

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова**

ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра геофизических методов исследования земной коры

В.Л. Пантелеев, А.А. Булычев

**ИЗМЕРЕНИЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА ПОДВИЖНОМ ОСНОВНИИ
(конспект лекций)**

**Учебное пособие
для студентов геофизической специализации по курсу
“Теория измерения силы тяжести (дополнительные главы)”**

**Издательство Московского Университета
2003**

УДК 550.831
ББК 26.21
П 16

Рекомендовано

Ученым советом геологического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

Пантелеев В.Л., Булычев А.А.

П 16 Измерение силы тяжести на подвижном основании. Учебное пособие по курсу
“Теория измерения силы тяжести (дополнительные главы)” – М. 2003. 80 с.

ISBN 5-211-06104-7

Пособие представляет собой конспект лекций по теории и практике гравиметрических измерений в движении, в первую очередь – измерений на море. Даны анализ гравиметрической аппаратуры как динамической системы, устройство некоторых типов морских гравиметров, методика гравиметрической съемки на подвижном основании и методика обработки результатов гравиметрических измерений.

Работа является учебным пособием для студентов геофизических специальностей вузов.

УДК 550.831
ББК 26.21

Рецензент – доктор геолого-минералогических наук, профессор *А.Г. Гайнанов*

ISBN 5-211-06104-7

© В.Л. Пантелеев, А.А. Булычев, 2003
© Геологический факультет МГУ
им. М.В. Ломоносова, 2003

Оглавление

Лекция 1.	<i>Краткий исторический обзор.....</i>	4
Лекция 2.	<i>Основные понятия и определения основ теории измерения силы тяжести на подвижном основании.....</i>	8
Лекция 3.	<i>Стабилизация основания.....</i>	13
Лекция 4.	<i>Гиromаятниковый стабилизатор.....</i>	18
Лекция 5.	<i>Силовые стабилизаторы (силовые гиروطформы).....</i>	21
Лекция 6.	<i>Эффект Этвеша.....</i>	27
Лекция 7.	<i>Применение методов фильтрации к измерению силы тяжести.....</i>	30
Лекция 8.	<i>Элементы теории фильтрации.....</i>	35
Лекция 9.	<i>Фильтрация сигналов. Ошибки.....</i>	39
Лекция 10.	<i>Восстановление сигнала. Цифровые фильтры.....</i>	46
Лекция 11.	<i>Гравиметры. Струнный гравиметр.....</i>	53
Лекция 12.	<i>Морские гравиметры рычажного типа.....</i>	57
Лекция 13.	<i>Гравиметр ГМН-К.....</i>	63
Лекция 14.	<i>Методика морской гравиметрической съемки и обработки наблюдений.....</i>	70
	<i>Список литературы.....</i>	79

Лекция 1. Краткий исторический обзор.

1. История вопроса измерения силы тяжести на подвижном основании тесно связана с историей измерения силы тяжести на море. Первые измерения силы тяжести во время морских путешествий были сделаны испанскими капитанами Маласпина и Кустаманте еще в 1789 – 1794. Ими были проведены маятниковые наблюдения на восьми пунктах. В 1893 – 1896 годах на дрейфующем «Фраме» Нансеном также были выполнены маятниковые наблюдения. Полученные результаты были очень важны для вывода о параметрах сжатия Земли. Но сами наблюдения еще нельзя назвать морскими, т.к. наблюдения проводились на практически неподвижной опоре.

2. Первые опыты по измерению силы тяжести на подвижном основании относятся к самому началу XX столетия. Первый морской гравиметр был создан немецким геофизиком Геккером по принципу ртутного барометра. Геккер испытал его в нескольких кругосветных путешествиях в 1901 – 1909 годах. Точность измерений составила 30 – 60 мГал.

3. В 1912 году американец Бриггс создал статический гравиметр, в котором вес ртути компенсировался упругой силой давления газа. Для повышения отсчетной точности использовалась капиллярная система. Этот же принцип в дальнейшем был использован Хаальком, которым в 1928 году в Потсдамском геодезическом институте был создан по тем временам первый высокоточный газовый гравиметр. В 1935 году проводились и морские испытания гравиметра на пассажирском пароходе. Точность измерения была оценена в 3 – 5 мГал. Наряду с гравиметром Хаалька были предложены газовые гравиметры Бриггса, Норгарда, но все они не нашли широкого распространения. Их основной недостаток – большая температурная зависимость приборов.

4. Начало морской гравиметрии связывают с именем голландского ученого Ф.А. Венинг-Мейнесом. В 1922 – 1928 годах он изобрел способ наблюдений за колебаниями маятников, при котором раскачивание опоры не влияют на регистрограмму колебаний так называемого фиктивного маятника. Это позволило усовершенствовать маятниковый прибор и проводить измерения на борту подводной лодки. Венинг-Мейнисом было построено несколько приборов, которые он использовал в нескольких экспедициях. Он показал возможность измерения силы тяжести с точностью около 5 мГал в открытом море и заложил основы методики морской гравиметрической съемки. Выполненные им наблюдения в Индийском океане имели большое значение для геофизиков, поскольку подтвердили существование изостатического состояния земной коры.

5. Работы Венинг-Мейниса стимулировали развитие морской гравиметрии во многих странах. До второй мировой войны измерениями силы тяжести приборами Венинг-Мейниса занимались в США, Японии, Италии. В Советском Союзе профессор кафедры гравиметрии МГУ Л.В. Сорокин на базе сухопутного четырехмаятникового прибора сконструировал морской гравиметр, с которым он совершил ряд экспедиций на подводной лодке. В частности, в 1930 году им были выполнены измерения силы тяжести на Черном море, в результате которых было обнаружено резкое изменение силы тяжести около южного берега Крыма. Здесь сила тяжести меняется на 200 мГал на расстоянии 20 – 30 км от берега.

4. В 1930 – 1937 годах Л.В. Сорокин совершил экспедиции на Черное, Баренцево, Японское и Охотское моря. Ученики и соратники Л.В. Сорокина были зачинателями и надводных гравиметрических наблюдений. В 1930 году Л.В. Сорокин сделал попытку провести маятниковые наблюдения на буксируемой барже на Каспийском море. На

основании этого опыта был сделан вывод о нецелесообразности применения четырехмаятниковых приборов для надводных измерений. Позже им был сконструирован трехмаятниковый прибор, в котором все маятники качаются в одной плоскости. В 1935 – 1936 годах В.В. Федынским и Н.В. Сажиной были проведены испытания этого прибора в Каспийском море на танкерах.

5. Вторая мировая война приостановила развитие морской гравиметрии. Лишь после войны подводные лодки вновь стали предоставляться в распоряжение ученых для гравиметрических наблюдений. В СССР, сразу же после войны, разработке аппаратуры и методике маятниковой съемки уделялось много внимания. Под руководством профессора МГУ В.В. Федынского были организованы экспедиции, в которых применялись четырех и трехмаятниковые приборы Л.В. Сорокина, трехмаятниковый прибор фирмы «Аскания» с так называемыми минимальными маятниками, морской маятниковый прибор, изготовленный на базе сухопутного маятникового прибора Кембриджского общества. Л.В. Сорокиным была сконструирована аппаратура для регистрации ускорений и наклонов в кардановом подвесе. По предложению В.В. Федынского в СКБ МГУ была начата разработка шестимаятникового морского прибора, который затем был изготовлен в ИФЗ АН СССР под руководством С.Е. Александрова. Результаты этих опытных исследований были в дальнейшем учтены при разработке маятниковой аппаратуры в ЦНИИГАиК, куда в пятидесятые годы переместился центр отечественных разработок маятниковой аппаратуры.

