

Л.А. Сердобольский

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН

Учебник

*Допущено УМО по высшему образованию
в области прикладной геологии в качестве учебника
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности 130102
«Технология геологической разведки»
(специализация «Геофизические методы поисков и разведки МПИ»,
«Геофизические исследования скважин», «Сейсморазведка»)
направления подготовки
дипломированных специалистов 130100
«Прикладная геология»*



**ИЗДАТЕЛЬСКИЙ
ЦЕНТР**

**РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина
2012**

L.A. Serdobolsky

**SEISMIC WAVE
PROPAGATION**

A Textbook



**ИЗДАТЕЛЬСКИЙ
ЦЕНТР**

**РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина
2012**

УДК 550.83

ББК 26.21

С32

Рецензенты:

кандидат техн. наук *В. Ю. Матусевич* (ОАО «ТНК-ВР»),

кандидат техн. наук *Г. А. Карпетов* (РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина)

Сердобольский Л.А.

С32 **Распространение сейсмических волн. — М.: РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина, 2012 — 256с.: ил.**

ISBN 978-5-91961-053-3

Книга представляет собой учебник по курсу «Теория упругости», она также может быть полезна при изучении курсов «Упругие волны в сплошных средах», «Распространение волн». В необходимом объеме рассматривается базис теории сейсмических волн — теория упругости (теории напряжений, деформаций, уравнения теории упругости и волновое уравнение). Основное внимание уделяется изучению процессов распространения волн в граничащих средах и явлений на границах раздела сред. Выводятся и решаются уравнения Цёппритца, истолковываются получаемые решения. Исследуется поведение объёмных (продольных и поперечных) и поверхностных (Рэлея, Лява) волн.

Для студентов-геофизиков, обучающихся по специальности «Технология геологической разведки», специализации «Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых», «Геофизические исследования скважин» и «Сейсморазведка».

Данное издание является собственностью РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина и его репродуцирование (воспроизведение) любыми способами без согласия университета запрещается.

ISBN 978-5-91961-053-3

©Сердобольский Л.А., наследники, 2010

©Российский государственный университет нефти и газа имени И.М. Губкина, 2012

©Голубев В.С., оформление серии, 2007

Предисловие

В основу настоящего издания положены лекции по теории упругих волн, читавшиеся на протяжении многих лет студентам-геофизикам доцентом кафедры разведочной геофизики РГУ нефти и газа имени И.М. Губкина Львом Александровичем Сердобольским, и соответствующие «Конспекты лекций...» по отдельным частям курса. Вместе с тем, в отличие от конспектов, изложение материала существенно расширено, добавлены главы, касающиеся отражения волн от свободной поверхности, распространения Рэлеевских волн и волн Лява. Впервые в учебной литературе даётся единое представление обобщённых уравнений Цёппритца, описывающих поведение плоских гармонических волн на границах раздела слоёв, и приводятся алгоритмы и программные коды их решения. Описание распространения волн производится на основе спектральной теории.

Книга изобилует большим количеством примеров, характерных для практической сейсморазведки, а также содержит значительное число детально выверенных иллюстраций, способствующих лучшему усвоению материала.

Данное издание подготовлено после смерти автора.*

А.В. Белоусов, Г.А. Карапетов
Апрель 2011

* Набор и вёрстка текста выполнены А.В. Белоусовым в системе \LaTeX 2\epsilon с использованием макроязыка \LaTeX для набора математических формул. Редактирование, сверка формул проведены Г.А. Карапетовым и А.В. Белоусовым. Программный код решения уравнений Цёппритца реализован совместно Л.А. Сердобольским и Г.А. Карапетовым.

Введение

Сейсмическая разведка является ведущим методом геофизических исследований земной коры с целью поиска и изучения месторождений нефти и газа, а также и других полезных ископаемых. Метод основан на возбуждении и регистрации упругих сейсмических волн, отражённых и преломлённых на геологических границах раздела сред с различными физическими свойствами. Среды, в которых распространяются волны, оказывают на них фильтрующее воздействие, изменяя форму волновых импульсов и их спектральный, частотный состав. Время пробега отражённых и преломлённых волн даёт информацию о глубинах залегания границ, на которых они возникают, а также позволяет определить скорости распространения волн. Изменения фазы сейсмических импульсов и их спектральный состав позволяют судить об изменениях физических свойств пород, залегающих между границами. Таким образом, сейсмическая разведка решает структурные задачи и создаёт основу для прогнозирования геологического разреза.

Среда, в которой распространяется сейсмическая волна, является весьма сложным физическим объектом. Прежде всего, геологическая среда существенно неоднородна, и размеры неоднородностей меняются в ней в огромных масштабах: от планетарных до атомарных. Однако сейсмические волны имеют длины волн, измеряемые десятками и сотнями метров. Ясно, что неоднородности меньших размеров мало влияют или совсем не влияют на волновые процессы. Неоднородности с размерами, сравнимыми с длиной волны или большими, чем длина волны, и являются предметом исследования сейсмической разведки. Неоднородность среды — именно то её свойство, которое определяет эффективность любой геологической разведки. В однородной среде разведывать нечего.

Упругие свойства горных пород различны для различных направлений их измерения. Говорят, что среда *анизотропна* («а» — отрица-

ние, «изо» — равный, «тропос» — свойство: неравносвойственна). Кристаллы обладают специфической кристаллографической анизотропией. Однако в кристаллических породах, состоящих из множества кристаллов, направления анизотропии хаотично распределены в пространстве, и в целом эти породы изотропны. В осадочных породах наблюдается слабая анизотропия, возникающая в процессе осадконакопления: упругие свойства этих пород могут различаться при измерениях вдоль и вкrest их простирания.

Третья отличительная особенность геологической среды — *неидеальная упругость*. Упругие колебания в среде уменьшаются по амплитуде, затухают под действием сил внутреннего трения, сопутствующих каждому относительному смещению частиц среды. Силы трения существенно зависят от их характера: различают сухое и жидкое трение (со смазкой). В горных породах это определяется характером порового пространства — пустое оно или заполненное газом, водой или нефтью. Очевидно, что в нефтегазовой сейсмической разведке эти характеристики пород исключительно важны. Заметим, однако, что влияние неидеальной упругости на характер волновых процессов очень слабо. Обнаружение таких слабых аномалий требует специальных приемов обработки сейсмической информации.

Наконец, отметим, что породы геологического разреза пространственно структурированы, состоят из атомов, молекул, частиц среды и т.д. и не являются сплошным телом.

Таким образом, геологическая среда неоднородная, анизотропная, неидеально упругая и несплошная. Ясно, что изучать упругие процессы в столь сложной среде весьма затруднительно. Поэтому изучение целесообразно разбить на этапы, и на первом из них сознательно отстраниться, абстрагироваться от сложностей, создав упрощенную идеализированную модель среды. В качестве абстракций в теории упругости выдвигаются четыре свойства идеально упругой среды: однородность, изотропность, идеальная упругость, сплошность. Последнее свойство предполагает, что все физические параметры среды распределены в ней непрерывно и не привязаны к каким-нибудь объектам. Упругие свойства среды и процессы в ней являются функциями координат пространства.

На последующих этапах изучения эту модель можно усложнять, шаг за шагом приближая к реальной геологической среде. Такой способ исследования позволит на каждом шаге изучить те особенности волновых процессов, которые связаны именно с данным усложнением.

Используемые переменные

Переменная	Значение
α	— (I) малый угол поворота (гл. 1 - 4); (II) угол падения волны (гл. 7 и далее)
β	— малый угол поворота
Γ	— вектор-потенциал внешней силы
γ	— акустическая жёсткость
δ	— дельта-функция Дирака
ϵ	— потенциальная энергия
ε	— малая величина
Θ	— дилатация, или относительное объёмное расширение
θ	— зенитный угол (в сферической системе координат), т.е. угол между осью Oz и отрезком, соединяющим начало координат с рассматриваемой точкой
κ	— пространственная частота — величина, обратная длине волны
Λ	— длина волны
λ	— константа Ламэ
μ	— константа Ламэ (модуль сдвига)
ν	— круговое волновое число
ρ	— плотность породы
σ	— коэффициент Пуассона
τ	— временная задержка
Υ	— скалярный потенциал внешней силы
Φ	— скалярный потенциал упругих смещений

продолжение на следующей странице

 продолжение

Переменная	Значение
φ	– азимутальный угол (в сферической системе координат), т.е. угол между осью Ox и проекцией отрезка, соединяющего начало координат с рассматриваемой точкой, на плоскость xOy
Ψ	– вектор-потенциал упругих смещений
ω	– (I) угол поворота как компонента малой деформации (гл. 1 - 4); (II) круговая частота (гл.5 и далее)
A	– коэффициент отражения
B	– коэффициент прохождения
E	– модуль Юнга
e	– (I) обозначение малой деформации; (II) экспонента
F	– сила
f	– (I) общее обозначение для функции (гл. 1 - 4); (II) частота (гл. 5 и далее)
r	– радиус-вектор
\vec{i}	– единичный вектор направления Ox
i	– переменная - счётчик в формулах
\vec{j}	– единичный вектор направления Oy
j	– переменная - счётчик в формулах
\vec{k}	– единичный вектор направления Oz
K	– спектральная характеристика
k	– масштабный множитель
l	– (I) направляющий косинус оси Ox ; (II) в гл. 3.1 длина
m	– направляющий косинус оси Oy
n	– направляющий косинус оси Oz
\vec{N}	– направление нормали
P	– (I) напряжение; (II) в индексном начертании - обозначение продольной волны

 продолжение на следующей странице

продолжение

Переменная	Значение
p	– в индексном начертании – обозначение главной («principal») системы координат
Q	– обобщённый аргумент волнового уравнения
R	– в индексном начертании – обозначение волны Рэлея
S	– (I) площадь поверхности; (II) в индексном начертании – обозначение поперечной волны;
t	– время
U	– относительное смещение
V	– скорость распространения упругой волны
v	– скорость распространения упругих смещений
W	– угловая скорость
w	– объём
x	– декартова координата (абсцисса)
y	– декартова координата (ордината)
z	– глубина

Глава 1. Основы теории деформаций

Теория деформаций изучает кинематику упругих процессов и описывает упругие смещения и вызванные ими изменения формы и размеров элементов среды, возникающие под действием внешних сил.

1.1. Понятие о деформации

Представим себе эллипсоид как часть упругой среды, и в нём два тонких прямолинейных стержня AB и CD (рис. 1.1). Пусть под действием внешних сил эллипсоид изменил свою форму и стержни где-то растянулись, где-то сжались, где-то изогнулись. При произвольном распределении внешних сил по поверхности эллипсоида трудно даже представить себе многообразие и многочисленность трансформаций таких отрезков прямых конечной длины.

Но если от конечных отрезков перейти к бесконечно малым их частям (Aa , Bb , Cc , Dd), то число возможных изменений малых отрезков резко сократится. Такие дифференциально малые отрезки, не меняя своей прямолинейности, могут лишь:

- а) удлиниться (Aa) или сжаться (Cc);
- б) повернуться (Bb) влево или вправо;
- в) сделать и то и другое (Dd).

Поэтому условимся, что будем рассматривать именно такие бесконечно малые отрезки, которые как были прямолинейными до деформации, так и остались после неё такими же прямолинейными. Так как два отрезка прямых определяют плоскость, то и бесконечно малая часть плоскости после деформации остается плоской. Более того, любая поверхность второго порядка, имеющая дифференциально малые размеры, в результате деформации не меняет свой порядок, лишь трансфор-

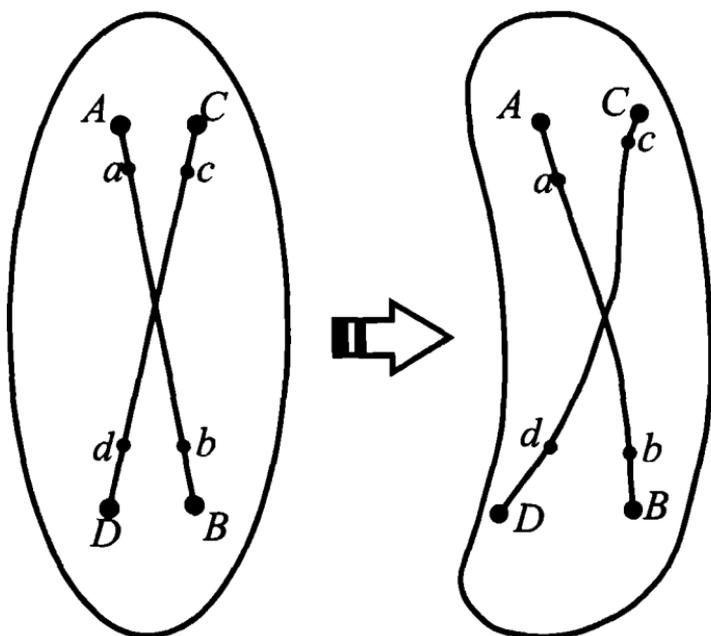


Рис. 1.1. Эллипсоид с закреплёнными в нём тонкими прямолинейными стержнями до (слева) и после (справа) деформации

мируясь из одного вида поверхности в другой (сфера в эллипсоид, например).

Подчеркнём ещё раз, что речь идет о дифференциально малых окрестностях какой-либо точки. При конечном переходе по объёму тела деформации изменяются, являясь функциями координат пространства. Постоянство деформации в пределах дифференциально малого объёма позволяет рассматривать её как однородную деформацию.

Для изучения деформации бессмысленно следить за перемещениями какой-либо одной точки. Ведь её смещения могут быть вызваны не только деформациями, но и общим перемещением всего тела без деформации. Поэтому необходимо рассматривать как минимум две дифференциально близкие точки и следить за изменениями их взаимного расположения.

Выберем две дифференциально близкие точки среды: $M\{x, y, z\}$ и $N\{x+dx, y+dy, z+dz\}$. Здесь dx, dy, dz — бесконечно малые величины 1-го порядка малости. Пусть под действием произвольных внешних сил каждая точка получила свой вектор смещения: $M - \vec{U}_M(x, y, z)$, а точка $N - \vec{U}_N(x+dx, y+dy, z+dz)$. Проекции векторов на оси координат обозначим добавлением соответствующих координатных индексов:

$$\begin{aligned} U_{Mx} &= U_x(x, y, z); & U_{Nx} &= U_x(x+dx, y+dy, z+dz); \\ U_{My} &= U_y(x, y, z); & U_{Ny} &= U_y(x+dx, y+dy, z+dz); \\ U_{Mz} &= U_z(x, y, z); & U_{Nz} &= U_z(x+dx, y+dy, z+dz), \end{aligned}$$

(как обычно, $\vec{U} = U_x \cdot \vec{i} + U_y \cdot \vec{j} + U_z \cdot \vec{k}$).

Поскольку точки M и N дифференциально близки, можно вектор смещения точки N (\vec{U}_N) разложить в ряд Тейлора, выразив его через «опорный» вектор \vec{U}_M .

Для функции одной переменной ряд Тейлора имеет вид:

$$f(x+dx) = f(x) + \frac{1}{1!} \frac{df(x)}{dx} dx + \frac{1}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} dx^2 + \frac{1}{3!} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} dx^3 + \dots$$

В случае разложения функции трёх переменных первых производных должно быть 3, вторых производных — 6, третьих производных — 10 и т.д. Однако у каждого слагаемого ряда Тейлора есть множитель типа $\frac{1}{n!} dx^n$.

Если dx — бесконечно малая величина первого порядка малости, то dx^2 — второго порядка, а dx^n — n -го порядка малости. Пренебрегая малыми величинами всех порядков малости, кроме первого, можно вектор смещения точки N выразить с помощью вектора \vec{U}_M :

$$\vec{U}_N = \vec{U}_M + \frac{\partial \vec{U}_M}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{U}_M}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{U}_M}{\partial z} dz.$$

Вычислим разность векторов \vec{U}_N и \vec{U}_M :

$$\Delta \vec{U} = \vec{U}_N - \vec{U}_M = \frac{\partial \vec{U}_M}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{U}_M}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{U}_M}{\partial z} dz.$$

Опуская в правой части этого выражения индекс M , в проекциях на оси координат запишем:

$$\Delta U_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} dx + \frac{\partial U_x}{\partial y} dy + \frac{\partial U_x}{\partial z} dz,$$

$$\Delta U_y = \frac{\partial U_y}{\partial x} dx + \frac{\partial U_y}{\partial y} dy + \frac{\partial U_y}{\partial z} dz,$$

$$\Delta U_z = \frac{\partial U_z}{\partial x} dx + \frac{\partial U_z}{\partial y} dy + \frac{\partial U_z}{\partial z} dz.$$

Как в векторной форме, так и в скалярной записи вектор относительного смещения $\Delta \vec{U}$ является линейной функцией относительных координат двух близких точек dx , dy , dz . Такого рода малая деформация называется *линейной*. Множителями перед относительными координатами выступают пространственные производные компонент вектора смещения, физический смысл которых предстоит выяснить.

1.2. Компоненты малой деформации

Упростим исследование, предположив, что как до деформации, так и после неё точки M и N были и остались в плоскости xOy . Пусть также до деформации отрезок MN был параллелен оси Ox . Поэтому в уравнениях связи относительных смещений и относительных координат лишь dx отличен от 0, а dy и dz равны 0 (рис. 1.2). Тогда проекции вектора относительного смещения можно описать так:

$$\Delta U_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} dx, \quad \Delta U_y = \frac{\partial U_y}{\partial x} dx, \quad \Delta U_z = \frac{\partial U_z}{\partial x} dx.$$

Вычислим *относительное удлинение* отрезка MN вдоль оси x , как отношение разности проекций отрезка $M'N'$ (после деформации) и отрезка MN (до неё) к первоначальной длине этой проекции, обозначив искомое относительное удлинение вдоль оси Ox как e_{xx} :

$$e_{xx} = \frac{(M'N')_x - (MN)_x}{(MN)_x} = \frac{dx + \Delta U_x - dx}{dx} = \frac{\Delta U_x}{dx} \simeq \frac{\partial U_x}{\partial x}.$$

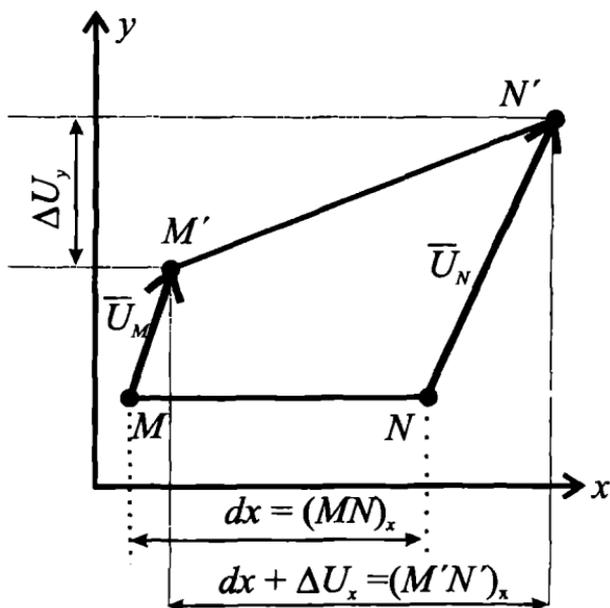


Рис. 1.2. Отрезок до (MN) и после $(M'N')$ деформации

Значит, «одноимённые» производные компонент вектора относительного смещения являются относительными удлинениями вдоль координатных осей Ox , Oy и Oz :

$$e_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial U_y}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z}.$$

Два последних определения записаны по аналогии.

Но, как показано на рис. 1.2, деформация не ограничена удлинением отрезка вдоль оси Ox . Одновременно отрезок MN повернулся вокруг точки M (вокруг оси, параллельной Oz — перпендикуляра к чертежу) на малый угол α . В силу малости угла его можно оценить значением тангенса*:

* Угол считается бесконечно малой величиной, следовательно, здесь применима таблица эквивалентных бесконечно малых: $\alpha \approx \sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$ и т.п. Функция тангенса выбирается как наиболее удобная из всех эквивалентов, так как катеты рассматриваемого прямоугольного треугольника полностью определены проекциями векторов смещений на координатные оси. (Прим. ред.)

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{(M'N')_y}{(M'N')_x} = \frac{\Delta U_y}{dx + \Delta U_x} = \frac{\frac{\partial U_y}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial U_x}{\partial x} dx}.$$

Вспомним, что точки M и N бесконечно близки друг к другу, и поэтому dx — бесконечно малая величина первого порядка малости. Того же порядка малости и относительное удлинение вдоль Ox : $e_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x}$. Поэтому в знаменателе дроби, определяющей угол α , второе слагаемое, представленное произведением двух бесконечно малых величин, является бесконечно малой величиной более высокого (второго) порядка малости, чем первое слагаемое dx . Пренебрегая этим вторым слагаемым, получим определение угла поворота отрезка MN :

$$\alpha = \frac{\partial U_y}{\partial x}.$$

Однако отрезок MN может повернуться вокруг оси Oz на угол α не только в результате деформации, но и вследствие общего малого вращения плоскости xOy вокруг той же оси. Чтобы различить эти два вида кинематической реакции среды на внешнее воздействие, одного отрезка MN мало. Надо следить за поведением двух первоначально перпендикулярных друг другу отрезков (MN и MP , рис. 1.3). Отрезок MP параллелен оси Oy : $(MP)_y = dy$, а его проекции на две другие оси (Ox и Oz) равны 0: $dx = dz = 0$. Поэтому для него относительные смещения вдоль координатных осей задаются вторым столбцом общего определения:

$$\Delta U_x = \frac{\partial U_x}{\partial y} dy, \quad \Delta U_y = \frac{\partial U_y}{\partial y} dy, \quad \Delta U_z = \frac{\partial U_z}{\partial y} dy.$$

Значение ΔU_y определяется множителем $\frac{\partial U_y}{\partial y}$, являющимся относительным удлинением вдоль оси Oy (e_{yy}). По аналогии с определением угла α , определим малый угол поворота отрезка MP вокруг той же оси Oz :

$$\beta = \frac{\Delta U_x}{dy} \simeq \frac{\partial U_x}{\partial y}.$$

Мерой скошения первоначально прямого угла PMN является полусумма углов α и β , называемая *сдвиговой деформацией*, или просто сдвигом в плоскости xOy , и обозначаемая e_{xy} :

$$e_{xy} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right).$$

Запишем по аналогии определения сдвигов в плоскости yOz (e_{yz}) и в плоскости zOx (e_{zx}):

$$e_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right); \quad e_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_z}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial z} \right).$$

Чтобы определить, существует ли вращательное движение вокруг оси Oz , будем следить за поведением 45-градусной диагонали угла PMN . Если повороты сторон прямого угла направлены навстречу и углы α и β равны, то диагональ MD (рис. 1.4) не изменит своего

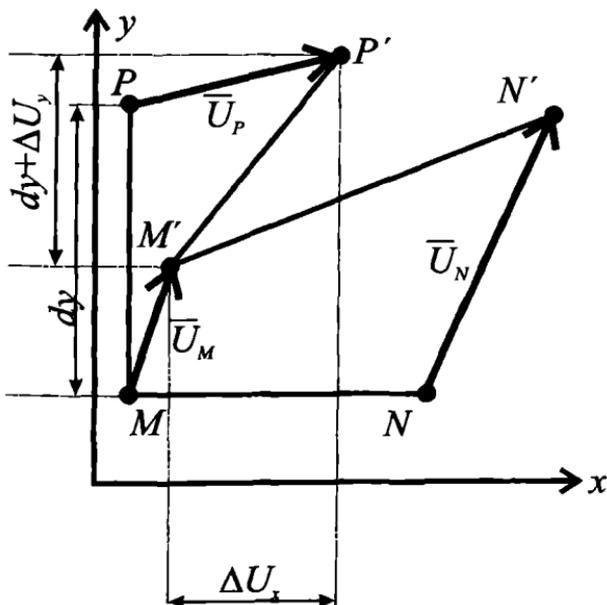


Рис. 1.3. Взаимно перпендикулярные отрезки MN и MP до и после деформации

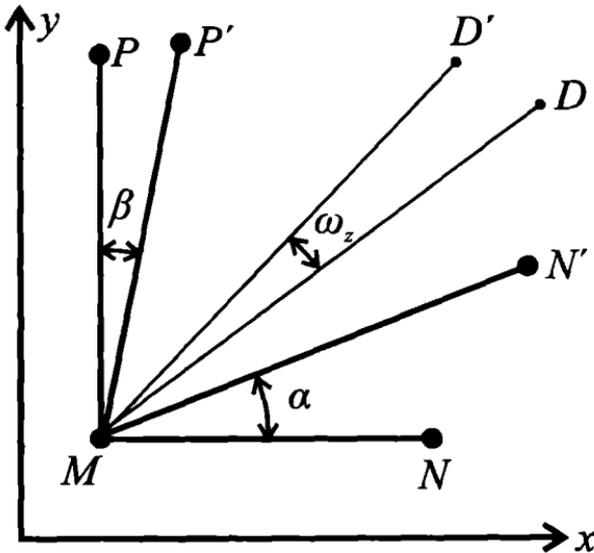


Рис. 1.4. Определение поворота по изменению положения диагонали изначально прямого угла

положения после деформации. Когда хотя бы одна прямая в плоскости xOy при деформации не испытывает вращательного движения, то и вся малая окрестность данной точки O не вращается вокруг оси Oz . Значит, равенство углов встречного поворота сторон первоначально прямого угла является условием отсутствия вращения в плоскости xOy . Различие углов поворота сторон прямого угла (α и β) свидетельствует о присутствии вращения.

Определим угол поворота диагонали (DMD'), обозначив его ω_z . Пусть $\alpha > \beta$ (рис. 1.4). В результате деформации угол $PMN = \pi/2$ стал острым: $\angle P'MN' = \pi/2 - \alpha - \beta$. Новая диагональ этого угла отклоняется от вертикали MP на угол $PMD' = \beta + \frac{1}{2}(\angle P'MN')$, то есть $\angle PMD' = \pi/4 - \alpha/2 + \beta/2$. Тогда угол ω_z поворота диагонали определится как разность углов $PMD = \pi/4$ и PMD' :

$$\omega_z = \frac{\pi}{4} - \angle PMD' = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Вспомянув определения углов $\alpha = \frac{\partial U_y}{\partial x}$ и $\beta = \frac{\partial U_x}{\partial y}$, запишем для ω_z :

$$\omega_z = \frac{1}{2}(\alpha - \beta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right).$$

Для углов вращения вокруг других координатных осей запишем выражения по аналогии:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right); \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right).$$

Заметим формальное сходство определений сдвигов и малых вращений: описания сдвига в какой-либо плоскости и вращений вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости, различаются лишь знаком второго члена в скобках. Кроме того, можно заметить определенную упорядоченность и соответствие индексов в левой части определений и переменных, по которым выполняется дифференцирование правой части. Для сдвиговых деформаций существует полное соответствие – для e_{yz} выполняется, например, дифференцирование по y и z . Для компонент вектора угла поворота $\vec{\omega} = \omega_x \cdot \vec{i} + \omega_y \cdot \vec{j} + \omega_z \cdot \vec{k}$ действует правило круговой подстановки переменных x, y, z . Для ω_x используются производные по y и z , для ω_y – по z и x , для ω_z – по x и y .

Как для сдвигов, так и для поворотов выбор дифференцируемых компонент смещения определяется переменными, по которым выполняется дифференцирование, но с перестановкой. Например, в определениях e_{yz} и ω_x используются производные по y от z -компонент смещений и по z от y -компонент смещений: $\frac{\partial U_x}{\partial y}$ и $\frac{\partial U_y}{\partial z}$.

Составим общую таблицу определения компонент малой деформации (Табл.1.1).

Таблица 1.1. Компоненты малой деформации

Удлинения	Сдвиги	Повороты
$e_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x}$	$e_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right)$	$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right)$
$e_{yy} = \frac{\partial U_y}{\partial y}$	$e_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right)$	$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right)$
$e_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z}$	$e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right)$	$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right)$

1.3. Разложение малой деформации на удлинения, сдвиги и повороты

Используя определения компонент малой деформации, трансформируем выражения для компонент вектора относительного смещения. Проведём это преобразование на примере x -компоненты:

$$\Delta U_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} dx + \frac{\partial U_x}{\partial y} dy + \frac{\partial U_x}{\partial z} dz.$$

Заметим, что в правой части присутствует относительное удлинение вдоль Ox : $e_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x}$, а также производные, входящие в определения сдвига e_{xy} и поворота $\omega_z \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} \right)$, сдвига e_{zx} и поворота $\omega_y \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} \right)$. Для первой пары не хватает $\frac{\partial U_y}{\partial x}$, для второй — $\frac{\partial U_z}{\partial x}$, чтобы иметь полные определения сдвигов и поворотов. Поэтому, не меняя равенство, добавим и вычтем $\frac{1}{2} \frac{\partial U_y}{\partial x} dy$ и $\frac{1}{2} \frac{\partial U_z}{\partial x} dz$ к правой части:

$$\Delta U_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} dx + \frac{\partial U_x}{\partial y} dy + \frac{\partial U_x}{\partial z} dz \pm \frac{1}{2} \frac{\partial U_y}{\partial x} dy \pm \frac{1}{2} \frac{\partial U_z}{\partial x} dz.$$

Разделив второе и третье слагаемые на две «половины» каждое, запишем:

$$\begin{aligned} \Delta U_x = & \frac{\partial U_x}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) dy + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) dz + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) dz - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) dy. \end{aligned}$$

Используя определения e_{xx} , e_{xy} , $e_{zx} (= e_{xz})$, ω_y и ω_z , получим окончательно:

$$\Delta U_x = e_{xx} \cdot dx + e_{xy} \cdot dy + e_{xz} \cdot dz + \omega_y \cdot dz - \omega_z \cdot dy.$$

По аналогии для двух других компонент вектора относительного смещения запишем:

$$\Delta U_y = e_{xy} \cdot dx + e_{yy} \cdot dy + e_{zy} \cdot dz + \omega_z \cdot dx - \omega_x \cdot dz,$$

$$\Delta U_z = e_{xz} \cdot dx + e_{yz} \cdot dy + e_{zz} \cdot dz + \omega_x \cdot dy - \omega_y \cdot dx.$$

Таким образом, в определении компонент относительного смещения как функций относительных координат присутствуют удлинения e_{xx} , e_{yy} , e_{zz} , сдвиги e_{xy} , e_{yz} , e_{zx} и повороты ω_x , ω_y , ω_z — и только они. Следовательно, малая деформация полностью описывается этими тремя видами деформации.

В заключение отметим, что 12-кратное повторение знаков относительности смещения (Δ) и координат (d) несколько утомительно и, в общем, необязательно. Если твердо условиться, что, говоря о смещениях, мы всегда имеем в виду *относительные смещения*, и, говоря о координатах, всегда имеем в виду *относительные координаты*, то эти внешние признаки относительности (Δ и d) можно опустить и впредь записывать определения более кратко:

$$U_x = e_{xx} \cdot x + e_{xy} \cdot y + e_{xz} \cdot z + \omega_y \cdot z - \omega_z \cdot y,$$

$$U_y = e_{xy} \cdot x + e_{yy} \cdot y + e_{zy} \cdot z + \omega_z \cdot x - \omega_x \cdot z,$$

$$U_z = e_{xz} \cdot x + e_{yz} \cdot y + e_{zz} \cdot z + \omega_x \cdot y - \omega_y \cdot x.$$

1.4. Выражение вектора упругого смещения через скалярный и векторный потенциалы

Обратим внимание на очевидное разделение правых частей определений компонент вектора относительного смещения на группу слагаемых, в которую входят удлинения и сдвиги, и группу, содержащую только повороты. За этим стоит фундаментальное положение теории поля, определяемое как *теорема разложения Гельмгольца*. В соответствии с ней, любое векторное поле $\vec{U}(x, y, z)$ может быть представлено в виде суммы безвихревого поля $\vec{U}_P(x, y, z)$ (P — первая буква слова «primary» — первичный, первый) и соленоидального поля $\vec{U}_S(x, y, z)$ (S — первая буква слова «secondary» — вторичный, второй):

$$\vec{U}(x, y, z) = \vec{U}_P(x, y, z) + \vec{U}_S(x, y, z),$$

если этому не препятствует неопределённость дивергенции ($\text{div} \vec{U}$) и ротации ($\text{rot} \vec{U}$).

Выпишем определения компонент вектора смещения безвихревого поля:

$$U_{Px} = e_{xx} \cdot x + e_{xy} \cdot y + e_{xz} \cdot z,$$

$$U_{Py} = e_{xy} \cdot x + e_{yy} \cdot y + e_{zy} \cdot z,$$

$$U_{Pz} = e_{xz} \cdot x + e_{yz} \cdot y + e_{zz} \cdot z.$$

Для этого поля существует скалярная функция координат $\Phi(x, y, z)$, называемая *скалярным потенциалом* упругих смещений:

$$\Phi = \frac{1}{2} (e_{xx}x^2 + e_{yy}y^2 + e_{zz}z^2 + 2e_{xy}zy + 2e_{zx}zx + 2e_{xy}xy).$$

Определим пространственные производные функции Φ , учитывая, что $e_{xy} = e_{yx}$, $e_{xz} = e_{zx}$ и $e_{yz} = e_{zy}$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = e_{xx} \cdot x + e_{xy} \cdot y + e_{xz} \cdot z = U_{Px},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = e_{xy} \cdot x + e_{yy} \cdot y + e_{zy} \cdot z = U_{Py},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = e_{xz} \cdot x + e_{yz} \cdot y + e_{zz} \cdot z = U_{Pz}.$$

Следовательно,

$$\vec{U}_P = U_{Px} \cdot \vec{i} + U_{Py} \cdot \vec{j} + U_{Pz} \cdot \vec{k} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \vec{k}.$$

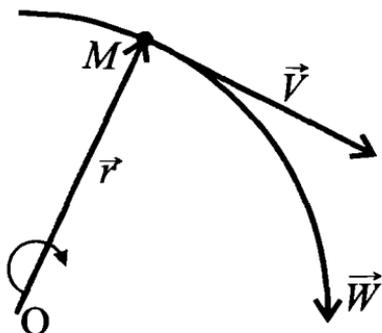
Мы определили первую часть представления произвольно ориентированного вектора относительных смещений: $\vec{U}_P = \text{grad } \Phi$.

Со скалярным потенциалом Φ связаны удлинения, сдвиговые деформации и, как будет показано позже, продольные упругие смещения, направление которых совпадает с направлением распространения упругих колебаний. Удлинения и сдвиги образуют упорядоченную матрицу размера 3×3 :

$$\begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix},$$

называемую тензором чистой деформации.

Рис. 1.5. Описание вращательного движения



Перейдём к анализу второй половины разложения Гельмгольца — вектора \vec{U}_S .

Прежде всего, определим математическое описание вращательных движений. Пусть точка M вращается относительно точки O (рис. 1.5). Как всякое движение, вращение характеризуется линейной скоростью \vec{v} (м/с), а как собственно вращение, ещё и угловой скоростью \vec{W} (рад/с). Эти скорости связаны между собой формулой Эйлера $\vec{v} = \vec{W} \times \vec{r}$, где \vec{r} — радиус-вектор точки M .

Умножив равенство на интервал времени dt , получим в левой части вектор вращательного смещения $\vec{U}_S = \vec{v} \cdot dt$, а в правой части — вектор угла поворота $\vec{\omega} = \vec{W} \cdot dt$. Тогда получим соотношение:

$$\vec{U}_S = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Пусть $\vec{\omega} = \omega_x \cdot \vec{i} + \omega_y \cdot \vec{j} + \omega_z \cdot \vec{k}$. Векторное произведение раскрывается в координатной форме с помощью определителя:

$$\begin{aligned} \vec{U}_S = \vec{\omega} \times \vec{r} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \\ &= (\omega_z y - \omega_y z) \vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z) \vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x) \vec{k}. \end{aligned}$$

Сравнивая это определение со второй половиной правых частей представления вектора относительного смещения, убеждаемся в том, что \vec{U}_S — действительно вектор вращательного движения.

Для этого вида смещений существует векторная функция координат:

$$\begin{aligned}\vec{\Psi}(x, y, z) &= \Psi_x \cdot \vec{i} + \Psi_y \cdot \vec{j} + \Psi_z \cdot \vec{k} = \\ &= x \cdot (\omega_y y + \omega_z z) \vec{i} + y \cdot (\omega_z z + \omega_x x) \vec{j} + z \cdot (\omega_x x + \omega_y y) \vec{k},\end{aligned}$$

называемая *вектор-потенциалом* упругих смещений.

Определим ротацию этого вектора:

$$\begin{aligned}\text{rot } \vec{\Psi} = \vec{\nabla} \times \vec{\Psi} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \Psi_x & \Psi_y & \Psi_z \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial \Psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} \right) \vec{k}.\end{aligned}$$

Найдём проекции вектора $\text{rot } \vec{\Psi}$ на оси координат:

$$(\text{rot } \vec{\Psi})_x = \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} = z\omega_y - y\omega_z = U_{Sx},$$

$$(\text{rot } \vec{\Psi})_y = \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} = x\omega_z - z\omega_x = U_{Sy},$$

$$(\text{rot } \vec{\Psi})_z = \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} = y\omega_x - x\omega_y = U_{Sz}.$$

Таким образом, $\vec{U}_S = \text{rot } \vec{\Psi}$ и можно описать произвольно ориентированный вектор относительного смещения \vec{U} суммой

$$\vec{U} = \vec{U}_P + \vec{U}_S = \text{grad } \Phi + \text{rot } \vec{\Psi}.$$

При этом $\text{rot } \vec{U}_P = \text{rot } \text{grad } \Phi = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi = 0$, то есть в поле $\vec{U}_P(x, y, z)$ отсутствует ротация. Такое поле называется *безвихревым*. Для компоненты \vec{U}_S имеем $\text{div } \vec{U}_S = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \Psi) = 0$. Как будет показано позже, дивергенция вектора \vec{U} является мерой относительного объёмного расширения. Поэтому поле $\vec{U}_S(x, y, z)$ называют эквиволюмиальным полем вращения («экви» — равный, «волюм» — объём).

Полученное представление векторного поля упругих смещений в виде суммы безвихревого поля смещения $\vec{U}_P = \text{grad } \Phi$ ($\text{rot } \vec{U}_P = 0$) и эквиволюмиального поля упругих вращений $\vec{U}_S = \text{rot } \Psi$

($\operatorname{div} \vec{U}_S = 0$) является краткой записью теоремы разложения Гельмгольца: всякое однозначное, непрерывное, стремящееся к нулю на бесконечности векторное поле $\vec{U}(x, y, z)$ может быть единственным образом представлено в виде суммы градиента скалярного потенциала $\Phi(x, y, z)$ и ротора вектор-потенциала $\Psi(x, y, z)$.

В сейсморазведке векторное поле $\vec{U}_P(x, y, z)$ соответствует полю продольных волн, а поле $\vec{U}_S(x, y, z)$ есть поле поперечных волн. Напомним еще раз, что с полем \vec{U}_P связаны удлинения и сдвиги, называемые чистой деформацией. Тогда поле \vec{U}_S можно назвать полем чистых вращений.

1.5. Преобразование компонент тензора чистой деформации к новой системе координат

Вопрос о связи компонент деформации $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{xz}, e_{yz}$, определённых в одной системе координат (x, y, z) , и компонент той же деформации в другой системе координат (x', y', z') — $e_{x'x'}, e_{y'y'}, e_{z'z'}$ и т.д., на первый взгляд, кажется служебным. Однако в математической теории тензоров тип объекта — скаляр, вектор, собственно тензор — определяется именно тем, каким законом связаны компоненты этих объектов в разных системах координат. Например, скаляр определяется так: если объект в системе координат (x, y, z) определён функцией $a(x, y, z)$, а в другой системе (x', y', z') — функцией $a'(x', y', z')$, и при этом в каждой точке пространства эти определения связаны между собой соотношением $a = a'$, то этот объект называется скаляром, или *тензором ранга 0*. Схоже определение вектора: если объект \vec{U}_S в системе (x, y, z) задан тремя упорядоченными функциями координат U_x, U_y, U_z , а в другой системе координат (x', y', z') — другой упорядоченной тройкой функций $U_{x'}, U_{y'}, U_{z'}$, и эти компоненты связаны соотношениями

$$U_{x'} = U_x \cdot \cos(\widehat{x, x'}) + U_y \cdot \cos(\widehat{y, x'}) + U_z \cdot \cos(\widehat{z, x'}),$$

$$U_{y'} = U_x \cdot \cos(\widehat{x, y'}) + U_y \cdot \cos(\widehat{y, y'}) + U_z \cdot \cos(\widehat{z, y'}),$$

$$U_{z'} = U_x \cdot \cos(\widehat{x, z'}) + U_y \cdot \cos(\widehat{y, z'}) + U_z \cdot \cos(\widehat{z, z'}),$$

то этот объект называется вектором, или *тензором ранга 1*. Множителем в этих определениях являются направляющие косинусы координатных осей x' , y' , z' относительно другой системы координат. Из них можно собрать определитель 3-го порядка, обладающий определёнными и важными для дальнейших выводов свойствами. Для краткости обозначим направляющие косинусы оси Ox' как l_1 , m_1 , n_1 ; косинусы оси Oy' — как l_2 , m_2 , n_2 ; косинусы оси Oz' — как l_3 , m_3 , n_3 . Уточним обозначения примерами:

$$l_1 = \cos(\widehat{x, x'}); \quad m_3 = \cos(\widehat{y, z'}); \quad n_2 = \cos(\widehat{z, y'}).$$

Таблица направляющих косинусов в этих обозначениях принимает вид:

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

Определитель преобразования

$$D = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}$$

обладает следующими свойствами:

1. $D = 1$, если обе системы координат имеют один и тот же тип — левый или правый
2. $D = -1$, если типы систем координат различны — правая преобразуется в левую или наоборот
3. Сумма квадратов элементов любой строки или столбца равна 1:

$$\sum_{i=1}^3 l_i^2 = \sum_{i=1}^3 m_i^2 = \sum_{i=1}^3 n_i^2 = 1,$$

$$l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2, 3)$$

4. Сумма парных произведений элементов любых двух строк или столбцов равна 0:

$$\sum_{i=1}^3 l_i m_i = \sum_{i=1}^3 m_i n_i = \sum_{i=1}^3 l_i n_i = 0,$$

$$l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3; i \neq j).$$

Третье и четвёртое свойства играют существенную роль в дальнейших выводах.[†]

Определим теперь способ, с помощью которого преобразуются компоненты чистой деформации при переходе от одной системы координат в другую. Пусть в системе x, y, z заданы шесть компонент чистой деформации. «Новая» система координат x', y', z' определена таблицей направляющих косинусов. Требуется установить связь между «новыми» компонентами деформации $e_{x'x'}$, $e_{y'y'}$, $e_{z'z'}$ и т.д. и «старыми» компонентами, заданными в системе координат x, y, z .

В решении этой задачи видятся два шага. Прежде всего, надо определить «новые» компоненты (проекции) вектора, выразив их через «старые» компоненты этого вектора. Проекция вектора на какое-либо направление равна сумме проекций его компонент на это направление, и можно записать:

$$\begin{aligned} U_{x'} &= U_x \cdot \cos(\widehat{x, x'}) + U_y \cdot \cos(\widehat{y, x'}) + U_z \cdot \cos(\widehat{z, x'}) = \\ &= U_x l_1 + U_y m_1 + U_z n_1. \end{aligned}$$

[†] Эти свойства вытекают из определения и свойств ортонормированного базиса. Так, третье свойство утверждает, что сумма квадратов элементов любой строки или столбца равна единице. Действительно, строки матрицы содержат направляющие косинусы векторов \vec{x}' , \vec{y}' , \vec{z}' в базисе (x, y, z) . Очевидно, что сумма их квадратов, равно как и сумма квадратов любых направляющих косинусов произвольного вектора, равна единице. Столбцы матрицы содержат направляющие косинусы векторов \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} в базисе (x', y', z') , следовательно, для них также верно вышеприведённое рассуждение. Парные произведения, используемые в четвёртом свойстве, суть скалярные произведения: векторов \vec{x}' и \vec{y}' , \vec{x}' и \vec{z}' , \vec{y}' и \vec{z}' в базисе (x, y, z) , если рассматривать строки; векторов \vec{x} и \vec{y} , \vec{x} и \vec{z} , \vec{y} и \vec{z} в базисе (x', y', z') , если рассматривать столбцы. Поскольку векторы, на которых построен базис, взаимно ортогональны, угол между ними составляет 90° . Следовательно, скалярные произведения разномённых базисных векторов равны нулю. Что и требовалось доказать. (*Прим.ред.*)

Аналогично

$$U_{y'} = U_x l_2 + U_y m_2 + U_z n_2; \quad U_{z'} = U_x l_3 + U_y m_3 + U_z n_3.$$

Далее используем правило дифференцирования по направлению, например по направлению N :

$$\frac{\partial}{\partial N} = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \cos(\widehat{N, x}) + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \cos(\widehat{N, y}) + \frac{\partial}{\partial z} \cdot \cos(\widehat{N, z}),$$

для вычисления производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{x'}}{\partial x'} &= \frac{\partial U_{x'}}{\partial x} \cdot \cos(\widehat{x, x'}) + \frac{\partial U_{x'}}{\partial y} \cdot \cos(\widehat{y, x'}) + \frac{\partial U_{x'}}{\partial z} \cdot \cos(\widehat{z, x'}) = \\ &= \frac{\partial U_{x'}}{\partial x} \cdot l_1 + \frac{\partial U_{x'}}{\partial y} \cdot m_1 + \frac{\partial U_{x'}}{\partial z} \cdot n_1; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial U_{x'}}{\partial y'} = \frac{\partial U_{x'}}{\partial x} \cdot l_2 + \frac{\partial U_{x'}}{\partial y} \cdot m_2 + \frac{\partial U_{x'}}{\partial z} \cdot n_2;$$

$$\frac{\partial U_{x'}}{\partial z'} = \frac{\partial U_{x'}}{\partial x} \cdot l_3 + \frac{\partial U_{x'}}{\partial y} \cdot m_3 + \frac{\partial U_{x'}}{\partial z} \cdot n_3.$$

Аналогичные выражения можно получить и для остальных производных $\frac{\partial U_{y'}}{\partial x'}$, $\frac{\partial U_{y'}}{\partial y'}$, $\frac{\partial U_{y'}}{\partial z'}$, $\frac{\partial U_{z'}}{\partial x'}$, $\frac{\partial U_{z'}}{\partial y'}$ и $\frac{\partial U_{z'}}{\partial z'}$.

Подставляя определение $U_{x'}$, получим для относительного удлинения вдоль оси Ox' :

$$\begin{aligned} e_{x'x'} &= \frac{\partial U_{x'}}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} (U_x l_1 + U_y m_1 + U_z n_1) l_1 + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} (U_x l_1 + U_y m_1 + U_z n_1) m_1 + \frac{\partial}{\partial z} (U_x l_1 + U_y m_1 + U_z n_1) n_1 = \\ &= \frac{\partial U_x}{\partial x} l_1^2 + \frac{\partial U_y}{\partial y} m_1^2 + \frac{\partial U_z}{\partial z} n_1^2 + \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) l_1 m_1 + \\ &+ \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) m_1 n_1 + \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) l_1 n_1. \end{aligned}$$

Окончательно:

$$e_{x'x'} = e_{xx} l_1^2 + e_{yy} m_1^2 + e_{zz} n_1^2 + 2l_1 m_1 e_{xy} + 2l_1 n_1 e_{xz} + 2m_1 n_1 e_{yz},$$

и по аналогии для двух других удлинений:

$$e_{y'y'} = e_{xx}l_2^2 + e_{yy}m_2^2 + e_{zz}n_2^2 + 2l_2m_2e_{xy} + 2l_2n_2e_{xz} + 2m_2n_2e_{yz},$$

$$e_{z'z'} = e_{xx}l_3^2 + e_{yy}m_3^2 + e_{zz}n_3^2 + 2l_3m_3e_{xy} + 2l_3n_3e_{xz} + 2m_3n_3e_{yz}.$$

Если сложить эти три определения «новых» удлинений, то при «старых» удлинениях образуется сумма квадратов направляющих косинусов, равная 1, а при сдвиговых деформациях — сумма парных произведений направляющих косинусов двух осей, равная 0.

Поэтому $e_{x'x'} + e_{y'y'} + e_{z'z'} = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$ — сумма относительных удлинений для данного деформированного состояния не зависит от того, в какой системе координат ее определять. Коротко говорят, что сумма удлинений инвариантна по отношению к преобразованию координат.

Для сдвиговой деформации $e_{x'y'}$, надо складывать две строки определений $\frac{\partial U_{x'}}{\partial y'}$ и $\frac{\partial U_{y'}}{\partial x'}$. В результате подстановки этих определений и перегруппировки слагаемых получим:

$$e_{x'y'} = e_{xx}l_1l_2 + e_{yy}m_1m_2 + e_{zz}n_1n_2 + e_{xy}(l_1m_2 + l_2m_1) + e_{xz}(l_1n_2 + l_2n_1) + e_{yz}(m_1n_2 + m_2n_1).$$

Несмотря на видимые различия формул преобразования для удлинений и сдвигов, закон преобразования в обоих случаях один и тот же. Чтобы убедиться в этом, заменим в полученном выражении индексы x' и y' у сдвиговой деформации и 1 и 2 у направляющих косинусов на общие индексы: i соответствует x' и 1, а $j = y'$ и 2. Тогда формулу преобразования для сдвиговых деформаций можно записать в обобщенном виде:

$$e_{ij} = e_{xx}l_i l_j + e_{yy}m_i m_j + e_{zz}n_i n_j + e_{xy}(l_i m_j + l_j m_i) + e_{xz}(l_i n_j + l_j n_i) + e_{yz}(m_i n_j + m_j n_i).$$

Здесь, как было условлено, для $e_{x'y'}$ $i = 1, j = 2$, для $e_{y'z'}$ надо принимать $i = 2, j = 3$, для $e_{z'x'}$ — $i = 3, j = 1$. Эта же формула преобразования описывает и новые удлинения. Для них индексы i и j одинаковы: для $e_{x'x'}$: $i = j = 1$, для $e_{y'y'}$: $i = j = 2$, для $e_{z'z'}$: $i = j = 3$. Поэтому для удлинений произведения направляющих косинусов превращаются в их квадраты, а суммы парных произведений — в удвоенные произведения,

что и было получено в результате непосредственного вывода формулы преобразования относительных удлинений.

Как видно, закон преобразования компонент деформации к «новым» координатным осям совсем не похож на законы преобразования векторов и тем более скаляров. Этот новый закон свидетельствует о том, что компоненты чистой деформации, образующие матрицу размером 3×3 , являются *тензором ранга 2*.

Поскольку сдвиговые деформации попарно равны между собой ($e_{xy} = e_{yx}$, $e_{xz} = e_{zx}$, $e_{zy} = e_{yz}$ по определению), то матрица тензора деформации является симметричной относительно главной оси, на которой расположены удлинения.

Если скалярную величину можно представить точкой в пространстве (x, y, z) , векторную величину — стрелкой, исходящей из начала координат, имеющей определённые длину и направление, то для тензора ранга 2 необходимо построить непрерывное (континуальное) бесчисленное множество векторов, концы которых образуют некоторую поверхность, замкнутую вокруг точки, где определена деформация[‡]. Именно эта поверхность может служить графическим образом тензора ранга 2.

Благодаря формулам преобразования, для полного описания деформированного состояния достаточно задать лишь шесть компонент (e_{xx} , e_{yy} , e_{zz} , e_{xy} , e_{yz} , e_{zx}) в некоторой системе координат x, y, z . Для любой другой системы координат деформации можно вычислить по формулам преобразования.

1.6. Поверхность деформации

Поставим задачу графически изобразить деформированное состояние, заданное в некоторой системе координат шестью компонентами чистой деформации. Ориентировка любой площадки задаётся направляющими косинусами её нормали N :

$$l = \cos(\widehat{x, N}); \quad m = \cos(\widehat{y, N}); \quad n = \cos(\widehat{z, N}).$$

[‡] Тензор можно рассматривать как оператор, который по определённому закону ставит в соответствие каждому вектору поля новый вектор, причём данный оператор является линейным. (Прим. ред.)

Вычислим относительное удлинение вдоль нормали e_{NN} , используя формулу преобразования этой компоненты деформации к новым осям координат:

$$e_{NN} = e_{xx}l^2 + e_{yy}m^2 + e_{zz}n^2 + 2lme_{xy} + 2lne_{xz} + 2mne_{yz}.$$

Определим величину $r = \frac{k}{\sqrt{|e_{NN}|}}$, где k – масштабный цифровой множитель. Отложив отрезок длиной r вдоль нормали N , получим первую точку искомой поверхности.

Далее, меняя направление нормали $\vec{N}(l, m, n)$ непрерывно, по всему полному телесному углу (4π), для каждого направления выполним те же операции, что и для первой точки. В результате получим некоторую поверхность.

Для нахождения уравнения этой поверхности выразим относительное удлинение e_{NN} из определения r : $e_{NN} = \frac{k^2}{r^2}$. Направляющие косинусы определим так:

$$l = \cos(\widehat{x, N}) = \frac{x}{r}; \quad m = \frac{y}{r}; \quad n = \frac{z}{r}.$$

Подставим эти определения в формулу преобразования для e_{NN} :

$$\frac{k^2}{r^2} = e_{xx} \frac{x^2}{r^2} + e_{yy} \frac{y^2}{r^2} + e_{zz} \frac{z^2}{r^2} + \frac{2xy}{r^2} e_{xy} + \frac{2xz}{r^2} e_{xz} + \frac{2yz}{r^2} e_{yz}.$$

Умножив на r^2 , получим искомое уравнение поверхности деформации:

$$e_{xx}x^2 + e_{yy}y^2 + e_{zz}z^2 + 2xye_{xy} + 2xze_{xz} + 2yze_{yz} = k^2.$$

Это – уравнение поверхности 2-го порядка типа сферы, эллипсоида, гиперболоида и прочих. Поскольку в уравнении нет членов с первыми степенями x, y, z , а есть только их квадраты и произведения, эта поверхность является центральной – у нее центр симметрии совпадает с началом координат. Можно так повернуть систему координат, чтобы её оси стали осями симметрии. В этом случае уравнение поверхности примет канонический вид и упростится, так как при переходе от произвольной системы координат к этой специальной коэффициенты при произведениях координат обращаются в 0. Такая специальная система

координат называется *главной*. Поскольку в этой системе множители при произведениях переменных — сдвиговые деформации — равны нулю, то тензор чистой деформации в главной системе координат описывается наиболее просто — лишь тремя удлинениями вдоль главных осей, называемыми *главными удлинениями*.

Главные оси обозначим добавлением индекса p («principal» — главный): x_p, y_p, z_p . Чтобы избежать трёхступенчатого обозначения главных удлинений типа $e_{x_p x_p}$, вводится специальная нотация: e_1 — удлинение вдоль x_p , e_2 — вдоль y_p и e_3 — вдоль z_p .

Учитывая инвариантность суммы относительных удлинений по отношению к преобразованию координат, сумма главных удлинений — та же, что и в любой другой системе:

$$e_1 + e_2 + e_3 = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}.$$

В главных удлинениях уравнение поверхности деформации записывается наиболее кратко:

$$e_1 x^2 + e_2 y^2 + e_3 z^2 = k^2.$$

Компоненты чистой деформации в произвольной системе координат также выражаются через главные удлинения наиболее просто, так как в главной системе нет сдвиговых деформаций. Например, относительное удлинение вдоль оси Ox , заданной направляющими косинусами l_1, m_1, n_1 , относительно главной системы координат, описывается так:

$$e_{xx} = e_1 l^2 + e_2 m^2 + e_3 n^2.$$

Сдвиговая деформация в плоскости xOy (ось Oy задана направляющими косинусами l_2, m_2, n_2) определяется выражением

$$e_{xy} = e_1 l_1 l_2 + e_2 m_1 m_2 + e_3 n_1 n_2.$$

Для главной системы координат матрица тензора чистой деформации имеет лишь главную диагональ, отличную от 0:

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 \end{pmatrix}.$$

1.7. Относительное объёмное расширение

Вычислим относительное изменение объёма прямоугольного параллелепипеда, построенного на главных осях деформации. Так как в главной системе отсутствуют сдвиговые деформации, прямоугольность параллелепипеда в результате деформации не нарушается. Лишь вдоль его граней произойдут удлинения или сжатия.

Пусть до деформации размеры параллелепипеда определялись его ребрами dx_p, dy_p, dz_p и объём был равен:

$$\Delta w = dx_p dy_p dz_p.$$

После деформации каждая сторона параллелепипеда изменится по длине в соответствии со значениями главных относительных удлинений и объём станет равным:

$$\Delta w' = (1 + e_1)dx_p(1 + e_2)dy_p(1 + e_3)dz_p.$$

Вычислим относительное изменение объёма, обозначив его Θ :

$$\Theta = \frac{\Delta w' - \Delta w}{\Delta w} = (1 + e_1)(1 + e_2)(1 + e_3) - 1,$$

(дробь сокращается на dx_p, dy_p, dz_p). Раскрывая скобки и произведя сокращение, получим:

$$\Theta = e_1 + e_2 + e_3 + e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3 + e_1e_2e_3.$$

Поскольку мы условились рассматривать дифференциально (бесконечно) малые деформации, e_1, e_2, e_3 — бесконечно малые величины первого порядка малости, а величинами e_1e_2, e_1e_3, e_2e_3 и тем более $e_1e_2e_3$ можно пренебречь как малыми 2-го и 3-го порядков малости, много меньшими главных удлинений. Тогда относительное объёмное расширение, называемое *дилатацией*, равно:

$$\Theta = e_1 + e_2 + e_3.$$

Становится ясна физическая причина инвариантности суммы удлинений: относительное изменение объёма для данного деформированного состояния при любых его измерениях, конечно же, одно и то же.

С учётом этой инвариантности можно записать:

$$\Theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{U},$$

— дилатация является дивергенцией вектора относительного смещения. Дивергенция есть мера источников или количества вещества, «протекающего» через данную поверхность. Это «протекание» вещества и создает увеличение объёма при наличии источников поля и положительной дивергенции или его уменьшение, если вместо источников — стоки, а дивергенция отрицательна.

Глава 2. Основы теории напряжений

Теория напряжений описывает динамику упругих процессов и исследует те силы, которые возникают в упругой среде в ответ на внешнее силовое воздействие.

2.1. Понятие о напряжении

В физике сила определяется как векторная величина, являющаяся мерой воздействия на тело со стороны других тел или полей. Сила полностью определена, если заданы точка её приложения, направление действия и величина силы. В зависимости от объекта, на который действует сила, различают массовые и поверхностные силы.

Массовая сила действует на весь объём тела, и величина её пропорциональна массе тела:

$$\vec{F}_m = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho w \frac{d^2\vec{U}}{dt^2},$$

где m — масса, ρ — плотность, w — объём тела ($m = \rho \cdot w$); \vec{U} , $\vec{v} = \frac{d\vec{U}}{dt}$ и $\frac{d^2\vec{U}}{dt^2}$ — соответственно векторы смещения, скорости и ускорения смещения. Пропорциональность массовых сил массе и объёму тела создаёт некоторые неудобства при анализе и сопоставлении сил, действующих на разные объекты. Поэтому в теории упругости принято понимать массовую силу как величину, отнесённую к единице массы:

$$\vec{F} = \frac{\vec{F}_m}{m} = \frac{d^2\vec{U}}{dt^2}.$$

В таком понимании массовая сила имеет размерность ускорения м/с^2 . Типичными массовыми силами являются сила тяжести и сила инерции.

Поверхностные силы действуют на некоторую поверхность, и их величина пропорциональна площади S этой поверхности:

$$\vec{F}_S = S \cdot \vec{P}.$$

Подобно массовой силе, для удобства анализа и сравнения поверхностную силу относят к единице площади поверхности, на которую она действует:

$$\vec{F} = \frac{\vec{F}_S}{S}.$$

Типичной поверхностной силой является давление. Соответственно, поверхностные силы имеют размерность Н/м^2 или Па. Внутреннее давление среды, возникающее как реакция на внешнее воздействие, называют *напряжением*. Именно оно является объектом исследования в данном разделе. Чтобы ввести понятие «напряжение» внутри упругого тела и разобраться в сущности этого понятия, представим себе прямоугольный параллелепипед, на две противоположные грани которого действуют равные и противоположно направленные силы, сжимающие или растягивающие параллелепипед (рис. 2.1). Мысленно и на рисунке разделим это тело пополам вертикальным сечением S .

Чтобы состояние каждой половины осталось таким же, как до разделения тела, на поверхности раздела каждой половины надо непрерывно распределить поверхностные силы, компенсирующие, заменяющие то воздействие одной половины тела на другую, какое существовало внутри целого тела. Эти силы — компенсаторы и являются напряжением. Для выбранного вертикального сечения и горизонтально ориентированных сил напряжение является нормальным, проекции напряжения на саму площадку равны нулю. Но если изменить направление воображаемого сечения и сделать его наклонным (рис. 2.2), то при том же силовом воздействии напряжение приобретет обе компоненты: нормальную (проекция на нормаль площадки среза) и касательную (проекция на саму плоскость).

Если менять направление сечения (направление нормали N к поверхности сечения), для каждого N будет свое соотношение между нормальной и касательной компонентами напряжения. Поэтому

напряжение является как бы дважды векторной величиной: вектор внутренней поверхностной силы (напряжения) зависит от вектора нормали N к площадке, на которой напряжение определяется. Чтобы подчеркнуть это, принято обозначать напряжение на площадке с нормалью N как P_N .

При непрерывном изменении ориентации площадки, вращении нормали N по всему полному телесному углу 4π , концы стрелок поверхностных сил образуют вокруг исследуемой точки некоторую поверхность, которая и иллюстрирует напряжённое состояние в заданной точке. Напряжение невозможно охарактеризовать одной векторной величиной. Оно — бесчисленное множество векторов для всех возможных направлений нормали N . Математически напряжение описывается как *тензор ранга 2*. Лишь при закреплении нормали N к площадке в качестве константы напряжение можно рассматривать как вектор и, соответственно, изобразить его на рисунке одной стрелкой и описать тремя компонентами — проекциями P_N на оси координат:

$$\vec{P}_N = P_{Nx} \cdot \vec{i} + P_{Ny} \cdot \vec{j} + P_{Nz} \cdot \vec{k}.$$

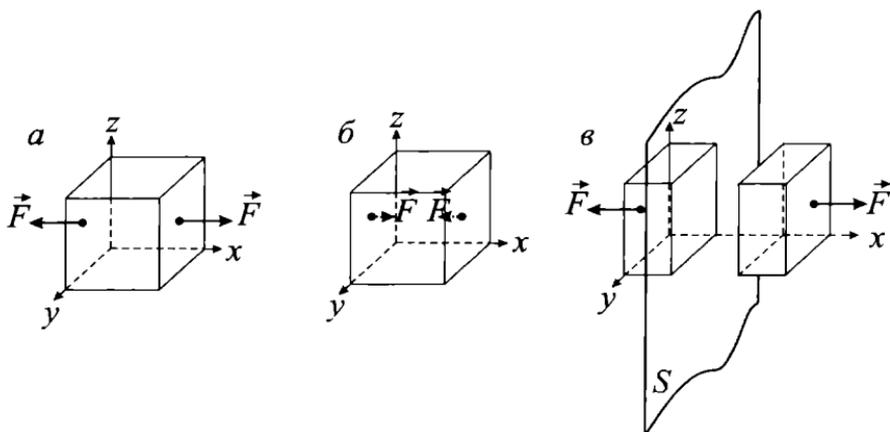


Рис. 2.1. Прямоугольный параллелепипед, находящийся под напряжением, как часть упругой среды:

а — силы, растягивающие параллелепипед; **б** — силы, сжимающие параллелепипед; **в** — деление параллелепипеда сечением S

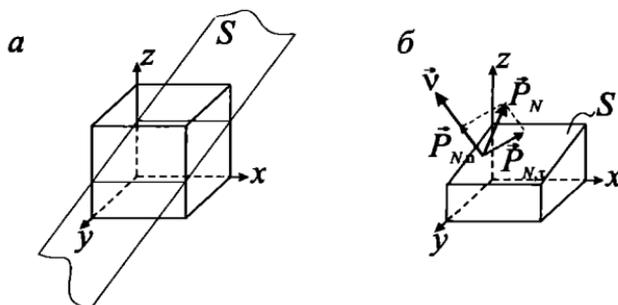


Рис. 2.2. Напряжения при произвольном сечении элементарного объёма: *а* – сечение параллелепипеда плоскостью *S*; *б* – напряжения на площадке с заданной нормалью

2.2. Компоненты тензора напряжения

Пусть под действием произвольных внешних сил упругое тело объёма w , ограниченное поверхностью S , находится в деформированном и напряжённом состоянии. Выберем произвольную точку O внутри тела и построим из неё прямоугольную систему координат (рис. 2.3). Построим также произвольно ориентированную «косую» плоскость с нормалью N . Совместно с координатными плоскостями она образует тетраэдр с тремя координатными гранями dS_x , dS_y , dS_z и одной косою гранью dS_N . Обозначения граней предполагают дифференциально малую их площадь, а индексы соответствуют нормальям к граням.

Мысленно вынесем этот малый тетраэдр из упругой среды и сильно его увеличим на рис. 2.3. Чтобы извлечённый из тела тетраэдр остался в том же состоянии, в каком он был внутри тела, на всех четырёх гранях надо задать силы – компенсаторы напряжения: \vec{P}_N на косою грани, \vec{P}_x , \vec{P}_y , \vec{P}_z – на координатных гранях. Заметим, что внешними нормальями к координатным граням служат отрицательные полуоси координат.

Всё тело, как и его часть – малый тетраэдр, находится в состоянии динамического равновесия. Для этого сумма всех сил, действующих на данный объект, должна уравновешиваться силой инерции. На тетраэдр действуют четыре поверхностные силы \vec{P}_x , \vec{P}_y , \vec{P}_z , \vec{P}_N , отнесённые к единице площади, а также массовая сила \vec{F} и сила инерции $\frac{d^2\vec{U}}{dt^2}$, отнесённые к единице массы. При записи уравнения динамического равно-

весия поверхностные силы надо умножать на площади соответствующих площадок, а массовые силы – на элементарную массу $dm = \rho dw$ (где ρ – плотность, dw – малый объём), на которые они действуют.

