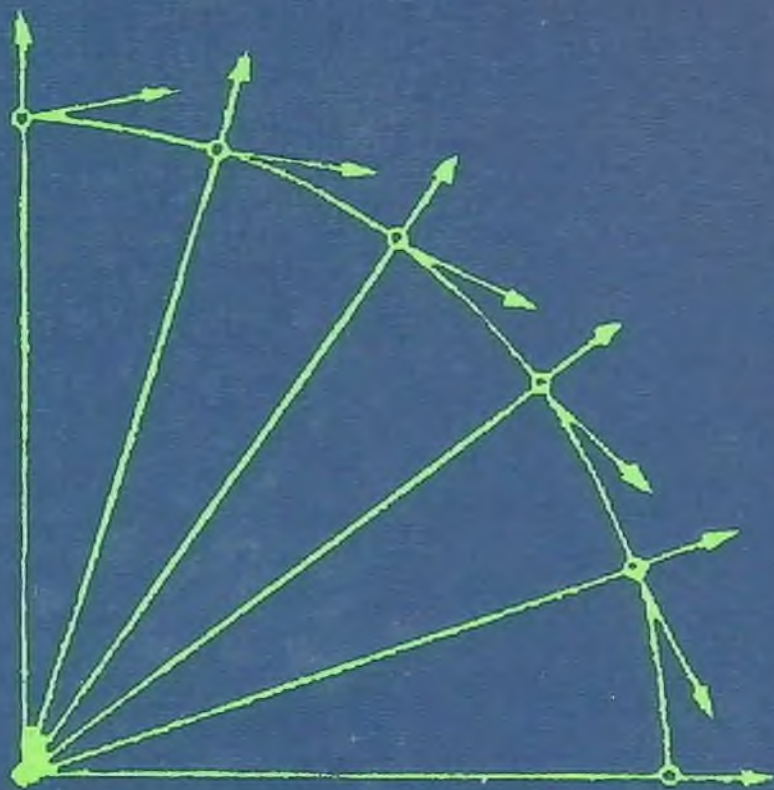


В. Ф. ЛУКЪЯНОВ

РАСЧЕТЫ ТОЧНОСТИ ИНЖЕНЕРНО- ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ РАБОТ



528	48794
Л-84	Лукашов В.Ф
Расчетные возможности	
широкоформатно-резерв.	
работ	
19.90	
	1=30

Книга должна быть возвращена не
позже указанного здесь срока

Количество предыдущих выдач _____	

2004.

528
Ш-84

В. Ф. ЛУКЬЯНОВ

РАСЧЕТЫ ТОЧНОСТИ ИНЖЕНЕРНО- ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ РАБОТ

2-Е ИЗДАНИЕ, ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛ-
НЕННОЕ

ТЕХНИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА	1
Шифр _____	
Спв. № 487 94	



МОСКВА „НЕДРА” 1990

ББК 26.1
Л 84
УДК 528.48.088

Рецензент канд. техн. наук *А. Н. Сухов*

1802020000 - 240
Л $\frac{\quad}{043(101) - 90}$ 8 - 90

ISBN 5-247-01478-2

© Издательство «Недра», 1981 .

© В. Ф. Лукьянов, 1990,
с изменениями и дополнениями

Предисловие

Переход на полный хозяйственный расчет и самофинансирование сопровождается перестройкой производства на основе использования новой техники и современной технологии. В этих условиях увеличиваются объемы инженерно-геодезических работ и возрастает число новых задач прикладного характера. Во всех случаях инженерно-геодезические работы способствуют повышению эффективности и качества продукции. Особенно велика роль геодезических работ в строительстве, где возведение сборных зданий и монтаж технологического оборудования невозможен без разбивки осей, выверки конструкций и исполнительных съемок. При этом все чаще возникают уникальные задачи, не имеющие аналогов.

При решении задач прикладного характера приходится учитывать специфические требования отрасли народного хозяйства, по заказу которой данная работа выполняется. В этих случаях роль расчетов точности особенно велика. Правильный выбор точности обеспечивает качество и эффективность выполнения работ.

В научно-технической литературе вопросы расчета точности в инженерной геодезии рассматриваются попутно с изложением основного материала, обычно в минимальном объеме и часто в порядке первого приближения к решению задачи. Возросшие требования к точности и эффективности выполнения работ в различных областях народного хозяйства настоятельно требуют обобщения имеющегося опыта. Решению этой задачи и посвящена настоящая книга.

Значительное внимание в книге уделено математическому аппарату. Сделана попытка отобразить причинно-следственную зависимость между условиями измерений и погрешностями в формализованном виде, что создает предпосылки для разработки алгоритма и показывает возможность выполнения расчетов точности на ЭВМ. Рассмотрено влияние различных погрешностей на результаты построения проектных величин и показана необходимость раздельного учета систематических и случайных погрешностей.

Во втором издании настоящей книги несколько сокращено изложение общих вопросов, в частности теории множеств и математической статистики, что позволило несколько подробнее остановиться непосредственно на расчетах точности.

Автор отмечает значительную помощь, оказанную ему инженером Л. М. Лукьяновой при подготовке второго издания книги.

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. РАСЧЕТЫ ТОЧНОСТИ ИНЖЕНЕРНО-ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ РАБОТ

Инженерно-геодезические работы производят для определения геометрических параметров отдельных тел, положения их в пространстве или для обеспечения процесса работ в различных областях народного хозяйства необходимыми данными (осями, установочными рисками и т. п.). Особое место занимают геодезические работы, предназначенные для «управления» технологическими процессами, например при возведении многоэтажных сборных зданий, корректировке устройств при наладке физических процессов, «ведении» строительных машин по заданной траектории. В некоторых случаях на специалистов в области инженерной геодезии полностью возлагается ответственность за обеспечение геометрии конструкций при возведении объекта.

В этих условиях возрастает роль проекта производства работ. Отсутствие проекта или его недостаточно высокое качество в строительстве вызывает снижение эксплуатационных качеств здания, повышение стоимости работ и увеличение сроков возведений сооружения, а в отдельных случаях может привести к аварии. Для устранения дефектов обычно требуется больше средств, чем на проведение геодезических работ на всем объекте.

Расчеты точности являются основой, на которую опирается проект производства работ. По результатам расчета точности выбирается методика измерений, назначаются допускаемые отклонения и регламентируются условия измерений. Именно в таком широком смысле и следует понимать задачи расчета точности.

Рассмотрим в общем виде процесс расчета точности инженерно-геодезических работ. Пусть при выполнении работ в какой-либо отрасли народного хозяйства необходимо обеспечить реализацию k геометрических параметров A_j с предельными погрешностями ΔA_j . Предположим, что для решения этой задачи намечено произвести измерения или построения в натуре n величин L_i , связанных с исходными параметрами известными соотношениями

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \varphi_1(L_1, \dots, L_n); \\ A_2 &= \varphi_2(L_1, \dots, L_n); \\ A_k &= \varphi_k(L_1, \dots, L_n). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

При этом всегда $n > k$.

Смысл выражения (1) поясним на примере. Если измеряются непосредственно исходные параметры, то

$$A_1 = L_1, A_2 = L_2, \dots, A_k = L_k.$$

Геодезические измерения или построения величины L_i сопровождаются погрешностями η_i , что приводит к появлению погрешностей ξ_j в

исходных параметрах A_j . В общем виде ξ_j является функцией измеренных величин и их погрешностей

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= \Psi_1(L_1, L_2, \dots, L_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n); \\ \xi_2 &= \Psi_2(L_1, L_2, \dots, L_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n); \\ &\dots \\ \xi_k &= \Psi_k(L_1, L_2, \dots, L_n, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Выражение (2) при расчетах точности служит основным соотношением между погрешностями измерений и погрешностями исходных параметров.

При выполнении расчетов точности различают прямую и обратную задачи.

Прямая задача заключается в определении значений ξ_j по известным результатам измерений L_i и их погрешностям η_i . Для решения этой задачи оценивают значения η_i , по формуле (2) вычисляют величины ξ_i и сравнивают их со значениями предельных погрешностей ΔA_j . Задача эта хорошо известна и в традиционных разделах геодезии ее принято называть оценкой точности.

Обратная задача заключается в определении значений η_i по известным величинам ΔA_j . Эта задача встречается в расчетах точности наиболее часто, и имеет смысл рассмотреть ее общее решение более подробно.

Решение обратной задачи в основном сводится к выбору такой схемы измерений (назначению L_i и отысканию таких значений η_i , которые с заданной вероятностью обеспечили бы выполнение системы неравенств

$$\xi_j \leq \Delta A_j. \quad (3)$$

В этом случае в системе уравнений (2) по известным значениям ξ_j необходимо найти L_i и η_i . Однозначного решения такая задача не имеет, так как число определяемых значений превышает число уравнений. Для решения необходимо ввести дополнительные условия. Примерами таких условий может служить равенство влияний отдельных факторов, условие минимума трудовых затрат и т.п. Выбор дополнительного условия всегда определяется содержанием конкретной задачи.

Решение обратной задачи проводится в несколько этапов.

На первом этапе производят выбор исходных геометрических параметров и назначают допускаемые величины отклонений. Выбор исходных параметров производят исходя из тех задач, которые ставятся перед данным видом геодезических работ. Несмотря на внешнюю простоту формулировки, этот этап расчета является сложной инженерной задачей. В процессе решения приходится учитывать влияние целого ряда факторов, в том числе особенностей и целей проведения работ.

Так как один и тот же вид геодезических работ в зависимости от решаемой задачи преследует разные цели, то разными в этом случае будут и исходные параметры. Определение осадок, например, может выполняться для определения физико-механических свойств различных оснований. В этом случае имеет смысл однородные сооружения группировать по признаку оснований, а в качестве исходного параметра принять среднюю величину осадок в группе.

Если наблюдения за осадками здания производятся для предупреждения разрушений конструкций, то в качестве исходного параметра правильнее выбрать разность осадок в критических точках сооружения, так как именно разность осадок в этих точках ведет к образованию в конструкциях дополнительных напряжений, что и вызывает опасность разрушений.

В статье [3] приводится расчет точности наблюдений за осадками с использованием в качестве исходного параметра скорости протекания осадок во времени.

Даже эти примеры демонстрируют сложность поставленной проблемы.

При назначении допускаемых отклонений ΔA , приходится учитывать два обстоятельства. Снижение требований к точности может привести к значительному увеличению затрат на переделки работ в рассматриваемой отрасли народного хозяйства, снижению их качества и возникновению аварийных ситуаций. Завышение требований к точности вызывает повышение стоимости геодезических работ, увеличение сроков их выполнения и приводит к простоям. Отыскание оптимального варианта в соотношении этих требований является сложной, часто самостоятельной технической задачей.

После выбора исходных параметров, назначения допускаемых отклонений и составления технического задания на производство геодезических работ приступают ко *второму этапу* расчетов – разработке общей схемы измерений (выбору L_i), т. е.:

- определению числа стадий проведения работ;
- выбору методов измерений для каждой из стадий;
- составлению предварительных рабочих схем по стадиям.

Число стадий зависит от требований к точности геодезических работ, густоты и точности имеющегося обоснования, размеров участка и специфики поставленных задач.

При выборе методов измерений учитывают достоинства каждого из них и выбирают те, которые наилучшим образом подходят для данных условий.

При составлении предварительных рабочих схем необходимо по каждой из стадий в общих чертах определить форму и размеры сетей, наметить объекты измерений и выявить их основные характеристики.

Полученные данные служат исходным материалом для выполнения *третьего этапа* – расчета погрешностей по каждой из стадий.

Существо задачи сводится к выявлению зависимости между погрешностями ξ проведения работ на данной стадии и погрешностями η_i отдельных операций

$$\xi = \psi(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k). \quad (4)$$

Уравнение (4) не имеет единственного решения, поэтому требуется ввести дополнительные условия.

В качестве дополнительного условия при решении задач в традиционных разделах геодезии используют принцип равного влияния элементарных погрешностей. При решении задач инженерной геодезии применяют принцип пропорционального изменения погрешностей.

После решения равенства (4) и определения значений $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ проверяют, соблюдено ли условие (3). Если условие не выполнено, то выявляют причину погрешности и проводят уточнение расчета.

Большое значение при выполнении работ по инженерной геодезии имеет контроль каждой операции. Грубые просчеты и недостаточная точность измерений приводят к особо тяжелым последствиям. Поэтому при измерениях рабочие допуски обычно назначают на большее число промежуточных операций.

Назначение рабочих допусков на отдельные операции целесообразно производить в процессе расчета точности. В этом случае по заданному значению вероятности нетрудно выбрать соотношение между расчетным значением погрешности и допуском.

Такой подход к решению задачи является наиболее общим. Он предназначен для расчетов точности работ, не имеющих аналогов.

Расчеты точности значительно упрощаются, если имеется опыт производства работ, сходных по поставленным задачам и условиям измерений. В этом случае частично или полностью используют результаты анализа уже проведенных работ.

Наиболее простым становится расчет тогда, когда на предусматриваемый вид работ есть нормативный документ, разработанный на основе обобщения многолетнего опыта выполнения работ. В этом случае обычно производят лишь некоторые уточнения.

§ 2. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Совокупность определенных элементов s , обладающих общими свойствами, называют *множеством* S , а каждый объект s — *элементом множества*. В зависимости от числа элементов различают *конечные* и *бесконечные множества*. Если элементы бесконечного множества могут быть расположены в последовательность со взаимно-однозначным соответствием между порядковым номером и элементом, то такое множество называют *счетным*.

Если элемент s есть элемент множества S , то говорят, что s принадлежит S

$$s \in S.$$

Если множества S и S_1 таковы, что каждый элемент S_1 содержится в S , то S_1 называют *подмножеством* S

$$S \supset S_1 \text{ или } S_1 \subset S.$$

Если $S_1 \subset S$ и $S \subset S_1$, то множества равны

$$S_1 = S.$$

Если S не содержит ни одного элемента, то его называют *нулевым множеством*

$$S = 0.$$

Множество R , содержащее все элементы, которые могут встретиться в исследовании, называют *пространством*.

ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Под *объединением* или *суммой множеств* S_1 и S_2 понимают множество S_3 всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств S_1 и S_2

$$S_3 = S_1 \cup S_2.$$

Под *пересечением* или *произведением множеств* S_1 и S_2 понимают множество S_3 , содержащее общие элементы S_1 и S_2 .

$$S_3 = S_1 \cap S_2.$$

Под *разностью множеств* $S_1 - S_2$ понимают множество всех точек S_1 , не содержащихся в S_2 .

Если $S_2 \subset S_1$, то собственную разность $S_1 - S_2$ называют *дополнением* S_2 относительно S_1

$$S_2 - S_1 = S_2(S_1).$$

Наглядно перечисленные выше операции над множествами проиллюстрированы диаграммой Венна на рис. 1.

Операции объединения и пересечения множеств:

коммутативны

$$S_1 \cup S_2 = S_2 \cup S_1, \quad S_1 \cap S_2 = S_2 \cap S_1;$$

ассоциативны

$$(S_1 \cup S_2) \cup S_3 = S_1 \cup (S_2 \cup S_3),$$

$$(S_1 \cap S_2) \cap S_3 = S_1 \cap (S_2 \cap S_3);$$

дистрибутивны

$$S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap S_3),$$

$$S_1 \cup (S_2 \cap S_3) = (S_1 \cup S_2) \cap (S_1 \cup S_3).$$

КЛАССЫ МНОЖЕСТВ

Совокупность множеств в пространстве R , объединенных по определенным признакам или свойствам, называют *классом множеств* F .

Ненулевой класс в пространстве R называют *вполне аддитивным классом*, если он обладает следующими свойствами.

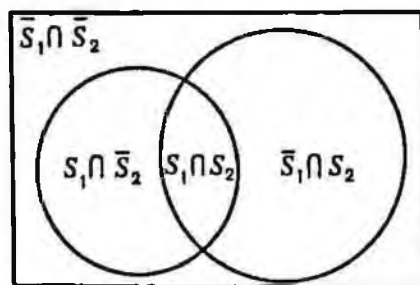


Рис. 1. Диаграмма Венна

1. Все пространство R принадлежит F
 $R \in F.$ (5)

2. Если множества S_1, S_2, \dots принадлежат F , то и их объединение принадлежит F

$\bigcup_a S_a \in F.$ (6)

3. Если S принадлежит F , то и дополнение S принадлежит F
 $\bar{S} \in F.$ (7)

ЛИНЕЙНЫЕ ТОЧЕЧНЫЕ МНОЖЕСТВА

Под интервалом E понимают последовательность действительных чисел e на числовой оси, заключенных между некоторыми точками a и b . Различают:

открытый интервал $(a, b) - a < e < b$;

замкнутый интервал $[a, b] - a \leq e \leq b$;

полуоткрытый интервал, замкнутый справа $(a, b] - a < e \leq b$;

полуоткрытый интервал, замкнутый слева $[a, b) - a \leq e < b$.

Класс точек или интервалов \mathfrak{B} в пространстве R называют борелевским полем, если он удовлетворяет условиям аддитивности (5), (6) и (7).

Борелевское поле можно построить из конечной или счетной последовательности интервалов E_1, E_2, \dots путем присоединения к ней множеств, образованных конечным или счетным числом операций объединения, пересечения и дополнения над E_1, E_2, \dots

Точечные множества в n -мерном пространстве R_n .

Систему из n действительных чисел e рассматривают как точку или вектор e n -мерного пространства R_n .

Если даны точки $a(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $b(b_1, b_2, \dots, b_n)$, то под n -мерным открытым интервалом E в пространстве R_n понимают множество точек $e(e_1, e_2, \dots, e_n)$, определяемых системой неравенства $a_i < e_i < b_i$, где $i = 1, 2, \dots, n$.

Аналогичным образом определяют замкнутые и полуоткрытые интервалы в R_n .

Класс точек или интервалов \mathfrak{B} в пространстве R_n называют борелевским полем, если он удовлетворяет условиям аддитивности (5), (6) и (7).

§ 3. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Для отображения связи между событиями и вероятностью их появления используют *пространство вероятностей* (R, \mathfrak{B}, P) .

Функцию P называют *функцией вероятности* на борелевском поле. Эта функция должна удовлетворять условиям:

1. Число $P(S)$, поставленное в соответствие любому событию $S \in R$ и называемому вероятностью события S , должно быть вещественным и неотрицательным.

2. Если S_1, S_2, \dots счетная последовательность попарно не пересекающихся множеств из F , то

$$P\left(\bigcup_{\alpha=1}^{\infty} S_{\alpha}\right) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} P(S_{\alpha}). \quad (8)$$

3. Вероятность события, заключающегося в появлении пространства событий R , должна быть равна единице

$$P(R) = 1 \quad (9)$$

Если $S_1 \in \mathfrak{B}$ и $S_2 \in \mathfrak{B}$, то отношение

$$P(S_2/S_1) = P(S_1 \cap S_2)/P(S_1). \quad (10)$$

называют *условной вероятностью события S_2* , т.е. вероятностью появления события S_2 при условии, что событие S_1 произошло.

События S_1 и S_2 считают *независимыми*, если

$$P(S_2/S_1) = P(S_2) \text{ или } P(S_1/S_2) = P(S_1). \quad (11)$$

Основные теоремы:

теорема сложения вероятностей

$$P\left(\bigcup_{\alpha=1}^{\infty} S_{\alpha}\right) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} P(S_{\alpha}) - \sum_{\beta>\alpha=1}^{\infty} P(S_{\alpha} \cap S_{\beta}) + \sum_{\gamma>\beta>\alpha=1}^{\infty} P(S_{\alpha} \cap S_{\beta} \cap S_{\gamma}) - \dots; \quad (12)$$

теорема умножения вероятностей

если

$$P(S_1) > 0, P(S_1 \cap S_2) > 0, P(S_1 \cap S_2 \cap S_3) > 0, \dots \text{ то}$$

$$P\left(\bigcap_{\alpha=1}^n S_{\alpha}\right) = P(S_1)P(S_2/S_1)P(S_3/S_1 \cap S_2)\dots \dots P(S_n/S_1 \cap S_2 \cap \dots S_{n-1}). \quad (13)$$

СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

Вещественную однозначную функцию $X(e)$, определенную во всех выборочных точках $e \in R$, называют *случайной величиной* в вероятностном пространстве (R, \mathfrak{B}, P) , если для каждого вещественного числа b множество E_b всех $e \in R$, в которых $X(e) \leq b$, принадлежит \mathfrak{B} .

Для удобства записи случайную величину обозначают через X , а ее конкретные значения через x .

Каждое соотношение, устанавливающее связь между значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями, называют *законом распределения вероятностей*, задаваемым чаще всего в виде функции или плотности распределения.

Под *функцией распределения* понимают вероятность того, что случайная величина X примет значение не больше x

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Производную от $F(x)$ называют *плотностью распределения*

$$f(x) = F'(x).$$

Вероятность попадания случайной величины в интервал $a \leq x \leq b$ определяют по формуле

$$P(a \leq x < b) = F(b) - F(a). \quad (14)$$

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Сумма произведений всех возможных значений случайной величины на вероятности появления этих значений называют *математическим ожиданием* M . Для дискретной величины значение математического ожидания m_x определяется суммой

$$m_x = \sum_{i=1}^n x_i p_i, \quad (15)$$

а для непрерывной — интегралом

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (16)$$

Под *начальным моментом* случайной величины k -го порядка понимают математическое ожидание k -ой степени случайной величины

$$\alpha_k = M(X^k).$$

Величину $\hat{X} = X - m_x$ называют *центрированной* случайной величиной, а математическое ожидание \hat{X}^k — *центральным моментом* k -го порядка

$$v_k = M(\hat{X}^k).$$

Положение центра рассеивания случайной величины характеризуют математическим ожиданием m_x , а разброс вокруг m_x — *вторым центральным моментом* или *дисперсией*

$$D(X) = v_2 = M(\hat{X}^2).$$

Для вычисления дисперсии часто используют формулу

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X). \quad (17)$$

Для большей наглядности характеристики рассеивания часто пользуются *средним квадратическим отклонением* или *стандартом*

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}.$$

Скошенность кривой распределения характеризуют *коэффициентом асимметрии*

$$S_k = v_3 / \sigma^3,$$

а для описания местоположения вершины кривой используют *эксцесс*

$$E_x = v_4 / \sigma^4 - 3.$$

Значения случайной величины, соответствующие локальным максимумам вероятности, называют *модой* M_d . Различают *одномодальные*, *полимодальные* и *антимодальные* распределения вероятностей.

Значение случайной величины называют *медианой* Me , если

$$P(X < Me) = P(X > Me).$$

НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Нормальный закон характеризуется плотностью распределения вида

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-m_x)^2/2\sigma^2}, \quad (18)$$

где m_x — математическое ожидание X ; σ — стандарт X .

При нормальном законе кривая распределения одномодальна, $s_k = 0$, $E_x = 0$.

Вероятность попадания в интервал $[a, b]$ определяется по формуле

$$P(a \leq x \leq b) = \frac{1}{2} [\Phi(t_b) - \Phi(t_a)], \quad (19)$$

где $\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt$ — табулированное значение интеграла вероятностей; $t_a = (a - m_x)/\sigma$, $t_b = (b - m_x)/\sigma$ — нормированные значения a и b . Значения $\Phi(t)$ приведены в прил. 1.

ЗАКОН РАВНОМЕРНОЙ ПЛОТНОСТИ

Случайная величина равномерно распределена в интервале от α до β , если ее плотность

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta - \alpha} & \text{при } x \in [\alpha, \beta], \\ 0 & \text{при } x \notin [\alpha, \beta] \end{cases} \quad (20)$$

Функция распределения x имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < \alpha, \\ \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} & \text{при } x \in [\alpha, \beta], \\ 1 & \text{при } x > \beta. \end{cases} \quad (21)$$

Основные числовые характеристики равномерного распределения равны

$$\left. \begin{aligned} m_x &= (\alpha + \beta)/2; & D(x) &= (\beta - \alpha)^2/12; \\ S_k &= 0; & E_x &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Вероятность попадания в интервал (a, b) определяют по формуле

$$P(a < X < b) = \frac{b - a}{\beta - \alpha}. \quad (23)$$

СИСТЕМА ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Под функцией распределения системы двух случайных величин X, Y (точек на плоскости или векторов в R_2) понимают вероятность того, что $X < x$ и $Y < y$

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy.$$

Плотностью распределения системы X, Y называют выражение вида

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Условным законом распределения случайной величины называют закон распределения этой величины, определенный при условии, что другая величина приняла определенное значение

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = f(x, y) / \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy.$$

Случайные величины X и Y называют независимыми, если

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y). \quad (24)$$

Если X и Y независимы, то

$$f(x, y) = f_1(x) f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy. \quad (25)$$

Положение центра рассеивания системы двух случайных величин характеризуют первыми начальными моментами

$$\alpha_{1,0} = M(X^1 Y^0) = m_x; \quad \alpha_{0,1} = M(X^0 Y^1) = m_y,$$

а рассеивания в направлениях осей координат – вторыми центральными моментами

$$\nu_{2,0} = M(\overset{0}{X}^2 \overset{0}{Y}^0) = M(\overset{0}{X}^2) = D_x;$$

$$\nu_{0,2} = M(\overset{0}{X}^0 \overset{0}{Y}^2) = M(\overset{0}{Y}^2) = D_y.$$

Первый смешанный момент системы называют *корреляционным моментом*

$$K_{xy} = M(\overset{0}{X} \overset{0}{Y}) = M[(X - m_x)(Y - m_y)] = M[XY] - m_x m_y. \quad (26)$$

Меру тесноты линейной зависимости между X и Y характеризуют коэффициентом корреляции

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (27)$$

Для некоррелированных случайных величин $K_{xy} = r_{xy} = 0$.

НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Выражение плотности системы имеет вид

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} \times \\ \times e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]}.$$

При фиксированном значении одной величины *условное математическое ожидание* другой случайной величины определяют по формуле

$$m_{y/x} = m_y + r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - m_x), \quad (28)$$

а *условный стандарт*

$$\sigma_{y/x} = \sigma_y \sqrt{1-r^2}. \quad (29)$$

Эллипсом равной плотности (*эллипсом рассеивания*) называют эллипс, все точки которого имеют одинаковую плотность, т. е. $f(x) = \text{const}$.

Центр эллипса рассеивания имеет координаты m_x и m_y , а углы между осями эллипса и осями координат определяются из выражения

$$\text{tg } 2\alpha = 2r\sigma_x\sigma_y/(\sigma_x^2 - \sigma_y^2). \quad (30)$$

Для приведения нормального закона к каноническому виду оси системы совмещают с осями эллипса рассеивания ξ и η и определяют главные стандарты

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\xi^2 &= \sigma_x^2 \cos^2 \alpha + r\sigma_x\sigma_y \sin 2\alpha + \sigma_y^2 \sin^2 \alpha; \\ \sigma_\eta^2 &= \sigma_x^2 \sin^2 \alpha - r\sigma_x\sigma_y \sin 2\alpha + \sigma_y^2 \cos^2 \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Плотность системы в каноническом виде имеет вид системы независимых случайных величин с $m_\xi = 0$ и $m_\eta = 0$

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta} e^{-\xi^2/2\sigma_\xi^2 - \eta^2/2\sigma_\eta^2} \quad (32)$$

Вероятность попадания случайной точки в эллипс рассеивания B_k определяют по формуле

$$P[(\Xi, H) \subset B_k] = 1 - e^{-k^2/2}, \quad (33)$$

где $k = a/\sigma_\xi = b/\sigma_\eta$ — отношение полуосей эллипса к главным стандартам.

Значения функции $P = 1 - e^{-k^2/2}$ приведены в прил. 2.

СИСТЕМА n СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Функцию распределения системы n случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n (точек n -мерного пространства или векторов в R_n) определяют по формуле

$$P[(X_1 < x_1)(X_2 < x_2) \dots (X_n < x_n)] = F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Для независимых случайных величин

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1)f(x_2) \dots f(x_n).$$

Вероятность попадания случайной точки в пределы n -мерной области ω определяют n -кратным интегралом

$$P[(X_1, X_2, \dots, X_n) \in \omega] = \int_{\omega} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

К числовым характеристикам системы относят: n математических ожиданий m_1, m_2, \dots, m_n ; n дисперсий D_1, D_2, \dots, D_n и $n(n-1)$ корреляционных моментов $K_{ij} = M(\overset{0}{X}_i \overset{0}{X}_j)$ при $i \neq j$.

Корреляционные моменты часто представляют в виде *корреляционной матрицы*

$$K_x = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ & & \dots & \dots \\ & & & K_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D_1 & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ & D_2 & \dots & K_{2n} \\ & & \dots & \dots \\ & & & D_n \end{vmatrix}.$$

Под *нормированной корреляционной матрицей* понимают матрицу, элементами которой служат коэффициенты корреляции

$$r_x = \begin{vmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ & 1 & \dots & r_{2n} \\ & & \dots & \dots \\ & & & 1 \end{vmatrix}.$$

Числовые характеристики функций случайных величин. Если c — неслучайная величина, то

$$M(c) = c \quad \text{и} \quad D(c) = 0.$$

Для суммы линейных функций случайных величин математическое ожидание и дисперсию вычисляют по формулам

$$M\left[\sum_{i=1}^n (a_i X_i + b_i)\right] = \sum_{i=1}^n a_i M(X_i) + \sum_{i=1}^n b_i, \quad (34)$$

$$D\left[\sum_{i=1}^n (a_i X_i + b_i)\right] = \sum_{i=1}^n a_i^2 D(X_i) + 2 \sum_{i < j} a_i a_j K_{ij}. \quad (35)$$

Для определения математического ожидания произведения случайных величин используют выражение

$$M(XY) = M(X)M(Y) - K_{xy}. \quad (36)$$

Если случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n независимы, то

$$M\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n M(X_i) \quad (37)$$

и

$$D(X_i X_j) = D(X_i)D(X_j) + m_{x_i}^2 D(X_j) + m_{x_j}^2 D(X_i). \quad (38)$$

Для центрированных случайных величин $\overset{0}{X}_1, \overset{0}{X}_2, \dots, \overset{0}{X}_n$

$$D(\overset{0}{X}_1 \overset{0}{X}_2 \dots \overset{0}{X}_n) = D(\overset{0}{X}_1) D(\overset{0}{X}_2) \dots D(\overset{0}{X}_n). \quad (39)$$

Если случайные величины X и Y связаны функциональной зависимостью $Y = aX + b$, то корреляционный момент определяют по формуле

$$K_{xy} = aD_x. \quad (40)$$

При расчетах точности для определения числовых характеристик функций случайных величин часто используют теоремы.

Теорема 1. Если случайный вектор Z равен сумме случайных векторов X и Y , то корреляционная матрица K_z равна сумме корреляционных матриц слагаемых

$$K_z = K_x + K_y. \quad (41)$$

Теорема 2. Корреляционная матрица линейной функции $Y = AX + B$ равна

$$K_y = AK_x A^T, \quad (42)$$

где A^T — транспонированная матрица коэффициентов линейной функции.

Теорема 3. Если величины Y и Z являются линейными функциями случайных величин X, V, W и имеют общие составляющие X_i

$$\left. \begin{aligned} Y &= \sum_{i=1}^n a_i X_i + V; \\ Z &= \sum_{i=1}^n b_i X_i + W, \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

то коэффициент корреляции между ними равен

$$r_{yz} = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i D_{x_i} \right) / \sigma_y \sigma_z. \quad (44)$$

В практике расчетов коэффициенты a_i и b_i наиболее часто принимают значения плюс или минус единица. Для этого случая формула (44) примет вид

$$r_{yz} = \left(\sum_{i=1}^n \pm D_{x_i} \right) / \sigma_y \sigma_z. \quad (45)$$

Перед D_{x_i} ставят знак плюс, если X_i входит в Y и Z с одинаковыми знаками, и знак минус — если с разными знаками.

Теорема 4. Если величины Y и Z являются линейными функциями случайных величин

$$\left. \begin{aligned} Y &= a_1 X_1 + V; \\ Z &= a_2 X_2 + W \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

и имеют зависимые составляющие X_1 и X_2 с коэффициентом корреляции $r_{x_1 x_2}$, то коэффициент корреляции между ними равен

$$r_{yz} = (a_1 a_2 r_{x_1 x_2} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2}) / \sigma_y \sigma_z. \quad (47)$$

Доказательство. Корреляционный момент между Y и Z равен $K_{yz} = M(YZ) - M(Y)M(Z)$. (48)

Подставив вместо Y и Z их значения из (46) в правую часть равенства, получим

$$\begin{aligned} M(YZ) &= M[(a_1 X_1 + V)(a_2 X_2 + W)] = a_1 a_2 M(X_1 X_2) + \\ &+ a_1 M(X_1 W) + a_2 M(X_2 V) + M(VW); \\ M(Y)M(Z) &= M(a_1 X_1 + V)M(a_2 X_2 + W) = a_1 a_2 M(X_1)M(X_2) + \\ &+ a_1 M(X_1 W) + a_2 M(X_2 V) + M(VW). \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в формулу (48), будем иметь $K_{yz} = a_1 a_2 [M(X_1 X_2) - M(X_1)M(X_2)] = a_1 a_2 K_{x_1 x_2}$,

но

$$r_{yz} = K_{yz} / \sigma_y \sigma_z,$$

тогда

$$r_{yz} = (a_1 a_2 K_{x_1 x_2}) / \sigma_y \sigma_z = (a_1 a_2 r_{x_1 x_2} \sigma_{x_1} \sigma_{x_2}) / \sigma_y \sigma_z,$$

что и требовалось доказать.

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Если случайная величина X имеет плотность распределения $f(x)$, то плотность распределения монотонной функции $y = \varphi(x)$ определяют по формуле

$$f(y) = f(\Psi(y)) |\Psi'(y)|, \quad (49)$$

где $\Psi(y) = x$ — функция, обратная $\varphi(x)$.

Для определения плотности немонотонной функции составляют функцию распределения

$$F(y) = P(Y < y) = P[X \in \Delta_1(y) + X \in \Delta_2(y) + \dots] = \sum_{\Delta_i(y)} \int f(x) dx, \quad (50)$$

где $\Delta_i(y)$ — участки оси X , соответствующие неравенству $Y < y$.

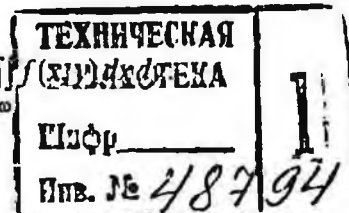
Дифференцируя уравнение (50) по переменному y , получают искомое выражение $f(y) = F'(y)$.

Для определения плотности распределения функции двух случайных величин $Z = \varphi(X, Y)$ составляют функцию распределения

$$F(z) = P(Z < z) = P(\varphi(X, Y) < z)$$

и находят на плоскости такую область ω , которая удовлетворяет условию $Z < z$. Тогда

$$F(z) = P(\varphi(X, Y) < \omega) = \iint_{\omega} f(x, y) dx dy \quad (51)$$



В выражении (51) величина z входит в пределы интегрирования. Дифференцируя полученное выражение, находят плотность $f(z) = F'(z)$.

КОМПОЗИЦИЯ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Под композицией законов распределения понимают закон распределения суммы двух случайных независимых величин $Z = X + Y$. Плотность величины Z определяют по формуле

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(z-x)dx. \quad (52)$$

Композиция нормальных законов распределения с плотностями

$$f_1(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-(x-m_x)^2/2\sigma_x^2} \quad \text{и} \quad f_2(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-(y-m_y)^2/2\sigma_y^2}$$

приводит к нормальному закону с плотностью

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \sqrt{2\pi}} e^{-[z-(m_x+m_y)]^2/2(\sigma_x^2+\sigma_y^2)} \quad (53)$$

и параметрами $m_z = m_x + m_y$ и $D = D_x + D_y$.

Закон распределения Релея. Если случайные величины X и Y имеют нормальные распределения с числовыми характеристиками $m_x = 0$, $m_y = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$, то случайная величина $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ имеет распределение Релея с функцией

$$F(r) = 1 - e^{-k^2/2}, \quad (54)$$

где $k = r/\sigma$.

Таблица значений $F(r) = P$ приведена в прил. 2.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Из неравенства Чебышева

$$P(|X - m_x| \geq \tau \leq D_x/\tau^2) \quad (55)$$

видно, что при любом $\tau > 0$ вероятность отклонения случайной величины X от ее математического ожидания m_x ограничена сверху отношением дисперсии к τ^2 .

В теореме Маркова доказано, что среднее значение независимых случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n сходится по вероятности (вероятность отличается от единицы на бесконечно малое положительное число δ) к среднему значению их математических ожиданий

$$P\left(\left|\frac{\sum X_i}{n} - \frac{\sum m_{x_i}}{n}\right| < \tau\right) > 1 - \delta, \quad (56)$$

если при $n \rightarrow \infty$ $\frac{D[\sum X_i]}{n^2} \rightarrow 0$.

Центральная предельная теорема. Если X_1, X_2, \dots, X_n — независимые случайные величины одного закона распределения с одинаковыми мате-

математическими ожиданиями m_{x_j} и дисперсиями D_{x_j} , то при неограниченном увеличении n закон распределения суммы

$$Y = \sum_{j=1}^n X_j$$

неограниченно приближается к нормальному.

Наиболее строгим условием существования центральной предельной теоремы является равенство m_{x_j} и D_{x_j} . Более общим и достаточным считается условие Линдберга (при любом $\tau > 0$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{D_y} \sum_{j=1}^n \int_{|x_j - m_{x_j}| > \tau \sigma_y} (x_j - m_{x_j})^2 f_j(x_j) dx = 0. \quad (57)$$

Подробно теория вероятностей изложена в трудах [1, 11, 28].

§ 4. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Все множество возможных в природе элементов, обладающих определенными свойствами или признаками, называют генеральной совокупностью.

При выполнении опытов невозможно перебрать все элементы генеральной совокупности, поэтому и вынуждены ограничиваться получением конечного ряда из n элементов. Этот ряд элементов называют выборкой из генеральной совокупности.

Численное значение параметра a генеральной совокупности, полученное по результатам выборки, называют оценкой параметра a и обозначают через \tilde{a} .

Оценки числовых характеристик случайных величин вычисляют по формулам

$$\tilde{m}_x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{X}; \quad \tilde{D}_x = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}{n-1};$$

$$\tilde{K}_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})}{n-1}; \quad \tilde{r}_{xy} = \frac{\tilde{K}_{xy}}{\tilde{\sigma}_x \tilde{\sigma}_y}.$$

К оценкам параметров предъявляются определенные требования. Оценку называют состоятельной, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{a} \rightarrow a,$$

несмещенной, если

$$M(\tilde{a}) = M(a),$$

и эффективной, если

$$D(\tilde{a}) = \min.$$

Распределения выборочных характеристик, связанных с нормальным распределением

Для нормально распределенной случайной величины X величина

$$T = \frac{\bar{m}_x - m_x}{\sqrt{\bar{D}/n}}$$

имеет закон распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы и плотностью распределения

$$S_{n-1}(t) = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{(n-1)\pi} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{-n/2}, \quad (58)$$

где $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du$ — гамма-функция.

Значения функции распределения Стьюдента $2 \int_0^t S_{n-1}(t) dt$ табулированы и приведены во многих книгах, например в [1].

Для нормально распределенной величины X величина

$$V = \frac{(n-1)\bar{D}}{D}$$

имеет χ^2 -распределение с $r = n-1$ степенями свободы и плотностью распределения

$$k_{n-1}(v) = \begin{cases} \frac{1}{2^{(n-1)/2} \Gamma[(n-1)/2]} v^{[(n-1)/2]-1} e^{-v/2} & \text{при } v > 0 \\ 0 & \text{при } v < 0 \end{cases} \quad (59)$$

Значения χ^2 в зависимости от вероятности p и числа степеней свободы r табулированы и даны, например, в книге [1].

ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ И ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Пусть на числовую ось Oa нанесены значения параметра a и его оценки \bar{a} (рис. 2). Случайный интервал, построенный вокруг точки \bar{a} и «накрывающий» точку a с доверительной вероятностью $P(\bar{a} - \varepsilon_1 < a < \bar{a} + \varepsilon_2) = \beta$, называют *доверительным интервалом* I_β и записывают в виде

$$I_\beta(\bar{a} - \varepsilon_1, \bar{a} + \varepsilon_2) = I_\beta(\bar{a} - t_{\beta_1} \sigma_{\bar{a}}, \bar{a} + t_{\beta_2} \sigma_{\bar{a}}), \quad (60)$$

где t_β — нормированное отклонение $\sigma_{\bar{a}}$ при заданном значении β .

Построение доверительного интервала сводят к определению $\sigma_{\bar{a}}$ и значений t_{β_1} и t_{β_2} по известным β и закону распределения \bar{a} .

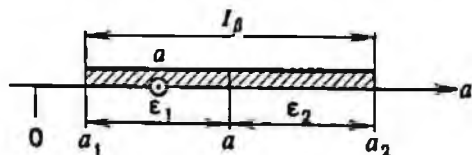


Рис. 2. Доверительный интервал

ПОСТРОЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ ДЛЯ ОЦЕНОК ЧИСЛОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НОРМАЛЬНО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

При построении доверительного интервала для математического ожидания используют значение

$$\bar{\sigma}_m = \sqrt{\bar{D}_x/n},$$

а величину $t_{\beta_1} = t_{\beta_2}$ находят из условия

$$P(|T| < t_{\beta}) = 2 \int_0^{t_{\beta}} S_{n-1}(t) dt = \beta$$

по таблицам распределения Стьюдента. Используя эти значения, построение доверительного интервала осуществляют по формуле (60).

При построении доверительного интервала для оценки дисперсии значения отрезков интервала вычисляют по формулам

$$\varepsilon_1 = \frac{\bar{D}(n-1)}{\chi_1^2} \quad \text{и} \quad \varepsilon_2 = \frac{\bar{D}(n-1)}{\chi_2^2}, \quad (61)$$

где значение χ_1^2 и χ_2^2 выбирают из таблиц χ^2 — распределения по значениям $p_1 = \alpha/2 = (1 - \beta)/2$ и $p_2 = 1 - \alpha/2$ для числа степеней свободы $r = n - 1$. Доверительный интервал, составленный с ε_1 и ε_2 по формуле (60), будет асимметричным относительно \bar{D} .

При построении доверительного интервала для оценки коэффициента корреляции значение стандарта коэффициента корреляции определяют по формуле

$$\sigma_r = (1 - \bar{r}^2)/\sqrt{n}, \quad (62)$$

а значения t_{β} выбирают из таблиц интеграла вероятностей $t_{\beta} = \arg \Phi(\beta)$, где $\arg \Phi(\beta)$ — функция, обратная $\Phi(t)$.

Такое построение применяют при значительных объемах выборок, т. е. при $n > 50$.

Если $n < 50$, то используют функцию Фишера

$$z = 0,5[\ln(1+r) - \ln(1-r)], \quad (63)$$

имеющую распределение, близкое к нормальному, и стандарт [42]

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{1}{n-1} + \frac{4-r^2}{2(n-1)}} \approx \frac{1}{\sqrt{n-3}}. \quad (64)$$

После построения доверительного интервала для \bar{z}

$$I_{z_{\beta}} = (\bar{z} - t_{z_{\beta}} \sigma_{\bar{z}}, \bar{z} + t_{z_{\beta}} \sigma_{\bar{z}})$$

по формуле (63) переходят к доверительному интервалу для \bar{r} вида (60).

Используя формулы, приведенные в данном параграфе, можно по результатам экспериментов оценить значения параметров и применять их для расчетов точности. Значения некоторых наиболее распространенных параметров, полученных таким методом, приводятся в главе III.

Наиболее полно вопросы теории математической статистики рассмотрены в трудах [1], [11] и [31].

§ 5. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА

Оценка параметров неоднородной совокупности зависимых величин

Регрессией называют геометрическое место центров рассеивания случайной величины Y , соответствующих значениям $X = x$. Уравнение регрессии имеет вид

$$Y = a + bX, \quad (65)$$

где Y —зависимая переменная; X —независимая переменная; a —свободный член уравнения регрессии; b —коэффициент уравнения регрессии.

При анализе двух исследуемых явлений признаки обычно характеризуют случайными величинами X и Y , а зависимость между ними отображают уравнением регрессии. При этом полагают, что во всех парах выборок случайных величин из совокупности:

между переменными X и Y существует линейная корреляционная зависимость;

зависимая переменная Y при фиксированном значении $X = x$ имеет нормальное распределение;

коэффициенты корреляции и уравнения регрессии равны;

свободные члены уравнения регрессии равны.

Совокупность таких пар случайных величин будем называть *однородной*.

Методы анализа корреляций и регрессий нашли широкое применение в различных областях науки и техники, в том числе и в инженерной геодезии. При выполнении работ по инженерной геодезии важную роль играет зависимость между различными погрешностями, а в связи со спецификой этих видов работ необходимо изучить некоторые вопросы анализа регрессий, не рассматриваемые в общих курсах теории математической обработки геодезических измерений.

Рассмотрим совокупность пар зависимых величин, в которых разные группы выборок различаются между собой только свободными членами уравнений регрессий. Такую совокупность будем называть *неоднородной*.

В целях упрощения обозначений опустим в обозначениях оценок знак \sim .

Итак, пусть имеем выборки двух рядов признаков исследуемых явлений из k групп совокупности.

I группа	j группа	k группа
$x_{11}x_{12}\dots x_{1n_1}$	$x_{j1}x_{j2}\dots x_{jn_j}$	$x_{k1}x_{k2}\dots x_{kn_k}$
$y_{11}y_{12}\dots y_{1n_1}$	$y_{j1}y_{j2}\dots y_{jn_j}$	$y_{k1}y_{k2}\dots y_{kn_k}$

Предположим, что уравнение регрессии для каждой группы имеет вид

$$Y_j = a_j + bX_j, \quad (66)$$

где $j = 1, 2, \dots, k$.

При условии

$$[Pv^2] = \min \quad (67)$$

найдем оценки параметров a_j и b .

С этой целью составим уравнение погрешностей, которые в нашем случае будут иметь вид

$$a_j + bx_{j1} - y_{j1} = v_{j1}. \quad (68)$$

Полагая веса внутри групп одинаковыми, вес P_j самой группы представим в виде

$$P = 1/\sigma_{v_j}^2, \quad (69)$$

где σ_{v_j} — стандарт поправок в j группе.

Приравнявая частные производные по a_j и b к нулю, получим систему нормальных уравнений.

Если ввести обозначения

$$P_j^0 = P_j n, \quad \sigma_x^2 = \frac{\sum P_j \sigma_{x_j}^2}{\sum P_j}, \quad (70), (71)$$

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum P_j \sigma_{y_j}^2}{\sum P_j}, \quad K_{xy} = \frac{\sum P_j K_{x_j y_j}}{\sum P_j} \quad (72), (73)$$

и решить систему нормальных уравнений в общем виде, то после громоздких, но несложных преобразований получим

$$b = \frac{K_{xy}}{\sigma_x^2}, \quad r = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad (74), (75)$$

$$b = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \quad r^2 = 1 - \frac{\sigma_v^2}{\sigma_y^2}. \quad (76), (77)$$

Для вычисления a_j необходимо в j группе со средними значениями $\bar{X} = \sum x_j/n_j$ и $\bar{Y} = \sum y_j/n_j$ (78)

составить уравнение

$$a_j + b\bar{X}_j - \bar{Y}_j = 0 \quad (79)$$

и решить (79) относительно неизвестного

$$a_j = \bar{Y}_j - b\bar{X}_j. \quad (80)$$

Сравнивая формулы (74)–(77) с известными из теории математической статистики

$$b = \frac{K_{xy}}{\sigma_x^2}, \quad b = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \quad (81), (82)$$

$$r = \frac{K_{xy}}{\sigma_y \sigma_x}, \quad r^2 = 1 - \frac{\sigma_v^2}{\sigma_y^2}, \quad (83), (84)$$

убеждаемся в аналогичности их структуры.

Таким образом, задачу оценок параметров неоднородной совокупности удалось свести к применению уже известных формул для однородной совокупности. При этом члены правых частей равенств надо заменить соответствующими средними весовыми значениями, взятыми по членам во второй степени, т.е. по дисперсиям и корреляционным моментам.

Описанный метод представляет определенный интерес для обработки выборок в процессе выполнения работ. Производя группы выборок и одновременно обрабатывая их, мы получаем возможность добавлять к уже обработанным результатам новые группы выборок. Объем вычислений при этом возрастает незначительно.

Такой прием последовательной обработки в процессе выполнения работ по проектированию осей высотных зданий был применен на строительстве комплекса сооружений проспекта Калинина в Москве. При этом по формулам (81)–(84) вычислялись оценки b и r для каждого из девяти зданий, а по завершении работ на каждом из корпусов обобщенные оценки определялись по формулам (74)–(80).

Удобен предлагаемый метод и для случая, когда исследуются материалы, опубликованные в нескольких статьях, в которых приведены лишь значения коэффициентов корреляции, уравнение регрессии и объемы выборок.

ТОЧНОСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕОДНОРОДНОЙ СОВОКУПНОСТИ ЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН

При оценке надежности результатов расчета нас будет интересовать точность полученных параметров. Для решения этой задачи в [13] с использованием способа определения веса последнего неизвестного получены формулы для оценки стандарта σ_b значений коэффициента уравнения регрессии

$$\sigma_b = \frac{\sigma_v}{\sigma_x} \sqrt{\frac{1}{\sum n_j - (k+1)}}, \quad \sigma_b = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \sqrt{\frac{1}{\sum n_j - (k+1)}}. \quad (85), (86)$$

Аналогичные преобразования с вычислением весов предпоследних неизвестных позволили определить оценки стандартов σ_{a_j} значений свободных членов уравнений регрессий в группах

$$\sigma_{a_j} = \frac{\sigma_v}{\sqrt{\sum n_j - (k+1)}} \sqrt{\frac{\sum \hat{p}_j - \frac{X_j^2}{\sigma_x^2}}{\hat{p}_j}}. \quad (87)$$

Для оценки надежности определения коэффициентов корреляции предлагаются формулы

$$\sigma_r = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \sigma_b, \quad \sigma_r^2 = \frac{1 - r^2}{\sum n_j - (k+1)}. \quad (88), (89)$$

При расчетах точности нас интересует еще один вопрос, на какую величину мы можем ошибаться при распространении уравнения регрессии, полученного в данной выборке, на последующие выборки, или, как

Таблица 1

Формулы частного случая	Известные формулы
$\sigma_b = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}$ (91)	$\sigma_b = \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \sqrt{\frac{1-r^2}{n-3}}$ (92)
$\sigma_a = \frac{\sigma_v}{\sqrt{n-2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\sigma_x^2}}$ (93)	$\sigma_a = \frac{\sigma_v}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{\sigma_x^2}}$ (94)
$\sigma_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}$ (95)	$\sigma_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}$ (96)
$\sigma_y = \frac{\sigma_v}{\sigma_x \sqrt{n-2}} \sqrt{(\bar{x} - x)^2 + \sigma_x^2}$ (97)	$\sigma_y = \frac{\sigma_v}{\sigma_x \sqrt{n}} \sqrt{(\bar{X} - x)^2 + \sigma_x^2}$ (98)

принято иногда говорить, какова «ошибка индивидуального предсказания».

Так как величины b и a_j нельзя считать независимыми, а $y_{ji} = bx_{ji} + a_j$, то $\sigma_{y_{ji}}^2 = x_{ji}^2 \sigma_b^2 + \sigma_{a_j}^2 + 2x_{ji} K_{ba_j}$.

Для определения K_{ba_j} в выражении (80) будем рассматривать оценки параметров a_j и b как случайные величины, а \bar{X}_j и \bar{Y}_j как математические ожидания. Тогда на основании формулы (40) можно записать

$$K_{ba_j} = -\bar{X}_j \sigma_b^2.$$

В этом случае выражение для $\sigma_{y_{ji}}$ примет вид

$$\sigma_{y_{ji}}^2 = x_{ji}^2 \sigma_b^2 + \sigma_{a_j}^2 - 2x_{ji} \bar{X}_j \sigma_b^2 = (x_{ji}^2 - 2x_{ji} \bar{X}_j) \sigma_b^2 + \sigma_{a_j}^2.$$

Подставляя значения σ_b и σ_{a_j} из выражений (85) и (87), после небольших преобразований получим

$$\sigma_{y_{ji}}^2 = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_x^2 \{ \sum n_j - (k+1) \}} \left\{ (\bar{X}_j - x_{ji})^2 + \sigma_x^2 \frac{\sum \hat{P}_j}{\beta_j} \right\}. \quad (90)$$

Сравним полученные формулы с аналогичными формулами, известными из теории математической статистики, для чего выражения (85), (86), (87), (89) и (90) применим к частному случаю — однородной совокупности, т.е. положим $P_1 = P_2 = \dots = P_k = 1$ и $k = 1$. Для удобства сопоставления полученные результаты сведены в табл. 1.

Следует отметить, что расхождения в формулах наблюдаются только в числе степеней свободы, т.е. вместо n в полученных формулах стоит $(n-2)$. Единственным исключением служит формула (89).

Так как полученные формулы предназначены для характеристики надежности расчетов, то расхождения в формулах не могут быть признапы существенными.

§ 6. СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ РАЗМЕРНЫХ ЦЕПЕЙ

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И РАСЧЕТЫ РАЗМЕРНЫХ ЦЕПЕЙ

Под *размерной цепью* понимают замкнутый контур, образованный взаимосвязанными размерами (звеньями). Размер цепи, полученный после реализации всех остальных размеров, называют *замыкающим размером* или *замыкающим звеном*, а остальные размеры — *составляющими размерами* или *звеньями*.

Для размерной цепи, изображенной на рис. 3, составляющими размерами являются векторы V_1 , V_2 и V_3 , а замыкающим — W .

Аналитическую связь между размерами цепи называют *уравнением размерной цепи*. Если направление оси X для рассматриваемой размерной цепи выбрать параллельным замыкающему размеру, то ее уравнение будет иметь вид

$$W = V_1 \cos \alpha_1 + V_2 + V_3 \cos \alpha_3. \quad (99)$$

Запишем уравнение размерной цепи в общем виде

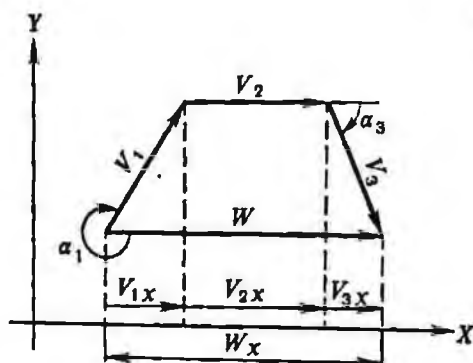
$$W = \varphi(V_1, V_2, \dots, V_n). \quad (100)$$

Задача расчета размерной цепи сводится к определению зависимости (100).

При реализации конкретного технологического процесса все размеры рассматривают как случайные величины. Полной характеристикой случайной величины является закон распределения вероятностей. В этом случае по известным законам распределения составляющих размеров и уравнению размерной цепи необходимо определить закон распределения замыкающего размера.

На практике этот путь решения задачи используют крайне редко, так как в большинстве случаев законы распределения вероятностей или неизвестны, или их определение связано со значительными затратами труда и времени. Для практических целей ограничиваются определением числовых характеристик замыкающего размера.

Если уравнение размерной цепи имеет линейный вид $W = \sum_{i=1}^n V_i$, то числовые характеристики замыкающего размера определяют по формулам



$$\left. \begin{aligned} m_w &= \sum_{i=1}^n m_i; \\ \sigma_w^2 &= \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} r_{ij} \sigma_i \sigma_j, \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

Рис. 3. Размерная цепь

где m_0, m_i — математические ожидания замыкающего и составляющего размеров; σ_0, σ_i — стандарты замыкающего и составляющего размеров; r_{ij} — коэффициент корреляции между i и j составляющими размерами.

Если уравнение размерной цепи имеет нелинейный вид, то прибегают к линеализации функции φ путем разложения ее в ряд Тейлора. Тогда основные характеристики замыкающего размера определяют по приближенным формулам

$$\left. \begin{aligned} m_0 &\approx \varphi(m_1, m_2, \dots, m_n); \\ \sigma_0^2 &\approx \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial V_i} \right)_0 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial V_i} \right)_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial V_j} \right)_0 r_{ij} \sigma_i \sigma_j, \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

где $(\partial \varphi / \partial V_i)_0$ — частная производная функции φ по аргументу V_i в точке m_i .

Чем ближе функция φ к линейному виду и чем меньше стандарты составляющих размеров, тем точнее выражение (102).

РАЗМЕРНЫЕ ЦЕПИ ПРИ СТРОИТЕЛЬСТВЕ СООРУЖЕНИЙ ИЗ СБОРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Пусть размерная цепь в трехмерном пространстве представлена векторами составляющих размеров V_1, V_2, \dots, V_n и вектором замыкающего размера W . Тогда уравнение размерной цепи запишем следующим образом:

$$W = \sum_{i=1}^n V_i. \quad (103)$$

В процессе строительства при реализации цепи все составляющие размеры будут иметь погрешности η_i , тогда

$$W + \xi = \sum_{i=1}^n (V_i + \eta_i) = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{i=1}^n \eta_i,$$

где ξ — вектор погрешностей замыкающего размера.

Вычитая из полученного выражения равенство (103), получим

$$\xi = \sum_{i=1}^n \eta_i. \quad (104)$$

Проецируя все размеры V_i на оси координат X, Y, Z , получим систему уравнений, эквивалентную выражению (103)

$$\left. \begin{aligned} W_x &= \sum_{i=1}^n V_{ix}; \\ W_y &= \sum_{i=1}^n V_{iy}; \\ W_z &= \sum_{i=1}^n V_{iz}, \end{aligned} \right\} \quad (105)$$

где W_x, W_y, W_z — проекции W на оси координат X, Y, Z ; V_{ix}, V_{iy}, V_{iz} — проекции V_i на оси координат X, Y и Z .

Нетрудно получить систему, аналогичную выражению (104)

$$\begin{aligned}\xi_x &= \sum_{i=1}^n \eta_{ix}; \\ \xi_y &= \sum_{i=1}^n \eta_{iy}; \\ \xi_z &= \sum_{i=1}^n \eta_{iz},\end{aligned}\tag{106}$$

где ξ_x, ξ_y, ξ_z — проекции ξ на соответствующие оси координат; $\eta_{ix}, \eta_{iy}, \eta_{iz}$ — проекции η_i на оси координат X, Y и Z .

Все расчеты, как правило, выполняют отдельно для каждой из проекций. Такой подход к расчету правомерен, так как технология монтажа предусматривает отдельную выверку конструкций по направлениям продольной, поперечной осей и по высоте. Кроме того, большинство сборных элементов входит составляющим размером только в одну из проекций. Все это позволяет отдельные проекции считать практически независимыми.

Поэтому, не делая различия между проекциями, в общем виде запишем

$$W = \sum_{i=1}^n V_i,\tag{107}$$

$$\xi = \sum_{i=1}^n \eta_i.\tag{108}$$

СОБИРАЕМОСТЬ РАЗМЕРНЫХ ЦЕПЕЙ

Размерные цепи вида (107) в строительстве называют расчетными участками.

Чтобы исключить накопившиеся погрешности, при реализации размерной цепи в конструкциях зданий из сборных элементов предусматривают специальные компенсаторы. Компенсаторами служат так называемые нематериальные звенья, т. е. зазоры между элементами и площадки опирания одного элемента на другой.

Рассмотрим на конкретном примере расчет размерной цепи.

На рис. 4 приведена схема монтажа колонн и ригеля. Пусть колонны A и B устанавливают на оси I и II , которые получены путем

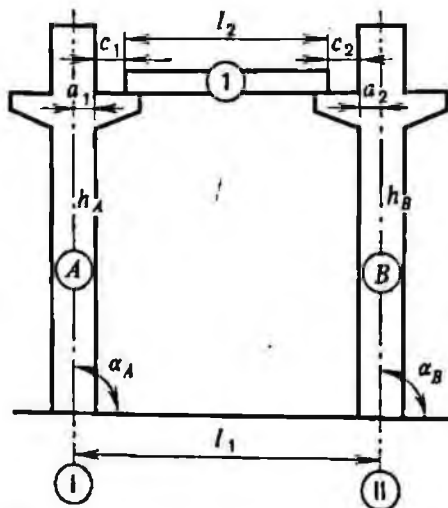


Рис. 4. Схема расчетного участка

отложения на перекрытиях этажа отрезка l_1 , а ригель I укладывают на консоли колонны A с равными зазорами c_1 и c_2 .

В нашем случае компенсаторами на расчетном участке служат зазоры c_1 и c_2 между ригелем и боковыми гранями колонн A и B .

Предположим, что нас интересует погрешность только в направлении замыкающего звена. Проектируя все размеры на это направление, получим выражение вида (107)

$$c_1 + c_2 = l_1 + h_A \cos \alpha_A - h_B \cos \alpha_B - a_1 - a_2 - l_2. \quad (109)$$

Используя (108), уравнение погрешностей расчетного участка запишем в следующем виде:

$$2\xi = \eta_{po} + \eta_{MK}^A - \eta_{MK}^B - \eta_{IK}^A - \eta_{IK}^B - \eta_{IP}, \quad (110)$$

где ξ — погрешность замыкающего размера (компенсаторов c_1 и c_2); η_{po} — погрешность разбивки осей (размера l_1); η_{MK}^A, η_{MK}^B — погрешности монтажа колонн A и B (размеров $\eta_A \cos \alpha_A$ и $\eta_B \cos \alpha_B$); η_{IK}^A, η_{IK}^B — погрешности изготовления колонн A и B (размеров a_1 и a_2); η_{IP} — погрешность изготовления ригеля (размера l_2).

Погрешности размеров вида $h \cos \alpha$ по физическому смыслу являются линейными; их нельзя рассматривать как сложные, связанные с размерами h, α и их погрешностями, так как они возникают непосредственно при выверке верха колонны с помощью теодолита, отвеса или другого приспособления.

Отметим, что погрешности выверки колонн в плоскости рисунка и в плоскости, перпендикулярной к рисунку, практически независимы, так как выверку производят отдельно в каждом из направлений.

Все погрешности, входящие в (110), рассматривают как случайные величины, и основные характеристики замыкающего размера компенсатора оценивают по формулам (101).

Определение закона распределения или числовых характеристик замыкающего размера не решают полностью задачу расчета размерной цепи. В силу ряда обстоятельств отклонение замыкающего размера W от проектного значения W_0 ограничено определенными значениями (допуском).

Рассмотрим в общих чертах систему допусков в строительстве.

Под допуском Δ понимают разность между наибольшим W_{max} и наименьшим W_{min} допускаемыми значениями

$$\Delta = W_{max} - W_{min}.$$

Для отображения связи между допуском и проектным значением размера W_0 вводят понятие допускаемых отклонений

$$\delta^+ = W_{max} - W_0; \quad \delta^- = W_{min} - W_0.$$

Нетрудно убедиться, что $\Delta = \delta^+ - \delta^-$.

Если δ^+ и δ^- равны по абсолютной величине, то допуск называют симметричным. В строительстве чаще всего допуски симметричны.

Математическое ожидание W может не совпадать с W_0 . В этом случае в расчетах необходимо учитывать поправку на несимметричность $\beta = W_0 - m_w$.

При расчете размерных цепей необходимо убедиться в том, что W не выйдет за пределы заданного допуска. Событие, заключающееся в

попадании замыкающего размера W в интервал $[W_{\min}, W_{\max})$, оценивают по вероятности. Если закон распределения вероятностей замыкающего размера известен, то вероятность определяют по формуле (14)

$$P_{\omega} = P(W_{\min} \leq W < W_{\max}) = F(W_{\max}) - F(W_{\min}).$$

Наиболее часто W подчиняется нормальному закону распределения вероятностей. В этом случае, используя формулу (19), получим

$$P_{\omega} = \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{W_{\max} - m_{\omega}}{\sigma_{\omega}} \right) - \Phi \left(\frac{W_{\min} - m_{\omega}}{\sigma_{\omega}} \right) \right]. \quad (111)$$

Используя выражение для поправки за несимметричность, запишем

$$W_{\max} - m_{\omega} = W_{\max} - (W_0 - \beta) = (W_{\max} - W_0) + \beta = \delta^+ + \beta;$$

$$W_{\min} - m_{\omega} = W_{\min} - (W_0 - \beta) = (W_{\min} - W_0) + \beta = \delta^- + \beta.$$

Подставляя полученные значения в (111), будем иметь

$$P_{\omega} = \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{\delta^+ + \beta}{\sigma_{\omega}} \right) - \Phi \left(\frac{\delta^- + \beta}{\sigma_{\omega}} \right) \right]. \quad (112)$$

Если $\beta = 0$ и допуск симметричный, то выражение (112) примет вид

$$P_{\omega} = \frac{1}{2} \left[\Phi \left(\frac{\delta^+}{\sigma_{\omega}} \right) - \Phi \left(\frac{\delta^-}{\sigma_{\omega}} \right) \right].$$

Так как $\Phi(-t) = -\Phi(t)$, то

$$P_{\omega} = \Phi(\delta^+/\sigma_{\omega}).$$

На практике часто сравнивают не границы интервалов, а вероятности. При этом говорят, что данный технологический процесс удовлетворяет требованиям к точности, если расчетное значение вероятности P_{ω} больше нормативного P_{ω}^n , и наоборот — требования к точности не соблюдены, если $P_{\omega} < P_{\omega}^n$. Исходя из этих соображений величину P_{ω} называют собираемостью размерной цепи. По мнению специалистов, сущность явления значительно лучше отображает название «взаимозаменяемость элементов». Последнее время в строительстве все больше находит применение название «собираемость цепи без подбора и подгонки элементов по месту».

Действующие в настоящее время в строительстве нормативные документы предусматривают выполнение работ с вероятностью $P = 0,9973$.

Глава II

РАСЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ

§ 7. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

Под погрешностью η принято понимать разность между результатом измерения l и значением измеряемой величины L

$$\eta = l - L. \quad (114)$$

Появление погрешности обусловлено влиянием различных факторов на процесс измерения. В зависимости от вида фактора различают

погрешности объекта, личные погрешности, погрешности метода измерений, инструментальные погрешности и погрешности, обусловленные влиянием внешней среды. Подробное описание этих погрешностей дано во многих трудах и дополнительных разъяснений не требует.

Остановимся на некотором уточнении понятия погрешность объекта. Во многих случаях объект измерений является абстрактным научным понятием. Измерению же подвергают реальные объекты.

Пусть измеряют диаметр тела, имеющего вид шара [9]. Как бы тщательно ни обрабатывалась поверхность этого тела, она все равно будет иметь отклонения от идеальной сферы. При измерении диаметра в различных частях тела эти отклонения приведут к появлению расхождений в результатах, что свидетельствует о наличии погрешности объекта измерений.

Реальные объекты в процессе измерений неизбежно претерпевают изменения, что тоже приводит к появлению погрешностей. Наиболее наглядно такое явление происходит при построении в натуре проектных величин. Проектный размер — это величина, определяющая взаимное положение точек одного или нескольких тел при идеальном состоянии объекта. Реальный же объект под влиянием различных факторов изменяет в определенных пределах размеры, форму и положение в пространстве, что приводит к появлению соответствующих погрешностей при построении в натуре.

Приведем пример. Пусть при разбивке осей на конструкциях здания откладывают проектный отрезок, равный расстоянию между осями. При выполнении работ под влиянием температуры, ветровых нагрузок и других факторов изменяются как взаимное положение точек одной конструкции, так и взаимное положение самих конструкций. Эти отклонения войдут в результаты разбивки как составная часть общей погрешности.

В перечисленных случаях погрешность объекта ΔL можно представить в виде разности между реальным действительным значением измеряемой величины L и ее абстрактным значением или проектным размером L_0 , т.е. $\Delta L = L - L_0$, тогда

$$\eta' = l - L_0 = l - L + \Delta L = \eta + \Delta L. \quad (115)$$

Если $\Delta L = 0$, то $\eta = \eta'$. Это говорит о том, что η можно рассматривать как частный случай величины η' . В последующем будем пользоваться выражением (115), но для сокращения обозначений имеет смысл опустить индекс при букве η , оговаривая по мере необходимости лишь особые случаи.

На первом этапе изучения погрешности целесообразно рассмотреть не всю совокупность факторов, а лишь отдельный, *элементарный фактор* под ним будем понимать такой простой, несоставной фактор, который порождает погрешность.

В качестве примеров таких пар можно назвать температуру мерного прибора и соответствующую ей погрешность измерения расстояния, неперпендикулярность визирной оси к оси вращения трубы теодолита и коллимационную ошибку.

Для расчетов точности наибольший интерес представляют вопросы связи между причиной (фактором), вызывающей погрешность, и следст-

вием — самой погрешностью. Особенно важна эта связь при решении задач инженерной геодезии, где часто встречаются факторы мало известные или не характерные для задач традиционной геодезии. Знание причинно-следственных связей позволяет наилучшим образом учитывать в расчетах физическую сущность процесса и тем способствует повышению качества работ.

Погрешности измерений обусловлены не только влиянием разных факторов, но и зависят от некоторых характеристик самой измеряемой величины. Так, погрешность измерения расстояний при прочих равных условиях зависит и от длины линии.

При разработке проекта выполнения работ мы можем достаточно широко варьировать характеристиками измеряемых величин — длинами сторон сети, величинами углов, формой сети и т.п. Выбор условий, особенно внешних, ограничен в значительно большей степени.

Исходя из этих соображений имеет смысл в общем виде рассмотреть влияние различных факторов на погрешности измерений без учета характеристики измеряемой величины. Это позволит более наглядно выявить качественную сторону общих закономерностей причинно-следственных связей, для более полного изучения которых целесообразно построить математическую модель погрешности.

На первом этапе построения модели необходимо в числовой мере описать состояние условий измерений. В процессе измерений состояние фактора постоянно изменяется. Поэтому будем характеризовать состояние фактора значениями его параметра, полагая при этом, что между параметром и состоянием фактора существует взаимно-однозначная зависимость. Это означает, что конкретному состоянию фактора соответствует единственное значение параметра и наоборот.

В расчетах точности приходится иметь дело именно с такими факторами. Для примера можно назвать температуру мерного прибора, эксцентриситет алидады, внецентренное расположение угломерного инструмента и т.д.

Есть факторы, состояние которых в настоящее время или затруднительно, или практически невозможно охарактеризовать числовыми значениями, например личные особенности субъекта измерений (наблюдателя). Однако число таких факторов мало и влияние их на погрешности измерений обычно не является определяющим. Если влияние такого рода факторов существенно, то принято экспериментальным путем определять значения соответствующих погрешностей и исключать это влияние из результатов измерений путем введения поправок. Примером может служить определение и исключение личной разности из результатов определения долгот пунктов при астрономических наблюдениях.

Для общего описания зависимости между состоянием фактора и значением его параметров используем теорию множеств.

На первом этапе построения модели рассмотрим описание состояния одного элементарного фактора.

Множество числовых значений a , которые может принимать параметр в процессе измерений, обозначим через R_1 и назовем *пространством состояния фактора*. Значения a в пространстве состояний фактора



Рис. 5. Числовая ось параметра

можно рассматривать как элементарные события, заключающиеся в его появлении в процессе измерения.

В значительно большей степени нас будут интересовать события, заключающиеся в появлении определенных подмножеств пространства R_1 , объединяющих числовую последовательность значений параметра в некоторых пределах. Такие подмножества будем обозначать через A и называть *событиями*. В последующем будет удобно использовать термины «множество» и «событие» как равнозначные.

Расположим значения параметра на числовой оси (рис. 5). Событие A в пространстве R_1 в этом случае отобразится интервалом. Как и в теории вероятностей, интервалы целесообразно выбрать полуоткрытыми и замкнутыми слева, т. е. $a'_j \leq a_j < a'_{j+1}$, где a'_j, a'_{j+1} — границы интервала.

Если параметр — непрерывная величина, то событию A , заключающемуся в появлении значений $a_j \in A$, будем приписывать интервал $[a'_j, a'_{j+1})$.

При $a'_j = a'_{j+1}$ интервал будет вырожденным и соответствующее ему событие — элементарным. Если параметр — дискретная величина, то интервалу $[a'_j, a'_{j+1})$ будем приписывать значение a_j .

В процессе измерений колебания значений параметра ограничены определенными пределами. Обозначим эти пределы через α и β , а интервал $[\alpha, \beta)$ будем называть *диапазоном состояния фактора* или сокращенно — *диапазоном*.

Поясним эти понятия на примере, для чего рассмотрим элементарную погрешность измерения расстояний, обусловленную отклонениями температуры мерного прибора от температуры компарирования.

Диапазон изменения температуры, т. е. нижний t_α и верхний t_β пределы, будут зависеть от конкретных условий измерений. При измерении одной линии температура может изменяться в пределах, например, десятых долей градуса, при измерении в одном ходе — до нескольких градусов и т. п. В условиях конкретного примера назначение длины интервала $[t_\alpha, t_\beta)$ каких-либо принципиальных затруднений не вызывает.

Чтобы получить счетную последовательность интервалов, весь диапазон разобьем на интервалы определенной длины, например 1° . Границы интервалов в этом случае целесообразно совместить с полуградусными значениями, а отсчеты температуры в процессе измерений производить с округлением до целых градусов. Если по условиям задачи такие интервалы нас не устраивают, то можно увеличить или уменьшить их длину.

В расчетах точности имеет смысл длину интервала связать с точ-

постью определения параметра, например с длиной доверительного интервала при заданной вероятности.

Особый интерес для нас представляют вопросы, связанные с количественным отображением динамики состояния фактора в процессе измерений. Наиболее полно этот процесс будет освещен, если образовать класс событий, который будет охватывать не только все возможные состояния фактора (пространство R_1), но и все интервалы, характеризующие переход фактора из одного состояния в другое. Для получения такого класса расширим множество интервалов на числовой оси путем добавления к нему всех возможных объединений интервалов в порядке возрастания их номеров (индексов).

Закономерность образования элементов нового класса поясним на примере множества из k элементов. Если для сокращения записи интервалы $[a'_j, a'_{j+1})$ обозначить через a_j , а элементы образованного класса — через A , то

$$\begin{aligned}
 A_1 &= a_1; \\
 A_2 &= A_1 \cup a_2; \quad A_{k+1} = a_2; \\
 A_3 &= A_2 \cup a_3; \quad A_{k+2} = A_{k+1} \cup a_3; \quad A_{2k} = a_3; \\
 A_4 &= A_3 \cup a_4; \quad A_{k+3} = A_{k+2} \cup a_4; \quad A_{2k+1} = A_{2k} \cup a_4; \\
 &\dots \\
 A_k &= A_{k-1} \cup a_k; \quad A_{2k-1} = A_{2k-2} \cup a_k; \quad A_{3k-2} = \\
 &= A_{k3-3} \cup a_k \dots A_{(k^2+k)/2} = a_k.
 \end{aligned} \tag{116}$$

Все полученные элементы являются интервалами. Действительно, произвольный элемент A_j , например первого столбца, образован последовательным объединением элементов предшествующих строк, т. е.

$$\begin{aligned}
 A_j &= a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_j = [a'_1, a'_2) \cup [a'_2, a'_3) \cup \dots \\
 &\dots \cup [a'_j, a'_{j+1}) = [a'_1, a'_{j+1}).
 \end{aligned}$$

Так как ни одна из пар соседних интервалов не имеет общих точек и ни одна из граничных точек не выпадает из объединения, то $[a'_1, a'_{j+1})$ тоже интервал.

Следовательно, образование нашего множества правомерно.

Образование множеств вида (116) будет правомерным и при выборе интервалов полуоткрытых и замкнутых справа. Общие закономерности образования и свойства множества таких интервалов не изменяются. Различие между ними будет заключаться только в том, что в первом варианте в интервал включена правая граничная точка и исключена левая, а во втором — наоборот.

Обычно мы будем использовать первый вариант образования интервалов, особо оговаривая случаи с полуоткрытыми интервалами, замкнутыми справа. Первый вариант упростит в последующем применение положений теории вероятностей.

Класс событий вида (116) обозначим через \mathfrak{B} , множества которых в общем случае будут счетными.

Положения теории вероятностей распространяются на аддитивные классы событий. Исходя из этого соображения необходимо убедиться в том, что класс \mathfrak{B} в пространстве R_1 удовлетворяет условиям аддитив-

ности. Рассмотрим применительно к классу \mathfrak{B} условия аддитивности (5), (6) и (7).

1. Пространство R_1 охватывает все интервалы a_1, a_2, \dots, a_k и не включает ни одного другого интервала. Следовательно, пространство R_1 можно представить в виде k

$$R_1 = a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_k = \bigcup_{j=1}^k a_j.$$

Если последний элемент первого столбца (116) представить в виде

$$A_k = \bigcup_{j=1}^k a_j, \text{ тогда}$$

$$A_k = R_1. \quad (117)$$

Но $A_k \in \mathfrak{B}$, поэтому $R_1 \in \mathfrak{B}$.

Отмеченная закономерность не зависит от числа элементов и может быть распространена на случай счетного множества. Следовательно, всегда

$$R_1 \in \mathfrak{B} \quad (118)$$

и условие аддитивности (5) выполнено.

2. На основании (117) и (118) можно записать

$$A_k = R_1 \text{ и } A_k = \bigcup_{j=1}^k a_j.$$

Все элементы второго и последующих столбцов (116) не содержат ни одного интервала, которого нет в R_1 . Следовательно,

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{(k^2+k)/k} = \bigcup_{j=1}^{(k^2+k)/2} a_j = A_k.$$

Но $A_k \in \mathfrak{B}$, тогда

$$\bigcup_{j=1}^{(k^2+k)/2} A_j \in \mathfrak{B}. \quad (119)$$

Следовательно, объединение событий $A_1, A_2 \dots$ тоже принадлежит \mathfrak{B} и условие (6) выполнено.

3. Рассмотрим произвольный элемент A_j , образованный объединением интервалов от a_m до a_l ,

$$A_j = a_m \cup a_{m+1} \cup \dots \cup a_l,$$

где $m < l < k$.

Так как $R_1 = A_k$, то дополнение A_j до R_1 является дополнением его до A_k . Представим A_k в виде

$$\begin{aligned} A_k &= a_1 \cup a_2 \cup \dots \cup a_{m-1} \cup a_m \cup \dots \cup a_l \cup a_{l+1} \cup \dots \cup a_k = \\ &= \bigcup_{j=1}^{m-1} a_j \cup \bigcup_{j=m}^l a_j \cup \bigcup_{j=m+1}^k a_j = A_{m-1} \cup A_j \cup A_{l+1}. \end{aligned}$$

Тогда $\bar{A}_j = A_{m-1} \cup A_{l+1}$. Но $A_{m-1} \in \mathfrak{B}$ и $A_{l+1} \in \mathfrak{B}$. Следовательно,

$$\bar{A}_j \in \mathfrak{B} \quad (120)$$

и условие (7) выполнено.

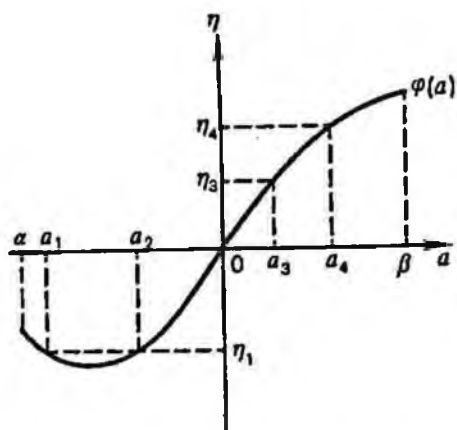


Рис. 6. Пространство элементарных погрешностей

Таким образом, класс множеств \mathfrak{B} в пространстве R_1 аддитивен. Это означает, что производя над элементами множества счетное число раз операции объединения, пересечения и дополнения, получим результат, который тоже принадлежит \mathfrak{B} . Кроме того, на события, описываемые классом \mathfrak{B} , распространяются положения теории вероятностей.

Класс \mathfrak{B} в пространстве R_1 является борелевским полем. Исходя из физической сущности событий назовем \mathfrak{B} *полем состояний фактора*. Поле состояний фактора полностью описывает зависимость между состоянием фактора и значениями параметра.

Для образования модели причинно-следственной связи между состоянием фактора и элементарной погрешностью введем в поле состояния фактора числовую функцию $\varphi(A)$.

Поставим условия, которым эта функция должна удовлетворять.

1. Число $\varphi(a)$, поставленное в соответствие любому $a \in \mathfrak{B}$ и называемое элементарной погрешностью, должно быть действительным.
2. Для $\varphi(a)$ должно существовать такое значение $a_0 \in \mathfrak{B}$ при котором $\varphi(a) = 0$.

(121)

Тройку $(R, \mathfrak{B}, \varphi)$ будем называть *пространством элементарной погрешности*. Пространство погрешностей можно геометрически представить в виде двумерного евклидова пространства (рис. 6.) Если по оси абсцисс расположить числовую ось параметра a , а по оси ординат откладывать соответствующие значения элементарных погрешностей η , то $\varphi(a)$ изобразится кривой.

Рассмотрим некоторые свойства пространства элементарных погрешностей. Конкретное значение параметра, рассматриваемое как вырожденный интервал, изобразится на оси абсцисс точкой a . Между a и $\eta = \varphi(a)$ существует однозначное соответствие, т.е. каждому конкретному значению a соответствует единственное и определенное значение $\eta = \varphi(a)$.

Отметим, что в общем случае однозначной обратной связи может и не быть, т.е. по заданному значению η не всегда однозначно можно определить a . Так, на рис. 6 η_1 соответствуют значения a_1 и a_2 .

Второе условие, налагаемое на $\varphi(a)$, означает, что кривая пересекает или касается оси абсцисс по крайней мере в одной точке. Смысл этого условия сводится к тому, что в природе существуют такие идеальные условия измерений, при которых фактор не порождает погрешности. В рассмотренном ранее примере с измерением расстояний такие условия будут при равенстве температуры компарирования и температуры мерного прибора в процессе измерения.

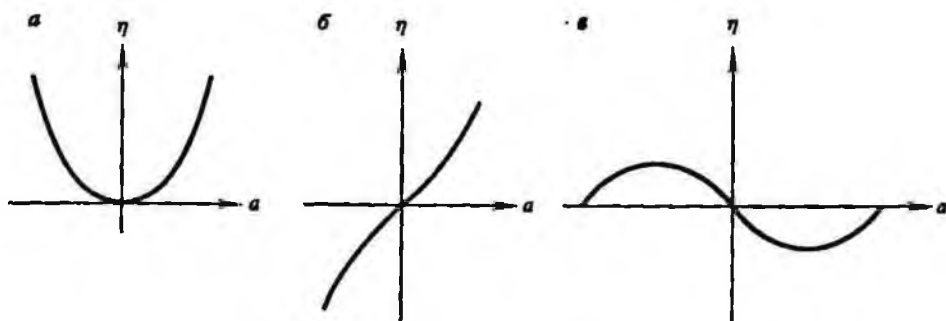


Рис. 7. Графики функций элементарных погрешностей

Для упрощения последующих выкладок начало координат перенесем в точку a_0 . Это не изменит ни смысла явления, ни вида зависимости. При расчетах точности параметры рассматривают как непрерывные величины, тогда в диапазоне изменений параметров погрешность $\eta = \varphi(a)$ тоже будет непрерывной. Это условие практически всегда соблюдается, так как при значениях параметра, соответствующих разрыву или резкому возрастанию функции $\varphi(a)$, измерения не производят.

Поясним это на примере определения превышений h тригонометрическим методом. Погрешность определения h , обусловленную влиянием погрешностей измерения угла ν , можно вычислить по формуле

$$\eta_h = \frac{S'}{\cos^2 \nu} \eta_\nu,$$

где S' — горизонтальное положение линии; η_ν — погрешность измерения угла наклона.

При значениях ν , близких к 90° , погрешность η_h резко возрастает и в точке $\nu = 90^\circ$ уходит в бесконечность. Вполне естественно, что в этой области значений угла наклона тригонометрический способ не применяют, а переходят к геометрическому нивелированию или к измерению превышений с помощью вертикально подвешенных мерных приборов.

Рассмотрим, как отобразится в модели переход фактора из одного состояния в другое. Пусть этот переход характеризуется изменением параметра от значения a_3 до значения a_4 (см. рис. 6). В этом случае изменение состояния фактора будет характеризоваться интервалом $[a_3, a_4]$. Этому интервалу будет однозначно соответствовать приращение функции $\Delta\varphi = \varphi(a_4) - \varphi(a_3)$ и соответствующий этому приращению интервал $[\eta_3, \eta_4]$ по оси η . Если интервалы по оси a брать полуоткрытыми и замкнутыми справа, то $[a_3, a_4)$ будет однозначно соответствовать приращению $\Delta\varphi$, т. е. интервалу $[\eta_3, \eta_4]$.

При расчетах точности необходимо учитывать особенности функции $\varphi(a)$. Поэтому имеет смысл рассмотреть наиболее распространенные виды кривых погрешностей.

Если ветви кривой расположены по одну сторону оси a (рис. 7, а), то функцию называют *односторонней*. Характерная особенность факторов,

порождающих такие функции, заключается в одностороннем их влиянии на погрешность. К их числу относятся отклонения мерного прибора от створа линии, влияние изгибов местности при измерении расстояний и т. д.

Одним из частных случаев односторонней функции является *четная функция*, в которой

$$\varphi(a) = \varphi(-a) \quad (122)$$

и ветви кривой симметричны относительно оси η .

Если ветви кривой расположены по обе стороны оси a (7, б), то кривую называют *двусторонней*. Такая кривая соответствует погрешностям, обусловленным влиянием натяжения мерного прибора при измерении расстояний, непараллельностью визирной оси и оси уровня нивелира и т. п.

Частным случаем двусторонних функций являются *нечетные функции*, т. е. функции, удовлетворяющие условию

$$\varphi(-a) = -\varphi(a). \quad (123)$$

График функции, изменяющейся по *периодическому закону*, изображен на рис. 7, в. В качестве примера фактора, порождающего периодическую погрешность, можно назвать влияние угловой величины эксцентриситета алидады на отсчет по лимбу.

Мы рассмотрели влияние факторов, состояние которых характеризуется одним параметром. В практике расчетов встречаются факторы, состояние которых характеризуется двумя параметрами — линейной величиной и направлением. Для примера можно назвать эксцентриситет алидады и внецентренное расположение угломерного прибора.

Рассмотрим математическую модель этого случая. Пусть состояние фактора характеризуется параметрами a и b . Расположим значения параметров на осях абсцисс и ординат. Как и ранее, образуем на этих осях все возможные интервалы в пределах существования параметров, т. е. в диапазонах $[\alpha_a, \beta_a]$ и $[\alpha_b, \beta_b]$. Раздельно для каждого из параметров составим классы событий вида (116) в пространствах R_a, R_b и обозначим их через \mathfrak{B} и \mathfrak{B}_b . В силу закономерности образования оба класса будут аддитивными в соответствующих пространствах.

Нас будут интересовать события, появляющиеся по одному из каждого класса совместно. Эти события будут означать, что в процессе измерения параметра a принял значение a_1 или $[a'_i, a'_{i+1}]$, а параметр b — значение b_j или $[b'_j, b'_{j+1}]$.

Для образования нового класса событий, охватывающего все возможные состояния фактора и его переходы из одного состояния в другое, поступим следующим образом. Объединим классы \mathfrak{B}_a и \mathfrak{B}_b в двумерном евклидовом пространстве R_2 и присоединим к ним все возможные пересечения по одному элементу из каждого класса. Полученный класс множеств в пространстве R_2 обозначим через \mathfrak{B}_2 .

Образование элементов нового множества поясним на примере двух множеств, содержащих по три элемента a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2 .

Для каждого из этих множеств можно образовать классы \mathfrak{B}_a и \mathfrak{B}_b , элементами которых будут

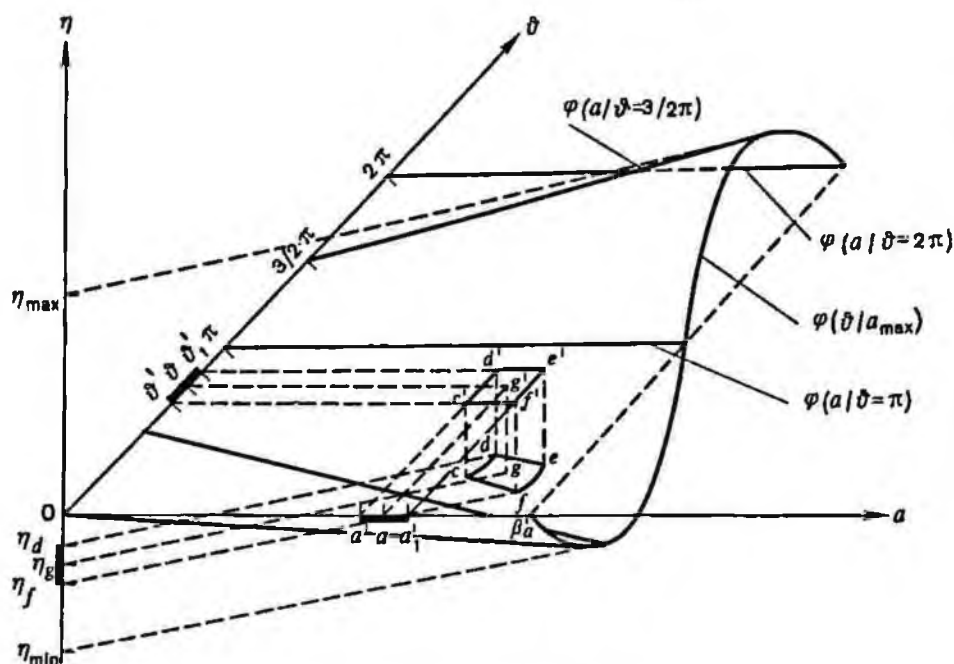


Рис. 8. Пространство погрешности отсчета по лимбу

ности двух параметров можно представить в виде трехмерного евклидова пространства.