6. В ЦНИИГАиК под руководством М.Е. Хейфица была создана серия различных маятниковых приборов с фотографической регистрацией качаний маятников, которая завершилась выпуском небольшой серии трехмаятникового прибора ММП (морской маятниковый прибор). Дальнейшее развитие маятниковых приборов проявилось в автоматизированном маятниковом приборе (АМП), также разработанном в ЦНИИГАиК. Прибор снабжен устройством для фотоэлектрической регистрации колебаний маятников и автоматической системой обработки наблюдений в цифровом виде непосредственно в процессе наблюдений. Отметим, что маятниковые приборы применяются и в настоящее время для контроля смещения нуля-пункта морских гравиметров в длительных морских экспедициях.

7. В начале пятидесятых годов в СССР, США и ФРГ практически одновременно возникла идея о создании морского гравиметра статического типа с сильно демпфированным чувствительным элементом. В СССР эта идея принадлежит К.Е. Веселову. Первый прибор такого типа был создан К.Е. Веселовым и Л.П. Смирновым в 1954 году. Этот гравиметр, получивший шифр СЗ (сильно затухающий), был снабжен визуальной системой отсчета. Для того чтобы измерить значение силы тяжести в какой-либо точке на море, оператор наблюдал колебания светового штриха в окуляр отсчетного устройства и отсчитывал его крайние положения по шкале. Все отсчеты в течение 15 – 20 минут записывались в журнале наблюдений и осреднялись. Уже первые испытания гравиметра в 1955 году на подводной лодке показали, что точность измерения таким прибором сравнима с маятниковыми наблюдениями, а сам способ измерения – более прост. Этот эксперимент имел решающее значение: современные отечественные гравиметры статического типа имеют жидкостное демпфирование.

8. В 1956 году были начаты работы по созданию морского гравиметра в Геофизическом институте АН СССР (нынешнее название – Институт физики Земли РАН). Уже в 1957 году небольшая партия гравиметров была испытана в Черном море на борту теплохода «Россия». Чувствительная система гравиметра ИФЗ, получившая шифр ГАЛ (гравиметр аэрогравиметрической лаборатории), сделана из кварца с жидкостным

затуханием. Эта система выгодно отличалась от системы СЗ динамической симметрией рычага – подвижной части чувствительного элемента. Кроме того, упругая система гравиметра ГАЛ, разработанная под руководством Е.И. Попова, имеет два рычага, ориентированные в противоположенные стороны, благодаря чему удалось исключить некоторые, наиболее существенные систематические погрешности, обусловленные влиянием наклонов и ускорений опоры. В отличие от гравиметра СЗ гравиметр ГАЛ имел фотографическую систему регистрации положений обоих рычагов чувствительного элемента (ЧЭ). Наиболее сложной и трудоемкой операцией при измерении силы тяжести как гравиметром СЗ, так и гравиметром ГАЛ, была определение усредненного отсчета. Поэтому в первое время большое внимание уделялось разработке способов регистрации и обработки выходных данных.

9. В ФРГ морской гравиметр был создан на базе геодезического гравиметра А. Графа фирмы «Аскания». Этот гравиметр получил название Gss-2 и впервые был испытан на Штарнбергском озере в 1955 году. От сухопутных гравиметров он отличался тем, что в конструкцию чувствительного элемента введены дополнительные связи, которые сделали его более жестким по отношению к “лишним” степеням свободы. Кроме того, алюминиевый рычаг чувствительной системы был помещен между двумя полюсами очень сильного постоянного магнита, что обеспечило сверхкритическое аperiodическое демпфирование с постоянной времени около 200 с. Система регистрации – фотоэлектрическая: на дифференциальный фотоэлемент свет падает так, что при горизонтальном положении рычага фототок равен нулю. При отклонении рычага возникает фототок, который затем сглаживается с помощью RC-фильтра, что практически полностью освобождает от необходимости усреднять отсчеты прибора.

10. В США прототипом морского гравиметра был сухопутный гравиметр Лакоста–Ромберга. Морской вариант этого прибора отличался от сухопутного тем, что в нем было усилено воздушное демпфирование.

11. В Советском Союзе работы по созданию морских гравиметров в шестидесятые годы были в основном сосредоточены в ИФЗ АН СССР, ВНИИГеофизике и ГАИШ (МГУ). Основной задачей было найти способ регистрации, который бы привел к возможности непрерывного автоматического измерения вдоль заданного профиля. Так, в ИФЗ были изготовлены и испытаны экспериментальные образцы с различными конструкциями отсчетных устройств. Во ВНИИГеофизике помимо совершенствования гравиметра СЗ проводились исследования по созданию морского пружинного астазированного гравиметра. В ГАИШ по предложению В.Л. Пантелеева совместно с ВНИИГеофизикой был разработан и испытан гравиметр с визуальной системой отсчета, в котором чисто оптическими средствами была реализована идея двукратной фильтрации. Проведенные испытания прибора на Черном море показали, что вертикальная качка создает настолько малые возмущения, что отсчеты можно делать уверенно с помощью окулярного микроскопа (визуально).

12. Крупным шагом вперед в создании гравиметров в конце пятидесятых – начале шестидесятых годов стала автоматизация “нулевого метода” отсчета. Вращение микровинта для приведения рычага чувствительного элемента в исходное положение осуществлялось автоматически. Такие устройства, у которых исполнительный механизм приводится в действие сигналом рассогласования, называются системами с обратной связью. Первым гравиметром с обратной связью был гравиметр Gss-2. Современный гравиметр Лакоста–Ромберга, который применяется не только на море, но и на самолетах и вертолетах, также относится к типу гравиметров с обратной связью.

13. В Советском Союзе гравиметр с автоматизированной обратной связью, автоматизированный наборный гравиметр (АНГ), был построен совместными усилиями ГАИШ и ВНИИНеофизики в 1962 году. Достаточно трудной технической проблемой оказалось обеспечение устойчивости управления затухающей упругой системой. Ее решили, воздействуя на рычаг чувствительной системы через вязкое трение демпфирующей среды, связанной с исполнительным механизмом. Первый продолжительный гравиметрический профиль с этим прибором был получен на НИС “Витязь” в 1966 году. Совместная работа ГАИШ (В.Л. Пантелеев) и ВНИИГеофизики (В.А. Багрянц) над созданием гравиметра с обратной связью позволила решить проблему автоматизации морского пружинного астазированного гравиметра, который получил название ГМН-К (гравиметр морской наборный – кварцевый). Этот гравиметр нашел широкое применение в предприятиях Мингео СССР, Министерства нефти и газа СССР и ГУГК.

14. Другим направлением в развитии гравиметрии на подвижном основании являются гравиметры, в основу которых положен струнный датчик. Чувствительный элемент таких гравиметров основан на том, что изменение веса пробного тела изменяет натяжение струны, на которой висит этот груз. Изменение веса груза приводит к изменению значения собственной частоты колебаний струны. Идея создания прибора на таком принципе принадлежит советским ученым Л.И. Мандельштаму и Г.Н. Папелески. Независимо от них ее высказал и французский ученый Ж. Бертран в 1938 году. В то же время первый струнный гравиметр был построен в Англии в 1949 году Р. Джильбертом и испытан в ряде экспедиций на подводной лодке. В Советском Союзе струнный гравиметр был сконструирован и изготовлен во ВНИИГеофизике под руководством А.М. Лозинской. Была также разработана модификация этого гравиметра для измерения силы тяжести на самолете и вертолете. Струнные гравиметры были также созданы в США, Японии, Франции. Основная отличительная черта струнных датчиков – малая инерционность и нелинейность. В то же время, цифровая форма данных делает удобным их применение в комплексе с компьютерами (ЭВМ).

15. Помимо разработки самих датчиков чувствительных элементов гравиметров одновременно велась разработка по созданию устройств, удерживающих прибор в горизонтальном положении, т.е. положения, когда ось чувствительности гравиметра совпадает с вертикалью. Для исключения влияния наклонов Венинг-Мейнес применил карданов подвес. Однако приборы, стабилизированные малоинерционным кардановым подвесом, могут дать “большую” систематическую погрешность. Величина этой ошибки, которая носит название поправки Броуна, настолько велика, что требует высокой точности регистрации горизонтальных ускорений. Сама по себе задача измерения ускорений в кардановом подвесе – очень трудная техническая проблема. Именно по этой причине первые опыты по измерению силы тяжести на море проводились на подводных лодках, где уровень ускорений низок.