Тогда условие динамического равновесия для малого тетраэдра можно записать в векторном виде:

$$\vec{P}_N dS_N + \vec{P}_x dS_x + \vec{P}_y dS_y + \vec{P}_z dS_z + \rho \left(\vec{F} - \frac{d^2 \vec{U}}{dt^2} \right) dw = 0.$$

Заметим, что координатные площадки dS_x , dS_y , dS_z являются проекциями косо́й площадки на координатные плоскости и определяются умножением dS_N на косинусы углов между нормалью и отрицательными координатными полуосями:

$$dS_x = dS_N \cdot \cos(\widehat{-x, N}),$$

$$dS_y = dS_N \cdot \cos(\widehat{-y, N}),$$

$$dS_z = dS_N \cdot \cos(\widehat{-z, N}).$$

Все углы между N и отрицательными полуосями являются тупыми, поэтому косинусы этих углов отрицательны:

$$\cos(\widehat{-x, N}) = -\cos(\widehat{x, N}) = -l,$$

$$\cos(\widehat{-y, N}) = -m,$$

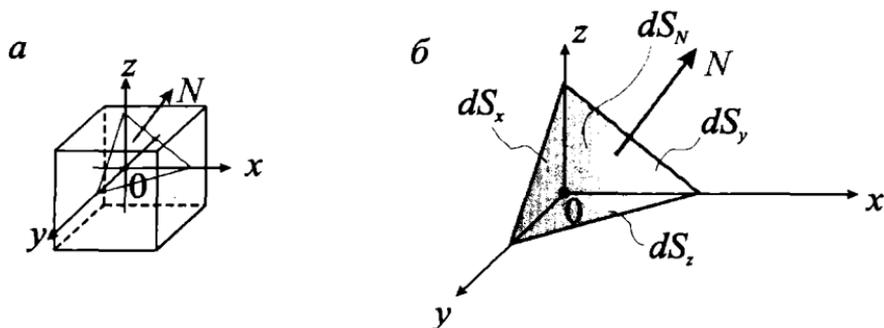


Рис. 2.3. Элементарный тетраэдр напряжений:

а – произвольное сечение тела и выбор начала координат; **б** – грани тетраэдра

$$\cos(\widehat{-z, N}) = -n.$$

Введены обычные сокращённые обозначения направляющих косинусов (l, m, n). С учётом этих определений, условие динамического равновесия можно переписать в виде:

$$(\vec{P}_N - \vec{P}_x l - \vec{P}_y m - \vec{P}_z n) dS_N + \rho \left(\vec{F} - \frac{d^2 \vec{U}}{dt^2} \right) dw = 0.$$

Разделим обе части уравнения на dS_N , тогда у объёмных сил появится множитель $\frac{dw}{dS_N}$.

Устремим косую площадку к началу координат. При этом dN, dx, dy, dz станут бесконечно малыми величинами первого порядка, dS_N — второго порядка, а dw — третьего порядка малости. Поэтому в пределе, при стягивании тетраэдра в точку, множитель dw при массовых силах $\frac{dw}{dS_N}$ становится равным 0, и мы получим:

$$\vec{P}_N = \vec{P}_x l + \vec{P}_y m + \vec{P}_z n.$$

Обозначая проекции на оси координат добавлением соответствующего индекса к $\vec{P}_x, \vec{P}_y, \vec{P}_z, \vec{P}_N$, получим в проекциях на оси координат:

$$P_{Nx} = P_{xx} l + P_{xy} m + P_{xz} n,$$

$$P_{Ny} = P_{yx} l + P_{yy} m + P_{yz} n,$$

$$P_{Nz} = P_{zx} l + P_{zy} m + P_{zz} n.$$

Если считать N, x, y, z фиксированными, то можно для каждого напряжения записать обычные векторные определения:

$$\vec{P}_N = P_{Nx} \cdot \vec{i} + P_{Ny} \cdot \vec{j} + P_{Nz} \cdot \vec{k},$$

$$\vec{P}_x = P_{xx} \cdot \vec{i} + P_{xy} \cdot \vec{j} + P_{xz} \cdot \vec{k},$$

$$\vec{P}_y = P_{yx} \cdot \vec{i} + P_{yy} \cdot \vec{j} + P_{yz} \cdot \vec{k},$$

$$\vec{P}_z = P_{zx} \cdot \vec{i} + P_{zy} \cdot \vec{j} + P_{zz} \cdot \vec{k}.$$

Таким образом, тензор напряжения на любой площадке с нормалью N однозначно определяется тремя векторами напряжения (тензорами

на координатных площадках) $\vec{P}_x, \vec{P}_y, \vec{P}_z$ или девятью скалярами – компонентами тензора напряжения $P_{xx}, P_{yy}, P_{zz}, P_{xy}, P_{xz}, P_{yz}, P_{yx}, P_{zx}, P_{zy}$. В матричной форме можно записать:

$$\begin{pmatrix} P_{Nx} \\ P_{Ny} \\ P_{Nz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{yx} & P_{zx} \\ P_{xy} & P_{yy} & P_{zy} \\ P_{xz} & P_{yz} & P_{zz} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}.$$

В матрице компонент тензора напряжения на главной диагонали расположены нормальные компоненты: P_{xx} есть проекция напряжения \vec{P}_x (на площадке с нормалью Ox) на эту же ось Ox , P_{yy} – проекция \vec{P}_y на ось Oy , P_{zz} – проекция \vec{P}_z на ось Oz . Остальные шесть компонент тензора напряжения являются касательными напряжениями: P_{yx} есть, например, проекция напряжения \vec{P}_y (на площадке с нормалью Oy , т.е. на координатной площадке xOz) на ось Ox , а P_{zx} – проекция напряжения \vec{P}_z (на площадке xOy) на ось Ox и т.д.

Заметим полное внешнее структурное сходство описания тензора напряжения и тензора чистой деформации (см. гл. 1.4, стр. 22). В этом сходстве проявляется то важное обстоятельство, что напряжения описывают динамику, а деформации – кинематику одного и того же упругого процесса.

2.3. Уравнения динамического равновесия в напряжениях

Использованный в предыдущем разделе принцип динамического равновесия справедлив и для всего объема w упругого тела. Для сохранения его динамического равновесия необходимо, чтобы интегральная сумма поверхностных и массовых сил, исключая силу инерции, равнялась 0. Массовые силы надо суммировать (интегрировать) по всему объему w среды. Нет необходимости учитывать поверхностные силы – напряжения на внутренних площадках среды. Ведь на каждой внутренней площадке действуют равные и противоположно ориентированные напряжения, компенсирующие друг друга. Поэтому в условиях динамического равновесия должны учитываться только те напряжения, которые не компенсированы, – напряжения на внешней

поверхности S тела. Таким образом, можно записать общее уравнение динамического равновесия в векторной форме:

$$\iint_S \vec{P}_N dS + \iiint_w \rho \left(\vec{F} - \frac{d^2 \vec{U}}{dt^2} \right) dw = 0,$$

или в проекциях на оси координат:

$$\iint_S P_{Nx} dS + \iiint_w \rho \left(F_x - \frac{d^2 U_x}{dt^2} \right) dw = 0,$$

$$\iint_S P_{Ny} dS + \iiint_w \rho \left(F_y - \frac{d^2 U_y}{dt^2} \right) dw = 0,$$

$$\iint_S P_{Nz} dS + \iiint_w \rho \left(F_z - \frac{d^2 U_z}{dt^2} \right) dw = 0.$$

Воспользуемся определением $\vec{P}_N = \vec{P}_x l + \vec{P}_y m + \vec{P}_z n$ и запишем поверхностный интеграл I_S для P_{Nx} в виде

$$I_S = \iint_S P_{Nx} dS = \iint_S (P_{xx} l + P_{yx} m + P_{zx} n) dS.$$

Применим к этому интегралу теорему Остроградского – Гаусса:

$$I_S = \iiint_w \left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} \right) dw.$$

Тогда можно записать уравнение динамического равновесия в одном объёмном интеграле:

$$\iiint_w \left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} + \rho \left(F_x - \frac{d^2 U_x}{dt^2} \right) \right) dw = 0.$$

Поскольку пределы интегрирования (весь объём тела w) никак не были оговорены, уравнение должно быть справедливым для любого объёма: и конечного, и бесконечно малого.

Значит, подынтегральное выражение должно быть равно 0, и можно записать для x - и по аналогии для y - и z -проекций три уравнения:

$$\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} + \rho \left(F_x - \frac{d^2 U_x}{dt^2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial z} + \rho \left(F_y - \frac{d^2 U_y}{dt^2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} + \rho \left(F_z - \frac{d^2 U_z}{dt^2} \right) = 0.$$

Эту систему уравнений называют *уравнениями Коши*. Они связывают компоненты тензора напряжения в упругой среде с вызвавшими их массовыми силами и силой инерции. Уравнения Коши являются фундаментальными соотношениями для идеально упругой среды, на которых строится весь вывод уравнения динамического равновесия в упругих смещениях (вывод волнового уравнения).

2.4. Попарное равенство касательных напряжений

Подобное равенство для сдвиговых компонент чистой деформации доказывать было не нужно, поскольку они равны по определению сдвиговой деформации:

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) = e_{yx}.$$

Для компонент напряжения подобное равенство необходимо доказать. Математическим обоснованием этого доказательства служит условие, обеспечивающее отсутствие общего вращательного движения упругой среды. Для этого необходимо, чтобы сумма моментов всех сил равнялась моменту инерции. Момент силы \vec{F} , вращающей точку M относительно точки O , определён как векторное произведение радиус-вектора \vec{r} точки M на вектор силы \vec{F} :

$$\text{мом } \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Если $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$ и $\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$, то векторное произведение раскрывается с помощью определителя:

$$\begin{aligned} \text{мом } \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \\ &= (yF_z - zF_y) \cdot \vec{i} + (zF_x - xF_z) \cdot \vec{j} + (xF_y - yF_x) \cdot \vec{k}. \end{aligned}$$

Условие отсутствия вращений упругой среды можно записать в интегральной форме:

$$\iint_S (\vec{r} \times \vec{P}_N) dS + \iiint_w \rho \left(\vec{r} \times \left(\vec{F} - \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \right) \right) dw = 0.$$

В проекции на ось Oz это векторное уравнение принимает вид:

$$\begin{aligned} &\iint_S (xP_{Ny} - yP_{Nx}) dS + \\ &+ \iiint_w \rho \left(x \left(F_y - \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} \right) - y \left(F_x - \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \right) \right) dw = 0. \end{aligned}$$

Преобразуем поверхностный интеграл I_S , вначале используя определения

$$P_{Ny} = P_{yx}l + P_{yy}m + P_{yz}n,$$

$$P_{Nx} = P_{xx}l + P_{xy}m + P_{xz}n,$$

где l, m, n — направляющие косинусы вектора нормали \vec{N} , а затем теорему Остроградского — Гаусса:

$$\begin{aligned} I_S &= \iint_S (xP_{Ny} - yP_{Nx}) dS = \\ &= \iint_S (x(P_{yx}l + P_{yy}m + P_{yz}n) - y(P_{xx}l + P_{xy}m + P_{xz}n)) dS = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_S ((xP_{xy} - yP_{xx})l + (xP_{yy} - yP_{yx})m + (xP_z - yP_{zx})n) dS = \\
&= \iiint_w \left(\frac{\partial}{\partial x}(xP_{xy} - yP_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(xP_{yy} - yP_{yx}) + \right. \\
&+ \left. \frac{\partial}{\partial z}(xP_z - yP_{zx})n \right) dw = \\
&= \iiint_w \left(x \left(\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial z} \right) - \right. \\
&- \left. y \left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} \right) + P_{xy} - P_{yx} \right) dw.
\end{aligned}$$

Тогда условие отсутствия вращения можно записать в виде одного объёмного интеграла:

$$\begin{aligned}
&\iiint_w \left(x \left(\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial z} + \rho \left(F_y - \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} \right) \right) - \right. \\
&- \left. y \left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} + \left(F_x - \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \right) \right) + P_{xy} - P_{yx} \right) dw = 0.
\end{aligned}$$

В первой подынтегральной скобке — левая часть второго уравнения Коши, во второй — левая часть первого уравнения Коши, равные 0. Поэтому условие отсутствия вращений вокруг Oz записывается совсем просто:

$$\iiint_w (P_{xy} - P_{yx}) dw = 0.$$

Так как объём w интегрирования произвольный, отсюда следует равенство $P_{xy} = P_{yx}$. По аналогии $P_{xz} = P_{zx}$ и $P_{yz} = P_{zy}$. Таким образом, матрица компонент напряжения обладает такой же симметрией, как и матрица компонент чистой деформации. По главной диагонали матрицы — нормальные напряжения, а касательные напряжения, симметричные относительно этой диагонали, попарно равны.

2.5. Преобразование компонент тензора напряжения к новым осям координат

Пусть в системе координат (x, y, z) заданы шесть компонент напряжения: $P_{xx}, P_{yy}, P_{zz}, P_{xy}, P_{xz}, P_{yz}$. Также определены направляющие косинусы осей новой системы координат (x', y', z') :

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

Напомним, что сумма квадратов элементов любой строки или любого столбца равна 1, а сумма парных произведений любых двух строк или столбцов равна 0 (глава 1.5, стр. 26).

Ставится задача: выразить «новые» компоненты того же напряжения через его «старые» компоненты. На первом этапе будем рассматривать каждую новую ось как нормаль к косоугольной площадке, для напряжения на которой было получено основное соотношение:

$$\vec{P}_N = \vec{P}_x l + \vec{P}_y m + \vec{P}_z n,$$

где l, m, n — направляющие косинусы нормали N . По аналогии определим:

$$\vec{P}_{x'} = \vec{P}_x l_1 + \vec{P}_y m_1 + \vec{P}_z n_1,$$

$$\vec{P}_{y'} = \vec{P}_x l_2 + \vec{P}_y m_2 + \vec{P}_z n_2,$$

$$\vec{P}_{z'} = \vec{P}_x l_3 + \vec{P}_y m_3 + \vec{P}_z n_3.$$

Выполним вывод формул преобразования на примере $\vec{P}_{z'}$, для проекций которой на оси координат x, y, z запишем:

$$P_{z'x} = P_{xx} l_3 + P_{xy} m_3 + P_{xz} n_3,$$

$$P_{z'y} = P_{yx} l_3 + P_{yy} m_3 + P_{yz} n_3,$$

$$P_{z'z} = P_{zx} l_3 + P_{zy} m_3 + P_{zz} n_3.$$

Теперь определим проекцию напряжения на какую-либо новую ось как сумму проекций старых координатных компонент на эту новую ось. Для нормального напряжения можно записать:

$$P_{z'z'} = P_{z'x}l_3 + P_{z'y}m_3 + P_{z'z}n_3.$$

Аналогично для касательного напряжения:

$$P_{z'x'} = P_{xz'}l_1 + P_{yz'}m_1 + P_{zx'}n_1.$$

Подставляя определённые на первом этапе $P_{xz'}$, $P_{yz'}$, $P_{zx'}$, получим для нормальной компоненты:

$$\begin{aligned} P_{z'z'} &= (P_{xx}l_3 + P_{xy}m_3 + P_{xz}n_3)l_3 + (P_{yx}l_3 + P_{yy}m_3 + P_{yz}n_3)m_3 + \\ &+ (P_{zx}l_3 + P_{zy}m_3 + P_{zz}n_3)n_3 = \\ &= P_{xx}l_3^2 + P_{yy}m_3^2 + P_{zz}n_3^2 + 2l_3m_3P_{xy} + 2l_3n_3P_{xz} + 2m_3n_3P_{yz}, \end{aligned}$$

а для касательного напряжения:

$$\begin{aligned} P_{z'x'} &= (P_{xx}l_3 + P_{xy}m_3 + P_{xz}n_3)l_1 + (P_{yx}l_3 + P_{yy}m_3 + P_{yz}n_3)m_1 + \\ &+ (P_{zx}l_3 + P_{zy}m_3 + P_{zz}n_3)n_1 = P_{xx}l_3l_1 + P_{yy}m_3m_1 + P_{zz}n_3n_1 + \\ &+ P_{xy}(l_3m_1 + l_1m_3) + P_{xz}(l_3n_1 + l_1n_3) + P_{yz}(m_3n_1 + m_1n_3). \end{aligned}$$

Видно, что закон преобразования компонент напряжения к новым осям координат в точности повторяет аналогичный закон преобразования компонент чистой деформации. Вид этого закона является формальным математическим признаком для классификации напряжения и чистой деформации, как тензоров ранга 2.

Мы рассмотрели преобразование на примере $\vec{P}_{z'}$. По аналогии запишем вместе с $P_{x'x'}$ формулы преобразования других нормальных компонент $P_{y'y'}$ и $P_{z'z'}$:

$$\begin{aligned} P_{x'x'} &= P_{xx}l_1^2 + P_{yy}m_1^2 + P_{zz}n_1^2 + 2l_1m_1P_{xy} + 2l_1n_1P_{xz} + 2m_1n_1P_{yz}, \\ P_{y'y'} &= P_{xx}l_2^2 + P_{yy}m_2^2 + P_{zz}n_2^2 + 2l_2m_2P_{xy} + 2l_2n_2P_{xz} + 2m_2n_2P_{yz}, \\ P_{z'z'} &= P_{xx}l_3^2 + P_{yy}m_3^2 + P_{zz}n_3^2 + 2l_3m_3P_{xy} + 2l_3n_3P_{xz} + 2m_3n_3P_{yz}. \end{aligned}$$

Если сложить эти три определения, то при нормальных напряжениях появится сумма квадратов направляющих косинусов, равная еди-

нице, а при касательных напряжениях — равная нулю сумма парных произведений этих косинусов.

Поэтому можно записать:

$$P_{x'x'} + P_{y'y'} + P_{z'z'} = P_{xx} + P_{yy} + P_{zz},$$

— сумма нормальных напряжений для данного напряжённого состояния не зависит от того, в какой системе координат она определена, т.е. она является величиной, инвариантной к преобразованию координат.

2.6. Поверхность напряжений

Пользуясь законом преобразования компонент напряжения к новым осям, определим нормальное напряжение на площадке с произвольно ориентированной нормалью $N(x, y, z)$:

$$P_{NN} = P_{xx}l^2 + P_{yy}m^2 + P_{zz}n^2 + 2lmP_{xy} + 2lnP_{xz} + 2mnP_{yz}.$$

Вычислим длину отрезка $r = \frac{k}{\sqrt{|P_{NN}|}}$ (k — масштабный множитель) и отложим её вдоль нормали N . Получим первую точку поверхности напряжения.

Выполняя эти операции для каждого направления нормали N , варьируя эти направления по всему полному телесному углу (4π), получим бесчисленное непрерывное множество точек — поверхность напряжения. Найдём уравнение этой поверхности. Для этого определим:

$$l = \cos(\widehat{x, N}) = \frac{x}{r}; \quad m = \frac{y}{r}; \quad n = \frac{z}{r}.$$

А из выражения для r найдем: $P_{NN} = \frac{k^2}{r^2}$, и подставим эти определения в формулу для нормального напряжения:

$$\frac{k^2}{r^2} = P_{xx} \frac{x^2}{r^2} + P_{yy} \frac{y^2}{r^2} + P_{zz} \frac{z^2}{r^2} + \frac{2xy}{r^2} P_{xy} + \frac{2xz}{r^2} P_{xz} + \frac{2yz}{r^2} P_{yz}.$$

Умножив на r^2 , получим искомое уравнение поверхности напряжений:

$$P_{xx}x^2 + P_{yy}y^2 + P_{zz}z^2 + 2xyP_{xy} + 2xzP_{xz} + 2yzP_{yz} = k^2.$$

Это уравнение поверхности 2-го порядка с центром симметрии в начале координат (типа сферы, эллипсоида и т.д.).

Оставляя начало координат неизменным, одним лишь поворотом осей координат (таким, чтобы они стали осями симметрии поверхности) приведем уравнение к каноническому виду, в котором все коэффициенты при произведениях координат равны нулю:

$$P_1x_p^2 + P_2y_p^2 + P_3z_p^2 = k_p^2.$$

Индексом p отмечены главные оси координат, а множители при них — P_1 , P_2 и P_3 — являются главными напряжениями ($P_1 = P_{x_px_p}$ и т.д.).

Если в произвольной системе координат (x, y, z) для определения напряжения P_N на площадке с нормалью $N(x, y, z)$ необходимо задать полную матрицу компонент тензора напряжения:

$$\begin{pmatrix} P_{xx} & P_{yx} & P_{zx} \\ P_{xy} & P_{yy} & P_{zy} \\ P_{xz} & P_{yz} & P_{zz} \end{pmatrix},$$

то в главной системе координат (x_p, y_p, z_p) для этого надо знать только три главных нормальных напряжения:

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{pmatrix},$$

— в главной системе координат касательных напряжений нет.

Компоненты напряжения на любой произвольной площадке с нормалью $N(x, y, z)$ выражаются через главные напряжения наиболее просто — например, для нормальной компоненты:

$$P_{xx} = P_1l^2 + P_2m^2 + P_3n^2.$$

Как и в любой системе координат (x, y, z) , сумма главных напряжений равна той же величине, не зависящей от выбора системы координат:

$$P_1 + P_2 + P_3 = P_{xx} + P_{yy} + P_{zz} = C,$$

где C — инвариантная к выбору координатной системы константа для данного напряжённого состояния в данной точке среды.

Заметим большое сходство описаний напряжённого состояния упругой среды и её деформации. Физической причиной этого сходства является то, что напряжения и деформации — элементы описания динамики и кинематики одного и того же упругого процесса. Математической причиной тождественности описаний является общая классификация напряжений и чистых деформаций в качестве тензоров ранга 2.

Отмеченная общность напряжений и деформаций предполагает наличие однозначной связи между ними, к рассмотрению которой мы переходим в следующем разделе.

Глава 3. Связь напряжений и деформаций

Схожесть математического описания деформаций и напряжений как тензоров ранга 2 отображает физическую связь между кинематическими и динамическими сторонами упругого процесса. Такая связь была установлена экспериментально Робертом Гуком (*англ.* Robert Hooke) ещё в XVII в. — напряжение пропорционально упругой деформации: Рассмотрим вначале современные объяснения существования такой связи.

3.1. Физические основы связи

Причиной сопротивления тел изменению их размеров и формы под воздействием внешних сил являются силы внутреннего взаимодействия частиц тела (атомов, молекул). Приложение внешних сил к телу вызывает возникновение сил противодействия внутри него. При сжатии расстояния между атомами сокращаются, их электронные оболочки сжимаются, сминаются — и возникают силы *взаимного отталкивания*, которые носят квантово-механический характер. Величина сил отталкивания частиц очень быстро и нелинейно увеличивается с увеличением сил сжатия и уменьшением расстояния между частицами. Очевидно, для любого тела есть предел сжатия: силы отталкивания возрастают настолько, что никаким внешним силам ещё более увеличить сжатие не удается.

Если упругое тело растягивается, то расстояния между атомами увеличиваются и возникают силы *электростатического притяжения* атомов, препятствующие растяжению. При увеличении растягивающего усилия силы притяжения вначале растут, достигают максимума при некотором удалении атомов друг от друга, а при

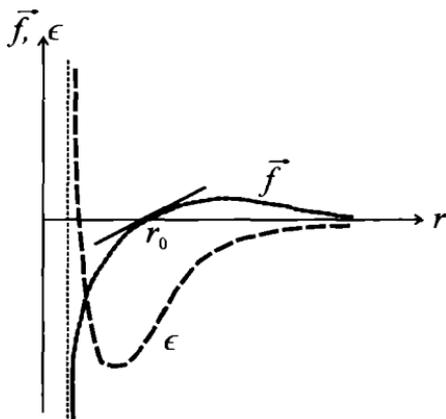


Рис. 3.1. Зависимость сил взаимодействия частиц от межатомаого расстояния

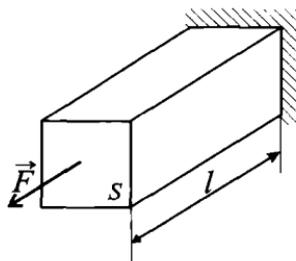
дальнейшем увеличении растяжения силы противодействия начинают уменьшаться и в пределе стремятся к нулю. Значит, внешние силы оказались настолько велики, что внутренние связи разорвались, и целостность образца нарушилась.

Таким образом, зависимость внутренних сил противодействия от межатомных расстояний имеет сугубо нелинейный характер (рис. 3.1). В отсутствии внешних сил притяжение и отталкивание частиц взаимно компенсируются, и сила взаимодействия f равна 0. Этому уравновешенному состоянию соответствует расстояние r_0 между частицами, при котором потенциальная энергия взаимодействия ϵ имеет глубокий минимум («потенциальная яма»). При сближении частиц ϵ стремительно растет, а при растяжении — плавно убывает.

Очевидно, что величина межатомного расстояния покоя r_0 специфична и для каждого вещества своя, определяемая структурой атомного строения (числом электронных оболочек, плотностью электронов на них и т.д.).

Если рассматривать внешние силы, малые по сравнению с внутренними силами межатомных связей и, соответственно, малые изменения внутренних сил Δf и расстояний между частицами Δr вокруг точки покоя r_0 , то можно аппроксимировать кривую касательной к ней в этой точке. При этих условиях приращение сил взаимодействия частиц оказывается пропорционально приращению межатомных расстояний: $\Delta f = k_0 \cdot \Delta r$, где k_0 — угловой коэффициент касательной к кривой $f(r)$ в точке $r = r_0$.

Рис. 3.2. Закреплённый стержень, растягиваемый внешней силой



Пусть закреплённый с одной стороны стержень сечения S и длины l растягивается внешними силами F (рис. 3.2). Такой стержень в первом приближении можно представить совокупностью многочисленных атомных цепочек, вытянутых вдоль стержня. Если n_0 — число таких цепочек, приходящееся на единицу площади поперечного сечения, то общее число их — $n_0 \cdot S$. Предположим также, что все цепочки одинаковы по своим свойствам. Тогда внешняя сила уравнивается суммарным противодействием всех цепочек:

$$\vec{F} = \sum \overline{\Delta f} = n_0 \vec{S} k_0 \Delta r.$$

Введём $\vec{P}_{\parallel} = \frac{\vec{F}}{S}$ — нормальное напряжение и $e_{\parallel} = \frac{\Delta r}{r_0} = \frac{\Delta l}{l}$ — относительное продольное удлинение. Тогда можно записать:

$$P_{\parallel} = n_0 k_0 r_0 e_{\parallel} = E e_{\parallel}.$$

Здесь $E = n_0 k_0 r_0$ — *модуль Юнга*, величина, определяемая физическими свойствами материала стержня: плотностью распределения атомных цепочек в поперечном сечении (n_0), угловым коэффициентом сил притяжения атомов (k_0) в точке $r = r_0$, межатомным расстоянием покоя (r_0). Величина E , таким образом, определяется многими факторами и потому изменяется в широких пределах в зависимости от литологии горных пород и условий их залегания.

Поскольку относительное удлинение e_{\parallel} — безразмерная величина, размерность модуля Юнга совпадает с размерностью напряжения (Па, например). Если оценить рассматриваемые величины их средними значениями: $P_{\parallel} = 2000$ Па, $E = 2 \cdot 10^6$ Па, то им соответствует относительное удлинение $e_{\parallel} = 10^{-3}$, т.е. растяжение стержня длиной в 1 м на 1 мм.

При растяжении стержня из-за увеличения межатомного расстояния взаимное отталкивание атомных цепочек уменьшается. Поэтому одновременно с растяжением образца происходит уменьшение его поперечных размеров – поперечное сжатие e_{\perp} . Можно считать, что оно пропорционально вызвавшему его продольному растяжению: $e_{\perp} = -\sigma e_{\parallel}$, где знак «минус» указывает на противоположность продольных и поперечных изменений, а σ – коэффициент Пуассона, неотрицательная безразмерная величина ($\sigma \geq 0$). Маловероятно, что продольное растяжение может сопровождаться увеличением поперечных размеров.

Пусть внешнее воздействие характеризуется силой, действующей на площадку с нормалью Ox . Тогда продольное растяжение $e_{\parallel} = e_{xx}$, а поперечное сжатие

$$e_{\perp} = e_{yy} = e_{zz} = -\sigma e_{xx}.$$

Определим относительное объёмное расширение при одностороннем растяжении стержня:

$$\Theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = (1 - 2\sigma)e_{xx}.$$

Маловероятно, что при растяжении образца его объём будет уменьшаться и, наоборот, при сжатии – увеличиваться. Это обуславливает неотрицательность величины $(1 - 2\sigma) \geq 0$. Отсюда видно, что коэффициент Пуассона имеет и верхнюю границу: $\sigma \leq 0.5$. Таким образом, этот коэффициент может изменяться в относительно узких пределах:

$$0 \leq \sigma \leq 0.5.$$

Как мы увидим в дальнейшем, коэффициент Пуассона существенно влияет на другие упругие константы. В частности, он определяет соотношение скоростей распространения продольных и поперечных волн.

Простые соотношения между напряжениями и деформациями получены для одностороннего сжатия (растяжения) образца. Обобщим соотношения связи последовательно: вначале для главных напряжений и удлинений, а затем для произвольных деформаций и напряжений, используя формулы преобразований напряжения и деформаций к новой системе координат.

3.2. Закон Гука для главных напряжений и удлинений

Выделим из упругой среды малый объект — прямоугольный параллелепипед, построенный на главных осях напряжения и деформации (x_p, y_p, z_p) . В главной системе координат и напряжения, и деформации описываются лишь тремя главными компонентами — нормальными напряжениями P_1, P_2 и P_3 и главными удлинениями e_1, e_2 и e_3 . Сдвиговые деформации и касательные напряжения в главной системе координат отсутствуют. Поэтому прямоугольность параллелепипеда в результате деформации не нарушится — лишь его прямоугольные грани растянутся или сожмутся.

Ввиду малости упругих напряжений и деформаций они подчиняются принципу суперпозиции: реакция среды на сложное, суммарное воздействие равна сумме реакций на компоненты суммарного воздействия. Проанализируем последовательно деформации, соответствующие напряжениям P_1 , затем P_2 и P_3 .

Напряжению P_1 на площадке с нормалью Ox_p соответствует продольное сжатие (или растяжение) вдоль той же оси e_{11} (первый индекс соответствует напряжению P_1 , второй указывает, вдоль какой оси удлинение рассматривается): $e_{11} = \frac{1}{E}P_1$, а вдоль двух других осей (второй — Oy_p , третьей — Oz_p) возникнут поперечные растяжения (или сжатия): $e_{12} = e_{13} = -\sigma e_{11} = -\frac{\sigma}{E}P_1$.

Напряжению P_2 на площадке с нормалью Oy_p соответствует продольное растяжение вдоль той же оси: $e_{22} = \frac{1}{E}P_2$, и два поперечных сжатия вдоль осей Ox_p и Oz_p : $e_{21} = e_{23} = -\sigma e_{22} = -\frac{\sigma}{E}P_2$.

Аналогично, напряжению P_3 соответствует продольное растяжение вдоль оси Oz_p : $e_{33} = \frac{1}{E}P_3$, и поперечные сжатия вдоль осей Ox_p и Oy_p : $e_{31} = e_{32} = -\sigma e_{33} = -\frac{\sigma}{E}P_3$.

При одновременном действии трех напряжений деформации вдоль каждой оси складываются из одного продольного растяжения и двух поперечных сжатий:

$$e_1 = \frac{1}{E}P_1 - \frac{\sigma}{E}P_2 - \frac{\sigma}{E}P_3,$$

$$e_2 = -\frac{\sigma}{E}P_1 + \frac{1}{E}P_2 - \frac{\sigma}{E}P_3,$$

$$e_3 = -\frac{\sigma}{E}P_1 - \frac{\sigma}{E}P_2 + \frac{1}{E}P_3.$$

Соотношения между главными компонентами напряжения и деформации можно унифицировать, прибавив и вычтя $\frac{\sigma}{E}P_1$ к первому уравнению, $\frac{\sigma}{E}P_2$ — ко второму и $\frac{\sigma}{E}P_3$ — к третьему. Тогда в каждом уравнении появится общее слагаемое:

$$-\frac{\sigma}{E}(P_1 + P_2 + P_3) = -\frac{\sigma}{E}(P_{xx} + P_{yy} + P_{zz}) = -\frac{\sigma}{E}s,$$

— сумма нормальных напряжений инвариантна к выбору системы координат. Тогда получим:

$$e_1 = \frac{1}{E}P_1 - \frac{\sigma}{E}s,$$

$$e_2 = \frac{1}{E}P_2 - \frac{\sigma}{E}s,$$

$$e_3 = \frac{1}{E}P_3 - \frac{\sigma}{E}s.$$

В каждом уравнении присутствует жёсткое соответствие e_i и P_i , а все остальные параметры связи одни и те же: $e_i = \frac{1}{E}P_i - \frac{\sigma}{E}s$.

3.3. Общие соотношения закона Гука для однородной изотропной идеально упругой среды

Для перехода от соотношений связи в главной системе координат к общим выражениям используем формулы преобразования компонент напряжения и деформации к новой системе координат (x, y, z) . В качестве старой системы координат используем главные оси (x_p, y_p, z_p) . Как обычно, новые оси заданы таблицей направляющих косинусов:

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

Напомним, что сумма квадратов строки или столбца равна 1, а сумма парных произведений двух строк или двух столбцов равна 0:

$$\sum_{i=1}^3 l_i^2 = \sum_{i=1}^3 m_i^2 = \sum_{i=1}^3 n_i^2 = 1,$$

$$\sum_{i=1}^3 l_i m_i = \sum_{i=1}^3 m_i n_i = \sum_{i=1}^3 l_i n_i = 0.$$

Воспользуемся формулами преобразования компонент напряжения чистой деформации от одной системы к другой. Учтём, что в главной системе координат нет ни касательных напряжений, ни сдвиговых деформаций:

$$P_{xx} = P_1 l_1^2 + P_2 m_1^2 + P_3 n_1^2,$$

$$P_{yy} = P_1 l_2^2 + P_2 m_2^2 + P_3 n_2^2,$$

$$P_{zz} = P_1 l_3^2 + P_2 m_3^2 + P_3 n_3^2,$$

$$P_{xy} = P_1 l_1 l_2 + P_2 m_1 m_2 + P_3 n_1 n_2,$$

$$P_{xz} = P_1 l_1 l_3 + P_2 m_1 m_3 + P_3 n_1 n_3,$$

$$P_{yz} = P_1 l_3 l_2 + P_2 m_3 m_2 + P_3 n_3 n_2,$$

$$e_{xx} = e_1 l_1^2 + e_2 m_1^2 + e_3 n_1^2,$$

$$e_{yy} = e_1 l_2^2 + e_2 m_2^2 + e_3 n_2^2,$$

$$e_{zz} = e_1 l_3^2 + e_2 m_3^2 + e_3 n_3^2,$$

$$e_{xy} = e_1 l_1 l_2 + e_2 m_1 m_2 + e_3 n_1 n_2,$$

$$e_{xz} = e_1 l_1 l_3 + e_2 m_1 m_3 + e_3 n_1 n_3,$$

$$e_{yz} = e_1 l_3 l_2 + e_2 m_3 m_2 + e_3 n_3 n_2.$$

Подставим в определение e_{xx} полученные в предыдущем разделе соотношения закона Гука для главных осей координат $e_i = \frac{1}{E} P_i - \frac{\sigma}{E} s$:

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \left(\frac{1}{E} P_1 - \frac{\sigma}{E} s \right) l_1^2 + \left(\frac{1}{E} P_2 - \frac{\sigma}{E} s \right) m_1^2 + \left(\frac{1}{E} P_3 - \frac{\sigma}{E} s \right) n_1^2 = \\ &= \frac{1 + \sigma}{E} (P_1 l_1^2 + P_2 m_1^2 + P_3 n_1^2) - \frac{\sigma}{E} s (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2). \end{aligned}$$

В первых скобках – выражение для P_{xx} через главное напряжение; сумма, заключённая во вторые скобки, равна 1:

$$e_{xx} = \frac{1 + \sigma}{E} P_{xx} - \frac{\sigma}{E} s = \frac{1}{E} P_{xx} - \frac{\sigma}{E} P_{yy} - \frac{\sigma}{E} P_{zz}.$$

Запишем по аналогии для двух других удлинений:

$$e_{yy} = \frac{1 + \sigma}{E} P_{yy} - \frac{\sigma}{E} s = \frac{1}{E} P_{yy} - \frac{\sigma}{E} P_{xx} - \frac{\sigma}{E} P_{zz},$$

$$e_{zz} = \frac{1 + \sigma}{E} P_{zz} - \frac{\sigma}{E} s = \frac{1}{E} P_{zz} - \frac{\sigma}{E} P_{xx} - \frac{\sigma}{E} P_{yy}.$$

Как видим, соотношения для удлинений и нормальных напряжений инвариантны к выбору системы координат.

Произведём те же действия для сдвиговой деформации:

$$\begin{aligned} e_{yz} &= \left(\frac{1}{E} P_1 - \frac{\sigma}{E} s \right) l_2 l_3 + \left(\frac{1}{E} P_2 - \frac{\sigma}{E} s \right) m_2 m_3 + \\ &+ \left(\frac{1}{E} P_3 - \frac{\sigma}{E} s \right) n_2 n_3 = \frac{1 + \sigma}{E} (P_1 l_2 l_3 + P_2 m_2 m_3 + P_3 n_2 n_3) - \\ &- \frac{\sigma}{E} s (l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3). \end{aligned}$$

В первых скобках – определение для P_{yz} ; во вторых – 0, поэтому:

$$e_{yz} = \frac{1 + \sigma}{E} P_{yz}.$$

По аналогии для других сдвиговых деформаций запишем:

$$e_{xy} = \frac{1 + \sigma}{E} P_{xy}, \quad e_{xz} = \frac{1 + \sigma}{E} P_{xz}.$$

Если бы целью вывода было выражение деформаций через напряжения, то цель достигнута. Однако для вывода уравнений динамического равновесия в упругих смещениях необходима обратная зависимость – напряжения как функции деформаций. Это связано с тем, что основой для этого вывода служат уравнения Коши – уравнения динамического равновесия в напряжениях.

Получить обратную зависимость для сдвиговых деформаций и касательных напряжений не составляет никакого труда:

$$P_{yz} = \frac{E}{1 + \sigma} e_{yz}, \quad P_{xy} = \frac{E}{1 + \sigma} e_{xy}, \quad P_{xz} = \frac{E}{1 + \sigma} e_{xz}.$$

Для удлинений и нормальных напряжений это сделать сложнее. Приходится рассматривать полученные уравнения связи как систему трех уравнений с тремя неизвестными: P_{xx} , P_{yy} , P_{zz} . Решение системы осуществим по правилу Крамера. Из коэффициентов при неизвестных образуем и вычислим главный определитель системы (DM):

$$DM = \begin{vmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\sigma}{E} & -\frac{\sigma}{E} \\ -\frac{\sigma}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\sigma}{E} \\ -\frac{\sigma}{E} & -\frac{\sigma}{E} & \frac{1}{E} \end{vmatrix} = \frac{1}{E^3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -\sigma & -\sigma \\ -\sigma & 1 & -\sigma \\ -\sigma & -\sigma & 1 \end{vmatrix} = \\ = \frac{(1 + \sigma)^2(1 - 2\sigma)}{E^3}.$$

Определители для неизвестных получают из главного определителя заменой соответствующего столбца его столбцом свободных членов уравнений (у нас e_{xx} , e_{yy} , e_{zz}). Например, для первой неизвестной P_{xx} :

$$D1 = \begin{vmatrix} e_{xx} & -\frac{\sigma}{E} & -\frac{\sigma}{E} \\ e_{yy} & \frac{1}{E} & -\frac{\sigma}{E} \\ e_{zz} & -\frac{\sigma}{E} & \frac{1}{E} \end{vmatrix} = \frac{1}{E^2} \cdot \begin{vmatrix} e_{xx} & -\sigma & -\sigma \\ e_{yy} & 1 & -\sigma \\ e_{zz} & -\sigma & 1 \end{vmatrix} = \\ = \frac{1 + \sigma}{E^2} (\sigma \Theta + e_{xx}(1 - \sigma)),$$

где $\Theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}$. Тогда неизвестное напряжение P_{xx} определяется как частное от деления $D1$ на DM :

$$P_{xx} = \frac{D1}{DM} = \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \Theta + \frac{E}{1 - \sigma} e_{xx}.$$

По аналогии, без вывода, запишем для двух других нормальных напряжений:

$$P_{yy} = \frac{D2}{DM} = \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \Theta + \frac{E}{1 - \sigma} e_{yy}, \\ P_{zz} = \frac{D3}{DM} = \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \Theta + \frac{E}{1 - \sigma} e_{zz}.$$

Заметим, что в полученных выражениях множители при удлинениях и сдвигах одни и те же. Для сокращения записи вводят новые упругие константы, предложенные Ламэ и носящие его имя:

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}.$$

Тогда, окончательно, общие соотношения закона Гука принимают вид, удобный для записи, восприятия и запоминания:

$$P_{xx} = \lambda\Theta + 2\mu e_{xx},$$

$$P_{yy} = \lambda\Theta + 2\mu e_{yy},$$

$$P_{zz} = \lambda\Theta + 2\mu e_{zz},$$

$$P_{xy} = 2\mu e_{xy},$$

$$P_{xz} = 2\mu e_{xz},$$

$$P_{yz} = 2\mu e_{yz}.$$

Одна из двух математических констант Ламэ имеет явный физический смысл: μ является модулем сдвига, константой связи касательных напряжений и сдвиговых деформаций.

Глава 4. Кинематические уравнения динамического равновесия

В теории напряжений были получены уравнения Коши, удовлетворение которых обеспечивает динамическое равновесие упругой среды. В каждый момент времени, в каждой точке среды сумма всех сил — внутренних (напряжений) и внешних — должна уравниваться силой инерции. Поставим задачу перейти от этих уравнений к уравнению динамического равновесия среды в упругих смещениях. Для удобства перехода соберём вместе итоговые определения деформаций, напряжений и уравнения связи между ними.

4.1. Полная система уравнений для идеально упругой изотропной среды

Из теории деформаций, изучающей кинематику упругих процессов и описывающей упругие смещения и вызванные ими изменения формы и размеров элементов среды, возникающие под действием внешних сил, известно, что малая деформация полностью описывается тремя видами компонент: удлинениями, сдвигами и поворотами.

Удлинение определяется как относительное изменение линейных размеров тела вдоль заданного направления. Удлинения вдоль координатных осей описываются следующим образом:

$$e_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x}; \quad e_{yy} = \frac{\partial U_y}{\partial y}; \quad e_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z}.$$

Отметим, что сумма удлинений инвариантна к преобразованию координат и является дилатацией Θ (т.е. относительным объёмным рас-

ширением), или дивергенцией $\operatorname{div} \vec{U}$ вектора относительного смещения $\vec{U} = U_x \cdot \vec{i} + U_y \cdot \vec{j} + U_z \cdot \vec{k}$:

$$\Theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{U}.$$

Сдвиговые компоненты показывают скошения изначально прямых углов и вводятся следующим образом:

$$e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right); \quad e_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right);$$

$$e_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right).$$

Очевидно, что $e_{xy} = e_{yx}$, $e_{xz} = e_{zx}$, $e_{yz} = e_{zy}$.

Повороты свидетельствуют об общем вращении соответствующей координатной плоскости:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right); \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right);$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right).$$

Множитель $\frac{1}{2}$ при определении сдвигов и поворотов введён как масштабный — для описания деформации в виде единообразного тензора второго ранга.

В теории напряжений получены уравнения динамического равновесия (уравнения Коши), отображающие динамику упругого процесса:

$$\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} + \rho \left(F_x - \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial z} + \rho \left(F_y - \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} + \rho \left(F_z - \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2} \right) = 0.$$

Эти уравнения связывают компоненты тензора напряжения и компоненты векторов внешней силы \vec{F} и силы инерции $\frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2}$. Установлено

также, что касательные напряжения попарно равны ($P_{xy} = P_{yx}$ и т.д.), а сумма нормальных напряжений инвариантна к выбору системы координат: $P_{xx} + P_{yy} + P_{zz} = C$, где C — константа для данного напряжённого состояния, не зависящая от того, в какой системе координат она определена.

Третья группа соотношений описывает закон Гука и устанавливает связь между напряжениями и деформациями:

$$P_{xx} = \lambda\Theta + 2\mu e_{xx},$$

$$P_{yy} = \lambda\Theta + 2\mu e_{yy},$$

$$P_{zz} = \lambda\Theta + 2\mu e_{zz},$$

$$P_{xy} = 2\mu e_{xy},$$

$$P_{xz} = 2\mu e_{xz},$$

$$P_{yz} = 2\mu e_{yz}.$$

Здесь λ и μ — константы Ламэ, E и σ — физические константы — модуль Юнга и коэффициент Пуассона соответственно.

Таким образом, для описания всех сторон упругих процессов в идеально упругой однородной изотропной среде требуются всего две константы — λ и μ (или E и σ , или, как будет показано позже, V_P и V_S) — и 18 уравнений и определений ($9 + 3 + 6$), не считая описаний свойств деформаций и напряжений, как тензора ранга 2. Однако упругий процесс в среде един в разных своих измерениях, и потому существует его единое и единственное описание — уравнение динамического равновесия в упругих смещениях, являющееся, как станет ясно из анализа его решения, волновым уравнением — математическим описанием процесса распространения упругой волны в среде.

4.2. Уравнения динамического равновесия в упругих смещениях

Проведём вывод на примере преобразований первого из трех уравнений Коши:

$$\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} + \rho \left(F_x - \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \right) = 0.$$

Подставим в это уравнение соотношение закона Гука для входящих в него компонент напряжения:

$$P_{xx} = \lambda\Theta + 2\mu e_{xx}, \quad P_{xy} = 2\mu e_{xy}, \quad P_{xz} = 2\mu e_{xz}.$$

Поскольку λ и μ — константы для однородной среды и не являются функциями координат, они выходят за знак дифференцирования при подстановке определений компонент напряжения в рассматриваемое уравнение Коши:

$$\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial e_{xx}}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial e_{yx}}{\partial y} + 2\mu \frac{\partial e_{zx}}{\partial z} + \rho \left(F_x - \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \right) = 0.$$

Используем кинематические определения компонент чистой деформации:

$$e_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x}; \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial y} + \frac{\partial U_y}{\partial x} \right); \quad e_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right).$$

Получим:

$$\lambda \frac{\partial \Theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial z} + \mu \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial z} \rho \left(F_x - \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \right) = 0.$$

«Чистые» вторые производные компоненты смещения U_x по x , y , z можно объединить одним знаком лапласиана:

$$\mu \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_x}{\partial z^2} \right) = \mu \nabla^2 U_x,$$

а оставшиеся производные $\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial z}$ содержат общее дифференцирование по x :

$$\mu \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial x \partial z} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) = \mu \frac{\partial \Theta}{\partial x}.$$

Здесь использовано определение дилатации: $\Theta = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$.

Поэтому преобразованное первое уравнение Коши может быть записано в более компактной форме:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 U_x + \rho \left(F_x - \frac{\partial^2 U_x}{\partial t^2} \right) = 0.$$

Без вывода, по аналогии запишем результаты таких же преобразований второго и третьего уравнений Коши:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 U_y + \rho \left(F_y - \frac{\partial^2 U_y}{\partial t^2} \right) = 0,$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 U_z + \rho \left(F_z - \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2} \right) = 0.$$

Полученные скалярные уравнения динамического равновесия в упругих смещениях носят название *уравнения Ламэ*. Они связывают координатные компоненты вектора внешней массовой силы: $\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} + F_z \cdot \vec{k}$, вектора упругих относительных смещений: $\vec{U} = U_x \cdot \vec{i} + U_y \cdot \vec{j} + U_z \cdot \vec{k}$, а также градиента относительного объёмного расширения — дилатации Θ : $\text{grad } \Theta = \vec{\nabla} \Theta = \frac{\partial \Theta}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \Theta}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \Theta}{\partial z} \cdot \vec{k}$.

Поскольку Θ есть дивергенция вектора смещения \vec{U} : $\Theta = \text{div } \vec{U}$, то $\text{grad } \Theta = \text{grad div } \vec{U}$.

Учитывая эти определения, умножим первое уравнение Коши на \vec{i} , второе — на \vec{j} , третье — на \vec{k} , сложим их и получим векторное уравнение динамического равновесия:

$$(\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{U} + \mu \nabla^2 \vec{U} + \rho \left(\vec{F} - \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \right) = 0.$$

Для придания этому уравнению вида, более приближенного к сейсмическим процессам, воспользуемся известным соотношением векторного анализа:

$$\text{rot rot } \vec{U} = \text{grad div } \vec{U} - \nabla^2 \vec{U},$$

из которого определим

$$\nabla^2 \vec{U} = \text{grad div } \vec{U} - \text{rot rot } \vec{U},$$

и представим уравнение в виде

$$(\lambda + 2\mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{U} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{U} + \rho \left(\vec{F} - \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} \right) = 0.$$

Теперь разделим уравнение на плотность ρ и определим новые упругие константы:

$$V_P^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad V_S^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

Оставляя в левой части уравнения слагаемые, содержащие вектор упругого смещения \vec{U} , получим окончательно:

$$V_P^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{U} - V_S^2 \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{U} - \frac{\partial^2 \vec{U}}{\partial t^2} = -\vec{F}.$$

Таким образом, условие динамического равновесия среды может быть описано либо тремя скалярными уравнениями Ламэ, либо единым векторным уравнением. Эта вторая форма имеет ясное физическое истолкование. Справа в уравнении стоит \vec{F} — вектор внешней массовой силы, возбуждающий в среде упругие колебания. В левой части расположено слагаемое, содержащее дилатацию $\operatorname{div} \vec{U}$ с множителем V_P^2 — это описание продольных колебаний, связанных с изменениями элементарных объёмов. Второе слагаемое с множителем V_S^2 содержит $\operatorname{rot} \vec{U}$ и описывает вращательные поперечные смещения. Последнее слагаемое в левой части уравнения есть «остаток» от силы инерции — ускорения упругого смещения. Уравнение в целом является математическим выражением физического принципа Даламбера — сумма всех сил, исключая силу инерции, равна 0 — в его «переложении на язык» упругих смещений.

4.3. Частные формы уравнения динамического равновесия

4.3.1. Безвихревое поле

Если поле упругих смещений \vec{U} безвихревое, то есть $\vec{U} = \vec{U}_p$ и $\text{rot } \vec{U} = 0$, то оно описывается векторным уравнением

$$V_P^2 \text{grad div } \vec{U}_P - \frac{\partial^2 \vec{U}_P}{\partial t^2} = -\vec{F}_P.$$

При этом в выражении $\nabla^2 \vec{U}_P = \text{grad div } \vec{U}_P - \text{rot rot } \vec{U}_P$ второй член правой части равен 0, и $\nabla^2 \vec{U}_P = \text{grad div } \vec{U}_P$.

Тогда можно записать:

$$V_P^2 \nabla^2 \vec{U}_P - \frac{\partial^2 \vec{U}_P}{\partial t^2} = -\vec{F}_P.$$

4.3.2. Эквиволюмиальное поле

Если упругое поле таково, что отсутствует изменение объёма, то есть равна нулю дилатация: $\Theta = \text{div } \vec{U} = 0$, то оно называется эквиволюмиальным полем вращений ($\vec{U} = \vec{U}_S$) и описывается уравнением

$$-V_S^2 \text{rot rot } \vec{U}_S - \frac{\partial^2 \vec{U}_S}{\partial t^2} = -\vec{F}_S.$$

При этом в выражении для $\nabla^2 \vec{U}_S = \text{grad div } \vec{U}_S - \text{rot rot } \vec{U}_S$ первый член правой части равен 0, и $\nabla^2 \vec{U}_S = -\text{rot rot } \vec{U}_S$.

Тогда уравнение принимает вид

$$V_S^2 \nabla^2 \vec{U}_S - \frac{\partial^2 \vec{U}_S}{\partial t^2} = -\vec{F}_S.$$

4.3.3. Уравнение для дилатации вектора упругих смещений

Продифференцируем первое уравнение Ламэ по x , второе — по y , третье — по z , а результаты сложим:

$$(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right) + \mu \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 U_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} \right) + \rho \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \right) = 0.$$

В первых скобках - лапласиан дилатации:

$$\nabla^2 \Theta = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} = \nabla^2 \operatorname{div} \vec{U},$$

во вторых и третьих скобках — дивергенция векторов \vec{U} и \vec{F}

$$\operatorname{div} \vec{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

Поэтому два первых члена уравнения можно объединить, добавив вторую константу Ламэ μ к множителю $(\lambda + \mu)$:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \operatorname{div} \vec{U} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} \vec{U} = -\rho \operatorname{div} \vec{F}.$$

Разделив уравнение на ρ и введя $V_P^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$, получим окончательно:

$$V_P^2 \nabla^2 \operatorname{div} \vec{U} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} \vec{U} = -\operatorname{div} \vec{F}.$$

В другой форме:

$$V_P^2 \nabla^2 \Theta - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} = -\phi,$$

где $\phi = \operatorname{div} \vec{F}$.

4.3.4. Уравнение для ротации вектора упругих смещений

Продифференцируем третье уравнение Ламэ по y , второе — по z и вычтем второй результат дифференцирования из первого:

$$(\lambda + \mu) \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 \Theta}{\partial y \partial z} \right) + \mu \nabla^2 \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) + \rho \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) \right) = 0.$$

В первых скобках, очевидно, 0, а в оставшихся членах уравнения — x -компоненты $\text{rot } \vec{U}$ и $\text{rot } \vec{F}$:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{U} &= \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) \vec{k}, \\ \text{rot } \vec{F} &= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \end{aligned}$$

Для получения y - и z -компонент ротации векторов \vec{U} и \vec{F} нужно вычислить $\left(\frac{\partial}{\partial z} \{1\} - \frac{\partial}{\partial x} \{3\} \right)$ и $\left(\frac{\partial}{\partial x} \{2\} - \frac{\partial}{\partial y} \{1\} \right)$, где цифрами в фигурных скобках обозначены первое, второе и третье уравнения Ламэ.

Объединяя все проекции в один вектор, получим уравнение для ротации произвольно ориентированного вектора упругих смещений:

$$V_S^2 \nabla^2 \text{rot } \vec{U} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \text{rot } \vec{U} = - \text{rot } \vec{F}.$$

4.3.5. Уравнение для скалярного потенциала смещений

Используем уравнение для дивергенции $\Theta = \text{div } \vec{U}$ и подставим туда формулу Гельмгольца для вектора относительных смещений \vec{U} и возбуждающей силы \vec{F} :

$$\vec{U} = \text{grad } \Phi + \text{rot } \vec{\Psi}, \quad \vec{F} = \text{grad } \Upsilon + \text{rot } \vec{\Gamma},$$

где Φ и Υ — скалярные, а $\vec{\Psi}$ и $\vec{\Gamma}$ — векторные потенциалы векторов смещений и внешней силы соответственно.

Получим:

$$\begin{aligned} V_P^2 \nabla^2 \operatorname{div}(\operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \vec{\Psi}) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \vec{\Psi}) = \\ = -\operatorname{div}(\operatorname{grad} \Upsilon + \operatorname{rot} \vec{\Gamma}). \end{aligned}$$

Заметим, что $\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \Phi) = \nabla^2 \Phi$.

Аналогично $\operatorname{div} \operatorname{grad} \Upsilon = \nabla^2 \Upsilon$.

Кроме того, $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{\Psi} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \Phi) = 0$, так как $\vec{\nabla}$ и $\vec{\nabla} \times \Phi$ — взаимно перпендикулярные векторы, скалярное произведение которых равно 0.

Аналогично $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{\Gamma} = 0$.

Поэтому уравнение принимает вид:

$$V_P^2 \nabla^2 (\nabla^2 \Phi) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 \Phi) = -\nabla^2 \Upsilon.$$

Меняя порядок дифференцирования, можно записать:

$$\nabla^2 \left(V_P^2 \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \Upsilon \right) = 0.$$

С точностью до линейной зависимости $\Phi(x, y, z) = ax + by + cz$ отсюда следует уравнение для скалярного потенциала упругих смещений:

$$V_P^2 \nabla^2 \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\Upsilon.$$

4.3.6. Уравнение для вектор-потенциала смещений

Подставим формулу Гельмгольца в уравнение для ротации векторов \vec{U} и \vec{F} :

$$V_S^2 \operatorname{rot}(\operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \vec{\Psi}) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \vec{\Psi}) = -\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \Upsilon + \operatorname{rot} \vec{\Gamma}).$$

Но $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \Phi) = 0$ и аналогично $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Upsilon = 0$.

Так как вихревое поле упругих вращений является эквиволюмиальным, то $\operatorname{div} \vec{\Psi} = 0$ и $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\Psi} = -\nabla^2 \vec{\Psi}$.

Аналогично $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\Gamma} = -\nabla^2 \vec{\Gamma}$.

Поэтому уравнение примет вид:

$$V_S^2 \nabla^2 (-\nabla^2 \Psi) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 \Psi) = -\nabla^2 \Gamma.$$

Меняя порядок дифференцирования, можно записать:

$$\nabla^2 \left(V_S^2 \nabla^2 \Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \Gamma \right) = 0.$$

С точностью до линейной функции $\Psi(x, y, z) = \vec{a}x + \vec{b}y + \vec{c}z$ отсюда следует уравнение для скалярного потенциала упругих смещений:

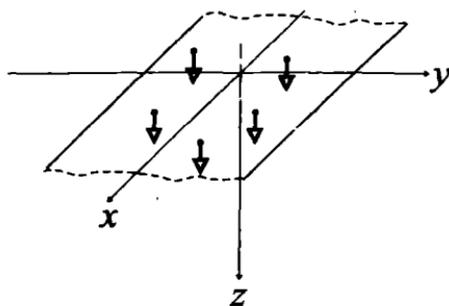
$$V_S^2 \nabla^2 \Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = -\Gamma.$$

4.3.7. Колебания, возбуждаемые жёстким экраном

Рассмотрим ещё один частный случай — уравнения Ламэ для упругих колебаний, возбуждаемых жёстким экраном. Предположим, что с плоскостью xOy совмещен жёсткий бесконечный по x и y экран (рис. 4.1).

Жёсткость экрана означает, что все точки этой поверхности испытывают одни и те же смещения: $\vec{U} = U_x \cdot \vec{i} + U_y \cdot \vec{j} + U_z \cdot \vec{k}$. Векторы возбуждающей силы и упругих смещений являются функциями только одной пространственной координаты z и не зависят от x и y , т.е. $\vec{U} = \vec{U}(z, t)$ и $\vec{F} = \vec{F}(z, t)$. Поэтому $\frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial y} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial y} = 0$. Тогда

Рис. 4.1. Колебания плоского жёсткого экрана в безграничной среде



лапласиан равен $\nabla^2 \vec{U} = \frac{\partial^2 \vec{U}_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \vec{U}_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \vec{U}_z}{\partial z^2}$, а дилатация определяется лишь одним членом: $\Theta = \frac{\partial \vec{U}_z}{\partial z}$.

Первые два уравнения Ламэ при этом принимают вид:

$$\mu \frac{\partial^2 \vec{U}_x}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2 \vec{U}_x}{\partial t^2} = -\rho F_x, \quad \mu \frac{\partial^2 \vec{U}_y}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2 \vec{U}_y}{\partial t^2} = -\rho F_y,$$

или при переходе к константам V_P^2, V_S^2 :

$$V_S^2 \frac{\partial^2 \vec{U}_x}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \vec{U}_x}{\partial t^2} = -F_x, \quad V_S^2 \frac{\partial^2 \vec{U}_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \vec{U}_y}{\partial t^2} = -F_y.$$

В третьем уравнении Ламэ содержатся подобные члены $(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \vec{U}_z}{\partial z^2}$ и $\mu \frac{\partial^2 \vec{U}_z}{\partial z^2}$, поэтому уравнение может быть представлено в виде:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \vec{U}_z}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2 \vec{U}_z}{\partial t^2} = -\rho F_z,$$

или при переходе к константам V_P^2, V_S^2 :

$$V_P^2 \frac{\partial^2 \vec{U}_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \vec{U}_z}{\partial t^2} = -F_z.$$

Как видно, снова форма уравнений одна и та же. Только x - и y -компоненты вектора смещения описываются уравнениями с множителем V_S^2 . Смещения U_x и U_y распространяются как поперечные. Смещение U_z описывается уравнением с множителем V_P^2 и распространяется как продольное, поскольку ось Oz — направление распространения.

4.3.8. Обобщение частных случаев

Как видно из анализа рассмотренных частных случаев, все частные случаи уравнений имеют одну и ту же форму:

$$V^2 \nabla^2 Q - \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = -P.$$

$$\text{Если } P = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_P \\ \operatorname{div} \vec{F}_P \\ \Upsilon \end{array} \right\}, \text{ то } Q = \left\{ \begin{array}{c} \vec{U}_P \\ \operatorname{div} \vec{U}_P = \Theta \\ \Phi \end{array} \right\} \text{ и } V = V_P.$$

$$\text{Если } P = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_S \\ \operatorname{rot} \vec{F}_S \\ \Gamma \end{array} \right\}, \text{ то } Q = \left\{ \begin{array}{c} \vec{U}_S \\ \operatorname{rot} \vec{U}_S \\ \Psi \end{array} \right\} \text{ и } V = V_S.$$

Заметим, что продольные смещения, дивергенция произвольного вектора смещения (дилатация) и скалярный потенциал описываются уравнениями с одним и тем же множителем V_P^2 . Поперечные смещения, ротация произвольного вектора смещения и векторный потенциал упругих смещений описываются такими же уравнениями, но с множителем V_S^2 . Это свидетельствует о том, что дивергенция и скалярный потенциал соответствуют продольным смещениям, а ротация и вектор-потенциал — поперечным смещениям.

Все полученные частные уравнения динамического равновесия являются дифференциальными уравнениями 2-го порядка, наличие правой части определяет их как неоднородные уравнения. В математике решение неоднородного дифференциального уравнения (с правой частью) вначале редуцируется к нахождению общего решения соответствующего однородного уравнения, а затем ищется частное решение подстановкой правой части в полученное общее решение.

В сейсморазведке обнуление правой части уравнения динамического равновесия соответствует «отключению» источника сейсмических колебаний — возбуждающей массовой силы \vec{F} . Но без причины никакие упругие процессы в среде не возникают. Поэтому решать приходится всё же неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Однако решение можно упростить, если считать, что источник сейсмических колебаний действует практически мгновенно, в момент $t = 0$. В любой иной момент времени $t \neq 0$ источник отсутствует и можно рассматривать однородное дифференциальное уравнение с нулевой правой частью и искать его решение. Найдя это решение, надо учесть начальные ($t = 0$) или граничные ($x, y, z = 0$) условия. Это позволяет конкретизировать решение, привязав его к определённому описанию действия источника.

Существует и более общий подход к решению дифференциальных уравнений с применением спектральных преобразований, которые сводят дифференциальные уравнения к алгебраическим уравнениям для спектров функций источника $P(\omega)$ и упругих процессов $Q(\omega)$.

Глава 5. Решение уравнений динамического равновесия

Все полученные в предыдущем разделе виды уравнения динамического равновесия для идеально упругой среды являются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка в частных производных. Используем для решения типового уравнения наиболее общий спектральный метод и применим математический аппарат аналитического исследования линейных систем.

5.1. Спектральный метод решения

Рассмотрим типичное уравнение динамического равновесия упругой среды:

$$V^2 \nabla^2 Q - \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = -P,$$

где $P = P(x, y, z, t)$ — функция, описывающая действие источника, а $Q = Q(x, y, z, t)$ — искомая функция, описывающая упругие процессы в среде с параметром V .*

* Решение такого уравнения стандартно ищется в два этапа. Вначале находится фундаментальное решение (называемое *функцией Грина*) уравнения $V^2 \nabla^2 G - \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \delta(x, y, z, t)$, то есть уравнения с импульсным точечным источником в правой части; а затем — решение исходного уравнения как свёртка функции Грина и функции источника: $Q(x, y, z, t) = P * G$. (Прим. ред.)

Зададим функцию источника в виде произведения двух сепарабельных (с разделёнными переменными) функций:

$$P(z, t) = \delta(z) \cdot \frac{d^2 U_1(t)}{dt^2}.$$

Здесь $\delta(z)$ — импульс Дирака, соответствующий возбуждению колебаний всей плоскостью ($z = 0$) как жестким экраном; $U_1(t)$ — функция времени, описывающая смещения, задаваемые источником; $\frac{d^2 U_1(t)}{dt^2}$ — ускорение этого смещения.

Тогда и функция Q , описывающая упругие процессы, возбуждаемые жестким экраном, также является функцией лишь двух переменных: $Q = Q(z, t) = U_2(z, t)$.

В этих ограничениях $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ и $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, а уравнение принимает вид

$$V^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} = -\delta(z) \cdot \frac{d^2 U_1(t)}{dt^2}.$$

После умножения на -1 и перестановки членов в левой части получим:

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} - V^2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} = \delta(z) \cdot \frac{d^2 U_1(t)}{dt^2}.$$

Решение уравнения динамического равновесия должно установить связь между функцией источника $U_1(t)$, и излучаемым им сигналом $U_2(t)$. Задача является типичной для теории линейных систем — зная сигнал на входе системы и её характеристики, найти сигнал на выходе системы.

