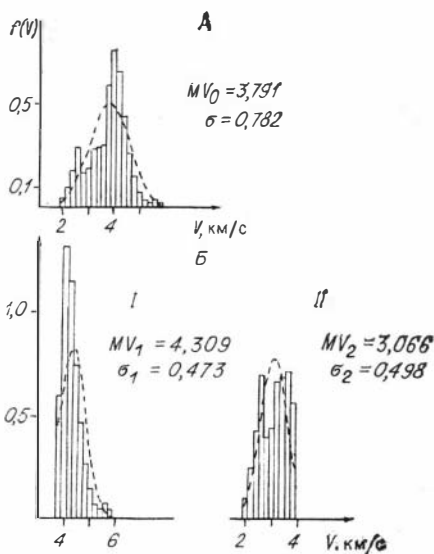
Функции плотности вероятности, входящие в (6), вычислялись двумя способами: на основе аппроксимации гистограмм аналитическими зависимостями (нормальным законом для V_{Pi} , линейной функцией для мощностей h_i) и путем непосредственного использования гистограмм (см. рис. 2).

Однако, как уже было отмечено, результаты проверки, основанной на «критерии χ^2 » Пирсона, показали, что скорости $V_P(z)$ в юрских отложениях данного района нельзя достаточно точно аппроксимировать нормальным законом. Проверка была осуществлена в предположении одно- и двухкомпонентного нормального распределения скоростей $V_P(z)$. Математическое ожидание и дисперсия рассчитывались соответственно как взвешенное сред-

нее и квадрат среднеквадратического отклонения: $m_v = \sum_{i=1}^n h_i V_i / \sum h_i$, $\sigma_v^2 = (1/n) \sum (V_i - m_v)^2$. Гипотетическое распределение функции плотности вероятности скорости для одно- и двухкомпонентного нормального распределения с соответствующим математическим ожиданием и дисперсией показано на рис. 2.

Интегрирование по переменной в формулах (6) осуществлялось с шагом, равным длине соответствующего разряда.

Рис. 2. Гистограммы распределения скоростей продольных волн по данным АК для 24 скважин: А — скорости V_P для всего разреза горских отложений, Б — скорости V_{P1} , V_{P2} для компонент I, II двухкомпонентной модели.



В рамках двухкомпонентной периодической модели величины V_{Pi} , V_{Si} , η_i , ρ_i , входящие в правые части формул (2), можно рассматривать как случайные с функциями плотности распределения, полученными непосредственно из наблюдений. Известно, что математическое ожидание и дисперсия функции φ нескольких случайных величин (x_1, \dots, x_n) равны соответственно

$$M\varphi(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, \dots, x_n) \psi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n; \quad (5)$$

$$\sigma^2 \varphi(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (M\varphi(x_1, \dots, x_n) - \varphi(x_1, \dots, x_n))^2 \psi(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

где $\psi(x_1, \dots, x_n)$ — функция плотности распределения случайных величин.

За неизменением данных АК по поперечным волнам скорости V_{Si} , необходимые для расчетов по формулам (2), находились на основе корреляционной зависимости $V_{Si} = V_{Si}(V_{Pi})$, где $i = 1, 2$. Использовалась формула

$$V_S(V_P) = 1,2V_P^2 - 0,07V_P^2 - 1,5.$$

Плотности ρ_i ($i = 1, 2$) компонент также находились из корреляционной зависимости

$$\rho(V_P) = 2,78 - 1,84/V_P,$$

полученной Г. И. Резяповым. Хотя в данном случае коэффициент корреляции известен ($R = 0,6$), вычисления выполнялись — для упрощения расчетов ввиду слабой зависимости вычисляемых величин от плотностей в слоях — без учета коэффициента корреляции.

Т а б л и ц а 2

Зависимость модулей упругости \bar{c}_{ij} и эффективных упругих параметров от базы осреднения

Упругая константа	l, м				
	5	10	20	40	L
\bar{c}_{11}	35,02	35,04	34,99	34,71	34,56
\bar{c}_{13}	13,94	13,60	13,31	12,87	12,70
\bar{c}_{33}	32,19	31,07	30,10	28,72	28,16
\bar{c}_{44}	8,79	8,20	7,67	6,96	6,74
\bar{c}_{66}	10,21	10,25	10,27	10,22	10,18
\bar{K}_P	1,05	1,07	1,08	1,10	1,11
\bar{K}_{SV}	1,09	1,12	1,14	1,17	1,18
\bar{K}_{SH}	1,12	1,16	1,18	1,22	1,23
$\bar{V}_{P\perp}$	3,69	3,64	3,60	3,54	3,52
$\bar{V}_{S\perp}$	1,90	1,85	1,80	1,74	1,72

вать исследованиям на удалениях до 10 км. В этом случае юрские отложения в целом можно считать однородным анизотропным толстым слоем. В сейсморазведочном диапазоне частот ($\lambda \sim 100-200$ м) юрские отложения, согласно результатам осреднения (см. рис. 1, 4), естественно представлять состоящими из нескольких (двух-четырех) однородных анизотропных толстых слоев, выделяя между ними дватри наиболее анизотропных тонких слоя, связанных с угольными пластами.

В табл. 2 представлены модули упругости и коэффициенты анизотропии, полученные как средние значения для всего разреза юрских отложений. Из таблицы так-

же виден характер изменения параметров анизотропии при увеличении базы осреднения l : по мере увеличения интервала осреднения l разница между средними параметрами анизотропии нивелируется. (Случай $l = L$ можно рассматривать как предельный, константы упругости определяют среду, которая имеет

период $L = \sum_{i=1}^n h_i$.) Интересно, что константы c_{11} и c_{66} почти не зависят от базы осреднения.

Второй способ (ВМ2). Для юрских отложений характерно наличие резко выраженных низкоскоростных слоев. На основании вида гистограмм и данных АК было проведено разделение слоев методом наименьших квадратов (МНК) на высокоскоростную и низкоскоростную компоненты (процедура разделения описана в [3]). Для каждой скважины строились как общие гистограммы скоростей продольной волны и мощностей тонких слоев, так и отдельные для каждой компоненты. Все 24 скважины рассматриваемого региона близки по характеру распределения скоростей и мощностей. Обобщенные гистограммы, построенные по данным всех 24 скважин, изображены на рис. 2. Первая, высокоскоростная компонента представлена высокоскоростными песчаниками, аргиллитами, алевролитами; вторая, низкоскоростная компонента характеризуется наличием углей, углефицированных разностей, низкоскоростных песчаников (см. рис. 1). Данные по отдельным скважинам (математические ожидания и среднеквадратические отклонения с учетом мощностей) приведены в табл. 1.

В настоящей работе предлагается вероятностный подход, который, видимо, неизбежен для реальных отложений. Он позволяет получить оценки математического ожидания и среднеквадратического отклонения модулей упругости и коэффициентов анизотропии вероятностных моделей (ВМ).

Рассмотрим два возможных способа осреднения упругих параметров реальной тонкослоистой толщи. Первый из них основан на использовании общих формул осреднения (1), а второй — на представлении реальной среды двухкомпонентной моделью и вычислении параметров анизотропии по формулам (2).

Первый способ (ВМ1). Естественно попытаться выделить какой-то период. Для этого было проведено осреднение исходной зависимости $V_p(z)$ (см. рис. 1, А) методом скользящего среднего (МСС), что в общем равнозначно низкочастотному сглаживающему фильтру. Однако, как и можно было предположить, для реальной среды нет идеально выдерживаемого периода, хотя и наблюдается некоторая осцилляция около среднего значения. Отсюда вытекает, что средю следует осреднять как неперIODическую на базе $l \ll \lambda$. При этом возникают два вопроса: о величине интервала (базы) осреднения l и о величине интервалов разреза, для которых тонкослоистую среду можно аппроксимировать однородной трансверсально-изотропной.

Очевидно, что с увеличением интервала осреднения l , когда в него попадает достаточно большое число резко дифференцированных по своим свойствам слоев, функция $\bar{V}(z)$, полученная осреднением $V(z)$, будет более гладкой, отклонения от среднего менее значительны, и с определенной долей условности можно рассматривать функцию $\bar{V}(z)$ как постоянную. Тогда константы упругости осредненной таким образом среды можно вычислить по формулам (1). Но при этом необходимо, чтобы интервал l был много меньше длины волны, распространяющейся в упругой среде, или, более определенно, как это следует из данных, полученных при ультразвуковом моделировании [9]: $l < 0,2\lambda$. Пусть $\lambda = 100$ м, тогда максимальный интервал осреднения $l_{\max} = 20$ м. Однако функция $\bar{V}(z)$, осредненная на l_{\max} , для юрских отложений остается существенно дифференцированной. В такой же степени дифференцированы параметры анизотропии, вычисленные по формулам (1) при осреднении на базе l_{\max} (см. рис. 1, А).

При детальном рассмотрении видно, что основным фактором, обуславливающим резкие скачки $\bar{V}_p(z)$ и параметров анизотропии, является наличие слоев, сильно отличающихся по своим свойствам, в данном случае углей и углефицированных разностей, которые имеют очень низкие скорости ($V_p \sim 2 \div 2,5$ км/с). В случае равномерного распределения аномальных слоев по разрезу и достаточно большого значения l , когда в каждый интервал осреднения попадает приблизительно равное суммарное количество мощностей аномальных слоев, $\bar{V}_p(z)$ и параметры анизотропии остаются практически постоянными по всему разрезу. Это возможно только для длин волн $\lambda > 200$ м, что будет соответство-

Общая характеристика юрских отложений по составу, скоростям V_P и их дифференцированности

Скважина, месторождение	Литологический состав пород, %	$\bar{V}, \sigma\bar{V}$, км/с	$\bar{V}_1, \sigma\bar{V}_1$, км/с	$\bar{V}_2, \sigma\bar{V}_2$, км/с	\bar{H}_1 , м	\bar{H}_2 , м	η_1	η_2
3, Западно-Останкинское	45 — п, 14 — у 41 — о	3,74 0,67	4,09 0,21	2,76 0,52	2,63	2,61	0,73	0,36
4, Останкинское	17 — п, 23 — у, 60 — о	3,72 0,59	4,06 0,17	2,84 0,35	2,75	3,47	0,72	0,28
7, Северо-Калиновое	22 — п, 23 — у, 55 — о	3,82 0,76	4,41 0,34	3,17 0,51	2,70	2,82	0,53	0,47
8, Нижне-Табанганское	27 — п, 19 — у, 54 — о	3,83 0,62	4,13 0,34	3,22 0,45	3,51	3,02	0,61	0,39
14, Нижне-Табанганское	26 — п, 28 — у, 46 — о	3,77 0,75	4,29 0,32	3,02 0,50	3,18	4,24	0,59	0,41
24, Северо-Калиновое	25 — п, 19 — у, 56 — о	3,23 0,58	3,62 0,37	2,74 0,35	2,76	2,80	0,53	0,47

Примечание. п — песчаник, у — угли и углистые разности, о — аргиллиты, алевролиты и др.; $\bar{V}, \sigma\bar{V}$ — среднее и отклонение от среднего V_P ; $\bar{V}_1, \sigma\bar{V}_1$ и $\bar{V}_2, \sigma\bar{V}_2$ — среднее и отклонение от среднего V_P для I и II компонент; \bar{H}_1, \bar{H}_2 — средние мощности тонких слоев; η_1, η_2 — соотношения суммарных мощностей для I и II компонент.

циация $V_P(z)$ обусловлена наличием низкоскоростных угольных пластов и высокоскоростных песчаников, см. табл. 1.

Один из способов осреднения упругих свойств юрских отложений был опробован ранее [3]. Рассчитывались коэффициенты анизотропии K_P для модели двухкомпонентной неперIODической среды в предположении, что скорости V_{P1} и V_{P2} для каждой компоненты распределены по нормальному закону (этот алгоритм приводится в [5]). Коэффициент анизотропии K_P определяется формулой

$$K_P \approx \left\{ \sum_{i=1}^2 \eta_i \rho_i m_{vi}^2 \left[1 + \left(\frac{\sigma_i}{m_{vi}} \right)^2 \right] \sum_{i=1}^2 \frac{\eta_i}{\rho_i m_{vi}^2} \left[1 + 3 \left(\frac{\sigma_i}{m_{vi}} \right)^2 \right] \right\}^{1/2}, \quad (4)$$

где m_{vi} — средние значения скоростей V_P компонент; σ_i — их среднеквадратические отклонения; η_i — удельные суммарные мощности компонент в пределах осредняемой толщи; $i = 1, 2$.

Такой подход имеет серьезные недостатки. Во-первых, он не позволяет оценить все модули упругости трансверсально-изотропной среды. Во-вторых, как показал статистический анализ данных АК 24 скважин, распределение скоростей длинных волн в юрской толще плохо аппроксимируется нормальным законом, вследствие чего использование формулы (4) становится не вполне корректным.

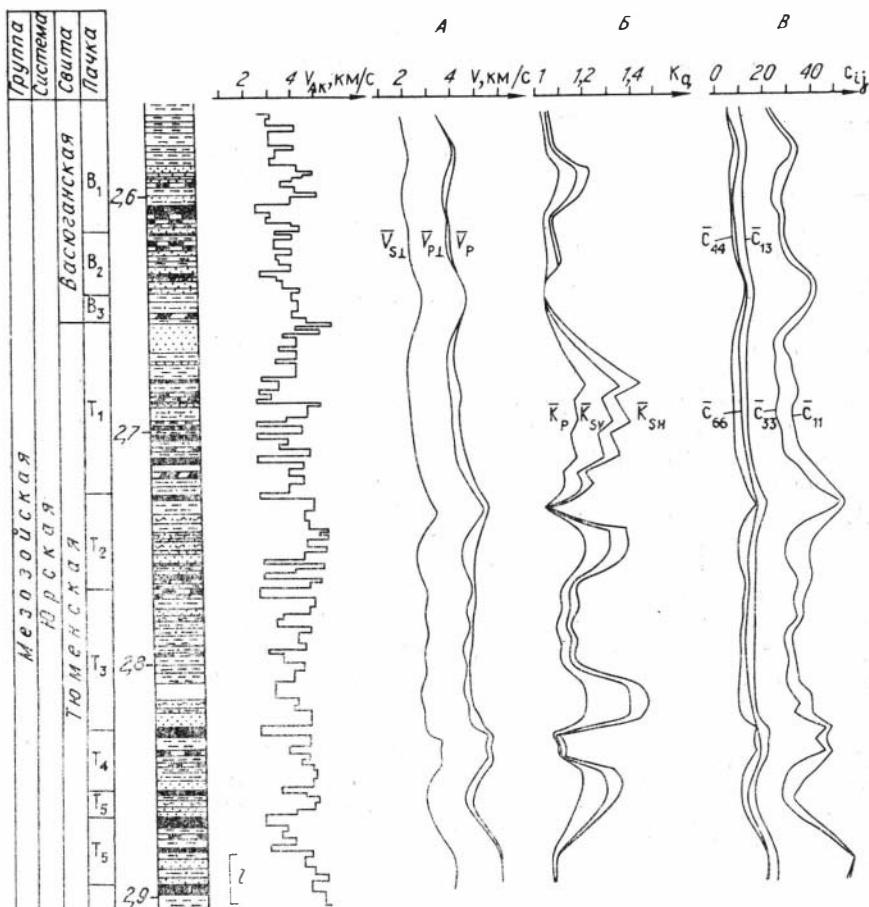


Рис. 1. Графики пластовых значений V_p по данным АК для юрских отложений; средняя скорость \bar{V}_p и эффективные упругие параметры (А, Б); упругие константы (В) в функции глубины.

вание на базе заменяется интегрированием в тех же пределах.

Осреднение реальной тонкослоистой среды. Хотя в принципиальном отношении процедуры осреднения по формулам (1), (3) кажутся достаточно определенными, их применение к реальному материалу — данным акустического каротажа скважин — сопряжено с некоторыми трудностями и, как будет показано ниже, не вполне однозначно.

Возможные подходы к осреднению параметров реальных тонкослоистых сред рассмотрим на примере юрских отложений юго-восточной части Западно-Сибирской плиты (рис. 1). Юрская толща, согласно данным АК, представлена сильно дифференцированными по скоростям тонкими слоями с $h_i \sim 1-20$ м и V_{pi} , меняющимися в пределах 2—5,5 км/с. Резкая дифферен-

жет быть достаточно хорошо аппроксимирована периодической моделью.