16. Переход на надводные суда потребовал разработки новых систем стабилизации корпуса гравиметра, в частности, создание гиростабилизированных платформ для гравиметров. Первым достаточно портативным гиростабилизатором была аэрогеодезическая платформа Н-55. Она с успехом применялась в 1959-60 годах для стабилизации маятникового прибора разработки ЦНИИГАиК и гравиметра ГАЛ. Важным скачком в развитии гравиметрического приборостроения явилось изобретение в ИФЗ АН СССР гиromаятникового стабилизатора, который нашел широкое применение. В частности, в комплект гравиметра ГМН-К входит такой гиromаятниковый стабилизатор.

17. Несколько слов о путях дальнейшего развития гравиметров для измерения силы тяжести на подвижном основании.

- Один из путей связан с повышением точности определения координат положения гравиметра (судна, самолета или вертолета). В настоящее время существует система GPS, которая позволяет достаточно с высокой степенью точности обеспечивать точность координат положения гравиметра (до 150 м плановой привязки в открытом океане и с точностью до нескольких метров при работе GPS в дифференциальном режиме).
- Другие пути связаны с усовершенствованием параметров чувствительных элементов гравиметров: повышение стабильности сползания нуля-пункта гравиметров, создание новых датчиков гравиметров.
- Повышение метрологического обеспечения гравиметрических измерений, что включает в себя создание специальных стендов, позволяющих производить калибровку гравиметров и акселерометров, определить динамические характеристики приборов в широком диапазоне частот, исследовать влияние всех возмущающих факторов.
- Применение современных вычислительных средств и разработка новых, более совершенных методов обработки гравиметрической информации, что включает в себя теоретическую разработку измерения силы тяжести на подвижном основании. Одно из таких направлений – развитие алгоритмов фильтрации и алгоритмов восстановления “сигнала”.
- Очень важной задачей является задача создания системы стабилизации основания и регистрации положения датчика системы гравиметра.

Лекция 2. Основные понятия и определения основ теории измерения силы тяжести на подвижном основании.

1. Уравнение, на котором построена теория измерения силы тяжести на подвижном основании, является уравнение, основанное на втором законе Ньютона:

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \mathbf{g}' + \mathbf{F},$$

где \mathbf{r} – перемещение массы m в инерциальной системе координат, \mathbf{F} –упругая, электромагнитная или электростатическая сила, удерживающая пробное тело на основании, $m \mathbf{g}'$ – сила притяжения пробной массы m к Земле (гравитационная сила). Это же уравнение может быть переписано следующим образом:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{g}' + \frac{\mathbf{F}}{m}.$$

В этом уравнении отношение $\frac{\mathbf{F}}{m}$ и величина \mathbf{g}' физически являются силами, действующими на единичную массу. Такие силы называются удельными силами. Таким образом, $\frac{\mathbf{F}}{m}$ - удельная негравитационная сила, а \mathbf{g}' – удельная гравитационная сила (сила тяготения). Но, т.к. эти силы, имеют размерность ускорения, то величину \mathbf{g}' обычно называют гравитационным ускорением, $\frac{\mathbf{F}}{m}$ обозначают как кажущиеся ускорение

w_k , а $\frac{d^2 r}{dt^2}$ - абсолютным ускорением w_a . Введя такие обозначения, предыдущее уравнение можно записать как

$$w_a = g' + w_k.$$

Это уравнение является основным уравнением теории инерциальной навигации, которая в настоящее время имеет много общего с теорией измерения силы тяжести на подвижном основании.

2. В неинерциальной системе отсчета, участвующей во вращении Земли, удельная сила тяжести g будет складываться из двух сил: гравитационной силы g' и силы инерции центробежного ускорения $u \times (u \times r)$, где u – угловая скорость вращения Земли:

$$g = g' - u \times (u \times r),$$

поэтому $g' = g + u \times (u \times r)$.

3. На основании уравнения инерциальной навигации $w_a = g' + w_k$, можно получить следующее уравнение:

$$w_a = g + w_k + u \times (u \times r).$$

4. Какие величины, входящие в это уравнение, могли бы быть измерены? Центробежное ускорение может быть только вычислено, задавшись угловой скоростью вращения Земли u и радиус-вектором r точечного пробного тела относительно центра Земли. Величину абсолютного w_a ускорения можно было бы измерить только в том случае, если бы наша система координат, связанная с пробным телом (назовём её подвижной системой координат), совпадала бы с абсолютной системой координат (будем называть её неподвижной системой). Таким образом, находясь в подвижной системе отсчета непосредственно можно измерить только кажущееся ускорение w_k , например, как сжатие или растяжение пружины, удерживающей пробное тело.

5. Будем считать, что Земля вращается равномерно, и перейдем к системе координат, связанной с вращающейся Землей. Тогда

$$w_a = w + u \times (u \times r) + 2(u \times v),$$

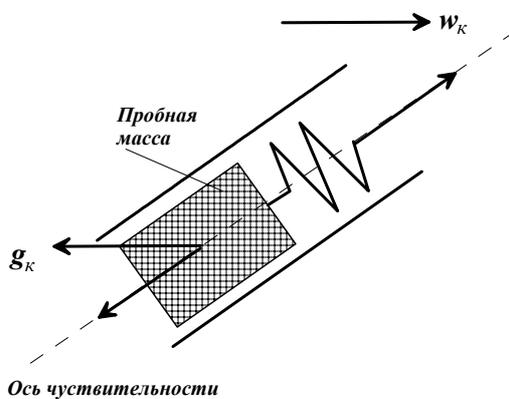
где w – переносное ускорение (ускорение подвижной системы координат с пробным телом относительно неподвижной), $u \times (u \times r)$ – реализует центробежное ускорение, $2(u \times v)$ – ускорение Кориолиса, где v – относительная скорость подвижной системы координат относительно неподвижной (скорость системы координат с пробным телом относительно системы координат, связанной с Землей). В то же время нами было получено соотношение $w_a = g + w_k + u \times (u \times r)$. Из этих двух уравнений можно получить:

$$g = w - w_k + 2(u \times v).$$

6. Если $w = 0$ и $v = 0$, т.е. система находится в покое и участвует только во вращении Земли, то $g = -w_k$. Уместно ввести понятие кажущейся силы тяжести $g_k = -w_k$, и тогда

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_k + \mathbf{w} + 2(\mathbf{u} \times \mathbf{v}).$$

Это уравнение является основным уравнением инерциальной гравиметрии. Единственным параметром, которой возможно было бы измерить, находясь в подвижной системе координат, является кажущаяся сила тяжести \mathbf{g}_k . Остальные параметры, входящие в это уравнение необходимо определять или вычислять. Так, находясь на борту судна, скорость этого судна \mathbf{v} измерить непосредственно невозможно. Это возможно сделать с помощью лага, но в этом случае определяется скорость только относительно воды. Другой возможный путь – по наблюдениям, т.е. вычислительным путем. Переносное ускорение \mathbf{w} так же не может быть измерено, поскольку акселерометры в своей конструкции отличаются от гравиметра только ориентировкой осей чувствительности. Они измеряют не переносное ускорение, а кажущееся ускорение, которое содержит влияние и силы инерции и силы тяжести. Так же, как и гравиметр, акселерометры основаны на принципе инерции пробной массы.