Применим к полученному уравнению двумерное преобразование Фурье по переменным $t \leftrightarrow \omega$, $z \leftrightarrow \nu$, где ω — круговая частота (рад/с), ν — круговое волновое число, или пространственная частота (рад/м). Пусть сигнал $U_1(t)$ имеет одномерный спектр $\tilde{U}_1(\omega)$, а выходной сигнал $U_2(t, z)$ — двумерный спектр $\tilde{U}_2(\omega, \nu)$. Импульсу Дирака соответствует спектр, равный 1, — константа по переменной ν : $\delta(z) \leftrightarrow 1$. Тогда в соответствии с теоремой о спектре сепарабельных функций:

$$\delta(z)U_1(t) \leftrightarrow 1\tilde{U}_1(\omega).$$

Используя теорему о спектре производной, найдем:

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2} \leftrightarrow (j\omega)^2 \tilde{U}_1(\omega),$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2} \leftrightarrow (j\omega)^2 \tilde{U}_2(\omega, \nu),$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} \leftrightarrow (j\nu)^2 \tilde{U}_2(\omega, \nu).$$

Данное утверждение верно при нулевых начальных и граничных условиях для функций смещения и их производных:

$$U_1|_{t=0} = \frac{dU_1}{dt}|_{t=0} = 0,$$

$$U_2(0, z) = U_2(t, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial U_2(0, z)}{\partial z} = \frac{\partial U_2(0, z)}{\partial t} = \frac{\partial U_2(t, 0)}{\partial z} = \frac{\partial U_2(t, 0)}{\partial t} = 0.$$

В этих определениях переведем уравнение динамического равновесия из пространственно - временной (t, z) в спектральную частотно - волновую (ω, ν) форму:

$$((j\omega)^2 - (j\nu V)^2) \tilde{U}_2(\omega, \nu) = 1 \cdot (j\omega)^2 \tilde{U}_1(\omega).$$

Отсюда определим *спектральную частотно-волновую характеристику* среды $\tilde{K}(\omega, \nu)$ как отношение спектра сигнала на выходе $\tilde{U}_2(\omega, \nu)$ к спектру сигнала на входе $\tilde{U}_1(\omega)$:

$$\tilde{K}(\omega, \nu) = \frac{\tilde{U}_2(\omega, \nu)}{\tilde{U}_1(\omega)} = \frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2 - (j\nu V)^2} = -\frac{\left(\frac{j\omega}{V}\right)^2}{(j\omega)^2 - \left(\frac{j\omega}{V}\right)^2}.$$

Из определения $\tilde{K}(\omega, \nu)$ следует: $\tilde{U}_2(\omega, \nu) = \tilde{K}(\omega, \nu) \cdot \tilde{U}_1(\omega)$.

В соответствии со спектральной теоремой свертывания, произведению Фурье-трансформант одного типа соответствует свёртка соответствующих Фурье-трансформант другого типа:

$$\tilde{U}_2(\omega, \nu) \xrightarrow{Fu} U_2(t, z) = k(t, z) * U_1(t).$$

Здесь $k(t, z)$ – импульсная пространственно-временная характеристика среды и $k(t, z) \leftrightarrow \tilde{K}(\omega, \nu)$.

Таким образом, для спектрального решения уравнения равновесия надо найти импульсную характеристику среды. Используем для этого теорему разложения Хевисайда, обычно применяемую для аналитического исследования линейных систем.

Обозначим $p = j\nu$, $q = j\frac{\omega}{V}$ и будем считать вначале p переменной величиной, а q – константой. При таком подходе

$$\tilde{K}(\omega, \nu) = \tilde{K}(p, q = \text{const}) = \tilde{K}_q(p),$$

– спектральная волновая характеристика среды по параметру q (для гармоники частоты ω):

$$\tilde{K}_q(p) = -\frac{q^2}{p^2 - q^2}.$$

В соответствии с теоремой Хевисайда, линейная система с функцией передачи $\tilde{K}(p)$, представимой частным от деления степенного многочлена степени m числителя на такой же многочлен степени n знаменателя ($\tilde{K}_a(p)$, $\tilde{K}_b(p)$ соответственно и $m < n$):

$$\tilde{K}(p) = \frac{p^m + a_{m-1}p^{m-1} + a_{m-2}p^{m-2} + \dots + a_1p + a_0}{p^n + b_{n-1}p^{n-1} + b_{n-2}p^{n-2} + \dots + b_1p + b_0} = \frac{\tilde{K}_a(p)}{\tilde{K}_b(p)}$$

имеет импульсную характеристику (в нашем случае функцию z) вида

$$k(z) = \sum_{i=1}^n \frac{\tilde{K}_a(p_i)}{\tilde{K}_b'(p_i)} \cdot e^{p_i z}.$$

Здесь p_i – корни знаменателя, т.е. результат решения уравнения $\tilde{K}_b(p) = 0$; $\tilde{K}_b'(p) = \frac{d\tilde{K}_b(p)}{dp}$ – производная многочлена знаменателя по переменной p , и $\tilde{K}_b'(p_i)$ – значение этой производной при $p = p_i$. Аналогично $\tilde{K}_a(p_i)$ – значение многочлена числителя при том же аргументе $p = p_i$.

В рассматриваемой волновой характеристике $\tilde{K}_q(p)$ по параметру q в числителе – постоянная величина, не зависящая от p : $\tilde{K}_a = -q^2$. Многочлен знаменателя и его производная равны: $\tilde{K}_b(p) = p^2 - q^2$,

$\tilde{K}'_b(p) = 2p$. Приравнявая $\tilde{K}_b(p)$ нулю: $p^2 - q^2 = 0$, найдём корни знаменателя: $p_{1,2} = \pm q$. Тогда $\tilde{K}'_b(p_{1,2}) = \pm 2q$.

Используя формулу Хевисайда, найдём пространственную характеристику среды по параметру q :

$$k_q(z) = \sum_{i=1}^2 \frac{\tilde{K}_a(p_i)}{\tilde{K}'_b(p_i)} \cdot e^{p_i z} = -q^2 \left(\frac{e^{qz}}{2q} + \frac{e^{-qz}}{-2q} \right) = \frac{q}{2} (e^{qz} - e^{-qz}).$$

Восстановим значение $q = j\frac{\omega}{V}$ и запишем решение как выражение *спектральной пространственно-частотной характеристики* среды: $k_q(z) \equiv k(\omega, z) = \frac{j\omega}{2V} (e^{j\omega \frac{z}{V}} - e^{-j\omega \frac{z}{V}})$.

До получения искомой импульсной пространственно-временной характеристики среды остался один шаг – обратное преобразование Фурье функции $k(\omega, z) \leftrightarrow k(t, z)$, которое можно осуществить простыми рассуждениями. Прежде всего заметим, что множитель $j\omega$ является спектральным «образом» операции дифференцирования по переменной t : $j\omega \leftrightarrow \frac{d}{dt}$ при нулевом начальном условии. Функционалы $e^{\pm j\omega \frac{z}{V}}$ являются функциями запаздывания в соответствии со спектральной теоремой смещения: $U(t \pm \tau) \leftrightarrow \tilde{U}(\omega) \cdot e^{\pm j\omega \tau}$. Наконец, «невидимый» множитель 1 имеет Фурье-трансформанту в виде импульса Дирака: $1 \leftrightarrow \delta(t)$ и $1 \cdot e^{\pm j\omega \frac{z}{V}} \leftrightarrow \delta(t \mp \frac{z}{V})$. Поэтому импульсная пространственно-временная характеристика упругой среды $k(t, z)$ определяется выражением $k(t, z) = \frac{1}{2V} \frac{\partial}{\partial t} (\delta(t - \frac{z}{V}) - \delta(t + \frac{z}{V}))$.

Тогда искомое решение уравнения динамического равновесия может быть найдено свёрткой:

$$U_2(t, z) = k(t, z) * U_1(t) = \frac{1}{2V} \frac{\partial}{\partial t} \left(\delta(t - \frac{z}{V}) - \delta(t + \frac{z}{V}) \right) * U_1(t).$$

Так как операция дифференцирования является линейной, её можно отнести ко второму операнду свёртки:

$$\frac{dU(t)}{dt} * U_1(t) \leftrightarrow \tilde{U}(\omega) \cdot j\omega \cdot \tilde{U}_1(\omega) \leftrightarrow U(t) * \frac{dU_1(t)}{dt},$$

и тогда

$$U_2(t, z) = \frac{1}{2V} \left(\delta(t - \frac{z}{V}) - \delta(t + \frac{z}{V}) \right) * \frac{dU_1(t)}{dt}.$$

При этом $\frac{dU_1(t)}{dt} = v_1(t)$ — скорость упругого смещения, и решение можно записать в виде

$$U_2(t, z) = \frac{1}{2V} \left(\delta\left(t - \frac{z}{V}\right) - \delta\left(t + \frac{z}{V}\right) \right) * v_1(t),$$

или

$$U_2(t, z) = \frac{1}{2V} \left(v_1\left(t - \frac{z}{V}\right) - v_1\left(t + \frac{z}{V}\right) \right).$$

Здесь использован интеграл Дирака:

$$v_1(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v_1(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = v_1(t),$$

и аналогичное соотношение для свёртки $v_1(t)$ с $\delta(t \pm \frac{z}{V})$:

$$v_1(t) * \delta\left(t \mp \frac{z}{V}\right) = v_1\left(t \pm \frac{z}{V}\right).$$

Таким образом, упругие смещения в среде пропорциональны не смещению, задаваемому источником, а скорости этого смещения. (Для краткости опустим в дальнейшем индекс у скорости смещения, задаваемого источником: $v_1 \equiv v$.)

5.2. Анализ полученного решения

Основной особенностью полученного решения уравнения динамического равновесия является связанность временной и пространственной переменных в аргументах $(t \pm z/V)$, имеющих очевидную размерность времени (с). Тогда константа V должна иметь размерность м/с, если размерность z — метры (м). Становится ясно, что V является скоростью распространения упругого колебательного процесса — *скоростью волны* в среде. Поэтому уравнение динамического равновесия в упругих смещениях можно назвать *волновым уравнением*.

Необходимо строго различать понятия скорость смещения и скорость волны.

Если оценить амплитуду смещения $U_1(t)$ величиной $a = 0.5$ мм — максимальным значением, при котором смещения в среде ещё остаются упругими, период колебаний — величиной $T = 0.02$ с (частота колебаний $f = 1/T = 50$ Гц), то за четверть периода $T/4 = 0.005$ с точка среды смещается на 0.5 мм, и средняя скорость упругого смещения на этом пути равна $v = 100$ мм/с, или 0.1 м/с. При уменьшении амплитуды колебаний скорость смещения частиц уменьшается, а с увеличением частоты — растёт, но во всяком случае скорость упругих смещений измеряется метрами и долями метров в секунду.

Скорость распространения упругих колебаний в среде намного больше — она измеряется сотнями и тысячами метров в секунду. Как видно, понятия скорость смещения и скорость волны описывают просто несопоставимые величины ($v \ll V$!).

Заметим, что скорость распространения волны V является также и амплитудным множителем в полученном решении волнового уравнения: чем больше скорость волны, тем меньше амплитуда колебаний. Обычно более высокоскоростные среды являются и более плотными. Произведение скорости V на плотность ρ ($\gamma = V \cdot \rho$) называют волновым сопротивлением или акустической жёсткостью. Становится ясно, почему в среде с большей скоростью распространения упругой волны амплитуда колебаний меньше — среда как бы сильнее сопротивляется упругим смещениям.

Сосредоточим теперь внимание на первом функционале решения: $v(t - z/V)$. Обозначим волновой аргумент $\tau = t - z/V$. Если τ — константа, то постоянно и значение функции $v(\tau)$. Но из определения τ следует: $z = V(t - \tau)$ и видно, что одному и тому же значению величины $v(\tau)$ соответствует z , увеличивающееся с ростом времени t . Упругая волна распространяется в среде, удаляясь от источника (плоскости xOy) в сторону положительных значений z ($z > 0$). Скорость распространения волны определяется производной $\frac{dz}{dt}$ и равна V .

Во втором функционале решения имеется знак «плюс»: $v(t + z/V)$, $\tau = t + z/V$ и $z = V(\tau - t)$ — удаление z с ростом времени t уменьшается, уходя в отрицательные значения z . Такая форма записи волнового аргумента, следовательно, соответствует упругой волне, распространяющейся в сторону $z < 0$.

Если плоскость $z = 0$ является внутренней плоскостью упругой среды, то оба вида волнового аргумента имеют ясный физический смысл: $t - z/V$ соответствует нисходящей волне (бегущей вниз, τ

нижнее полупространство $z > 0$), а $t + z/V$ – восходящей волне (бегущей вверх, в верхнее полупространство $z < 0$) (рис. 5.1).

Если же, приближаясь к практике сейсморазведки, считать, что поверхность $z = 0$ является дневной поверхностью, то в безграничном нижнем полупространстве $z > 0$ существует только нисходящая волна $v(t - z/V)$.

Так как упругие колебания возбуждаются плоскостью, волна имеет плоский фронт и потому называется плоской упругой волной. Таким образом, полученное решение является решением волнового уравнения для плоской волны, распространяющейся вдоль вертикали Oz .

Как отмечалось, волновой аргумент в решении имеет размерность времени (с). Такая форма представления решения соответствует записи

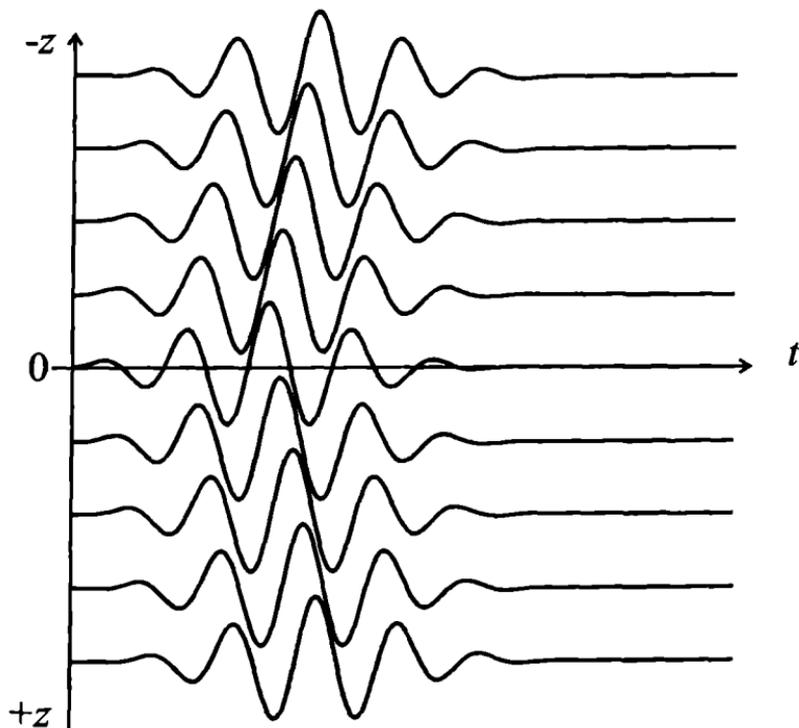


Рис. 5.1. Процесс распространения колебаний как результат решения волнового уравнения

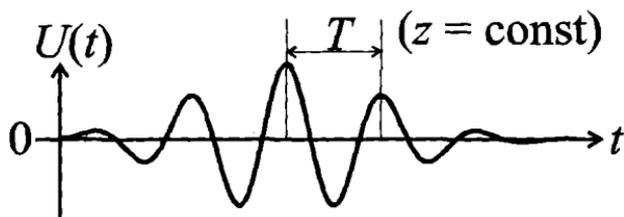


Рис. 5.2. Запись волны

волны. Она описывает, как данная точка среды ($z = \text{const}$) колеблется во времени, т.е. представляет собой временную развёртку упругих колебаний данной точки среды (рис. 5.2).

Мерой упорядоченности записи колебаний является их период T , измеряемый в секундах (с). Обратная величина называется частотой колебаний: $f = 1/T$ (Гц = 1/с). Применяют также круговую (циклическую) частоту $\omega = 2\pi f$ (рад/с). Строго говоря, эти понятия применимы к стационарным гармоническим колебаниям (например, синусоидальным). Для нестационарных, импульсных (коротких по времени существования) колебаний T , f и ω имеют смысл видимых или преобладающих периода и частоты.

Волновой аргумент можно записать и в другой форме, с размерностью длины (м): $t - \frac{z}{V} = \frac{1}{V}(z - Vt)$, тогда: $v(z - Vt) = v\left(-V\left(t - \frac{z}{V}\right)\right)$.

Умножение аргумента записи на $(-V)$ изменяет направление развёртки и её масштаб (рис. 5.3). Форма представления решения в виде $v(z - Vt)$ называется *профилем волны* — это как бы моментальная фотография отклонения разных точек среды в заданный момент времени. Мерой упорядоченности профиля является длина волны Λ (м).

Обратная величина $\kappa = 1/\Lambda$ (м⁻¹) называется *волновым числом*, или *пространственной частотой*. Используется и круговое волновое число $\nu = 2\pi\kappa$ (рад/м).

Понятия длина волны, пространственная частота (волновое число) имеют строгий смысл только для гармонических колебаний, для импульсных они применяются в смысле видимых или преобладающих волновых параметров.

Упругие колебания, регистрируемые в сейсмозаписке, имеют спектры в диапазоне частот, измеряемых единицами, сотнями герц.

Им соответствуют периоды в диапазоне единиц – сотен миллисекунд. Скорость распространения упругих колебаний измеряется сотнями и тысячами метров в секунду. Учитывая очевидное соотношение $\Lambda = VT$ (длина волны есть путь, проходимый волной за время, равное периоду колебания), приведённым оценкам V и T можно поставить в соответствие длины волн, измеряемые величинами от единиц до сотен метров.

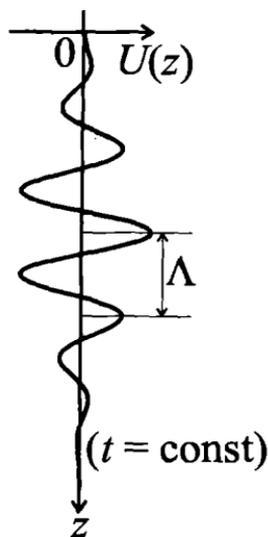


Рис. 5.3. Профиль волны

В практике сейсморазведки упругие колебания возбуждаются не плоскостью $z = 0$, а некоторой малой частью её или малой областью, где действует источник, и можно считать, что колебания возбуждаются точкой. В однородной среде точечный источник возбуждает сферическую волну. По мере распространения волны её фронт выполаживается, и на удалениях, во много раз больших длины волны, фронт можно считать локально плоским. Таким образом, полученное решение описывает упругую сейсмическую волну в дальней от источника области, называемой в физике зоной Фраунгофера. В этой зоне фронт волны является плоским, луч – прямолинейным, и волна распространяется без изменения амплитуды и формы волнового импульса. Очевидно, это – наиболее простая модель сейсмического волнового процесса.

Восстановим обобщённое обозначение волновой функции $Q \equiv v$. Ясно, что волна, распространяющаяся вдоль оси Ox , должна описываться функционалом вида $Q(t - \frac{x}{v})$, а вдоль оси Oy – вида $Q(t - \frac{y}{v})$. По аналогии, плоская волна, бегущая в произвольном направлении OL , может быть описана как $Q(t - \frac{L}{v})$. Направление распространения задаётся направляющими косинусами углов между ним и осями координат:

$$\cos(\widehat{L, x}) \equiv l; \quad \cos(\widehat{L, y}) \equiv m; \quad \cos(\widehat{L, z}) \equiv n.$$

Любой отрезок вдоль OL имеет длину L , которую можно выразить через координаты его конца x, y, z :

$$L = x \cos(\widehat{L, x}) + y \cos(\widehat{L, y}) + z \cos(\widehat{L, z}) = xl + ym + zn.$$

Поэтому для плоской волны, бегущей в направлении OL , функционал Q описывается формулой

$$Q(t, L) \equiv Q(t, x, y, z) = Q\left(t - \frac{xl + ym + zn}{V}\right).$$

Множители при x, y, z в волновом аргументе можно представить в виде:

$$\frac{l}{V} = \frac{\cos(\widehat{L, x})}{V} = \frac{\sin(\widehat{L, p_x})}{V} = \frac{1}{V_x^*},$$

$$\frac{m}{V} = \frac{\cos(\widehat{L, y})}{V} = \frac{\sin(\widehat{L, p_y})}{V} = \frac{1}{V_y^*},$$

$$\frac{n}{V} = \frac{\cos(\widehat{L, z})}{V} = \frac{\sin(\widehat{L, p_z})}{V} = \frac{1}{V_z^*}.$$

Здесь перпендикуляры к осям координат обозначены: p_x, p_y, p_z и введены кажущиеся скорости волны:

$$V_x^* = \frac{V}{\sin(\widehat{L, p_x})}, \quad V_y^* = \frac{V}{\sin(\widehat{L, p_y})}, \quad V_z^* = \frac{V}{\sin(\widehat{L, p_z})}.$$

Кажущиеся скорости определены вдоль осей координат, не совпадающих с направлением распространения волны. Например, V_x^* измерена вдоль оси Ox , с которой луч составляет угол $\widehat{L, x}$, называемый *углом выхода*. Угол между лучом и перпендикуляром к оси, на которой определяется кажущаяся скорость, или между фронтом волны и данной осью, называют *углом падения*, и он дополняет угол выхода до прямого угла. Поэтому $\widehat{L, p_x} = \frac{\pi}{2} - \widehat{L, x}$ и $\sin(\widehat{L, p_x}) = \cos(\widehat{L, x})$.

Так как $\sin(\widehat{L, p_x})$ не больше 1, кажущаяся скорость больше истинной скорости в среде. Если волна бежит вдоль Ox , угол $\widehat{L, x} = \pi/2$ и $V_x^* = V$. Если же волна распространяется по перпендикуляру к Ox , угол $\widehat{L, x} = 0$ и $V_x^* = \infty$. Таким образом, всегда имеет место соотношение $V \leq V_x^* < \infty$.

5.3. Решение волнового уравнения для сферической волны

Если упругие колебания возбуждаются точечным источником и распространяются в однородной и изотропной среде, её фронт имеет форму сферы с центром в точке возбуждения. Иными словами, точечный источник в этом случае возбуждает сферическую волну. Упругие процессы распространяются в любых направлениях и описываются функцией Q , зависящей только от расстояния до источника по радиусу сферы r и времени пробега t : $Q(r, t)$.

Для описания сферической волны естественно использовать сферические координаты: r — радиус сферы, φ — долгота и θ — широта. В этой системе координат лапласиан $\nabla^2 Q$ определен в виде:

$$\nabla^2 Q = \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial Q}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \frac{\partial Q}{\partial \theta} \right) \right).$$

В условиях сферической, центральной симметрии упругие процессы зависят только от одной пространственной переменной r , и Q не является функцией φ и θ . Поэтому $\frac{\partial Q}{\partial \varphi} = \frac{\partial Q}{\partial \theta} = 0$ и лапласиан равен

$$\nabla^2 Q = \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial Q}{\partial r}.$$

Вычислим $\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rQ)$, где $Q = Q(r)$:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rQ) = Q + r \frac{\partial Q}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rQ) = \frac{\partial}{\partial r} \left(Q + r \frac{\partial Q}{\partial r} \right) = r \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial Q}{\partial r}.$$

Сравнив этот результат с описанием лапласиана, видим, что они различаются лишь множителем $1/r$:

$$\nabla^2 Q = \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial Q}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rQ)}{\partial r^2}.$$

Поэтому волновое уравнение можно записать в виде

$$\frac{1}{r} V^2 \frac{\partial^2 (rQ)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = -P.$$

Предположим, что источник действует мгновенно и правую часть волнового уравнения можно считать равной 0 при $t > 0$.

Умножив уравнение на r и введя этот множитель в производную по t , перепишем его в виде

$$V^2 \frac{\partial^2(rQ)}{\partial r^2} - \frac{\partial^2(rQ)}{\partial t^2} = 0.$$

Если обозначить произведение rQ одним символом: $Q_r = rQ$, то уравнение примет вид

$$V^2 \frac{\partial^2 Q_r}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 Q_r}{\partial t^2} = 0,$$

полностью совпадающий с волновым уравнением для плоской волны, бегущей по направлению r . Общее решение для этого случая известно:

$$Q_r(t, r) = Q \left(t - \frac{r}{V} \right),$$

или, заменяя Q_r : $rQ(t, r) = Q \left(t - \frac{r}{V} \right)$,

или, наконец, деля на r : $Q(t, r) = \frac{1}{r} Q \left(t - \frac{r}{V} \right)$.

В отличие от решения для плоской волны, описание сферической волны содержит множитель $1/r$, из-за которого волновая функция затухает, уменьшается по амплитуде обратно пропорционально r — пути, пройденному волной. Это затухание является следствием непрерывного увеличения площади сферического фронта волны. Площадь сферы, как известно, равна $4\pi r^2$. Поэтому плотность упругой энергии (в расчёте на единицу площади) убывает пропорционально $1/r^2$. Амплитуда колебаний, в свою очередь пропорциональная квадратному корню из плотности энергии, убывает как $1/r$. Таким образом, множитель $1/r$ в описании сферической волны отображает *геометрическое расхождение* её фронта.

Для комплексной гармоники сферической волны имеем:

$$Q(t, r) = \frac{1}{r} \left(\cos \omega \left(t - \frac{r}{V} \right) + j \sin \omega \left(t - \frac{r}{V} \right) \right) = \frac{1}{r} e^{j\omega(t-r/V)}.$$

Раскрывая в показателе скобки, можно разделить пространственный и временной аргументы функции:

$$Q(t, r) = \frac{1}{r} e^{-j\nu r} e^{j\omega t} = \frac{1}{r} e^{-j\nu r} e^{j\omega t} = Q_1(r)Q_2(t),$$

где $\nu = \omega/V$ – круговое волновое число, как было определено ранее. Это разделение может оказаться удобным для математических операций в дальнейшем.

Сферические волны широко применяются в теории распространения сейсмических волн. Прежде всего, отметим их роль в построении волновых фронтов произвольной формы с использованием элементарного принципа Гюйгенса. Напомним, что в соответствии с этим принципом каждая точка фронта излучает элементарную сферическую волну. Поэтому, зная положение фронта волны в некоторый момент времени t , при известной скорости распространения волны V легко построить фронт для момента времени $t + \Delta t$ как поверхность, огибающую множество сфер радиуса $r = V\Delta t$ с центрами в точках фронта для момента времени t . Сферические волны описаны как волны, возбуждаемые точечным источником. На практике сейсмические волны возбуждаются, конечно, не точкой, а некоторой областью среды Δw , ограниченной конечной поверхностью ΔS . Эта область имеет средние линейные размеры, измеряемые метрами и первыми десятками метров. В ближней к источнику зоне фронты волны повторяют форму поверхности ΔS . Но по мере распространения волны все неровности поверхности сглаживаются и на удалениях, больших $\sqrt{\Delta S}$ на порядок, становятся весьма похожими на сферические поверхности.

Правда, в ближней к вогнутой части произвольной поверхности фронта волны зоне наблюдается схождение элементарных волн Гюйгенса. В области, близкой к центру кривизны вогнутой части исходного фронта волны, они фокусируются, образуя локальную область повышенной амплитуды суммарных колебаний, называемую *областью каустики*. За её пределами процесс сглаживания неровностей исходного волнового фронта восстанавливается. По мере удаления от этой области фронт волны стремится к сферической форме.

Глава 6. Механизм распространения упругой волны

6.1. Постановка задачи

Полученное решение уравнения динамического равновесия позволило раскрыть его суть как уравнения волнового. При этом основное внимание было уделено виду, форме записи волнового аргумента решения для простейших случаев плоской и сферической волн. Удалось выяснить, что распространяющаяся волна пропорциональна скорости смещения, задаваемого источником.

Однако всё это не раскрывает механизм передачи колебаний от возбуждённой зоны во все более отдаленные от неё области среды. Не ясно, как и из чего формируются упругие колебания, что и как «работает» на фронте волны. Ответы на эти вопросы позволят раскрыть сущность процесса распространения упругих колебаний в среде. Для этого необходимо специальное исследование.

Цель такого исследования формулируется в духе классической математической задачи Дирихле: зная значение функции Q и её производной на некоторой поверхности S , определить функцию в точке M внутри объёма w , ограниченного этой поверхностью. Применительно к теории упругих волн Q – волновая функция, и, значит, в задаче Дирихле рассматривается распространение упругой волны от замкнутой поверхности S во внутреннюю точку объёма w . Упругие колебания как бы излучаются всеми точками поверхности S внутри объёма w , сходясь в точке M .

В практике сейсморазведки ситуация обратная. Упругие колебания возбуждаются в некоторой точке (или в малой области вокруг точки) и распространяются в объёме w , удаляясь от точки возбуждения. Фронты упругой волны замкнуты вокруг источника, а в точку регистрации

приходит расходящаяся волна. Несколько смягчает это противоречие между условиями задачи Дирихле и практикой сейсморазведки основополагающий для неё принцип Ферма. В соответствии с ним, волна всегда распространяется по пути с экстремальным — обычно минимальным — временем пробега. Поэтому при перемене точек возбуждения и приёма местами волна распространяется по одному и тому же пути. Действует принцип взаимности: если условия возбуждения и приёма в двух точках O и P одинаковы, то при возбуждении в точке O в другой точке P будет зарегистрирован в то же время и в точности такой же волновой процесс, какой может быть зарегистрирован при возбуждении в точке P и приёме в точке O .

В соответствии с принципом взаимности, выводы, которые могут быть получены из решения задачи Дирихле для сходящихся фронтов волны, можно распространить и на обратный случай расходящихся фронтов, учитывая, конечно, геометрическое расхождение или схождение фронта волны.

Но более важно то обстоятельство, что рассмотрение задачи Дирихле и её решение позволяют раскрыть механизм передачи упругих колебаний от начального фронта волны во все более удаленные от него области среды.

До постановки и решения этой задачи необходимо рассмотреть некоторое предварительное соотношение (лемму), нужное для дальнейших математических выводов. В роли такой леммы выступает вторая формула Грина, связывающая поверхностный и объёмный интегралы.

6.2. Вторая формула Грина

Пусть две функции пространственных координат $q_1(x, y, z)$ и $q_2(x, y, z)$ являются гладкими, непрерывными и дифференцируемыми функциями в пределах некоторого объёма ω , ограниченного замкнутой поверхностью S (рис. 6.1).



Рис. 6.1. Объём, ограниченный замкнутой поверхностью

Рассмотрим объёмный интеграл I от произведения градиентов этих функций:

$$I = \iiint_w \text{grad } q_1 \text{ grad } q_2 dw.$$

Поскольку $\text{grad } q = \vec{\nabla} q = \frac{\partial q}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial q}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial q}{\partial z} \vec{k}$, под интегралом – скалярное произведение двух векторов, равное сумме парных произведений одноименных их компонент:

$$I = \iiint_w \left(\frac{\partial q_1}{\partial x} \frac{\partial q_2}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y} \frac{\partial q_2}{\partial y} + \frac{\partial q_1}{\partial z} \frac{\partial q_2}{\partial z} \right) dw.$$

Определим производную по x от произведения $q_1 \frac{\partial q_2}{\partial x}$:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(q_1 \frac{\partial q_2}{\partial x} \right) = \frac{\partial q_1}{\partial x} \frac{\partial q_2}{\partial x} + q_1 \frac{\partial^2 q_2}{\partial x^2}.$$

Отсюда найдём первый член подынтегрального выражения:

$$\frac{\partial q_1}{\partial x} \frac{\partial q_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(q_1 \frac{\partial q_2}{\partial x} \right) - q_1 \frac{\partial^2 q_2}{\partial x^2}.$$

То же произведение можно определить и вторым способом:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(q_2 \frac{\partial q_1}{\partial x} \right) = \frac{\partial q_1}{\partial x} \frac{\partial q_2}{\partial x} + q_2 \frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial x} \frac{\partial q_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(q_2 \frac{\partial q_1}{\partial x} \right) - q_2 \frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2}.$$

Действуя первым способом, определим по аналогии второй и третий члены подынтегрального выражения:

$$\frac{\partial q_1}{\partial y} \frac{\partial q_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(q_1 \frac{\partial q_2}{\partial y} \right) - q_1 \frac{\partial^2 q_2}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial z} \frac{\partial q_2}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(q_1 \frac{\partial q_2}{\partial z} \right) - q_1 \frac{\partial^2 q_2}{\partial z^2}.$$

Используя эти определения, представим I в виде разности двух интегралов:

$$I = \iiint_w \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(q_1 \frac{\partial q_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(q_1 \frac{\partial q_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(q_1 \frac{\partial q_2}{\partial z} \right) \right) dw - \\ - \iiint_w q_1 \left(\frac{\partial^2 q_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial z^2} \right) dw.$$

Второй интеграл можно записать кратко, используя оператор Лапласа ($\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$):

$$\iiint_w q_1 \left(\frac{\partial^2 q_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 q_2}{\partial z^2} \right) dw = \iiint_w q_1 \nabla^2 q_2 dw.$$

Первый интеграл преобразуем в поверхностный с помощью теоремы Остроградского – Гаусса: поток вектора через замкнутую поверхность равен интегралу от дивергенции по объёму, ограниченному этой поверхностью. Поток вектора \vec{U} через поверхность S равен интегралу от скалярного произведения вектора \vec{U} на вектор площадки $d\vec{S}$ по поверхности S , и теорема имеет вид

$$\iint_S \vec{U} d\vec{S} = \iiint_w \operatorname{div} \vec{U} dw,$$

или в координатной форме:

$$\iint_S (U_x l + U_y m + U_z n) dS = \iiint_w \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) dw.$$

Здесь l, m, n — направляющие косинусы нормали \vec{N} к элементарной площадке dS поверхности S .

Преобразуем по этому алгоритму первый интеграл разностной формы интеграла I :

$$\begin{aligned} I &= \iiint_w \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(q_1 \frac{\partial q_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(q_1 \frac{\partial q_2}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(q_1 \frac{\partial q_2}{\partial z} \right) \right) dw = \\ &= \iint_S q_1 \left(\frac{\partial q_2}{\partial x} l + \frac{\partial q_2}{\partial y} m + \frac{\partial q_2}{\partial z} n \right) dS = \iint_S q_1 \frac{\partial q_2}{\partial N} dS. \end{aligned}$$

Здесь производная по нормали $\frac{\partial}{\partial N} = \frac{\partial}{\partial x} l + \frac{\partial}{\partial y} m + \frac{\partial}{\partial z} n$.

Таким образом, рассматриваемый интеграл может быть записан кратко:

$$I = \iint_S q_1 \frac{\partial q_2}{\partial N} dS - \iiint_w q_1 \nabla^2 q_2 dw.$$

Используя второй способ определения суммы парных произведений одноимённых производных:

$$\frac{\partial q_1}{\partial x} \frac{\partial q_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(q_2 \frac{\partial q_1}{\partial x} \right) - q_2 \frac{\partial^2 q_1}{\partial x^2},$$

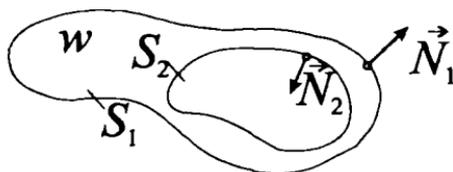
и т.д., получим второе выражение рассматриваемого интеграла:

$$I = \iint_S q_2 \frac{\partial q_1}{\partial N} dS - \iiint_w q_2 \nabla^2 q_1 dw.$$

Приравняв правые части двух преобразований интеграла I и разводя поверхностные и объёмные интегралы по разные стороны знака равенства, получим *вторую формулу Грина*:

$$\iint_S \left(q_1 \frac{\partial q_2}{\partial N} - q_2 \frac{\partial q_1}{\partial N} \right) dS = \iiint_w (q_1 \nabla^2 q_2 - q_2 \nabla^2 q_1) dw.$$

Рис. 6.2. Двухсвязная область интегрирования



Здесь объём w ограничен единственной внешней поверхностью S_1 , так что область интегрирования называется односвязной*. Если же область интегрирования снаружи ограничена поверхностью S_1 , а внутри этой области есть вторая ограничивающая поверхность S_2 (своего рода «дырка» внутри объёма w), то область интегрирования становится двухсвязной (рис. 6.2).

Так как внешние нормали \vec{N}_1 к S_1 и \vec{N}_2 к S_2 направлены в противоположные стороны, для двухсвязной области в левой части формулы должна стоять разность поверхностных интегралов:

$$\begin{aligned} & \iint_{S_1} \left(q_1 \frac{\partial q_2}{\partial N_1} - q_2 \frac{\partial q_1}{\partial N_1} \right) dS_1 - \iint_{S_2} \left(q_1 \frac{\partial q_2}{\partial N_2} - q_2 \frac{\partial q_1}{\partial N_2} \right) dS_2 = \\ & = \iiint_w (q_1 \nabla^2 q_2 - q_2 \nabla^2 q_1) dw. \end{aligned}$$

Подчеркнём ещё раз, что функции q_1, q_2 определены как непрерывные гладкие функции координат, нигде в области интегрирования не равные бесконечности. Такие же требования предъявляются и к производным $\frac{\partial q_1}{\partial N}, \frac{\partial q_2}{\partial N}$, так что ни при вычислении подинтегральных выражений, ни при интегрировании не предполагается никаких трудностей.

* Дадим более развёрнутые определения, руководствуясь классическим трудом по гидродинамике — книгой Г.Ламба «Гидродинамика» (М.: ОГИЗ, 1947):

«Область пространства, заключённую внутри определённой границы, называют *связной*, если возможно от некоторой точки области перейти к другой её точке вдоль бесконечно большого числа путей, каждый из которых полностью лежит внутри области.

Любые два произвольных пути, которые непрерывным изменением, не выходя из области, можно совместить, называются взаимно переводимыми.

Область называется *односвязной*, если все пути, проведённые между какими-нибудь её точками, взаимно переводимы.

Область называется *двухсвязной*, если между двумя её точками A и B могут быть проведены два и только два пути, взаимно неперебиваемые; всякий другой путь между A и B переводим в один из этих обоих или в комбинацию их, в которой каждый может входить несколько раз». (Прим.ред.)

6.3. Вывод формулы Кирхгофа

Приступим теперь к решению задачи Дирихле применительно к некоторой обобщающей волновой функции $Q(x, y, z, t)$. Пусть все источники сейсмических колебаний расположены вне замкнутой поверхности S . Внутри неё в объёме w выберем произвольную точку M и поставим задачу: по известным на поверхности S значениям Q и $\frac{\partial Q}{\partial N}$ определить волновую функцию в точке M — $Q(M)$.

Такая постановка задачи позволяет рассматривать волновое уравнение с нулевой правой частью:

$$V^2 \nabla^2 Q - \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = 0.$$

Предположим, что зависимость Q от времени t задана в виде комплексной гармонической функции частоты ω :

$$Q(x, y, z, t) = q(x, y, z, t)e^{j\omega t}.$$

Здесь $q(x, y, z, t)$ описывает пространственное распределение амплитуды комплексной гармоники. Это несколько упростит задачу, сведя её к определению амплитуды гармоники точки M , и само волновое уравнение:

$$V^2 \nabla^2 (q(x, y, z, t)e^{j\omega t}) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (q(x, y, z, t)e^{j\omega t}) = 0,$$

или

$$\left(V^2 \nabla^2 q - \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} \right) e^{j\omega t} = 0.$$

Очевидно, что комплексная амплитуда гармоники должна удовлетворять более простому уравнению, не содержащему $e^{j\omega t}$:

$$V^2 \nabla^2 q - \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = 0.$$

Решим вначале это уравнение. Разделив уравнение на V^2 и введя круговое волновое число $\nu = \omega/V$, получим

$$\nabla^2 q + \nu^2 q = 0,$$

– стандартное дифференциальное уравнение Гельмгольца, содержащее лишь пространственные производные функции $Q(x, y, z, t)$.

Это уравнение второго порядка должно иметь два корня q_1, q_2 . Подстановка их в уравнение Гельмгольца превращает его в тождество.

Поэтому можно определить лапласианы функций q_1, q_2 :

$$\nabla^2 q_1 = -\nu^2 q_1, \quad \nabla^2 q_2 = -\nu^2 q_2.$$

Предположим, что q_1, q_2 удовлетворяют условиям вывода формулы Грина, и эта формула может быть к ним применена. Тогда правая часть формулы может быть записана в виде

$$\iint_S \left(q_1 \frac{\partial q_2}{\partial N} - q_2 \frac{\partial q_1}{\partial N} \right) dS = \iiint_w (q_1 (-\nu^2 q_2) - q_2 (-\nu^2 q_1)) dw.$$

Таким образом, если, помимо выполнения требований о непрерывности функций q_1, q_2 , они являются ещё и решениями уравнения Гельмгольца, 2-я формула Грина приходит к виду:

$$\iint_S \left(q_1 \frac{\partial q_2}{\partial N} - q_2 \frac{\partial q_1}{\partial N} \right) dS = 0.$$

Из двух решений уравнений Гельмгольца q_1, q_2 одну функцию можно выбрать по своему усмотрению из числа тех, про которые заведомо известно, что они удовлетворяют волновому уравнению и уравнению Гельмгольца. При этом неизвестной останется лишь одна, вторая функция q . В качестве известной функции выберем амплитуду комплексной гармоники сферической упругой волны:

$$Q(x, y, z, t) = Q(r, t) = \frac{1}{r} e^{j\omega(t-r/V)} = \frac{1}{r} e^{-j\nu r} e^{j\omega t},$$

т.е. пусть $q_1 = \frac{1}{r} e^{-j\nu r}$. Тогда у второго корня уравнения Гельмгольца индекс можно опустить: $q_2 \equiv q$.

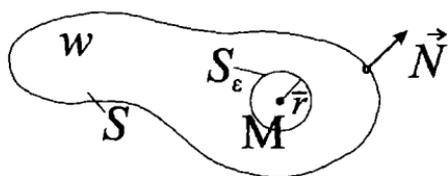


Рис. 6.3. Исключение точки источника путем окружения её малой сферой

Заметим, что начало координат расположено в точке M , где $r = 0$. В этой точке $q_1|_{r=0} = \infty$, и поэтому она является особой, которую надо исключить из области интегрирования, окружив точку M малой сферой S_ϵ (рис. 6.3).

В результате область интегрирования стала двухсвязной, и надо применять второй вариант формулы Грина, не забывая о равенстве объёмного интеграла в ней 0. Нормалью к поверхности сферы служит её радиус: $N_\epsilon = r$. Подставляя $q_2 \equiv q$ и $q_1 = \frac{1}{r}e^{-j\nu r}$, получим:

$$\iint_S \left(\frac{1}{r} e^{-j\nu r} \frac{\partial q}{\partial N} - q \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{r} e^{-j\nu r} \right) \right) dS - \\ - \iint_{S_\epsilon} \left(\frac{1}{r} e^{-j\nu r} \frac{\partial q}{\partial r} - q \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} e^{-j\nu r} \right) \right) dS_\epsilon = 0.$$

Предстоит провести предельный переход от малой сферы S_ϵ к точке M , устремив радиус сферы к нулю. В этом переходе площадь сферы $S_\epsilon = 4\pi r^2$ и её элемента dS_ϵ , непрерывно уменьшаясь, также стремятся к нулю. Поэтому интегрирование по площади сферы надо заменить на интегрирование по телесному углу. Телесный угол $d\Omega$ определен как отношение площади элемента сферы dS_ϵ к площади квадрата, построенного на её радиусе: $d\Omega = dS_\epsilon/r^2$. Поэтому полный телесный угол равен отношению $4\pi r^2/r^2$, т.е. равен 4π . Из определения телесного угла найдём: $dS_\epsilon = r^2 d\Omega$.

Преобразуем интеграл I_ϵ по малой сфере S_ϵ в интеграл по полному телесному углу:

$$I_\epsilon = \iint_{4\pi} \left(\frac{1}{r} e^{-j\nu r} \frac{\partial q}{\partial r} - q \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} e^{-j\nu r} \right) \right) r^2 d\Omega.$$

Выполним подынтегральное дифференцирование и умножим каждое слагаемое на r^2 :

$$I_\varepsilon = \iint_{4\pi} \left(r e^{-j\nu r} \frac{\partial q}{\partial r} + q e^{-j\nu r} + j\nu r q e^{-j\nu r} \right) r^2 d\Omega.$$

Устремим теперь r к нулю, а малую сферу стянем в точку M . При этом множитель $e^{-j\nu r}$ устремится к 1, а функция q — к своему значению в точке M (q_M), которое мы и хотим определить:

$$\lim_{r \rightarrow 0} I_\varepsilon = \iint_{4\pi} q(r \rightarrow 0) d\Omega = q_M \iint_{4\pi} d\Omega = 4\pi q_M.$$

Формула Грина в пределе принимает вид

$$\iint_S \left(\frac{1}{r} e^{-j\nu r} \frac{\partial q}{\partial N} - q \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{r} e^{-j\nu r} \right) \right) dS - 4\pi q_M = 0.$$

Отсюда, наконец, найдём:

$$q_M = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} e^{-j\nu r} \frac{\partial q}{\partial N} - q \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{r} e^{-j\nu r} \right) \right) dS.$$

Чтобы получить определение самой волновой функции $Q(x, y, z, t)$ в точке M , достаточно умножить полученное выражение для q_M на $e^{j\omega t}$, восстановив этот сокращенный ранее множитель:

$$Q_M = q_M e^{j\omega t} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} e^{j(\omega t - \nu r)} \frac{\partial q}{\partial N} - q \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{r} e^{j(\omega t - \nu r)} \right) \right) dS.$$

Продифференцируем под интегралом комплексную амплитуду сферической гармонической волны, представив показатель $(\omega t - \nu r)$ в виде $\omega(t - \frac{\nu}{\omega} r) = \omega(t - r/V)$ (напомним, что $\frac{\omega}{\nu} = V$ — скорости распространения волны):

$$\frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{1}{r} e^{j\omega(t-r/V)} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} e^{j\omega(t-r/V)} \right) \frac{\partial r}{\partial N} =$$

$$= \left(-\frac{1}{r^2} - \frac{j\omega}{rV} \right) \frac{\partial r}{\partial N} e^{j\omega(t-r/V)}.$$

Тогда:

$$Q_M = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial N} e^{j\omega(t-r/V)} + \frac{1}{r^2} q e^{j\omega(t-r/V)} \frac{\partial r}{\partial N} + \right. \\ \left. + \frac{1}{rV} j\omega q e^{j\omega(t-r/V)} \frac{\partial r}{\partial N} \right) dS.$$

Обратим внимание на то, что у каждого подынтегрального слагаемого появился множитель $e^{j\omega(t-r/V)}$. Если $Q(x, y, z, t) = q(x, y, z, t)e^{j\omega t}$, то $q(x, y, z, t)e^{j\omega(t-r/V)} = Q(x, y, z, t - r/V)$. Рассматриваемый множитель есть функция запаздывания волны на пути r от точек поверхности S до точки M . Принято для краткости обозначать это запаздывание заключением соответствующего функционала в квадратные скобки:

$$Q(x, y, z, t - \frac{r}{V}) \equiv [Q], \quad \frac{\partial Q}{\partial N} \left(x, y, z, t - \frac{r}{V} \right) \equiv \left[\frac{\partial Q}{\partial N} \right].$$

Множитель $j\omega$ у третьего слагаемого под интегралом является спектральным отображением операции дифференцирования по времени t :

$$j\omega q e^{j\omega t} = \frac{\partial}{\partial t} (q e^{j\omega t}) = \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Тогда третье слагаемое обозначают:

$$j\omega q e^{j\omega(t-r/V)} = \frac{\partial Q}{\partial t} \left(x, y, z, t - \frac{r}{V} \right) = \left[\frac{\partial Q}{\partial t} \right].$$

Используя эти условные обозначения, запишем определение волновой функции в точке M в окончательной форме:

$$Q_M = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r} \left[\frac{\partial Q}{\partial N} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial N} [Q] + \frac{1}{rV} \frac{\partial r}{\partial N} \left[\frac{\partial Q}{\partial t} \right] \right) dS.$$

Это определение носит название *формулы Кирхгофа*, по имени автора. Формула позволяет определить, описать волновую функцию ζ

в любой внутренней точке M с помощью значений этой функции и её производных на поверхности S , ооконтуривающей эту точку.

6.4. Истолкование формулы Кирхгофа

Раскроем механизм передачи упругих волновых колебаний от начального фронта волны во всё более удаленные от него области среды с помощью анализа формулы Кирхгофа.

В элементарной теории распространения упругих волн широко используется принцип Гюйгенса. В соответствии с ним, каждую точку фронта волны в момент времени t можно рассматривать как точечный источник элементарной сферической волны. Сигнал в любой точке M вне фронта представляется интегральной суммой элементарных волн, излучаемых всеми точками фронта.

Но время пробега волны по нормали к фронту в точку M минимально, тогда как по всем остальным направлениям в эту точку элементарные волны приходят с увеличивающимся — по мере удаления точек фронта от основания нормали — запаздыванием. Поэтому элементарные волны суммируются в точке M несинхронно, что должно приводить к растяжению волнового импульса во времени и к непрерывному изменению его формы. Этого никак не может быть в идеально упругой среде.

На это противоречие впервые обратил внимание Френель, а разрешение его он нашел в формуле Кирхгофа. В соответствии с ней, в суммировании волновой функции в точке M участвуют как сама функция, так и её производные по нормали и по времени. Даже если предположить, что Q является униполярной возрастающе-затухающей функцией (это соответствует последовательному сжатию — растяжению среды), то её производные обязательно биполярны и меняют свой знак (рис. 6.4). При интегрировании (суммировании) сигнала и его производных синфазное сложение происходит лишь в начальной части суммарного импульса. Его «хвост» гасится противофазным сложением. В результате волновой импульс при распространении не растягивается во времени и пространстве, а сохраняет свою форму неизменной.

С учетом этого разъяснения, формулу Кирхгофа считают математическим выражением принципа Гюйгенса — Френеля: каждую точку

фронта волны можно считать источником, излучающим как саму волновую функцию Q , так и её производные $\frac{\partial Q}{\partial N}$ и $\frac{\partial Q}{\partial t}$.

Обратим ещё раз внимание, что они должны быть заданы в каждой точке поверхности S в момент времени $t - r/V$, предшествующий моменту t , в который производится интегрирование (суммирование) колебаний в точке M . Это, как было оговорено, условно обозначено квадратными скобками — $[Q]$, $\left[\frac{\partial Q}{\partial N}\right]$, $\left[\frac{\partial Q}{\partial t}\right]$.

Обсудим теперь роль каждого слагаемого подынтегрального выражения в формировании сигнала в точке M . Первое слагаемое имеет множитель $1/r$, являющийся «видовым» признаком сферической волны, излучаемой точечным источником. Однако эта сферическая волна несёт не саму волновую функцию Q , а её производную по нормали $\frac{\partial Q}{\partial N}$. Амплитуда этого слагаемого определяется только удалением r от точки излучения и не зависит от направления излучения. В пространстве это распределение амплитуд может быть изображено сферой (в плоскости окружностью) с центром в данной поверхности S (рис. 6.5).

Второй и третий члены подынтегрального выражения содержат множитель $\frac{dr}{dN} = \lim_{\Delta N \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta N} = \cos(\widehat{r, N})$ (рис. 6.6).

Если направление \vec{r} на точку M совпадает с направлением нормали \vec{N} , то $\cos(\widehat{r, N}) = 1$, и роль этих слагаемых максимальна. Если же, наоборот, \vec{r} перпендикулярна \vec{N} , то $\cos(\widehat{r, N}) = 0$, и слагаемые обращаются в нуль. Поэтому в зависимости от угла $\widehat{r, N}$ роль 2-го и 3-го слагаемых изменяется от максимальной вдоль луча (перпендикуляра к поверхности S) до нулевой вдоль фронта (поверхности S).

Графически эта зависимость амплитуды излучения от угла $\widehat{r, N}$ изображается в виде окружности радиуса 0.5 с центром в точке

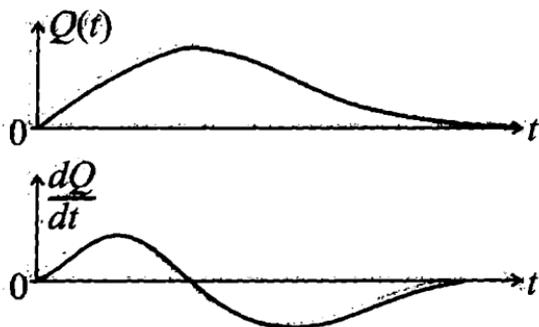


Рис. 6.4. Пример униполярной функции Q и её производной по времени

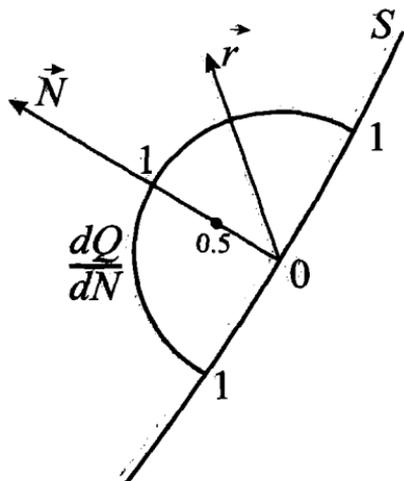


Рис. 6.5. Распределение амплитуд первого слагаемого формулы Кирхгофа

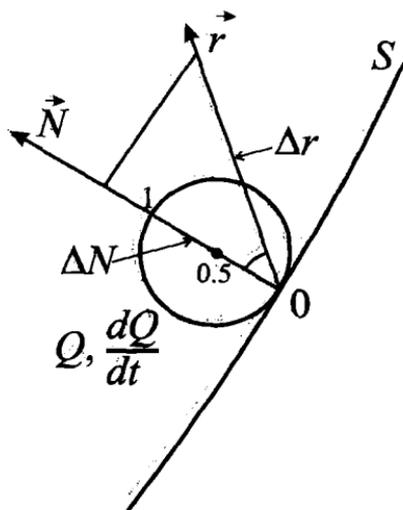


Рис. 6.6. Распределение амплитуд второго и третьего слагаемых формулы Кирхгофа

нормали \vec{N} на удалении 0.5 от поверхности S . Такая характеристика направленности излучения (рис. 6.6) соответствует источнику типа сосредоточенной силы $\vec{F} \parallel \vec{N}$, действующей в данной точке поверхности S .

Кроме $\frac{dr}{dN} = \cos(\widehat{r, N})$, второе слагаемое имеет множитель $1/r^2$, обуславливающий более быстрое, чем у сферической волны, затухание амплитуды с увеличением удаления от поверхности S .

Амплитуда третьего слагаемого $\frac{\partial Q}{\partial t}$ определяется множителем $\frac{1}{rV} \cos(\widehat{r, N})$ и затухает по мере распространения пропорционально $1/r$ (как сферическая волна).

Поскольку \vec{N} — нормаль к поверхности S (фронту волны) и длина пути вдоль неё равна $N = Vt$, где V — скорость распространения волны, то дифференциал dN определяется как Vdt . Поэтому можно объединить первое и третье слагаемые подынтегрального выражения формулы Кирхгофа:

$$\frac{1}{r} \left[\frac{\partial Q}{\partial N} \right] + \frac{1}{rV} \frac{\partial r}{\partial N} \left[\frac{\partial Q}{\partial t} \right] = \frac{1}{rV} (1 + \cos(\widehat{r, N})) \left[\frac{\partial Q}{\partial t} \right],$$

и записать формулу в виде

$$Q_M = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{1}{r^2} [Q] \cos(\widehat{r, N}) + \frac{1}{rV} \left[\frac{\partial Q}{\partial t} \right] (1 + \cos(\widehat{r, N})) \right) dS.$$

Теперь можно считать, что в каждой точке поверхности S действует источник сигнала Q с амплитудой излучения $\frac{1}{r^2} \cos(\widehat{r, N})$ и источник производной сигнала — с амплитудой $\frac{1}{rV} (1 + \cos(\widehat{r, N}))$. Заметим, что если в качестве волновой функции Q избрать смещение $U(t)$, то производная $\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} = v(t)$ — скорость смещения. С увеличением удаления от фронта (с ростом r) амплитуда $U(t)$ убывает быстрее ($\approx 1/r^2$), чем амплитуда $v(t)$ ($\approx 1/r$). В ближней к фронту зоне колебания формируются в результате интерференции функции самого смещения и функции скорости смещения. В дальней зоне колебания могут быть описаны лишь функцией скорости смещения.

Полярные диаграммы зависимости амплитуд излучения Q и $\frac{\partial Q}{\partial t}$ от угла излучения $(\widehat{r, N})$ приведены на рис. 6.7.

Обратим внимание на то, что в излучении каждой точки фронта волны присутствуют как продольные смещения вдоль луча, так и поперечные смещения вдоль фронта волны. При этом продольные смещения формируются в результате сложения Q и $\frac{\partial Q}{\partial t}$ и имеют амплитуду, в три

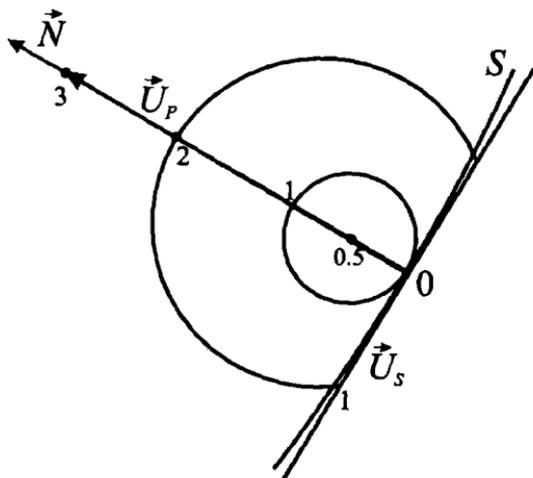


Рис. 6.7. Полярные диаграммы зависимости амплитуд излучения функции и её производной по времени от угла излучения

раза большую амплитуды поперечных смещений, возбуждаемых только производной $\frac{\partial Q}{\partial t}$.

Заканчивая анализ решения волнового уравнения, которое даёт формула Кирхгофа, отметим, что в настоящее время эта формула превратилась из сугубо теоретического описания процесса распространения упругих волн в практический инструмент решения разнообразных прямых (моделирование) и обратных (обработка и интерпретация) задач сейсморазведки. К числу прямых задач, решаемых с помощью интеграла Кирхгофа, можно отнести моделирование и изучение дифракции волн на сбросах, выклинивающихся горизонтах, шероховатых границах. В обратных задачах на формуле Кирхгофа основывается одна из наиболее распространённых групп миграционных алгоритмов. Это стало возможным в результате широкого внедрения в практику сейсморазведки быстродействующих вычислительных средств.

Глава 7. Сейсмические волны на границе раздела упругих сред

В предыдущих частях объектом изучения были упругие процессы в безграничной идеально упругой среде, однородной и изотропной по своим упругим свойствам. Будем последовательно усложнять модель среды, постепенно приближая её к реальному геологическому разрезу, неоднородному по своим упругим параметрам. Первым шагом на этом пути является рассмотрение сейсмических явлений на границе раздела двух упругих сред.

При падении сейсмической волны на такую границу часть энергии волны отражается и уходит в верхнее полупространство. Оставшаяся часть энергии проходит через границу в нижнее полупространство. Очевидна огромная важность исследования этих явлений: ведь сейсморазведка базируется на возбуждении, регистрации и обработке сигналов – сейсмических волн, отражённых и преломлённых на границах раздела сред с различными физическими свойствами. На каждом этапе важно знать и понимать особенности регистрируемых волн. Эти особенности определяются, прежде всего, упругими процессами на границах раздела.

7.1. Характеристики границ раздела

Обсудим реальные свойства границ раздела, контактирующих на них геологических сред и конкретизируем объект исследования, по возможности упростив на этом этапе задачу исследования.

Геологические среды, в общем, являются неоднородными по своим физическим свойствам как по вертикали (вкрест простирания пород),

так и по горизонтали (по простиранию). Обычно изменения свойств по простиранию значительно менее выражены, чем вертикальные изменения упругих параметров. Это позволяет несколько упростить исследования в предположении, что на границе контактируют горизонтально однородные среды.

Переход от одной среды к другой может сопровождаться как скачкообразным, так и непрерывным изменением свойств. Если контактирующие среды имеют постоянные скорости и плотности, а их изменения на границе происходят скачкообразно, границу называют разрывно-резкой, или границей разрыва первого порядка (рис. 7.1, *а* – *б*; рис. 7.2, *а*). При контакте сред с изменяющимися по вертикали параметрами на границе могут изменяться зависимости упругих свойств от глубины z . Если нет скачкообразного изменения свойств на границе, а скачком меняется их производная по z , границу называют нерезкой границей разрыва второго порядка (7.1, *в*; рис. 7.2, *б*). Если непрерывны $V(z)$ и $\frac{dV}{dz}$, а скачком меняется производная $\frac{d^2V}{dz^2}$, граница называется границей разрыва третьего порядка (рис. 7.2, *в*) и т.д. Естественно, могут встречаться границы с комбинацией разрывов разного порядка. Например, смена законов $V(z)$ и $\rho(z)$ может сопровождаться и скачкообразным изменением скорости и плотности на границе.

Другой характеристикой границы служит её геометрическая форма. Конечно, в шарообразной Земле все границы не являются плоскими. Но роль кривизны зависит от того, как соотносятся радиус кривизны границы R и длина сейсмической волны Λ . Если оценить скорость волны V километрами в секунду, а период колебаний T – первыми десят-

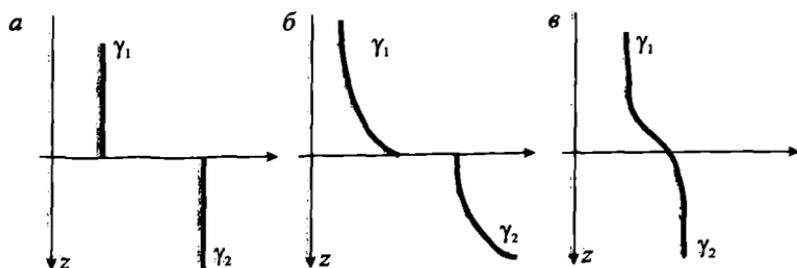


Рис. 7.1. Типы границ раздела:

а, б – разрывно-резкая граница; *в* – нерезкая граница

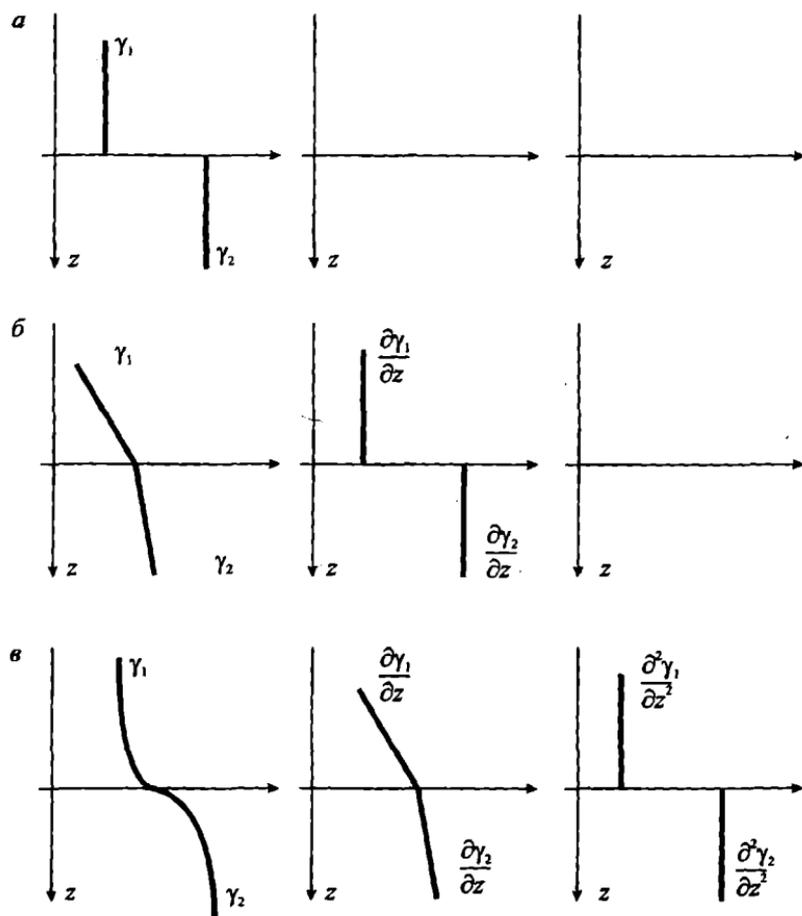


Рис. 7.2. Виды границ раздела:

а – граница первого порядка; **б** – граница второго порядка; **в** – граница третьего порядка

ками миллисекунд (10^{-3} с), то длины сейсмических волн измеряются десятками и сотнями метров. Например, при $V = 2500$ м/с, $T = 0.025$ с ($f = 40$ Гц) длина волны составляет $\Lambda = VT = 62.5$ м.

Когда радиус кривизны границы на порядок больше длины волны ($R \gg \Lambda$), границу считают плоской. Если $R > \Lambda$, границу называют криволинейной (в разрезе). Если же R и Λ соизмеримы ($R \simeq \Lambda$), то

границу считают шероховатой или волнистой. Наиболее прост для исследования волновых процессов на границе случай плоской границы, который и будет объектом изучения в данном разделе. Относительно других типов геометрии границы ограничимся пока общими замечаниями.

Криволинейность границы искажает форму годографа $t(x)$ отражённой или преломлённой волны. Выпуклые границы делают годограф отражённой волны более крутым, а вогнутые границы выполаживают его. При значительной кривизне вогнутой границы на годографах могут образовываться петли. Таким образом, криволинейность границы искажает годографы (кинематику) волн.

Более своеобразен и интересен случай шероховатой границы. В первом приближении такую границу можно уподобить совокупности точек дифракции, расположенных на гребнях волн границы через расстояния L между соседними точками. Вторичные волны, образующиеся на такой границе, можно считать суммарными дифрагированными волнами. В таком подходе задача схожа с рассматриваемым в оптике отражением света от дифракционной решетки. В направлении зеркального отражения, когда угол падения равен углу отражения, элементарные дифрагированные волны складываются синфазно, образуя главный максимум излучения. Существуют и побочные максимумы суммарного излучения, в которых элементарные волны складываются с временной задержкой Δt , кратной периоду колебаний T ($\Delta t = kT$, k — целое число), или с пространственным сдвигом Δr , кратным длине волны $\Lambda = VT$ ($\Delta r = k\Lambda$). На рис. 7.3 видно, что $\Delta r = P \sin \alpha_n$, где P — период шероховатости, а α_n — угол побочного излучения. Тогда условия побочного максимума излучения можно записать в виде $k\Lambda = P \sin \alpha_n$. Отсюда определим направление побочного излучения через синус этого угла:

$$\sin \alpha_n = k \frac{\Lambda}{P} = k \frac{VT}{P} = \frac{V}{Pf}.$$

Видно, что направление побочного излучения зависит от длины волн Λ или от частоты колебаний $f = V/\Lambda$. В этом главное отличие незеркального побочного излучения от зеркального отражения, для которого закон отражения справедлив всегда, вне зависимости от частоты колебаний.