В случае периодической n -компонентной среды, состоящей из изотропных слоев с параметрами h_i , λ_i , μ_i , ρ_i (h_i — мощности; λ_i , μ_i — константы Ламэ; ρ_i — плотности), упругие константы c_{ij} ее длинноволнового эквивалента — однородной трансверсально-изотропной среды — определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} c_{66} &= \langle \mu \rangle; \quad c_{44} = \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle^{-1}; \quad c_{33} = \left\langle \frac{1}{\lambda + 2\mu} \right\rangle^{-1}; \\ c_{13} &= c_{33} \left\langle \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle; \quad c_{11} = 2c_{66} + \frac{c_{13}^2}{c_{33}} + 2 \left\langle \frac{\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} \right\rangle, \end{aligned} \quad (1)$$

в которых применяется операция нахождения средневзвешенного значения по формуле $\langle f \rangle = \sum_{i=1}^n \eta_i f_i$, где $\eta_i = h_i / \sum_{i=1}^n h_i$. В качестве плотности среды берется средневзвешенное значение $\rho = \sum_{i=1}^n \eta_i \rho_i$.

Если среда двухкомпонентна, выражения (1) имеют вид

$$\begin{aligned} c_{66} &= \eta_1 \rho_1 V_{S1}^2 + \eta_2 \rho_2 V_{S2}^2; \quad c_{44} = \left(\frac{\eta_1}{\rho_1 V_{S1}^2} + \frac{\eta_2}{\rho_2 V_{S2}^2} \right)^{-1}; \\ c_{33} &= \left(\frac{\eta_1}{\rho_1 V_{P1}^2} + \frac{\eta_2}{\rho_2 V_{P2}^2} \right)^{-1}; \quad c_{13} = c_{33} \left(\eta_1 \frac{V_{P1}^2 - 2V_{S1}^2}{V_{P1}^2} + \eta_2 \frac{V_{P2}^2 - 2V_{S2}^2}{V_{P2}^2} \right); \end{aligned} \quad (2)$$

$$c_{11} = 2c_{66} + \frac{c_{13}^2}{c_{33}} + 2 \left[\frac{\eta_1 \rho_1 V_{S1}^2 (V_{P1}^2 - 2V_{S1}^2)}{V_{P1}^2} + \frac{\eta_2 \rho_2 V_{S2}^2 (V_{P2}^2 - 2V_{S2}^2)}{V_{P2}^2} \right],$$

где V_{Pi} , V_{Si} — скорости продольных и поперечных волн.

Тонкие слои могут быть анизотропными. Для трансверсально-изотропных слоев с параметрами c_{ij} процесс осреднения приводит к следующим формулам:

$$\begin{aligned} \bar{c}_{66} &= \langle c_{66} \rangle, \quad \bar{c}_{44} = \langle c_{44}^{-1} \rangle^{-1}, \quad \bar{c}_{33} = \langle c_{33}^{-1} \rangle^{-1}, \\ \bar{c}_{13} &= \bar{c}_{33} \langle c_{13} c_{33}^{-1} \rangle, \quad \bar{c}_{11} = \langle c_{11} - c_{13}^2 c_{33}^{-1} \rangle + \bar{c}_{33} \langle c_{13} c_{33}^{-1} \rangle^2. \end{aligned} \quad (3)$$

Тонкослоистая неперIODическая среда, как и периодическая, для длинных волн эквивалентна трансверсально-изотропной среде с константами c_{ij} , находимыми по формулам (1), (3). Осреднение выполняется на базе $H \ll \lambda$, $H = \sum_{i=1}^n h_i$; при этом необходимо, чтобы все движущиеся средневзвешенные значения для данного интервала глубин L (или слоя мощностью L), $L \gg H$, сохранялись бы постоянными в пределах L .

Параметры среды могут быть непрерывными функциями глубины. Тогда при вычислениях по формулам (1) — (3) суммиро-

гут быть получены из АК скважин, так как сам метод АК как бы «настроен» на тонкую слоистость.

Работа преследует две цели. Первая состоит в выяснении возможностей оценки параметров анизотропии по данным АК (сравниваются различные способы определения этих параметров). Вторая цель — нахождение самих значений упругих параметров путем обработки представительного материала. Полученные данные можно считать тестовыми моделями осадочных отражений, анизотропных вследствие тонкой слоистости. Приводимые значения параметров анизотропии характеризуют резко дифференцированную по скоростям тонкослоистую среду и в этом отношении близки к предельным значениям для осадочных отложений, анизотропных вследствие тонкой слоистости.

В качестве объекта исследований взяты юрские отложения юго-восточной части Западно-Сибирской плиты. Это терригенные породы, типичные для осадочных толщ во многих регионах. Залегают они на глубине 2,5—3 км и представлены чередованием песчаников, алевролитов, аргиллитов, углей и их разновидностей. Резкая дифференцированность отложений связана с наличием углей и углистых разностей пород, а также с фациальной изменчивостью отложений в результате частых изменений режима осадконакопления. Исследование этих отложений представляет и непосредственный практический интерес, так как в них найдены промышленные скопления нефти, газа и газоконденсата. Применение многоволновой сейсморазведки позволило выявить новые параметры, связанные с нефтегазоносностью. В рамках изотропной модели это параметр $\gamma = V_s/V_p$, принимающий над залежами повышенные значения, а при аппроксимации среды анизотропной моделью аномально низкими оказываются значения коэффициентов анизотропии K_p, K_{sv} [2].

Определение упругих констант трансверсально-изотропной среды по параметрам тонкослоистых сред. Задачи распространения упругих волн в тонкослоистых средах рассматривались многими авторами [4, 5, 7—10]. Установлено, что тонкослоистая среда, т. е. такая среда, в которой мощности отдельных слоев много меньше преобладающей длины волны, в целом ведет себя как анизотропная. Упругие константы анизотропной среды, являющейся таким образом эффективной моделью (длинноволновым эквивалентом) тонкослоистой среды, находят путем осреднения параметров тонкослоистой среды. Первоначально процедура осреднения выполнялась на основе условий статического равновесия малого объема среды [10]. В настоящее время разработаны строгие математические подходы: асимптотическое разложение дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами [1], матричный метод [4].

Наиболее развиты методы осреднения периодических тонкослоистых сред, значительно меньше исследованы вопросы осреднения сред неперiodических. Между тем, как показывают скважинные детальные наблюдения, реальная среда обычно не мо-

$K_P = 1,075$ значения K изменяются от $0,935-0,915$ до $0,963-0,955$ (выпали $0,963-0,973$, см. табл. 1).

После нахождения областей допустимых значений параметров можно приступить к конструированию градиентной трансверсально-изотропной среды, т. е. задать функции $\gamma_z(z)$, $K(z)$, $K_P(z)$, $K_{SH}(z)$ так, чтобы они имели нужный вид и для $\forall z \in [0, H]$, H — заданная глубина, их значения не выходили бы из найденных областей. Зависимость $v_{Pz}(z)$, очевидно, может быть задана произвольной.

Построение среды $c_{ij}(z)$ вышеописанным способом оказалось довольно трудоемким. Кроме того, оно содержит одну не вполне корректную операцию — построение непрерывных функций по дискретным значениям, вследствие чего вне узловых точек z_k функции $c_{ij}(z)$ могут не удовлетворять заданным ограничениям (практически они им удовлетворяют, но весьма приближенно).

Второй способ задания анизотропной модели тонкослоистой среды является более общим и состоит в задании параметров тонкослоистой среды и нахождении по ним параметров трансверсально-изотропной среды, эквивалентной для длинных волн заданной тонкослоистой.

Параметры тонкослоистой среды целесообразно задавать на основе зависимостей

$$v_P(z) \pm \Delta v_P(z); v_S(z) \pm \Delta v_S(z), \quad (19)$$

получаемых в рамках изотропной модели среды: $v_P(z)$, $v_S(z)$ — из обработки рефрагированных волн или данных ВСП, а характеристики дифференцированности разреза $\Delta v_P(z)$, $\Delta v_S(z)$ — из данных АК*. В этом случае параметры трансверсально-изотропной среды можно найти по формулам для двухкомпонентной периодической тонкослоистой среды. Эти формулы имеют вид [10, с. 45—50]

$$\begin{aligned} v_{Pz} &= 2v_{P1} [2(n_P^2 + 1)]^{1/2}; \\ \gamma_z &= \gamma_1 \left[\frac{1 + n_P^2}{1 + n_S^2} \right]^{1/2}; \\ K_P &= \left[1 + \gamma_1^2 \left(1 - \frac{1}{n_S^2} \right) \left[n_P^2 (1 - \gamma_1^2) - \left(1 - \gamma_1^2 \frac{n_P^2}{n_S^2} \right) \right] \right]^{1/2}; \quad (20) \\ K_{SH} &= \frac{1}{2} \left[(1 + n_S^2) \cdot \left(1 + \frac{1}{n_S^2} \right) \right]^{1/2}; \\ K &= \left[1 - \gamma_1^2 \frac{n_P^2 + n_S^2}{n_S^2} \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

где $\gamma_1 = v_{S1}/v_{P1}$, $n_P = v_{P1}/v_{P2}$, $n_S = v_{S1}/v_{S2}$ (v_{P1} , v_{S1} — скорости v_P ,

* Вопросам нахождения параметров трансверсально-изотропной среды по данным АК посвящена статья С. И. Масловой (см. наст. сборник).

v_s в слое 1, v_{P2} , v_{S2} — в слое 2; для простоты считаем, что мощности слоев 1, 2 равны и плотности в них одинаковы).

Зависимости $v_P(z)$, $v_S(z)$ можно принять в качестве функций $v_{Pz}(z)$, $v_{Sz}(z)$. Таким образом, две функции — $v_{Pz}(z)$ и $\gamma_z = v_{Sz}(z)/v_{Pz}(z)$ — нам известны. Оставшиеся три функции $K_P(z)$, $K(z)$, $K_{SH}(z)$ можно найти по формулам (20), задав в них n_P , n_S для каждого γ_1 . Для этого надо эти параметры выразить через исходные зависимости (19), характеризующие скорость разрез и его дифференцированность. Считая скорости $v_P(z) + \Delta v_P(z)$, $v_S(z) + \Delta v_S(z)$ скоростями v_{P1} , v_{S1} , а скорости $v_P(z) - \Delta v_P(z)$, $v_S(z) - \Delta v_S(z)$ — скоростями v_{P2} , v_{S2} , найдем, что

$$n_P = \frac{v_P + \Delta v_P}{v_P - \Delta v_P}; \quad n_S = \frac{v_S + \Delta v_S}{v_S - \Delta v_S}; \quad \gamma_1 = \gamma_z \sqrt{\frac{1 + n_S^2}{1 + n_P^2}}. \quad (21)$$

В данной работе при массовых расчетах лучей и годографов для различных моделей тонкослоистых сред аппроксимация этих сред трансверсально-изотропными выполнялась вторым способом. Этот способ проще в вычислительном отношении и удобен тем, что непосредственно задаются параметры дифференцированности разреза, влияющие которых на кинематику волн P , SV и SH и требовалось исследовать.

На практике акустическая дифференциация разрезов варьирует в широких пределах (см., например, [2]). Но в данной работе, являющейся началом исследований, рассматриваются относительно простые — линейные — функции $\Delta v_P(z)$, $\Delta v_S(z)$, хотя зависимости $v_P(z)$, $v_S(z)$ взяты в соответствии с реальными разрезами. Зависимости (19) и параметры (16) в функции глубины z приводятся в следующем разделе статьи.

3. ЛУЧИ И ГОДОГРАФЫ P -, SV - И SH -ВОЛН В СРЕДАХ С РАЗЛИЧНОЙ СКОРОСТНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЦИЕЙ

Изучение детального строения осадочных отложений и особенно их тонкой слоистости является в настоящее время главной задачей сейсморазведки при поисках залежей нефти и газа, приуроченных к ловушкам неантиклинального типа [2]. Цель данной работы состоит в исследовании влияния тонкой слоистости на кинематические характеристики рефрагированных волн трех типов (P , SV и SH) путем проведения численного моделирования.

Модели сред, для которых выполнялись расчеты, изображены на рис. 3. Зависимости $v_{Pz}(z)$, $v_{Sz}(z)$ для всех моделей были одинаковыми. Характеристики дифференцированности разреза по скоростям v_P , v_S $R_P(z) \equiv \Delta v_P(z)/V_P(z)$, $R_S(z) \equiv \Delta v_S(z)/V_S(z)$ изменялись в широких пределах. Для шести моделей (1—6) $R_S(z) = R_P(z)$ и представлены случаи слабой и сильной дифференцированности, возрастания ее с глубиной и убывания; для четырех моделей (7—10) $R_S(z) \neq R_P(z)$ и функции $R_S(z)$, $R_P(z)$ по-разному соотносятся друг с другом.

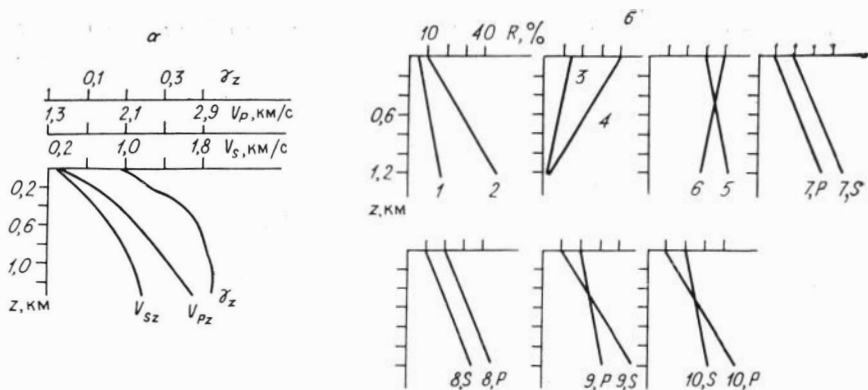


Рис. 3. Характеристики скоростной дифференцированности среды для моделей 1—10.

а — кривые $V_{Pz}(z)$, $V_{Sz}(z)$, $\gamma_z(z) = V_{Sz}(z)/V_{Pz}(z)$;
 б — функции $R_p(z)$, $R_s(z)$; для моделей 1—6 $R_p(z) = R_s(z)$.

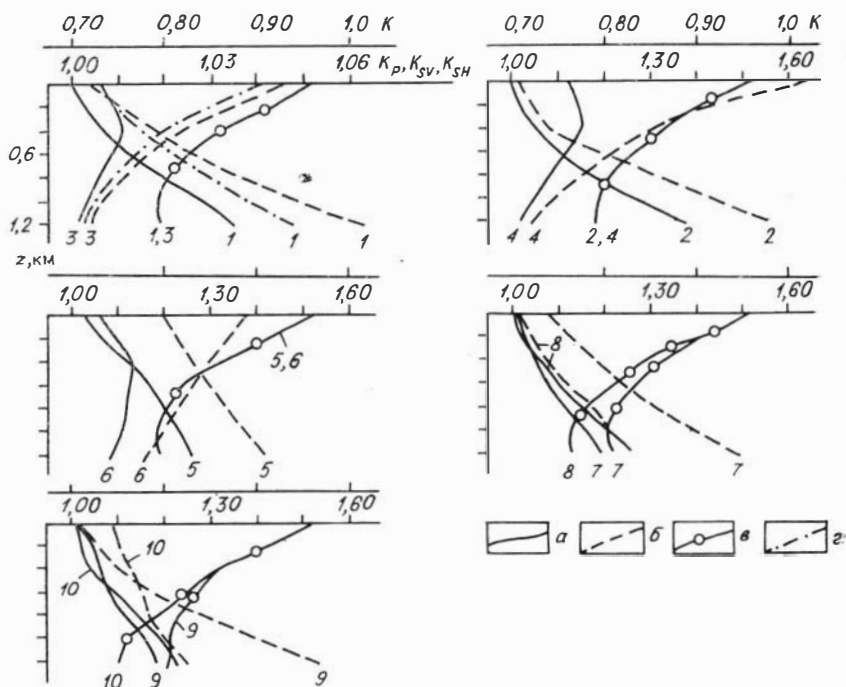


Рис. 4. Эффективные упругие параметры K_p , K_{sh} , K в функции глубины z для моделей 1—10; также приведены значения $K_{sv}(z)$, если $K_{sv} < 1,12—1,15$ (а — K_p ; б — K_{sh} ; в — K ; г — K_{sv}).