7. Все величины, входящие в полученное уравнение – векторные, и, как уже отмечалось, находясь на подвижном основании (в подвижной системе координат) измерить можно только величину вектора \mathbf{g}_k . Этот вектор можно представить в виде отдельных компонент. Для этого возьмем две системы. Одна будет связана с географической системой Земли, и будет обозначаться как (x, y, z) , другая, (ξ, η, ζ) , – с носителем, т.е. с подвижной системой координат. В частном случае, это может быть карданов подвес или платформа, на которых закреплен гравиметр, судно или самолет. Гравиметр устроен таким образом, что измерение проводится только

вдоль одного направления – оси чувствительности прибора. Будем предполагать, что есть три оси чувствительности. Пусть в системе координат (ξ, η, ζ) , связанной с носителем, $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ – орты вдоль осей чувствительности. Тогда $w_\xi = \mathbf{w}_k \cdot \vec{p}$, $w_\eta = \mathbf{w}_k \cdot \vec{q}$, $w_\zeta = \mathbf{w}_k \cdot \vec{r}$, где \mathbf{w}_k – кажущееся ускорение. В основной системе координат кажущееся ускорение имеет компоненты $(w_x, w_y, w_z + g)$, т.е.

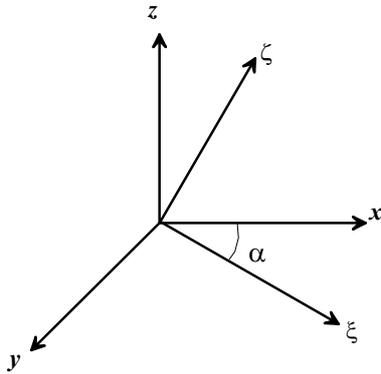
$$\mathbf{w}_k = \begin{pmatrix} w_\xi \\ w_\eta \\ w_\zeta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_k = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z + g \end{pmatrix}.$$

8. Переход из одной системы координат в другую описывается следующими соотношениями:

$$\begin{pmatrix} w_\xi \\ w_\eta \\ w_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \xi x & \cos \xi y & \cos \xi z \\ \cos \eta x & \cos \eta y & \cos \eta z \\ \cos \zeta x & \cos \zeta y & \cos \zeta z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z + g \end{pmatrix} = \mathbf{\Gamma} \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z + g \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z + g \end{pmatrix} = \mathbf{\Gamma}^* \begin{pmatrix} w_\xi \\ w_\eta \\ w_\zeta \end{pmatrix}.$$

Здесь компоненты w_ξ и w_η можно измерить акселерометрами, w_ζ – гравиметром или акселерометром. Кажалось бы, что, зная компоненты (w_ξ, w_η, w_ζ) и матрицу обратного

перехода Γ^* , можно было бы определить компоненты $(w_x, w_y, w_z + g)$, но, к сожалению, это невозможно, поскольку невозможно точно определить углы между осями подвижной системы координат и основной.



9. Обозначим через α угол между осями $O\xi$ и Ox , и пусть этот угол мал. В этом случае

$$\begin{aligned}\cos \xi x &= \cos \alpha \cong 1 - \frac{\alpha^2}{2}; \\ \cos \xi y &= 0; \\ \cos \xi z &= \cos(90 + \alpha) \cong -\alpha.\end{aligned}$$

Аналогично для угла $\beta \approx 0$ между осями $O\eta$ и Oy можно записать

$$\begin{aligned}\cos \eta x &= 0; \\ \cos \eta y &= \cos \beta \cong 1 - \frac{\beta^2}{2}; \\ \cos \eta z &= -\beta.\end{aligned}$$

В этом случае матрицу направляющих косинусов Γ будет иметь вид:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\alpha^2}{2} & 0 & -\alpha \\ 0 & 1 - \frac{\beta^2}{2} & -\beta \\ \alpha & \beta & 1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \end{pmatrix},$$

и, соответственно, компоненты вектора ускорения в подвижной системе координат определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}w_\xi &= \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)w_x + 0 \cdot w_y - \alpha(w_z + g), \\ w_\eta &= 0 \cdot w_x + \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right)w_y - \beta(w_z + g), \\ w_\zeta &= \alpha w_x + \beta w_y + \left(1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}\right)(w_z + g).\end{aligned}$$

10. С учетом малости углов α и β в полученных выражениях можно пренебречь членами $\alpha^2 w_x$, $\beta^2 w_y$, $(\alpha^2 + \beta^2)w_z$, но в то же время нельзя пренебречь членами, в которые множителем входит g , поскольку эта величина большая, порядка 10^6 мГал. С учетом этих допущений последние соотношения будут записаны следующим образом:

$$\begin{aligned}w_\xi &= w_x - \alpha g, \\ w_\eta &= w_y - \beta g,\end{aligned}$$

$$w_{\zeta} = g + w_z + w_x \alpha + w_y \beta - g \frac{\alpha^2}{2} - g \frac{\beta^2}{2}.$$

11. Соответственно, можно выразить компоненты вектора ускорения в основной (инерциальной) системе координат через компоненты вектора ускорения в подвижной системе координат:

$$w_x = w_{\xi} + \alpha g,$$

$$w_y = w_{\eta} + \beta g,$$

$$g + w_z = w_{\zeta} - w_{\xi} \alpha - w_{\eta} \beta - \frac{g}{2} (\alpha^2 + \beta^2).$$

12. Таким образом, нами получены следующие результаты. Первый – ось чувствительности гравиметра должна быть вертикальна. Это означает, что если прибор расположен на платформе, то эта платформа должна находиться в горизонтальном положении с тем, что бы углы α и β были близки к нулю. Это связано с тем, что, находясь на борту судна, невозможно непосредственно измерить углы наклона платформы относительно неподвижной системы координат. Вторым важным результатом состоит в том, что при малых углах наклона платформы можно определить сумму $(g + w_z)$. Необходимо заметить, что w_z – вертикальное ускорение, связанное с движением носителя и может достигать сотен тысяч мГал. Для того, что бы исключить влияние этих ускорений, можно было бы указать разные пути. Один из них – знать траекторию носителя. Но этот путь для морских условий не приемлем. Вторым путем – многократные измерения. Так как w_z во времени будет иметь случайную реализацию, то накопление результатов может привести к подавлению влияния этих ускорений. Но в большинстве случаев и этот подход невозможно использовать. Следующий путь – фильтрация сигнала $(g + w_z)$ с целью выделения полезной составляющей. Этот путь является наиболее перспективным и требует разработки алгоритмов и методов выделения полезного сигнала.

13. Зададимся вопросом, какие углы наклона носителя можно считать пренебрежимо малыми? Если бы горизонтальное ускорение w_{ξ} и угол наклона α были независимыми, т.е. имели бы разные периоды качки, то среднее значение их произведения за большой интервал времени было бы равно нулю, т.е. $\overline{w_{\xi} \alpha} = 0$. Однако, эти величины могут быть коррелированы. Пусть $\alpha = \alpha_0 \cos \omega t$ и $w_{\xi} = w_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Тогда

$$\overline{w_{\xi} \alpha} = \frac{1}{2} \alpha_0 w_0 \cos \varphi.$$

Из полученного результата следует, что ошибка за счет горизонтального ускорения и наклона платформы достигает максимальной величины при значении φ , равном 0 или π . Предположим, что $w_0 = 50000$ мГал, и потребуем, что бы было выполнено условие $\overline{w_{\xi} \alpha} < 1$ мГал. Тогда $\alpha < \frac{1}{25000} \approx 8''$. Стоит отметить, что с помощью уровней можно

фиксировать наклон с точностью до минуты. В то же время, рассмотренная ситуация была наиболее неблагоприятной, так как мы предположили синфазность наклонов и ускорения, поэтому требования к наклонам могут быть несколько ниже.

Лекция 3. Стабилизация основания.