На рис. 8 изображено пространство погрешности отсчета по лимбу, обусловленной влиянием эксцентриситета алидады. По оси абсцисс отложены значения линейной величины эксцентриситета a , по оси ординат — угловой величины ϑ , по оси высот — элементарная погрешность η . В качестве нулевых значений параметра приняты величины $a = 0$ и $\vartheta = 0$. Значения a изменяются от $a_0 = 0$ до $\beta_a = a_{\max}$, угловая величина эксцентриситета — от $\alpha_\vartheta = 0$ до $\beta_\vartheta = 2\pi$.

При заданных значениях параметров a и ϑ состояние фактора будет характеризоваться точкой g' на плоскости, а погрешность отсчета — точкой g на поверхности погрешностей. Числовые значения погрешности η_g определятся, если точку g спроецировать на ось η .

Если параметры характеризуются интервалами $[a', a_1]$, $[\vartheta', \vartheta_1]$, то состояние фактора будет характеризоваться прямоугольником $c'd'e'f'$ на плоскости, а погрешность отсчета — участком поверхности $cdef$. Проекция $cdef$ на ось η определит интервал $[\eta_f, \eta_a]$, который и будет характеризовать числовое значение погрешности отсчета по лимбу.

Аналитически поверхность задается функцией

$$\varphi(a, \vartheta) = -a \sin \vartheta.$$

Рассмотрим некоторые свойства этой функции. Частная функция $\varphi(a/\vartheta)$ в пространстве погрешностей изобразится прямой линией

$$\varphi(a/\vartheta) = -k_\vartheta a,$$

где $k_\vartheta = \sin \vartheta$ при $\vartheta = \text{const}$.

На рис. 8 изображены прямые частных функций $\varphi(a/\vartheta = 0)$, $\varphi(a/\vartheta = \pi)$, $\varphi(a/\vartheta = 3/2\pi)$ и $\varphi(a/\vartheta = 2\pi)$.

Частная функция при $a = k_a = \text{const}$ будет иметь вид

$$\varphi(\vartheta/a) = -k_a \sin \vartheta$$

и в пространстве погрешностей отобразится синусоидой с периодом 2π и амплитудой k_a .

Кривая частной функции $\varphi(\vartheta/a_{\text{max}})$ приведена на рис. 8.

В общем случае возможны варианты с тремя и более параметрами. Обобщение модели на большее число параметров существенно увеличивает описание модели, но принципиальных затруднений не вызывает. Такие случаи в геодезической практике встречаются крайне редко, поэтому нет смысла останавливаться на них подробно.

§ 8. ОЦЕНКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Так как элементарная погрешность является случайной величиной, то ее оценка сводится к определению закона распределения вероятностей или числовых характеристик.

Для решения этой задачи используют следующие пути. Первый путь заключается в использовании имеющегося опыта проведения аналогичных работ в сходных условиях. Материалы измерений обрабатывают методами математической статистики и определяют закон распределения или числовые характеристики исследуемой погрешности.

Решение задачи существенно осложняется тем, что по производственным материалам из общей массы трудно выделить влияние одной элементарной погрешности.

Другой путь решения задачи предусматривает проведение эксперимента, в котором условия измерений подбираются таким образом, чтобы исследуемая погрешность существенно преобладала над другими погрешностями. В этом случае условия эксперимента заметно отличаются от производственных и использование полученных результатов всегда связано с определенной долей риска, оценить который достаточно трудно.

Третий путь состоит из определения закона распределения погрешности по известным законам распределения параметров. Способствуя более полному раскрытию существа явления, он позволяет выявить неизвестные особенности процесса. Кроме того, в некоторых случаях это единственный путь решения задачи, например при расчете точности геодезических работ, не имеющих аналога. Как отмечается в работе [15], такой путь решения задачи «теоретически является более общим, строгим и перспективным». Рассмотрим этот вариант решения более подробно.

В § 7 дано общее описание модели элементарной погрешности и показана правомерность применения к ней методов теории вероятности. Для использования этой модели необходимо:

- определить законы распределения параметров элементарной погрешности;
- выявить функциональную зависимость между параметрами и элементарной погрешностью, т. е. определить вид функции $\eta = \varphi(a, b, \dots)$;

– определить закон распределения элементарной погрешности.

Закон распределения параметров можно установить экспериментальным путем или, исходя из некоторых априорных положений, вывести. Если первый вариант определения закона не нуждается в дополнительных пояснениях, то на втором следует остановиться более детально.

Тот или иной закон распределения вероятностей всегда связан как с существом явления, так и с условиями проведения опыта или измерения. Если эти особенности известны достаточно полно, то можно закон распределения случайной величины установить априорно.

Поясним это на примере погрешностей округления чисел. Возьмем округленное число, например 8. Мы не знаем, какая цифра была до округления. Это может быть любая последняя цифра чисел от 7,5 до 8,5. У нас нет оснований отдать предпочтение ни одному из них. Поэтому всем значениям погрешности из интервала от $-0,5$ до $+0,5$ приписывают одинаковые вероятности и говорят, что погрешности округления подчиняются закону равномерной плотности. Правомерность высказанного предположения подтверждена практикой.

Рассмотрим еще один пример. Если на числовой оси равномерно достаточно редко и независимо разместить точки, то случайная величина – число попаданий точек на отрезок заданной длины – будет подчиняться закону Пуассона.

В работе [9] отмечается, что роль закона равномерной плотности в геодезии значительно занижена. Показывается, в частности, что есть все основания считать угловой элемент центрирования теодолита случайной величиной, подчиненной закону равномерной плотности на участке от 0 до 2π . Появление закона равномерной плотности углового элемента центрирования объясняется тем, что при центрировании теодолита над точкой обращают внимание только на линейную величину погрешности. Следовательно, нет оснований отдать предпочтение ни одному из направлений и угловой элемент надо признать распределенным равномерно. Автором проведена экспериментальная проверка высказанного предположения: выполнено 40 установок теодолита под знаком с помощью нитяного отвеса. Гипотеза о равномерном распределении угловой величины погрешности центрирования проверялась с помощью критерия χ^2 . Вероятность того, что отклонения полученных значений от теоретических произошли по случайным причинам, оказалась равной $R_{\chi^2} = 0,794$. Это свидетельствует о справедливости высказанного предположения.

Если параметрами служат погрешности, обусловленные влиянием целого ряда факторов, то распределение вероятности таких параметров, как правило, подчиняется нормальному закону. Справедливость этого положения будет доказана в следующих параграфах.

Таким образом, во многих случаях можно априори установить закон распределения параметра, что существенно упрощает решение общей задачи.

При определении функциональной зависимости между параметрами и погрешностью исходят из геометрических соображений или физической сущности явления. Задачи такого вида часто встречаются в традиционных курсах геодезии при определении поправок. Для примера рассмот-

рим определение зависимости между элементами центрирования и погрешностью измерения угла [9].

Пусть при измерении угла теодолит установлен не над вершиной угла C , а над точкой I (рис. 9). В этом случае погрешность измерения угла определится по формуле

$$\eta = \beta' - \beta = \alpha - \gamma. \quad (127)$$

Выразим η через линейный a и угловой ϑ элементы центрирования

$$\sin \alpha = \frac{a}{S_1} \sin \vartheta \quad \sin \gamma = \frac{a}{S_2} \sin (\vartheta + \beta).$$

Углы α и γ малы, а I близко к C , тогда

$$\alpha = \frac{a \sin \vartheta}{S_1}; \quad \gamma = \frac{a \sin (\vartheta + \beta)}{S_2}.$$

Подставляя их значения в выражение (127), получим

$$\begin{aligned} \eta &= a \left[\frac{\sin \vartheta}{S_1} - \frac{\sin (\vartheta + \beta)}{S_2} \right] = a \left[\frac{\sin \vartheta}{S_1} - \frac{\sin \vartheta \cos \beta + \cos \vartheta \sin \beta}{S_2} \right] = \\ &= a \left[\left(\frac{1}{S_1} - \frac{\cos \beta}{S_2} \right) \sin \vartheta - \frac{\sin \beta}{S_2} \cos \vartheta \right]. \end{aligned}$$

Обозначив

$$k_1 = \frac{1}{S_1} - \frac{\cos \beta}{S_2}, \quad k_2 = \frac{\sin \beta}{S_2},$$

окончательно получим

$$\eta = a(k_1 \sin \vartheta - k_2 \cos \vartheta). \quad (128)$$

Рассмотрим пример использования физических закономерностей. Пусть на конструкциях здания при температуре t для разбивки осей отложен отрезок L . По техническим условиям длина отрезка при температуре эксплуатации t_2 должна быть равна проектному размеру L_0 .

В этих условиях погрешность будет равна $\eta = L - L_0$.

Известно, что

$$L_0 = L + \alpha(t_2 - t)L,$$

где α — коэффициент линейного расширения конструкций.

Тогда

$$\eta = -\alpha(t_2 - t)L. \quad (129)$$

Выражения (128) и (129) и определяют интересующие зависимости.

Определение закона распределения погрешности в общем виде сводится к определению закона функции случайных величин. Для решения задачи используют сведения о законе распределения параметров и функциональную зависимость между погрешностью и параметрами. Общий ход решения задачи изложен в § 3.

Трудности аналитического характера часто заставляют отказаться от строгих методов решения поставленной задачи и ограничиться определением числовых характеристик.

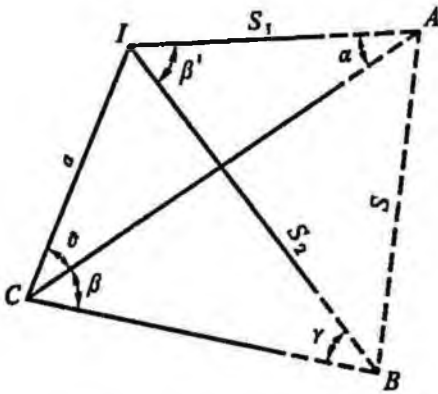


Рис. 9. Погрешность центрирования

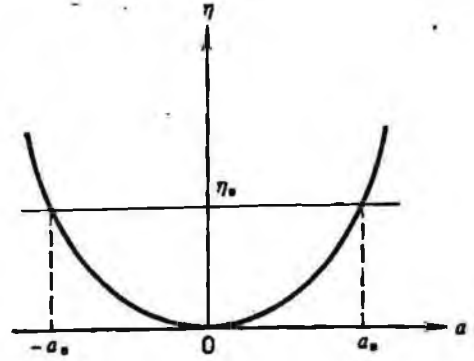


Рис. 10. График погрешности $\eta = k_2 a^2$

Приведем примеры определения законов и числовых характеристик функций, необходимых для последующих расчетов точности.

Пример 1. Параметр имеет равномерную плотность $f(a) = 1/2a$ при $-a < a < a$.

Найти закон распределения и числовые характеристики погрешности

$$\eta = \varphi(a) = k_1 a, \quad (130)$$

где k_1 — постоянный коэффициент.

Решение. Так как $\varphi(a)$ монотонна, то плотность распределения погрешности найдем по формуле (49). Вычислим функцию, обратную $\varphi(a)$, и ее производную

$$a = \psi(\eta) = \eta/k_1; \quad |\psi'(\eta)| = 1/k_1.$$

Подставляя полученные значения, запишем

$$f(\eta) = f(\psi(\eta)) |\psi'(\eta)| = 1/2 |k_1| a.$$

Подставив границы параметра в выражение (130), определим границы существования погрешности

$$-a_\eta = -k_1 a \text{ и } a_\eta = k_1 a$$

Окончательно получим

$$f_\eta = \frac{1}{2k_1 a} (-k_1 a < \eta < k_1 a). \quad (131)$$

Нетрудно убедиться, что погрешность имеет равномерную плотность с числовыми характеристиками

$$m_\eta = 0 \text{ и } D_\eta = k_1^2 \frac{a^2}{3} = k_1^2 \sigma_a^2. \quad (132)$$

Пример 2. Для параметра из примера 1 найти закон распределения и числовые характеристики погрешности

$$\eta = \varphi(a) = k_2 a^2.$$

Решение. Функция $\varphi(a)$ немонотонна. Для составления функции распределения погрешности воспользуемся выражением (50).

Погрешность η будет меньше заданного значения, если параметр принимает значения от $-a_0$ до a_0 (рис. 10), тогда

$$F(\eta_0) = P(\eta < \eta_0) = P(-a_0 < a < a_0) = \int_{-a_0}^{a_0} f(a) da = 2 \int_0^{a_0} f(a) da. \quad (133)$$

Выразим пределы интегрирования через η : $a_0 = \sqrt{\eta_0/k_2}$.

Подставив значение $f(a)$ и пределы интегрирования в выражение (133), получим

$$F(\eta_0) = \frac{1}{\alpha_a} \int_0^{\sqrt{\eta_0/k_2}} da = \frac{1}{\alpha_a} \sqrt{\frac{\eta_0}{k_2}}. \quad (134)$$

Найдем плотность распределения

$$f(\eta) = F'(\eta) = \frac{1}{2\alpha_a \sqrt{k_2 \eta}} \text{ при } 0 < \eta < k_2 \alpha^2. \quad (135)$$

Для вычисления математического ожидания воспользуемся выражением (16)

$$m_\eta = \int_0^{k_2 \alpha^2} \eta f(\eta) d\eta = \frac{1}{2\alpha_a \sqrt{k_2}} \int_0^{k_2 \alpha^2} \eta^{\frac{1}{2}} d\eta = k_2 \frac{\alpha^2}{3} = k_2 \sigma_a^2. \quad (136)$$

Вычислим дисперсию

$$D(\eta) = D(k_2 \alpha^2) = k_2^2 D(\alpha^2). \quad (137)$$

Применяя формулу для вычисления дисперсии, получим

$$D(\alpha^2) = M(\alpha^2) = \int_{-\alpha}^{+\alpha} (\alpha^2 - m_{\alpha^2}) f(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2\alpha} (\alpha^2 - m_{\alpha^2}) \alpha.$$

Вычислим математическое ожидание величины α^2

$$m_{\alpha^2} = M(\alpha^2) = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \alpha^2 f(\alpha) d\alpha = \alpha^2/3 = \sigma_a^2.$$

Тогда

$$D(\alpha^2) = \frac{1}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{+\alpha} (\alpha^2 - \sigma_a^2) d\alpha = (4/5) \sigma_a^4.$$

Подставляя полученное значение в (137), получим

$$D(\eta) = \sigma_\eta^2 = (4/5) k_2^2 \sigma_a^4 = (4/45) k_2^2 \alpha^4. \quad (138)$$

Пример 3. Параметр подчинен нормальному закону распределения с плотностью

$$f(a) = \frac{1}{\sigma_a \sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2\sigma_a^2}.$$

Найти закон распределения и числовые характеристики погрешности

$$\eta = \varphi(a) = k_1 a.$$

Решение. Функция $\varphi(a)$ монотонна. Подставим значения $\psi(\eta)$ и $|\psi'(\eta)|$ в общую формулу (49)

$$f(\eta) = f(\psi(\eta)) |\psi'(\eta)| = \frac{1}{|k_1| \sigma_a \sqrt{2\pi}} e^{-\eta^2/2k_1^2 \sigma_a^2}. \quad (139)$$

Из формулы плотности следует, что погрешность распределена по нормальному закону с параметрами

$$m_\eta = 0 \text{ и } D_\eta = \sigma_\eta^2 = k_1^2 \sigma_a^2.$$

Пример 4. Для параметра из примера 3 найти закон распределения и числовые характеристики погрешности $\eta = \varphi(a) = k_2 a^2$.

Решение. Функция $\varphi(a)$ немонотонна. Как и в примере 2, используя рис. 9 составим функцию распределения

$$F(\eta_0) = P(\eta < \eta_0) = P(-a_0 < a < a_0) = 2 \int_0^{a_0} f(a) da.$$

Подставив значения пределов и плотности распределения, найдем

$$F(\eta_0) = \frac{1}{\sigma_a \sqrt{2\pi k_2}} \int_0^{\sqrt{\eta_0/k_2}} \frac{1}{\sqrt{\eta}} e^{\eta/2k_2\sigma_a^2} d\eta. \quad (140)$$

Введем новую переменную

$$t = (1/\sigma_a) \sqrt{\eta/k_2}$$

и найдем ее производную

$$dt = \frac{1}{2\sigma_a \sqrt{k_2 \eta}} d\eta. \quad (141)$$

Произведем в формуле (140) замену переменных:

$$F(\eta_0) = \frac{1}{\sigma_a \sqrt{2\pi k_2}} \int_0^{\sqrt{\eta_0/k_2}} \frac{1}{\sqrt{\eta}} e^{-t^2/2} 2\sigma_a \sqrt{k_2 \eta} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{\eta_0/k_2}} e^{-t^2/2} dt = \Phi(t). \quad (142)$$

Таким образом, для вычисления функции распределения можно использовать табулированные значения интеграла вероятностей. При этом t следует определять по формуле (141).

Для определения плотности распределения продифференцируем выражение (142)

$$f(\eta) = F'(\eta) = \frac{1}{\sigma_a \sqrt{2\pi k_2 \eta}} e^{-\eta/2k_2\sigma_a^2} \quad \text{при } 0 < \eta < \infty. \quad (143)$$

Определим математическое ожидание погрешности

$$m_\eta = M(\eta) = \int_0^\infty \eta f(\eta) d\eta = \frac{1}{\sigma_a \sqrt{2\pi k_2}} \int_0^\infty \sqrt{\eta} e^{-\eta/2k_2\sigma_a^2} d\eta.$$

Обозначим $t_1 = \eta/2k_2\sigma_a^2$ и получим замену переменных

$$m_\eta = \frac{2k_2\sigma_a^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t_1^{(3/2)-1} e^{-t_1} dt_1.$$

Интеграл в правой части равенства — это известная гамма-функция

$$\int_0^\infty t_1^{(3/2)-1} e^{-t_1} dt_1 = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2} - 1\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Тогда

$$m_\eta = k_2\sigma_a^2. \quad (144)$$

Для определения дисперсии воспользуемся формулой (17)

$$D(\eta) = M(\eta^2) - M^2\eta.$$

Найдем математическое ожидание величины η^2

$$M(\eta^2) = \int_0^\infty \eta^2 f(\eta) d\eta = \frac{1}{\sigma_a \sqrt{2\pi k_2}} \int_0^\infty \eta^{3/2} e^{-\eta/2k_2\sigma_a^2} d\eta.$$

Подставив значение плотности и произведя замену η на t_1 , получим

$$M(\eta^2) = \frac{4k_2^2\sigma_a^4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t_1^{(5/2)-1} e^{-t_1} dt_1 = \frac{4k_2^2\sigma_a^4}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = 3k_2^2\sigma_a^4.$$

Полученное значение подставим в формулу для $D(\eta)$

$$D(\eta) = \sigma_\eta^2 = 3k_2^2\sigma_a^4 - k_2^2\sigma_a^4 = 2k_2^2\sigma_a^4. \quad (145)$$

Пример 5. Параметр имеет равномерную плотность распределения

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \text{ при } -a < a < a.$$

Найти закон распределения и числовые характеристики погрешности

$$\eta = \varphi(a) = k_0 + k_1a + k_2a^2.$$

Решение. График этой функции при $k_2 > 0$ приведен на рис. 11. Точки пересечения параболы с осью a имеют значения

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{-k_1 - \sqrt{k_1^2 - 4k_2k_0}}{2k_2} \\ a'_0 &= \frac{-k_1 + \sqrt{k_1^2 - 4k_2k_0}}{2k_2} \end{aligned} \right\}. \quad (146)$$

Для определения границ интервала (a_1, a_2) , соответствующего значению погрешности $\eta < \eta_0$, в выражении (146) надо заменить k_0 на величину $k_0 - \eta_0$. Тогда

$$a_1 = \frac{-k_1 - \sqrt{k_1^2 - 2k_2(k_0 - \eta_0)}}{2k_2};$$

$$a_2 = \frac{-k_1 + \sqrt{k_1^2 - 2k_2(k_0 - \eta_0)}}{2k_2}.$$

Используя эти значения, составим функцию распределения

$$F(\eta_0) = P(\eta < \eta_0) = \int_{a_1}^{a_2} f(a) da = \frac{1}{2a} \int_{a_1}^{a_2} da = \frac{\sqrt{k_1^2 - 4k_2(k_0 - \eta_0)}}{2k_2a}. \quad (147)$$

Числовые характеристики погрешности определим по формулам (34) и (35)

$$m_\eta = M(k_0 + k_1a + k_2a^2) = k_0 + k_1M(a) + k_2M(a^2); \quad (148)$$

$$D(\eta) = D(k_0 + k_1a + k_2a^2) = k_1^2D(a) + k_2^2D(a^2) + 2k_1k_2K_{aa^2} = k_1^2[M(a^2) - M^2(a)] + k_2^2[M(a^4) - M^2(a^2)] + 2k_1k_2[M(a^3) - M(a)M(a^2)]. \quad (149)$$

Так как параметр имеет симметричное распределение, то моменты нечетного порядка равны нулю, т.е. $M(a) = M(a^3) = 0$.

Для моментов четного порядка будем иметь

$$M(a^2) = \int_{-a}^{+a} a^2 \frac{1}{2a} da = \frac{a^2}{3} = \sigma_a^2;$$

$$M(a^4) = \int_{-a}^{+a} a^4 \frac{1}{2a} da = \frac{a^4}{5} = \frac{9}{5}\sigma_a^4.$$

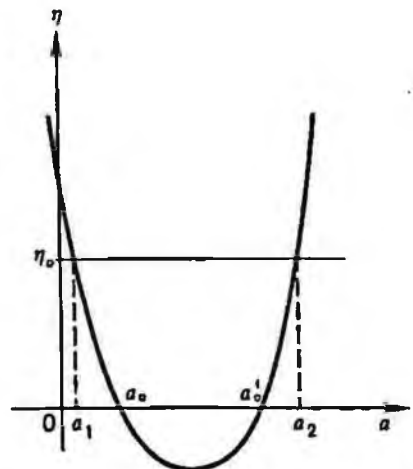


Рис. 11. График погрешности $\eta = k_0 + k_1a + k_2a^2$

Подставив полученные значения в (148) и (149), найдем

$$m_{\eta} = k_0 + k_2 \frac{\sigma_a^2}{3} = k_0 + k_2 \sigma_a^2; \quad (150)$$

$$D(\eta) = \sigma_{\eta}^2 = k_1^2 \frac{\sigma_a^2}{3} + \frac{4}{45} k_2^2 \sigma_a^4 = k_1^2 \sigma_a^2 + \frac{4}{5} k_2^2 \sigma_a^4. \quad (151)$$

Пример 6. Для параметра, имеющего нормальное распределение с плотностью

$$f(a) = \frac{1}{\sigma a \sqrt{2\pi}} e^{-a^2/2\sigma_a^2},$$

найти закон распределения и числовые характеристики погрешности

$$\eta = \varphi(a) = k_0 + k_1 a + k_2 a^2.$$

Решение. При произвольном значении η границы интервала значений a_1 и a_2 определяются как и в примере 5.

Составим функцию распределения погрешности

$$F(\eta_0) = P(\eta < \eta_0) = \int_{a_1}^{a_2} f(a) da = \frac{1}{\sigma a \sqrt{2\pi}} \int_0^{a_2} e^{-a^2/2\sigma_a^2} - \frac{1}{\sigma a \sqrt{2\pi}} \int_0^{a_1} e^{-a^2/2\sigma_a^2}.$$

Обозначив

$$t_1 = a_1/\eta_0 \sigma_a; \quad t_2 = a_2/\eta_0 \sigma_a$$

и произведя замену переменных, получим

$$F(\eta_0) = \frac{1}{2} \Phi(t_2) - \frac{1}{2} \Phi(t_1) \quad \text{при} \quad -\frac{k_1}{2k_2} < \eta.$$

Для определения математического ожидания и дисперсии воспользуемся формулами (148) и (149). Так как распределение параметра симметричное, то нечетные моменты равны нулю, т.е. $M(a) = M(a^3) = 0$.

Для четных моментов будем иметь

$$M(a^2) = \sigma_a^2; \quad M(a^4) = 3\sigma_a^4.$$

Подставим эти значения в (148) и (149)

$$m_{\eta} = k_0 + k_2 \sigma_a^2; \quad (152)$$

$$D(\eta) = \sigma_{\eta}^2 = k_1^2 \sigma_a^2 + k_2^2 (3\sigma_a^4 - \sigma_a^4) = k_1^2 \sigma_a^2 + 2k_2^2 \sigma_a^4. \quad (153)$$

Пример 7. Линейный элемент центрирования распределен как модуль нормальной случайной величины, а угловой — имеет равномерную плотность на участке от 0 до 2π .

Функциональная зависимость между погрешностью и параметрами задана выражением (128)

$$\eta = a(k_1 \sin \vartheta - k_2 \cos \vartheta).$$

Найти числовые характеристики погрешности.

Решение. Так как a и ϑ независимы, то

$$f(a, \vartheta) = f(a)f(\vartheta).$$

Следуя Ю. В. Кемвицу [9], начальный момент первого порядка представим в виде

$$M(\eta) = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \eta f(a) f(\vartheta) da d\vartheta = \frac{M(a)}{2\pi} \int_0^{2\pi} (k_1 \sin \vartheta - k_2 \cos \vartheta) d\vartheta,$$

но

$$\int_0^{2\pi} (k_1 \sin \vartheta - k_2 \cos \vartheta) d\vartheta = 0,$$

тогда

$$M(\eta) = 0. \quad (154)$$

Для определения дисперсии воспользуемся формулой

$$D(\eta) = M(\eta^2) - M^2(\eta).$$

Найдем $M(\eta^2)$. Как и ранее представим

$$M(\eta^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \eta^2 f(a) f(\vartheta) da d\vartheta = \frac{M(a^2)}{2\pi} \int_0^{2\pi} (k_1 \sin \vartheta - k_2 \cos \vartheta)^2 d\vartheta.$$

Известно

$$M(a^2) \int_{-\infty}^{\infty} |a|^2 f(a) da = \sigma^2 a;$$

$$\int_0^{2\pi} (k_1 \sin \vartheta - k_2 \cos \vartheta)^2 d\vartheta = \pi(k_1^2 + k_2^2).$$

В [15] показано, что

$$k_1^2 + k_2^2 = (S/S_1 S_2)^2 = k_s^2, \quad (155)$$

где S — сторона ВС (см. рис. 9)

Тогда

$$D(\eta) = \sigma_{\eta}^2 = k_s^2 \frac{\sigma_a^2}{2}. \quad (156)$$

Определение закона распределения функции нескольких аргументов связано со значительными затруднениями аналитического характера. Часто встречаются задачи, которые требуют применения численных методов интегрирования, что сопряжено со значительными трудозатратами. Поэтому при расчетах наиболее часто ограничиваются определением числовых характеристик.

В традиционных разделах геодезии и теории обработки геодезических измерений широкое применение для определения числовых характеристик нелинейных функций нашел метод линеаризации. Разлагая функцию по строке Тейлора, приводят ее к линейному виду и применяют формулы (34) и (35). В окончательном виде формулы для приближенных оценок числовых характеристик имеют вид (102).

§ 9. РАСЧЕТ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

При расчетах элементарных погрешностей обычно задаются допускаемые отклонения погрешностей, а определяются соответствующие характеристики параметров.

Обозначим допускаемые отклонения через δ , при этом нижний предел будем сопровождать знаком минус, а верхний — знаком плюс. При таком обозначении основное условие расчета выразится неравенством

$$\delta_{\eta}^{-} \leq \eta \leq \delta_{\eta}^{+}. \quad (157)$$

В зависимости от метода оценки погрешности и требований к точности используют различные варианты расчета.

I. При расчете элементарных погрешностей по функциональной зависимости между параметрами и погрешностью допускаемые отклонения параметра определяют по формулам

$$\delta_a = \operatorname{arg} \varphi(\delta_\eta^-) \text{ и } \delta_a^+ = \operatorname{arg} \varphi(\delta_\eta^+), \quad (158)$$

где $\operatorname{arg} \varphi(\delta_\eta^-)$ — значение аргумента, при котором функция $\varphi(a) = \delta_\eta$.

При симметричных значениях допускаемых отклонений формулу (158) можно записать в виде $|\delta_a| = \delta_a = |\operatorname{arg} \varphi(\delta_\eta)|$.

Такой вариант расчета достаточно прост и нашел широкое применение в практике расчетов. Он дает хорошие результаты тогда, когда параметр и элементарная погрешность имеют математические ожидания, близкие к нулю.

II. При вероятностном расчете элементарных погрешностей пользуются построением доверительного интервала параметра. Для этого необходимо знать функцию распределения погрешности, выраженную через значения параметра. Тогда, определяя значения функции распределения $F(\eta < \delta_\eta)$ при заданном (нормативном) значении доверительной вероятности P_η , можно найти границы доверительного интервала параметра или соответствующие этому интервалу значения числовых характеристик параметра.

С математической точки зрения этот вариант расчета является наиболее строгим. Если известны формулы перехода к значениям границ параметра, то объем вычислений возрастает незначительно.

Точность расчета в этих двух вариантах зависит от изменения длины доверительного интервала при различных значениях доверительной вероятности.

III. При раздельном рассмотрении характеристик положения и разброса параметра и погрешности по допускаемым значениям математического ожидания δ_{m_η} и стандарта погрешности δ_{σ_η} определяют соответствующие значения числовых характеристик параметра m_a и σ_a . Для решения этой задачи необходимо знать зависимости между числовыми характеристиками параметра и погрешности

$$m_\eta = \psi_m(m_a); \quad \sigma_\eta = \psi_\sigma(\sigma_a). \quad (159)$$

Подставляя в формулы (159) вместо m_η и σ_η допускаемые значения δ_{m_η} и δ_{σ_η} можно определить соответствующие заданному условию значения параметра

$$\begin{aligned} m_a &= \operatorname{arg} \psi_m(\delta_{m_\eta}); \\ \sigma_a &= \operatorname{arg} \psi_\sigma(\delta_{\sigma_\eta}). \end{aligned} \quad (160)$$

Этот вариант лучше других подходит для расчетов погрешностей инженерно-геодезических работ, так как в большей степени позволяет учитывать характер накопления погрешностей в процессе измерений или построений проектных величин в натуре.

Применение разных вариантов расчета проиллюстрируем на приме-

Пример 8. При доверительной вероятности P_η определить границы доверительного интервала параметра для погрешности из примера 1.

Решение. Параметр и погрешность в примере 1 подчиняются закону равномерной плотности. В этом случае длина доверительного интервала пропорциональна доверительной вероятности.

Следовательно,

$$\delta_{\eta}^{-} = -\alpha_{\eta} P_{\#} \text{ и } \delta_{\eta}^{+} = \alpha_{\eta} P_{\#}.$$

Так как математические ожидания параметра и погрешности равны нулю, то

$$|\alpha_{\eta}| = |\delta_{\eta}| / P_{\#}. \quad (161)$$

Известно, что $\alpha_{\eta} = k_1 \alpha_{\#}$. Тогда

$$|\alpha_{\#}| = |\delta_{\eta}| / k_1 P_{\#}.$$

Переходя к доверительному интервалу, запишем

$$\delta_{\eta}^{-} / k_1 P_{\#} < a < \delta_{\eta}^{+} / k_1 P_{\#}. \quad (162)$$

Для сравнения вариантов произведем расчет по функциональной зависимости между параметром и погрешностью. Подставив в формулу (159) значения δ_{η}^{-} и δ_{η}^{+} , получим

$$\delta_{\eta}^{-} / k_1 \leq a \leq \delta_{\eta}^{+} / k_1. \quad (163)$$

Сравнивая неравенства (162) и (163), нетрудно убедиться, что абсолютное значение границ интервала при расчете по функциональной зависимости несколько преуменьшено. Если предварительно ограничить погрешность значениями (161), то оба варианта дадут одинаковые результаты.

Пример 9. При доверительной вероятности $P_{\#}$ построить доверительный интервал параметра для погрешности из примера 2.

Решение. Для построения доверительного интервала параметра воспользуемся функцией распределения погрешности (134)

$$F(\eta_0) = P(0 < \eta < \eta_0) = \frac{1}{|\alpha_{\#}| \sqrt{k_2}} \sqrt{\eta_0}.$$

Так как $F(\eta_0) = P_{\#}$, то

$$\frac{1}{|\alpha_{\#}| \sqrt{k_2}} \sqrt{\eta_0} = P_{\#}.$$

Для определения границ параметра подставим вместо η_0 значение δ_{η} . Решая полученное выражение относительно $\alpha_{\#}$, получим

$$|\alpha_{\#}| = \frac{1}{P_{\#}} \sqrt{\frac{\delta_{\eta}}{k_2}}. \quad (164)$$

Переходя к доверительному интервалу, запишем

$$-\frac{1}{P_{\#}} \sqrt{\frac{\delta_{\eta}}{k_2}} \leq a \leq \frac{1}{P_{\#}} \sqrt{\frac{\delta_{\eta}}{k_2}}. \quad (165)$$

Нетрудно убедиться, что при расчете по функциональной зависимости будут обнаружены те же закономерности, что и в примере 8.

Пример 10. При заданной доверительной вероятности $P_{\#}$ определить допускаемое значение стандарта параметра для погрешности из примера 3.

Решение. Погрешность и параметр распределены нормально с нулевыми математическими ожиданиями. Для определения нормированного значения погрешности воспользуемся выражением

$$P_{\#} = \Phi(t) \text{ или } t = \arg \varphi(P_{\#}).$$

Так как $t = \eta_0 \sigma_{\eta}$, то

$$\sigma_{\eta} = \eta_0 / t.$$

Подставив вместо η_0 значение δ_{η} и заменив стандарт погрешности его значением, получим

$$\sigma_{\#} = \delta_{\eta} / k_1 t. \quad (166)$$

Следовательно, для ограничения элементарной погрешности заданными пределами необходимо стандарт параметра ограничить величиной, представленной в правой части равенства (166).

Пример 11. При заданной доверительной вероятности P_a определить допускаемые значения стандарта параметра для погрешности из примера 4.

Решение. Используя функцию распределения погрешности (142), запишем $F(\eta_0) = \Phi(t) = P_a$,

где

$$t = \frac{1}{\sigma_a} \sqrt{\frac{\eta_0}{k_2}}.$$

Откуда

$$\sigma_a = \frac{1}{t} \sqrt{\frac{\eta_0}{k_2}},$$

Заменяя значение η_0 на δ_η , получим

$$\sigma_a = \frac{1}{t} \sqrt{\frac{\delta_\eta}{k_2}}. \quad (167)$$

Для сравнения вариантов произведем расчет по функциональной зависимости. Подставив в формулу (158) допускаемые значения погрешности, получим

$$-\sqrt{\delta_\eta/k_2} < a < \sqrt{\delta_\eta/k_2}. \quad (168)$$

Нетрудно убедиться в том, что при ограничении параметра вероятности методом в виде

$$-t\sigma_a < a < t\sigma_a, \quad (169)$$

результаты расчетов по I и II вариантам будут одинаковыми.

Действительно, подставляя в формулу (169) значение σ_a из (167), получим выражение (168).

Пример 12. Определить числовые характеристики параметра из примера 4, обеспечивающие появление элементарной погрешности в пределах заданных значений $\delta_{m\eta}$ и δ_{σ_η} .

Решение. Для определения математического ожидания погрешности воспользуемся формулой (144). При четной функции параметра математическое ожидание элементарной погрешности отличается от нуля вне зависимости от того, равно математическое ожидание параметра нулю или нет. Появление математического ожидания погрешности в этом случае обусловлено разбросом параметра, что и отображает данная формула. Чтобы ограничить m_η , необходимо ограничить значение дисперсии параметра. Решая (144) относительно стандарта параметра, получим

$$\sigma_a = \sqrt{\delta_{m\eta}/k_2}.$$

Заменяя в этом выражении m_η на допускаемое значение $\delta_{m\eta}$ окончательно будем иметь

$$\sigma_a \leq \sqrt{\delta_{m\eta}/k_2}. \quad (170)$$

Для определения стандарта параметра, обуславливающего разброс элементарной погрешности, воспользуемся равенством (145), решив которое относительно σ_a , получим

$$\sigma_a = \sqrt{\sigma_\eta/\sqrt{2k_2}} \approx 0,84 \sqrt{\sigma_\eta/k_2}.$$

Заменим σ_η на δ_{σ_η} , тогда

$$\sigma_a \leq 0,84 \sqrt{\delta_{\sigma_\eta}/k_2}. \quad (171)$$

Сравним значения стандарта в выражениях (170) и (171). При правильной организации геодезических работ математические ожидания, т.е. систематические погрешности, всегда в несколько раз меньше, чем случайные. Следовательно, более жестким следует признать ограничение (170). Это значение стандарта параметра и принимают за окончательное.

Сравним I и III варианты расчетов на примерах 11 и 12, для чего сопоставим неравенства (168) и (170). Математически строгое сравнение провести трудно, так как в основу вариантов положены принципиально разные величины. Поэтому проведем приближенное сравнение на основе числовых значений, полученных в результате некоторых общих соображений. Будем полагать, что значение параметра ограничивается утроенной величиной стандарта, а соотношение между допускаемыми значениями погрешности и его математическим ожиданием равно 5, т.е.

$$|a| = 3\sigma_a \text{ и } \sigma_\eta = 5\delta_{\sigma_\eta}. \quad (172)$$

Для сравнения неравенство (168) запишем в виде

$$|a| \leq \sqrt{\delta_\eta/k_2}.$$

Подставив в это неравенство значения из (172), получим

$$\sigma_a \leq 1,35 \sqrt{\delta_{\sigma_\eta}/k_2}. \quad (173)$$

Сравнивая (170) и (172), видим, что более жесткое ограничение наложено на неравенство (170).

Пример 13. При доверительной вероятности P_n построить доверительный интервал параметра для погрешности из примера 5.

Решение. Для определения границ доверительного интервала воспользуемся функцией распределения (147). Приравнявая значение функции величине P_n , запишем

$$P_n = \frac{k_1^2 - 4k_2(k_0 - \eta_0)}{2k_2\alpha_a},$$

откуда

$$\alpha_a = \frac{\sqrt{k_1^2 - 4k_2(k_0 - \eta_0)}}{2k_2 P_n}.$$

Заменив значение η_0 на δ_η , получим

$$|\alpha_a| \leq \frac{\sqrt{k_1^2 - 4k_2(k_0 - \eta_0)}}{2k_2 P_n}. \quad (174)$$

Используя неравенство (174), найдем доверительный интервал параметра

$$-\frac{\sqrt{k_1^2 + 4k_2(k_0 - \eta_0)}}{2k_2 P_n} < a < \frac{\sqrt{k_1^2 - 4k_2(k_0 - \eta_0)}}{2k_2 P_n} \quad (175)$$

при $k_2 > 0$.

Пример 14. Определить числовые характеристики параметра из примера 6, обеспечивающие появление элементарной погрешности в пределах заданных значений δ_{σ_η} и δ_{σ_η} .

Решение. Для определения математического ожидания погрешности воспользуемся формулой (152)

$$m_{\eta} = k_0 + k_2 \sigma_a^2,$$

откуда

$$\sigma_a = \sqrt{(m_{\eta} - k_0) / k_2}.$$

Как и в пример 12, заменим значения m_{η} на $\delta_{m_{\eta}}$ и получим

$$\sigma_a \leq \sqrt{(\delta_{m_{\eta}} - k_0) / k_2}. \quad (176)$$

Для определения влияния разброса параметра на разброс элементарной погрешности равенство (153) представим в виде

$$2k_2^2 \sigma_a^4 + k_1^2 \sigma_a^2 - \sigma_{\eta}^2 = 0.$$

Корни этого уравнения для неизвестного σ_a определяются из выражения

$$\sigma_a^2 = \frac{-k_1^2 \pm \sqrt{k_1^4 - 8k_2^2 \sigma_{\eta}^2}}{4k_2^2}. \quad (177)$$

Для определения значения σ_a в выражении (176) надо заменить σ_{η} на допускаемое отклонение $\delta_{\sigma_{\eta}}$ и выбрать соответствующие значения корней уравнения.

Пример 15. Определить стандарт линейной величины центрирования теодолита из примера 7, обеспечивающего появление элементарной погрешности в пределах заданного значения $\delta_{\sigma_{\eta}}$.

Решение. Для определения стандарта линейной величины центрирования воспользуемся формулой (156). Решив равенство относительно σ_a , запишем

$$\sigma_a = (\sqrt{2/k_s}) \sigma_{\eta}.$$

Переходя к допускаемому значению погрешности, получим

$$\sigma_a \leq (\sqrt{2/k_s}) \delta_{\sigma_{\eta}}. \quad (178)$$

В приведенных выше примерах рассматривались параметры с математическими ожиданиями, равными или близкими к нулю. В практике измерений часто имеют дело с параметрами, математические ожидания которых существенно отличаются от нуля. В этом случае для достижения необходимой точности измерений применяют следующие способы ослабления влияния такого параметра.

1. Ограничивают диапазон изменения параметра заранее назначенными пределами α_a и β_a . Границы диапазона $[\alpha_a, \beta_a]$ определяют по формуле (158).

Примером применения этого способа служит ограничение времени наблюдений в триангуляции периодами благоприятного состояния атмосферы.

При решении задач инженерной геодезии применение этого приема обычно вызывает ряд дополнительных затруднений. Так, при создании планового обоснования на монтажных горизонтах многоэтажных зданий увеличение сроков выполнения работ по проектированию осей, обусловленное выбором благоприятных внешних условий (отсутствием ветра, интенсивного солнечного нагрева конструкций и т. п.), приводит к недопустимым простоям строителей.

2. В результаты измерений l вводят поправки $\Delta\eta$, равные погрешности по величине и противоположные по знаку

$$\Delta\eta = -\eta = -[\varphi(a_2) - \varphi(a_0)]. \quad (179)$$

Рис. 12. Способы ослабления влияния элементарных погрешностей

В этом случае диапазон колебаний параметра $[a'_2, a'_3]$ из окрестностей точки a_2 перемещается в окрестности точки a_0 (рис. 12.). Тем самым диапазон значений погрешности $[\eta'_2, \eta'_3]$ переносится в окрестности точки $\eta_0 = 0$.

3. Программу измерений подбирают таким образом, чтобы среднее из результатов двух измерений было свободно от влияния элементарной погрешности.

Этот способ применяют для ослабления влияния элементарных погрешностей, являющихся нечетными функциями параметров. При этом измерения производят при значениях параметра, расположенных симметрично относительно точки a_0 , например в точках a_2 и $-a_2$. Тогда результаты измерений примут значения

$$l_1 = L + \varphi(a_2) \text{ и } l_2 = L + \varphi(-a_2) = L + \varphi(a_2).$$

Поэтому среднее из результатов измерений

$$l_{\text{ср}} = \frac{l_1 + l_2}{2} = L + \frac{\varphi(a_2) - \varphi(a_2)}{2} = L \quad (180)$$

будет свободно от влияния элементарной погрешности.

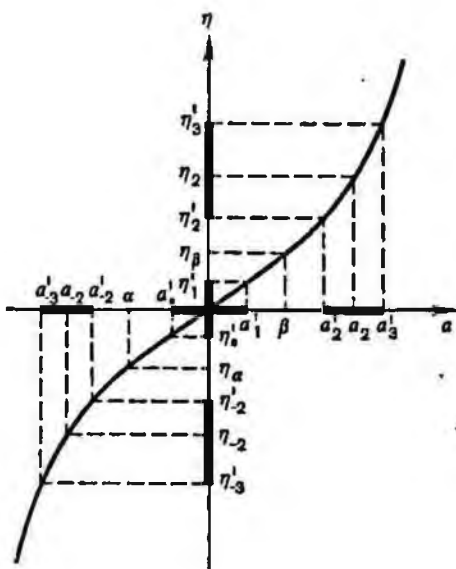
Описанные выше способы не позволяют полностью исключить погрешности, а лишь ослабляют влияние фактора.

Ограничивая диапазон параметра значениями α и β , мы все же оставляем интервал погрешностей $[\eta_2, \eta_\beta]$.

При введении поправок значения параметра имеют свои погрешности. Это приводит к тому, что в формулу (179) вместо точного значения a_2 подставляется какое-то другое значение из интервала $[a'_2, a'_3]$. Поэтому результат измерения после введения поправки будет сопровождаться погрешностью, характеризуемой интервалом $[\eta'_0, \eta'_1]$.

В производственных условиях при подборе программы невозможно обеспечить идеальную симметричность измерений относительно a_0 . Это приводит к тому, что среднее значение параметра a располагается не в точке a_0 , а где-то в интервале $[a'_0, a'_1]$. Следовательно, погрешность среднего результата будет располагаться в интервале $[\eta'_0, \eta'_1]$.

Таким образом, ни в одном из способов погрешность полностью не исключается и необходимость в расчетах не отпадает.



§ 10. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

На результаты измерения или построения в натуре проектных величин в процессе выполнения геодезических работ одновременно оказывают влияние несколько факторов. При расчетах точности влияние факторов учитывают с помощью модели, отображающей зависимость между причиной (фактором) и следствием (величиной погрешности).

Как и ранее, на первом этапе построения модели необходимо дать описание состояний факторов и их переходов из одного состояния в другое.

Пусть в процессе выполнения работ на результаты измерений оказывают влияние k факторов, состояние которых характеризуется численными значениями n параметров. При этом всегда $k \geq n$.

Для каждого из n параметров образуем множества вида (116). Как доказано ранее, множества такого вида являются аддитивными и полностью описывают не только состояние фактора, но и все его переходы из одного состояния в другое.

Все полученные n множеств объединим в одном и расширим его за счет присоединения всех возможных пересечений по одному элементу для каждого параметра. Примером образования элементов нового множества таким путем может служить выражение вида (125).

Если последовательно исследовать все параметры, то убедимся, что между обозначениями элементов нового множества и их значениями существует однозначная зависимость, т. е. последовательность элементов будет счетной.

Элементы нового множества обозначим через A_n . В тех случаях, когда необходимо различать элементы по конкретным значениям параметров, условимся применять обозначения вида $A(a, b, \dots, n)$. Так, значение $A(-3, 0, +2)$ будет обозначать элемент, образованный пересечением элементов $a = -3, b = 0, c = +2$. Если состояние фактора характеризуется двумя параметрами, то их численные значения будем сопровождать индексами и брать в скобки. Такое обозначение $A(a, b, (c_1, c_2), \dots, n)$ будет указывать на то, что фактор C имеет два параметра c_1 и c_2 .

При образовании множества нет принципиальной необходимости делать различия между факторами с одним или несколькими параметрами, так как множество все равно охватывает все возможные пересечения по одному для каждого параметра.

Образованный класс множеств обозначим через \mathfrak{B}_n и назовем *пространством состояний факторов*. Элементы класса \mathfrak{B}_n образованы объединением аддитивных классов с присоединением к ним элементов, полученных путем счетного числа операций пересечения. Следовательно, *класс \mathfrak{B}_n в пространстве R_n будет аддитивным классом множеств*.

Для отображения зависимости между состоянием факторов и погрешностью введем числовую функцию $\varphi(A_n)$, определенную на множестве \mathfrak{B}_n пространства R_n . Поставим условия, которым эта функция должна удовлетворять.

Первое условие. Число $\varphi(A_n)$, поставленное в соответствии любому событию $A_n \in \mathfrak{B}_n$ и называемое погрешностью, должно быть действительным.

Второе условие. Для состояний факторов $A \in \mathfrak{B}_n$, $B \in \mathfrak{B}_n$, ..., $K \in \mathfrak{B}_n$ функция погрешностей должна принимать значение

$$\varphi(A_n) = \varphi_a(A) + \varphi_b(B) + \varphi_c(C_1, C_2) + \dots + \varphi_k(K). \quad (181)$$

Тройку $(R_n, \mathfrak{B}_n, \varphi)$ назовем *постоянством погрешности*.

Рассмотрим смысл условий, налагаемых на $\varphi(A_n)$. Первое условие означает, что любому из состояний факторов, характеризуемых A_n , соответствует единственное и действительное значение погрешности. Обозначив погрешность измерения через ε , запишем

$$\varepsilon = \varphi(A_n). \quad (182)$$

Как и у элементарной погрешности, однозначной обратной связи может и не быть, так как по заданному значению погрешности невозможно однозначно определить конкретные значения параметров a, b, \dots, k .

Прежде чем перейти ко второму условию, рассмотрим один из частных случаев. Пусть условия измерений характеризуются значениями параметров $a_0, b_0, c_1 = 0, \dots, k_0$, т. е. A_n принимает значение $A(0, 0, (0, c_2), \dots, 0) = A_0$. В этом случае

$$\varphi(A_0) = \varphi_a(a_0) + \varphi_b(b_0) + \varphi_c(c_2/c_1 = 0) + \dots + \varphi_k(k_0) = 0, \quad (183)$$

так как на основании (121) и (126)

$$\varphi_a(a_0) = \varphi_b(b_0) = \varphi_c(c_2/c_1) = \dots = \varphi_k(k_0) = 0.$$

Из выражения (183) следует, что для получения $\varepsilon = 0$ нет необходимости всем параметрам придавать нулевые значения. Достаточно придать нулевые значения только главным (определяющим) параметрам.

Выражение (183) предполагает наличие таких идеальных условий измерений, характеризуемых состоянием факторов A_0 , при которых результаты измерений не содержат погрешности. Естественно, что такие условия не могут быть реализованы ни в одном из измерений, хотя общая сущность явления — возможность снижения погрешности до заданного значения — отражается довольно точно.

При значениях параметров, отличных от нуля, общая погрешность $\varepsilon = \varphi(A_n)$ на основании формулы (181) определяется суммой элементарных погрешностей. Эта аксиома имеет под собой реальное основание. Справедливость ее подтверждается многолетним опытом проведения измерений. Вводя поправки в результаты измерений, подбирая симметричные программы измерений, ограничивая время измерений периодами благоприятного состояния атмосферы, мы уменьшаем величины элементарных погрешностей $\eta = \varphi(a)$ и тем самым пропорционально снижаем значение погрешности измерений $\varepsilon = \varphi(A_n)$.

Весьма возможно, что в многообразных явлениях природы существуют отступления от рассматриваемой закономерности. Однако если они и есть, то или встречаются крайне редко, или незначительны по величине. Если бы это было не так, то в результате многолетней практики измерений они были бы обнаружены.

Изложенные выше соображения позволяют надеяться, что предложенная модель погрешности удовлетворяет требованиям к практическим расчетам точности. Пространство погрешностей измерений геомет-

рически можно представить в виде $(n + 1)$ -мерного евклидова пространства. На рис. 13 по осям координат a, b, \dots, i, \dots, n отложены значения соответствующих параметров, а по оси ε — числовые значения погрешности измерений.

В пространстве погрешностей функция $\varphi(A_n)$ будет иметь вид сложной поверхности, схематически изображенной на рис. 13. Эта поверхность ограничена гиперцилиндром, построенным на интервалах осей $[a, \beta)$. Если на одной из осей параметра и на оси ε построить плоскость, то след поверхности погрешностей на этой плоскости даст кривую соответствующей элементарной погрешности.

При точечной оценке состояние фактора отобразится положением точки на гиперплоскости, образованной осями параметров. Проекция этой точки на поверхность погрешностей и определит численное значение погрешности ε .

При интервальной оценке состояние факторов характеризуется гиперпрямоугольником, стороны которого построены на интервалах параметра. Если на гиперпрямоугольнике построить гиперцилиндр, то он «вырежет» соответствующую часть поверхности погрешностей. Проекция этой части поверхности на ось ε даст соответствующий интервал погрешности.

Рассмотрим оценку погрешностей измерений методами теории вероятностей. Пусть имеем измерения, на которые воздействуют k факторов, состояние которых характеризуется n параметрами.

Известно, что

$$\varepsilon = \varphi_a(A_n) = \varphi_a(A) + \varphi_b(B) + \varphi_c(C_1, C_2) + \dots + \varphi_k(K).$$

Обозначим, как и ранее, элементарные погрешности буквой η . Тогда

$$\varepsilon = \eta_a + \eta_b + \eta_c + \dots + \eta_k = \sum_{j=1}^k \eta_j. \quad (184)$$

Таким образом, задача оценки погрешностей измерений сводится к оценке суммы элементарных погрешностей.

При строгом решении задачи по известным законам распределений элементарных погрешностей необходимо определить закон распределения суммы.

Такой путь решения задачи принципиальных затруднений не вызывает. Однако при расчетах точности он практически не применяется. Объясняется это тем, что законы распределения элементарных погрешностей не всегда известны и определение закона распределения суммы связано с определенными трудностями аналитического характера.

В расчетах наиболее часто ограничиваются определением числовых характеристик погрешности измерений, предполагая при этом, что все элементарные погрешности подчиняются нормальному закону распределения.

При выполнении традиционных видов геодезических работ такое приближенное решение вполне удовлетворяет запросы производства. В большой массе разнообразных измерений отклонения законов распределения некоторых элементарных погрешностей от нормального закона неощутимо влияет на окончательные результаты. Так, при картографи-

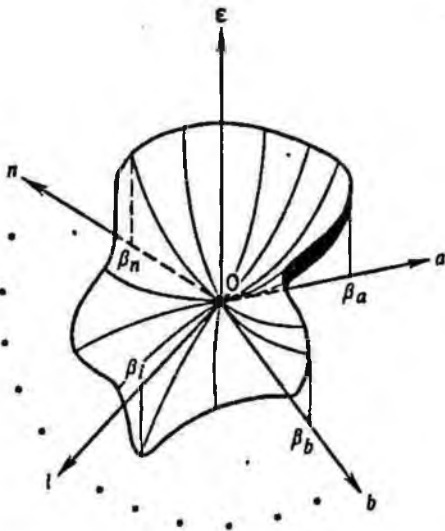


Рис. 13. Пространство погрешностей измерений

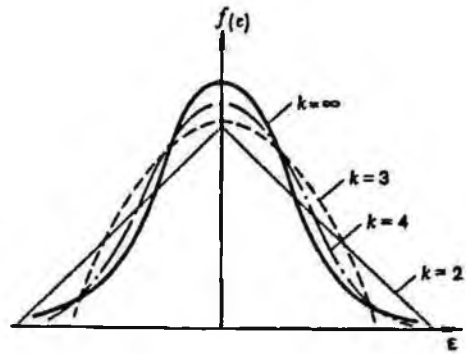


Рис. 14. График плотностей суммы слагаемых

ровании территорий создают обоснование, производят съемку и составляют карту или план. При очень большом числе погрешностей и определенных мерах предосторожности отклонения законов отдельных элементарных погрешностей от нормального закона вряд ли существенно повлияют на закон распределения окончательных результатов и, следовательно, на результаты расчета.

При выполнении инженерно-геодезических работ даже одно простое измерение часто становится окончательным результатом, например измерение величины панелей при приемке их на заводе или на строительной площадке. В этих случаях при расчете точности измерений необходимо учитывать отклонения распределений от нормального закона.

Перечислим некоторые закономерности распределения суммы случайных величин. Пусть все элементарные погрешности η_j независимы, имеют один закон распределения вероятностей и влияние каждого из них на сумму приблизительно одинаково, а число элементарных факторов k достаточно велико. На основании центральной предельной теоремы закон распределения суммы при неограниченном увеличении k неограниченно приближается к нормальному. Рассмотрим каждое условие отдельно.

Условие независимости элементарных погрешностей при производстве простейших измерений, как правило, соблюдается. Кроме того, зависимость между элементарными погрешностями учитывается при расчетах с помощью коэффициента корреляции.

Требование большого числа слагаемых нас тоже мало ограничивает, так как скорость приближения распределения суммы к нормальному закону достаточно велика. Для иллюстрации этого явления рассмотрим графики плотностей распределения суммы равномерно распределенных слагаемых (рис. 14). При двух слагаемых ($k = 2$) сумма подчиняется закону Симпсона (закону треугольника), а уже при $k = 4$ кривая распре-

деления достаточно близко приближается к кривой нормального распределения. Следовательно, даже при сравнительно небольшом числе слагаемых для расчетов точности закон распределения погрешности измерений можно принимать за нормальный.

Рассмотрим условие равенства влияний слагаемых на сумму. Очевидно, что при резко преобладающем влиянии одного из слагаемых на сумму закон распределения суммы будет определяться законом распределения этого слагаемого. Если в процессе расчетов точности такое явление обнаружено, то необходимо предусмотреть соответствующие меры по ослаблению влияния данного фактора.

И последнее условие — одинаковый закон распределения всех слагаемых. В наиболее общем виде справедливость центральной предельной теоремы отображается условием Линдберга. В обозначениях данного параграфа выражение (57) примет вид: при любом $\tau > 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{D_{\epsilon}} \sum_{j=1}^k \int_{|\hat{\eta}_j| > \tau \sigma_{\epsilon}} \hat{\eta}_j^2 f(\hat{\eta}_j) d\hat{\eta}_j = 0, \quad (185)$$

где $\hat{\eta}_j = \eta_j - m_{\eta_j}$ — центрированная погрешность η_j .

Условие соблюдается тогда, когда числитель

$$\sum_{j=1}^k \int_{|\hat{\eta}_j| > \tau \sigma_{\epsilon}} \hat{\eta}_j^2 f(\hat{\eta}_j) d\hat{\eta}_j = \Sigma$$

при $k \rightarrow \infty$ будет возрастать значительно медленнее, чем D_{ϵ} .

Рассмотрим характер изменения Σ при последовательном увеличении τ . Отметим, что при $\tau = 0$ числитель тоже будет равен нулю. Будем последовательно увеличивать τ и следить за характером изменения Σ при различных сочетаниях законов распределения элементарных погрешностей. В качестве аналога для сравнения возьмем сумму нормально распределенных слагаемых.

Для нормального распределения с возрастанием $|\hat{\eta}|$ резко уменьшается элемент вероятности $f|\hat{\eta}_j|d\hat{\eta}_j$. В этих условиях скорость возрастания Σ резко сокращается и при $\tau > 3$ она практически равна нулю.

Если среди слагаемых будет одно или несколько элементарных погрешностей со значительной плотностью на участке с большими значениями $|\hat{\eta}|$, то величина Σ будет возрастать значительно быстрее аналога и условие (185) может быть нарушено.

Этот случай соответствует распределениям элементарных погрешностей со значительной асимметрией или антимодальным распределениям. При расчетах необходимо предусматривать меры по ослаблению влияния факторов, вызывающих такой характер распределения, или учитывать его при назначении допусков.

При расчетах погрешностей измерений числовые характеристики определяют по формулам

$$m_{\epsilon} = \sum_{j=1}^k m_{\eta_j}; \quad \sigma_{\epsilon}^2 = \sum_{j=1}^k \sigma_{\eta_j}^2 + 2 \sum_{i \neq j} r_{ij} \sigma_{\eta_i} \sigma_{\eta_j}, \quad (186)$$

где r_{ij} — коэффициент корреляции между i и j элементарными погрешностями.

§ 11. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Для расчетов точности необходимо знать основные закономерности процесса формирования (образования) погрешностей измерений. Вероятностные методы не всегда дают достаточно полную характеристику этого явления. Возникает необходимость в более полном их описании.

В традиционных курсах геодезии различают случайные и систематические погрешности. В [29] даны определения этих классов (видов) погрешностей (ошибок): «Ошибки измерений, происходящие от определенного источника и имеющие закономерный характер, называются систематическими ошибками».

Далее отмечается, что случайные погрешности проявляются в рядах с большим числом измерений в виде свойств ограниченности, равновероятности, унимодальности и компенсации. Иными словами, случайным погрешностям приписываются статистические закономерности случайной величины с законом нормального распределения и нулевым математическим ожиданием.

В [9] даны определения классов с другой точки зрения: «Систематическими элементарными ошибками являются такие, которые порождаются главными, существенными, необходимыми связями между факторами измерений и с необходимостью возникают всякий раз при данных условиях измерений».

Случайными элементарными ошибками являются такие, которые порождаются не главными, не существенными, а второстепенными, отдаленными связями между факторами измерений; при данных условиях измерений эти ошибки могут появляться, а могут и не появляться, могут быть большими или меньшими, положительными и отрицательными».

Далее отмечается отсутствие четкой границы между двумя этими видами погрешностей и дается описание, как при последовательном ослаблении влияния одних систематических погрешностей другие, ранее второстепенные факторы, становятся основными, главными.

Обе группы рассмотренных определений не содержат принципиальных отклонений от существа явления, а рассматривают их лишь с несколько разных сторон. Если в первом определении основной акцент делается на проявлении погрешностей в рядах измерений, то во втором — на связи между причиной (фактором) и следствием (самой погрешностью).

Отметим, что уложить реальные явления в прокрустово ложе строгих формулировок трудно, так как почти всегда остаются некоторые стороны явления, не поддающиеся краткой и строгой формулировке.

Так, из первого определения следует, что как только станет известна причина возникновения погрешности, так погрешность сразу надо отнести к систематической. Согласиться с этим нельзя. Более того, элементарная погрешность может быть порождена фактором, состояние которого характеризуется случайным параметром. При наличии определенных условий, например нечетной функции, элементарная погрешность будет случайной, хотя зависимость между причиной (фактором) и следствием (погрешностью) известна. Примеры таких зависимостей и формы связи подробно рассмотрены в § 8.

Как отмечается в [9], истолкование систематических и случайных погрешностей в первом определении: «... не вскрывает существенного различия между ними, а подсказывает лишь внешнюю форму их проявления».

Кроме того, «... остается неясным, куда следует относить односторонне действующие ошибки, так как они носят черты и тех и других».

Не все стороны явления освещает достаточно полно и второе определение, из которого следует, что коль скоро один из факторов становится главным, определяющим, то он порождает систематическую погрешность. Неточность такого определения проиллюстрируем на примере.

Пусть измерение коротких линий на хорошо выровненной горизонтальной плоскости производят тщательно компарированной мерной лентой при температуре, практически равной температуре компарирования. В этих условиях основным, главным источником будет погрешность отсчета по мерному прибору на глаз.

Следует ли из этого, что погрешность отсчета будет систематической? Отрицательный ответ на этот вопрос не вызывает сомнений. Тем не менее согласно второму определению погрешность отсчета формально должна быть отнесена к систематическим.

В основу классификации более целесообразно положить характер влияния погрешности на результаты измерений. Основы такой классификации рассмотрим на примере образования (формирования) погрешности измерений из элементарных погрешностей. Отметим, что общий подход к классификации будет справедлив и во всех других случаях.

Под *систематической* будем понимать такую элементарную погрешность или ее часть, которая в данных условиях определяет (образовывает, формирует) отклонение центра рассеивания результатов измерения от фактического значения измеряемой величины;

под *случайной* — такую погрешность, которая определяет разброс результатов измерений вокруг центра рассеивания.

В соответствии с определением систематическую погрешность будем связывать с центром рассеивания и оценивать с помощью математического ожидания, а случайную — с центрированной случайной величиной и оценивать с помощью дисперсии или стандарта.

Итак, пусть при n -кратном измерении одной величины или группы однородных величин, например сторон полигонометрического хода, действуют k факторов.

Для каждого из результатов измерений составим уравнения погрешностей вида (184)

$$\varepsilon_i = \eta_{i1} + \eta_{i2} + \dots + \eta_{ik} = \sum_{j=1}^k \eta_{ij}, \quad (187)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$ — номер измерения; $j = 1, 2, \dots, k$ — номер элементарной погрешности (фактора).

Существуют три основных класса элементарных погрешностей.

1. Если во всех n измерениях состояние фактора j элементарной погрешности остается неизменным, т. е.

$$a_{1j} = a_{2j} = \dots = a_{nj} = a_j, \quad (188)$$

то элементарная погрешность в процессе измерений тоже не меняет своего значения

$$\varphi(a_j) = \eta_{1j} = \eta_{2j} = \dots = \eta_{nj} = \eta_j. \quad (189)$$

Это приведет к тому, что центр рассеивания результатов измерений сместится на величину, равную η_j . На этом основании такую элементарную погрешность отнесем к систематическим.

Нетрудно убедиться, что в данных условиях измерений математическое ожидание элементарной погрешности равно значению этой погрешности. Действительно, η_j является постоянной величиной. Тогда

$$m_{\eta_j} = M(\eta_j) = \eta_j. \quad (190)$$

Элементарные погрешности, величина которых характеризуется несколькими параметрами или вообще не отображается параметрами, относятся к систематическим, если они удовлетворяют требованию (190).

В реальных условиях измерений всегда наблюдаются некоторые нарушения условия (188). Это приводит к появлению отклонений Δa_{ij} от значения параметра a_j . Тогда

$$\eta_{ij} = \varphi(a_j + \Delta a_{ij}) = \varphi(a_j) + \Delta \varphi_{ij} = m_{\eta_j} + \Delta \eta_{ij}$$

или

$$\Delta \eta_{ij} = \eta_{ij} - m_{\eta_j} = \hat{\eta}_{ij}.$$

Следовательно, величину $\Delta \eta_{ij}$ надо отнести к случайной части погрешности.

При измерениях группы однородных величин изменяются не только условия измерений, но и характеристики измеряемых величин, например, длины сторон полигонометрического хода. Разброс значений $\hat{\eta}_{ij}$ еще больше увеличивается.

Таким образом, в реальных условиях измерений нет чисто систематических погрешностей, так как всегда присутствует хоть и небольшая, но случайная часть.

Если случайная часть незначительна по величине, то погрешность будем называть систематической и обозначать буквой λ .

II. Пусть в процессе измерений параметр принимает случайные значения в интервале $[a'_0, a'_1]$ с центром рассеивания в точке a_0 , а элементарная погрешность является нечетной функцией параметра (см. рис. 12). В этом случае

$$m_{\eta_j} = \varphi(a_0) = 0; \quad \eta_{ij} = \eta_{ij} - m_{\eta_j} = \eta_{ij}. \quad (191)$$

Следовательно, величина η_{ij} является центрированной случайной величиной и ее надо отнести к случайной погрешности. Случайные погрешности обозначим буквой μ .

Как показано в § 9, добиться идеального совмещения центра рассеивания с точкой a_0 не удастся. Это приводит к появлению в случайных погрешностях небольшой систематической части.

III. Если параметр принимает случайные значения в интервале с центром рассеивания в точке a_0 , а элементарная погрешность является

четной функцией этого параметра, то математическое ожидание элементарной погрешности всегда будет положительным и ощутимо отличаться от нуля

$$m_{\eta_j} > 0. \quad (192)$$

В примерах 2 и 4 показано, что для погрешности вида $\eta = k_2 a^2$ математическое ожидание определяется по формуле

$$m_{\eta_j} = k_2 \sigma_a^2.$$

Сравнивая это значение со стандартами погрешностей из тех же примеров

$$\sigma_{\eta_j} = (2/\sqrt{5})k_2 \sigma_a^2 \text{ и } \sigma_{\eta_j} = \sqrt{2}k_2 \sigma_a^2,$$

нетрудно убедиться, что это величины одного порядка.

Следовательно, погрешность четной функции можно представить в виде суммы приблизительно равноправных частей, т. е.

$$\eta_{ij} = m_{\eta_j} + \overset{0}{\eta}_{ij}. \quad (193)$$

Необходимо отметить различие в математических ожиданиях систематической погрешности и погрешности четной функции параметра. Если математическое ожидание систематической погрешности может принимать любое, в том числе и отрицательное значение, то математическое ожидание четной функции — всегда положительно и соизмеримо со случайной частью погрешности.

В отличие от систематической части назовем математическое ожидание четной функции параметра постоянной частью погрешности и обозначим ее буквой θ .

В научно-технической литературе под постоянной погрешностью часто понимают погрешности четных функций параметра. Это не совсем точно. Будем помнить, что погрешности четных функций всегда содержат постоянную и случайную части, т. е.

$$\eta_{ij} = \theta_j + \mu_{ij}. \quad (194)$$

Рассмотрим «механизм» образования погрешностей измерения. Пусть в результаты измерений входят r погрешностей четных функций, q систематических и $(k - r - q)$ случайных погрешностей. Тогда, группируя погрешности по классам в правой части равенства (187), запишем

$$\epsilon_i = \sum_{j=1}^q \lambda_{ij} + \sum_{j=1}^r \theta_{ij} + \sum_{j=1}^{k-q} \mu_{ij} = \lambda_i + \theta + \mu_i. \quad (195)$$

При измерении группы однородных величин, например сторон вытянутого полигонометрического хода, накопление погрешностей в ходе характеризуется суммой погрешностей измерений. Обозначив сумму знаком Σ , запишем

$$\sum_{i=1}^n \epsilon = \sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{i=1}^n \theta_i + \sum_{i=1}^n \mu_i.$$

Если характеристики величин, например длины сторон хода, и условия измерений не изменяются существенно, то во всех измерениях значения λ_i и θ_i можно считать постоянными, тогда

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = n(\lambda_i + \theta_i) + \sum_{i=1}^n \mu_i. \quad (196)$$

При увеличении n первый член правой части равенства возрастает пропорционально числу измерений, а второй член, представляющий собой знакопередающийся ряд значений, значительно медленнее. Поэтому при сравнительно большом числе измерений совместное влияние систематической и постоянных частей начинает преобладать над случайной частью погрешностей.

При многократных измерениях одной величины за окончательное принимается среднее значение. Для определения погрешности среднего $\varepsilon_{\text{ср}}$ разделим обе части равенства (196) на число измерений

$$\varepsilon_{\text{ср}} = (\lambda_i + \theta_i) + \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i}{n}. \quad (197)$$

Известно, что при увеличении числа измерений второй член правой части равенства стремится к нулю. Основное, преобладающее влияние в этом случае начинают оказывать систематические и постоянные части погрешности.

Из рассмотренных примеров видно, что систематические и постоянные части элементарных погрешностей оказывают однородное влияние на погрешности измерений. Для расчетов точности имеет смысл объединить их и обозначить через

$$\lambda_c = \lambda + \theta. \quad (198)$$

Рассмотрим некоторые особенности предлагаемой классификации.

Основные свойства случайных погрешностей — ограниченность значений, равновероятность по знаку, унимодальность и свойство компенсации — в общих чертах сохраняются и почти совпадают со свойствами, приведенными в [29]. Они лишь приобретают некоторые уточнения: ограниченность значений связывается с вероятностью, а унимодальность — с законом распределения. Отметим, что свойства унимодальности может и не быть. Примером может служить центрированная случайная величина при равномерном распределении вероятностей.

Определение систематической погрешности в приведенной классификации тесно связано с оценкой случайной величины на смещенность. Проследим характер этой связи.

С одной стороны, рассматривая истинное значение L как значение величины в генеральной совокупности, а результат измерения $l_{\text{ср}}$ как оценку параметра, условие несмещенности можно записать в виде

$$M(l_{\text{ср}}) = L \text{ или } M(l_{\text{ср}}) - L = 0.$$

Левую часть второго равенства можно рассматривать как отклонения оценки от несмещенности.

С другой стороны, определение систематических погрешностей связано с математическим ожиданием погрешности, т. е.

$$\lambda_c = M(\varepsilon) = M(l_{\text{ср}} - L) = M(l_{\text{ср}}) - L.$$

Из этого следует, что систематическую и постоянную части по-

грешности измерений можно рассматривать как меру смещенности результатов измерений.

Такая классификация погрешностей позволяет более полно учитывать влияние различных факторов на окончательный результат измерений и тем способствует более правильному отображению причинно-следственных связей.

§ 12. РАСЧЕТ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ И ПОСТРОЕНИЙ

В общем виде расчет сводится к определению таких значений характеристик элементарных погрешностей, которые обеспечат появление погрешностей измерений в пределах заданных допусков.

Рассмотрим предварительно *прямую задачу расчета*.

Пусть на результат измерения влияют k элементарных погрешностей, числовые характеристики которых известны.

Рассмотрим влияние случайных, систематических элементарных погрешностей и погрешностей четных функций параметров.

Случайная часть погрешности измерения обусловлена влиянием случайных частей элементарных погрешностей, т. е.

$$\mu_s = \sum_{j=1}^{k-q} \mu_j = \sum_{j=1}^{k-r-q} \mu_j + \sum_{j=1}^r \mu_j,$$

где $(k - r - q)$ — число случайных погрешностей; r — число погрешностей четной функции.

Используя для характеристики случайных частей дисперсию, запишем

$$D_s = \sum_{j=1}^{k-q} D_j + 2 \sum_{i \neq j} r_{ij} \sigma_i \sigma_j.$$

При расчетах полагают, что все элементарные погрешности независимы. Тогда, принимая $r_{ij} = 0$, получим

$$D_s = \sum_{j=1}^{k-r-q} D_j + \sum_{j=1}^r D_j. \quad (199)$$

Предположение о независимости имеет под собой реальную основу, так как под элементарной погрешностью понимают погрешность, порожденную простым (несоставным) фактором. В силу этого определения каждая из элементарных погрешностей порождается своим фактором и все элементарные погрешности не имеют общих точек соприкосновения. Это позволяет считать их независимыми.

Кроме дисперсии и доверительной вероятности P_n , для определения допустимого отклонения δ_{σ_s} необходимо знать закон распределения погрешности измерений. В § 9 показано, что при соблюдении некоторых требований случайные погрешности подчиняются закону нормального распределения. Для этого случая

$$\delta_{\sigma_s} = t \sigma_s, \quad (200)$$

где $t = \arg \Phi(P_n)$.

При последовательном измерении группы однородных величин, например линий полигонометрического хода, между результатами измерений появляется корреляционная зависимость, обусловленная наличием общих составляющих (см. теорему 3 § 3). В этом случае дисперсия D_{Σ} суммы результатов измерений определится по формуле

$$D_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n D_{\varepsilon_i} + 2 \sum_{i \neq m} r_{im} \sigma_i \sigma_m, \quad (201)$$

где r_{im} — коэффициент корреляции между результатами i -го и m -го измерений.

Если дисперсии и коэффициенты корреляций равны между собой, то

$$D_{\Sigma} = nD_{\varepsilon} + 2D_{\varepsilon} \sum_{i \neq m} r_{im}. \quad (202)$$

Для элементарных погрешностей четных функций параметра отдельно учитывают постоянные и случайные части.

В зависимости от закона распределения вероятностей случайные части погрешностей четных функций оценивают по формулам (138) или (145), а полученные оценки дисперсий используют для определения дисперсии погрешности измерений по формуле (199).

Постоянные части вычисляют по формуле (136). Так как постоянные части элементарных погрешностей являются математическими ожиданиями, то постоянную часть θ_{ε} погрешности измерений определяют по формуле

$$\theta_{\varepsilon} = \sum_{j=1}^r \theta_j, \quad (203)$$

где θ_j — постоянная часть j элементарной погрешности четной функции.

При многократном измерении одной величины постоянная часть погрешности входит во все измерения, что приводит к общему смещению окончательного (среднего) значения на величину θ .

При последовательном измерении однородных величин постоянная часть θ_{Σ} суммы результатов определится по формуле

$$\theta_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \theta_{\varepsilon_i}. \quad (204)$$

При равных постоянных частях

$$\theta_{\Sigma} = n\theta_{\varepsilon}. \quad (205)$$

Если известны систематические части λ_j элементарных погрешностей, то систематическая часть λ_{ε} погрешности измерений определится из выражения

$$\lambda_{\varepsilon} = \sum_{j=1}^q \lambda_j. \quad (206)$$

Значения λ_j известны тогда, когда известны отличные от нуля математические ожидания параметров элементарных погрешностей, например при известной средней температуре измерений, отличной от температуры компарирования мерного прибора. Но в этих случаях в

результаты измерений обычно вводятся поправки и необходимость в определении соответствующих систематических погрешностей отпадает.

Наиболее часто приходится оценивать систематические элементарные погрешности, обусловленные влиянием случайного разброса параметра при нулевом математическом ожидании. В этих случаях систематические погрешности порождены конкретным и постоянным значением параметра в процессе данных измерений. Так как в расчетах мы не можем знать это конкретное значение параметра или соответствующее ему значение погрешности, то оценку систематической погрешности вынуждены производить с помощью характеристик рассеивания.

Поясним это на примере погрешности η_x за компарирование мерного прибора. Погрешность μ_x определения длины мерного прибора при компарировании является случайной величиной. Обычно математическое ожидание этой величины близко к нулю, а разброс характеризуется стандартом σ_{μ_x} .

Погрешности η_x и μ_x связаны функциональной зависимостью, что позволяет определять стандарт σ_{η_x} погрешности за компарирование. Таким образом, то конкретное значение, которое приняла элементарная систематическая погрешность λ_j , можно характеризовать стандартом

σ_{λ_j} . Если в результаты измерений входят несколько элементарных систематических погрешностей, то, принимая их за случайные величины, стандарт σ_{λ_x} систематической части погрешности измерений можно вычислить по формуле

$$\sigma_{\lambda_x}^2 = \sum_{j=1}^q \sigma_{\lambda_j}^2. \quad (207)$$

В этом случае допустимое отклонение δ_{λ_x} систематической части погрешности измерений определится из выражения

$$\delta_{\lambda_x} = t \sigma_{\lambda_x}, \quad (208)$$

где $t = \text{arg } \Phi(P_\alpha)$.

В расчетах точности вместо допустимого отклонения (208) удобнее определять вероятность того, на сколько λ_x по абсолютной величине превысит δ_{λ_x} , т. е.

$$P(|\lambda_x| > \delta_{\lambda_x}) = P_\alpha. \quad (209)$$

Вероятность P_α более наглядно характеризует ту долю риска, которая возникает при выборе допустимого отклонения в расчетах точности.

Если к систематическим погрешностям в данных условиях измерений предъявляются особо жесткие требования или величина их особо оговорена в техническом задании на производство работ, то расчет производят по предельным значениям. В качестве предельного значения Δ_j элементарной систематической погрешности принимают абсолютное значение погрешности при наиболее неблагоприятных условиях измерений. В этом случае предельное значение Δ_x систематической погрешности измерений определяют по формуле

$$\Delta_x = \sum_{j=1}^q \Delta_j. \quad (210)$$

Отметим, что при значительном q расчет по предельным значениям приводит к существенному завышению оценок систематической погрешности.

При многократных измерениях одной величины систематическая часть погрешности измерений входит во все измерения и смещает среднее значение на величину λ_{Σ} .

При последовательном измерении однородных величин систематическая часть погрешности суммы результатов измерений определяется из выражения

$$\lambda_{\Sigma} = \sum_{i=1}^n \lambda_{\varepsilon_i}. \quad (211)$$

При равных значениях систематических погрешностей

$$\lambda_{\Sigma} = n \lambda_{\varepsilon}. \quad (212)$$

Учитывая однородный характер влияния систематической и постоянной частей погрешности, оценку их совместного значения определим по формуле

$$\lambda_{\varepsilon\varepsilon} = \lambda_{\varepsilon} + \theta_{\varepsilon}. \quad (213)$$

При таких способах оценки общее смещение результатов измерений характеризуют абсолютной величиной $\lambda_{\varepsilon\varepsilon}$, а границы разброса вокруг центра — допускаемым отклонением $\delta_{\sigma_{\varepsilon}}$.

Рассмотрим общие методы решения обратной задачи.

Пусть имеем уравнение линейного вида

$$\varepsilon = k_1 \eta_1 + k_2 \eta_2 + \dots + k_n \eta_n = \sum_{i=1}^n k_i \eta_i, \quad (214)$$

в котором известны погрешность ε и коэффициенты k_i при неизвестных η_i . Такое уравнение не имеет единственного решения, так как число неизвестных больше числа уравнений. Чтобы получить однозначное решение, необходимо иметь дополнительное условие.

В качестве дополнительного условия наиболее часто используют зависимость между погрешностями, вытекающую из принципа равных влияний. При этом полагают, что все неизвестные погрешности правой части равенства (214) оказывают одинаковое влияние на погрешность ε , т.е.

$$k_1 \eta_1 = k_2 \eta_2 = \dots = k_n \eta_n = \varepsilon/n.$$

Тогда

$$\eta_i = \varepsilon/k_i n. \quad (215)$$

Иногда применяют видоизмененный принцип равных влияний. При этом приравнивают значения самих неизвестных, т.е. полагают, что $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_n = \eta$. Подставляя эти значения в (214), получим

$$\eta = \varepsilon / \sum_{i=1}^n k_i. \quad (216)$$

Принцип равных влияний прост и удобен для вычислений, что обеспечило ему широкое применение при расчетах точности. Кроме

того, равное влияние элементарных погрешностей способствует приближению закона распределения ϵ к нормальному.

К недостаткам принципа равных влияний следует отнести отсутствие достаточно убедительного обоснования положенного в основу принципа. При соблюдении этого принципа для обеспечения некоторых элементарных погрешностей могут потребоваться значительные затраты труда и времени, тогда как другие погрешности могут быть заведомо меньше заданных значений.

Более обоснованным будет вариант, в котором соотношение между погрешностями выбирается под условием минимума определенных экономических показателей, например затрат труда или стоимости работ. Такое решение связано с применением методов линейного программирования. К сожалению, из-за отсутствия объективных экономических показателей и значительного повышения объемов вычислений такой путь решения не нашел в геодезии широкого применения.

В некоторых случаях решение уравнения (214) целесообразно проводить с использованием заданных соотношений между элементарными погрешностями. Предположим, что по условиям экономическим или техническим целесообразно принять соотношения

$$\frac{k_1 \eta_1}{k_2 \eta_2} = \frac{b_2}{b_1}; \quad \frac{k_2 \eta_2}{k_3 \eta_3} = \frac{b_3}{b_2}; \quad \dots$$

тогда

$$b_1 k_1 \eta_1 = b_2 k_2 \eta_2 = \dots = b_n k_n \eta_n = \epsilon/n,$$

откуда

$$\eta_i = \epsilon/b_i k_i n. \quad (217)$$

Такое решение при незначительном увеличении объема вычислений в определенной мере свободно от недостатка принципа равных влияний.

Наиболее приемлемым следует признать решение, основанное на пропорциональном изменении элементарных погрешностей. Возьмем известные из практики, приблизительно равные по трудозатратам и реальные для данных условий значения элементарных погрешностей η'_i . Используя эти значения, вычислим предварительную величину ϵ' погрешности измерений n

$$\epsilon' = \sum_{i=1}^n k_i \eta'_i. \quad (218)$$

Для получения заданного значения ϵ изменим пропорционально все значения элементарных погрешностей. Коэффициент пропорциональности k_0 , постоянный для всех элементарных погрешностей, определим из выражения

$$k_0 = \epsilon/\epsilon'. \quad (219)$$

В этом случае окончательные значения погрешностей определяются по формуле

$$\eta_i = k_0 \eta'_i. \quad (220)$$

Этот способ в значительной мере учитывает трудозатраты, и при значениях ϵ' , близких к ϵ , дает хорошие результаты.

Иногда после вычисления предварительных значений элементарных погрешностей появляется необходимость в проведении корректировки полученных величин или изменении намеченных методов выполнения работ. Такой подход к решению задачи делает методику расчетов достаточно гибкой и позволяет для конкретных условий подобрать наиболее удачный вариант. В некоторых случаях удобно пропорционально изменить не все, а лишь некоторые элементарные погрешности.

К недостаткам предлагаемого решения следует отнести возможность резкого преобладания одной из элементарных погрешностей. При значительной асимметрии этой погрешности закон распределения погрешности измерения может существенно отличаться от нормального, что нежелательно. При этом влияние постоянной и систематической части этой погрешности также не поддается учету. Поэтому при выборе значений η' особое внимание в расчетах следует обратить на эти части погрешностей.

Рассмотрим общий ход решения *обратной задачи* расчета. Решение начинают с выявления элементарных погрешностей и характера их влияния на погрешность измерения. Это требует от исполнителя определенного опыта, но принципиальных затруднений не вызывает. В результате получают три группы погрешностей: случайные, систематические и погрешности четных функций параметра.

Далее определяют оценки числовых характеристик элементарных погрешностей m_{η_j} и σ_{η_j} по заданным значениям λ_{σ_e} , δ_{σ_e} и P_{π} .

Если по формуле (200) от значений δ_{σ_e} и P_{π} перейти к σ_e и D_e , то задача сводится к решению системы двух неравенств

$$\lambda_{\sigma_e} \leq \sum_{j=1}^q \lambda_j + \sum_{j=1}^r \theta_j; \quad D_e \leq \sum_{j=1}^{k-r-q} D_j + \sum_{j=1}^r D_j. \quad (221)$$

Вторые члены правых частей неравенств в скрытом виде содержат общие неизвестные из третьей группы погрешностей. Так, для погрешности четной функции параметра из примера 4 запишем

$$\theta = m_a = k_2 \sigma_a^2 = k_2 D_a$$

и

$$D_a = 2k_2^2 \sigma_a^4 = 2k_2^2 D_a^2.$$

В этом случае для строгого решения системы необходимо совместное определение неизвестных.

В примере 12 показано, что для погрешностей четных функций более жесткие требования предъявляются к их постоянной части. Используя эту особенность, решим первое неравенство, а полученные значения общих членов системы подставим во второе неравенство. Это позволит сократить объем вычислений и не нарушит правильности решения системы.

Для решения первого неравенства системы перейдем к равенству

$$\lambda_{\sigma_e} = \sum_{j=1}^q \lambda_j + \sum_{j=1}^r \theta_j. \quad (222)$$

При определении неизвестных по принципу равных влияний получим

$$\lambda_j = \theta_j = \frac{\lambda_{ce}}{q + r}, \quad (223)$$

а при пропорциональном изменении неизвестных

$$\lambda_j = k_0 \lambda'_j \text{ и } \theta_j = k_0 \theta'_j, \quad (224)$$

где $k_0 = \lambda_{ce} / \lambda'_{ce}$.

Для преобразования второго уравнения системы (221) необходимо от уже известных значений θ_j перейти к значениям погрешностей четных функций параметра. Для этого по формуле (136) вычислим дисперсии параметров a_j

$$D_{a_j} = \frac{\theta_j}{k_{2j}},$$

а по формулам (138) и (145) определим дисперсии случайных погрешностей. При законе нормального распределения параметра оценка дисперсии определится из выражения

$$D_j = 2k_{2j}^2 D_{a_j}^2 = 2\theta_j^2, \quad (225)$$

а при равномерном распределении параметра — по формуле

$$D_j = \frac{4}{5} k_{2j}^2 D_{a_j}^2 = \frac{4}{5} \theta_j^2. \quad (226)$$

Подставляя полученные значения дисперсий во второе уравнение и перенося известные члены в правую часть равенства, получим

$$D_e - \sum_{j=1}^r D_j = \sum_{j=1}^{k-r-q} D_j. \quad (227)$$

При решении уравнения (227) по принципу равных влияний применим формулу (215). Тогда

$$D_j = \frac{\sum_{j=1}^r D_j}{k - r - q}. \quad (228)$$

При решении по принципу пропорционального изменения для группы случайных погрешностей выберем предварительные значения D'_j и вычислим правую часть равенства (227)

$$D'_e - \sum_{j=1}^r D_j = \sum_{j=1}^{k-r-q} D'_j.$$

Для определения коэффициента пропорциональности получают заданное значение D_e , решив соотношение

$$D_e - \sum_{j=1}^r D_j = k_0 (D'_e - \sum_{j=1}^{k-r-q} D'_j).$$

Тогда

$$k_0 = \frac{D_e - \sum_{j=1}^r D_j}{D'_e - \sum_{j=1}^r D_j}. \quad (229)$$

Используя k_0 , вычислим окончательные значения дисперсий случайных погрешностей

$$D_j = k_0 D'_j. \quad (230)$$

Для контроля вычислений полученные значения можно подставить в исходную систему неравенств (221).

Расчет завершается установлением рабочих допусков. Операционный контроль при измерениях или построениях проектных величин обычно сводится к сравнению результатов многократного измерения. В этом случае выявляют элементарные погрешности, влияющие на расхождения результатов, и рассчитывают допускаемые отклонения.

Глава III

РАСЧЕТЫ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ПОСТРОЕНИИ В НАТУРЕ ОТДЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РАЗБИВОЧНЫХ РАБОТ

§ 13. ПОСТРОЕНИЕ ПРОЕКТНОГО ОТРЕЗКА

Для построения проектного отрезка на местности или на конструкциях сооружения закрепляют начало отрезка (точка 0) и задают направление линии OA' (рис. 15). Необходимо найти положение в натуре конечной точки A и закрепить ее.

Требования к точности линейных измерений на типовых строительных объектах приведены в табл. 1 и 2, а условия их обеспечения — в прил. 2 нормативного документа СНиП 3.01.03–84 [23].

Построение отрезка наиболее часто осуществляют мерными приборами, укладываемыми на поверхность земли или на конструкции сооружения, или подвесными мерными приборами.

При построении отрезка с относительной погрешностью порядка 1:2000 рулетку укладывают в створ линии, совмещают нуль шкалы с началом отрезка и по отсчету, соответствующему проектному расстоянию, намечают положение в натуре конца отрезка. Этот способ построения часто называют построением отрезка с технической точностью.

При более высоких требованиях к точности полученный отрезок измеряют, определяют его длину и производят редуцирование. При



Рис. 15. Построение проектного отрезка

Таблица 2

Мерный прибор	Эталон	Программа компарирования	σ_{μ_x} , мм
20-метровая рулетка	Нормальный метр	Сравнение метровых интервалов: двумя приемами четырьмя приемами	0,6 0,4
20-метровая рулетка Инварные и стальные про- волоки	Инварные проволоки Инварные железы № 541 и 615	Измерение длины полевого компара- тора двумя приемами Измерение длины компаратора МИИГАиК двумя приемами	0,3 0,015

редуцировании вычисляют величину q и определяют положение точки A_0 .