Геометрическая шероховатость границы – не единственная и не самая типичная причина незеркального отражения. Более часто встречаются физически незеркально-отражающие границы, вдоль которых с определенной пространственной упорядоченностью изменяются отражающие свойства границы. Причиной таких изменений служит латеральная (по простиранию) изменчивость физических свойств контактирующих на границе сред.

Таким образом, реальные границы раздела геологических сред обладают большим разнообразием отражающих свойств. Оставляя сложные случаи для последующего изучения, здесь по возможности упростим условия задачи. Будем рассматривать сейсмические процессы на плоской, горизонтальной и разрывно-резкой границе раздела двух однородных идеально упругих сред.

Напомним, что физическими константами упругой среды являются модуль Юнга E и коэффициент Пуассона σ ($0 \leq \sigma \leq 0.5$). Математические константы Ламэ λ и μ определены в виде

$$\lambda = \frac{\sigma E}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}.$$

Константа μ является также и физическим параметром – модулем сдвига, коэффициентом пропорциональности между касательным напряжением и сдвиговой деформацией.

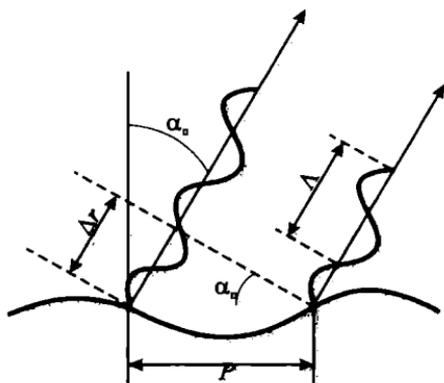


Рис. 7.3. Вторичные волны на шероховатой границе

Сейсмическими константами служат скорости распространения продольной (V_P) и поперечной (V_S) волн:

$$V_P = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1-\sigma}{\rho(1+\sigma)(1-2\sigma)}},$$

$$V_S^2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1}{2(1+\sigma)}}.$$

При этом соотношение $\frac{V_S}{V_P} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda+2\mu}} = \sqrt{\frac{1-2\sigma}{2-2\sigma}}$ варьирует в интервале $0 \leq V_S/V_P \leq 1/\sqrt{2}$ при изменении коэффициента Пуассона σ в теоретически возможных пределах:

— при $\sigma = \frac{1}{2}$: $V_S/V_P = 0$ (жидкая среда);

— при $\sigma = 0$: $V_S/V_P = 1/\sqrt{2} \approx 0.7071\dots$ (несжимаемая среда).

Индексируем параметры верхней среды единицей: константы Ламэ λ_1 и μ_1 , скорости упругих волн V_{P1} , V_{S1} , плотность ρ_1 , а параметры нижней среды — двойкой: λ_2 и μ_2 , V_{P2} , V_{S2} , ρ_2 . Совместим с границей плоскость xOy и направим ось Oz вниз. Тогда для верхней среды $z < 0$, для нижней $z > 0$.

7.2. Граничные условия

Обсудим теперь существующие на границе раздела условия для упругих процессов. Прежде всего заметим, что давление вышележащих пород на глубинную границу ни в коей мере не сопоставимо с добавочным давлением, которое создают на границе упругие волны, и превосходит его на несколько порядков. Поэтому ясно, что никакие упругие процессы на границе, создаваемые всеми — первичными и вторичными — волнами не могут нарушить или изменить целостность, сплошность всей среды, неразрывность и неизменность контакта пород на границе. Из этого очевидного физического постулата можно сформулировать три группы граничных условий — кинематические (для упругих смещений), динамические (для напряжений, создаваемых волнами на границе) и геометрические (для направления распространения волн).

Начнём с кинематических граничных условий.

Для сохранения сплошности среды необходимо, чтобы сумма векторов упругих смещений всех волн, существующих в верхней среде, при

$z = 0$ равнялась сумме векторов смещения, проходящих в нижнюю среду волн:

$$\sum_1 \vec{U}|_{z=0} = \sum_2 \vec{U}$$

(индексом 1 обозначена верхняя среда, индексом 2 – нижняя). Векторное равенство выполняется, если равны суммарные компоненты (проекции на оси координат) векторов:

$$\sum_1 U_x|_{z=0} = \sum_2 U_x,$$

$$\sum_1 U_y|_{z=0} = \sum_2 U_y,$$

$$\sum_1 U_z|_{z=0} = \sum_2 U_z.$$

Проекции векторов на оси координат определяются умножением длины (модуля) вектора на тригонометрические функции (синусы, косинусы) углов между направлением смещения и координатными осями. После их вычисления и подстановки в описания волн $z = 0$ кинематическая группа граничных условий образует систему из трёх алгебраических уравнений с неизвестными модулями векторов смещения всех волн.

Динамическим следствием постулата о нерушимой сплошности всей среды на границе являются требования к напряжениям, создаваемым на границе упругими волнами. Необходимо, чтобы сумма напряжений, создаваемых первичной и отражённой волнами на границе сверху, уравновешивалась суммарным напряжением, создаваемым на ней снизу проходящими волнами:

$$\sum_1 \vec{P}_z|_{z=0} = \sum_2 \vec{P}_z.$$

Напомним, что z – нормаль к элементарной площадке границы. В компонентах напряжений можно записать три скалярных уравнения:

$$\sum_1 P_{zx}|_{z=0} = \sum_2 P_{zx},$$

$$\sum_1 P_{zy}|_{z=0} = \sum_2 P_{zy},$$

$$\sum_1 P_{zz}|_{z=0} = \sum_2 P_{zz}.$$

В соответствии с законом Гука, компоненты напряжения связаны с упругими деформациями:

$$P_{zx} = 2\mu e_{zx},$$

$$P_{zy} = 2\mu e_{zy},$$

$$P_{zz} = \lambda\Theta + 2\mu e_{zz}.$$

Деформации определяются пространственными производными компонент вектора упругого смещения:

$$\text{сдвиговые деформации: } e_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right); e_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right);$$

$$\text{относительные удлинения вдоль оси } Ox: e_{xx} = \frac{\partial U_x}{\partial x};$$

$$\text{дилатация: } \Theta = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z}.$$

Из этих определений видно, что вторая группа граничных условий образует систему трех дифференциальных уравнений с производными неизвестных компонент векторов смещения всех волн.

Различие типов уравнений — алгебраические для компонент смещений и дифференциальные для компонент напряжений — создаёт определённые трудности при их совместном решении. Преодолеть их можно, перейдя от пространственно-временного описания волн $U(x, y, z, t)$ к их спектральному пространственно-частотному описанию $\tilde{U}(x, y, z, \omega)$ с помощью преобразования Фурье:

$$U(x, y, z, t) \leftrightarrow \tilde{U}(x, y, z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, z, t) e^{-j\omega t} dt.$$

В соответствии с теоремой о спектре производной:

$$\frac{dU(t)}{dt} \leftrightarrow j\omega \tilde{U}(\omega)$$

при условии, что $U(t)|_{t=0} = 0$, т.е. при нулевых начальных условиях, что вполне оправдано физически — ведь до прихода волны граница раздела находилась в покое.

Однако вторая группа граничных условий содержит не производные по времени, а пространственные производные по x , y , z . Эти переменные входят в связанном виде в волновой аргумент. Например, плоская волна, распространяющаяся в произвольном направлении L , описывается выражением

$$U(x, y, z, t) = U\left(t - \frac{x \cos(\widehat{L, x}) + y \cos(\widehat{L, y}) + z \cos(\widehat{L, z})}{V}\right) = \\ = U\left(t - \frac{xl + ym + zn}{V}\right).$$

Если вычислять производные по x , y , z , то это надо делать по правилам дифференцирования сложной функции $U(\tau)$, где

$$\tau(x, y, z, t) = t - \frac{x \cos(\widehat{L, x}) + y \cos(\widehat{L, y}) + z \cos(\widehat{L, z})}{V}.$$

Используя определение волнового аргумента, найдём:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{d\tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{dU}{d\tau} \left(-\frac{\cos(\widehat{L, x})}{V}\right),$$

аналогично для $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$.

Поэтому при составлении уравнений для группы динамических граничных условий (для напряжений) тригонометрические функции появляются дважды: при нахождении проекций векторов смещения на оси координат и при вычислении производных. Так как произведение синуса на косинус определяет синус двойного угла, а разность квадратов косинуса и синуса — косинус двойного угла, во второй группе граничных условий в качестве коэффициентов выступают тригонометрические функции двойных углов падения и вторичного излучения (отражения и прохождения).

Поскольку все действия — вычисление производных и проекций — надо производить в каждом члене каждого уравнения динамического равновесия, после Фурье-преобразования все эти уравнения можно сократить на общий множитель $j\omega$ и получить вторую группу уравнений в том же алгебраическом виде, что и уравнения первой группы граничных условий для компонент смещений (также представленных

их спектрами). Это делает возможным и облегчает совместное решение всех уравнений равновесия на границе раздела.

Кроме кинематических и динамических граничных условий, гипотеза о неразрывности контакта сред на границе имеет ещё одно следствие. Для сохранения сплошности среды необходимо, чтобы каждая точка границы имела один и тот же период колебаний T для всех волн – первичной и вторичных. С другой стороны, в любой момент времени распределение смещений по границе (кажущийся профиль волны) также должно быть одинаковым для всех волн. В частности, волны должны иметь одинаковую кажущуюся длину $\Lambda^* = \frac{\Lambda}{\sin \alpha}$ (рис. 7.4).

Объединяя эти два условия – $T = \text{const}$ и $\Lambda^* = \text{const}$, получим закон Снеллиуса:

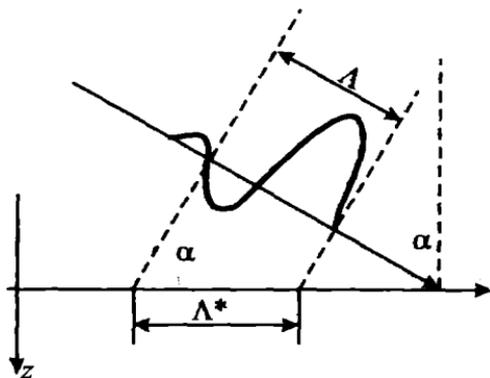
$$\frac{\Lambda^*}{T} = V^* = \text{const},$$

– закон равенства кажущихся скоростей всех волн на границе (третье граничное условие).

Если V_{P1} , V_{S1} – скорости в верхней среде, V_{P2} , V_{S2} – скорости в нижней среде, α_0 и V_0 – угол падения и скорость первичной волны, α_{P1} и α_{S1} – углы отражения продольной и поперечной волн, α_{P2} и α_{S2} – соответствующие углы прохождения, то закон Снеллиуса записывается в виде:

$$V^* = \frac{V_0}{\sin \alpha_0} = \frac{V_{P1}}{\sin \alpha_{P1}} = \frac{V_{S1}}{\sin \alpha_{S1}} = \frac{V_{P2}}{\sin \alpha_{P2}} = \frac{V_{S2}}{\sin \alpha_{S2}}.$$

Рис. 7.4. Определение кажущейся длины волны



Заметим, что закон Снеллиуса применим не только к упругим волнам. Из аналога закона Снеллиуса для оптики вытекают известные в физике законы отражения и преломления света — угол падения равен углу отражения и синусы углов падения и прохождения соотносятся как скорости света в контактирующих средах.

7.3. Типы первичных волн и образуемые ими на границе вторичные волны

Продолжим упрощение условий исследования и будем считать, что на плоскую, горизонтальную, разрывно-резкую границу раздела двух однородных сред падает сверху плоская волна с фронтом, параллельным Oy . В такой постановке задачи волновая функция не зависит от y , и вектор смещения можно описать так:

$$\begin{aligned}\vec{U}(x, z, t) &= \vec{U} \left(t - \frac{x \cos(\widehat{L, x}) + z \cos(\widehat{L, z})}{V} \right) = \\ &= \vec{U} \left(t - \frac{x \sin \alpha + z \cos \alpha}{V} \right),\end{aligned}$$

где L — направление, по которому распространяется волна (луч), $\alpha = (\widehat{L, z})$ — угол падения волны, и $(\widehat{L, x}) = \pi/2 - (\widehat{L, z})$. Поэтому:

$$\cos(\widehat{L, x}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha.$$

Напомним, что фронт волны можно считать плоским, если рассматривать удаления, превосходящие длину сейсмической волны на порядок.

Как было установлено в теории деформаций, в упругой среде могут существовать смещения двух типов — продольная (P) и поперечная (S). Произвольно ориентированный вектор упругих смещений \vec{U} можно спроектировать на луч и получить продольную компоненту \vec{U}_P , а проекция вектора и на фронт волны образует поперечную компоненту \vec{U}_S . В соответствии с теоремой разложения Гельмгольца, вектор \vec{U} равен сумме векторов \vec{U}_P и \vec{U}_S (рис. 7.5):

$$\vec{U} = \vec{U}_P + \vec{U}_S = \text{grad } \Phi + \text{rot } \Psi.$$

Напомним, что в общем случае:

$$\text{grad } \Phi = \vec{\nabla} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \vec{k},$$

$$\text{rot } \vec{\Psi} = \vec{\nabla} \times \vec{\Psi} = \left(\frac{\partial \Psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial \Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Поэтому:

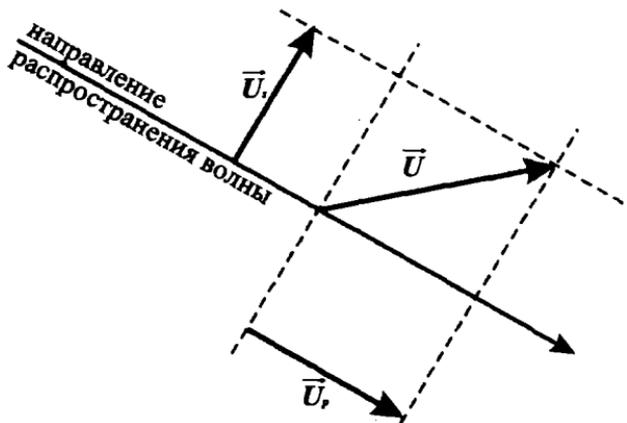
$$\vec{U} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Для плоской волны с фронтом, параллельным оси Oy , $\frac{\partial}{\partial y} = 0$, и вектор \vec{U} представляется в виде

$$\vec{U} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} \right) \vec{k}.$$

При этом условии x - и z -компоненты вектора \vec{U} определяются скалярным потенциалом Φ и y -компонентой вектор-потенциала $\vec{\Psi}$, а сле-

Рис. 7.5.
Разложение
вектора смещений
на продольную
и поперечную
составляющие



довательно, несут в себе продольные (\vec{U}_P) и поперечные (\vec{U}_S) смещения:

$$U_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} = U_{Px} - U_{Sx},$$

$$U_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} = U_{Pz} - U_{Sz}.$$

Оба вида смещений происходят в вертикальной плоскости xOz :

$$\vec{U}_P = U_{Px} \cdot \vec{i} + U_{Pz} \cdot \vec{k},$$

$$\vec{U}_S = U_{Sx} \cdot \vec{i} + U_{Sz} \cdot \vec{k}.$$

Поперечную волну, локализованную в вертикальной плоскости, называют вертикально поляризованной (SV): $\vec{U}_S \equiv \vec{U}_{SV}$.

Напротив, y -компонента вектора смещения плоской волны с фронтом, параллельным Oy , определяется исключительно компонентами вектор-потенциала $\vec{\Psi}$ поперечной волны:

$$U_y = \left(\frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x} \right) \vec{j} \equiv \vec{U}_{SH}.$$

Смещения этой волны \vec{U}_{SH} происходят вдоль горизонтальной оси Oy , и волна называется горизонтально-поляризованной (SH).

На рис. 7.6 произвольно-ориентированный вектор поперечных смещений \vec{U}_S представлен в виде суммы вертикально- и горизонтально-поляризованных компонент: $\vec{U}_S = \vec{U}_{SV} + \vec{U}_{SH}$.

Таким образом, произвольный вектор смещения \vec{U} выразим векторной суммой:

$$\vec{U} = \vec{U}_P + \vec{U}_{SV} + \vec{U}_{SH}.$$

Продольные и поперечные волны распространяются с разной скоростью ($V_P \geq V_S \sqrt{2}$), и волна P обгоняет волну S . Возможно раздельное существование P - и S -волн.

Итак, можно рассматривать первичные волны трёх типов: продольная (P) волна, поперечная вертикально-поляризованная (SV) волна и поперечная горизонтально-поляризованная (SH) волна.

Если на горизонтальную границу под произвольным углом $\alpha \neq 0$ падает плоская продольная волна, то на границе вектор смещения пер-

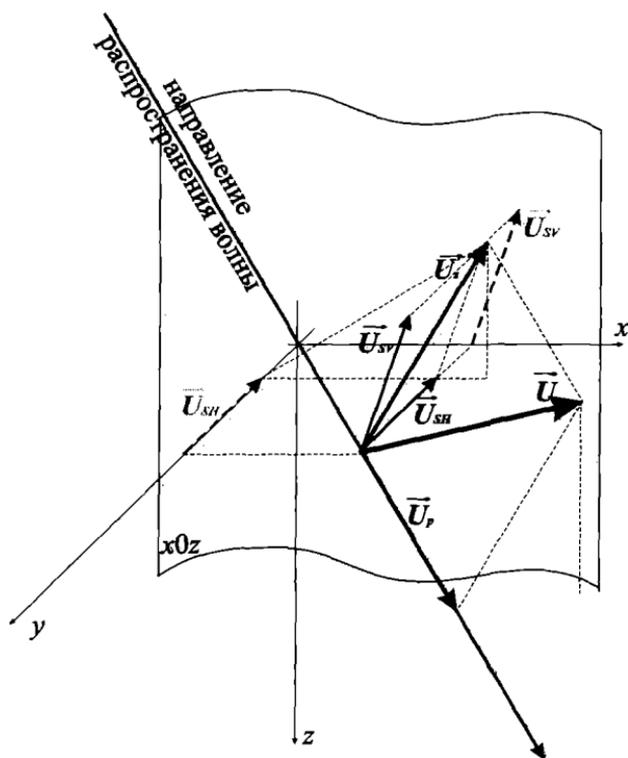


Рис. 7.6. Разложение вектора смещений на продольную, вертикально-поляризованную и горизонтально-поляризованную поперечные составляющие

вичной волны совпадает с лучом падающей волны и отклонён от лучей вторичных – отражённой и проходящей – волн. Поэтому существуют отличные от нуля проекции вектора смещения как на лучи вторичных волн, так и на перпендикуляры к ним (на фронты этих волн). При наклонном падении ($\alpha \neq 0$) P -волна порождает как продольные, монотипные (PP) так и поперечные, обменные (PS) вторичные волны. Существуют четыре вторичные волны (рис. 7.7, а): две отражённые – монотипная и обменная и две проходящие – также монотипная и обменная.

Ситуация аналогична и при падении на границу плоской вертикально - поляризованной поперечной (SV) волны. Снова имеются условия

для образования при наклонном падении четырех вторичных волн: двух монотипных (SS) – отражённой и проходящей и двух обменных (SP) – также отражённой и проходящей (рис. 7.7, б).

Наиболее простым является третий возможный тип первичной волны – горизонтально-поляризованная поперечная волна SH . Из-за того, что вектор смещения такой волны перпендикулярен лучу и параллелен границе (оси Oy), ни при каком угле падения невозможно образование обменных волн.

Первичная SH -волна порождает на границе только две вторичные волны – отражённую и проходящую SH -волны (рис. 7.8).

При проведении сейсморазведочных исследований чаще других используются продольные волны. Это связано с большей простотой их возбуждения: как взрывные источники, так и источники ударного типа в обычных условиях, без специальных на то усилий возбуждают именно P -волны. Для работы с S -волнами нужны специальные и потому менее технологичные приёмы возбуждения. Исследования на поперечных волнах выполняются реже и носят обычно опытно-методический характер.

Тем не менее, следуя принципу «от простого к сложному», начнём изучение явлений на границе раздела сред именно со случая падения поперечной горизонтально-поляризованной (SH) волны. При этом особое внимание следует обратить на методику и аппарат исследования, а также на анализ полученных результатов. Если эти

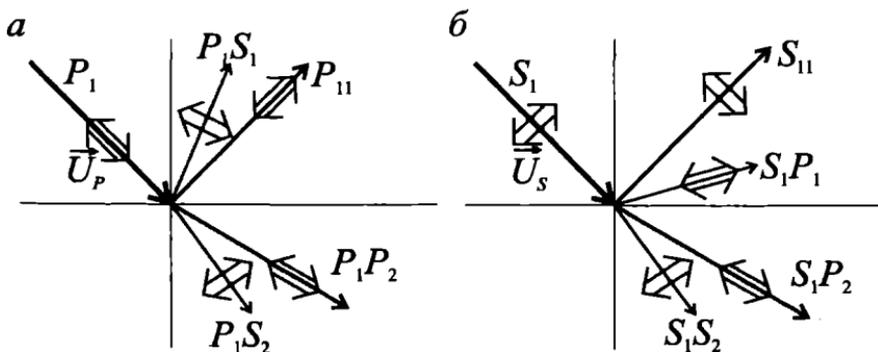
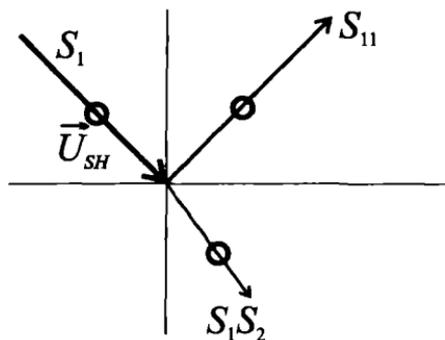


Рис. 7.7. Вторичные волны при падении на границу:

а – продольной волны; **б** – поперечной вертикально-поляризованной волны

Рис. 7.8. Вторичные волны при падении на границу поперечной горизонтально-поляризованной волны. Вектор смещений перпендикулярен плоскости чертежа



вопросы полно освоены, то рассмотрение более сложных случаев падения продольной (P) и поперечной вертикально-поляризованной (SV) волны существенно облегчается. Эти два случая роднит число вторичных волн (четыре) и такое же число граничных условий и уравнений, и, кроме того, имеется возможность некоторого обобщения этих случаев.

Глава 8. Отражение и прохождение SH-волны

Пусть верхняя среда имеет скорость поперечной волны V_{S1} , плотность ρ_1 , и модуль сдвига μ_1 , а нижняя среда характеризуется параметрами V_{S2} , ρ_2 , μ_2 . Напомним, что $V_S^2 = \mu/\rho$, и для сокращения записи опустим индекс поперечной волны (S) и будем обозначать $V_1 \equiv V_{S1}$, не забывая, конечно, о том, что в этом разделе речь идёт о поперечной горизонтально-поляризованной волне, падающей на плоскую, горизонтальную, разрывно-резкую границу раздела.

8.1. Описание волн и создаваемых ими на границе напряжений

Пусть первичная плоская SH -волна падает на границу ($z = 0$) под углом α и имеет фронт, параллельный оси Oy . Она описывается вектором смещения $\vec{U}_S \equiv \vec{U} = U_y \cdot \vec{j}$, также ориентированным вдоль Oy , но не зависящим от y :

$$\vec{U}(x, z, t) = \vec{U} \left(\underbrace{t - \frac{x \sin \alpha + z \cos \alpha}{V_1}}_{\tau} \right) \equiv \vec{U}(\tau).$$

Как отмечалось, SH -волна в выбранных условиях порождает на границе только монотипные (также SH) вторичные волны.

Отражённая SH -волна $\vec{U}_1(x, z, t)$ распространяется вверх, в противоположном по отношению к первичной волне направлении.

Поэтому в её волновом аргументе перед переменной z меняется знак:

$$\vec{U}_1(x, z, t) = \vec{U}_1 \left(t - \underbrace{\frac{x \sin \alpha_1 - z \cos \alpha_1}{V_1}}_{\tau_1} \right) \equiv \vec{U}_1(\tau_1).$$

Проходящая SH -волна распространяется в том же направлении, что и падающая волна (вниз), но во второй нижней среде со скоростью V_2 и под углом α_2 :

$$\vec{U}_2(x, z, t) = \vec{U}_2 \left(t - \underbrace{\frac{x \sin \alpha_2 + z \cos \alpha_2}{V_2}}_{\tau_2} \right) \equiv \vec{U}_2(\tau_2).$$

Закон Снеллиуса для SH -волн имеет вид:

$$\frac{\sin \alpha}{V_1} = \frac{\sin \alpha_1}{V_1} = \frac{\sin \alpha_2}{V_2}, \quad \alpha = \alpha_1.$$

Горизонтальное вдоль Oy смещение SH -волн создает на границе лишь касательное напряжение:

$$P_{zy} = 2\mu e_{zy},$$

в соответствии с законом Гука, где e_{zy} — сдвиговая деформация в плоскости zOy :

$$e_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right).$$

Но SH -волна несёт смещение, ориентированное вдоль Oy , и для неё $U_z = 0$. Кроме того, фронты всех волн параллельны той же оси Oy , и поэтому $\frac{\partial}{\partial y} = 0$. Следовательно, для касательного напряжения можно записать (приняв для простоты записи $U_y \equiv U$):

$$P_{zy} = \mu \frac{\partial U}{\partial z} = \rho_1 V_1^2 \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Напряжение, создаваемое на границе падающей волной, описывается так:

$$P_{zy} = \rho_1 V_1^2 \frac{\partial}{\partial z} (U(\tau)) = \rho_1 V_1^2 \frac{dU}{d\tau} \left(-\frac{\cos \alpha}{V_1} \right) = -\rho_1 V_1 \frac{dU}{d\tau} \cos \alpha.$$

Отражённая волна создает на границе касательное напряжение

$$P_{zy1} = \rho_1 V_1^2 \frac{\partial}{\partial z} (U_1(\tau_1)) = \rho_1 V_1^2 \frac{dU_1}{d\tau_1} \left(\frac{\cos \alpha_1}{V_1} \right) = \rho_1 V_1 \frac{dU_1}{d\tau_1} \cos \alpha_1.$$

Наконец, проходящая волна создает напряжение

$$P_{zy2} = \rho_2 V_2^2 \frac{\partial}{\partial z} (U_2(\tau_2)) = \rho_2 V_2^2 \frac{dU_2}{d\tau_2} \left(-\frac{\cos \alpha_2}{V_2} \right) = -\rho_2 V_2 \frac{dU_2}{d\tau_2} \cos \alpha_2.$$

Поскольку $\alpha = \alpha_1$, для унификации обозначений будем всегда использовать угол α_1 .

8.2. Граничные условия и спектральные коэффициенты рассеивания

Из общих трёх граничных условий для компонент векторов смещения и стольких же граничных условий для компонент напряжений в условиях рассматриваемой в данном разделе задачи актуальны лишь два граничных условия: равенство суммарных y -компонент смещений (кинематическое) и равенство суммарных касательных P_{zy} напряжений (динамическое).

На границе, при $z = 0$, сумма смещений падающей $U(\tau)$ и отражённой $U_1(\tau_1)$ волн должна быть равна смещению $U_2(\tau_2)$ проходящей волны:

$$U(\tau) + U_1(\tau_1)|_{z=0} = U_2(\tau_2).$$

При подстановке $z = 0$ волновые аргументы всех трёх волн равны:

$$\left(\tau|_{z=0} = t - \frac{x \sin \alpha}{V_1} \right) = \left(\tau_1|_{z=0} = t - \frac{x \sin \alpha_1}{V_1} \right) =$$

$$= \left(\tau_2 \Big|_{z=0} = t - \frac{x \sin \alpha_2}{V_2} \right).$$

Т.е. $\tau = \tau_1 = \tau_2$, так как t и x — общие время и координата точки границы, а множители при x равны в соответствии с законом Снеллиуса. Поэтому первое граничное условие даёт уравнение:

$$U(\tau) + U_1(\tau) = U_2(\tau),$$

или в спектрах:

$$\tilde{U}(\omega) + \tilde{U}_1(\omega) = \tilde{U}_2(\omega).$$

Обратим внимание на отсутствие в первом уравнении углов падения, отражения и прохождения. Это значит, что уравнение должно быть справедливым при любом угле падения $0 \leq \alpha_1 \leq \pi/2$.

Динамическое граничное условие требует, чтобы на границе, при $z = 0$, сумма напряжений, создаваемых падающей и отражённой волнами, равнялась напряжению, создаваемому проходящей волной:

$$P_{zy} + P_{zy1} \Big|_{z=0} = P_{zy2}.$$

Используя определения касательных напряжений, получим, подставляя $z = 0$, второе уравнение:

$$-\rho_1 V_1 \frac{dU}{d\tau} \cos \alpha_1 + \rho_1 V_1 \frac{dU_1}{d\tau} \cos \alpha_1 = -\rho_2 V_2 \frac{dU_2}{d\tau} \cos \alpha_2,$$

или в спектральной форме после сокращения на $j\omega$:

$$-\rho_1 V_1 \tilde{U}(\omega) \cos \alpha_1 + \rho_1 V_1 \tilde{U}_1(\omega) \cos \alpha_1 = -\rho_2 V_2 \tilde{U}_2(\omega) \cos \alpha_2.$$

Вместе уравнения для смещений и напряжений создают систему из двух уравнений, в которые входят спектры трех волн — отражённой, проходящей и породившей их первичной (падающей):

$$\begin{cases} \tilde{U}(\omega) + \tilde{U}_1(\omega) = \tilde{U}_2(\omega), \\ -\rho_1 V_1 \tilde{U}(\omega) \cos \alpha_1 + \rho_1 V_1 \tilde{U}_1(\omega) \cos \alpha_1 = -\rho_2 V_2 \tilde{U}_2(\omega) \cos \alpha_2. \end{cases}$$

Очевидно, эта система позволяет определить лишь отношения спектров вторичных волн к спектру первичной волны. Так вводятся *спектральные коэффициенты рассеяния*:

$$\text{— спектральный коэффициент отражения } A = \frac{\tilde{U}_1(\omega)}{\tilde{U}(\omega)};$$

$$\text{— спектральный коэффициент прохождения } B = \frac{\tilde{U}_2(\omega)}{\tilde{U}(\omega)}.$$

Как в любой линейной системе, чья спектральная характеристика определена отношением спектра сигнала на выходе к спектру входного сигнала, в данном случае спектры «выходных сигналов» — отражённой волны («выход 1») и проходящей волны («выход 2») соотносятся со спектром «входного сигнала» — падающей волны.

Разделив уравнения на $\tilde{U}(\omega)$ и введя A и B , запишем:

$$\begin{cases} 1 + A = B, \\ -\rho_1 V_1 \cos \alpha_1 + \rho_1 V_1 \cos \alpha_1 \cdot A = -\rho_2 V_2 \cos \alpha_2 \cdot B. \end{cases}$$

Решая любым способом эту простую систему уравнений, получим определения спектральных коэффициентов рассеивания:

$$A = \frac{V_1 \rho_1 \cos \alpha_1 - V_2 \rho_2 \cos \alpha_2}{V_1 \rho_1 \cos \alpha_1 + V_2 \rho_2 \cos \alpha_2},$$

$$B = 1 + A = \frac{2V_1 \rho_1 \cos \alpha_1}{V_1 \rho_1 \cos \alpha_1 + V_2 \rho_2 \cos \alpha_2}.$$

Обратим внимание на очень удобную особенность — при любом угле падения коэффициент прохождения на единицу больше коэффициента отражения.

Произведение скорости на плотность в сейсморазведке называют волновым сопротивлением (или акустической жёсткостью):

$$\gamma_i = V_i \cdot \rho_i, \quad i = 1, 2.$$

Используя определение спектральных коэффициентов рассеивания, можно записать для спектров вторичных волн:

$$\begin{cases} \tilde{U}_1(\omega) = A\tilde{U}(\omega), \\ \tilde{U}_2(\omega) = B\tilde{U}(\omega) = (1 + A)\tilde{U}(\omega). \end{cases}$$

Так как $B = 1 + A$, то при любом угле падения спектры волн связаны соотношением

$$\tilde{U}_2(\omega) = \tilde{U}(\omega) + \tilde{U}_1(\omega).$$

В том же соотношении находятся и сами сигналы — первичная и вторичные волны:

$$U_2(t) = U(t) + U_1(t).$$

Видно, что всегда проходящая волна представляет собой сумму волн падающей и отражённой. Заметим, что для *SH*-волн так и должно быть для соблюдения неизменной сплошности всей среды и неразрывности контакта пород на границе.

При нормальном (по перпендикуляру к границе) падении $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и коэффициенты рассеивания равны:

$$A = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2},$$

$$B = 1 + A = \frac{2\gamma_1}{\gamma_1 + \gamma_2}.$$

Очевидно, что условием возникновения отражённой волны служит неравенство волновых сопротивлений контактирующих на границе сред $\gamma_1 \neq \gamma_2$, вне зависимости от того, чем это неравенство вызывается — различием скоростей или различием плотностей. Отражающей является граница с различными волновыми сопротивлениями. Могут быть «скоростные» границы, на которых изменяются скорости, могут существовать «плотностные» границы, на которых меняются плотности, — и границы обоих типов являются отражающими. Наоборот, граница, на которой $V_1 \neq V_2$ и $\rho_1 \neq \rho_2$, но $\gamma_1 = \gamma_2$, не является отражающей.

В большинстве случаев скорости и плотности пород изменяются согласованно — более плотные породы являются и более высокоскоростными и наоборот. Исключения из этого правила довольно редки. Наиболее яркий пример — граница между залегающими над соляным куполом известняками и каменной солью. Скорость волны в известняках может быть меньше скорости в соли, тогда как плотность соли меньше плотности известняка.

В зависимости от знака неравенства $\gamma_1 \neq \gamma_2$, выделяют различные случаи: $\gamma_1 > \gamma_2$, когда верхняя среда имеет большее волновое сопро-

тивление, чем ниже, и обратный случай, когда нижняя среда характеризуется большим волновым сопротивлением: $\gamma_1 < \gamma_2$. В геологическом разрезе из-за статического давления вышележащих пород волновое сопротивление обычно растёт с увеличением глубины залегания. Уменьшению его на границе обычно соответствуют границы перерыва в осадконакоплении (границы разрыва).

Проведём последовательный анализ поведения коэффициентов рассеивания A и B вторичных волн при изменении угла падения первичной SH-волны: $0 \leq \alpha_1 \leq \pi/2$. Угол $\alpha = 0$ соответствует нормальному падению волны, угол $\alpha = \pi/2$ является теоретически возможным пределом изменения угла падения, при котором волна скользит вдоль границы.

8.3. Волны рассеивания при падении SH-волны на кровлю низкоскоростной среды

Верхняя среда более плотная и имеет большую скорость распространения волны, чем нижняя:

$$\rho_1 > \rho_2, \quad V_1 > V_2, \quad \gamma_1 > \gamma_2.$$

Из закона Снеллиуса следует, что в том же соотношении находятся углы падения и отражения $\alpha = \alpha_1$ и угол прохождения α_2 :

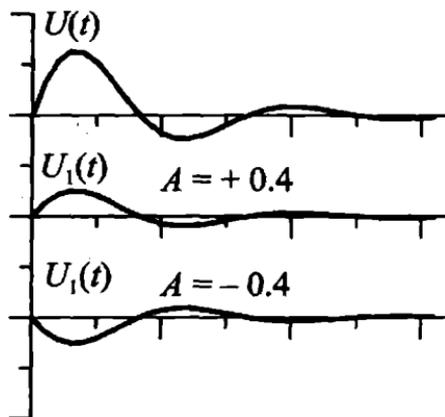
$$\alpha = \alpha_1 > \alpha_2.$$

Поэтому при изменении угла падения от 0 до теоретически возможного предела $\pi/2$ угол прохождения этого предела не достигает: всегда $\alpha_2 < \pi/2$.

Коэффициенты рассеивания при любых углах падения являются действительными числами — просто амплитудными множителями, лишь уменьшающими (при $A, B < 1$) или увеличивающими (при $B > 1$) амплитуду вторичной волны по сравнению с амплитудой первичной, падающей волны.

Возможно ещё одно воздействие коэффициента отражения A на отражённую волну. Если $A > 0$, то отражённая волна имеет тот же знак (направление) смещения, что и первичная волна. Если же $A < 0$, то

Рис. 8.1. Направления смещений первичной и отражённой волн в зависимости от знака коэффициента отражения.



первичная и отражённая волны имеют разные направления смещения (рис. 8.1). Пусть, например, падающая волна имеет направление первого смещения в сторону $y > 0$.

Тогда при $A < 0$ первое смещение отражённой волны направлено в сторону $y < 0$. В физике такое явление называют отражением с потерей полуволны, в сейсморазведке — изменением полярности первого вступления волны.

При нормальном падении

$$A = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} > 0, \quad B = 1 + A > 1.$$

Например, при $V_1 = 2$ км/с, $\rho_1 = 2.5$ г/см³, $V_2 = 1.5$ км/с, $\rho_2 = 2$ г/см³ коэффициенты рассеивания имеют значения: $A = 0.25$, $B = 1.25$. При нормальном падении отражённая волна имеет амплитуду, в четыре раза меньшую амплитуды первичной волны, а проходящая волна превосходит её по амплитуде на 25%.

Подстановка теоретически возможного предела изменения угла падения $\alpha = \alpha_1 = \pi/2$ даёт $\cos \alpha_1 = 1$ и $A = -1$, $B = 0$. Отражённая волна имеет ту же амплитуду, что и волна падающая, но инвертирована (обращена) по знаку смещения в сравнении с ней *. Проходящая волна отсутствует, что вполне естественно.

* То есть имеется просто гармоническая волна, двигающаяся в направлении, параллельном границе. (Прим. ред.)

Обратим внимание на то, что при изменении угла падения от 0 до $\pi/2$ коэффициент отражения меняет знак: при $\alpha = 0$: $A > 0$, а при $\alpha = \pi/2$: $A < 0$.

Значит, при некотором угле падения α_0 коэффициент отражения равен 0 и отражённая волна отсутствует (!). Так как $B = 1 + A$, то при $\alpha = \alpha_0$: $B = 1$ и проходящая волна имеет в точности ту же амплитуду, что и первичная волна.

Найдём этот угол α_0 из условия $A = 0$: $\gamma_1 \cos \alpha_1 = \gamma_2 \cos \alpha_2$.

По закону Снеллиуса, $\sin \alpha_2 = \frac{V_2}{V_1} \sin \alpha_1$, следовательно,

$$\cos \alpha_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2} = \sqrt{1 - \left(\frac{V_2}{V_1} \sin \alpha_1\right)^2}.$$

Поэтому условие $A = 0$ принимает вид:

$$\gamma_1 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_1} = \gamma_2 \sqrt{1 - \left(\frac{V_2}{V_1} \sin \alpha_1\right)^2}.$$

Отсюда, после преобразований найдём α_0 по его синусу:

$$\sin \alpha_0 = \sqrt{\frac{\gamma_1^2 - \gamma_2^2}{\gamma_1^2 - \left(\frac{V_2}{V_1} \gamma_2\right)^2}} = \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^2}{1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^2}}.$$

При уменьшении различия физических свойств плотности пород сближаются более быстро, чем скорости. При $\rho_2/\rho_1 \rightarrow 1$:

$$\sin \alpha_0 \rightarrow \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2}{1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^4}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2}}.$$

В пределе, когда и $V_2/V_1 \rightarrow 1$, $\sin \alpha_0 \rightarrow 1/\sqrt{2}$, т.е. $\alpha_0 \rightarrow \pi/4$. Следовательно, в рассматриваемом случае угол падения α_0 , при котором $A = 0$, находится в диапазоне углов падения, больших $\pi/4$, удаляясь от этой величины в сторону больших углов по мере увеличения различий физических свойств контактирующих сред (контрастности границы).

Для выбранных ранее в качестве примера сред $\sin \alpha_0 \approx 0.84$, а угол $\alpha_0 \approx 1$ рад (57°). Значит, в диапазоне углов падения от 0 до 57° коэффициент отражения A положителен, коэффициент прохождения $B > 1$. При $\alpha_0 \approx 57^\circ$: $A = 0$, $B = 1$, а при $\alpha_0 > 57^\circ$: $A < 0$, $0 \leq B < 1$. При углах, меньших 57° , отражённый сигнал имеет тот же знак смещения, что и первичная волна; при угле падения, равном 57° , отражённая волна отсутствует, а при углах, больших 57° , она подобна первичной волне с инвертированным знаком смещения.

Для выбранных параметров разреза на рис. 8.2 приведён единый график $A(\alpha)$ и $B(\alpha) = 1 + A(\alpha)$, снабжённый двумя шкалами оси ординат со смещёнными на единицу нулями. В нижней части рисунка изображены схематические импульсоиды падающей волны $U(t)$ и вторичных волн – отражённой $U_1(t)$ и проходящей $U_2(t)$ для различных углов падения. Как видно из рисунка, при малых углах падения изменения спектральных коэффициентов A и B незначительны. Соответственно, малы и изменения амплитуды вторичных волн. Это является благоприятным фактором для сейсмической разведки. С приближением угла падения к α_0 спад кривой ускоряется, отражённая волна затухает до нуля при $\alpha = \alpha_0$, а амплитуда проходящей волны стремится к амплитуде волны падающей. При углах, больших α_0 , происходит стремительное падение кривой к пределам $A(\alpha \rightarrow 90^\circ) \rightarrow -1$; $B(\alpha \rightarrow 90^\circ) \rightarrow 0$. Отражённая волна, поменяв знак смещения на обратный при $\alpha = \alpha_0$, стремится к падающей волне с инвертированным знаком смещения. Проходящая волна столь же быстро затухает до нуля.

8.4. Волны рассеивания при падении SH-волны на кровлю высокоскоростной среды

Нижняя среда – более плотная и имеет большую скорость распространения волны, чем верхняя:

$$\rho_1 < \rho_2, \quad V_1 < V_2, \quad \gamma_1 < \gamma_2.$$

В соответствии с законом Снеллиуса, угол прохождения всегда больше угла падения и равного ему угла отражения: $\alpha_2 > \alpha = \alpha_1$.

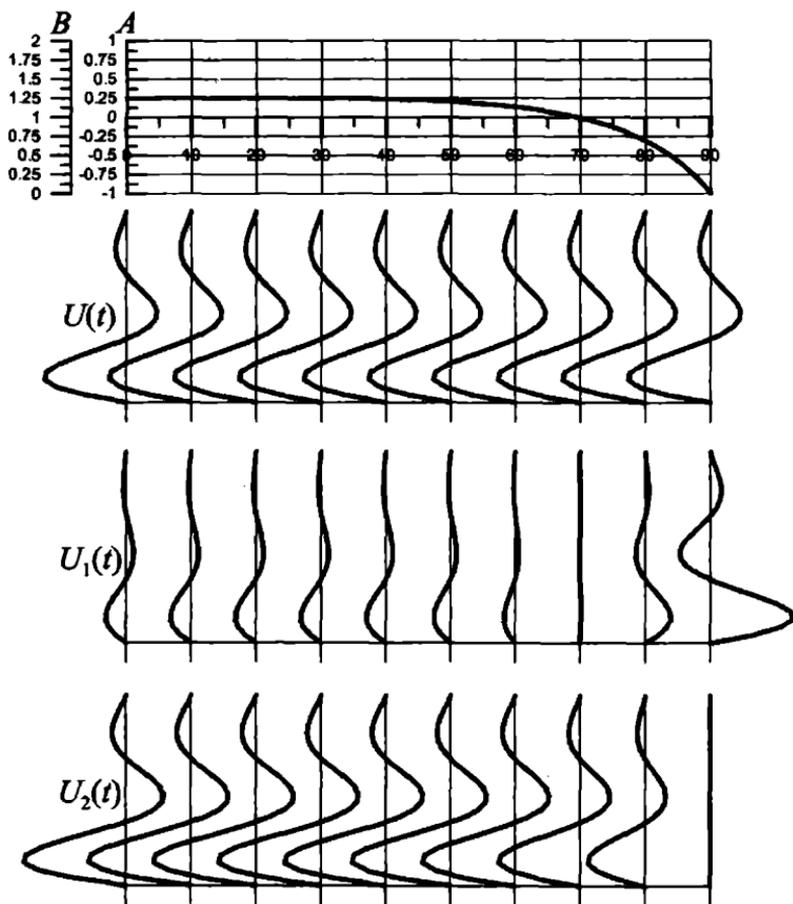


Рис. 8.2. График коэффициентов отражения и прохождения для SH-волны в зависимости от угла падения, соответствующие волновые импульсы.

При изменении угла падения $\alpha = \alpha_1$ от нуля до теоретически возможного предела 90° угол прохождения растет быстрее и становится равным 90° при $\alpha_1 < 90^\circ$. В этом случае $\sin \alpha_2 = 1$, $\sin \alpha = \sin \alpha_1 = \frac{V_1}{V_2} = \sin \alpha_k$ и $\alpha = \alpha_k$, где α_k — критический угол падения. При таком падении проходящая волна не уходит в глубь нижней среды, а скользит вдоль границы со скоростью

V_2 . Эта скользящая волна порождает в верхней низкоскоростной среде вторичную волну, называемую в сейсморазведке головной или преломлённой. На регистрации таких волн основан второй метод сейсморазведки – метод преломлённых волн (МПВ), – первым и основным, но вторым по времени возникновения, является метод отражённых волн (МОВ).

При нормальном падении все косинусы равны единице, коэффициент отражения отрицателен, а коэффициент прохождения меньше единицы. Следовательно, в этом случае отражённая волна противоположна падающей по знаку смещений (отражение с потерей полуволны), а проходящая волна имеет меньшую амплитуду, чем падающая: так, при $\alpha = 0$: $A < 0$ и $U_1(\tau) = -|A|U(\tau)$, $B < 1$ и $U_2(\tau) = BU(\tau) < U(\tau)$.

При критическом угле падения $\alpha_k = \arcsin \frac{V_1}{V_2}$ – угол прохождения $\alpha_2 = 90^\circ$ и $A = 1$, $B = 1 + A = 2$. Отражённая волна имеет ту же амплитуду, что и падающая, а проходящая волна по амплитуде вдвое превосходит её, то есть при $\alpha = \alpha_k$: $A = 1$ и $U_1(\tau) = U(\tau)$, $B = 2$ и $U_2(\tau) = 2U(\tau)$.

Видно, что и при $\gamma_1 < \gamma_2$ коэффициент отражения меняет свой знак: при нормальном падении $A < 0$, а при $\alpha = \alpha_k$: $A = 1 > 0$, и существует угол $\alpha < \alpha_k$, при котором $A = 0$ и $U_1(\tau) = 0$, $B = 1$ и $U_2(\tau) = U(\tau)$, – отражённой волны нет, есть только проходящая вторичная волна с амплитудой, равной амплитуде падающей волны. Синус этого угла определен ранее, но, так как $\gamma_1 < \gamma_2$, формулу для $\sin \alpha_0$ удобнее записать, умножив числитель и знаменатель подкоренного выражения на (-1) :

$$\sin \alpha_0 = \sqrt{\frac{\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^2 - 1}{\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)^2 - 1}}.$$

При дальнейшем увеличении угла падения, когда $\alpha \rightarrow \alpha_k$, коэффициент отражения A стремительно возрастает от 0 при $\alpha = \alpha_0$ до 1 при $\alpha = \alpha_k$, одновременно и так же быстро B растёт от 1 до 2.

Однако более существенные изменения коэффициентов A и B вторичных волн – отражённой и проходящей – происходят, когда угол падения становится больше критического.

Если $\alpha > \alpha_k$ (напомним, $\sin \alpha_k = \frac{V_1}{V_2}$), в соответствии с законом Снеллиуса:

$$\sin \alpha_2 = \frac{V_2}{V_1} \sin \alpha_1 > \frac{V_2}{V_1} \sin \alpha_k = \frac{V_2}{V_1} \cdot \frac{V_1}{V_2} = 1, \quad \sin \alpha_2 > 1,$$

– синус угла прохождения при закритическом падении становится больше единицы (?!). Этого не может быть в области действительных тригонометрических функций.

Определим косинус угла прохождения по обычной формуле:

$$\cos \alpha_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2} = \pm j \sqrt{\sin^2 \alpha_2 - 1}, \quad \text{так как } \sin \alpha_2 > 1.$$

Синусу, большому 1, соответствует чисто мнимый косинус.

Встретившись с этой неожиданной трансформацией косинуса, мы, из осторожности, записали оба возможных знака (\pm) корня. Установим, какой из них имеет физический смысл. Для этого вспомним описание проходящей волны (в волновой аргумент которой и входит $\cos \alpha_2$) и её спектра:

$$\begin{aligned} \bar{U}_2(x, z, t) &= \bar{U}_2 \left(t - \frac{x \sin \alpha_2 + z \cos \alpha_2}{V_2} \right) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \tilde{U}_2(x, z, \omega) &= U_2(\omega) e^{-j\omega \frac{x \sin \alpha_2 + z \cos \alpha_2}{V_2}}. \end{aligned}$$

Подставим в последнее определение $\epsilon = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2}$, $\cos \alpha_2 = \pm j\epsilon$:

$$\tilde{U}_2(x, z, \omega) = U_2(\omega) e^{-j\omega \frac{x \sin \alpha_2 + z \cos \alpha_2}{V_2}} = U_2(\omega) e^{\pm \frac{j\omega \epsilon}{V_2} z} e^{-j\omega \frac{x \sin \alpha_2}{V_2}}.$$

Наличие мнимой единицы в определении косинуса выводит зависимость от z из функции запаздывания и превращает её в амплитудный множитель $e^{\pm \frac{j\omega \epsilon}{V_2} z}$.

Если определить $\cos \alpha_2 = +j\epsilon$, то с ростом z (т.е. при удалении от границы и от предполагаемого источника колебаний) амплитуда гармоники частоты ω неограниченно возрастает: при $z \rightarrow \infty$ $e^{\pm \frac{j\omega \epsilon}{V_2} z} \rightarrow \infty$. Физически это абсолютно невозможно, поэтому из двух знаков мнимого косинуса следует выбрать минус: $\cos \alpha_2 = -j\epsilon$.

Тогда амплитуда вторичной волны, определяемая множителем $e^{-\frac{\omega \varepsilon}{V_2} z}$, стремится к нулю при удалении от границы ($z \rightarrow \infty$). Однако спектр импульсного сигнала определён на всём бесконечном интервале частот: $-\infty < \omega < \infty$, и в волновом импульсе присутствуют как гармоники с положительными частотами, так и гармоники $\omega < 0$. Знак минус в определении $\cos \alpha_2 = -j\varepsilon$ «правильно действует» только для положительных частот. Для отрицательных частот знак минус гаснет и амплитуда гармоники частоты $\omega < 0$ неограниченно возрастает по мере удаления от границы $z \rightarrow \infty$. Это — снова нереально.

Чтобы обеспечить затухание всего спектра волны U_2 как для положительных, так и для отрицательных частот, определим:

$$\cos \alpha_2 = -j\varepsilon \operatorname{sgn}(\omega),$$

где $\operatorname{sgn}(\omega)$ — знаковая функция частоты:

$$\operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega > 0, \\ 0, & \omega = 0, \\ -1, & \omega < 0. \end{cases}$$

В таком определении амплитудный множитель $e^{-\frac{\omega \varepsilon \operatorname{sgn}(\omega)}{V_2} z}$ обеспечивает затухание гармонических составляющих со всеми частотами: если $\omega > 0$, $\operatorname{sgn}(\omega) = 1$ и $e^{-\frac{\omega \varepsilon}{V_2} z}$ — функция, убывающая с ростом z ; если же $\omega < 0$, $\operatorname{sgn}(\omega) = -1$ и $e^{-\frac{|\omega| \varepsilon}{V_2} z}$ — так же убывающая по мере удаления от границы функция.

Обратим внимание на то, что с ростом абсолютного значения частоты ω затухание ускоряется, чем выше частота гармоники, тем быстрее она затухает с ростом z .

В функции запаздывания спектра проходящей волны $\tilde{U}_2(x, z, \omega)$ осталась лишь пространственная переменная x : $e^{-j\omega \frac{x \sin \alpha_2 + z \cos \alpha_2}{V_2}}$. Эта функция соответствует скольжению плоской волны U_2 вдоль границы со скоростью $V_2' = V_2 / \sin \alpha_2$ — меньшей истинной скорости V_2 волны в нижней среде, так как $\sin \alpha_2 > 1$. Эта скользящая с «неправильной» скоростью волна имеет амплитуду, экспоненциально уменьшающуюся с глубиной, вдоль фронта волны. Эти две особенности критической проходящей волны дают основание для её специального

наименования — она называется *неоднородной плоской волной*, в соответствии с характером распределения её амплитуды по фронту.

Неоднородные плоские волны играют главенствующую роль в образовании преломлённой (головной) волны, которую рассмотрим несколько позже в отдельном разделе. Здесь подчеркнем одно — все особенности неоднородной волны выявлены в результате анализа лишь волнового аргумента проходящей волны при закритическом падении плоской волны на границу раздела. Вид самой волновой функции $U_2(\tau)$ этим анализом не затронут. Поэтому вернемся к исследованию поведения спектральных коэффициентов рассеивания и вторичных волн при закритическом падении первичной волны.

Итак, установлено, что при $\alpha > \alpha_k$: $\sin \alpha_2 > 1$, $\cos \alpha_2 = -j\varepsilon \operatorname{sgn}(\omega)$, где $\varepsilon = \sqrt{\sin^2 \alpha_2 - 1} = \sqrt{\left(\frac{V_2}{V_1} \sin \alpha_1\right)^2 - 1}$.

Коэффициенты рассеивания A и B в этом случае описываются выражениями:

$$A = \frac{\gamma_1 \cos \alpha_1 + j\varepsilon\gamma_2 \operatorname{sgn}(\omega)}{\gamma_1 \cos \alpha_1 - j\varepsilon\gamma_2 \operatorname{sgn}(\omega)} \equiv \tilde{A}(\omega) = \Re\{A\} + j\Im\{A\},$$

$$B = 1 + A = \frac{2\gamma_1 \cos \alpha_1}{\gamma_1 \cos \alpha_1 - j\varepsilon\gamma_2 \operatorname{sgn}(\omega)} \equiv \tilde{B}(\omega) = \Re\{B\} + j\Im\{B\}.$$

Знаком тождества подчеркнута комплексная зависимость коэффициентов рассеивания от частоты, оправдывающая введенное ранее определение A и B как спектральных коэффициентов рассеивания.

В числителе и знаменателе дроби, определяющей A — комплексно-сопряженные выражения: $\gamma_1 \cos \alpha_1 \pm j\varepsilon\gamma_2 \operatorname{sgn}(\omega)$, имеющие одинаковый модуль (так как $\operatorname{sgn}^2(\omega) = 1$) и противоположные по знаку аргументы.

Поэтому модуль спектрального коэффициента выражения равен 1: $|A(\omega)| = 1$, и не зависит ни от частоты, ни от угла падения. Фазово-частотный коэффициент отражения как аргумент дроби с комплексно-сопряженными числителем и знаменателем, равен:

$$\psi_A = \psi_{\text{числ.}} - \psi_{\text{знам.}} = 2\psi_{\text{числ.}} = 2 \arcsin \frac{\varepsilon\gamma_2 \operatorname{sgn}(\omega)}{\sqrt{(\gamma_1 \cos \alpha_1)^2 + (\varepsilon\gamma_2)^2}}.$$

Действительная $\Re\{A\}$ и мнимая $\Im\{A\}$ части спектрального коэффициента отражения (СКО) равны:

$$\Re\{A\} = |A| \cos \psi_A = \cos \left(\underbrace{2 \arcsin \frac{\varepsilon \gamma_2 \operatorname{sgn}(\omega)}{\sqrt{(\gamma_1 \cos \alpha_1)^2 + (\varepsilon \gamma_2)^2}}}_{\beta} \right) = \cos 2\beta,$$

$$\Im\{A\} = |A| \sin \psi_A = \sin \left(\underbrace{2 \arcsin \frac{\varepsilon \gamma_2 \operatorname{sgn}(\omega)}{\sqrt{(\gamma_1 \cos \alpha_1)^2 + (\varepsilon \gamma_2)^2}}}_{\beta} \right) = \sin 2\beta.$$

При этом

$$\sin \beta = \frac{\varepsilon \gamma_2 \operatorname{sgn}(\omega)}{\sqrt{(\gamma_1 \cos \alpha_1)^2 + (\varepsilon \gamma_2)^2}},$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{\gamma_1 \cos \alpha_1}{\sqrt{(\gamma_1 \cos \alpha_1)^2 + (\varepsilon \gamma_2)^2}}.$$

Используя формулы косинуса и синуса двойного угла ($\sin 2\beta = 2 \sin \beta \cos \beta$, $\cos 2\beta = \cos^2 \beta - \sin^2 \beta$), получим выражения для действительной и мнимой частей СКО:

$$\Re\{A\} = \frac{(\gamma_1 \cos \alpha_1)^2 - (\varepsilon \gamma_2)^2}{\gamma_1 \cos \alpha_1)^2 + (\varepsilon \gamma_2)^2},$$

$$\Im\{A\} = \operatorname{sgn}(\omega) \frac{2\gamma_1 \gamma_2 \cos \alpha_1}{\gamma_1 \cos \alpha_1)^2 + (\varepsilon \gamma_2)^2}.$$

Действительная часть СКО не зависит от частоты, а зависимость мнимой части от неё задается множителем в виде знаковой функции частоты. Обе части СКО являются функциями угла падения.

Спектральная характеристика отражения обладает всеми свойствами устойчивой линейной системы: чётными амплитудно-частотной характеристикой (модулем СКО) и действительной частью СКО и нечётными фазово-частотной характеристикой (аргументом СКО) и мнимой частью СКО. При этом чётность обеспечивается отсутствием зависимости $|A|$ и $\Re\{A\}$ от частоты, а нечётность ψ_A и $\Im\{A\}$ — множителем в виде знаковой функции $\operatorname{sgn}(\omega)$.

Таким образом, комплексный спектральный коэффициент отражения может быть записан в виде

$$\tilde{A}(\omega) = \Re\{A\} + j\Im\{A\}.$$

Вынесем знаковую функцию $\text{sgn}(\omega)$ как отдельный множитель к мнимой части спектра, тогда $\Im_{\text{sgn}}\{A\} = \Im\{A\}/\text{sgn}(\omega) = \frac{2\gamma_1\gamma_2 \cos \alpha_1}{(\gamma_1 \cos \alpha_1)^2 + (\epsilon\gamma_2)^2}$.

Спектр отражённой волны разделяется на два слагаемых:

$$\tilde{U}_1(\omega) = \tilde{A}(\alpha)\tilde{U}(\omega) = \Re\{A\}\tilde{U}(\alpha) + j \cdot \Im_{\text{sgn}}\{A\}(\alpha) \text{sgn}(\omega)\tilde{U}(\omega).$$

В первом слагаемом присутствует спектр первичной волны с амплитудным множителем (весом) $\Re\{A\}(\alpha)$, независимым от частоты и меняющимся с увеличением угла падения. Во втором слагаемом — произведение двух частотно-зависимых функций — знаковой $\text{sgn}(\omega)$ и комплексного спектра первичной волны $\tilde{U}(\omega)$ — с амплитудным множителем $\Im\{A\}(\alpha)$, также изменяющимся с увеличением угла падения.

Так как преобразование Фурье — линейная операция, сам отражённый сигнал также является взвешенной суммой Фурье-трансформант слагаемых своего спектра:

$$U_1(t) = \Re\{A\}(\alpha)U(t) + j \cdot \Im_{\text{sgn}}\{A\}(\alpha)\mathcal{F}^{-}\{\text{sgn}(\omega)\} * U(t).$$

Здесь $\mathcal{F}^{-}\{\text{sgn}(\omega)\}$ — результат обратного Фурье-преобразования знаковой функции частоты $\text{sgn}(\omega)$, $U(t) \leftrightarrow \tilde{U}(\omega)$, а произведение спектров заменено свёрткой Фурье-трансформант сомножителей в соответствии со спектральной теоремой свёртывания функций. В теории спектров рассматривалась знаковая функция времени $\text{sgn}(t)$ и её спектр:

$$\mathcal{F}^{+}\{\text{sgn}(t)\} = \frac{2}{j\omega} = \frac{1}{j\pi f}.$$

Аналогично определяется обратное Фурье-преобразование знаковой функции частоты:

$$\mathcal{F}^{-}\{\text{sgn}(\omega)\} = -\frac{1}{j\pi t}.$$

Здесь появился знак минус как следствие противоположных знаков ядер прямого ($e^{-j\omega t}$) и обратного ($e^{+j\omega t}$) преобразований Фурье. Тогда

отражённый сигнал может быть описан выражением

$$U_1(t) = \Re\{A\}(\alpha)U(t) + j \cdot \Im_{sgn}\{A\}(\alpha) \left(-\frac{1}{j\pi t} \right) * U(t).$$

Сокращая мнимую единицу и раскрывая символьную запись свёртки, получим описание отражённого сигнала при углах падения, превышающих критический угол:

$$U_1(t) = \Re\{A\}(\alpha)U(t) + \Im_{sgn}\{A\}(\alpha) \left(-\frac{1}{j\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\tau)}{t-\tau} d\tau \right).$$

В скобках записано обратное Гильберт-преобразование функции $U(t)$, описывающей первичную волну:

$$\mathcal{H}^{-}\{U(t)\} = -\frac{1}{j\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\tau)}{t-\tau} d\tau = U_{\mathcal{H}}(t).$$

Таким образом, отражённый сигнал за критическим углом падения представляется взвешенной суммой падающего сигнала $U(t)$ и его Гильберт-трансформанты $U_{\mathcal{H}}(t)$:

$$U_1(t) = \Re\{A\}(\alpha)U(t) + \Im_{sgn}\{A\}(\alpha)U_{\mathcal{H}}(t).$$

Веса слагаемых $\Re\{A\}(\alpha)$ и $\Im\{A\}(\alpha)$ — изменяются при увеличении угла падения. Соответственно, изменяется по форме и суммарный отражённый сигнал $U_1(t)$.

Проведём анализ зависимости от угла падения α весовых множителей $\Re\{A\}(\alpha)$ и $\Im\{A\}(\alpha)$ и структуры суммарной отражённой волны при изменении α от критического угла α_k до теоретически возможного предела 90° . Как отмечалось, при $\alpha = \alpha_k$ $A(\alpha_k) = 1 = \Re\{A\}(\alpha_k)$, $\Im\{A\}(\alpha_k) = 0$. Отражённая волна имеет те же форму и амплитуду, что и падающая волна: $U_1(t) = U(t)$.

Как только угол падения превысит критический угол, $\Re\{A\}(\alpha)$ стремительно уменьшается, а мнимая часть $\Im\{A\}(\alpha)$ столь же быстро возрастает. Доля первичного сигнала в суммарной отражённой волне быстро уменьшается, и так же быстро растёт доля Гильберт-трансформанты падающей волны.

При некотором угле падения $\alpha = \alpha_{01}$ действительная часть спадает до 0, а мнимая – возрастает до 1: $\Re\{A\}(\alpha_{01}) = 0$, $\Im\{A\}(\alpha_{01}) = 1$.

Отражённый сигнал представлен только Гильберт-трансформантой первичной волны: $U_1(t) = U_{\mathcal{H}}(t)$.

Угол α_{01} находится из условия $\Re\{A\}(\alpha_{01}) = 0$:

$$(\gamma_1 \cos \alpha_1)^2 - (\varepsilon \gamma_2)^2 = 0, \quad \varepsilon^2 = \left(\frac{V_2}{V_1} \sin \alpha_1 \right)^2 - 1.$$

Синус его равен

$$\sin \alpha_{01} = \sqrt{\frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{\gamma_1^2 + \left(\gamma_2 \frac{V_2}{V_1}\right)^2}} = \frac{V_1}{V_2} \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^2}{1 + \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)^2 \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2}}$$

и не намного превышает $\sin \alpha_k = V_1/V_2$, т.е. α_{01} не намного больше α_k .

Дальнейшее увеличение угла падения ($\alpha > \alpha_{01}$) приводит к перемене знака действительной части и к соответствующему инвертированию знака смещения первичной волны в суммарном отражённом сигнале. При $\alpha \rightarrow 90^\circ$: $\Re\{A\}(\alpha) \rightarrow -1$, $\Im\{A\}(\alpha) \rightarrow 0$, а $U_1(t) \rightarrow -U(t)$. С увеличением угла падения при $\alpha > \alpha_{01}$ доля падающей волны с инвертированным знаком смещения в суммарной волне растет, а доля Гильберт-трансформанты уменьшается в пределе, при $\alpha = 90^\circ$, до 0. При этом отражённый сигнал повторяет по форме и амплитуде колебаний падающую волну с инвертированным знаком смещений. Напомним, что такой же предел был выявлен и в случае $\gamma_1 > \gamma_2$ (см. раздел 8.3), что вполне естественно.

Анализ закритических изменений спектрального коэффициента прохождения B и вызванных ими трансформаций неоднородных плоских волн $U_2(t)$ фактически не нужен, так как имеется связь между коэффициентами рассеивания SH-волны: $B = 1 + A$, справедливая при любых углах падения. Для комплексных коэффициентов рассеивания $A = \Re\{A\} + j\Im\{A\}$, $B = \Re\{B\} + j\Im\{B\}$ имеем:

$$\Re\{B\} + j\Im\{B\} = 1 + \Re\{A\} + j\Im\{A\}.$$

Видно, что A и B имеют действительные части, различающиеся на единицу, и равные мнимые части:

$$\Re\{B\} = 1 + \Re\{A\},$$

$$\Im\{B\} = \Im\{A\}.$$

Напомним, что связь между A и B получена из первого граничного условия (для упругих смещений):

$$U(\tau) + U_1(\tau_1)|_{z=0} = U_2(\tau_2), \quad \tau = t - \frac{x}{V^*}.$$

В соответствии с ним, при любых соотношениях физических свойств контактирующих на границе сред и при любом угле падения первичной SH -волны при $z = 0$ проходящая волна $U_2(\tau)$ представляет собой простую сумму падающей волны $U(\tau)$ и отражённой волны $U_1(\tau)$. Поэтому все трансформации отражённой волны в закритической зоне входят составной частью в изменения проходящей волны. Вне зависимости от угла падения в этой волне всегда присутствует «постоянная» составляющая — первичная, падающая на границу волна, по предположению, не меняющаяся с изменением угла падения.