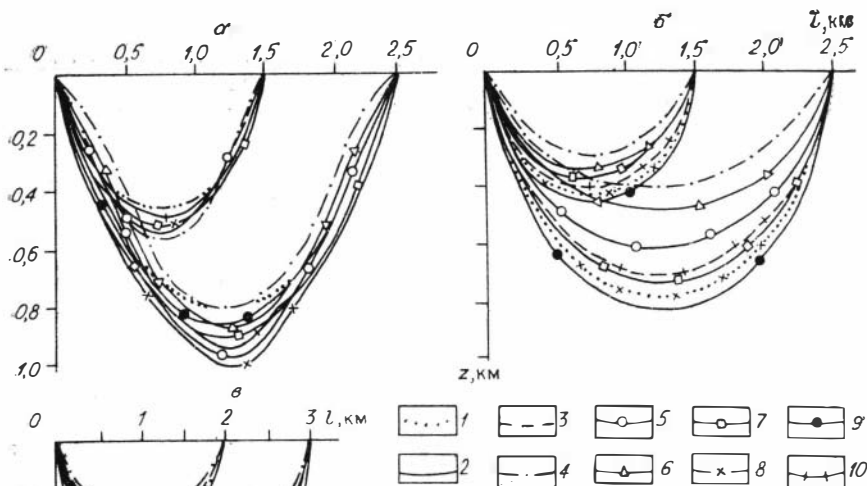


Рис. 5. Лучи волн SV (а), SH (б), P (в) для моделей 1—10.

На рис. 4 приведены для тех же моделей (1—10) эффективные упругие параметры (16) в функции глубины z . Они вычислены по формулам (20), (21), связывающим па-

раметры тонкослоистых сред с параметрами их эффективных моделей — трансверсально-изотропных сред. Графики $K(z)$ одинаковы для моделей 1—6, в которых $R_p(z) = R_s(z)$, и следовательно, $n_p = n_s$ (см. формулу для K в (20)). Для моделей с $K_{sv} < 1,13—1,15$ (индикатрисы $v_{sv}(\theta)$ без петель) наряду с кривыми $K(z)$ представлены кривые $K_{sv}(z)$. Связь между коэффициентами K и K_{sv} видна из формулы (17).

Для всех моделей рассчитывались лучи и годографы рефрагированных P -, SV - и SH -волн. Лучи изображены на рис. 5, годографы представлены в табл. 2, 3.

На рис. 5 показано, какой разброс в глубинах максимального проникания лучей возникает за счет различий в скоростной дифференциации сред (модели 1—10). Для волны SV разброс значительно меньше, чем для волн P , SH . Кроме того, для волны SV глубины максимального проникания лучей больше, чем для волн P и SH . В средах со значительной дифференциацией скоростей v_p , v_s и убыванием дифференциации с глубиной (модели 4, 6) лучи волны SV искривляются вблизи поверхности, их кривизна меняет знак.

Особенности поведения лучей волны SV относительно лучей волн P и SH объясняются непохожестью индикатрис лучевых скоростей $v_{sv}(\theta)$ на индикатрисы $v_p(\theta)$, $v_{sh}(\theta)$. Меньший разброс в глубинах проникания лучей связан с меньшими пределами

изменения скоростей для волн SV по сравнению с волнами P , SH . Большие глубины максимального проникания лучей достигаются вследствие наличия максимальных значений $v_{sv}(\theta)$ вблизи $\theta = 45^\circ$: лучи, в соответствии с принципом Ферма, удлиняют путь под углами порядка 45° и не «торопятся» поворачивать к дневной поверхности. Для волн P и SH , наоборот, максимальные значения $v(\theta)$ приходится на $\theta = 90^\circ$ (горизонтальное направление), вследствие чего, опять же по принципу Ферма, лучи стремятся к быстрейшему выходу на близгоризонтальные направления. Искривление лучей волны SV связано с наличием петли на индикатрисе $v_{sv}(\theta)$.

Теперь проанализируем, как ведут себя годографы волн P , SV и SH . Наиболее интересны различия годографов волн SV и SH , так как само различие уже является индикатором анизотропии и, кроме того, по виду различий, вероятно, можно будет судить о параметрах анизотропии среды, а следовательно, и тонкой слоистости.

Рассмотрим сначала модели 1—6 — с одинаковой скоростной дифференциацией по скоростям v_p , $v_s (R_p = R_s = R)$, затем модели 7—10 — с различной ($R_p \neq R_s$). В моделях 1, 2 $R(z)$ — возрастающие функции, в моделях 3, 4 — убывающие; модели 5, 6 характеризуются большой дифференциацией скоростей, при этом функция $R(z)$ — возрастающая в модели 5 и убывающая в модели 6.

Модель 1 характеризуется малой возрастающей скоростной дифференциацией (см. рис. 3, б). Коэффициенты анизотропии K_p , K_{sv} , K_{sh} плавно возрастают с глубиной (параметр K убывает) (см. рис. 4). В интервале глубин 0—1,2 км изменения параметров равны

$$\Delta R = 10 \% \rightarrow \Delta K_p = 0,03; \Delta K_{sv} = \Delta K_{sh} = 0,05. \quad (22)$$

Для коэффициентов анизотропии K_p , K_{sv} , K_{sh} выполняется неравенство $K_{sh} \geq K_{sv} > K_p$. Если посмотреть на разностный годограф $\Delta t = t_{sv} - t_{sh}$ (рис. 6), то можно увидеть, что на всем интервале наблюдения $l \leq 3$ км волна SH приходит раньше, чем волна SV , и разность времен Δt плавно возрастает, достигая при $l = 3$ км значения 0,036 с.

Модель 2 сходна с моделью 1 (см. рис. 3, б) в том отношении, что дифференциация R растет с глубиной, но сами значения R и скорость роста намного выше. В этом случае приращения параметров K_p , K_{sv} , K_{sh} (см. рис. 4) для глубин 0—1,2 км существенно больше по сравнению с (22):

$$\Delta R = 30 \% \rightarrow \Delta K_p \approx 0,35; \Delta K_{sh} \approx 0,50. \quad (23)$$

По-прежнему справедливо соотношение $K_{sh} > K_{sv} > K_p$. Волна SH намного опережает волну SV , $\Delta t = 0,344$ с при $l = 3$ км (см. рис. 6).

Модель 3 имеет малую убывающую скоростную дифференциацию $R(z)$ (см. рис. 3, б). Коэффициенты анизотропии K_p , K_{sv} и

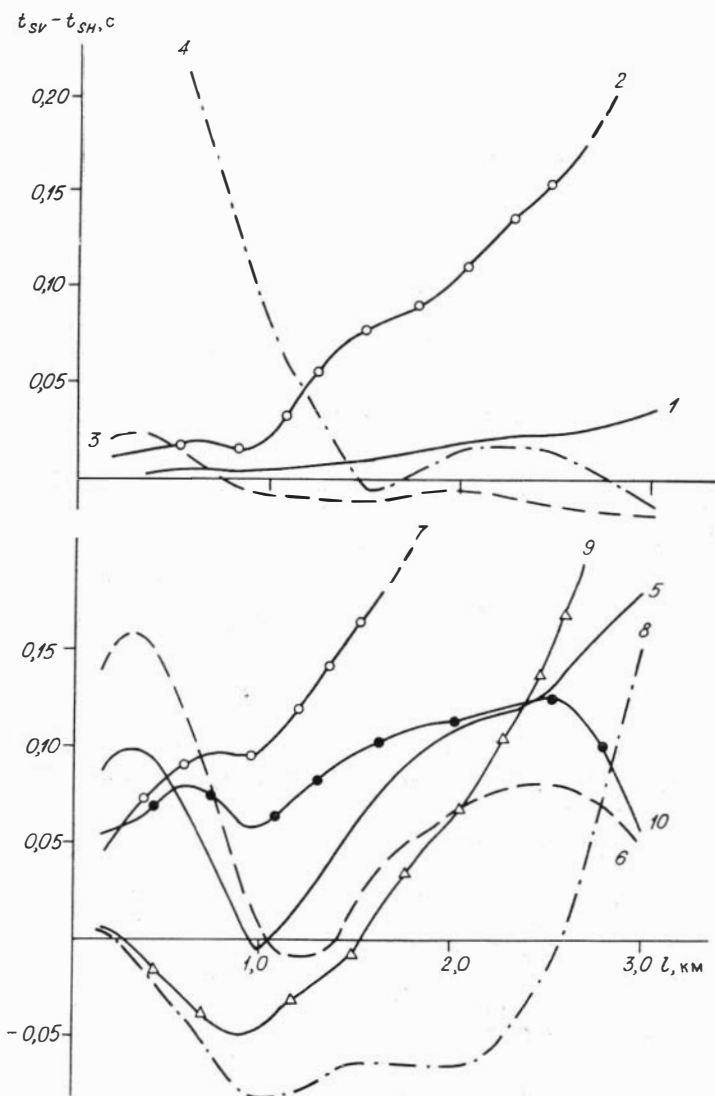


Рис. 6. Разности времен пробега волн SV и SH $\Delta t(l) = t_{SV}(l) - t_{SH}(l)$ для моделей 1—10.

K_{SH} также малы (см. рис. 4), причем K_{SV} , K_{SH} монотонно убывают с глубиной, а K_P сначала немного возрастает, а затем убывает. Приращения параметров малы:

$$\Delta R = -10\% \rightarrow \Delta K_P \approx -0,01; \Delta K_{SV} \approx \Delta K_{SH} \approx -0,04. \quad (24)$$

Выполняется неравенство $K_{SH} \geq K_{SV} > K_P$. Волна SH опережает волну SV до удалений $l < 0,75$ км, а далее раньше приходит волна SV (см. рис. 6); $\Delta t_{\max} = 0,024$ с при $l = 0$.

Модель 4, как и модель 3, представляет среду с убывающей дифференциацией $R(z)$, но начальное значение и градиент $R(z)$ велики (см. рис. 3, б). Коэффициенты анизотропии K_P, K_{SH} ведут себя так же, как в модели 3, только пределы изменения больше на порядок (см. рис. 4). Картина приращений параметров имеет вид

$$\Delta R = -30\% \rightarrow \Delta K_P \approx -0,12; \Delta K_{SH} = -0,60. \quad (25)$$

Соотношение $K_{SH} > K_P$ сохраняется; для нижней части разреза, когда $K_{SV} < 1,12-15$, можно записать и полное соотношение: $K_{SH} > K_{SV} > K_P$.

Волна SH сначала значительно опережает волну SV ($\Delta t = 0,25$ с при $l=0$), затем их годографы сближаются ($\Delta t \approx 0$ при $l \approx 1,6$ км) и далее в интервале 1,5—2,8 км волна SH опять опережает волну SV , но незначительно (до 0,02 с), а на отрезке 2,8—3 км первой оказывается волна SV ($\Delta t \approx 0,013$ с) (см. рис. 6).

Упругие параметры модели 4 таковы, что индикатрисы лучевых скоростей $v_{sv}(\theta)$ до глубин порядка 0,8 км имеют петли (рис. 7). Из построения луча согласно принципу $p = \text{const}$ вдоль луча (см. раздел 1) следует, что каждой точке на луче соответствует одно, вполне определенное значение лучевой скорости $v_{sv}(\theta)$. Было выяснено, что такими значениями были скорости на восходящих ветвях индикатрис (см. рис. 7).

В модели 5 дифференциация $R(z)$ возрастает с 30 до 40%, в модели 6 убывает от 40 до 30% в интервале глубин 0—1 км (см. рис. 3, б). Коэффициенты анизотропии K_P, K_{SH} в модели 5 растут, примерно как в модели 2, а в модели 6 коэффициент K_{SH} убывает, а K_P сначала растет, а затем остается практически постоянным (см. рис. 4). В обеих моделях $K_{SH} > K_P$. Волна SH в обеих моделях приходит раньше, чем SV , а на расстоянии $l \approx 1$ км годографы обеих волн сближаются (см. рис. 6).

Группа моделей 7—10 с неодинаковыми функциями $R_P(z), R_S(z)$ (см. рис. 3, б) отражает возрастающую с глубиной ско-

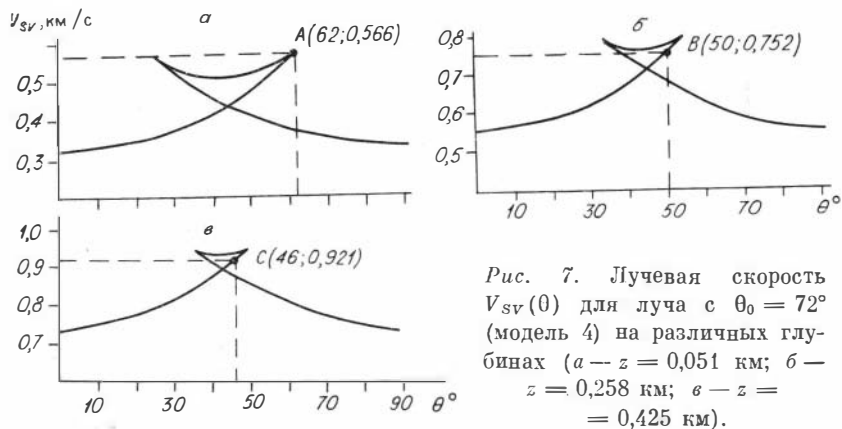


Рис. 7. Лучевая скорость $V_{sv}(\theta)$ для луча с $\theta_0 = 72^\circ$ (модель 4) на различных глубинах (а — $z = 0,051$ км; б — $z = 0,258$ км; в — $z = 0,425$ км).

Времена пробега поперечных волн SV и SH на различных расстояниях l для моделей 1—10

Номер модели	$l, \text{ км}$					
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
1	1,620	2,614	3,309	3,929	4,469	4,946
	1,617	2,610	3,299	3,913	4,444	4,910
2	1,603	2,556	3,229	3,806	4,259	4,799
	1,588	2,533	3,157	3,687	4,101	4,455
3	1,628	2,570	3,267	3,893	4,445	4,933
	1,610	2,579	3,282	3,898	4,459	4,951
4	1,303	2,043	2,683	3,259	3,781	4,264
	1,067	1,966	2,688	3,242	3,767	4,278
5	1,479	2,328	2,990	3,558	4,042	4,499
	1,393	2,330	2,927	3,449	3,915	4,319
6	1,392	2,190	2,845	3,423	3,931	4,387
	1,248	2,183	2,823	3,358	3,849	4,335
7	1,594	2,550	3,234	3,831	4,337	4,795
	1,510	2,453	3,064	3,596	4,044	4,413
8	1,563	2,481	3,153	3,726	4,252	4,829
	1,591	2,563	3,217	3,792	4,270	4,677
9	1,565	2,496	3,175	3,766	4,270	4,735
	1,587	2,540	3,170	3,704	4,128	4,471
10	1,592	2,544	3,220	3,804	4,314	4,660
	1,516	2,484	3,121	3,690	4,187	4,613

Примечание. В первых строчках даны значения t_{SV} , во вторых — t_{SH} .

ростную дифференциацию на уровне от 10—20 до 30—40 %. Изменился вид кривых $K(z)$ (см. рис. 4), так как параметр K зависит от R_p/R_s (формулы (20), (21)). Существенное отличие моделей 7—10 от моделей 1—6 состоит в том, что теперь возможны уже два варианта соотношений коэффициентов K_p, K_{SV} ,

Таблица 3

Времена пробега продольной волны на различных расстояниях l для моделей 1—10

Номер модели	$l, \text{ км}$					
	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
1	0,343	0,643	0,926	1,193	1,435	1,664
2	0,343	0,640	0,918	1,164	1,379	1,563
3	0,342	0,640	0,921	1,187	1,431	1,663
4	0,312	0,584	0,840	1,085	1,316	1,534
5	0,334	0,622	0,888	1,126	1,342	1,545
6	0,326	0,605	0,866	1,104	1,324	1,535
7	0,342	0,638	0,917	1,173	1,403	1,619
8	0,342	0,637	0,916	1,169	1,397	1,608
9	0,342	0,638	0,916	1,169	1,397	1,611
10	0,342	0,638	0,917	1,170	1,397	1,609

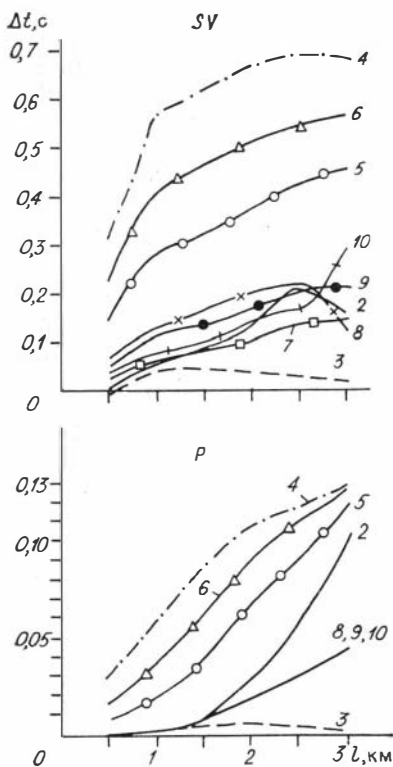


Рис. 8. Разности времен пробега для трех типов волн.