Рассмотрим элементарные погрешности, которые возникают при измерении и построении проектных отрезков.

1. *Погрешность за компарирование мерного прибора.* В процессе компарирования принимаются меры по ослаблению влияния систематических погрешностей, что позволяет с достаточной степенью надежности считать погрешность определения длины мерного прибора μ_x центрированной случайной величиной. Кроме того, как показывает опыт работы, μ_x имеет нормальное распределение вероятностей.

Величину μ_x характеризуют стандартом σ_{μ_x} , оценка которого может быть получена при обработке результатов компарирования или на основе многолетнего опыта проведения работ. В табл. 2 приведены усредненные значения σ_{μ_x} для наиболее распространенных в практике случаев.

Погрешность за компарирование является функцией параметра μ_x , т. е.

$$\eta_x = \frac{l}{l_0} \mu_x, \quad (231)$$

где l — длина измеряемой линии; l_0 — длина мерного прибора.

Используя эту зависимость, определим стандарт η_x

$$\sigma_{\eta_x} = \frac{l}{l_0} \sigma_{\mu_x}. \quad (232)$$

Так как μ_x имеет нормальное распределение, то и η_x , являющаяся линейной функцией параметра, тоже имеет нормальное распределение вероятностей.

Величина η_x входит в результаты измерений как систематическая погрешность, поэтому ее оценку можно производить или по предельным значениям, или по допускаемому отклонению.

Величины погрешностей за компарирование при различных условиях приведены в табл. 2.

2. *Погрешность за уложение мерного прибора в створ линии.* При измерении расстояний или построении проектных отрезков мерный прибор укладывается в створ линии по теодолиту или на глаз. Погрешность μ_c уложения мерного прибора можно считать центрирован-

ной случайной величиной с нормальным распределением вероятностей. В этом случае μ_c оценивают стандартом σ_{μ_c} .

Погрешность η_c за уложение мерного прибора в створ связана с функциональной зависимостью μ_c

$$\eta_c = \frac{1}{2l} \mu_c^2$$

и является четной функцией параметра.

Постоянные и случайные части таких погрешностей определяют по формулам (144) и (145). Используя принятые обозначения, запишем

$$\theta_c = \frac{1}{2l} \sigma_{\mu_c}^2; D_c = \frac{1}{2l^2} \sigma_{\mu_c}^4. \quad (233); (234)$$

3. *Погрешность за наклон мерного прибора.* При вычислении горизонтального проложения за наклон отрезка учитывают поправку. Погрешность за наклон мерного прибора обусловлена влиянием погрешности μ_h определения превышения. В этом случае μ_h можно считать центрированной случайной величиной с нормальным распределением вероятностей. Значение стандарта σ_{μ_h} зависит от способа определения превышения и условий измерения. Погрешность за наклон мерного прибора η_h и μ_h связаны функциональной зависимостью

$$\eta_h = \frac{1}{2l} \mu_h^2.$$

Оценивая постоянную и случайную части η_h , получим

$$\theta_h = \frac{1}{2l} \sigma_{\mu_h}^2; D_h = \frac{1}{2l^2} \sigma_{\mu_h}^4. \quad (235); (236)$$

При небольших наклонах местности или конструкций зданий поправку за наклон мерного прибора не вводят. Границы для превышений или углов наклона, до которых эта поправка не вводится, определены соответствующими нормативными документами, что позволяет вычислить интервал значений $[-\alpha_h, \alpha_h]$.

Так как нет оснований отдать предпочтение какому-то значению h , то будем полагать, что величина h распределена внутри интервала равномерно. Тогда, оценивая постоянную и случайную части погрешностей по формулам (136) и (138), получим

$$\theta_h = \frac{\alpha_h^2}{6l}; D_h = \frac{\alpha_h^4}{45l^2}. \quad (237); (238)$$

4. *Погрешность за температуру мерного прибора.* Погрешность η_t за температуру мерного прибора будет обусловлена влиянием погрешности μ_t определения температуры, которую можно рассматривать как центрированную случайную величину с нормальным распределением и оценивать с помощью стандарта σ_{μ_t} .

Так как функциональная зависимость между погрешностями имеет вид

$$\eta_t = \alpha_l \mu_t,$$

то

$$D_t = \alpha^2 l^2 \sigma_{\mu_t}^2, \quad (239)$$

где α — коэффициент линейного расширения.

Если температуру не определяют, то ее можно считать случайной величиной с равномерным распределением вероятностей в интервале от t_{\min} до t_{\max} .

В этом случае математическое ожидание μ_t можно определить как среднее значение

$$m_{\mu_t} = \frac{t_{\min} + t_{\max}}{2}.$$

Если температуру компарирования мерного прибора обозначить через t_x , то систематическая погрешность за температуру определится по формуле

$$\lambda_t = \alpha l (t_x - m_{\mu_t}). \quad (240)$$

Случайную часть погрешности определим из выражения (239). Используя для определения стандарта равномерно распределенной величины формулу (22), получим

$$D_t = \frac{1}{3} \alpha^2 l^2 \alpha_t^2, \quad (241)$$

где $\alpha_t = t_{\max} - m_{\mu_t} = m_{\mu_t} - t_{\min}$.

При построении отрезков на конструкциях сооружений, которые сами испытывают температурные воздействия, зависимости между погрешностями значительно сложнее. Подробно этот вопрос будет рассмотрен в главе VI.

5. Погрешность за натяжение мерного прибора. При построении проектного отрезка натяжение мерного прибора осуществляется или с помощью специальных приспособлений, или от руки. В обоих случаях стараются выдержать нормативное натяжение. Это позволяет погрешность μ_F натяжения мерного прибора считать центрированной случайной величиной с нормальным распределением вероятностей.

При измерении мерным прибором на плоскости погрешность η_F за натяжение мерного прибора связана с μ_F функциональной зависимостью

$$\eta_F = \frac{l}{\omega E} \mu_F,$$

где ω — площадь поперечного сечения полотна мерного прибора; E — модуль упругости материала мерного прибора.

Оценивая погрешность натяжения стандартом σ_{μ_F} , получим

$$D_F = \frac{l^2}{\omega^2 F^2} \sigma_{\mu_F}^2. \quad (242)$$

При измерении линий подвесными мерными приборами функциональная зависимость между погрешностями отображается выражением

$$\eta_F = \left(\frac{\sigma l}{p} + \frac{pl}{12F^3} \right) \mu_F,$$

где σ – растяжение единицы длины проволоки под действием веса; p – вес единицы длины проволоки; F – сила натяжения проволоки.

Тогда

$$D_F = \left(\frac{\sigma l}{p} + \frac{pl}{12F^3} \right)^2 \sigma_{\mu F}^2. \quad (243)$$

6. *Погрешность за ветровые нагрузки.* Ветровые нагрузки действуют как дополнительный вес мерного прибора.

При измерении на плоскости эта погрешность практически не оказывает влияния на результаты измерений.

При измерении линий подвесными мерными приборами функциональная зависимость между погрешностью η_Q за ветровые нагрузки и силой ветра Q выражается формулой

$$\eta_Q = \frac{l}{24F^2} Q^2.$$

Силу ветра можно рассматривать как случайную величину с равномерным распределением в интервале от $-\alpha_Q$ до α_Q . В этом случае постоянная и случайная части погрешности определяются по формулам

$$\theta_Q = \frac{l}{72F^2} \alpha_Q^2; \quad D_Q = \frac{l^2}{10^3 \cdot 6,48F^4} \alpha_Q^4. \quad (244); (245)$$

7. *Погрешность отсчитывания по мерному прибору.* Погрешность η_0 отсчитывания по мерному прибору зависит от цены деления Δ шкал прибора, способа отсчитывания, угла, под которым мы видим наименьший интервал, и остроты зрения наблюдателя.

В расчетах η_0 считают центрированной случайной величиной с нормальным распределением вероятности. Оценку стандарта этой величины определяют опытным путем.

При отсчитывании десятых долей на глаз стандарт σ_{η_0} погрешности одного отсчета для усредненных условий определяют по формуле

$$\sigma_{1,0} = 0,15\Delta. \quad (246)$$

Если при измерениях длина отрезка вычисляется как разность отсчетов по двум шкалам, то

$$D_0 = \frac{0,045}{n} \Delta^2, \quad (247)$$

где n – число пар отсчетов по шкалам.

8. *Погрешность фиксации концов мерного прибора.* Погрешность η_ϕ фиксации концов мерного прибора в направлении линии можно считать случайной величиной с нормальным распределением вероятностей.

Значения оценок стандартов σ_ϕ погрешности фиксации, определенных автором экспериментальным путем, приведены в табл. 3.

9. *Погрешность делений мерного прибора.* Погрешность зависит от способа их нанесения на полотно мерного прибора. Ее учитывают только тогда, когда отсчеты производят на различных частях шкалы прибора.

Если при измерениях учитывают поправки делений, то за погрешность делений принимают погрешность определения поправок. Так, при

Таблица 3

Способ закрепления точки в натуре	σ_{θ} , мм
Прочерчивание скальпелем по металлической пластине	0,3
Насечка или керн на металлической пластине	0,5
Прочерчивание карандашом по бетону:	
при гладкой поверхности	0,5
при шероховатой поверхности	0,8
Прочерчивание карандашом по бетону с последующей окраской:	
при гладкой поверхности	1,0
при шероховатой поверхности	1,2
Закрепление шпилькой на поверхности земли	0,7
Закрепление металлическим штырем, вбиваемым в грунт	1,5
Закрепление деревянным колышком, вбиваемым в грунт	2,0

компарировании стальных рулеток путем сравнения метровых делений с нормальным метром стандарт погрешности принимают равным 0,05 мм.

Методику расчетов проиллюстрируем на примерах.

Пример 16. При переносе в натуру красных линий отрезки откладывают 20-метровой стальной рулеткой ($\omega = 2$ мм, $E = 2 \cdot 10^4$ кг/мм²) без учета ее температуры. Компарирование рулетки производят на полевом компараторе, а поправку за компарирование приводят к средней температуре периода полевых измерений. При построении проектных отрезков рулетка укладывается в створ на глаз ($\sigma_{\mu_c} = 3$ см), а натяжение производят от руки ($\sigma_{\mu_F} = 2$ кг). Рассчитать погрешность построения отрезка $l = 20$ м, если наклоны линий не превышают $1,0^\circ$, отклонение температуры мерного прибора от температуры компарирования составляет не более 10° , а закрепление точек на местности производят металлическими штырями.

Решение. Вычислим ожидаемые значения элементарных погрешностей построения отрезка.

Погрешность за компарирование мерного прибора определим путем подстановки значения $\sigma_{\mu_n} = 0,8$ мм, выбранного из табл. 2, в формулу (232)

$$\sigma_{\pi_k} = \frac{20}{20} \cdot 0,3 = 0,30 \text{ мм.}$$

Используя значение $\sigma_{\mu_n} = 30$ мм, постоянную и случайную части погрешности за уложение мерного прибора в створ определим по формулам (233) и (234)

$$\theta_c = \frac{1}{2 \cdot 20 \cdot 10^3} 30^2 \approx 0,02 \text{ мм; } D_c = \frac{1}{2 \cdot 20^2 \cdot 10^6} 30^4 \approx 0,002 \text{ мм}^2.$$

Для вычисления погрешности за наклон мерного прибора предельные превышения определим по допускаемому наклону местности $v_{\max} = 1,0^\circ$

$$a_h = l \operatorname{tg} v_{\max} = 20 \operatorname{tg} 1,0^\circ = 0,35 \text{ м.}$$

Будем полагать, что h в пределах от $-a_h$ до $+a_h$ имеет равномерное распределение вероятностей. Тогда, используя формулы (237) и (238), получим

$$\theta_h = \frac{0,35 \cdot 10^6}{6 \cdot 20 \cdot 10^3} \approx 1,02 \text{ мм; } D_h = \frac{0,35 \cdot 10^2}{45 \cdot 20^2 \cdot 10^6} = 0,83 \text{ мм}^2.$$

Распределение вероятностей разности температур t при измерении будем считать равномерным в интервале от -10 до $+10^\circ$. Тогда, используя формулу (241), получим

$$D_t = \frac{1}{3} 12^2 \cdot 10^{-12} \cdot 20^2 \cdot 10^6 \cdot 10^2 = 1,92 \text{ мм}^2.$$

Погрешность за натяжение мерного прибора определим по формуле (242)

$$D_F = \frac{20^2 \cdot 10^6}{2^2 \cdot 2^2 \cdot 10^6} 2^2 = 1 \text{ мм}^2.$$

Если рулетка имеет цену деления $\Delta = 10$ мм, то для одной пары отсчетов получим

$$D_0 = \frac{0,045}{1} 10^2 = 4,5 \text{ мм}^2.$$

Значение погрешности фиксации выберем из табл. 3:

$$\sigma_\phi = 1,5 \text{ мм и } D_\phi = \sigma_\phi^2 = 2,25 \text{ мм}^2.$$

Используя наиболее распространенное значение доверительной вероятности $P_H = 0,9973$, найдем оценку допускаемого систематического отклонения для погрешности за компарирование

$$\delta\lambda_e = 3\sigma_{\pi_k} = 3 \cdot 0,30 = 0,90 \text{ мм}.$$

Общую систематическую часть погрешности определим по формуле (213)

$$\lambda_{ce} = 0,90 + 0,02 + 1,02 = 1,94 \text{ мм},$$

а случайную оценим по формуле (199)

$$D_e = D_c + D_h + D_l + D_F + D_0 + D_\phi = 0,02 + 0,83 + 1,92 + 1 + 4,5 + 2,25 = 10,5 \text{ мм}^2,$$

откуда

$$\sigma_e = \sqrt{10,5} \approx 3,24 \text{ мм}.$$

Определим допускаемое отклонение случайной части погрешности при $P_H = 0,9973$:

$$\delta\delta_e = 3\sigma_e = 3 \cdot 3,2 = 9,6 \text{ мм}.$$

Пример 17. Рассчитать элементарные погрешности и рабочий допуск для построения проектных отрезков $l = 20$ м при переносе в натуру красных линий, если $\delta\sigma_e = 20$ мм, а $\lambda_{ce} = 5$ мм.

Решение. Для составления уравнений системы вида (221) воспользуемся результатами из примера 16

$$\lambda_{ce} = \delta\lambda_e + \theta_c + \theta_h;$$

$$D_e = D_c + D_h + D_l + D_F + D_0 + D_\phi.$$

Для решения задачи по принципу пропорциональных изменений используем значения элементарных погрешностей, полученные в примере 16,

$$\lambda'_{ce} = 1,94 \text{ мм}, \sigma'_{\lambda_e} = 0,9 \text{ мм } \theta'_c = 0,02 \text{ мм и } \theta'_h = 1,02 \text{ мм}.$$

Определим коэффициент пропорциональности

$$k_0 = \lambda_{ce} / \lambda'_{ce} = 5 / 1,94 = 2,58.$$

Тогда по формуле (230)

$$\delta\lambda_e = 2,58 \cdot 0,9 = 2,32 \text{ мм}; \theta_c = 2,58 \cdot 0,02 = 0,13 \text{ мм};$$

$$\theta_h = 2,58 \cdot 1,02 = 2,63 \text{ мм}.$$

Для определения случайных частей погрешностей перенесем известные значения дисперсий в правую часть равенства

$$D_e - D_c - D_h = D_l + D_F + D_0 + D_\phi.$$

При выбранном значении $P = 0,9973$ дисперсия погрешности измерений будет равна

$$D_e = \sigma_e^2 = (\delta\sigma_e / 3)^2 = (20/3)^2 = 44,45 \text{ мм}^2.$$

Для определения характеристик рассеивания погрешностей за уложение в створ и за наклон мерного прибора воспользуемся формулами (225) и (226)

$$D_{\Sigma} = 2 \cdot 0,05^2 = 0,0005 \text{ мм}^2; D_{\alpha} 2,63^2 = 5,53 \text{ мм}^2.$$

Подставляя полученные значения, запишем

$$44,45 - 0,0005 - 5,53 = D_I + D_F + D_0 + D_{\Phi}.$$

В качестве предварительных значений этих дисперсий используем величины из примера 16

$$D'_I = 1,92 \text{ мм}^2, D'_F = 1,0 \text{ мм}^2, D'_0 = 4,5 \text{ мм}^2 \text{ и } D'_{\Phi} = 2,25 \text{ мм}^2.$$

Вычислим коэффициент пропорциональности

$$k_0 = \frac{38,91}{1,92 + 1,0 + 4,5 + 2,25} = 4,03$$

и окончательные значения дисперсий элементарных погрешностей

$$D_I = 4,03 \cdot 1,92 = 7,7 \text{ мм}^2; D_F = 4,03 \cdot 1,0 = 4,0 \text{ мм}^2;$$

$$D_0 = 4,03 \cdot 4,5 = 18,1 \text{ мм}^2; D_{\Phi} = 4,03 \cdot 2,25 = 9,1 \text{ мм}^2.$$

При построении проектного отрезка контроль каждой операции производится путем непосредственного измерения отрезка. В этом случае погрешности за компарирование, уложение в створ, наклон и температуру мерного прибора не влияют на величину расхождений между результатами построения и контрольного измерения, а погрешности отсчитывания и натяжения входят в разность дважды. Поэтому

$$D_{\Sigma} = 2D_F + 2D_0 + D_{\Phi} = 2 \cdot 4,0 + 2 \cdot 18,1 + 9,1 = 53,3,$$

где D_{Σ} — дисперсия расхождений результатов построения и контрольного измерения отрезка.

Исходя из доверительной вероятности $P = 0,9973$, рабочий допуск δ_{Σ} на расхождение при контрольном измерении определим следующим образом:

$$\delta_{\Sigma} = 3\sigma_{\Sigma} = 3\sqrt{D_{\Sigma}} = 3\sqrt{53,3} = 22 \text{ мм}.$$

Если в расчетах необходимо определить значения параметров или характеристик элементарных погрешностей, то

$$\sigma_{\mu_{\Sigma}} = \frac{l_0}{l} \sigma_{\eta_{\Sigma}} = \frac{l_0 \delta \sigma_{\Sigma}}{3l} = \frac{20 \cdot 2,32}{3 \cdot 20} = 0,8 \text{ мм};$$

$$\sigma_{\mu_c} = \sqrt{2l\theta_c} = \sqrt{2 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 0,05} = 45 \text{ мм};$$

$$\alpha_h = \sqrt{6l\theta_h} = \sqrt{6 \cdot 20 \cdot 10^3 \cdot 2,63} = 0,56 \text{ м};$$

$$\alpha_i = \frac{\sqrt{3D_I}}{\alpha l} = \frac{\sqrt{3 \cdot 7,7}}{12 \cdot 10^{-6} \cdot 20 \cdot 10^3} = 20^{\circ};$$

$$\sigma_{\mu_F} = \frac{\omega E}{l} \sqrt{D_F} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10^4}{20 \cdot 10^3} \sqrt{4,0} = 4 \text{ кг};$$

$$\sigma_0 = \sqrt{D_0} = \sqrt{18,1} = 4,3 \text{ мм}; \quad \sigma_{\Phi} = \sqrt{D_{\Phi}} = \sqrt{9,1} = 3,0 \text{ мм}$$

§ 14. ПОСТРОЕНИЕ ПРОЕКТНОГО УГЛА

При построении проектного угла в натуре закреплена вершина угла O и дано направление исходной стороны OA (рис. 16). Необходимо найти положение и закрепить точку B .

Требования к точности определения углов на типовых строительных объектах приведены в табл. 1 и 2, а условия обеспечения точности — в прил. 1 нормативного документа СНиП 3.01.03—84 [25].

При построении проектного угла с технической точностью над точкой O устанавливают теодолит и ориентируют нулевой диаметр лимба по направлению OA . Алимбаду теодолита устанавливают на

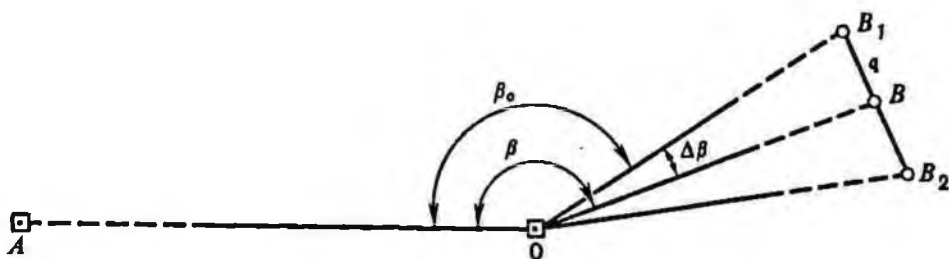


Рис. 16. Построение проектного угла

отсчет, равный проектному значению угла β , и отмечают в натуре положение точки B_1 . Аналогичные действия повторяют при другом положении вертикального круга и получают точку B_2 . Отрезок B_1B_2 делят пополам и закрепляют искомую точку V .

Для повышения точности предварительно построенный угол $\angle AOB_1 \approx \beta$ измеряют необходимым числом приемов. Используя полученное значение β_0 , вычисляют редукцию $\Delta\beta = \beta - \beta_0$, переводят ее значение в линейную меру q и, отложив отрезок, находят положение в натуре точки V .

Для обоих случаев методика расчетов практически остается одинаковой.

Рассмотрим элементарные погрешности при построении углов.

1. *Личные погрешности.* При наведении нити или биссектора угломерного прибора на визирные цели возникает погрешность, обусловленная неточностью оценки оси симметрии визирной цели. Величина погрешности в основном зависит от индивидуальных особенностей наблюдателя. При наиболее неблагоприятных условиях эта погрешность достигает $1,5''$. Для усредненных условий величину личной погрешности в расчетах можно характеризовать стандартом $\sigma_{\kappa} = 0,2''$.

2. *Инструментальные погрешности.* Рассмотрим влияние отдельных источников инструментальных погрешностей.

А. *Неперпендикулярность визирной оси к оси вращения трубы* (коллимационная погрешность c) вызывает погрешность η_c измерения угла, которая может быть определена по формуле

$$\eta_c = c(\sec v_2 - \sec v_1), \quad (248)$$

где v_1 и v_2 — углы наклона на наблюдаемые объекты.

При измерении углов полным приемом, т. е. при двух положениях вертикального круга, среднее из результатов свободно от влияния коллимационной погрешности.

Для расчета допустимых колебаний двойной коллимационной погрешности между полуприемами можно использовать формулу (248).

Б. *Неперпендикулярность оси вращения трубы к основной оси вращения прибора* приводит к наклону оси вращения трубы на угол i_t . Погрешность η_{i_t} измерения угла связана с углом наклона оси вращения трубы функциональной зависимостью

$$\eta_{i_t} = (\operatorname{tg} v_2 - \operatorname{tg} v_1) i_t. \quad (249)$$

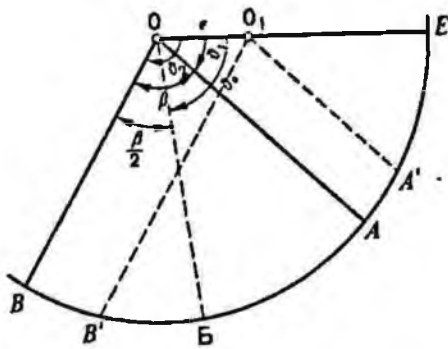


Рис. 17. Погрешность за эксцентриситет алидады $\sigma_{i_T} = (\operatorname{tg} v_2 - \operatorname{tg} v_1) \sigma_1$. (250)

Зная значения v_1 и v_2 , нетрудно определить необходимую точность измерения i_T .

В. *Неперпендикулярность оси уровня горизонтального круга к основной оси вращения прибора* приводит к наклону лимба на угол i_n . Погрешность измерения угла при значениях угла наклона лимба до $2'$ практически близка к нулю и в расчетах точности не учитывается.

Г. *Эксцентриситет алидады горизонтального круга* приводит к появлению погрешности η_e измерения угла при отсчетах по одному отсчетному приспособлению теодолита. Определим функциональную зависимость между η_e и элементами эксцентриситета e , ϑ_1 , ϑ_2 (рис. 17).

Если ось вращения алидады O' не совпадает с осью лимба O , то вместо отсчетов по лимбу A и B будут получены отсчеты A' и B' . Тогда

$$B' = B - e \sin \vartheta_2 \text{ и } A' = A - e \sin \vartheta_1,$$

но

$$\eta_e = (B' - A') - (A - B) = -e(\sin \vartheta_2 - \sin \vartheta_1).$$

Применяя формулу для разности синусов, запишем

$$\eta_e = -2e \cos \frac{\vartheta_2 + \vartheta_1}{2} \sin \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{2}.$$

Из рис. 17 видно, что разность угловых элементов ϑ_2 и ϑ_1 — измеряемый угол, а среднее из угловых элементов — это угол между направлением линейного элемента OE и биссектрисой OB измеряемого угла. Подставляя эти значения, получим

$$\eta_e = -2e \cos \frac{\vartheta_2 + \vartheta_1}{2} \sin \frac{\beta}{2} = -2e \cos \vartheta_0 \sin \frac{\beta}{2}. \quad (251)$$

В этой формуле погрешность за эксцентриситет выражена через независимые параметры e , ϑ_0 и β , что существенно упрощает определение числовых характеристик. Удобна эта формула и для анализа влияния как величины измеряемого угла, так и ориентирования линейного элемента эксцентриситета на погрешность измерения угла.

Если при построении или измерении угла применяют теодолит, имеющий одно отсчетное приспособление, то допускаемые расхождения в углах между полуприемами можно рассчитать по формуле (251).

В теодолитах с двумя отсчетными приспособлениями эксцентриситет алидады на результаты измерения углов влияния не оказывает.

Д. *Погрешности диаметров лимба* могут достигать величины 1,0–1,5". При высокоточных измерениях в углы вводят соответствующие поправки, полученные в результате исследования лимба. Для ослабления влияния погрешностей делений лимб между приемами переставляют на величину $180^\circ/n$ (где n – число приемов измерения угла), а между полуприемами – на 90° . Это позволяет использовать наибольшее число диаметров при отсчетах и тем ослабить влияние систематических погрешностей диаметров лимба.

Если погрешности диаметров лимба определены со стандартом σ_{A_0} , а в результаты измерений введены поправки, то погрешность η_n измерения угла n приемами будет характеризоваться стандартом

$$\sigma_{\eta_n} = \sigma_{A_0} / \sqrt{n}. \quad (252)$$

3. *Погрешности собственно измерений.* К этим погрешностям относятся погрешности визирования и отсчетов по шкале.

Погрешность визирования зависит в основном от разрешающей способности глаза наблюдателя и увеличения v зрительной трубы.

Разрешающая способность глаза обусловлена индивидуальными особенностями наблюдателя и условиями измерений. Одно время разрешающую способность глаза принимали равной 60". Последующие исследования, например Г. И. Кузнецова, показали, что эта величина значительно меньше. В расчетах точности разрешающую способность можно принять равной 20". Тогда стандарт σ_{η_0} погрешности визирования определится по формуле

$$\sigma_{\eta_0}'' = 20/v. \quad (253)$$

Так как при измерении угла одним приемом отсчеты на каждое направление производят дважды, а угол вычисляют как разность направлений, то значение σ_{η_0} можно отнести и к погрешности измерения угла одним приемом.

Погрешность отсчета зависит от качества отсчетного приспособления. Эту погрешность определяют по результатам исследования теодолита и характеризуют стандартом σ_{0_1} погрешностей измерения угла одним приемом.

Совместное влияние погрешностей визирования и отсчета можно определить по формуле

$$D_0 = \sigma_{\eta_0}^2 + \sigma_{0_1}^2,$$

где D_0 – дисперсия собственно измерений.

Наиболее часто по результатам измерений определяют непосредственно значения D_0 или σ_0 . Точность измерения угла одним приемом приводится в названии теодолита.

При измерении углов n приемами дисперсия D_n окончательного значения угла будет равна

$$D_n = D_0/n. \quad (254)$$

4. *Погрешность за наклон основной оси вращения теодолита.* Наклон основной оси вращения теодолита вызывает наклон оси вращения трубы

на угол i_7 . В отличие от наклона оси вращения трубы, вызванного неравенством подставок трубы, влияние наклона оси вращения теодолита не исключается при измерении угла полным приемом.

Для повышения точности измерения с помощью накладного уровня определяют i_7 и в результаты измерений вводят поправки по формуле (249). Погрешность за наклон в этом случае вычисляют по формуле (250).

Если i_7 не определяется, то наклон i_0 основной оси вращения прибора порождает погрешность η_{i_0} измерения угла. Эту погрешность можно вычислить по формуле

$$\eta_{i_0} = i_0 (\sin u_2 \operatorname{tg} v_2 - \sin u_1 \operatorname{tg} v_1),$$

где u_1 и u_2 — измеренные направления, отсчитанные от отвесной плоскости, проходящей через ось вращения теодолита.

Для расчетов рассмотрим наиболее неблагоприятный случай, когда $v_2 = -v_1 = v$. Тогда

$$\eta_{i_0} = i_0 \operatorname{tg} v (\sin u_1 + \sin u_2).$$

Накладной уровень применяют при небольших углах наклона визирной оси. Заменяя для этого случая значение тангенса величиной угла в радианах, получаем

$$\eta_{i_0} = \frac{i_0 v}{\rho} (\sin u_1 + \sin u_2),$$

но

$$\sin u_1 + \sin u_2 = 2 \sin \frac{u_1 + u_2}{2} \cos \frac{u_2 - u_1}{2}.$$

Разность направлений $u_2 - u_1$ дает нам измеряемый угол, а $(u_1 + u_2)/2 = u_0$ — это угол между биссектрисой измеряемого угла и отвесной плоскостью, проходящей через ось вращения теодолита. Подставляя принятые обозначения, запишем

$$\eta_{i_0} = \frac{2}{\rho} i_0 v \sin u_0 \cos \frac{\beta}{2}. \quad (255)$$

Рассмотрим параметры, входящие в правую часть равенства.

Основную ось вращения прибора приводят в отвесное положение с помощью уровней горизонтального круга. Если эту операцию выполнять тщательно и стараться ось вращения теодолита привести строго в отвесное положение, то угол i_0 можно рассматривать как нормально распределенную случайную величину с нулевым математическим ожиданием. При оценке стандарта σ_i величины i_0 можно исходить из следующих соображений. Установку теодолита в рабочее положение обычно осуществляют с погрешностью не более одного деления уровня. Принимая это значение за предельное, получим

$$\sigma_i = \tau/3,$$

где τ — цена деления уровня горизонтального круга.

В расчетах точности величину v можно рассматривать как случайную, значения которой обусловлены видом работ и условиями измере-

ний. Для конкретного случая всегда можно определить границы возможных значений углов наклона и назначить предел α_v . Если внутри интервала $[-\alpha_v, \alpha_v)$ трудно отдать предпочтение каким-либо отдельным значениям, то можно полагать, что величина v распределена равномерно. При этом математическое ожидание и дисперсия будут равны $m_v = 0$ и $D_v = \alpha_v^2 : 3$.

Угол u_0 , определяющий положение отвесной плоскости по отношению к биссектрисе измеряемого угла, в процессе измерений с равной вероятностью может принимать любые значения в интервале от 0 до 2π . Следовательно, плотность распределения этой величины будет иметь вид

$$f(u_0) = \frac{1}{2\pi} \text{ при } u_0 \in (0, 2\pi).$$

Найдем числовые характеристики величины $X = \sin u_0$

$$m_x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin u_0 du_0 = 0; \quad D_x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 u_0 du_0 = \frac{1}{2}.$$

Угол β для некоторых видов работ сохраняет в определенных пределах постоянное значение. В триангуляции углы, например, имеют среднее значение 60° , в полигонометрии — близки к 180° . Для таких видов работ в расчетах точности значение β будем рассматривать как постоянную величину.

В других видах работ величина β может с равной вероятностью принимать любые значения в интервале от 0 до 2π , например при переносе в натуру точек полярным способом. В этом случае величина β имеет плотность распределения

$$f(\beta) = \frac{1}{2\pi} \text{ при } \beta \in (0, 2\pi).$$

Определим числовые характеристики величины $Y = \cos \frac{\beta}{2}$

$$m_y = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \frac{\beta}{2} d\beta = 0; \quad D_y = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \frac{\beta}{2} d\beta = \frac{1}{2}.$$

Величины i_0 , v , u_0 и β по своей сущности не связаны между собой. Если какая-либо из них примет определенное значение, то нет оснований полагать, что это событие повлияет на вероятности других величин. А это не что иное, как признак независимости случайных величин.

Используя теорему о математическом ожидании независимых величин, запишем

$$M_{i_0} = \frac{2}{\rho} m_i m_v m_x m_y, \quad (256)$$

где M_{i_0} и m_i — математические ожидания η_{i_0} и i_0 .
Так как $m_x = 0$, $m_v = 0$ и $m_y = 0$, то $M_{i_0} = 0$.

Ранее было показано, что величины i_0 , v , u_0 и β можно считать центрированными величинами. Применяя теорему о дисперсии центрированных случайных величин, получим

$$D_{i_0} = \frac{2^2}{\rho} D_i D_v D_x D_y = \frac{\tau^2 \alpha_v^2}{27\rho^2}; \quad (257)$$

где D_{i_0} — дисперсия величины η_{i_0} .

Формула (257) предназначена для вычисления дисперсии η_{i_0} при условии, что измеряемые углы принимают значения в интервале от 0 до 2π . Если в данных условиях измеряемые углы имеют постоянное значение, то дисперсия определится из выражения

$$D_{i_0} = \frac{2\tau^2 \alpha_v^2}{27\rho^2} \cos^2 \frac{\beta}{2}. \quad (258)$$

5. *Погрешности, обусловленные влиянием внешних условий.* Из внешних условий на точность измерения угла наибольшее влияние оказывает разность боковых рефракций по двум направлениям. Боковая рефракция возникает при прохождении луча через слои воздуха с различной плотностью. Распределение плотности воздушных слоев в основном связано с распределением температуры. Поэтому рефракционное поле обычно отождествляют с температурным полем и значение частного угла δ'' рефракции определяют по формуле

$$\delta'' = 10,9 \frac{B}{T^2} S \frac{dT}{dy}, \quad (259)$$

где B — давление воздуха, T — абсолютная температура; dT/dy — горизонтальный градиент температуры; S — расстояние между прибором и визирной целью.

Если известны горизонтальный градиент температуры и интегральные значения и температуры по ходу луча, то можно вычислить значение δ'' . В расчетах точности обычно ограничиваются осредненными значениями B , T и dT/dy .

При высокоточных измерениях иногда вынуждены прибегать к экспериментальным определениям влияния боковой рефракции.

6. *Погрешность за центрирование теодолита.* Пусть при измерении угла теодолит установлен не в вершине угла C , а в точке I (рис. 18). Проведем из точки C линии CA' и CB' , параллельные IA и IB . Тогда угол $A'CB'$ будет равен измеренному углу β_m .

Рассматривая погрешность $\eta_{c\beta}$ измерения угла как разность между измеренным и действительным β значениями, получим

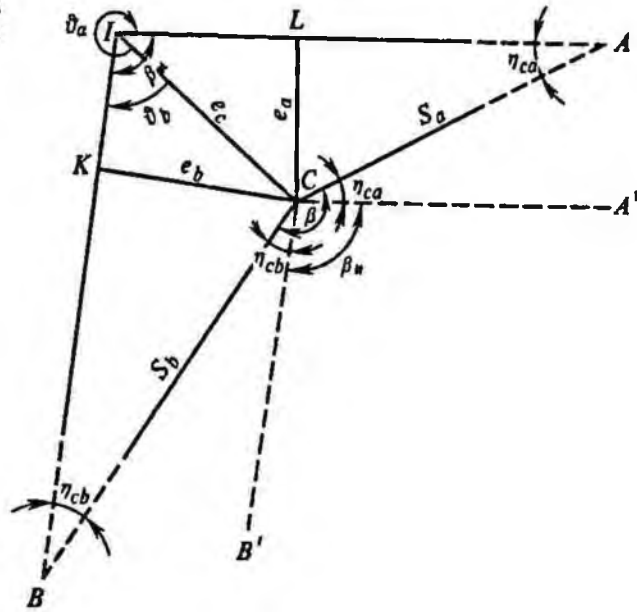
$$\eta_{c\beta} = \beta_m - \beta = -\eta_{ca} - \eta_{cb},$$

где η_{ca} и η_{cb} — погрешность измеренных направлений на пункты A и B .

Выражая погрешности направлений через линейный e и угловой ϑ элементы центрирования, запишем

$$\sin \eta_{ca} = \frac{e_a}{S_a} \text{ и } \sin \eta_{cb} = \frac{e_b}{S_b}.$$

Рис. 18. Погрешность за центрирование теодолита



Так как углы η_{ca} и η_{cb} малы, заменяя синусы значениями углов в радианной мере, получим

$$\eta_{ca} = \frac{\rho}{S_a} e_a \text{ и } \eta_{cb} = \frac{\rho}{S_b} e_b.$$

В расчетах точности обычно используют осредненные значения сторон, т.е. принимают $S_a = S_b = S$. Тогда

$$\eta_{c\beta} = -\frac{\rho}{S}(e_a + e_b).$$

Из прямоугольных треугольников ILC и IKC имеем $e_a = e_c \sin(360^\circ - \vartheta_a) = -e_c \sin \vartheta_a$ и $e_b = e_c \sin \vartheta_b$.

Подставляя эти значения, получим

$$\eta_{c\beta} = \frac{\rho}{S} e_c (\sin \vartheta_a - \sin \vartheta_b).$$

Но

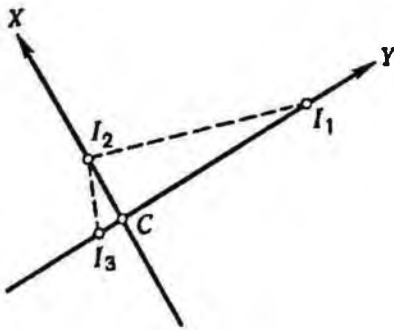
$$\sin \vartheta_a - \sin \vartheta_b = 2 \cos \frac{\vartheta_a + \vartheta_b}{2} \sin \frac{\vartheta_a - \vartheta_b}{2}.$$

Разность угловых элементов $\vartheta_a - \vartheta_b = \beta$ — это измеряемый угол, а величина $(\vartheta_a + \vartheta_b)/2 = \vartheta_0$ показывает взаимное положение биссектрисы тупого угла BIA и линейного элемента центрирования IC .

Используя принятые обозначения, запишем

$$\eta_{c\beta} = \frac{2\rho}{S} e_c \cos \vartheta_0 \sin \frac{\beta}{2}. \quad (260)$$

Рис. 19. Центрирование теодолита



Если элементы центрировки определяют со стандартами σ_{μ_e} и σ_{μ_g} , а в результаты измерений вводятся поправки, то дисперсию погрешности $\eta_{c,\beta}$ можно определить по формуле погрешности функции общего вида

$$D_{c,\beta} = \frac{4\rho^2}{S^2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \left(\cos^2 \vartheta_0 D_{\mu_e} + e^2 \sin^2 \vartheta_0 \frac{D_{\mu_g}}{\rho^2} \right). \quad (261)$$

При выполнении работ по инженерной геодезии центрирование теодолита обычно выполняют нитяным отвесом или оптическим центрированием без определения элементов приведения. В этом случае $\eta_{c,\beta}$ зависит от того, какие значения принимают величины e_c , ϑ_0 и β .

Рассмотрим процесс центрирования. Пусть центр знака расположен в точке C (рис. 19), а проекция основной оси прибора в точке I_1 . Расположим прямоугольную систему координат таким образом, чтобы начало системы совпадало с центром знака, а ось Y — с отрезком CI_1 .

Чтобы произвести центрирование, перемещают теодолит по возможности по оси Y до точного совпадения с центром знака, т.е. с началом координат. Наиболее трудно выдержать направление перемещения, что приводит к тому, что проекция оси прибора попадает в точку I_2 . В этом случае перемещение инструмента стараются производить в направлении оси X и попадают в точку I_3 . Так, действуя методом последовательного приближения, добиваются совмещения проекции оси с центром знака.

В этих условиях можно ожидать, что случайные величины X и Y , т.е. окончательные координаты проекции основной оси прибора, будут иметь нормальные распределения с числовыми характеристиками $m_x = m_y = 0$ и $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$.

Для проверки высказанных предположений в МИСИ им. В. В. Куйбышева преподаватели кафедры инженерной геодезии Е. А. Аббакумов, С. К. Варламов и А. П. Кононов под руководством В. Ф. Лукьянова выполнили исследование, сущность которого заключается в следующем. Теодолит многократно центрировали и измеряли отклонения r от знака. Всего было проведено около 100 измерений. Если высказанные выше предположения верны, то величина $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ должна иметь распределение Релея с плотностью

$$f(r) = \frac{re^{-(r^2/2\sigma^2)}}{\sigma^2}.$$

Проверка этой гипотезы с помощью критерия χ^2 подтвердила пра-

Таблица 4

Способ центрирования	Значения σ_{e_c} , мм
Нитяный отвес:	
при отсутствии ветра	2
при скорости ветра до 3 м/с	3
при скорости ветра до 5 м/с	5
Оптический центрир при высоте прибора:	
до 1 м	0,3
до 1,5 м	0,5
более 1,5 м	0,7

вильность высказанных предположений. Если совместить направление одной из осей, например Y , с окончательным отклонением проекции оси прибора от начала координат, то линейный элемент e_c можно рассматривать как случайную величину с нормальным распределением вероятностей и числовыми характеристиками $m_{e_c} = 0$ и σ_{e_c} . Стандарт σ_{e_c} зависит от применяемого для центрирования приспособления и тщательности выполнения операций по совмещению точек I и C .

В табл. 4 приведены осредненные значения стандартов центрирования, полученных экспериментальным путем.

Величина v_0 характеризует положение линейного элемента e_c (оси Y) относительно биссектрисы измеряемого угла. Этот угол можно рассматривать как случайную величину с плотностью распределения $f(\vartheta_0) = \frac{1}{2\pi}$ в

интервале от 0 до 2π . Равномерность распределения ϑ_0 подтверждается исследованиями, проведенными тем же коллективом преподавателей кафедры инженерной геодезии МИСИ им. В. В. Куйбышева.

Определим числовые характеристики величины $X = \cos \vartheta_0$.

$$m_x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \vartheta_0 d\vartheta_0 = 0; D_x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta_0 d\vartheta_0 = \frac{1}{2}.$$

Угол β , как и ранее, в одних условиях измерений будет являться постоянной величиной, в других — случайной величиной с равномерным распределением вероятностей в интервале от 0 до 2π . Для второго случая дисперсия величины $Y = \sin \frac{\beta}{2}$ будет равна

$$D_y = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{\beta}{2} d\beta = \frac{1}{2}.$$

Величины e_c , ϑ_0 и β так же, как и параметры погрешности за наклон основной оси прибора, можно считать независимыми.

Найдем числовые характеристики погрешности $\eta_{c\beta}$, для чего используем теоремы о математическом ожидании и дисперсии произведения независимых центрированных величин.

Если измеренные углы β можно рассматривать как постоянную величину, то

$$M_{e\beta} = \frac{2\rho}{S} \sin \frac{\beta}{2} m_e m_x = 0; \quad (262)$$

$$D_{e\beta} = \frac{4\rho^2}{S^2} \sin^2 \frac{\beta}{2} D_e D_x = \frac{2\rho^2}{S^2} \sin^2 \frac{\beta}{2} D_e.$$

Если β принимает случайные значения в интервале от 0 до 2π , то

$$M_{e\beta} = \frac{2\rho}{S} m_e m_x m_y = 0; \quad (263)$$

$$D_{e\beta} = \frac{4\rho^2}{S^2} D_e D_x D_y = \frac{\rho^2}{S^2} D_e.$$

Аналогичные формулы, полученные Ю. В. Кемницев в [9] другим путем, приведены в примере 7 в § 8.

Для сравнения этих формул подставим в правую часть выражения (156) значение k_s из (155) и перейдем к угловой мере отображения параметра a , тогда

$$D(\eta) = \left(\frac{S}{S_1 S_2} \right)^2 \rho^2 \frac{\sigma_a^2}{2}. \quad (264)$$

Если $\beta = 180^\circ$, то $S = 2S_1 = 2S_2$. Используя эти значения, получим

$$D(\eta) = \frac{2\rho^2}{S_1^2} D_a.$$

Для тех же условий формула (262) примет вид

$$D_{e\beta} = \frac{2\rho^2}{S^2} D_e.$$

Параметр a и величина e_e являются линейными элементами центрирования. Следовательно, для случая равных сторон $S_a = S_b$ обе формулы равнозначны.

Формула (264) учитывает S_a и S_b , что позволяет использовать ее в расчетах сетей с разными длинами сторон.

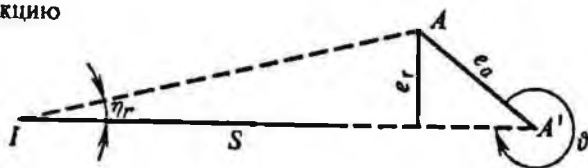
Формулы (262) и (263) нагляднее отражают влияние величин угла на погрешность за центрирование, но справедливы только для приблизительно равных сторон.

7. *Погрешность за редукцию визирных целей.* Если визирная цель установлена не над центром знака A , а в точке A' , то погрешность η , измерения направления с пункта I определится по формуле (рис. 20).

$$\sin \eta_r = \frac{e_r}{S} = \frac{e_a}{S} \sin(360^\circ - \vartheta) = -\frac{e_a}{S} \sin \vartheta,$$

где e и ϑ — линейная и угловая величины редукции.

Рис. 20. Погрешность за редукцию визирных целей



Так как угол η_r мал, то синус можно заменить значением угла в радианной мере, тогда

$$\eta_r = -\frac{\rho}{S} e_a \sin \vartheta. \quad (265)$$

При расчетах точности встречаются два случая. Рассмотрим их.

Если элементы приведения e и ϑ определяются с погрешностями μ_e и μ_ϑ , а в результате измерений вводят соответствующие поправки, то дисперсию D_r погрешности η_r можно определить по формуле погрешности функции общего вида

$$D_r = \frac{\rho^2}{S^2} \left(\sin^2 \vartheta D_e + e^2 \cos^2 \vartheta \frac{D_\vartheta}{\rho^2} \right), \quad (266)$$

где D_e и D_ϑ — дисперсия погрешностей μ_e и μ_ϑ .

Если элементы приведения не определяются, то η_r обусловлена влиянием тех конкретных значений, которые могут принимать в процессе измерений e_a и ϑ .

Как и при центрировании теодолита линейный элемент e_a можно рассматривать как случайную величину с $m_{e_a} = 0$ и δ_{e_a} . Величина ϑ — это случайная величина с равномерным распределением вероятностей в интервале от 0 до 2π .

Используя теоремы о числовых характеристиках независимых центрированных случайных величин, получим

$$M_r = \frac{\rho}{S} m_{e_a} m_{\sin \vartheta} = 0; \quad D_r = \frac{\rho^2}{S^2} D_e D_{\sin \vartheta} = \frac{\rho^2}{2S^2} D_e. \quad (267)$$

Формула (267) определяет дисперсию за редукцию одного направления. Дисперсию $D_{r\beta}$ за редукцию при измерении угла определим исходя из следующих соображений. Если редукции по двум направлениям независимы и при приблизительно равных сторонах S характеризуются равными дисперсиями, то

$$D_{r\beta} = 2D_r = \frac{\rho^2}{S^2} D_e. \quad (268)$$

8. Погрешность фиксации проектного угла. Фиксация направления при построении проектного угла производится, как и при построении проектного отрезка. Стандарты линейной величины погрешности фиксации для различных способов закрепления точки можно выбрать из табл. 4. Для определения погрешности в угловой мере воспользуемся известным соотношением

$$\sigma_\phi'' = \frac{\rho''}{S} \sigma_\phi,$$

где σ_{ϕ}^* — стандарт погрешности фиксации в угловой мере.

Методику расчетов точности построения проектного угла проиллюстрируем на примерах.

Пример 18. Рассчитать погрешность построения углов теодолитом Т-30 при перенесении в натуру красных линий, если углы наклона визирной оси не превышают $\alpha_v = 10^\circ$, а длины отрезков равны 20 м.

Решение. Погрешность собственно измерений одним приемом для теодолита Т-30 составляет величину $\sigma_0 = 30''$.

Теодолит имеет цену деления уровня горизонтального круга $\tau = 45''$. Так как углы могут принимать любые значения от 0 до 2π , то погрешность за наклон основной оси прибора будет равна

$$D_{i_0} = \frac{45^2 \cdot 10^2}{27 \cdot 57,3^2} \approx 2''.$$

Построение угла осуществляют при двух положениях круга, а визирную ось наводят непосредственно на знаки. В этих условиях инструментальные погрешности учитывать в расчетах не будем. Погрешности за визирование уже учтены в величине σ_0 .

Если центрирование теодолита осуществляют нитяным отвесом, то для определенных условий $\sigma_{e_c} = 3$ мм (см. табл.4). Тогда

$$D_{e,\beta} = \frac{206265^2}{20^2 \cdot 10^6} 3^2 = 957.$$

Дисперсия закрепления точек металлическими штырями равна

$$D_{\phi}^* = \frac{206265^2}{20^2 \cdot 10^6} 1,5^2 = 239.$$

Вычислим дисперсию погрешности построения угла:

$$D_{e\beta} = D_0 + D_{i_0} + D_{e,\beta} + D_{\phi}^* = 30^2 + 2 + 957 + 239 = 2098;$$

$$\sigma_{e\beta}^* = \sqrt{2098} = 46''.$$

Определим допускаемое отклонение

$$\delta_{e,\beta} = 3\sigma_{e\beta}^* = 3 \cdot 46 = 138''.$$

При длине отрезка $S = 20$ м это приводит к поперечному сдвигу точки на величину

$$\delta_{\beta} = \frac{\delta_{e,\beta} S}{\rho} = \frac{138 \cdot 20 \cdot 10^3}{206265} \approx 13 \text{ мм.}$$

Сравним результаты расчетов в примерах 16 и 18.

Погрешность построения проектного отрезка приводит к продольному сдвигу точки. Систематическая часть этого сдвига составляет 2 мм, что дополнительных опасений при переносе в натуру красных линий не вызывает. Случайная часть составляет величину 10 мм (см. пример 16).

Предельный сдвиг можно характеризовать значением $\delta_e = 10 + 2 = 12$ мм.

Таким образом, измерения углов и линий можно признать равноточными. В этом случае общая величина сдвига подчиняется закону распределения Релея с параметром σ . Функция распределения этой величины отображается формулой (54).

Пример 19. При выверке направленных антенн построение проектного угла $\beta = 60^\circ$ допускается с предельной погрешностью $\delta = 6''$. Длины линий в среднем превышают $\alpha_v = 5^\circ$.

Рассчитать элементарные погрешности, если построение угла осуществляется теодолитом Theo 010.

Решение. Стандарт личной погрешности примем равным $\sigma_n = 0,2$. Инструментальные погрешности при построении угла полным приемом исключаются.

Погрешность собственно измерений для теодолита Theo 010 принято считать равной $\sigma_0 = 2,0$.

Для вычисления дисперсии погрешности за наклон основной оси инструмента воспользуемся формулой (258)

$$D'_{i_0} = \frac{2 \cdot 20^2 \cdot 5^2}{27 \cdot 57,3} = 0,23.$$

Если при установке визирных целей и теодолита использовать оптический центрир ($\sigma_a = 0,3$ мм), то погрешность за редукцию и центрирование можно вычислить по формулам (263) и (262)

$$D'_{r_\beta} = \frac{206265^2}{100^2 \cdot 10^6} 0,3^2 = 0,38; \quad D'_{c_\beta} = \frac{2 \cdot 206265^2}{100^2 \cdot 10^6} \sin^2 30^\circ \cdot 0,3^2 = 0,19.$$

Влияние внешних условий не учитывается, так как расстояние мало (100 м) и измерения выполняют в периоды благоприятного состояния атмосферы.

Если для фиксации направления использовать кернение на металлической пластине ($\sigma_\phi = 0,5$ мм), то в угловой мере это составит величину

$$D'_\phi = \frac{206265^2}{100^2 \cdot 10^6} 0,5^2 = 1,06.$$

Вычислим предварительное значение дисперсии построения угла

$$D'_{\text{св}} = D'_a + D'_0 + D'_{i_0} + D'_{r_\beta} + D'_{c_\beta} + D'_\phi = 0,2 + 2,0 + 0,23 + 0,38 + 0,19 + 1,06 = 5,90;$$

$$\sigma'_{\text{св}} = \sqrt{5,90} = 2,43''.$$

Допускаемое отклонение будет равно

$$\delta' = 3 \sigma'_{\text{св}} = 3 \cdot 2,43 = 7,39'',$$

что в 1,2 раза превышает допускаемое значение $6''$.

Из расчетов видно, что преобладающие значения имеют погрешности собственно измерения угла и фиксации. Компенсация этих погрешностей в процессе выполнения работ особых затруднений не вызывает.

Предположим, что измерение предварительно построенного угла произведено n приемами и введены поправки за редукцию. Редукцию угла построим путем отложения отрезка при помощи измерителя и масштабной линейки. Будем считать, что стандарт погрешности выполнения этой операции равен $\sigma_p = 0,2$ мм. Направления прочертим скальпелем на металлической пластине, что в угловой мере приведет к дисперсии

$$D_\phi = \frac{206265^2}{100^2 \cdot 10^6} 0,3^2 = 0,38''.$$

При намеченном способе выполнения работ погрешности за центрирование теодолита и редукцию визирных целей будут являться систематическими. Оценим их значение по формулам (207) и (208):

$$D_\lambda = D'_{r_\beta} + D'_{c_\beta} = 0,38 + 0,19 = 0,55;$$

$$\sigma_\lambda = \sqrt{0,55} = 0,74''; \quad \delta_\lambda = 3 \cdot 0,74 = 2,22''.$$

Определим ту часть допуска, которая приходится на случайные погрешности построения угла

$$\delta_{\sigma_{\text{св}}} = \delta - \delta_\lambda = 6 - 2,22 = 3,78'';$$

тогда

$$\sigma_{\text{св}} = \frac{\delta_{\sigma_{\text{св}}}}{3} = \frac{3,78}{3} = 1,26''; \quad D_{\text{св}} = 1,26^2 = 1,58.$$

Вычислим необходимое число приемов измерения угла, для чего предварительно установим ту часть $D_{\epsilon\beta}$, которая приходится на долю D_n .

$$D_n = D_{1,1} - D_\phi - D'_n = 1,58 - 0,38 - 0,2 = 1,00.$$

Так как $D_n = D_o/n$, то

$$n = \frac{D_o}{D_n} = \frac{2,0^2}{1,0^2} = 4 \text{ приема.}$$

Контроль выполнения каждой операции при построении углов в данном случае проводят путем сравнения результатов измерений в приемах. Рассматривая расхождения в значениях как разности, запишем

$$\sigma_n = \sigma_o \sqrt{2} = 2,0 \sqrt{2} = 2,8'',$$

где σ_n — стандарт разности измеряемых углов.

Допускаемое расхождение δ_n вычислим как утроенное значение стандарта

$$\sigma_n = 3 \sigma_n = 3 \cdot 2,8 = 8,4'' \approx 8''.$$

Таким образом, для построения проектного угла необходимо центрирование теодолита и визирных целей производить оптическим центриром с погрешностью не более 0,9 мм, измерение угла выполнять четырьмя приемами, а закрепление полученного направления осуществлять скальпелем на металлической пластине.

§ 15. ПОСТРОЕНИЕ ПРОЕКТНОЙ ОТМЕТКИ

При переносе проектной отметки необходимо закрепить в натуре точку B , отметка которой равна проектному значению H_o (рис. 21). Предполагается, что плановое положение точки известно.

Для типовых зданий требования к точности определения отметок приведены в табл. 1 и 2, а условия обеспечения точности определения отметок и передачи их на монтажные горизонты — прил. 3 и 4 нормативного документа СНиП 3.01.03-84 [23].

Наиболее часто построение выполняют при помощи геометрического нивелирования. При этом на пункт A с известной отметкой H_A устанавливают рейку и по нивелиру берут отсчет a . Далее вычисляют проектный отсчет $b = H_o - (H_A + a)$ и перемещают вторую рейку по высоте до совмещения визирной оси с отсчетом b . По пятке рейки отмечают положение точки B_1 . Аналогичные действия выполняют с использованием делений на другой стороне рейки и отмечают положение точки B_2 . Отрезок B_1B_2 делят пополам и закрепляют положение точки B . При более высоких требованиях к точности, получив предварительно положение точки B_1 , с необходимой

точностью измеряют превышение h_{AB_1} .

и вычисляют величину редукции q . Редуцию откладывают от точки B_1 и находят положение точки B .

Рассмотрим основные источники погрешностей.

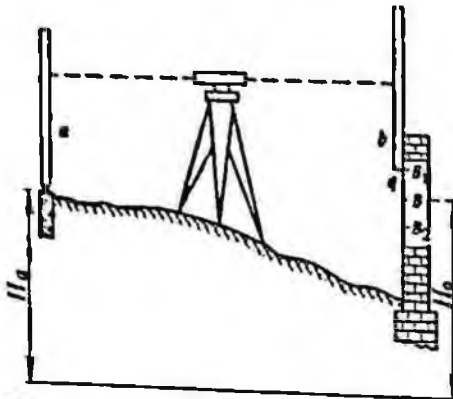


Рис. 21. Перенос в натуре проектной отметки

1. *Погрешность за приведение пузырька уровня в нуль-пункт.* В современных нивелирах пузырек уровня приводят в нуль-пункт путем совмещения изображений концов пузырька при помощи призмной системы. Погрешности совмещения зависят от тщательности выполнения этой операции, качества шлифовки внутренней поверхности ампулы и цены деления уровня. Погрешность совмещения принято характеризовать стандартом $\sigma''_{\text{совм}}$, который выражают в долях деления уровня k . Если обозначить цену деления уровня через τ , то

$$\sigma'_{\text{совм}} = k \tau''.$$

Нивелиры технические и средней точности имеют $k = 0,045$, а у нивелиров высокой точности $k = 0,025$.

При расстоянии от нивелира до рейки S стандарт погрешности взгляда составит величину

$$\sigma_{\text{совм}} = \frac{\sigma''_{\text{совм}}}{\rho''} S = \frac{k \tau''}{\rho''} S. \quad (269)$$

Нивелирование на станции и построение проектных отметок выполняют по двум шкалам или сторонам рейки, а превышение вычисляют как разность отсчетов по передней и задней рейкам. В этом случае стандарт $\sigma_{h_{\text{совм}}}$ погрешности определения превышений за приведение пузырька уровня в нуль-пункт будет равен

$$\sigma_{h_{\text{совм}}} = \frac{\sigma_{\text{совм}} \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sigma_{\text{совм}}.$$

2. *Погрешность за непараллельность визирной оси и оси уровня.* При отсчетах по рейке ось уровня устанавливают горизонтально. Если визирная ось отклоняется от оси уровня на угол i , то погрешность η_i отсчета по рейке определится по формуле

$$\eta_i = \frac{i}{\rho} S.$$

Погрешность η_{h_i} определения превышения h равна разности погрешностей отсчетов по рейкам

$$\eta_{h_i} = \eta_{b_i} - \eta_{a_i} = \frac{i}{\rho} (S_b - S_a).$$

Обозначив неравенство плеч $S_b - S_a$ через Δ_S , получим

$$\eta_{h_i} = \frac{i}{\rho} \Delta_S. \quad (270)$$

Если нивелирование производят точно из середины ($\Delta_S \sim 0$), то погрешность за непараллельность осей компенсируется.

Иногда нивелирование выполняют в стесненных условиях, где неравенство плеч может достигать значительной величины. Чтобы ослабить влияние этой погрешности, определяют угол i и измеряют расстояния S_a и S_b , а в результаты нивелирования вводят поправки. Если дисперсии величин i и S обозначить через D_i и D_S , то дисперсию D_{h_i} определения

превышений можно вычислить по формуле погрешности функции общего вида

$$D_{h_i} = \left(\frac{\Delta S}{\rho}\right)^2 D_i + \left(\frac{i}{\rho}\right)^2 \frac{D_s}{2}. \quad (271)$$

Если угол между осями и расстояния до реек не измеряют, то η_{h_i} зависит от тех значений, которые могут принимать i и ΔS в процессе измерений.

При юстировке главного условия нивелира обычно не стремятся добиться строгой параллельности осей, а ограничиваются введением угла i в определенный интервал $[-\alpha_i, \alpha_i]$. Так, для нивелирования I класса значение i не должно превышать $20''$. Внутри интервала $[-\alpha_i, \alpha_i]$ угол i с равной вероятностью может принять любое из значений. В этом случае числовые характеристики угла между осями будут равны $m_i = 0$ и $\sigma_i = \alpha_i / \sqrt{3}$. В равной мере это относится и к нивелирам с самоустанавливающейся линией визирования.

Неравенство плеч ΔS зависит от способа установки нивелира в середину. При создании государственных сетей для этих целей используют тросик или нитяный дальномер. Величина ΔS при этом имеет небольшое значение и учитывается (компенсируется) при проложении хода.

При построении проектных отметок с технической точностью нивелир устанавливают в середину на глаз. Стандарты $\sigma_{\Delta S}$ неравенства плеч, определенные экспериментальным путем для расстояний от нивелира до рейки в 25, 50 и 75 м, оказались соответственно равными 4, 6 и 8 м. Так как наблюдатель стремится установить нивелир возможно точнее в середину, то в расчетах имеет смысл полагать, что величина ΔS является центрированной с нормальным распределением вероятностей.

Случайные величины i и ΔS не имеют общих точек соприкосновения и их можно рассматривать как независимые. Для определения числовых характеристик погрешности η_{h_i} использует теорему произведения случайных величин, тогда

$$M_{h_i} = \frac{1}{\rho} m_i m_{\Delta S} = 0; \quad D_{h_i} = \frac{1}{\rho^2} D_i D_{\Delta S} = \frac{\alpha_i^2}{3\rho^2} D_{\Delta S}. \quad (272)$$

3. *Погрешность отсчета по рейке.* Эта погрешность обусловлена влиянием погрешностей визирования и оценки долей интервала между нитью сетки и штрихами рейки. Погрешность визирования подробно рассмотрена в § 14.

Погрешность оценки долей интервала при отсчете зависит от способа отсчитывания и цены деления рейки. При нивелировании с технической точностью оценку долей интервала производят на глаз, при высокоточном нивелировании — при помощи оптического микрометра с плоскопараллельной пластинкой способом совмещения нити со штрихом.

Совместное влияние погрешностей визирования и отсчета по рейке оценивают стандартом σ_o . При отсчетах по рейке на глаз значение стандарта можно вычислить по формуле, полученной экспериментальным путем [4].

$$\sigma_o = \left(0,20 \frac{S}{v} + 0,03 t\right), \quad (273)$$

где σ_0 — стандарт, мм; S — расстояние, м; t — цена деления шкалы рейки.
 Для случая нивелирования способом совмещения нити со штрихом формула стандарта отсчета по рейке имеет вид

$$\sigma_0 = (0,092 + 0,0218 \frac{t}{v}) S. \quad (274)$$

При нивелировании в закрытых помещениях стандарт погрешности взгляда в [5] рекомендуется оценивать по формуле

$$\sigma_0 = \left(0,425 \frac{S}{v} + 0,023 t \right). \quad (275)$$

4. Погрешность делений реек. Качество нанесения штрихов и откраска шашек реек влияют на точность отсчета. Дополнительные погрешности в деления вносит деформация рейки в процессе эксплуатации.

При нивелировании отсчеты производят по двум сторонам или шкалам передней и задней реек. В этих условиях погрешность отсчета, обусловленную погрешностями делений, можно считать случайной величиной и характеризовать стандартом σ_d .

Для деревянных реек с сантиметровыми шашками стандарт оценивается величиной $\sigma_d = 0,4$ мм, для складных реек $\sigma_d = 0,9$ мм. Для реек с инварной полосой стандарт делений принимают равным $\sigma_d = 0,1$ мм.

Так как влияние погрешностей делений аналогично влиянию погрешностей отсчета по рейке, то значение σ_d в равной мере можно отнести и к одному отсчету, и к определению превышения на станции.

5. Погрешность за наклон реек. При отклонении оси рейки от отвесного положения на угол v_a погрешность η_{av} отсчета a по рейке, согласно [9], равна

$$\eta_{av} = \frac{a v_a^2}{2 \rho^2}.$$

Рассматривая превышение как разность отсчетов $h = b - a$, получим

$$\eta_{hv} = \eta_{bv} - \eta_{av} = \frac{1}{2 \rho} (b v_b^2 - a v_a^2).$$

Для расчетов точности возьмем наиболее неблагоприятный случай, когда один из отсчетов равен или близок к нулю, а с другой — превышению h , тогда

$$\eta_{hv} = \frac{h v^2}{2 \rho}. \quad (276)$$

Наклон рейки зависит от способа ее установки в отвесное положение. Если применяют круглый уровень с ценой деления τ' , то стандарт угла наклона рейки можно определить по формуле

$$\sigma'_v = \frac{\tau'}{2}.$$

Для реек обычно применяют круглые уровни с ценой деления от 5 до 20'.

При установке рейки на глаз угол наклона в зависимости от условий измерения может колебаться в значительных пределах. При нивелировании по линии наибольшего уклона местности обнаружены систематические отклонения рейки в сторону нормали к поверхности [9]. Для осредненных условий величину v в расчетах точности можно считать центрированной случайной величиной со стандартом $\sigma_v = 1,2^\circ$.

Если в конкретных условиях превышение h можно рассматривать как постоянную величину, то числовые характеристики погрешности определения превышений за наклон реек можно вычислить по формулам (144) и (145). При этом постоянная часть погрешности η_{h_v} будет по знаку совпадать с превышением. Обозначив эту часть через λ_v , а дисперсию случайной части через D_v , запишем

$$\theta_v = \lambda_v = \frac{h \sigma_v^2}{2 \rho^2}; D_v = \frac{h^2 \sigma_v^4}{2 \rho^4}. \quad (277)$$

В расчетах точности обычно принимают среднее значение h для данных условий.

6. *Погрешности, обусловленные влиянием внешних условий.* Наибольшее влияние на точность построений проектных отметок оказывают тепловые воздействия на нивелир, а также вертикальные перемещения штатива.

Тепловые воздействия на нивелир приводят к изменению угла i в среднем на $0,5'' t^\circ$, где t° — изменение температуры прибора в градусах [26]. Наибольшее влияние этот источник погрешностей оказывает при выполнении работ в горячих цехах. В этом случае для оценки влияния теплового воздействия прибегают к экспериментальным исследованиям.

Характер и величина вертикальных перемещений штатива зависят от состояния и физико-механических свойств грунта или покрытия. Симметричная программа наблюдений на станции и применение специальных мер при установке штатива заметно ослабляют влияние этого источника погрешностей. По исследованиям ЦНИИГАиК при высокоточном нивелировании на плотных грунтах погрешность за изменение высоты штатива и костылей достигает 0,02 мм.

7. *Погрешность фиксации проектной отметки.* Фиксацию точек по высоте производят кольшками, забиваемыми в грунт. Стандарт фиксации для этого случая принимают равным $\sigma_\phi = 2-3$ мм [5].

При построении отметок с повышенной точностью на конструкциях сооружений фиксацию осуществляют одним из способов, перечисленных в табл. 3.

Методику расчетов рассмотрим на примерах.

Пример 20. Определить погрешность построения проектной отметки при помощи нивелира НВ-1 ($\tau = 20''$, $v = 31''$) при длине плеч $S = 75$ м.

Решение. Определим значения элементарных погрешностей. Нивелир НВ-1 имеет контактный уровень. Стандарт погрешности установки уровня в нуль-пункт вычислим по формуле (269)

$$\sigma_{\text{совм}} = \frac{0,045 \cdot 20}{206265} 75 \cdot 10^3 = 0,33 \text{ мм.}$$

При выполнении проверок нивелира юстировку главного условия не производят, если линейная величина непараллельности x не превышает 4 мм. При расстоянии $S = 50$ м предельное значение угла i равно

$$\alpha_1 = \frac{x\rho}{S} = \frac{4 \cdot 206\,265}{50 \cdot 10^3} = 16,5''.$$

Если установку нивелира выполнять на глаз, то стандарт неравенства плеч на 75 мм можно принять равным $\sigma_{\Delta_3} = 8$ м.

Дисперсию погрешности за непараллельность визирной оси и оси уровня вычислим по формуле (272)

$$D_{h_1} = \frac{16,5^2}{3 \cdot 206\,265} 8^2 \cdot 10^6 = 0,129 \text{ мм}^2.$$

Для определения стандарта отсчета по рейке воспользуемся формулой (273). Так как цена деления рейки $l = 10$ мм, то

$$\sigma_0 = \left(0,20 \frac{75}{31} + 0,03 \cdot 10 \right) = 0,78 \text{ мм}.$$

При построении проектных отметок с технической точностью обычно используют складные рейки. Стандарт погрешности делений таких реек принимают равным $\sigma_d = 0,5$ мм.

Так как рейки устанавливают в вертикальное положение на глаз, то стандарт угла наклона рейки равен $\sigma_v = 1,2^\circ$. Для расчетов точности возьмем наибольшее значение превышения, т.е. $h = 2,5$ м. Систематическую и случайные части погрешности наклон рейки вычислим по формулам (277)

$$\lambda_v = \frac{2 \cdot 500 \cdot 1,2^2}{2 \cdot 57,3^2} = 0,55 \text{ мм}; \quad D_v = \frac{2 \cdot 500^2 \cdot 1,2^4}{2 \cdot 57,3^4} = 0,60 \text{ мм}^2.$$

При закреплении проектных отметок прочерчиванием карандашом по гладкой поверхности бетона с последующей окраской стандарт фиксации будет равен $\sigma_\phi = 1,0$ мм (см табл. 3).

Вычислим случайную часть погрешности построения проектной отметки. Используя полученные значения, запишем

$$D_\varepsilon = \sigma_{\text{совм}}^2 + D_{h_1} + \sigma_0^2 + \sigma_d^2 + D_v + \sigma_\phi^2 = 0,33^2 + 0,129 + 0,78^2 + 0,5^2 + 0,60 + 1,0^2 = 2,46 \text{ мм}^2;$$

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{2,46} = 1,57 \text{ мм}.$$

Допускаемое отклонение случайной части будет равно

$$\delta_{\sigma_\varepsilon} = 3 \sigma_\varepsilon = 3 \cdot 1,57 \approx 4,7 \text{ мм}.$$

Так как систематическая часть погрешности оценивается величиной $\lambda_v = 0,6$ мм, то общее отклонение может достигать значения

$$\delta_\varepsilon = \delta_{\sigma_\varepsilon} + \lambda_v = 4,7 + 0,6 = 5,3 \text{ мм}.$$

§ 16. ПОСТРОЕНИЕ СТВОРА

При построении створа в натуре закреплены точки A и B . Необходимо найти положение и закрепить в натуре точки C_1, C_2, \dots, C_n , расположенные в створе линии AB (рис. 22).

Существуют несколько способов построения створа. В настоящем параграфе рассмотрим лишь два из них, применяемые как отдельные элементы разбивочных и других видов работ.

В первом способе теодолит устанавливают над точкой A и визирную ось трубы наводят на точку B . Не изменяя положения лимба и алиады

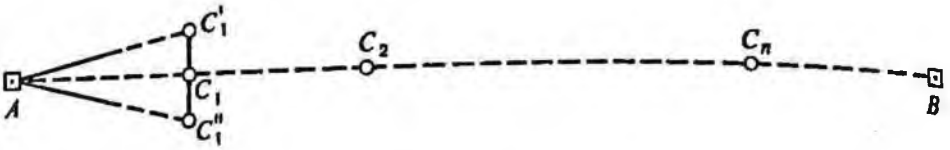


Рис. 22. Построение створа

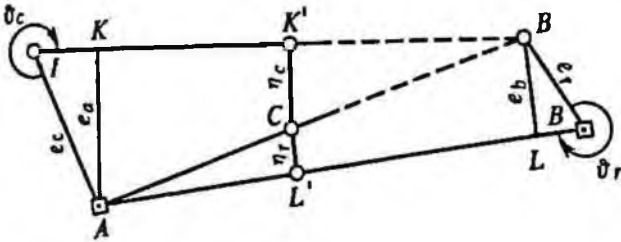


Рис. 23. Погрешности за центрировку и редукцию при построении створа

по вертикальной нити сетки отмечают на местности положение точки C'_1 . Аналогичные действия повторяют при другом положении вертикального круга и получают положение точки C''_1 . Отрезок $C'_1 C''_1$ делят пополам и закрепляют на местности точку створа C_1 . Далее при двух положениях вертикального круга последовательно получают точки C_2, C_3, \dots, C_n . Теодолит при этом остается в точке A .

Во втором способе, называемом способом последовательных створов, теодолит каждый раз переносится во вновь полученную точку. Так, после построения точки C_1 теодолит устанавливается над этой точкой, а положение следующей точки C_2 определяется по створу линии $C_1 B$.

Построение створа может выполняться на глаз, без применения какого-либо инструмента. Примером такого построения может служить уложение мерного прибора в створ измеряемой линии.

Рассмотрим источники погрешностей при первом способе построения створа.

1. *Погрешности за центрировку прибора и редукцию визирной цели.* Пусть теодолит установлен не в точке A , а в точке I (рис. 23). Тогда отрезок $K'C$ будет являться погрешностью η_c за центрирование. Так как $\triangle AKB$ и $\triangle CK'B$ подобны, то

$$K'C = \eta_c = \frac{CB}{AB}$$

Обозначим $AB = S$ и $AC = S_1$. Тогда

$$\frac{CB}{AB} = \frac{S - S_1}{S}$$

Выразим e_a через линейный e_c и угловой ϑ_c элементы центрирования. Из $\triangle AIK$ имеем

$$e_a = e_c \sin(360^\circ - \vartheta_c) = -e_c \sin \vartheta_c$$

Подставляя полученные значения, будем иметь

$$\eta_c = -\frac{S - S_1}{S} e_c \sin \vartheta_c$$

Случайные величины e_c и ϑ_c рассмотрим в § 14. Их числовые характеристики равны

$$m_{e_c} = 0; \quad M(\sin \vartheta_c) = 0; \quad D(e) = D_{e_c}; \quad D(\sin \vartheta_c) = 0,5.$$

Используя теоремы о числовых характеристиках произведения независимых центрированных величин, получим

$$M(\eta_c) = m_c = -\frac{S - S_1}{S} m_{e_c} m_{\sin \vartheta_c} = 0; \quad (278)$$

$$D(\eta_c) = D_c = \left(\frac{S - S_1}{S}\right)^2 D_{e_c} D(\sin \vartheta_c) = \left(\frac{S - S_1}{S}\right)^2 \frac{D_{e_c}}{2}.$$

Для конкретных условий значение линейного элемента центрирования можно выбрать из табл. 4.

Погрешность η_r за редукцию на рис. 23 отобразится отрезком CL' . Из подобия $\triangle ABL$ и $\triangle ACL'$ имеем

$$\eta_r = \frac{S_1}{S} e_b.$$

Но $e_b = e_r \sin(360^\circ - \vartheta_r) = -e_r \sin \vartheta_r$, тогда

$$\eta_r = -\frac{S_1}{S} e_r \sin \vartheta_r. \quad (279)$$

Аналогичным образом получим числовые характеристики погрешности за редукцию

$$M(\eta_r) = m_r = 0; \quad D(\eta_r) = D_r = \left(\frac{S_1}{S}\right)^2 \frac{D_{e_r}}{2}. \quad (280)$$

Рассмотрим совместное влияние погрешностей за центрировку и редукцию. Величины η_c и ϑ_r можно считать независимыми. Действительно, пусть элементы e_c и v_c приняли определенное значение. Появление этого события не повлияет на вероятность появления значений e_r и ϑ_r , что свидетельствует о независимости этих величин. В этом случае математическое ожидание и дисперсия совместной погрешности η_{cr} за центрировку и редукцию $\eta_{cr} = \eta_c + \eta_r$ определяется по формулам

$$M(\eta_{cr}) = m_{cr} = m_c + m_r; \quad D(\eta_{cr}) = D_{cr} = D_c + D_r.$$

При построении створа центрирование теодолита и установку визирных целей производят одним способом, т. е. $D_{e_c} = D_{e_r}$. Используя это равенство и значения числовых характеристик из формул (278) и (280), получим

$$m_{cr} = 0; \quad D_{cr} = \frac{[(S - S_1)^2 + S_1^2]}{2S^2} D_{e_c}. \quad (281)$$

Линию AB при построении створа обычно разбивают на n равных отрезков. Определим числовые характеристики погрешности i точки. Для этой точки будем иметь

$$S_1 = \frac{S}{n} i = S \frac{i}{n} \quad \text{и} \quad S - S_1 = S - S \frac{i}{n} = S \left(1 - \frac{i}{n}\right).$$

Тогда

$$\frac{[(S - S_1)^2 - S_1^2]}{2S} = \frac{S^2 \left(1 - \frac{i}{n}\right)^2 + S^2 \left(\frac{i}{n}\right)}{2S} = \frac{1}{2} - \frac{i}{n} + \frac{i^2}{n^2}.$$

Подставляя это значение во второе равенство (281), окончательно получим

$$D_{cr} = \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{n} + \frac{i^2}{n^2}\right) D_{\epsilon}. \quad (282)$$

2. *Погрешность визирования.* Эта погрешность характеризуется стандартом σ''_n одного наведения визирной оси на точку.

При построении створа наведения осуществляют на конечную и определяемую точки; это составляет полуприем. Стандарт погрешности визирования будет равен $\sigma''_n \sqrt{2}$. Таких полуприемов выполняют два. Тогда стандарт построения створа полным приемом определится из выражения

$$\sigma''_{np} = \frac{\sigma''_n \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sigma''_n = \frac{20''}{v}.$$

Угол σ''_n мал. Заменяя синус значением угла в радианной мере, получим

$$\sigma_n = \frac{\sigma''_n}{\rho''} S = \frac{20'' S}{\rho''}, \quad (283)$$

где σ_n — стандарт погрешности визирования в линейной мере.

3. *Погрешность за наклон основной оси теодолита.* Эту погрешность можно вычислить по формуле

$$\eta''_{i_0} = i''_0 (\sin u_2 \operatorname{tg} v_2 - \sin u_1 \operatorname{tg} v_1),$$

где i_0 — наклон основной оси прибора.

Так как при построении створа $u_1 = u_2 = u$,

$$\eta''_{i_0} = i''_0 (\operatorname{tg} v_2 - \operatorname{tg} v_1) \sin u.$$

Так как угол η''_{i_0} мал, заменив синус значением угла в радианах, получим

$$\eta_{i_0} = \frac{i''_0}{\rho''} (\operatorname{tg} v_2 - \operatorname{tg} v_1) \sin u S_1,$$

где η_{i_0} — погрешность за наклон основной оси теодолита в линейной мере.

Как и при построении проектного угла, угол наклона основной оси прибора является случайной величиной с нормальным распределением вероятностей и числовыми характеристиками $m_i = 0$, $\sigma''_i = \tau/3$.

Угол u между направлением створа и отвесной плоскостью, проходящей через ось прибора, можно рассматривать как случайную величину с равномерной плотностью распределения в интервале от 0 до 2π . Числовые характеристики величины $X = \sin u$ равны $m_{\sin u} = 0$ и $D_{\sin u} = 0,5$.

Если для конкретного случая известны значения v_1 и v_2 , то числовые характеристики η_{i_0} определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} M(\eta_{i_0}) = m_{i_0} &= (\operatorname{tg} v_2 - \operatorname{tg} v_1) \frac{S_1}{\rho''} i_0'' \sin u = 0; \\ D(\eta_{i_0}) = D_{i_0} &= (\operatorname{tg} v_2 - \operatorname{tg} v_1)^2 \frac{S_1^2 \tau''^2}{\rho^2} \frac{1}{9} \frac{1}{2} = \frac{(\operatorname{tg} v_2 - \operatorname{tg} v_1)^2 S_1^2 \tau''^2}{18 \rho''^2}. \end{aligned} \right\} (284)$$

Углы наклона v визирной оси при выполнении отдельных видов работ могут с равной вероятностью принимать значения из интервала от $-\alpha_v$ до $+\alpha_v$. В этом случае в расчетах точности имеет смысл рассмотреть наиболее неблагоприятный случай, когда $v_2 = -v_1 = v$. Тогда

$$\eta_{i_0} = 2 \operatorname{tg} v \sin u \frac{i_0''}{\rho''} S_1.$$

Как правило, углы v_1 и v_2 невелики и $\operatorname{tg} v \approx v/\rho$, тогда

$$\eta_{i_0} = \frac{2v i_0''}{\rho^2} S_1 \sin u.$$

Используя теоремы о числовых характеристиках произведения независимых центрированных величин, получим

$$m_{i_0} = 0; D_{i_0} = 4 \frac{\alpha_v^2}{3\rho^2} \frac{\tau^2}{9\rho^2} S_1 \frac{1}{2} = \frac{2\tau^2 \alpha_v^2}{27\rho^4} S_1^2. \quad (285)$$

4. *Инструментальные (приборные) погрешности.* Погрешности, обусловленные несоблюдением требований ко взаимному положению осей теодолита, практически не оказывают влияния на построение створа при двух положениях вертикального круга теодолита.

Если фокусирующая линза имеет люфт, то такой теодолит не рекомендуется использовать для построения створа [8].

5. *Погрешности за фиксацию точек створа.* Определяют ее так же, как и погрешности при расчете построения проектных отрезков. Значение стандарта погрешностей фиксации можно выбрать из табл. 3.

При расчетах построения большого числа створов все элементарные погрешности можно рассматривать как случайные величины. Тогда

$$\left. \begin{aligned} M(\epsilon_{ств}) = m_{ств} &= 0; \\ D(\epsilon_{ств}) = D_{ств} &= D_{cr} + D_n + D_{i_0} + D_{\phi}. \end{aligned} \right\} (286)$$

Если производят расчет одного створа, то погрешности за наклон основной оси прибора, центрировку и редукцию являются для данного створа систематическими. В этом случае допускаемые отклонения систематической и случайной частей погрешности построения створа надо вычислять раздельно по формулам (280) и (210).

Рассмотрим погрешности способа последовательного построения створа.

При построении первой точки створа погрешность η_1 приводит к тому, что вместо точки C_1 мы получим точку C'_1 и последующее построение створа будем осуществлять не по линии $C_1 B$, а по линии $C'_1 B$

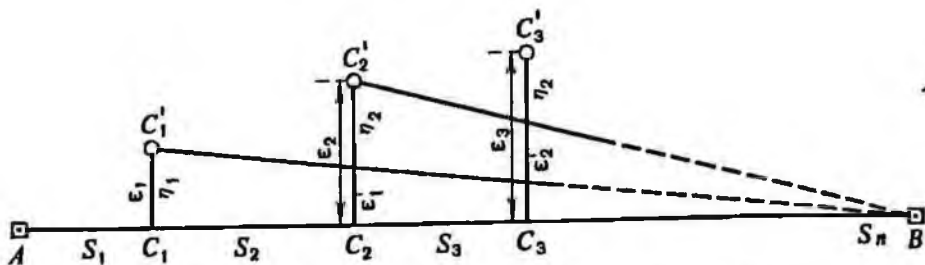


Рис. 24. Погрешности при последовательном построении створа

(рис. 24). Поэтому в каждой точке C_i кроме погрешности η_i построения створа на отрезке от точки $(i-1)$ до точки i будет добавляться погрешность ϵ'_{i-1} . При равных длинах отрезков $S_1 = S_2 = \dots = S_n = S$ зависимость между величинами ϵ_{i-1} и ϵ'_{i-1} можно определить из подобных треугольников

$$\frac{\epsilon'_{i-1}}{\epsilon_{i-1}} = \frac{(n-i)S}{(n-i+1)S} = \frac{n-i}{n-i+1},$$

откуда

$$\epsilon'_{i-1} = \frac{n-i}{n-i+1} \epsilon_{i-1}.$$

Отметим, что коэффициент перед ϵ_{i-1} всегда меньше единицы. Проследим характер накопления погрешностей.

$$\epsilon_1 = \eta_1;$$

$$\epsilon_2 = \eta_2 + \epsilon'_1 = \eta_2 + \frac{n-2}{n-1} \eta_1;$$

$$\epsilon_3 = \eta_3 + \frac{n-3}{n-2} \epsilon'_2 = \eta_3 + \frac{n-3}{n-2} \eta_2 + \frac{n-3}{n-1} \eta_1;$$

$$\dots$$

$$\epsilon_i = \eta_i + \frac{n-i}{n-i+1} \eta_{i-1} + \frac{n-i}{n-i+2} \eta_{i-2} + \dots + \frac{n-i}{n-2} \eta_2 + \frac{n-i}{n-1} \eta_1.$$

Наиболее неблагоприятным будет случай, когда все отклонения располагаются по одну сторону от створа. При этом наибольшее отклонение ϵ_{\max} при равных значениях η_i будет наблюдаться в точке $i = 2n/3$. Тогда

$$\epsilon_{\max} = \eta_i + \frac{n}{n+3} \eta_{i-1} + \frac{n}{n+6} \eta_{i-2} + \dots + \frac{n}{3n-6} \eta_2 + \frac{n}{3n-3} \eta_1.$$

Погрешности η можно рассматривать как случайные величины с приблизительно равными дисперсиями $D_{\eta_1} = D_{\eta_2} = \dots = D_{\eta_i} = D_{\eta}$. Расхождения в значениях дисперсий при равенстве отрезков S обусловлены в основном влиянием погрешности центрирования и обычно не превышают 10–12% от среднего значения дисперсии $D_{\eta} = D_{\eta_{n/3}}$ в точке $i = n/3$.

Используя формулу дисперсии функции общего вида, запишем

$$D_{\epsilon_{\max}} = \left[1 + \left(\frac{n}{n+3} \right)^2 + \left(\frac{n}{n+6} \right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{3n-6} \right)^2 + \left(\frac{n}{3n-3} \right)^2 \right] D_{\eta} \quad (287)$$

Специальные высокоточные створные измерения детально рассмотрены в труде [30].

Методику расчетов, изложенную в настоящем параграфе, проиллюстрируем на примерах.

Пример 21. Рассчитать погрешность построения створа первым способом при выносе в натуру линии застройки, если длина створа не превышает 200 м, построение осуществляют теодолитом Т-30 ($\tau = 45$, $\nu = 18^\circ$), центрирование производят нитяным отвесом, а точки закрепляют металлическими штырями через 50 м.

Решение. Наибольшая погрешность будет в точке $i = 3$. Вычислим числовые характеристики элементарных погрешностей для этой точки.

Будем полагать, что стандарты центрировки и редукции равны, т.е. $\sigma_{\epsilon} = \sigma_{\tau} = 3$ мм (см. табл. 3). Погрешность построения створа, обусловленную влиянием этих факторов, вычислим по формуле (282)

$$D_{\sigma} = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} - \frac{3^2}{4^2} \right) 3^2 = 2,81 \text{ мм}^2.$$

При расстоянии до третьей точки $S = 50 \cdot 3 = 150$ м стандарт погрешности визирования будет равен

$$\sigma_{\nu} = \frac{20 \cdot 150 \cdot 10}{206265 \cdot 18} = 0,81 \text{ мм}.$$

Предельное значение угла наклона визирной оси прием равным $\alpha_{\nu} = 10^\circ$ (см. пример 18). Тогда, используя формулу (285), получим

$$D_{i_0} = \frac{2 \cdot 45^2 \cdot 10^2}{27 \cdot 206265^2 \cdot 57,3^2} 155^2 \cdot 10^6 \approx 2,42 \text{ мм}^2.$$

Из табл. 3 выберем значение стандарта погрешности фиксации точек металлическими штырями $\sigma_{\phi} = 1,5$ мм.

Нас интересуют в данном случае осредненные значения погрешностей при достаточно большом числе створов. Для этого случая все элементарные погрешности можно рассматривать как случайные. Вычислим стандарт погрешности построения створа в наиболее слабом месте

$$D_{\epsilon} = D_{\sigma} + \sigma_{\nu}^2 + \sigma_{\phi}^2 + D_{i_0} + \sigma_{\phi}^2 = 2,81 + 0,81^2 + 2,42 + 1,5^2 = 10,14 \text{ м}.$$

$$\sigma_{\epsilon} = \sqrt{10,14} = 3,2 \text{ мм}.$$

Допускаемое отклонение будет равно

$$\delta\sigma_{\epsilon} = 3\sigma_{\epsilon} = 3 \cdot 3,2 \approx 1 \text{ см}.$$

Пример 22. При контроле построения в натуре линии застройки теодолит Т-30 последовательно устанавливают в створе стороны хода через каждые 40 м и полярным способом определяют координаты точек линии застройки. Рассчитать элементарные погрешности отклонения точек створа длиной 240 м, если допускаемое отклонение $\delta_{\epsilon} = 5$ мм.