1. В предыдущей лекции было введено понятие кажущегося ускорения силы тяжести, которое равно кажущемуся ускорению, взятому с противоположенным знаком, $\mathbf{g}_k = -\mathbf{w}_k$. Вектор ускорения можно разложить по координатным осям как в подвижной, неинерциальной, системе координат, связанной с прибором,

$$\mathbf{g}_k = -(w_\xi, w_\eta, w_\zeta) = -\mathbf{w}_k,$$

так и в неподвижной, инерциальной, системе координат

$$\mathbf{g}_k = -(w_x, w_y, w_z + g).$$

Стоит еще раз отметить, что измерения происходят в первой, в подвижной, системе координат. Кроме того, мы установили, что

$$w_\xi = w_k - \alpha g,$$

$$w_\eta = w_y - \beta g,$$

$$w_\zeta = g + w_z + \alpha w_x + \beta w_y - g \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}.$$

2. Так как ось чувствительности гравиметра совпадает с осью $O\xi$, то для нас интерес представляет третье уравнение. В нем w_z - возмущающее ускорение первого порядка, связанное с ускорениями, возникающими под действием качки корабля, а также кориолисова ускорения и центростремительного ускорения. Величины αw_x , βw_y , $g \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$ - возмущающие ускорения второго порядка. Слагаемое $g \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$, учитывает тот факт, что проекция вектора \mathbf{g} уменьшается при наклоне. Все вместе эти слагаемые образуют возмущающее ускорение, связанное с наклоном системы и являются помехой, от которой необходимо избавиться. Один из способов - применение методов фильтрации для выделения полезного сигнала. Но методами фильтрации невозможно избавиться от постоянных компонент возмущающего ускорения, от возмущающего ускорения $g \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$ и других ускорений 2-го порядка, так как они содержат низкие частоты, лежащие в полосе частот полезного сигнала (изменения силы тяжести) и по частотному признаку не различимы от гравитационных аномалий. Их неучёт может привести к появлению «ложных» аномалий.

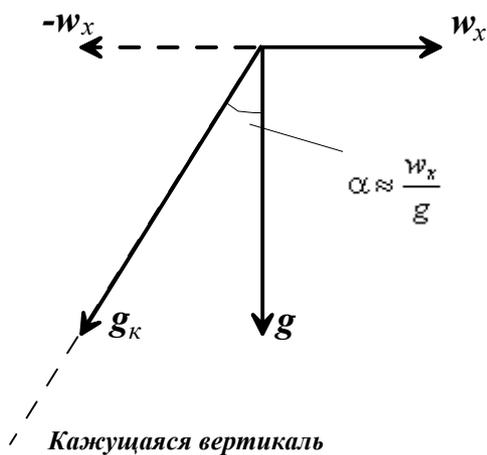
3. Так как методами фильтрации не удастся избавиться от возмущающих ускорений, связанных с наклоном гравиметра, то необходимо попытаться стабилизировать основание гравиметра, т.е. удерживать его в горизонтальном положении. К сожалению, технически удерживать платформу точно в горизонтальном положении практически невозможно. Но возникает вопрос о величине допустимых углов наклона, при которых эти ускорения будут иметь значение меньше заданного, т.е. будут подавлены. Для этого необходимо проанализировать реакцию гравиметра на возмущающие ускорения.

4. В общем виде, преобразование сигнала w_ζ , проходящего через гравиметр, можно представить следующим образом:

$$w_\zeta \rightarrow \text{Гравиметр} \rightarrow \Gamma \left\{ g + w_z \right\} + \Gamma \left\{ \alpha w_x - \frac{g \alpha^2}{2} \right\} + \Gamma \left\{ \beta w_y - \frac{g \beta^2}{2} \right\},$$

где $\Gamma\{*\}$ – оператор, который переводит входной сигнал, поступающий на гравиметр, в выходной. Обычно оператор $\Gamma\{*\}$ является линейным и описывается интегралом типа свертки. В этом выражении второй и третий члены описывают реакцию системы на возмущающие ускорения 2-го порядка, и которые приводят к ошибкам измерения. Как уже отмечалось в предыдущей лекции, если α и w_x не коррелированы, то оператор $\Gamma\{*\}$ может подавить слагаемое αw_x , но компонента $g \frac{\alpha^2}{2}$ останется. Точность 0,1 мГал потребует, что бы угол наклона α не превышал одной минуты дуги для некоррелированных α и w_x , и около одной секунды – для коррелированных. Прямыми методами измерить такие углы наклона гравиметра на подвижном основании не возможно, поэтому необходимо пойти другим путем – выбрать подвес или платформу, реагирующие на горизонтальные ускорения.

5. Рассмотрим случай, когда α возникает под действием возмущающего ускорения w_x , т.е. система будет совершать вынужденные колебания, и угол наклона всей системы будет реакцией на входной сигнал $\frac{w_x}{g}$:



$$\frac{w_x}{g} \rightarrow \mathbf{W}\left\{\frac{w_x}{g}\right\} = \alpha,$$

т.е. $\mathbf{W}\{*\}$ – оператор, переводящий горизонтальное ускорение w_x в угол α . Аналогичную запись можно сделать и для угла β : $\beta = \mathbf{W}\left\{\frac{w_y}{g}\right\}$. Основная идея состоит в том, что, измерив компоненты горизонтального ускорения w_x и w_y , можно определить углы наклона системы α и β , определив для этого оператор $\mathbf{W}\{*\}$ опытным путем.

6. Используем частотный подход для анализа оператора $\mathbf{W}\{*\}$. Пусть на вход системы подается синусоида определенной частоты. Тогда на выходе системы так же будет наблюдаться синусоида, но имеющая отличную амплитуду и фазовый сдвиг по сравнению с входной. Причем амплитуда и сдвиг будут зависеть от частоты входной синусоиды. Этот процесс удобно описать с помощью функций комплексных переменных, и в этом случае функция $\mathbf{W}(i\omega)$ будет называться амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) преобразования:

$$\mathbf{W}(i\omega) = \lambda(\omega)e^{i\varphi(\omega)} = \lambda(\omega)\cos(\varphi(\omega)) + i\lambda(\omega)\sin(\varphi(\omega)) = \text{Re}\mathbf{W} + i\text{Im}\mathbf{W},$$

где $\lambda(\omega) = |\mathbf{W}(i\omega)|$, $\varphi(\omega) = \arg(\mathbf{W}(i\omega))$.

7. Пусть горизонтальное ускорение w_x представляет собой некоторое периодическое ускорение с частотой ω , которое может быть смоделировано на специальном стенде:

$$w_x = a_x \cos(\omega t).$$

В этом случае отклик системы, т.е. угол наклона системы α , будет определяться следующим соотношением:

$$\alpha = \frac{a_x}{g} \lambda(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)).$$

Пусть оператор Γ является сглаживающим оператором, тогда можно записать:

$$\Gamma \left\{ w_x \alpha - g \frac{\alpha^2}{2} \right\} = \overline{w_x \alpha} - \frac{\overline{\alpha^2}}{2} g = \delta g_{w_x, \alpha},$$

где черта сверху означает операцию сглаживания, $\delta g_{w_x, \alpha}$ - это ошибка, возникающая вследствие перемещения платформы. Для первого слагаемого в этой формуле можно записать

$$\overline{w_x \alpha} = \frac{a_x^2}{g} \lambda(\omega) \overline{\cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi(\omega))} = \frac{a_x^2}{2g} \lambda(\omega) \cos(\varphi(\omega)).$$

Это слагаемое будет равно нулю при заданной частоте ω в том случае, когда $\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2}$.