K_{SH} : $K_{SH} \geq K_{SV} > K_P$ и $K_P \geq K_{SH} \geq K_{SV}$. Второе соотношение может выполняться, если $R_P > R_S$.

Различия времен прихода волн SV и SH (см. рис. 6) могут достигать больших значений. Для модели 7 $\Delta t = 0,382$ с при $l = 3$ км (см. табл. 2). Волна SH приходит раньше волны SV в моделях 7, 10; в случае модели 9 до $l = 1,5$ км раньше приходит волна SV, а далее первой оказывается волна SH; наконец, для модели 8 видим, что волна SV опережает волну SH почти на всем интервале наблюдения (до $l \approx 2,6$ км) с Δt до 0,07–0,08 с, и лишь на отрезке $l = 2,6–3$ км раньше приходит SH-волна и $\Delta t = 0,14$ с при $l = 3$ км (см. рис. 6).

Оценим влияние анизотропии среды на форму годографов SV-, SH- и P-волн. Годографы с шагом $\Delta l = 0,5$ км даны в табл. 2, 3. На рис. 8 изображены разности времен пробега $\Delta t(l) = t_1(l) - t_i(l)$ (l — номер модели) для трех типов волн; сравнение ведется относительно модели 1 — наименее анизотропной, для нее времена пробега — наибольшие.

Из рис. 8, а также 3, 4 видно следующее. К модели 1 ближе всех стоит модель 3, также слабоанизотропная. Далее идет группа моделей 2, 7–10 — назовем их среднеанизотропными. И наименьшие времена имеет группа, включающая модели 4–6, наиболее анизотропные. Максимальные значения Δt для SV-, SH-волн равны 0,7 с, а для P-волн $\sim 0,13$ с, т. е. меньше примерно в 5,5 раза.

Таким образом, наибольшую информацию о скоростной дифференцированности среды несут поперечные волны SV и SH. Используя их в комплексе с продольными, можно надеяться на возможность решения обратной задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугаевский А. Г. Природа азимутальной сейсмической анизотропии.— М.: Наука, 1988.— 157 с.
2. Гогоненков Г. Н. Изучение детального строения осадочных толщ сейсморазведкой.— М.: Недра, 1987.— 221 с.
3. Егоркин А. В., Егоркин А. А. Анизотропия скоростей поперечных волн в консолидированной коре Сибпри // Физика Земли.— 1986.— № 11.— С. 106—112.
4. Многоволновые сейсмические исследования.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1987.— 213 с.
5. Невский М. В. Квазианизотропия скоростей сейсмических волн.— М.: Наука, 1974.— 178 с.
6. Оболенцева И. Р. Лучевые скорости и поляризация сейсмических волн в функции эффективных упругих параметров тонкослоистых периодических сред // Геология и геофизика.— 1974.— № 12.— С. 79—94.
7. Петрашень Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах.— Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1980.— 280 с.
8. Пузырев Н. Н., Оболенцева И. Р., Тригубов А. В., Горшкалев С. Б. Экспериментальные исследования анизотропии скоростей в осадочных отложениях по наблюдениям на поперечных волнах // Геология и геофизика.— 1983.— № 11.— С. 8—19.
9. Сейсмическая разведка методом поперечных и обменных волн/Пузырев Н. Н., Тригубов А. В., Бродов Л. Ю. и др.— М.: Недра, 1985.— 277 с.
10. Сейсморазведка: Справочник геофизика/Под ред. И. И. Гурвича, В. П. Номоконова.— М.: Недра, 1981.— 464 с.
11. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах.— М.: Наука, 1965.— 388 с.
12. Чесноков Е. М. Сейсмическая анизотропия верхней мантии.— М.: Наука, 1977.— 144 с.
13. Backus G. E. Long-wave elastic anisotropy produced by horizontal layering // J. Geoph. Res.— 1962.— Vol. 67, N 11.— P. 4427—4440.
14. Červený V., Molotkov I. A., Pšencík I. Ray method in seismology.— Praha: Univerzita Karlova, 1977.— 214 p.
15. Thomsen L. Weak elastic anisotropy // Geophysics.— 1986.— Vol. 51, N 10.— P. 1954—1966.

В. Ю. ГРЕЧКА

РАСЧЕТ ЛУЧЕЙ В СЛОИСТО-ОДНОРОДНЫХ СЛАБОУАНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

К настоящему времени получено большое количество экспериментальных данных об анизотропии осадочных отложений, земной коры и верхней мантии (см., например, [4, 15, 16, 24, 25, 27]). Экспериментальные данные свидетельствуют о том, что очень часто степень анизотропии составляет первые проценты и в подавляющем большинстве случаев не превышает 10—15%. (Некоторые данные содержатся в одной из последних работ по анизотропии [27].) Поэтому слабоанизотропные модели можно считать хорошим приближением к реальности. Предположение о слабости анизотропии позволяет линеаризовать или существенно упростить многие формулы и алгоритмы, применяемые для описания распространения сейсмических волн в анизотропных средах.

Это предположение было использовано рядом исследователей [10, 19, 23, 27], чтобы получить явные приближенные формулы для скоростей объемных волн; эти формулы затем применялись при решении прямых и обратных кинематических задач. При решении кинематических задач также использовались различные локальные аппроксимации индикатрис скоростей в анизотропных средах (примеры см. в [1, 2, 8, 26]). Линеаризация, основанная на предположении о слабости анизотропии, была применена в работе [6] для вывода формул, описывающих поля смещений точечных источников, действующих в слабоанизотропных средах.

Расчету лучей в неоднородных слабоанизотропных средах посвящены работы [20—22], в которых выведены линеаризованные явные формулы для расчета времен пробега и показана удовлетворительная точность этих формул для продольных волн. Однако формулы, полученные в работах [20—22], не применимы для расчета времен пробега поперечных волн в общем случае слабоанизотропных сред, а годятся только для частных случаев, когда рассматриваемый луч не выходит из плоскости симметрии слабоанизотропной среды и поперечные волны по поляризации делятся на SV и SH .

В данной работе предположение о слабости анизотропии используется для повышения эффективности двухточечных и параметрического алгоритмов расчета лучей в слоисто-однородных анизотропных упругих средах [9, 11, 12, 14] *. Алгоритмы расчета лучей и времен пробега отраженных, проходящих и головных волн для анизотропных сред отличаются от соответствующих алгоритмов для изотропных сред значительно большей вычислительной сложностью и поэтому требуют существенно больших затрат машинного времени для проведения расчетов.

В двухточечных алгоритмах расчета лучей в анизотропных средах наибольших затрат машинного времени требует процедура нахождения волновой нормали по лучу, для чего используются итерационные алгоритмы разной сложности [9, 11, 12]. В параметрическом способе расчета лучей такой процедурой является определение нормальных к границе раздела компонент векторов рефракции отраженных и преломленных волн как корней полинома шестой степени. Предположение о слабости анизотропии позволяет линеаризовать эти процедуры, получить для искомых величин явные аналитические выражения и тем самым существенно ускорить вычисления.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОНЯТИЯ «СЛАБОУАНИЗОТРОПНАЯ СРЕДА»

Пусть задана анизотропная упругая среда, характеризующаяся тензором относительных упругих постоянных $\lambda = (\lambda_{ijkl})$. Чтобы ответить на вопрос, является ли анизотропия этой среды слабой,

* Двухточечным алгоритмам также посвящена статья И. Р. Оболенцевой, В. Ю. Гречки «Сравнение различных алгоритмов расчета лучей в слоисто-однородных анизотропных средах», публикуемая в наст. сборнике.

необходимо сравнить заданную среду с некоторой изотропной средой. Эта изотропная среда должна быть по своим упругим свойствам наиболее близкой к заданной анизотропной среде. Причем близость анизотропной и изотропной сред требуется не для любых направлений в пространстве, а лишь для направлений, лежащих внутри того телесного угла Ω_i , в котором находятся рассчитываемые лучи $l^{(k)} \in \Omega_i$ ($k = 1, \dots, N$), или для направлений, лежащих внутри телесного угла Ω_n , в котором находятся отвечающие лучам $l^{(k)}$ волновые нормали $n^{(k)} \in \Omega_n$. В результате сравнения анизотропной и изотропной сред должна быть получена количественная оценка ϵ степени анизотропии (или степени близости сред) и найдены упругие константы λ , μ изотропной среды, компоненты тензора относительных упругих постоянных $\lambda^0 = (\lambda_{ijkl}^0)$ которой имеют вид

$$\lambda_{ijkl}^0 = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где $\delta = (\delta_{kl})$ — единичный тензор Кронекера.

Определим упругие постоянные λ , μ , следуя Ф. И. Федорову [18]. Сравним тензоры Кристоффеля анизотропной среды

$$\Gamma_{im} = \lambda_{iklm} n_k n_l \quad (i, m = 1, 2, 3) \quad (2)$$

и изотропной

$$\Gamma_{im}^0 = \lambda_{iklm}^0 n_k n_l = \mu \delta_{im} + (\lambda + \mu) n_i n_m \quad (i, m = 1, 2, 3); \quad (3)$$

вектор волновой нормали n будем представлять в виде

$$n = (\sin \beta_1 \cos \beta_2, \sin \beta_1 \sin \beta_2, \cos \beta_1). \quad (4)$$

Потребуем, чтобы различия между тензорами Γ и Γ^0 были минимальны для волновых нормалей $n^{(k)}$ ($k = 1, \dots, N$), принадлежащих телесному углу Ω_n . Для этого усредним тензоры Γ , Γ^0 по нормальям $n^{(k)} \in \Omega_n$. Среднее любой величины $G(n)$, зависящей от единичного вектора n , определяется как

$$\langle G(n) \rangle = \frac{\sum_{k=1}^N G(n^{(k)}) \sin \beta_1^{(k)}}{\sum_{k=1}^N \sin \beta_1^{(k)}}, \quad (5)$$

поэтому

$$\langle \Gamma_{im} \rangle = \lambda_{iklm} \langle n_k n_l \rangle \quad (i, m = 1, 2, 3); \quad (6)$$

$$\langle \Gamma_{im}^0 \rangle = \lambda_{iklm}^0 \langle n_k n_l \rangle = \mu \delta_{im} + (\lambda + \mu) \langle n_i n_m \rangle \quad (i, m = 1, 2, 3). \quad (7)$$

Рассмотрим разницу тензоров $\langle \Gamma \rangle$ и $\langle \Gamma^0 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_{im}^e \rangle &\equiv \langle \Gamma_{im} \rangle - \langle \Gamma_{im}^0 \rangle = (\lambda_{iklm} - \lambda_{iklm}^0) \langle n_k n_l \rangle = \\ &= \lambda_{iklm}^e \langle n_k n_l \rangle \quad (i, m = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\lambda_{jklm}^e \equiv \lambda_{iklm} - \lambda_{iklm}^0 \quad (i, k, l, m = 1, 2, 3). \quad (9)$$

Различие тензоров $\langle \Gamma \rangle$ и $\langle \Gamma^\circ \rangle$ будет минимальным, если сумма квадратов всех компонент тензора $\langle \Gamma^e \rangle$ будет наименьшей

$$\langle \Gamma_{im}^e \rangle \langle \Gamma_{im}^e \rangle = \min. \quad (10)$$

В точке минимума должны выполняться необходимые условия экстремума

$$\begin{aligned} \partial (\langle \Gamma_{im}^e \rangle \langle \Gamma_{im}^e \rangle) / \partial \lambda &= 0; \\ \partial (\langle \Gamma_{im}^e \rangle \langle \Gamma_{im}^e \rangle) / \partial \mu &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

откуда находим

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_{iklm} (2 \langle n_i n_k n_l n_m \rangle - \delta_{im} \langle n_k n_l \rangle); \\ \mu &= \lambda_{iklm} (\delta_{im} \langle n_k n_l \rangle - \langle n_i n_k n_l n_m \rangle) / 2. \end{aligned} \quad (12)$$

Величину ε , характеризующую степень анизотропии внутри телесного угла Ω_n , определим как отношение эвклидовых норм тензоров $\langle \Gamma^e \rangle$ и $\langle \Gamma \rangle$:

$$\varepsilon = \left(\frac{\langle \Gamma_{im}^e \rangle \langle \Gamma_{im}^e \rangle}{\langle \Gamma_{im} \rangle \langle \Gamma_{im} \rangle} \right)^{1/2}. \quad (13)$$

Анизотропную среду, упругие свойства которой описываются тензором λ , будем называть слабоанизотропной, если для нее величина ε , определяемая формулой (13), удовлетворяет условиям

$$\varepsilon \leq \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 \ll 1. \quad (14)$$

Пороговое значение ε_0 должно задаваться в зависимости от требуемой точности расчета лучей или времен пробега.

Величины λ , μ , ε , находимые по формулам (12), (13), зависят от $\mathbf{n}^{(k)}$, поэтому среда может быть слабоанизотропной для одних направлений $\mathbf{n}^{(k)}$ и не быть таковой для других. Это утверждение легко проиллюстрировать простым примером. Любая анизотропная среда является слабоанизотропной для волновых нормалей $\mathbf{n}^{(k)}$, лежащих в окрестности направления акустической оси \mathbf{n}_{AO} , для которого скорости двух поперечных волн совпадают. В частности, если рассматривать только одну волновую нормаль \mathbf{n}_{AO} , то из формулы (13) получим $\varepsilon = 0$. В то же время для других направлений $\mathbf{n}^{(k)}$ в анизотропной среде условия (14) могут не выполняться. Вследствие этого ясно, что приведенное выше определение слабоанизотропной среды характеризует среду локально.

Величины λ , μ , ε , не зависящие от $\mathbf{n}^{(k)}$ и определяющие слабоанизотропную среду для всех направлений в пространстве, можно найти, если в формуле (5) проводить усреднение по всем направлениям $\mathbf{n}^{(k)}$ в телесном угле $\Omega_n = 4\pi$. Тогда для упругих констант λ , μ получаются формулы [18]

$$\begin{aligned} \lambda &= (2\lambda_{iik} - \lambda_{ikik}) / 15; \\ \mu &= (3\lambda_{iik} - \lambda_{ikik}) / 30; \end{aligned} \quad (15)$$

а величина ε определяется выражением

$$\varepsilon = \left(\frac{b_{im} b_{im}}{\lambda_{ikhm} \lambda_{illm}} \right)^{1/2}, \quad (16)$$

где

$$b_{im} = \lambda_{ikhm} - \delta_{im}(\lambda + 4\mu) \quad (i, m = 1, 2, 3).$$

В этом случае величина ε называется относительной средней квадратичной упругой анизотропией.

Однако величина ε , вычисленная по формуле (16), не характеризует анизотропию для требуемого телесного угла Ω_i , которому принадлежат направления рассчитываемых лучей, и это значение ε не следует использовать для сопоставления с ε_0 , определяемым исходя из требуемой точности расчета лучей в заданном диапазоне направлений. Поэтому для практических целей величину ε надо вычислять по формуле (13), т. е. для заданного телесного угла Ω_n , который обычно бывает приближенно известен до проведения расчетов.

Обратимся теперь к выводу приближенных формул для вычисления волновых параметров по заданному лучу и векторов рефракции отраженных и преломленных волн в слабоанизотропных средах. Будем считать, что упругие постоянные λ , μ изотропной среды уже определены по формуле (12) или по формуле (15), а значение ε удовлетворяет условиям (14). Затем, когда приближенные формулы будут получены, сравним результаты расчета лучей с использованием этих формул с точными расчетами и приведем численные оценки значений ε , при которых приближенные формулы дают удовлетворительную точность.

2. ФАЗОВЫЕ СКОРОСТИ, ВЕКТОРЫ ПОЛЯРИЗАЦИИ И ЛУЧЕВЫЕ СКОРОСТИ ПЛОСКИХ ВОЛН В СЛАБОАНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Задача нахождения фазовых скоростей и векторов поляризации изонормальных плоских волн в слабоанизотропных средах решена в работе [17]. Выпишем здесь ее решение в своих обозначениях.

Упругие свойства слабоанизотропной среды описываются тензором $\lambda = \lambda^0 + \lambda^\varepsilon$, причем компоненты тензора λ^ε являются, согласно условиям (14), малыми величинами и имеют порядок малости $\varepsilon = \varepsilon^1$. Изотропную среду с тензором упругих постоянных λ^0 (см. формулу (1)), будем называть невозмущенной, а слабоанизотропную среду будем считать полученной из изотропной среды малым возмущением порядка ε^1 .