Решение. Вычислим предварительные значения дисперсий элементарных погрешностей построения створа. В наиболее неблагоприятном случае максимальная погрешность будет наблюдаться в точке с номером $i = 2n/3$. Так как $n = 240/40 = 6$, то $i = 4$. Для вычисления средней дисперсии D_{η} возьмем значение $i/2 = 4/2 = 2$. Тогда

$$D'_{\sigma} = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{2^2}{4^2} \right) 3^2 = 2,25 \text{ мм}^2;$$

$$\sigma_a = \frac{20 \cdot 40 \cdot 10^{-3}}{206265 \cdot 18} = 0,22 \text{ мм};$$

$$D'_a = 0,05 \text{ мм}^2;$$

$$D'_{i_0} = \frac{2 \cdot 45^2 \cdot 10^2}{27 \cdot 206265^2 \cdot 57,3^2} = 40^2 \cdot 10^6 = 0,17 \text{ мм}^2;$$

$$\sigma'_\phi = 1,5 \text{ мм}; \quad D'_\phi = 2,25 \text{ мм}^2.$$

Вычислим предварительное значение дисперсии построения одного отрезка створа в точке $i/2 = 2$

$$D'_{\eta_2} = D'_{cr} + D'_a + D'_{i_0} + D'_\phi = 2,25 + 0,05 + 0,17 + 2,25 = 4,72 \text{ мм}^2.$$

Дисперсию общей погрешности построения створа вычислим по формуле (287). В этом случае для $i = 4$ в квадратных скобках будет четыре члена, т.е.

$$D'_{\sigma_{\text{max}}} = \left[1 + \frac{4^2}{7^2} + \frac{4^2}{10^2} + \frac{4^2}{13^2} \right] D'_{\eta_2} = 1,58 \cdot 4,72 = 7,46 \text{ мм}^2.$$

Тогда

$$\sigma'_{\sigma_{\text{max}}} = \sqrt{7,46} = 2,73 \text{ мм} \text{ и } \delta'_{\sigma_{\text{max}}} = 3 \cdot 2,73 = 8,2 \text{ мм}.$$

Вычислим коэффициент пропорциональности

$$k_0 = \frac{5,0^2}{8,2^2} = 0,37$$

и найдем стандарты элементарных погрешностей

$$D_{cr} = 0,37 \cdot 2,25 = 0,83 \text{ мм}^2; \quad \sigma_{cr} = 0,91 \text{ мм};$$

$$D_a = 0,37 \cdot 0,05 = 0,02 \text{ мм}^2; \quad \sigma_a = 0,13 \text{ мм};$$

$$D_{i_0} = 0,37 \cdot 0,17 = 0,06 \text{ мм}^2; \quad \sigma_{i_0} = 0,25 \text{ мм};$$

$$D_\phi = 0,37 \cdot 2,25 = 0,83 \text{ мм}^2; \quad \sigma_\phi = 0,91 \text{ мм}.$$

Чтобы выдержать заданные допуски, необходимо фиксацию точек производить шпилькой ($\sigma_\phi = 0,7 \text{ мм}$), а центрирование выполнять оптическим центриром ($\sigma_a = 0,7 \text{ мм}$). Уменьшение величины этих погрешностей по сравнению с расчетными компенсируют влияние погрешностей за наклон основной оси прибора и за визирование. В этом нетрудно убедиться, если выполнить проверку решения с принятыми значениями $\sigma_a = 0,7 \text{ мм}$ и $\sigma_\phi = 0,7 \text{ мм}$.

$$D_{cr} = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{2^2}{4^2} \right) 0,7^2 = 0,12 \text{ мм}^2; \quad D_\phi = 0,7^2 = 0,49 \text{ мм}^2.$$

Приняв предварительные значения $D'_a = 0,05 \text{ мм}^2$ и $D'_{i_0} = 0,17 \text{ мм}^2$, получим

$$D_{\eta_2} = 0,12 + 0,05 + 0,17 + 0,49 = 0,83 \text{ мм}^2;$$

$$D_{\sigma_{\text{max}}} = \left[1 + \frac{4^2}{7^2} + \frac{4^2}{10^2} + \frac{4^2}{13^2} \right] 0,83 = 1,31 \text{ мм}^2,$$

откуда

$$\sigma_{\sigma_{\text{max}}} = 1,14 \text{ мм} \text{ и } \sigma_{\sigma_{\text{max}}} - 3 \cdot 1,14 = 3,4 \text{ мм},$$

что удовлетворяет условию $\delta_{\sigma_{\text{max}}} \leq 5 \text{ мм}$.

§ 17. ПОСТРОЕНИЕ ОТВЕСНЫХ ЛИНИЙ И ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРИ ПРОЕЦИРОВАНИИ ТОЧЕК И ОСЕЙ

При решении задач инженерной геодезии часто возникает необходимость в проецировании точек или осей с плоскости R на плоскость P (рис. 25). Плоскость R будем называть исходной плоскостью, а P — проектной.

Для типовых зданий условия обеспечения точности проецирования точек и осей на монтажные горизонты приведены в прил. 5 нормативного документа СНиП 3.01.03–84 [23].

Для проецирования точки A_r на проектную плоскость необходимо построить отвесную линию (вертикаль) MN , проходящую через заданную точку. След вертикали на проектной плоскости P дает положение определяемой точки A_p . Вертикаль MN может быть реализована в натуре нитью отвеса или визирной осью оптического прибора. Применяют для этих целей и луч лазера.

При проецировании оси $A_r B_r$ с плоскости R на плоскость P необходимо построить вертикальную плоскость Q , проходящую через эту ось. След плоскости Q на проектной плоскости P и дает искомую проекцию $A_p B_p$. Плоскость Q реализуется в натуре коллимационной плоскостью теодолита, в том числе и лазерного. Для построения проекции точки часто используют две пересекающиеся плоскости, а для построения оси — проекции двух точек.

Построение вертикали нитяным отвесом при спокойном состоянии атмосферы и конструкций осуществляется с погрешностью порядка 0,001 от высоты проецирования. При ветре эта погрешность резко возрастает, даже если проецирование осуществляется в местах, защищенных от прямого воздействия ветра. Это существенно ограничивает применение в производстве нитяных отвесов.

Наиболее широкое применение находят *приборы оптического вертикального проецирования*. Рассмотрим элементарные погрешности при построении отвесных линий такими приборами.

Таблица 5

Название прибора	Значения σ_{ϵ} , мм
Оптический центрир	0,10
Оптический центрир прибора	0,15
Оптический центрир высокоточного теодолита	0,20

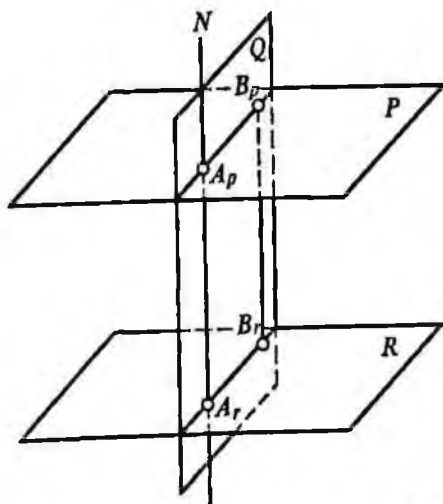


Рис. 25. Проецирование осей и точек

1. *Погрешность центрирования прибора.* Эта погрешность целиком входит в погрешность построения отвесной линии. Как установлено ранее, эта погрешность имеет распределение Релея и характеризуется стандартом σ_{ϵ} .

При проецировании точек в процессе возведения здания или при наблюдениях за смещениями центрирование прибора производят особо тщательно, а штатив устанавливают на ровном и твердом покрытии. Высота прибора обычно невелика, а при использовании специальных столиков не превышает нескольких дециметров, поэтому точность центрирования высокая. По исследованиям В. Ф. Лукьянова [13] и Г. Г. Прудникова [20] стандарт погрешности центрирования для различных приборов оценивается значениями, приведенными в табл. 5.

2. *Погрешность визирования.* Она определяется так же, как у теодолита. Если высоту проецирования обозначить через H , то при хорошей видимости линейная величина этой погрешности характеризуется стандартом

$$\sigma_{\epsilon} = \frac{20H}{\rho\nu}. \quad (288)$$

При работах внутри зданий и сооружений проецирование осуществляют через специальные отверстия в перекрытиях, что существенно снижает качество изображения цели. Для таких условий в [27] предлагается формула, полученная экспериментальным путем,

$$\sigma_{\epsilon} = 0,13 \frac{H}{\nu}, \quad (289)$$

где H — высота проецирования в метрах.

Отметим, что коэффициент 0,13 в формуле (289) соответствует разрешающей способности глаза, равной 26,8".

3. *Погрешность отсчета по визирной цели* зависит в основном от цены деления t палетки. В обычных условиях стандарт одного отсчета оценивают величиной

$$\sigma_0 = 0,03t. \quad (290)$$

Для повышения точности отсчета при проецировании на разную высоту применяют набор палеток с разной ценой деления. Оптимальным считается вариант, когда $t = 0,1H$. Для этого случая стандарт отсчета определяется по формуле

$$\sigma_0 = 0,015t.$$

Палетку с одной ценой деления обычно используют на нескольких проектных горизонтах. Поэтому в расчетах точности с определенным запасом надежности стандарт погрешности отсчета будем принимать равным

$$\sigma_0 = 0,02t. \quad (291)$$

4. *Погрешность за установку визирной оси прибора в отвесное положение.* Для приборов с цилиндрическими уровнями эта погрешность зависит от цены деления уровня τ . Как и для теодолитов, стандарт σ'_1

установки оси в отвесное положение принимается равным $\tau''/3$. В линейном виде стандарт оценивается величиной

$$\sigma_i = \tau H/3\rho'' \quad (292)$$

В приборах с самоустанавливающейся линией визирования компенсатор при наклоне оси вращения прибора на угол v_1 отклоняет визирную ось на угол v_2 . В идеальных условиях должно соблюдаться условие $v_1 = -v_2$. Погрешность i реализации этого условия вызывает отклонение визирной оси прибора на тот же угол i . Величину угла обычно характеризуют или предельным значением α_i'' , или стандартом σ_i'' . Если полагать, что случайная величина i имеет равномерное распределение вероятностей в интервале от $-\alpha_i$ до $+\alpha_i$, то линейную величину стандарта погрешности за установку визирной оси в отвесное положение можно определить по формуле

$$\sigma_i = \frac{\alpha_i'' H}{\rho'' \sqrt{3}} \quad (293)$$

По лабораторным исследованиям нескольких образцов прибора PZL, выполненных Г. Г. Прудниковым [20], предельное значение угла оказалось равным $0,6''$, а при отвесном положении оси вращения прибора стандарт угла i характеризовался величиной $\sigma_i'' = 0,23''$. Для производственных условий в расчетах точности предельное значение угла обычно принимают равным $\alpha_i'' = 1,0''$.

5. *Погрешность за смещение точки компенсации при наклоне прибора.* Прибор с самоустанавливающейся линией визирования устанавливают в рабочее положение по круглому уровню. Обычно ось вращения прибора не стремятся приводить строго в отвесное положение, а ограничиваются введением ее в пределы работы компенсатора α_v . В этих условиях угол наклона v основной оси прибора можно считать случайной величиной с равномерным распределением вероятностей в интервале от $-\alpha_v$ до $+\alpha_v$.

В некоторых типах приборов наклон основной оси приводит к тому, что смещение точки C компенсации угла наклона вызывает смещение визирной оси на величину η_v (рис. 26). Если расстояние от точки O пересечения осей до точки C обозначить через d , то

$$\eta_v = d \operatorname{tg} v.$$

Угол наклона не превышает нескольких минут. В этом случае

$$\eta_v = \frac{v'}{\rho'} d.$$

Так как v имеет равномерное распределение вероятностей, то стандарт σ_v погрешности за смещение точки компенсации определим по формуле

$$\sigma_v = \frac{\alpha_v' d}{\rho' \sqrt{3}} \quad (294)$$

6. *Погрешности, обусловленные влиянием внешних условий.* На точность проектирования наибольшее влияние оказывают смещения и колебания конструкций под влиянием неравномерного солнечного на-

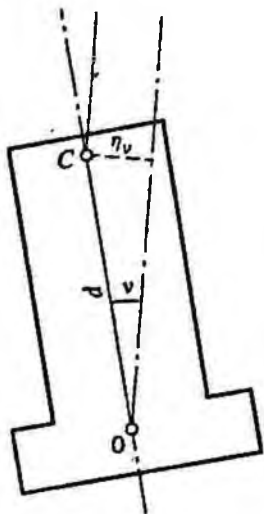


Рис. 26. Погрешность за смещение точки компасации

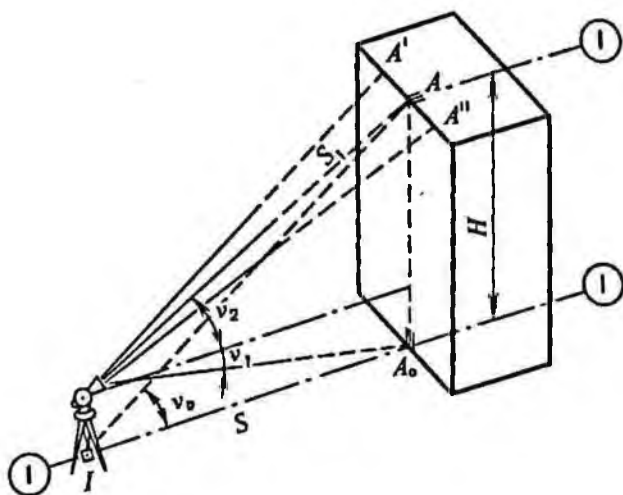


Рис. 27. Проецирование осей теодолитом

грева и ветровых нагрузок. При большой высоте проецирования это влияние в сооружениях башенного типа в десятки раз превосходит погрешности проецирования. В настоящее время на отдельных сооружениях проведены исследования и разработаны рекомендации по ослаблению влияния температуры и ветровых нагрузок. Вычисление поправок сопряжено с определением большого числа параметров, что существенно затрудняет практическое применение.

При проецировании на значительную высоту существенное влияние на точность может оказать рефракция, учесть влияние которой очень сложно. В настоящее время для ослабления влияния этого источника погрешностей время выполнения работ ограничивают периодами благоприятных погодных условий. В летний период проецирование выполняют с 3 до 6 ч утра, а в пасмурную погоду и в зимнее время — в любое время суток.

7. Погрешность фиксации точки. Погрешность на проектном горизонте зависит от способа фиксации. Обычно точка наносится по координатной сетке и отмечается карандашом на верхней поверхности прозрачной палетки. Стандарт погрешности принято считать равным $\sigma_\phi = 0,05l$, где l — цена деления палетки.

Погрешность фиксации можно уменьшить, если построение точки выполнять с помощью поперечного масштаба и измерителя.

Для некоторых случаев расчета целесообразно объединить влияние всех рассмотренных элементарных погрешностей. В § 5 и в [13] показано, что в уравнении регрессии вида $Y = bX + a$ свободный член a характеризует влияние случайных погрешностей, не зависящих от X , а коэффициент b — изменение случайной погрешности при изменении X на одну единицу.

Используя эти закономерности, вычислим коэффициент и свободный член уравнения регрессии для проецирования прибором PZL.

Не зависят от высоты проецирования H (в м) погрешности центрирования и смещение точки компенсации. Значение стандарта погрешности центрирования выберем из табл. 5.

$$\sigma_{e_c} = 0,15 \text{ мм.}$$

Для PZL предельный угол наклона равен $\alpha'_v = 10$, а $d = 150$ мм, тогда

$$\sigma_v = \frac{\alpha'_v d}{\rho' \sqrt{3}} = \frac{10' \cdot 150}{3438' \sqrt{3}} = 0,25 \text{ мм.}$$

Рассматривая эти величины как случайные, вычислим стандарт их суммы

$$\sigma_{e+v} = \sqrt{\sigma_{e_c}^2 + \sigma_v^2} = \sqrt{0,15^2 + 0,25^2} = 0,29 \text{ мм.}$$

Стандарт погрешности отсчета для PZL составляет 0,015 цены деления палетки. Но с изменением высоты проецирования изменяют и цену деления палетки $t = 0,1H'$, где H' — высота в метрах, тогда

$$\sigma_0 = 0,015t = 0,015 \cdot 0,1H' = 0,0015H'.$$

Стандарт погрешности за установку визирной оси в отвесное положение вычислим по формуле (293). Так как $\alpha''_i = 1''$, а $H = 1000H$, то

$$\sigma_i = \frac{\alpha''_i H}{\rho'' \sqrt{3}} = \frac{1'' \cdot 1000H}{206265'' \sqrt{3}} = 0,0028H'.$$

Прибор PZL имеет увеличение $v = 31\times$, тогда

$$\sigma_b = 0,13 \frac{H}{v} = \frac{0,13}{31} H' = 0,0042H'.$$

Вычислим стандарт совместного влияния этих трех погрешностей

$$\sigma_{0+i+b} = \sqrt{\sigma_0^2 + \sigma_i^2 + \sigma_b^2} = 0,0053H'.$$

Сравним эти значения с уравнением регрессии, полученным экспериментальным путем,

$$\sigma_{np} = 0,0058H' + 0,27.$$

Расхождение в значении коэффициента уравнения составляет

$$(0,0053 - 0,0058)/0,0058 = -0,086 = -8,6\%,$$

а в свободном члене

$$(0,29 - 0,27)/0,27 = 0,080 = 8,0\%,$$

что для расчетов точности следует признать вполне удовлетворительным результатом.

При проецировании осей коллимационной плоскостью теодолита прибор устанавливают над точкой I , наводят визирную ось на точку оси A_0 , поднимают трубу теодолита и отмечают положение точки A' на проектном горизонте (рис. 27). Аналогичные действия выполняют при другом положении вертикального круга теодолита и получают точку A'' . Отрезок $A'A''$ делят пополам и закрепляют положение точки A .

Рассмотрим основные источники погрешностей при проецировании коллимационной плоскостью теодолита.

1. *Инструментальные погрешности.* Погрешности компенсируются при наблюдении при двух положениях вертикального круга теодолита.

2. *Погрешность визирования.* Эта погрешность определяется так, как и при построении створа, а стандарт погрешности визирования можно оценить по формуле (283).

3. *Погрешность за наклон основной оси прибора.* При построении угла эту погрешность можно вычислить по формуле

$$\eta''_{i_0} = i''_0 (\sin u_2 \operatorname{tg} v_2 - \sin u_1 \operatorname{tg} v_1).$$

При проецировании $u_1 = u_2 = u$, тогда

$$\eta''_{i_0} = i''_0 \sin u (\operatorname{tg} v_2 - \operatorname{tg} v_1).$$

Теодолит обычно устанавливают приблизительно на одном уровне с точкой A_0 . В этом случае угол v_1 не превышает нескольких градусов. Заменяя с большой степенью точности разность тангенсов на тангенс угла v_0 , получим

$$\operatorname{tg} v_2 - \operatorname{tg} v_1 = \operatorname{tg} v_0 = \frac{H}{S},$$

тогда

$$\eta''_{i_0} = i''_0 \frac{H}{S} \sin u.$$

Для определения линейной величины смещения η_{i_0} , обозначим расстояние от теодолита до точки A через S_1 . Так как угол η''_{i_0} мал, то

$$\eta_{i_0} = \frac{\eta''_{i_0}}{\rho''} S_1 = \frac{i''_0 S_1 H}{\rho'' S} \sin u.$$

Расстояние S_1 можно с большой степенью точности заменить гипотенузой прямоугольного треугольника IAA_0 (см. рис. 27), тогда $S_1 = S/\cos v_0$. Подставляя это значение, получим

$$\eta_{i_0} = \frac{i''_0 H}{\rho'' \cos v_0} \sin u.$$

Случайные величины i_0 и u подробно рассмотрены в § 14. Установлено, что эти независимые величины имеют числовые характеристики

$$m_i = 0; \quad \sigma_i = \tau/3 m_{\sin u} = 0; \quad D_{\sin u} = 1/2.$$

Для определения числовых характеристик погрешности за наклон основной оси теодолита используем теоремы о математическом ожидании и дисперсии произведения независимых центрированных величин

$$M(\eta_{i_0}) = m_{i_0} = 0; \quad D_{i_0} = \frac{H^2 \tau^2 1}{\cos^2 v_0 9 \rho^2 2} = \frac{\tau^2 H^2}{18 \rho''^2 \cos^2 v_0}. \quad (295)$$

Если при выполнении геодезических работ проецирование повторяется многократно и необходимо получить осредненные показатели точности, то в формуле (295) следует использовать осредненное значение угла v_0 .

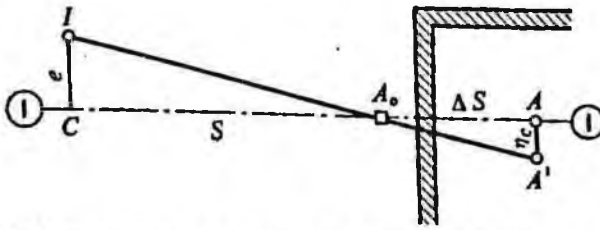


Рис. 28. Погрешность за смещение теодолита с оси сооружения

4. *Погрешность за смещение теодолита с оси сооружения.* В производственных условиях прибор иногда вынуждены устанавливать со значительным смещением e с оси $I-I$ (рис. 28). Если имеется уступ ΔS (расстояние в плане между точками A_0 и A), то величину погрешности η_c можно определить из подобия треугольников CIA_0 и $A'AA_0$

$$\eta_c = \frac{\Delta S}{S} e. \quad (296)$$

В зависимости от вида работ и условий измерений можно предварительно рассчитать возможные значения и характер распределения величин ΔS и e .

При проецировании осей на монтажные горизонты зданий штативы с визирными знаками от наружной грани стены устанавливают с постоянным смещением $\Delta S = 0,5$ м. При исполнительной съемке колонн ΔS зависит от допускаемого отклонения δ_x верха колонн. В этом случае ΔS можно рассматривать как случайную величину с равномерным распределением вероятностей в интервале от $-\delta_x$ до $+\delta_x$.

При исполнительной съемке верха ряда колонн с небольшим шагом осей при отсутствии видимости теодолит устанавливают каждый раз с постоянным смещением e . При установке прибора над осью на глаз или по отвесу e можно рассматривать как нормально распределенную случайную величину с нулевым математическим ожиданием и стандартом σ_e .

Если ΔS и S принимают постоянные значения, а величина e распределена нормально с нулевым математическим ожиданием, то числовые характеристики погрешности η_c будут равны

$$M(\eta_c) = m_c = 0; \quad D(\eta_c) = D_c = \left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 D_e. \quad (297)$$

Если при постоянном значении e величина ΔS равномерно распределена в интервале от $-\alpha_{\Delta S}$ до $+\alpha_{\Delta S}$, то числовые характеристики погрешности можно определить по формуле

$$m_c = 0; \quad D_c = \frac{\alpha_{\Delta S}^2 e^2}{3S^2}. \quad (298)$$

Нетрудно определить числовые характеристики для случая, когда и ΔS и e являются случайными величинами

$$m_c = 0; \quad D_c = \frac{\alpha_{\Delta S}^2}{3S^2} D_e. \quad (299)$$

5. Погрешность за редукцию визирных знаков. Эта погрешность целиком входит в погрешность проецирования. Если визирные знаки устанавливаются над точками A_0 и A , а построение оси производится полным приемом, то стандарт погрешности за редукцию будет равен стандарту установки оси визирной цели над знаком.

6. Погрешность фиксации. При проецировании коллимационной плоскостью теодолита погрешность фиксации определяется так же, как при построении проектных углов. Стандарт σ_ϕ можно выбрать из табл. 3.

При построении отвесных линий и плоскостей некоторые элементарные погрешности могут носить систематический характер. В этом случае необходимо выполнять раздельный учет систематической и случайной частей погрешности построения.

Пример 23. Рассчитать элементарные погрешности проецирования точек путем построения отвесной линии, если при высоте сооружения $H = 80$ м допускается отклонение не больше $\delta_\epsilon = 1,5$ мм.

Решение. Определим предварительные значения элементарных погрешностей.

Стандарт погрешности центрирования оптическим центриром высокоточного теодолита выберем из табл. 5.

$$\sigma'_{\epsilon_c} = 0,20 \text{ мм или } D'_{\epsilon_c} = 0,0400 \text{ мм}^2.$$

Будем полагать, что проецирование производится одним приемом и выполняется внутри здания прибором с увеличением трубы $v = 31$ *. Стандарт погрешности вычислим по формуле (289)

$$\sigma'_a = 0,13 \frac{80}{31} = 0,34 \text{ мм; } D'_a = 0,1156 \text{ мм}^2.$$

При цене деления палетки $t = 5$ мм погрешность отсчета будет характеризоваться величиной

$$\sigma'_0 = 0,03 \cdot 5 = 0,15 \text{ мм или } D'_0 = 0,0225 \text{ мм}^2.$$

При расчете для проецирования предусмотрим прибор с самоустанавливающейся линией визирования и $\alpha'' = 1,0''$. Стандарт погрешности за установку визирной оси в отвесное положение вычислим по формуле (293)

$$\sigma'_1 = \frac{1,0 \cdot 80000}{206265 \cdot \sqrt{3}} = 0,22 \text{ мм или } D'_1 = 0,0484 \text{ мм}^2.$$

Будем полагать, что предел компенсации прибора имеет значение $\alpha_v = 10$, а расстояние от оптического центра до точки компенсации угла наклона равно $d = 150$ мм. Тогда по формуле (294) имеем

$$\sigma'_v = \frac{10 \cdot 150}{3438 \sqrt{3}} = 0,25 \text{ мм или } D'_v = 0,0625 \text{ мм}^2.$$

Если проецирование будет выполняться при благоприятных погодных условиях, то влияние внешних условий в расчетах можно не учитывать.

При цене деления палетки $t = 5$ мм стандарт погрешности фиксации будет равен

$$\sigma'_\phi = 0,05 \cdot 5 = 0,25 \text{ мм или } D'_\phi = 0,0625 \text{ мм}^2.$$

При многократном проецировании различных точек сооружения на различные монтажные горизонты все элементарные погрешности можно считать случайными. Тогда

$$D'_\epsilon = D'_{\epsilon_c} + D'_a + D'_0 + D'_1 + D'_v + D'_\phi = 0,0400 + 0,1156 + 0,0225 + 0,0482 + 0,0625 + 0,0625 = 0,3490 \text{ мм}^2 \text{ или } \sigma'_\epsilon = 0,59 \text{ мм.}$$

Вычислим допускаемое отклонение

$$\delta'_e = 3\sigma'_e = 1,77 \text{ мм.}$$

Так как $\delta'_e > \delta_e$, то необходимо изменять предварительные значения элементарных погрешностей.

Вычислим допускаемое значение дисперсии погрешности проектирования

$$D_e = (\delta_e/3)^2 = (1,5/3)^2 = 0,25 \text{ мм}^2$$

и определим коэффициент пропорциональности

$$k_0 = D_e/D'_e = 0,250/0,349 = 0,716.$$

Рассчитаем допустимые значения дисперсий элементарных погрешностей.

Дисперсия центрирования не должна превышать величины

$$D_\phi = 0,716 \cdot 0,0400 = 0,0286 \text{ мм}^2; \quad \sigma_\phi = 0,17 \text{ мм.}$$

Сравнивая полученное значение со значениями стандартов погрешности из табл. 5, убеждаемся в необходимости производить центрирование с помощью оптического центра PZL.

Вычислим допускаемое значение стандарта погрешности визирования

$$D_n = 0,716 \cdot 0,1156 = 0,0828 \text{ мм}^2; \quad \sigma_n = 0,29 \text{ мм.}$$

Для ослабления влияния погрешности визирования предусмотрим проецирование проводить несколькими приемами. Определим необходимое число приемов

$$n = D'_n/D_n = 0,1156/0,0828 = 1,4 \approx 2 \text{ приема.}$$

Допускаемое значение дисперсии отсчета определим из выражения

$$D_o = 0,716 \cdot 0,0225 = 0,0161 \text{ мм}^2; \quad \sigma_o = 0,13 \text{ мм.}$$

Если проецирование осуществлять двумя приемами, то

$$\sigma_{0,2 \text{ пр}} = \sigma_o/\sqrt{2} = 0,13/\sqrt{2} = 0,11 \text{ мм.}$$

Это значение не превышает допуска.

Вычислим допустимое значение стандарта погрешности за установку визирной оси в отвесное положение

$$D_l = 0,716 \cdot 0,0482 = 0,0345 \text{ мм}^2; \quad \sigma_l = 0,19 \text{ мм.}$$

Нетрудно убедиться в том, что при двух приемах допуск будет выдержан. Действительно,

$$\sigma_{l,2 \text{ пр}} = \sigma_l/\sqrt{2} = 0,19/\sqrt{2} = 0,16 \text{ мм.}$$

Определим допустимое значение погрешности за смещение точки компенсации прибора

$$D_v = 0,716 \cdot 0,0625 = 0,0448 \text{ мм}^2; \quad \sigma_v = 0,21 \text{ мм.}$$

Вычислим допустимое значение угла наклона оси прибора

$$\alpha_v = \frac{\sigma_v \rho \sqrt{3}}{d} = \frac{0,21 \cdot 3438 \sqrt{3}}{150} = 9,5' \approx 9'.$$

Следовательно, при выполнении проецирования не следует проводить работу при углах наклона прибора, близких к пределу компенсации.

Допустимую величину стандарта погрешности фиксации определим из выражения

$$D_\phi = k_0 D'_\phi = 0,716 \cdot 0,0625 = 0,0448 \text{ мм}^2; \quad \sigma_\phi = 0,21 \text{ мм.}$$

Такое значение погрешности фиксации нетрудно обеспечить, если при наколе точки на обратной стороне палетки использовать измеритель и масштабную линейку.

Вычислим допустимое расхождение δ_A в координатах на палетке между приемами. На разность значений координат будут оказывать влияние погрешности визирования, отсчета по палетке, установки визирной оси в отвесное

положение и наклон прибора. Определим совместное влияние этих погрешностей при выполнении работ одним приемом

$$D_{\epsilon, \text{1 пр}} = D'_a + D'_i + D'_v = 0,1156 + 0,0225 + 0,0484 = 0,2218 \text{ мм}^2$$

$$\text{или } \sigma_{\epsilon, \text{1 пр}} = 0,47 \text{ мм.}$$

Рассматривая расхождения в координатах как разность, получим

$$\sigma_{\Delta} = \sigma_{\epsilon, \text{1 пр}} \sqrt{2} = 0,47 \sqrt{2} = 0,66 \text{ мм.}$$

Вычислим допустимое расхождение в координатах

$$\delta_{\Delta} = 3\sigma_{\Delta} = 3 \cdot 0,66 = 1,98 \text{ мм,}$$

что при цене деления палетки 5 мм составит величину

$$\delta_{\Delta \text{дел}} = 1,98/5 \approx 0,4 \text{ деления палетки.}$$

Таким образом, для обеспечения $\delta_{\epsilon} = 1,5$ мм необходимо применять прибор PZL, а проецирование производить двумя полными приемами. При этом расхождения в координатах между приемами не должны превышать 0,4 делений палетки.

Вычислим вероятность того, какая по абсолютной величине погрешность $|\eta_{\epsilon}|$ превысит значение δ_{ϵ} . Определим дисперсию погрешности проецирования для выбранной методики измерений

$$\begin{aligned} D_{\epsilon} &= D_a + \frac{D'_a}{2} + \frac{D'_o}{2} + \frac{D'_i}{2} + \frac{D'_v}{2} + D_{\phi} = \\ &= 0,15 + \frac{0,1156}{2} + \frac{0,0225}{2} + \frac{0,0484}{2} + \frac{0,0625}{2} + 0,2 = 0,2095 \text{ мм}^2; \quad \sigma_{\epsilon} = 0,46 \text{ мм.} \end{aligned}$$

Вычислим нормированное значение допустимого отклонения

$$t = \delta_{\epsilon}/\sigma_{\epsilon} = 1,5/0,46 = 3,26$$

и искомую вероятность

$$P = \arg \Phi(3,26) = 0,9989.$$

Таким образом, только 11 построений из 10 000 могут превзойти допуск.

Пример 24. Рассчитать погрешность проецирования осей теодолитом Т-30 ($\tau = 45'' v = 18''$) на перекрытия 5 этажа, если визирные знаки, имеющие оптический центрир, устанавливают в 0,5 м от наружной грани стены, а проецирование осуществляют при угле наклона визирного луча $v = 30^\circ$.

Решение. Найдем основные параметры погрешности проецирования при условии, что высота перекрытий пятого этажа составляет приблизительно 15 м плюс высота установки визирных знаков. Таким образом, $H \approx 16$ м. Найдем горизонтальное положение

$$S = H/\text{tg } v_0 = 16/\text{tg } 30^\circ \approx 28 \text{ м}$$

а расстояние от прибора до визирного знака

$$S_1 = S/\cos v_0 = 28/\cos 30^\circ \approx 33 \text{ м.}$$

Рассчитаем элементарные погрешности проецирования. Стандарт погрешности визирования определим по формуле (283)

$$\sigma_a = \frac{20 \cdot 33 \cdot 10^3}{206265 \cdot 18} = 0,18 \text{ мм}; \quad D_a = 0,032 \text{ мм}^2.$$

Для вычисления стандарта погрешности за наклон основной оси теодолита воспользуемся формулой (295)

$$D_{i_0} = \frac{45^2 \cdot 16^2 \cdot 10^6}{18 \cdot 206265^2 \cdot \cos^2 30^\circ} = 0,903 \text{ мм}^2.$$

При проецировании осей теодолит обычно центрируют над осью на глаз ($\sigma_{i_0} \approx 3$ см). Так как визирные цели устанавливают на некотором расстоянии от

наружной грани стены, то величина уступа с учетом ширины цоколя будет приблизительно равна $\Delta S \approx 0,6$ м. Тогда по формуле (296) имеем

$$D_e = (0,6/28)^2 \cdot 30^2 = 0,412 \text{ мм}^2.$$

Проецирование оси визирного знака на перекрытия этажа осуществляют оптическим центриром. Значение стандарта погрешности при высоте штатива до 1 м выберем из табл. 4.

$$\sigma_r = 0,3 \text{ мм}; \quad D_r = 0,09 \text{ мм}^2.$$

Так как закрепление осей производят прочерчиванием карандашом по гладкой поверхности бетона с последующей откраской, то значение стандарта составит

$$\sigma_\phi = 1,0 \text{ мм}; \quad D_\phi = 1,00 \text{ мм}^2.$$

Все элементарные погрешности являются случайными. Вычислим стандарт погрешности проецирования

$$D_e = D_n + D_{i_0} + D_e + D_r + D_\phi = 0,032 + 0,903 + 0,412 + 0,090 + 1,000 \approx \\ \approx 2,44 \text{ мм}^2; \quad \sigma_e = \sqrt{2,44} = 1,6 \text{ мм}.$$

С вероятностью $P = 0,9973$ погрешность проецирования не будет превышать значения $\delta_e = 3\sigma_e = 3 \cdot 1,6 \approx 5$ мм.

Глава IV

РАСЧЕТЫ ТОЧНОСТИ ОТДЕЛЬНЫХ ВИДОВ РАБОТ

§ 18. БОКОВОЕ НИВЕЛИРОВАНИЕ

При боковом нивелировании на местности или на конструкциях сооружения закреплены точки A и B , определяющие положение отвесной плоскости Q (рис. 29). Требуется определить отклонение Δ точки C от плоскости Q .

Для определения Δ в точках A и B восстанавливают перпендикуляры и откладывают расстояния $AA' = BB' = a$. Над точкой A' устанавливают теодолит, а над точкой B' — визирный знак. Визирную ось трубы теодолита наводят на визирную цель над точкой B' и берут отсчет b по рейке. Отсчеты по рейке производят при двух положениях вертикального круга. Отклонение точки C от плоскости Q вычисляют по формуле

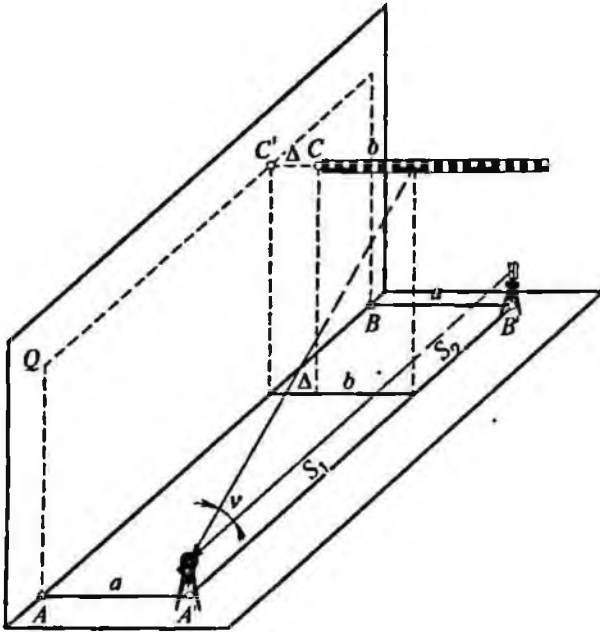
$$\Delta = a - b.$$

Погрешность η_Δ определения Δ обусловлена влиянием погрешности η_a построения параллельной линии AB и погрешности η_b определения отклонения точки C от створа $A'B'$, т. е.

$$\eta_\Delta = \eta_a - \eta_b. \quad (300)$$

При построении параллельной линии AB превышение h_a концов отрезка a и отклонение v_a линии AA' от перпендикуляра к AB порождают постоянные погрешности. Применительно к рассматриваемому случаю

Рис. 29. Боковое нивелирование



оценки этих погрешностей с учетом знаков целесообразно произвести по формулам (237), (238) и (277)

$$\theta_{h_a} = -\frac{\alpha_{h_a}^2}{6a}; \quad D_{h_a} = \frac{\alpha_{h_a}^4}{45a^2}; \quad \theta_{v_a} = -\frac{a\sigma_{v_a}^2}{2\rho^2}; \quad D_{v_a} = -\frac{a^2\sigma_{v_a}^4}{2\rho^4}. \quad (301)$$

Аналогично можно оценить погрешности за превышение h_b концов отрезка b на рейке и за отклонение v_b рейки от перпендикуляра к плоскости Q

$$\theta_{h_b} = \frac{\alpha_{h_b}^2}{6b}; \quad D_{h_b} = \frac{\alpha_{h_b}^4}{45b^2}; \quad \theta_{v_b} = \frac{b\sigma_{v_b}^2}{2\rho^2}; \quad D_{v_b} = \frac{b^2\sigma_{v_b}^4}{2\rho^4}. \quad (302)$$

Общая постоянная часть θ_Δ погрешности η_Δ в этом случае будет равна

$$\theta_\Delta = \theta_{h_a} + \theta_{v_a} - \theta_{h_b} - \theta_{v_b}. \quad (303)$$

При определении Δ погрешности за компарирование мерного прибора являются систематическими погрешностями. Обозначим предельное значение этой погрешности через δ_{λ_Δ} , общую систематическую часть $\lambda_{c\Delta}$ погрешности η_Δ определим по формуле (213).

$$\lambda_{c\Delta} = \delta_{\lambda_\Delta} + |\theta_\Delta|. \quad (304)$$

Случайную часть погрешности построения точки A' можно рассчитать так же, как и при построении проектного отрезка. Сохраняя принятые в § 13 обозначения и заменяя D_c на D_{v_a} и D_h на D_{h_a} запишем

$$D_a = D_{v_a} + D_{h_a} + D_t + D_F + D_o + D_\phi, \quad (305)$$

где D_a — дисперсия построения точки A' .

Случайная часть погрешности определения величины b в основном обусловлена влиянием погрешностей центрировки и редукции в точках

A' и B' при построении створа $A'B'$, погрешностей за наклон основной оси теодолита, погрешностей визирования и оценки долей деления при отсчете по рейке.

При расчете погрешностей построения створа $A'B'$ случайные части погрешностей построения точек A' и B' , характеризуемые дисперсией D_a , можно рассматривать как линейные элементы центрирования теодолита над точкой A' и визирного знака над точкой B' . В этом случае при расчете погрешностей построения створа по линии $A'B'$ значение дисперсии D_a в формуле (282) для оценки D_{cr} следует определять из выражения

$$D_{cr} = D_a + D_e, \quad (306)$$

где D_e — дисперсия совместного влияния погрешностей построения точки A' или B' и погрешностей центрирования теодолита или визирной цели над этими точками.

Дисперсию D_{i_0} погрешности за наклон основной оси теодолита можно вычислить по формуле (285) или (286), а дисперсию D_{0a} отсчета по рейке — по формулам (273) или (275).

В этом случае дисперсия D_{Δ} погрешности η_{Δ} будет равна

$$D_{\Delta} = D_{cr} + D_{i_0} + D_{0a} + D_{h_a} + D_{v_a} \quad (307)$$

Пример 25. Исполнительная съемка колонн высотой $h = 6$ м производится боковым нивелированием при помощи теодолита $T = 30$ с параллелей, расположенных в середине поперечных пролетов. Рассчитать систематические и случайные части погрешностей определения отклонений верха колонн от продольных осей здания длиной 50 м с шагом колонн $6 \times 4,5$ м и сечением колонн $0,4 \times 0,4$ м.

Решение. При расстояниях между продольными осями 4,5 м и сечении колонн $0,4 \times 0,4$ м будем иметь $a \approx 2,25$ м, $b \approx 2,05$ м.

При исполнительной съемке установку рейки и построение перпендикуляров к продольным осям осуществляют на глаз. Будем полагать, что стандарт угла отклонения в этом случае равен стандарту угла отклонения при установке рейки в отвесное положение, т. е. $\sigma_v = 1,2^\circ$. Подставляя эти значения в формулы (301) и (302), получим

$$\theta_{v_a} = -\frac{2,25 \cdot 10^3 \cdot 1,2^2}{2 \cdot 57,3^2} = -0,49 \text{ мм}; \quad D_{v_a} = \frac{2,25^2 \cdot 10^6 \cdot 1,2^4}{2 \cdot 57,3^4} = 0,49 \text{ мм}^2;$$

$$\theta_{v_b} = \frac{2,05 \cdot 10^3 \cdot 1,2^2}{2 \cdot 57,3^2} = 0,45 \text{ мм}; \quad D_{v_b} = \frac{2,05^2 \cdot 10^6 \cdot 1,2^4}{2 \cdot 57,3^4} = 0,40 \text{ мм}^2.$$

Колесания отметок плит перекрытия обычно не превышают 20 мм. Если предположить, что $\alpha_{h_a} = \alpha_{h_b} = 20$ мм, то

$$\theta_{h_a} = \frac{20^2}{6 \cdot 2,25 \cdot 10^3} = -0,03 \text{ мм}; \quad D_{h_a} = \frac{20^4}{45 \cdot 2,25^2 \cdot 10^6} = 0,001 \text{ мм}^2;$$

$$\theta_{h_b} = \frac{20^2}{6 \cdot 2,05 \cdot 10^3} = 0,03 \text{ мм}; \quad D_{h_b} = \frac{20^4}{45 \cdot 2,05^2 \cdot 10^6} = 0,001 \text{ мм}^2.$$

Постоянную часть погрешности определения отклонений вычислим по формуле (303)

$$\theta_{\Delta} = -0,03 - 0,49 - 0,03 - 0,45 = -1,00.$$

Отметим, что при съемке отклонений колонн по двум смежным продольным осям с двух параллельных линий постоянная часть погрешности определения длины пролета составит величину $2\theta_{\Delta} = -2$ мм.

Если компарирование рулетки производили на полевом компараторе двумя приемами, то

$$\delta_{\lambda_{\Delta}} = 3(2,25/20)0,3 = 0,1 \text{ мм}.$$

Вычислим абсолютную величину систематической части погрешности

$$\lambda_{\text{сд}} = 0,1 + 1,0 = 1,1 \text{ мм.}$$

Построение проектного отрезка a обычно производят стальными рулетками с миллиметровыми делениями, а фиксацию точек — прочерчиванием карандашом по гладкой поверхности бетона. Остальные условия построения отрезка аналогичны условиям, рассмотренным в примере 16. В этом случае

$$D_t = \frac{1}{3} 12^2 \cdot 10^{-12} \cdot 2,25^2 \cdot 10^6 \cdot 10^2 = 0,02 \text{ мм}^2; \quad D_p = \frac{2,25^2 \cdot 10^6}{2^2 \cdot 2^2 \cdot 10^8} = 0,01 \text{ мм}^2;$$

$$D_0 = \frac{0,045}{1} 1^2 = 0,04 \text{ мм}^2; \quad D_\phi = 0,5^2 = 0,25 \text{ мм}^2.$$

Тогда

$$D_a = 0,49 + 0,001 + 0,02 + 0,01 + 0,04 + 0,25 = 0,81 \text{ мм}^2.$$

Если установку визирных знаков и теодолита производят по оптическому центру, то

$$D_e = D_a + D_e = 0,81 + 0,5^2 = 1,06 \text{ мм}^2.$$

Измерения Δ производят при углах наклона $v \leq 30^\circ$. При высоте колонн $h = 6$ м наименьшее расстояние S_1 от прибора до колонны равно

$$S_1 = h \operatorname{ctg} v = 6 \operatorname{ctg} 30^\circ = 10,4 \text{ м.}$$

В этом случае исполнительную съемку колонн начинают с колонны, расположенной через $i = 10,4/6 \approx 2$ пролета. Общее число пролетов равно $n = 50/6 \approx 8$.

Вычисляя для наиболее неблагоприятных условий дисперсию погрешностей за центрировку и редукцию ($i = 7$, $n = 8$), за наклон основной оси теодолита ($\operatorname{tg} v_2 - \operatorname{tg} v_1 = 0,58$, $S_1 = 6 \cdot 3 = 18$ м) и за визирование по рейке с сантиметровыми делениями ($t = 10$ мм, $S = 50$ м), запишем

$$D_{\text{ср}} = \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{8} + \frac{49}{64} \right) 1,06 = 0,41 \text{ мм}^2; \quad D_{i_0} = \frac{0,58^2 \cdot 18^2 \cdot 10^6 \cdot 45^2}{18 \cdot 206265^2} = 0,29 \text{ мм}^2;$$

$$D_{0b} = \left(0,20 \frac{50}{18} + 0,03 \cdot 10 \right)^2 = 0,73 \text{ мм}^2.$$

Подставляя полученные значения в формулу (307), окончательно получим $D_\Delta = 0,41 + 0,29 + 0,73 + 0,001 + 0,40 = 1,83$ мм или $\sigma_\Delta = 1,4$ мм.

§ 19. РАЗБИВКА ГЛАВНЫХ (ОСНОВНЫХ) ОСЕЙ ЗДАНИЙ

Под разбивкой главных (основных) осей сооружения будем понимать геодезические работы, определяющие положение здания или сооружения на местности, а под детальной разбивкой — геодезические работы, определяющие взаимное положение отдельных элементов или конструкций здания или сооружения.

В качестве главных выбирают две взаимно перпендикулярные оси сооружения. Эти оси полностью определяют положение здания на местности. При строительстве крупного гидротехнического сооружения в качестве главных обычно выбирают продольную ось, проходящую через все сооружение, и поперечную. При возведении зданий можно использовать две взаимно перпендикулярные оси симметрии здания.

На объектах массовой застройки для определения положения зданий на местности часто производят разбивку крайних осей, определяющих общие размеры и конфигурацию здания. При невысоких требованиях к точности детальной разбивки это позволяет сократить объем разбивоч-

ных работ и увеличить сохранность разбивки в период выемки грунта из котлована.

Размещение зданий и их взаимную компоновку производят при разработке проекта строительства и выполняют на геодезической подоснове, т. е. на планах крупных масштабов. Точность размещения объектов строительства не превышает точности плана. Следовательно, чтобы обеспечить подобие в положении объекта на проектной чертеже и на местности, необходимо при разбивке выдержать точность плана.

При проектировании сооружений используют геодезическую подоснову, которая является копией оригинала съемки, но содержит искажения, вызванные различными графическими построениями в процессе разработки проекта. Это приводит к тому, что предельную погрешность определения положения точки на плане считают равной [8]

$$\delta_n = 0,5 \text{ мм } N,$$

где N — знаменатель численного масштаба плана.

Наиболее часто рабочие чертежи строительных объектов разрабатывают на планах масштаба 1:500. В этом случае перенос в натуру основных осей следует выполнять с погрешностью, не превышающей $\delta_n = 0,5 \cdot 500 = 0,25 \text{ м}$.

Для перенесения в натуру проекта застройки необходимо на плане определить элементы привязки сооружения. Используя эти элементы, составляют проект переноса в натуру сооружения и производят разбивку осей. В настоящее время применяют графический или аналитический способ определения элементов привязки.

При графическом способе на плане определяют положение сооружения относительно существующих элементов ситуации. В этом случае разработка проекта переноса в натуру сводится к составлению разбивочного чертежа, на котором указываются элементы привязки и даются их численные значения.

При аналитическом способе привязки на плане определяют координаты углов здания и вычисляют элементы привязки осей к пунктам планового обоснования. При возведении крупных промышленных объектов и объектов массовой застройки на плане намечают базис разбивки, определяют координаты его точек и аналитически производят расчет осей всех зданий и сооружений с учетом их взаимного размещения. Этот способ получил наиболее широкое применение.

Разбивку основных осей выполняют в два этапа: сначала создается рабочее обоснование, затем производится построение элементов привязки.

Расчет точности разбивки заключается в определении совместного влияния погрешностей выполнения этих этапов.

При разбивке основных осей к точности построения рабочего обоснования предъявляются такие же требования, как и к съемочному обоснованию. Методы разбивки и допускаемые расхождения регламентируются нормативным документом [8].

Погрешности построения элементов привязки с точек рабочего обоснования должны обеспечить положение точки оси с погрешностью, не превышающей значений [12]:

— в районах многоэтажной застройки 5 см;

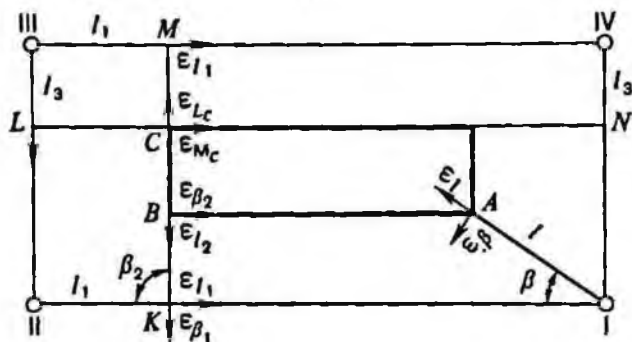


Рис. 30. Погрешности разбивки основных осей зданий

- в районах малоэтажной застройки 8 см;
- на незастроенных территориях 10 см.

Выбор способа разбивки основных осей зависит от условий местности и расположения точек планового обоснования.

При полярном способе разбивки в точке обоснования I производят построение проектного угла β и по полученному направлению IA откладывают проектный отрезок I (рис. 30). Полученную на местности точку A закрепляют соответствующим знаком.

Погрешность построения проектного отрезка приводит к продольному сдвигу ϵ_l точки A , а погрешность построения проектного угла - к поперечному сдвигу ϵ_β . Эти погрешности характеризуются математическими ожиданиями $m_l = \lambda_l$, $m_\beta = \lambda_\beta$ и стандартами σ_l , σ_β .

Величины λ_l и λ_β характеризуют смещение центра рассеивания точки A от проектного положения, а стандарты σ_l и σ_β - случайный разброс значений вокруг центра рассеивания.

В этом случае систематическую часть λ_A погрешности ϵ_A положения точки A можно оценить по формуле

$$\lambda_A = \sqrt{\lambda_l^2 + \lambda_\beta^2}. \quad (308)$$

При выполнении геодезических работ линейные и угловые измерения обычно бывают или равноточными, или близкими по точности. Для этого соответствующим образом подбираются классы точности, методика выполнения работ и приборы. Условие это соблюдается и при выполнении разбивочных работ. Поэтому стандарты σ_l и σ_β можно считать приблизительно равными.

При равенстве стандартов $\sigma_l = \sigma_\beta = \sigma$ и нормальном распределении центрированных величин $\hat{\epsilon}_l$ и $\hat{\epsilon}_\beta$ случайная часть отклонения точки A от проектного положения $\hat{\epsilon}_A = \sqrt{\hat{\epsilon}_l^2 + \hat{\epsilon}_\beta^2}$ имеет распределение Релея с параметром σ . Функция распределения величины $\hat{\epsilon}_A$ имеет вид

$$F(\hat{\epsilon}_A) = 1 - e^{-t^2/2}, \quad (309)$$

где $t = \hat{\epsilon}_A/\sigma$ - нормированное значение $\hat{\epsilon}_A$.

При решении прямой задачи по доверительной вероятности P из таблиц функции распределения Релея (приложение 2) находят значение $k = t$ и по известному значению σ вычисляют допускаемое отклонение $\delta_{\epsilon_A} = t\sigma$.

При решении обратной задачи расчета по значению P находят $k = t$ и вычисляют $\sigma = \delta_{\epsilon_A}/t$.

Ранее предполагалось, что погрешности построения отрезка и угла независимы, но они содержат общую часть — погрешность фиксации точки. По этой причине их следует признать коррелированными.

Определим коэффициент корреляции.

Допускаемое отклонение при разбивке точек основных осей в районах многоэтажной застройки равно $\delta = 5 \text{ см} = 50 \text{ мм}$. При доверительной вероятности $P = 0,9973$ это соответствует значениям стандартов $\sigma_l = \sigma_\beta = 50 : 3,44 = 15 \text{ мм}$. Если закрепление осей производят кольшпками ($\sigma_\phi = 2 \text{ мм}$), то коэффициент корреляции $r_{l\beta}$, определенный по формуле (45), будет равен

$$r_{l\beta} = \frac{\sigma_\phi^2}{\sigma_l \sigma_\beta} = \frac{2^2}{15 \cdot 15} = 0,02.$$

Такое значение коэффициента корреляции следует признать пренебрегаемо малым.

При разбивке основных осей способом прямоугольных координат по створу стороны планового обоснования II—I от точки II откладывают проектный отрезок l_1 (см. рис. 30). В точке К строят угол $\beta_2 = 90^\circ$, восстанавливают перпендикуляр, на котором откладывают проектный отрезок l_2 , и получают точку В.

Погрешность построения точки В обусловлена влиянием погрешностей построения створа ϵ_{β_1} линии II—I, отложения первого отрезка ϵ_{l_1} , построения прямого угла ϵ_{β_2} и второго отрезка ϵ_{l_2} . Погрешности ϵ_{l_1} и ϵ_{β_2} приводят к продольному сдвигу точки В, а ϵ_{β_1} и ϵ_{l_2} — к поперечному сдвигу. Обозначив продольный сдвиг через $\epsilon_{\text{пр}}$, а поперечный — через $\epsilon_{\text{поп}}$ запишем

$$\epsilon_{\text{пр}} = \epsilon_{l_1} + \epsilon_{\beta_2}, \quad \epsilon_{\text{поп}} = \epsilon_{\beta_1} + \epsilon_{l_2}.$$

Так как зависимость между погрешностями построений углов и отрезков несущественна, то

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{пр}} &= \lambda_{l_1} + \lambda_{\beta_2}; & \sigma_{\text{пр}}^2 &= \sigma_{l_1}^2 + \sigma_{\beta_2}^2; \\ \lambda_{\text{поп}} &= \lambda_{\beta_1} + \lambda_{l_2}; & \sigma_{\text{поп}}^2 &= \sigma_{\beta_1}^2 + \sigma_{l_2}^2. \end{aligned} \quad (310)$$

Если построения проектных углов и отрезков выполняют с одинаковой точностью, то $\sigma_{l_1} = \sigma_{\beta_1}$ и $\sigma_{l_2} = \sigma_{\beta_2}$. Тогда

$$\sigma_{\text{пр}} = \sigma_{\text{поп}} = \sigma.$$

В этом случае расчет случайных погрешностей осуществляют так же, как и при разбивке осей полярным способом.

При разбивке осей способом створов на сторонах планового обоснования II—I и III—IV откладывают проектные отрезки l_1 , а на сторонах III—II и IV—I — отрезки l_3 (см. рис. 30). Теодолит устанавливают последовательно в точках L и M и производят построения створов LN и MK. Точку С находят как пересечение створов LN и MK.

При построении точек M и K основное влияние на смещение точки С от проектного положения оказывают погрешности отложения отрезков l_1 . Смещения точек M и K со створов III—IV и II—I практически не влияют на положение точки С. Поэтому смещение точки С в направлении продольных осей обусловлено влиянием погрешности $\epsilon_{\text{МС}}$ построе-

ния створа MK и совместным влиянием погрешностей ε_{I_1} отложения отрезка l_1 на створах линий III–IV и II–I, т. е.

$$\varepsilon_{np} = \varepsilon_{MC} + \varepsilon_{I_1}.$$

Рассматривая погрешность ε_{LC} построения створа LN и погрешность ε_{I_3} отложения отрезков l_3 на сторонах III–I и IV–I, запишем

$$\varepsilon_{nop} = \varepsilon_{LC} + \varepsilon_{I_3}.$$

Так как погрешности в правых частях равенства независимы, то

$$\begin{aligned} \lambda_{np} &= \lambda_{MC} + \lambda_{I_1}; & \sigma_{np}^2 &= \sigma_{MC}^2 + \sigma_{I_1}^2; \\ \lambda_{nop} &= \lambda_{LC} + \lambda_{I_3}; & \sigma_{nop}^2 &= \sigma_{LC}^2 + \sigma_{I_3}^2. \end{aligned} \quad (311)$$

Если отрезки l_1 и l_3 имеют приблизительно равные длины, то стандарты отложения отрезков и построения створов будут равны, т. е. $\sigma_{I_1} = \sigma_{I_3}$ и $\sigma_{MC} = \sigma_{LC}$. Тогда $\sigma_{np} = \sigma_{nop} = \sigma$, и расчет случайных частей погрешности построения точки C сводится к случаю разбивки осей способом полярных координат.

При существенных различиях в длинах отрезков l_1 и l_3 расхождения в стандартах продольного и поперечного сдвигов обусловлены нарушением равенств $\sigma_{MC} = \sigma_{I_3}$ и $\sigma_{LC} = \sigma_{I_1}$. Стандарты σ_{MC} и σ_{I_3} являются функциями одного расстояния l_3 . Но σ_{MC} характеризует случайную погрешность построения створа, а σ_{I_3} — отложения отрезка. Поэтому расхождения в этих стандартах зависят в основном от соотношения между точностями построения створа и отложения отрезков. Существенных расхождений в точностях этих построений обычно не наблюдается, что позволяет в расчетах приравнивать стандарты продольного и поперечного сдвигов.

Отметим еще одну особенность расчетов при разбивке осей способом створов. Погрешность ε_{I_1} отложения отрезка l_1 на стороне обоснования III–IV можно рассматривать как линейный элемент погрешности центрирования в точке M при построении створа MK , а погрешность отложения отрезка l_1 на стороне обоснования II–I как линейный элемент редукции при построении створа MK . В этом случае в расчетах точности оценка случайной погрешности сводится к определению стандарта построения створа.

Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с определением погрешностей самого расчета.

Наиболее существенными обычно бывают погрешности, связанные с определением оценок различных параметров. Определим погрешность $\Delta\delta$ допускаемого отклонения δ , обусловленную влиянием погрешности $\Delta\sigma$ в стандарте σ . Так как $\delta = t\sigma$, то

$$\Delta\delta/\delta = \Delta\sigma/\sigma. \quad (312)$$

Следовательно, относительные погрешности δ и σ равны.

При расчетах точности разбивки осей иногда полагают, что ε_A имеет нормальное распределение вероятностей со стандартом $\sigma'_{\varepsilon_A} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_B^2} = \sigma\sqrt{2}$. В этом случае для $P = 0,9973$ нормированное значение стандарта принимают равным $t' = 3$ и вычисляют допускаемое отклонение $\delta_{\varepsilon_A} = t'\sigma' = 4,24\sigma$.

При той же доверительной вероятности для закона распределения Релея будем иметь $\delta_{\epsilon_A} = t\sigma = 3,44\sigma$.

В этом случае относительная погрешность расчета, обусловленная неверным предположением о законе распределения случайной величины ϵ_A , равна

$$\frac{\delta'_{\epsilon_A} - \delta_{\epsilon_A}}{\delta} = \frac{4,24 - 3,44}{4,24} = 23\%.$$

Методику расчетов точности разбивки основных осей проиллюстрируем на примере.

Пример 26. Разбивка основных осей здания в районе многоэтажной застройки будет осуществлена способом створов. Рассчитать погрешности элементарных построений, если плановым обоснованием служит строительная сетка со сторонами 200 м.

Решение. Рассмотрим наиболее неблагоприятный случай разбивки, когда точка C расположена в центре квадрата строительной сетки (см. рис. 30). В этом случае проектные отрезки и расстояния от точек L и M до точки C равны $l_1 = l_3 = LC = CM = 100$ м, а длина створов $MK = LN = 200$ м.

При разбивке основных осей в районах многоэтажной застройки допустимое отклонение равно $\delta_{\epsilon} = 5$ см = 50 мм.

Систематические части смещения $\lambda_{пр}$ и $\lambda_{пов}$ точки C в основном обусловлены влиянием систематических погрешностей отложения отрезков l_1 и l_3 . Так как $l_1 = l_3$, то $\lambda_{l_1} = \lambda_{l_3} = \lambda_l$. Тогда

$$\lambda_{\epsilon_c} = \sqrt{\lambda_{l_1}^2 + \lambda_{l_3}^2} = \lambda_l \sqrt{2}.$$

В расчетах обычно полагают, что систематические погрешности не должны превышать 0,2 допустимого отклонения, т. е.

$$\lambda_{\epsilon_c} = 0,2\delta_{\epsilon_c} = 0,2 \cdot 50 = 10 \text{ мм.}$$

Вычислим допустимое отклонение для случайных частей погрешности

$$\delta_{\epsilon_c}^* = \delta_{\epsilon_c} - \lambda_{\epsilon_c} = 50 - 10 = 40 \text{ мм.}$$

Для определения стандарта построений до доверительной вероятности $P = 0,9973$ из таблиц (прил. 2) найдем нормированное значение $t = 3,44$. Тогда $\sigma = \delta_{\epsilon_c}^*/t = 40/3,44 = 11,6$ мм.

Построение проектных отрезков при разбивке основных осей выполняют так же, как и при переносе в натуру красных линий. На этом основании в качестве предварительных значений воспользуемся результатами из примера 16: $\lambda'_{\epsilon_c} = 1,94$ мм, $\sigma_{\epsilon_c} = 3,2$ мм. Вычислим предварительные значения числовых характеристик для отрезков $l_1 = l_3 = 100$ м. Так как длина этих отрезков в 5 раз превышает длину отрезка из примера 16, то

$$\lambda'_{\epsilon_c} = 1,94 \cdot 5 = 9,7 \text{ мм; } \sigma_{l_1} = 3,2 \sqrt{5} = 7,2 \text{ мм.}$$

Значение λ'_{ϵ_c} больше λ_{ϵ_c} и, следовательно, необходимо изменить значение систематической части построения l_1 и l_2 . Из результатов расчета в примере 16 видно, что преобладающее значение оказывают постоянные части погрешностей за наклон мерного прибора $\theta_n = 1,02$ мм. Ограничивать другие систематические погрешности нецелесообразно, так как постоянная часть погрешности за уложение мерного прибора в створ мала ($\theta_{\epsilon} = 0,02$ мм), а уменьшение погрешности $\delta_{\lambda_{\epsilon_c}} = 0,90$ мм за компарирование сопряжено со значительным увеличением затрат. Используя величину $\lambda'_{\epsilon_c} = \lambda_{\epsilon_c}/5 = 7,1/5 = 1,42$ мм, определим такое значение θ_n , которое удовлетворяет требованиям данного примера, т. е. такое значение θ_n , которое удовлетворяет требованиям данного примера, т. е.

$$\theta_n = \lambda'_{\epsilon_c} - (\delta_{\lambda_{\epsilon_c}} + \theta_{\epsilon}) = 1,42 - (0,90 + 0,02) = 0,5 \text{ мм.}$$

Вычислим предельное значение превышений между концами мерного прибора

$$a_h \leq \sqrt{60_h l} = \sqrt{6 \cdot 0,5 \cdot 20 \cdot 10^3} = 245 \text{ мм} = 0,25 \text{ м.}$$

Это требование особых затруднений при выполнении построений не вызывает, так как при $h > 0,25$ м нетрудно измерить превышение концов рулетки и ввести соответствующие поправки в длину отрезка.

Построение створов предусмотрим выполнять теодолитом Т-30 с центрированием над точками при помощи нитяного отвеса ($\sigma_e = 3,0$ мм).

При построении створов погрешности отложений отрезков l_1 по сторонам строительной сетки можно рассматривать как линейные элементы центрирования и редукции. Если учесть, что над этими точками теодолит и визирные знаки устанавливают при помощи нитяного отвеса, то предварительное значение дисперсии линейных элементов будет равно

$$D_i = \sigma_{i_1}^2 + \sigma_e^2 = 7,2^2 + 3,0^2 = 60,8 \text{ мм}^2.$$

Дисперсию погрешности за центрировку и редукцию при построении створа вычислим по формуле (281)

$$D'_{cr} = \frac{100^2 + 100^2}{2 \cdot 200^2} = 60,8 = 15,2 \text{ мм}^2.$$

Определим погрешность визирования при $v = 18^\times$ и $S = 100$ м

$$\sigma'_b = \frac{20 \cdot 100 \cdot 10^3}{206265 \cdot 18} = 0,5 \text{ мм}; \quad D'_b = 0,25 \text{ мм}^2.$$

Для данных условий измерений углы наклона визирной оси теодолита не будут превышать $\alpha_v = 10^\circ$. Предварительное значение дисперсии за наклон основной оси прибора определим по формуле (285)

$$D'_{i_0} = \frac{2 \cdot 45^2 \cdot 10^2}{27 \cdot 206265^2 \cdot 57,3^2} 100^2 \cdot 10^6 = 1,1 \text{ мм}^2.$$

При закреплении основных осей деревянными колышками стандарт погрешности фиксации равен $\sigma_\phi = 2$ мм.

Вычислим стандарт погрешности построения створа.

$$D'_{e_e} = D'_{cr} + D'_a + D'_{i_0} + D'_b + \sigma_\phi^2 = 15,2 + 0,25 + 1,1 + 2,0^2 = 20,4 \text{ мм}^2;$$

$$\sigma'_e = 4,5 \text{ мм.}$$

В данном случае погрешности построения отрезков l_1 учтены при вычислении стандарта σ'_e . Сравнивая значения σ'_e с допускаемой величиной $\sigma = 11,6$ мм, убеждаемся, что выбранный способ выполнения работ полностью удовлетворяет требованиям к точности разбивки основных осей здания. Имеет смысл несколько увеличить значения случайных элементарных погрешностей и тем самым сократить затраты труда на выполнение работ.

§ 20. РАЗБИВКА КРУГОВЫХ КРИВЫХ

Разбивку круговых кривых выполняют в два этапа. На первом этапе производят разбивку основных точек кривой, на втором — детальную разбивку кривой.

Для разбивки основных точек кривой на местности закреплена вершина угла B и даны направления касательных BF и BE (рис. 31). По измеренному углу поворота трассы φ и проектному радиусу R необходимо найти на местности положение начала A , середины D и конца C кривой.

Разбивку основных точек кривой производят следующим образом. По значениям φ и R вычисляют тангенс T , биссектрису B кривой и угол

ности погрешностей в направлении касательных к окружности в точках С и А. С учетом знаков этих погрешностей запишем

$$\eta_K = \eta_{СК} + \eta_{АК}.$$

Тогда

$$\lambda_K = \lambda_{СК} + \lambda_{АК} \text{ и } \sigma_K^2 = \sigma_{СК}^2 + \sigma_{АК}^2.$$

Так как $\lambda_{СК} = \lambda_{АК} = \lambda_T$ и $\sigma_{СК} = \sigma_{АК} = \sigma_T$, то

$$\lambda_K = 2\lambda_T \text{ и } \sigma_K = \sqrt{2}\sigma_T.$$

Откуда

$$\delta_K = 2\delta_{\lambda_T} + \sqrt{2}\delta_{\sigma_T}, \quad (316)$$

где δ_K — допускаемое отклонение длины кривой от проектного значения.

Погрешности детальной разбивки круговой кривой зависят от способа выполнения работ. Рассмотрим способы разбивки и соответствующие им погрешности.

А. СПОСОБ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТ

В этом способе для построения промежуточных точек кривой по оси абсцисс откладывают отрезки x_1, x_2, \dots , в полученных точках восставляют перпендикуляры, откладывают отрезки y_1, y_2, \dots и получают точки кривой 1, 2, ... (рис. 32).

Рассмотрим погрешности построения точки I.

Погрешность ϵ_x обусловлена влиянием погрешности η_x отложения отрезка x по оси абсцисс и погрешности η_β построения угла $\beta = 90^\circ$, а погрешность ϵ_y — влиянием погрешности $\eta_{ств}$ построения створа по оси абсцисс и погрешности η_y отложения отрезка y . Тогда

$$\epsilon_x = \eta_x + \eta_\beta; \quad \epsilon_y = \eta_{ств} + \eta_y.$$

Используя для оценок погрешностей принятые обозначения, получим

$$\lambda_{\epsilon_x} = \lambda_x + \lambda_\beta; \quad \sigma_{\epsilon_x}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_\beta^2; \quad (317)$$

$$\lambda_{\epsilon_y} = \lambda_{ств} + \lambda_y; \quad \sigma_{\epsilon_y}^2 = \sigma_{ств}^2 + \sigma_y^2.$$

К детальной разбивке кривых по трассам линейных сооружений высоких требований к точности не предъявляют, а при возведении сооружений круглой формы расстояния обычно не превышают нескольких метров. Поэтому в расчетах точности обычно ограничиваются определением случайной части погрешности детальной разбивки.

Рассмотрим наиболее общий случай расчета, когда необходимо определить общее смещение точки от проектного положения и смещения по направлениям радиуса и касательной к окружности.

Если стандарты случайных погрешностей равны $\sigma_{\epsilon_x} = \sigma_{\epsilon_y} = \sigma_\epsilon$, то величина $\epsilon = \sqrt{\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2}$ имеет распределение Релея. В этом случае по заданной доверительной вероятности P в таблицах (прил. 2) можно выбрать нормированное значение t и определить допускаемое отклонение

$$\sigma_\epsilon = t\sigma_\epsilon. \quad (318)$$

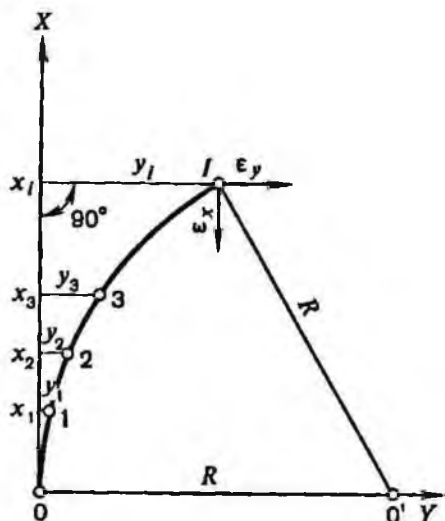


Рис. 32. Разбивка кривой способом прямоугольных координат

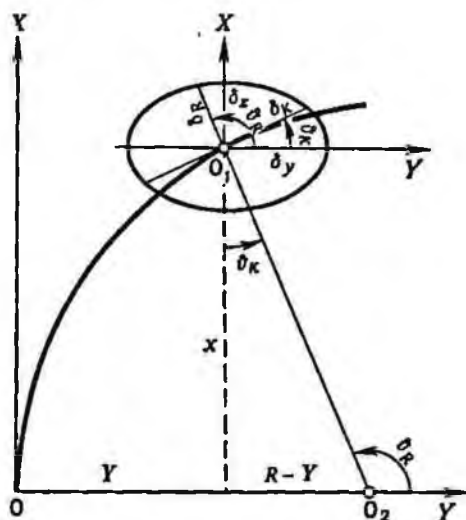


Рис. 33. Погрешности детальной разбивки кривых

При небольших расхождениях в значениях стандартов σ_{ϵ_x} и σ_{ϵ_y} вычисляют среднее $\sigma_{\epsilon_{cp}}$ и определяют допустимое отклонение.

Значительно более жесткие требования к точности расчета предъявляют при определении погрешностей в направлении радиуса и касательной к окружности.

Для решения этой задачи в точке окружности O_1 с координатами X и Y построим эллипс рассеивания (рис. 33). Так как погрешности построений совпадают по направлению с X и Y , то и оси эллипса рассеивания будут параллельны осям общей системы координат.

Если в качестве полуосей эллипса принять допускаемые отклонения $a = \delta_{\epsilon_y} = \delta_y$ и $b = \delta_{\epsilon_x} = \delta_x$,

то задача сводится к определению полу диаметров δ_R и δ_K , совпадающих соответственно с направлениями радиуса и касательной к окружности.

В выбранной системе координат параметрическое уравнение эллипса имеет вид

$$x = \delta_x \sin \vartheta;$$

$$y = \delta_y \cos \vartheta,$$

где ϑ — угол между диаметром эллипса и осью ординат.

Длину полу диаметра δ можно вычислить по формуле

$$\delta = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\delta_x^2 \sin^2 \vartheta + \delta_y^2 \cos^2 \vartheta}.$$

Для диаметра, совпадающего с направлением касательной к окружности, имеем

$$\sin \vartheta_R = \frac{X}{R}; \quad \cos \vartheta_R = \frac{R - Y}{R},$$

тогда

$$\delta_R = \frac{1}{R} \sqrt{X^2 \delta_x^2 + (R - Y)^2 \delta_y^2}. \quad (319)$$

Аналогичным образом получаем

$$\delta_K = \frac{1}{R} \sqrt{(R - Y)^2 \delta_x^2 + X^2 \delta_y^2}. \quad (320)$$

Формулы (319) и (320) справедливы тогда, когда δ_{e_x} меньше δ_{e_y} . В этом случае эллипс рассеивания располагается так, как на рис. 33. Если δ_{e_x} больше δ_{e_y} , то большая полуось эллипса рассеивания располагается по оси x . Для этого случая в формулах (319) и (320) необходимо в подкоренном выражении δ_x и δ_y поменять местами.

Б. СПОСОБ УГЛОВ И СПОСОБ ПРОДОЛЖЕННЫХ ХОРД

Способы применяются для разбивки кривых с небольшой степенью точности. Расчеты точности для этих случаев обычно не производят.

В. СПОСОБ ВПИСАННОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

Точки кривой получают путем последовательного отложения хорды l и построения угла β (рис. 34, а).

Определим погрешность η_K длины кривой OJ . Так как угол между касательной и хордой мал, то погрешность длины дуги и погрешность отложения хорды η_l практически равны. Тогда

$$\eta_K = \eta_{l_1} + \eta_{l_2} + \dots + \eta_{l_n}.$$

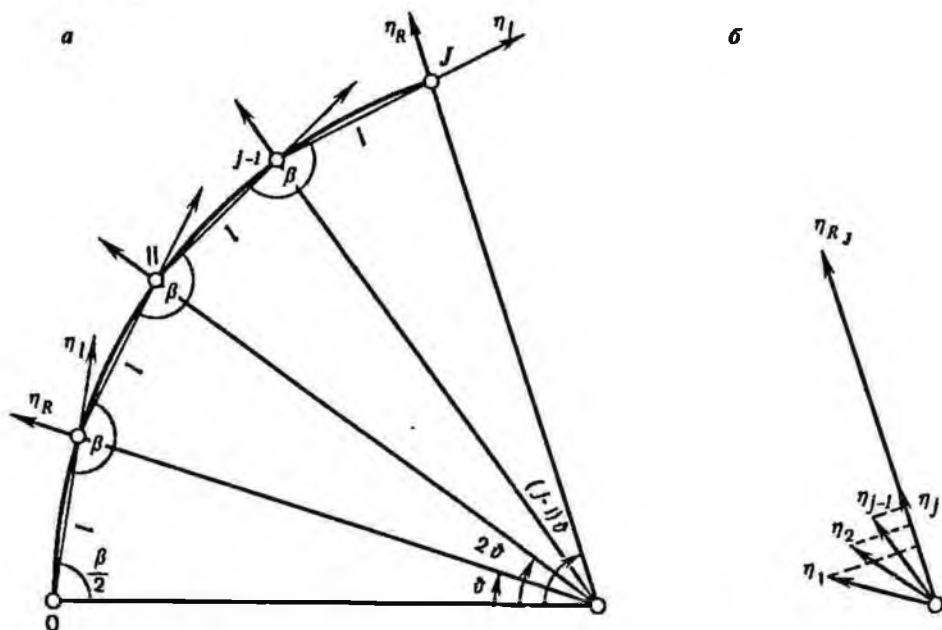


Рис. 34. Способ вписанного многоугольника

Хорды при построении точек кривой откладывают с одинаковой точностью. Следовательно, $\sigma_{l_1} = \sigma_{l_2} = \dots = \sigma_{l_n} = \sigma_l$ и $\sigma_K = \sigma_l \sqrt{n}$.

$$(321)$$

Погрешности η_{R_j} в направлении радиуса во всех точках кривой обусловлены влиянием погрешности $\eta_{\beta_{j-1}}$ построения угла β . Пренебрегая незначительным углом между радиусом и перпендикуляром к хорде J окружности, запишем $\eta_{R_j} = \eta_{\beta_{j-1}}$. При движении по окружности направление радиуса от точки к точке изменяется на угол ϑ . Чтобы определить совместное влияние погрешностей η_{R_j} на погрешность η_{R_j} , необходимо определить сумму проекций всех этих погрешностей на направление радиуса в точке J (рис. 34, б). Последовательно определяя и суммируя проекции, получим

$$\eta_{R_j} = \eta_{\beta_1} \cos(j-1)\vartheta + \dots + \eta_{\beta_{j-1}} \cos \vartheta + \eta_{\beta_j}$$

Так как построение углов осуществляют с одинаковой точностью, то $\sigma_{\beta_1} = \sigma_{\beta_2} = \dots = \sigma_{\beta_{j-1}} = \sigma_{\beta}$. Тогда

$$\sigma_{R_j} = \sigma_{\beta} \sqrt{1 + \cos^2 \vartheta + \dots + \cos^2(j-1)\vartheta} = \sigma_{\beta} \sqrt{1 + \sum_{j=1}^{j-1} \cos^2 j\vartheta}. \quad (322)$$

Рассмотрим особенности разбивки способом вписанного многоугольника. Из формул (321) и (322) видно, что по мере продвижения по окружности быстро возрастает погрешность длины кривой. Так как $\cos j\vartheta < 1$, то при $\sigma_l = \sigma_{\beta}$ погрешность в направлении радиуса возрастает значительно медленнее.

Г. СПОСОБ СЕКУЩЕЙ

В этом способе ось абсцисс совмещают с хордой, а разбивку кривой осуществляют так же, как и в способе прямоугольных координат.

Пренебрегая влиянием углов между радиусами окружности и осью ординат, расчет точности производят как и в способе прямоугольных координат. При высокоточных расчетах в каждой из точек кривой можно вычислить угол между радиусом и хордой и учесть его влияние.

Д. СПОСОБ НЕПРЕРЫВНОЙ РАЗБИВКИ КРУГОВЫХ КРИВЫХ

При строительстве линейных сооружений на прямолинейных участках трассы для автоматического управления строительными машинами и механизмами используют лазер. На криволинейных участках вынуждены производить детальную разбивку, устанавливая в точках кривой вешки и вести машину вручную, что существенно снижает производительность труда и точность.

Для устранения этого недостатка автором настоящей книги предложен способ непрерывной разбивки круговых кривых. Сущность способа заключается в том, чтобы продольную ось машины в процессе движения по кривой все время совмещать с касательной к окружности.

Рассмотрим изменение угла между хордой KH и касательной в текущей точке I при движении машины по окружности (рис. 35). В

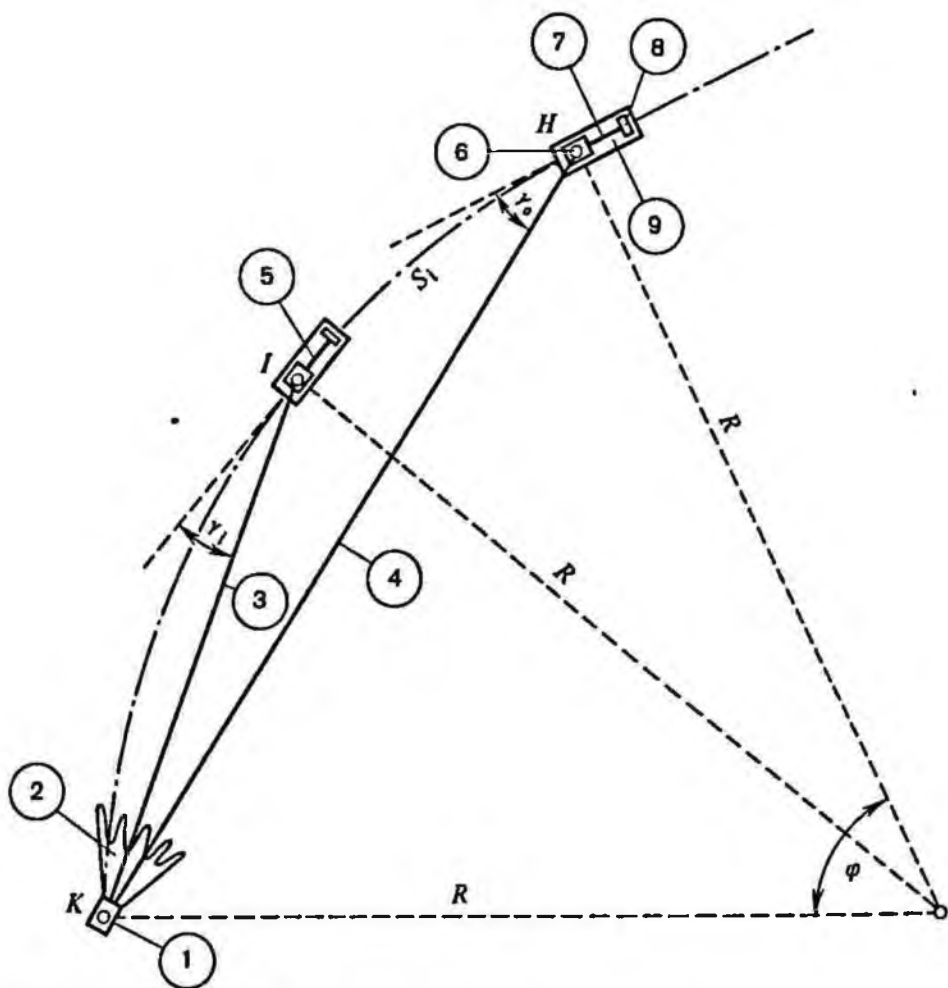


Рис. 35. Способ непрерывной разбивки круговых кривых

начальной точке H движения машины угол между хордой и касательной составляет величину $\gamma_0 = \varphi/2$. По мере продвижения угол между касательной и хордой непрерывно изменяется и в текущей точке I окружности будет равен

$$\gamma_i = \frac{\overset{\sim}{IK}}{2} = \frac{\varphi - \alpha_i}{2} = \frac{\varphi}{2} - \frac{\alpha_i}{2},$$

где α_i — изменение угла между касательной и хордой.

Угол $\varphi/2$ не зависит от пройденного пути S_i и для данной кривой является величиной постоянной. Выразим переменный угол α_i в виде функции пути

$$\alpha_i = \frac{\rho}{R} S_i,$$

тогда

$$\gamma_i = \frac{\varphi}{2} - \frac{\rho}{2R} S_i.$$

Представим это выражение в виде

$$\gamma_i = \frac{\varphi}{2} - \frac{N}{R} \frac{\rho}{2N} S_i, \quad (323)$$

где N — целое положительное число.

Эта зависимость и положена в основу способа [15].

Для реализации способа канд. техн. наук В. Ф. Лукьянов, В. П. Ментюков и инж. Е. А. Подгарбунский разработали устройство, которое состоит из излучателя 1 со сканирующим приспособлением, преломляющей системы 6 и приемника излучения 8 (см. рис. 35). Преломляющая система содержит отклоняющее оптическое приспособление и двухступенчатую передачу, связанную со счетчиком пути. Первая ступень передачи имеет переменное передаточное число $n_1 = N/R$, вторая — постоянное передаточное число $n_2 = \rho/2N$.

Для работы над произвольной точкой K окружности устанавливают лазер и сканируют луч в плоскости 2. На машине 9, находящейся в начальной точке H кривой, установлено отклоняющее оптическое приспособление, свободным поворотом которого часть светового потока в виде луча 4 направляют на центр экрана 7 приемника излучения 8. Этим достигается автоматическая установка начального угла $\varphi/2$. В первой ступени передачи по шкале радиусов в масштабе $1/N$ устанавливают проектный радиус R окружности.

При перемещении машины на отрезок пути S_i по трассе счетчик пути с помощью двухступенчатой передачи поворачивает отклоняющее оптическое приспособление. Отклоняющее приспособление принимает часть светового потока 2 в виде луча 3, преломляет его на угол γ_i , определяемый соотношением (323), и направляет по касательной к окружности. Если машина отклонилась от трассы, то преломленный луч 5 смещается с центра экрана. Смещенный луч светочувствительными элементами экрана преобразуется в электрические сигналы и используется для автоматического управления машиной. Исполнительные органы машины представляют собой шаговые устройства, что позволяет производить коррекцию движения через заданные промежутки времени или отрезки пути.

При расчете точности движения строительной машины по трассе учитывают только погрешности отклонения от трассы, т. е. погрешность в направлении радиуса окружности. Определим эту погрешность.

Пусть корректировку движения машины производят через равные отрезки пути $S = K/n$, где K — длина кривой, n — число отрезков.

Общее отклонение машины от трассы в текущей точке окружности складывается из уже накопленной погрешности ϵ'_{i-1} и погрешности η_i прохождения данного отрезка пути (рис. 36), т. е.

$$\epsilon_i = \epsilon'_{i-1} + \eta_i. \quad (324)$$

При достаточно большом радиусе окружности R (малой кривизне кривой) и небольших отрезках S погрешность ϵ'_{i-1} с достаточной

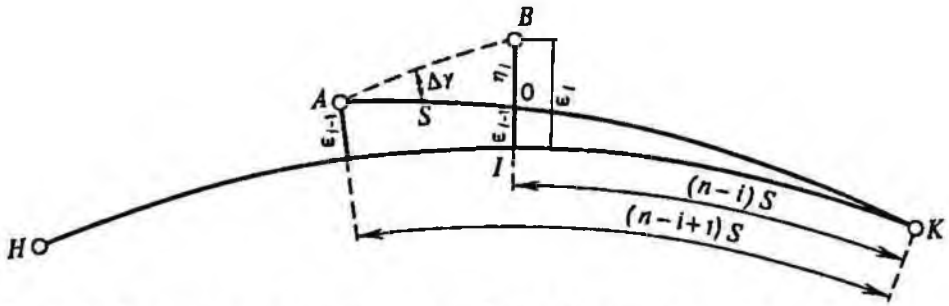


Рис. 36. Погрешности непрерывной разбивки круговых кривых

степенью точности можно выразить через погрешность ϵ_{i-1} предшествующей точки следующим образом

$$\frac{\epsilon'_{i-1}}{\epsilon_{i-1}} = \frac{(n-i)S}{(n-i+1)S} = \frac{n-i}{n-i+1} \quad (325)$$

За время между корректировками машина проходит по направлению касательной определенный путь S . Поэтому все отклонения η_i направлены в одну сторону от трассы. В § 16 при выводе формулы (287) показано, что для такого случая наибольшую погрешность ϵ_{\max} будем иметь в точке $i = 2n/3$. Так как при одинаковых S эта погрешность на всех отрезках постоянна, то ее можно рассматривать как систематическую. Обозначив наибольшее ее значение через λ_ϵ , запишем

$$\lambda_\epsilon = \left(1 + \frac{n}{n+3} + \frac{n}{n+6} + \dots + \frac{n}{3n-3} \right) \eta. \quad (326)$$

Для определения η рассмотрим фигуру AOB (см. рис. 36), которую с достаточной степенью точности можно принять за прямоугольный треугольник. Тогда

$$\eta = S \operatorname{tg} \Delta\gamma.$$

Так как угол $\Delta\gamma$ мал, то

$$\eta = S \Delta\gamma / \rho. \quad (327)$$

Угол $\Delta\gamma$ является углом поворота касательной при перемещении точки по окружности на расстояние S . Для вычисления $\Delta\gamma$ воспользуемся формулой (323)

$$\Delta\gamma = \gamma_{i-1} - \gamma_i = \rho S / 2R. \quad (328)$$

Подставляя это значение в выражение (327), получим

$$\eta = S^2 / 2R, \quad (329)$$

тогда

$$\lambda_\epsilon = \left(1 + \frac{n}{n+3} + \frac{n}{n+6} + \dots + \frac{n}{3n-3} \right) \frac{S^2}{2R}. \quad (330)$$

Число отрезков n достаточно велико, что существенно затрудняет вычисление λ_ϵ по формуле (330). Для упрощения вычисления ряд в круглых скобках заменим убывающей арифметической прогрессией вида

$$1, \frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \dots, \frac{1}{3}$$

с числом членов $2n/3$. Нетрудно убедиться в том, что все члены прогрессии, кроме первого, несколько больше соответствующих членов ряда. Вычислим сумму членов прогрессии

$$\Sigma_{2n/3} = \frac{\frac{2}{3}n \left(1 + \frac{1}{3}\right)}{2} = \frac{4}{9}n.$$

Подставив это значение в (330), получим

$$\lambda_{\varepsilon} = \frac{4SSn}{92R} = \frac{2}{9}S \frac{Sn}{R}.$$

Так как $Sn = K$, а $K/R = \varphi_{\text{рад}} = \varphi_0/57,3$, то

$$\lambda_{\varepsilon} = 38,8 \cdot 10^{-4} \cdot S\varphi_0, \quad (331)$$

где φ_0 — угол поворота трассы в градусах дуги.