Для второго слагаемого получим:

$$\frac{\overline{\alpha^2}}{2} g = \frac{1}{2} \frac{a_x^2}{g} \lambda^2(\omega) \overline{\cos^2(\omega t + \varphi(\omega))} = \frac{a_x^2}{4g} \lambda^2(\omega).$$

Этот член всегда присутствует и создает систематическую ошибку в наблюдениях. Объединим оба слагаемых:

$$\delta g_{w_x, \alpha} = \frac{a_x^2}{4g} (2\lambda(\omega) \cos(\varphi(\omega)) - \lambda^2(\omega)) = \frac{a_x^2}{4g} (2 \operatorname{Re} \mathbf{W}(i\omega) - |\mathbf{W}(i\omega)|^2).$$

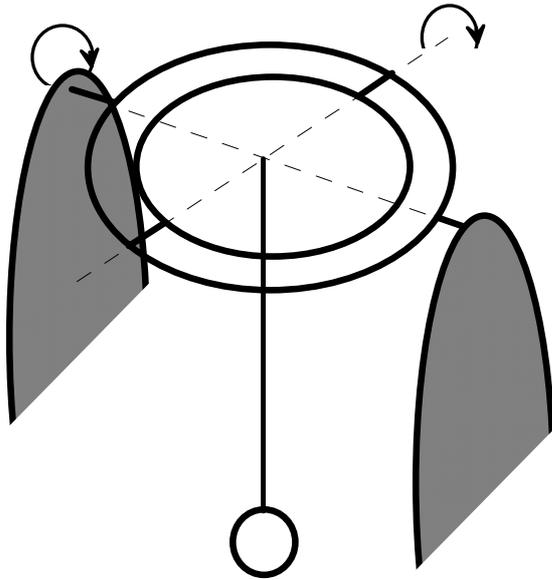
8. Представим ситуацию, когда платформа, на которой установлен гравиметр, безынерционна, т.е. мгновенно ориентируется по кажущейся вертикали. В этом случае мы не наблюдаем сдвига фаз между углом наклона платформы α и возмущающим ускорением w_x . Это означает, что частотная характеристика $\mathbf{W}(i\omega)$ действительна и равна

1, т.е. $\mathbf{W}(i\omega) = 1$. Тогда $\delta g_{w_x, \alpha} = \frac{a_x^2}{4g}$. Эта ошибка присутствует в частности в показаниях

гравиметра, расположенного в кардановом подвесе, и ее необходимо вычислять и учитывать. Эту поправку за наклон системы называют поправкой Броуна (Brown), и она может достигать очень больших значений. Так, на пример, если этот подвес находится на надводном судне, то амплитуды горизонтальных возмущающих ускорений могут достигать больших величин. Пусть $a_x = 50000$ мГал, тогда $\delta g_{w_x, \alpha} = \frac{25 \cdot 10^8}{4 \cdot 10^6} = 625$ мГал. Не

учет этой величины может свести на нет все усилия по определению значения силы тяжести. Тем не менее, безынерционный карданов подвес применяется при наблюдениях на подводных лодках, где возмущающие ускорения можно считать малыми.

9. Рассмотрим систему пассивного карданова подвеса. Этот подвес имеет две степени свободы, а центр масс лежит ниже точки пересечения осей. В этом случае вся система



ведет себя как физический маятник. Уравнение движения физического маятника имеет вид:

$$J\ddot{\alpha} = -Mgl \sin \alpha + Mw_x l \cos \alpha - h\dot{\alpha}.$$

Здесь J – момент инерции, α – угловое ускорение, $Mgl \sin \alpha$ – момент сил, создаваемый силой тяжести (знак “-“ указывает на то, что этот момент сил приводит к уменьшению угла α), $Mw_x l \cos \alpha$ – момент сил, создаваемый горизонтальным ускорением, $h\dot{\alpha}$ – учитывает силу вязкого трения в оси маятника. Будем полагать, что угол α мал, и, соответственно, $\sin \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1$, и введем обозначения: $\frac{Mgl}{J} = n_0^2$, $\frac{h}{J} = 2\varepsilon$. n_0 – собственная частота колебаний маятника (карданова подвеса). С учетом введенных

обозначений уравнение колебания маятника может быть переписано следующим образом:

$$\ddot{\alpha} + 2\varepsilon\dot{\alpha} + n_0^2\alpha = n_0^2 \frac{w_x}{g}.$$

10. Нами записано уравнение колебательного движения физического маятника. Необходимо исследовать поведения угла наклона α этой системы в зависимости от характера поведения горизонтального возмущающего уравнения w_x . Для этих целей воспользуемся операторным подходом к определению частотной характеристики системы, описываемой этим уравнением. Определим оператор дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$, тогда можно записать, что $D\alpha = \dot{\alpha}$, $D^2\alpha = \ddot{\alpha}$, и

$$(D^2 + 2\varepsilon D + n_0^2)\{\alpha\} = n_0^2 \frac{w_x}{g}.$$

Из последнего уравнения следует

$$\alpha = \frac{n_0^2}{D^2 + 2\varepsilon D + n_0^2} \left\{ \frac{w_x}{g} \right\} = \mathbf{W}(D) \left\{ \frac{w_x}{g} \right\}.$$

Если положить, что угол α описывается комплексной экспонентой $\alpha = e^{i\omega t}$, то оператор дифференцирования будет $D = i\omega$, и $\mathbf{W}(D)|_{D=i\omega} = \mathbf{W}(i\omega)$.

11. Пусть система не имеет трения. Это означает, что $\varepsilon = 0$, тогда амплитудно-частотная характеристика такой системы $\mathbf{W}(i\omega) = \frac{n_0^2}{n_0^2 - \omega^2}$ и является действительной функцией. Это означает, что ошибка за наклон и горизонтальные возмущающие ускорения такой системы могут быть описаны следующими соотношениями:

$$\delta g_{w,\alpha} = \frac{a_x^2}{4g} (2\lambda \cos \varphi - \lambda^2) = \frac{a_x^2}{4g} (2 \operatorname{Re} \mathbf{W}(i\omega) - |\mathbf{W}(i\omega)|^2) = \frac{a_x^2}{4g} \left(\frac{2n_0^2}{n_0^2 - \omega^2} - \frac{n_0^4}{(n_0^2 - \omega^2)^2} \right).$$

После упрощений получим $\delta g_{w,\alpha} = \frac{a_x^2}{4g} \left(1 - \frac{\omega^4}{(n_0^2 - \omega^2)^2} \right)$. Эта формула носит название формулы Вининг-Мейнеса, а отношение $\frac{a_x^2}{4g}$ - поправка Броуна.

12. Рассмотрим случай, когда период качки корабля T_ω в несколько раз превышает собственный период карданова подвеса T_0 . В этом случае частотная характеристика преобразования будет определяться отношением периода карданова подвеса к периоду качки корабля $\frac{\omega^4}{n_0^4} \approx \frac{T_0^4}{T_\omega^4} = \left(\frac{T_0}{T_\omega} \right)^4$. Предположим, что $T_0 = 1,5$ с, а $T_\omega = 5$ с, тогда это отношение будет равно 0,008. Это приводит к тому, что в формуле для ошибки силы тяжести существенное влияние оказывает только первый член, т.е. поправка Броуна. Это позволяет, в частности, использовать карданов подвес в условиях, где горизонтальные ускорения малы и имеют достаточно большой период, например, на подводных лодках. Однако поправку Броуна все равно необходимо учитывать, для чего необходимо знать величину горизонтальных ускорений.

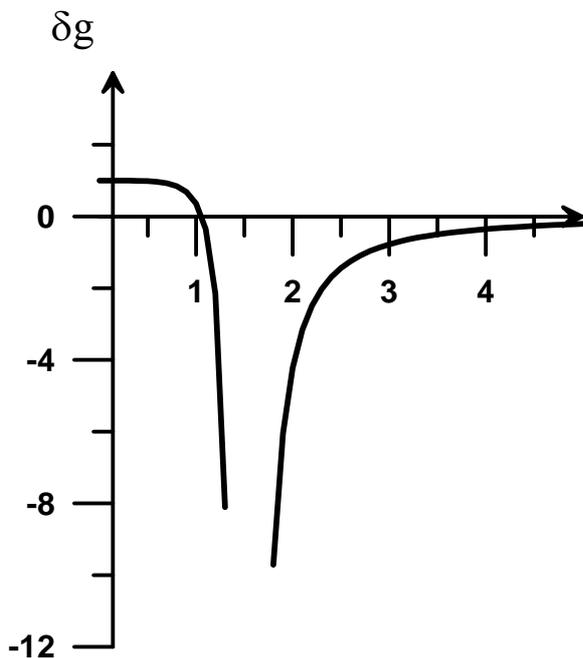


График изменения ошибки δg в зависимости от частоты.