В заключение приведём цифровые оценки особых углов падения (α_0 , α_k , α_{01}) для границы раздела сред со следующими упругими параметрами:

$$V_1 = 1414 \text{ м/с}, \quad \rho_1 = 2120 \text{ кг/м}^3, \quad \gamma_1 = 3 \cdot 10^6 \text{ кг/(с}\cdot\text{м}^2),$$

$$V_2 = 2000 \text{ м/с}, \quad \rho_1 = 2500 \text{ кг/м}^3, \quad \gamma_1 = 5 \cdot 10^6 \text{ кг/(с}\cdot\text{м}^2).$$

Это довольно «сильная» отражающая граница. Ей может соответствовать, например, граница между обводнённой верхней средой (где скорость S -волны резко уменьшена) и «сухим» нижним полупространством.

Коэффициенты рассеивания при нормальном падении ($\alpha = 0$) SH -волны:

$$A(0) = \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{\gamma_1 + \gamma_2} = \frac{3 - 5}{3 + 5} = -0.25,$$

$$B(0) = 1 + A(0) = 0.75.$$

Отражённая волна имеет амплитуду, в четыре раза меньшую амплитуды первичной волны, и инвертирована по знаку смещения. Проходящая волна ослаблена по амплитуде на четверть в сравнении с падаю-

щей волной. Для выбранных параметров сред определим отношения волновых сопротивлений $\gamma_2/\gamma_1 \approx 1.667$ и скоростей $V_2/V_1 \approx 1.414$ ($V_1/V_2 \approx 0.707$). Используя их, найдём особые углы падения первичной волны:

– угол α_0 , при котором $A = 0$, $B = 1$, $U_1(\tau) = 0$ и $U_2(\tau) = U(\tau)$:

$$\alpha_0 = \arcsin \sqrt{\frac{1.667^2 - 1}{1.667^2 \cdot 1.414^2 - 1}} \approx 38.7^\circ;$$

– критический угол α_k , при котором $A = 1$, $B = 2$, $U_1(\tau) = U(\tau)$ и $U_2(\tau) = 2U(\tau)$:

$$\alpha_k = \arcsin 0.707 = 45^\circ;$$

– угол α_{01} , при котором $\Re\{A\} = 0$, $\Im\{A\} = \Im\{B\} = \Re\{B\} = 1$, $U_1(\tau) = U_{\mathcal{R}}(\tau)$ и $U_2(\tau) = U(\tau) + U_{\mathcal{I}}(\tau)$:

$$\alpha_{01} = \arcsin \sqrt{\frac{1.667^2 + 1}{1.667^2 \cdot 1.414^2 + 1}} \approx 49.4^\circ.$$

Как видно из этих оценок, зона наибо́льшего и наибо́льшего изменения спектральных коэффициентов рассеивания (СКР) и вторичных волн весьма узка: $\alpha_{01} - \alpha_0 = 10.7^\circ$. В интервале $\alpha_k - \alpha_0 = 6.3^\circ$ коэффициенты A и B возрастают на единицу: A от 0 до 1, B от 1 до 2. Затем, как только угол падения превысит критический, коэффициенты становятся комплексными. В интервале $\alpha_{01} - \alpha_k = 4.4^\circ$ действительная часть A спадает от 1 до 0 ($\Re\{B\}$ от 2 до 1), а мнимая часть A и B возрастает от 0 до 1.

Вне зоны (α_0, α_{01}) коэффициенты рассеивания ведут себя более спокойно. При изменении α от 0 до α_0 отрицательный коэффициент отражения увеличивается от -0.25 до 0 (уменьшается по модулю). В ближней к источнику зоне, при $\alpha \leq \alpha_0/3$, СКР изменяются незначительно. Соответственно, и вторичные волны в этой зоне изменяются мало.

С увеличением различия свойств контактирующих на границе сред все особые точки ($\alpha_0, \alpha_k, \alpha_{01}$) смещаются в сторону меньших углов падения, а интервалы между ними уменьшаются. Наоборот, для границ раздела сред с близкими упругими константами критический угол большой, и углы α_0, α_{01} отдалены от него.

Описание изменений СКР SH -волны иллюстрирует рис. 8.3, на котором построены графики $\Re\{A\}(\alpha)$, $\Im\{A\}(\alpha)$ и импульсоиды первичной волны и её Гильберт-трансформанты, а также импульсоиды суммарных вторичных волн $U_1(\tau)$, $U_2(\tau)$ для различных углов падения. Так как $\Re\{B\} = 1 + \Re\{A\}$, график $\Re\{A\}(\alpha)$ снабжён второй осью ординат для $\Re\{B\}(\alpha)$ со смещенной на 1 шкалой. График $\Im\{A\}(\alpha)$ одновременно является и графиком $\Im\{B\}(\alpha)$. Импульсоиды вторичных волн соответствуют углам падения, отмеченным на шкале оси абсцисс стрелками.

В заключение анализа отметим, что угол падения α определяет удаление x в точке приема P от точки возбуждения O (рис. 8.4).

Тангенс этого угла равен отношению половины удаления $x/2$ к эхо-глубине границы h : $\operatorname{tg}\alpha = x/2h$. Поэтому малые углы падения соответствуют ближней к источнику зоне, а большие — дальней.

Приведем оценки x/h , соответствующие особым углам для выбранных ранее параметров сред:

– при $\alpha = \alpha_0 \cong 38.7^\circ$: $x/h = 2\operatorname{tg}\alpha_0 \cong 1.6$;

– при $\alpha = \alpha_k = 45^\circ$: $x/h = 2$;

– при $\alpha = \alpha_{01} \cong 49.4^\circ$: $x/h \cong 2.33$.

Добавим ещё оценку границы ближней зоны:

– при $\alpha = \alpha_0/3 \cong 12.8^\circ$: $x/h \cong 0.46$.

Таким образом, область наибольшей стабильности отражённой волны не превышает половины эхо-глубины границы. Наибольшие изменения этой волны начинаются на удалениях, в полтора раза превышающих глубину. В промежуточной зоне с ростом x изменения отражённой волны становятся все более существенными и заметными.

8.5. Образование преломлённой волны

В элементарной геометрической сейсмике преломлённая волна рассматривается как вторичная волна, возбуждаемая в верхней низкоскоростной среде проходящей волной, при критическом угле падения первичной волны, скользящей вдоль границы со скоростью $V_2 > V_1$.

Представим источник сейсмических колебаний точкой на поверхности однородной среды, покрывающей высокоскоростной пласт большой мощности. Точечный источник возбуждает в верхней среде сфери-

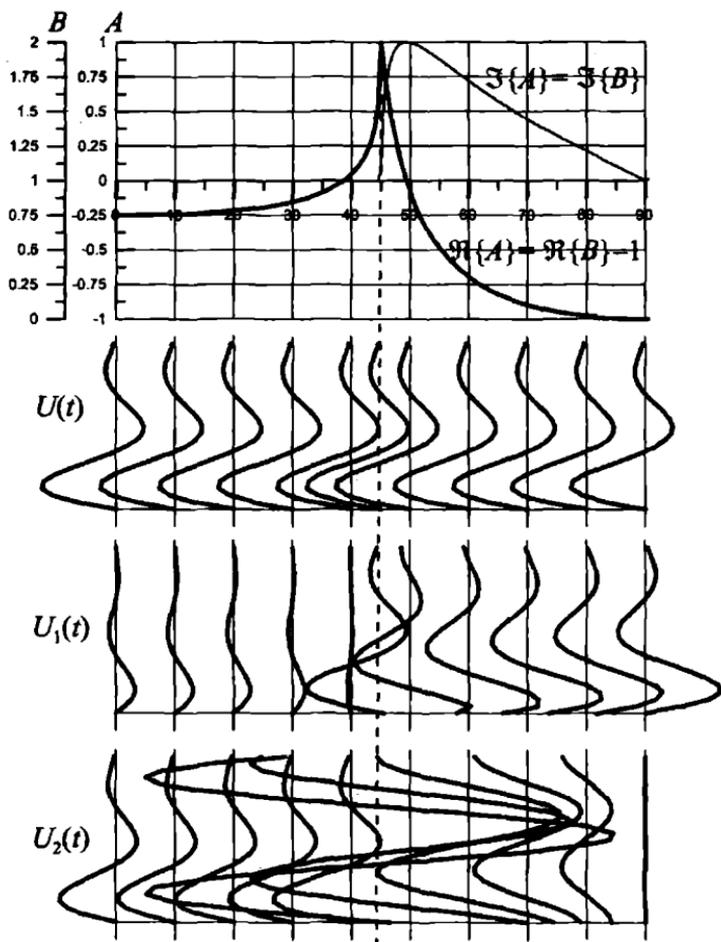


Рис. 8.3. График коэффициентов отражения и прохождения для SH -волны в зависимости от угла падения, соответствующие волновые импульсы

ческую волну. В любой момент времени t энергия источника равномерно распределена по площади S полусферы радиуса $R = Vt$ (рис. 8.5).

Построим коническую поверхность, вращая луч, отклонённый от вертикали на критический угол, вокруг вертикальной оси Oz . Эта коническая поверхность, пересекаясь на границе с полусферой фронта

Рис. 8.4. Удаление в точке приема от точки возбуждения как функция угла падения

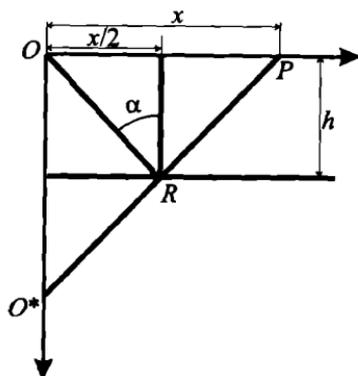
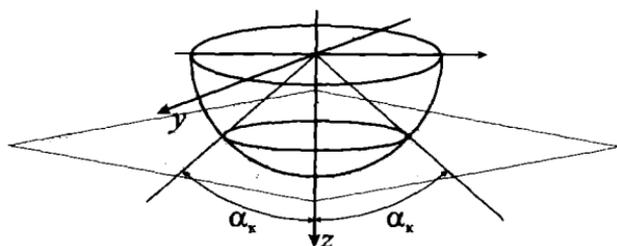


Рис. 8.5. Часть границы, на которой образуется преломлённая волна



падающей волны, образует окружность, в каждой точке которой угол падения равен α_k .

Очевидно, что на образование скользкой волны расходуется лишь та часть общей энергии колебаний, которая приходится на эту «критическую» окружность. Эта часть ничтожно мала, как мала площадь линии окружности в сравнении с общей площадью полусферы. Поэтому скользкая волна, возникающая при критическом угле падения, должна иметь бесконечно малую амплитуду. Тем более мала амплитуда преломлённой волны, возбуждаемой в верхней среде этой скользкой волной. Преломлённая волна просто не должна существовать. Тем не менее, она существует, регистрируется, обрабатывается в методе преломлённых волн, предложенном ещё в начале XX в.

Наличие неоднородных волн кардинально меняет энергетические соотношения и снимает отмеченное противоречие элементарной теории и практики.

Скользкая и порождаемая ею головная (преломлённая) волна образуются не только при критическом угле падения, но и при всех углах падения, больших α_k , на всей плоскости границы за пределами окруж-

ности ОК (зона заштрихована на рис. 8.5). Преломлённая волна представляет собой интегральную сумму бесчисленного множества элементарных головных волн, возникающих при критическом угле падения и при всех углах, больших критического.

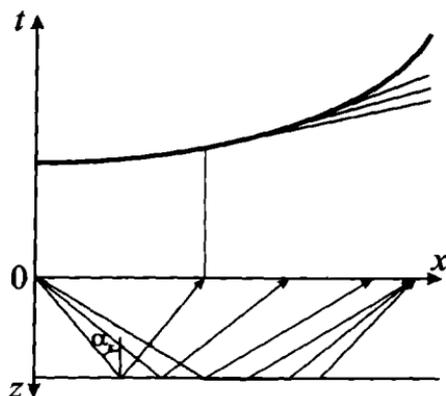
Элементарная скольльзящая волна, возникающая при $\alpha = \alpha_k$, распространяется вдоль границы со скоростью V_2 и имеет постоянную амплитуду по фронту, перпендикулярному границе. Неоднородные скольльзящие волны, возникающие при всех углах падения $\alpha > \alpha_k$, распространяются вдоль границы с меньшей скоростью $V'_2 = V_2 / \sin \alpha_2$ ($\sin \alpha_2 > 1$) и имеют амплитуду, экспоненциально убывающую по их фронтам. Скорость V'_2 уменьшается по мере удаления точки образования неоднородной скольльзящей волны от критической точки, а затухание амплитуды ускоряется. Каждая элементарная неоднородная волна «тянет» за собой головную волну. Все бесконечное множество таких элементарных головных волн, возникающих при всех углах $\alpha \geq \alpha_k$, складываясь, интерферируют между собой и образуют суммарную преломлённую волну, которая и регистрируется на дневной поверхности. Для всех элементарных головных волн начальный луч совпадает с лучом отражённой волны. Поэтому годографы всех этих волн начинаются на годографе отражённой волны и представляют собой линии, касательные гиперболическому годографу отражённой волны в точке выхода начального луча.

На рис. 8.6 изображены лишь три годографа головных волн, возникающих при критическом угле и при двух углах падения, больших его. Таких годографов можно построить бесчисленно много, для всех точек годографа отражённой волны в закритической зоне. Они заполняют весь сектор плоскости годографа между годографом отражённой волны и годографом преломлённой волны, образовавшейся при критическом угле падения.

На рисунке построены схемы лучей для трёх выбранных элементарных головных волн. Под границей построены схематические графики распределения амплитуд скольльзящих волн по их фронту.

Обратим внимание на то, что по мере удаления точки приема от источника число элементарных головных волн, регистрируемых в данной точке, растёт — всё большее число точек границы участвует в их образовании. С другой стороны, амплитуды элементарных волн непрерывно уменьшаются по мере их распространения. Как отмечалось, распространение сферической волны сопровождается

Рис. 8.6. Лучевые схемы образования головной волны в закритической зоне и годографы.



геометрическим расхождением её фронта, из-за чего её амплитуда убывает как $1/r$.

Скользящие волны имеют цилиндрические фронты, площадь которых растет пропорционально их радиусу, и поэтому их амплитуды убывают как $1/\sqrt{r}$. Конические фронты преломлённых волн также имеют площадь, пропорциональную r , и такое же уменьшение амплитуды. Как видим, все элементарные волны, участвующие в образовании преломлённой волны, непрерывно затухают по мере их распространения. Напомним, что скользящие и головные волны характеризуются также изменением формы волновых импульсов из-за их внутренне интерференционной природы.

Все это заставляет определить преломлённую волну как весьма сложный волновой процесс, в котором элементарные составляющие непрерывно изменяются по кинематическим (направление распространения) и динамическим (амплитуда и форма волновых импульсов) характеристикам. Преломлённую волну крайне редко удастся проследить по самому началу колебаний — по первым вступлениям волны. Почти всегда корреляция этих волн проводится по последующим фазам колебаний. При этом наблюдается как бы «перекачивание» амплитуды колебаний из первых фаз в последующие и верное расхождение осей синфазности разных фаз, очень медленное и почти незаметное (рис. 8.7).

Такое поведение преломлённых волн убедительно и удивительно точно объясняется рассмотренной теорией их образования. В заключение заметим, что энергия упругих колебаний при углах

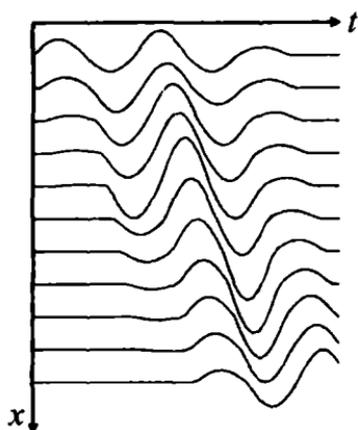


Рис. 8.7. Иллюстрация «перетекания» энергии волны из фазы в фазу

падения меньше критического, уходящая в глубь нижней среды, в закритической зоне практически туда не уходит, а возвращается на верхнюю среду, расходясь на образование суммарной преломлённой волны.

Это оправдывает применяемое название явления — полное внутреннее отражение, — хотя, строго говоря, речь идет не об отражении, а о полном переходе энергии скользящей волны в головные (преломлённые) волны.

Глава 9. Обобщённые уравнения для коэффициентов рассеивания плоских P - и SV -волн

Как отмечалось, сейсмическая разведка с использованием продольных волн является основной и наиболее распространенной. Реже используются поперечные волны, но вертикально-поляризованные (SV) поперечные волны всегда образуются как обменные при наклонном падении на границу P -волны.

9.1. Общие замечания и определения

Два типа первичных волн — P и SV — объединяет и число вторичных волн, образуемых ими на границе, — четыре, из которых две монотипных и две обменных, и число граничных условий — также четыре, из которых два — для компонент смещений и два — для компонент напряжений.

Существует возможность общего рассмотрения явлений на границе, создаваемых P и SV -волнами, подходящими к границе сверху или снизу, основывающаяся на законе Снеллиуса:

$$\frac{V_0}{\sin \alpha_0} = \frac{V_{P1}}{\sin \alpha_{P1}} = \frac{V_{S1}}{\sin \alpha_{S1}} = \frac{V_{P2}}{\sin \alpha_{P2}} = \frac{V_{S2}}{\sin \alpha_{S2}}.$$

Если выбрать угол падения первичной волны α_0 , согласуя тип волны и скорость распространения V_0 ($\alpha_0 = \alpha_{P1}$ и $V_0 = V_{P1}$ или $\alpha_0 = \alpha_{S1}$ и $V_0 = V_{S1}$ и т.д.), то для любого типа первичной волны все четыре вторичных волны будут распространяться по одним и тем же направлениям, задаваемым углами α_{P1} , α_{S1} , α_{P2} , α_{S2} , которые определяет закон Снеллиуса.

Будем обозначать векторы смещения первичных волн индексом типа смещения (P или S) и стрелкой-указателем направления распространения. Например, P -волна, падающая на границу сверху, несёт смещение $\vec{U}_{P\downarrow}$, а подходящая к границе снизу — $\vec{U}_{P\uparrow}$. Аналогично, $\vec{U}_{S\downarrow}$, $\vec{U}_{S\uparrow}$ — векторы смещения первичных нисходящей и восходящей SV -волн соответственно. Для вторичных волн цифровым индексом будем обозначать среду, в которой эти волны существуют: \vec{U}_{P1} и \vec{U}_{S1} — восходящие вторичные волны (распространяющиеся в верхней среде $z < 0$), а \vec{U}_{P2} и \vec{U}_{S2} — нисходящие вторичные волны (распространяющиеся в нижней среде $z > 0$).

Соответственно, для первичных нисходящих волн \vec{U}_{P1} и \vec{U}_{S1} — векторы смещения отражённых вверх волн, а \vec{U}_{P2} и \vec{U}_{S2} — векторы проходящих вниз волн. Для восходящих первичных волн, наоборот, \vec{U}_{P1} и \vec{U}_{S1} — проходящие вверх волны, а \vec{U}_{P2} и \vec{U}_{S2} — отражённые вниз.

Есть два обстоятельства, неучет которых приводит к недопустимым ошибкам в выводе уравнений динамического равновесия на границе.

1. При описании волн необходимо учитывать разные направления их распространения. Существует четыре нисходящих волны, распространяющихся вниз, в сторону положительной полуоси Oz : первичные $\vec{U}_{P\downarrow}$, $\vec{U}_{S\downarrow}$ и вторичные \vec{U}_{P2} , \vec{U}_{S2} . В их волновых аргументах перед переменной z стоит знак «плюс»:

$$t - \frac{x \sin \alpha_i + z \cos \alpha_i}{V_i}.$$

Существуют также четыре восходящие волны, распространяющиеся вверх, в сторону отрицательной полуоси Oz : первичные $\vec{U}_{P\uparrow}$, $\vec{U}_{S\uparrow}$ и вторичные \vec{U}_{P1} , и \vec{U}_{S1} . Их волновые аргументы содержат знак «минус» перед переменной z :

$$t - \frac{x \sin \alpha_i - z \cos \alpha_i}{V_i}.$$

2. При вычислении проекций векторов смещения на оси координат необходимо учитывать, что эти векторы отклоняются от вертикали в разные стороны. Существует четыре волны, векторы смещения которых отклоняются против хода часовой стрелки: $\vec{U}_{P\downarrow}$, \vec{U}_{S1} , $\vec{U}_{S\uparrow}$, \vec{U}_{P2} . Для них угол отклонения положителен. Есть также четыре волны, вектор смещения которых отклоняется от вертикали по ходу часовой стрелки: $\vec{U}_{S\downarrow}$, \vec{U}_{P1} , $\vec{U}_{P\uparrow}$, \vec{U}_{S2} . Для них угол отклонения отрицателен.

Векторы смещений продольных волн совпадают с их лучами. Поэтому проекции этих векторов на оси координат определяются соотношениями:

$$\vec{U}_{P_i} \text{ на ось } Ox : U_{P_i} \sin(\pm\alpha_i) \equiv \pm U_{P_i} \sin \alpha_i,$$

$$\vec{U}_{P_i} \text{ на ось } Oz : U_{P_i} \cos(\pm\alpha_i) \equiv U_{P_i} \cos \alpha_i.$$

Здесь U_{P_i} — модуль вектора \vec{U}_{P_i} , и учтены нечетность синуса и четность косинуса.

Проекции векторов смещений поперечных волн, перпендикулярных лучам, определяются соотношениями:

$$\vec{U}_{S_i} \text{ на ось } Ox : U_{P_i} \cos(\pm\alpha_i) \equiv U_{P_i} \cos \alpha_i,$$

$$\vec{U}_{S_i} \text{ на ось } Oz : U_{P_i} \sin(\pm\alpha_i) \equiv \pm U_{P_i} \sin \alpha_i.$$

Таким образом, при вычислении x -компонент P -волн и z -компонент S -волн всегда необходимо выбрать знак угла α_i .

Продольные и поперечные волны создают на границе нормальное P_{zz} и касательные P_{zx} , P_{zy} напряжения. В соответствии с законом Гука, они связаны с деформациями:

$$P_{zz} = \lambda\Theta + 2\mu e_{zz},$$

$$P_{zx} = 2\mu e_{xz},$$

$$P_{zy} = 2\mu e_{yz}.$$

Напомним, что по условиям задачи граница горизонтальна и совмещена с плоскостью xOy , так что ось Oz — нормаль к границе. Поскольку рассматриваются плоские волны с фронтами, параллельными Oy , то $\frac{\partial}{\partial y} = 0$, $U_y = 0$. Поэтому:

$$e_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial y} \right) = 0;$$

$$\Theta = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_z}{\partial z};$$

$$P_{zy} = 0;$$

$$P_{zx} = 2\mu e_{xz} = \mu \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right).$$

Нормальные напряжения в этом случае можно описать соотношением

$$P_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + 2\mu \frac{\partial U_z}{\partial z} = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{\partial U_x}{\partial x}.$$

Используя определения скоростей продольной ($V_P^2 = \frac{\lambda+2\mu}{\rho}$) и поперечной ($V_S^2 = \frac{\mu}{\rho}$) волн, представим нормальную компоненту напряжения в виде

$$P_{zz} = \rho V_P^2 \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) - 2\rho V_S^2 \frac{\partial U_x}{\partial x},$$

или

$$P_{zz} = \rho V_P^2 \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_z}{\partial z} - 2 \left(\frac{V_S}{V_P} \right)^2 \frac{\partial U_x}{\partial x} \right). \quad (9.1)$$

Касательное напряжение описывается выражением

$$P_{zx} = \mu \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right),$$

или

$$P_{zx} = \rho V_S^2 \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right). \quad (9.2)$$

Напомним, что пространственные переменные (x, z) входят в связанном виде в аргумент описания волновых функций:

$$\tau = t - \frac{x \sin \alpha_i \pm z \cos \alpha_i}{V_i}.$$

Поэтому вычисление производных по x и z необходимо выполнять по правилам дифференцирования сложных функций. Например:

$$\frac{\partial U(\tau(x, y, z))}{\partial x} = \frac{dU(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial x}.$$

Описание волновых смещений и напряжений целесообразно разбить на четыре пары волн, одинаковых по характеру смещения (P или S) и

по направлению распространения (вверх, в сторону $z < 0$, или вниз, в сторону $z > 0$).

Это экономит силы и время, а также уменьшает возможность ошибок.

9.2. Описание волн и создаваемых ими на границе напряжений

9.2.1. Нисходящие продольные волны

Вектор смещения первичной нисходящей (падающей на границу сверху) продольной волны описывается выражением:

$$\vec{U}_{P\downarrow}(x, z, t) = \vec{U}_{P\downarrow} \left(t - \underbrace{\frac{x \sin \alpha_{P\downarrow} + z \cos \alpha_{P\downarrow}}{V_{P1}}}_{\tau_{P\downarrow}} \right) = \vec{U}_{P\downarrow}(\tau_{P\downarrow}).$$

Эта волна бежит вниз (рис. 9.1), и в её волновом аргументе $z > 0$. Также положителен и угол отклонения вектора $\vec{U}_{P\downarrow}$ от вертикали (против хода часовой стрелки). Тогда проекции вектора на оси координат можно описать так:

$$(\vec{U}_{P\downarrow})_x = U_{P\downarrow} \sin \alpha_{P\downarrow}; \quad (9.3)$$

$$(\vec{U}_{P\downarrow})_z = U_{P\downarrow} \cos \alpha_{P\downarrow}. \quad (9.4)$$

Волна $\vec{U}_{P\downarrow}$ создает на границе нормальное P_{zz} и касательное P_{zx} напряжения. Найдём производные, определяющие эти компоненты:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\vec{U}_{P\downarrow})_x = \frac{dU_{P\downarrow}}{d\tau_{P\downarrow}} \cdot \sin \alpha_{P\downarrow} \frac{\partial \tau_{P\downarrow}}{\partial x} = \dot{U}_{P\downarrow} \sin \alpha_{P\downarrow} \left(-\frac{\sin \alpha_{P\downarrow}}{V_{P1}} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\vec{U}_{P\downarrow})_x = \frac{dU_{P\downarrow}}{d\tau_{P\downarrow}} \cdot \sin \alpha_{P\downarrow} \frac{\partial \tau_{P\downarrow}}{\partial z} = \dot{U}_{P\downarrow} \sin \alpha_{P\downarrow} \left(-\frac{\cos \alpha_{P\downarrow}}{V_{P1}} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\vec{U}_{P\downarrow})_z = \frac{dU_{P\downarrow}}{d\tau_{P\downarrow}} \cdot \cos \alpha_{P\downarrow} \frac{\partial \tau_{P\downarrow}}{\partial x} = \dot{U}_{P\downarrow} \cos \alpha_{P\downarrow} \left(-\frac{\sin \alpha_{P\downarrow}}{V_{P1}} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\vec{U}_{P\downarrow})_z = \frac{dU_{P\downarrow}}{d\tau_{P\downarrow}} \cdot \cos \alpha_{P\downarrow} \frac{\partial \tau_{P\downarrow}}{\partial z} = \dot{U}_{P\downarrow} \cos \alpha_{P\downarrow} \left(-\frac{\cos \alpha_{P\downarrow}}{V_{P1}} \right).$$

Здесь (и далее аналогично) для краткости обозначено:

$$|U_{P\downarrow}| = U_{P\downarrow}, \quad \frac{dU_{P\downarrow}}{d\tau_{P\downarrow}} = \dot{U}_{P\downarrow}.$$

Подставляя $\frac{\partial}{\partial x}(\vec{U}_{P\downarrow})_x$, $\frac{\partial}{\partial z}(\vec{U}_{P\downarrow})_z$ в определение (9.1) нормального напряжения и вынося за скобку общий множитель $-\frac{1}{V_{P1}} \cdot \dot{U}_{P\downarrow}$, получим:

$$\begin{aligned} (P_{zz})_{P\downarrow} &= \rho_1 V_{P1}^2 \left(-\frac{1}{V_{P1}} \cdot \dot{U}_{P\downarrow} \right) \times \\ &\times \left(\sin^2 \alpha_{P1} + \cos^2 \alpha_{P1} - 2 \left(\frac{V_{S1}}{V_{P1}} \right)^2 \sin^2 \alpha_{P1} \right) = \\ &= -\rho_1 V_{P1}^2 \dot{U}_{P\downarrow} (1 - 2 \sin^2 \alpha_{S1}) = -\rho_1 V_{P1}^2 \dot{U}_{P\downarrow} \cos 2\alpha_{S1}. \end{aligned}$$

Здесь $\frac{V_{S1}}{V_{P1}} \sin \alpha_{P1} = \sin \alpha_{S1}$ в соответствии с законом Снеллиуса и использована формула косинуса двойного угла. Таким образом:

$$(P_{zz})_{P\downarrow} = -\rho_1 V_{P1}^2 \dot{U}_{P\downarrow} \cos 2\alpha_{S1}. \quad (9.5)$$

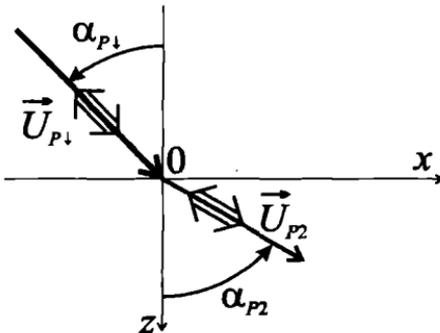


Рис. 9.1. Направление распространения волны и направления смещений при падении P-волны на границу сверху

Подставляя $\frac{\partial}{\partial z}(\vec{U}_{P\downarrow})_x$, $\frac{\partial}{\partial x}(\vec{U}_{P\downarrow})_z$ в определение (9.2) касательного напряжения и вынося за скобку общий множитель, получим:

$$(P_{zx})_{P\downarrow} = -\rho_1 V_{S1} \frac{V_{S1}}{V_{P1}} \dot{U}_{P\downarrow} (\sin \alpha_{P1} \cos \alpha_{P1} + \cos \alpha_{P1} \sin \alpha_{P1}),$$

или

$$(P_{zx})_{P\downarrow} = -\rho_1 V_{S1} \frac{V_{S1}}{V_{P1}} \dot{U}_{P\downarrow} \sin 2\alpha_{P1}. \quad (9.6)$$

По аналогии, заменяя упругие параметры верхней среды на скорости и плотность нижней и заменяя индекс « \downarrow » на индекс «2», определим компоненты вектора смещения и напряжения вторичной P -волны \vec{U}_{P2} , распространяющейся в нижней среде также в сторону $z > 0$:

$$(U_{P2})_x = U_{P2} \sin \alpha_{P2}, \quad (9.7)$$

$$(U_{P2})_z = U_{P2} \cos \alpha_{P2}, \quad (9.8)$$

$$(P_{zz})_{P2} = -\rho_2 V_{P2}^2 \dot{U}_{P2} \cos 2\alpha_{S2}, \quad (9.9)$$

$$(P_{zx})_{P2} = -\rho_2 V_{S2} \frac{V_{S2}}{V_{P2}} \dot{U}_{P2} \sin 2\alpha_{P2}. \quad (9.10)$$

9.2.2. Нисходящие SV-волны

Вектор смещения первичной поперечной волны, падающей на границу сверху, описывается выражением

$$\vec{U}_{S\downarrow}(x, z, t) = \vec{U}_{S\downarrow} \left(t - \underbrace{\frac{x \sin \alpha_{S\downarrow} + z \cos \alpha_{S\downarrow}}{V_{S1}}}_{\tau_{S\downarrow}} \right) = \vec{U}_{S\downarrow}(\tau_{S\downarrow}).$$

Так как вектор $\vec{U}_{S\downarrow}$ перпендикулярен лучу, x -компонента смещения определяется косинусом, а z -компонента — синусом угла падения (рис. 9.2). Этот вектор отклоняется от вертикали в отрицательную сторону (по ходу часовой стрелки). Поэтому его проекции определяются выражениями:

$$(\vec{U}_{S\downarrow})_x = U_{S\downarrow} \cos(-\alpha_{S\downarrow}) = U_{S\downarrow} \cos \alpha_{S\downarrow}; \quad (9.11)$$

$$(\vec{U}_{S\downarrow})_z = U_{S\downarrow} \sin(-\alpha_{S\downarrow}) = -U_{S\downarrow} \sin \alpha_{S\downarrow}. \quad (9.12)$$

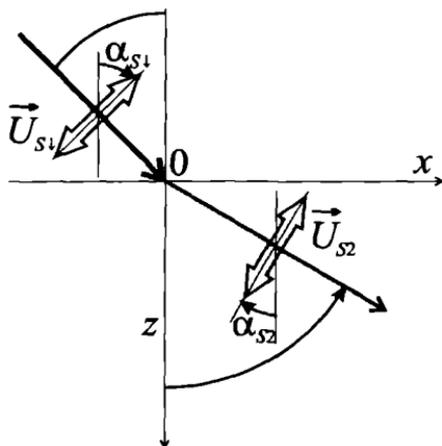


Рис. 9.2. Направление распространения волны и направления смещений при падении SV-волны на границу сверху

Пространственные производные компонент вектора $\vec{U}_{S1\downarrow}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{U}_{S1\downarrow})_x = \frac{dU_{S1\downarrow}}{d\tau_{S1\downarrow}} \cdot \cos \alpha_{S1\downarrow} \frac{\partial \tau_{S1\downarrow}}{\partial x} = \dot{U}_{S1\downarrow} \cos \alpha_{S1\downarrow} \left(-\frac{\sin \alpha_{S1\downarrow}}{V_{S1}} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\vec{U}_{S1\downarrow})_x = \frac{dU_{S1\downarrow}}{d\tau_{S1\downarrow}} \cdot \cos \alpha_{S1\downarrow} \frac{\partial \tau_{S1\downarrow}}{\partial z} = \dot{U}_{S1\downarrow} \cos \alpha_{S1\downarrow} \left(-\frac{\cos \alpha_{S1\downarrow}}{V_{S1}} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{U}_{S1\downarrow})_z = -\frac{dU_{S1\downarrow}}{d\tau_{S1\downarrow}} \cdot \sin \alpha_{S1\downarrow} \frac{\partial \tau_{S1\downarrow}}{\partial x} = -\dot{U}_{S1\downarrow} \sin \alpha_{S1\downarrow} \left(-\frac{\sin \alpha_{S1\downarrow}}{V_{S1}} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\vec{U}_{S1\downarrow})_z = -\frac{dU_{S1\downarrow}}{d\tau_{S1\downarrow}} \cdot \sin \alpha_{S1\downarrow} \frac{\partial \tau_{S1\downarrow}}{\partial z} = -\dot{U}_{S1\downarrow} \sin \alpha_{S1\downarrow} \left(-\frac{\cos \alpha_{S1\downarrow}}{V_{S1}} \right).$$

Подставляя $\frac{\partial}{\partial x}(\vec{U}_{S1\downarrow})_x$, $\frac{\partial}{\partial z}(\vec{U}_{S1\downarrow})_z$ в определение (9.1) нормального напряжения, получим:

$$(P_{zz})_{S1\downarrow} = \rho_1 V_{P1}^2 \left(-\frac{1}{V_{S1}} \cdot \dot{U}_{S1\downarrow} \right) \times \\ \times \left(\cos \alpha_{S1\downarrow} \sin \alpha_{S1\downarrow} - \sin \alpha_{S1\downarrow} \cos \alpha_{S1\downarrow} - 2 \left(\frac{V_{S1}}{V_{P1}} \right)^2 \cos \alpha_{S1\downarrow} \sin \alpha_{S1\downarrow} \right),$$

или

$$(P_{zz})_{S1\downarrow} = \rho_1 V_{S1} \dot{U}_{S1\downarrow} \sin 2\alpha_{S1\downarrow}. \quad (9.13)$$

Подставляя $\frac{\partial}{\partial x}(\vec{U}_{S\downarrow})_z$, $\frac{\partial}{\partial z}(\vec{U}_{S\downarrow})_x$ в определение (9.2) касательного напряжения, получим:

$$(P_{zx})_{S\downarrow} = \rho_1 V_{S1}^2 \left(-\frac{1}{V_{S1}} \right) \dot{U}_{S\downarrow} (\cos^2 \alpha_{S1} - \sin^2 \alpha_{S1}),$$

или

$$(P_{zx})_{S\downarrow} = -\rho_1 V_{S1} \dot{U}_{S\downarrow} \cos 2\alpha_{S1}. \quad (9.14)$$

Аналогично описываются компоненты смещения и напряжения для вторичной SV -волны, уходящей во вторую, нижнюю среду:

$$(U_{S2})_x = U_{S2} \cos \alpha_{S2}, \quad (9.15)$$

$$(U_{S2})_z = -U_{S2} \sin \alpha_{S2}, \quad (9.16)$$

$$(P_{zz})_{S2} = \rho_2 V_{S2}^2 \dot{U}_{S2} \sin 2\alpha_{S2}, \quad (9.17)$$

$$(P_{zx})_{S2} = -\rho_2 V_{S2} \dot{U}_{S2} \cos 2\alpha_{S2}. \quad (9.18)$$

9.2.3. Восходящие Р-волны

Эти волны распространяются в сторону $z < 0$ (рис. 9.3). Вектор смещения первичной восходящей волны $\vec{U}_{P\uparrow}$, которая существует в нижней среде, описывается выражением:

$$\vec{U}_{P\uparrow}(x, z, t) = \vec{U}_{P\uparrow} \left(t - \underbrace{\frac{x \sin \alpha_{P2} - z \cos \alpha_{P2}}{V_{P2}}}_{\tau_{P\uparrow}} \right) = \vec{U}_{P\uparrow}(\tau_{P\uparrow}).$$

Этот вектор отклонён от вертикали в отрицательную сторону и поэтому его компоненты определяются так:

$$(\vec{U}_{P\uparrow})_x = -U_{P\uparrow} \sin \alpha_{P2}; \quad (9.19)$$

$$(\vec{U}_{P\uparrow})_z = U_{P\uparrow} \cos \alpha_{P2}. \quad (9.20)$$

Производные компонент вектора:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\vec{U}_{P\uparrow})_x = -\dot{U}_{P\uparrow} \sin \alpha_{P2} \left(-\frac{\sin \alpha_{P2}}{V_{P2}} \right),$$

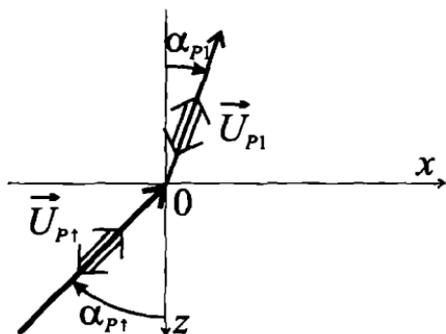


Рис. 9.3. Направление распространения волны и направления смещений при падении P-волны на границу снизу

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}(\vec{U}_{P\uparrow})_x &= -\dot{U}_{P\uparrow} \sin \alpha_{P2} \frac{\cos \alpha_{P2}}{V_{P2}}, \\ \frac{\partial}{\partial x}(\vec{U}_{P\uparrow})_z &= \dot{U}_{P\uparrow} \cos \alpha_{P2} \left(-\frac{\sin \alpha_{P2}}{V_{P2}} \right), \\ \frac{\partial}{\partial z}(\vec{U}_{P\uparrow})_z &= \dot{U}_{P\uparrow} \cos \alpha_{P2} \frac{\cos \alpha_{P2}}{V_{P2}}.\end{aligned}$$

Нормальное напряжение, создаваемое восходящей волной $\vec{U}_{P\uparrow}$ на границе, можно выразить, используя (9.1), следующим образом:

$$\begin{aligned}(P_{zz})_{P\uparrow} &= \rho_2 V_{P2}^2 \left(-\frac{1}{V_{P2}} \cdot \dot{U}_{P\uparrow} \right) \times \\ &\times \left(-\sin^2 \alpha_{P2} - \cos^2 \alpha_{P2} + 2 \left(\frac{V_{S2}}{V_{P2}} \right)^2 \sin^2 \alpha_{P2} \right),\end{aligned}$$

или

$$(P_{zz})_{P\uparrow} = \rho_2 V_{P2} \dot{U}_{P\uparrow} \cos 2\alpha_{S2}. \quad (9.21)$$

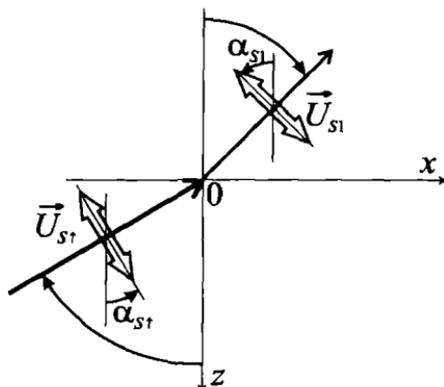
Касательное напряжение в соответствии с (9.2):

$$(P_{zx})_{P\uparrow} = \rho_2 V_{S2}^2 \left(-\frac{1}{V_{P2}} \right) \dot{U}_{P\uparrow} (\sin \alpha_{P2} \cos \alpha_{P2} + \cos \alpha_{P2} \sin \alpha_{P2}),$$

или

$$(P_{zx})_{P\uparrow} = -\rho_2 V_{S2} \frac{V_{S2}}{V_{P2}} \dot{U}_{P\uparrow} \sin 2\alpha_{P2}. \quad (9.22)$$

Рис. 9.4. Направление распространения волны и направления смещений при падении SV-волны на границу снизу



Для восходящей вторичной волны \vec{U}_{P1} , распространяющейся в верхней среде, запишем аналогично:

$$(U_{P1})_x = -U_{P1} \sin \alpha_{P1}, \quad (9.23)$$

$$(U_{P1})_z = U_{P1} \cos \alpha_{P1}, \quad (9.24)$$

$$(P_{zz})_{P1} = \rho_1 V_{P1}^2 \dot{U}_{P1} \cos 2\alpha_{S1}, \quad (9.25)$$

$$(P_{zx})_{P1} = -\rho_1 V_{S1} \frac{V_{S1}}{V_{P1}} \dot{U}_{P1} \sin 2\alpha_{P1}. \quad (9.26)$$

9.2.4. Восходящие S-волны

Для этих волн переменная z в волновом аргументе отрицательна, а углы отклонения векторов смещения от вертикали — положительны (рис. 9.4). Вектор смещения первичной восходящей S-волны:

$$\vec{U}_{S\uparrow}(x, z, t) = \vec{U}_{S\uparrow} \left(t - \underbrace{\frac{x \sin \alpha_{S2} - z \cos \alpha_{S2}}{V_{S2}}}_{\tau_{S\uparrow}} \right) = \vec{U}_{S\uparrow}(\tau_{S\uparrow}).$$

Проекция этого вектора на оси координат:

$$(\vec{U}_{S\uparrow})_x = U_{S\uparrow} \cos \alpha_{S2}; \quad (9.27)$$

$$(\vec{U}_{S\uparrow})_z = U_{S\uparrow} \sin \alpha_{S2}. \quad (9.28)$$

Определим производные:

$$\frac{\partial}{\partial x} (\vec{U}_{S\uparrow})_x = \dot{U}_{S\uparrow} \cos \alpha_{S2} \left(-\frac{\sin \alpha_{S2}}{V_{S1}} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\vec{U}_{S\uparrow})_x = \dot{U}_{S\uparrow} \cos \alpha_{S2} \frac{\cos \alpha_{S2}}{V_{S1}},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\vec{U}_{S\uparrow})_z = \dot{U}_{S\uparrow} \sin \alpha_{S2} \left(-\frac{\sin \alpha_{S2}}{V_{S1}} \right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\vec{U}_{S\uparrow})_z = \dot{U}_{S\uparrow} \sin \alpha_{S2} \frac{\cos \alpha_{S2}}{V_{S1}}.$$

Нормальное напряжение, создаваемое волной $\vec{U}_{S\uparrow}$, определяется так:

$$(P_{zz})_{S\uparrow} = \rho_2 V_{P2}^2 \left(-\frac{1}{V_{S2}} \cdot \dot{U}_{S\uparrow} \right) \times \\ \times \left(\cos \alpha_{S2} \sin \alpha_{S2} - \sin \alpha_{S2} \cos \alpha_{S2} - 2 \left(\frac{V_{S2}}{V_{P2}} \right)^2 \cos \alpha_{S2} \sin \alpha_{S2} \right),$$

или

$$(P_{zz})_{S\uparrow} = \rho_2 V_{S2} \dot{U}_{S\uparrow} \sin 2\alpha_{S2}. \quad (9.29)$$

Касательное напряжение для восходящей первичной S-волны:

$$(P_{zx})_{S\uparrow} = \rho_2 V_{S2}^2 \left(-\frac{1}{V_{S2}} \right) \dot{U}_{S\uparrow} (-\cos^2 \alpha_{S2} + \sin^2 \alpha_{S2}),$$

или

$$(P_{zx})_{S\uparrow} = \rho_2 V_{S2} \dot{U}_{S\uparrow} \cos 2\alpha_{S2}. \quad (9.30)$$

Аналогично описываются компоненты смещения и напряжения для вторичной SV-волны, уходящей во вторую, нижнюю среду:

$$(U_{S1})_x = U_{S1} \cos \alpha_{S1}, \quad (9.31)$$

$$(U_{S1})_z = U_{S1} \sin \alpha_{S1}, \quad (9.32)$$

$$(P_{zz})_{S1} = \rho_1 V_{S1}^2 \dot{U}_{S1} \sin 2\alpha_{S1}, \quad (9.33)$$

$$(P_{zx})_{S1} = \rho_1 V_{S1} \dot{U}_{S1} \cos 2\alpha_{S1}. \quad (9.34)$$

9.3. Граничные условия и обобщённые уравнения Цёппритца

На границе раздела контактирующих сред $z = 0$, и волновые аргументы всех восьми волн одинаковы, так как t и x — общие время и координата для всех волн, а множители при x равны в соответствии с законом Снеллиуса. Все волны на границе описываются функциями одного и того же аргумента:

$$\tau = t - \frac{x \sin \alpha_i}{V_i} = t - \frac{x}{V^*}.$$

Соответственно, и производные также есть результат дифференцирования волновых функций одного и того же аргумента τ .

Напомним, что все упругие процессы на границе подчинены кинематическим и динамическим граничным условиям, обеспечивающим сплошность и целостность всей упругой среды, неразрывность контакта пород на границе.

Кинематические граничные условия требуют равенства на границе ($z = 0$) суммарных векторов смещений волн в верхней и нижней средах. В проекциях на оси x и z они могут быть записаны так:

$$\begin{aligned} \sum_1 U_x|_{z=0} &= \sum_2 U_x, \\ \sum_1 U_z|_{z=0} &= \sum_2 U_z. \end{aligned}$$

В верхней среде существуют две первичные нисходящие волны $\vec{U}_{P\downarrow}$, $\vec{U}_{S\downarrow}$ и две вторичные восходящие — $\vec{U}_{P\uparrow}$, $\vec{U}_{S\uparrow}$. В нижней среде — две первичные восходящие волны $\vec{U}_{P\uparrow}$, $\vec{U}_{S\uparrow}$, и две вторичные нисходящие волны — $\vec{U}_{P\downarrow}$, $\vec{U}_{S\downarrow}$. Для x -компонент смещений при $z = 0$ можно записать, используя определения (9.3), (9.7), (9.11), (9.15), (9.19), (9.23), (9.27), (9.31):

$$\begin{aligned} [U_{P\downarrow} \sin \alpha_{P1} \times U_{S\downarrow} \cos \alpha_{S1}] - U_{P1} \sin \alpha_{P1} + U_{S1} \cos \alpha_{S1} = \\ = [-U_{P\uparrow} \sin \alpha_{P2} \times U_{S\uparrow} \cos \alpha_{S2}] + U_{P2} \sin \alpha_{P2} + U_{S2} \cos \alpha_{S2}. \end{aligned}$$

Здесь и далее компоненты векторов смещения первичных волн заключены в квадратные скобки и разделены знаком \sphericalangle (или), чтобы подчеркнуть, что в уравнении рассматриваются четыре варианта первичных волн. В таком виде уравнение, по сути, есть краткая объединённая запись четырех возможных уравнений. Перегруппируем члены уравнения, собрав в левой части вторичные волны, а в правой — возможные первичные:

$$\begin{aligned} & -U_{P1} \sin \alpha_{P1} + U_{S1} \cos \alpha_{S1} - U_{P2} \sin \alpha_{P2} - U_{S2} \cos \alpha_{S2} = \\ & = [-U_{P\downarrow} \sin \alpha_{P1} \sphericalangle -U_{S\downarrow} \cos \alpha_{S1} \sphericalangle -U_{P\uparrow} \sin \alpha_{P2} \sphericalangle U_{S\uparrow} \cos \alpha_{S2}]. \end{aligned}$$

В уравнении 6 из 8 членов отрицательны. Для сокращения выражения умножим левую и правую части уравнения на (-1) :

$$\begin{aligned} & U_{P1} \sin \alpha_{P1} - U_{S1} \cos \alpha_{S1} + U_{P2} \sin \alpha_{P2} + U_{S2} \cos \alpha_{S2} = \\ & = [U_{P\downarrow} \sin \alpha_{P1} \sphericalangle U_{S\downarrow} \cos \alpha_{S1} \sphericalangle U_{P\uparrow} \sin \alpha_{P2} \sphericalangle -U_{S\uparrow} \cos \alpha_{S2}]. \end{aligned} \quad (9.35)$$

Для z -компонент векторов смещения граничное условие запишем, подставляя определения (9.4), (9.8), (9.12), (9.16), (9.20), (9.24), (9.28), (9.32) этих компонент:

$$\begin{aligned} & [U_{P\downarrow} \cos \alpha_{P1} \sphericalangle -U_{S\downarrow} \sin \alpha_{S1}] + U_{P1} \cos \alpha_{P1} + U_{S1} \sin \alpha_{S1} = \\ & = [U_{P\uparrow} \cos \alpha_{P2} \sphericalangle U_{S\uparrow} \sin \alpha_{S2}] + U_{P2} \cos \alpha_{P2} - U_{S2} \sin \alpha_{S2}. \end{aligned}$$

Проведём ту же перестановку членов, что и для x -компонент:

$$\begin{aligned} & U_{P1} \cos \alpha_{P1} + U_{S1} \sin \alpha_{S1} - U_{P2} \cos \alpha_{P2} + U_{S2} \sin \alpha_{S2} = \\ & = [-U_{P\downarrow} \cos \alpha_{P1} \sphericalangle U_{S\downarrow} \sin \alpha_{S1} \sphericalangle U_{P\uparrow} \cos \alpha_{P2} \sphericalangle U_{S\uparrow} \sin \alpha_{S2}]. \end{aligned} \quad (9.36)$$

Динамические граничные условия сводятся к требованию равенства на границе ($z = 0$) суммарных напряжений, создаваемых всеми волновыми процессами сверху (9.35) и снизу (9.36). Для нормальных компонент напряжений можно записать:

$$\sum_1 P_{zz}|_{z=0} = \sum_2 P_{zz}.$$

Подставляя определения P_{zz} для всех волн (9.5), (9.9), (9.13), (9.17), (9.21), (9.25), (9.29), (9.33) и вводя обозначение $\gamma_i = \rho_i \cdot V_i$, получим:

$$\begin{aligned} & [-\dot{U}_{P\downarrow}\gamma_{P1} \cos 2\alpha_{S1} \times \dot{U}_{S\downarrow}\gamma_{S1} \sin 2\alpha_{S1}] + \\ & + \dot{U}_{P1}\gamma_{P1} \cos 2\alpha_{S1} + \dot{U}_{S1}\gamma_{S1} \sin 2\alpha_{S1} = \\ & = [\dot{U}_{P\uparrow}\gamma_{P2} \cos 2\alpha_{S2} \dot{U}_{S\uparrow}\gamma_{S2} \sin 2\alpha_{S2}] - \\ & - \dot{U}_{P2}\gamma_{P2} \cos 2\alpha_{S2} + \dot{U}_{S2}\gamma_{S2} \sin 2\alpha_{S2}. \end{aligned}$$

Проводя обычную перестановку членов, запишем третью группу уравнений:

$$\begin{aligned} & \dot{U}_{P1}\gamma_{P1} \cos 2\alpha_{S1} + \dot{U}_{S1}\gamma_{S1} \sin 2\alpha_{S1} + \\ & + \dot{U}_{P2}\gamma_{P2} \cos 2\alpha_{S2} - \dot{U}_{S2}\gamma_{S2} \sin 2\alpha_{S2} = \\ & = [\dot{U}_{P\downarrow}\gamma_{P1} \cos 2\alpha_{S1} \times -\dot{U}_{S\downarrow}\gamma_{S1} \sin 2\alpha_{S1} \times \\ & \times \dot{U}_{P\uparrow}\gamma_{P2} \cos 2\alpha_{S2} \times \dot{U}_{S\uparrow}\gamma_{S2} \sin 2\alpha_{S2}]. \end{aligned} \quad (9.37)$$

Наконец, четвертую группу уравнений получим из граничного условия для касательных напряжений, используя определения (9.6), (9.10), (9.14), (9.18), (9.22), (9.26), (9.30), (9.34):

$$\begin{aligned} & [-\dot{U}_{P\downarrow} \frac{V_{S1}}{V_{P1}} \gamma_{S1} \sin 2\alpha_{P1} \times -\dot{U}_{S\downarrow} \gamma_{S1} \cos 2\alpha_{S1}] - \\ & - \dot{U}_{P1} \frac{V_{S1}}{V_{P1}} \gamma_{S1} \sin 2\alpha_{P1} + \dot{U}_{S1} \gamma_{S1} \cos 2\alpha_{S1} = \\ & = [-\dot{U}_{P\uparrow} \frac{V_{S2}}{V_{P2}} \gamma_{S2} \sin 2\alpha_{P2} \times \dot{U}_{S\uparrow} \gamma_{S2} \cos 2\alpha_{S2}] - \\ & - \dot{U}_{P2} \frac{V_{S2}}{V_{P2}} \gamma_{S2} \sin 2\alpha_{P2} - \dot{U}_{S2} \gamma_{S2} \cos 2\alpha_{S2}. \end{aligned}$$

Продолжим сокращение записи и обозначим: $n_i = V_{Si}/V_{Pi}$.

Выполняя перестановку членов уравнения, запишем:

$$\begin{aligned} & -\dot{U}_{P1}n_1\gamma_{S1} \sin 2\alpha_{P1} + \dot{U}_{S1}\gamma_{S1} \cos 2\alpha_{S1} + \\ & + \dot{U}_{P2}n_2\gamma_{S2} \sin 2\alpha_{P2} + \dot{U}_{S2}\gamma_{S2} \cos 2\alpha_{S2} = \\ & = [\dot{U}_{P\downarrow}n_1\gamma_{S1} \sin 2\alpha_{P1} \times \dot{U}_{S\downarrow}\gamma_{S1} \cos 2\alpha_{S1} \times \\ & \times -\dot{U}_{P\uparrow}n_2\gamma_{S2} \sin 2\alpha_{P2} \times \dot{U}_{S\uparrow}\gamma_{S2} \cos 2\alpha_{S2}]. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Получены обобщенные уравнения Цёппригца, связывающие компоненты смещений и напряжений вторичных волн — отражённых и преломленных, продольных и поперечных и компоненты смещений и напряжений возможных первичных волн — падающих или восходящих, P или S .

Сравнение коэффициентов левых и правых частей уравнений позволяет выявить замечательную закономерность. Составим из коэффициентов левых частей уравнений (9.35) — (9.38) (множителей для вторичных волн) квадратную (4×4) матрицу L_{ij} :

$$L_{ij} = \begin{pmatrix} \sin \alpha_{P1} & -\cos \alpha_{S1} & \sin \alpha_{P2} & \cos \alpha_{S2} \\ \cos \alpha_{P1} & \sin \alpha_{S1} & -\cos \alpha_{P2} & \sin \alpha_{S2} \\ \gamma_{P1} \cos 2\alpha_{S1} & \gamma_{S1} \sin 2\alpha_{S1} & \gamma_{P2} \cos 2\alpha_{S2} & -\gamma_{S2} \sin 2\alpha_{S2} \\ -n_1 \gamma_{S1} \sin 2\alpha_{P1} & \gamma_{S1} \cos 2\alpha_{S1} & n_2 \gamma_{S2} \sin 2\alpha_{P2} & \gamma_{S2} \cos 2\alpha_{S2} \end{pmatrix}.$$

а из коэффициентов правых частей уравнений (множителей для возможных первичных волн) — аналогичную матрицу R_{ij} :

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \sin \alpha_{P1} & \cos \alpha_{S1} & \sin \alpha_{P2} & -\cos \alpha_{S2} \\ -\cos \alpha_{P1} & \sin \alpha_{S1} & \cos \alpha_{P2} & \sin \alpha_{S2} \\ \gamma_{P1} \cos 2\alpha_{S1} & -\gamma_{S1} \sin 2\alpha_{S1} & \gamma_{P2} \cos 2\alpha_{S2} & \gamma_{S2} \sin 2\alpha_{S2} \\ n_1 \gamma_{S1} \sin 2\alpha_{P1} & \gamma_{S1} \cos 2\alpha_{S1} & -n_2 \gamma_{S2} \sin 2\alpha_{P2} & \gamma_{S2} \cos 2\alpha_{S2} \end{pmatrix}.$$

Сопоставление матриц L_{ij} и R_{ij} показывает, что по абсолютному значению элементы матриц попарно равны:

$$|L_{ij}| = |R_{ij}|.$$

Различаются лишь знаки некоторых пар элементов: для всех (i, j) -х элементов, у которых $i + j$ — нечётное число, они разные, а для тех элементов, у которых $i + j$ — чётное число, — одинаковые. Такое соответствие можно выразить формулой

$$R_{ij} = (-1)^{i+j} L_{ij}.$$

Поэтому матрицу коэффициентов левых частей формул можно считать главной.

Это соотношение коэффициентов обобщенных уравнений Цёппригца легко запоминается, облегчает (сокращая вдвое) расчёты и служит средством контроля правильности их определения (вывода формул).

Обратим внимание на особенности главной матрицы L_{ij} коэффициентов левых частей обобщенных уравнений Цёппригца. Напомним, что каждый j -й столбец матрицы соответствует той или иной вторичной волне: L_{i1} — коэффициенты для U_{P1} , L_{i2} — для U_{S1} , L_{i3} — для U_{P2} и, наконец, L_{i4} — для U_{S2} .

В первых двух строках матрицы (L_{1j} , L_{2j}) тип вторичной волны соответствует углу рассеивания: U_{P1} и α_{P1} , U_{S1} и α_{S1} и т.д. В 3-й и 4-й строках это соответствие так или иначе нарушено. В строке L_{3j} волновые сопротивления соответствуют типу вторичной волны: γ_{P1} и U_{P1} , γ_{S1} и U_{S1} и т.д., но во всех элементах этой строки используются углы рассеивания поперечных волн α_{S1} и α_{S2} . В 4-й строке (L_{4j}), наоборот, углы соответствуют типу волны (α_{P1} и U_{P2} и т.д.), но все элементы этой строки имеют множителем поперечные волновые сопротивления γ_{S1} и γ_{S2} . Наконец, заметим, что отрицательные элементы матрицы L_{ij} расположены закономерно: по диагонали L_{12} , L_{23} , L_{34} и в дополнение к ней, L_{41} .

Как и для SH -волн, различие типов уравнений для смещений (алгебраические) и для напряжений (дифференциальные) легко снимается переходом от временного представления волновых функций к их спектрам:

$$U(\tau) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \tilde{U}(\omega),$$

$$\dot{U}(\tau) \equiv \frac{dU(\tau)}{d\tau} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\omega\tilde{U}(\omega).$$

при нулевом начальном условии $U(\tau)|_{\tau=0} = 0$, которое вполне реалистично: ведь в момент прихода первичной волны, принятый за начальный, граница находится в покое.

В результате Фурье-преобразования в 3-м и 4-м уравнениях у каждого члена левой и правой частей появится множитель $j\omega$, который можно сократить. В результате получим четыре группы однотипных алгебраических уравнений, связывающих спектры какой-либо первичной волны и четырёх вторичных волн. Такая структура уравнений имеет решение не для каждого из спектров, а только для четырёх отношений спектров вторичных волн к спектру возбудившей их первичной волны.

Назовем эти отношения спектральными коэффициентами рассеивания (СКР):

$$\text{СКР}_{ij} = \frac{\text{спектр } j\text{-й вторичной волны}}{\text{спектр } i\text{-й первичной волны}}.$$

Обозначим их C_{ij} , где i — индекс первичной волны, j — индекс вторичной волны.

Многовариантность первичных волн (4) и многочисленность возбуждаемых ими вторичных волн рассеивания ($4 \times 4 = 16$) и, соответственно, спектральных коэффициентов рассеивания (также 16) требуют строгой и легко распознаваемой системы обозначений.

Для нисходящих первичных волн $U_{P\downarrow}$ и $U_{S\downarrow}$ введём:

— спектральные коэффициенты отражения вверх (СКО \uparrow) A_{ij} :

$$\begin{aligned} A_{PP} &= \frac{\tilde{U}_{P1}(\omega)}{\tilde{U}_{P\downarrow}(\omega)}, & A_{SS} &= \frac{\tilde{U}_{S1}(\omega)}{\tilde{U}_{S\downarrow}(\omega)}, & \text{— СКО } \uparrow \text{ монотипных волн;} \\ A_{PS} &= \frac{\tilde{U}_{S1}(\omega)}{\tilde{U}_{P\downarrow}(\omega)}, & A_{SP} &= \frac{\tilde{U}_{P1}(\omega)}{\tilde{U}_{S\downarrow}(\omega)}, & \text{— СКО } \uparrow \text{ обменных волн;} \end{aligned}$$

— спектральные коэффициенты прохождения вниз (СКП \downarrow) B_{ij} :

$$\begin{aligned} B_{PP} &= \frac{\tilde{U}_{P2}(\omega)}{\tilde{U}_{P\downarrow}(\omega)}, & B_{SS} &= \frac{\tilde{U}_{S2}(\omega)}{\tilde{U}_{S\downarrow}(\omega)}, & \text{— СКП } \downarrow \text{ монотипных волн;} \\ B_{PS} &= \frac{\tilde{U}_{S2}(\omega)}{\tilde{U}_{P\downarrow}(\omega)}, & B_{SP} &= \frac{\tilde{U}_{P2}(\omega)}{\tilde{U}_{S\downarrow}(\omega)}, & \text{— СКП } \downarrow \text{ обменных волн.} \end{aligned}$$

Для восходящих первичных волн $U_{P\uparrow}$ и $U_{S\uparrow}$, распространяющихся вверх, «к звездам», коэффициенты рассеивания отметим соответствующим символом $*$:

— спектральные коэффициенты прохождения вверх (СКП \uparrow) B_{ij}^* :

$$B_{PP}^* = \frac{\tilde{U}_{P1}(\omega)}{\tilde{U}_{P\uparrow}(\omega)}, \quad B_{SS}^* = \frac{\tilde{U}_{S1}(\omega)}{\tilde{U}_{S\uparrow}(\omega)}, \quad \text{— СКП } \uparrow \text{ монотипных волн;}$$

$$B_{PS}^* = \frac{\tilde{U}_{S1}(\omega)}{\tilde{U}_{P\uparrow}(\omega)}, \quad B_{SP}^* = \frac{\tilde{U}_{P1}(\omega)}{\tilde{U}_{S\uparrow}(\omega)}, \quad - \text{СКП } \uparrow \text{ обменных волн;}$$

– спектральные коэффициенты отражения вниз (СКО \downarrow) A_{ij}^* :

$$A_{PP}^* = \frac{\tilde{U}_{P2}(\omega)}{\tilde{U}_{P\uparrow}(\omega)}, \quad A_{SS}^* = \frac{\tilde{U}_{S2}(\omega)}{\tilde{U}_{S\uparrow}(\omega)}, \quad - \text{СКО } \downarrow \text{ монотипных волн;}$$

$$A_{PS}^* = \frac{\tilde{U}_{S2}(\omega)}{\tilde{U}_{P\uparrow}(\omega)}, \quad A_{SP}^* = \frac{\tilde{U}_{P2}(\omega)}{\tilde{U}_{S\uparrow}(\omega)}, \quad - \text{СКО } \downarrow \text{ обменных волн.}$$

Образуем из введённых СКР квадратную (4×4) матрицу C_{ij} :

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} A_{PP} & A_{SP} & B_{PP}^* & B_{SP}^* \\ A_{PS} & A_{SS} & B_{PS}^* & B_{SS}^* \\ B_{PP} & B_{SP} & A_{PP}^* & A_{SP}^* \\ B_{PS} & B_{SS} & A_{PS}^* & A_{SS}^* \end{pmatrix}.$$

В этой матрице каждый j -й столбец соответствует той или иной первичной волне: 1-й – $U_{P\downarrow}$, 2-й – $U_{S\downarrow}$, 3-й – $U_{P\uparrow}$, 4-й – $U_{S\uparrow}$, а каждая i -я строка – вторичной волне: 1-я – U_{P1} , 2-я – U_{S1} , 3-я – U_{P2} , 4-я – U_{S2} .

Используя определения матриц коэффициентов левой L_{ij} и правой R_{ij} частей уравнений, можно записать обобщенное матричное уравнение Цёппритца:

$$C_{ij}L_{ij} = R_{ij},$$

где $R_{ij} = (-1)^{i+j}L_{ij}$; $i, j = 1, 2, 3, 4$.