Для определения дисперсии случайной части погрешностей воспользуемся формулой (287)

$$D_{\varepsilon_{\text{max}}} = \left[1 + \left(\frac{n}{n+3}\right)^2 + \left(\frac{n}{n+6}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{3n-3}\right)^2 \right] D_{\eta}.$$

Обозначив

$$\frac{n}{n^2} + \frac{n}{(n+3)^2} + \frac{n}{(n+6)^2} + \dots + \frac{n}{(3n-3)^2} = k,$$

запишем

$$D_{\varepsilon_{\text{max}}} = knD_{\eta}.$$

Случайные отклонения от проектной трассы обусловлены влиянием погрешностей установки начального угла $\varphi/2$, передачи пройденного по окружности расстояния от счетчика пути к отклоняющему приспособлению, регистрации пути S счетчиком и установки R по шкале радиуса.

Погрешность установки начального угла зависит от величины базиса (расстояния от отклоняющего приспособления до экрана) и чувствительности приемника излучения. Обычно эта погрешность на порядок меньше остальных.

Погрешность передачи расстояния, обусловленная точностью изготовления системы передач, тоже мала и в расчетах точности ее можно не учитывать.

Наибольшее влияние на погрешности движения по трассе оказывают погрешности установки R на шкале радиусов и регистрации пройденного по окружности расстояния.

Рассматривая S и R в формуле (329) как случайные величины, получим

$$D_{\eta} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial R}\right)^2 D_R + \left(\frac{\partial \eta}{\partial S}\right)^2 D_S = \frac{S^4}{4R^2} \left(\frac{D_R}{R^2} + 4\frac{D_S}{S^2}\right),$$

где D_R и D_S — дисперсии реализации величин R и S в приборе.

Обозначив знаменатели относительных погрешностей реализации величин R и S соответственно через N_R и N_S , запишем

$$D_\eta = \frac{S^4}{4R^2} \left(\frac{1}{N_R^2} + \frac{4}{N_S^2} \right).$$

Преобразуем выражение перед скобками в правой части равенства

$$\frac{S^4}{4R^2} = \frac{1}{4} \frac{S^2 n^2}{n^2} \frac{S^2 n^2}{n^2 R^2} = \frac{1}{4n^4} K^2 \left(\frac{K}{R} \right)^2 = \frac{K^2 \varphi_0^2}{4 \cdot 57,3^2 n^4} = 0,761 \cdot 10^{-4} \frac{K^2 \varphi_0^2}{n^4}.$$

Откуда

$$D_\eta = 0,761 \cdot 10^{-4} \frac{K^2 \varphi_0^2}{n^4} \left(\frac{1}{N_R^2} + \frac{4}{N_S^2} \right).$$

Тогда

$$D_{\epsilon_{\max}} = knD_\eta = 0,761 \cdot 10^{-4} k \frac{K^2 \varphi_0^2}{n^3} \left(\frac{1}{N_R^2} + \frac{4}{N_S^2} \right).$$

При большом n коэффициент k изменяется незначительно. Так, при изменении n от 20 до 100 значение k изменяется от 0,235 до 0,227. Если в расчетах точности принять среднее значение $k = 0,231$, то погрешность коэффициента не превысит 2%. Тогда

$$D_{\epsilon_{\max}} = 17,6 \cdot 10^{-6} \frac{K^2 \varphi_0^2}{n^3} \left(\frac{1}{N_R^2} + \frac{4}{N_S^2} \right).$$

Если длину кривой K выразить в километрах, а стандарт ϵ_{\max} в метрах, то

$$D_{\epsilon_{\max}} = 17,6 \frac{K^2 \varphi_0^2}{n^3} \left(\frac{1}{N_R^2} + \frac{4}{N_S^2} \right). \quad (332)$$

Для вычисления предельного отклонения от трассы, обусловленного совместным влиянием систематических и случайных погрешностей, можно воспользоваться следующим выражением:

$$\delta_\epsilon = \lambda_\epsilon + t \sigma_{\epsilon_{\max}}, \quad (333)$$

где t — нормированное значение погрешности.

Выбор способа детальной разбивки зависит от требований к точности, условий измерения на объекте и наличия необходимых приборов. Сравним по точности наиболее распространенные способы разбивки.

Для одинаковых кривых в способе секущей численные значения координат меньше, чем в способе прямоугольных координат. Особенно резко это различие проявляется в направлении ординаты, т. е. в наиболее критическом направлении разбивки. Все это позволяет утверждать, что при прочих равных условиях способ секущей дает более точные результаты, чем способ прямоугольных координат.

В способе вписанного многоугольника накопление погрешностей в длинах кривой происходит пропорционально корню из числа сторон (хорд), а погрешностей в направлении радиуса — пропорционально кор-

но из суммы квадратов косинусов углов поворота трассы. Нетрудно убедиться в том, что возрастание погрешностей по мере увеличения числа сторон происходит достаточно быстро. Так, при числе сторон $n = 4$ и углах поворота $\nu = 15^\circ$, стандарт погрешности в длинах кривой увеличится в 2 раза, а в направлении радиуса — в 1,8 раза. Точный ответ на вопрос о погрешностях способов прямоугольных координат и вписанного многоугольника могут дать только конкретные расчеты.

В сравниваемых способах производится одинаковое число построенных углов, но в способе прямоугольных координат для построения точки необходимо отложить два отрезка (X и Y), а в способе вписанного многоугольника — только хорду l . Кроме того, в способе вписанного многоугольника построения углов и отрезков производятся в непосредственной близости от окружности, что очень удобно при возведении стен сооружений округлой формы.

Контроль по операциям при детальной разбивке обычно производят путем сравнения результатов двукратного построения углов и отрезков. Допускаемые расхождения в построениях углов при двух положениях вертикального круга и отрезков можно определить так же, как и в § 13 и 14. Дополнительный контроль, позволяющий выявить грубые просчеты, осуществляют измерениями длин хорд и углов между ними в способах прямоугольных координат и секущей, а в способе вписанного многоугольника — проложением исполнительного хода.

Разбивку вертикальных кривых обычно производят путем отложения расстояний по направлению тангенса и определения глубины выемки или высоты насыпи. В этом случае погрешности длины кривой обусловлены влиянием погрешностей отложения отрезков от начала кривой или вершины угла, а отклонения от кривой в направлении радиуса — влиянием погрешностей переноса в натуру проектных отметок, т. е.

$$\delta_K = \delta_l \text{ и } \delta_R = \delta_H, \quad (334)$$

где δ_H и δ_l — предельные погрешности переноса в натуру отметки и отложения проектного отрезка.

Рассмотрим примеры расчета точности разбивки круговых кривых различными способами.

Пример 27. Разбивку круговой кривой с радиусом $R = 200$ м и $\varphi = 60^\circ$ производят способом прямоугольных координат. Рассчитать допускаемые значения погрешностей построения проектных величин и определить допуски на контрольные измерения хорд, если отклонения от трассы не допускаются более 5 см.

Решение. При детальной разбивке наибольшая погрешность будет в точке, соответствующей значению угла $\varphi/2 = 30^\circ$, т. е. в середине кривой. Вычислим прямоугольные координаты этой точки

$$X = R \sin \frac{\varphi}{2} = 200 \sin 30^\circ = 100 \text{ м};$$

$$Y = 2R \sin^2 \frac{\varphi}{4} = 2 \cdot 200 \sin^2 15^\circ = 26,8 \text{ м}.$$

Предварительные значения числовых характеристик отложения отрезков, построения створа по оси абсцисс и прямого угла заимствует из примеров 18, 21 и 25

$$\lambda'_x = 9,7 \text{ мм}; \quad \sigma'_x = 7,2 \text{ мм}; \quad \lambda'_y = 2,1 \text{ мм}; \quad \sigma'_y = 4,5 \text{ мм}; \quad \sigma'_{\text{ств}} = 2,6 \text{ мм}; \\ \sigma'_\beta = 5,8 \text{ мм}.$$

Вычислим систематическую часть смещения точки окружности

$$\lambda' = \sqrt{\lambda_x'^2 + \lambda_y'^2} = \sqrt{9,7^2 + 2,1^2} = 9,9 \text{ мм.}$$

Проекция вектора λ' на направление касательной и нормали к окружности можно рассматривать как систематические части погрешностей в направлении радиуса и длине кривой. Для вычисления проекций определим угол ϑ_* между вектором λ' и осью Y

$$\operatorname{tg} \vartheta_* = \lambda_x' / \lambda_y' = 9,7 / 2,1 = 4,62, \quad \vartheta_* = 81,5^\circ.$$

Угол между касательной и осью Y равен $\varphi/2 = 30^\circ$. Вычислим угол α между вектором λ' и касательной

$$\alpha = \vartheta_* - \varphi/2 = 81,5 - 30,0 = 51,5^\circ$$

и проекции вектора

$$\lambda_R' = \lambda' \sin \alpha = 9,9 \sin 51,5^\circ = 7,7 \text{ мм;}$$

$$\lambda_K' = \lambda' \cos \alpha = 9,9 \cos 51,5^\circ = 6,2 \text{ мм.}$$

Определим стандарты погрешностей в направлении осей координат

$$\sigma_{e_x}' = \sqrt{\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2} = \sqrt{7,2^2 + 5,8^2} = 8,9 \text{ мм;}$$

$$\sigma_{e_y}' = \sqrt{\sigma_y'^2 + \sigma_{\text{гн}}'^2} = \sqrt{4,5^2 + 2,6^2} = 5,2 \text{ мм.}$$

При доверительной вероятности $P = 0,9973$ нормированное значение погрешности равно $t = 3,44$. Тогда полуоси эллипса будут равны

$$a = \delta'x = t \sigma_{e_x}' = 3,44 \cdot 8,9 = 30,6 \text{ мм;}$$

$$b = \delta'y = t \sigma_{e_y}' = 3,44 \cdot 5,2 = 17,9 \text{ мм.}$$

Вычислим допускаемые отклонения в направлении радиуса и длины кривой. Так как $\delta'_x > \delta'_y$, то в формулах (319) и (320) необходимо поменять местами δ'_x и δ'_y . Тогда

$$\delta'_{\sigma_R} = \frac{1}{200} \sqrt{100^2 \cdot 19,7^2 + 173,2^2 \cdot 30,6^2} = 28,3 \text{ мм;}$$

$$\delta'_{\sigma_K} = \frac{1}{200} \sqrt{173,2^2 \cdot 19,7^2 + 100^2 \cdot 30,6^2} = 22,9 \text{ мм.}$$

Определим предельное отклонение, обусловленное совместным влиянием случайных и систематических погрешностей,

$$\delta'_R = \lambda_R' + \delta'_{\sigma_R} = 8,9 + 28,3 = 37,2 \text{ мм} \approx 4 \text{ см;}$$

$$\delta'_K = \lambda_K' + \delta'_{\sigma_K} = 5,2 + 22,9 = 28,1 \text{ мм} \approx 3 \text{ см.}$$

Предварительные значения δ'_R и δ'_K близки к допускаемым отклонениям и не превышают 5 см. В этом случае с некоторым запасом надежности предварительные значения погрешностей построения отрезков, створа и углов можно принять за окончательные и не изменять методику измерений.

При установлении допусков на контрольные измерения хорд между соседними точками разбивки необходимо учитывать, что отличие измеренной длины хорды от теоретического значения обусловлено влиянием случайных погрешностей построения точек по направлению касательной. Обозначив допускаемое отклонение через δ_1 , окончательно получим

$$\delta_1 = \delta'_{\sigma_K} \sqrt{2} = 22,9 \sqrt{2} = 32 \text{ мм} \approx 3 \text{ см.}$$

Пример 28. При строительстве трубопроводов смещение трассы от проектного положения не должно превышать $\lambda_e < 1$ м, а отклонение от кривой (искривление трассы) на отрезке длиной 100 м — величины $\delta_{\sigma} < 10$ мм. Рассчитать длину отрезка пути между коррекциями и допускаемые значения относительных погрешностей $1/N_R$ и $1/N_S$, если углы поворота трассы не превышают 60° , а минимально допускаемый радиус окружности равен 150 м.

Решение. Так как при детальной разбивке кривой источник излучения устанавливают в середине кривой, то $\varphi_0 = 30^\circ$. Длину отрезка S между коррекциями определим по формуле (331). Решая это равенство относительно S , получим

$$S = \frac{1 \cdot 10^4}{38,8 \cdot 30} = 8,6 \text{ м} \approx 9 \text{ м}.$$

Искривление трассы обусловлено погрешностью установки радиуса. Если предположить, что эта погрешность целиком войдет в погрешность отклонения от трассы, то можно записать

$$1/N_R = \lambda_c/R_{\min} = 1/150.$$

Для расчета случайных погрешностей необходимо знать угол поворота трассы φ_0 при $R_{\min} = 150$ м и длине секции кривой 100 м, а также число отрезков коррекции в этой секции. Определим эти величины

$$\varphi_0 = \frac{100}{150} 57,3^\circ = 38,2^\circ; \quad n = \frac{100}{9} \approx 11.$$

Используя величины $1/N_R$, φ_0 , n , $K = 0,1$ км, заменяя значение $\sqrt{D_{\epsilon_{\max}}}$ на $\delta_{\sigma_{\epsilon}} = 0,03$ м и решая равенство (232) относительно N_S , получим

$$\frac{1}{N_S} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{0,01^2 \cdot 11^3}{17,6 \cdot 0,1^2 \cdot 38,2^2} - \frac{1}{150^2}} \approx \frac{1}{100}.$$

Таким образом, коррекцию движения необходимо производить через 9 м, а относительные погрешности установки проектного радиуса и регистрации пройденного пути не должны превышать соответственно 1:150 и 1:100. Эти требования особых затруднений при изготовлении прибора и производстве работ не вызывают.

§ 21. КОНТРОЛЬНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ИЗМЕРЕНИЯ ПРИ МОНТАЖЕ СБОРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ И ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

Монтаж сборных конструкций и технологического оборудования начинают с подготовительных операций. В этот период контролируют геометрические параметры сборного элемента.

Контроль сборного элемента обычно осуществляют путем измерения длины, ширины, высоты элемента и углов между его гранями. Эти простейшие операции выполняются силами монтажной организации. При высоких требованиях к точности, больших размерах и сложной конфигурации элемента контрольные измерения производит геодезическая служба монтажной организации.

При подготовке места под монтаж обычно производят контрольные измерения, определяющие положение установочных элементов (штырей, анкеров) и установочных рисок или осей. При монтаже ответственных конструкций производят исполнительную съемку установочных элементов.

Геодезические работы по выверке сборного элемента заключаются в определении фактического положения данного элемента в плане, по высоте и относительно отвесной линии (по вертикали). В соответствии с этим различают контроль за планово-высотным положением и контроль вертикальности сборных элементов.

Выверенные конструкции на определенном участке окончательно закрепляют и производят исполнительную съемку. Необходимость это-

го вида контрольных измерений вызвана смещениями монтируемых элементов при закреплении конструкций. В ряде случаев эти смещения существенно превышают погрешности выверки. В [3] приведены результаты исследований монтажа 16-этажного здания серии 1 МГ-601. По результатам этих исследований погрешности выверки колонн не превышают 2 мм, а смещения колонн при закреплении конструкций достигают 18 мм.

Все эти виды контрольных измерений производят для определения соответствия между фактическими и проектными значениями рассматриваемого параметра. По результатам контрольных измерений принимают решение о пригодности данного элемента к монтажу или эксплуатации. Следовательно, основное требование к контрольным измерениям — это достоверность полученных результатов. С этой точки зрения и следует подходить к выбору необходимой точности измерений.

Следует отметить, что при производстве контрольных измерений окончательный результат неизбежно искажается погрешностями измерений. Рассмотрим это на примере исполнительной съемки конструкции, отметив предварительно, что полученные закономерности являются общими для любого случая.

Итак, пусть при исполнительной съемке действительное отклонение i -й конструкции от проектного положения равно α_i , а погрешность определения этого отклонения β_i . В этом случае с нормативным отклонением δ_α сравнивают не фактическое значение α_i , а результат измерения $(\alpha_i + \beta_i)$, что может привести к неверному выводу о пригодности конструкции, т. е. к ошибке.

При сравнении гипотез в теории математической статистики различают два рода ошибок. Ошибка первого рода заключается в том, что конструкция будет забракована тогда, когда в действительности ее отклонение по абсолютной величине не превышает допустимого значения. Аналитически это отобразится системой неравенств

$$|\alpha_i| < |\delta_\alpha|;$$

$$|\alpha_i + \beta_i| > |\delta_\alpha|.$$

Определим вероятность появления этого события. Будем полагать, что α имеет нормальный закон распределения вероятностей, а величина допустимого отклонения определяется из соотношения

$$\delta_\alpha = K\sigma_\alpha$$

где K — отношение допустимого отклонения δ_α к стандарту σ_α .

Подставляя вместо δ_α его значение, получим

$$|\alpha_i| < K\sigma_\alpha;$$

$$|\alpha_i + \beta_i| > K\sigma_\alpha.$$

Величина β_i с учетом всех возможных комбинаций положительных и отрицательных значений переменных (рис. 37) определится из выражений

$$\beta_i^* > (K\sigma_\alpha - \alpha_i) \text{ — для верхнего предела;}$$

$$\beta_i^* < -(K\sigma_\alpha + \alpha_i) \text{ — для нижнего предела.}$$

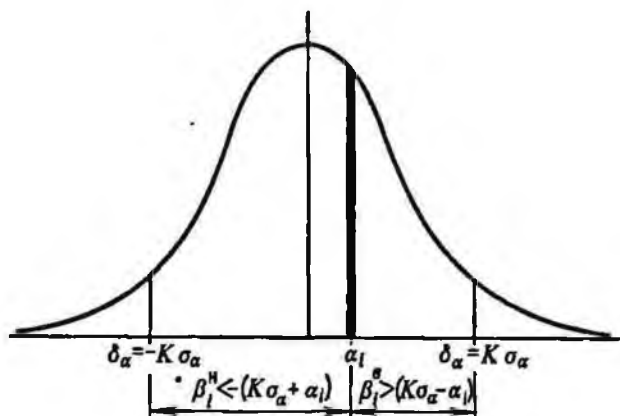


Рис. 37. График ошибки первого рода

Переходя к нормированным значениям β_i , получим

$$t_{\beta_i}^n = \frac{\beta_i^n}{\sigma_\beta} > \frac{k\sigma_\alpha - \alpha_i}{\sigma_\beta} = (K - t_{\alpha_i}) \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta};$$

$$t_{\beta_i}^n = \frac{\beta_i^n}{\sigma_\beta} < -\frac{K\sigma_\alpha + \alpha_i}{\sigma_\beta} = -(K + t_{\alpha_i}) \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta},$$

где σ_β — стандарт погрешностей измерений β , $t_{\alpha_i} = \alpha_i/\sigma_\alpha$ — нормированная величина α_i .

Погрешности измерений подчиняются закону нормального распределения. В этом случае вероятности появления рассматриваемых событий определяются по формулам

$$P_{\beta_i}^n = P[t_{\beta_i}^n > (K - t_{\alpha_i})k] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi(t_{\beta_i}^n);$$

(335)

$$P_{\beta_i}^n = P[t_{\beta_i}^n < -(K + t_{\alpha_i})k] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(t_{\beta_i}^n),$$

где $k = \sigma_\alpha/\sigma_\beta$ — коэффициент точности контрольных измерений.

Вероятность совместного появления α_i и β_i определится из выражения

$$P_{\Pi} = P_{\alpha_i}(P_{\beta_i}^n + P_{\beta_i}^n),$$

где P_{α_i} — вероятность появления α_i .

Так как α_i непрерывная величина, то от точечного значения необходимо перейти к малым отрезкам $\Delta\alpha = \alpha_{i+1} - \alpha_i$. В этом случае

$$P_{\alpha_i} = \frac{1}{2}[\Phi(t_{\alpha_{i+1}}) - \Phi(t_{\alpha_i})].$$

Для того чтобы ослабить влияние погрешностей вычислений в выражениях (335), целесообразно t_{α_i} относить к середине выбранных отрезков, т. е. взять значения $t_{\alpha_{срi}}$.

Чтобы определить общую вероятность появления ошибки первого рода P_I , необходимо просуммировать P_{II} по t_{α} в пределах допускаемого отклонения конструкции

$$P_I = \sum_{t_{\alpha} = -K}^K P_{II}.$$

Так как все значения в правой части этого уравнения симметричны относительно $t_{\alpha} = 0$, то $P_I = 2 \sum_{t_{\alpha} = 0}^K P_{II}$.

Подставив вместо P_{II} его значения, получим

$$P_I = \frac{1}{2} \left[\sum_{t_{\alpha} = 0}^K \Phi(t_{i+1}) - \Phi(t_i) \right] \{2 - \Phi[(K - t_{\alpha_{ср1}})k] - \Phi[(K + t_{\alpha_{ср1}})k]\}. \quad (336)$$

Ошибка второго рода заключается в том, что конструкция будет принята (не будет забракована) тогда, когда в действительности ее отклонение по абсолютной величине превышает допускаемое значение. Аналитически это отобразится системой неравенств

$$\begin{aligned} |\alpha_i| &> |\delta_{\alpha}| = K\sigma_{\alpha}; \\ |\alpha_i + \beta_i| &< |\delta_{\alpha}| = K\sigma_{\alpha}. \end{aligned}$$

Действуя аналогично предыдущему случаю и сообразуясь с рис. 38, получим формулу для вычисления вероятности появления ошибки второго рода

$$\begin{aligned} P_{II} &= \frac{1}{2} \sum_{t_{\alpha} = K}^{\infty} [\Phi(t_{i+1}) - \Phi(t_i)] \times \\ &\times \{2 - \Phi[(K - t_{\alpha_{ср1}})k] - \Phi[(K + t_{\alpha_{ср1}})k]\}. \end{aligned} \quad (337)$$

Общая вероятность появления ошибки первого и второго рода равна $P = P_I + P_{II}$. Подставляя в это выражение вместо P_I и P_{II} их значения из (336) и (337), окончательно получим

$$P = \frac{1}{2} \sum_{t_{\alpha} = 0}^{\infty} [\Phi(t_{i+1}) - \Phi(t_i)] \{2 - \Phi[(K - t_{\alpha_{ср1}})k] - \Phi[(K + t_{\alpha_{ср1}})k]\}. \quad (338)$$

Формула (338) рассчитана не для точечного значения α_i , а для малых участков $\Delta\alpha_i$. Погрешность вычисления P по этой формуле зависит от выбора величины отрезка $\Delta\alpha_i$ или соответствующего ему значения Δt_i . Чем больше Δt_i , тем больше погрешность вычисления P . На рис. 39 приведен график изменения значений P в зависимости от числа интервалов $n = K\Delta t_i$ для $K = 3$. Из графика видно, что по мере увеличения n (уменьшения Δt_i) вероятность P уменьшается и стремится к предельному значению. При вычислении P достаточно разбить K на 20 интервалов. При дальнейшем увеличении числа интервалов величина P практически остается неизменной, а объем вычислений возрастает.

Вероятность появления ошибки при приемке конструкций, как это видно из формулы (338), зависит от коэффициентов K и k .

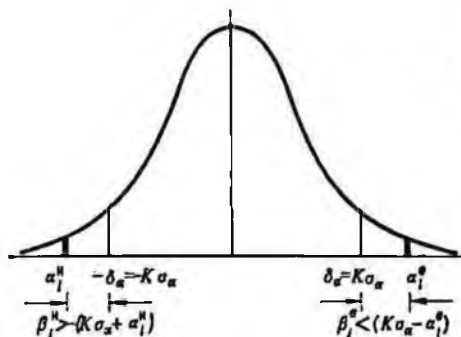


Рис. 38. График ошибки второго рода

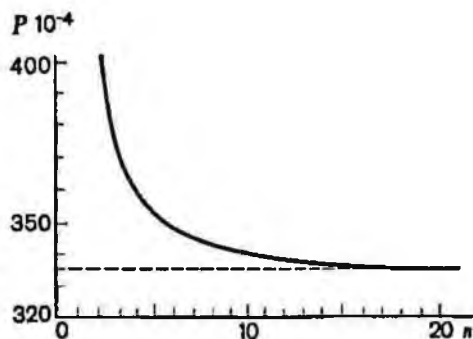


Рис. 39. График зависимости между P и n

Соотношение между фактической точностью выполнения работ (стандартом σ_a) и допускаемым отклонением δ_a , характеризуемое коэффициентом K , назначается проектными организациями при разработке технологии монтажа конструкций. Исходя из требования полной собираемости конструкций при возведении сборных сооружений в строительстве K принимают равным 3. Однако в производстве требования к точности часто не соблюдаются, что приводит к изменению соотношения между σ_a и δ_a . В ряде случаев коэффициент K принимает значения 2,5 и даже 2,0.

При расчетах точности контрольных измерений при заданных значениях K и P по формуле (338) можно определить значение k и, следовательно, значение $\sigma_B = \sigma_a/k$.

Вычисления по этой формуле связаны с большими затратами труда. В табл. 6 для наиболее распространенных значений K и k приведены вероятности появления ошибок при приемке конструкций.

На первый взгляд кажется, что P пренебрегаемо мало. Так, при значениях $K = 3$ и $k = 1$ вероятность появления ошибок $P = 0,0335$. Но при полносборном методе возведения сооружений вероятность нарушения условия принимается равной $P = 1 - 0,9973 = 0,0027$. В этих условиях вряд ли целесообразно осуществлять контроль за отклонениями конструкций с вероятностью ошибочного заключения $P = 0,0335$, т. е. в 13 раз большей.

В Информационном сообщении Постоянной комиссии СЭВ по строительству [24] точность контрольных измерений в строительстве рекомендуется принимать равной 0,1 от величины допуска на размер изделия

Таблица 6

Значения K	Значения k				
	1	2	3	5	10
2	0,1571	0,0740	0,0580	0,0535	0,0467
3	0,0335	0,0064	0,0031	0,0016	0,0007

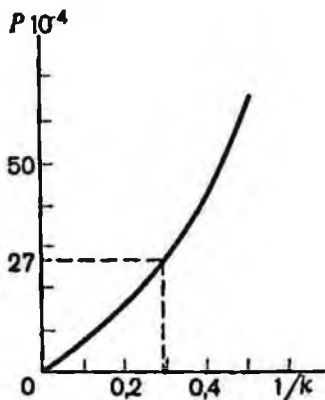


Рис. 40. График вероятности появления ошибок при приемке конструкций для $K = 3$

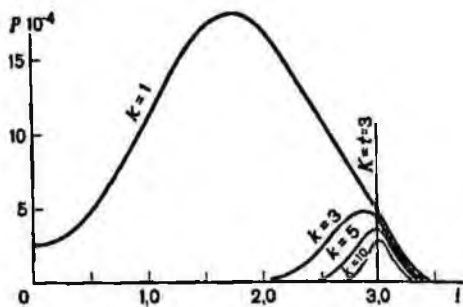


Рис. 41. График зависимости между P и t_α

или на отклонение конструкции при монтаже. При этом нет указаний, какое значение K принимается при назначении δ_α .

Думается, что такой общий подход к решению всех задач в строительстве вряд ли правомерен. Нет, например, никаких оснований с единой меркой подходить к контролю ответственных несущих конструкций уникального здания и к ограждающим конструкциям складских помещений. Отметим, что с возрастанием точности исполнительной съемки увеличиваются трудозатраты, возрастает стоимость и самое главное — увеличиваются сроки выполнения работ. С другой стороны, недостаточная точность съемок снижает их эффективность и понижает общее качество постройки.

Назначение точности контрольных измерений (выбор k) необходимо производить в период разработки проекта производства работ, учитывая при этом технологию монтажа, сроки выполнения работ и требования к надежности данной конструкции. Только при таких условиях можно выбрать действительно оптимальный вариант. Формула (338) позволяет осознанно подойти к решению задачи, т.е. заранее определить, какой результат будет получен при том или ином значении k .

Для определения значений k можно использовать график (рис. 40).

Рассмотрим характер распределения ошибок при приемке конструкций в зависимости от величины отклонения t_α конструкции и точности контрольных измерений, т.е. значения k . Рассмотрим зависимость P от k (рис. 41), где $k = 1, 3, 5$ и 10 для случая, когда $\delta_\alpha = 3\sigma_\alpha$. Части кривых распределения вероятностей, расположенные левее прямой $K = t = 3$, соответствуют появлению ошибок первого рода, а правее — появлению ошибок второго рода. На графике видно, что для $k < 10$ преобладающее значение имеют ошибки первого рода. Иными словами, мы значительно чаще бракуем пригодную конструкцию, чем принимаем бракованную. Это явление нельзя признать особо опасным, но и желательным назвать тоже нельзя. В вопросах оценки качества и приемки конструкций нужна объективная оценка явления.

В производственных условиях часто применяют повторные измерения конструкций, которые по результатам исполнительной съемки пре-

вышают допуски. Не углубляясь в детали, отметим, что такой путь связан с ощутимыми трудовыми затратами и требует перерыва в строительно-монтажных работах. Кроме того, повторные измерения логично производить там, где вероятность ошибки выше. Как видно из графика при $k = 1$, это будет при $t_{\alpha} \approx 1,8$, что потребует повторить измерения для 30% всех конструкций.

Рассмотрим еще один аспект затронутой проблемы. При расчетах точности допускаемое отклонение часто принимают равным $\delta_{\alpha} = 2\sigma_{\alpha}$. В этом случае вероятность появления ошибок при приемке конструкций резко возрастает. Так, при $k = 1$ из 100 конструкций 16 будут приняты или забракованы ошибочно (см. табл. 6). Даже повышение точности съемки не улучшает результаты. При $k = 10$ пять конструкций из 100 будут приняты или забракованы ошибочно. Таким образом, при $K = 2$ мы встречаемся с таким случаем, когда отклонение конструкций плохо поддается контролю.

Рассмотрим способы наиболее распространенных видов контрольных измерений и расчеты их точности.

Определение размеров сборных элементов производят путем измерения расстояний между характерными точками этого элемента. В этом случае для расчета точности необходимо знать допускаемое отклонение размера элемента δ_{α} , коэффициент K и доверительную вероятность P появления ошибки при приемке. Эти данные позволяют определить значение коэффициента k точности исполнительной съемки и значение стандарта контрольных измерений σ_{β} . Расчет элементарных погрешностей и допусков на контроль по операциям для обеспечения заданного значения σ_{β} можно осуществить методами, изложенными в § 13.

Определение отклонений поверхности контролируемого объекта от плоскости производят с помощью геометрического или бокового нивелирования. Если исследуемая поверхность располагается в горизонтальной плоскости, то для контроля применяют геометрическое нивелирование, если в вертикальной плоскости — то боковое нивелирование.

При выполнении работ методом геометрического нивелирования на контролируемой поверхности выбирают не менее девяти точек, между которыми определяют превышения (рис. 42). Рассматривая профили по точкам, расположенным на одной прямой в плане, определяют отклонения Δ средних точек от пространственной прямой, соединяющей крайние

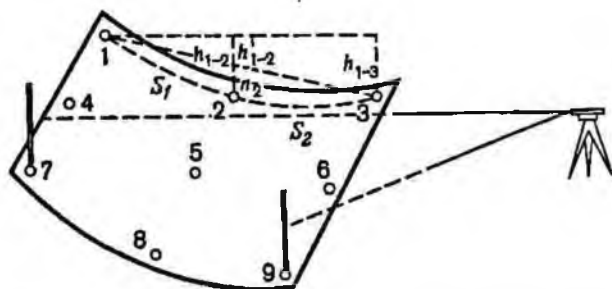


Рис. 42. Определение отклонений от плоскости

точки. Для контроля по профилю, проходящему через точки 1-3, отклонение η_2 определяют из выражения

$$\eta_2 = h_{1-2} - h_{1-2} = h_{1-2} - \frac{S_1}{S_1 + S_2} h_{1-3}. \quad (339)$$

Полученные значения η_i сравнивают с допуском δ_n и выдают заключение о пригодности элемента.

Если стандарт определения η обозначить через σ_β , а стандарт определения превышений — через σ_h , то

$$\sigma_\beta = \sigma_h \sqrt{1 - \frac{S_1^2}{(S_1 + S_2)^2}}. \quad (340)$$

Контроль за отклонением методом бокового нивелирования во многом сходен с геометрическим нивелированием. Различие заключается в том, что при боковом нивелировании вместо превышений вычисляют разности отклонений от отвесной плоскости. Если отклонение точки J поверхности исследуемого объекта от отвесной плоскости обозначить через Δ_j , то формула (339) будет иметь вид

$$\eta_2 = (\Delta_2 - \Delta_1) - \frac{S_1}{S_1 + S_2} (\Delta_3 - \Delta_1) \quad (341)$$

В этом случае σ_β можно определить по формуле

$$\sigma_\beta = \sigma_\Delta \sqrt{2 - \frac{2S_1^2}{(S_1 + S_2)^2}}, \quad (342)$$

где σ_Δ — стандарт определения отклонений Δ_j .

Контроль планового положения сборных конструкций часто производят непосредственным измерением расстояния между рисками детальной разбивки осей и установочными рисками или характерными точками монтируемого элемента. В этом случае расчет точности сводится к расчету точности измерения расстояний.

При исполнительных съемках конструкций, выполняемых методом бокового нивелирования, иногда определяют отклонение геометрической оси сборного элемента конструкции от проектной оси сооружения. Так как в процессе съемки рейку устанавливают на наружную грань элемента, то отклонение η можно определить по формуле

$$\eta = a - b - c, \quad (343)$$

где c — расстояние от наружной грани элемента до его геометрической оси.

Величину c или измеряют на чертеже, или определяют путем обмера конструкции. При расчетах точности исполнительной съемки дисперсию D_c величины c или приравнивают дисперсии изготовления конструкции, или дисперсии измерения элемента. В последнем случае дисперсия D_β исполнительной съемки определится по формуле

$$D_\beta = D_\Delta + D_c, \quad (344)$$

где D_Δ — дисперсия определения отклонения наружной грани от оси.

При значении c , снимаемом с чертежа, дисперсия D_c равна, а иногда и

существенно превосходит D_{Δ} . Исполнительную съемку повышенной точности производят путем определения отклонений по обеим наружным граням конструкции, тогда при расчетах точности в формуле (344) принимают $D_c = 0$.

Контроль высотного положения сборных конструкций обычно производят геометрическим нивелированием. При расчетах точности исполнительной съемки необходимо учитывать влияние наклона поверхности конструкций вблизи определяемой точки. Если дисперсию, обусловленную влиянием этого источника погрешностей, обозначить через D_v , а дисперсию определения превышений через D_h , то

$$D_{\beta_n} = D_h + D_v, \quad (345)$$

где D_{β_n} — дисперсия высотной исполнительной съемки.

Оценку дисперсии D_v обычно определяют экспериментальным путем. Так, при исполнительной съемке консолей колонн высотных зданий на проспекте Калинина в Москве оценка стандарта оказалась равной $\sigma_v = 0,4$ мм

При контроле вертикальности конструкций с помощью бокового нивелирования определяются отклонения верха Δ_n и низа Δ_n конструкции от отвесной плоскости. Отклонение η конструкции от отвесной линии определяют по формуле

$$\eta = \Delta_n - \Delta_n.$$

Применяя принятые обозначения, запишем

$$D_{\beta} = D_{\Delta_n} + D_{\Delta_n}. \quad (346)$$

Отметим, что значения дисперсий в правой части равенства (346) обычно не равны между собой. Это объясняется тем, что при определении Δ_n углы наклона визирного луча обычно существенно превышают углы наклона для Δ_n .

Пример 29. Плановую исполнительную съемку 6-метровых колонн выполняют боковым нивелированием, а высотную съемку опорных площадок консолей колонн — геометрическим нивелированием. Допустимое отклонение осей колонн от вертикали в верхнем сечении равно $\delta_{\alpha_n} = 15$ мм, а допустимое отклонение опорных площадок — $\delta_{\alpha_n} = 10$ мм. Рассчитать необходимую точность определения отклонений точек боковым нивелированием и точность измерения превышений, если $K = 3$, стандарт определения расстояния от грани до оси колонны равен $\sigma_c = 0,5$ мм, а стандарт погрешности, обусловленной влиянием наклона опорных площадок, равен $\sigma_v = 0,4$ мм. Вероятность появления ошибки при приемке конструкций допускается не больше 0,0027.

Решение. По известным значениям δ_{α_n} , δ_{α_n} и K вычислим стандарты погрешностей монтажа колонн в плановом и высотном положении

$$\sigma_{\alpha_n} = \delta_{\alpha_n} / K = 15/3 = 5 \text{ мм}; \quad \sigma_{\alpha_n} = 10/3 = 3,3 \text{ мм}.$$

По графику на рис. 40 для значения $P = 0,0027$ находим $1/k = 0,31$. Откуда

$$\sigma_{\beta_n} = 0,31 \cdot 5 \approx 1,55 \text{ мм}; \quad \sigma_{\beta_n} = 0,31 \cdot 3,3 = 1,03 \text{ мм}.$$

Так как отклонения оси колонны определяют как разность отклонений граней колонны в верхнем и нижнем сечениях, то

$$D_{\Delta_n} + D_{\Delta_n} = D_{\beta_n} = 1,55^2 = 2,40 \text{ мм}^2.$$

Для определения дисперсии D_{Δ_n} и D_{Δ_n} воспользуемся принципом пропорционального изменения погрешностей. В качестве приближенного значения диспер-

сии примем $D'_{\Delta_n} = 1,83 \text{ мм}^2$. Для вычисления дисперсии D'_{Δ_n} будем полагать, что $v = 0$, т. е. $D_{i_0} = 0$. Тогда

$$D'_{\Delta_n} = 1,83 - 0,29 = 1,54 \text{ мм}^2.$$

Вычислим коэффициент пропорциональности

$$k_0 = \frac{D_{\Delta_n} + D'_{\Delta_n}}{D'_{\Delta_n} + D'_{\Delta_n}} = \frac{2,40}{1,83 + 1,54} = 0,71$$

и определим искомые величины

$$D_{\Delta} = 0,71 \cdot 1,83 = 1,30 \text{ мм}^2, \quad \sigma_{\Delta} = 1,1 \text{ мм};$$

$$D'_{\Delta_n} = 0,71 \cdot 1,54 = 1,09 \text{ мм}^2, \quad \sigma'_{\Delta_n} = 1,0 \text{ мм}.$$

Дисперсию определения превышений вычислим по формуле (345)

$$D_{\Delta} = 1,03^2 - 0,4^2 = 0,90 \text{ мм}^2$$

или

$$\sigma_{\Delta} = \sqrt{0,90} = 0,95 \text{ мм} \approx 1,0 \text{ см}.$$

Таким образом, чтобы вероятность ошибок при приемке конструкций не превысила 0,0027, необходимо обеспечить проведение плановых исполнительных съемок со стандартами $\sigma_{\Delta_n} \leq 1,1 \text{ мм}$ и $\sigma'_{\Delta_n} \leq 1,0 \text{ мм}$, а высотных съемок со стандартом $\sigma_{\Delta} \leq 1,0 \text{ мм}$.

Глава V

РАСЧЕТЫ ТОЧНОСТИ ИНЖЕНЕРНО-ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

§ 22. ВЫСОТНЫЕ СЕТИ НА СТРОИТЕЛЬНЫХ ОБЪЕКТАХ

При возведении небольших по площади сооружений или объектов массовой застройки отметки на строительной площадке определяют геометрическим нивелированием от пунктов государственной или городской сети. Методика выполнения этих работ и требования к точности достаточно полно регламентированы нормативными документами и в специальных расчетах точности не нуждаются.

При возведении уникальных сооружений или объектов, расположенных на значительной территории и связанных по высоте в единую технологическую цепь, возникает необходимость в создании специальных высотных сетей. Пункты этих сетей служат обоснованием для выполнения различных работ на строительной площадке.

Эти сети обычно создаются как свободные, т. е. отметка одного из пунктов принимается за исходную, а отметки остальных пунктов определяются из уравнивания сети.

Определение точности построения сети зависит от поставленной задачи. Для правильного установления точности определяют погрешность положения пункта в наиболее слабом месте по отношению к исходному пункту, а также погрешность взаимного положения пунктов, с которых передаются отметки на одну из точек сооружения.

Если при проектировании сети даны доверительная вероятность P , допустимое отклонение δ_k погрешности пункта K , расположенного в самом слабом месте сети по отношению к исходному пункту, и допустимое отклонение δ_{ij} в отметках пунктов I и J , то обозначив стандарты измерения превышений соответственно через σ_k и σ_{ij} , можно записать

$$\delta_k \geq t\sigma_k; \quad \delta_{ij} \geq t\sigma_{ij}.$$

Так как $\sigma = \mu/\sqrt{P}$, то

$$\mu \leq \frac{\delta_k \sqrt{P_k}}{t}; \quad \mu \leq \frac{\delta_{ij} \sqrt{P_{ij}}}{t},$$

где μ — стандарт единицы веса; P — вес.

Величина μ характеризует погрешность определения превышения, вес которого равен единице. При расчетах точности в качестве такого измерения имеет смысл принять определение превышения на станции со средней длиной плеч и средним значением превышения.

Другие определяемые величины P_k и P_{ij} зависят от размеров и формы сети.

Для определения единицы веса необходимо решить систему из двух неравенств с тремя неизвестными. Так как при проектировании сети места постановки реперов и форма сети достаточно точно определяются по стройгенплану, то целесообразно определить по схеме сети P_k и P_{ij} и отдельно решить неравенства системы (347). За окончательное значение стандарта единицы надо принять наименьшее из полученных.

Так как за стандарт единицы веса принимается стандарт определения превышения на станции со средней длиной плеч и средним превышением, то допустимые значения элементарных погрешностей и методику измерений можно выбрать так же, как показано в § 15.

Рассмотрим подробно отдельные этапы расчета. Проектирование сети целесообразно производить на геодезической подоснове строительного участка, что позволит с максимально возможной точностью определить веса ходов. Веса ходов выписывают на схему и приступают к вычислению весов P_k и P_{ij} в наиболее слабых местах сети.

При строгом способе определения весов по чертежу сети составляют нормальные уравнения коррелат и вычисляют коэффициенты функций F для отметки точки K и для превышения между точками I и J . Значение обратных весов получают в схеме решения нормальных уравнений после исключения последней коррелаты. Сама схема решения уравнений в последующем используется для уравнивания сети.

При большом числе условий в сети такой способ определения весов связан с большим объемом вычислений. Кроме того, при нивелировании сети веса отдельных ходов могут измениться. Поэтому веса в сети целесообразно определять одним из приближенных способов. Для сети правильной формы наиболее подходящим следует признать способ, предложенный В. В. Котовым. В этом способе вес пункта K определяется по формуле в виде цепной дроби

$$P_k = [P_0]_1 + \frac{[P]_1}{1 + \frac{[P]_1}{[P_0]_2} + \frac{[P]_2}{1 + \frac{[P]_2}{[P_0]_3} + \dots}} \quad (348)$$

где $[P_0]_1, [P_0]_2, \dots$ — сумма весов звеньев, примыкающих к твердым пунктам, соответственно 1, 2, ... порядка по отношению к определяемой точке; $[P]_1, [P]_2, \dots$ — сумма весов звеньев, примыкающих к узловым пунктам, соответственно 1, 2, ... порядка по отношению к определяемой точке.

Весы уравненных превышений в ходах между узловыми пунктами можно определить по формуле

$$P_i = \frac{n}{i(n-i)}, \quad (349)$$

где n — число станций в ходе; i — число станций от узловой до определяемой точки.

При выполнении работ на строительной площадке передачу отметок на сооружение осуществляют от ближайшего пункта высотной сети. Допускаемое отклонение δ_{ij} в этом случае ограничивает влияние погрешностей исходных данных. При расчетах точности пункты I и J располагают в таком месте, где условия привязки наиболее неблагоприятны.

Если высотная сеть совмещена со строительной сеткой, то пункты I и J располагают по диагонали самого большого прямоугольника, а вес P_{ij} вычисляют по формуле

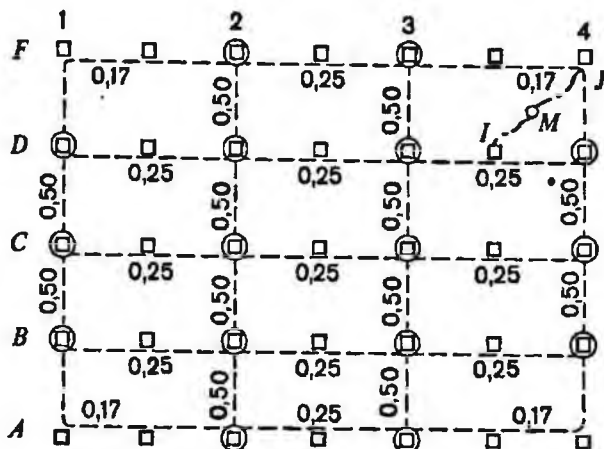
$$1/P_{ij} = 1/P_i + 1/P_j,$$

где P_i, P_j — веса уравненных превышений по сторонам прямоугольника.

На строительных площадках со значительными превышениями необходимо учитывать и систематическую часть погрешности превышения, которая в основном обусловлена влиянием наклона реек. Зависимость между систематической частью λ_v и стандартом σ_v установки рейки в отвесное положение характеризуется равенством (277). Так как в свободной сети влияние систематической части погрешности не устраняется в результате уравнивания сети, то λ_v целиком входит в отметки пунктов. Если на плане строительной площадки определить максимальное превышение h_{\max} , то по заданному значению σ_v можно вычислить λ_v , и наоборот. Величина λ_v при проектировании высотной сети обычно не оговаривается. Поэтому, принимая влияние систематической части пренебрегаемо малым, например при $\lambda_k \leq 0,1\delta_k$, вычисляют необходимую точность установки реек в отвесное положение и подбирают уровень соответствующей чувствительности.

Пример 30. Высотная сеть на объекте совмещена со строительной сеткой, стороны которой равны 250 м (рис. 43). Рассчитать необходимую точность измерения превышений и установки реек в отвесное положение, если $\delta_k = 10$ мм,

Рис. 43. Схема высотной сети



$\delta_{ij} = 3$ мм, а среднее превышение на станции и максимальное колебание отметок на объекте соответственно равны $h = 1,5$ м, $h_{\max} = 30$ м.

Решение. При нивелировании по пунктам строительной сетки для каждой стороны необходимо иметь две станции нивелирования со средней длиной плеч 75 м. Вычислим веса ходов как величину, обратную числу станций в ходе, и полученные значения выпишем на схеме сети. Вес P_k наиболее удаленной точки (пункта B1 по отношению к пункту D4) вычислим по формуле (348)

$$P_k = 0 + \frac{0,92}{1 + \frac{0,92}{0 + \frac{2,25}{1 + \frac{2,25}{0 + \frac{2,59}{1 + \frac{2,59}{0 + \frac{2,25}{1 + \frac{2,25}{0 + 1,42}}}}}}}}$$

Контроль:

$$0,92 + 2,25 + 2,59 + 2,25 + 1,42 = 9,43.$$

Рассмотрим вычисление P_{ij} для точки M, лежащей в середине квадрата, расположенного в северо-восточном полигоне сети. Веса превышений по сторонам квадрата определим по формуле (349)

$$P_i = \frac{4}{2 \cdot 2} = 1 \text{ и } P_j = \frac{6}{2 \cdot 4} = \frac{3}{4},$$

тогда

$$\frac{1}{P_{ij}} = \frac{1}{1} + \frac{4}{3} = \frac{7}{6} \text{ или } P_{ij} = 0,86.$$

При доверительной вероятности $P = 0,9973$ и нормальном законе распределения вероятностей $t = 3$. Решая неравенства (347) относительно μ , получим

$$\mu_k \leq \frac{10\sqrt{0,33}}{3} = 1,9 \text{ мм; } \mu_{ij} \leq \frac{3\sqrt{0,86}}{3} = 0,93 \text{ мм.}$$

За окончательное значение стандарта единицы веса примем значение $\mu = 0,9$ мм.

Допускаемую величину стандарта установки рейки в отвесное положение вычислим по формуле (277)

$$\sigma_r = 3438 \sqrt{\frac{2 \cdot 0,1 \cdot 10}{3 \cdot 10^4}} = 28'$$

Цена деления τ круглого уровня связана с σ_v соотношением $\tau = 2\sigma_v$. Тогда $\tau = 2 \cdot 28 = 56'$.

Таким образом, для обеспечения заданной точности стандарт определения превышений на одной станции не должен превышать 0,9 мм, а рейку необходимо устанавливать в отвесное положение по круглому уровню с ценой деления $\tau = 56' \approx 1^\circ$.

§ 23. ПЛАНОВЫЕ СЕТИ НА СТРОИТЕЛЬНЫХ ОБЪЕКТАХ

Плановое обоснование для разбивки осей на строительных объектах часто создают в виде специальных сетей. Наиболее распространенные виды таких сетей — это строительные сетки и плановые сети на исходных и монтажных горизонтах зданий или сооружений.

Сеть, представляющая собой строительную сетку, обычно состоит из правильных фигур, стороны которых параллельны осям сооружений, что позволяет достаточно просто и эффективно выполнять разбивочные работы.

Места постановки знаков жестко ограничены условиями строительного объекта и формой фигур в сети. Отклонения в положении пунктов от проекта при реализации сети обычно незначительны и не влияют на показатели формы сети. Например, при построении сетей на монтажных горизонтах многоэтажных зданий все коэффициенты нормальных уравнений остаются неизменными на всех ярусах разбивки.

При расчетах точности обоснования для съемки обычно оценивают только погрешности пункта в наиболее слабом месте сети. Одного этого показателя точности для инженерно-геодезической сети недостаточно.

Под влиянием погрешностей измерений в сетях происходят искажения формы и размеров отдельных элементов (углов, длин сторон), возникают сдвиги пунктов относительно друг друга и исходного начала. В зависимости от конкретных условий к одним видам деформаций сети могут предъявляться более жесткие требования, в то время как другие, не оказывающие существенного влияния на качество сети, могут не учитываться. При строительстве тоннелей, например, более жесткие требования предъявляются к поперечным смещениям пунктов, при возведении сооружений кольцевого типа — к радиальным смещениям.

Такая постановка задачи требует более детальной оценки различных видов деформаций в сети. С учетом этих особенностей рассмотрим общий ход расчета точности инженерно-геодезических сетей.

Требования к точности построения сети определяют в зависимости от назначения и специфики выполнения геодезических работ на объекте. При этом необходимо выявить виды деформаций сети, к которым предъявляются наиболее жесткие требования, назначить допустимые отклонения δ и доверительную вероятность P .

Обозначив номер условия, порождаемого ограничениями разных видов искажений сети, через $i = 1, 2, \dots, n$ и вычислив по доверительной вероятности значение нормированной погрешности t_i , можно составить

систему из n неравенств вида (347). Неравенства системы запишем в виде

$$\mu_i \leq \delta_i \sqrt{P_i} / l. \quad (350)$$

Как и ранее, для решения системы неравенств (350) воспользуемся тем, что размеры и форма сети в процессе построения практически не изменяются. Это обстоятельство позволяет достаточно надежно определить веса P_i различных условий.

Решение системы неравенств, т.е. отыскание максимального значения μ , удовлетворяющего всем неравенствам системы, сводится в этом случае к определению минимального значения $\delta_i \sqrt{P_i}$ из всех неравенств системы.

По полученному значению стандарта единицы веса можно рассчитать допускаемые отклонения погрешностей измерений и подобрать соответствующую методику выполнения работ.

Рассмотрим основные этапы расчета.

При параметрическом способе уравнивания коэффициенты уравнений погрешности и веса измеренных величин определяют по проекту сети. Решение существенно упрощается тем, что большинство сторон сети параллельны осям координат, а фигуры имеют геометрически правильную форму.

Для оценки сети интересующие нас деформации (искажения элементов сети) представляют в виде функции F поправок δx и δy к координатам пунктов.

При составлении функции $F_{s_{ij}}$ для длины стороны между пунктами I и J выразим S_{ij} через координаты пунктов

$$s_{ij}^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2.$$

Дифференцируя S_{ij} по координатам, запишем

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial x_i} = -\frac{x_j - x_i}{s_{ij}} = -\cos \alpha_{ij}; \quad \frac{\partial s_{ij}}{\partial x_j} = \frac{x_j - x_i}{s_{ij}} = \cos \alpha_{ij};$$

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial y_i} = -\frac{y_j - y_i}{s_{ij}} = -\sin \alpha_{ij}; \quad \frac{\partial s_{ij}}{\partial y_j} = \frac{y_j - y_i}{s_{ij}} = \sin \alpha_{ij},$$

где α_{ij} — дирекционный угол с пункта I на J .

Разложив s_{ij} в ряд Тейлора и переходя к поправкам, получим

$$F_{s_{ij}} = -\cos \alpha_{ij} \delta x_i - \sin \alpha_{ij} \delta y_i + \cos \alpha_{ij} \delta x_j + \sin \alpha_{ij} \delta y_j. \quad (351)$$

Для дирекционного угла α_{ij} , имеем

$$\alpha_{ij} = \arctg \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} = \arctg \frac{\Delta y_{ij}}{\Delta x_{ij}}.$$

Так как

$$\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial x_i} = \rho \frac{\sin \alpha_{ij}}{s_{ij}} = a_{ij}; \quad \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial x_j} = -\rho \frac{\sin \alpha_{ij}}{s_{ij}} = -a_{ij};$$

$$\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial y_i} = -\rho \frac{\cos \alpha_{ij}}{s_{ij}} = b_{ij} \text{ и } \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial y_j} = \rho \frac{\cos \alpha_{ij}}{s_{ij}} = -b_{ij}.$$

то

$$F_{a_{ij}} = a_{ij} \delta x_i + b_{ij} \delta y_i - a_{ij} \delta x_j - b_{ij} \delta y_j. \quad (352)$$

Угол β на пункте K можно представить в виде разности дирекционных углов пунктов J и I

$$\beta_{ij}^k = \alpha_{kj} - \alpha_{ki} = \text{arctg} \frac{y_j - y_k}{x_j - x_k} - \text{arctg} \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k}.$$

Используя формулу (352), получим

$$F_{\beta_{ij}}^k = (a_{kj} - a_{ki}) \delta x_k + (b_{kj} - b_{ki}) \delta y_k + a_{jk} \delta x_j + b_{jk} \delta y_j - a_{ik} \delta x_i - b_{ik} \delta y_i. \quad (353)$$

Равенства (351), (352) и (353) позволяют определить обратные веса уравниваемых значений S_{ij} , a_{ij} и β_{ij}^k .

Для определения обратного веса функции F матрицу нормальных уравнений окаймляют коэффициентами f функции перед неизвестными δx и δy . Схема матрицы при двух функциях $F^{(1)}$ и $F^{(2)}$ имеет вид

$[paa]$	$[pab]$...	$[pag]$	$f_1^{(1)}$	$f_1^{(2)}$	(354)
	$[pbb]$...	$[pbg]$	$f_2^{(1)}$	$f_2^{(2)}$	
		
			$[pgg]$	$f_k^{(1)}$	$f_k^{(2)}$	
$f_1^{(1)}$	$f_2^{(1)}$...	$f_k^{(1)}$	$f_{k+1}^{(1)} = 0$		
$f_1^{(2)}$	$f_2^{(2)}$...	$f_k^{(2)}$		$f_{k+1}^{(2)} = 0$	

Вычисления обратных весов $1/P_{F^{(i)}}$ обычно выполняют по схеме Гаусса

$[paa]$	$[pab]$...	$[pag]$	$f_1^{(1)}$	$f_1^{(2)}$	(355)
	$[pbb \cdot 1]$...	$[pbg \cdot 1]$	$[f_2^{(1)} \cdot 1]$	$[f_2^{(2)} \cdot 1]$	
		
			$[pgg \cdot k]$	$[f_k^{(1)} \cdot k]$	$[f_k^{(2)} \cdot k]$	
				$[f_{k+1}^{(1)} \cdot (k+1)] =$ $= \frac{1}{P_{F^{(1)}}}$	$[f_{k+1}^{(2)} \cdot (k+1)] =$ $= -\frac{1}{P_{F^{(2)}}}$	

Для определения погрешности пункта I в наиболее слабом месте сети этот пункт при составлении нормальных уравнений ставят на последнее место. Если координаты пункта обозначать через x_i и y_i , то в схеме Гаусса они будут иметь обозначения $x_i = x_{k-1}$ и $y_i = y_k$. В этом случае вес ординаты определится из равенства $P_{y_i} = P_x = [gg \cdot k]$, а вес абсциссы $P_{x_i} = P_{x_{k-1}}$ можно вычислить по формуле (91). Оси координат инженерно-геодезических сетей обычно параллельны осям сооружений. Поэтому смещения пунктов по направлению продольных и поперечных осей сооружений совпадают со смещениями по осям координат. Это

пункта. В этом случае каждая связь будет иметь по два коэффициента уравнений поправок, а число неизвестных удвоится.

При коррелятном способе уравнивания искажения отдельных элементов или координат пунктов представляют в виде функции F поправок v к измеренным величинам.

Рассмотрим наиболее характерные примеры функций.

В триангуляции и для оценки измеренных и дирекционных углов сети функции имеют наиболее простой вид. Так, для сети, изображенной на рис. 45, для оценки угла β_4 функция имеет вид $F_{\beta_4} = v_4$, а для оценки дирекционного угла $\alpha_{ij} - F_{\alpha_{ij}} = +v_2 - v_5$.

Для оценки длину стороны S_{ij} между пунктами I и J выразим через известную сторону S_{AB} и измеренные углы β

$$S_{ij} = S_{AB} \frac{\sin \beta_3 \sin \beta_6}{\sin \beta_1 \sin \beta_4}.$$

Логарифмируя это выражение и переходя к поправкам v , получим

$$F_{S_{ij}} = -\Delta_1 v_1 + \Delta_3 v_3 - \Delta_4 v_4 + \Delta_6 v_6, \quad (356)$$

где Δ — изменение логарифма синуса угла на $1''$.

Для определения веса абсциссы пункта J используем ходовую линию по связующим сторонам и представим x_j в виде функции

$$x_j = x_A + S_{Ai} \cos \alpha_{Ai} + S_{ij} \cos \alpha_{ij},$$

где α — дирекционный угол.

Известно, что

$$S_{Ai} = S_{AB} \frac{\sin \beta_3}{\sin \beta_1}; \quad S_{ij} = S_{AB} \frac{\sin \beta_3 \sin \beta_6}{\sin \beta_1 \sin \beta_4};$$

$$\alpha_{Ai} = \alpha_{AB} + \beta_2; \quad \alpha_{ij} = \alpha_{AB} + \beta_2 \pm 180^\circ - \beta_5.$$

Вычислим частные производные x_j по измеренным величинам

$$\frac{\partial x_j}{\partial \beta_1} = -\frac{x_j - x_A}{\rho} \operatorname{ctg} \beta_1 = -a_1; \quad \frac{\partial x_j}{\partial \beta_3} = \frac{x_j - x_A}{\rho} \operatorname{ctg} \beta_3 = a_3;$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial \beta_4} = -\frac{x_j - x_i}{\rho} \operatorname{ctg} \beta_4 = a_4; \quad \frac{\partial x_j}{\partial \beta_6} = \frac{x_j - x_i}{\rho} \operatorname{ctg} \beta_6 = a_6;$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial \beta_2} = -\frac{y_i - y_A}{\rho} = -a_2; \quad \frac{\partial x_j}{\partial \beta_5} = \frac{y_j - y_i}{\rho} = a_5.$$

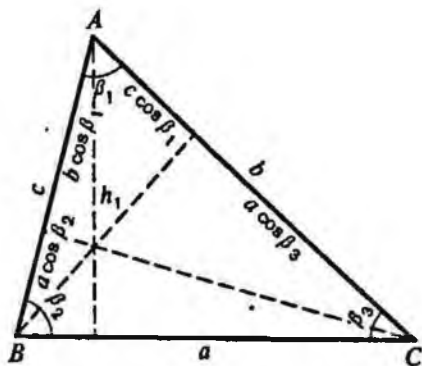
Перейдя к поправкам, получим

$$F_{x_j} = -a_1 v_1 - a_2 v_2 + a_3 v_3 - a_4 v_4 + a_5 v_5 + a_6 v_6. \quad (357)$$

Действуя аналогичным образом, нетрудно получить функцию ординат

$$F_{y_j} = -b_1 v_1 + b_2 v_2 + b_3 v_3 - b_4 v_4 - b_5 v_5 + b_6 v_6, \quad (358)$$

Рис. 46. Зависимости между углами и сторонами треугольника



где

$$b_1 = \frac{y_j - y_A}{\rho} \operatorname{ctg} \beta_1; \quad b_3 = \frac{y_j - y_A}{\rho} \operatorname{ctg} \beta_3; \quad b_4 = \frac{y_j - y_l}{\rho} \operatorname{ctg} \beta_4;$$

$$b_6 = \frac{y_j - y_l}{\rho} \operatorname{ctg} \beta_6; \quad b_2 = \frac{x_j - x_A}{\rho}; \quad b_5 = \frac{x_j - x_l}{\rho}.$$

Для определения весов функций в трилатерации выразим поправки в углы через поправки в измеренные стороны. Из треугольника на рис. 46 имеем

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \beta_1.$$

Дифференцируя это выражение по переменным a, b, c и решая полученные равенства относительно частных производных угла по стороне, получим

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial a} = \frac{a}{bc \sin \beta_1}; \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial b} = \frac{b - c \cos \beta_1}{bc \sin \beta_1}; \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial c} = \frac{c - b \cos \beta_1}{bc \sin \beta_1}.$$

Но

$$bc \cos \beta_1 = bh_2 = ah_1,$$

где h_1, h_2, h_3 — высоты, опущенные соответственно из вершин A, B и C треугольника.

Кроме того,

$$b - c \cos \beta_1 = a \cos \beta_3 \quad \text{и} \quad c - b \cos \beta_1 = a \cos \beta_2.$$

Тогда

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial a} = \frac{\rho}{h_1}; \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial b} = -\frac{\rho}{h_1} \cos \beta_3 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \beta_1}{\partial c} = -\frac{\rho}{h_1} \cos \beta_2.$$

Так как

$$v_1 = \frac{\partial \beta_1}{\partial a} v_a + \frac{\partial \beta_1}{\partial b} v_b + \frac{\partial \beta_1}{\partial c} v_c,$$

то

$$v_1 = \frac{\rho}{h_1} (v_a - \cos \beta_2 v_c - \cos \beta_3 v_b), \quad (359)$$

где v_a, v_b, v_c — поправки длин сторон.

Аналогичные выражения можно получить для поправок в остальные углы треугольника

$$v_2 = \frac{\rho}{h_2} (v_b - \cos \beta_1 v_c - \cos \beta_2 v_a); \quad (360)$$

$$v_3 = \frac{\rho}{h_3} (v_c - \cos \beta_2 v_a - \cos \beta_1 v_b). \quad (361)$$

Для оценки деформаций в сети трилатерации можно использовать уже полученные виды функций для триангуляции. При этом на место поправок в углы надо подставить правые части равенств (359)–(361) и привести подобные члены.

Некоторые виды функций, связанные со сторонами сети, существенно упрощаются. Так, для трилатерации функции (356)–(358) имеют вид

$$F_{x_{ij}} = v_{ij}; \quad (362)$$

$$\begin{aligned} F_{x_j} = & \frac{y_j - y_A}{h_{1,2}} \cos \beta_3 v_{AB} + \\ & + \left(\cos \alpha_{AJ} + \frac{y_j - y_A}{h_{1,2}} \cos \beta_1 - \frac{y_j - y_i}{h_{2,5}} \cos \beta_6 \right) v_{AJ} + \\ & + \frac{y_j - y_i}{h_{2,5}} v_{AJ} \left(\cos \alpha_{IJ} - \frac{y_j - y_i}{h_{2,5}} \cos \beta_4 \right) v_{IJ} - \frac{y_j - y_A}{h_{1,2}} v_{BI}; \end{aligned} \quad (363)$$

$$\begin{aligned} F_{y_j} = & - \frac{x_j - x_A}{h_{1,2}} \cos \beta_3 v_{AB} + \\ & + \left(\sin \alpha_{AJ} - \frac{x_j - x_A}{h_{1,2}} \cos \beta_1 + \frac{x_j - x_i}{h_{2,5}} \cos \beta_6 \right) v_{AJ} - \\ & - \frac{x_j - x_i}{h_{2,5}} v_{AJ} + \left(\sin \alpha_{IJ} + \frac{x_j - x_i}{h_{2,5}} \cos \beta_4 \right) v_{IJ} + \frac{x_j - x_A}{h_{1,2}} v_{BI}, \end{aligned} \quad (364)$$

где $h_{1,2}$ и $h_{2,5}$ — высоты соответственно первого и второго треугольников, опущенные из вершин 2 и 5.

Поправка в исходную сторону равна нулю.

Для определения обратного веса функции F матрицу нормальных уравнений коррелят окаймляют элементами вида $[\pi af]$

$[\pi aa]$	$[\pi ab]$	\dots	$[\pi ag]$	$[\pi af^{(1)}]$	$[\pi af^{(2)}]$	(365)	
	$[\pi bb]$	\dots	$[\pi bg]$	$[\pi bf^{(1)}]$	$[\pi bf^{(2)}]$		
		\dots	$[\pi gg]$	$[\pi gf^{(1)}]$	$[\pi gf^{(2)}]$		
$[\pi af^{(1)}]$				$[\pi bf^{(1)}]$		\dots	$[\pi gf^{(1)}]$
$[\pi af^{(2)}]$				$[\pi bf^{(2)}]$		\dots	$[\pi gf^{(2)}]$

где π — обратный вес.

Вычисление обратного веса производят по схеме Гаусса

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 [\text{паа}] & [\text{пab}] & \dots & [\text{паg}] & [\text{паf}^{(1)}] & [\text{паf}^{(2)}] \\
 & [\text{пbb} \cdot 1] & \dots & [\text{пbg} \cdot 1] & [\text{пbf}^{(1)} \cdot 1] & [\text{пbf}^{(2)} \cdot 1] \\
 & & & & \dots & \dots \\
 & & & [\text{пgg} \cdot r] & [\text{пgf}_r^{(1)} \cdot r] & [\text{пgf}_r^{(2)} \cdot r] \\
 & & & & [\text{пf}_{r+1}^{(1)} \text{f}_{r+1}^{(1)} \times \\
 & & & & \times (r + 1)] = \frac{1}{P_F^{(1)}} & [\text{пf}_{r+1}^{(2)} \text{f}_{r+1}^{(2)} (r + 1)] = \frac{1}{P_F^{(2)}}
 \end{array}$$

Для сокращения объема вычислений нормальные уравнения коррелат можно составить непосредственно по чертежу сети одним из известных способов. Обычно применяют способ проф. В. В. Попова.

Способы определения весов с помощью решения нормальных уравнений с весовыми функциями относятся к строгим способам и позволяют оценить все виды деформаций в сети. К недостаткам способа следует отнести большой объем вычислений. При ручном счете этот способ применяют для расчетов точности сетей с небольшим числом определяемых пунктов или условных уравнений. Имеет смысл применять строгий способ для плановых сетей на монтажных горизонтах многоэтажных зданий, где коэффициенты нормальных уравнений для разных горизонтов практически не изменяются. В этом случае для уравнения сети к уже имеющейся при составлении проекта схеме для каждого из горизонтов достаточно добавить всего один столбец свободных членов. Объем вычислений будет небольшим, а сроки уравнивания в процессе возведения здания заметно сократятся.

Рассмотрим еще один вариант расчета, который для инженерно-геодезических сетей является наиболее перспективным.

В настоящее время широкое применение находят линейно-угловые сети. Погрешности в этих сетях соответственно на 10–15 и 40–50% меньше, чем в триангуляции и трилатерации.

Для предварительного вычисления погрешностей линейно-угловых сетей П. Д. Пенев разработал алгоритм и составил на языке Фортран-IV программу для ЭВМ «Минск-32» [32].

Алгоритм рассчитан на применение параметрического способа уравнивания. Уравнения поправок к приближенным координатам составляют по формулам, аналогичным правым частям равенств (351) и (352). Веса измеренных углов приравнивают единице, а веса измеренных сторон определяют из соотношения $P = \rho^2/S^2$. Далее образуют матрицу нормальных уравнений $N = A'PA$. Обращая N , получают весовую матрицу Q . Оценки погрешностей координат пунктов и функции F при заданном значении стандарта единицы веса производят по формулам

$$\sigma_{x_i}^2 = \mu^2 Q_{x_i x_i}; \quad \sigma_{y_i}^2 = \mu^2 Q_{y_i y_i} \quad \text{и} \quad \sigma_f^2 = \mu^2 f' Q f, \quad (367)$$

где x_i, y_i — абсцисса и ордината i -го пункта; $Q_{x_i x_i}, Q_{y_i y_i}$ — диагональные элементы матрицы Q , f — вектор частных производных функции F .

Для всех пунктов сети с помощью элементов весовой матрицы

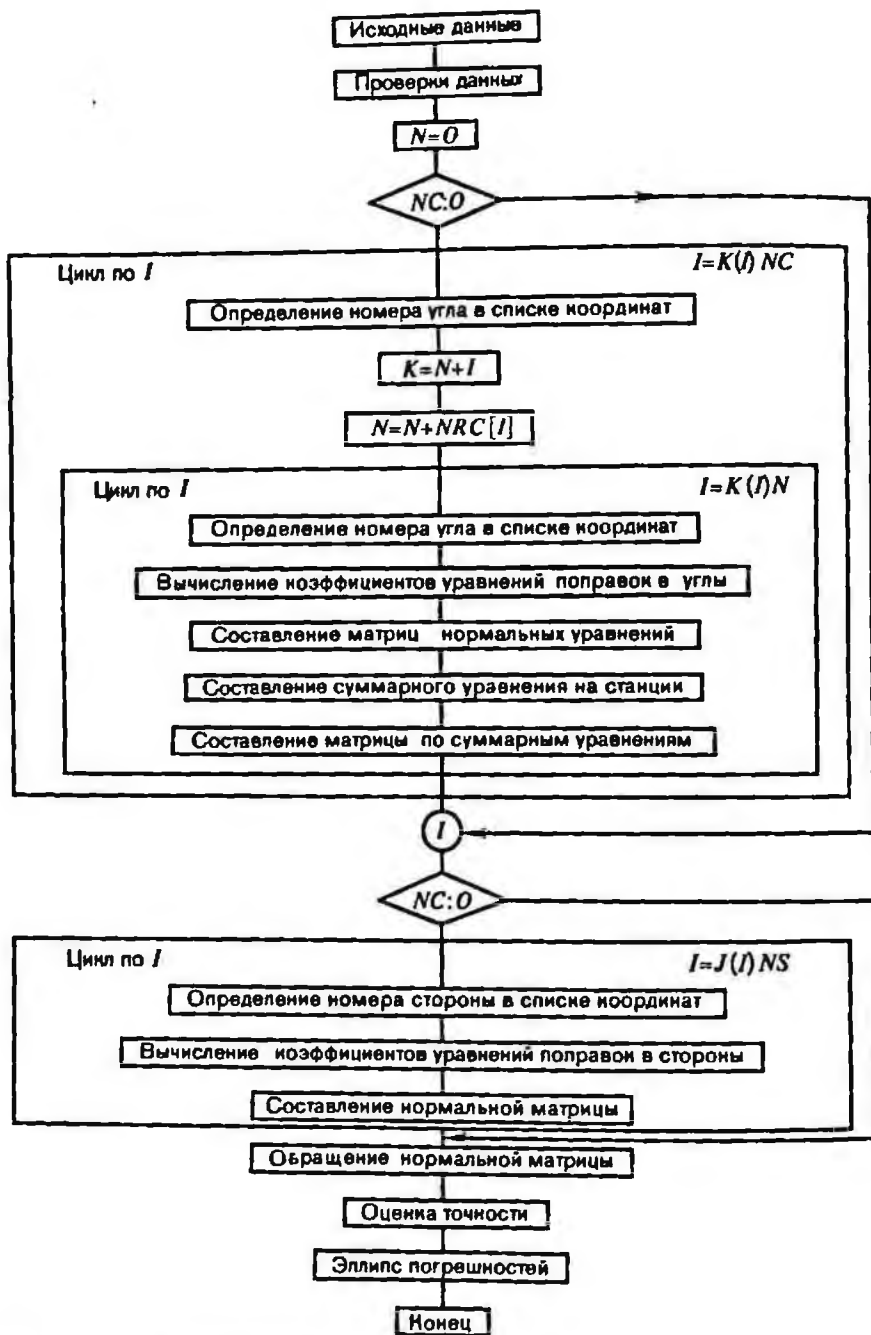


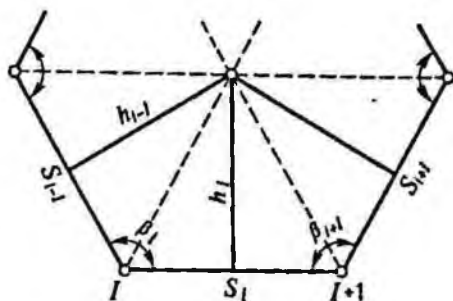
Рис. 47. Блок-схема программы

определяют эллипсы погрешностей. Основные элементы эллипса вычисляют следующим образом:

$$T^2 = (Q_{x_i x_i} - Q_{y_i y_i})^2 + 4Q_{x_i y_i}^2;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{1,2} = \frac{-(Q_{x_i x_i} - Q_{y_i y_i}) \pm T}{2Q_{x_i y_i}}; \quad R_{1,2} = \frac{\mu^2}{2} (Q_{x_i x_i} + Q_{y_i y_i} \pm T), \quad (368)$$

Рис. 48. Схема кольцевой сети



где $\varphi_1, \varphi_2, R_1, R_2$ — соответственно дирекционные углы и величина большой и малой полуосей эллипса.

На блок-схеме программы, приведенной на рис. 47, приняты следующие условные обозначения:

NC — вычисление измеренных значений углов;

NS — вычисление измеренных длин сторон;

$NRC(J)$ — вычисление измеренных углов на станции с номером J .

Программа позволяет произвести оценку точности для сетей из 65 пунктов. Она может быть использована и для сетей триангуляции или трилатерации, для чего в ЭВМ вводят только измеренные углы или измеренные стороны.

Такой способ оценки свободен от субъективности выбора слабого места в сети, он всесторонне характеризует искажения всех пунктов сети и не требует больших трудозатрат.

Для типовых сетей или рядов триангуляции, трилатерации и полигонометрии при ручном счете предвычисление точности часто осуществляют по готовым формулам, в которых стандарты погрешностей в сети представлены в виде функции стандартов погрешностей измеряемых величин. Эти формулы широко известны и нет необходимости в подробном их перечислении. Отметим, что наиболее полные сводки формул и сведения о их точности приведены в обзоре [22] и справочнике [26].

Приведем те из них, которые используются для инженерно-геодезических сетей специального назначения.

При построении кольцевых сетей без измерения радиусов наиболее жесткие требования предъявляются к радиальным смещениям. В работе [17] для сетей, изображенных на рис. 48, приведены следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\sigma_{R_0}}{R}\right)^2 &= \frac{4}{n} \left(\frac{\sigma_S}{S}\right)^2 + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}{4n} \sigma_\beta^2; \\ \left(\frac{\sigma_{V_R}}{R}\right)^2 &= \frac{10n - 36}{9n} \left(\frac{\sigma_S}{S}\right)^2 + \frac{(n - 3) \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}{12n} \sigma_\beta^2; \\ \left(\frac{\sigma_{\Delta R}}{R}\right)^2 &= \frac{4}{3} \left(\frac{\sigma_S}{S}\right)^2 + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}{18} \sigma_\beta^2, \end{aligned} \right\} (369)$$

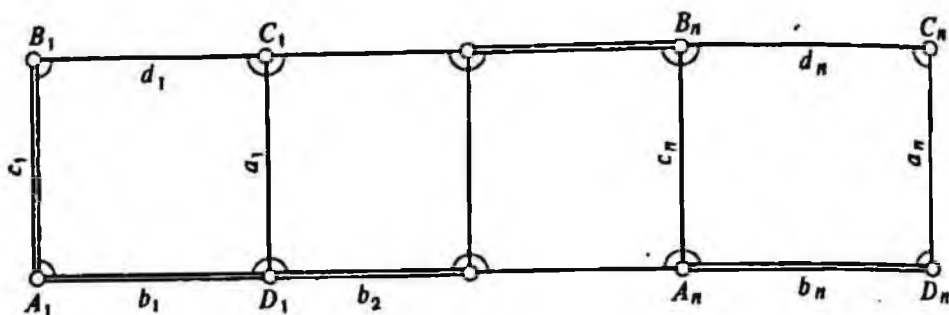


Рис. 49. Схема рядов из прямоугольников без диагоналей

где R_0 — вероятнейшее значение радиуса; v_R — отклонение радиусов от R_0 ; ΔR — разности соседних радиусов; n — число пунктов.

Если вместо углов β измерены высоты h , то

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{R_0}^2 &= \frac{4}{n} K_{1h}^2 \sigma_S^2 + \frac{1}{n} K_{2h}^2 \sigma_h^2; \\ \sigma_{V_n}^2 &= \frac{10n - 36}{9n} K_{1h}^2 \sigma_S^2 + \frac{n - 3}{3n} K_{2h}^2 \sigma_h^2; \\ \sigma_{\Delta_n}^2 &= \frac{4}{9} K_{1h}^2 \sigma_S^2 + \frac{2}{9} K_{2h}^2 \sigma_h^2 \end{aligned} \right\} (370)$$

где

$$K_{1h} = \frac{h}{2 \cos^2(\beta/2)} \quad \text{и} \quad K_{2h} = \frac{1}{4 \cos^2(\beta/2)}$$

При построении строительных сеток часто используют сети из фигур в виде прямоугольников без диагоналей (рис. 49). В книге [7] для цепи таких фигур с измеренными сторонами и углами, уравненными за условия фигур, стандарт σ_c погрешности наиболее удаленной стороны рекомендуют вычислять по формуле

$$\sigma_c^2 = \sigma_c^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 \frac{\sigma_{\beta}^2}{\rho^2}. \quad (371)$$

Готовые формулы удобны для расчетов точности и не требуют большого объема вычислений. Однако произвольные допущения при выводах формул не всегда позволяют оценить возникающие при этом погрешности.

Для сложных сетей с большим числом разнообразных связей между точками и невысокими требованиями к точности обычно ограничиваются оценкой пункта в наиболее слабом месте. При определении веса используют приближенные способы, рассчитанные на уравнивание координат пунктов методом последовательных приближений.

В этом случае при назначении весов связей за погрешность единицы веса целесообразно принять погрешность измерения отрезка S_0 , равного длине мерного прибора. Если при этом предположить, что в сети

соблюдают условия равнозначности линейных и угловых измерений, то

$$\mu = \sigma_{S_0} = S_0 \frac{\sigma_\alpha}{\rho}, \quad (372)$$

где σ_{S_0} , σ_α — соответственно стандарты измерения отрезка S_0 и определения дирекционного угла α .

Для приближенных методов оценки стандарт определения дирекционного угла можно приравнять стандарту σ_β измерения угла.

При определении дирекционного угла стороны с обоих пунктов, расстояние между которыми равно S , вес связи можно принять равным

$$P_\alpha = \frac{\mu^2}{\sigma^2} = \frac{S_0^2 \sigma_\beta^2 / \rho^2}{S^2 \sigma_\beta^2 / \rho^2} = \frac{S_0^2}{S^2} = \frac{1}{k^2}, \quad (373)$$

где $k = S/S_0$.

Если положение пункта определяется угловой засечкой без измерения угла на определяемом пункте, то дирекционный угол имеет стандарт $\sigma_{\alpha_1} = \sigma_\beta \sqrt{2}$. Тогда

$$P_{\alpha_1} = \frac{\mu^2}{\sigma_1^2} = \frac{1}{2k^2}. \quad (374)$$

В зависимости от методов измерения сторон при назначении весов различают два случая.

Если измерения длин сторон осуществляют светодальномерами, где практически $\sigma_S = \sigma_{S_0}$, то веса всех измерений принимают равными единице.

При измерениях сторон мерными приборами $\sigma_S = \sigma_{S_0} \sqrt{k}$. В этом случае вес P_S измеренной стороны равен

$$P_S = \frac{\mu^2}{\sigma_S^2} = \frac{\sigma_{S_0}^2}{\sigma_{S_0}^2 k} = \frac{1}{k}. \quad (375)$$

Если измерена длина стороны и определен дирекционный угол, то вес $P_{\alpha S}$ связи равен сумме весов, т. е.

$$P_{\alpha S} = P_\alpha + P_S. \quad (376)$$

С учетом стандарта σ_n погрешности в положении исходного пункта обратный вес P_i связи определится по формуле

$$\frac{1}{P_i} = \frac{\sigma_{\alpha S}^2 + \sigma_n^2}{\mu^2} = \frac{1}{P_{\alpha S}} + \frac{1}{P_n}. \quad (377)$$

Если пункт определен относительно других пунктов, то его вес P равен сумме весов всех связей

$$P = \sum_{i=1}^n P_i, \quad (378)$$

где n — число связей, сходящихся в данном пункте.

Так как при этом веса предшествующих пунктов неизвестны и определить P_n в формуле (377) сразу нельзя, то применяют метод последовательных приближений, сходимость которых зависит от числа пунктов и качества сети. Обычно число приближений не превышает пяти.

Недостатком этого способа оценки является невозможность оценить различные виды деформаций сети.

Вопросы оценки влияния случайных погрешностей для основных видов деформаций сети в научно-технической литературе освещены достаточно подробно. Значительно меньше изучено влияние систематических погрешностей. Этот вопрос рассмотрим более подробно.

Деформацию свободной сети можно представить в виде функции F измеренных величин

$$F = \varphi(l_1, l_2, \dots).$$

В общем случае F имеет нелинейный вид. Используя метод линеаризации и применяя теорему о математическом ожидании линейной функции (34), с точностью до величин второго порядка получим

$$m_F = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial l_1}\right)_0 m_{l_1} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial l_2}\right)_0 m_{l_2} + \dots = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial l_i}\right)_0 m_{l_i}, \quad (379)$$

где m_F, m_{l_i} — математическое ожидание величин F и l_i ; $(\partial \varphi / \partial l_i)_0$ — частные производные F в окрестностях точек l_i .

Если известны фактические значения l_{0i} измеряемых величин, свободные от систематических и случайных погрешностей, то фактическое значение F_0 функции определится из выражения

$$F_0 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial l_i}\right)_0 l_{0i}. \quad (380)$$

Вычитая (380) из выражения (379), запишем

$$m_F - F_0 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial l_i}\right)_0 (m_{l_i} - l_{0i}).$$

Величины $(m_F - F_0)$ и $(m_{l_i} - l_{0i})$ характеризуют смещения центров рассеивания и в соответствии с определениями § 11 могут быть приняты в качестве оценок систематических погрешностей λ , т. е.

$$\lambda_F = m_F - F_0 \quad \text{и} \quad \lambda_{l_i} = m_{l_i} - l_{0i}, \quad (381)$$

тогда

$$\lambda_F = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial l_i}\right)_0 \lambda_{l_i}. \quad (382)$$

При расчетах деформаций, обусловленных влиянием систематических погрешностей, необходимо учитывать последствия уравнивания сети. Известно, что при решении условных уравнений в сети постоянные погрешности не искажают окончательных результатов в случаях:

если постоянные погрешности всех измерений равны, а веса измерений и коэффициенты уравнений поправок равны единице;

если постоянные погрешности обратно пропорциональны весам, а коэффициенты уравнений поправок равны единице.

Сущность этого явления проиллюстрируем на двух простых, но характерных примерах.

Пусть измеренные углы β_i треугольника свободны от систематических погрешностей. В этом случае уравниваемые значения углов β_i^0 определяются по формуле

$$\beta_i^0 = \beta_i - \frac{W}{3},$$

где W — невязка треугольника, вычисленная по значениям β .

Если к тем же углам добавить постоянные погрешности λ , то новые значения углов $\beta'_i = \beta_i + \lambda$ изменят невязку треугольника и она будет равна

$$\sum \beta'_i - 180^\circ = W + 3\lambda.$$

Вычислим уравниваемые значения $(\beta'_i)^0$ новых углов в треугольнике

$$(\beta'_i)^0 = (\beta_i + \lambda)^0 = (\beta_i + \lambda) - \frac{W + 3\lambda}{3} = \beta_i^0.$$

Таким образом, введение в углы постоянных величин λ не изменило уравниваемых значений углов. Это говорит о том, что постоянные погрешности измерения углов в данных условиях не искажают результатов уравнивания.

Отмеченная закономерность сохранится и при небольших колебаниях в значениях λ . И в этом случае произойдет существенное ослабление систематических погрешностей. Поэтому при расчетах точности не имеет смысла учитывать систематические погрешности измерения углов в жестких фигурах и замкнутых полигонах.

Аналогичное явление происходит при уравнивании цепочки треугольников или вытянутых полигонометрических ходов, опирающихся на исходные пункты.

Рассмотрим примеры, в которых систематические погрешности не устраняются при уравнивании и оказывают существенное влияние на деформацию сети.

Пусть в свободной сети триангуляции измерен один базис. Погрешность измерения базиса, являясь в общем случае случайной погрешностью, для данной сети будет систематической. В результате влияния этой погрешности вся сеть как бы изменит масштаб. При этом подобие фигур сохранится, а все расстояния между пунктами изменятся пропорционально длинам сторон.

В инженерно-геодезической сети с несколькими базисами измерения обычно производят одним комплектом мерных приборов. Поэтому все базисы имеют общую погрешность, обусловленную влиянием погрешностей компарирования мерного прибора. Эта часть погрешности тоже приведет к изменению масштаба сети.

Методику определения искажений, обусловленных влиянием систематических погрешностей, рассмотрим на примере сети-триангуляции, изображенной на рис. 45.

Для определения искажения стороны сети IJ представим сторону S_{IJ} в виде функции измеренных величин

$$S_{IJ} = S_{AB} \frac{\sin \beta_3 \sin \beta_6}{\sin \beta_1 \sin \beta_4}.$$

Вычисляя частные производные S_{ij} по S_{AB} , β_1 , β_3 , β_4 , β_6 и подставляя их в правую часть равенства (382), после несложных преобразований получим

$$\frac{\lambda_{S_{ij}}}{S_{ij}} = \frac{\lambda_{S_{AB}}}{S_{AB}} - \operatorname{ctg} \beta_1 \frac{\lambda_{\beta_1}}{\rho} + \operatorname{tg} \beta_3 \frac{\lambda_{\beta_3}}{\rho} - \operatorname{ctg} \beta_4 \frac{\lambda_{\beta_4}}{\rho} + \operatorname{tg} \beta_6 \frac{\lambda_{\beta_6}}{\rho}.$$

Систематические погрешности измерения углов обычно равны, тогда

$$\frac{\lambda_{S_{ij}}}{S_{ij}} = \frac{\lambda_{S_{AB}}}{S_{AB}} + (\operatorname{tg} \beta_3 + \operatorname{tg} \beta_6 - \operatorname{ctg} \beta_1 - \operatorname{ctg} \beta_4) \frac{\lambda_{\beta}}{\rho}. \quad (383)$$

Определим искажения дирекционного угла стороны IJ . Составим функцию

$$\alpha_{ij} = \alpha_{AB} + \beta_2 \pm 180^\circ - \beta_3.$$

В этом случае

$$\lambda_{\alpha_{ij}} = \lambda_{\alpha_{AB}} + \lambda_{\beta_2} - \lambda_{\beta_3} = \lambda_{AB}. \quad (384)$$

Для определения искажения абсциссы пункта J используем функцию

$$x_j = x_A + S_{AI} \cos \alpha_{AI} + S_{ij} \cos \alpha_{ij}.$$

Как и при выводе формулы (357), выразим стороны S_{AI} , S_{ij} и дирекционные углы α_{AB} , α_{ij} через измеренные величины, определим частные производные и приравняем значения $\lambda_{\beta_1} = \lambda_{\beta_2} = \lambda_{\beta_3} = \lambda_{\beta_4} = \lambda_{\beta_5} = \lambda_{\beta_6} = \lambda_{\beta}$.

Тогда

$$\lambda_{x_j} = \lambda_{x_A} + \frac{\lambda_{\beta}}{\rho} [(x_j - x_A)(\operatorname{ctg} \beta_3 - \operatorname{ctg} \beta_1) + (x_j - x_i)(\operatorname{ctg} \beta_6 - \operatorname{ctg} \beta_4) + (y_i - y_A)] \quad (385)$$

Действуя аналогичным образом, можно получить формулу для определения искажений ординат пункта

$$\lambda_{y_j} = \lambda_{y_A} + \frac{\lambda_{\beta}}{\rho} [(y_j - y_A)(\operatorname{ctg} \beta_3 - \operatorname{ctg} \beta_1) + (y_j - y_i)(\operatorname{ctg} \beta_6 - \operatorname{ctg} \beta_4) + (x_A - x_i)]. \quad (386)$$

Методику расчетов проиллюстрируем на примерах.

Пример 31. На рис. 50 дана схема трилатерации с длинами сторон 20 м. Рассчитать погрешности измерений, если искажения уравниваемых значений сторон и координат при доверительной вероятности $P_{\text{н}} = 0,9973$ не должны превышать 2 мм.