Фазовые скорости и векторы поляризации в слабоанизотропной среде ищутся в виде

$$V_r^2 = V_{0r}^2 + V_{\varepsilon r}^2; \\ A^{(r)} = A_0^{(r)} + A_\varepsilon^{(r)} \quad (r = 1, 2, 3), \quad (17)$$

где значения V_{0r}^2 , $A_0^{(r)}$ в изотропной среде известны:

$$V_{01}^2 \equiv V_P^2 = \lambda + 2\mu; \quad V_{02}^2 \equiv V_{03}^2 \equiv V_S^2 = \mu; \quad (18)$$

$$A_0^{(1)} \equiv A_P = \mathbf{n}; \quad A_0^{(2)} \equiv A_{SV} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \beta_1}; \quad A_0^{(3)} \equiv A_{SH} = \frac{1}{\sin \beta_1} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \beta_2}. \quad (19)$$

Возмущения векторов поляризации $A_\varepsilon^{(r)}$ представляют в виде разложений по ортогональным векторам $A_0^{(r)}$ из формул (19)

$$\begin{aligned} A_\varepsilon^{(1)} &= \kappa_{12} A_0^{(2)} + \kappa_{13} A_0^{(3)}; \\ A_\varepsilon^{(2)} &= \kappa_{21} A_0^{(1)} + (\cos \psi - 1) A_0^{(2)} + \sin \psi A_0^{(3)}; \\ A_\varepsilon^{(3)} &= \kappa_{31} A_0^{(1)} - \sin \psi A_0^{(2)} + (\cos \psi - 1) A_0^{(3)}, \end{aligned} \quad (20)$$

где κ_{rs} — коэффициенты разложений; ψ — угол между векторами $A^{(2)}$ и $A_0^{(2)}$.

Подстановка разложений (20) в уравнения Кристоффеля $\lambda_{ijkl} n_j n_k A_i^{(r)} = V_r^2 A_i^{(r)}$ ($i, r = 1, 2, 3$) при учете формул (17) позволяет найти возмущения квадратов фазовых скоростей

$$V_{\varepsilon 1}^2 = \eta_{11}; \quad V_{\varepsilon 2,3}^2 = (\eta_{22} + \eta_{33} \pm \eta^{1/2})/2, \quad (21)$$

а также определить коэффициенты κ_{rs} разложений (20) и угол ψ

$$\begin{aligned} \kappa_{1,r} &= \frac{\eta_{1r}}{V_{01}^2 - V_{0r}^2} = \frac{\eta_{1r}}{\lambda + \mu} \quad (r = 2, 3); \\ \kappa_{21} &= -\kappa_{12} \cos \psi - \kappa_{13} \sin \psi; \\ \kappa_{31} &= \kappa_{12} \sin \psi - \kappa_{13} \cos \psi; \\ \operatorname{tg} \psi &= (-\eta_{22} + \eta_{33} + \eta^{1/2}) / (2\eta_{23}). \end{aligned} \quad (22)$$

В формулах (21), (22) введены обозначения

$$\begin{aligned} \eta_{rs} &= \Gamma_{im}^\varepsilon A_{0m}^{(r)} A_{0i}^{(s)} \quad (r, s = 1, 2, 3); \\ \Gamma_{im}^\varepsilon &= \lambda_{ijkl} n_k n_l \quad (i, m = 1, 2, 3); \\ \eta &= (\eta_{22} - \eta_{33})^2 + (2\eta_{23})^2. \end{aligned}$$

Формулы (20) — (22) выражают применительно к рассматриваемой задаче известный из линейной алгебры [5] результат: если возмущение матрицы (в данном случае матрицы $\Gamma_{im}^0 = \mu \delta_{im} + (\lambda + \mu) n_i n_m$) имеет порядок малости ε^1 , то возмущения собственных значений этой матрицы (квадратов фазовых скоростей) и невырожденных в невозмущенном состоянии собственных векторов (вектора поляризации A_P) также будут иметь порядок малости ε^1 ; возмущения вырожденных в невозмущенном состоянии собственных векторов (векторов поляризации A_{SV} , A_{SH}) не являются малыми и имеют порядок ε^0 .

Лучевая скорость в анизотропной среде, как известно [17, 18], определяется выражением

$$v_k^{(r)} = \lambda_{iklm} p_l^{(r)} A_i^{(r)} A_m^{(r)} \quad (k, r = 1, 2, 3), \quad (23)$$

где $p^{(r)}$ — вектор рефракции, $p^{(r)} = n/V_r$.

Формулу (23) можно представить в виде

$$v_k^{(r)} \equiv v_{0k}^{(r)} + v_{\varepsilon k}^{(r)} = (\lambda_{iklm}^0 + \lambda_{iklm}^{\varepsilon}) (p_{0l}^{(r)} + p_{\varepsilon l}^{(r)}) A_i^{(r)} A_m^{(r)}, \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} A^{(r)} &= A_0^{(r)} + A_{\varepsilon}^{(r)}; \\ p_{\varepsilon}^{(r)} &= -n V_{\varepsilon r} / V_{0r}^2; \end{aligned} \quad (25)$$

$$v_{0k}^{(r)} \equiv V_{0r} n_k = \lambda_{iklm}^0 p_{0l}^{(r)} A_{0i}^{(r)} A_{0m}^{(r)} \quad (k, r = 1, 2, 3). \quad (26)$$

Подстановка в (24) величин $V_{\varepsilon r}$, $A_{\varepsilon}^{(r)}$, определенных формулами (20), (21), не позволяет получить для $v_{\varepsilon}^{(r)}$ компактную формулу, однако дает возможность увидеть, что величина $v_{\varepsilon}^{(r)}$ имеет порядок малости ε^1 . Поэтому, используя определение единичного вектора луча $l^{(r)} = v^{(r)} / v_r$ и вытекающее из равенств (24), (26) представление $v^{(r)} = V_{0r} n + v_{\varepsilon}^{(r)}$, с точностью порядка ε^1 получим

$$l^{(r)} = n + (v_{\varepsilon}^{(r)} - n(v_{\varepsilon}^{(r)} n)) / V_{0r}, \quad (27)$$

откуда следует, что в слабоанизотропных средах равенство

$$(ln) = 1 \quad (28)$$

выполняется с точностью до членов порядка малости ε^1 .

Фазовая и лучевая скорости связаны в анизотропных средах соотношением $V_r = v_r (l^{(r)} n)$ [18]. Для слабоанизотропных сред из равенства (28) следует, что фазовая скорость V_r отличается от лучевой v_r на величину порядка ε^2 и равенство

$$v_r = V_r \quad (r = 1, 2, 3) \quad (29)$$

выполняется с точностью до членов порядка ε^1 . Приближенное уравнение (29) хорошо известно для слабоанизотропных сред; оно впервые было получено Бейкусом [19].

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВОЛНОВОЙ НОРМАЛИ ПО ЛУЧУ

Двухточечные алгоритмы расчета лучей основаны на непосредственном использовании принципа Ферма [9, 11, 12]. При численной реализации двухточечных алгоритмов необходимо вычислять лучевую скорость v_r в функции заданного луча l . Чтобы использовать формулу (23) для вычисления лучевой скорости, нужно по заданному лучу l найти волновую нормаль $n^{(r)}$.

Задача определения волновой нормали по лучу (назовем ее обратной лучевой задачей) в общем случае анизотропных сред является весьма сложной. Основная трудность в ее решении состоит в том, что лучу l волны заданного типа r в анизотропной среде может отвечать несколько волновых нормалей изолучевых волн. Установить количество искомого волновых нормалей и определить их направления можно только в результате детального исследования волновой поверхности [3].

Если обратная лучевая задача решается для слабоанизотропной среды и при решении сохраняются члены порядков малости ϵ^0 и ϵ^1 , то выделить различные изолучевые волны не удастся, и в результате решения будет всегда найдена единственная волновая нормаль. Действительно, в силу равенства (27) волновые нормали изолучевых волн могут отличаться друг от друга на величины порядка ϵ^1 . Но тогда из формул (21), (29) следует, что их лучевые скорости будут отличаться на величины порядка ϵ^2 . А поскольку при решении члены порядка ϵ^2 отбрасываются, то лучевые скорости изолучевых волн становятся неотличимы друг от друга и имитируют ситуацию, когда решение обратной лучевой задачи единственно. В результате получается, что предположение о слабости анизотропии ведет к сглаживанию областей неоднозначности на волновых поверхностях. В разделе 5 этот эффект будет продемонстрирован на численном примере.

Пусть в изотропной среде с тензором упругих постоянных λ^0 , имеющим вид (1), задан луч

$$l = (0, 0, 1). \quad (30)$$

На тензор λ^0 накладывается малое возмущение λ^ϵ . Для волн типов P , S_1 , S_2 ($r = 1, 2, 3$) в слабоанизотропной среде с тензором $\lambda = \lambda^0 + \lambda^\epsilon$ требуется найти положения волновых нормалей $n^{(r)}$, при которых луч l будет по-прежнему определяться формулой (30). Заметим, что задание луча в виде (30) выбрано для удобства и не ограничивает общности постановки задачи, так как, если луч имеет любое другое направление, поворотом системы координат его всегда можно привести к виду (30).

Для луча, задаваемого формулой (30), в изотропной среде векторы поляризации имеют вид

$$\begin{aligned} A_0^{(1)} &\equiv A_P \equiv l \equiv n_0 = (0, 0, 1); \\ A_0^{(2)} &\equiv A_V = (1, 0, 0); \quad A_0^{(3)} \equiv A_{SH} = (0, 1, 0). \end{aligned} \quad (31)$$

Поскольку в силу равенства (27) волновая нормаль отличается от луча на вектор, имеющий длину порядка ϵ^1 , то искомые волновые нормали $n^{(r)}$ будут иметь вид

$$n^{(r)} = (v_1^{(r)}, v_2^{(r)}, 1) \quad (r = 1, 2, 3), \quad (32)$$

и задача сводится к нахождению компонент $v_1^{(r)}$, $v_2^{(r)}$ векторов

$$n_\epsilon^{(r)} \equiv n^{(r)} - n_0 = (v_1^{(r)}, v_2^{(r)}, 0) \quad (r = 1, 2, 3). \quad (33)$$

Идея решения заключается в использовании формулы (24), в которой, если луч имеет вид (30), должно быть

$$v_1^{(r)} = v_2^{(r)} = 0. \quad (34)$$

Нахождение компонент $v_1^{(r)}, v_2^{(r)}$ векторов $n_\varepsilon^{(r)}$ заключается в подстановке в уравнения (34) величин $V_{\varepsilon r}, A_\varepsilon^{(r)}$ из формул (20)–(22) с учетом соотношений (31). При этом надо иметь в виду, что из-за несовпадения волновых нормалей $n^{(r)}$ и n_0 тензор Γ^ε будет

$$\Gamma_{im}^\varepsilon = \lambda_{iklm}^\varepsilon n_{0k} n_{0l} + (\lambda_{iklm}^0 + \lambda_{ilk m}^0) n_{0k} n_{\varepsilon l}^{(r)} \quad (i, m = 1, 2, 3),$$

а для вектора $p_\varepsilon^{(r)}$ вместо формулы (25) следует использовать выражение

$$p_\varepsilon^{(r)} = \left(n_\varepsilon^{(r)} - n_0 \frac{V_{\varepsilon r}^2}{2V_{0r}^2} \right) \Big| V_{0r}.$$

В результате для P -, S_1 -, S_2 -волн соответственно найдем

$$v_1^{(1)} = -2\lambda_{35}^\varepsilon / V_P^2; \quad v_2^{(1)} = -2\lambda_{34}^\varepsilon / V_P^2; \quad (35)$$

$$v_1^{(2)} = k_2 \cos \psi; \quad v_2^{(2)} = k_2 \sin \psi; \quad (36)$$

$$v_1^{(3)} = k_3 \sin \psi; \quad v_2^{(3)} = -k_3 \cos \psi, \quad (37)$$

где

$$k_2 = (\lambda_{35}^\varepsilon \cos \psi + \lambda_{34}^\varepsilon \sin \psi) / V_S^2;$$

$$k_3 = (\lambda_{35}^\varepsilon \sin \psi - \lambda_{34}^\varepsilon \cos \psi) / V_S^2.$$

В равенствах (35)–(37) использовано соответствие индексов в тензорах $(\lambda_{ijkl}^\varepsilon)$ и $(\lambda_{mnl}^\varepsilon)$ по известной схеме

$$(11) \leftrightarrow 1, (22) \leftrightarrow 2, (33) \leftrightarrow (3), \quad (38)$$

$$(23) = (32) \leftrightarrow 4, (31) = (13) \leftrightarrow 5, (21) = (12) \leftrightarrow 6.$$

Формулы (35)–(37) дают аналитическое решение обратной лучевой задачи для слабоанизотропной среды.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРОВ РЕФРАКЦИИ ОТРАЖЕННЫХ И ПРЕЛОМЛЕННЫХ ВОЛН

Параметрический способ расчета лучей [12, 14] основан на использовании закона Снеллиуса, записываемого для векторов рефракции падающей, отраженных и преломленных волн [13, 14, 18]. Закон Снеллиуса сводится к равенству касательных к границе раздела компонент векторов рефракции $x \equiv p_1$ отраженных и преломленных волн компоненте p_1^0 вектора рефракции падающей волны. Векторы рефракции падающей, отраженных и преломленных волн лежат в плоскости падения (пусть это

будет плоскость $y = 0$), и нормальные к границе компоненты векторов рефракции $z \equiv p_3$ находятся из уравнения [13, 14, 18]

$$\det(U_{ik}) = 0, \quad (39)$$

где матрица U имеет вид

$$(U_{ik}) = \lambda_{i11k}x^2 - \delta_{ik} + (\lambda_{i13k} - \lambda_{i31k})xz + \lambda_{i33k}z^2 \quad (i, k = 1, 2, 3). \quad (40)$$

Уравнение (39) является для анизотропных сред уравнением шестой степени относительно неизвестного z . В формуле (40) (λ_{ijk}) — тензор относительных упругих постоянных среды, в которой распространяются отраженные или преломленные волны, в локальной системе координат, ось z которой направлена по нормали к границе, а плоскость (xz) есть плоскость падения.

Построим приближенное решение уравнения (39) для слабоанизотропной среды. Если тензор λ в равенстве (40) является тензором λ^0 изотропной среды (1), то уравнение (39), как известно, имеет вид

$$\det U^0 =$$

$$= \begin{vmatrix} (\lambda + 2\mu)x^2 - 1 + \mu z^2 & 0 & (\lambda + \mu)xz \\ 0 & \mu(x^2 + z^2) - 1 & 0 \\ (\lambda + \mu)xz & 0 & \mu x^2 - 1 + (\lambda + 2\mu)z^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Оно распадается на два уравнения, которые описывают SH - и P -, SV -волны. Из первого уравнения

$$P_0(z) \equiv \mu(x^2 + z^2) - 1 = 0 \quad (41)$$

находят

$$z_{SH} = \pm (1/\mu - x^2)^{1/2}. \quad (42)$$

Из второго уравнения

$$P_0(z) \equiv \mu(\lambda + 2\mu)z^4 + (2\mu(\lambda + 2\mu)x^2 - (\lambda + 3\mu))z^2 + \mu(\lambda + 2\mu)x^4 - (\lambda + 3\mu)x^2 + 1 = 0 \quad (43)$$

находят

$$z_{SV} = \pm (1/\mu - x^2)^{1/2}; \quad (44)$$

$$z_P = \pm (1/(\lambda + 2\mu) - x^2)^{1/2}. \quad (45)$$

Теперь пусть тензор λ^0 возмущается малой добавкой λ^e . Матрицу U из равенства (40) представим в виде, аналогичном (9):

$$U_{ik} = U_{ik}^0 + U_{ik}^e \quad (i, k = 1, 2, 3), \quad (46)$$

где

$$U_{ik}^e = \lambda_{i11k}^e x^2 + (\lambda_{i13k}^e + \lambda_{i31k}^e) xz + \lambda_{i33k}^e z^2 \quad (i, k = 1, 2, 3). \quad (47)$$

Элементы матрицы U^e имеют порядок малости ε^1 .

Если подставить равенства (46), (47) в уравнение (39) и вычислять определитель, сохраняя лишь величины порядков малости ε^0 и ε^1 , то полученное уравнение опять распадется на два (заметим, что если сохранять члены порядков ε^0 , ε^1 , ε^2 , то уравнение уже не будет факторизоваться).

Для волны SH , поляризованной ортогонально плоскости падения, получим уравнение вида

$$P_0(z) + P_\varepsilon(z) = 0, \quad (48)$$

где слагаемое $P_0(z)$ дается формулой (41), а

$$P_\varepsilon(z) = \lambda_{44}^\varepsilon z^2 + 2\lambda_{46}^\varepsilon xz + \lambda_{66}^\varepsilon x^2. \quad (49)$$

В уравнении (49) сделана замена индексов $(ij)(kl) \leftrightarrow (mn)$ в тензоре λ^ε по схеме (38).