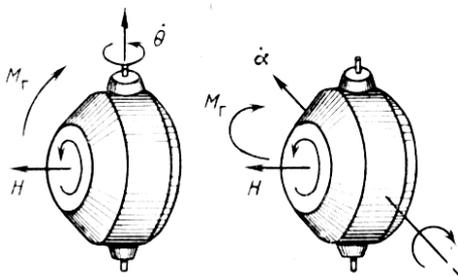
13. Характер поведения ошибки $\delta g_{w,\alpha}$ в зависимости от частоты представлен на рисунке. Из него видно, что до резонансной частоты существует рабочая область, значения ошибки в которой практически постоянны и равны значению поправки Броуна. При приближении к резонансной частоте величина ошибки начинает возрастать и при этом значение ошибки становится со знаком “-“. При значениях частот больших резонансной частоты, погрешность по своей величине вновь уменьшается, т.е. рабочий участок переходит за резонансную частоту. Практически это означает, что необходимо уменьшить значение резонансной частоты n_0 или, что то же самое, увеличить период качания карданова подвеса T_0 . Так как n_0 определяется из соотношения $n_0^2 = \frac{Mgl}{J}$,

то уменьшение значения резонансной частоты возможно или за счет увеличения момента инерции подвеса относительно оси вращения J или за счет уменьшения расстояния центра масс до оси вращения l . Технически уменьшить величину l очень сложно. Другой путь – увеличение момента инерции J . Это возможно сделать, на пример, с помощью применения гироскопов.

Лекция 4. Гиromаятниковый стабилизатор.

1. В предыдущей лекции отмечалось, что для уменьшения значения собственной частоты карданова подвеса возможно с одной стороны уменьшением длины l между центром массы и осью вращения или за счет увеличения момента инерции системы J , поскольку $n_0^2 = \frac{Mgl}{J}$. Как мы уже говорили, кажущееся увеличение момента инерции возможно за счет использования гироскопов.

2. Гиromотор – это асинхронный двигатель с тяжелым, быстро вращающимся ротором. Гиromотор обладает свойством сохранять неизменным в пространстве направление оси вращения ротора. При попытке повернуть гиromотор, он отвечает реакцией сопротивления, которая определяет момент силы, стабилизирующей основание.



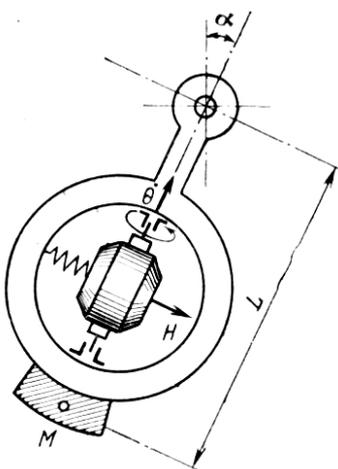
Главной характеристикой гироскопа является его кинетический момент H , направленный вдоль оси вращения ротора и равный произведению момента инерции ротора относительно оси вращения C_p на угловую скорость вращения ротора ω_p , то есть $H = C_p \omega_p$. При попытке повернуть гиromотор вокруг вертикальной оси, перпендикулярной к вектору кинетического момента с угловой скоростью $\dot{\theta}$, момент гироскопического сопротивления M_2 будет стремиться совместить вектор H с вектором угловой скорости $\dot{\theta}$. При этом момент гироскопического сопротивления равен

произведению кинетического момента на угловую скорость вынужденной прецессии и образует с этими векторами правую тройку:

$$M_2 = H \times \dot{\theta}.$$

Точно так же будет вести себя гиromотор при попытке повернуть его вокруг горизонтальной оси, ортогональной вектору H , со скоростью $\dot{\alpha}$. В этом случае момент гироскопического сопротивления будет определяться векторным произведением

$$M_2 = H \times \dot{\alpha}.$$



3. Получим уравнения, которым будет удовлетворять система карданова подвеса с гиromоторами. Вначале выпишем уравнение для гиromотора, когда его ротор не вращается:

$$A_2 \ddot{\theta} + h_2 \dot{\theta} + \tau_2 \theta = 0.$$

Здесь A_2 – момент инерции гиromотора относительно оси прецессии, τ_2 – крутильная жесткость струны, на которой висит гиromотор, h_2 – коэффициент, характеризующий вязкое трение в оси прецессии. Это уравнение представляет собой уравнение гармонического колебания. Уравнение, описывающее движение карданова подвеса без включенных гиromоторов, нами было рассмотрено в предыдущей лекции

$$J\ddot{\alpha} = -Mgl \sin \alpha + Mw_x l \cos \alpha - h\dot{\alpha},$$

или, с учетом малости угла α ,

$$J\ddot{\alpha} + h\dot{\alpha} + Mgl\alpha = Mw_x l.$$

4. При включенном гиromоторе поворот карданова подвеса вокруг горизонтальной оси со скоростью $\dot{\alpha}$ вызовет момент гироскопического сопротивления $H\dot{\alpha}$, который проявит себя в том, что будет изменять угол θ .

$$A_z \ddot{\theta} + h_z \dot{\theta} + \tau_z \theta = H\dot{\alpha}.$$

Если рассматривать так называемую приближенную прецессионную теорию, то в этом уравнении можно пренебречь первыми двумя членами, и уравнение приобретет следующий вид:

$$\theta = \frac{H}{\tau_z} \dot{\alpha}.$$

Точно так же возникает момент гироскопического сопротивления при повороте гиromотора вокруг оси прецессии со скоростью $\dot{\theta}$, при этом этот момент стремится уменьшить угол α

$$J\ddot{\alpha} + h\dot{\alpha} + Mgl\alpha = Mw_x l - H\dot{\theta}.$$

Подставив в это уравнение соотношение для угла θ , получим

$$\left(J + \frac{H^2}{\tau_z} \right) \ddot{\alpha} + h\dot{\alpha} + Mgl\alpha = Mw_x l.$$

С учетом введенных ранее обозначений $\frac{Mgl}{J} = n_0^2$, $\frac{h}{J} = 2\varepsilon$, где n_0 – собственная частота колебаний маятника (карданова подвеса), последнее уравнение можно представить в следующем виде:

$$\left(1 + \frac{H^2}{J\tau_z} \right) \ddot{\alpha} + 2\varepsilon\dot{\alpha} + n_0^2\alpha = n_0^2 \frac{w_x}{g}.$$

5. Полученное уравнение – уравнение колебаний физического маятника. Введем обозначения $\kappa^2 = \frac{H^2}{J\tau_z}$, и соответственно $n^2 = \frac{n_0^2}{1 + \kappa^2}$. С учетом обозначений и, пренебрегая членом, учитывающим трение в оси карданова подвеса, уравнение колебаний примет вид:

$$\ddot{\alpha} + n^2\alpha = n^2 \frac{w_x}{g}.$$

Величина κ^2 , как правило, очень большая (несколько тысяч), и во столько же раз эффективный момент инерции больше истинного $J_{эф} = J(1 + \kappa^2)$, и, как следствие, это приводит к уменьшению собственной частоты колебаний подвеса $n \approx \frac{n_0}{\kappa}$, и, соответственно, к увеличению собственного периода колебаний подвеса в κ раз ($T \approx \kappa T_0$). Так, на пример, при собственном периоде колебаний карданова подвеса равным 1,5 с ($T_0 = 1,5$ с), после включения гиromоторов период колебаний может стать 90 с ($T = 90$ с). Это означает, что величина κ примерно равна 60.