Решение. Подсчитаем число условных уравнений в сети

$$r = n - 2g = 5 - 4 = 1.$$

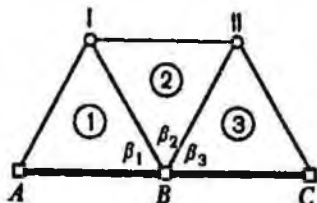
Запишем условное уравнение

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - W = 0$$

и выразим поправки в углы через поправки в стороны. Используя формулы (359)–(361), запишем

$$v_1 = \frac{\rho}{h} (v_{A1} - \cos \angle BAI_{AB} - \cos \angle BIA v_{BI});$$

Рис. 50. Схема сети трилатерации



$$v_2 = \frac{\rho}{h_{1,1}} (v_{A1} - \cos \angle BAI v_{AB} - \cos \angle BII v_{BI});$$

$$v_3 = \frac{\rho}{h_{3,1}} (v_{CII} - \cos \angle BII C v_{BI} - \cos \angle BCII v_{BC}).$$

Вычислим высоты треугольников

$$h_{1,1} = h_{2,1} = h_{3,1} = BI \sin \beta_1 = 20\,000 \sin 60^\circ = 17\,321 \text{ мм.}$$

Так как $\cos \beta_1 = \cos \beta_2 = \cos \beta_3 = \cos 60^\circ = 0,500$, а поправки v_{AB} и v_{BC} твердых сторон равны нулю, то

$$v_1 = 11,9 v_{AI} - 6,0 v_{BI}; \quad v_2 = 11,9 v_{I-II} - 6,0 v_{BI} - 6,0 v_{BII}; \quad v_3 = 11,9 v_{CII} - 6,0 v_{BII}.$$

Условное уравнение будет иметь вид

$$11,9 v_{AI} - 12,0 v_{BI} + 11,9 v_{I-II} - 12,0 v_{BII} + 11,9 v_{CII} + W = 0.$$

Составим функции $F^{(1)}$ стороны s_{11} , $F^{(2)}$ абсциссы и $F^{(3)}$ ординаты пункта I. Используя соответствующие обозначения и формулы (362)–(364), запишем

$$F^{(1)} = v_{I-II};$$

$$F^{(2)} = \left(\cos \alpha_{A1} + \frac{y_I - y_A}{h} \cos 60^\circ \right) v_{AI} - \frac{y_I - y_A}{h} v_{BI};$$

$$F^{(3)} = \left(\sin \alpha_{A1} - \frac{x_I - x_A}{h} \cos 60^\circ \right) v_{AI} + \frac{x_I - x_A}{h} v_{BI}.$$

Подставляя значения $\cos \alpha_{A1} = 0,500$, $\sin \alpha_{A1} = 0,866$ и

$$\frac{y_I - y_A}{h} = \frac{10\,000}{17\,321} = 0,577; \quad \frac{x_I - x_A}{h} = \frac{h}{h} = 1,000,$$

получим

$$F^{(2)} = 0,79 v_{AI} - 0,58 v_{BI}; \quad F^{(3)} = 0,37 v_{AI} + 1,00 v_{BI}.$$

Составление и решение нормальных уравнений коррелят выполнены в табл. 7.

Так как наибольший обратный вес имеет функция ординат, то подставляя в правую часть равенства (350) известные значения δ , и $1/P$, при $l = 3,00$, получим

$$\mu \leq \frac{20}{\sqrt{1,06 \cdot 3,00}} = 0,65 \text{ мм.}$$

Следовательно, для обеспечения заданной точности измерения сторон сети необходимо производить со стандартом $\mu = 0,65$ мм.

Пример 32. Для построения строительной сети намечено измерить базисы 5–6, 6–7 и углы на всех пунктах, кроме 2 и 3 (рис. 51). Схема сети составлена в масштабе. Длина стороны 1–2 равна 50 м. Определить необходимую точность измерения углов и линий, если погрешность в положении пункта при доверительной вероятности $P_0 = 0,9973$ допускается не более 10 мм.

Решение. Веса связей, вычисленные по формулам (373)–(376), приведены на схеме сети. При этом за единицу веса принята линия длиной $S_0 = 50$ м, а расстояния определены по схеме сети.

Если в первом приближении веса пунктов вычислять как сумму весов связей без учета весов исходных пунктов, а окончательные веса определить методом

Таблица 7-

Поправка	$a]$	$f^{(1)}$	$f^{(2)}$	$f^{(3)}$	$S]$
v_{AI}	+11,90		+0,79	+0,37	+13,06
v_{BI}	-12,00		-0,58	+1,00	-11,56
v_{I-II}	+11,90	+1,00			+12,90
v_{BII}	-12,00				-12,00
v_{CII}	+11,90				+11,90
	-11,70	+1,00	+0,21	+1,37	+14,28
$[a$ $f^{(0)}$	+712,83	+11,90 +1,00	+16,36 +0,96	-7,60 +1,14	+733,49
	k_1	$f^{(1)}$	$f^{(2)}$	$f^{(3)}$	
	+712,83 -1	+11,90 -0,017	+16,36 -0,023	-7,60 +0,011	
		+1,00 -0,20	+0,96 -0,36	+1,14 -0,08	
	$1/P_F$	0,80	0,58	1,06	

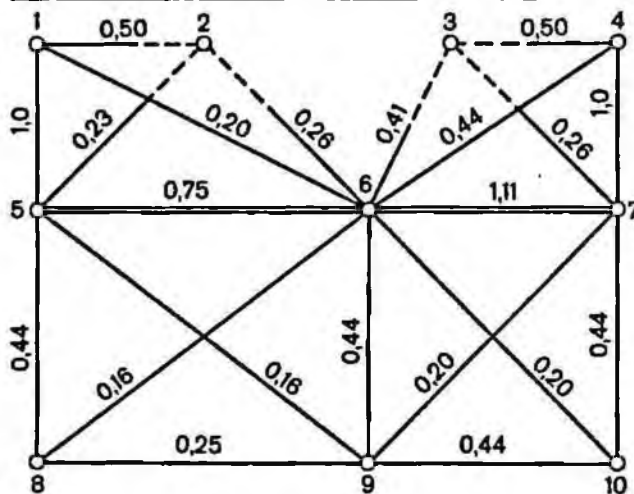


Рис. 51. Схема строительной сетки

Таблица 8

Название пункта	Вес пункта	Название пункта	Вес пункта
1	1,12	6	2,83
2	0,78	7	2,04
3	0,96	8	0,71
4	1,38	9	1,18
5	1,72	10	0,86

последовательных приближений с использованием формулы (377), то получим значения, приведенные в табл. 8.

Наименьший вес $P = 0,71$ имеет пункт 8. Значение стандарта единицы веса при $t = 3,00$ и $\delta = 10$ мм определим по формуле (350)

$$\mu \leq 10 \sqrt{0,71/3,00} = 2,8 \text{ мм.}$$

Это значение μ соответствует предельной относительной погрешности измерения линий

$$3\mu/S_0 = 3 \cdot 2,8/50\,000 = 1/6000$$

и предельной погрешности измерения углов в сети

$$\delta_\beta = 3\sigma_\beta = 3 \frac{\mu\rho}{S_0} = 3 \frac{2,8 \cdot 206\,265}{50\,000} = 35''.$$

§ 24. МНОГОРАЗЯДНЫЕ СЕТИ

При создании обоснования на крупных строительных объектах, при застройке больших жилых массивов и выполнении некоторых видов инженерно-геодезических работ построение опорных сетей осуществляют в несколько стадий. При таком построении в общих чертах сохраняются основные положения и принципы создания государственных сетей — от общего к частному, от более крупных и точных к более мелким и менее точным. Пункты сетей старших разрядов служат обоснованием для построения сетей младших разрядов. Так появляется необходимость во взаимной увязке точности между разрядами.

Рассмотрим общий ход решения этой задачи. Пусть на объекте имеется обоснование со средней погрешностью ϵ_n и предусматривается в n стадий спустить сеть. Если погрешность конечного разряда должна быть равной ϵ_n , а при переходе от старшего к младшему разряду использовать постоянный коэффициент k понижения точности, то

$$\epsilon_1 = k\epsilon_n; \quad \epsilon_2 = k\epsilon_1 = k^2\epsilon_n; \dots; \quad \epsilon_n = k^n\epsilon_n.$$

Откуда

$$k = \sqrt[n]{\frac{\epsilon_n}{\epsilon_n}} \quad \text{или} \quad n = \log_k \frac{\epsilon_n}{\epsilon_n}. \quad (387)$$

Оценивая ϵ по формуле (387) можно рассчитать значения систематических и случайных погрешностей для каждого из разрядов.

При построении плановых сетей на больших по площади объектах целесообразно определить средние длины сторон для каждого из разрядов сети и в расчетах пользоваться относительной погрешностью $1/T$. В этом случае выражение (387) примет вид

$$k = \sqrt[n]{\frac{T_n}{T_n}} \quad \text{или} \quad n = \log_k \frac{T_n}{T_n}.$$

Коэффициент понижения точности при построении сетей в несколько разрядов назначают исходя из следующих соображений.

Пусть имеем стандарт σ_F функции, обусловленной влиянием погрешностей измерений данного разряда сети, и стандарт σ_F той же функции, обусловленной совместным влиянием погрешностей измерений и исходных данных. Чтобы при уравнивании сети погрешности

исходных данных не исказили существенно результаты измерений младшего разряда, поставим условие

$$\sigma_F - \sigma_{F_1} \leq q \sigma_F,$$

где q — заранее заданная малая величина, тогда

$$\sigma_F \leq \sigma_{F_1} / (1 - q).$$

Возводя обе части неравенства в квадрат, получим

$$\sigma_F^2 \leq \sigma_{F_1}^2 / (1 - q)^2.$$

Так как при совместном уравнивании сетей обоих разрядов

$$\sigma_F^2 = \mu^2 / P_F \quad \text{и} \quad \sigma_{F_1}^2 = \mu^2 / P_{F_1}, \quad \text{то}$$

$$\frac{1}{P} \leq \frac{1}{(1 - q)^2} \frac{1}{P_{F_1}} \quad \text{или} \quad P_F \geq (1 - q)^2 P_{F_1}. \quad (388)$$

Для определения P_{F_1} и P_F необходимо решить две системы уравнений. В первой системе уравнения поправок составляются только для измерений данного разряда, во второй — для поправок измерений в обоих разрядах.

При параметрическом способе уравнивания уравнения поправок первой системы имеют вид

$$V_1 = A_1 x + L_1, \quad (389)$$

где V_1 , A_1 и x_1 — соответственно вектор поправок измерений, матрица коэффициентов уравнений поправок и вектор координат определяемых пунктов сети младшего разряда.

Решая уравнения (389) под условием $V_1^T P_1 V_1 = \min$, можно определить $1/P_{F_1}$. Последовательность и схемы этого решения даны в § 23.

Уравнения поправок второй системы представим в виде

$$\begin{aligned} V_1 &= A_1 x_1 + A x + L; \\ V &= \quad \quad \quad x, \end{aligned} \quad (390)$$

где V , A и x — соответственно вектор поправок, матрица коэффициентов и вектор координат исходных пунктов, т.е. пунктов старшего разряда.

Решая уравнение (390) под условием $V_1^T P_1 V_1 + V^T P V = \min$, можно определить $1/P_F$. Это решение целесообразно осуществлять следующим образом. Используя уравнение (390) и соотношение весов $P = P_1 k^2$, можно составить нормальные уравнения вида (354), окаймлять их частными производными функции F и по схеме (355) вычислить вес $1/P_F$.

Аналогичное решение можно получить для коррелятного способа, если составить совместное (общее) условное уравнение

$$B V_1 + B V + W = 0, \quad (391)$$

где B_1 , B — матрицы условных уравнений поправок соответственно для сетей младшего и старшего разрядов.

Сравнивая веса $1:P_{F_1}$ и $1:P_F$, по формуле (388) можно оценить правильность выбора коэффициента понижения точности. При сравнении величину q назначают исходя из следующих соображений. В оценках стандартов при уравнивании обычно удерживают две

значащие цифры, последняя из которых бывает сомнительной. Следовательно, имеет смысл принять следующее значение $q = 0,05$.

Изложенный способ определения коэффициента понижения точности требует большого объема вычислений. При ручном счете он может применяться для небольших сетей и для плановых сетей на монтажных горизонтах многоэтажных сооружений. Объем вычислений при этом можно сократить, если для составления матрицы коэффициентов нормальных уравнений второй системы использовать матрицу первой системы или сравнивать матрицы весовых коэффициентов векторов по двум системам [16].

При определении весов методом последовательных приближений раздельно для каждого из разрядов составляют схемы сети в соответствии с выбранным значением k , вычисляют веса связей и определяют веса пунктов. При вычислении весов пунктов по формуле (377) значения весов исходных пунктов выбирают из результатов обработки сети старшего разряда.

При оценке надежности коэффициента понижения точности целесообразно выбрать наиболее слабый участок сети данного разряда и вычислить веса его пунктов. Если при последовательных приближениях веса исходных пунктов приравнять нулю, то полученные значения весов определяемых пунктов будут соответствовать величине P_{F_1} в формуле (388). Сравнивая эти значения с весами P , полученными в результате совместной обработки исходных и определяемых пунктов, можно при заданном значении q оценить надежность выбора k .

Используя значения весов P_1 и P , можно при выбранном k определить для всех пунктов значения q , удовлетворяющие неравенству (388). Полученные величины q не только позволяют оценить надежность выбора k , но и достаточно полно характеризуют качество сети в целом.

Пример 33. При построении сети на монтажном горизонте многоэтажного здания (см. пример 30, рис. 50) с исходного горизонта разбивки проецируются пункты A , B и C . Пренебрегая погрешностями проецирования этих пунктов, рассчитать для $q = 0,05$ коэффициент понижения точности при переходе от сети на исходном горизонте к сети на монтажном горизонте.

Решение. Если на монтажном горизонте уравнивание сети производить совместно с исходными данными, то стороны AB и BC получают поправки v_{AB} и v_{BC} . В этом случае для получения матрицы коэффициентов совместного уравнения поправок к условному уравнению поправок из примера 30

$$B_1 V_1 = 11,9 v_{AI} + 11,9 v_{I-II} - 11 v_{BII} + 11,9 v_{CII}$$

необходимо добавить $BV = -6,0 v_{AB} - 6,0 v_{BC}$.

Как видно из примера 30, наибольшие искажения в сети имеют ординаты пунктов. Поэтому в нашем примере имеет смысл ограничиться рассмотрением функции $F^{(3)}$.

Чтобы упростить вычисления и использовать результаты предыдущих расчетов, веса измерений сторон сети на монтажном горизонте примем равными единице. В этом случае матрица коэффициентов нормальных уравнений N_1 и соответствующая матрица из примера 30 будут равны,

$$N_1 = B_1 P_1^{-1} B_1 = \begin{vmatrix} 712,83 & -7,60 \\ & 1,14 \end{vmatrix},$$

а определение обратного веса приведет к значению $1/P_{F_1} = 1,06$ (см. табл. 7).

Таблица 9

Обозначения	$k^{(1)} = \sqrt{2}$		$k^{(2)} = 2$		$k^{(3)} = 3$	
	a]	л	a]	л	a]	л
[πa	748,83 -1	-6,10 0,008	730,83 -1	-6,85 0,009	720,83 -1	-7,27 0,010
[πf		+1,26 -0,05		+1,20 -0,06		+1,17 -0,07
$1/P_F$		1,21		1,14		1,10

Для определения элементов окаймленной матрицы N_2 нормальных уравнений с учетом погрешностей исходных данных выберем для исследования три значения коэффициента понижения точности $k^{(1)} = \sqrt{2}$, $k^{(2)} = 2$, $k^{(3)} = 3$, вычислим обратные веса $\pi^{(1)} = 1/2$; $\pi^{(2)} = 1/4$; $\pi^{(3)} = 1/9$ и произведения вида $[\pi_2 aa]$, $[\pi_2 af]$, $[\pi_2 ff]$ для поправок v_{AB} и v_{BC} . В этом случае матрицы N_2 будут соответственно равны

$$N_2^{(1)} = B_2 \pi_2^{(1)} B_2^T = \begin{Bmatrix} [\pi_2^{(1)} aa] & [\pi_2^{(1)} af] \\ & [\pi_2^{(1)} ff] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 36,00 & 1,50 \\ & 0,12 \end{Bmatrix}$$

$$N_2^{(2)} = \begin{Bmatrix} 18,00 & 0,75 \\ & 0,06 \end{Bmatrix} \text{ и } N_2^{(3)} = \begin{Bmatrix} 8,00 & 0,33 \\ & 0,03 \end{Bmatrix}$$

Решая окаймленные нормальные уравнения $N = N_1 + N_2$ в схеме Гаусса, получим обратные веса функции $1/P_F$. Результаты вычислений приведены в табл. 9.

На рис. 52 построен график зависимости между значениями k и $1/P_F$ для ординат определяемых пунктов I и II.

При значениях $q = 0,05$ и $1/P_{F_1} = 1,06$ величина обратного веса $1/P_F$ определится из неравенства (388)

$$\frac{1}{P_F} \leq \frac{1}{(1 - 0,05)^2} 1,06 = 1,17.$$

Допускаемое значение коэффициента понижения точности можно определить по графику. Используя значение $1/P_F \leq 1,17$, находим $k \geq 1,7$.

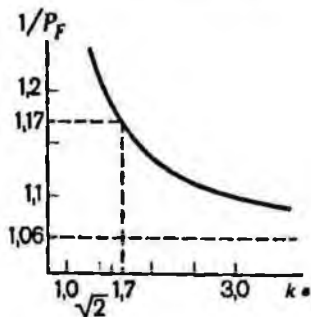


Рис. 52. График зависимости между k и $1/P_F$

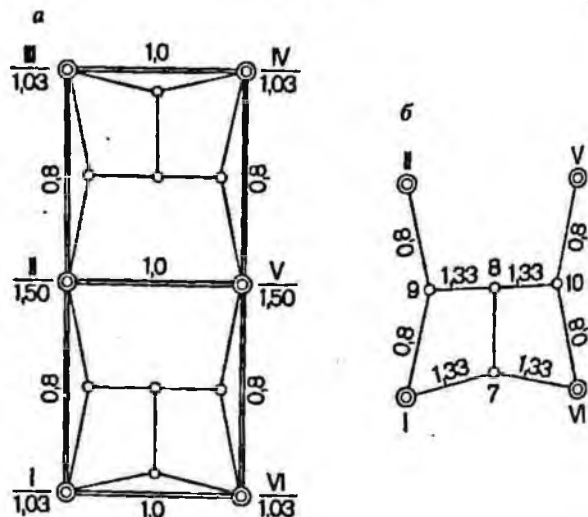


Рис. 53. Схема двухрядной сети

Таблица 10

Номер пункта	P/P_1	q
7	0,59	0,23
8	0,89	0,06
9	0,72	0,15
10	0,76	0,13

Пример 34. Дана схема двухразрядного построения строительной сети. Веса связей между пунктами, веса пунктов сети первого разряда, определенные методом последовательных приближений, и веса связей между пунктами второго разряда, вычисленные для коэффициента понижения точности $k = 2$, выписаны на схеме сети (рис. 53, а).

При значении $q_0 = 0,10$ оценить надежность выбора коэффициента понижения точности.

Решение. Для оценки влияния погрешностей исходных данных рассмотрим участок сети на рис. 53, б и вычислим веса определенных пунктов двумя способами.

В первом случае веса пунктов второго разряда 7, 8, 9 и 10 определим с учетом весов исходных пунктов I, II, V и VI, во втором — без учета P_{II} .

Для анализа полученных результатов в табл. 10 для всех пунктов сети второго разряда вычислены отношения весов P/P_1 и значения q , удовлетворяющие условию (388).

Сравнивая полученные значения q с эталонным значением $q_0 = 0,10$, видим, что поставленному условию удовлетворяет только вес пункта 8. Погрешности исходных данных наибольшее влияние оказывают на пункт 7, где $q = 0,23$.

Таким образом, для достижения условия $q_0 = 0,10$ необходимо увеличить коэффициент понижения точности. С этой целью можно или увеличить точность измерений в сети первого разряда, или понизить точность во втором разряде.

Возможен и третий вариант. На схеме сети видно, что q имеет наибольшие значения для пунктов, расположенных на границах участка и близко к сторонам сети первого разряда. Если условия измерений позволяют включить пункты 7, 9 и 10 в сеть первого разряда, то это существенно улучшит качество сети в целом.

Глава VI

РАСЧЕТЫ ТОЧНОСТИ

ИНЖЕНЕРНО-ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ РАБОТ

§ 25. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МОНТАЖЕ КОНСТРУКЦИЙ СБОРНЫХ ЗДАНИЙ

Каждое здание состоит из ограниченного числа конструктивных элементов: фундамента, стен, отдельных опор (столбов или колонн), балок, перекрытий, кровли, окон и дверей. Все эти конструкции подразделяются на несущие и ограждающие. Несущие конструкции воспринимают на себя нагрузки от вышележащих частей здания, от снега, ветра и т.п. Ограждающие конструкции не воспринимают нагрузки и предназначены для ограждения внутренних частей здания от влияния метеорологических условий.

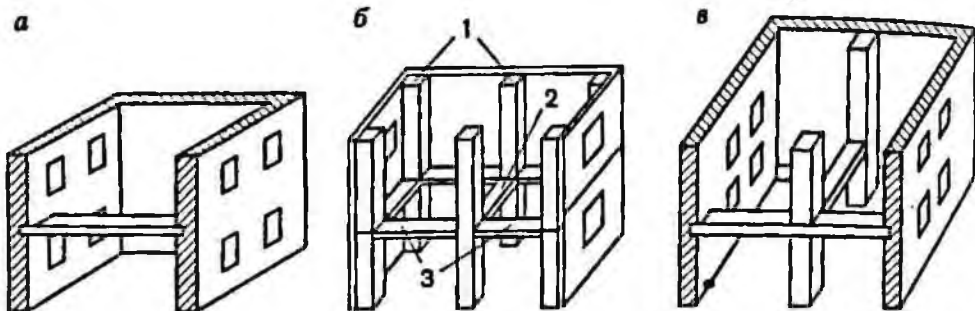


Рис. 54. Конструктивные схемы зданий

Сочетание несущих элементов составляет остов здания. В зависимости от видов сочетания элементов различают три конструктивные схемы зданий.

Если несущими элементами служат стены, то такую схему называют бескаркасной (рис. 54, а).

Если стены изготовлены из легких материалов с небольшой прочностью, то применяют каркасную схему (рис. 54, б). Каркас принимает на себя всю нагрузку и состоит из колонн 1, горизонтальных связей между ними — ригелей 2 и прогонов 3.

Если наружные стены являются несущими и нагрузка от перекрытия, крыши и других элементов передается непосредственно или через ригели на наружные стены или внутренние колонны каркаса, то это комбинированная схема (рис. 54, в).

По методам выполнения строительных работ здания подразделяются на монолитные, сборные и сборно-монолитные.

Монолитные здания возводятся из бетона или железобетона, укладываемого в опалубку непосредственно на строительстве.

При сборных методах строительства здание в основном собирается из заранее изготовленных на заводе или полигоне элементов. Если здание целиком собирается из сборных элементов — это полносборный метод строительства.

При сборно-монолитных методах строительства отдельные конструкции возводятся в монолите. Иногда для укрепления остова высотного сборного здания делают монолитное ядро жесткости.

Рассмотрим основные требования, предъявляемые к взаимному положению сборных элементов многоэтажных зданий, т. е. к геометрии сооружения.

Одно из основных требований заключается в том, чтобы несущие конструкции совпадали по вертикали на всех этажах здания. Необходимо отметить, что в сборном строительстве несущие конструкции не являются сплошными (монолитными), а состоят из отдельных элементов. Стыки (соединения) этих элементов более чувствительны к нагрузкам, что порождает более жесткие требования к точности их установки.

Другое важное требование состоит в том, чтобы была обеспечена собираемость здания. Монтаж элементов в пространстве должен выполняться так, чтобы все детали или их подавляющее большинство

устанавливались в проектное положение с требуемой точностью без дополнительной подгонки или обработки. Естественно, что как изготовление элементов, так и их монтаж производится с какими-то отклонениями от проекта. В процессе монтажа эти отклонения накапливаются, что может привести к тому, что очередной монтируемый элемент не будет совсем устанавливаться на место или будет устанавливаться с недопустимым отклонением.

Рассмотрим общую технологию возведения сборных зданий.

Все основные работы по возведению здания до уровня пола первого этажа составляют нулевой цикл строительства. Сюда входят выемка грунта из котлована, монтаж фундаментов и стен подвала, установка перекрытий, подводка коммуникаций и обратная засыпка грунта. Для монтажа фундамента и стен подвала производят детальную разбивку осей и построение высотных установочных рисок. В некоторых случаях фундаментные блоки устанавливаются непосредственно «под теодолит» или «под нивелир». Работы нулевого цикла завершаются исполнительной съемкой конструкций.

Возведение надземной части здания начинают с построения опорной плановой и высотной сети на исходном горизонте разбивки. В зависимости от конструктивных особенностей сооружения построение опорной плановой сети может производиться на конструкциях фундамента, подвала или одном из первых этажей здания. Наиболее часто исходный горизонт разбивки располагают на уровне пола первого этажа.

С пунктов опорной плановой сети производят детальную разбивку осей и приступают к монтажу конструкций первого этажа (яруса).

Процесс монтажа складывается из отдельных операций.

При подготовке к монтажу осуществляют контроль монтируемых элементов (в том числе и геометрических параметров), выверку опор и нанесение установочных рисок.

После окончания подготовительных работ выполняют строповку, подъем, установку (заводку) элементов на место монтажа и их выверку.

При выверке проверяют и корректируют вертикальность, положение элемента в плане и по высоте.

Технология выверки зависит от метода монтажа.

При свободном методе монтажа временное закрепление элемента осуществляют с помощью подкосов, расчалок, струбцин и одиночных кондукторов, а ориентирование элементов — с помощью установочных рисок или геодезическими методами.

При ограниченно свободном методе монтажа перемещение элементов в стадии установки ограничивают в одном или нескольких направлениях специальными приспособлениями — фиксаторами, упорами и т. д. При монтаже каркасно-панельных зданий наибольшее распространение нашли шарнирно-связевые кондукторы. Такой кондуктор состоит из пространственно жесткой части, выполняющей роль поддерживающей конструкции, и шарнирно-связевого устройства, которое одновременно и ограничивает и удерживает перемещение сборного элемента в плане и по вертикали. Выверку опорных плоскостей кондуктора, ограничивающих положение элемента, производят геодезическими методами при подготовке оснастки к монтажу.

После монтажа и окончательного закрепления сборных элементов производят исполнительную съемку конструкций.

Для выполнения работ на следующем горизонте исходные точки опорной плановой сети проецируют на монтажный горизонт, строят плановую сеть и производят детальную разбивку осей.

Монтаж конструкций и исполнительную съемку выполняют так же, как и на исходном горизонте разбивки.

Такие циклы работ выполняют на каждом монтажном горизонте до полного завершения строительства здания.

При монтаже многоэтажных сборных зданий наиболее ответственными являются работы, обеспечивающие вертикальность конструкций, совмещение их в плане на различных горизонтах и собираемость элементов. Геодезические работы, призванные обеспечить соблюдение этих требований, выполняют в такой последовательности:

построение опорной плановой сети на исходном горизонте разбивки;
проецирование исходных точек опорной сети на монтажные горизонты;

построение плановых сетей на монтажных горизонтах;
детальная разбивка осей.

§ 26. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ВЛИЯНИЯ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ РАБОТ НА КОНСТРУКЦИЯХ СБОРНЫХ ЗДАНИЙ

В процессе возведения здания колебания температуры воздуха могут достигать 60° . В еще больших пределах изменяется температура конструкций.

Рассмотрим влияние колебаний температуры на положение несущих конструкций каркаса здания в пространстве.

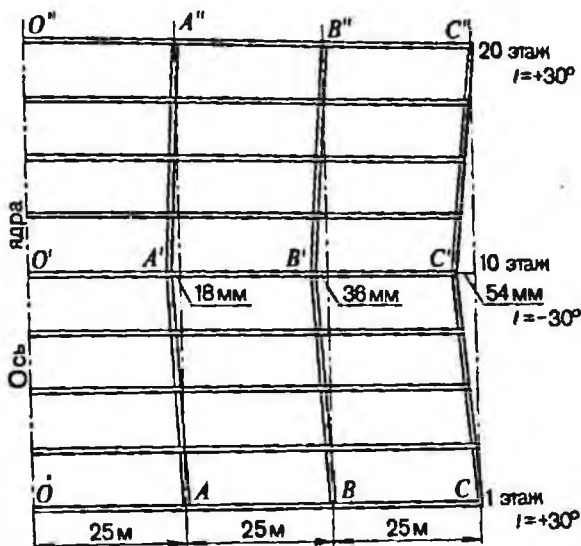
Предположим, что при разбивке осей и монтаже несущих конструкций, например колонн, на исходном горизонте выполняли при температуре t_n , а на монтажном горизонте при температуре t_m . При этом как на исходном, так и на монтажном горизонтах каждый раз откладывали на конструкциях проектное значение отрезка l_0 и по этому расстоянию устанавливали колонны.

Если после сдачи здания в эксплуатацию все конструкции примут температуру t_s , отличную от t_n и t_m , то или изменится длина горизонтальных связей между колоннами (длина ригелей и прогонов), или в этих связях возникнут дополнительные напряжения. Первое приведет к смещению колонн, второе к деформации конструкций здания.

Не останавливаясь на сравнении значимости этих явлений для эксплуатационных качеств здания, отметим, что все они крайне нежелательны. Вот почему в технических заданиях на производство работ особо оговаривается необходимость выполнения разбивочных работ с учетом разности температур конструкций во время монтажа.

В предположении, что произойдут только изменения в длинах горизонтальных связей, рассчитаем величину смещений колонн на исходном Δl_i и на монтажном Δl_m горизонтах. Если все конструкции

Рис. 55. Влияние температуры на смещение конструкций



здания состоят из одного материала, имеющего коэффициент линейного расширения α_x , то

$$\Delta l_n = \alpha_x(t_n - t_3)l_0 \quad \text{и} \quad \Delta l_m = \alpha_x(t_m - t_3)l_0,$$

где t_3 — температура эксплуатации здания.

В этом случае разность между длинами отрезков на монтажном и исходном горизонтах будет равна

$$\Delta l_i = \Delta l_{i_m} - \Delta l_{i_n} = \alpha_x(t_m - t_n)l_0.$$

В конструкциях из железобетона ($\alpha_x = 12 \cdot 10^{-6}$) при длине $l_0 = 75$ м и разности температур $t_m - t_n = 60^\circ$, получим $\Delta l_i \approx 54$ мм. Это значение в несколько раз превышает допуск на разбивку осей.

Рассмотрим на примере здания с ядром жесткости, как происходят в здании температурные смещения конструкций (рис. 55). Будем полагать, что вертикальная ось ядра здания под влиянием температурных воздействий не изменяет своего положения в пространстве. В этом случае колонны здания, в зависимости от удаления от ядра и разности температур при возведении конструкций, получают разные смещения. Предположим, что разбивку осей и монтаж колонн на 1 этаже выполняли при $t_1 + 30^\circ$, на 10 этаже при $t_{10} - 30^\circ$ и на 20 этаже при $t_{20} + 30^\circ$, откладывая при этом каждый раз проектные значения отрезков 25, 50 и 75 м. Пусть далее все конструкции здания приняли одну и ту же температуру, например $+30^\circ$. В этом случае колонны на 1 и 20 этажах не получают смещений. На 10 этаже вследствие изменения температуры на величину $t_m - t_n = -60^\circ$ длины горизонтальных связей $O'A'$, $O'B'$ и $O'C'$ изменятся соответственно на величины $\Delta O'A' = -18$ мм, $\Delta O'B' = -36$ мм и $\Delta O'C' = -54$ мм, что приведет к аналогичным отклонениям колонн от общей отвесной линии (вертикали).

Аналогичные изменения будут происходить и в пределах расчетных участков размерных цепей. Рассмотрим размерную цепь, приведенную на рис. 4. Пусть монтаж колонн A и B по осям I и II был выполнен без погрешностей, а расстояние между осями при выполнении монтажа

точно соответствовало проектному размеру. Предположим далее, что при изготовлении ригеля на заводе при $t_0 + 18^\circ$ его длина равна $l_0 = 6000$ мм. В этом случае при монтаже ригеля на строительной площадке, где $t = -30^\circ$, длина ригеля изменится на величину $\Delta l_1 = 12 \cdot 10^{-6}(-30 - 18)6 \cdot 10^3 = 3,5$ мм, которая полностью войдет в расчетный участок как погрешность компенсатора.

Чтобы исключить смещения конструкций, вызванные температурными влияниями, необходимо на конструкциях здания откладывать отрезок, длина которого l_1 при температуре t_1 эксплуатация здания будет равна проектному размеру l_0 .

Зависимость между l_1 и l_0 характеризуется выражением

$$l_0 = l_1 - \alpha_x(t - t_1)l_1,$$

откуда

$$l_1 = l_0 + \alpha_x(t_x - t_1)l_1.$$

Если в правой части равенства заменить неизвестное l_1 на l_0 , то мы допустим погрешность, равную

$$\eta_{l_1} = \alpha_x(t_x - t_1)(l_1 - l_0) \approx \alpha_x(t_x - t_1)\alpha_x(t_1 - t_0)l_0 = -\alpha_x^2(t_x - t_0)^2 l_0,$$

что при принятых ранее значениях α_x , t_x , t_1 и l_0 составит $\eta_{l_1} = -12^2 \times 10^2(-48)^{-1275} \cdot 10^3 \approx -5 \cdot 10^{-3}$ мм.

Пренебрегая этой величиной, окончательно получим

$$l_1 = l_0 + \alpha_x(t_x - t_1)l_0. \quad (392)$$

Необходимо отметить, что для правильного решения поставленной задачи далеко не безразлично, в каком направлении и от какой точки будет выполняться перенесение в натуру отрезков l_1 . Так, на рис. 55, для того чтобы колонны 10 этажа стали в проектное положение, перенесение отрезков в натуру следует начинать от ядра по направлению к торцевой стене.

В общем случае целесообразно для каждого здания при проектировании находить положение отвесных линий, в которых элементы конструкций не получают температурных смещений. В сборных зданиях с монолитным ядром жесткости такая линия будет совпадать с центром ядра, для сборных зданий без ядра с осями симметрии здания. В любом случае решение этого вопроса должно быть согласовано с проектной организацией.

Рассмотрим, как определить поправку в отсчет по мерному прибору при отложении на конструкциях зданий проектных отрезков.

Если при температуре конструкций t_x температура мерного прибора равна t_n и нулевое деление рулетки совмещено с началом отрезка, то для построения на конструкции здания отрезка l_1 на мерном приборе должен быть отсчет l_2 , равный

$$l_2 = l_1 + \alpha_n(t_{\text{комп}} - t_n)l_1,$$

где α_n — коэффициент линейного расширения мерного прибора; $t_{\text{комп}}$ — температура компарирования мерного прибора.

Для уменьшения объема вычислений все поправки делений мерного прибора обычно приводят к температуре эксплуатации здания. В этом случае

$$l_2 = l_1 + \alpha_n(t_2 - t_n)l_1.$$

Если заменить l_1 его значением из выражения (392), то

$$l_1 = l_0 + \alpha_x(t_x - t_2)l_0 - \alpha_n(t_n - t_2)l_0 - \alpha_n\alpha_x \times (t_n - t_2)(t_x - t_2)l_0.$$

Последний член правой части равенства можно не учитывать. Действительно, при $l_0 = 75$ м, $t_n - t_2 = t_x - t_2 = 60^\circ$ и $\alpha_n = 12,5 \cdot 10^{-6}$ (сталь) этот член равен $12,5 \cdot 10^{-6} \cdot 12 \cdot 10^{-6} \cdot 60 \cdot 60 \cdot 75 \cdot 10^3 = 0,04$ мм, что пренебрегаемо мало по сравнению с другими членами равенства. Тогда

$$l_2 = l_0 + \alpha_x(t_x - t_2)l_0 - \alpha_n(t_n - t_2)l_0.$$

Поправка Δl_1 , которую необходимо ввести в проектный отчет по мерному прибору, будет равна

$$\Delta l_1 = l_2 - l_0 = \alpha_x(t_x - t_2)l_0 - \alpha_n(t_n - t_2)l_0. \quad (393)$$

В таком виде применять формулу для вычисления поправки в полевых условиях трудно. Чтобы упростить вычисления и выявить некоторые стороны физической сущности явления, произведем некоторые преобразования. Введем обозначения

$$t = \frac{t_x + t_n}{2} \quad \text{и} \quad \Delta t = t_x - t_n.$$

Тогда

$$t_x = t - \frac{\Delta t}{2} \quad \text{и} \quad t_n = t + \frac{\Delta t}{2}.$$

Подставляя эти значения в выражение (393), после несложных преобразований получим

$$\Delta l_1 = (\alpha_x - \alpha_n)(t - t_2) - \frac{\alpha_x + \alpha_n}{2} \Delta t l_0.$$

Если обозначить $\alpha = (\alpha_x + \alpha_n)/2$ и $\Delta\alpha = \alpha_x - \alpha_n$, то будем иметь

$$\Delta l_1 = (t - t_2)l_0\Delta\alpha - \alpha l_0\Delta t. \quad (394)$$

Рассмотрим физический смысл членов правой части равенства (394).

Первый член отображает влияние разности коэффициентов линейных расширений конструкции и мерного прибора в зависимости от проектного размера и отклонения средней температуры от температуры эксплуатации здания; второй — влияние разности температур конструкций и мерного прибора в зависимости от среднего коэффициента линейного расширения и проектного размера.

Так как для конкретного здания и мерного прибора величины $\Delta\alpha$, α и t_2 постоянны, а проектные размеры принимают всего несколько значений, то поправки легко могут быть табулированы, что существенно упрощает вычисления.

При расчетах точности важно знать те значения, которые могут принимать величины, входящие в правую часть равенства (394).

Величина $\Delta\alpha$ — это разность коэффициентов линейного расширения конструкций и мерного прибора. Необходимо отметить, что для одного и того же материала значение коэффициента линейного расширения может колебаться в определенных пределах в зависимости от особенностей структуры конкретного образца. Так, коэффициент линейного расширения стали Ст. 3 при среднем значении $\alpha_{ст} = 12,5 \cdot 10^{-6}$ колеблется в пределах от 11 до 14 единиц 10^{-6} .

Если коэффициент линейного расширения для конкретного мерного прибора может быть определен в результате специального исследования, то для определения коэффициента линейного расширения конструкций такой путь в массовом строительстве не может быть применен. Поэтому на практике приходится пользоваться какими-то осредненными значениями коэффициентов линейного расширения, выбираемыми из соответствующих справочных материалов. Так, для железобетонных конструкций принимают $\alpha_{жб} = 12 \cdot 10^{-6}$, а для стальных — $\alpha_{ст} = 12,5 \times 10^{-6}$.

Тогда при выполнении разбивочных работ на железобетонных конструкциях $\Delta\alpha_{жб} = -0,5 \cdot 10^{-6}$, а на стальных конструкциях — $\Delta\alpha_{ст} = 0$. В этом случае первый член правой части равенства (394) обращается в нуль.

Погрешность $\eta_{\Delta\alpha}$ определения $\Delta\alpha$ в основном зависит от погрешности определения α_x . Принимая $\Delta\alpha_{ст} \approx \Delta\alpha_{жб}$, будем полагать, что предельное значение погрешности определения $\Delta\alpha$ равно

$$|\eta_{\Delta\alpha}|_{\max} = |14 - 12,5| \cdot 10^{-6} = |11 - 12,5| \cdot 10^{-6} = 1,5 \cdot 10^{-6}.$$

Так как погрешность в три раза больше самого значения $\Delta\alpha$, то учитывать первый член правой части равенства (394) не имеет смысла. Отбрасывая этот член, мы допускаем предельную относительную погрешность

$$\frac{|\varepsilon_{\Delta\alpha}|_{\max}}{l_0} = |\eta_{\Delta\alpha}|_{\max} |t - t_3|_{\max}. \quad (395)$$

Если учитывать, что при температуре ниже -25° работы на монтажном горизонте в центральных областях нашей страны производят редко, а температура эксплуатации зданий $t_3 = 18^\circ$, то

$$\frac{|\varepsilon_{\Delta\alpha}|_{\max}}{l_0} = 1,5 \cdot 10^{-6} | -25 - 18 | = 64,5 \cdot 10^{-6} = \frac{1}{15500}.$$

Разность температур конструкции и мерного прибора может колебаться в довольно значительных пределах. Это объясняется тем, что любому телу для восприятия температуры окружающей среды необходимо время. Если при изменении температуры среды массы и теплопроводные способности тел различны, то и температура этих тел может быть различна. Кроме того, в строительстве даже расположенные рядом конструкции здания подвержены неравномерному нагреву солнечными лучами.

Чтобы иметь представление о тех значениях, которые может принимать Δt , в производственных условиях были выполнены следующие наблюдения. Тремя термометрами одновременно измеряли температуру конструкции, мерного прибора (стальной рулетки) и воздуха. При

Таблица 11

Сезон	$\Delta t = t_k - t_n$		$t - t_n$		
	Максимальные значения, встречающиеся		Среднее значение	Максимальное значение	Среднее значение
	однократно	многократно			
Зима	+4,6°	+4,0°	+0,2°	+3,4°	+0,3°
Весна	-7,4	-6,1	-0,9	+4,3	+0,9
Лето	-13,7	-19,2	-3,7	-5,5	-0,8
Осень	-5,4	-4,5	-0,7	-4,5	-0,7

измерении температуры конструкций головку термометра (резервуара со ртутью) закладывали в специальные лунки в конструкциях. Лунки изолировались от влияния температуры окружающей среды деревянными пробками. Температура рулетки измерялась вторым термометром, прикрепленным к полотну рулетки, а воздух — третьим термометром в месте, защищенном от действий солнечных лучей. Наблюдения велись с октября по сентябрь следующего года.

Сезонные колебания разности температур приведены в табл. 11, а наиболее характерные графики хода температуры на рис. 56.

Максимальных значений величина $|\Delta t|$ достигает в летний период, когда конструкции и мерный прибор наиболее интенсивно нагреваются солнечными лучами.

Мерный прибор, имеющий небольшую массу, нагревается и охлаждается значительно быстрее, чем конструкции сооружения. Температура конструкций изменяется более плавно и в меньших пределах.

Температура воздуха t_n , как правило, близка к среднему t из температур конструкции и мерного прибора и отличается от него в пределах от $-5,5$ до $4,3^\circ$.

В [13] предлагается применять три варианта разбивки осей на конструкциях зданий. Рассмотрим эти варианты и методику расчета точности.

В первом варианте измерения производят инварными проволоками с определением температуры и коэффициентов линейного расширения мерного прибора и конструкций, а поправки в результаты измерений вычисляют по формуле (394).

Для оценки погрешности η_{t_I} , обусловленной влиянием температуры, продифференцируем правую часть равенства (393) по переменным $\alpha_x, t_x, \alpha_n, t_n$ и определим дисперсию D_{t_I} погрешности η_{t_I}

$$D_{t_I} = (t_x - t_s)^2 I_0^2 D_{\alpha_x} + \alpha_x^2 I_0^2 D_{t_x} + (t_n - t_s)^2 I_0^2 D_{\alpha_n} + \alpha_n^2 I_0^2 D_{t_n}.$$

Относительная погрешность будет равна

$$\frac{\sigma_{t_I}}{I_0} = \sqrt{(t_x - t_s)^2 D_{\alpha_x} + \alpha_x^2 D_{t_x} + (t_n - t_s)^2 D_{\alpha_n} + \alpha_n^2 \times D_{t_n}}. \quad (396)$$

Если при измерениях инварными проволоками ($\alpha_n = 0,5 \cdot 10^{-6}$; $\sigma_{\alpha_n} = 0,1 \cdot 10^{-6}$) температуру мерного прибора определять со стандартом

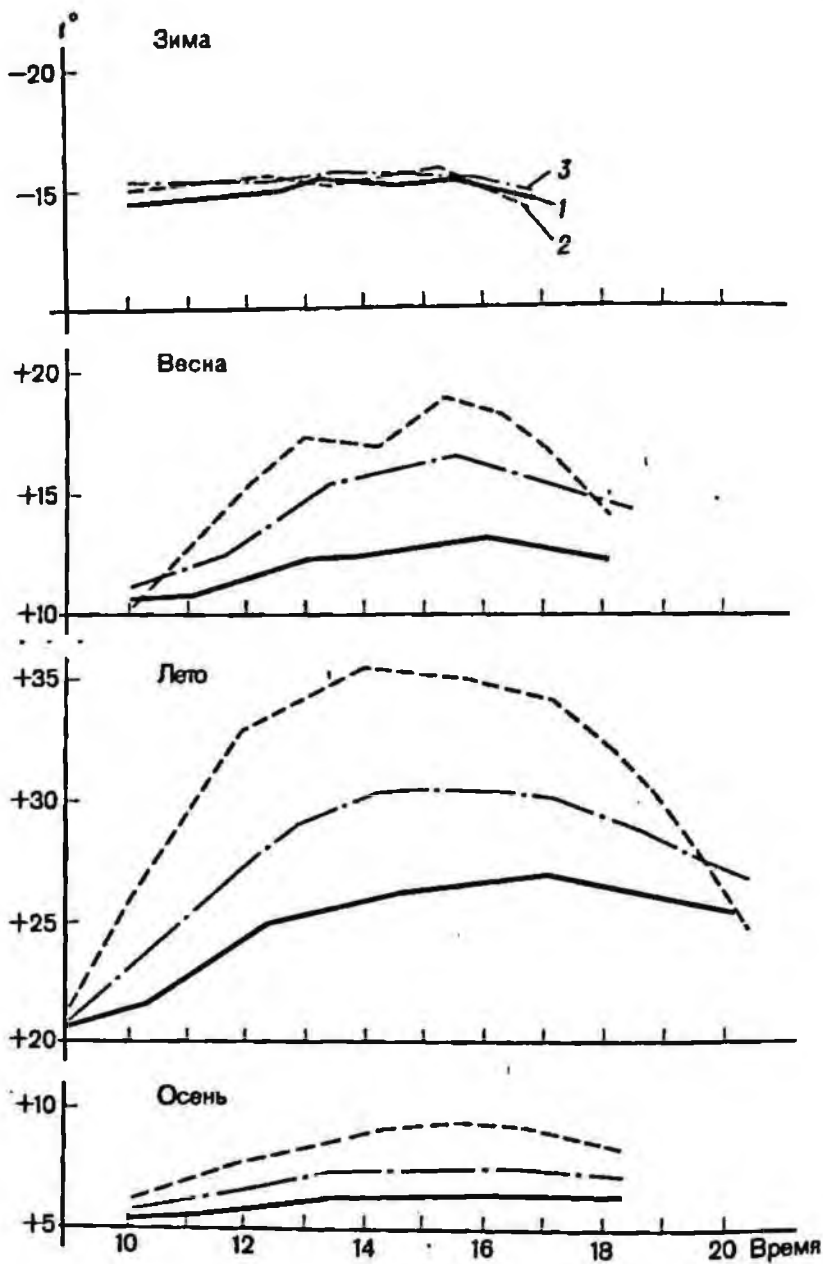


Рис. 56. Графики сезонных колебаний температур:
 1 — конструкций, 2 — мерного прибора, 3 — воздуха

$\sigma_{t_n} = 1^\circ$, то последние два члена правой части равенства (396) будут пренебрежимо малы. Действительно, если для средних условий принять $(t_n - t_s) = |-25 - 18|/3 \approx 14^\circ$, то

$$\begin{aligned} & \sqrt{(t_n - t_s)^2 D_{a_n} + a_n^2 D_{t_n}} = \\ & = \sqrt{14^2 \cdot 0,1^2 \cdot 10^{-12} + 0,5^2 \cdot 10^{-12} \cdot 1^2} = 1/450\,000. \end{aligned}$$

В этом случае выражение (396) можно записать в виде

$$(\sigma_{t_I}/l_0)^2 = (t_x - t_n)^2 D_{a_x} + a_x^2 D_{t_x}. \quad (397)$$

В расчетах точности в качестве предельного значения δ_{t_I} можно принять утроенное значение стандарта σ_{t_I} .

Во втором варианте измерения производят стальными мерными приборами (рулетками) с определением разности температур мерного прибора и конструкции, а поправки в проектные отсчеты вычисляют по формуле

$$\Delta l_{II} = -a l_0 \Delta t. \quad (398)$$

При этом поправки делений мерного прибора и его уравнение приводит к температуре эксплуатации сооружения.

Для оценки дисперсии определения поправки Δl_{II} продифференцируем правую часть равенства (398) по переменным a и Δt . Тогда

$$\sigma_{\Delta l_{II}}^2/l_0^2 = (\Delta t)^2 D_a + a^2 D_{\Delta t}.$$

Во втором варианте значения a_x и a_n выбирают из справочных материалов. Рассматривая погрешности $\eta_{a_x} = \eta_{a_n}$ определения коэффициентов линейных расширений как случайные величины с равномерным распределением вероятностей в интервале от $-\eta_{a_{\max}}$ до $\eta_{a_{\max}}$, запишем

$$D_{a_x} = D_{a_n} = \frac{\eta_{a_{\max}}^2}{3}.$$

В этом случае дисперсия величины $a = (a_x + a_n)/2$ будет равна

$$D_a = \frac{D_{a_x} + D_{a_n}}{4} = \frac{D_{a_n}}{2} = \eta_{a_{\max}}^2/6.$$

Так как $\Delta t = t_x - t_n$, то

$$D_{\Delta t} = D_{t_x} + D_{t_n}.$$

Подставляя значения D_a и $D_{\Delta t}$ в формулу для определения относительно погрешности, получим

$$\left(\frac{\sigma_{t_{II}}}{l_0}\right)^2 = \frac{(\Delta t)^2 \eta_{a_{\max}}^2}{6} + a^2 (D_{t_x} + D_{t_n}). \quad (399)$$

За предельное значение $\delta_{\sigma_{t_{II}}}$ можно принять утроенный стандарт $\sigma_{t_{II}}$.

Чтобы оценить общую предельную погрешность $\delta_{t_{II}}$ к полученному значению $\delta_{\sigma_{t_{II}}}$, необходимо добавить погрешность, предельное значение которой определяется по формуле (395). Тогда

$$\delta_{t_{II}} = \frac{3\sigma_{t_{II}}}{l_0} + \frac{|\epsilon_{\Delta a}|_{\max}}{l_0}. \quad (400)$$

В третьем варианте измерения производят стальными мерными приборами, поправки делений за компарирование приводят к температуре эксплуатации сооружения, а поправки в отсчеты по мерному прибору не вводят.

В этом случае погрешность $\epsilon_{i_{III}}$ построения отрезка равна величине поправки с обратным знаком

$$\epsilon_{i_{III}} = \alpha \Delta t - (t - t_2) \Delta \alpha.$$

Так как оба члена правой части равенства в наиболее неблагоприятном случае могут иметь одинаковые знаки, то предельное значение погрешности $\delta_{i_{III}}$ можно вычислить по формуле

$$\frac{\delta_{i_{III}}}{l_0} = \alpha_{\max} |\Delta t|_{\max} + |t - t_2|_{\max} \times |\Delta \alpha|_{\max}. \quad (401)$$

Отметим, что при построении проектных отрезков с предельной относительной погрешностью $1/2000$ на долю рассматриваемого фактора приходится около 40% общей погрешности. Поэтому температурные влияния при построениях отрезков на конструкциях сооружений являются одним из основных источников погрешностей.

Пример 35. Для трех вариантов введения поправок за температуру рассчитать предельные значения погрешностей построения отрезков на железобетонных конструкциях многоэтажных зданий.

Решение. Определение коэффициентов линейных расширений конструкций лабораторным путем сопряжено со значительными трудозатратами. Если α_x выбирается из справочных материалов, то погрешность его значения можно считать случайной величиной с равномерным распределением вероятностей в интервале $[-1,5 \cdot 10^{-6}; +1,5 \cdot 10^{-6}]$. В этом случае

$$D_{\alpha_x} = 1,5^2 \cdot 10^{-12} / 3 = 0,75 \cdot 10^{-12}.$$

При введении поправок необходимо знать усредненное значение температуры по всему телу конструкции. Измерение температуры в одной точке конструкций не дает полного представления о t_x . Можно лишь полагать, что при тщательном определении температуры конструкции в одной точке стандарт не превысит величины $\sigma_{t_x} = 2^\circ$.

Принимая, как и ранее, значение $(t_x - t_2) = 14^\circ$, получим

$$\frac{\sigma_{i_1}}{l_0} = \sqrt{14^2 \cdot 0,75 \cdot 10^{-12} + 12^2 \cdot 10^{-12} \cdot 2^2} = 1/37\,000.$$

Предельная погрешность первого варианта будет равна

$$\sigma_{i_1} / l_0 = 3\sigma_{i_1} / l_0 = 1/12\,000.$$

Для второго варианта построения отрезков среднее значение разности температур конструкций и мерного прибора выберем из табл. 11. Подставляя значения $\Delta t = -3,7^\circ$, $\alpha_{\max} = 1,5 \cdot 10^{-6}$; $\sigma_{t_x} = 2^\circ$ и $\sigma_{t_n} = 1^\circ$ в правую часть (399), получим

$$\sigma_{i_{II}} / l_0 = \sqrt{\frac{3,7^2 \cdot 1,5^2 \cdot 10^{-12}}{6} + 12,2^2 \cdot 10^{-12} (2^2 + 1^2)} = 27,4 \cdot 10^{-6}.$$

Так как $|\epsilon_{\Delta \alpha}|_{\max} : l_0 = 64,6 \cdot 10^{-6}$, то

$$\delta_{i_{II}} / l_0 = 27,4 \cdot 10^{-6} + 64,6 \cdot 10^{-6} = 1/6800.$$

Для определения предельных значений погрешности третьего варианта примем следующие значения: $|\Delta \alpha|_{\max} = 3 \cdot 10^{-6}$ и $\alpha_{\max} = 13 \cdot 10^{-6}$.

Отбрасывая редко встречающиеся крайние значения, будем полагать, что зимой $|\Delta t|_{\max} = 4^\circ$ и $|t - t_2| = |-25 - 18| = 43^\circ$. Тогда

$$\delta_{i_{III}} / l_0 = 13 \cdot 10^{-6} \cdot 4 + 43 \cdot 3 \cdot 10^{-6} = 1/5500.$$

Для летнего периода $|\Delta t|_{\max} = 10^\circ$ и $|t - t_2| = |40 - 18| = 22^\circ$. В этом случае

$$\delta_{i_{III}} / l_0 = 13 \cdot 10^{-6} \cdot 10 + 22 \cdot 3 \cdot 10^{-6} = 1/5100.$$

§ 27. ДЕТАЛЬНАЯ РАЗБИВКА ОСЕЙ

Детальная разбивка осей производится для фиксации местоположения элементов конструкций здания или сооружения. Используя оси детальной разбивки, при монтаже добиваются соблюдения требований к взаимному положению элементов конструкций и положению конструкций относительно проектных осей.

Основой для детальной разбивки служит плановая сеть на монтажном горизонте. Размеры, форму и точность построения сети выбирают в зависимости от особенностей сооружения и требований к точности монтажа. Несмотря на разнообразие видов принцип построения плановых сетей остается общим для всех сооружений: плановая сеть создается в виде правильных фигур, стороны которых параллельны проектным осям. Это позволяет осуществлять разбивку с помощью несложных построений, повышает точность и сокращает трудозатраты.

На рис. 57, а изображена одна из наиболее распространенных схем плановой сети для панельных зданий. Пункты сети I, II, III и IV образуют прямоугольник со сторонами, параллельными осям здания.

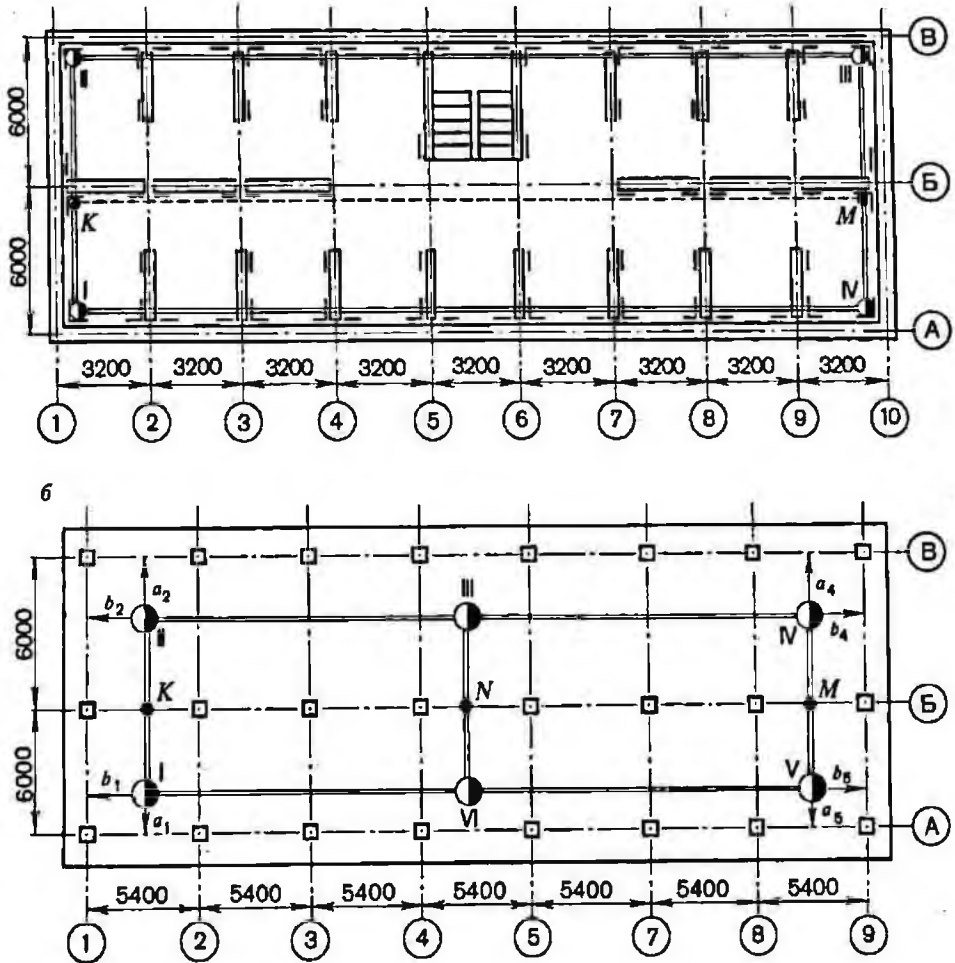


Рис. 57. Детальная разбивка осей

Монтаж панелей производят по установочным рискам, которые располагаются параллельно осям на некотором расстоянии от грани панели. При определении расстояния от осей до рисков исходят из удобства монтажа и выверки конструкций.

Для построения установочных рисков по сторонам плановой сети I-II и IV-III откладывают отрезки IK и IVM. По полученному створу KM отмечают положение установочных рисков и закрепляют их на конструкциях здания для монтажа панелей по продольной оси Б-Б. Положение установочных рисков для поперечных осей здания определяют промерами по соответствующему створу. Так, для получения поперечных установочных рисков в районе оси А-А откладывают проектные расстояния по створу стороны сети I-II.

На рис. 57,б показана плановая сеть каркасного здания. Сеть состоит из шести пунктов, образующих два прямоугольника.

При возведении зданий с каркасом в виде колонн оси детальной разбивки обычно наносят на оголовки колонн, выступающие над перекрытиями нижнего этажа.

Построения створов продольных осей осуществляют путем отложения проектных отрезков. Так, для построения оси А-А от пунктов I и V откладывают отрезки $a_1 = a_5$. Поперечные оси наносят на оголовки промерами вдоль продольных осей здания.

Требования к точности разбивки осей определяют из расчетов размерных цепей. Одна из основных задач этого расчета заключается в обеспечении полной собираемости конструкций. Разбивку осей, монтаж и изготовление конструкций необходимо выполнять так, чтобы все сборные конструкции или подавляющее большинство их устанавливались в проектное положение в пределах допусков и без дополнительной обработки или подгонки элемента «по месту».

При расчете размерной цепи на собираемость учитывают погрешности разбивки осей η_{po} , монтажа η_m и изготовления η_n конструкций. Для размерной цепи, изображенной на рис. 4, уравнение (110) можно записать в виде:

$$\xi = \eta_{po} + \eta_m + \eta_n, \quad (402)$$

где $\eta_m = \eta_{mk}^A - \eta_{mk}^B - \eta_{mp}$; $\eta_n = -\eta_{nk}^A - \eta_{nk}^B - \eta_{np}$.

Рассмотрим влияние систематических и случайных частей погрешностей правой части равенства (402) на замыкающий размер c_2 .

Так как погрешности разбивки осей, монтажа конструкций и изготовления элементов можно считать независимыми, то

$$\lambda_\xi = \lambda_{po} + \lambda_m + \lambda_n; \quad \sigma_\xi^2 = \sigma_{po}^2 + \sigma_m^2 + \sigma_n^2. \quad (403)$$

Систематическая часть разбивки осей приводит к изменению на монтажном горизонте среднего значения размера l_1 , т.е. расстояния между осями. В пределах одного монтажного горизонта это приводит к изменению общей длины здания, что отрицательно сказывается на эксплуатационных его качествах. Влияние изменения длины здания на монтажном горизонте целесообразно учитывать при расчете погрешностей построения плановой сети. Небольшие же значения λ_{po} при расчетах размерных цепей обычно не учитывают.

Рассмотрим влияние систематических погрешностей монтажа конструкций. Для размерной цепи на рис. 4 систематическую погрешность монтажа можно записать в виде

$$\lambda_m = \lambda_{mk}^A - \lambda_{mk}^B - \lambda_{mp}$$

Так как систематические части монтажа колонн A и B равны, т.е. $\lambda_{mk}^A = \lambda_{mk}^B$, то $\lambda_m = -\lambda_{mp}$. В этом случае систематические погрешности монтажа колонн не влияют на собираемость конструкции, но вызывают крайне нежелательный общий наклон колонн на монтажном горизонте. Величина такого наклона регламентируется при конструктивном расчете здания.

Систематические погрешности изготовления сборных элементов обусловлены влиянием погрешностей изготовления формовочного оборудования и его деформациями в процессе эксплуатации. В некоторых случаях λ_m достигает довольно больших значений. Так, по исследованиям Я. А. Сокольского ригели каркасно-панельного дома имеют $\lambda_m = +4,2$ мм. Для ослабления влияния этого фактора автор исследования предлагает производить разбивку осей с положительным значением λ_{po} .

Приведенные выше примеры показывают, что систематические погрешности могут быть учтены и влияние их может быть ослаблено при надлежащей организации монтажных и геодезических работ. Другой важной задачей расчета размерных цепей является выбор оптимального соотношения между случайными погрешностями разбивки осей, монтажа и изготовления сборных элементов.

Случайные погрешности этих работ регламентируются нормативными документами, что позволяет по допускам составляющих размеров однозначно определить допуск замыкающего размера.

При решении обратной задачи расчета по допускаемому отклонению замыкающего размера назначают допуски на составляющие размеры. Так как эта задача не имеет единственного решения, то при выборе оптимальных вариантов учитывают также и экономические показатели. Сложилось мнение, что влияние стоимости выполнения работ по разбивке осей пренебрегаемо мало по сравнению со стоимостями монтажа и изготовления сборных элементов. Но в стоимость монтажа входит стоимость материалов, составляющая 66,1% от общей стоимости строительства. Если же сравнение производить исходя из эффективности производства, т.е. по трудозатратам, то существо резко меняется. Так, трудозатраты по разбивке осей на монтажном горизонте для одной из серий зданий составляют 3,1 чел.-дней, а на монтаже каркаса конструкции Моспроекта ограниченно свободным методом достигают 11,0 чел.-дней. Таким образом, трудозатраты на разбивку осей составляют 28% от трудозатрат на монтаж сборных элементов.

Существенное влияние на определение допусков в размерных цепях оказывает уровень строительной техники. Так, применение разного монтажного оборудования существенно изменяет точность выполнения работ. По результатам исследований, приведенным в [3], отклонения от вертикали при выверке колонн одиночными кондукторами достигают 19 мм, шарнирно-связевыми кондукторами конструкции ЦНИИОМТП и СКБ Главмосстроя — 10 мм, групповыми кондукторами конструкции

Мосторстря - 7 мм и шарнирно-связевыми кондукторами конструкции Свердловского филиала Индустройпроекта - 5 мм.

Расчеты точности размерных цепей существенно осложняются тем, что в процессе возведения здания изменяются числовые характеристики погрешностей. По мере эксплуатации формовочного оборудования изменяются размеры сборных элементов, а изменение условий окружающей среды приводит к изменению погрешностей осей и монтажа. Для учета влияний таких изменений в [27] рекомендуется использовать однородные цепи Маркова.

Приведенные примеры показывают, что расчет точности размерных цепей в строительстве является сложной технической задачей.

Погрешности детальной разбивки - это погрешности построения проектных отрезков, входящих в размерную цепь, например отрезка l_1 в размерной цепи (см. рис. 4). Расчеты построения проектных отрезков подробно рассмотрены в § 14.

Остановимся на особенностях расчета точности детальной разбивки осей. Рассмотрим два способа разбивки.

При первом способе детальную разбивку осей, построение установочных рисок выполняют сразу на всем монтажном горизонте или в пределах одной фигуры плановой сети. В этом случае расчеты точности сводятся к определению погрешностей построения створа для установочных рисок продольных осей и построения проектных отрезков для установочных рисок поперечных осей зданий.

При построении створов небольшой длины преобладающее влияние оказывают погрешности за центрировку и редукцию. Поэтому при выполнении работ ориентирование визирной оси стараются производить непосредственно на знаки закрепления осей, а прибор устанавливают на небольшой высоте. В отдельных случаях для ослабления влияния погрешности центрирования теодолит при построении створа устанавливают заново в каждом полуприеме. При расчетах будем полагать, что дисперсия D_c центрирования в этом случае уменьшится в два раза.

При небольших длинах сторон и невысоких требованиях к точности построение створов осуществляют при помощи стальной проволоки (струны) или капроновой лески. В этом случае погрешность построения точек створа обусловлена влиянием неточности установки струны над начальной и конечной точками створа, отклонениями струны от прямолинейного положения и погрешностями фиксации точек створа. Погрешности отклонения струны или лески от прямой линии при усложнении ее на плоскости перекрытий изучены слабо. Можно полагать, что при отсутствии ветра, изгибов стальной проволоки и заметных неровностей на поверхности перекрытий эти отклонения при длине створа до 50 м не превысят 1 мм.

При этом способе разбивки отрезки поперечных осей здания получают как расстояния между точками двух створов (установочными рисками двух продольных осей).

Систематические погрешности построения поперечных осей обусловлены влиянием систематических погрешностей построения отрезков по поперечным сторонам плановой сети, например отрезков IK и

IVM на рис. 57,а и отрезков IK и VM на рис. 57,б. Обозначив систематическую часть погрешности разбивки осей через λ_{po} , а погрешности построения отрезков через λ_i , получим

$$\lambda_{po} = \lambda_i. \quad (404)$$

Если дисперсии построения двух створов, определяющих отрезок поперечной оси, обозначить через $D_{ствi}$ и $D_{ствi+1}$, то

$$D_{po} = D_{ствi} + D_{ствi+1}, \quad (405)$$

где D_{po} — дисперсия погрешности разбивки осей.

Погрешности построения створов зависят от положения точки на створе, т.е. расстояния от начала створа до точки. Чем ближе точки к поперечным сторонам сети, тем точнее производится разбивка поперечных осей. При расчетах точности рассматривают наиболее неблагоприятные случаи построения.

Разбивку продольных осей осуществляют методом отложения проектных отрезков по продольным сторонам плановых сетей или вспомогательным створам, например створу KM на рис. 57. В этом случае расчет точности сводится к решению задачи о делении отрезка на части.

Пусть сторону сети L необходимо разделить на n приблизительно равных отрезков l . Для выполнения этой операции в створ стороны сети укладывают мерный прибор и на пунктах сети берут отсчеты. Далее откладывают проектные размеры по мерному прибору, отметив по ним положение точек, закрепляют на конструкциях концы проектных отрезков, т.е. установочные риски поперечных осей.

Если считать, что сторона сети (отрезок L) имеет погрешность η_L , а сам процесс деления рассматривать как вычислительную операцию, то погрешность η_l отрезка l будет равна $\eta_l = \eta_L/n$.

Обозначив систематические части погрешностей этих отрезков соответственно через λ_l и λ_L , получим

$$\lambda_l = \lambda_L/n. \quad (406)$$

Нетрудно убедиться в том, что аналогично можно получить и стандарты погрешности. Действительно, обозначив случайные части погрешностей отрезков L и l через μ_L и μ_l , запишем

$$\sigma_L^2 = [\mu_L^2]/r \quad \text{и} \quad \sigma_l^2 = [\mu_l^2]/r,$$

где r — число измеренных значений в совокупности.

Но $\mu_L = n\mu_l$, тогда

$$\sigma_L^2 = n^2 \frac{[\mu_l^2]}{r} = n^2 \sigma_l^2$$

или

$$\sigma_l = \sigma_L/n. \quad (407)$$

Погрешность η_L является погрешностью исходных данных, поэтому величины λ_l и σ_l можно рассматривать как оценки влияния исходных данных на результаты разбивки осей.

Кроме погрешностей исходных данных на разбивку продольных осей (поперечных установочных рисок) влияют погрешности делений мер-

ного прибора, нанесения рисок по проектному отсчету и закрепления (фиксации) рисок.

Погрешность нанесения рисок по проектному отсчету приравнивают к погрешности отсчета по мерному прибору. Эту погрешность относят к случайным и характеризуют стандартом σ_0 . Значения стандарта можно оценить по формулам (246) или (247).

Стандарт погрешности делений стальной рулетки принимают равным $\sigma_p = 0,05$ мм.

Значение стандарта фиксации точек выбирают из табл. 3.

Так как при разбивке отмечают и закрепляют две точки, то дисперсию погрешности разбивки продольных осей можно определить по формуле

$$D_{po} = D_L/n + D_0 + 2D_d + 2D_\phi. \quad (408)$$

Плановая сеть по точности на класс выше детальной разбивки осей (D_L/n — мало), а при простом отложении отрезка в общую погрешность, кроме погрешностей отсчета, делений рулетки и фиксации, входит еще ряд других элементарных погрешностей. Поэтому значение σ_{po} обычно меньше стандарта построения такого же отрезка, построенного непосредственно. При делении сторон плановой сети на части погрешности за температуру мерного прибора, компарирование и другие погрешности, пропорциональные длине откладываемого отрезка, не оказывают влияния на точность разбивки, а погрешности, обусловленные температурными воздействиями на конструкции здания, при построении плановой сети обычно учитываются.

При разбивке продольных осей по вспомогательным створам необходимо учитывать погрешности построений начальной и конечной точек створа.

Во втором способе детальной разбивки осей построения производят от двух противоположных сторон сети навстречу друг другу, например от сторон I—II и IV—V на рис. 57, б. Такой способ разбивки применяют тогда, когда нельзя проводить работы в одной из частей здания.

Рассмотрим погрешности разбивки при втором способе.

Предположим, что в стороне плановой сети II—III на рис. 57, б отрезок l , равный шагу осей, укладывается n раз. Пусть от пункта II по направлению к пункту III установочные риски поперечных осей построены на участке $L_1 = k_1 l$, а от пункта III к пункту II на участке $L_2 = k_2 l$. Возьмем случай, когда $k_1 + k_2 = n - 1$, т. е. когда построены все установочные риски поперечных осей, а один пролет продольных осей на стыке участков не измерялся. Этот пролет можно рассматривать как замыкающий размер $l_{зам}$ цепи, состоящей из стороны плановой сети L и размеров двух участков L_1 и L_2 .

Уравнение этой размерной цепи будет иметь вид

$$l_{зам} = L - L_1 - L_2.$$

Определим систематическую погрешность $\lambda_{l_{зам}}$ замыкающего размера $\lambda_{l_{зам}} = \lambda_L - \lambda_{L_1} - \lambda_{L_2}$. Но $\lambda_{L_1} = k_1 \lambda_{po}$ и $\lambda_{L_2} = k_2 \lambda_{po}$, тогда

$$\lambda_{l_{зам}} = \lambda_L - (n - 1) \lambda_{po}. \quad (409)$$

Нетрудно убедиться, что $\lambda_{i_{\text{зам}}}$ невелико. Действительно, если заведомо преувеличить систематическую погрешность стороны плановой сети и принять ее равной $\lambda_L = n\lambda_{\text{po}}$, то

$$\lambda_{i_{\text{зам}}} = n\lambda_{\text{po}} - (n-1)\lambda_{\text{po}} = \lambda_{\text{po}}.$$

Это утверждение справедливо только в том случае, когда температурные влияния на конструкции здания учтены как при построении сети, так и при разбивке осей. Если это условие нарушено, то погрешность поправки Δl_i целиком войдет в систематическую часть погрешности. Так, при третьем варианте учета температурных воздействий на конструкции зданий (относительная погрешность 1:5000) при длине стороны сети $L = 40$ м, систематическая погрешность разбивки пролета осей на стыке участков будет равна

$$\lambda_{i_{\text{зам}}} = \lambda_{\text{po}} = 40\,000/5\,000 = 8 \text{ мм.}$$

При оценке случайных погрешностей размеры L , L_1 и L_2 можно считать независимыми. Тогда

$$\sigma_{i_{\text{зам}}}^2 = \sigma_L^2 + \sigma_{L_1}^2 + \sigma_{L_2}^2. \quad (410)$$

При построении размеров L_1 и L_2 по направлению продольной оси последовательно откладывают проектные отрезки l . Обычно при одном уложении мерного прибора отмечают положение нескольких установочных рисок. При таком выполнении работ погрешности отрезков будут зависимыми величинами. Если стандарт построения одного отрезка равен σ_p , а корреляционная зависимость существует только между отрезками, имеющими общую точку, то погрешности размера L_1 можно определить по формуле

$$\sigma_{L_1}^2 = \sum_{i=1}^{k_1} \sigma_{\text{po}_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{k_1-1} r_{i,i+1} \sigma_{\text{po}_i} \sigma_{\text{po}_{i+1}},$$

где $r_{i,i+1}$ — коэффициент корреляции между l_i и l_{i+1} .

Отрезки l_1, l_2, \dots, l_{k_1} при разбивке осей или равны, или близки по длине, а условия их построения практически одинаковы. Поэтому можно считать, что

$$\sigma_{\text{po}_1} = \sigma_{\text{po}_2} = \dots = \sigma_{\text{po}_{k_1}} = \sigma_{\text{po}} \quad \text{и} \quad r_{1,2} = r_{2,3} = \dots = r_{k_1-1, k_1} = r.$$

Тогда

$$\sigma_{L_1}^2 = k_1 \sigma_{\text{po}}^2 + 2(k_1 - 1)r \sigma_{\text{po}}^2. \quad (411)$$

Аналогичное выражение можно получить для отрезка L_2

$$\sigma_{L_2}^2 = k_2 \sigma_{\text{po}}^2 + 2(k_2 - 1)r \sigma_{\text{po}}^2.$$

Подставляя эти значения в (410), окончательно получим

$$\sigma_{i_{\text{зам}}}^2 = \sigma_L^2 + (n-1)\sigma_{\text{po}}^2 + 2(n-3)r\sigma_{\text{po}}^2. \quad (412)$$

На практике расчеты точности с учетом корреляционной зависимости не вызывают затруднений. Однако получение коэффициента корреляции опытным путем связано со значительными трудозатратами, но при расчетах точности его не надо знать с высокой точностью. В этом случае приближенное значение r можно определить по фор-

мулам (44) или (47) с использованием известных из практики значений стандартов построения отрезков и общих слагаемых.

Рассмотрим один из примеров применения такого определения коэффициента корреляции. На строительстве одного из объектов коэффициент корреляции между длинами двух смежных отрезков полевого компаратора был вычислен по формуле (45) и определен по результатам обработки полевых измерений.

Измерение отрезков компаратора AB и BC выполняли на плоскости пятью стальными 50-метровыми рулетками с миллиметровыми делениями. Натяжение рулетки производили силой 10 кг с помощью пружинного динамометра. При измерениях в каждой из точек производили пять пар отсчетов. Рулетку между отсчетами сдвигали в пределах 1–2 дм. Отсчеты по рулетке на всех точках выполняли одновременно. Измерения производили в различные времена года при температурах от +22 до -18°C .

При вычислении длины отрезков AB и BC в отсчеты по рулетке вводили поправки за температуру и за деления рулетки. Поправки делений были получены путем сравнения рулетки с нормальной (женевской) линейкой. Сравнение выполняли двумя приемами. Оценка стандарта определения поправки делений, выполненная по разностям значений поправок в приемах, оказалась равной $\sigma_d = 0,05$ мм. Так как превышения концов мерного прибора по створу компаратора не превышали 3 см, то поправки за наклон в результаты измерений не вводили.

Вычислим оценку коэффициента корреляции по формуле (45). В нашем случае слагаемыми погрешности, входящими в вычисление отрезков AB и BC , будут погрешности отсчета по рулетке в точке B и поправка в этот отсчет за деления рулетки. При этом поправки в отрезки AB и BC входят с противоположными знаками. Так, если погрешность отсчета в точке B положительна, то это увеличивает отрезок AB и уменьшает BC .

Отрезки имеют одинаковую длину. Полагая, что стандарты измерения отрезков равны $\sigma_{AB} = \sigma_{BC} = \sigma_l$, запишем

$$r = \frac{-(\sigma_0^2 + \sigma_g^2)}{\sigma_l^2}, \quad (413)$$

где σ_0 — стандарт отсчета по рулетке.

По результатам обработки полевых измерений были получены следующие оценки стандартов: $\sigma_l = 0,175$ мм и $\sigma_0 = 0,09$ мм. Подставляя эти значения в формулу (412), получим

$$r = -(0,05^2 - 0,09^2)/0,175^2 = -0,35.$$

Значение коэффициента корреляции, полученное по результатам 511 пар полевых измерений, оказалось равным $r = -0,31$, а погрешность этой оценки характеризовалась стандартом

$$\sigma_r = (1 - r)^2/\sqrt{n} = (1 - 0,3^2)/\sqrt{511} = 0,04.$$

Полученные оценки коэффициента корреляции довольно хорошо согласуются между собой. Относительное расхождение в значениях r составляет

$$\frac{-0,35 + 0,31}{-0,35} = 0,13 = 13\%.$$

Погрешности расчета, обусловленные предположением независимости отрезков, оценим на конкретном примере. Если $k_1 = 4$, $r = -0,31$, то сравнивая значение $\sigma'_{L_1} = \sigma_{po} \sqrt{k_1} = 2\sigma_{po}$, полученное без учета корреляционной зависимости, со значением $\sigma_{L_1} = \sigma_{po} \sqrt{k_1} + 2(k_1 - 1)r = 1,46\sigma_{po}$, полученным по формуле (411) с $r = -0,31$, можно определить относительную погрешность

$$\frac{\sigma'_{L_1} - \sigma_{L_1}}{\sigma_{L_1}} = 0,37 = 37\%.$$

Определим относительную погрешность значения σ_{L_1} , обусловленную влиянием погрешности в оценке коэффициента корреляции по формуле (413). Вычисляя значения σ'_{L_1} при $r = -0,35$ и σ_{L_1} при $r = -0,31$, получим

$$\frac{|\sigma'_{L_1} - \sigma_{L_1}|}{\sigma_{L_1}} = \frac{|1,38\sigma_{po} - 1,46\sigma_{po}|}{1,46\sigma_{po}} = 0,06 = 6\%.$$

Таким образом, в данном примере использование приближенного способа оценки коэффициента корреляции позволяет снизить погрешность расчета с 35 до 6%.

Отметим, что для оценки коэффициента корреляции по формуле (45) можно использовать значения стандартов, полученные при расчете элементарных погрешностей. Объем вычислений при этом практически не увеличивается, а точность расчета существенно возрастает.

Сравним погрешности разбивки осей при разных вариантах разбивки. Ранее отмечалось, что при первом варианте разбивки стандарт σ_{po} меньше стандарта σ , непосредственного построения отрезка. Если при втором варианте разбивки принять $\sigma_{po} = \sigma$, $n = 4$ и $r = -0,3$, то

$$\sigma_{\text{звм}}^2 = \sigma_L^2 + (4 - 1)\sigma_{po}^2 + 2(4 - 3)(-0,3)\sigma_{po}^2 = +2,4\sigma_{po}^2.$$

При втором варианте детальной разбивки погрешность замыкающего размера даже без учета погрешностей построения сети в 2,4 раза больше, чем при первом.

Пример 36. Рассчитать погрешности детальной разбивки осей панельного здания (см. рис. 57, а), если стороны плановой сети имеют случайную погрешность $1/5000$, а систематическая погрешность, обусловленная температурными воздействиями на конструкции здания, характеризуется предельной относительной погрешностью $1/7000$ (второй вариант введения поправок).

Решение. При разбивке продольных осей (построении поперечных установочных рисков) путем деления сторон сети на части наибольшую погрешность имеют оси по вспомогательному створу КМ. Для упрощения вычислений можно считать, что установочные риски и стороны плановой сети совпадают с проектными размерами.

Погрешности разбивки продольных осей вычислим по формуле (408). Так как длина стороны сети и створа КМ равна $L = 3,2 \cdot 9 = 28,8$ м, то $\lambda_L = 28\ 800/7000 = 4,1$ мм. Тогда

$$\lambda_{po} = 4,1/9 = 0,46 \text{ мм.}$$

Случайную часть погрешности можно оценить по формуле

$$D_{\text{по}} = \frac{D_{\text{км}}}{n^2} + D_0 + 2D_{\text{д}} + 2D_{\phi}.$$

Для вычисления $D_{\text{по}}$ определим значения дисперсий погрешностей построения стороны плановой сети и точек K, M .

Так как предельная относительная погрешность построения плановой сети составляет $1/5000$, а длина стороны равна $L = 28,8$ м, то

$$\delta_L = \frac{28800}{5000} = 5,6 \text{ мм}; \quad \sigma_L = \frac{5,6}{3} = 1,87 \text{ мм} \quad \text{и} \quad D_L = 3,50 \text{ мм}^2.$$

Точки K и M получают путем построения створов по сторонам сети $I-II$ и $III-IV$. Если построение створа осуществляют при помощи теодолита Т-30 ($v = 18''$; $\tau = 45''$), его устанавливают на высоте менее 1 м ($\text{tg } v_2 = 1 \text{ м}/L_{I-II} = 0,083$; $\text{tg } v_1 = 1 \text{ м}/L_{III-IV} = 0,167$), центрирование производят при помощи оптического центрира ($\sigma_c = 0,3$ мм), визируют непосредственно на знаки закрепления пунктов сети ($\sigma_L = 0$), а фиксацию точек выполняют керном на металлической пластине ($\sigma_{\phi} = 0,5$ мм), дисперсии элементарных погрешностей построения створа будут равны

$$D_c = \left(\frac{12 - 6}{12} \right)^2 \frac{0,3^2}{2} = 0,011 \text{ мм}^2;$$

$$\sigma_{\text{д}} = \frac{20 \cdot 6 \cdot 10^3}{206265 \cdot 18} = 0,03 \text{ мм}; \quad D_{\text{д}} = 0,001 \text{ мм}^2;$$

$$D_{i0} = \frac{(0,083 - 0,167)^2 6^2 \cdot 10^6 \cdot 45^2}{18 \cdot 206265^2} = 0,001 \text{ мм}^2; \quad \sigma_{\phi} = 0,5 \text{ мм}; \quad D_{\phi} = 0,25 \text{ мм}^2.$$

Тогда

$$D_{\text{ств}} = 0,011 + 0,001 + 0,001 + 0,25 = 0,26 \text{ мм}^2.$$

Вычислим дисперсию длины отрезка KM

$$D_{KM} = D_L + D_K + D_M = D_L + 2D_{\text{ств}} = 3,50 + 2 \cdot 0,26 = 4,02 \text{ мм}^2.$$

Если для построения установочных рисков применять стальную рулетку с миллиметровыми делениями, фиксацию выполнять прочерчиванием по гладкой поверхности бетона с последующей откраской, то

$$D_0 = \frac{0,045}{1} = 0,045 \text{ мм}^2; \quad \sigma_{\text{д}} = 0,05 \text{ мм}; \quad D_{\text{д}} = 0,002 \text{ мм}^2;$$

$$\sigma_{\phi} = 1,0 \text{ мм}; \quad D_{\phi} = 1,0 \text{ мм}^2.$$

Подставляя полученные значения в формулу для дисперсии разбивки продольных осей, получим

$$D_{\text{по}} = 4,02/9^2 + 0,045 + 2 \cdot 0,002 + 2 \cdot 1,0 = 2,10 \text{ мм}^2; \quad \sigma_{\text{по}} = 1,4 \text{ мм}.$$

При доверительной вероятности $P = 0,9973$ допустимое отклонение равно

$$\delta_{\sigma_{\text{по}}} = 3 \cdot 1,4 = 4,3 \text{ мм}.$$

Таким образом, погрешность построения одного модуля продольной оси не будет превышать величины

$$\delta_{\text{по}} = \lambda_{\text{по}} + \delta_{\sigma_{\text{по}}} = 0,46 + 4,3 = 4,7 \text{ мм}.$$

Рассчитаем погрешность разбивки поперечных осей, для чего определим погрешности построения продольных установочных рисков в середине стороны плановой сети, например стороны $II-III$, и вспомогательного створа KM .

Систематическая часть погрешности разбивки продольных осей равна систематической погрешности построения отрезков IK или IVM . Так как точки K и M получают путем деления стороны $I-II$ и $III-IV$ на две части, то $\lambda_{\text{по}} = \lambda_L/2$. Длина

стороны сети равна $L = 6 \cdot 2 = 12$ м. Тогда $\lambda_L = 12000/7000 = 1,7$ мм. Следовательно,

$$\lambda_{po} = 1,7/2 = 0,85 \text{ мм.}$$

Вычислим случайные части элементарных погрешностей построения створа теодолитом Т-30 по стороне плановой сети. Для расчета точности примем следующие значения исходных параметров: $\sigma_e = 0,3$ мм, $\sigma_{e'} = 0$, $S_1 = li = 3,2 \cdot 5 = 16$ м; $S = ln = 3,2 \cdot 9 = 28,8$ м; $\text{tg } v_1 = 1 \text{ м}/\delta = 0,035$ и $\text{tg } v_2 = 1/S_1 = 0,062$. Тогда

$$D_e = \left(\frac{28,8 - 16,0}{28,8} \right)^2 \frac{0,3^2}{2} = 0,009 \text{ мм}^2;$$

$$\sigma_n = \frac{20 \cdot 16 \cdot 10^3}{206 \cdot 265 \cdot 18} = 0,086; \quad D_n = 0,007 \text{ мм}^2;$$

$$D_{i_0} = \frac{(0,035 - 0,062)^2 16^2 \cdot 10^6 \cdot 45^2}{18 \cdot 206 \cdot 265^2} = 0,0005 \text{ мм}^2; \quad \sigma_\phi = 1,0, \quad D_\phi = 1,0 \text{ мм}^2.$$

Вычислим погрешность построения установочной риски по створу стороны плановой сети

$$D_{ств I-III} = 0,009 + 0,007 + 0,0005 + 1,0 = 1,01 \text{ мм}^2.$$

Определим погрешность построения установочной риски по створу линии *КМ*. В этом случае к элементарным погрешностям построения створа по сторонам сети добавятся погрешности построения отрезков *IK* и *IVM*, т.е. точек *К* и *М*. Так как погрешности построения точек *К* и *М* обусловлены влиянием погрешностей сторон сети *I-II* и *III-IV*, фиксации точек, отсчетов и делений рулетки, то

$$D_K = D_M = D_L/n^2 + D_0 + D_n + D_\phi.$$

При $L = 12$ м и предельной относительной погрешности построения стороны сети $1/5000$, получим

$$\delta_L = \frac{12 \cdot 10^3}{5000} = 2,4 \text{ мм}; \quad \sigma_L = 2,4/3 = 0,8 \text{ мм} \text{ и } D_L = 0,64 \text{ мм}^2.$$

Тогда

$$D_K = D_M = 0,64/2 + 0,045 + 0,002 + 1,0 = 1,21 \text{ мм}^2.$$

Погрешности построения точек *К* и *М* при расчетах построения створа можно рассматривать как погрешности центрировки и редукации, т.е.

$$D_{cr} = \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{n} + \frac{i^2}{n^2} \right) D_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{9} + \frac{5^2}{9^2} \right) 1,21 = 0,31 \text{ мм}^2.$$

Погрешность построения установочной риски по створу *КМ* будет равна

$$D_{ств KM} = 0,31 + 0,007 + 0,0005 + 1,0 = 1,32 \text{ мм}^2.$$

Так как поперечная ось определяется отрезком между двумя продольными установочными рисками, то

$$D_{po} = D_{ств I-II} + D_{ств KM} = 1,01 + 1,32 = 2,33 \text{ мм}^2.$$

Тогда

$$\sigma_{po} = 1,5 \text{ мм}; \quad \delta_{\sigma_{po}} = 3 \cdot 1,5 = 4,5 \text{ мм.}$$

Таким образом, погрешности разбивки поперечных осей не будут превышать величины $\delta_{po} = \lambda_{po} + \delta_{\sigma_{po}} = 0,85 + 4,5 = 5,4$ мм.

Для сравнения вычислим погрешности построения продольных осей при разбивке по частям (участкам).

Определим погрешность построения проектного отрезка $l = 3,2$ м.