Из формул (41), (49) видно, что слагаемые $P_0(z)$ и $P_\varepsilon(z)$ в уравнении (48) имеют порядки малости соответственно ε^0 и ε^1 . Точное решение уравнения (48) в нулевом порядке есть $z_0 = z_{SH}$, где z_{SH} выражается формулой (42). Приближенное решение уравнения (48) до членов порядка малости ε^1 имеет вид [7]

$$z = z_0 - \frac{P_\varepsilon(z_0)}{P'_0(z)|_{z=z_0}}, \quad (50)$$

где значение P_ε определяется формулой (49), а производная P'_0 находится дифференцированием равенства (41).

Для P -, SV -волн, поляризованных в плоскости падения, также будем иметь уравнение вида (48), где $P_0(z)$ выражается формулой (43), а

$$\begin{aligned} P_\varepsilon(z) = & (\mu x^2 - 1 + (\lambda + 2\mu)z^2)(\lambda_{11}^\varepsilon x^2 + 2\lambda_{15}^\varepsilon xz + \lambda_{55}^\varepsilon z^2) + \\ & + (\mu z^2 - 1 + (\lambda + 2\mu)x^2)(\lambda_{55}^\varepsilon x^2 + \\ & + 2\lambda_{35}^\varepsilon xz + \lambda_{33}^\varepsilon z^2) - 2(\lambda + \mu)xz(\lambda_{15}^\varepsilon x^2 + (\lambda_{13}^\varepsilon + \lambda_{55}^\varepsilon)xz + \lambda_{35}^\varepsilon z^2). \end{aligned} \quad (51)$$

Решение этого уравнения имеет вид (50), где в качестве z_0 для P - и SV -волн берутся соответственно величины z_P , z_{SV} из формул (44), (45).

Полученные приближенные решения уравнения (39) применимы для любых значений z_0 , кроме $z_0 = 0$. Случай $z_0 = 0$ отвечает точкам образования головных волн в невозмущенной изотропной среде. В этих точках уравнения (41), (43) имеют двукратные корни и производные $P'_0(0)$ обращаются в нуль. При $z_0 = 0$ приближенное решение уравнения (39) с точностью до членов порядка ε^1 имеет вид

$$z = -\frac{P'_\varepsilon(0)}{P''_0(0)} \pm \left(-2 \frac{P_\varepsilon(0)}{P''_0(0)} \right)^{1/2}. \quad (52)$$

Величины $P''_0(0)$, $P_\varepsilon(0)$, $P'_0(0)$ определяются из формул (41), (43), (49), (51), в которых необходимо учесть, что при $z_0 = 0$ для P -волн $x^2 = (\lambda + 2\mu)^{-1}$, а для SV -, SH -волн $x^2 = \mu^{-1}$. Подстановка этих величин в формулу (52) соответственно для P -, SV - и SH -волн дает

$$z = \pm \left((-\lambda - 2\mu)\lambda_{11}^\varepsilon \right)^{1/2} - 2\lambda_{15}^\varepsilon (\lambda + 2\mu)^{-3/2};$$

$$z = \pm \left((-\mu\lambda_{55}^\varepsilon)^{1/2} - \lambda_{35}^\varepsilon + \lambda_{15}^\varepsilon \right) \mu^{-3/2}; \quad (53)$$

$$z = \pm \left((-\mu\lambda_{66}^\varepsilon)^{1/2} - \lambda_{46}^\varepsilon \right) \mu^{-3/2}.$$

Найденные формулы определяют значения $z \equiv p_3$ нормальных к границе компонент векторов рефракции отраженных и преломленных волн для слабоанизотропных сред.

5. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ И ВЫВОДЫ

В этом разделе приведем примеры использования полученных приближенных формул для расчета годографов отраженных волн. Приближенные расчеты сравним с точными, сделанными по программам пакета Анизотроп [12].

Модель 1. Среда состоит из трех трансверсально-изотропных слоев, лежащих на горизонтальной поверхности полупространства (табл. 1). Относительные упругие постоянные трансверсально-изотропной среды находятся по формулам

$$\lambda_{33} = V_{P\perp}^2; \quad \lambda_{44} = V_{S\perp}^2; \quad \lambda_{11} = \lambda_{33}k_P^2; \quad \lambda_{66} = \lambda_{44}k_{SH}^2;$$

$$\lambda_{13} = \lambda_{33} \left((1 + k_P^2)/2 - 2k_{SV}^2\lambda_{44}/\lambda_{33} \right). \quad (54)$$

Для модели 1 они составляют ($\text{км}^2/\text{с}^2$):

в 1-м слое — $\lambda_{11} = 0,276$, $\lambda_{33} = 0,250$, $\lambda_{44} = 0,040$,

$\lambda_{66} = 0,050$, $\lambda_{13} = 0,166$;

во 2-м слое — $\lambda_{11} = 1,528$, $\lambda_{33} = 1,440$, $\lambda_{44} = 0,250$,

$\lambda_{66} = 0,276$, $\lambda_{13} = 0,953$;

в 3-м слое — $\lambda_{11} = 9,364$, $\lambda_{33} = 9,000$, $\lambda_{44} = 1,000$,

$\lambda_{66} = 1,000$, $\lambda_{13} = 7,142$.

Глубины границ h измеряются по нормальям из источника.

Таблица 1

Параметры модели 1

Номера слоев и границ	Параметры границ раздела			Параметры слоев						
				Скорости на оси анизотропии и коэффициенты анизотропии					Углы наклона осей анизотропии	
	Угол наклона, град	Азимут восстания, град	Глубина, км	$V_{P\perp}$, км	$V_{S\perp}$, км	K_P	K_{SV}	K_{SH}	Угол с вертикалью, град	Азимут, град
1	2	45	0,1	0,5	0,2	1,05	1,10	1,12	0	0
2	5	35	0,4	1,2	0,5	1,03	1,03	1,05	5	35
3	0	0	1,0	3,0	1,0	1,02	1,03	1,0	10	25

Примечание. Азимуты восстания границ и азимуты осей анизотропии отсчитываются от направления профиля (положительным считается направление источник — приемник).

Таблица 2

Времена пробега отраженных волн, рассчитанные для модели 1, мс

Тип волны	Способ рас- чета	Расстояния между источником и приемниками, км				
		0,2	0,6	1,0	1,4	1,8
<i>PP</i>	1	1292	1299	1333	1386	1453
	2	1291	1298	1333	1386	1453
	3	1292	1299	1333	1387	1453
<i>PSV</i>	1	2326	2315	2340	2386	2442
	2	2325	2314	2338	2385	2441
	3	2327	2315	2340	2385	2442
<i>SHSH</i>	1	3382	3420	3539	3718	3939
	2	3380	3423	3544	3719	3940
	3	3384	3423	3541	3720	3941

Для модели 1 рассчитаны времена пробега однократных *PP*-, *PSV*-, *SHSH*-волн, отраженных от нижней границы — поверхности полупространства. В табл. 2 приведены результаты расчета по двухточечным алгоритмам с использованием приближенных формул из раздела 3 (способ расчета 1) и параметрическим методом с использованием приближенных формул из раздела 4 (способ расчета 2). Они сравниваются с точными расчетами (способ расчета 3). Из табл. 2 видно, что максимальное отличие значений времен пробега, рассчитанных с использованием приближенных формул, от точных значений составляет 4 мс, или 0,12 %, т. е. достигается почти идеальная точность.

Этот результат становится понятен, если вычислить значения ϵ для трех слоев модели из табл. 1. Величины ϵ , расчи-

Таблица 3

Времена пробега отраженных волн, рассчитанные для модели 2, мс

Тип волны	Способ рас- чета	Расстояния между источником и приемниками, км				
		0,2	0,6	1,0	1,4	1,8
<i>PP</i>	1	232	243	262	288	319
	2	232	243	262	288	319
	3	232	243	263	290	321
<i>PS₁</i>	1	319	329	348	375	408
	2	319	330	350	377	411
	3	319	331	351	380	414
<i>S₂S₂</i>	1	445	459	485	523	571
	2	445	459	487	523	571
	3	448	462	490	529	577

танные по формуле (13), оказываются равными 0,004; 0,006; 0,012 соответственно для слоев 1, 2, 3. Возрастание ϵ при переходе от 1-го слоя к 3-му обусловлено возрастанием телесных углов, в которых лежат рассчитываемые лучи. Телесные углы $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ относятся друг к другу как 3 : 8 : 16.

Очевидно, что для приведенных значений ϵ правомерность применения приближенных формул не вызывает сомнений.

Модель 2 состоит из слоя оливина с матрицей относительных упругих постоянных [28] ($\text{км}^2/\text{с}^2$)

$$\lambda = \begin{bmatrix} 97,59 & 17,77 & 23,80 & & & \\ 17,77 & 59,64 & 23,49 & & 0 & \\ 23,80 & 23,49 & 75,00 & & & \\ & & & 20,09 & & \\ & 0 & & & 24,40 & \\ & & & & & 23,89 \end{bmatrix}$$

Мощность слоя $h = 1$ км.

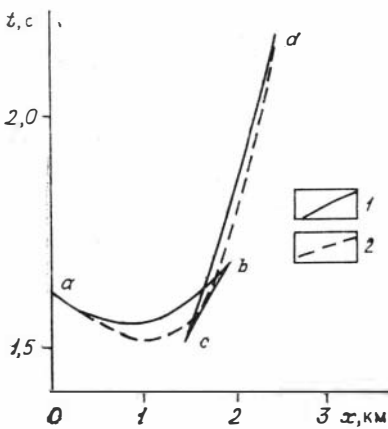
Для источника и приемников, находящихся на профиле, ориентированном под углом 45° к кристаллографической оси (100) оливина, рассчитаны времена пробега отраженных от подошвы слоя PP -, PS_1 - и S_2S_2 -волн. Результаты расчетов с использованием приближенных формул (способы расчета 1, 2) в сравнении с точными расчетами (способ расчета 3) приведены в табл. 3, откуда видно, что максимальное отличие времен пробега, рассчитанных с использованием приближенных формул, от точных значений составляет 6 мс, или 1,4 %.

Точность полученных результатов еще можно назвать удовлетворительной. И, казалось бы, данный пример показывает,

что для таких сильно анизотропных сред, как оливин ($K_P = \left(\frac{\lambda_{11}}{\lambda_{22}} \right)^{1/2} = 1,28$), при расчете лучей можно использовать приближенные формулы. Однако на самом деле такой однозначный вывод делать нельзя. Вопрос о применимости приближенных формул следует решать каждый раз заново применительно к диапазону направлений рассчитываемых лучей. В данном примере для телесного угла Ω_i , которому принадлежат направления рассчитанных лучей, значение ϵ , вычисленное по формуле (13), составило 0,079. Если величину ϵ находить для любого направления в пространстве по формуле (16), то для оливина получим $\epsilon = 0,141$. А это означает, что для другого телесного угла Ω_i значение ϵ может значительно превышать 0,079 и, как следствие, точность расчета лучей ухудшится.

Модель 3. В качестве последнего примера рассмотрим модель, состоящую из трансверсально-изотропного слоя, лежащего на падающей границе полупространства. Скорости на оси анизотропии слоя $V_{P_\perp} = 3$ км/с, $V_{S_\perp} = 1,2$ км/с, коэффициенты

Годографы отраженной SVSV-волны: точный (1) и рассчитанный с использованием приближенных формул (2).



анизотропии $K_p = 1$, $K_{sv} = 1,26$, $K_{sh} = 1$. Относительные упругие постоянные, находимые по формулам (54), для модели 3 составляют ($\text{км}^2/\text{с}^2$):

$$\lambda_{11} = \lambda_{33} = 9,00; \lambda_{44} = \\ = \lambda_{66} = 1,44; \lambda_{13} = 4,41.$$

Ось анизотропии слоя вертикальна. Отражающая граница наклонена под углом $\varphi = 10^\circ$, ее глубина $h = 1$ км по нормали из источника. На рисунке изображены точный годограф отраженной SVSV-волны и годограф этой же волны, рассчитанный с использованием приближенных формул из раздела 3. На рисунке хорошо видно, что годограф, рассчитанный с применением приближенных формул, «сглаживает» петлю на точном годографе, т. е. использование приближенных формул дает здесь качественно неверный результат. Значения ε , рассчитанные по формуле (13) для направлений лучей, соответствующих веткам ab , bc , cd точного годографа, составили 0,092, 0,111, 0,078. Эти величины дают основание считать, что значения $\varepsilon \geq 0,1$ не могут считаться удовлетворяющими условиям (14), а среда, для которой $\varepsilon \geq 0,1$, не может называться слабоанизотропной.

Рассмотренные примеры показывают, что критерием возможности применения приближенных формул является значение ε , рассчитанное для требуемого диапазона направлений по формуле (13). Получения хорошей точности расчета лучей можно ожидать при $\varepsilon \leq 0,02$. Значения $\varepsilon \approx 0,07$ являются предельными, при которых получаемую точность еще можно считать удовлетворительной. При $\varepsilon \geq 0,1$ использовать приближенные формулы не следует.

Расчет лучей с использованием приближенных формул является значительно более эффективным по сравнению с расчетом точными способами с точки зрения затрат машинного времени. Применение приближенного способа нахождения волновой нормали по лучу позволяет повысить эффективность двухточечных алгоритмов расчета в 8—10 раз. Использование в параметрическом методе расчета лучей приближенного способа вычисления векторов рефракции отраженных и преломленных волн приводит к уменьшению затрат машинного времени, требуемых для расчета, в 2—3 раза.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бляс Э. А. Годографы отраженных волн в горизонтально-слоистой среде с поперечно-изотропными слоями и их интерпретация // Геология и геофизика.— 1983.— № 2.— С. 91—95.
2. Гречка В. Ю. Численно-аналитическое представление годографов ОТВ отраженных волн в горизонтально-слоистых анизотропных средах // Материалы конференции молодых ученых Института геологии и геофизики/ИГиГ СО АН СССР.— Новосибирск, 1988.— С. 89—103.— Деп. в ВИНТИ 27.04.88, № 3309—В88.
3. Гречка В. Ю., Оболенцева И. Р. Расчет лучей в слоисто-однородных анизотропных средах с неоднозначными волновыми поверхностями.— Новосибирск, 1989.— 46 с. (Препринт ИГиГ СО АН СССР, № 9).
4. Егоркин А. В., Егоркин А. А. Анизотропия скоростей поперечных волн в консолидированной коре Сибири // Изв. АН СССР. Физика Земли.— 1986.— № 11.— С. 106—112.
5. Като Т. Теория возмущений линейных операторов.— М.: Мир, 1972.— 740 с.
6. Киселев А. П. Точечные источники колебаний в слабоанизотропной упругой среде // Докл. АН СССР.— 1988.— Т. 300, № 4.— С. 824—826.
7. Найфэ А. Х. Введение в методы возмущений.— М.: Мир, 1984.— 535 с.
8. Невский М. В. Квазианизотропия скоростей сейсмических волн.— М.: Наука.— 1974.— 179 с.
9. Оболенцева И. Р. Численный способ решения прямых пространственных задач геометрической сейсмики для сложнопостроенных анизотропных сред // Экспериментальные и теоретические исследования отраженных волн.— Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1975.— С. 134—142.
10. Оболенцева И. Р. Приближенные формулы для скоростей упругих волн в однородных анизотропных средах // Геология и геофизика.— 1986.— № 11.— С. 95—104.
11. Оболенцева И. Р., Гречка В. Ю. Двухточечные алгоритмы расчета лучей в слоисто-однородных анизотропных средах // Там же.— 1988.— № 10.— С. 104—112.
12. Оболенцева И. Р., Гречка В. Ю. Лучевой метод в анизотропной среде (алгоритмы программы).— Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1989.— 225 с.
13. Петрашень Г. П. Распространение волн в анизотропных упругих средах.— Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1980.— 280 с.
14. Петрашень Г. И., Кашиган Б. М., Ковтун А. А. Распространение объемных волн и методы расчета волновых полей в анизотропных упругих средах.— Л.: Наука. Ленингр. отд-ние, 1984.— 282 с.
15. Пузырев Н. Н., Оболенцева И. Р., Тригубов А. В., Горшкалев С. Б. Экспериментальные исследования анизотропии скоростей в осадочных отложениях по наблюдениям на поперечных волнах // Геология и геофизика.— 1983.— № 11.— С. 8—19.
16. Селезнев В. С., Соловьев В. М., Никитенко А. Б. Определение параметров сейсмической анизотропии земной коры в Западной Якутии // Там же.— 1986.— № 8.— С. 90—98.
17. Сиротин Ю. И., Шаскольская М. П. Основы кристаллофизики.— М.: Наука, 1979.— 639 с.
18. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах.— М.: Наука, 1965.— 386 с.
19. Backus G. E. Possible forms of seismic anisotropy of the uppermost mantle under oceans // J. Geophys. Res.— 1965.— Vol. 70.— P. 3429—3439.
20. Červený V. Direct and inverse kinematic problems for inhomogeneous anisotropic media. Linearization approach // Contributions of the Geophysical Inst. of the Slovak Academy of Sciences.— 1982.— Vol. 13.— P. 127—133.
21. Červený V., Jech J. Linearized solution of kinematic problem of seismic body waves in inhomogeneous slightly anisotropic media // J. Geophys.— 1982.— Vol. 51, № 2.— P. 96—104.