Напомним, что при перемножении матриц каждый столбец первого сомножителя почленно умножается на каждую строку второго операнда. Например, для случая $U_{P\downarrow}$ ($j = 1$) используется первый столбец матрицы C_{ij} :

$$C_{ij}L_{ij}|_{U_{P\downarrow}} = \begin{pmatrix} A_{PP} \\ A_{PS} \\ B_{PP} \\ B_{PS} \end{pmatrix} L_{ij} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{PP}L_{11} + A_{PS}L_{12} + B_{PP}L_{13} + B_{PS}L_{14} \\ A_{PP}L_{21} + A_{PS}L_{22} + B_{PP}L_{23} + B_{PS}L_{24} \\ A_{PP}L_{31} + A_{PS}L_{32} + B_{PP}L_{33} + B_{PS}L_{34} \\ A_{PP}L_{41} + A_{PS}L_{42} + B_{PP}L_{43} + B_{PS}L_{44} \end{pmatrix}.$$

Матрица R_{ij} для этого случая ($j = 1$) будет выглядеть так:

$$R_{ij}|_{U_{P\downarrow}} = \begin{pmatrix} +L_{11} \\ -L_{21} \\ +L_{31} \\ -L_{41} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{— знак «плюс», так как } i + j = 2 \\ \text{— знак «минус», так как } i + j = 3 \\ \text{— знак «плюс», так как } i + j = 4 \\ \text{— знак «минус», так как } i + j = 5. \end{array}$$

Для первичной волны $U_{S\uparrow}$ ($j = 4$) используется 4-й столбец C_{i4} :

$$C_{ij}L_{ij}|_{U_{S\uparrow}} = \begin{pmatrix} B_{PP}^* \\ B_{PS}^* \\ A_{PP}^* \\ A_{PS}^* \end{pmatrix} L_{ij} = \\ = \begin{pmatrix} B_{PP}^*L_{11} + B_{PS}^*L_{12} + A_{PP}^*L_{13} + A_{PS}^*L_{14} \\ B_{PP}^*L_{21} + B_{PS}^*L_{22} + A_{PP}^*L_{23} + A_{PS}^*L_{24} \\ B_{PP}^*L_{31} + B_{PS}^*L_{32} + A_{PP}^*L_{33} + A_{PS}^*L_{34} \\ B_{PP}^*L_{41} + B_{PS}^*L_{42} + A_{PP}^*L_{43} + A_{PS}^*L_{44} \end{pmatrix}.$$

Матрица R_{ij} для этого случая ($j = 4$) будет выглядеть так:

$$R_{ij}|_{U_{S\uparrow}} = \begin{pmatrix} -L_{14} \\ +L_{24} \\ -L_{34} \\ +L_{44} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{— знак «минус», так как } i + j = 5 \\ \text{— знак «плюс», так как } i + j = 6 \\ \text{— знак «минус», так как } i + j = 7 \\ \text{— знак «плюс», так как } i + j = 8. \end{array}$$

Таким же образом, умножая 2-й или 3-й столбцы C_{ij} на матрицу L_{ij} , получают системы из четырех уравнений в случаях $U_{S\downarrow}$ ($j = 2$) и $U_{P\uparrow}$ ($j = 3$).

Из четырёх возможных первичных волн наиболее важным является случай падения на границу сверху продольной волны ($j = 1$), который и рассмотрим в следующем разделе.

Глава 10. Отражение и преломление плоской продольной волны

Как отмечалось, сейсморазведка на продольных волнах является главным и наиболее распространённым методом геофизической разведки.

10.1. Уравнения Цёппритца для Р-волны

В случае падения сверху первичной продольной волны $\vec{U}_{P\downarrow}$ левую часть уравнений Цёппритца получают умножением первого столбца ($j = 1$) матрицы коэффициентов рассеивания

$$C_{i1} = \begin{pmatrix} A_{PP} \\ A_{PS} \\ B_{PP} \\ B_{PS} \end{pmatrix}.$$

на матрицу L_{ij} коэффициентов левой части уравнений. Правая часть $R_{i1}|_{U_{P\downarrow}}$ формируется из первого столбца этой матрицы:

$$R_{i1}|_{U_{P\downarrow}} = (-1)^{i+1} L_{i1} = \begin{pmatrix} \sin \alpha_{P1} \\ -\cos \alpha_{P1} \\ \gamma_{P1} \cos 2\alpha_{S1} \\ n_1 \gamma_{S1} \sin 2\alpha_{P1} \end{pmatrix}.$$

Общая матричная форма уравнений Цёппритца для первичной Р-волны имеет вид: $C_{i1} L_{ij} = (-1)^{i+1} L_{i1}$.

Используя определения C_{i1} и L_{ij} , запишем четыре уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{PP} \sin \alpha_{P1} - A_{PS} \cos \alpha_{S1} + B_{PP} \sin \alpha_{P2} + B_{PS} \cos \alpha_{S2} = \sin \alpha_{P1}, \\ A_{PP} \cos \alpha_{P1} + A_{PS} \sin \alpha_{S1} - B_{PP} \cos \alpha_{P2} + B_{PS} \sin \alpha_{S2} = \cos \alpha_{P1}, \\ A_{PP} \gamma_{P1} \cos 2\alpha_{S1} + A_{PS} \gamma_{S1} \sin 2\alpha_{S1} + B_{PP} \gamma_{P2} \cos 2\alpha_{S2} - \\ \quad - B_{PS} \gamma_{S2} \sin 2\alpha_{S2} = \gamma_{P1} \cos 2\alpha_{S1}, \\ - A_{PP} n_1 \gamma_{S1} \sin 2\alpha_{P1} + A_{PS} \gamma_{S1} \cos 2\alpha_{S1} + B_{PP} n_2 \gamma_{S2} \sin 2\alpha_{P2} + \\ \quad + B_{PS} \gamma_{S2} \cos 2\alpha_{S2} = n_1 \gamma_{S1} \sin 2\alpha_{P1}. \end{array} \right.$$

Именно эти уравнения были получены в начале XX в. немецким ученым К. Цёппритцем (правда, со многими ошибками, исправлявшимися автором и другими исследователями в течение трёх (!) десятков лет).

При нормальном падении первичной волны $\alpha_{P1} = \alpha_{S1} = \alpha_{P2} = \alpha_{S2} = 0$, все синусы равны 0, косинусы равны 1, и уравнения принимают вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} -A_{PS} + B_{PS} = 0, \\ A_{PP} - B_{PP} = -1, \\ A_{PP} \gamma_{P1} + B_{PP} \gamma_{P2} = \gamma_{P1}, \\ A_{PS} \gamma_{S1} + B_{PS} \gamma_{S2} = 0. \end{array} \right.$$

Из первого и четвертого уравнений следует: $A_{PS} = B_{PS} = 0$ — обменные волны при нормальном падении P -волны не возникают.

Вспомнив определения $A_{PP} = \frac{\tilde{U}_{P1}(\omega)}{\tilde{U}_{P1}(\omega)}$, $B_{PP} = \frac{\tilde{U}_{P2}(\omega)}{\tilde{U}_{P1}(\omega)}$, после умножения на $\tilde{U}_{P1}(\omega)$ получим: $\tilde{U}_{P1}(\omega) + \tilde{U}_{P1}(\omega) = \tilde{U}_{P2}(\omega)$, или во временной области $U_{P1}(t) + U_{P1}(t) = U_{P2}(t)$.

При $\alpha_{P1} = 0$ на границе ($z = 0$) суммы смещений первичной и отражённой волн равны смещению проходящей волны.

Решая систему из двух уравнений (2-го и 3-го) для A_{PP} и B_{PP} :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{PP} - B_{PP} = -1, \\ A_{PP} \gamma_{P1} + B_{PP} \gamma_{P2} = \gamma_{P1}, \end{array} \right.$$

получим известные определения коэффициентов рассеивания для нормального падения волны сверху:

$$A_{PP} = \frac{\gamma_{P1} - \gamma_{P2}}{\gamma_{P1} + \gamma_{P2}}, \quad B_{PP} = 1 + A_{PP} = \frac{2\gamma_{P1}}{\gamma_{P1} + \gamma_{P2}}.$$

Если первичная Р-волна подходит к границе снизу, используют 3-й столбец матрицы коэффициентов рассеивания: $C_{i3} = \begin{pmatrix} B_{PP}^* \\ B_{PS}^* \\ A_{PP}^* \\ A_{PS}^* \end{pmatrix}$.

Эту матрицу-столбец умножают на матрицу L_{ij} левой части уравнений и приравнивают к матрице-столбцу $R_{i3} = (-1)^{i+3}L_{i3}$:

$$R_{i3}|_{U_{P\uparrow}} = (-1)^{i+1}L_{i1} = \begin{pmatrix} \sin \alpha_{P2} \\ \cos \alpha_{P2} \\ \gamma_{P2} \cos 2\alpha_{S2} \\ -n_2\gamma_{S2} \sin 2\alpha_{P2} \end{pmatrix}.$$

В матричной форме уравнения Цёпприфта для волны $U_{P\uparrow}$ имеют вид

$$C_{i3}L_{ij} = (-1)^{i+3}L_{i3}.$$

Используя определения C_{i3} и L_{ij} , получим систему из четырёх уравнений:

$$\begin{cases} B_{PP}^* \sin \alpha_{P1} - B_{PS}^* \cos \alpha_{S1} + A_{PP}^* \sin \alpha_{P2} + A_{PS}^* \cos \alpha_{S2} = \sin \alpha_{P2}, \\ B_{PP}^* \cos \alpha_{P1} + B_{PS}^* \sin \alpha_{S1} - A_{PP}^* \cos \alpha_{P2} + A_{PS}^* \sin \alpha_{S2} = \cos \alpha_{P2}, \\ B_{PP}^* \gamma_{P1} \cos 2\alpha_{S1} + B_{PS}^* \gamma_{S1} \sin 2\alpha_{S1} + A_{PP}^* \gamma_{P2} \cos 2\alpha_{S2} - \\ \quad - A_{PS}^* \gamma_{S2} \sin 2\alpha_{S2} = \gamma_{P2} \cos 2\alpha_{S2}, \\ -B_{PP}^* n_1 \gamma_{S1} \sin 2\alpha_{P1} + B_{PS}^* \gamma_{S1} \cos 2\alpha_{S1} + A_{PP}^* n_2 \gamma_{S2} \sin 2\alpha_{P2} + \\ \quad + A_{PS}^* \gamma_{S2} \cos 2\alpha_{S2} = -n_2 \gamma_{S2} \sin 2\alpha_{P2}. \end{cases}$$

При подходе первичной восходящей Р-волны по нормали к границе все углы равны нулю и система уравнений принимает вид

$$\begin{cases} -B_{PS}^* + A_{PS}^* = 0, \\ B_{PP}^* - A_{PP}^* = 1, \\ B_{PP}^* \gamma_{P1} + A_{PP}^* \gamma_{P2} = \gamma_{P2}, \\ B_{PS}^* \gamma_{S1} + A_{PS}^* \gamma_{S2} = 0, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{aligned} A_{PS}^* &= 0, \\ B_{PS}^* &= 0, \\ A_{PP}^* &= \frac{\gamma_{P2} - \gamma_{P1}}{\gamma_{P2} + \gamma_{P1}}, \\ B_{PP}^* &= 1 + A_{PP}^* = \frac{2\gamma_{P2}}{\gamma_{P2} + \gamma_{P1}}. \end{aligned}$$

Из определений видно, что коэффициенты отражения вверх A_{PP} и вниз A_{PP}^* при нормальном падении различаются лишь знаком: $A_{PP}^* = -A_{PP}$, а коэффициенты прохождения вниз B_{PP} и вверх B_{PP}^* связаны соотношением

$$B_{PP}^* = \frac{\gamma_{P2}}{\gamma_{P1}} B_{PP}.$$

Коэффициент двойного – вниз и вверх – прохождения через границу равен:

$$\begin{aligned} K_{PP} &= B_{PP} \cdot B_{PP}^* = (1 + A_{PP})(1 + A_{PP}^*) = \\ &= (1 + A_{PP})(1 - A_{PP}) = 1 - A_{PP}^2. \end{aligned}$$

Из двух вариантов первичных продольных волн первостепенное значение имеет случай $U_{P\downarrow}$ – первичная волна падает на границу сверху. Поэтому сосредоточим внимание на исследовании коэффициентов рассеивания $C_{i1} - A_{PP}, A_{PS}, B_{PP}, B_{PS}$ как функций угла падения α_{P1} первичной нисходящей волны $U_{P\downarrow}$.

При нормальном падении первичной волны ($\alpha_{P1} = 0$) имеем:

$A_{PP} > 0, B_{PP} > 1$, если $\gamma_{P1} > \gamma_{P2}$, и при $\gamma_{P2} \rightarrow 0$ $A_{PP} \rightarrow 1, B_{PP} \rightarrow 2$;

$A_{PP} < 0, B_{PP} < 1$, если $\gamma_{P2} > \gamma_{P1}$, и при $\gamma_{P1} \rightarrow 0$ $A_{PP} \rightarrow -1, B_{PP} \rightarrow 0$.

В отличие от поперечной SH -волны, при $A_{PP} > 0$ происходит отражение с потерей полуволны, так как оба вектора $U_{P\downarrow}$ и U_{P1} направлены в одну и ту же сторону, а волны распространяются в противоположные: $U_{P\downarrow}$ – вниз, а U_{P1} – вверх. Волна $U_{P\downarrow}$, несущая, например, сжатие на переднем фронте, порождает отражённую волну U_{P1} с растяжением на переднем фронте.

При $A_{PP} < 0$ происходит отражение без потери волны – одновременно с изменением направления распространения изменяется и направление смещения. Волна $U_{P\downarrow}$ и волна U_{P1} имеют один и тот же тип

деформации на переднем фронте: сжатие порождает сжатие, растяжение — растяжение.

В обоих случаях отражённая волна всегда меньше по амплитуде ($|A_{PP}| = \frac{|\gamma_{P1} - \gamma_{P2}|}{\gamma_{P1} + \gamma_{P2}} < 1$), чем волна падающая.

Коэффициент прохождения B_{PP} при $\alpha_{P1} = 0$ и при любом соотношении волновых сопротивлений γ_{P1} и γ_{P2} положителен, и проходящая волна имеет то же направление смещения, что и волна U_{P1} .

При меньшем волновом сопротивлении нижней среды, волна, проходя через границу, увеличивает «шаг» — амплитуду колебаний. Наоборот, при $\gamma_{P2} > \gamma_{P1}$ $B_{PP} < 1$, и у проходящей волны амплитуда меньше, чем у первичной, — ведь волновое сопротивление нижней среды больше сопротивления верхней.

Итак, при нормальном падении P -волны на границу обменных волн не возникает, оба коэффициента рассеивания — A_{PP} и B_{PP} — действительные числа, амплитудные множители, лишь изменяющие амплитуды вторичных волн, а при $A_{PP} > 0$ происходит еще и инвертирование знака смещения отражённой волны в сравнении с волной первичной.

Определим предельные значения СКР при $\alpha_P \rightarrow 90^\circ$. Подстановка $\sin \alpha_{P1} = 1$, $\cos \alpha_{P1} = 0$, $\sin 2\alpha_{P1}$ даёт следующую матрицу коэффициентов уравнений Цёппритца:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos \alpha_{S1} & \sin \alpha_{P2} & \cos \alpha_{S2} \\ 0 & \sin \alpha_{S1} & -\cos \alpha_{P2} & \sin \alpha_{S2} \\ \gamma_{P1} \cos 2\alpha_{S1} & \gamma_{S1} \sin 2\alpha_{S1} & \gamma_{P2} \cos 2\alpha_{S2} & -\gamma_{S2} \sin 2\alpha_{S2} \\ 0 & \gamma_{S1} \cos 2\alpha_{S1} & n_2 \gamma_{S2} \sin 2\alpha_{P2} & \gamma_{S2} \cos 2\alpha_{S2} \end{pmatrix}.$$

Правая часть уравнения (матрица-столбец свободных членов) при этом равна:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \gamma_{P1} \cos 2\alpha_{S1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Обратим внимание на то, что подстановка $\alpha_P = 90^\circ$ обнулила коэффициенты при A_{PP} (1-й столбец матрицы) и столбец свободных членов уравнений (их правых частей) именно в тех строках, где в исходной матрице знаки элементов этих столбцов различались. В результате первый

столбец левой части уравнений стал полностью совпадать со столбцом правой части уравнений.

При решении системы уравнений по правилу Крамера надо вычислить главный определитель системы D , составленный из коэффициентов при неизвестных, и определители для неизвестных D_i , составляемые из главного определителя заменой его i -го столбца столбцом свободных членов. Затем находят неизвестные:

$$x_i = \frac{D_i}{D}.$$

При вычислении A_{PP} ($i = 1$) $D_1 = D$ и $A_{PP} = 1$. Все определители других неизвестных — A_{PS}, B_{PP}, B_{PS} ($i = 2, 3, 4$) D_2, D_3, D_4 равны нулю, т.к. эти определители имеют пару одинаковых столбцов (1-й и 2-й, 1-й и 3-й, 1-й и 4-й). Поэтому $A_{PS} = B_{PP} = B_{PS} = 0$. Естественный результат — при $\alpha_P = 90^\circ$ первичная волна скользит по границе и в заданной её точке ($x = 0$) как бы становится отражённой волной. Ни обменных, ни проходящих волн нет.

Исследование поведения СКР как функций угла падения первичной волны затруднено необходимостью решать систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Существующие способы общего решения (алгоритм Гаусса, способ Крамера) могут дать аналитические выражения СКР. Однако получаемые при этом общие определения коэффициентов чрезвычайно громоздки и не поддаются «визуальному» анализу.

Тем не менее, используя опыт исследования случая падения на границу SH -волны (см. разд. 8), можно всё же составить общее описание волн рассеивания, порождаемых P -волной, иллюстрируя его результатами компьютерного решения уравнения Цёппритца для конкретных моделей контактирующих на границе сред.

10.2. Волны рассеивания, возбуждаемые P -волной на кровле низкоскоростной среды

Рассмотрим вначале более простой случай, когда волновые сопротивления верхней среды (γ_{P1}, γ_{S1}) больше сопротивлений нижнего полупространства (γ_{P2}, γ_{S2}). В этом случае $V_{P1} > (V_{S1}, V_{P2}, V_{S2})$. Та-

кое соотношение физических свойств контактирующих на границе сред обычно соответствует перерывам в осадконакоплении и характеризует чаще всего границы размыва.

В соответствии с законом Снеллиуса, угол падения α_P и равный ему угол отражения монотипной (PP) волны α_{P1} являются наибольшими в семействе углов рассеивания:

$$\alpha_P = \alpha_{P1} > (\alpha_{S1}, \alpha_{P2}, \alpha_{S2}).$$

Поэтому при изменении угла падения в диапазоне $0 \leq \alpha_P \leq 90^\circ$ все остальные углы рассеивания верхнего предела 90° никогда не достигают. В этом случае значения тригонометрических функций углов, определяющие коэффициенты уравнений, при любых углах падения являются действительными числами. Таковы и значения коэффициентов рассеивания, как результат решения системы линейных уравнений с действительными коэффициентами. Следовательно, вторичные волны, возникающие при любых углах падения волны U_{P1} , так же отличаются от неё, как и при нормальном падении, — изменяются лишь их амплитуды и, возможно, знак смещений («поляриность» колебаний).

Обсудим вначале поведение монотипных (PP) вторичных волн при изменении угла падения первичной волны. На рис. 10.1 приведены два графика коэффициентов отражения A_{PP} как функций угла α_P , изменяющегося в теоретически возможных пределах $0 \leq \alpha_P \leq 90^\circ$, для двух моделей контактирующих на границе сред: с большим перепадом волновых сопротивлений («сильная» отражающая граница, кривая a на рис. 10.1) и с малыми различиями γ_P и γ_S («слабая» граница, кривая b на рис. 10.1). Параметры сред приведены в табл. 10.1 ниже.

Таблица 10.1. Параметры модели 1

Модель	V_{P1} , км/с	V_{S1} , км/с	ρ_1 , г/см ³	V_{P2} , км/с	V_{S2} , км/с	ρ_2 , г/см ³
Сильная граница	5.0	2.887	2.75	2.5	1.25	2.25
Слабая граница	2.887	1.667	2.5	2.5	1.25	2.25

В обоих случаях A_{PP} при $\alpha_P = 0$ — положительное число, тем большее, чем больше различие γ_{P1} и γ_{P2} («контрастность» границы). С увеличением α_P СКО уменьшается, образуя локальный минимум, а затем с ускорением возрастает, стремясь к единице при $\alpha_P \rightarrow 90^\circ$. Для сильной границы кривая $A_{PP}(\alpha_P)$ оси абсцисс в минимуме не до-

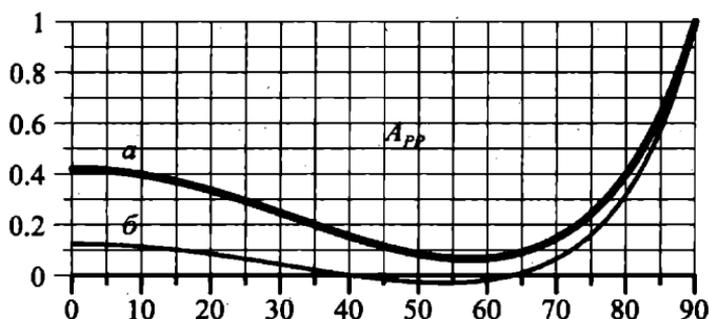


Рис. 10.1. Графики зависимости коэффициента отражения A_{PP} от угла подхода:

а – «сильная» граница; *б* – «слабая» граница

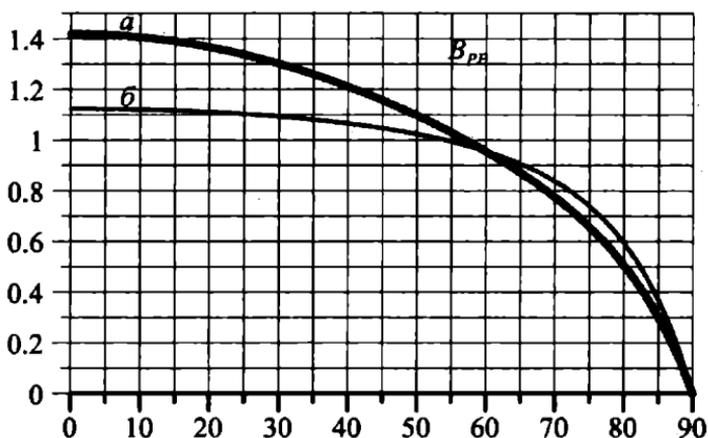


Рис. 10.2. Графики зависимости коэффициента прохождения B_{PP} от угла подхода:

а – «сильная» граница; *б* – «слабая» граница

стигает. Отражённая волна лишь уменьшает свою амплитуду при углах падения, соответствующих минимуму кривой. Для слабой границы этот минимум может оказаться ниже оси абсцисс. В результате при изменении α_P отражённая волна при двух углах падения затухает до нуля. Между этими углами падения знак первого смещения волны обратен

тому знаку, который есть у неё при малых ($\alpha_P \rightarrow 0$) и больших углах падения ($\alpha_P \rightarrow 90^\circ$).

Поведение проходящей монотипной PP -волны при увеличении угла падения от 0 до 90° определяется изменениями коэффициента прохождения $V_{PP}(\alpha_P)$ (рис. 10.2). В обоих рассматриваемых случаях (сильная граница — кривая a , слабая — b) при $\alpha_P = 0$ $V_{PP} > 1$, и проходящая волна имеет амплитуду, тем большую амплитуды первичной волны, чем меньше различия γ_{P1} и γ_{P2} (чем слабее граница). С увеличением α_P V_{PP} вначале медленно, затем все быстрее уменьшается, стремясь к своему пределу: при $\alpha_P \rightarrow 90^\circ$ $V_{PP} \rightarrow 0$. Проходящая волна $U_{P2}(t)$ максимальна по амплитуде при нормальном падении и затухает до нуля при скольжении первичной волны вдоль границы.

Не более сложно и столь же естественно поведение спектральных коэффициентов рассеивания обменных волн — $A_{PS}(\alpha_P)$ и $B_{PS}(\alpha_P)$. Оба коэффициента равны нулю при $\alpha_P = 0$ и 90° — при нормальном и скользящем падении первичная P -волна не порождает обменных волн. Зависимости $A_{PS}(\alpha_P)$ (рис. 10.3) и $B_{PS}(\alpha_P)$ (рис. 10.4) имеют максимум в средней части диапазона изменения α_P , тем более выраженный, чем больше различие волновых сопротивлений сред. Интервал максимальных амплитуд обменных волн примерно совпадает с тем интервалом α_P , в котором амплитуда монотипной отражённой волны минимальна. Энергия первичной волны здесь перераспределяется в пользу обменных волн за счет уменьшения доли энергии, приходящейся на монотипные волны.

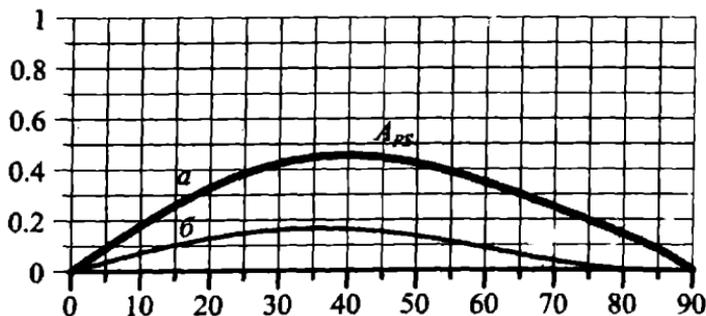


Рис. 10.3. Графики зависимости коэффициента отражения A_{PS} от угла подхода:

a — «сильная» граница; b — «слабая» граница

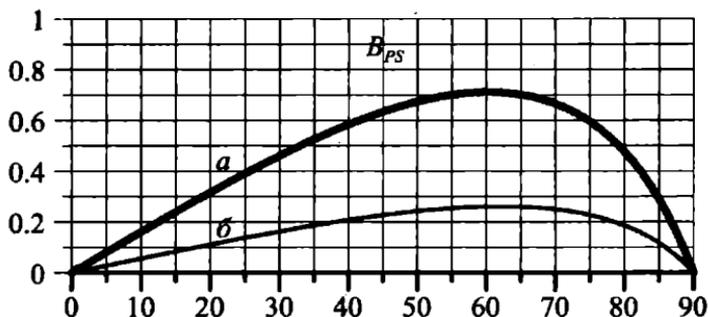


Рис. 10.4. Графики зависимости коэффициента прохождения B_{PS} от угла подхода:

а — «сильная» граница; *б* — «слабая» граница

10.3. Волны рассеивания, возбуждаемые Р-волной на кровле высокоскоростной среды

Рассмотрим теперь образование вторичных волн на границе раздела с более часто встречающимся соотношением волновых сопротивлений:

$$\gamma_{P1} < \gamma_{P2}, \quad \gamma_{S1} < \gamma_{S2}.$$

Этот случай является типичным для геологических разрезов с нормальным циклом осадконакопления, в которых горные породы с увеличением глубины залегания и возраста уплотняются и скорости упругих волн растут с глубиной. В зависимости от степени различия физических свойств контактирующих сред возможны два случая: «слабая» граница, когда лишь скорость P -волны в нижней среде больше её скорости в верхней среде — $V_{P2} > V_{P1}$, но $V_{P1} > (V_{S1}, V_{S2})$, и «сильная» граница, когда и скорость поперечной волны в нижней среде больше скорости P -волны в верхней: $V_{P2} > V_{S2} > V_{P1}$.

В первом случае существует лишь один критический угол падения $\alpha_{кР}$ для монотипной (PP) проходящей волны:

$$\alpha_{кР} = \arcsin \frac{V_{P1}}{V_{P2}}.$$

Во втором случае к этому углу добавляется другой критический угол для обменной (PS) проходящей волны:

$$\alpha_{kS} = \arcsin \frac{V_{P1}}{V_{S2}}.$$

Так как $V_{S2} < V_{P2}/\sqrt{2}$, $\sin \alpha_{kS} \geq \sqrt{2} \sin \alpha_{kP}$ – во всех случаях критический угол для обменной волны больше критического угла для моно-типной волны.

Пока угол падения первичной P -волны меньше критического $\alpha_P < \alpha_{kP}$, все СКР – действительные числа, амплитудные множители для вторичных волн, лишь при изменении знака меняющие направление смещения вторичной волны. За критическим углом все коэффициенты становятся комплексными величинами, имеющими независимую от частоты действительную часть $\Re(\alpha_P)$ и мнимую часть $\Im(\alpha_P)$, зависящую от частоты через знаковую функцию $\text{sgn}(\omega)$.

Как всегда, в таком случае вторичные волны становятся внутренне интерференционными и представляются взвешенной суммой первичной волны $U_{P1}(t)$ с весом $\Re(\alpha_P)$ и её Гильберт-трансформантой с весом $\Im(\alpha_P)$. Изменение весов слагаемых с увеличением α_P приводит к плавному, непрерывному изменению формы суммарных импульсов вторичных волн.

Поведение спектрального коэффициента отражения монотипной волны A_{PP} как функции угла падения α_P иллюстрируют рис. 10.5, 10.6, где изображены $A_{PP}(\alpha_P)$ для «сильной» (рис. 10.5) и «слабой» (рис. 10.6) отражающих границ. Параметры сред приведены в табл. 10.2 ниже.

Таблица 10.2. Параметры модели 2

Модель	V_{P1} , км/с	V_{S1} , км/с	ρ_1 , г/см ³	V_{P2} , км/с	V_{S2} , км/с	ρ_2 , г/см ³
Сильная граница	2.2	1.0	2.2	4.0	2.4	2.4
Слабая граница	2.2	1.0	2.2	2.6	1.4	2.4

Появляющаяся при $\alpha_P > \alpha_{kP}$ мнимая часть СКО $\Im\{A_{PP}\}$ обозначена тонкой линией.

В обоих случаях до критического угла $A_{PP}(\alpha_P)$ – действительная функция угла падения, отрицательная во всём диапазоне $\alpha_P \leq \alpha_{kP}$.

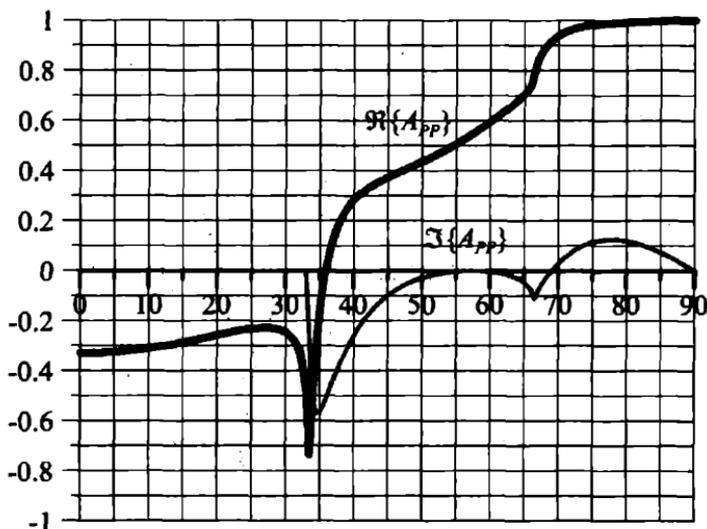


Рис. 10.5. Графики зависимости действительной и мнимой частей коэффициентов отражения A_{PP} от угла подхода для «сильной» границы

Примерно в $2/3$ этого интервала СКО изменяется незначительно, слегка приближаясь к нулю в середине интервала. Соответственно, в ближней к источнику зоне приёма отражённая волна является уменьшенной копией волны первичной (отражение происходит без потери полувольтны): $U_{P1}(t) = A_{PP}U_{P\downarrow}(t)$.

В последней трети интервала ($0 - \alpha_{KP}$) с приближением α_P к критическому углу скорость изменения $A_{PP}(\alpha_P)$ возрастает. При α_{KP} коэффициент отражения достигает максимального отрицательного значения, близкого к (-1) .

Значит, при критическом угле падения отражённая волна практически совпадает с первичной: $U_{P1}(t) = -U_{P\downarrow}(t)$.

Как только угол падения первичной волны превысит критический, $A_{PP}(\alpha_P)$ становится комплексной функцией:

$$\tilde{A}_{PP}(\alpha, \omega) = \Re\{A_{PP}(\alpha_P)\} + j \operatorname{sgn}(\omega) \Im\{A_{PP}(\alpha_P)\}.$$

Действительная часть СКО, равная примерно (-1) при $\alpha_P = \alpha_{KP}$, начинает уменьшаться по модулю, постепенно приближаясь к 0 с ростом

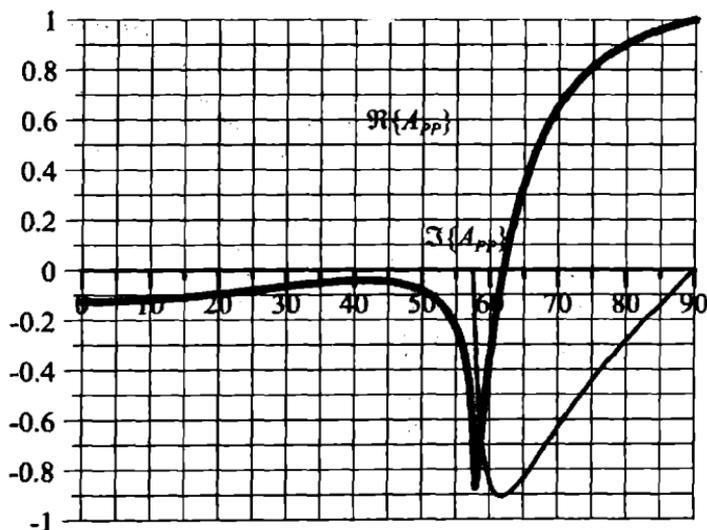


Рис. 10.6. Графики зависимости действительной и мнимой частей коэффициентов отражения A_{PP} от угла подхода для «слабой» границы

α_P . Одновременно (при $\alpha_P = \alpha_{KP}$) возникает и вначале быстро, а затем с замедлением нарастает по модулю мнимая часть СКО, стремясь к (-1) . При дальнейшем увеличении α_P действительная часть спадает до 0, а мнимая стремится к (-1) — при некотором угле α_{P0} коэффициент отражения становится чисто мнимым:

$$\tilde{A}_{PP}(\alpha, \omega) = j \operatorname{sgn}(\omega) \Im\{A_{PP}(\alpha_P)\}.$$

В дальней зоне, при $\alpha_P > \alpha_{P0}$, $\Re\{A_{PP}(\alpha_P)\}$ положительна и стремится к 1, а $\Im\{A_{PP}(\alpha_P)\}$ — к 0 при $\alpha_P = 90^\circ$.

Второй критический угол α_{KS} , существующий при $V_{S2} > V_{P1}$ (для «сильной» отражающей границы, кривая *a* рис. 10.5), проявляется на кривых лишь слабым локальным экстремумом и сменой знака $\Im\{A_{PP}\}$ с отрицательного на положительный.

В соответствии с поведением СКО $A_{PP}(\alpha_P)$ с изменением угла падения меняется роль компонент суммарной закритической отражённой волны $U_{P1}(t)$. В диапазоне углов $0 \leq \alpha_P \leq \alpha_{KP}$ отражённая волна подобна падающей. При превышении α_{KP} эта составляющая суммар-

ной волны затухает, а амплитуда Гильберт-трансформанты увеличивается. При $\alpha_P = \alpha_{P0}$ $\Re\{A_{PP}\} = 0$, $\Im\{A_{PP}\} = -1$ и отражённая волна представляет собой Гильберт-трансформанту первичного сигнала. С дальнейшим ростом α_P эта компонента суммарной волны затухает, а первичный сигнал, инвертировав знак смещения, возрастает по амплитуде. При $\alpha_P = 90^\circ$ $A_{PP} = 1$ и скользящая вдоль границы волна U_{P1} тождественна падающей, а амплитуда Гильберт-трансформанты равна нулю.

Обратим внимание на то, что зоной наиболее быстрых и существенных изменений отражённой волны является интервал углов падения, близких к критическому. Для «слабой» отражающей границы (рис. 10.6) этот интервал относительно велик, и изменения суммарной отражённой волны в нем происходят плавно. Напротив, для «сильной» границы интервал весьма узок, и изменение $U_{P1}(t)$ происходит достаточно быстро (рис. 10.5).

Поведение спектрального коэффициента прохождения B_{PP} монотипной волны $U_{P2}(t)$ при изменении угла падения первичной волны иллюстрируют рис. 10.7, 10.8. До критического угла $B_{PP}(\alpha_P)$ — действительная функция угла падения. При $\alpha_P = 0$ B_{PP} имеет значение тем меньшее, чем сильнее отражающие свойства границы. С увеличением α_P коэффициент прохождения B_{PP} с ускорением стремится к величине тем большей 1, чем слабее отражающая граница. Соответственно амплитуда проходящей волны при нормальном падении меньше амплитуды первичной волны. С ростом α_P амплитуда этой волны растёт, достигая максимума при $\alpha_P = \alpha_{KP}$.

За критическим углом действительная часть коэффициента прохождения $\Re\{B_{PP}(\alpha_P)\}$ уменьшается, стремясь в пределе, при $\alpha_P \rightarrow 90^\circ$, к 0. Как только угол падения превысит критический, у B_{PP} появляется мнимая часть $\Im\{B_{PP}(\alpha_P)\}$. С ростом угла падения её значения быстро увеличиваются, достигая максимума, а затем с замедлением спадают до 0 при $\alpha_P = 90^\circ$.

Как всегда, за критическим углом падения вторичная волна $U_{P2}(t)$ становится внутренне интерференционной и представляет собой сумму первичного сигнала с весом $\Re\{B_{PP}(\alpha_P)\}$ и его Гильберт-трансформанты с весом $\Im\{B_{PP}(\alpha_P)\}$. В соответствии с поведением этих весовых множителей, доля первичной волны в суммарном сигнале $U_{P2}(t)$, максимальная при $\alpha_P = \alpha_{KP}$, убывает с ростом угла падения и стремится к 0 при $\alpha_P \rightarrow 90^\circ$. Доля Гильберт-трансформанты,

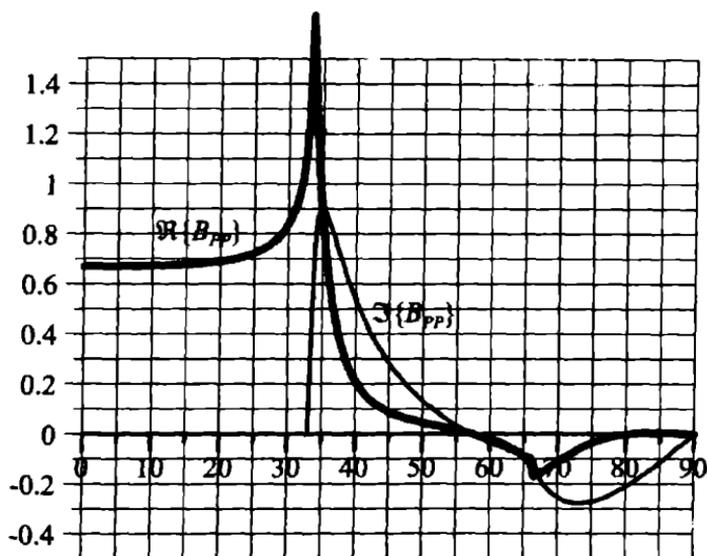


Рис. 10.7. Графики зависимости действительной и мнимой частей коэффициентов прохождения B_{PP} от угла подхода для «сильной границы»

напротив, растёт от 0 при $\alpha_P = \alpha_{KP}$ до некоторого максимального значения и лишь затем также убывает до нуля при $\alpha_P = 90^\circ$.

Напомним, что при критическом падении $\alpha_{P2} \rightarrow 90^\circ$, и проходящая волна скользит вдоль границы. При $\alpha_P > \alpha_{KP} \sin \alpha_{P2} > 1$, и волна $U_{P2}(t)$ превращается в неоднородную волну, скользящую вдоль границы со скоростью, меньшей истинной и имеющую затухающую с глубиной амплитуду. Интегральная сумма бесчисленного множества волн, возникающих при $\alpha_P > \alpha_{KS}$, формирует суммарную интерференционную волну, скользящую вдоль границы и возбуждающую в верхней среде преломлённую (головную) волну.

Второй критический угол падения P -волны $\alpha_P > \alpha_{KP}$, существующий при $V_{S2} > V_{P1}$ (для сильной границы) проявляется на кривых $\Re\{B_{PP}(\alpha_P)\}$, $\Im\{B_{PP}(\alpha_P)\}$ слабыми локальными экстремумами (рис. 10.7).

На рис. 10.9, 10.10, 10.11, 10.12 приведены графики зависимости СКР обменных волн от угла падения волны $U_{P\downarrow}(t)$ $A_{PS}(\alpha_P)$ и $B_{PS}(\alpha_P)$. В обоих рассматриваемых случаях при нормальном ($\alpha_P = 0$) и скользящем ($\alpha_P = 90^\circ$) падении первичной волны на границу

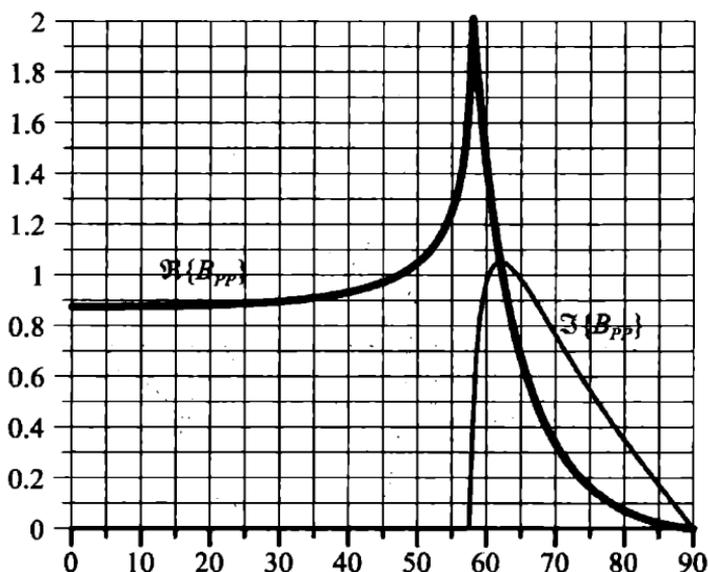


Рис. 10.8. Графики зависимости действительной и мнимой частей коэффициентов прохождения B_{PP} от угла подхода для «слабой границы»

обменных волн не возникает. При наклонном падении с увеличением угла α_P амплитуды обменных SV -волн растут с увеличением угла. Критический угол $\alpha_{кP}$ отражается локальными экстремумами кривых. В закритической зоне СКР обменных волн становятся комплексными, а сами волны – внутренне интерференционными.

Отметим значительное увеличение компонент этих волн в закритической зоне. Для «сильной» границы $\Re\{A_{PS}\}$ приближается примерно к (-1) , $\Re\{B_{PS}\}$ – к 0.5 примерно в середине закритического интервала $\alpha_{кP} < \alpha_P < 90^\circ$. Одновременно возрастают и их мнимые части: $\Im\{A_{PS}\}$ достигает 0.5, а $\Im\{B_{PS}\}$ – 0.2.

Для «слабой» границы закритические экстремумы СКР обменных волн также существуют, но выражены слабее (рис. 10.10 и 10.12).

Как всегда, при критическом угле падения и углах, больших его, возникают скользящие вдоль границы волны U_{P2} , порождающие в верхней среде обменные головные (преломлённые) волны. Из-за значительной величины $\alpha_{кS}$ эти волны регистрируются в дальней от источника зоне.

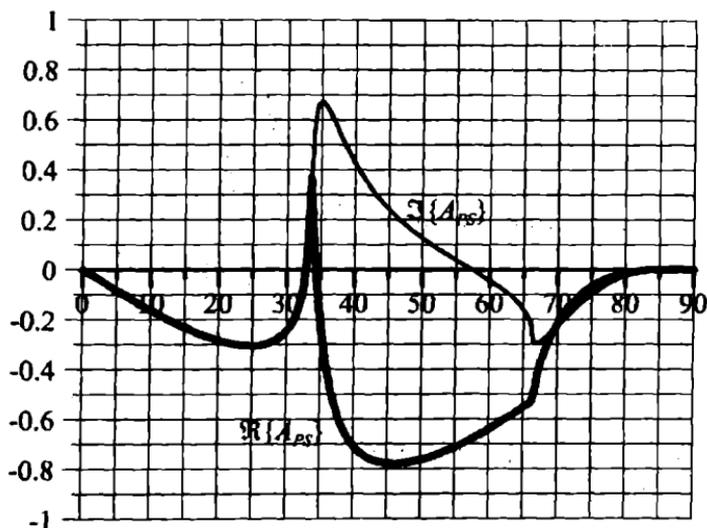


Рис. 10.9. Графики зависимости действительной и мнимой частей коэффициентов отражения A_{PS} от угла подхода для «сильной» границы

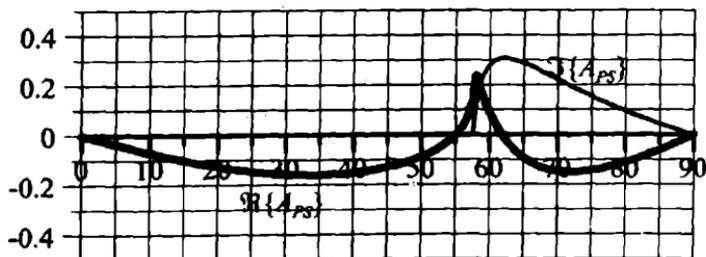


Рис. 10.10. Графики зависимости действительной и мнимой частей коэффициентов отражения A_{PS} от угла подхода для «слабой» границы

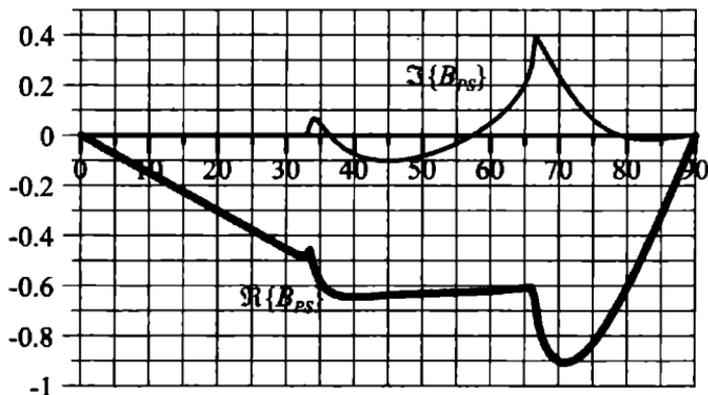


Рис. 10.11. Графики зависимости действительной и мнимой частей коэффициентов прохождения B_{PS} от угла подхода для «сильной» границы

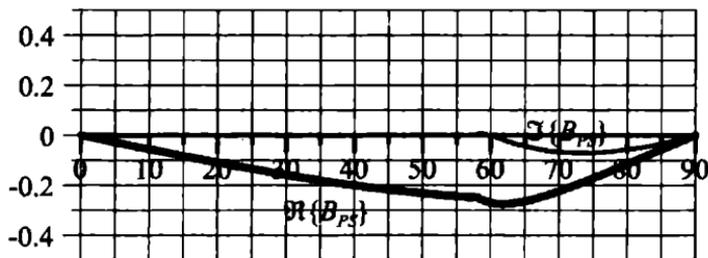


Рис. 10.12. Графики зависимости действительной и мнимой частей коэффициентов прохождения B_{PS} от угла подхода для «слабой» границы

Глава 11. Отражение и прохождение поперечной вертикально поляризованной плоской волны

Сейсморазведка на поперечных волнах проводится относительно редко, но вертикально поляризованная поперечная волна (SV) всегда возникает при косом ($\alpha \neq 0$) падении на границу P -волны, как обменная. Кроме того, интерес к SV -волнам в последнее время возрастает в связи с внедрением так называемой многоволновой сеймики, основанной на регистрации всех типов волн.

11.1. Уравнения Цёппритца для SV -волны

Падающей на границу сверху SV -волне в обобщённых уравнениях Цёппритца (см. гл.9) соответствуют спектральные коэффициенты отражения (СКО) A_{SP} (для обменной волны) и A_{SS} (для монотипной волны) и спектральные коэффициенты прохождения (СКП) B_{SP} и B_{SS} (для обменной и монотипной волн). Они расположены во второй колонке ($j = 2$) матрицы коэффициентов рассеивания (СКР) – C_{ij} . Правая часть уравнений R_{i2} формируется из второй колонки матрицы L_{i2} левых частей уравнений:

$$R_{i2} = (-1)^{i+2} \cdot L_{i2}.$$

Общая матричная форма уравнений Цёппритца для SV -волны имеет вид

$$C_{i2} \cdot L_{i2} = R_{i2}.$$

Она раскрывается в виде четырёх уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{SP} \cdot \sin \alpha_{P1} - A_{SS} \cdot \cos \alpha_{S1} + B_{SP} \cdot \sin \alpha_{P2} + B_{SS} \cdot \cos \alpha_{S2} = \\ \hspace{20em} = \cos \alpha_{S1}; \\ A_{SP} \cdot \cos \alpha_{P1} + A_{SS} \cdot \sin \alpha_{S1} - B_{SP} \cdot \cos \alpha_{P2} + B_{SS} \cdot \sin \alpha_{S2} = \\ \hspace{20em} = \sin \alpha_{S1}; \\ A_{SP} \cdot \gamma_{P1} \cdot \cos 2\alpha_{S1} + A_{SS} \cdot \gamma_{S1} \cdot \sin 2\alpha_{S1} + B_{SP} \cdot \gamma_{P2} \cdot \cos 2\alpha_{S2} - \\ \hspace{10em} - B_{SS} \cdot \gamma_{S2} \cdot \sin 2\alpha_{S2} = -\gamma_{S1} \cdot \sin 2\alpha_{S1}; \\ -A_{SP} \cdot n_1 \gamma_{S1} \cdot \sin 2\alpha_{P1} + A_{SS} \cdot \gamma_{S1} \cdot \cos 2\alpha_{S1} + B_{SP} \cdot n_2 \gamma_{S2} \cdot \sin 2\alpha_{P2} + \\ \hspace{10em} + B_{SS} \cdot \gamma_{S2} \cdot \cos 2\alpha_{S2} = \gamma_{S1} \cdot \cos 2\alpha_{S1}. \end{array} \right.$$

Напомним, что $\gamma_S = V_S \cdot \rho$, $\gamma_P = V_P \cdot \rho$ — волновые сопротивления (акустические жёсткости) для поперечных и продольных волн соответственно, $n = \frac{V_S}{V_P}$ — отношение скоростей P - и S -волн, ρ — плотность пород.

При нормальном падении ($\alpha = \alpha_{S1} = 0$) все углы равны нулю, и уравнения принимают вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} -A_{SS} + B_{SS} = 1 \quad (\text{или } B_{SS} = 1 + A_{SS}); \\ A_{SP} + B_{SP} = 0 \\ A_{SP} \cdot \gamma_{S1} + B_{SP} \cdot \gamma_{S2} = 0 \end{array} \right\} (\text{или } A_{SP} = B_{SP} = 0);$$

$$A_{SS} \cdot \gamma_{S1} + B_{SS} \cdot \gamma_{S2} = \gamma_{S1}.$$

Из первого и четвёртого уравнений получаем обычные для $\alpha = 0$ формулы:

$$A_{SS} = \frac{\gamma_{S1} - \gamma_{S2}}{\gamma_{S1} + \gamma_{S2}}; \quad B_{SS} = \frac{2\gamma_{S1}}{\gamma_{S1} + \gamma_{S2}}.$$

Особенностью рассматриваемого случая является обязательное наличие критического угла $\alpha_{кр1}$ для отражённой обменной SP -волны:

$$\alpha_{кр1} = \arcsin \frac{V_{S1}}{V_{P1}} \leq 45^\circ, \quad \text{так как } \frac{V_{S1}}{V_{P1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Переход угла падения через критический ($\alpha > \alpha_{кр1}$) делает все СКР комплексными:

$$\tilde{C} = \Re\{C\} + j \cdot \Im\{C\} \cdot \text{sgn}(\omega),$$

а все вторичные волны – внутренне интерференционными:

$$U_2(t) = \Re\{C\} \cdot U(t) + \Im\{C\} \cdot U_{\mathcal{H}}(t),$$

представимыми взвешенной суммой первичной волны $U(t)$ и её Гильберт-трансформанты $U_{\mathcal{H}}(t)$. Изменение весов $\Re\{C\} = \Re\{C(\alpha)\}$ и $\Im\{C\} = \Im\{C(\alpha)\}$ приводит к непрерывному изменению волновых импульсов вторичных волн.

Поэтому закритическая зона, в которой происходят существенные трансформации вторичных волн, находится на не так уж удалённых от источника расстояниях:

$$\frac{x}{2h} = \operatorname{tg} \alpha, \text{ и при } \alpha = 45^\circ : x \leq 2h.$$

Отношение скоростей $\frac{V_S}{V_P}$ определяется коэффициентом Пуассона:

$$\frac{V_S}{V_P} = \sqrt{\frac{1-2\sigma}{2-2\sigma}}, \text{ где } 0 \leq \sigma \leq 0.5.$$

При $\sigma = 0.1$: $\frac{V_S}{V_P} = 0.667$ и $\alpha_{\text{кр}1} = 41.8^\circ$, $x = 1.789h$,

а при $\sigma = 0.4$: $\frac{V_S}{V_P} = 0.408$ и $\alpha_{\text{кр}1} = 23.1^\circ$, $x = 0.894h$.

Критический угол $\alpha_{\text{кр}1}$ – единственный лишь в том случае, когда $V_{S1} > (V_{P2}, V_{S2})$. Такое соотношение скоростей (рис. 11.1) встречается довольно редко при падении на границу первичной волны сверху, но является достаточно распространённым для случая, когда она подходит снизу.

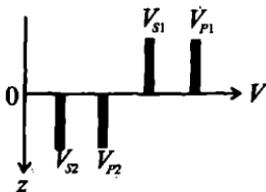


Рис. 11.1.

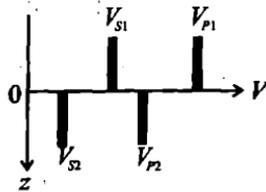


Рис. 11.2.

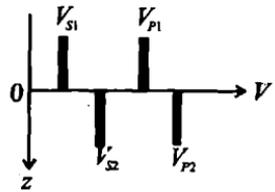


Рис. 11.3.

Если различия скоростей в верхней и нижней средах не так велики, и $V_{S1} > V_{S2}$, но $V_{S1} < V_{P2}$ (рис. 11.2), то к углу $\alpha_{кр1}$ добавляется второй критический угол $\alpha_{кр2}$ для проходящей обменной волны:

$$\alpha_{кр2} = \arcsin \frac{V_{S1}}{V_{P1}}.$$

Такой случай является достаточно распространённым и соответствует перерывам в осадконакоплении и границам размыва.

Наконец, если и скорость монопольной проходящей волны больше скорости падающей волны $U_{S1}(t) - V_{S2} > V_{S1}$ (рис. 11.3), то возникает и третий критический угол для проходящей S -волны:

$$\alpha_{кр3} = \arcsin \frac{V_{S1}}{V_{S2}}.$$

Такая ситуация типична для обычного скоростного разреза, соответствующего нормальному циклу осадконакопления, когда скорости P - и SV -волн растут с увеличением глубины залегания пород.

Произведём цифровые оценки критических углов и соответствующих им относительных удалений $x/h = 2 \operatorname{tg} \alpha_{кр}$ для различных моделей контактирующих на границе сред (табл. 11.1).

Варианты 1 – 3 соответствуют рисункам 11.1 – 11.3, а последний вариант 4 является моделью границы в верхней части разреза, где изменения физических свойств могут быть значительными, а также более глубокой границы между породами, насыщенными жидкостью, и консолидированными сухими породами.

Как видно из этих оценок, наличие трёх критических углов падения SV -волны на границу – скорее правило, чем исключение из правил. Обратим внимание на то, что соответствующие этим углам относительные удаления x/h могут быть достаточно малыми. Поэтому для SV -волны усложнения вторичных волн, присущих закритическим зонам, могут проявляться на относительно малых x/h .

Ещё раз подчеркнём, что критический угол $\alpha_{кр1}$ для отражённой обменной волны – обязательная особенность рассматриваемого случая падения SV -волны на границу.

11.2. Волны рассеивания, возбуждаемые SV-волной на границе

Таблица 11.1: Оценки критических углов и относительных удалений

№ п/п	V_{P1} , км/с	V_{S1} , км/с	ρ_1 , г/см ³	V_{P2} , км/с	V_{S2} , км/с	ρ_2 , г/см ³	$\alpha_{кр1}$, град.	x/h	$\alpha_{кр2}$, град.	x/h	$\alpha_{кр3}$, град.	x/h
1	5.12	2.0	2.5	1.98	0.6	2.2	23	0.85				
2	4.09	1.6	2.4	3.02	0.9	2.3	23	0.85	32	1.25		
3	2.91	0.9	2.3	4.01	1.61	2.4	18	0.65	13	0.46	34	1.35
4	2.05	0.6	2.2	4.92	2.32	2.5	17	0.61	7	0.25	15	0.54

На следующих страницах представлены графики СКР для двух моделей контактирующих на границе сред. Параметры их приведены в строках 2 и 3 табл. 11.1 и изображены на рис. 11.2 и 11.3.

На всех графиках действительные СКР и действительные части комплексных коэффициентов изображены толстой, а мнимые – тонкой линиями. Значения СКР для предельных углов падения (0° и 90°) во всех случаях одинаковы:

при $\alpha = 0^\circ$: $A_{SP} = B_{SP} = 0$,
 $B_{SS} = 1 + A_{SS}$;

при $\alpha = 90^\circ$: $A_{SP} = B_{SP} = 0$,
 $B_{SS} = 0$, $A_{SS} = 1$.

На рис. 11.4, 11.5, 11.6, 11.7 представлены графики СКР для второго набора параметров (см. табл. 11.1, строка 2 и рис. 11.2): $V_{S2} < V_{S1} < V_{P2} < V_{P1}$.

Такое соотношение скоростей на практике встречается довольно часто.

В этом случае существуют два критических угла для обменных волн: отражённой $\alpha_{кр1} = \arcsin \frac{V_{S1}}{V_{P1}} = 23^\circ$ и проходящей $\alpha_{кр2} = \arcsin \frac{V_{S1}}{V_{P2}} = 32^\circ$.

Этим углам соответствуют относительные удаления x/h , равные примерно 0.85 и 1.32.

При нормальном падении отражённая монотипная волна втрое слабее первичной ($A_{SS} = 0.3$). Амплитуда проходящей S-волны на треть больше неё ($B_{SS} = 1.3$). Как всегда, при $\alpha = \alpha_S = 0$ обменных волн не возникает. С

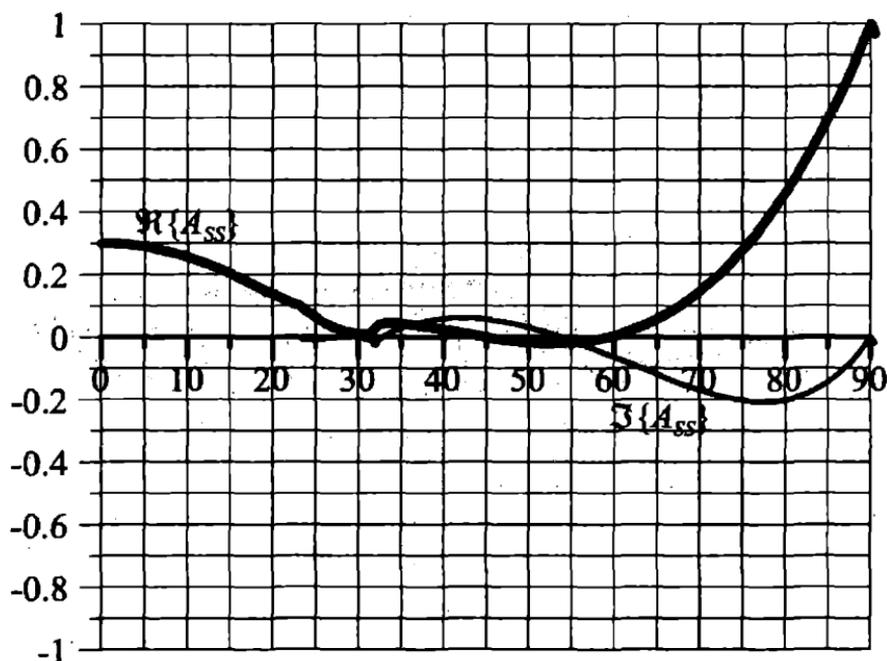


Рис. 11.4. Графики зависимости действительной и мнимой частей коэффициентов отражения A_{SS} SV -волны от угла подхода. Случай $V_{S2} < V_{S1} < V_{P2} < V_{P1}$

ростом α_S , в докритической зоне, $A_{SS}(\alpha)$ с ускорением уменьшается и к критическому углу достигает значения 0. $B_{SS}(\alpha)$ в этой зоне почти постоянен на уровне 1.3. $A_{SP}(\alpha)$ и $B_{SP}(\alpha)$ отрицательны и растут по модулю от 0 до примерно 0.15.

Первый критический угол $\alpha_{кр1}$ отмечен очень слабым локальным максимумом A_{SS} и более сильным минимумом $A_{SP}(\alpha)$, а также максимумами коэффициентов прохождения $B_{SS}(\alpha)$ и $B_{SP}(\alpha)$. При $\alpha = \alpha_{кр1}$ отражённая P -волна скользит вдоль границы.

Переход угла падения через $\alpha_{кр1}$ приводит к традиционным последствиям: к комплексным СКР, к внутренне интерференционным вторичным волнам и к образованию неоднородной волны $U_{P2}(t)$, скользящей вдоль границы со скоростью, меньшей истинной V_{P2} .

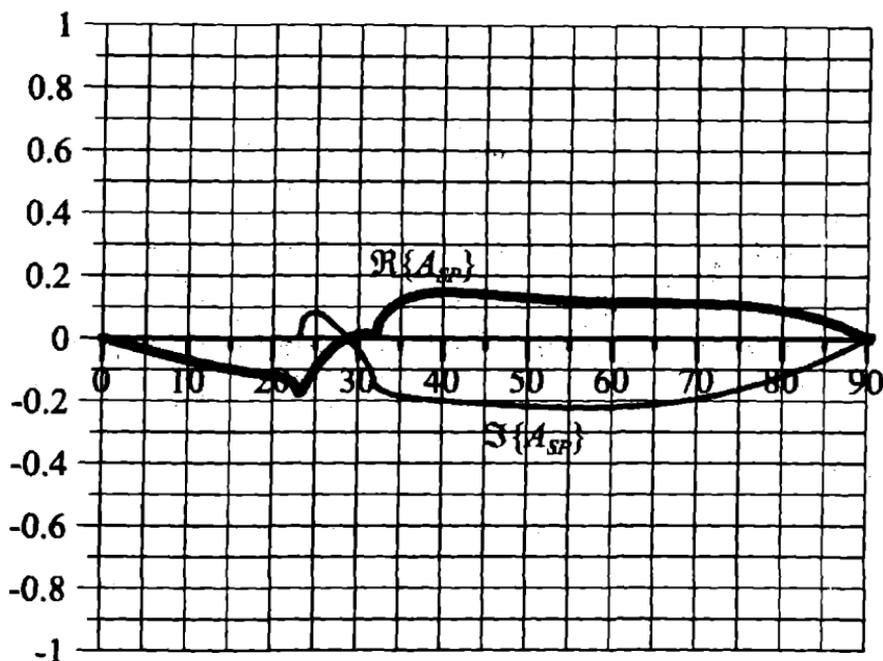


Рис. 11.5. Графики зависимости действительной и мнимой частей коэффициентов отражения A_{SP} SV-волны от угла подхода. Случай $V_{S2} < V_{S1} < V_{P2} < V_{P1}$

Между критическими углами $\alpha_{кр1}$ и $\alpha_{кр2}$, при $\alpha \approx 29^\circ$ оба коэффициента отражения A_{SS} и A_{SP} обращаются в нуль. Также обнуляются в этой точке мнимые части коэффициентов прохождения, а обе компоненты A_{SP} и мнимые части B_{SS} и B_{SP} при переходе через этот угол меняют знак. Обратим внимание на то, что в обширном диапазоне углов от 29° до 60° монотипная отражённая волна очень слаба: обе компоненты A_{SS} не превышают по модулю 0.1. Напротив, $\Re\{B_{SS}\}$ в этой зоне больше единицы, а $\Im\{B_{SS}\}$ - больше 0.15.

Второй критический угол $\alpha_{кр2} = 32^\circ$ для проходящей обменной волны проявляется на фоне влияния первого критического угла $\alpha_{кр1}$ в виде слабых локальных экстремумов или перегибов кривых СКР.

В закритической зоне $\alpha > \alpha_{кр2}$ все СКР меняются очень плавно. Отметим, что обе компоненты A_{SS} ещё раз обращаются в нуль при

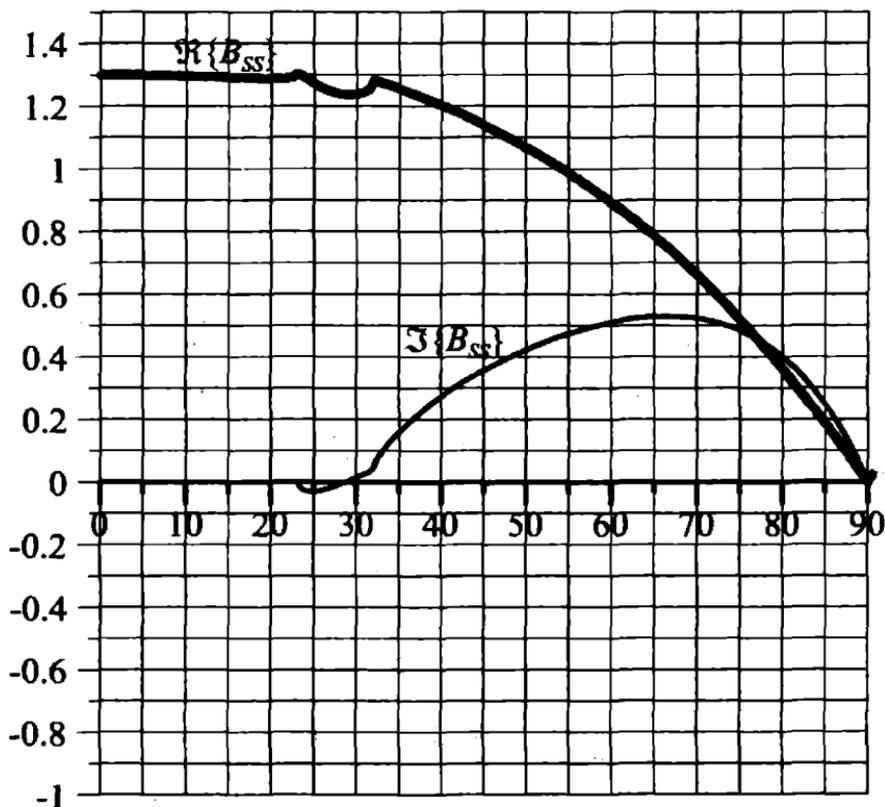


Рис. 11.6. Графики зависимости действительной и мнимой частей коэффициентов прохождения B_{SS} SV-волны от угла подхода. Случай $V_{S2} < V_{S1} < V_{P2} < V_{P1}$

$\alpha \simeq 56^\circ$, меняя знак при переходе α_S через эту точку: при меньших углах $\Re\{A_{SS}\} < 0$, $\Im\{A_{SS}\} > 0$; при больших — наоборот, $\Re\{A_{SS}\} > 0$, $\Im\{A_{SS}\} < 0$. Подобные изменения происходят и с мнимой частью коэффициента прохождения при $\alpha \simeq 63^\circ$: при меньших углах $\Im\{B_{SS}\}$ положительна, при больших — отрицательна.