При уложении мерного прибора в створ линии на глаз ($\sigma_{\mu_c} = 3$ см) дисперсия элементарной погрешности равна

$$D_c = \frac{\sigma_{\mu_c}^4}{2l^2} = \frac{30^4}{2 \cdot 3,2^2 \cdot 10^6} = 0,04 \text{ мм}^2.$$

Если плиты перекрытия устанавливаются по высоте с отклонениями $\alpha_h = 40$ мм, то

$$D_h = \frac{\alpha_h^4}{45l^2} = \frac{40^4}{45 \cdot 3,2^2 \cdot 10^6} = 0,01 \text{ мм}^2.$$

При натяжении рулетки от руки ($\sigma_{\mu_f} = 2$ кг) дисперсия элементарной погрешности равна

$$D_f = \frac{l^2 \sigma_{\mu_f}^2}{\omega^2 E^2} = \frac{3,2^2 \cdot 10^6 \cdot 2^2}{2^2 \cdot 2^2 \cdot 10^8} = 0,003 \text{ мм}^2.$$

Дисперсию погрешности делений рулетки примем равной $D_d = 0,05^2 = 0,0025 \text{ мм}^2$.

Так как при разбивке одного модуля осей закрепляют на конструкциях две точки, то

$$D_{po} = D_c + D_h + D_f + 2D_d + D_0 + 2D_\phi = 0,04 + 0,01 + 0,003 + 2 \cdot 0,002 + 0,045 + 2 \cdot 1,0 = 2,10 \text{ мм}^2.$$

Определим коэффициент корреляции между смежными модулями осей при разбивке. Общими слагаемыми для смежных отрезков будут погрешности делений ($D_d = 0,0025$), отсчета по рулетке ($D_{0,1} = 0,045/2 = 0,0225$) и фиксации ($D_\phi = 1,0$). Используя формулу (45), получим

$$r = -(0,0025 + 0,0225 + 1,0)/2,10 = -0,49.$$

Дисперсию замыкающего модуля осей вычислим по формуле (412) $D_{i_{зам}} = 3,50 + (9 - 1)2,10 + 2(9 - 3)(-0,49)2,10 = 7,95 \text{ мм}^2$.

Тогда

$$\sigma_{i_{зам}} = 2,8 \text{ мм} \text{ и } \delta_{\sigma_{i_{зам}}} = 3 \cdot 2,8 = 8,4 \text{ мм}.$$

Для определения систематической части погрешности вычислим погрешность за компарирование. Если рулетку компарировали путем сравнения с длиной нормального метра ($\sigma_{\mu_n} = 0,3$ мм), то

$$\sigma_{\eta_n} = \frac{(9 - 1)3,2}{20} 0,3 = 0,38 \text{ мм} \text{ и } \lambda_{\eta_n} = 3 \cdot 0,38 = 1,14 \text{ мм}.$$

Систематическая погрешность λ_{L_1} определения длины стороны плановой сети при втором варианте учета температурных влияний на конструкции здания равна

$$\lambda_{L_1} = L/7000 = 9 \cdot 3200/7000 = 4,11 \text{ мм}.$$

При детальной разбивке осей обычно применяют второй вариант. Если в этом случае предельное значение относительной погрешности для летнего периода принять равным $1/5000$, то

$$\lambda_{po} = 3200/5000 = 0,64 \text{ мм}.$$

Систематическую погрешность, обусловленную температурными воздействиями, вычислим по формуле (409)

$$\lambda_{t_1} = 4,11 - (9 - 1)0,64 = 1,01 \text{ мм}.$$

Тогда

$$\lambda_{i_{зам}} = \lambda_{\eta_n} + \lambda_{t_1} = 1,14 + 1,01 = 2,2 \text{ мм}.$$

В этом случае допускаемое отклонение δ_{po} разбивки одного модуля осей на стыке участков будет равно

$$\delta_{po} = \delta_{\sigma_{i_{зам}}} + \lambda_{i_{зам}} = 8,4 + 2,2 = 10,6 \text{ мм}.$$

При разбивке продольных осей делением сторон плановой сети допускаемое отклонение было равно $\delta_{po} = 4,7$ мм. Чтобы обеспечить такую точность при разбивке осей участками, необходимо уменьшить погрешности приблизительно в 2,3 раза.

Пример 37. Рассчитать необходимую точность построения сторон плановой сети на монтажном горизонте каркасного здания (рис. 57, б), если допустимые отклонения на разбивку осей равны $\delta_{po} = 5$ мм и $\lambda_{po} = 1$ мм.

Решение. Для упрощения расчетов будем полагать, что стороны плановой сети совпадают с основными осями здания.

Если детальную разбивку продольных осей производить делением сторон плановой сети, то наибольшую погрешность будут иметь отрезки продольных осей по створу KN .

Определим дисперсию D_{KM} построения отрезка KN . Если точки K и N получены построением створов по сторонам $I-II$ и $III-IV$, то

$$D_{KN} = D_{L_{II-III}} + 2D_{ств}$$

Если построение створов осуществлять как в примере 35, то $S = 12,0$ м; $S_1 = 6,0$ м; $\sigma_{\alpha} = 0,3$ мм; $\sigma_{\beta} = 0,5$ в = $18''$; $\tau = 45''$; $tg \nu = 1/12 = 0,083$; $tg \nu_1 = 1/6 = 0,167$ и $\sigma_{\phi} = 0,5$ мм. Тогда

$$D_c = \left(\frac{12 - 6}{12} \right)^2 \frac{0,3^2}{2} = 0,011 \text{ мм}^2;$$

$$\sigma_n = \frac{20 \cdot 6 \cdot 10^3}{206265 \cdot 18} = 0,032 \text{ мм}; D_n = 0,001 \text{ мм}^2;$$

$$D_{i_0} = \frac{(0,083 - 0,167)^2 6^2 \cdot 10^6 \cdot 45^2}{18 \cdot 206265^2} = 0,001 \text{ мм}^2; D_{\phi} = 0,25 \text{ мм}^2.$$

Используя дисперсии элементарных погрешностей, вычислим дисперсию построения створа

$$D_{ств} = 0,011 + 0,001 + 0,001 + 0,25 = 0,263 \text{ мм}^2.$$

Определим дисперсию построения стороны сети $II-III$

$$D_{L_{II-III}} = D_{KN} - 2D_{ств} = D_{KN} - 0,53.$$

Зависимость между погрешностями разбивки осей и построения отрезка KN определим по формуле (408)

$$D_{KN} = n^2 (D_{po} - D_0 - 2D_n - 2D_{\phi}).$$

Так как $n = 4$, $D_{po} = \delta_{po}^2 / 3^2 = 25/9 = 2,78 \text{ мм}^2$, то

$$D_{L_{II-III}} = 4(2,78 - D_0 - 2D_n + 2D_{\phi}) - 0,53 = 43,95 - 16(D_0 + 2D_n + 2D_{\phi}).$$

Значения D_0 , D_n и D_{ϕ} заимствуем из примера 35. Тогда

$$D_{L_{II-III}} = 43,95 - 16(0,045 + 2 \cdot 0,0025 + 2 \cdot 1,0) = 11,15 \text{ мм}^2.$$

Откуда

$$\sigma_{L_{II-III}} = \sqrt{11,15} = 3,33 \text{ мм} \text{ и } \delta_{L_{II-III}} = 3 \cdot 3,33 = 10,0 \text{ мм}.$$

Рассчитаем допускаемые значения погрешностей построения сторон сети, параллельных поперечным осям здания.

Так как поперечные оси определяются величиной отрезков между установочными рисками, построенными по створам стороны сети $I-VI$ и K , то

$$D_{po} = D_{ств I-VI} + D_{ств KN}.$$

Откуда

$$D_{ств KN} = D_{po} - D_{ств I-VI},$$

но

$$D_{ств KN} = D_c + D_n + D_{i_0} + D_{\phi};$$

$$D_{ств I-VI} = D_c + D_n + D_{i_0} + D_{\phi},$$

где D_{ϕ_p} — дисперсия фиксации установочных рисков.

Тогда

$$D_{cr} = D_{po} - D_c - 2(D_0 + D_{i_0} + D_{\phi_p}).$$

Для вычисления дисперсии D_{cr} за центрировку и редукцию при построении створа KN определим элементарные погрешности D_c , D_0 , D_{i_0} и D_{ϕ_p} . Если построение створа осуществлять как в примере 35, то $\sigma_{\sigma_s} = 0,3$ мм, $\sigma_s = 0$, $S = ln = 5,4 \cdot 4 = 21,6$ м, $S_1 = li = 5,4 \cdot 3 = 16,2$ м, $\operatorname{tg} v = 1/S = 0,046$, $\operatorname{tg} v_1 = 1/S_1 = 0,062$ и $\sigma_{\phi_p} = 1,0$ мм. Тогда

$$D_c = D_c = \left(\frac{21,6 - 16,2}{21,6} \right)^2 \frac{0,3^2}{2} = 0,003 \text{ мм}^2;$$

$$\sigma_s = \frac{20 \cdot 16,2 \cdot 10^3}{206265 \cdot 18} = 0,087 \text{ мм}; D_0 = 0,008 \text{ мм}^2;$$

$$D_{i_0} = \frac{(0,046 - 0,062)^2 \cdot 16,2^2 \cdot 10^6 \cdot 45^2}{206265^2 \cdot 18} = 0,0002 \text{ мм}^2; D_{\phi_p} = 1,0^2 \text{ мм}^2.$$

Подставляя эти значения в формулу для дисперсии за центрировку и редукцию створа KN , получим

$$D_{cr} = 2,78 - 0,003 - 2(0,008 + 0,0002 + 1,0) = 0,76 \text{ мм}^2.$$

Дисперсию погрешности за центрировку и редукцию при построении створа для наиболее слабого места вычисляют по формуле

$$D_{cr} = \left(\frac{1}{2} - \frac{l}{n} + \frac{l^2}{n^2} \right) D_{cr}.$$

В нашем случае $l = 3$, $n = 4$, тогда

$$D_{cr} = \frac{D_{cr}}{\frac{1}{2} - \frac{l}{n} + \frac{l^2}{n^2}} = \frac{0,76}{\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{9}{16}} = 2,43 \text{ мм}^2.$$

Погрешности линейного элемента центрирования при построении створа KN обусловлены влиянием погрешностей построения точки K и центрирования. Обозначив дисперсию построения точек K и N путем деления сторон $I-II$ и $III-IV$ на две части через $D_K = D_N$, а дисперсию центрирования теодолита над полученной точкой через D_{ϕ_c} , получим

$$D_K = D_N = D_{cr} - D_{\phi_c}.$$

Так как $\sigma_{\phi_c} = 0,3$ мм, то

$$D_K = 2,43 - 0,09 = 2,34 \text{ мм}^2.$$

При делении стороны $I-II$ на части

$$D_K = \frac{D_{L_{I-II}}}{n} + D_0 + D_{\alpha} + D_{\phi_c},$$

где D_{ϕ_c} — дисперсия фиксации точки K .

Откуда

$$D_{L_{I-II}} = n^2(D_K - D_0 - D_{\alpha} - D_{\phi_c}).$$

Для нашего случая $n_1 = 2$, $D_0 = 0,045$ мм²; $D_{\alpha} = 0,0025$ мм² и $D_{\phi_c} = 0,25$ мм². Тогда

$$D_{L_{I-II}} = 2^2(2,34 - 0,045 - 0,0025 - 0,25) = 8,17 \text{ мм}^2,$$

$$\sigma_{L_{I-II}} = \sqrt{8,17} = 2,86 \text{ мм} \text{ и } \delta_{L_{I-II}} = 3 \cdot 2,86 = 8,6 \text{ мм}.$$

Таким образом, чтобы обеспечить необходимую точность детальной разбивки осей, погрешность построения продольных сторон сети не должна превышать 10,0 мм, а поперечных сторон 8,6 мм.

При детальной разбивке осей путем деления сторон плановой сети на части зависимость между λ_{po} и λ_L характеризуется равенством (406). Так как для продольных осей $n_{пр} = 4$, а для поперечных $n_{поп} = 2$, то

$$\lambda_{L_{пр}} = 1 \cdot 4 = 4 \text{ мм и } \lambda_{L_{поп}} = 1 \cdot 2 = 2 \text{ мм.}$$

§ 28. ПЛАНОВЫЕ СЕТИ НА ИСХОДНОМ И МОНТАЖНЫХ ГОРИЗОНТАХ МНОГОЭТАЖНЫХ ЗДАНИЙ

Плановые сети на различных горизонтах зданий и сооружений служат обоснованием для детальной разбивки осей и одновременно для обеспечения требований, предъявляемых к геометрии сооружения.

Расчеты точности построения сети осуществляют в два этапа.

На первом этапе выявляют основные требования к геометрии сооружения, назначают допускаемые отклонения δ_{x_i} положения конструкций и устанавливают зависимость между δ_{x_i} и допускаемыми искажениями δ_c различных элементов плановой сети. Полученные зависимости обычно представляют в виде неравенства

$$\delta_c \leq \varphi(\delta_{x_i}). \quad (414)$$

При строительстве объектов массовой застройки или типовых сооружений значения δ_{x_i} обычно выбирают из СНиП.

При возведении сложных или уникальных сооружений большой высоты или протяженности работы первого этапа, тесно связанные с расчетами конструкций здания, выполняют совместно представители проектной, строительной и геодезической организаций, а результаты оформляют в виде технического задания.

На втором этапе расчета полученные неравенства объединяют в систему вида (350). Систему решают относительно стандарта единицы веса и тем самым определяют необходимую точность измерений в сети. Ход решения задач такого вида подробно описан в § 23.

Построение плановых сетей на монтажных горизонтах сопровождается следующими видами искажений.

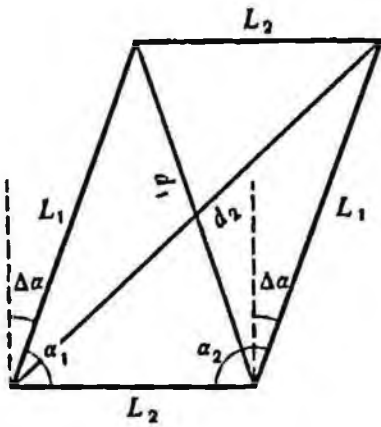
Искажения в длинах сторон сети влияют на точность детальной разбивки осей и отклонения конструкций от вертикали по всей высоте сооружения.

Зависимости между допускаемыми отклонениями δ_{po} на разбивку осей и допускаемыми искажениями δ_L сторон сети при первом способе разбивки характеризуются равенствами (408), при втором способе — равенствами (409) и (412).

Искажения в углах сети приводят к изменению формы фигур. Так, даже при отсутствии искажений в длинах сторон фигура в виде прямоугольника может принять форму параллелограмма.

Искажения фигур сети на монтажных горизонтах приводят к отклонению сборных элементов здания от проектного положения, что затрудняет процесс монтажа и снижает качество сооружения. Например, при укладке плит перекрытия на ригели, расположенные по двум сторонам параллелограмма, затрудняется процесс раскладки плит, уменьшается площадь опирания плит перекрытия на ригели и усложняется заделка швов.

Рис. 58. Зависимость между δ_d и δ_a



Искажения в углах сети ограничиваются допускаемыми отклонениями δ_d разности длин диагоналей.

Для определения зависимости между δ_d и допускаемым искажением прямого угла δ_a рассмотрим наиболее неблагоприятный случай трансформации прямоугольника в параллелограмм (рис. 58).

Используя теорему косинусов, запишем

$$d_1^2 = L_1^2 + L_2^2 + 2L_1L_2 \cos \alpha_1;$$

$$d_2^2 = L_1^2 + L_2^2 - 2L_1L_2 \cos \alpha_2.$$

Откуда

$$d_2^2 - d_1^2 = 2L_1L_2(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Так как $\alpha_1 = 90 - \Delta\alpha$ и $\alpha_2 = 90 + \Delta\alpha$, то $(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) = 2 \sin \Delta\alpha$.

Тогда

$$\sin \Delta\alpha = \frac{d_2^2 - d_1^2}{4L_1L_2} = \frac{d_2 + d_1}{4L_1L_2}(d_2 - d_1).$$

Расхождения в длинах диагоналей малы. Обозначив проектное значение диагонали через d , запишем $d_1 + d_2 \approx 2d$.

Следовательно,

$$\sin \Delta\alpha = \frac{d}{2L_1L_2}(d_2 - d_1).$$

Так как угол $\Delta\alpha$ мал, то

$$\Delta\alpha = \frac{dp}{2L_1L_2}(d_2 - d_1).$$

Заменяя значения $\Delta\alpha$ и $(d_2 - d_1)$ значениями их допускаемых отклонений, получим

$$\delta_a = \frac{dp}{2L_1L_2} \delta_d. \quad (415)$$

Положение установочных рисок поперечных осей при разбивке и выполнении контрольных измерений иногда определяют методом пер-

пендикуляров, восстанавливаемых к продольным сторонам сети. Определим допускаемое искажение в углах сети.

Пусть при построении установочной риски прямой угол между сторонами сети имеет искажение $\Delta\alpha$. В этом случае установочная риска, отстоящая от стороны сети на расстоянии l , получит смещение

$$\Delta l = l \frac{\Delta\alpha}{\rho}.$$

Наибольшее смещение Δl будет получено при наибольшем расстоянии между осями, т.е. при l_{\max} . Чтобы это смещение не превышало допускаемого значения погрешности δ_{ρ} разбивки осей, необходимо $\Delta\alpha$ ограничить величиной

$$\delta_{\alpha} = \frac{\rho}{l_{\max}} \delta_{\rho}. \quad (416)$$

Если положение углов сети ограничивается допускаемым отклонением δ_d , то удобно объединить равенства (415) и (416)

$$\delta_d = \frac{2L_1 L_2}{l_{\max} d} \delta_{\rho}. \quad (417)$$

Искажения в координатах пунктов сети приводят к смещению знаков с проектных осей. Если ось X совмещена с продольной осью здания, а ось Y — с поперечной осью, то погрешность в абсциссах приводит к смещению пункта с поперечной оси, а погрешность в ординатах — к смещению с продольной оси.

При расчетах точности часто приходится учитывать искажения в координатах не только для наиболее слабого места сети, но и для других пунктов, например для пунктов, с которых производится разбивка осей направляющих лифтов или шахтных проемов.

Искажения плановых сетей под воздействием температурных влияний на конструкции сооружений приводят к существенным отклонениям несущих элементов здания от вертикали. Влияние этого фактора при детальной разбивке осей на монтажных горизонтах необходимо учитывать введением поправок.

Так как погрешности определения поправок пропорциональны длинам отрезков, а построение сети занимает сравнительно небольшой период времени, то влияние температурных воздействий на одном монтажном горизонте приводит в основном к искажению масштаба сети. В этих условиях поправки за температуру вводят непосредственно в длины сторон сети, что освобождает от необходимости учитывать температуру при разбивке осей.

При расчетах точности погрешности в длинах сторон за температуру можно вычислять по формулам (395), (397), (399), (400) и (401).

Систематические погрешности в плановых сетях на монтажных горизонтах обусловлены влиянием температурных воздействий и погрешностями за компарирование мерного прибора. Как и ранее, оценивая влияние этих факторов предельными значениями δ_i и δ_{λ_x} , запишем

$$\lambda_L = \delta_i + \delta_{\lambda_x}. \quad (418)$$

Проецирование исходных точек опорной плановой сети на монтажные горизонты обеспечивает единую ориентировку плановых сетей на всех этажах здания.

При сдвигах или разворотах сетей на различных горизонтах в местах сопряжения конструкций появляются изгибы и возникают односторонне направленные силы, что существенно снижает прочность сооружения.

Особенно опасны такие смещения осей при строительстве высотных зданий и зданий повышенной этажности. Допускаемая величина смещений обычно приводится в технических заданиях. Так, в положениях Главного архитектурно-планировочного управления города Москвы и Главмосстроя величина отклонения плановых сетей на различных монтажных горизонтах от общей вертикали ограничена значением $\delta = 2$ мм. Допускаемое отклонение одноименных осей от общей отвесной линии принимается равным 1–3 мм.

При проецировании осей и исходных точек на монтажные горизонты принимают все меры по ослаблению систематических погрешностей. Поэтому смещение сети в основном обусловлено влиянием случайных погрешностей. Оценим их величину.

Пусть для ориентирования сети на монтажном горизонте осуществляют проецирование n исходных пунктов с погрешностями, характеризуемыми стандартом σ_{np} , производят проверку геометрических условий, например створности пунктов I , II и V на рис. 57, б, а положение полученных пунктов корректируют. В результате корректировки и последующего уравнивания сеть займет новое положение относительно точек, полученных при проецировании. Так как число избыточных данных для ориентирования равно $n - 1$, то стандарт σ_c среднего смещения пунктов, обусловленного погрешностями проецирования точек на монтажный горизонт, можно оценить по формуле

$$\sigma_c = \frac{\sigma_{np}}{\sqrt{n-1}} \text{ или } \delta_c = \frac{\delta_{np}}{\sqrt{n-1}}. \quad (419)$$

Опорная сеть на исходном горизонте разбивки служит обоснованием для построения плановых сетей на монтажных горизонтах.

Значение коэффициента k понижения точности при переходе от опорной плановой сети к сетям на монтажных горизонтах можно определить как при построении многоуровневых сетей. Если стандарт стороны сети, определенный исходя из требований к точности разбивки осей, обозначить через σ_L , а стандарт той же стороны, принятой за исходную для построения сети, — через σ_{L_0} , то

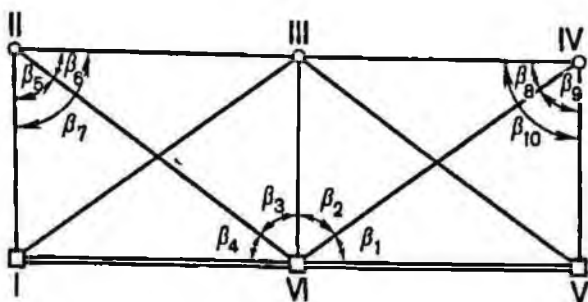
$$\sigma_{L_0} = \sigma_L/k. \quad (420)$$

Стандарт σ_{L_0} характеризует погрешность исходной стороны непосредственно на монтажном горизонте. Эта погрешность обусловлена совместным влиянием погрешностей одноименной стороны на исходном горизонте и проецирования двух точек. Рассматривая эти погрешности как независимые случайные величины, получим

$$\sigma_{L_0}^2 = \sigma_{L_n}^2 + 2\sigma_{np}^2, \quad (421)$$

где σ_{L_n} — стандарт погрешности твердой стороны на исходном горизонте разбивки.

Рис. 59. Схема плановой сети



Пример 38. Рассчитать необходимую точность измерений при построении плановых сетей и проецировании исходных точек для 16-этажного здания ($H \approx 56$ м) из примера 36. Схема сети трилатерации с исходными пунктами I, VI и V приведена на рис. 59.

Решение. Для определения необходимой точности измерений в сетях на монтажных горизонтах составим условные уравнения

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 - 180^\circ = 0; \beta_7 - \beta_5 - \beta_6 = 0 \text{ и } \beta_{10} - \beta_8 - \beta_9 = 0.$$

Выражая поправки в углы через поправки сторон, получим

$$\begin{aligned} 11,9v_{I-II} + 20,6v_{II-III} - 23,8v_{II-IV} + \\ + 20,6v_{III-IV} + 11,9v_{IV-V} + 23,8v_{IV-VI} + W_1 = 0, \\ -11,9v_{I-II} + 23,8v_{I-III} - 20,6v_{I-VI} - 20,6v_{II-III} + \\ + 23,8v_{II-VI} - 11,9v_{III-VI} + W_2 = 0, \\ -20,6v_{III-IV} + 23,8v_{III-V} - 11,9v_{III-VI} - 11,9v_{IV-V} + \\ + 23,8v_{IV-VI} - 20,6v_{V-VI} + W_3 = 0. \end{aligned}$$

Стороны I-VI и II-V являются исходными. Тогда $v_{I-VI} = v_{V-VI} = 0$.

Определим веса уравновешенных значений длин сторон L_{I-II} и L_{II-III} . Вместо определения веса уравненных значений прямого угла в сети вычислим вес разности длин сторон $L_{III-V} - L_{IV-VI}$. В этом случае

$$F^{(1)} = v_{I-II}, F^{(2)} = v_{II-III} \text{ и } F^{(3)} = v_{III-V} - v_{IV-VI}.$$

Составление системы нормальных уравнений с весом $\pi_i = L_i/10$ и результаты решения приведены в табл. 12.

Для расчетов необходимой точности измерений в сети воспользуемся значениями $\delta_{L_{I-II}} = 8,6$ мм и $\delta_{L_{II-III}} = 10,0$ мм, полученными в примере 36, а допускаемое отклонение в длинах диагоналей определим по формуле (417)

$$\delta_d = \frac{2 \cdot 10 \cdot 17,32}{6 \cdot 20} 5 = 14,4 \text{ мм.}$$

Таблица 12

Обозначения	a]	b]	c]	$f^{(1)}$	$f^{(2)}$	$f^{(3)}$
$[\pi a$	4017	-2009	-2009	11,90	35,64	47,60
$[\pi b$		3283	142	-11,90	-35,64	-
$[\pi c$			3283	-	-	-
$[\pi f^{(1)}$				1,00	1,73	4,00
$1/P_{F^0}$				0,94	1,21	2,64

Используя эти допускаемые отклонения и обратные веса соответствующих функций, составим для нормированного значения $t = 3$ систему неравенств (350)

$$\mu_1 \leq \frac{\delta_{L_{I-II}}}{3} \sqrt{P_{F^{(1)}}} = \frac{8,6}{3\sqrt{0,94}} = 2,96 \text{ мм};$$

$$\mu_2 \leq \frac{\delta_{L_{II-III}}}{3} \sqrt{P_{F^{(2)}}} = \frac{10,0}{3\sqrt{1,21}} = 3,03 \text{ мм};$$

$$\mu_3 \leq \frac{\delta_d}{3} \sqrt{P_{F^{(3)}}} = \frac{14,4}{3\sqrt{2,64}} = 2,96 \text{ мм}.$$

За окончательное значение стандарта единицы веса примем наименьшее, т. е. $\mu = 2,9$ мм. Относительная погрешность измерения сторон будет равна

$$\frac{\mu}{L} = \frac{2,9}{10 \cdot 10^3} = 2,9 \cdot 10^{-4} \approx \frac{1}{3500}.$$

Рассчитаем систематические погрешности построения стороны плановой сети на монтажном горизонте, для чего вычислим предварительные значения погрешностей за компарирование и температуру.

Если компарирование производят сравнением 20-метрового мерного прибора с нормальным метром ($\sigma_{\mu_t} = 0,4$ мм), то для продольной и поперечной сторон сети соответственно получим

$$\lambda'_{L_{II-III}} = \frac{3 \cdot 17,32 \cdot 0,4}{20} = 1,04 \text{ мм}; \quad \lambda'_{L_{I-II}} = \frac{3 \cdot 10 \cdot 0,4}{20} = 0,60 \text{ мм}.$$

В качестве предварительного значения погрешности за температуру воспользуемся предельной относительной погрешностью $1/6800$ для второго варианта введения поправок (пример 34)

$$\lambda'_{L_{II-III}} = \frac{17320}{6800} = 2,55 \text{ мм}; \quad \lambda'_{L_{I-II}} = \frac{10000}{6800} = 1,47 \text{ мм}.$$

Вычислим предварительные значения погрешностей сторон $\lambda'_{L_{II-III}} = 1,04 + 2,55 = 3,6$ мм; $\lambda'_{L_{I-II}} = 0,60 + 1,47 = 2,1$ мм и сравним их с допускаемыми величинами $\lambda_{L_{II-III}} = 4$ мм $\lambda_{L_{I-II}} = 2$ мм, полученными в примере 36. Так как в обоих случаях $\lambda'_L < \lambda_L$, то можно несколько увеличить значения элементарных погрешностей.

Наибольшие затруднения при измерениях вызывает определение разности температур конструкции и мерного прибора. Поэтому, не меняя предварительное значение погрешности за компарирование в стороне L_{II-III} , увеличим допускаемое значение погрешности за температуру

$$\lambda_{L_{II-III}} = \lambda'_{L_{II-III}} - \lambda'_{L_{I-II}} = 4,00 - 1,04 = 2,96 \text{ мм}.$$

Решая равенство (400) относительно $3\sigma_{t_{II-III}}$ и заменяя $\delta_{t_{II}}$ на $\lambda_{L_{II-III}}$, получаем

$$\frac{3\sigma_{t_{II-III}}}{L_{II-III}} = \frac{2,96}{17320} - 64,5 \cdot 10^{-6} = 106,4 \cdot 10^{-6}.$$

В примере 35 для предельной относительной погрешности третьего варианта введения поправок получено значение $142 \cdot 10^{-6}$. Так как $106,4 \cdot 10^{-6} < 142 \cdot 10^{-6}$, то применять третий вариант нельзя.

Вычислим допускаемую величину дисперсии $D_{\Delta t}$ разности температур, для чего равенство (399) представим в виде

$$D_{\Delta t} = \frac{1}{9\alpha^2} \left(\frac{3\sigma_{t_{II-III}}}{L_{II-III}} \right)^2 - \frac{(\Delta t)^2 \eta_{\alpha, \max}}{6\alpha^2}.$$

Таблица 13

Обозначения	a]	b]	c]	$f^{(1)}$	$f^{(2)}$
[πa	4017	-2009	-2009	11,90	47,60

При коэффициенте $k^{(1)} = \sqrt{2}$

[πb		3650	142	-11,90	-
[πc			3650	-	-
[πf				1,00	4,00
$1/P_F$				0,944	2,805

При коэффициенте $k^{(2)} = 2$

[πb		3466	142	-11,90	-
[πc			3466	-	-
[πf				1,00	4,00
$1/P_F$				0,947	2,728

Используя значения Δl , $\eta_{\alpha_{\max}}$ и α из примера 34, получим

$$D_{\Delta l} = \frac{106,4^2 \cdot 10^{-12}}{9 \cdot 12,2^2 \cdot 10^{-12}} - \frac{3,7^2 \cdot 1,5^2 \cdot 10^{-12}}{6 \cdot 12,2^2 \cdot 10^{-12}} = 8,4.$$

Если температуру прибора определять с $\sigma_{t_0} = 1^\circ$, то

$$D_{t_0} = 8,4 - 1,0^2 = 7,4 \text{ или } \sigma_{t_0} = \sqrt{7,4} = 2,7^\circ.$$

Следовательно, погрешность определения температуры конструкций при измерениях сторон плановой сети должна характеризоваться стандартом $\sigma_{t_0} \leq 2,7^\circ$.

Для определения точности исходных данных к условному уравнению поправок добавим $BV = -20,6v_I - v_I - 20,6v_V - v_V$.

Выберем два значения коэффициента понижения точности $k^{(1)} = \sqrt{2}$ и $k^{(2)} = 2$, вычислим обратные веса исходных сторон $\pi_i^{(1)} = L_i/20 = 17,32/20 = 0,866$; $\pi_i^{(2)} = L_i/40 = 17,32/40 = 0,433$ и произведения вида [πb_j] и [πc_j] для поправок $v_I - v_I$ и $v_V - v_V$. Тогда матрицы N_2 будут равны

$$N_2^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 367 & 0 \\ & & 367 \end{vmatrix}; \quad N_2^{(2)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & 183 & 0 \\ & & 183 \end{vmatrix}.$$

Результаты составления и решения системы нормальных уравнений для функций $F^{(1)}$ и $F^{(3)}$ приведены в табл. 13.

Функция $F^{(3)}$ оказалась наиболее чувствительной к изменениям коэффициента понижения точности. Допускаемую величину обратного веса этой функции при $q = 0,05$ и $1/P_{F_1} = 2,64$ (см. табл. 12) вычислим по формуле (388)

$$\frac{1}{P_{F^{(3)}}} \leq \frac{1}{(1 - 0,05)^2} 2,64 = 2,92.$$

Так как $2,728 < 2,92$, то коэффициент понижения точности можно принять равным $k = \sqrt{2} \approx 1,5$.

Таким образом, относительная погрешность измерения сторон сети должна быть порядка $1/3500$, а исходные стороны должны быть определены с относительной погрешностью $1/5000$.

Определим необходимую точность проецирования исходных точек на монтажный горизонт. Если допускается смещение сети $\delta_c = 2$ мм, то стандарт погрешности проецирования при $n = 3$ будет равен

$$\sigma_{пр} = \frac{\delta_c}{3} \sqrt{n-1} = \frac{2}{3} \sqrt{3-1} = 0,94 \text{ мм.}$$

При проецировании точек прибором PZL на высоту $H = 56$ м получаем $\sigma_{пр} = 0,0058 \cdot 56 + 0,27 = 0,59$ мм, что вполне удовлетворяет требованиям к смещению сети.

Определим необходимую точность измерения исходной стороны на исходном горизонте разбивки. Так как $\sigma_{пр} = 0,59$ мм и $\sigma_{L_0} = 17320/5000 = 3,46$, то $\sigma_{L_n}^2 = 3,46^2 - 2 \cdot 0,59^2 = 11,27$ мм или $\sigma_{L_n} = 3,36$ мм.

Следовательно, исходные стороны на исходном горизонте разбивки должны быть определены с относительной погрешностью

$$3,36/17320 = 1/5200.$$

§ 29. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ЦЕНТРА СООРУЖЕНИЙ БАШЕННОГО ТИПА БОЛЬШОЙ ВЫСОТЫ

При возведении высотных сооружений башенного типа, например телевизионных или метеорологических башен, наиболее сложной задачей является проецирование центра сооружения с исходного на монтажные горизонты. Особенно осложняется решение этой задачи для свободно стоящих сооружений.

Остальные виды геодезических работ мало чем отличаются от обычных и нет необходимости останавливаться на расчетах их точности более подробно.

Геометрическая ось сооружения башенного типа под влиянием внешних условий, например метеорологических факторов, отклоняется от отвесной линии на величины, которые во много раз превышают допуски на проецирование центра. Так, смещения верха антенн Останкинской телебашни в отдельные периоды времени достигают 2 м.

Между тем проецирование центра призвано обеспечить отвесное положение ствола башни в «спокойном» состоянии, т. е. при отсутствии смещений оси сооружения под влиянием внешних условий. Таким образом, при проецировании необходимо или учитывать, или каким-либо способом компенсировать эти смещения.

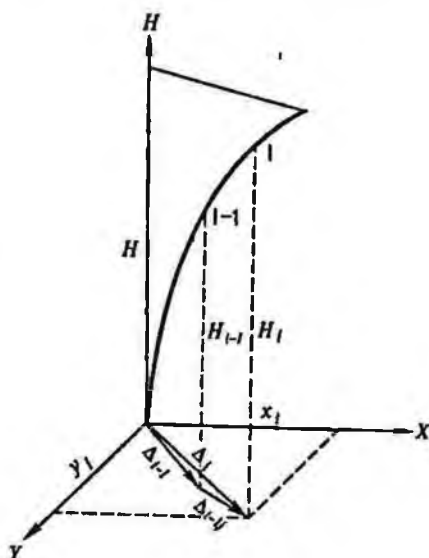
При расчетах точности различают два вида смещений. Среднее смещение оси башни в определенном интервале времени называют отклонением, а короткопериодические смещения вокруг этого среднего положения — колебаниями.

Рассмотрим основные закономерности отклонений и методику их расчета. Известно, что основными факторами, вызывающими отклонения оси башни от отвесной линии, являются ветровые нагрузки и неравномерный нагрев тела башни под влиянием солнечной радиации.

Оценку смещений оси под влиянием этих факторов производят в три этапа:

- выявляют основные параметры каждого фактора;
- устанавливают функциональную зависимость между параметрами и отклонениями оси сооружения;
- оценивают значения или числовые характеристики параметров и определяют значения (числовые характеристики) отклонений.

Рис. 60. Оси координат сооружения башенного типа



Параметры каждого из факторов целесообразно сгруппировать. К первой группе отнесем параметры K_c , характеризующие физико-механические свойства материала и конструктивные особенности данного сооружения; ко второй — параметры K_n , характеризующие состояние внешних условий; к третьей — параметры K_n , определяющие положение данной точки сооружения в пространстве. Если начало

координат совместить с центром сооружения O на исходном горизонте, а оси координат расположить так, как показано на рис. 60, то проекции отклонения точки I оси сооружения в общем виде можно представить в виде функции групп параметров

$$x_I = f_x(K_c, K_n, K_n); y_I = f_y(K_c, K_n, K_n). \quad (422)$$

Составление системы (422) тесно связано с конструктивным расчетом сооружения. Как и ранее, эта часть расчета должна выполняться при совместном участии представителей проектной и геодезической организаций.

Полученная система уравнений полностью определяет вектор отклонений Δ , т. е. позволяет вычислить величину Δ и дирекционный угол α_Δ отклонения.

Рассмотрим в первом приближении зависимости между параметрами K_c , K_n , K_n и отклонениями оси сооружения.

Под воздействием солнечной радиации одна сторона башни нагревается больше, чем другая. Так как распределение температуры по телу сооружения происходит не мгновенно, то солнечная сторона сооружения получает большее линейное расширение и ось башни в верхних сечениях отклоняется в сторону тени.

К первой группе параметров рассматриваемого фактора относятся коэффициент α линейного расширения, диаметр D ствола башни, коэффициент α_n теплоотдачи наружной поверхности сооружения, угол β_0 между направлениями радиации и отклонения оси, коэффициент r_j поглощения солнечной радиации и коэффициент s_j , учитывающий влияние распределения температуры по телу ствола башни. Во вторую группу включим время наблюдений t и количество J солнечной радиации.

Для случая, когда ось X совмещена с направлением юг — север, в работе [21] получена зависимость между параметрами и проекциями отклонений на оси координат

$$\begin{aligned}x_J &= -K_{c_j}(J_1 \cos \beta + J_2 \sin \beta) H^2; \\y_J &= -K_{c_j}(J_1 \sin \beta - J_2 \cos \beta) H^2,\end{aligned}\quad (423)$$

где $K_{c_j} = \alpha_{c_j} \rho_j / 2\alpha_n D$ — коэффициент, определяющий влияние параметров первой группы; $J_1 = F_C - J_{ю}$, $J_2 = J_В - J_з$ — разности количеств радиации, поступающих соответственно с севера на юг, с востока и запада; $\beta = \beta_0(t - t_0)$ — параметр, учитывающий влияние угла и период времени от начала отсчета t_0 .

Параметр K_{c_j} для данного сооружения остается постоянной величиной. Если он известен, то, определив на момент наблюдений t значения J_1 и J_2 , можно вычислить величину

$$\Delta = \sqrt{x_J^2 + y_J^2} = K_{c_j} \sqrt{J_1^2 + J_2^2} H^2 \quad (424)$$

и дирекционный угол отклонения

$$\alpha = \arctg \frac{y_J}{x_J}.$$

Под влиянием ветровых нагрузок ось башни отклоняется по направлению ветрового потока и испытывает колебания в перпендикулярной плоскости.

Если ствол башни рассматривать как защемленную одним концом однородную балку, испытывающую равномерно распределенную по всей высоте H ветровую нагрузку q , то отклонение Δ_{q_i} точки I на высоте H_i можно определить по формуле

$$\Delta_{q_i} = \frac{qH^2 H_i^2}{24g} \left(6 - 4 \frac{H_i}{H} + \frac{H_i^2}{H^2} \right), \quad (425)$$

где $g = EJ$ — жесткость балки, характеризуемая произведением модуля упругости E на осевой момент инерции J .

Ветровую нагрузку можно определить по приближенной формуле

$$q = \frac{c_q \rho_q D v^2}{2},$$

где c_q — коэффициент, зависящий от скорости ветрового потока; ρ_q — плотность воздуха; v — скорость ветрового потока.

Подставляя эти значения в (425) и используя принятые в (422) обозначения, получим

$$\Delta_q = K_{c_q} K_{n_q} H^2 H_i^2 \left(6 - 4 \frac{H_i}{H} + \frac{H_i^2}{H^2} \right), \quad (426)$$

где $K_{c_q} = D/2g$ — коэффициент, учитывающий влияние параметров первой группы; $K_{n_q} = c_q \rho_q v^2$ — коэффициент, учитывающий влияние параметров второй группы.

Для верхней точки сооружения $H_i = H$, тогда

$$\Delta_q = 3K_{c_q} K_{n_q} H^4. \quad (427)$$

Если дирекционный угол ветрового потока обозначить через α_q , то проекции Δ_q на оси координат будут равны

$$\begin{aligned}
 x_{q_i} &= K_{c_q} K_{n_q} H^2 H_i^2 \left(6 - 4 \frac{H_1}{H} + \frac{H_1^2}{H^2} \right) \cos \alpha_q; \\
 y_{q_i} &= K_{c_q} K_{n_q} H^2 H_i^2 \left(6 - 4 \frac{H_1}{H} + \frac{H_1^2}{H^2} \right) \sin \alpha_q.
 \end{aligned}
 \tag{428}$$

Таким образом, при известных значениях K_{c_q} и c_q для вычисления Δ_q необходимо в процессе наблюдений определять плотность воздуха и скорость ветрового потока.

Вектор Δ общего отклонения оси сооружения является суммой векторов Δ_j и Δ_q . Тогда

$$x = x_j + x_q; \quad y = y_j + y_q. \tag{429}$$

Рассмотрим способы проецирования и основные положения расчета точности.

В первом способе проецирование центра осуществляют прибором оптического вертикального проецирования с исходного горизонта непосредственно на всю высоту сооружения.

Вектор ϵ погрешности проецирования обусловлен влиянием векторов погрешности построения отвесной линии и отклонения оси башни под влиянием метеорологических условий $\epsilon = \epsilon_n + \Delta$.

Все элементарные погрешности построения отвесной линии можно рассчитать так же, как и в § 17.

Исключение составляет погрешность визирования при наблюдениях на колеблющиеся цепи. В работе [21] установлено, что стандарт погрешности визирования при колебании цели с амплитудой A (в мм) возрастает на величину $\sigma_{вк}'' = 0,13'' A$.

С учетом этой зависимости формула (289) для определения стандарта погрешности визирования внутри сооружений примет вид

$$\sigma_n = \frac{(27 + 0,13A)H}{\rho v}. \tag{430}$$

Так как построение отвесной линии приборами оптического проецирования осуществляют в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, то допускаемое отклонение δ_n погрешности ϵ_n можно вычислить по формуле

$$\delta_n = t \sigma_{\epsilon_n}, \tag{431}$$

где t — нормированное значение погрешности для распределения Релея; σ_{ϵ_n} — стандарт погрешности построения отвесной линии в одной плоскости.

Теоретически отклонение оси сооружения под влиянием метеорологических условий можно учесть, а в результаты проецирования центра ввести соответствующие поправки. В производственных условиях этот путь не нашел широкого применения ввиду того, что:

- 1) вычисление поправок связано с определением большого числа параметров, что приводит к существенным затратам труда и времени;
- 2) оценка исходных параметров обычно не отличается высокой точностью, так как некоторые параметры непрерывно изменяются, а для других значение параметра зависит от положения точки в пространстве.

Существенные погрешности в определение поправок вносят табличные значения коэффициентов, характеризующих физико-механические свойства материалов, а не конкретных конструкций;

3) недостаточно надежно определяется и зависимость между параметрами и отклонениями, так как при выводе формул обычно используют ряд произвольных упрощений;

4) с увеличением высоты монтажного горизонта резко возрастают погрешности определения поправок.

Из этих причин приводит к тому, что проецирование центра данным способом осуществляют только при полном штиле и пасмурной погоде, и результаты используют для контроля и корректировки точек, полученных другими способами.

Для оценки погрешности ε по формуле (429) определяют приближенное значение Δ_{max} для условий проецирования и вычисляют общее допускаемое значение

$$\delta_h \approx \delta_n + \Delta_{max}. \quad (432)$$

Во втором способе проецирование центра осуществляют последовательно с одного монтажного горизонта на другой. При этом шаг h проецирования выбирают с таким расчетом, чтобы погрешности, включая и отклонения под влиянием метеорологических условий, не превышали нормативного значения δ_n , т.е.

$$\delta_h \approx \delta_{hh} + \Delta_{hh}, \quad (433)$$

где δ_{hh} , δ_{hh} — соответствующие допускаемые значения общей погрешности и погрешности построения отвесной линии на высоту h ; $\Delta_{hh_{max}}$ предельное значение Δ для высоты h в данных условиях.

Допускаемое значение δ_{hh} вычисляют со значением $H = h$ как при первом способе проецирования.

Для определения Δ_h рассмотрим наиболее распространенный случай, когда проецирование осуществляют с постоянным значением h по всей высоте сооружения. В этом случае высоту данного i и предшествующего ($i - 1$) монтажных горизонтов можно представить в виде

$$H_i = ih \text{ и } H_{i-1} = (i-1)h.$$

Так как в один и тот же момент времени величины K_c и K_s для обоих горизонтов одинаковы, то подставляя в общем виде значения H_i и H_{i-1} в выражения (422), можно вычислить отклонение $\Delta_{i-1,i}$ оси сооружения в пределах шага проецирования.

Если характер влияния ветровых нагрузок отображается выражением (426), то

$$\Delta_i = 3K_c K_s h^4 i^4; \quad (434)$$

$$\Delta_{i-1} = K_c K_s h^4 \left(3i^4 - 4i^2 - \frac{1}{i} \right).$$

Тогда

$$\Delta_{i-1,i} = \Delta_i - \Delta_{i-1} = K_c K_s h^4 \left(4i^2 - \frac{1}{i} \right). \quad (435)$$

Подставляя H_i и H_{i-1} в (424), получим отклонения под влиянием солнечной радиации

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{J_i} &= K_{cJ} \sqrt{J_1^2 + J_2^2 h^2 i^2}; \\ \Delta_{J_{i-1}} &= K_{cJ} \sqrt{J_1^2 + J_2^2 h^2 (i-1)^2} \end{aligned} \right\} \quad (436)$$

и отклонение в пределах шага проецирования

$$\Delta_{J_{i-1,i}} = K_{cJ} \sqrt{J_1^2 + J_2^2 h^2 (2i-1)}. \quad (437)$$

Используя значение $\Delta_{J_{i-1,i}}$ и $\Delta_{i-1,i}$, можно определить $\Delta_{h_{\max}}$ и необходимое для расчетов значение $\delta_{e_{\text{н}}}$.

Отметим, что отклонения $\Delta_{i-1,i}$ зависят не только от выбора шага проецирования, но и от высоты монтажного горизонта. Как следует из формул (435) и (437), даже при одинаковых h величина отклонений возрастает с увеличением номера монтажного горизонта.

Иногда полагают, что при данном способе происходит ослабление влияния метеорологических условий. Несостоятельность этих утверждений нетрудно показать на простом примере.

Пусть на всех монтажных горизонтах проецирование осуществляют одновременно и без погрешностей построения отвесной линии. Не вызывает сомнений, что на каждом монтажном горизонте погрешность проецирования будет равна величине отклонения оси сооружения от вертикали, т.е. никакой компенсации или ослабления погрешностей не произойдет.

Рассмотрим влияние погрешностей построения отвесной линии. Если стандарт общей погрешности на последнем монтажном горизонте обозначить через $\sigma_{\text{лс}}$, а стандарты построения отвесной линии в пределах шага проецирования — через $\sigma_{\text{л}h_1}, \sigma_{\text{л}h_2}, \dots, \sigma_{\text{л}h_i}$, то

$$\sigma_{\text{лс}}^2 = \sigma_{\text{л}h_1}^2 + \sigma_{\text{л}h_2}^2 + \dots + \sigma_{\text{л}h_i}^2.$$

С увеличением высоты горизонта возможно увеличение амплитуды колебаний цели. Поэтому при любом i будем иметь $\sigma_{\text{л}h_{i-1}} < \sigma_{\text{л}h_i}$. Тогда

$$\sigma_{\text{лс}} \leq \sigma_{\text{л}h_i} \sqrt{i}.$$

В этом случае накопление погрешностей происходит практически так же, как для обычных случайных величин. Поэтому $\sigma_{\text{лс}}$ будет меньше, чем стандарт $\sigma_{\text{л}h_i}$ проецирования центра непосредственно с исходной на i монтажный горизонт.

Чтобы оценить порядок величин $\sigma_{\text{лс}}$ и $\sigma_{\text{л}h_i}$, рассмотрим пример.

Пусть $H_i = 200$ м, $h = 40$ м и $i = 200/40 = 5$. Для вычисления стандартов построения отвесной линии приборами оптического проецирования воспользуемся известным уравнением регрессии $\sigma = 0,0058H + 0,27$. Тогда

$$\sigma_{\text{л}h_i} = 0,0058 \cdot 200 + 0,27 = 1,39 \text{ мм};$$

$$\sigma_{\text{лс}} = (0,0058 \cdot 40 + 0,27) \sqrt{5} = 1,10 \text{ мм}.$$

Для экстраполяции квадратной параболы предлагается формула

$$\Delta_i = (0,5A^2 - 2,5A + 3)\Delta_1 - (A^2 - 4A + 3)\Delta_2 + (0,5A^2 - 1,5A + 1)\Delta_3, \quad (438)^*$$

где $A = h_i^2/h_1$.

Так, для $h_i = 4h_1$ получим $\Delta_4 = \Delta_1 - 3\Delta_2 + 3\Delta_3$.

Если значение Δ_i по формуле (438) представить в виде

$$\Delta_i = K_1\Delta_1 + K_2\Delta_2 + K_3\Delta_3,$$

то дисперсия D_{Δ_i} определения Δ_i будет равна

$$D_{\Delta_i} = K_1^2 D_{\Delta_1} + K_2^2 D_{\Delta_2} + K_3^2 D_{\Delta_3}, \quad (439)$$

где D_{Δ_1} , D_{Δ_2} и D_{Δ_3} — дисперсии определения Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 .

При симметричной программе наблюдений данный способ в значительной мере ослабляет влияние метеорологических факторов и не зависит от погрешностей определения параметров K_c и K_r . Это позволяет утверждать, что точность его выше, чем в первых двух способах.

К недостаткам следует отнести некоторую произвольность предположения о форме кривой. Действительно, если под влиянием солнечной радиации ось сооружения в соответствии с (424) действительно будет иметь вид квадратной параболы, то при ветровых нагрузках форма кривой будет определяться уравнением (426). При совместном влиянии этих двух факторов ось сооружения будет иметь вид пространственной, а не плоской кривой, что дополнительно исказит результаты экстраполяции.

Другим недостатком способа является большая трудоемкость, связанная с определением отклонений на трех дополнительных горизонтах. При таком объеме работ трудно обеспечить и симметричность наблюдений, что несколько снижает точность определения Δ_i . В новом, четвертом, способе проецирование предполагается осуществлять следующим образом.

Центр сооружения проецируется по симметричной программе наблюдений одновременно с исходного на $i-1$ и i горизонты (рис 62). Используя фактическое отклонение Δ_{i-1} оси на $i-1$ горизонте в результаты проецирования на i горизонте вводится поправка за влияние метеорологических факторов.

Смысл данного предложения поясним на примере графоаналитического способа определения поправок.

Пусть в результате проецирования центра O на $i-1$ горизонт получена точка O_{i-1} , а центр ствола башни расположен в точке O'_{i-1} . Отрезок $O_{i-1} O'_{i-1}$ является отклонением оси сооружения, т.е. Δ_{i-1} .

Если определить направления ветрового потока $\underline{\Delta}_q$ и смещений оси сооружения под влиянием солнечной радиации $\underline{\Delta}_r$, то по правилу параллелограмма можно получить векторы составляющих отклонений

$$\underline{\Delta}_{i-1} \text{ и } \underline{\Delta}_{q_{i-1}}.$$

* Формула (438) заимствована из [21] и приведена к виду, удобному для вычислений Δ_i и D_{Δ_i} .

При симметричной программе наблюдений и небольшом времени выполнения работ величины K_b и K_c практически не изменяют своих значений. В условиях пары векторов $\Delta_{q_{i-1}}$ и Δ_{q_i} , $\Delta_{I_{i-1}}$ и Δ_{I_i} совпадают по направлению, а величины их связаны соотношениями

$$\Delta_{q_i} / \Delta_{q_{i-1}} = k_q \text{ и } \Delta_{I_i} / \Delta_{I_{i-1}} = k_I.$$

Откуда

$$\Delta_{q_i} = k_q \Delta_{q_{i-1}} \text{ и } \Delta_{I_i} = k_I \Delta_{I_{i-1}}. \quad (440)$$

При определении коэффициентов k_q и k_I исключается влияние величин K_c и K_b , что существенно повышает точность определения поправки. Так, используя формулы (434) и (436), получим

$$k_q = \frac{3i^4}{3i^4 - 4i^2 + i^{-1}} \text{ и } k_I = \frac{i^2}{(i-1)^2}. \quad (441)$$

Из (441) следует, что значения k_q и k_I зависят только от высоты проецирования, т.е. от i .

По формулам (440) и (441) можно вычислить Δ_{q_i} и Δ_{I_i} , по полученным векторам $\underline{\Delta}_{q_i}$ и $\underline{\Delta}_{I_i}$ построить вектор суммы и получить положение искомой точки O'' .

Рассмотрим аналитический способ решения.

Пусть в системе плоских координат известны вектор отклонений $\underline{\Delta}_{I_{i-1}}$ на $i-1$ монтажном горизонте и дирекционные углы α_q и α_I . В общем случае решение задачи сводится к определению координат точки O'' .

Для удобства преобразований совместим ось абсцисс системы с направлением отклонения оси сооружения на $i-1$ горизонте (см. рис. 62).

Для определения ординаты точки O'' запишем

$$y_{O''} = k \Delta_{I_{i-1}} \sin \alpha_I + k_q \Delta_{q_{i-1}} \sin \alpha_q.$$

Из треугольников $OO'M$ и $OO'N$ имеем

$$\frac{\Delta_{I_{i-1}}}{\sin(180^\circ - \beta)} = -\frac{\Delta_{I_{i-1}}}{\sin \alpha_q} = \frac{\Delta_{q_{i-1}}}{\sin \alpha_I},$$

где $\beta = \alpha_I \div \alpha_q$.

Откуда

$$\Delta_{I_{i-1}} = -\Delta_{I_{i-1}} \frac{\sin \alpha_q}{\sin \beta} \text{ и } \Delta_{q_{i-1}} = \Delta_{I_{i-1}} \frac{\sin \alpha_I}{\sin \beta}.$$

Тогда

$$y_{O''} = (k_q - k_I) \Delta_{I_{i-1}} \sin \alpha_I \frac{\sin \alpha_q}{\sin \beta}. \quad (442)$$

Определим абсциссу точки O''

$$x_{O''} = k_I \Delta_{I_{i-1}} \cos \alpha_I + k_q \Delta_{q_{i-1}} \cos \alpha_q.$$

Заменяя Δ_{l-1} и Δ_{q-1} на Δ_{l-1} , получим

$$x_{O''} = \frac{\Delta_{l-1}}{\sin \beta} (k_q \sin \alpha_l \cos \alpha_q - k_l \cos \alpha_l \sin \alpha_q). \quad (443)$$

Значения $x_{O''}$ и $y_{O''}$ полностью определяют вектор $\underline{\Delta}_l$.

При необходимости можно вычислить дирекционный угол α и длину вектора

$$\alpha = \arctg \frac{y_{O''}}{x_{O''}}; \quad \Delta_l = \frac{x_{O''}}{\sin \alpha} = \frac{y_{O''}}{\sin \alpha}. \quad (444)$$

Для оценки точности произведем некоторые упрощения в формулах (442) и (443). Обозначив разность коэффициентов через $\Delta k = k_l - k_q$, запишем

$$y_{O''} = -\Delta k \Delta_{l-1} \frac{\sin \alpha_l \sin \alpha_q}{\sin \beta};$$

$$x_{O''} = \frac{\Delta_{l-1}}{\sin \beta} (k_q \sin \alpha_l \cos \alpha_q - k_q \cos \alpha_l \sin \alpha_q - \Delta k \cos \alpha_l \sin \alpha_q).$$

При значительной высоте проецирования величина Δk мала по сравнению с k_l . Так, уже при $i = 6$ коэффициент $k_l = 1,44$, а $\Delta k = 0,42$. В этом случае

$$x_{O''} \approx \frac{\Delta_{l-1}}{\sin \beta} k_q (\sin \alpha_l \cos \alpha_q - \cos \alpha_l \sin \alpha_q).$$

Выражение в круглых скобках — это синус разности углов, т.е.

$$\sin(\alpha_l - \alpha_q) = \sin \beta,$$

тогда

$$x_{O''} \approx k_q \Delta_{l-1}.$$

Тангенс дирекционного угла вектора Δ_l вычислим по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_{O''}}{x_{O''}} = -\frac{\Delta k \sin \alpha_l \sin \alpha_q}{k_q \sin \beta}.$$

Так как ось абсцисс совмещена с направлением Δ_{l-1} , то угол α обычно невелик. Для расчетов точности с погрешностью в сторону увеличения можно воспользоваться приближенным соотношением

$$\alpha = \frac{\Delta k \rho \sin \alpha_l \sin \alpha_q}{k_q \sin \beta}.$$

Дирекционные углы α_l и α_q в данном способе определяют по результатам измерений. Если стандарты их определения равны $\sigma_{\alpha_q} = \sigma_{\alpha_l} = \sigma_\alpha$, то дисперсию σ_α^2 дирекционного угла α можно вычислить по формуле

$$\sigma_\alpha^2 = \left(\frac{\Delta k}{k_q} \right)^2 \frac{\sin^2 \alpha_l \cos^2 \alpha_q + \cos^2 \alpha_l \sin^2 \alpha_q}{\sin^2 \beta} \sigma_{\alpha_q}^2. \quad (445)$$

Оценим погрешность определения длины вектора. Так как длина вектора равна

$$\Delta_l = \frac{x_{0''}}{\cos \alpha} \approx \frac{k_q \Delta_{l-1}}{\cos \alpha},$$

то

$$\sigma_{\Delta_l}^2 = \left(\frac{k_q}{\cos \alpha} \right)^2 \sigma_{\Delta_{l-1}}^2 \frac{k_q^2 \Delta_{l-1}^2 \sin^2 \alpha \left(\frac{\sigma_a}{\rho} \right)^2}{\cos^4 \alpha} = \left(\frac{k_q \Delta_{l-1}}{\cos \alpha} \right)^2 \sigma_{\Delta_{l-1}}^2 + \left(\frac{k_q \Delta_{l-1}}{\cos \alpha} \right)^2 \frac{\sin^2 \alpha \left(\frac{\sigma_a}{\rho} \right)^2}{\cos^2 \alpha}.$$

Окончательно получим

$$\sigma_{\Delta_l}^2 = \left(\frac{\Delta_l}{\Delta_{l-1}} \right)^2 \sigma_{\Delta_{l-1}}^2 + \Delta_l^2 \operatorname{tg}^2 \alpha \left(\frac{\sigma_a}{\rho} \right)^2. \quad (446)$$

Отметим, что при выводе формул (445) и (446) использовались приближенные величины. В отдельных случаях это может привести к увеличению значений σ_a и σ_{Δ_l} на 20–30 %.

Пример 39. Проецирование центра башни на высоту 160 м осуществляли прибором PZL с шагом $h = 40$ м. Фактическое положение центра на высоте 120 м определяли промерами со стандартом $\sigma_a = 1,5$ мм. По результатам измерений отклонение Δ_{l-1} оказалось равным 200 мм. Оценить погрешность определения отклонения на горизонте 160 м четвертым способом, если дирекционные углы $\alpha_l = 60^\circ$ и $\alpha_q = 300^\circ$ известны со стандартами $\sigma_{\alpha_l} = \sigma_{\alpha_q} = 5^\circ$, а башня в период наблюдений колебаний не имела.

Решение. При $l = 160/40 = 4$ значения коэффициентов k_l , k_q и их функций равны

$$k_l = \frac{4^2}{(4-1)^2} = 1,78; \quad k_q = \frac{3 \cdot 4^4}{3 \cdot 4^4 - 4 \cdot 4^2 + 0,25} = 1,09$$

$$\Delta k = 1,78 - 1,09 = 0,69 \quad \text{и} \quad \Delta k/k_q = 0,69/1,09 = 0,63.$$

Координаты конца вектора Δ_l вычислим по формулам (442) и (443)

$$y_{0''} = -0,69 \cdot 200 \frac{\sin 60^\circ \sin 300^\circ}{\sin(60^\circ - 300^\circ)} = 119,5 \text{ мм};$$

$$x_{0''} = \frac{200}{\sin 120^\circ} (1,09 \sin 60^\circ \cos 300^\circ - 1,78 \cos 60^\circ \sin 300^\circ) = 286,7 \text{ мм}.$$

Тогда

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{119,5}{286,7} = 22,5^\circ \quad \text{и} \quad \Delta_{l-1} = \frac{286,7}{\cos 22,5^\circ} = 310,3 \text{ мм}.$$

Для определения стандарта дирекционного угла воспользуемся формулой (445)

$$\sigma_a = 0,63 \frac{\sqrt{\sin^2 60^\circ \cos^2 300^\circ + \cos^2 60^\circ \sin^2 300^\circ}}{\sin 120^\circ} = 2,2^\circ.$$

Для вычисления погрешностей в длине вектора надо знать дисперсию определения Δ_3 . Так как погрешность Δ_3 обусловлена влиянием погрешностей построения отвесной линии и определения центра ствола башни на высоте 120 м, то

$$\sigma_{\Delta_3}^2 = \sigma_{\sigma_p}^2 + \sigma_n^2.$$

Для вычисления σ_{np} воспользуемся уравнением регрессии из § 17:

$$\sigma_{np} = 0,0058 H + 0,27 = 0,0058 \cdot 120 + 0,27 = 0,97 \text{ мм.}$$

Тогда

$$\sigma_{\Delta_3}^2 = 0,97^2 + 1,5^2 = 3,19 \text{ мм}^2.$$

Стандарт длины вектора Δ_1 определим по формуле (446)

$$\sigma_{\Delta_4}^2 = \left(\frac{310,3}{200}\right)^2 3,19 + 200^2 \operatorname{tg}^2 22,5^\circ \left(\frac{2,2}{57,3}\right)^2 = 60 \text{ мм}^2;$$

$$\sigma_{\Delta_4} = \sqrt{60} = 7,8 \approx 8 \text{ мм.}$$

Для сравнения вычислим дисперсию определения длины вектора при третьем способе проецирования.

Как и ранее, для определения дисперсии отклонений Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 воспользуемся уравнением регрессии и значением $\sigma_n = 1,5$ мм. Тогда

$$D_{\Delta_1} = (0,0058 \cdot 40 + 0,27)^2 + 1,5^2 = 2,50 \text{ мм}^2;$$

$$D_{\Delta_2} = (0,0058 \cdot 80 + 0,27)^2 + 1,5^2 = 2,98 \text{ мм}^2;$$

$$D_{\Delta_3} = (0,0058 \cdot 120 + 0,27)^2 + 1,5^2 = 3,19 \text{ мм}^2.$$

Так как $\Delta_4 = \Delta_1 - 3\Delta_2 + 3\Delta_3$, то

$$D_{\Delta_4} = 2,50 + 9 \cdot 2,98 + 9 \cdot 3,19 = 58,0 \text{ и } \sigma_{\Delta_4} = \sqrt{58,0} = 7,6 \approx 8 \text{ мм.}$$

Таким образом, по расчетам точности погрешности определения поправок в обоих способах оказались равными. Но в третьем способе не учитывается отклонение оси сооружения, характеризуемое величиной $y_0'' = 119,5$ мм. При таком значении отклонения в направлении оси Y , обусловленном совместным влиянием ветровых нагрузок и солнечной радиации с разными дирекционными углами α_q и α_j , погрешности определения поправки в третьем способе проецирования могут существенно исказить окончательные результаты.

Все эти особенности и значительно меньшая трудоемкость, на наш взгляд, делают четвертый способ более предпочтительным.

§ 30. МОНТАЖ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ТРУБОПРОВОДОВ КОМПРЕССОРНЫХ И НАСОСНЫХ СТАНЦИЙ

При монтаже технологического оборудования выполняются следующие виды геодезических работ:

детальная разбивка осей;

выверка оборудования в плане и по высоте;

исполнительная съемка опорных площадок и оборудования.

Расчеты точности этих видов работ во многом сходны с расчетами аналогичных работ при возведении сборных зданий. Существенные отличия обычно связаны с выбором исходных требований к геометрии и точности выполнения работ.

Рассмотрим один из общих случаев подхода к решению задачи и выбора методики расчетов. Компрессорные и насосные станции магистральных трубопроводов состоят из ряда агрегатов 1, например компрессоров, соединенных сложной системой технологических трубопроводов 2 со специальным оборудованием 3 (рис. 63).

Перед началом монтажа на специальных стендах производят укрупненную сборку и сварку трубных заготовок. Монтаж укрупненных

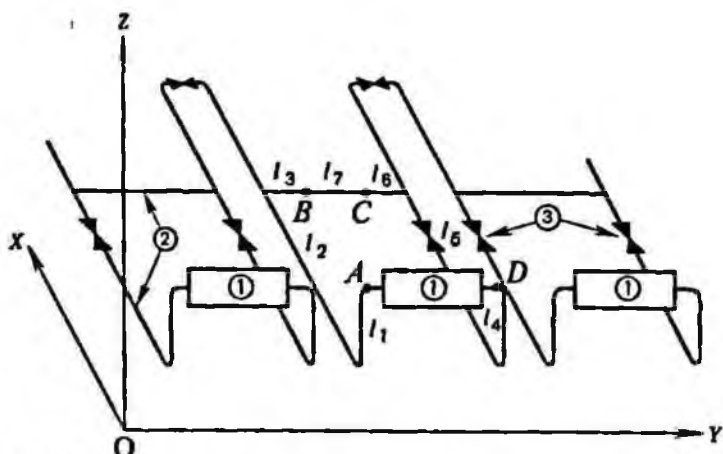


Рис. 63. Обобщенная схема станции

трубных узлов осуществляют непосредственно на строительной площадке после установки и закрепления агрегатов.

В настоящее время при монтаже технологических трубопроводов применяют подгонку укрупненных узлов по месту, что существенно ограничивает рост производительности труда и затрудняет сварку соединений. Между тем в строительном производстве широко применяют полносборные методы монтажа, способствующие повышению производительности труда, улучшению технологии и экономических показателей.

Для изучения целесообразности применения полносборного метода монтажа технологических трубопроводов кафедра инженерной геодезии МИСИ им. В. В. Куйбышева по договору со Всесоюзным научно-исследовательским институтом по строительству трубопроводов выполнила разработку методики расчетов точности геометрических параметров монтажных сопряжений при строительстве наземных объектов нефтяной и газовой промышленности в блочно-комплектном исполнении (ВИНИТИ. УДК 528.48, № гос. регистр. 76013725). По этой методике произведен расчет собираемости, трудозатрат и зарплаты по трем классам точности изготовления трубных узлов, монтажа и разбивки осей. Анализ полученных результатов показал, что увеличение трудозатрат на повышение точности не окупается увеличением собираемости размерных цепей.

Чтобы ослабить влияние низкой эффективности существующих приемов произвольного выбора места подгонки элемента была разработана методика расчета размерных цепей с «неограниченным в одном направлении компенсатором».

Сущность этого предложения рассмотрим на примере размерной цепи *ABCD*, изображенной на рис. 63.

Пусть от точки *A* последовательно устанавливают элементы l_1 , l_2 и l_3 , а от точки *D* — элементы l_4 , l_5 и l_6 . После закрепления элементов измеряют расстояние *BC*, изготавливают трубный узел l_7 соответствующего размера и устанавливают его по месту.

Так как размер l_7 изготавливают по результатам измерения, то погрешности реализации составляющих размеров в направлении оси

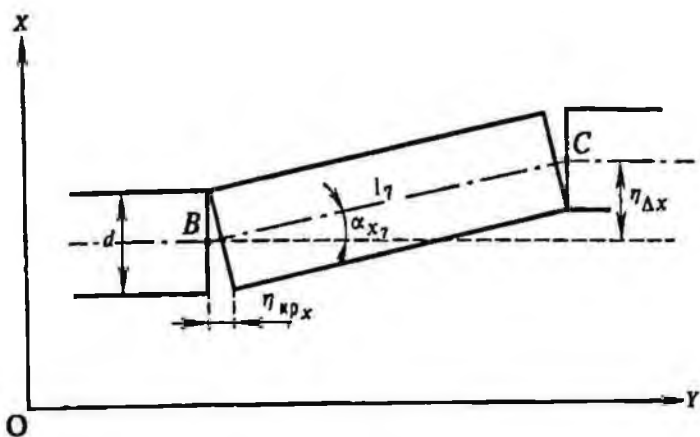


Рис. 64. Смещение кромок труб

ординат не оказывают влияния на собираемость этой линейной цепи. Цепи такого вида названы цепями с неограниченным в одном направлении компенсатором.

Для пространственных цепей неограниченный компенсатор размещают в направлении той оси (линейной цепи), где происходит наибольшее накопление погрешностей составляющих размеров. Этим устраняется наиболее слабое место пространственной цепи.

Влияние погрешностей составляющих размеров в двух других линейных цепях приводят к развороту замыкающего размера относительно оси компенсатора, что вызывает ряд дополнительных затруднений при монтаже. Так, в результате поворота размера l_7 в плоскости чертежа на угол α_{x_7} произойдет смещение кромок $\eta_{кр x}$ труб (рис. 64). Если погрешность реализации составляющих размеров в направлении оси абсцисс обозначить через $\eta_{\Delta x}$, то

$$\eta_{кр x} = \frac{d}{l_7} \eta_{\Delta x}, \quad (447)$$

где d — диаметр трубопровода. Аналогичное смещение $\eta_{кр z}$ произойдет и в направлении оси Z .

Так как закономерности влияния этих погрешностей идентичны, то рассмотрим одну из них, например $\eta_{\Delta x}$. Для определения $\eta_{\Delta x}$ составим уравнение линейной размерной цепи вида (107)

$$\Delta x = X_C - X_B = (X_D + \sum_{i=4}^6 l_i \sin \alpha_{x_i}) - (X_A + \sum_{i=1}^3 l_i \sin \alpha_{x_i}), \quad (448)$$

где α_{x_i} — угол между направлением оси ординат и проекцией размера l_i на плоскости XOY .

Разность абсцисс точек D и A — это разворот проекции продольной оси агрегата относительно оси абсцисс. Такой разворот происходит в результате влияния погрешностей η_{\max} монтажа агрегата, тогда

$$\eta(X_D - X_A) = \eta_{\max}.$$

Для изучения погрешностей остальных составляющих размеров при-
дадим величинам l_i и α_{x_i} погрешности η_{l_i} и $\eta_{\alpha_{x_i}}$. Тогда погрешность
 $\eta_{l_i \sin \alpha_{x_i}}$ величины $l_i \sin \alpha_{x_i}$ будет равна

$$\eta_{l_i \sin \alpha_{x_i}} = (l_i + \eta_{l_i})[(\sin \alpha_{x_i} + \eta_{\alpha_{x_i}})] - l_i \sin \alpha_{x_i}.$$

Проектные размеры располагаются параллельно осям, а погреш-
ности обычно невелики, поэтому рассмотрим основные случаи.

1. Если проектный размер параллелен оси абсцисс, то

$$\sin \alpha_{x_i} = \sin(90^\circ + \eta_{\alpha_{x_i}}) \approx 1,$$

тогда

$$\eta_{l_i \sin \alpha_{x_i}} = l_i + \eta_{l_i} - l_i = \eta_{l_i}.$$

2. Если проектный размер параллелен оси ординат, то

$$\sin \alpha_{x_i} = \sin(0^\circ + \eta_{\alpha_{x_i}}) = \sin \eta_{\alpha_{x_i}} = \frac{\eta_{\alpha_{x_i}}}{\rho}.$$

Тогда

$$\eta_{l_i \sin \alpha_{x_i}} = (l_i + \eta_{l_i}) \frac{\eta_{\alpha_{x_i}}}{\rho} = \frac{l_i \eta_{\alpha_{x_i}}}{\rho} + \frac{\eta_{l_i} \eta_{\alpha_{x_i}}}{\rho}.$$

Второй член правой части равенства пренебрегаемо мал, поэтому

$$\eta_{l_i \sin \alpha_{x_i}} \approx \frac{l_i \eta_{\alpha_{x_i}}}{\rho}.$$

3. Если проектный размер параллелен оси Z , то проекция факти-
ческого размера на плоскость XOY зависит от угла α_{z_i} между размером и
осью Z , т. е.

$$(l_i + \eta_{l_i}) \sin \alpha_{z_i} = (l_i + \eta_{l_i}) \sin(0^\circ + \eta_{z_i}) = \frac{l_i \eta_{z_i}}{\rho} + \frac{\eta_{l_i} \eta_{z_i}}{\rho}.$$

Так как второй член мал, то

$$(l_i + \eta_{l_i}) \sin \alpha_{z_i} \approx \frac{l_i \eta_{z_i}}{\rho},$$

тогда

$$\eta_{l_i \sin \alpha_{z_i}} = \frac{l_i \eta_{z_i}}{\rho} \sin \alpha_{z_i}.$$

В этом случае угол α_{x_i} может принимать любые значения в интервале
от 0 до 2π .

Если сумму погрешностей составляющих размеров параллельных
оси абсцисс обозначить через $\sum_{i|x}$, параллельных оси ординат — через $\sum_{i|y}$
и параллельных оси Z — через $\sum_{i|z}$, то

$$\eta_{\Delta x} = \eta_{\max} + \sum_{i|x} \eta_{l_i} + \sum_{i|y} \frac{l_i}{\rho} \eta_{\alpha_{x_i}} + \sum_{i|z} \frac{l_i}{\rho} \eta_{z_i} \sin \alpha_{z_i}. \quad (448)$$

Для определения дисперсии замыкающего размера найдем предвари-
тельно дисперсию D_z величины $\eta_z = \sin \alpha_x$. Если случайные величины η_z

и α_x независимы и имеют нулевые математические ожидания, а величина α_x распределена равномерно в интервале от 0 до 2π , то

$$D_z = D_{\eta_x} D_{\sin \alpha_x} = 0,5D_{\eta_x}.$$

Погрешности η_1 , η_{α_x} и η_2 независимы. Обозначив дисперсии этих величин соответственно через D_1 и D_{α} , получим

$$D_{\Delta x} = D_{\max} + \sum_{i_1|x} D_{i_1} + \sum_{i_1|y} \frac{l_i^2}{\rho^2} D_{\alpha_x} + \sum_{i_1|z} \frac{l_i^2}{\rho^2} D_{z_1}. \quad (449)$$

Эта формула справедлива в том случае, когда монтаж осуществляют без детальной разбивки осей путем последовательного соединения элементов от точек A и D .

Как показали исследования, наиболее оптимальным является вариант, в котором монтаж всех трубных узлов осуществляют по установочным рискам. Рассмотрим влияние погрешностей реализации составляющих размеров при различной ориентации проектных элементов.

1. Если проектный размер параллелен оси абсцисс, то при монтаже элемента по установочным рискам погрешность изготовления распределяют поровну на оба конца трубного узла. В этом случае в правой части равенства (449) значение D_1 можно заменить на $0,5D_1$.

2. Если проектный размер параллелен оси ординат, то погрешность его реализации обусловлена влиянием погрешностей построения установочной риски и монтажа трубного узла по этой риске.

Дисперсию построения установочной риски в расчетах точности обычно принимают равной дисперсии разбивки осей. Поэтому, обозначив дисперсию разбивки осей через D_{po} , а дисперсию монтажа трубного узла через D_m , можно записать

$$\frac{l^2}{\rho^2} D_{\alpha_x} = D_{po} + D_m.$$

3. Выверку вертикально расположенных элементов трубопроводов производят при помощи отвеса или теодолита. Если дисперсию погрешности этой операции обозначить через D_v , то в правой части равенства (449) величину $(l/\rho) D_z$ надо заменить на D_v .

Рассматривая совместно эти случаи применительно к монтажу трубных узлов с использованием детальной разбивки осей под каждый составляющий элемент, получим

$$D_{\Delta x} = D_{\max} + 0,5 \sum_{i_1|x} D_{i_1} + \sum_{i_1|y} D_{po1} + \sum_{i_1|y} D_{m1} + \sum_{i_1|z} D_{v1}. \quad (450)$$

Для расчетов собираемости линейной размерной цепи определим стандарт $\sigma_{крx}$ погрешности $\eta_{крx}$. Используя (447), получим

$$\sigma_{крx} = \frac{d}{l_{зам}} \sigma_{\Delta x}, \quad (451)$$

где $l_{зам}$ — замыкающий размер цепи.

Величина смещения кромок регламентируется соответствующими нормативными документами. При монтаже технологических трубопроводов смещение кромок ограничено значением $\delta_{кр} = 3,0$ мм (ОСТ 102-77).

Используя допускаемое смещение кромок, можно вычислить нормированное значение $l = \delta_{\text{кр}}/\sigma_{\text{кр}}$ и определить вероятность P_x собираемости линейной размерной цепи по оси абсцисс.

Аналогичную вероятность P_x можно определить и в линейной размерной цепи по оси z .

Пространственная цепь собирается только тогда, когда расхождения кромок не превышает допускаемое отклонение $\delta_{\text{кр}}$ во всех направлениях. Поэтому общая собираемость P_l цепи равна

$$P_l = P_x P_z. \quad (452)$$

Для определения общей собираемости $P_{\text{ст}}$ станции по всем размерным цепям подсчитывают величины $n_i = P_i n$, а искомую вероятность вычисляют по формуле

$$P_{\text{ст}} = \Sigma n_i / \Sigma n, \quad (453)$$

где n — число одинаковых пространственных цепей в схеме станции.

Подсчитано, что при монтаже технологических трубопроводов с разбивкой только основных осей общая собираемость станции не превышает 0,80. При монтаже трубных узлов по установочным рискам трудозатраты на станции возрастают на 57 чел.-дней (5%), а зарплата — на 0,2 тыс. руб (9%). При этом собираемость возрастает до 0,97, т.е. увеличивается более чем на 20%. В этом случае повышение трудозатрат при разбивке осей приводит к существенной экономии при монтаже.

На этих разработках Московским инженерно-строительным институтом им. В. В. Куйбышева, Всесоюзным научно-исследовательским институтом по строительству магистральных трубопроводов и объединением «Сибкомплектмонтаж» подготовлен и издан отраслевой стандарт ОСТ 102-93-84 [18]. Этот нормативный документ предусматривает применение трех классов точности изготовления деталей и трубных узлов, разбивки осей и монтажа, что позволяет на основе типовых расчетов точности находить оптимальное технологическое решение.

Результаты внедрения системы допусков в производственном объединении «Сибкомплектмонтаж» позволили за счет снижения расходов материала, сокращения подготовительных работ и повышения собираемости блочно-комплектных устройств получить за 1985 год экономию на сумму более миллиона рублей.

Можно ожидать, что такой подход к выбору методики выполнения работ найдет применение в других областях строительства, например при монтаже сборных зданий.

Некоторые значения из ОСТ 102-93-84 приведены в табл. 14.

Пример 40. При строительстве компрессорной станции работы производят по третьему классу точности. Определить собираемость размерной цепи на рис. 63 с неограниченным компенсатором BC ($l_7 = 4,0$ м), если диаметр труб $d = 1020$ мм; $l_1 = l_4 = 1,8$ м; $l_2 = l_3 = 5,0$ м и $l_5 = l_6 = 2,2$ м.

Решение. Для линейной размерной цепи в направлении оси абсцисс по формуле (450) имеем

$$D_{\Delta x} = D_{\text{мвх}} + 0,5(D_{l_2} + D_{l_3}) + (D_{\text{рo}_3} + D_{\text{рo}_6}) + (D_{\text{м}_3} + D_{\text{м}_6}) + (D_{v_1} + D_{v_4}).$$

Из табл. 14 по третьему классу точности для монтажа агрегата и трубных узлов получаем $\delta_{\text{мвх}} = 5$ мм, $\delta_{\text{м}_3} = \delta_{\text{м}_6} = 5$ мм, неперпендикулярности размеров l_1 и l_4 получаем $\delta_{v_1} = \delta_{v_4} = 5$ мм, для изготовления трубных узлов длиной 5,0 м по-

Таблица 14

Вид работы и объект монтажа	Размер, мм	Допускаемые отклонения, мм		
		1 класс	2 класс	3 класс
Изготовление деталей и трубных узлов	свыше 1600 до 2000	1,50	2,50	3,50
	свыше 2000 до 2500	1,75	2,75	4,00
	свыше 2500 до 3150	2,00	3,00	4,50
	свыше 3150 до 4000	2,25	3,50	5,25
	свыше 4000 до 5000	2,50	4,00	6,00
Разбивка осей: в плане	от 1001 до 2000	0,50	0,75	1,00
	от 2001 до 5000	0,75	1,25	1,75
	более 5000	1/6000	1/3000	1/2000
по высоте		0,5	1,0	2,5
Монтаж:				
блок-боксов в плане		2	3	5
блок-боксов по высоте		1	2	3
труб \varnothing 720-1220		2	3	5
нравительность		2	3	5

лучаем $\delta_{i_2} = \delta_{i_3} = 6,00$ мм и для разбивки осей на расстоянии 5,0 получаем $\delta_{p_{03}} = \delta_{p_{06}} = 1,75$ мм.

Используя соотношение $D = \delta^2/3^2$, получим

$$D_{\Delta_x} = \frac{5^2 + 6^2 + 2 \cdot 1,75^2 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^2}{3^2} = 18,57 \text{ или } \delta_{\Delta_x} = 4,31 \text{ мм.}$$

Стандарт несовмещения кромок трубных узлов вычислим по формуле (451) $\delta_{гр} = (1020 \cdot 4,31)/4000 = 1,10$ мм. При допустимом смещении кромок $\delta_{гр} = 3,0$ мм нормированное значение погрешности равно $t = 3,0/1,10 = 2,73$, что соответствует собираемости

$$P_x = \arg \Phi(2,73) = 0,9936.$$

Смещение кромок труб в направлении оси Z обусловлено влиянием погрешностей монтажа агрегата, изготовления размеров l_1 и l_4 , построением высотных установочных рисок и монтажа элементов l_2 , l_3 , l_5 и l_6 :

$$D_{\Delta_x} = D_{m_{11}} + 0,5(D_{l_1} + D_{l_4}) + (D_{p_{02}} + D_{p_{03}} + D_{p_{05}} + D_{p_{06}}) + (D_{m_2} + D_{m_3} + D_{m_5} + D_{m_6}).$$

При $l_1 = l_4 = 1,8$ м допустимые отклонения при изготовлении трубных узлов равны $\delta_{l_1} = \delta_{l_4} = 3,5$ мм, а допустимые отклонения разбивки осей для $l_3 = l_6 = 2,2$ м равны $\delta_{p_{03}} = \delta_{p_{06}} = 1,75$ мм. Подставляя полученные значения допустимых отклонений, имеем

$$D_{\Delta_x} = \frac{5^2 + 3,5^2 + 4 \cdot 1,75^2 + 4 \cdot 5^2}{3^2} = 16,61 \text{ или } \sigma_{\Delta_x} = 4,07 \text{ мм.}$$

Вычислим стандарт несмещения кромок $\delta_{гр} = (1,02 \cdot 4,07)/4,0 = 1,04$ мм, нормированную величину $t = 3,0/1,04 = 2,89$ и собираемость данной линейной цепи

$$P_x = \arg \Phi(2,89) = 0,9962.$$

Собираемость пространственной цепи равна

$$P_1 = P_x \cdot P_x = 0,9936 \cdot 0,9962 = 0,9898.$$

§ 31. НАБЛЮДЕНИЯ ЗА ОСАДКАМИ

Для наблюдения за осадками вне зоны подвижек грунта и по возможности ближе к исследуемому объекту закладывают реперы, сохраняющие высотные отметки на весь период наблюдений. В тело наблюдаемого объекта закладывают осадочные марки, изменяющие высотное положение вместе с конструкциями сооружения или частями объекта.

Определение осадок осуществляют путем периодических измерений превышений и вычислений отметок осадочных марок.

Обычно для измерения превышений используют геометрическое нивелирование. Наиболее распространенная схема ходов для этого случая приведена на рис. 65.

Для контроля за стабильностью положения исходных реперов I, II и III в каждом из циклов с повышенной точностью измеряют превышения между ними и выявляют наиболее устойчивый знак. Далее по одинаковой программе для всех циклов измеряют превышения и уравнивают сеть. По уравненным превышениям h и отметке H_1 исходного репера I вычисляют отметки осадочных марок в каждом цикле

$$H_{ji} = H_{11} + \sum_{j=0}^i h_j, \quad (454)$$

где $j = 1, 2, \dots, k$ — номер осадочной марки; $i = 0, 1, \dots, n$ — номер цикла наблюдений.

Осадку S_{ji} марки I вычисляют как разность отметок в начальном (нулевом) H_{j0} и текущем H_{ji} циклах наблюдений

$$S_{ji} = H_{j0} - H_{ji}. \quad (455)$$

Всю совокупность полученных значений S_{ji} представляют в виде упорядоченной таблицы осадок и используют для решения ряда научных и практических задач.

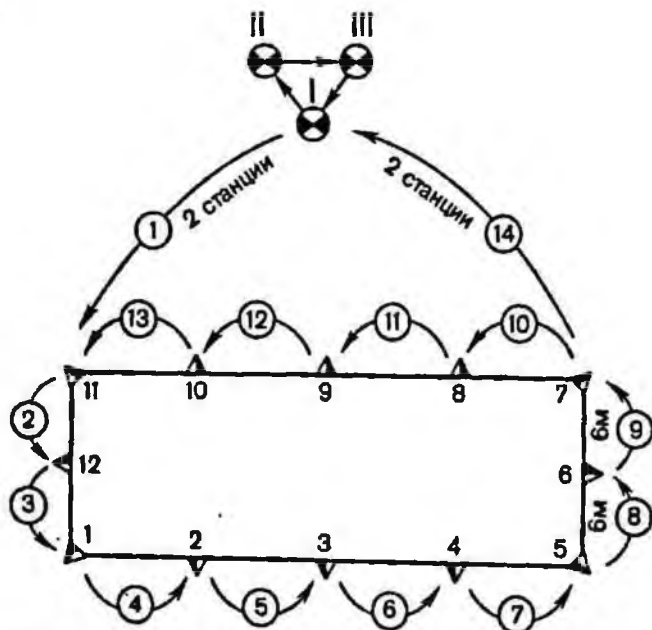


Рис. 65. Схема наблюдений за осадками зданий

Рассмотрим наиболее распространенные характеристики осадок и их использование при анализе результатов наблюдений.

Для решения научной задачи – выявления наиболее общих закономерностей протекания осадок во времени – вычисляют средние значения S_i осадок всех марок по циклам и определяют зависимость

$$S_i = f(t_i),$$

где t_i – время наблюдений или номер цикла.

Для практических целей прогнозирования осадку аппроксимируют экспонентой

$$S_i = S_n (1 - e^{-\alpha t_i}),$$

где S_n – значение S на период стабилизации осадок; α – коэффициент, определяемый экспериментальным путем.

Средняя осадка определяет общее смещение здания или сооружения по высоте. При значительной величине такое смещение может привести к повреждению или снижению эксплуатационных качеств коммуникаций. Допускаемые величины S_{\max} средних осадок для различных видов зданий и сооружений приведены в СНиП [19].

Для более полной характеристики протекания осадок во времени используют разность ΔS_i , скорость v_i и ускорение a_i осадок. Эти величины для средних осадок или осадок отдельных марок определяют по формулам

$$\Delta S_i = S_i - S_{i-1}; \quad (456)$$

$$v_i = \frac{S_i - S_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} = \frac{\Delta S_i}{\Delta t}; \quad (457)$$

$$a_i = \frac{v_i - v_{i-1}}{\Delta t} = \frac{\Delta S_i - \Delta S_{i-1}}{\Delta t^2}, \quad (458)$$

где Δt – промежуток времени между циклами.

Величины ΔS , v и a играют особо важную роль при прогнозировании хода осадок в процессе строительства, когда по результатам промежуточных циклов необходимо заблаговременно выявить критические состояния конструкции сооружения.

Другой круг задач связан с определением разности осадок различных марок в одном цикле наблюдений.

Для определения равномерного наклона (крена) фундамента (рис. 66, а) используют разность осадок ΔS_{DF} марок D и F в одном цикле наблюдений

$$\Delta S_{DF} = S_F - S_D. \quad (459)$$

Величину прогиба фундамента (рис. 66, б) характеризуют стрелкой прогиба f_e точки E

$$f_e = S_E - \left(S_D + \frac{l_d}{l_d + l_e} \Delta S_{DF} \right) = \Delta S_{DE} - \frac{l_d}{l_d + l_e} \Delta S_{DF}. \quad (460)$$

Допустимые величины кренов и относительных прогибов приводятся в соответствующих нормативных документах. Допустимые значения кренов фундаментов сооружений, разности осадок и относительных

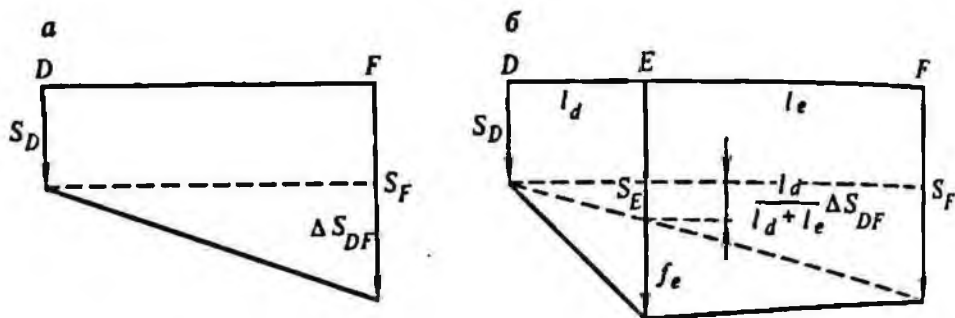


Рис. 66. Определение крена и прогиба фундамента

прогибов различных конструкций зданий даны в СНиП [19], а оценка деформационных характеристик оснований – в статье [10].