22. Cerveny V., Firas P. Numerical modelling and inversion of travel times of seismic body waves in inhomogeneous anisotropic media // Geophys. J. of Roy. Astr. Soc.—1984.— Vol. 76.— P. 41—51.
23. Crampin S. A review of effects of anisotropic layering on the propagation of seismic waves // Ibid.—1977.— Vol. 49.— P. 9—27.
24. Crampin S., King D. W. Evidence for anisotropy in the upper-mantle beneath Eurasia from the polarization of higher-mode seismic surface-waves // Ibid.— P. 59—85.
25. Fukao Y. Evidence from core-reflected shear-waves for anisotropy in the Earth's mantle // Nature.—1984.— Vol. 309.— P. 695—698.
26. Stöckli R. F. Two point ray tracing in a three-dimensional medium consisting of homogeneous nonisotropic layers separated by plane interfaces // Geophysics.—1984.— Vol. 49, N 6.— P. 767—770.
27. Thomsen L. Weak elastic anisotropy // Ibid.—1986.— Vol. 51, N 10.— P. 1954—1966.
28. Verma R. K. Elasticity of some high-density crystals // J. Geophys. Res.—1960.— Vol. 65, N 2.— P. 757—766.

И. Р. БОЛЕНЦЕВА, В. Ю. ГРЕЧКА

СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ АЛГОРИТМОВ РАСЧЕТА ЛУЧЕЙ В СЛОИСТО-ОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

Для расчета лучей в слоисто-однородных анизотропных средах разработан ряд алгоритмов [3, 4, 9, 11, 12; 13, с. 132—135, 141—142]*. В данной работе проводится их сравнительный анализ и указываются пути наиболее рационального применения.

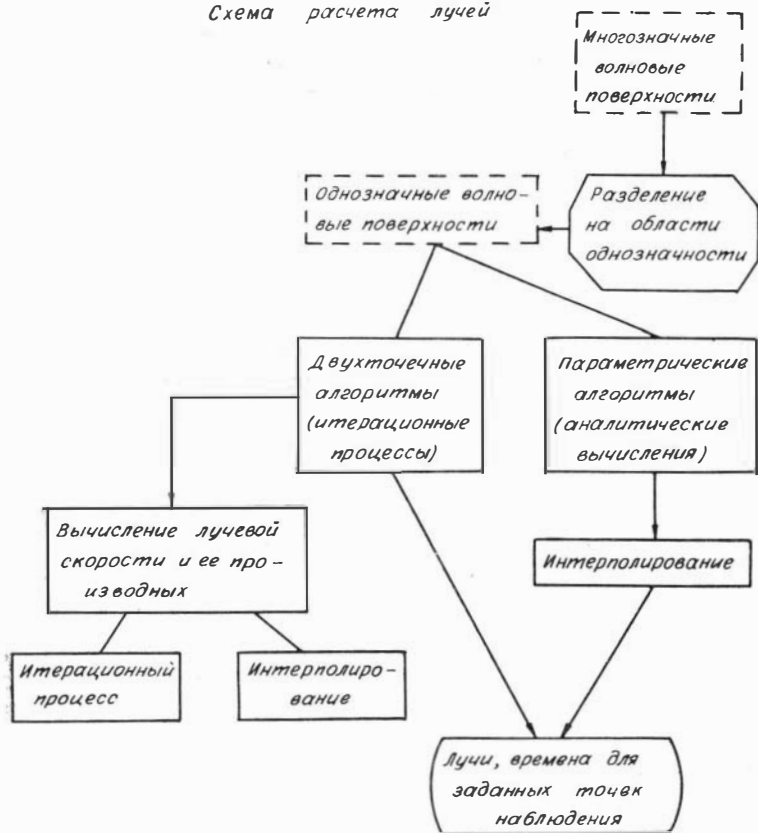
Изучение свойств алгоритмов выполнено по результатам численного моделирования. Использованы расчеты отраженных *PS*- и *SS*-волн в трансверсально-изотропных средах с наклонной осью симметрии [2, 10] и аналогичные расчеты для сред орторомбического типа симметрии. Рассматривались главным образом среды простого строения (с двумя или одной плоскими — горизонтальными или наклонными — границами раздела), но с анизотропией разных типов, так как объектом исследований были анизотропные свойства среды, их влияние на кинематику и динамику объемных волн.

Краткая характеристика алгоритмов расчета лучей. С вычислительной точки зрения алгоритмы расчета лучей в слоисто-однородных анизотропных средах имеют структуру, изображенную на схеме.

Алгоритмы применимы к анизотропным средам любого возможного типа симметрии. В связи с этим следует различать случаи однозначности и неоднозначности волновых поверхностей. До проведения расчетов лучей должен быть выполнен анализ волновых поверхностей для всех отрезков луча. Если для какого-

* См. также статью В. Ю. Гречки «Расчет лучей в слоисто-однородных слабоанизотропных средах» в наст. сборнике.

Схема расчета лучей



либо отрезка луча волновая поверхность неоднозначна в диапазоне предполагаемых направлений луча, применяют разделение многозначной волновой поверхности на области однозначности. Тем самым поставленная задача сводится к совокупности более простых задач расчета лучей при условии однозначности всех волновых поверхностей [3].

В случае однозначных волновых поверхностей алгоритмы расчета лучей делятся на две группы: двухточечные и параметрические.

Двухточечные алгоритмы [9, 11, 13] представляют собой итерационные процессы построения луча при фиксированных положениях источника и приемника. Они аналогичны соответствующим алгоритмам для изотропных сред [5—7]. Траектория луча, т. е. вектор неизвестных координат точек пересечения лучом границ раздела, ищется на основе принципа Ферма. Используются два алгоритма. Сначала решается методом итераций система уравнений, выражающая необходимые условия $\min t(x)$, где t — время пробега между двумя заданными точками (источником и приемником). Если итерационный процесс сходится медленно или рас-

ходится, переходят к поиску вектора \mathbf{x} методом нелинейного программирования, из которых нами выбран метод сопряженных градиентов (алгоритм Флетчера — Ривса).

В итерационных процессах на каждом шаге для всех отрезков луча вычисляются лучевая скорость и ее производные в функции параметров луча. Для этого используются либо итерационные процессы, либо интерполирование [11]. Итерационные процессы состоят в нахождении нормали по лучу и вычислении лучевой скорости и ее производных по заданной нормали. Для интерполирования предварительно рассчитывают значения модуля лучевой скорости на сетке параметров луча. Расчет сетки параметров луча выполняется в параметрическом виде, т. е. задаются параметры нормали в узлах прямоугольной сетки и по ним рассчитываются векторы лучевых скоростей. Таким способом образуется хаотическая сетка значений параметров луча с заданными на ней значениями модуля лучевой скорости. В результате для нахождения лучевой скорости и ее производных в функции заданных параметров луча приходится решать задачу интерполирования на хаотической сетке. Нами использовался алгоритм, разработанный В. А. Василенко и др. [1].

В параметрических алгоритмах (см. [4, 9, 12]) задается направление волновой нормали в источнике (параметр) и последовательно вычисляются на основе формул перехода от нормали к лучу и закона Снеллиуса для волновых нормалей координаты x_k, y_k ($\{x_k, y_k\} = \mathbf{x}$) точек пересечения лучом границ раздела, кончая точкой выхода на заданную поверхность наблюдений. Большая часть вычислений выполняется по аналитическим формулам. Численные методы необходимы на этапе нахождения времен пробега t и параметров луча в заданных точках плоскости наблюдений (на профиле, в узлах сетки при площадных наблюдениях и т. п.). Нами применялось интерполирование на хаотической сетке [1].

Двухточечные алгоритмы. Расчет лучей двухточечным способом в случае анизотропных сред выполняется по тем же вычислительным схемам, что и в случае изотропных сред [5—7]. Происходит лишь некоторое усложнение вычислительного процесса за счет того, что скорости в слоях не постоянны, а являются функциями направления луча. Конкретные алгоритмы, применяемые в двухточечном способе, характеризуются теми же свойствами, что и для изотропных моделей [8], и так же, как для изотропных сред, наиболее оптимально сочетание метода итераций и сопряженных градиентов.

В табл. 1, 2 приводятся данные относительно сходимости двухточечных способов при расчетах для трансверсально-изотропных сред и сред других типов симметрии (приведены примеры для орторомбической среды). Рассчитывались годографы ОТВ волн разных типов, отраженных от горизонтальной границы на глубине 1 км для различных удалений l от источника. Для трансверсально-изотропной среды менялось пространственное положение

Характеристики сходимости итерационных процессов расчета лучей в трансверсально-изотропных средах

α°	β°	$l, \text{ км}$	PSV		SVSV		SHSH	
			ит	$q, (\text{grad } t)^2$	ит	$q, (\text{grad } t)^2$	ит	$q, (\text{grad } t)^2$
45	10	0,25	5	0,31—0,35	6	0,35—0,38	5	0,28—0,32
		0,50	5	0,23—0,32	5	0,27—0,35	5	0,30—0,33
		0,75	5	0,23—0,31	5	0,20—0,29	5	0,32—0,35
45	45	0,25	3	0,62—1,01	2	0,87	3	0,01—1,04
			5	$1,4 \cdot 10^{-5}$	4	$3,7 \cdot 10^{-6}$	1	$4,7 \cdot 10^{-6}$
		0,50	3	0,75—0,82	6	0,33—0,40	4	0,09—0,24
			5	$1,0 \cdot 10^{-5}$	—	—	—	—
0,75	9	0,57—0,71	4	0,12—0,28	4	0,13—0,27		
45	90	0,25	4	0,14—0,27	4	0,01—0,31	3	0,00—0,01
		0,50	3	0,07—0,41	2	0,00	2	0,01
		0,75	5	0,02—0,73	2	0,00	3	0,01—1,07
90	10	0,25	11	0,26—0,34	8	0,35—0,38	5	0,28—0,31
		0,50	3	0,35—0,37	3	0,30—0,33	1	Не вычисл.
		0,75	3	0,36—0,38	4	0,26—0,29	2	0,10
90	45	0,25	3	0,30—1,14	2	1,46	3	0,02—0,94
			4	$4,3 \cdot 10^{-6}$	4	$5,2 \cdot 10^{-6}$	4	$4,7 \cdot 10^{-6}$
		0,50	2	1,18	2	1,41	2	0,09
			4	$1,9 \cdot 10^{-5}$	3	$1,1 \cdot 10^{-5}$	—	—
		0,75	2	1,06	2	1,13	2	0,07
			5	$2,3 \cdot 10^{-6}$	4	$6,6 \cdot 10^{-6}$	—	—
90	90	0,25	3	0,03—0,04	3	0,00—0,01	3	0,01—0,01
		0,50	2	0,03	1	Не вычисл.	1	Не вычисл.
		0,75	3	0,07—0,23	3	0,01—0,11	2	0,01

ние оси анизотропии, а для орторомбической среды профиль ориентировался под разными углами к оси X_1 кристаллофизической системы координат $X_1X_2X_3$.

Среда над отражающей границей двухслойная: верхний слой мощностью 0,2 км изотропен, он имитирует ВЧР, второй слой мощностью 0,8 км анизотропен.

Для модели трансверсально-изотропной среды (см. табл. 1) упругие константы равны в 1-м слое

$$v_{P1} = 0,5 \text{ км/с}, v_{S1} = 0,15 \text{ км/с};$$

во 2-м слое

$$v_{P,L} = \sqrt{c_{33}/\rho} = 2 \text{ км/с}; \gamma_{\perp} = \sqrt{c_{44}/c_{33}} = 0,3; k_P = \sqrt{c_{11}/c_{33}} = 1,1;$$

$$k_{SV} = (1/2) \sqrt{(c_{11} + c_{33} - 2c_{13})/c_{44}} = 1,1; k_{SH} = \sqrt{c_{66}/c_{44}} = 1,2.$$

α°	β°	l , км	PSH		SVSH		SHSV	
			it	q , (grad t) ²	it	q , (grad t) ²	it	q , (grad t) ²
45	10	0,25	5	0,27—0,29	7	0,34—0,36	7	0,31—0,33
		0,50	4	0,25—0,29	5	0,36—0,38	5	0,21—0,30
		0,75	4	0,28—0,31	6	0,37—0,39	4	0,14—0,26
45	45	0,25	3	0,02—0,81	4	0,72—0,85	7	0,19—0,38
			1	$1,0 \cdot 10^{-5}$	4	$2,6 \cdot 10^{-6}$	—	—
		0,50	4	0,08—0,22	3	0,66—0,83	3	0,10—0,20
			—	—	4	$4,7 \cdot 10^{-6}$	—	—
	0,75	3	0,09—0,25	12	0,63—0,74	5	0,22—0,26	
45	90	0,25	3	0,02—0,38	4	0,06—0,21	4	0,06—0,21
		0,50	3	0,32—0,40	4	0,02—0,71	3	0,02—0,71
		0,75	4	0,26—0,39	3	0,03—0,40	3	0,03—0,40
90	10	0,25	4	0,24—0,28	6	0,33—0,34	6	0,33—0,34
		0,50	3	0,28—0,31	3	0,27—0,33	3	0,27—0,33
		0,75	3	0,31—0,33	3	0,28—0,32	3	0,28—0,32
90	45	0,25	3	0,01—0,96	10	0,50—0,52	9	0,50—0,52
			1	$8,4 \cdot 10^{-6}$	—	—	—	—
		0,50	2	0,15	3	0,44—0,48	3	0,44—0,47
		0,75	3	0,17—0,22	3	0,37—0,41	3	0,37—0,41
90	90	0,25	3	0,02—0,25	3	0,08—0,09	3	0,08—0,09
		0,50	2	0,03	2	0,66	2	0,06
		0,75	2	0,08	3	0,13—0,20	2	0,13

Примечание. α — азимутальный, β — полярный углы направления оси симметрии; l — расстояние источник — приемник; it — количество итераций, q — показатель сжимаемости отображения в методе итераций, grad t — модуль градиента целевой функции $t(x)$ в методе сопряженных градиентов; PSV, SVSV, SHSH, PSH, SVSH, SHSV — типы волн.

Для модели орторомбической среды (см. табл. 2) в 1-м слое $v_{p1} = 2$ км/с, $v_{s1} = 1$ км/с; во 2-м слое приведенные модули упругости $\lambda_{ij} = c_{ij}/\rho$ (км²/с²):

$$\lambda_{11} = 97,59; \lambda_{12} = 17,77; \lambda_{13} = 23,80; \lambda_{22} = 59,64;$$

$$\lambda_{23} = 23,49; \lambda_{33} = 75,00; \lambda_{44} = 20,09; \lambda_{55} = 24,40;$$

$$\lambda_{66} = 23,89.$$

Как следует из таблиц, в большинстве случаев решение получено наиболее эффективным способом — методом итераций решения системы уравнений относительно координат x_k , y_k ($k = 1, \dots, m$), точек отражения — преломления. Только в некоторых случаях был выполнен переход к методу сопряженных градиентов.