В пределе, при $\alpha \rightarrow 90^\circ$ $A_{SS}(\alpha)$ стремится к 1, а остальные СКР — к нулю.

Рис. 11.8, 11.9, 11.10, 11.11 иллюстрируют поведение СКР в случае, когда $V_{S1} < V_{S2} < V_{P1} < V_{P2}$ (см. табл. 11.1, строка 3 и рис. 11.3). Это

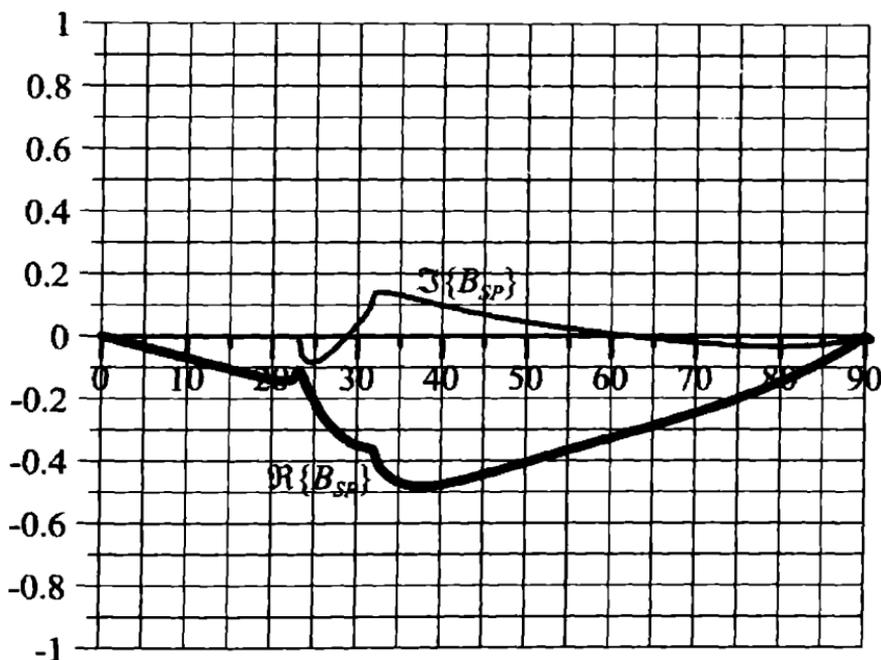


Рис. 11.7. Графики зависимости действительной и мнимой частей коэффициентов прохождения B_{SP} SV-волны от угла подхода.

Случай $V_{S2} < V_{S1} < V_{P2} < V_{P1}$

наиболее часто встречающийся случай, когда с увеличением глубины растут плотности и скорости горных пород, и приращения параметров на границе невелики. В этом случае существуют три критических угла: для обменной отражённой $\alpha_{кр1} = 18^\circ$, $x/h \simeq 0.65$ и проходящей — $\alpha_{кр2} = 13^\circ$, $x/h \simeq 0.46$ — волн, а также для монотипной проходящей волны — $\alpha_{кр3} = 34^\circ$, $x/h \simeq 1.65$.

При нормальном падении отражённая S-волна втрое слабее падающей ($A_{SS} = -0.302$) и обратна ей по знаку смещения. Проходящая волна $U_{S2}(t)$ имеет амплитуду на треть слабее амплитуды $U_{S1}(t)$ ($B_{SS} = 0.698$). Обменных волн, как обычно при $\alpha = 0$, нет.

В ближней зоне, при малых α амплитуда волны $U_{S1}(t)$ вначале медленно, а затем всё быстрее убывает: график $A_{SS}(\alpha)$ имеет экстремум при $\alpha = \alpha_{кр2}$, равный -0.08 (минимум амплитуды вторичной

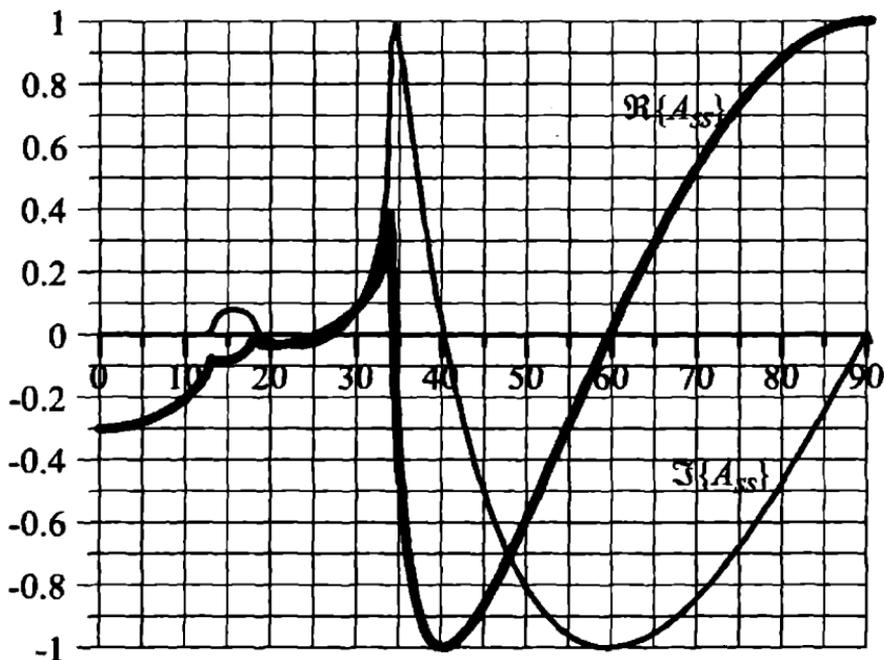


Рис. 11.8. Графики зависимости действительной и мнимой частей коэффициентов отражения A_{SS} SV-волны от угла подхода. Случай $V_{S1} < V_{S2} < V_{P1} < V_{P2}$

волны). Проходящая S-волна почти постоянна по амплитуде, а её экстремум при $\alpha = \alpha_{кр2}$ очень слабо выражен. Отражённая обменная P-волна также слаба — $A_{SP}(\alpha)$ меняется от 0 при нормальном падении до 0.055 перед критическим углом. Слаба и проходящая P-волна, но перед $\alpha = \alpha_{кр2}$ её амплитуда несколько возрастает. Заметим, что $\alpha = \alpha_{кр2}$ выделяется на кривой $A_{SS}(\alpha)$ минимумом, а все остальные СКО — максимумом.

Как только угол падения превышает $\alpha_{кр2} = 13^\circ$, все СКР становятся комплексными с обычными последствиями для вторичных волн в закритической зоне.

Для выбранных параметров разреза второй критический угол $\alpha_{кр1} = 18^\circ$ для отражённой обменной волны превышает $\alpha_{кр2}$ всего на 5° . В этой узкой зоне амплитуда волны $U_{S1}(t)$ очень мала: компоненты

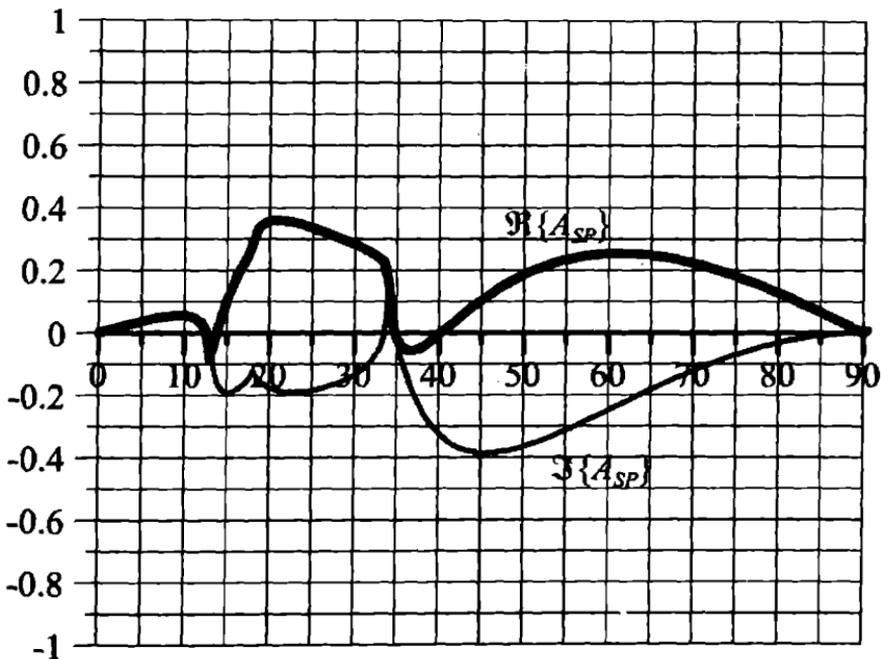


Рис. 11.9. Графики зависимости действительной и мнимой частей коэффициентов отражения A_{SP} SV-волны от угла подхода. Случай $V_{S1} < V_{S2} < V_{P1} < V_{P2}$

A_{SS} не превышают по модулю 0.1. Зона малых амплитуд этой волны продолжается вплоть до $\alpha = 28^\circ$.

Проходящая монотипная волна $U_{S2}(t)$ значительно больше по амплитуде: $\Re\{B_{SS}\}$ слабо растёт от 0.732 до 0.761, $\Im\{B_{SS}\}$ меняется от 0.19 до -0.029 . Из-за этого волна $U_{S2}(t)$ всего на четверть слабее первичной и почти подобна ей по форме волнового импульса — ведь множитель перед Гильберт- трансформантой исходного сигнала в 30 и более раз меньше множителя перед самим сигналом ($\Im\{B_{SS}\} \gg \Re\{B_{SS}\}$).

В зоне $\alpha_{кр2} \div \alpha_{кр1}$ обменные волны изменяются по-разному. Отражённая волна растёт по амплитуде: $\Re\{A_{SP}\}$ меняется от 0 при $\alpha \approx 13^\circ$ до 0.25 при $\alpha = 18^\circ$. $\Im\{A_{SP}\}$ убывает от 0.25 до 0.005. Проходящая волна затухает: $\Re\{B_{SP}\}$ уменьшается от 0.25 до 0.005, $\Im\{B_{SP}\}$ меняется от -0.16 до 0.128.

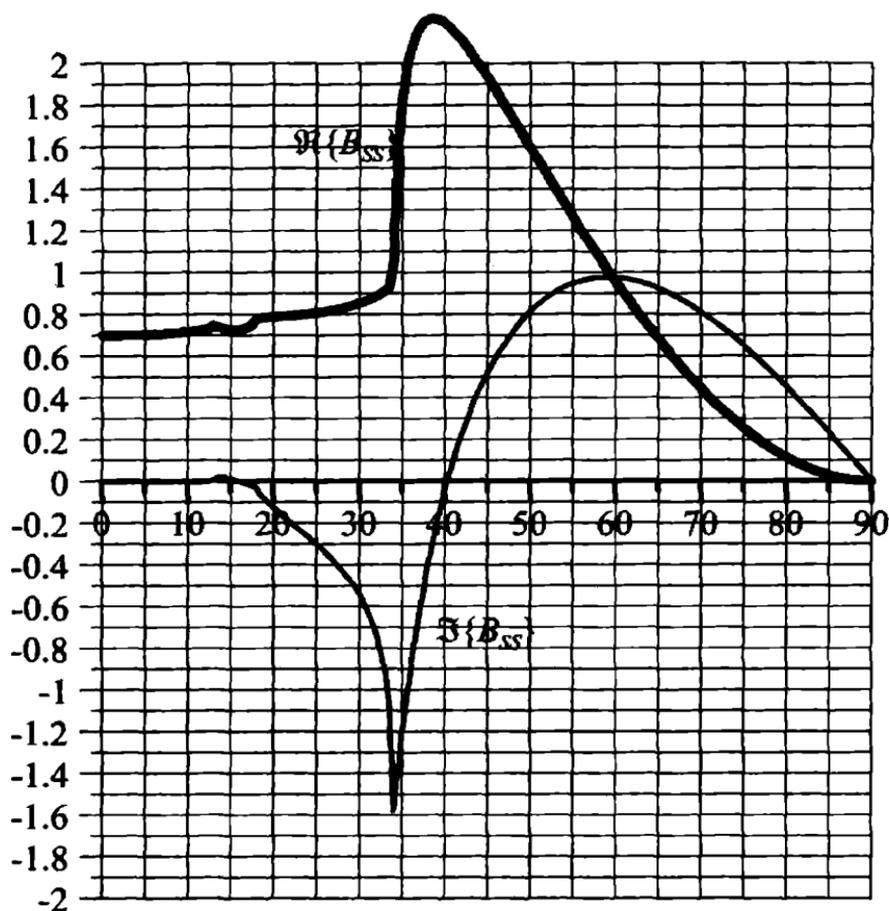


Рис. 11.10. Графики зависимости действительной и мнимой частей коэффициентов прохождения B_{SS} SV-волны от угла подхода. Случай $V_{S1} < V_{S2} < V_{P1} < V_{P2}$

Второй критический угол $\alpha_{кр2} = 18^\circ$ для отражённой обменной волны отмечен слабыми и узкими экстремумами на кривых СКО. Начиная с этого угла, мнимая часть B_{SS} с ускорением растёт по модулю. $\Re\{B_{SS}\}$ увеличивается слабее.

Наиболее резко выражен третий критический угол $\alpha_{кр3} = 34^\circ$ для волны $U_{S2}(t)$. Отражённая S-волна, имевшая до этого почти нулевую

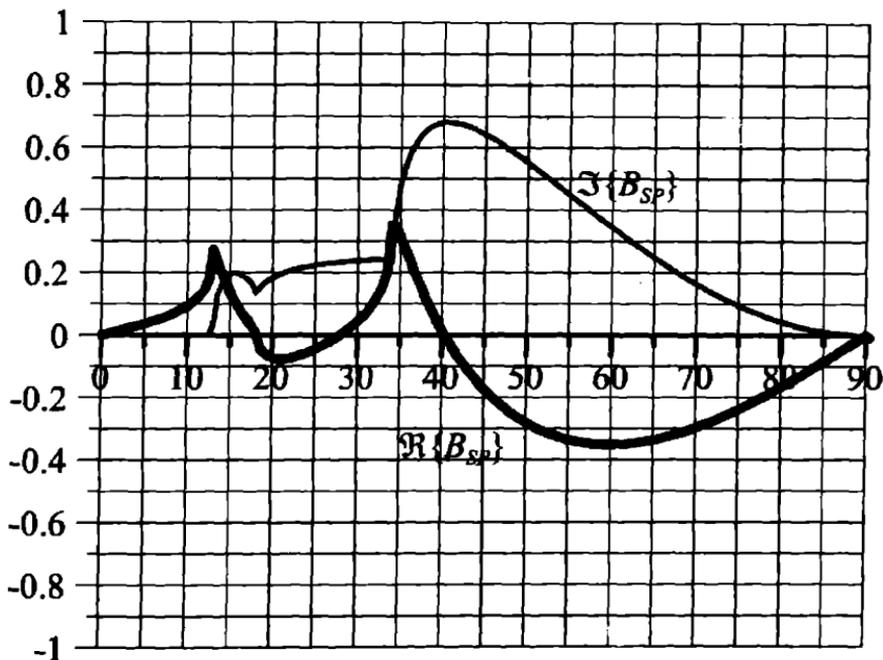


Рис. 11.11. Графики зависимости действительной и мнимой частей коэффициентов прохождения B_{SP} SV-волны от угла подхода. Случай $V_{S1} < V_{S2} < V_{P1} < V_{P2}$

амплитуду, начиная примерно с 28° увеличивается по амплитуде: $\Re\{A_{SS}\}$ растёт до 0.5, $\Im\{A_{SS}\}$ — до 1 при $\alpha = \alpha_{кр3}$. Максимум кривой $\Re\{A_{SS}\}$ очень узкий, кривая тут же спадает до 0 и устремляется к минимуму: при $\alpha = 40.6^\circ$ — $\Re\{A_{SS}\} = -1$. Максимум мнимой части A_{SS} более широк и чуть смещён относительно максимума $\Re\{A_{SS}\}$, располагаясь в точке, где $\Re\{A_{SS}\} = 0$. Для монотипной волны при $\alpha > \alpha_{кр3}$ происходит полное внутреннее отражение, и $\Re^2\{A_{SS}\} + \Im^2\{A_{SS}\} = 1$. Заметим, что угол 40.6° является особым для всех вторичных волн. Обе поперечные волны $U_{S1}(t)$ и $U_{S2}(t)$ подобны падающей $U_{S1}(t)$, так как $\Im\{A_{SS}\} = \Im\{B_{SS}\} = 0$. Обе продольные волны $U_{P1}(t)$ и $U_{P2}(t)$ подобны Гильберт-трансформанте первичной волны, так как $\Re\{A_{SP}\} = \Re\{B_{SP}\} = 0$.

Зона углов, больших 40.6° , является областью достаточно плавного изменения СКР. Коэффициент отражения $A_{SS}(\alpha)$ характеризуется широким минимумом мнимой части, которая достигает значения -1 при $\alpha = 57.5^\circ$. $\Re\{A_{SS}\}$ при этом обращается в 0, изменяясь от -1 при $\alpha = 40.6^\circ$ до $+1$ при $\alpha = 90^\circ$. $\Im\{A_{SS}\}$ изменяется от -1 до 0 (при $\alpha \rightarrow 90^\circ$). Компоненты обменных волн существенно слабее. Лишь критический угол $\alpha_{кр3}$ отмечен узкими максимумами $\Im\{A_{SP}\}$ и $\Re\{A_{SP}\}$. При $\alpha = 57.5^\circ$ $\Re\{A_{SP}\}$ имеет максимум (≈ 0.25), а $\Re\{B_{SP}\}$ — минимум (≈ -0.35). В пределе при $\alpha \rightarrow 90^\circ$ A_{SP} и B_{SP} стремятся к нулю.

В заключение рассмотрим практически важный случай границы с весьма резким скачком упругих свойств, характерным для подошвы верхней части разреза: $V_{S1} < V_{P1} < V_{S2} < V_{P2}$. Рис. 11.12, 11.13, 11.14, 11.15 иллюстрируют поведение СКР SV -волны для такой границы. Для принятых в расчёте параметров (см. табл. 11.1, строка 4) существуют три критических угла: $\alpha_{кр2} = 7^\circ$, $\alpha_{кр3} = 15^\circ$ и $\alpha_{кр1} = 17^\circ$. Поскольку скорости $V_{P1} = 2.05 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ и $V_{S2} = 2.32 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ близки, критические углы $\alpha_{кр1}$ и $\alpha_{кр3}$ отмечены на графиках СКР единым экстремумом. Лишь $\Re\{B_{SS}(\alpha)\}$ и $\Im\{B_{SP}(\alpha)\}$ имеют два экстремума: минимум при $\alpha = \alpha_{кр3}$ и максимум вблизи $\alpha_{кр1}$ ($\alpha_{\text{max}} > \alpha_{кр1}$).

При нормальном падении $A_{SS} = -0.629$ — отражённая S -волна всего лишь на треть слабее первичной и инвертирована по знаку смещения. Соответственно, $B_{SS} = 0.371$ — проходящая S -волна — почти втрое слабее волны $U_{S\downarrow}(t)$. Обменных волн, естественно, нет.

Зона почти постоянного значения A_{SS} очень узка — уже при $\alpha = 3^\circ$ ($x/h = 0.1$) начинается вначале медленное, затем всё более быстрое уменьшение СКО к первому критическому углу $\alpha_{кр2}$. При достижении этого угла $A_{SS}(\alpha_{кр2}) = -0.242$. Этот острый максимум кривой соответствует минимальной амплитуде отражённой волны, так как она расположена в области отрицательных значений СКО.

Проходящая поперечная волна в докритической зоне имеет почти постоянную амплитуду ($B_{SS} = 0.37 \div 0.38$). Лишь в непосредственной близости к $\alpha_{кр2}$ СКП возрастает, и при $\alpha = \alpha_{кр2}$ $B_{SS} = 0.485$.

Обменные волны в этой зоне ведут себя по-разному. Амплитуда проходящей волны с ускорением возрастает — B_{SP} достигает 0.36 при $\alpha = \alpha_{кр2}$. Отражённая волна имеет максимальную амплитуду ($A_{SP} = 0.07$) при меньших углах ($\alpha = 5.5^\circ$), а угол $\alpha_{кр2}$ отмечен на кривой $A_{SP}(\alpha)$ локальным минимумом ($A_{SP} = -0.085$). Отметим, что во всех случаях амплитуды обменных волн весьма малы в этой зоне.

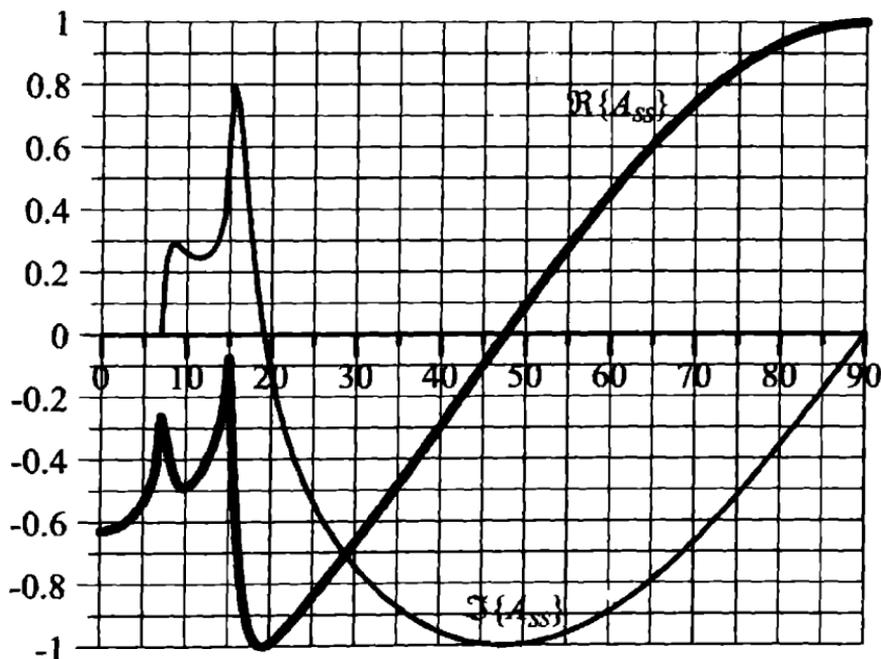


Рис. 11.12. Графики зависимости действительной и мнимой частей коэффициентов отражения A_{SS} SV-волны от угла подхода. Случай $V_{S1} < V_{P1} < V_{S2} < V_{P2}$

Переход угла падения через $\alpha_{кр2}$ приводит к традиционным следствиям — комплексным СКР и внутренне интерференционным волнам, а также к образованию преломлённой (головной) волны.

В первой межкритической зоне между $\alpha_{кр2}$ и $\alpha_{кр3}$ при угле падения $\alpha = 9.9^\circ$ $\Im\{B_{SS}(\alpha)\} = 0$, и проходящая S-волна по форме импульса подобна падающей. При $\alpha = 12.5^\circ$ $\Im\{A_{SP}(\alpha)\} = 0$, т.е. отражённая S-волна подобна $U_{S1}(t)$. Во всех остальных точках этой зоны вторичные волны внутренне интерференционны и представлены взвешенной суммой сигнала и его Гильберт-трансформанты.

При критическом угле падения $\alpha = \alpha_{кр3}$ коэффициенты имеют экстремальные значения: максимумы $\Re\{A_{SP}\} = 0.526$ и $\Re\{A_{SS}\} = -0.037$ и минимумы $\Im\{B_{SP}\} = 0.137$ и $\Re\{B_{SS}\} = 0.28$. Экстремумы остальных компонент СКР несколько смещены в сторону больших углов па-

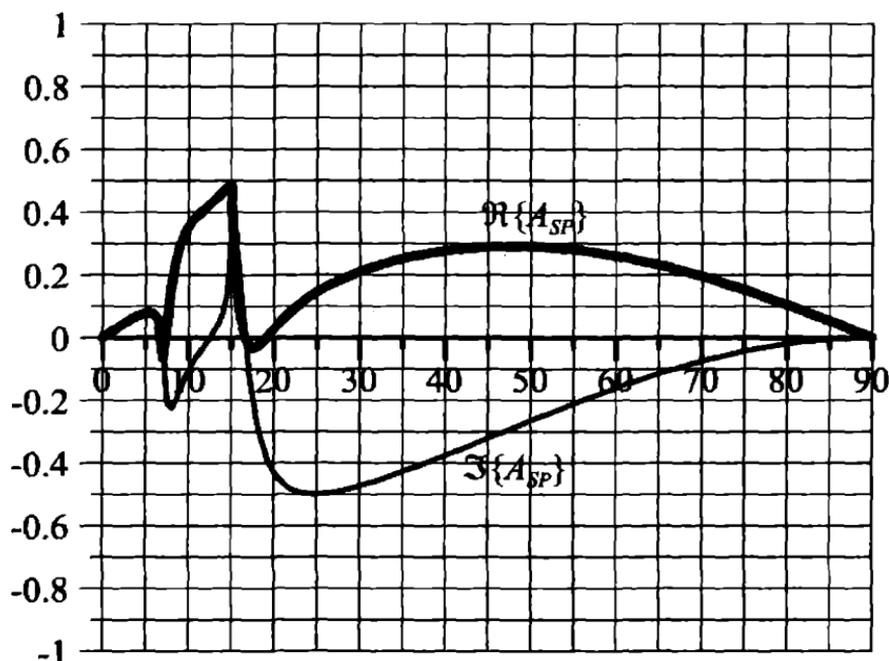


Рис. 11.13. Графики зависимости действительной и мнимой частей коэффициентов отражения A_{SP} SV -волны от угла подхода.

Случай $V_{S1} < V_{P1} < V_{S2} < V_{P2}$

дения: максимумы $\Im\{A_{SP}\}(15.2^\circ) = 0.355$, $\Im\{A_{SS}\}(15.1^\circ) = 0.79$ и $\Re\{B_{SP}\}(15.4^\circ) = 0.27$ и минимум $\Re\{B_{SS}\}(15.4^\circ) = -0.85$. Напомним, что максимальное значения отрицательного СКР соответствует минимальной амплитуде инвертированного по знаку смещений импульса, а минимум отрицательного СКР — максимальному по амплитуде инвертированному по знаку импульсу.

Во второй межкритической зоне ($\alpha_{кр3} \div \alpha_{кр1}$) особой точкой является угол $\alpha = 16.5^\circ$: здесь обменная SP -волна затухает до 0: $\Re\{A_{SP}\}(16.5^\circ) = \Im\{A_{SP}\}(16.5^\circ) = 0$. Свой критический угол для отражённой P -волны соответствует минимальной её амплитуде.

Третьему критическому углу $\alpha_{кр1} = 17^\circ$ не отвечает ни один экстремум кривых СКР. Лишь вблизи него, при $\alpha = 17.8^\circ$ располагается абсолютный максимум $\Re\{B_{SS}\} = 1.623$. При этом

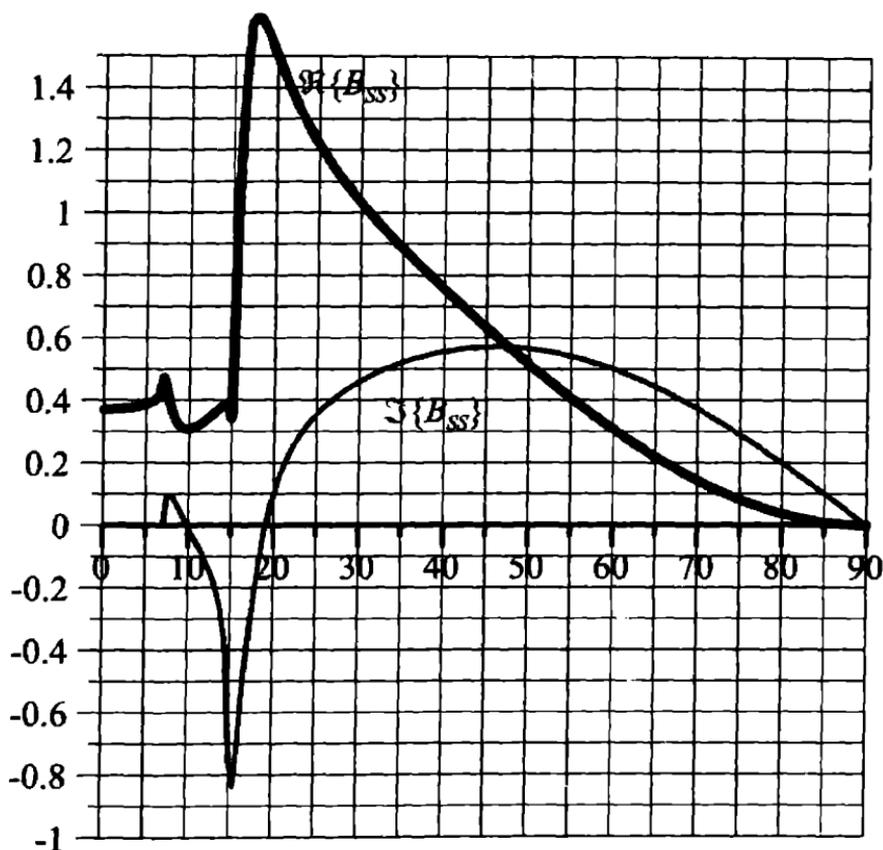


Рис. 11.14. Графики зависимости действительной и мнимой частей коэффициентов прохождения B_{SS} SV-волны от угла подхода.

Случай $V_{S1} < V_{P1} < V_{S2} < V_{P2}$

$\Im\{B_{SS}\} = 0.4$, так что проходящая S-волна в этом случае весьма и весьма интенсивна. Ещё одна компонента вторичных волн имеет максимальную амплитуду вблизи $\alpha_{кр1}$: при $\alpha = 18.6^\circ$ $\Im\{B_{SP}\} = 0.608$, т.е. Гильберт-трансформанта исходного сигнала в проходящей P-волне тоже достаточно интенсивна.

Закритическая зона ($\alpha > \alpha_{кр1}$) отмечена особой точкой для СКР: при $\alpha = 19.1^\circ$ $\Re\{A_{SP}\} = \Im\{A_{SS}\} = \Re\{B_{SP}\} = \Im\{B_{SS}\} = 0$.

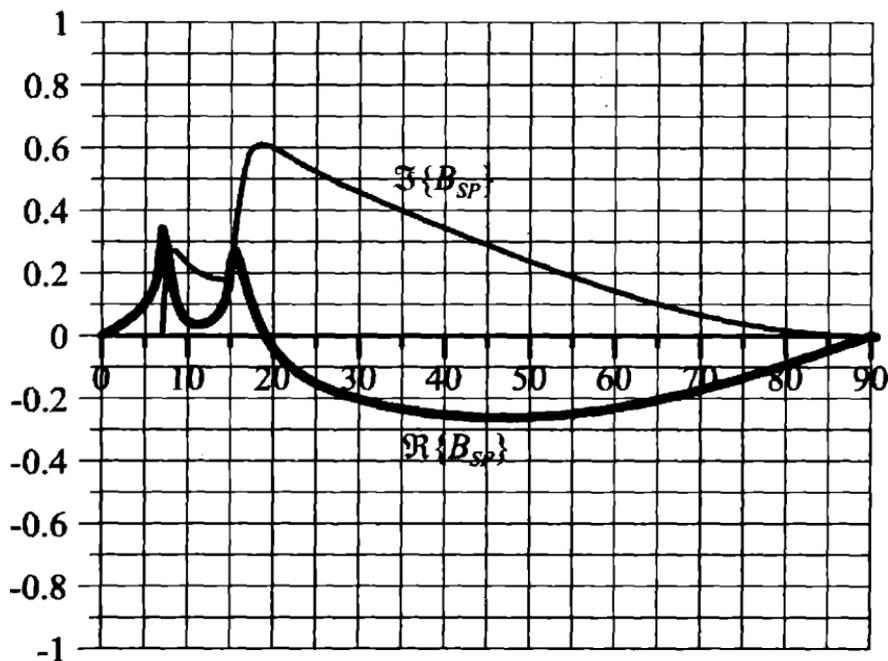


Рис. 11.15. Графики зависимости действительной и мнимой частей коэффициентов прохождения B_{SP} SV-волны от угла подхода. Случай $V_{S1} < V_{P1} < V_{S2} < V_{P2}$

Обменные вторичные волны представлены Гильберт-трансформантой первичного сигнала, а монотипные волны – самим этим сигналом.

В общем, зона $\alpha > \alpha_{кр1}$ характеризуется достаточно плавным поведением СКР. В ней расположена ещё одна особая точка: при $\alpha = 47.65^\circ$ $\Re\{A_{SS}\} = 0$, $\Im\{A_{SS}\} = 1$ – отражённая S-волна представлена Гильберт-трансформантой сигнала $U_{S\downarrow}(t)$. При том же угле $\Re\{B_{SS}\} = \Im\{B_{SP}\}$ – проходящая S-волна представлена равновесной суммой сигнала и его Гильберт-трансформанты. На этот же угол (47.65°) приходится максимальное значение действительной части коэффициента отражения P-волны: $\Re\{A_{SP}\} = 0.291$. При дальнейшем увеличении α $\Re\{A_{SP}\}$ последовательно убывает, стремясь к 0 при $\alpha \rightarrow 90^\circ$. $\Im\{A_{SP}(\alpha)$, достигнув минимума (-0.498 при $\alpha = 25^\circ$) растёт и в пределе, при $\alpha \rightarrow 90^\circ$, $\Im\{A_{SP}\} \rightarrow 0$.

Действительная часть A_{SS} очень плавно увеличивается от -1 при $\alpha = 19.1^\circ$ через нулевое значение до $+1$ при $\alpha = 90^\circ$. $\Im\{A_{SS}\}$, достигнув минимального значения -1 при $\alpha = 47.65^\circ$, продолжает плавный рост до 0 при $\alpha \rightarrow 90^\circ$. К такому же пределу стремятся все компоненты коэффициентов прохождения.

Завершая исследование отражения и прохождения поперечной вертикально поляризованной (SV) волны на границе двух упругих сред, заметим, что поведение спектральных коэффициентов рассеяния как функций угла падения значительно более сложно в сравнении с другими типами первичных волн. Возможно, это является одной из причин более редкого и ограниченного применения сейсморазведки на SV-волнах.

Глава 12. Отражение сейсмических волн от дневной поверхности

12.1. Уравнения Цёппритца для дневной поверхности

Поверхность Земли является самой распространённой и наиболее резкой границей раздела контактирующих на ней сред. Под ней залегают породы с плотностью, измеряемой единицами г/см^3 , а над ней — воздух, плотность которого на 3 порядка меньше (около 0.001 г/см^3). Поэтому волновое сопротивление ($\gamma = V \cdot \rho$) воздушной среды пренебрежимо мало в сравнении с волновым сопротивлением горных пород, и можно считать, что $\gamma_{P1} = v_{P1} \cdot \rho_1 = \gamma_{S1} = v_{S1} \cdot \rho_1 = 0$.

Дневную поверхность в силу вышесказанного считают свободной для упругих волн, и к ней нельзя применять какие-либо кинематические (для упругих смещений) ограничения. Это значит, что для неё первые два граничных условия — для компонент смещения U_x и U_z — теряют смысл. В обобщённых уравнениях Цёпприта рассматриваемому случаю отвечают лишь два последних уравнения для упругих напряжений (p_{xx} и p_{zz}). Кроме того, в этих уравнениях из-за $\gamma_{P1} = \gamma_{S1} = 0$ обнуляются первые два члена.

Таким образом, для отражения P - и SV -волн от свободной поверхности актуальны лишь 4 (вместо 16 в общем случае) коэффициента рассеяния:

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} A_{PP}^* & A_{SP}^* \\ A_{PS}^* & A_{SS}^* \end{pmatrix}, \quad i, j = 3, 4.$$

Коэффициенты правой и левой частей уравнений связаны между собой соотношением

$$R_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot L_{ij}.$$

Для $i, j = 3, 4$:

$$L_{ij} = \begin{pmatrix} \gamma_{P2} \cdot \cos 2\alpha_{S2} & -\gamma_{S2} \cdot \sin 2\alpha_{S2} \\ n_2 \cdot \gamma_{S2} \cdot \sin 2\alpha_{P2} & \gamma_{S2} \cdot \cos 2\alpha_{S2} \end{pmatrix};$$

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \gamma_{P2} \cdot \cos 2\alpha_{S2} & \gamma_{S2} \cdot \sin 2\alpha_{S2} \\ -n_2 \cdot \gamma_{S2} \cdot \sin 2\alpha_{P2} & \gamma_{S2} \cdot \cos 2\alpha_{S2} \end{pmatrix}.$$

Поскольку среды с индексом 1 нет, в уравнениях можно опустить индекс 2, равно как и индексацию восходящих волн (*). Третье уравнение можно разделить на $\gamma_P (\equiv \gamma_{P2})$, а n_2 записать как $\gamma_S/\gamma_P = n = V_S/V_P$. Последнее уравнение имеет общий сократимый множитель $\gamma_S (\equiv \gamma_{S2})$. С учётом этих изменений запишем уравнения в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} A_{PP} & A_{SP} \\ A_{PS} & A_{SS} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_P \cdot \cos 2\alpha_S & -\gamma_S \cdot \sin 2\alpha_S \\ n \cdot \gamma_S \cdot \sin 2\alpha_P & \gamma_S \cdot \cos 2\alpha_S \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \gamma_P \cdot \cos 2\alpha_S & \gamma_S \cdot \sin 2\alpha_S \\ -n \cdot \gamma_S \cdot \sin 2\alpha_P & \gamma_S \cdot \cos 2\alpha_S \end{pmatrix}.$$

Для первичной P -волны уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} A_{PP} \cdot \cos 2\alpha_S - A_{PS} \cdot n \cdot \sin 2\alpha_S = \cos 2\alpha_S \\ A_{PP} \cdot n \cdot \sin 2\alpha_P + A_{PS} \cdot \cos 2\alpha_S = -n \cdot \sin 2\alpha_P \end{cases}.$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$$A_{PP} = \frac{\cos^2 2\alpha_S - n^2 \sin 2\alpha_S \sin 2\alpha_P}{\cos^2 2\alpha_S + n^2 \sin 2\alpha_S \sin 2\alpha_P};$$

$$A_{PS} = \frac{-2n \cos 2\alpha_S \sin 2\alpha_P}{\cos^2 2\alpha_S + n^2 \sin 2\alpha_S \sin 2\alpha_P}.$$

Для первичной S -волны запишем:

$$\begin{cases} A_{SP} \cdot \cos 2\alpha_S - A_{SS} \cdot n \cdot \sin 2\alpha_S = n \sin 2\alpha_S \\ A_{SP} \cdot n \cdot \sin 2\alpha_P + A_{SS} \cdot \cos 2\alpha_S = \cos 2\alpha_S \end{cases} ,$$

откуда получим формулы для коэффициентов рассеяния:

$$A_{SP} = \frac{2n \sin 2\alpha_S \cos 2\alpha_S}{\cos^2 2\alpha_S + n^2 \sin 2\alpha_S \sin 2\alpha_P} = \frac{n \sin 4\alpha_S}{\cos^2 2\alpha_S + n^2 \sin 2\alpha_S \sin 2\alpha_P} ;$$

$$A_{SS} = \frac{\cos^2 2\alpha_S - n^2 \sin 2\alpha_S \sin 2\alpha_P}{\cos^2 2\alpha_S + n^2 \sin 2\alpha_S \sin 2\alpha_P} .$$

Заметим, что формулы для монотипных волн (PP и SS) одинаковы, но это их внешнее сходство таит в себе существенные различия для A_{PP} и A_{SS} . При подходе P -волны к поверхности критического угла нет, и формулы содержат только действительные синусы и косинусы. Соответственно, A_{PP} — всегда простой цифровой множитель, определяющий амплитуду отражённой волны. Если же к поверхности подходит S -волна, то критический угол всегда есть и он меньше 45° :

$$\sin \alpha_{кр} = \frac{V_S}{V_P} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \approx \sin 45^\circ = 0.707\dots$$

Напомним, что отношение V_S/V_P зависит только от коэффициента Пуассона σ , изменяющегося в теоретически возможных пределах $0 \leq \sigma \leq 0.5$.

При $\sigma = 0.15$, то есть вблизи нижнего предела, получим:

$$n = \frac{V_S}{V_P} = \sqrt{(1 - 2\sigma)/(2 - 2\sigma)} \simeq 0.688 \text{ и } \alpha_{кр} = 43.5^\circ .$$

Вблизи верхнего предела изменения σ , при $\sigma = 0.45$, $n \simeq 0.302$ и $\alpha_{кр} = 17.6^\circ$.

12.2. Падение P -волны на дневную поверхность

Вначале рассмотрим более простой случай, когда к дневной поверхности подходит продольная (P) волна. На рис. 12.1 изображены графиче-

ки зависимости коэффициентов отражения продольной волны (A_{PP}) и поперечной волны (A_{PS}) от угла подхода α ($\equiv \alpha_P$) продольной волны. В расчёте использовались два значения параметра $n = V_S/V_P$: $n = 0.25$ и $n = 0.45$.

Для любого значения n функция $A_{PP}(\alpha)$ начинается и заканчивается единицами: $A_{PP}(0^\circ) = A_{PP}(90^\circ) = 1$, а функция $A_{PS}(\alpha)$ — нулями: $A_{PS}(0^\circ) = A_{PS}(90^\circ) = 0$.

Увеличение угла падения приводит к уменьшению $A_{PP}(\alpha)$ и к увеличению отрицательных значений $A_{PS}(\alpha)$. В зоне средних углов α все кривые СКО имеют минимум. Для $A_{PP}(\alpha)$ он смещается в сторону больших углов с ростом n : при $n = 0.25$ $\alpha_{\min} = 56^\circ$, а при $n = 0.45$ $\alpha_{\min} = 62^\circ$.

Минимумы $A_{PS}(\alpha)$ всегда располагаются в середине интервала, при $\alpha \simeq 45^\circ$. Глубина минимумов для монопипной волны значительно

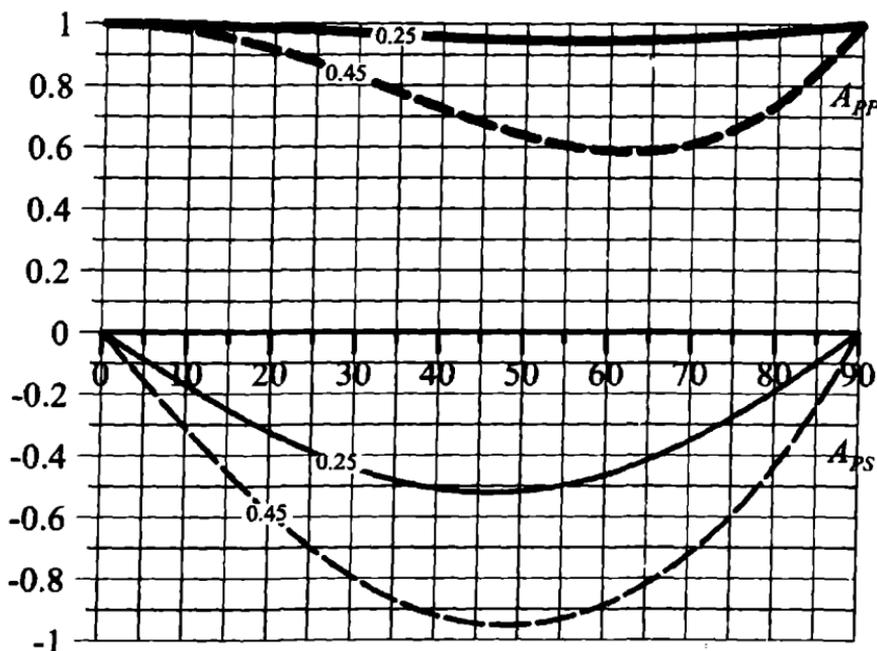


Рис. 12.1. Графики коэффициентов отражения продольной волны и поперечной волны от угла подхода в зависимости от n (параметр кривой)

меньше, чем для обменной: при $n = 0.25$ $A_{PP\min} \simeq 0.97$, а $A_{PS\min} \simeq -0.52$; при $n = 0.45$ имеем $A_{PP\min} \simeq 0.50$, а $A_{PS\min} \simeq -0.92$.

12.3. Падение SV-волны на дневную поверхность

Значительно сложнее поведение спектральных коэффициентов рассеяния для первичной SV-волны (рис. 12.2, 12.3). Как отмечалось, в этом случае всегда есть критический угол, меньший 45° . До критического угла отражение от дневной поверхности описывается общими формулами для A_{SS} и A_{SP} и определяется действительными функциями угла α_S . Монотипная SS-волна имеет максимальную амплитуду при $\alpha = 0$: $A_{SS}(0^\circ) = 1$. С увеличением α $U_{S1}(t)$ затухает тем сильнее, чем больше n . A_{SS} образует локальный минимум перед критическим углом: при $n = 0.25$ $A_{SS\min} \simeq 0.95$, а при $n = 0.45$ имеем $A_{SS\min} \simeq 0.60$. Этот минимум с ростом n смещается в сторону больших углов: $\alpha_{\min} \simeq 12^\circ$ для $n = 0.25$ и $\alpha_{\min} \simeq 23^\circ$ для $n = 0.45$.

Амплитуда обменной SP-волны растёт с увеличением α почти линейно от 0 при $\alpha = 0$ до 0.25 для $n = 0.25$ и до 1.0 при $n = 0.45$. В последнем случае непосредственно перед $\alpha_{кр}$ линейность роста нарушается, а крутизна $A_{SP}(\alpha)$ увеличивается.

При критическом угле падения $A_{SS} = 1$, а A_{SP} может быть выражен формулой:

$$A_{SP}(\alpha_{кр}) = \frac{4n^2\sqrt{1-n^2}}{1-2n^2}.$$

При $n = 0.25$ $A_{SP}(\alpha_{кр}) \simeq 0.28$, и критический угол $\alpha_{кр} \simeq 14.5^\circ$ почти не заметен на фоне общего подъёма $A_{SP}(\alpha)$. С увеличением n максимум A_{SP} становится более резко выраженным. Так, при $n = 0.45$ он равен 1.216. Если же использовать максимальное теоретическое значение $n = V_S/V_P = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ($n^2 = \frac{1}{2}$), то оно обращает знаменатель выражения $A_{SP}(\alpha_{кр})$ в нуль, а само значение этого СКО — в бесконечность, чего никак не может быть в практике сейсморазведки. Это вынуждает ограничить сверху диапазон возможных значений n , приняв за сейсмический максимальный предел отношение V_S/V_P , равным $\simeq 0.65$, или $\max(n^2) \simeq 0.42$.

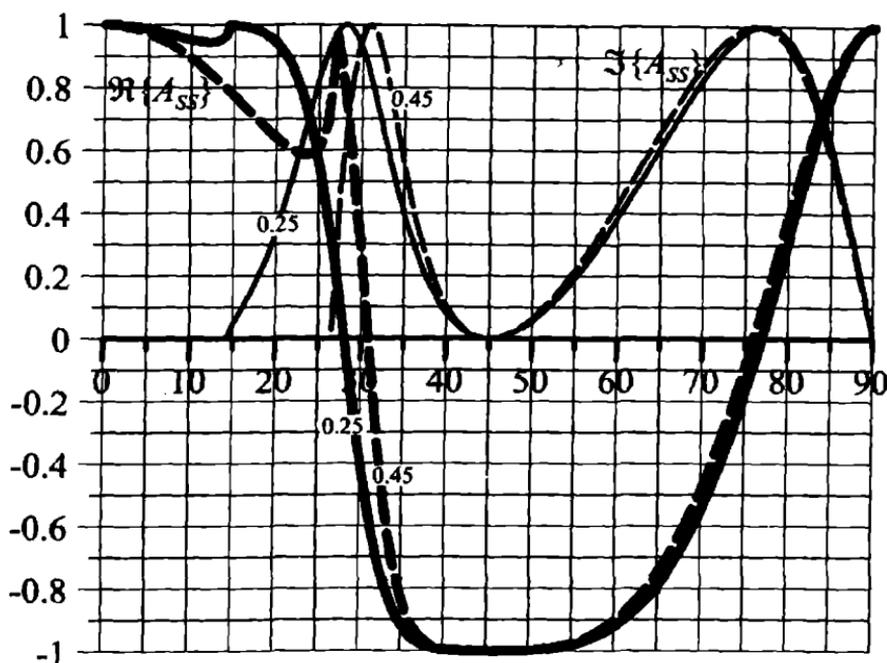


Рис. 12.2. Графики действительной (жирная линия) и мнимой (тонкая линия) частей коэффициентов отражения A_{SS} SV-волны от угла подхода n (параметр кривой)

Но с величиной n жёстко связан коэффициент Пуассона:

$$\sigma = \frac{1-n^2}{2-2n^2}, \text{ или } n^2 = \frac{1-2\sigma}{2-2\sigma}.$$

Наибольшее значение n соответствует минимальному коэффициенту: $\min(\sigma) \approx 0.14$.

С другой стороны, максимальному теоретически возможному значению $\sigma = 0.5$ соответствует такой объект теории упругости, как резина*. Сейсмические свойства геологических сред не похожи, конечно, на свойства резины. Некоторым исключением из этого служат пластичные влажные глины. Поэтому можно ограничить коэффициент Пуассона и сверху: $\max(\sigma) \approx 0.49$. Этому значению σ соответствует наименьшее отношение скоростей: $\min(n) \approx 0.14$.

* См. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теория упругости. — М.: Наука, 1995, прим. к стр. 25

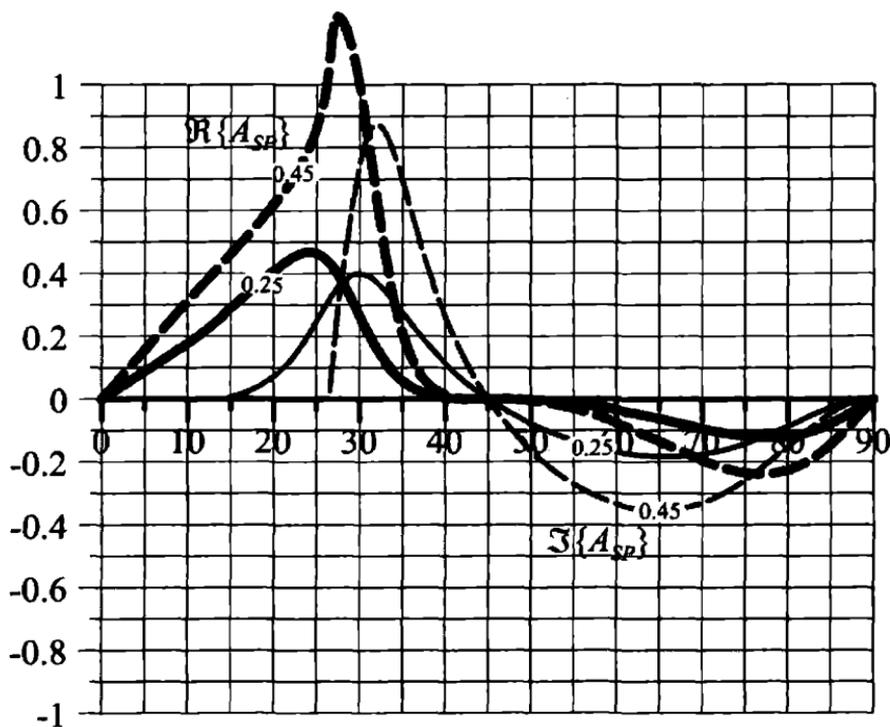


Рис. 12.3. Графики действительной (жирная линия) и мнимой (тонкая линия) частей коэффициентов отражения A_{SP} SV-волны от угла подхода в зависимости от n (параметр кривой)

Таким образом, сейсмические ограничения σ и n можно записать в виде:

$$0.14 \leq \sigma \leq 0.49;$$

$$0.14 \leq n \leq 0.65.$$

Если угол подхода первичной волны становится больше критического, оба СКО превращаются в комплексные, частотно-зависимые (через $\text{sgn}(\omega)$) функции угла α , а отражённые волны становятся внутренне интерференционными.

Рассмотрим более подробно закритическое отражение SV-волны от дневной поверхности. Когда угол подхода первичной волны превышает

критический, синус угла отражения P -волны становится больше единицы:

$$\sin \alpha_P = \frac{\sin \alpha_S}{n} = \frac{V_S}{V_P} \cdot \sin \alpha_S > 1,$$

а косинус этого угла превращается в чисто мнимую частотно-зависимую величину:

$$\cos \alpha_P = -j \cdot \operatorname{sgn} \omega \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha_P - 1}.$$

Учитывая, что первичной волной является поперечная, и угол её подхода меняется в нормальных пределах ($0^\circ \leq \alpha_S \leq 90^\circ$), выразим α_P через α_S , используя закон Снеллиуса:

$$\sin \alpha_P = \frac{\sin \alpha_S}{n}.$$

Применив формулу двойного угла ($\sin 2\alpha_P = 2 \sin \alpha_P \cdot \cos \alpha_P$) и выразив косинус через синус, в нашем случае получим:

$$\sin 2\alpha_P = -j \cdot \operatorname{sgn}(\omega) \cdot \frac{2}{n^2} \sqrt{\sin^2 \alpha_S - n^2} = -j \cdot \frac{\operatorname{sgn}(\omega)}{n^2} \sin 2\alpha_P,$$

где обозначено $\sin 2\alpha_P = 2 \sin \alpha_S \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha_S - n^2}$ (напомним, что $\sin \alpha_S > \sin \alpha_{S\text{кр}}$ и для краткости записано $\alpha_S = \alpha$). При подстановке этого выражения в общие формулы n^2 и $\frac{1}{n^2}$ сокращаются и можно записать:

$$A_{SP} = \frac{n \sin 4\alpha}{\cos^2 2\alpha - j \cdot \operatorname{sgn}(\omega) \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 2\alpha_P};$$

$$A_{SS} = \frac{\cos^2 2\alpha + j \cdot \operatorname{sgn}(\omega) \sin 4\alpha}{\cos^2 2\alpha_S - j \cdot \operatorname{sgn}(\omega) \cdot \sin 2\alpha \cdot \sin 2\alpha_P}.$$

Введём сокращённые обозначения для упрощения записи:

$$\cos^2 \alpha = c;$$

$$n \cdot \sin 4\alpha = p;$$

$$2 \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha - n^2} = s.$$

В этих обозначениях определим СКО в виде:

$$A_{SP} = \frac{p}{c - j \cdot \operatorname{sgn}(\omega) \cdot s}; \quad A_{SS} = \frac{c + j \cdot \operatorname{sgn}(\omega) \cdot s}{c - j \cdot \operatorname{sgn}(\omega) \cdot s}.$$

Избавляясь от комплексного знаменателя определений, запишем:

$$A_{SP} = \frac{p \cdot (c + j \cdot \operatorname{sgn}(\omega) \cdot s)}{c^2 + s^2} = \frac{pc}{c^2 + s^2} + j \cdot \operatorname{sgn}(\omega) \cdot \frac{ps}{c^2 + s^2};$$

$$A_{SS} = \frac{(c + j \cdot \operatorname{sgn}(\omega) \cdot s)^2}{c^2 - (j \cdot \operatorname{sgn}(\omega) \cdot s)^2} = \frac{c^2 - s^2}{c^2 + s^2} + j \cdot \operatorname{sgn}(\omega) \cdot \frac{2cs}{c^2 + s^2}.$$

Отметим, что $|A_{SS}| = 1$.

Очевидно, что действительные и мнимые части СКО равны соответственно:

$$\Re\{A_{SP}\} = \frac{pc}{c^2 + s^2}; \quad \Im\{A_{SP}\} = \frac{ps}{c^2 + s^2};$$

$$\Re\{A_{SS}\} = \frac{c^2 - s^2}{c^2 + s^2}; \quad \Im\{A_{SS}\} = \frac{2cs}{c^2 + s^2}.$$

Действительная часть СКО является амплитудным множителем для первичной волны $U_{S\uparrow}(t)$, а мнимая часть — множителем для её Гильберт-трансформанты $U_{Hi}(t)$ в суммарной отражённой волне:

$$U_{SP}(t) = \Re\{A_{SP}\} \cdot U_{S\uparrow}(t) + \Im\{A_{SP}\} \cdot U_{Hi}(t);$$

$$U_{SS}(t) = \Re\{A_{SS}\} \cdot U_{S\uparrow}(t) + \Im\{A_{SS}\} \cdot U_{Hi}(t).$$

Изменения весовых множителей с углом падения $\alpha (> \alpha_{кр})$ определяют изменения формы отражённых сигналов $U_{SP}(t)$ и $U_{SS}(t)$.

В обоих случаях — $n = 0.25$ и $n = 0.45$ (рис. 12.2 и 12.2) — общей особенной точкой является $\alpha = 45^\circ$: $\Re\{A_{SS}\} = -1$, $\Im\{A_{SS}\} = \Re\{A_{SP}\} = \Im\{A_{SP}\} = 0$ и $U_{SP}(t) = 0$. При этом $\Im\{A_{SS}\}$ лишь касается оси углов падения, а $\Re\{A_{SP}\}$ и $\Im\{A_{SP}\}$ меняют знак: при $\alpha < 45^\circ$ они положительны, а при $\alpha > 45^\circ$ — отрицательны. Для компонент A_{SS} также особыми точками являются углы падения, при которых $\Re\{A_{SS}\} = 0$, а $\Im\{A_{SS}\} = 1$: при $n = 0.25$ это $\alpha \simeq 27.5^\circ$, а при $n = 0.45$ — $\alpha \simeq 31^\circ$, а также в обоих случаях $\alpha \simeq 75^\circ$.

В пределе ($\alpha \rightarrow 90^\circ$): $A_{SS} = 1$, $A_{SP} = 0$.

Отражение от поверхности является причиной возникновения помех для сейсмической разведки в виде многочисленных и разнообразных кратных волн.

Как видно, отражение от дневной поверхности SV -волны, как и отражение от глубинных границ, является более сложным, чем отражение P -волн. Во всех случаях подхода первичной волны под углом, большим критического, отражение сопровождается возникновением неоднородных волн, скользящих вдоль поверхности со скоростью, меньшей истинной, и имеющих амплитуды, затухающие с глубиной.

Наложение (суперпозиция) двух таких неоднородных волн (P и S) представляет собой волну Рэлея, к рассмотрению которой мы перейдем в следующем разделе.

Глава 13. Волна Рэля

В конце XIX века (в 1885 году) английский физик Рэлей (Rayleigh) теоретически доказал, что у свободной поверхности твёрдого тела существует особый вид волновых колебаний, напоминающий волны на поверхности водной среды. Эти колебания, максимальные у поверхности, затухают с увеличением глубины. При этом в волне присутствуют как продольные, так и поперечные смещения, распространяющиеся с одной и той же скоростью V_R , меньшей не только V_P , но и V_S .

13.1. Граничные условия и потенциалы упругих смещений

Поскольку затухание с глубиной волновых смещений частотно-зависимо, то есть разные гармоники волны затухают по-разному, будем рассматривать какую-либо фиксированную частоту колебаний, то есть комплексную гармонику частоты ω :

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \cdot \sin \omega t.$$

В общем случае, как известно, вектор смещений \vec{U} раскладывается на продольные и поперечные колебания:

$$\vec{U} = \vec{U}_P + \vec{U}_S = \text{grad } \Phi + \text{rot } \vec{\Psi},$$

Φ - скалярный, $\vec{\Psi}$ - векторный потенциалы.

В проекциях на оси координат:

$$\begin{cases} U_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z}; \\ U_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial x}; \\ U_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial y}. \end{cases}$$

Для плоской волны с фронтом, параллельным оси Oy , $\frac{\partial}{\partial y} = 0$, поэтому x - и z -проекции \vec{U} содержат компоненты как скалярного, так и векторного потенциалов:

$$\begin{cases} U_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z}; \\ U_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial x}. \end{cases}$$

Для волны Рэлея принято обозначать $\Psi_y = -\Psi$. С учётом этого запишем:

$$\begin{cases} U_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial z}; \\ U_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \end{cases}$$

Зададим потенциалы гармонической восходящей ($z < 0$) волны в виде:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_0 \cdot \exp \left[j\omega \left(t - \frac{x \sin \alpha_P - z \cos \alpha_P}{V_P} \right) \right] \\ \Psi &= \Psi_0 \cdot \exp \left[j\omega \left(t - \frac{x \sin \alpha_S - z \cos \alpha_S}{V_S} \right) \right] \end{aligned}$$

Для неоднородной волны:

$$\begin{aligned} \sin \alpha_P > 1, & \quad \cos \alpha_P = j \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha_P - 1}, \\ \sin \alpha_S > 1, & \quad \cos \alpha_S = j \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha_S - 1}. \end{aligned}$$

Потенциалы таких волн могут быть описаны следующими выражениями:

$$\Phi = \Phi_0 \cdot e^{-az} \cdot e^{j\omega\left(t - \frac{x}{V_R}\right)},$$

$$\Psi = \Psi_0 \cdot e^{-bz} \cdot e^{j\omega\left(t - \frac{x}{V_R}\right)}.$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$V_R = \frac{V_P}{\sin \alpha_P} = \frac{V_S}{\sin \alpha_S}, \quad \sin \alpha_P > 1, \quad \sin \alpha_S > 1;$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{\omega}{V_P} \cdot \overline{\cos \alpha_P} = \frac{\omega}{V_P} \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha_P - 1} = \frac{\omega}{V_P} \cdot \sqrt{\left(\frac{V_P}{V_R}\right)^2 - 1} = \\ &= \frac{\omega}{V_R} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{V_R}{V_P}\right)^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \frac{\omega}{V_S} \cdot \overline{\cos \alpha_S} = \frac{\omega}{V_S} \cdot \sqrt{\sin^2 \alpha_S - 1} = \frac{\omega}{V_S} \cdot \sqrt{\left(\frac{V_S}{V_R}\right)^2 - 1} = \\ &= \frac{\omega}{V_R} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{V_R}{V_S}\right)^2}. \end{aligned}$$

Косинусы помечены чертой над ними как признаком их «неправильности» (мнимости). Поскольку $\sin \alpha_P$ и $\sin \alpha_S$ больше единицы, то $V_R < V_S < V_P$.