В зависимости от задач наблюдения за осадками в качестве исходных данных для расчета точности измерений назначаются один или несколько из рассмотренных выше показателей осадок или деформаций. Обычно эти величины задаются в виде допускаемых значений δ_d деформаций. Если предельную погрешность определения соответствующего вида деформации по результатам наблюдений за осадками обозначить через $\delta_{дн}$, а коэффициент надежности через k , то $\delta_{дн} = k\delta_d$.

Учитывая последствия неточного определения деформаций и требования нормативного документа [25] к точности определения параметров в строительстве коэффициент надежности чаще всего принимают равным $k = 0,10$. В ряде случаев используют и другие значения. Так, в статье [6] показано, что исходя из характеристик физико-механических свойств грунтов и точности их определения для решения практических вопросов можно ограничиться значением $k = 0,15$.

Полученные значения исходных параметров для расчета точности имеет смысл разделить на две группы. К первой группе отнесем параметры, характеризующие протекание осадок во времени (S_{max} , ΔS_i , v_i , a_i), ко второй, – характеризующие неравномерность осадок различных марок в одном цикле наблюдений (ΔS_{DF} , f_e).

Рассмотрим первую группу параметров. При наблюдениях за осадками зданий и сооружений заранее определить, какая марка получит максимальную осадку, практически невозможно. Поэтому в расчетах точности стандарт $\sigma_{S_{max}}$ максимальной осадки определяют для наиболее слабого места сети, например, для точки I.

Для определения погрешности осадок этой марки подставим значения H_{j0} и H_{ji} из (454) в первую часть равенства (455)

$$S_{ji} = (H_{j0} - H_{ji}) + \sum_{j=0}^j h_{j0} - \sum_{j=0}^j h_{ji}. \quad (461)$$

Первый член правой части равенства является разностью отметок исходного репера в нулевом и i циклах, т. е. погрешностью $\eta_{ор}$, обусловленной изменением высоты исходного пункта за период времени t_i между нулевым и текущим циклом. Эту погрешность можно рассматривать как сумму погрешностей η_p оседания (выпучивания) репера и

η_{op} изменения длины трубы репера от сезонных колебаний температуры

$$\eta_{op} = \eta_p + \eta_{ip}$$

Чтобы ослабить влияние η_p , закладывают «куст» реперов, превышения между которыми определяют с большей точностью, чем между осадочными марками. При выявлении наиболее устойчивого репера сравнение превышений между исходными знаками осуществляют при помощи одного из критериев устойчивости K , например критерия Гарновского

$$K = 2\mu_n \sqrt{2l},$$

где μ_n — стандарт определения превышений на станции; h — число станций между реперами.

При таком методе всегда остается интервал значений от $-K$ до $+K$, внутри которого невозможно обнаружить смещения. В этом случае будем полагать, что погрешность η_p распределена внутри этого интервала равномерно. Тогда стандарт σ_p этой погрешности равен

$$\sigma_p = K/\sqrt{3}. \quad (462)$$

Под влиянием сезонных колебаний температуры длина l_t трубы репера изменяется на величину

$$\Delta l_t = \alpha_t l_t \Delta t_t, \quad (463)$$

где α_t — коэффициент линейного расширения материала трубы; Δt_t — разность температур трубы.

Температура трубы репера изменяется по глубине и зависит от температуры окружающего грунта. В работе П. И. Брайта температуру отдельных отрезков трубы репера рекомендуется приравнять температуре окружающего грунта, а поправки в отметку исходного репера вычислять по формуле (463).

Значительно точнее определяются поправки за температуру для биметаллического репера конструкции П. И. Брайта. В реперах этой конструкции поправку определяют по разности длин двух труб с разными коэффициентами линейного расширения.

Для расчетов точности значения стандарта σ_{ip} при наблюдениях за осадками без учета l_t можно для усредненных условий принять равным 0,33 мм, при учете влияния температуры стальных реперных труб 0,1 мм, а для биметаллических реперов 0,03 мм.

Стандарт σ_{op} погрешности η_{op} вычисляют по формуле

$$\sigma_{op}^2 = \sigma_p^2 + \sigma_{ip}^2. \quad (464)$$

Определим погрешности суммы превышений от исходного репера до осадочной марки J . Так как отметки осадочных марок вычисляют по уравненным значениям превышений, то стандарт σ_{h_j} величины $\sum_{j=0}^J h_j$ равен

$$\sigma_{h_j} = \mu \sqrt{1/P_j} = \mu \sqrt{\pi_j}, \quad (465)$$

где μ — стандарт единицы веса; P_j и π_j — соответственно вес и обратный вес марки J .

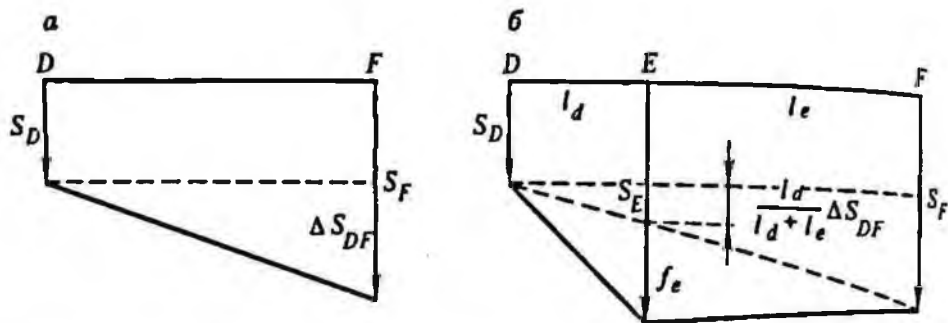


Рис. 66. Определение крена и прогиба фундамента

прогибов различных конструкций зданий даны в СНиП [19], а оценка деформационных характеристик оснований – в статье [10].

В зависимости от задач наблюдения за осадками в качестве исходных данных для расчета точности измерений назначаются один или несколько из рассмотренных выше показателей осадок или деформаций. Обычно эти величины задаются в виде допускаемых значений δ_d деформаций. Если предельную погрешность определения соответствующего вида деформации по результатам наблюдений за осадками обозначить через $\delta_{дн}$, а коэффициент надежности через k , то $\delta_{дн} = k\delta_d$.

Учитывая последствия неточного определения деформаций и требования нормативного документа [25] к точности определения параметров в строительстве коэффициент надежности чаще всего принимают равным $k = 0,10$. В ряде случаев используют и другие значения. Так, в статье [6] показано, что исходя из характеристик физико-механических свойств грунтов и точности их определения для решения практических вопросов можно ограничиться значением $k = 0,15$.

Полученные значения исходных параметров для расчета точности имеет смысл разделить на две группы. К первой группе отнесем параметры, характеризующие протекание осадок во времени (S_{max} , ΔS_t , v_t , a_t), ко второй, – характеризующие неравномерность осадок различных марок в одном цикле наблюдений (ΔS_{DF} , f_e).

Рассмотрим первую группу параметров. При наблюдениях за осадками зданий и сооружений заранее определить, какая марка получит максимальную осадку, практически невозможно. Поэтому в расчетах точности стандарт $\sigma_{S_{max}}$ максимальной осадки определяют для наиболее слабого места сети, например, для точки I.

Для определения погрешности осадок этой марки подставим значения H_{j0} и H_{ji} из (454) в первую часть равенства (455)

$$S_{ji} = (H_{j0} - H_{ji}) + \sum_{j=0}^j h_{j0} - \sum_{j=0}^j h_{ji}. \quad (461)$$

Первый член правой части равенства является разностью отметок исходного репера в нулевом и i циклах, т. е. погрешностью η_{0p} , обусловленной изменением высоты исходного пункта за период времени t_i между нулевым и текущим циклом. Эту погрешность можно рассматривать как сумму погрешностей η_p оседания (выпучивания) репера и

η_{ip} изменения длины трубы репера от сезонных колебаний температуры

$$\eta_{op} = \eta_p + \eta_{ip}.$$

Чтобы ослабить влияние η_p , закладывают «куст» реперов, превышения между которыми определяют с большей точностью, чем между осадочными марками. При выявлении наиболее устойчивого репера сравнение превышений между исходными знаками осуществляют при помощи одного из критериев устойчивости K , например критерия Тарновского

$$K = 2\mu_n \sqrt{2n},$$

где μ_n — стандарт определения превышений на станции; n — число станций между реперами.

При таком методе всегда остается интервал значений от $-K$ до $+K$, внутри которого невозможно обнаружить смещения. В этом случае будем полагать, что погрешность η_p распределена внутри этого интервала равномерно. Тогда стандарт σ_p этой погрешности равен

$$\sigma_p = K/\sqrt{3}. \quad (462)$$

Под влиянием сезонных колебаний температуры длина l_t трубы репера изменяется на величину

$$\Delta l_t = \alpha_t l_t \Delta t_t, \quad (463)$$

где α_t — коэффициент линейного расширения материала трубы; Δt_t — разность температур трубы.

Температура трубы репера изменяется по глубине и зависит от температуры окружающего грунта. В работе П. И. Брайта температуру отдельных отрезков трубы репера рекомендуется приравнять температуре окружающего грунта, а поправки в отметку исходного репера вычислять по формуле (463).

Значительно точнее определяются поправки за температуру для биметаллического репера конструкции П. И. Брайта. В реперах этой конструкции поправку определяют по разности длин двух труб с разными коэффициентами линейного расширения.

Для расчетов точности значения стандарта σ_{ip} при наблюдениях за осадками без учета l_t можно для устредненных условий принять равным 0,33 мм, при учете влияния температуры стальных реперных труб 0,1 мм, а для биметаллических реперов 0,03 мм.

Стандарт σ_{op} погрешности η_{op} вычисляют по формуле

$$\sigma_{op}^2 = \sigma_p^2 + \sigma_{ip}^2. \quad (464)$$

Определим погрешности суммы превышений от исходного репера до осадочной марки J . Так как отметки осадочных марок вычисляют по уравненным значениям превышений, то стандарт σ_{h_j} величины

$$\sum_{j=0}^J h_j \quad (465)$$

равен

$$\sigma_{h_j} = \mu \sqrt{1/P_j} = \mu \sqrt{\pi_j},$$

где μ — стандарт единицы веса; P_j и π_j — соответственно вес и обратный вес марки J .

Расчеты точности значительно упрощаются, если за единицу веса принять измерение превышения на одной станции со средней длиной плеча.

Веса P_j уравненных отметок осадочных марок определяют так же, как для высотных сетей. Подробно эти вопросы рассмотрены в § 22.

Веса уравненных значений отметок марок не изменяются в различных циклах, т. е. $\pi_{j0} = \pi_{jj} = \pi_j$.

Поэтому стандарт $\sigma_{S_{ji}}$ определения осадки, вычисленной по формуле (455), равен

$$\sigma_{S_{ji}}^2 = \sigma_{op}^2 + 2\pi_j \mu^2. \quad (446)$$

Для определения стандарта $\sigma_{\Delta S_{ii}}$ разности осадок одной марки в i и l циклах наблюдений запишем $\Delta S_{ii} = S_i - S_l$.

Так как $S_i = H_0 - H_i$ и $S_l = H_0 - H_l$, то $\Delta S_{ii} = H_l - H_i$. Подставляя значения H_i и H_l из равенства (454), получим

$$\Delta S_{ii} = (H_{ii} - H_{li}) + \sum_{j=0}^l h_{jl} - \sum_{j=0}^i h_{ji}. \quad (467)$$

Сравним погрешности правых частей равенств (461) и (467). Суммы превышений в нулевом и l циклах определяются равноточно. Небольшие расхождения можно получить только за счет погрешностей, обусловленных изменением отметок исходных реперов за период от t_i и до t_l . При правильной организации работ величина σ_{op} мала. Еще меньше будут ее колебания от цикла к циклу. Следовательно, для расчетов точности можно ограничиться приближенным равенством

$$\sigma_{\Delta S_{ii}} = \sigma_{\Delta S_i} = \sigma_{S_i}. \quad (468)$$

Для определения стандарта σ_v скорости осадок продифференцируем равенство (457) по переменным ΔS и Δt . Тогда

$$\sigma_v^2 = \frac{\sigma_{\Delta S}^2}{\Delta t^2} + \frac{\Delta S^2 \sigma_{\Delta t}^2}{\Delta t^4} = \frac{\Delta S^2 \sigma_{\Delta S}^2}{\Delta t^2 \Delta S^2} + \frac{\Delta S^2 \sigma_{\Delta t}^2}{\Delta t^2 \Delta t^2}.$$

Так как $\Delta S/\Delta t = v$ и $\sigma_{\Delta S} = \sigma_S$, то

$$\left(\frac{\sigma_v}{v}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_S}{\Delta S}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta t}}{\Delta t}\right)^2. \quad (469)$$

Чтобы определить стандарт σ_a ускорения осадок, воспользуемся формулой (458). Действия как и ранее, запишем

$$\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 = \frac{\sigma_{\Delta S_i}^2 + \sigma_{\Delta S_{i-1}}^2}{(\Delta S_i - \Delta S_{i-1})^2} + 4\left(\frac{\sigma_{\Delta t}}{\Delta t}\right)^2.$$

Но $\sigma_{\Delta S_i} = \sigma_{\Delta S_{i-1}} = \sigma_S$. Тогда

$$\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 = 4\left[\frac{\sigma_S^2}{(\Delta S_i - \Delta S_{i-1})^2} + \left(\frac{\sigma_{\Delta t}}{\Delta t}\right)^2\right]. \quad (470)$$

Точное определение скорости и особенно ускорения осадок выполняются при краткосрочном прогнозировании осадок сооружений, состояние которых вызывает опасение. В этих случаях существенно сокращают периоды времени Δt между циклами наблюдений и возникает необходимость учета величины $\sigma_{\Delta t}/\Delta t$.

В некоторых трудах, например статье [2], эту величину рекомендуют использовать для выбора времени наблюдений и определять на основе принципа равных влияний по заданному значению σ_v/v в формуле (469).

Для обычных условий величину $\sigma_{\Delta_i}/\Delta t$ нетрудно определить исходя из реальных производственных условий. Как правило, эта величина существенно меньше погрешностей определения разности осадок и в расчетах точности не учитывается. Тогда

$$\frac{\sigma_v}{v} = \frac{\sigma_S}{\Delta S} = \frac{\mu}{\Delta S} \sqrt{\pi_j}; \quad (471)$$

$$\frac{\sigma_a}{a} = \frac{2\mu}{\Delta S_i - \Delta S_{i-1}} \sqrt{\pi_j}. \quad (472)$$

Рассмотрим вторую группу параметров, характеризующих неравномерность осадок разных марок внутри одного цикла наблюдений.

Для определения погрешностей подставим значения S_D и S_F из равенства (455) в (459)

$$\Delta S_{DF} = H_{II} + \sum_{j=0}^D h_j - H_{II} - \sum_{j=0}^F h_j = \sum_{j=D}^F h_j.$$

Из этого следует, что стандарт $\sigma_{\Delta S_{DF}}$ разности осадок марок D и F равен стандарту суммы превышений между этими марками. Обозначив обратный вес суммы уравненных превышений через π_{DF} , получим

$$\sigma_{\Delta S_{DF}} = \mu \sqrt{\pi_{DF}}. \quad (473)$$

Для определения стандарта σ_{f_e} стрелки прогиба преобразуем правую часть равенства (460). Так как $\Delta S_{DF} = \Delta S_{DE} + \Delta S_{EF}$, то

$$f_e = \Delta S_{DE} - \frac{l_d}{l_d + l_e} (\Delta S_{DE} + \Delta S_{EF}) = \left(1 - \frac{l_d}{l_d + l_e}\right) \Delta S_{DE} + \frac{l_d}{l_d + l_e} \Delta S_{EF}.$$

Тогда

$$\sigma_{f_e}^2 = \left(1 - \frac{l_d}{l_d + l_e}\right)^2 \sigma_{\Delta S_{DE}}^2 + \left(\frac{l_d}{l_d + l_e}\right)^2 \sigma_{\Delta S_{EF}}^2.$$

Подставляя значения стандартов разности осадок из равенства (473), окончательно получим

$$\sigma_{f_e}^2 = \mu^2 \left[\left(1 - \frac{l_d}{l_d + l_e}\right)^2 \pi_{DE} + \left(\frac{l_d}{l_d + l_e}\right)^2 \pi_{EF} \right]. \quad (474)$$

Таким образом, для стандартов $\sigma_{дн}$ определения параметров обеих групп можно составить систему неравенств вида (347). Для этого значение $\sigma_{дн}$ по заданной доверительной вероятности P_n представим в виде

$$\sigma_{дн} \leq \delta_{дн}/t = k\delta_{дн}/t.$$

Подставляя соответствующие величины $\sigma_{дн}$ из формул (466)–(474) и решая неравенства относительно стандарта единицы, получим искомую систему неравенства

$$\mu \leq \varphi(\delta_x, k, t, \pi).$$

(475)

Определение обратных весов и стандарта единицы веса производят как для обычной высотной сети. Подробно этот вопрос рассмотрен в § 22.

По полученному стандарту единицы веса можно рассчитать элементарные погрешности и определить рабочие допуски.

Пример 41. Для наблюдения за осадками здания принята схема ходов, изображенная на рис. 65. Допускаемая величина осадки здания равна $S_{\max} = 10$ см, относительного прогиба торцевых стен $f_6/L = 0,001$ и крена $\Delta S_{57} = 0,001L$.

Рассчитать необходимую точность измерения превышений при доверительной вероятности $P_n = 0,9973$ и коэффициенте надежности $k = 0,10$, если реперы изготовлены из стальной трубы ($\sigma_p = 0,8$ мм), превышения между ними ($n = 2$ станции) определяют со стандартом $\mu_n = 0,15$ мм, а после возведения стен первого этажа осадочные марки «переносят» с конструкций фундамента на цоколь ($l_a = 4,5$ м, $\sigma_{\Delta l_a} = 5^\circ$).

Решение. Наиболее слабым местом сети является осадочная марка 3 (см. рис. 65). Поэтому допускаемую величину погрешности определения осадки вычислим для этой марки. Так как при выбранном значении доверительной вероятности $t = 3$, то

$$\sigma_{s_1} \leq \frac{0,1 \cdot 100}{3} = 3,33 \text{ мм.}$$

Дисперсию погрешности, обусловленную определением устойчивости реперов, вычислим по формуле (464)

$$\sigma_{\text{оп}}^2 = \frac{0,8^2}{3} + \frac{2^2 \cdot 0,15^2 \cdot 2 \cdot 2}{3} = 0,333.$$

а дисперсию погрешности за «перенос» осадочных марок с фундамента на цоколь — по формуле (477)

$$\sigma_{\Delta l_a}^2 = 12,5^2 \cdot 10^{-12} \cdot 4,5^2 \cdot 10^6 \frac{5^2}{3} = 0,026.$$

Так как $\sigma_{s_1}^2 = \sigma_{\text{оп}}^2 + \sigma_{\Delta l_a}^2 + 2\mu_3^2 \pi_3$, то

$$\mu_3 \leq \sqrt{\frac{\sigma_{s_1}^2 - \sigma_{\text{оп}}^2 - \sigma_{\Delta l_a}^2}{2\pi_3}} = \frac{3,28}{2\sqrt{\pi_3}}.$$

Стандарт определения стрелки прогиба не должен превышать

$$\sigma_{f_6} \leq \frac{0,1 \cdot 0,001 \cdot 12 \cdot 10^3}{3} = 0,40 \text{ мм.}$$

При $l_d = 6$ м, $l_d + l_e = 12$ м и $\pi_{56} = \pi_{67}$ получим

$$\sigma_{f_6}^2 = \mu_f^2 \left[\left(1 - \frac{6}{12}\right)^2 \pi_{56} + \left(\frac{6}{12}\right)^2 \pi_{67} \right] = \mu_6^2 \pi_{56}.$$

Тогда $\mu_f \leq 0,40/\sqrt{\pi_{57}}$.

Стандарт определения разности осадок не должен превышать

$$\sigma_{\Delta S_{57}} \leq \frac{0,1 \cdot 0,001 \cdot 12 \cdot 10^3}{3} = 0,40 \text{ мм.}$$

Но $\sigma_{\Delta S_{57}} = \mu_{57} \sqrt{\pi_{57}}$. Тогда $\mu_{57} \leq 0,40/\sqrt{\pi_{57}}$.

Для определения весов составим уравнения поправок и функций $F^{(1)}$ для S , $F^{(2)}$ для f и $F^{(3)}$ для ΔS . Принимая за единицу веса измерение h на станции, вычислим коэффициенты нормальных уравнений коррелат и окаймим их членами

вида $[пaf]$, $[пbf]$ и $[пff]$. Решение полученных систем уравнений даст следующие результаты:

$$1/P_{F(1)} = 3,00; 1/P_{F(2)} = 1,60 \text{ и } 1/P_{F(3)} = 0,90.$$

Используя эти значения, получим

$$\mu_1 \leq \frac{3,28}{\sqrt{2 \cdot 3,00}} = 1,34 \text{ мм}; \mu_f \leq \frac{0,40}{\sqrt{1,60}} = 0,31 \text{ мм и } \mu_{57} \leq \frac{0,40}{\sqrt{0,90}} = 0,42 \text{ мм}.$$

За окончательное примем наименьшее значение $\mu = 0,31$ мм.

Пример 42. В примере 41 наибольшую осадку получила марка 3. Разности ее осадок оказались равными $\Delta S_{i-1} = 16,8$ и $\Delta S_i = 12,4$ мм.

Циклы наблюдений проводились через два месяца с погрешностями во времени $\sigma_{\Delta t} = 1$ день.

Определить необходимую точность измерения превышений, если относительные погрешности определения скорости и осадок не должны превышать $\sigma_v/v = \sigma_a/a = 2/25 = 4 \cdot 10^{-2}$.

Решение. Вычислим относительную погрешность времени наблюдений

$$\sigma_{\Delta t}/\Delta t = 1/60 = 1,67 \cdot 10^{-2}.$$

Подставляя известные значения в формулы (469) и (470), получим

$$\sigma_s = \sqrt{4^2 \cdot 10^{-4} - 1,67^2 \cdot 10^{-4}} = 3,63 \cdot 10^{-2};$$

$$\frac{\sigma_{s_1}}{|\Delta S_i - \Delta S_{i-1}|} \leq \sqrt{4 \cdot 4^2 \cdot 10^{-4} - 1,67^2 \cdot 10^{-4}} = 7,82 \cdot 10^{-2};$$

Так как $\Delta S_i = 12,4$, $|\Delta S_i - \Delta S_{i-1}| = 4,4$, а $\sigma_s = \mu \sqrt{2\pi_3} = 2,45$, то

$$\mu_v \leq \frac{3,63 \cdot 10^{-2} \cdot 12,4}{2,45} = 0,18 \text{ мм};$$

$$\mu_a \leq \frac{7,82 \cdot 10^{-2} \cdot 4,4}{2,45} = 0,14 \text{ мм}.$$

За окончательное значение стандарта единицы веса принимаем наименьшее, т.е. $\mu = 0,14$ мм.

§ 32. НАБЛЮДЕНИЯ ЗА ПЛАНОВЫМИ СМЕЩЕНИЯМИ

Для наблюдения за плановыми смещениями неподвижные знаки (реперы) закладывают вне зоны подвижек, а деформационные марки — в конструкции здания.

Определение смещений конструкций здания осуществляют путем измерений с последующим вычислением разностей координат деформационных марок.

При створном способе наблюдений положение основного (базисного) створа на местности закрепляют реперами I и II (рис. 67). Для ослабления влияния погрешностей визирования и отсчетов по основному створу дополнительно закрепляют рабочий (наблюдательный) створ III—IV.

Измерения в циклах производят по следующей программе:

- определяют отклонения q_p рабочих реперов от основного створа;
- определяют отклонения q_m деформационных марок от рабочего створа;
- повторно определяют отклонения рабочих реперов от основного створа.

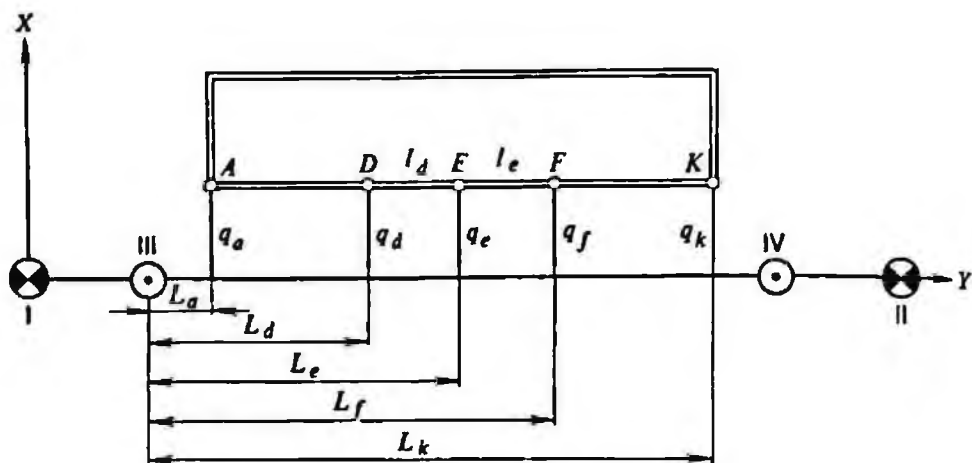


Рис. 67. Створный способ определения плановых смещений

При обработке результатов наблюдений по измеренным значениям q_p и q_m вычисляют отклонения q деформационных марок от основного створа, а плановое смещение S_{JI} марки J в текущем (i -м) цикле определяют как разность отклонений

$$S_{JI} = \Delta x_{JI} = q_{JI} - q_{J0}. \quad (476)$$

Как и при наблюдениях за осадками, исходными параметрами для расчета точности служат максимальное смещение S_{max} и приращение смещений марки между циклами

$$\Delta S_{II} = S_i - S_l = q_i - q_l, \quad (477)$$

где i, l — номера циклов наблюдений.

В отдельных случаях определяют скорость

$$v_i = \frac{\Delta S_i}{\Delta t} = \frac{q_i - q_{i-1}}{\Delta t} \quad (478)$$

и ускорение

$$a_i = \frac{\Delta S_i - \Delta S_{i-1}}{\Delta t^2} = \frac{q_i - 2q_{i-1} + q_{i-2}}{\Delta t^2} \quad (479)$$

смещений деформационной марки.

Для характеристики взаимных смещений конструкций здания используют разность смещений (разворот) конструкций в точках D и F

$$\Delta S_{DF} = S_F - S_D \quad (480)$$

и прогиб конструкций в точке E

$$f_e = \Delta S_{DE} - \frac{l_d}{l_d + l_e} \Delta S_{DF}. \quad (481)$$

Точность определения деформаций по результатам наблюдений, характеризуемая стандартом $\sigma_{дн}$, зависит от допускаемой величины деформации δ_d . Значения δ_d выбирают из нормативных документов или

из технического задания на производство работ. Если известны значения доверительной вероятности P_n и коэффициента надежности k_n , то величину $\sigma_{дн}$ можно определить как при наблюдениях за осадками

$$\sigma_{дн} = \frac{k_n \delta_n}{t}.$$

Рассмотрим зависимости между $\sigma_{дн}$ и стандартом σ_q определения отклонений от основного створа.

Так как во всех циклах измерение отклонений q производят равномерно, т. е. $\sigma_{q_0} = \sigma_{q_1} = \sigma_{q_2} = \sigma_q$, то стандарты определения смещений и приращения смещений между циклами равны

$$\sigma_{S_{1i}} = \sigma_{\Delta S_{1i}} = \sigma_q \sqrt{2}. \quad (482)$$

Для оценки точности определения скорости смещения марки поступим как при наблюдениях за осадками. Используя равенство (480), получим

$$\left(\frac{\sigma_v}{v}\right)^2 = 2 \left(\frac{\sigma_q}{q_i - q_{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta t}}{\Delta t}\right)^2. \quad (483)$$

Действуя аналогичным образом, получим стандарт определения ускорений смещения марки

$$\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 = 6 \left(\frac{\sigma_q}{\Delta S_i - \Delta S_{i-1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta f}}{\Delta t}\right)^2. \quad (484)$$

При вычислении стандарта определения разности смещений необходимо учитывать неравноточность измерения отклонений разных марок от створа. Так как в общем случае σ_q зависит от расстояния между рабочим репером и деформационной маркой, то $\sigma_{q_D} \neq \sigma_{q_E} \neq \sigma_{q_F}$, тогда

$$\sigma_{\Delta_{S_{DF}}}^2 = \sigma_{S_D}^2 + \sigma_{S_F}^2 = 2(\sigma_{q_D}^2 + \sigma_{q_F}^2). \quad (485)$$

Для получения стандарта определения прогиба конструкций преобразуем правую часть равенства (481). Подставляя значения ΔS_{DE} и ΔS_{DF} из (480), получим

$$f_e = -\left(1 - \frac{l_d}{l_d + l_e}\right) S_D + S_E - \frac{l_d}{l_d + l_e} S_F.$$

Тогда

$$\sigma_{f_e}^2 = \left(1 - \frac{l_d}{l_d + l_e}\right)^2 \sigma_{S_D}^2 + \sigma_{S_E}^2 + \left(\frac{l_d}{l_d + l_e}\right)^2 \sigma_{S_F}^2,$$

но $\sigma_S = \sigma_q \sqrt{2}$, поэтому

$$\sigma_{f_e}^2 = 2 \left[\left(1 - \frac{l_d}{l_d + l_e}\right)^2 \sigma_{q_D}^2 + \sigma_{q_E}^2 + \left(\frac{l_d}{l_d + l_e}\right)^2 \sigma_{q_F}^2 \right]. \quad (486)$$

При створных измерениях для реализации линии створа используют оптические, струнные и струнно-оптические методы, для фиксации точек створа применяют подвижные марки, дифракционную картину и муаровый эффект. Непосредственное определение расстояний от полученных

точек створа до деформационных марок осуществляют при помощи мерных приборов, горизонтальных реек и методом измерения малых углов. При построении створа значительной протяженности используют программы полуствора, третьей створа и т. д.

Каждому из сочетаний этих способов и программ соответствуют свои источники погрешностей и закономерности их накопления. Несмотря на многообразие элементарных погрешностей расчет точности отклонений марок от створа остается общим для всех случаев. Поэтому имеет смысл рассмотреть лишь общий ход решения задачи.

После измерения отклонений рабочих реперов от основного створа производят сравнение полученных значений q_p с результатами предшествующих циклов. При сравнении в качестве критерия устойчивости рабочих реперов обычно используют величину K_p , характеризующую предельную погрешность определения разности Δq_p измеренных отклонений в сравниваемых циклах. Если $|\Delta q_p| < K_p$, то полагают, что данный знак не получил смещения. Если $|\Delta q_p| > K_p$, то считают, что репер получил смещение, равное Δq_p , и в результате измерения отклонений деформационных марок от створа вводят соответствующие поправки. Как и при наблюдениях за осадками, стандарт σ_p погрешности определения смещений рабочих реперов с некоторым запасом надежности примем равным $\sigma_p = K_p / \sqrt{3}$.

Влияние погрешностей смещения знаков в плане на построение створа аналогично влиянию погрешностей центрировки и редукции. Поэтому при расчетах точности целесообразно объединить влияние этих погрешностей с погрешностями установки теодолита и визирной цели над рабочими реперами и оценить влияние единой погрешности за центрировку и редукцию. Такой метод расчета был использован при разбивке основных осей зданий способом створов. В результате расчета будут получены значения стандартов отклонений деформационных марок непосредственно от основного створа. Поэтому при рассмотрении дальнейшего материала будем использовать только обозначение q .

Отклонение марок от створа обычно производят с обоих реперов, т. е. в прямом и обратном направлениях, и получают значения q' и q'' . За окончательное значение q принимают среднее весовое

$$q = \frac{p'q' + p''q''}{p' + p''},$$

где p' и p'' — веса измеренных отклонений в прямом и обратном направлениях.

Если дисперсии измеренных отклонений в прямом и обратном направлениях обозначить через D' и D'' , то веса отклонений будут соответственно равны

$$p' = \frac{1}{D'} \text{ и } p'' = \frac{1}{D''}. \quad (487)$$

В этом случае вес p значения q равен сумме весов

$$p = p' + p'' = \frac{D' + D''}{D'D''}, \quad (488)$$

а дисперсию D среднего весового можно вычислить по формуле

$$D = \frac{D'D''}{D' + D''}. \quad (489)$$

Дисперсия определения отклонений зависит от расстояния от репера до данной марки и в общем случае веса отклонений разных марок не равны между собой.

Для более надежного определения весов целесообразно использовать результаты расчетов точности элементарных погрешностей при измерении отклонений. С этой целью рассмотрим наиболее распространенную схему измерений, когда деформационные марки и рабочие реперы располагаются симметрично относительно середины створа, например марки E на рис. 67.

Для выявления общих закономерностей и упрощения преобразований весь створ разобьем на $2k$ равных участков, а расстояния от реперов III и IV до марки J представим в виде

$$L_J = j \frac{L}{2k} \quad \text{и} \quad L_{2k-j} = (2k - j) \frac{L}{2k},$$

где L — расстояние между реперами.

Для марки E , расположенной на равном удалении от рабочих реперов, веса и дисперсии измеренных отклонений в прямом и обратном направлениях равны между собой, т. е.

$$p'_E = p''_E \quad \text{и} \quad D'_E = D''_E.$$

В этом случае

$$p = 2p'_E = 2p''_E \quad \text{и} \quad D_E = 0,5D'_E = 0,5D''_E. \quad (490)$$

Нетрудно убедиться в том, что все элементарные погрешности, составляющие погрешности определений q' и q'' , тоже равны между собой.

Теперь рассмотрим марку J , расположенную ближе к одному из реперов. Отметим, что вес среднего весового q_J не зависит от того, в какой половине створа расположена марка. Действительно, если обозначить расстояние от центра створа (точки E) до марки J через $\alpha L/2k$, то для точки в первой половине створа расстояния до рабочих реперов равны

$$L_J^I = \frac{L}{2} - \alpha \frac{L}{2k} \quad \text{и} \quad L_{2k-j}^I = \frac{L}{2} + \alpha \frac{L}{2k},$$

а для точки во второй половине створа

$$L_J^{II} = \frac{L}{2} + \alpha \frac{L}{2k} \quad \text{и} \quad L_{2k-j}^{II} = \frac{L}{2} - \alpha \frac{L}{2k}.$$

В этом случае $L_J^I = L_{2k-j}^{II}$ и $L_{2k-j}^I = L_J^{II}$, т. е. при вычислении весов отклонений для точек в разных половинах створа меняются местами дисперсии отклонений в прямом и обратном направлениях. Поэтому при расчетах точности достаточно рассмотреть лишь одну половину створа, например, репер III — марка E , т. е. в интервале номеров от 0 до k . Во

второй половине створа веса средневесовых значений q_j будут симметричны относительно p_E .

По характеру влияния на дисперсию среднего весового элементарные погрешности разделим на три группы.

1. Если элементарная погрешность не зависит от расстояния, например погрешность оценки части делений между нитью и штрихом горизонтальной рейки при отсчете, то дисперсии D'_{η_j} и D''_{η_j} элементарной погрешности в прямом и обратном направлениях для любой точки J равны между собой, т. е.

$$D'_{\eta_j} = D''_{\eta_j}.$$

Тогда дисперсия D_{η_j} влияния данной элементарной погрешности на весовое среднее будет равна

$$D_{\eta_j} = 0,5D'_{\eta_j} = 0,5D''_{\eta_j}. \quad (491)$$

2. Характерным примером элементарной погрешности второй группы служит погрешность за центрировку и редукцию. Дисперсия этой погрешности при построении створа определяется по формуле (282) и в обозначениях данного параграфа имеет вид

$$D_{cr} = \left(\frac{1}{2} - \frac{j}{2k} + \frac{j^2}{4k^2} \right) D_e.$$

Дисперсия D_e совместного влияния погрешностей определения q_p и погрешностей установки прибора над реперами для данного створа является постоянной величиной, т. е. не зависит от положения деформационной марки. Поэтому дисперсия погрешности за центрировку и редукцию при изменении расстояния от репера до марки (номера j) обусловлена поведением функции

$$\varphi = \frac{1}{2} - \frac{j}{2k} + \frac{j^2}{4k^2}$$

при изменении переменного j .

Функция φ_2 является параболой. Так как коэффициент при j^2 больше нуля, то функция в точке $j = k$, т. е. точке E , имеет минимум $\varphi_{\min} = 0,25$.

Ветви параболы симметричны относительно точки E . Поэтому дисперсии элементарных погрешностей при измерении отклонений в прямом и обратном направлениях равны между собой

$$D'_{\eta_j} = D''_{\eta_j} \quad \text{и} \quad p'_{\eta_j} = p''_{\eta_j}.$$

Тогда

$$D_{\eta_j} = 0,5D'_{\eta_j} = 0,5D''_{\eta_j} \quad \text{и} \quad p_{\eta_j} = 2p'_{\eta_j} = 2p''_{\eta_j}. \quad (492)$$

Отметим, что минимальная дисперсия этой погрешности в точке E равна

$$D_{E_{cr}} = 0,125D_e.$$

3. К третьей группе отнесем элементарные погрешности с дисперсией, пропорциональной квадрату расстояния между репером и маркой, т. е. когда $D'_{\eta_j} = Kj^2$.

Таблица 15

k	α									
	0	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°
3	9	6,4	1,9							
4	16	13,2	7,2	2,0						
5	25	22,2	15,2	7,5	2,0					
6	36	33,1	25,6	16,2	7,7	2,0				
7	49	46,1	38,2	27,6	16,8	7,8	2,0			
8	64	61,1	52,9	41,4	28,8	17,1	7,8	2,0		
9	81	78,0	69,8	57,6	43,6	29,6	17,3	7,9	2,0	
10	100	97,0	88,0	76,0	60,8	45,0	30,1	17,5	7,9	2,0

Примером такой погрешности может служить погрешность визирования, для которой дисперсия определяется по формуле (283)

$$D'_{b_j} = \frac{20^2}{\rho^2 v^2} L_j^2 = \frac{20^2 L^2}{\rho^2 v^2 4k^2 j^2} = K j^2. \quad (493)$$

Чтобы более наглядно представить закономерность изменения дисперсии элементарной погрешности по мере удаления точки J от середины створа, обозначим число отрезков $L/2k$ между точками J и E через α . Тогда $j = k - \alpha$ и $2k - j = k + \alpha$.

Подставляя эти значения для прямого и обратного направления в формулу (493), получим

$$D'_{n_j} = K(k - \alpha)^2 \quad \text{и} \quad D''_{n_j} = K(k + \alpha)^2.$$

Вычислим дисперсию среднего всеового

$$D_{n_j} = \frac{K(k - \alpha)^2 \cdot K(k + \alpha)^2}{K(k - \alpha)^2 + K(k + \alpha)^2} = 0,5K \frac{(k^2 - \alpha^2)}{k^2 + \alpha^2}. \quad (494)$$

Для данного створа величина K не изменяется, а изменение D_{n_j} обусловлено изменениями функции

$$\varphi = \frac{(k^2 - \alpha^2)^2}{k^2 + \alpha^2}.$$

Эта функция имеет в точке $\alpha = 0$, т. е. в середине створа, максимум $\varphi_{\max} = k^2$.

По мере удаления точки J от середины створа (увеличения α) значение φ уменьшается. Характер изменения функции можно проследить по значениям, приведенным в табл. 15.

Таким образом, определив дисперсии всех элементарных погрешностей при построении створа и вычислив дисперсии D'_j и D''_j , мы одновременно решаем задачу расчета точности измерений и получаем необходимые данные для обоснованного назначения весов измерений в прямом и обратном направлениях.

Дисперсия элементарных погрешностей второй группы имеет в середине створа минимальное, а третьей — максимальное значение. Поэтому совместное влияние всех элементарных погрешностей в какой-то мере сглаживает неравноточность определения отклонений от створа разных

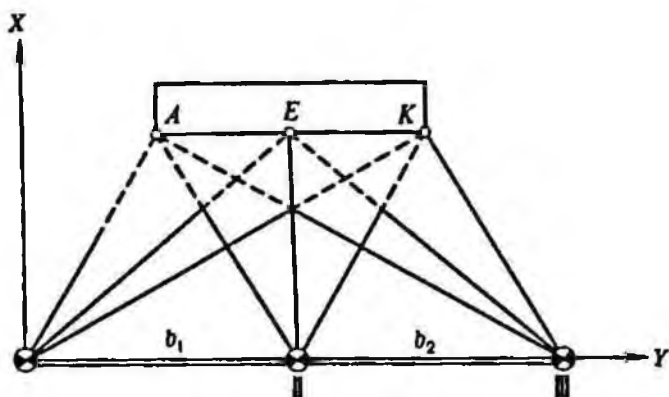


Рис. 68. Тригонометрический способ определения плановых смещений

марок. Однако нет оснований полагать, что все средние весовые будут равнозначны. Достаточно надежное представление о распределении весов дает лишь расчет элементарных погрешностей или детальное исследование результатов измерений.

При тригонометрическом способе наблюдений за плановыми смещениями исходные реперы устанавливаются на значительном удалении от здания и одним из известных методов определяют координаты деформационных марок в каждом цикле наблюдений.

Для определения координат наиболее часто используют угловые или линейные засечки. Если прибор можно устанавливать непосредственно над деформационными знаками, то применяют методы триангуляции, трилатерации или линейно-угловые построения.

На рис. 68 приведена одна из наиболее распространенных схем измерений при наблюдениях за плановыми деформациями здания.

Исходные реперы I, II и III закладывают вне зоны подвижек грунтов по возможности на линии, параллельной оси здания. Для определения координат деформационных марок в каждом цикле наблюдений измеряют базисы b_1 , b_2 и горизонтальные углы.

При обработке наблюдений одну из осей координат совмещают со створом реперов. В такой системе координат разность абсцисс деформационного знака, например марки J, в текущем и нулевом циклах определяет плановое смещение в направлении поперечной оси здания

$$\Delta x_{JI} = x_{JI} - x_{J0}, \quad (495)$$

а разность ординат — смещение в направлении продольной оси

$$\Delta y_{JI} = y_{JI} - y_{J0}. \quad (496)$$

Для определения необходимой точности измерения линий и углов в сети выявляют наиболее существенные виды деформаций для данного здания и по заданным значениям доверительной вероятности и коэффициента надежности вычисляют стандарты $\sigma_{дн}$.

При наблюдениях за плановыми смещениями зданий, элементы конструкций которых обычно располагают параллельно осям сооружения, стандарты определения деформации всегда можно выразить через стандарты $\sigma_{x_{JI}}$ и $\sigma_{y_{JI}}$ определения координат деформационных марок.

Нетрудно доказать, что для этого в формулах (482)–(486) достаточно заменить σ_{μ} на соответствующие значение $\sigma_{x_{ji}}$ или $\sigma_{y_{ji}}$. Так как плановые смещения определяют по уравненным значениям координат, то стандарты σ_x и σ_y можно представить в виде

$$\sigma_x = \mu / \sqrt{P_x}; \quad \sigma_y = \mu / \sqrt{P_y}, \quad (497)$$

и составить систему неравенств вида (350).

Для определения абсолютной величины смещения

$$\Delta l_{ji}^2 = \Delta x_{ji}^2 + \Delta y_{ji}^2 \quad (498)$$

можно составить функцию $F_{\Delta l}$ вида (351) и включить неравенство $\mu \leq \sigma_{\Delta l} \sqrt{P_{F_{\Delta l}}}$ в общую систему неравенств.

Решение системы неравенств дает значение стандарта единицы веса и тем самым определяет необходимую точность измерения в сети. Задачи такого типа подробно рассмотрены в § 23 и 28.

Трудозатраты на решение системы нормальных уравнений для определения весов функций целиком окупаются сокращением объемов вычислений при обработке результатов измерений в циклах. Это приводит к целесообразности применения для расчетов точности строгих способов определения весов.

Последнее время для обработки результатов повторных измерений с использованием ЭВМ стали применять методы трансформирования с опознаванием в сети устойчивых пунктов. В диссертационной работе Л. И. Серебряковой показано, что такой путь определения векторов смещений не только позволяет выявить устойчивые пункты в сети, но и отличается более высокой точностью определения смещений.

Точность трансформирования координат по n твердым пунктам сети рекомендуется оценивать по формуле

$$\sigma_{\Delta l_i}^2 = \frac{[\Delta x_i^2]}{n} + \frac{[\Delta y_i^2]}{n} - \frac{[(a-1)^2 l_r^2]}{n} - \frac{[\epsilon^2 l_i^2]}{\rho^2 n} - (\hat{x}_i - \hat{x}_0) - (\hat{y}_i - \hat{y}_0), \quad (499)$$

где $\sigma_{\Delta l_i}$ – стандарт погрешности трансформирования; $[\Delta x_i^2]$, $[\Delta y_i^2]$ – сумма квадратов смещений твердых пунктов; $a = b_i/b_0$ – отношение измеренных длин базиса в текущем и начальном циклах наблюдений; ϵ – погрешность ориентирования сети;

$$\hat{x}_i = \frac{[x_i]}{n}; \quad \hat{y}_i = \frac{[y_i]}{n}; \quad \hat{x}_0 = \frac{[x_0]}{n}; \quad \hat{y}_0 = \frac{[y_0]}{n}$$

– средние значения координат пунктов в соответствующих циклах;

$$x_r = x_{ji} - \hat{x}_i; \quad y_r = y_{ji} - \hat{y}_i; \quad l_r^2 = x_r^2 + y_r^2.$$

Формула (499), как отмечает Л. И. Серебрякова, «наглядно показывает, какие изменения происходят с величинами поправок в координаты после трансформирования. Величины Δx_{ji} и Δy_{ji} , как разности в координатах пунктов, не изменивших своего положения, представляют собой погрешности в положении пункта, оставшиеся после первого и второго уравнивания, и... погрешности эти, во-первых, усредняются и, во-вторых, уменьшаются на четыре заведомо положительных члена, причем первый учитывает изменение масштаба сети, второй – изменение ориен-

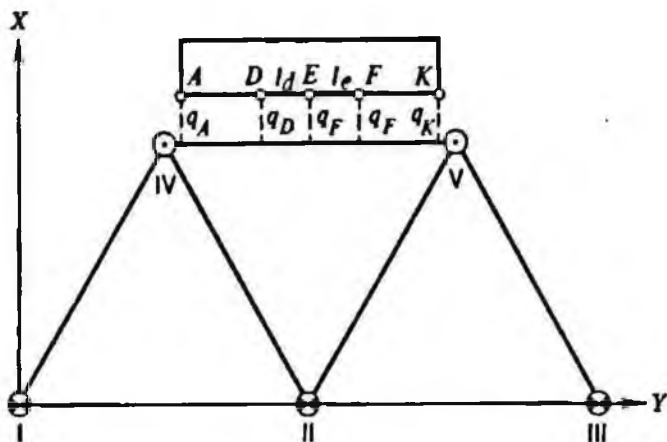


Рис. 69. Комбинированный способ определения плановых смещений

тирования ее, а два последних – линейный сдвиг одной сети относительно другой».

При комбинированном способе наблюдений за плановыми смещениями в каждом цикле измеряют отклонения деформационных марок от рабочего створа IV–V, а смещения рабочих реперов определяют тригонометрическим способом с исходных реперов I, II и III (рис. 69).

При решении прямой задачи расчета точности оценивают погрешности определения абсцисс рабочих реперов в тригонометрической сети, вычисляют дисперсию совместного влияния этих погрешностей и погрешностей установки приборов над рабочими реперами, рассчитывают элементарные погрешности определения отклонений от створа и получают стандарты определения плановых деформаций здания. Решение этой задачи обычно не вызывает особых затруднений.

Некоторые затруднения появляются при решении обратной задачи расчета, когда погрешности в абсциссах рабочих реперов входят составной частью в функцию дисперсии элементарной погрешности за центрировку и редуцию. В этом случае прямое применение принципов равных влияний или пропорционального изменения погрешностей затруднено и для решения задачи приходится использовать некоторые дополнительные приемы.

Чтобы устранить эти затруднения, дисперсию погрешности за центрировку и редуцию при определении отклонений от створа представим в виде

$$D_{cr} = \left(\frac{1}{2} - \frac{j}{2k} + \frac{j^2}{4k^2} \right) D_e = aD_e. \quad (500)$$

Если дисперсию погрешности установки инструмента и визирных целей обозначить через $D_{e_{ин}}$, то

$$D_e = D_{q_p} + D_{e_{ин}}.$$

Кроме того,

$$D_{q_p} = \frac{\mu^2}{P_x}.$$

Подставляя эти значения в (512), получим

$$D_{cr} = \frac{a\mu^2}{P_x} + aD_{e_{\text{ин}}}. \quad (501)$$

Если сумму дисперсий всех остальных элементарных погрешностей обозначить через $\sum_{i=3}^n D_{\eta_i}$, то дисперсия определения отклонений от основного створа будет равна

$$D_q = \frac{a\mu^2}{P_x} + aD_{e_{\text{ин}}} + \sum_{i=3}^n D_{\eta_i}. \quad (502)$$

При таком представлении погрешностей можно применить принцип равного влияния или пропорционального изменения элементарных погрешностей.

Часто применяют другой прием решения обратной задачи. Если предварительные значения дисперсий элементарных погрешностей вполне нас удовлетворяют по технике исполнения и экономически выгодны, и предварительное значение дисперсии определения отклонений существенно меньше допускаемой величины $\sigma'_q < \sigma_q$, то целесообразно увеличить значение дисперсии той элементарной погрешности, ограничение которой связано с наибольшими затратами труда и средств.

Обычно наибольших затрат труда и средств на повышение точности требует определение координат рабочих реперов. Для этого случая дисперсию единицы веса и тригонометрической сети можно определить по формуле

$$\mu^2 = \frac{D_q - aD_{e_{\text{ин}}} - \sum_{i=3}^n D_{\eta_i}}{a} P_x. \quad (503)$$

Методику расчетов точности наблюдений за плановыми смещениями разными способами проиллюстрируем на примерах.

Пример 43. При наблюдениях за плановыми смещениями конструкций здания деформационные марки и реперы расположены так же, как и на рис. 67 с расстояниями $L_a = 40$ м, $L_b = 50$ м, $L_k = 60$ м, $L = 100$ м, а расстояние между исходным и рабочим репером равно 50 м.

Определить веса отклонений для прямого и обратного направлений и рассчитать необходимую точность измерений, если допускаемая величина смещений конструкций равна $S_{\text{max}} = 5$ см, а на участке АК относительный прогиб конструкций под влиянием деформаций допускается не более 0,001.

Решение. Вычислим допускаемые значения стандартов определения деформаций

$$\sigma_{S_{\text{max}}} \leq \frac{0,1 \cdot 50}{3} = 1,67 \text{ мм};$$

$$\sigma_{f_a} \leq \frac{0,1 \cdot 0,001 \cdot 20 \cdot 10^3}{3} = 0,67 \text{ мм}.$$

Так как марки А и К расположены симметрично относительно середины створа, а $l_a = l_k = 10$ м, то $\sigma_{q_A} = \sigma_{q_K}; \frac{l_a}{l_a + l_k} = 0,5$.

По формулам (482) и (486) вычислим стандарты отклонений от створа и составим систему неравенств вида (350)

$$\sigma_{q_{\text{min}}} \leq \frac{1,67}{\sqrt{2}} = 1,18 \text{ мм}; \quad \sigma_{f_s} = \sqrt{\sigma_{q_A}^2 + 2\sigma_{q_B}^2} \leq 0,67 \text{ мм.}$$

Определим дисперсии предварительных значений погрешностей q .

С этой целью построение створа предусмотрим производить при помощи теодолита Theo 010 ($\tau = 20''$, $\nu = 31''$), установку прибора над точкой осуществлять оптическим центриром с $\sigma_{\text{с.ц.}} = 0,5$ мм, а расстояние от деформационной марки до створа измерять при помощи специальных кронштейнов с принудительной установкой на марках и ценой деления шкалы $\Delta = 1$ мм. При этом определение отклонений деформационных марок от рабочего створа будем осуществлять одним полным приемом, а отклонение рабочих реперов от основного створа — двумя приемами.

Если при определении q_p углы наклона визирной оси малы, то погрешность определения отклонений рабочих реперов от створа в основном обусловлена влиянием погрешности за центрировку и редуцию на основных реперах, погрешностей визирования и отсчета по шкале кронштейна, а также погрешности установки визирной цели со шкалой над рабочим репером, т. е.

$$D_q = D_{\text{с.ц.}} + D_{\text{к.}} + D_{\text{от}} + D_{\text{с.}}.$$

Для определения предварительного значения дисперсии погрешности за центрировку и редуцию основной створ длиной 200 м разобьем на $2k = 4$ отрезка по 50 м. В этом случае дисперсию погрешности для одного полуприема можно вычислять по формуле (282) со значением $j = 1$. Если установку теодолита и визирных знаков в каждом полуприеме производить заново, то дисперсия среднего отклонения из двух полных приемов будет в 4 раза меньше дисперсии одного полуприема. Поэтому

$$D'_{\text{с.ц.}} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \right) 0,5^2 = 195 \cdot 10^{-4}.$$

Стандарт погрешности визирования вычислим по формуле (494). Так как $\alpha = 1$, а

$$K = \frac{20^2 \cdot 50^2 \cdot 10^6}{206265^2 \cdot 31^2} = 245 \cdot 10^{-4},$$

то для двух приемов измерений получим

$$D'_{\text{в.}} = \frac{0,5}{2} 245 \cdot 10^{-4} \frac{(2^2 - 1^2)^2}{2^2 + 1^2} = 110 \cdot 10^{-4}.$$

Если при определении q_p отсчеты по шкале, установленной над рабочими реперами, брать непосредственно в поле зрения трубы, то дисперсию отсчета можно вычислить по формуле (247). В этом случае при двух парах отсчетов в каждом полуприеме для среднего из двух приемов будем иметь

$$D'_{\text{от}} = \frac{1}{4} \frac{0,045}{2} 1^2 = 56 \cdot 10^{-4}.$$

Установку визирного знака со шкалой над рабочими реперами осуществляют обычно при помощи оптического центрира. Если установку выполнять заново в каждом полуприеме, то для дисперсии среднего из двух приемов получим

$$D'_{\text{с.}} = \frac{0,5^2}{2} = 625 \cdot 10^{-4}.$$

Вычислим предварительное значение дисперсии определения отклонений рабочих реперов от основного створа

$$D'_{\text{р.}} = (195 + 110 + 56 + 625) \cdot 10^{-4} = 986 \cdot 10^{-4} \approx 0,097.$$

Погрешности определения отклонений деформационных марок от створа

обусловлены влиянием погрешности за центрировку и редукцию, погрешностей визирования и отсчета по шкале кронштейна, т. е.

$$D_q = D_{cr} + D_n + D_{от}.$$

Для вычисления дисперсии отклонений деформационных марок A и E от основного створа разобьем рабочий створ на $2k = 10$ частей по 10 м. В этом случае $j_A = 4$, $\alpha_A = 1$, $j_E = 5$ и $\alpha_E = 0$.

Вычислим дисперсию совместного влияния погрешностей определения q_p и установки прибора над рабочими реперами

$$D'_i = D'_{q_p} + D'_{e_{мин}} = 0,097 + 0,5^2 = 0,347$$

и дисперсию погрешности за центрировку и редукцию для одного призма (среднего из прямого и обратного направлений)

$$D'_{cr_A} = 0,5 \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{10} + \frac{16}{100} \right) 0,347 = 451 \cdot 10^{-4};$$

$$D'_{cr_E} = 0,125 \cdot 0,347 = 434 \cdot 10^{-4}.$$

Для определения дисперсии погрешностей визирования вычислим значение

$$K = \frac{20^2 \cdot 10^2 \cdot 10^6}{206265^2 \cdot 31^2} = 9,78 \cdot 10^{-4},$$

а величину $(k^2 - \alpha^2)^2 / (k^2 + \alpha^2)$ выберем из табл. 15. Тогда

$$D'_{n_A} = 0,5 \cdot 9,78 \cdot 10^{-4} \cdot 22,2 = 109 \cdot 10^{-4};$$

$$D'_{n_E} = 0,5 \cdot 9,78 \cdot 10^{-4} \cdot 25 = 122 \cdot 10^{-4}.$$

Для среднего из двух направлений с двумя парами отсчетов в полупризмах дисперсия погрешности отсчетов равна

$$D'_{от_A} = D'_{от_E} = 0,5 \frac{0,045}{2} 1^2 = 112 \cdot 10^{-4}.$$

Вычислим предварительные значения дисперсий отклонения марок A и E от основного створа

$$D'_{q_A} = (451 + 109 + 112) \cdot 10^{-4} = 672 \cdot 10^{-4};$$

$$D'_{q_E} = (434 + 122 + 112) \cdot 10^{-4} = 668 \cdot 10^{-4}.$$

Следовательно, отклонения марок A и E от основного створа определяются практически равнозначно. В этом случае

$$\sigma'_{q_{max}} = \sqrt{2 \cdot 672 \cdot 10^{-4}} = 0,35 \text{ мм};$$

$$\sigma'_{f_e} = \sqrt{\sigma'^2_{q_A} + 2\sigma'^2_{q_E}} = 0,44 \text{ мм}.$$

Так как $\sigma'_{q_{max}} < 1,18$ мм; $\sigma'_{f_e} < 0,67$ мм, то при выбранной методике измерений требования к точности полностью удовлетворяются. При необходимости одним из известных способов можно увеличить допуски на элементарные погрешности.

Определим веса отклонений марок A , E и K от рабочего створа. Так как марка E расположена в середине створа, то $p'_E = p'_K$.

Для марки A дисперсии погрешности отсчета и погрешности за центрировку и редукцию в прямом и обратном направлениях равны между собой. Подставляя значения $j = 4$, $k = 10$, получим

$$D'_{от_A} = D''_{от_A} = 112 \cdot 10^{-4} \quad \text{и} \quad D'_{cr_A} = D''_{cr_A} = 650 \cdot 10^{-4}.$$

Так как $K = 9,78 \cdot 10^{-4}$, $\alpha_A = 1$, то

$$D'_{n_A} = 792 \cdot 10^{-4}, \quad D''_{n_A} = 1183 \cdot 10^{-4}.$$

Тогда

$$D'_{q_{MA}} = 1154 \cdot 10^{-4} \quad \text{и} \quad D''_{q_{MA}} = 1945 \cdot 10^{-4}.$$

Если для определения весов значение $c = 1554 \cdot 10^{-4}$ принять за постоянным, то $p'_A = c/D'_{q_{MA}} = 1,00$ и $p''_A = c/D''_{q_{MA}} = 0,80$.

Так как марки A и K расположены симметрично по отношению к середине створа, то $p'_K = p''_A = 0,80$ и $p''_K = p'_A = 1,00$.

Пример 44. При наблюдениях за плановыми смещениями конструкций здания комбинированным способом принята схема измерений, изображенная на рис. 69. Все стороны треугольников равны 100 м, а рабочие реперы и деформационные марки расположены так же, как в примере 43. Определение координат рабочих реперов предусматривается производить путем непосредственного измерения сторон сети.

Рассчитать необходимую точность измерений, если $S_{\max} = 5$ см и $f = 0,001$ L_{AK} .

Решение. Вычислим допускаемые величины стандартов определения деформаций $\sigma_{q_{\max}} \leq 1,18$ мм и $\sigma_{f_e} \leq 0,67$ мм.

Для расчетов точности измерений воспользуемся предварительными значениями дисперсий погрешности визирования и отсчета для марок A и E из примера 43; $D'_{q_A} = 109 \cdot 10^{-4}$, $D'_{q_E} = 122 \cdot 10^{-4}$ и $D'_{\sigma_A} = D'_{\sigma_E} = D'_{\sigma_{q_A}} = D'_{\sigma_{q_E}} = 112 \cdot 10^{-4}$.

Для марок A и E вычислим значения коэффициентов a в формуле (500)

$$a_A = 0,5 \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{10} + \frac{16}{100} \right) = 0,130;$$

$$a_E = 0,5 \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{10} + \frac{25}{100} \right) = 0,125.$$

Если стороны сети трилатерации будут измеряться с предельной относительной погрешностью $1/50\,000$, а за единицу веса принять измерение стороны длиной 100 м, то $\mu' = 100 \cdot 10^3 / 50\,000 = 0,67$ мм.

Для определения обратного веса воспользуемся результатами вычислений из примера 30. Так как форма сети в обоих случаях остается неизменной (три равносторонних треугольника), то обратный вес абсцисс рабочих реперов IV и V равен $1/P_x = 0,58$.

Подставляя эти значения в правую часть равенства (504), получим $D'_{q_A} = 884 \cdot 10^{-4}$ и $D'_{q_E} = 872 \cdot 10^{-4}$.

В этом случае предварительные значения стандартов определения деформаций будут равны

$$\sigma_{q_{\max}} = \sqrt{2 \cdot 884 \cdot 10^{-4}} = 0,42 \text{ мм},$$

$$\sigma_{f_e} = \sqrt{884 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 872 \cdot 10^{-4}} = 0,51 \text{ мм}.$$

Предварительные значения стандартов определения деформаций меньше допустимых значений $\sigma_{q_{\max}} = 1,18$ и $\sigma_{f_e} = 0,67$ мм. Так как σ_{f_e} незначительно меньше σ_{f_e} (не более 20%), то изменение значений погрешности можно не производить.

§ 33. НАБЛЮДЕНИЯ ЗА СМЕЩЕНИЯМИ КОНСТРУКЦИЙ ЗДАНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИСТЕМЫ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТ

Наблюдения за осадками и горизонтальными смещениями при реконструкции промышленных предприятий, передвижках зданий и в подземных выработках крайне затруднены стесненными условиями и расположениями знаков на различных горизонтах. Это не позволяет использовать традиционные методы наблюдений.

В. Д. Новиков предложил использовать для вычисления смещений полярную систему пространственных координат с применением преобразования этой системы к начальному циклу наблюдений.

На строительной площадке выбирают ряд заведомо неподвижных точек $P_I, P_{II}, \dots, P_j, \dots, P_k$ на существующих конструкциях здания или сооружения, закрепляют точки стояния теодолита и закладывают в

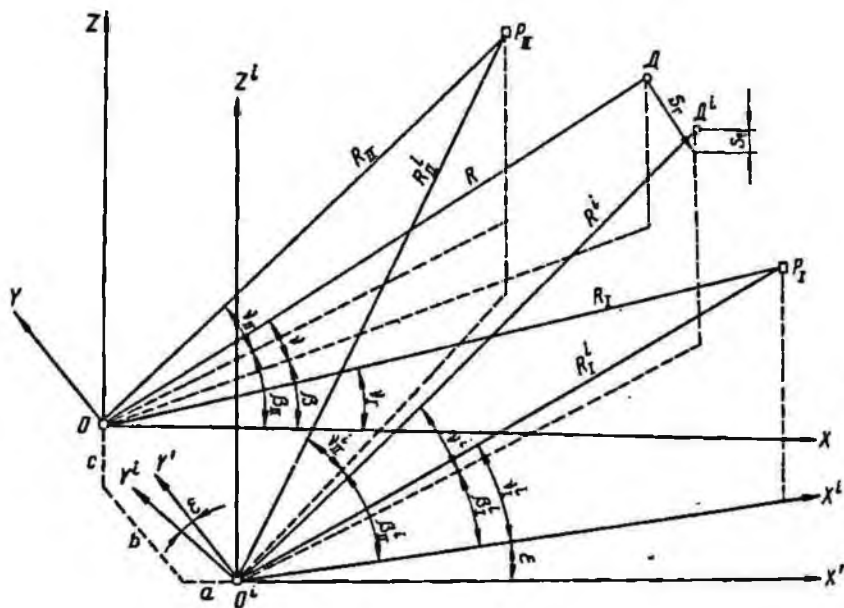


Рис. 70. Преобразование системы полярных пространственных координат

наблюдаемый объект деформационные знаки. На рис. 70 показаны неподвижные точки P_I, P_{II} , точка стояния прибора O и деформационный знак D .

В начальном цикле наблюдений теодолит устанавливают на точке O , измеряют горизонтальные β и вертикальные ν углы на неподвижные точки и деформационные знаки, а также наклонные расстояния R . В i -ом цикле наблюдений точка O , находящаяся вблизи наблюдаемого объекта, получит смещения a, b и c и займет положение O' . На эту точку устанавливают теодолит и измеряют углы β^i и ν^i на неподвижные точки и расстояния R^i .

Начало координат в нулевом и i -ом циклах совмещают с пересечением горизонтальной и вертикальной осей теодолита, а ось абсцисс направляют на точку P_I . Обработку результатов измерений осуществляют в два этапа. На первом этапе вычисляют смещения точки O' по направлениям осей координат X, Y и Z :

$$a^i = \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k d_j \cos \beta_j - \cos \varepsilon \sum_{j=1}^k d_j^i \cos \beta_j^i + \sin \varepsilon \sum_{j=1}^k d_j^i \sin \beta_j^i \right);$$

$$b^i = \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k d_j \sin \beta_j - \sin \varepsilon \sum_{j=1}^k d_j^i \cos \beta_j^i - \cos \varepsilon \sum_{j=1}^k d_j^i \sin \beta_j^i \right);$$

$$c^i = \frac{1}{k} \left(\sum_{j=1}^k h_j - \sum_{j=1}^k h_j^i \right); \quad \varepsilon = \arcsin \left(\frac{G_i F - G F_i}{G_i^2 + F_i^2} \right),$$

где ε — разворот системы осей; $d = R \cos \nu$, $h = R \sin \nu$, k — число неподвижных точек.

Величины G и F вычисляют выбирая из всех неподвижных точек сочетания по две точки:

$$G = \sum_1^n (d_{j1} \cos \beta_{j1} - d_{j2} \cos \beta_{j2}) \text{ и } F = \sum_1^n (d_{j1} \sin \beta_{j1} - d_{j2} \cos \beta_{j2}),$$

где n — число включенных в расчет пар неподвижных точек.

На втором этапе вычисляют преобразованные (приведенные к начальному циклу) значения измеренных в i -ом цикле углов

$$\beta^{i'} = \arctg \frac{d^i \sin \beta^i + b}{d^i \cos \beta^i + a};$$

$$v^{i'} = \arctg \frac{h^i \sin v^i + c}{\sqrt{(d^i \cos \beta^i + a)^2 + (d^i \sin \beta^i + b)^2}}$$

и горизонтальные S_r и вертикальные S_n смещения деформационных знаков

$$S_r^i = R \sin(\beta^{i'} + \varepsilon - \beta);$$

$$S_n^i = R \sin(v^{i'} - v),$$

где β , v и β^i , v^i — измеренные в нулевом и i -ом циклах горизонтальные и вертикальные углы на деформационные знаки.

Обработку результатов осуществляют на ЭВМ, что существенно сокращает затраты ручного труда на вычисления. Кроме того, выбирая различные сочетания исходных пунктов, можно осуществить контроль устойчивости и исключить точки, получившие значительные горизонтальные или вертикальные смещения.

Для оценки точности смещений использование традиционных методов связано с целым рядом трудностей аналитического характера. Так, в приведенных выше формулах представить определяемые величины в виде дифференцируемых функций результатов измерений крайне сложно. Поэтому более приемлемым был признан метод искаженной математической модели. Сущность этого метода заключается в следующем.

Для определяемого объекта выбирают характерную (типовую) схему расположения неподвижных (исходных) точек, стоянок прибора и деформационных знаков. Схему составляют в определенном масштабе на геоподоснове или генплане. Со схемы графически снимают координаты всех точек и вычисляют «теоретические значения» наклонных расстояний, горизонтальных и вертикальных углов. По заданным значениям средних квадратических погрешностей из таблиц случайных чисел выбирают «погрешности измерений», вводят их в теоретические значения результатов измерений и получают значения расстояний R , горизонтальных β и вертикальных v углов в начальном цикле наблюдений. Далее в положение деформационных знаков и точек стояния прибора вводят смещения S_{rj} , S_{nj} , a , b , и c , вычисляют теоретические и получают измеренные значения наклонных расстояний R^i , горизонтальных β^i и вертикальных v^i углов в i -ом цикле.

Используя значения R , β и v нулевого и значения R^i , β^i и v^i i -го цикла вычисляют по приведенным выше формулам смещения стоянки теодолита a , b , c и деформационных знаков S_{r1} , S_{r2} , ..., S_{rj} и S_{n1} , S_{n2} , ..., S_{nj} . Сравнивая вычисленные и теоретические значения этих величин, производят оценку точности и получают средние квадратические погрешности

Таблица 16

Номер варианта	Основные расчетные параметры	Погрешности определяемых величин, мм		
		m_a	m_b	m_c
1	$R = 10 \text{ м}; \beta = 70^\circ$			
2	$m_R = 0,3 \text{ мм}; m_\beta = 3''$	0,33	0,74	0,67
3	$m_R = 0,3 \text{ мм}; m_\beta = 6''$	0,39	0,67	0,96
4	$m_R = 0,6 \text{ мм}; m_\beta = 3''$	0,51	0,73	1,40
	$m_R = 1,5 \text{ мм}; m_\beta = 6''$	1,30	1,61	1,58
5	$R = 10 \text{ м}; m_R = 0,6 \text{ мм}; m_\beta = 3''$			
6	$\beta = 40^\circ$	0,42	0,71	1,53
7	$\beta = 70^\circ$	0,39	0,67	1,35
	$\beta = 90^\circ$	0,34	0,28	1,14

m_a , m_b и m_c . Из-за большого объема вычислений обработку задач такого вида обычно производят на ЭВМ.

Метод искаженной математической модели позволяет достаточно надежно исследовать влияние различных факторов на точность определения смещений. На примере типовой сети В. Д. Новиков исследовал влияние величины угла между твердыми точками, влияние точности измерения расстояний и углов. Результаты исследования приведены в табл. 16. Сравнивая значения погрешностей определяемых величин по вариантам 1 и 2, можно судить о влиянии точности измерения горизонтальных углов, сравнивая варианты 1 и 3, 2 и 4—о влиянии точности измерения расстояний, а варианты 5, 6 и 7—о влиянии величины угла β между исходными пунктами.

Список литературы

1. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей.— М.: Наука, 1969.
2. *Видуев Н. Г., Староверов В. С.* Расчет необходимой точности наблюдений за осадками инженерных сооружений.—Респ. межвед. научно-техн. сб. Инженерная геодезия, 1972, вып. 12, с. 43–49.
3. *Возведение* каркасных жилых и общественных зданий /М. Я. Егнус, Р. А. Каграманов, А. Л. Левинзон и др.—М.: Стройиздат, 1972.
4. *Высокоточные* геодезические измерения для строительства и монтажа Большого Серпуховского ускорителя /В. Д. Большаков, О. И. Горбенко, О. Д. Климов и др.—М.: Недра, 1968.
5. *Геодезические* разбивочные работы /Н. Г. Видуев, П. И. Баран, С. П. Войтенко и др.—М.: Недра, 1973.
6. *Гладкий В. И.* Обоснование точности определения осадок фундаментов зданий и сооружений.— В сб.: Методы инженерной геодезии и фотограмметрии в строительстве.—Ростов-на-Дону: 1974, вып. 2, с. 38–42.
7. *Дашченко Т. С.* Организация и производство геодезических работ при крупном строительстве.—М.: Недра, 1975.
8. *Инструкция* по топографо-геодезическим работам при инженерных изысканиях для промышленного, сельскохозяйственного, городского и поселкового строительства.—М.: Стройиздат, 1986.
9. *Кемниц Ю. В.* Математическая обработка зависимых результатов измерений.—М.: Недра, 1970.
10. *Клюшин Е. Б., Кирочкин Ю. И.* Оценки точности элементов уравниваемого полигонометрического хода в виде правильного многоугольника.— В сб.: Простроирование и строительство.—М.: ЦНИИАтоминформ., вып. 1(3), 1979, с. 3–11.
11. *Крамер Г.* Математические методы статистики.—М.: Мир, 1975.
12. *Лебедев Н. Н.* Курс инженерной геодезии.—М.: Недра, 1974.
13. *Лукьянов В. Ф.* Исследование и анализ погрешностей геодезических работ при возведении высотных зданий из сборных элементов.—Диссерт. на соиск. уч. ст. канд. техн. наук.—М.: МИИГАиК, 1969.
14. *Лукьянов В. Ф., Новиков В. Д.* Наблюдения за осадками зданий тригонометрическим нивелированием.—Геодезия и картография, 1982, № 7, с. 27–29.
15. *Лукьянов В. Ф.* Способ управления строительными машинами на круговых кривых.— В сб. ВАГО «Геодезическое обслуживание народного хозяйства в Сев. Казахстане и Поволжье».—М.: 1982, с. 57–60.
16. *Маркузе Ю. И.* Алгоритм уравнивания комбинированных сетей.—М.: Недра, 1972.
17. *Новак В. К., Клюшин Е. Б.* Оценка точности основных деформационных характеристик оснований прицезионных сооружений линейного типа. Межвуз. сб. «Исследования по геодезии, аэрофотосъемке и картографии», вып. 4 (3), Прикладная геодезия.—М., 1978, с. 3–11.
18. *ОСТ-102-93-84.* Наземные объекты нефтяной и газовой промышленности в блочно-комплектном исполнении. Система допусков на геометрические сопряжения.—М.: 1985.
19. *Прудников Г. Г.* О точности геодезических построений при возведении высотных сборных зданий.—Автореф. диссерт. на соиск. уч. ст. канд. техн. наук.—М.: МПСИ, 1971.
20. *Раинкин В. Я.* Геодезические работы при строительстве и эксплуатации сооружений башенного типа.—Автореф. на соиск. уч. ст. канд. техн. наук.—М.: МИИГАиК, 1971.
21. *Сералинас Б. Б.* Оценка точности опорных геодезических сетей.—М.: ВИНТИ, Итоги науки и техники. Геодезия и аэрофотосъемка, 1977, т. 12.
22. *Система* допусков в строительстве.—М.: Стройиздат, 1982.
23. *Система* допусков размеров в строительстве. Основные положения.—СЭВ. Информационные сообщения, 1964, № 20.
24. *СНиП 3.01.03-84.* Геодезические работы в строительстве.—М.: Стройиздат, 1985.

25. СНиП 11-Б.1-62. Основания зданий и сооружений. Нормы проектирования.- М.: Госстройиздат, 1963.
26. Справочник геодезиста /Под редакцией Большакова В. Д. и Левчука Г. П.- М.: Недра, 1975.
27. Сытник В. С. Основы расчета и анализа точности геодезических измерений в строительстве.- М.: Стройиздат, 1974.
28. Уилкс С. Математическая статистика.- М.: Наука, 1967.
29. Чеботарев А. С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей.- М.: Геодезиздат, 1958.
30. Ямбаев Х. К. Высокоточные створные измерения.- М.: Недра, 1978.
31. Kendall M. G. The advanced Theory of Statistics.- London, 1948.
32. Пелев П. Д. Оценка на точности на линейно-угловой мережи, положени за определяне деформации на инженерни съоръжения.- «Геод., картограф., землеустр.», 1977, 17, № 1.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Значения интеграла вероятностей $\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt$

t	,00	,05	t	,00	,05	t	,00	,05
0,0	0,0000	0,0399	1,5	0,8664	0,8789	3,0	0,9973	0,9977
0,1	0797	1192	1,6	8904	9011	3,1	9981	9983
0,2	1885	1974	1,7	9109	9199	3,2	9986	9988
0,3	2358	2737	1,8	9281	9357	3,3	9990	9992
0,4	3108	3473	1,9	9426	9488	3,4	9993	9994
0,5	3829	4177	2,0	9545	9596	3,5	9995	9996
0,6	4515	4843	2,1	9643	9684	3,6	9997	9997
0,7	5161	5468	2,2	9722	9756	3,7	9998	9998
0,8	5763	6047	2,3	9786	9812	3,8	0,9999	0,9999
0,9	6319	6579	2,4	9836	9857	3,9		0,99990
1,0	6827	7063	2,5	9876	9892	4,0		0,99994
1,1	7287	7499	2,6	9907	9920	4,1		0,99996
1,2	7699	7887	2,7	9931	9940	4,2		0,99997
1,3	8064	8230	2,8	9949	9956	4,3		0,99998
1,4	0,8385	0,8529	2,9	0,9963	0,9968	4,4		0,99999

Приложение 2

Значения функции $P = 1 - e^{-k^2/2}$

k	,00	,05	k	,00	,05	k	,00	,05
0,0	0,0000	0,0025	1,5	0,6754	0,6992	3,0	0,9889	0,9904
0,1	0050	0112	1,6	7220	7436	3,1	9918	9930
0,2	0198	0308	1,7	7642	7838	3,2	9940	9949
0,3	0440	0594	1,8	8021	8193	3,3	9957	9963
0,4	0769	0963	1,9	8355	8506	3,4	9969	9974
0,5	1175	1404	2,0	8647	8777	3,5	9978	9982
0,6	1647	1904	2,1	8898	9009	3,6	9985	9987
0,7	2173	2451	2,2	9111	9202	3,7	9989	9991
0,8	2739	3032	2,3	9290	9366	3,8	9993	9994
0,9	3330	3632	2,4	9439	9503	3,9	9995	9996
1,0	3935	4238	2,5	9561	9613	4,0	9997	9997
1,1	4539	4838	2,6	9660	9701	4,1	9998	9998
1,2	5132	5422	2,7	9739	9772	4,2	9999	9999
1,3	5704	5980	2,8	9802	9828	4,3	9999	9999
1,4	6247	6505	2,9	9850	9871	4,4	0,9999	1,0000

Оглавление

Предисловие	3
Глава I. Общие сведения	4
§ 1. Расчеты точности инженерно-геодезических работ	4
§ 2. Некоторые сведения из теории множеств	7
§ 3. Общие сведения из теории вероятностей	9
§ 4. Общие сведения из теории математической статистики	19
§ 5. Некоторые вопросы регрессионного анализа	22
§ 6. Сведения из теории размерных цепей	26
Глава II. Расчет погрешностей измерений	30
§ 7. Элементарные погрешности	30
§ 8. Оценка элементарных погрешностей	41
§ 9. Расчет элементарных погрешностей	49
§ 10. Погрешности измерений	56
§ 11. Классификация погрешностей	61
§ 12. Расчет погрешностей измерений и построений	66
Глава III. Расчеты погрешностей при построении в натуре отдельных элементов разбивочных работ	73
§ 13. Построение проектного отрезка	73
§ 14. Построение проектного угла	80
§ 15. Построение проектной отметки	94
§ 16. Построение створа	99
§ 17. Построение отвесных линий и вертикальных плоскостей при проецировании точек и осей	107
Глава IV. Расчеты точности отдельных видов работ	117
§ 18. Боковое нивелирование	117
§ 19. Разбивка главных (основных) осей зданий	120
§ 20. Разбивка круговых кривых	126
§ 21. Контрольные геодезические измерения при монтаже сборных конструкций и технологического оборудования	139
Глава V. Расчеты точности инженерно-геодезических сетей	148
§ 22. Высотные сети на строительных объектах	148
§ 23. Плановые сети на строительных объектах	152
§ 24. Многоуровневые сети	169
Глава VI. Расчеты точности инженерно-геодезических работ	173
§ 25. Общие сведения о монтаже конструкций сборных зданий	173
§ 26. Температурные влияния при выполнении работ на конструкциях сборных зданий	176
§ 27. Детальная разбивка осей	185
§ 28. Плановые сети на исходном и монтажных горизонтах многоэтажных зданий	199
	251

§ 29. Просцирование центра сооружений башенного типа большой высоты	206
§ 30. Монтаж технологических трубопроводов компрессорных и насосных станций	217
§ 31. Наблюдения за осадками	224
§ 32. Наблюдения за плановыми смещениями	231
§ 33. Наблюдения за смещениями конструкций зданий с использованием преобразования системы пространственных полярных координат	244
Список литературы	248
Приложение 1. Значения интеграла вероятностей $\Phi(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-t^2/2} dt$	250
Приложение 2. Значения функции $P = 1 - e^{-t^2/2}$	250

Л 84 Лукьянов В. Ф.
Расчеты точности инженерно-геодезических работ. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Недра, 1990. — 252 с.: ил.
ISBN 5-247-01478-2

Рассмотрены причины происхождения погрешностей. Разработана методика расчетов точности, в которой по заданным допускам конечного результата определяются условия измерений и технология их выполнения. Рассмотрены расчеты точности построений отдельных элементов разбивки и основных видов инженерно-геодезических работ. Во второе издание (1-е изд. — 1981) включены новые разработки в области расчетов точности измерений, а также сведения по детальной разбивке переходных и других кривых, по определению смещений точек в разных уровнях сооружения. Для специалистов, связанных с выполнением и использованием инженерно-геодезических работ.

Л 1802020000-240
043(01)-90 8-90

ББК 26.1

ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ (ПРАКТИЧЕСКОЕ) ИЗДАНИЕ

Лукьянов Виктор Федорович

РАСЧЕТЫ ТОЧНОСТИ ИНЖЕНЕРНО-ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ РАБОТ

Заведующий редакцией *Л. Г. Иванова*
Редактор издательства *О. А. Малыгина*
Переплет художника *И. А. Слюсарева*
Художественный редактор *Г. Н. Юрчевская*
Технические редакторы *Е. С. Сычева, Л. А. Мурашова*
Корректор *Л. В. Зайцева*

ИБ № 8177

Сдано в набор 06.02.90. Подписано в печать 15.06.90. Т-05 200 Формат 60 x 90¹/₁₆. Бумага офсетная № 1. Гарнитура Таймс. Печать офсетная Усл.печ.л. 16,0. Усл.кр.-отт. 16,0. Уч.-изд.л. 18,50 Тираж 3560 экз. Заказ 1000/2235-8. Цена 1р. 30к.

Ордена «Знак Почета» издательство «Недра», 125047 Москва, пл. Белорусского вокзала, 3.
Набрано в Можайском полиграфкомбинате В/О «Совэжспорткнига» Государственного комитета СССР по печати, г. Можайск, ул. Мира, 93.

Отпечатано в Московской типографии № 6 Государственного комитета СССР по печати 109 088, Москва, Южнопортовая, 24

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «НЕДРА»
ПРЕДЛАГАЕТ СВОИМ ЧИТАТЕЛЯМ
КНИГУ**

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА
ГОРОДСКИХ ПОДЗЕМНЫХ СЕТЕЙ,
которая будет выпущена
в 1991 году.**

Автор — кандидат технических наук, заслуженный работник геодезии и картографии РСФСР Гришберг Г. М. — известный специалист в области теории и практики математической обработки геодезических измерений разработал различные программные комплексы на ЭВМ, по которым уравниваются некоторые блоки АИЭ СССР, а также обширные государственные, городские и всевозможные специальные геодезические построения.

В книге на основании производственного опыта отражены особенности математической обработки городских геодезических сетей. Изложены современная технология и методика выполнения уравнивательных вычислений и составление каталогов в городах и поселках городского типа.

В целях устранения деформаций городских геодезических сетей приводятся рекомендации по предотвращению линейных и угловых недопустимых невязок ходов и полигонов, искажений взаимоположений пунктов полигонометрии при их проектировании, предложений и математической обработке в различных системах координат.

Книга рекомендуется для инженерно-технических работников, выполняющих проектные, полевые и вычислительные работы. Она может быть полезна и для студентов геодезических вузов.

Вас может заинтересовать книга

**ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД В РАСЧЕТАХ
УСТОЙЧИВОСТИ ОТКОСОВ ГОРНЫХ
ПОРОД,**

выпускаемая в 1991 году в издательстве «Недра»

Ее автор – Резников М. А. – кандидат технических наук, доцент кафедры прикладной математики и АСУ Красноярского института цветных металлов им. М. И. Калинина.

В книге изложены теоретические основы метода вариации расчетных поверхностей при решении объемной и плоской задач оценки устойчивости откосов горных пород и нахождения рациональной формы бортов глубоких карьеров. Приведены численные методы решения этих задач, а также примеры использования этих методов в конкретных условиях.

Применение метода вариации расчетных поверхностей позволяет отказаться от ряда необоснованных ограничений и получить наиболее общие решения. В частности, допускается наличие любого числа произвольным образом ориентированных генетических поверхностей ослабления, блочная структура массива с любым изменением прочностных свойств пород, а также действия внешних нагрузок; отпадает необходимость в осреднении поверхности откоса до некоторой расчетной.

Представленные в книге материалы – теоретическое обоснование разработанных автором программ для ЭВМ:

программа «Объемный откос – 1» предназначена для решения объемной задачи оценки устойчивости однородных изотропных откосов горных пород;

программа «Объемный откос – 2» позволяет решить объемную задачу об устойчивости однородных откосов по генетическим поверхностям ослабления;

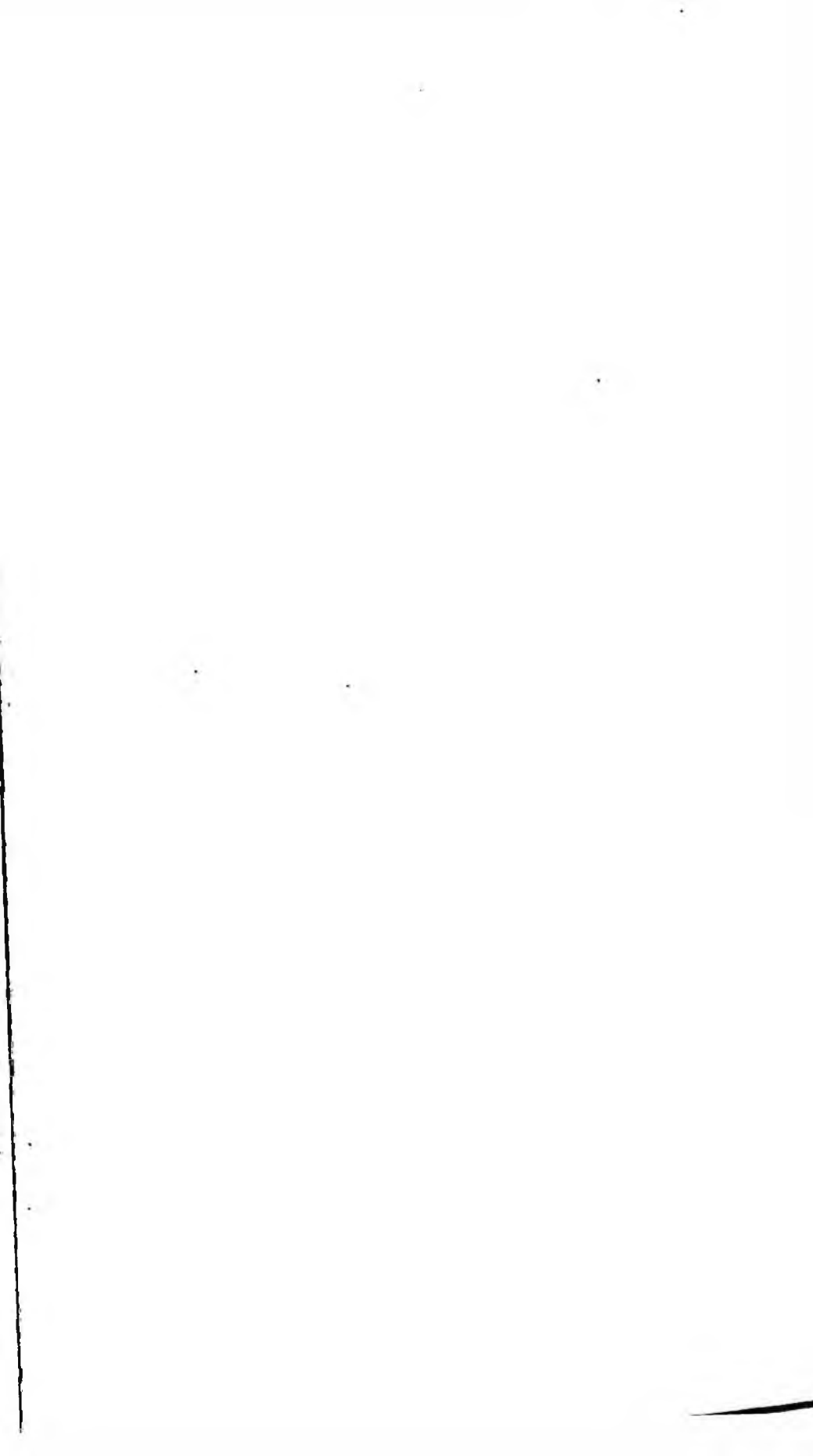
программа «Объемный откос – 3» дает возможность решить объемную задачу об устойчивости неоднородных неослабленных откосов горных пород;

программа «Откос – 1» предназначена для решения плоской задачи об устойчивости однородных изотропных откосов горных пород;

программа «Откос – 2» отличается от программы «Откос – 1» тем, что свойства пород могут изменяться произвольным образом.

Программы написаны на языке Фортран. Заинтересованные организации и лица могут приобрести их у автора. Стоимость каждой программы 1–3 тыс. р. Автор обучает пользователей и в течение года оказывает методическую помощь в освоении этих программ.

Адрес: 660113, г. Красноярск, ул. Томилина, дом 16, кв. 33.



1722

1/50

1800