Случаи окончания вычислений методом сопряженных градиентов в табл. 1 отмечены наличием вторых строк (для данных зна-

Характеристики сходимости итерационных процессов расчета лучей, времен t в орторомбических средах (оливине)

, км	Тип волн	Способ 1		Способ 2			
		t , с	it	t , с	it	q	e
1,2	PS_1 , $\alpha = 45^\circ$	0,6085	4	0,6099	10	0,51—0,34	$3 \cdot 10^{-2}$ — $4 \cdot 10^{-6}$
1,0		0,5932	3	0,5957	7	0,34—0,33	$7 \cdot 10^{-4}$ — $9 \cdot 10^{-6}$
0,8		0,5800	2	0,5825	8	0,43—0,43	$1 \cdot 10^{-3}$ — $1 \cdot 10^{-5}$
0,6		0,5691	2	0,5709	8	0,47—0,45	$1 \cdot 10^{-3}$ — $2 \cdot 10^{-5}$
0,4		0,5610	1	0,5621	8	0,51—0,51	$1 \cdot 10^{-3}$ — $3 \cdot 10^{-5}$
0,2		0,5560	1	0,5564	7	0,57—0,56	$6 \cdot 10^{-4}$ — $6 \cdot 10^{-5}$
1,2	PS_2 , $\alpha = 45^\circ$	0,6287	6	0,6292	10	0,47—0,47	$1 \cdot 10^{-3}$ — $7 \cdot 10^{-5}$
1,0		0,6126	3	0,6132	7	0,44—0,44	$9 \cdot 10^{-4}$ — $3 \cdot 10^{-5}$
0,8		0,5986	2	0,5992	6	0,40—0,40	$5 \cdot 10^{-4}$ — $3 \cdot 10^{-5}$
0,6		0,5869	2	0,5874	5	0,39—0,36	$2 \cdot 10^{-4}$ — $2 \cdot 10^{-5}$
0,4		0,5782	2	0,5784	4	0,46—0,28	$1 \cdot 10^{-4}$ — $9 \cdot 10^{-6}$
0,2		0,5727	1	0,5728	2	0,46	$1 \cdot 10^{-4}$
1,4	S_1S_1 , $\alpha = 20^\circ$	0,7876	4	0,7875	4	0,03—0,04	$1 \cdot 10^{-5}$ — $6 \cdot 10^{-7}$
1,6		0,8081	2	0,8084	3	2,4	$3 \cdot 10^{-3}$
1,8		0,8358	2	0,8358	10+6	1,00—1,00	$2 \cdot 10^2$ — $3 \cdot 10^4$
2,0		0,8672	2	0,8672	8	0,84—0,14	$2 \cdot 10^0$ — $5 \cdot 10^{-7}$
2,2		0,9003	2	0,9006	3	0,07	$2 \cdot 10^{-7}$
2,4		0,9347	2	0,9353	3	0,07	$3 \cdot 10^{-7}$
1,4	S_2S_2 , $\alpha = 20^\circ$	0,8542	4	0,8542	4	0,04—0,03	$5 \cdot 10^{-5}$ — $8 \cdot 10^{-7}$
1,6		0,8802	2	0,8802	2	0,04	$5 \cdot 10^{-5}$
1,8		0,9081	2	0,9081	2	0,04	$5 \cdot 10^{-5}$
2,0		0,9377	2	0,9377	2	0,04	$5 \cdot 10^{-5}$
2,2		0,9687	2	0,9687	2	0,04	$5 \cdot 10^{-5}$
2,4		1,0009	2	1,0009	2	0,04	$5 \cdot 10^{-5}$
1,4	S_1S_2 , S_2S_1 , $\alpha = 20^\circ$	0,8189	10+3	0,8193	10+3	0,94—1,00	$3 \cdot 10^0$ — $1 \cdot 10^3$
1,6		0,8439	10+3	0,8440	10+6	1,00—1,00	$6 \cdot 10^1$ — $2 \cdot 10^5$
1,8		0,8718	4	0,8721	10+6	1,10—1,00	$3 \cdot 10^0$ — $2 \cdot 10^2$
2,0		0,9021	3	0,9026	10+3	1,30—0,97	$1 \cdot 10^0$ — $4 \cdot 10^0$
2,2		0,9339	2	0,9353	10+2	1,30—0,99	$5 \cdot 10^{-1}$ — $5 \cdot 10^1$
2,4		0,9671	2	0,9695	10+2	1,10—1,00	$1 \cdot 10^0$ — $9 \cdot 10^1$

Примечание. В способе 1 применяется итерационный процесс для вычисления лучевой скорости v и ее производных по координатам точек отражения (метод Ньютона нахождения нормали по лучу), в способе 2 — интерполирование на сетке параметров луча. it — количество итераций в методах итераций + сопряженных градиентов, q — показатель сжимаемости отображения, e — оценка сверху приближений x^i , i — номер итерации; α — азимут профиля относительно оси X_1 оливина.

чений l) в графах it , $(\text{grad } t)^2$, которые характеризуют число выполненных этим методом итераций и величину квадрата модуля градиента $t(x)$ по окончании процесса; как известно, в точке решения x^* $\text{grad } t(x^*) = 0$. В представленных расчетах критерием окончания итерационных процессов было условие $|t^i - t^{i-1}| < \varepsilon_i$, где i — номер итерации, $\varepsilon_i = 10^{-5}$ с.

Из первых строк графа it , $(\text{grad } t)^2$, характеризующих метод итераций, видно, что переход к методу сопряженных градиентов

происходил по условию $q \geq 0,8$, где $q = q_m = \|x^{i+1} - x^i\|_m / \|x^i - x^{i-1}\|_m$ — показатель сжимаемости отображений, $\|\dots\|_m$ — m -норма, i — номер итерации. Из определения q видно, что его вычисление возможно начиная с $i = 2$.

Известно, что если $q \leq 0,5$ и вычислительный процесс заканчивается по условию $\|x^i - x^{i-1}\| \leq \varepsilon_x$, то справедлива оценка $\|x^* - x^i\| \leq \varepsilon_x$. Из приведенных в табл. 1 значений (они даны для второй и последней итераций) видно, что в большинстве случаев $q \leq 0,5$.

В табл. 2 случаи применения метода сопряженных градиентов отмечены в графе *it* соответствующей добавкой к числу итераций в методе итераций. Переход к методу сопряженных градиентов в этих расчетах происходил после 10 итераций в методе итераций в случае, если процесс итераций не заканчивался раньше по условию $|t^i - t^{i-1}| < \varepsilon_t$. В графах *q*, *e* для способа 2 помещены значения показателя q и оценки сверху решения e в методе итераций; они относятся ко второй и последней итерациям.

Из табл. 2 видно, что для одних типов волн сходимость в методе итераций быстрая, а для других (S_1S_2 , S_2S_1) процесс может расходиться и требуется применять метод сопряженных градиентов.

Двухточечные алгоритмы для анизотропных сред подразделяются на две группы, в зависимости от того, каким способом вычисляются лучевая скорость и ее производные (см. схему).

В итерационных процессах волновая нормаль $\mathbf{n}(\sin \beta \cos \alpha, \sin \beta \sin \alpha, \cos \beta)$ ищется по заданному направлению луча $\mathbf{l}(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ путем решения векторного уравнения, связывающего фазовую скорость V с лучевой v :

$$v\mathbf{l} = V\mathbf{n} + \frac{\partial V}{\partial \beta} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \beta} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \frac{\partial V}{\partial \alpha} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \alpha}.$$

В общем случае анизотропных сред мы применяли два способа нахождения \mathbf{n} на основе данной зависимости [11], из них более эффективен способ, названный методом Ньютона. В случае трансверсально-изотропных сред векторное уравнение сводится к скалярному: ищется угол β по заданному углу θ , применяется метод итераций Вегстейна [9].

Процесс интерполирования для нахождения лучевой скорости и ее производных по заданному направлению луча \mathbf{l} описан в [11], применялись программы [1].

В табл. 2 сравнивается сходимость двухточечных алгоритмов (методы итераций + сопряженных градиентов) при использовании итерационных процессов (способ 1) и интерполирования (способ 2). Из сравнения времен t видно, что для способа 1 они несколько меньше, т. е. точнее, так как решение соответствует $\min t(x)$. Кроме того, число итераций *it* для способа 1 также меньше и, что особенно важно, реже переход к методу сопряженных градиентов. В этом отношении показательны данные для волн S_1S_2 , S_2S_1 . Интересно, что для волны S_2S_2 значения t и *it* совершенно одинаковы в случае применения способов 1 и 2.

Таким образом, применение интерполирования, как и следовало ожидать, дает меньшую точность (при разумном количестве узлов сетки), чем вычисления с помощью итерационных процессов на основе точных зависимостей. Тем не менее во многих случаях интерполирование может дать удовлетворительную точность и существенно сократить время счета. Это относится к расчетам для большого количества точек наблюдения, расположенных достаточно густо (с обычным шагом между сейсмоприемниками) на профиле или площади. В этих случаях с лихвой окупаются первоначальные затраты времени на построение сплайнов.

В расчетах, результаты которых приведены в табл. 2 (способ 2), применялась сетка 11×5 узлов. Разрежение сетки до 8×4 и 5×4 узлов практически не изменило значений t (различия в четвертом знаке после запятой), а время счета сократилось в 2 и 3 раза соответственно.

Параметрические алгоритмы и сравнение их с двухточечными. Времена пробега волн шести типов, представленные в табл. 2, были вычислены для тех же расстояний l параметрическим способом. Задавались следующие значения параметров α , β волновой нормали в источнике (β — угол с вертикалью, α — азимут, отсчитываемый от оси X_1 оливина):

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_{\text{профиля}} \pm 15^\circ (10 \text{ значений}) \\ \beta &= -0,1^\circ \div 15^\circ (5 \text{ значений}) \end{aligned} \right\} \text{ для } PS\text{-волн;}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \alpha_{\text{профиля}} \pm 15^\circ (8 \text{ значений}) \\ \beta &= 5^\circ \div 10,5^\circ (8 \text{ значений}) \end{aligned} \right\} \text{ для } SS\text{-волн.}$$

Для PS -волн значение $\beta = 15^\circ$ оказалось невозможным, так как при этом z -компонента вектора рефракции n/V в слое 2 (олиvine) становилась комплексной. Таким образом, были найдены 10×4 точек выхода лучей на поверхность и времен пробега для волн PS и 8×8 — для волн SS . Затем для каждой из волн рассчитывались интерполирующие сплайны (кубические) по программам из [1] и для заданных точек наблюдения на профилях с азимутами 45° в случае PS -волн и 20° в случае SS -волн (см. табл. 2) находились путем интерполяции времена пробега t . Сравнение их с временами из табл. 2, найденными двухточечным способом, показало, что различий нет (не считая имевшихся в некоторых случаях различий на 0,0001 с).

Аналогичные расчеты были выполнены для тех же волн и тех же точек наблюдения (см. табл. 2), но в модели среды с наклонными границами. Граница 1 ($h_1 = 0,2$ км по нормали из источника) была наклонена на $\varphi = 1^\circ$, азимут $\psi = 10^\circ$ (от оси X_1); граница 2 ($h_2 = 1$ км) — на $\varphi = 20^\circ$, $\psi = 30^\circ$.

Предварительно с помощью двухточечного способа были найдены пределы изменения направлений волновых нормалей в источнике, а затем, исходя из полученных данных, были выполнены расчеты параметрическим способом. Полученные времена полностью совпали.

В случае наклонных границ для успешного счета параметрическим способом очень важно задать правильно пределы изменения направлений волновых нормалей в источнике. Так, для волны PS_1 на основе расчета двухточечным способом были заданы следующие значения углов α , β :

$$\alpha = -20^\circ \div 40^\circ \text{ (7 значений);}$$

$$\beta = 5^\circ \div 15^\circ \text{ (11 значений).}$$

Если учесть, что $\alpha_{\text{профиля}} = 45^\circ$ и в случае горизонтальных границ значения α для счета параметрическим способом задавались в пределах $30 \div 60^\circ$, то становится очевидным, что простой перебор всех возможных значений α и β привел бы к значительному увеличению объема расчетов (в 10 раз и более). Таким образом, для сред асимметричного строения целесообразно сочетать двухточечные и параметрические способы расчета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Василенко В. А., Зюзин М. В., Ковалков А. В. и др. Библиотека программ LIDA-2 по аппроксимации функций и цифровой фильтрации.— Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1983.— С. 78—103.
2. Гречка В. Ю., Оболенцева И. Р. Математическое моделирование отраженных волн в слоисто-однородных трансверсально-изотропных средах // Физика Земли.— 1987.— № 7.— С. 50—59.
3. Гречка В. Ю., Оболенцева И. Р. Расчет лучей в слоисто-однородных анизотропных средах с неоднозначными волновыми поверхностями.— Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1989.— 46 с. (Препринт, № 9).
4. Кацган Б. М., Ковтун А. А., Петрашень Г. И. Алгоритмы и методики вычисления полей объемных волн в произвольных анизотропных упругих средах // Распространение объемных волн и методы расчета волновых полей в анизотропных упругих средах.— Л.: Наука, Ленингр. отделение, 1984.— С. 108—248.
5. Оболенцева И. Р. Прямые трехмерные задачи геометрической сейсмологии.— Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1976.— 108 с.
6. Оболенцева И. Р. Решение прямых кинематических задач сейсмологии методами нелинейного программирования (слоисто-однородные среды) // Геология и геофизика.— 1980.— № 3.— С. 123—132.
7. Оболенцева И. Р. Численные способы решения прямых пространственных задач геометрической сейсмологии для многослойных сред с границами произвольной формы // Там же.— 1974.— № 9.— С. 113—128.
8. Оболенцева И. Р. Численные эксперименты по исследованию различных оптимизационных алгоритмов решения прямых кинематических задач сейсмологии для слоисто-однородных сред // Там же.— 1980.— № 5.— С. 113—124.
9. Оболенцева И. Р. Численный способ решения прямых пространственных задач геометрической сейсмологии для сложнопостроенных анизотропных сред // Экспериментальные и теоретические исследования отраженных волн.— Новосибирск: Наука, Сиб. отделение, 1975.— С. 134—142.
10. Оболенцева И. Р., Гречка В. Ю. Изучение трехмерных волновых полей отраженных PS - и SS -волн в трансверсально-изотропных средах (по результатам математического моделирования) // Геология и геофизика.— 1987.— № 8.— С. 107—116.
11. Оболенцева И. Р., Гречка В. Ю. Двухточечные алгоритмы расчета лучей в слоисто-однородных анизотропных средах // Там же.— 1988.— № 10.— С. 104—112.
12. Оболенцева И. Р., Гречка В. Ю. Лучевой метод в анизотропной среде (алгоритмы, программы).— Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1989.— 225 с.
13. Сейсморазведка: Справочник геофизика.— М. Недра, 1981.— 464 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Оболенцева И. Р. Сейсмическая гиротропия	6
Чичинин И. С. Использование спектральных представлений для решения задачи об излучении упругих волн источником, распределенным на поверхности трансверсально-изотропного полупространства	46
Немирович-Данченко М. М. Методика расчета P -, SV - и SH -волн в дальней зоне при вертикальном и горизонтальном воздействиях на поверхности трансверсально-изотропного полупространства	71
Чичинин И. С., Немирович-Данченко М. М. Решение задачи об излучении упругих волн источником, действующим на поверхности гиротропного трансверсально-изотропного полупространства	81
Безходарнов В. В., Макаренко Н. А. Геолого-геофизическая характеристика верхней части разреза геофизического полигона на юго-востоке Томской области	96
Резяпов Г. И. Экспериментальное изучение причин аномальной поляризации поперечных волн, распространяющихся в ЗМС по вертикали	104
Скавинский В. П., Юн Ен Дин. Об обменных отраженных PS - и SP -волнах при вибрационном X -, Y -, Z -возбуждении и трехкомпонентной (x , y , z) регистрации	111
Никольский А. А. Поляризационная обработка обменных отраженных PS -волн в анизотропных средах	118
Никольский А. А., Шитов А. В. Определение направлений векторов поляризации SV - и SH -волн в анизотропных средах по результатам площадных работ	129
Маслова С. И. Об определении упругих параметров анизотропии осадочных отложений по данным акустического каротажа (АК)	134
Дурынин А. Ф. Лучи и годографы рефрагированных P -, SV - и SH -волн в трансверсально-изотропных средах, эквивалентных тонкослойным	147
Гречка В. Ю. Расчет лучей в слоисто-однородных слабоанизотропных средах	166
Оболенцева И. Р., Гречка В. Ю. Сравнение различных алгоритмов расчета лучей в слоисто-однородных анизотропных средах	182

Научное издание

**ИССЛЕДОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ
СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН
В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ**

Редактор издательства Е. С. Иванова
Художественный редактор М. Ф. Глазырина
Художник Н. М. Мезенцев
Технический редактор Н. М. Бурлаченко
Корректор В. В. Борисова

ИБ № 42826

Сдано в набор 30.11.90. Подписано к печати 16.01.92. Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 1. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Усл. печ. л. 12. Усл. кр.-отт. 12,3. Уч.-изд. л. 13,2. Тираж 730 экз. Заказ № 511. Цена 4 р. 40 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука», Сибирское отделение. 630099 Новосибирск, ул. Советская, 18.
4-я типография издательства «Наука». 630077 Новосибирск, ул. Станиславского, 25.