Компоненты смещений волны Рэлея определяются выражениями:

$$\begin{aligned} U_x &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\Phi_0 \cdot e^{-az} \cdot e^{j\omega\left(t - \frac{x}{V_R}\right)} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Psi_0 \cdot e^{-bz} \cdot e^{j\omega\left(t - \frac{x}{V_R}\right)} \right) = \\ &= \left(-\frac{j\omega}{V_R} \Phi_0 e^{-az} - b \Psi_0 e^{-bz} \right) e^{j\omega\left(t - \frac{x}{V_R}\right)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\Phi_0 \cdot e^{-az} \cdot e^{j\omega\left(t - \frac{x}{V_R}\right)} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\Psi_0 \cdot e^{-bz} \cdot e^{j\omega\left(t - \frac{x}{V_R}\right)} \right) = \\ &= \left(-a \Phi_0 e^{-az} + \frac{j\omega}{V_R} \Psi_0 e^{-bz} \right) e^{j\omega\left(t - \frac{x}{V_R}\right)}. \end{aligned}$$

Для определения констант и, прежде всего, скорости V_R нужно использовать граничные условия на свободной поверхности $z = 0$ – равенство нулю касательного и нормального напряжений:

$$p_{zx} \Big|_{z=0} = 0; \quad p_{zz} \Big|_{z=0} = 0.$$

В соответствии с законом Гука, $p_{zx} = 2\mu e_{zx} = \mu \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} \right)$. Подставляя $\mu = V_S^2 \cdot \rho$ и используя определения U_z и U_x через их потенциалы, получим:

$$p_{zx} = V_S^2 \cdot \rho \left(2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right).$$

Дифференцирование комплексных гармоник по x даёт множитель $(-j\omega/V_R)$, а дифференцирование по z – $(-a)$ для Φ и $(-b)$ для Ψ :

$$p_{zx} = V_S^2 \cdot \rho \left(2 \cdot \left(-\frac{j\omega}{V_R} \right) \cdot (-a) \cdot \Phi_0 \cdot e^{-az} + \right. \\ \left. + \left(\left(-\frac{j\omega}{V_R} \right)^2 - (-b)^2 \right) \Psi_0 \cdot e^{-bz} \right) e^{j\omega \left(t - \frac{x}{V_R} \right)}.$$

При подстановке граничного ($z = 0$) условия $p_{zx} = 0$, сокращая на отличные от нуля множители, получим:

$$2 \cdot \left(\frac{\omega}{V_R} \right)^2 j \Phi_0 \sqrt{1 - \left(\frac{V_R}{V_P} \right)^2} + \left(\frac{\omega}{V_R} \right)^2 \left(2 - \frac{V_R}{V_S} \right)^2 \Psi_0 = 0.$$

Сокращая ещё и на $\left(\frac{\omega}{V_R} \right)^2$, определим отношение постоянных множителей гармоник:

$$\frac{\Psi_0}{\Phi_0} = -\frac{2j \sqrt{1 - \left(\frac{V_R}{V_P} \right)^2}}{2 - \left(\frac{V_R}{V_S} \right)^2}.$$

Используем теперь закон Гука для нормального напряжения:

$$\begin{aligned} p_{zz} &= \lambda \vartheta + 2\mu e_{zz} = (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) - 2\mu \frac{\partial U_x}{\partial x} = \\ &= V_P^2 \cdot \rho \left(1 - 2 \left(\frac{V_S}{V_P} \right)^2 \right) \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - 2 \left(\frac{V_S}{V_P} \right)^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z}. \end{aligned}$$

После подстановки определений производных потенциалов, производя очевидные сокращения, получим для второго граничного условия $p_{zz} = 0$ при $z = 0$:

$$\Phi_0 \left(2 - \left(\frac{V_R}{V_S} \right)^2 \right) - j\Psi_0 \cdot 2\sqrt{1 - \left(\frac{V_R}{V_S} \right)^2} = 0.$$

Из этого уравнения снова определим отношение постоянных потенциалов:

$$\frac{\Psi_0}{\Phi_0} = \frac{2 - \left(\frac{V_R}{V_S} \right)^2}{2j\sqrt{1 - \left(\frac{V_R}{V_S} \right)^2}}.$$

Приравнявая оба определения Ψ_0/Φ_0 , сократим $-j$ и $1/j$ и получим:

$$\frac{2\sqrt{1 - \left(\frac{V_R}{V_P} \right)^2}}{2 - \left(\frac{V_R}{V_S} \right)^2} = \frac{2 - \left(\frac{V_R}{V_S} \right)^2}{2\sqrt{1 - \left(\frac{V_R}{V_S} \right)^2}}.$$

Обозначим $m^2 = \left(\frac{V_R}{V_S} \right)^2$. Отношение $\frac{V_R}{V_P} = \left(\frac{V_R}{V_S} \right) \cdot \left(\frac{V_S}{V_P} \right) = \left(\frac{V_R}{V_S} \right) \cdot n = mn$, и поэтому $\left(\frac{V_R}{V_P} \right)^2 = m^2 n^2$. Запишем в этих обозначениях полученное равенство, раскрывая пропорцию:

$$(2 - m^2)^2 = 4 \cdot \sqrt{(1 - m^2)(1 - m^2 n^2)}.$$

Отсюда получим уравнение для неизвестной m^2 :

$$(m^2)^3 - 8(m^2)^2 + (24 - 16n^2)(m^2) - 16 + 16n^2 = 0.$$

Кубическое уравнение имеет по крайней мере один действительный корень. Оценим, может ли этот корень быть между нулём и единицей. Для этого найдём значения левой части (\mathcal{L}) уравнения при $m^2 = 0$ и $m^2 = 1$:

$$\mathcal{L}(0) = -16 \cdot (1 - n^2) = \begin{cases} -16 & \text{при } n^2 = 0 \\ -8 & \text{при } n^2 = 0.5 \end{cases};$$

$$\mathcal{L}(1) = 1.$$

Значит, между нулём и единицей располагается корень исследуемого уравнения, и $0 \leq m^2 \leq 1$.

Заметим, что квадрат отношения V_S и V_P ($n^2 = \left(\frac{V_S}{V_P}\right)^2$) и коэффициент Пуассона σ связаны между собой соотношением $n^2 = \frac{1-2\sigma}{2-2\sigma}$.

В табл. 13.1 и на рис.13.1 приведены оценки n и $m = V_R/V_S$ как функции коэффициента Пуассона, меняющегося от 0 до 0.5 с шагом 0.05.

Таблица 13.1.

σ	$\frac{V_S}{V_P}$	$\frac{V_R}{V_S}$
0.00	0.7071	0.8760
0.05	0.6882	0.8837
0.10	0.6667	0.8931
0.15	0.6417	0.9022
0.20	0.6124	0.9110
0.25	0.5774	0.9194
0.30	0.5345	0.9274
0.35	0.4805	0.9350
0.40	0.4082	0.9420
0.45	0.3015	0.9490
0.50	0	0.9553

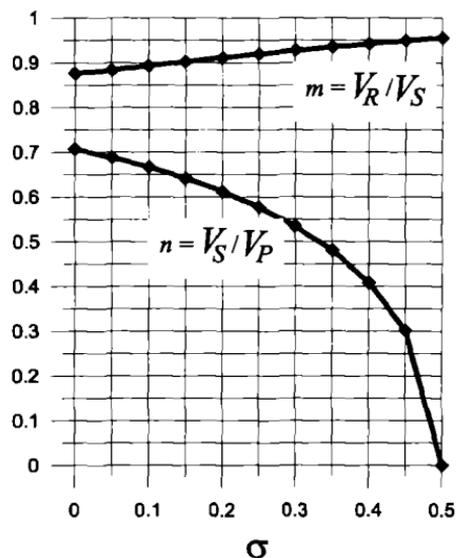


Рис. 13.1. Графики m и n как функции коэффициента Пуассона

Заметно различие диапазонов изменения V_S/V_P и V_R/V_S : если первое отношение меняется от 0.7071 до 0, то второе — в значительно меньших пределах — от 0.8760 до 0.9553.

13.2. Характер смещений, переносимых волной Рэлея

Обсудим теперь поведение компонент смещения, которые были определены в виде:

$$U_x = \left(-\frac{j\omega}{V_R} \Phi_0 e^{-az} - b\Psi_0 e^{-bz} \right) e^{j\omega \left(t - \frac{x}{V_R} \right)} = a_x \cdot e^{j\omega \left(t - \frac{x}{V_R} \right)};$$

$$U_z = \left(-a\Phi_0 e^{-az} + \frac{j\omega}{V_R} \Psi_0 e^{-bz} \right) e^{j\omega \left(t - \frac{x}{V_R} \right)} = a_z \cdot e^{j\omega \left(t - \frac{x}{V_R} \right)}.$$

где a_x — амплитуда волновой гармонике в проекции на ось Ox , a_z — амплитуда z -проекции гармонике.

Учитывая, что $a = \frac{\omega}{V_R} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{V_R}{V_P}\right)^2}$, $b = \frac{\omega}{V_R} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{V_R}{V_S}\right)^2}$, определим a_x и a_z , оставив пока a и b в показателях экспонент e^{-az} и e^{-bz} .

Используя определённое отношение Ψ_0/Φ_0 из первого граничного условия, получим после сокращений:

$$a_x = -\frac{j\omega}{V_R} \cdot \left(e^{-az} - \frac{2 - m^2}{2} \cdot e^{-bz} \right) = -\frac{j\omega}{V_R} \cdot (e^{-az} - c \cdot e^{-bz});$$

$$c = \frac{2 - m^2}{2}.$$

Мнимая единица, оставшаяся в определении амплитуды, на самом деле относится к фазе гармоники:

$$j = e^{j \cdot \frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi}{2} + j \cdot \sin \frac{\pi}{2}.$$

Умножение на j сдвигает гармонику на $\frac{\pi}{2}$ и превращает косинус в $(-\sin \alpha)$, а синус — в $\cos \alpha$:

$$e^{j \cdot (\alpha + \frac{\pi}{2})} = \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) + j \cdot \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \alpha + j \cdot \cos \alpha.$$

$$\text{Поэтому } U_x = a_x \cdot \left(-\sin \omega \left(t - \frac{x}{V_R} \right) + j \cdot \cos \omega \left(t - \frac{x}{V_R} \right) \right).$$

Для реальных физических процессов можно отбросить мнимую часть:

$$U_x = -a_x \cdot \sin \omega \left(t - \frac{x}{V_R} \right) \equiv \frac{\omega}{V_R} (e^{-az} - c \cdot e^{-bz}) \sin \omega \left(t - \frac{x}{V_R} \right)$$

(минусы в определении a_x и U_x гасят друг друга).

Здесь амплитуда синуса определяется так: $a_x = \frac{\omega}{V_R} (e^{-az} - c \cdot e^{-bz})$.

Для амплитуды второй компоненты смещения U_z получим:

$$a_z = -\left(\frac{\omega}{V_R} \sqrt{1 - (mn)^2} \cdot \Phi_0 e^{-az} - \frac{j\omega}{V_R} \Psi_0 e^{-bz} \right) =$$

$$= -\frac{\omega}{V_R} \Phi_0 \sqrt{1 - (mn)^2} \left(e^{-az} - \frac{2}{2 - m^2} e^{-bz} \right).$$

Используя определение c , запишем:

$$a_z = -\frac{\omega}{V_R} \Phi_0 \sqrt{1 - (mn)^2} \left(e^{-az} - \frac{1}{c} e^{-bz} \right).$$

Удерживая действительную часть комплексной гармоники, определим:

$$U_z = -a_z \cdot \cos \omega \left(t - \frac{x}{V_R} \right).$$

Выражения для U_x и U_z представляют собой параметрические уравнения эллипса. Значит, при распространении волны Рэлея частицы среды двигаются по эллиптической орбите.

Для удобства расчёта и анализа нормируем амплитуду a_x к единице:

$$\bar{a}_x = a_x(z)/a_x(0); \quad \bar{a}_z = a_z(z)/a_x(0).$$

Определение делителя даёт $a_x(0) = -\frac{\omega}{V_R} \Phi_0 \frac{m}{2}$, и \bar{a}_x имеет вид:

$$\bar{a}_x(z) = \frac{2}{m^2} \left(e^{-\frac{\omega}{V_R} z \sqrt{1 - (mn)^2}} - c e^{-\frac{\omega}{V_R} z \sqrt{1 - m^2}} \right).$$

Заметим, что $\frac{\omega}{V_R} = \frac{2\pi}{\Lambda_R}$, где $\Lambda_R = \frac{V_R}{f} = V_R \cdot T$ — длина волны. Поэтому можно ввести также и относительную глубину $z/\Lambda_R = \xi$, измеренную в длинах волны. Тогда окончательно можно записать:

$$\begin{aligned} \bar{a}_x(\xi) &= \frac{2}{m^2} \left(e^{-2\pi\xi \sqrt{1 - (mn)^2}} - c e^{-2\pi\xi \sqrt{1 - m^2}} \right); \\ \bar{a}_z(\xi) &= -\frac{2}{m^2} \sqrt{1 - (mn)^2} \left(e^{-2\pi\xi \sqrt{1 - (mn)^2}} - \frac{1}{c} e^{-2\pi\xi \sqrt{1 - m^2}} \right). \end{aligned}$$

Так как нормирование заведомо сделало $\bar{a}_x(0) = 1$, определим начальное значение z -компоненты:

$$\bar{a}_z(0) = -\frac{2}{m^2} \sqrt{1 - (mn)^2} \left(1 - \frac{1}{c} \right).$$

Поскольку $c = \frac{2-m^2}{2}$, то $1 - \frac{1}{c} = -\frac{m^2}{2-m^2}$. Тогда получим:

$$\bar{a}_z(0) = \frac{2\sqrt{1-(mn)^2}}{2-m^2}.$$

При минимальном значении $n^2 = 0$, $m^2 = 0.913$ и $\bar{a}_z(0) \simeq 1.84$. Если же $n^2 = 0.5$, $m^2 = 0.767$ и $\bar{a}_z(0) \simeq 1.27$. Значит, вертикальная (поперечная) компонента смещения волны Рэлея в 1.3 ÷ 1.8 раз больше её горизонтальной (продольной) составляющей. Эллипс смещения всегда вытянут вдоль оси Oz .

На рис.13.2 представлены графики, иллюстрирующие поведение нормированных компонент \bar{a}_x и \bar{a}_z как функций относительной глубины $\xi = z/\Lambda_R$, изменяющейся на интервале $0 < \xi < 2$ в зависимости от значения коэффициента Пуассона для значений $\sigma = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$.

На рис.13.3 представлены графики, иллюстрирующие поведение нормированных компонент \bar{a}_x и \bar{a}_z как функций относительной глубины $\xi = z/\Lambda_R$, изменяющейся на интервале $0 < \xi < 2$. На глубинах, бóльших удвоенной длины волны, обе компоненты затухают более чем в 10 раз. В расчётах принято $n = \frac{V_S}{V_P} = 0.4$, которому соответствуют $m = \frac{V_R}{V_S} \simeq 0.943$ и коэффициент Пуассона $\sigma \simeq 0.405$.

На поверхности (при $\xi = z = 0$) вертикальная ось эллипса смещения волны Рэлея более чем в полтора раз больше, чем его горизонтальная ось ($\bar{a}_z(0) \simeq 1.65$). Обе компоненты положительны, поэтому движение частиц происходит против направления хода стрелок часов: на гребне волны частицы смещаются против хода волны, а на противоположной стороне эллипса — по ходу.

С увеличением глубины горизонтальная компонента волны \bar{a}_x стремительно уменьшается, и уже при $\xi = 0.3$ эллипс вырождается в отрезок прямой, т.е. смещения становятся чисто поперечными ($\bar{a}_x = 0$, $\bar{a}_z = 1.87$). Так как $\bar{a}_x(\xi)$ при переходе через $\xi = 0.3$ меняет знак и для бóльших ξ становится отрицательным, то эллиптическое движение частиц также меняет направление и при $\xi > 0.3$ происходит по направлению хода часовой стрелки.

Горизонтальная компонента $\bar{a}_x(\xi)$ образует локальный минимум ($\bar{a}_x = -0.32$) при $\xi = 0.49$ и лишь затем устремляется к нулю: при $\xi = 2$ $\bar{a}_x \approx 0.01$. Вертикальная компонента \bar{a}_z сначала, на интервале $0 \leq \xi \leq 0.3$ возрастает от 1.65 до 1.89, образуя локальный максимум, а затем также устремляется к нулю с ростом ξ : при $\xi = 2$ $\bar{a}_z = 0.05$.

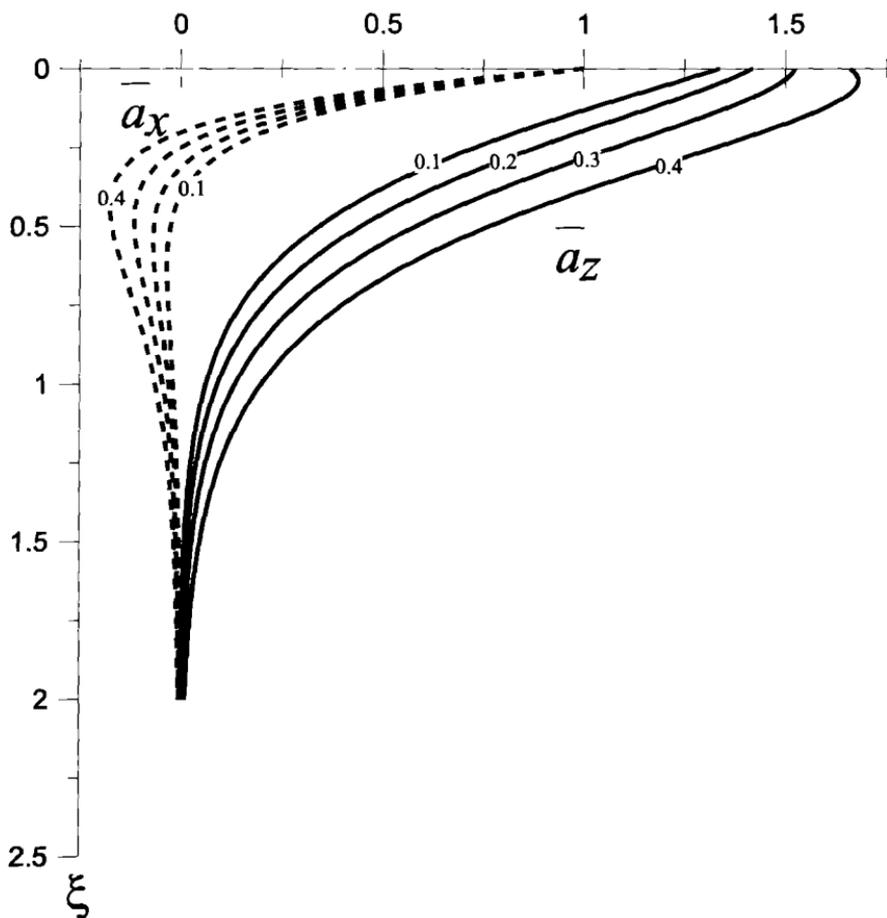


Рис. 13.2. Графики нормированных компонент смещений волны Рэлея в зависимости от коэффициента Пуассона

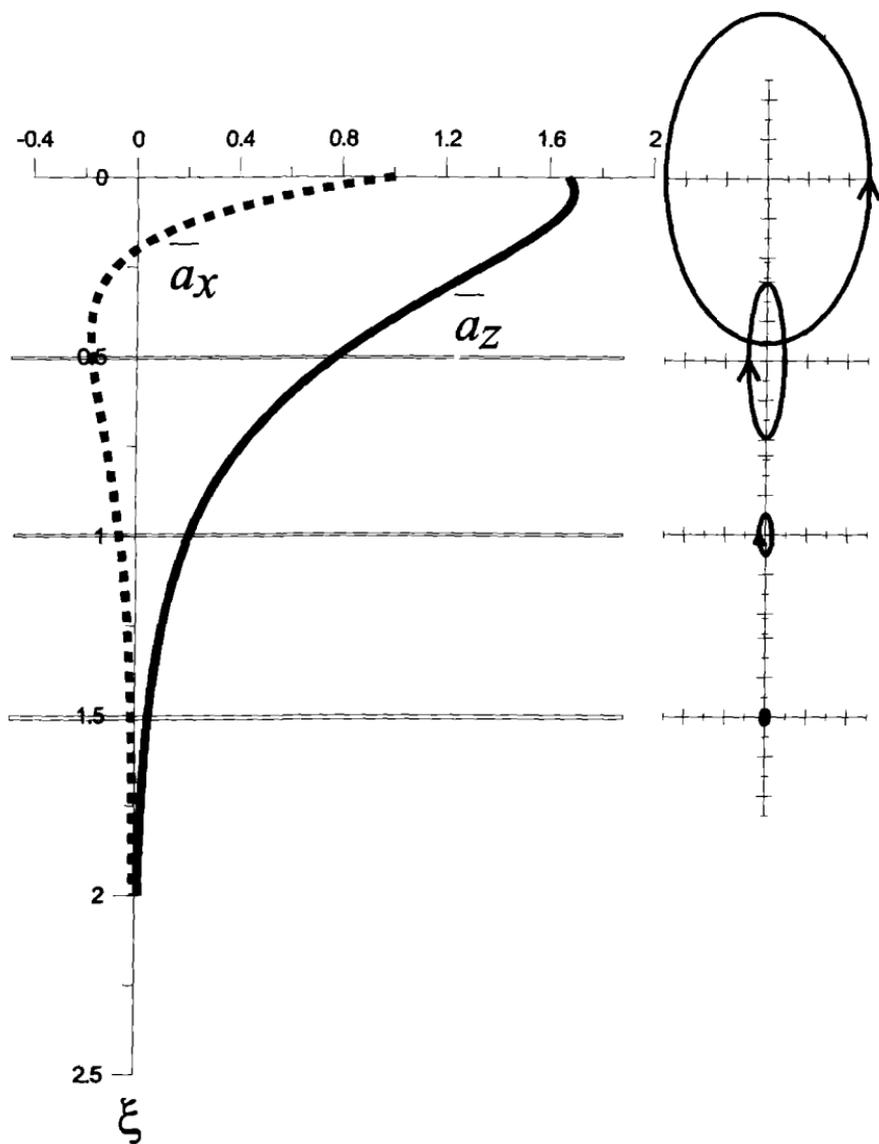


Рис. 13.3. Графики нормированных компонент смещений волны Рэлея как функции относительной глубины

Поверхностная волна Рэлея в пространстве имеет фронт прямого кругового цилиндра, и из-за геометрического расхождения её амплитуда по мере распространения затухает пропорционально $1/\sqrt{r}$ (r — путь волны, радиус цилиндра, $r = V_R \cdot t$). Напомним, что амплитуда сферической волны затухает быстрее, пропорционально $1/r$. Таким образом, волна Рэлея является доминирующей помехой практически в любых сейсмогеологических условиях при работах как с продольными, так и с поперечными (SV) волнами.

Глава 14. Волна Лява

14.1. Общие замечания

Рассмотрим горизонтальный слой постоянной мощности h , лежащий на упругом полупространстве. Скорость V_1 и плотность ρ_1 в слое меньше, чем в полупространстве (V_2 и ρ_2), так что существует критический угол падения $\alpha_{кр}$ ($\sin \alpha_{кр} = \frac{V_1}{V_2}$). Будем считать, что имеем дело с горизонтально-поляризованной поперечной волной (SH), которая при выбранной модели среды не образует на границах обменных волн и для которой коэффициенты рассеивания (отражения A и прохождения B) были определены формулами:

$$A = \frac{\gamma_1 \cos \alpha_1 - \gamma_2 \cos \alpha_2}{\gamma_1 \cos \alpha_1 + \gamma_2 \cos \alpha_2}; \quad B = 1 + A = \frac{2\gamma_1 \cos \alpha_1}{\gamma_1 \cos \alpha_1 + \gamma_2 \cos \alpha_2}.$$

Здесь $\gamma_1 = V_1 \cdot \rho_1$ и $\gamma_2 = V_2 \cdot \rho_2$ — волновые сопротивления в слое и полупространстве, α_1 — угол падения, α_2 — угол прохождения.

В заданной модели среды есть и вторая граница — кровля слоя, дневная поверхность. Если рассматривать волну, подходящую к этой границе снизу, то волна, отражённая от дневной поверхности вниз, будет иметь амплитуду, определяемую аналогичной формулой:

$$A = \frac{\gamma_1 \cos \alpha_1 - \gamma_0 \cos \alpha_0}{\gamma_1 \cos \alpha_1 + \gamma_0 \cos \alpha_0}.$$

Волновое сопротивление воздуха $\gamma_0 = V_0 \cdot \rho_0$ можно считать равным нулю, так как плотность воздуха на несколько порядков ($\approx 10^3$) меньше плотности горных пород, даже залегающих прямо под дневной поверхностью: $\rho_0 \rightarrow 0$ и $\gamma_0 \ll \gamma_1$, т.е. $\gamma_0 = 0$. Поэтому $A_0 = 1$, вне зависимости

от угла подхода волны к поверхности отражённая SH -волна имеет ту же амплитуду, что и первичная.

Пока на нижнюю границу волна падает под углом, меньшим критического, коэффициент отражения меньше нуля ($A < 0$) и невелик по абсолютному значению. Соответственно, коэффициент прохождения B мало отличается от единицы. Это значит, что при каждом акте отражения бóльшая часть энергии первичной волны уходит из слоя в нижнее полупространство. При $\alpha_1 < \alpha_{кр}$ процесс многократных отражений в слое сопровождается быстрым затуханием амплитуд колебаний. Например, если $A = -\frac{1}{4}$, то отражённая от подошвы волна вчетверо слабее первичной. Учитывая, что $A_0 = 1$, двукратное отражение вверх имеет амплитуду, пропорциональную квадрату коэффициента отражения $A_2 \sim A^2 = \frac{1}{16}$, а трёхкратное отражение — пропорциональную кубу $A_3 \sim A^3 = -\frac{1}{64}$ и так далее. Видно, что процесс многократных отражений в слое действительно сопровождается быстрым затуханием амплитуды.

14.2. Образование волны Лява

Ситуация решительно меняется, если угол падения больше критического: $\alpha_1 > \alpha_{кр}$. Как было установлено в теории отражения и прохождения SH -волны (глава 8), коэффициенты рассеивания A и B в этом случае становятся комплексными величинами. Модуль коэффициента отражения A становится равным единице и перестаёт зависеть от угла падения. Это значит, что за критическим углом как отражение вниз от дневной поверхности A_0 , так и отражение вверх от подошвы слоя A_1 не сопровождается затуханием амплитуды колебаний отражённых волн: $|A_0| = 1$ и $|A_1| = 1$. Слой становится своеобразным волноводом, в котором волна, многократно отражаясь от границ слоя, распространяется вдоль слоя, практически не затухая.

Если мощность слоя невелика (как это обычно бывает в зоне малых скоростей), то многократные отражения в слое накладываются друг на друга, образуя сложную интерференционную волну. Поскольку параметры слоя (мощность h , скорость V_1) и полупространства (V_2) предполагаются неизменными, то и условия интерференции для каждого угла $\alpha_1 > \alpha_{кр}$ оказываются одинаковыми в разных точках слоя. В резуль-

тате в слое возникает своеобразная стоячая волна – в смысле фиксированной по вертикали картины интерференции. Однако эта волна не стоит, а движется вдоль слоя со скоростью $V_L = V_1/\sin \alpha_1$, при этом $V_L \leq V_1$.

Одновременно, при том же закритическом угле падения, в полупространстве возникает неоднородная плоская волна. Она имеет амплитуду, экспоненциально убывающую вдоль фронта по мере удаления по z от границы, и скорость, меньшую истинной (V_2), так как при $\alpha_1 > \alpha_{кр}$ $\sin \alpha_2 > 1$ и $V_L = V_2/\sin \alpha_2 < V_2$. В соответствии с законом Снеллиуса, кажущаяся скорость равна: $\frac{V_1}{\sin \alpha_1} = \frac{V_2}{\sin \alpha_2} = V_L$. И, очевидно, при этом $V_1 \leq V_L \leq V_2$. Следовательно, оба колебательных процесса – стоячая волна в слое и неоднородная волна в полупространстве – имеют одну и ту же скорость распространения вдоль слоя (вдоль Ox), как единый волновой процесс, называемый волной Лява по имени английского учёного (Love А.Е.Н.).

Так как интерференция в слое и затухание неоднородной волны в полупространстве зависят от частоты волновых колебаний, будем рассматривать колебания фиксированной частоты, то есть гармонику частоты ω .

В соответствии с вышеизложенным, опишем волновые гармоники в слое:

$$U_1(t, x, z) = a_1(z)e^{j\omega\left(t - \frac{z}{V_L}\right)}$$

и в полупространстве:

$$U_2(t, x, z) = a_2 \cdot e^{-bz} e^{j\omega\left(t - \frac{z}{V_L}\right)}.$$

Здесь $a_1(z)$ – неизвестная функция распределения амплитуды суммарных, интерференционных колебаний в слое по вертикали. Аналогичная функция $a_2 \cdot e^{-bz}$ соответствует поведению амплитуды неоднородной волны, как функции z – удаления от границы по вертикали. a_2 – константа, неизвестная величина, которую требуется определить.

Этим волнам соответствуют волновые уравнения одного и того же типа:

$$\nabla^2 U_1 = \frac{1}{V_1^2} \cdot \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}; \quad \nabla^2 U_2 = \frac{1}{V_2^2} \cdot \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}.$$

Предполагается, что фронт волны параллелен Oy , поэтому $\frac{\partial}{\partial y} = 0$, и $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. Подставив определение U_1 и производя сокращения и дифференцирование, получим:

$$\left(-\frac{j\omega}{V_L}\right)^2 a_1(z) + \frac{d^2 a_1(z)}{dz^2} = \left(-\frac{j\omega}{V_1}\right)^2 a_1(z).$$

Перегруппировав члены уравнения, запишем:

$$\left[\left(\frac{\omega}{V_1}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{V_L}\right)^2\right] \cdot a_1(z) + \frac{d^2 a_1(z)}{dz^2} = 0.$$

Если обозначить $g^2 = \left(\frac{\omega}{V_1}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{V_L}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{V_L}\right)^2 \left(\frac{V_L}{V_1} - 1\right)$, получим стандартное дифференциальное уравнение второго порядка, известное как уравнение Гельмгольца:

$$g^2 a_1(z) + \frac{d^2 a_1(z)}{dz^2} = 0, \quad \text{где } g = \frac{\omega}{V_L} \sqrt{\left(\frac{V_L}{V_1}\right)^2 - 1}.$$

Стандартное же его решение имеет вид

$$a_1(z) = C \sin gz + D \cos gz,$$

где C и D – константы, которые следует определить из граничных условий.

Запишем волновое уравнение для полупространства:

$$V_2^2 \nabla^2 U_2 = \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2},$$

или

$$\left(\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2}\right) = \frac{1}{V_2^2} \cdot \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}.$$

Подставив определение U_2 , получим после дифференцирования:

$$\left[\left(-\frac{j\omega}{V_L}\right)^2 + (-b)^2\right] \cdot a_2 e^{-bz} e^{j\omega\left(t - \frac{z}{V_L}\right)} = \left(\frac{j\omega}{V_L}\right)^2 a_2 e^{-bz} e^{j\omega\left(t - \frac{z}{V_L}\right)}.$$

Производя сокращения, получим возможность определить:

$$b = \left(\frac{\omega}{V_L}\right)^2 - \left(\frac{\omega}{V_2}\right)^2 = \left(\frac{\omega}{V_L}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{V_L}{V_2}\right)^2\right),$$

$$\text{или } b = \left(\frac{\omega}{V_L}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{V_L}{V_2}\right)^2}.$$

Для определения введённых в описание констант и, прежде всего, скорости V_L волны Лява, используем граничные условия. При этом плоскость xOy совместим с подошвой слоя ($z = 0$), а кровлю слоя мощностью h , параллельного xOy , зададим уравнением $z = -h$.

Дневная поверхность является поверхностью, свободной от напряжений. Для SH -волны актуально касательное напряжение p_{zy} . В соответствии с законом Гука, $p_{zy} = 2\mu e_{zy}$, а сдвиговая деформация e_{zy} определяется выражением $e_{zy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_y}{\partial z} + \frac{\partial U_x}{\partial y} \right)$. Так как $\frac{\partial}{\partial y} = 0$, получаем просто $e_{zy} = \frac{1}{2} \frac{\partial U_y}{\partial z}$. В слое $U_y \equiv U_1$, $\mu \equiv \mu_1 = V_1^2 \rho_1$. Таким образом, первое граничное условие на поверхности $z = -h$ можно записать в виде:

$$\left(p_{zy} = V_1^2 \rho_1 \frac{\partial U_1}{\partial z} \right) \Big|_{z=-h} = 0,$$

$$\text{или } V_1^2 \rho_1 \frac{\partial a_1(z)}{\partial z} e^{j\omega(t - \frac{z}{V_L})} \Big|_{z=-h} = 0.$$

Сокращая на отличные от нуля $V_1^2 \rho_1 e^{j\omega(t - \frac{z}{V_L})}$ и подставляя определение $a_1(z)$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial z} (C \sin gz + D \cos gz) \Big|_{z=-h} = 0, \quad \text{или}$$

$$gC \cos gz - gD \sin gz \Big|_{z=-h} = 0.$$

Сокращая на $g \neq 0$, подставив $z = -h$ и учитывая нечётность тангенса, в итоге получим:

$$\text{tg } gh = -\frac{C}{D}.$$

Подошва слоя является внутренней границей, и на ней граничные условия требуют равенства смещений и напряжений.

Запишем для смещений:

$$U_1(t, x, z) \Big|_{z=0} = U_2(t, x, z).$$

Подставляя введённые определения U_1 и U_2 , получим:

$$(C \sin gz + D \cos gz) e^{j\omega(t - \frac{x}{v_L})} \Big|_{z=0} = a_2 e^{-bz} e^{j\omega(t - \frac{x}{v_L})}$$

Сокращая комплексную гармонику и подставляя $z = 0$, найдём:

$$D = a_2.$$

Для напряжения p_{zy} запишем по аналогии с первым граничным условием:

$$V_1^2 \rho_1 \cdot \frac{da_1(z)}{dz} \cdot e^{j\omega(t - \frac{x}{v_L})} \Big|_{z=0} = V_2^2 \rho_2 \cdot \frac{d}{dz} (e^{-bz}) \cdot e^{j\omega(t - \frac{x}{v_L})}.$$

После очевидных сокращений и подстановки $a_1(z)$ получим:

$$V_1^2 \rho_1 \cdot \frac{d}{dz} (C \sin gz + D \cos gz) \Big|_{z=0} = -V_2^2 \rho_2 a_2 b e^{-bz}.$$

Дифференцируя и подставляя $z = 0$, запишем:

$$V_1^2 \rho_1 \cdot gC = -V_2^2 \rho_2 a_2 b.$$

$$\text{Отсюда найдём } \frac{C}{a_2} = -\frac{V_2^2 \rho_2}{V_1^2 \rho_1} \cdot \frac{b}{g}.$$

Но, учитывая, что $a_2 = 0$ и $-c/D = \text{tg } gh$, запишем:

$$-\text{tg } gh = -\frac{V_2^2 \rho_2}{V_1^2 \rho_1} \cdot \frac{b}{g},$$

где

$$b = \left(\frac{\omega}{V_L} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{V_L}{V_2} \right)^2}; \quad g = \left(\frac{\omega}{V_L} \right) \sqrt{\left(\frac{V_L}{V_1} \right)^2 - 1}.$$

Поэтому окончательно получим:

$$\operatorname{tg} \left\{ h \left(\frac{\omega}{V_L} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{V_L}{V_1} \right)^2} \right\} = \frac{V_2^2 \rho_2}{V_1^2 \rho_1} \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{V_L}{V_2} \right)^2}{\left(\frac{V_L}{V_1} \right)^2 - 1}},$$

— трансцендентное уравнение, которое в явном виде не решается относительно скорости V_L . Сразу скажем, что существует дисперсия скорости волны Лява, то есть $V_L = V_L(\omega)$. Поэтому попробуем оценить V_L , используя установленные пределы изменения: $V_1 \leq V_L \leq V_2$.

Если $V_L = V_1$, то аргумент тангенса обращается в нуль, а правая часть его определения стремится к бесконечности. Этого быть не может, так как $\operatorname{tg} 0 = 0$. Значит, обнуление подкоренного выражения при $V_L = V_1$ необходимо скомпенсировать неограниченным увеличением множителя перед корнем: $\omega \rightarrow \infty$. Тогда произведение нуля на бесконечность может обратить аргумент в $\frac{\pi}{2}$, как это и должно быть для тангенса, равного бесконечности. Таким образом, для очень больших частот скорость волны Лява мало отличается от скорости в слое: при $\omega \rightarrow \infty$ длина волны $\Lambda_L = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow 0$ и $V_L = V_1$. Бесконечно большим частотам соответствует столь малая длина волны, что волна Лява распространяется со скоростью V_L , равной скорости в слое V_1 .

Если же $V_L = V_2$, то в нуль обращается правая часть определения тангенса, тогда как аргумент его не равен нулю. Для выполнения условия $\operatorname{tg} 0 = 0$ необходимо, чтобы нулю равнялась частота ($\omega = 0$). Значит, при стремлении частоты к нулю, а длины волны — к бесконечности скорость волны Лява должна быть равной V_2 . Длина волны столь велика, что в сравнении с ней мощность слоя бесконечно мала, и волна просто «не замечает» слоя и распространяется со скоростью в полупространстве V_2 .

Таким образом, скорость волны Лява зависит от частоты, то есть волна распространяется с дисперсией скорости ($V_L = V_L(\omega)$, или $V_L = V_L(\Lambda_L)$). Правда, эта дисперсия вызвана особенностями волны, а не

среды. Так что правильнее говорить о дисперсии кажущейся скорости, или квазидисперсии. Настоящая дисперсия есть следствие неидеальной упругости среды.

Определим арктангенс из полученного трансцендентного уравнения:

$$h \left(\frac{\omega}{V_L} \right) \sqrt{\left(\frac{V_L}{V_1} \right)^2 - 1} = \text{Arctg} \left\{ \frac{V_2^2 \rho_2}{V_1^2 \rho_1} \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{V_L}{V_2} \right)^2}{\left(\frac{V_L}{V_1} \right)^2 - 1}} \right\} + k\pi$$

Арктангенс – функция многозначная: $k = 0, 1, 2, \dots$, соответственно, и $V_L(\omega)$ также многозначна. Принято называть эту зависимость, вычисленную для $k = 0$, основным тоном (фундаментальной модой), а все остальные – обертонами (нормальными модами) порядка 1, 2, 3 и так далее.

Поскольку в явном виде $V_L(\omega)$ невозможно представить, будем использовать обратную зависимость $\omega(V_L)$, – ведь для V_L совершенно чётко определены границы изменения скорости волны Лява: $V_1 \leq V_L \leq V_2$.

Заметим, что $\frac{\omega}{V_L} = \frac{2\pi f}{V_L} = \frac{2\pi}{TV_L} = \frac{2\pi}{\Lambda_L} = 2\pi\kappa_L = \nu_L$. Здесь ω – круговая, или циклическая, частота колебаний (рад/с), f – их (линейная) частота (Гц = $\frac{1}{\text{с}}$), T – период колебаний (с), Λ_L – длина волны (м), κ_L – пространственная частота ($\frac{1}{\text{м}}$) и ν_L – круговая пространственная частота (рад/м).

Определим ω из уравнения:

$$\omega = \frac{V_L}{h} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{V_L}{V_1} \right)^2 - 1}} \cdot \left(\text{Arctg} \left\{ \frac{V_2^2 \rho_2}{V_1^2 \rho_1} \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{V_L}{V_2} \right)^2}{\left(\frac{V_L}{V_1} \right)^2 - 1}} \right\} + k\pi \right),$$

или

$$f = \frac{V_L}{2h} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{V_L}{V_1} \right)^2 - 1}} \cdot \left(\frac{1}{\pi} \text{Arctg} \left\{ \frac{V_2^2 \rho_2}{V_1^2 \rho_1} \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{V_L}{V_2} \right)^2}{\left(\frac{V_L}{V_1} \right)^2 - 1}} \right\} + k \right).$$

Все дисперсионные кривые $V_L(f)$ имеют общий предел: $V_L = V_1$ при $f \rightarrow \infty$ — на бесконечно больших частотах. Если же $V_L = V_2$, то арктангенс равен нулю, и начальная частота для каждой кривой своя:

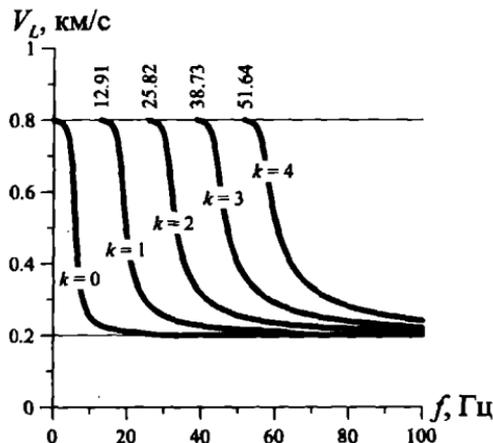
$$f_{\text{нач}} = k \cdot \frac{V_2}{2h\sqrt{\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 - 1}} = k \cdot \frac{V_1}{2h\sqrt{1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2}} = k\Delta f;$$

$$\Delta f = \frac{V_2}{2h\sqrt{\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 - 1}}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Для основного тона коэффициент $k = 0$, $f_{\text{нач}} = 0$; для k -го обертона $f_{\text{нач}} = k\Delta f$, то есть начальные точки кривых ($V_L = V_2$) располагаются на оси частот, начиная с $f = 0$, с постоянным шагом Δf . Обратим внимание на то, что интервал Δf обратно пропорционален мощности слоя и соотношению скоростей в слое и полупространстве — чем больше h и V_2/V_1 , тем меньше этот интервал.

На рис.14.1 представлены дисперсионные кривые волны Лява ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) для $V_1 = 0.2 \frac{\text{км}}{\text{с}}$, $V_2 = 0.8 \frac{\text{км}}{\text{с}}$ и $k = 0.008$ км. Как видно, на самых низких частотах существует лишь основная мода (тон). С ростом частоты число возможных мод (обертонов) возрастает. Для выбранных параметров разреза (V_1, V_2, h) начальные частоты k -того обертона равны: $f_{\text{нач}} = 12.91 \cdot k$ Гц.

Рис. 14.1. Дисперсионные кривые волны Лява



Приложения

Приложение 1. Расчёт коэффициентов рассеивания SH-волны

В данном приложении приведён программный код (на языке программирования Си, стандарт C99) расчёта спектральных коэффициентов рассеивания для SH-волны.

Порядок компиляции программного кода:

```
gcc -o zoerpritz_sh.exe zoerpritz_sh.c -lm.
```

Параметры запуска программы:

```
./zoerpritz_sh.exe parameters,
```

где **parameters** — список параметров граничащих сред в следующем порядке:

- вариант расчёта (1 — для нисходящей волны; 2 — для восходящей волны);
- скорость S-волны в первой среде (км/с);
- плотность первой среды (г/см³);
- скорость S-волны во второй среде (км/с);
- плотность второй среды (г/см³).

Параметры указываются через пробел.

Пример задания параметров:

Параметры запуска программы

```
1 ./zoerpritz_sh 1 2.0 1.5 4.0 2.0
```

Программа генерирует выходной файл `zoeppritz_sh.out`, в который записываются параметры расчёта, далее по колону — значения угла падения и действительных и мнимых частей коэффициентов отражения и прохождения. По умолчанию значения рассчитываются с шагом $1/2$ градуса, т.е. указывается 180 точек в диапазоне от 0° до 90° . Шаг расчёта можно изменить, переопределив макроподстановку `ZOEP_POINTS` в исходном коде программы.

Расчёт коэффициентов рассеивания SH-волны

```

1 #include <stdlib.h>
2 #include <stdio.h>
3 #include <limits.h>
4 #include <complex.h>
5 #include <math.h>
6
7 #define ZOEP_CURVES 2
8 #define ZOEP_POINTS 180
9 #define OUTPUT_FILE "./zoeppritz_sh.out"
10
11 _Complex float make_complex(float real, float image)
12 {
13     _Complex float tmp;
14     tmp = real + (image)*I;
15     return tmp;
16 }
17
18 /*****
19 Вводные параметры:
20 int task          ( =1 ) нисходящая волна
21                  ( =2 ) восходящая волна
22 float vs_1       скорость S-волн в 1 среде
23 float rho_1      плотность 1 среды
24 float vs_2       скорость S-волн во 2 среде
25 float rho_2      плотность 2 среды
26 *****/
27
28 int main (int argc, char *argv[]) {
29     _Complex float A;          // коэффициент отражения
30     _Complex float B;          // коэффициент прохождения
31     _Complex float sin1, cos1; // тригоном. ф-ии угла падения
32     _Complex float sin2, cos2; // тригоном. ф-ии угла прохождения
33     _Complex float g1, g2;    // акустические жесткости
34     float vs_1, rho_1, vs_2, rho_2, alpha;
35     float gc;
36     int num, task, i, j, k, l, m;
37     FILE *fp;
38
39     if (argc < 6) {
40         fprintf(stderr, "Not enough input data\n");
41         exit(-3);
42     }
43
44     /* Считывание входных параметров */

```

```

45  task = atoi(argv[1]);
46  vs_1 = atof(argv[2]);
47  rho_1= atof(argv[3]);
48  vs_2 = atof(argv[4]);
49  rho_2= atof(argv[5]);
50  num  = ZOEP_POINTS;
51
52  /* Расчет акустических жесткостей */
53  g1 = make_complex (vs_1 * rho_1, 0);
54  g2 = make_complex (vs_2 * rho_2, 0);
55
56  /* Создание выходного файла */
57  fp=fopen(OUTPUT_FILE, "w+t");
58  if(!fp) {
59      perror("no file to write\n");
60      exit(-1);
61  }
62
63  /* Запись параметров */
64  fprintf(fp, "task %d\n",      task );
65  fprintf(fp, "Vs_1= %7.5f\n", vs_1 );
66  fprintf(fp, "Rho_1= %7.5f\n", rho_1);
67  fprintf(fp, "Vs_2= %7.5f\n", vs_2 );
68  fprintf(fp, "Rho_2= %7.5f\n", rho_2);
69
70  fprintf(fp, "alpha\tAss.re\tAss.im\tBss.re\tBss.im\n");
71
72  /*Расчет*/
73  for ( alpha=0;
74      alpha < (M_PI/2.0*(1.0+1.0/num));
75      alpha+=M_PI/(2.0*num)
76      ) {
77      sin1 = csinf(make_complex(alpha, 0));
78      sin2 = sin1 * make_complex (vs_2 / vs_1, 0);
79      cos1 = csqrtf (1 - sin1 * sin1);
80      cos2 = csqrtf (1 - sin2 * sin2);
81      if (alpha > asin (vs_1 / vs_2)) {
82          cos2 = - cos2; //обеспечение загрузки волны
83      }
84      A = (g1 * cos1 - g2 * cos2) / (g1 * cos1 + g2 * cos2);
85      B = A + make_complex (1, 0);
86      fprintf ( fp,
87              "%6.1f\t%6.3f\t%6.3f\t%6.3f\t%6.3f\n",
88              alpha*M_PI,
89              crealf(A), cimagf(A),
90              crealf(B), cimagf(B)
91              );
92  }
93  fclose (fp);
94  }

```

Приложение 2. Расчёт коэффициентов рассеивания P - и SV -волн

В данном приложении приведён программный код (на языке программирования Си, стандарт C99) расчёта спектральных коэффициентов рассеивания для P - и SV -волн.

Порядок компиляции программного кода:

```
gcc -o zoeppritz_psv.exe zoeppritz_psv.c -lm.
```

Параметры запуска программы:

```
./zoeppritz_psv.exe parameters,
```

где **parameters** — список параметров граничащих сред в следующем порядке:

- вариант расчёта (1 — для нисходящей P -волны; 2 — для нисходящей SV -волны; 3 — для восходящей P -волны; 4 — для восходящей SV -волны);
- скорость P -волны в первой среде (км/с);
- скорость S -волны в первой среде (км/с);
- плотность первой среды (г/см³);
- скорость P -волны во второй среде (км/с);
- скорость S -волны во второй среде (км/с);
- плотность второй среды (г/см³).

Параметры указываются через пробел.

Пример задания параметров:

Параметры запуска программы

```
1 ./zoeppritz_psv 1 2.0 1.0 1.5 4.0 2.0 2.0
```

Программа генерирует выходной файл `zoeppritz_psv.out`, в который записываются параметры расчёта, далее поколочно — значения угла падения и действительных и мнимых частей коэффициентов отражения и прохождения. По умолчанию значения рассчитываются с шагом $1/2$ градуса, т.е. указывается 180 точек в диапазоне от 0° до

90°. Шаг расчёта можно изменить, переопределив макроподстановку ZOEPR_POINTS в исходном коде программы.

При работе программы проводится проверка входных параметров на корректность. В случае, если соотношение V_S/V_P превышает $1/\sqrt{2}$, генерируется сообщение об ошибке.

Расчет коэффициентов рассеивания P- и SV-волн

```

1 #include <stdlib.h>
2 #include <stdio.h>
3 #include <limits.h>
4 #include <complex.h>
5 #include <math.h>
6
7 #define ZOEPR_CURVES 2
8 #define ZOEPR_POINTS 180
9 #define OUTPUT_FILE "../zoeprritz_psv.out"
10
11 _Complex float make_complex(float real, float image)
12 {
13     _Complex float tmp;
14     tmp = real + (image)*I;
15     return tmp;
16 }
17
18 /*****
19 Вводные параметры:
20 int task           нисходящая волна: (=1 P-волна; =2 S-волна)
21                   восходящая волна: (=3 P-волна; =4 S-волна)
22 float vp_1        скорость P-волны в 1 среде
23 float vs_1        скорость S-волны в 1 среде
24 float rho_1       плотность 1 среды
25 float vp_2        скорость P-волны во 2 среде
26 float vs_2        скорость S-волны во 2 среде
27 float rho_2       плотность 2 среды
28 *****/
29
30 int main (int argc, char **argv) {
31     _Complex float a, b, d, r, x;
32     _Complex float GAC[5], UPC;
33     _Complex float A[4][4];
34     _Complex float R[4][4];
35     _Complex float B[4];
36     _Complex float D[5];
37     _Complex float X[4];
38     float c[4][4], vp_1, vs_1, rho_1, vp_2, vs_2, rho_2, alpha;
39     float s, t, tt, ttt, cr1, ci1, cr2, ci2, cr3, ci3, cr4, ci4;
40     float gc;
41     int num, task, i, j, k, l, m;
42     FILE *fp;
43
44     if (argc < 8) {
45         fprintf(stderr, "Not enough input data\n");
46         exit (-3);
47     }

```

```

48      /* Считывание входных параметров */
49      task = atoi(argv[1]);
50      vp_1 = atof(argv[2]);
51      vs_1 = atof(argv[3]);
52      rho_1 = atof(argv[4]);
53      vp_2 = atof(argv[5]);
54      vs_2 = atof(argv[6]);
55      rho_2 = atof(argv[7]);
56      num = ZOEK_POINTS;
57
58
59      /* Проверка корректности данных */
60      if (vs_2 <= 0.) exit(-2);
61      if (vs_1 / vp_1 > sqrt(1./2)) exit(-2);
62      if (vs_2 / vp_2 > sqrt(1./2)) exit(-2);
63
64      /* Создание выходного файла */
65      fp=fopen(OUTPUT_FILE, "w+t");
66      if(!fp) exit(-1);
67
68      /* Запись параметров */
69      fprintf(fp, "task %d\n", task );
70      fprintf(fp, "Vp_1= %7.5f\n", vp_1 );
71      fprintf(fp, "Vs_1= %7.5f\n", vs_1 );
72      fprintf(fp, "Rho_1= %7.5f\n", rho_1);
73      fprintf(fp, "Vp_2= %7.5f\n", vp_2 );
74      fprintf(fp, "Vs_2= %7.5f\n", vs_2 );
75      fprintf(fp, "Rho_2= %7.5f\n", rho_2);
76
77      switch(task) {
78          case 1:
79              case 3:{
80                  fprintf(fp, "alpha\tApp.re\tApp.im\tAps.re\tAps.im
81                      \tBpp.re\tBpp.im\tBps.re\tBps.im\n");
82                  break;
83              }
84              case 2:
85              case 4: {
86                  fprintf(fp, "alpha\tAps.re\tAps.im\tAss.re\tAss.im
87                      \tBsp.re\tBsp.im\tBss.re\tBss.im\n");
88                  break;
89              }
90              default: {
91                  fclose(fp);
92                  remove(OUTPUT_FILE);
93                  exit(-2);
94              }
95      }
96
97      /*Расчет матрицы постоянными коэффициентами при СКР
98      - матрица Lij, без тригоном.функций*/
99      for(i=0;i<4;i++)
100          for(j=0;j<4;j++)
101              c[i][j]=1.0;
102
103      c[0][1] = -1.0;
104      c[1][2] = -1.0;
105      c[2][0] = vp_1 * rho_1;

```

```

104 c[2][1] = vs_1 * rho_1;
105 c[2][2] = vp_2 * rho_2;
106 c[2][3] = - vs_2 * rho_2;
107 c[3][0] = - vs_1 * rho_1 * vs_1 / vp_1;
108 c[3][1] = vs_1 * rho_1;
109 c[3][2] = vs_2 * rho_2 * vs_2 / vp_2;
110 c[3][3] = vs_2 * rho_2;
111
112 /*Расчет*/
113 for ( alpha=0;
114       alpha < (M_PI/2.0*(1.0+1.0/num));
115       alpha+=M_PI/(2.0*num)) {
116
117     s = sin(alpha);
118
119     /*Расчет матрицы переменных коэффициентов при СКР
120     - матрица Lij, тригоном.функции угла падения*/
121     switch(task)
122     {
123     case 1:
124     case 3:
125         /* тригоном.функции для Р-волны */
126         /* alpha_P1 */
127         t = sqrt(1. - s * s);
128         gc = c[2][0] * t;
129         tt = 2. * s * t;
130
131         A[0][0] = make_complex (s, 0.);
132         A[1][0] = make_complex (t, 0.);
133         A[3][0] = make_complex (tt, 0.);
134         GAC[0] = make_complex (gc, 0.);
135         GAC[4] = GAC[0];
136
137         /* alpha_S1 */
138         t= s * vs_1 / vp_1;
139         tt = sqrt(1. - t * t);
140         gc = c[2][1] * tt;
141
142         A[0][1] = make_complex(tt,0.);
143         A[1][1] = make_complex(t,0.);
144         GAC[1] = make_complex(gc,0.);
145
146         ttt=2.*t*tt;
147         A[2][1]=make_complex(ttt,0.);
148
149         ttt=1.-2.0*t*tt;
150         A[2][0]=make_complex(ttt,0.);
151         A[3][1]=make_complex(ttt,0.);
152
153         /* alpha_P2 */
154         t=svp_2/vp_1;
155         A[0][2]=make_complex(t,0.);
156
157         if(t<=1.) {
158             tt=sqrt(1.-t*t);
159             gc=c[2][2]*tt;
160             ttt=2.*t*tt;
161

```

```

162         A[1][2]=make_complex(tt,0.);
163         A[3][2]=make_complex(ttt,0.);
164         GAC[2]=make_complex(gc,0.);
165     }
166     else {
167         tt=-sqrt(t*t-1.);
168         gc=c[2][2]*tt;
169         ttt=2.*t*tt;
170
171         A[1][2]=make_complex(0.,tt);
172         A[3][2]=make_complex(0.,ttt);
173         GAC[2]=make_complex(0.,gc);
174     }
175     /* alpha_S2*/
176     t=s*vs_2/vp_1;
177     tt=1.-2.*t*t;
178     A[1][3]=make_complex(t,0.);
179     A[2][2]=make_complex(tt,0.);
180     A[3][3]=make_complex(tt,0.);
181     if(t<=1.) {
182         tt=sqrt(1.-t*t);
183         gc=c[3][3]*tt;
184         ttt=2.*t*tt;
185
186         A[0][3]=make_complex(tt,0.);
187         A[2][3]=make_complex(ttt,0.);
188         GAC[3]=make_complex(gc,0.);
189     }
190     else {
191         tt=-sqrt(t*t-1.);
192         gc=c[3][3]*tt;
193         ttt=2.*t*tt;
194
195         A[0][3]=make_complex(0.,tt);
196         A[2][3]=make_complex(0.,ttt);
197         GAC[3]=make_complex(0.,gc);
198     }
199     break;
200
201 case 2:
202 case 4:
203     /* тригоном. функции для S-воны */
204     /* alpha_S1*/
205     t=sqrt(1.-s*s);
206     gc=c[2][1]*t;
207     tt=2.*s*t;
208     ttt=1.-2.*s*s;
209
210     A[0][1]=make_complex(t,0.);
211     A[1][1]=make_complex(s,0.);
212     A[2][0]=make_complex(ttt,0.);
213     A[2][1]=make_complex(tt,0.);
214     A[3][1]=make_complex(ttt,0.);
215     GAC[1]=make_complex(gc,0.);
216     GAC[4]=GAC[1];
217
218     /* alpha_P1 */
219     t=s*vp_1/vs_1;

```

```

220 A[0][0]=make_complex(t,0.);
221 if(t<=1.) {
222     tt=sqrt(1.-t*t);
223     gc=c[2][0]*tt;
224     ttt=2.*t*tt;
225
226     A[1][0]=make_complex(tt,0.);
227     A[3][0]=make_complex(ttt,0.);
228     GAC[0]=make_complex(gc,0.);
229 }
230 else {
231     tt=sqrt(t*t-1.);
232     gc=c[2][0]*tt;
233     ttt=2.*t*tt;
234
235     A[1][0]=make_complex(0.,tt);
236     A[3][0]=make_complex(0.,ttt);
237     GAC[0]=make_complex(0.,gc);
238 }
239 /* alpha_P2 */
240 t=s*vp_2/vs_1;
241 A[0][2]=make_complex(t,0.);
242 if(t<=1.) {
243     tt=sqrt(1.-t*t);
244     ttt=2.*t*tt;
245     gc=c[2][2]*tt;
246     A[1][2]=make_complex(tt,0.);
247     A[3][2]=make_complex(ttt,0.);
248     GAC[2]=make_complex(gc,0.);
249 }
250 else {
251     tt=-sqrt(t*t-1.);
252     gc=c[2][2]*tt;
253     ttt=2.*t*tt;
254
255     A[1][2]=make_complex(0.,tt);
256     A[3][2]=make_complex(0.,ttt);
257     GAC[2]=make_complex(0.,gc);
258 }
259 /* alpha_s2 */
260 t=s*vs_2/vs_1;
261 tt=1.-2.*t*tt;
262
263 A[1][3]=make_complex(t,0.);
264 A[2][2]=make_complex(tt,0.);
265 A[3][3]=make_complex(tt,0.);
266 if(t<=1.) {
267     tt=sqrt(1.-t*t);
268     ttt=2.*t*tt;
269     gc=c[3][3]*tt;
270
271     A[0][3]=make_complex(tt,0.);
272     A[2][3]=make_complex(ttt,0.);
273     GAC[3]=make_complex(gc,0.);
274 }
275 else {
276     tt=-sqrt(t*t-1.);
277     ttt=2.*t*tt;

```

```

278         gc=c[3][3]*tt;
279         A[0][3]=make_complex(0.,tt);
280         A[2][3]=make_complex(0.,ttt);
281         GAC[3]=make_complex(0.,gc);
282     }
283     break;
284 }
285
286 /* коэффициенты уравнения */
287 for(i=0;i<4;i++)
288     for(j=0;j<4;j++)
289         A[i][j]=A[i][j]*c[i][j];
290
291 switch(task) {
292     case 1:
293     case 3:
294         for(i=0;i<4;i++) {
295             k=i+2;
296             B[i]=A[i][0]*(float)pow((double)-1.,(
297                 double)k);
298         }
299         break;
300     case 2:
301     case 4:
302         for(i=0;i<4;i++){
303             k=i+1;
304             B[i]=A[i][1]*(float)pow((double)-1.,(
305                 double)k);
306         }
307         break;
308 }
309
310 /* Решение уравнений */
311 for(k=0;k<5;k++) {
312     for(i=0;i<4;i++)
313         for(j=0;j<4;j++)
314             R[i][j]=A[i][j];
315
316     if(k>0) {
317         l=k-1;
318         for(m=0;m<4;m++)
319             R[m][l]=B[m];
320     }
321
322     D[k] =(R[0][0]*R[1][1]-R[0][1]*R[1][0])* \
323             (R[2][2]*R[3][3]-R[2][3]*R[3][2]);
324     D[k]+=(R[0][2]*R[1][0]-R[0][0]*R[1][2])* \
325             (R[2][1]*R[3][3]-R[2][3]*R[3][1]);
326     D[k]+=(R[0][0]*R[1][3]-R[0][3]*R[1][0])* \
327             (R[2][1]*R[3][2]-R[2][2]*R[3][1]);
328     D[k]+=(R[0][1]*R[1][2]-R[0][2]*R[1][1])* \
329             (R[2][0]*R[3][3]-R[2][3]*R[3][0]);
330     D[k]+=(R[0][3]*R[1][1]-R[0][1]*R[1][3])* \
331             (R[2][0]*R[3][2]-R[2][2]*R[3][0]);
332     D[k]+=(R[0][2]*R[1][3]-R[0][3]*R[1][2])* \
333             (R[2][0]*R[3][1]-R[2][1]*R[3][0]);

```

```
334     for(i=0;i<4;i++) {
335         k=i+1;
336         X[i]=D[k]/D[0];
337     }
338
339     UPC=-GAC[4];
340
341     for(i=0;i<4;i++)
342     {
343         UPC+=X[i]*X[i]*GAC[i];
344     }
345     printf("%4.1f\t%f %f\n", alpha*180./M_PI,crealf(UPC),
346           cimagf(UPC));
347
348     cr1=crealf(X[0]);      ci1=cimagf(X[0]);
349     cr2=crealf(X[1]);      ci2=cimagf(X[1]);
350     cr3=crealf(X[2]);      ci3=cimagf(X[2]);
351     cr4=crealf(X[3]);      ci4=cimagf(X[3]);
352
353     fprintf(fp,"%6.1f\t%.3f\t%.3f\t%.5.3f\t%.3f\t%.3f\t%.3f
354           \t%.3f\t%.3f\n",
355           alpha*180./M_PI,cr1,ci1,cr2,ci2,cr3,ci3,
356           cr4,ci4);
357 }
```

Литература

- [1] *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. — М.: Изд-во АН СССР, 1957.
- [2] *Жданов М.С.* Теория обратных задач и регуляризации в геофизике. — М.: Научный мир, 2004.
- [3] *Кауфман А.А., Левшин А.Л., Ларнер К.Л.* Введение в теорию геофизических методов. Части 3 — 5. Акустические и упругие волновые поля в геофизике. — М.: Недра, 2003.
- [4] *Рябинкин Л.А.* Теория упругих волн: учебн. пособие для вузов. — М.: Недра, 1987.
- [5] *Саваренский Е.Ф.* Сейсмические волны. — М.: Недра, 1972.

Об авторе



**Лев Александрович
Сердобольский**
(16.01.1936 — 13.04.2010)

Лев Александрович Сердобольский родился в Саратове, в 1958 году окончил факультет газонефтяной геологии и геофизики Московского нефтяного института, после окончания работал в 1958–61 гг. в полевых сейсмических партиях. С 1961 г. Лев Александрович — сотрудник кафедры полевой геофизики (ассистент кафедры; технический руководитель работ РНП в Пакистане в 1964–67 гг.; доцент кафедры).

Лев Александрович внёс большой вклад в развитие метода РНП, в теорию спектральных представлений и преобразований в сейсморазведке, теорию интерференционных систем. Он является автором 39 научных публикаций, более десяти учебных пособий и учебно-методических работ.

Оглавление

Предисловие	5
Введение	6
Используемые переменные	8
Глава 1. Основы теории деформаций	11
1.1. Понятие о деформации	11
1.2. Компоненты малой деформации	14
1.3. Разложение малой деформации на удлинения, сдвиги и повороты	20
1.4. Выражение вектора упругого смещения через скалярный и векторный потенциалы	21
1.5. Преобразование компонент тензора чистой деформации к новой системе координат	25
1.6. Поверхность деформации	30
1.7. Относительное объемное расширение	33
Глава 2. Основы теории напряжений	35
2.1. Понятие о напряжении	35
2.2. Компоненты тензора напряжения	38
2.3. Уравнения динамического равновесия в напряжениях	41
2.4. Попарное равенство касательных напряжений	43
2.5. Преобразование компонент тензора напряжения к новым осям координат	46
2.6. Поверхность напряжений	48
Глава 3. Связь напряжений и деформаций	51
3.1. Физические основы связи	51

3.2.	Закон Гука для главных напряжений и удлинений	55
3.3.	Общие соотношения закона Гука для однородной изотропной идеально упругой среды	56
Глава 4.	Кинематические уравнения динамического равновесия	61
4.1.	Полная система уравнений для идеально упругой изотропной среды	61
4.2.	Уравнения динамического равновесия в упругих смещениях	63
4.3.	Частные формы уравнения динамического равновесия	67
4.3.1.	Безвихревое поле	67
4.3.2.	Эквиволумиальное поле	67
4.3.3.	Уравнение для дилатации вектора упругих смещений	68
4.3.4.	Уравнение для ротации вектора упругих смещений	69
4.3.5.	Уравнение для скалярного потенциала смещений	69
4.3.6.	Уравнение для вектор-потенциала смещений	70
4.3.7.	Колебания, возбуждаемые жёстким экраном	71
4.3.8.	Обобщение частных случаев	72
Глава 5.	Решение уравнений динамического равновесия	74
5.1.	Спектральный метод решения	74
5.2.	Анализ полученного решения	79
5.3.	Решение волнового уравнения для сферической волны	85
Глава 6.	Механизм распространения упругой волны	88
6.1.	Постановка задачи	88
6.2.	Вторая формула Грина	89
6.3.	Вывод формулы Кирхгофа	94
6.4.	Истолкование формулы Кирхгофа	99
Глава 7.	Сейсмические волны на границе раздела упругих сред	104
7.1.	Характеристики границ раздела	104
7.2.	Граничные условия	109
7.3.	Типы первичных волн и образуемые ими на границе вторичные волны	114

Глава 8. Отражение и прохождение SH-волны	120
8.1. Описание волн и создаваемых ими на границе напряжений	120
8.2. Граничные условия и спектральные коэффициенты рассеивания	122
8.3. Волны рассеивания при падении SH-волны на кровлю низкоскоростной среды	126
8.4. Волны рассеивания при падении SH-волны на кровлю высокоскоростной среды	129
8.5. Образование преломлённой волны	141
Глава 9. Обобщённые уравнения для коэффициентов рассеивания плоских P- и SV-волн	147
9.1. Общие замечания и определения	147
9.2. Описание волн и создаваемых ими на границе напряжений	151
9.2.1. Нисходящие продольные волны	151
9.2.2. Нисходящие SV-волны	153
9.2.3. Восходящие P-волны	155
9.2.4. Восходящие S-волны	157
9.3. Граничные условия и обобщённые уравнения Цёппритца	159
Глава 10. Отражение и преломление плоской продольной волны	167
10.1. Уравнения Цёппритца для P-волны	167
10.2. Волны рассеивания, возбуждаемые P-волной на кровле низкоскоростной среды	172
10.3. Волны рассеивания, возбуждаемые P-волной на кровле высокоскоростной среды	176
Глава 11. Отражение и прохождение поперечной вертикально поляризованной плоской волны	185
11.1. Уравнения Цёппритца для SV-волны	185
11.2. Волны рассеивания, возбуждаемые SV-волной на границе	189
Глава 12. Отражение сейсмических волн от дневной поверхности	204
12.1. Уравнения Цёппритца для дневной поверхности	204
12.2. Падение P-волны на дневную поверхность	206
12.3. Падение SV-волны на дневную поверхность	208

Глава 13. Волна Рэлея	214
13.1. Граничные условия и потенциалы упругих смещений	214
13.2. Характер смещений, переносимых волной Рэлея	220
Глава 14. Волна Лява	227
14.1. Общие замечания	227
14.2. Образование волны Лява	228
Приложения	236
Приложение 1. Расчёт коэффициентов рассеивания SH-волны	236
Приложение 2. Расчёт коэффициентов рассеивания P- и SV- волн	239
Литература	247
Об авторе	248

Сердобольский Лев Александрович

РАСПРОСТРАНЕНИЕ СЕЙСМИЧЕСКИХ ВОЛН

Редактор *Т.К. Рубинская*
Технический редактор *Г.В. Лехова*
Корректор *Е.М. Фёдорова*
Компьютерная вёрстка *Ю.А. Титова*

Подписано в печать 27.11.12. Формат 60×90^{1/16}. Гарнитура «Times».
Печать офсетная. Печ. л. 16,0. Уч.-изд. л. 16,2. Тираж 500 экз. Заказ 2072

Отпечатано в ППП «Типография «Наука»
121099, Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 978-5-91961-088-5