6. Амплитудно-частотная характеристика карданова подвеса без учета трения в оси качания и без включенных гиromоторов была ранее получена:

$$\mathbf{W}(i\omega) = \frac{n_0^2}{n_0^2 - \omega^2}.$$

АЧХ того же подвеса, но с включенными гиromоторами, и с учетом того, что собственная частота колебаний n во много раз меньше частоты качки судна, будет иметь вид:

$$\mathbf{W}(i\omega) = \frac{n^2}{n^2 - \omega^2} \approx -\frac{n^2}{\omega^2}.$$

Появившийся знак “-“ означает, что гиromаятниковый стабилизатор имеет сдвиг по фазе на величину, равную π ($\varphi = \pi$). Предположив, что горизонтальные возмущающие ускорения описываются соотношением $w_x = a_x \cos(\omega t)$, для функции угла наклона платформы α получим :

$$\alpha = -\frac{n^2}{\omega^2} \frac{a_x}{g} \cos \omega t.$$

Систематическая часть возмущающего ускорения в этом случае будет равна

$$\begin{aligned} \overline{w_x \alpha} &= \frac{a_x^2}{g} \lambda(\omega) \overline{\cos(\omega t) \cos(\omega t + \varphi(\omega))} = \frac{a_x^2}{2g} \lambda(\omega) \cos(\varphi(\omega)) = \\ &= \frac{a_x^2}{2g} \frac{n^2}{\omega^2} \cos(-\pi) = -\frac{a_x^2}{2g} \frac{n^2}{\omega^2} = -\frac{a_x^2}{2g} \frac{T_\omega^2}{T^2}, \end{aligned}$$

где T_ω - период горизонтального ускорения, а T – период подвеса с включённым гиromотором. Суммарное систематическое влияние наклона и горизонтальной составляющей возмущающего ускорения будет определено следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta g_{w_x, \alpha} &= \frac{a_x^2}{4g} (2\lambda(\omega) \cos(\varphi(\omega)) - \lambda^2(\omega)) = \frac{a_x^2}{4g} (2 \operatorname{Re} \mathbf{W}(i\omega) - |\mathbf{W}(i\omega)|^2) = \\ &= \frac{a_x^2}{4g} \left(-2 \frac{n^2}{\omega^2} - \frac{n^4}{\omega^4} \right) \approx -\frac{a_x^2}{2g} \frac{n^2}{\omega^2} = -\frac{a_x^2}{2g} \frac{T_\omega^2}{T^2}. \end{aligned}$$

7. Рассмотрим пример. Пусть $T_\omega = 5$ с, $T = 90$ с, $a_x = 50000$, тогда $\delta g \approx 8$ мГал, но и эта величина достаточна большая, которую необходимо учитывать.

8. Таким образом, основным достоинством гиросtabilизированной платформы (подвеса) является значительное уменьшение систематических ошибок, связанных с наклоном платформы и горизонтальными ускорениями. В то же время эти платформы обладают и недостатками. Первый – платформа не подавляет полностью ошибки, зависящие от горизонтальных ускорений. Второй недостаток связан с резонансной частотой подвеса n . Необходимо, чтобы частота качки судна была много больше собственной частоты колебаний гиросподвеса. Обычно эти условия выполняются, но возможны ситуации, когда возникают ускорения с частотами близкими к n . Это возможно, на пример, при использовании авторулевого и возникающего при этом рыскания.

9. Для того, что бы полностью исключить влияние горизонтальных ускорений Кутеповым Владимиром Семеновичом (профессором Тульского политехнического института) было предложено использовать “вязкое” трение в оси прецессии гиросмотора. Если это трение достаточно большое, то можно пренебречь первым членом в уравнении

$$A_2 \ddot{\theta} + h_2 \dot{\theta} + \tau_2 \theta = H \dot{\alpha},$$

и тогда

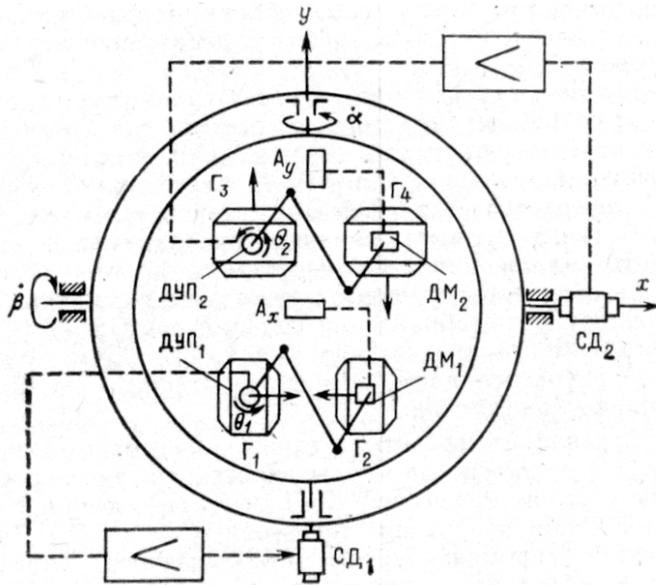
$$h_2 \dot{\theta} + \tau_2 \theta = H \dot{\alpha}.$$

Передаточная функция $\mathbf{W}(D)$ такой системы, а соответственно и амплитудно-частотная характеристика $\mathbf{W}(i\omega)$, будут иметь более сложный вид, но в этом случае появляется возможность так подобрать параметры системы, что ошибка $\delta g_{x,\alpha}$ будет равна нулю при определенной частоте, но, к сожалению, ошибки могут иметь место при других значениях частот.

Лекция 5. Силовые стабилизаторы (силовые гиросплатформы).

1. В силовых гиросплатформах (СПП) горизонтальное положение удерживается не за счет маятникового эффекта, а за счет специальных реверсных двигателей. В этих платформах, как и в гиросплатформах, используются гиросмоторы, а центр тяжести всей подвижной системы совмещен с точкой пересечения осей карданова подвеса. Однако СПП помимо гиросмоторов используют и акселерометры. Гироскопы в этих платформах используются также как чувствительный элемент для короткопериодных наклонов платформы, а акселерометры – для длиннопериодных. СПП – платформы активного типа и имеют два замкнутых контура регулирования – контур стабилизации и контур коррекции.

2. В силовых стабилизаторах центр масс гиросплатформы совмещен с точкой пересечения осей подвеса. Как следствие из этого момент силы тяжести, который управляет работой в гиросмаятниковом подвесе, будет равен нулю. Аналогично и горизонтальные ускорения не оказывают непосредственного влияния на платформу.



Гиромоторы чувствительны к скорости изменения наклона, и при изменении наклона вокруг оси прецессии возникает гироскопический момент, который поворачивает корпус гиромоторов. Датчик угла прецессии выдает сигнал, который после усиления подается на стабилизирующий (разгрузочный) двигатель (СД), создающий момент вокруг оси карданова подвеса такой, что он компенсирует (парирует) возмущающий момент.

4. Для приведения платформы в горизонтальное положение служит цепь коррекции, которая включает в себя два акселерометра А, вычислительное устройство и датчик моментов ДМ. Оси чувствительности акселерометров параллельны осям карданова подвеса. Акселерометры служат не только для измерения ускорений, но и измерения наклона платформы. Покажем это.

5. Если ось чувствительности акселерометра наклонена на угол α , то проекция силы тяжести и удельная сила инерции, обусловленная горизонтальной составляющей ускорения, будет равна

$$w_{\kappa\xi} = w_x \cos \alpha - (g + w_z) \sin \alpha ,$$

где $w_{\kappa\xi}$ - проекция кажущегося ускорения по оси чувствительности акселерометра $O\xi$. С учетом малости угла α можно написать

$$w_{\kappa\xi} = w_x - \alpha g .$$

$w_{\kappa\xi}$ - выходной сигнал с акселерометра. Он поступает на вычислительное устройство, а с вычислительного устройства – на датчик моментов ДМ и формирует момент M_θ :

$$M_\theta = R\{w_x - \alpha g\},$$

где $R\{*\}$ – оператор, формирующий по входному сигналу $w_{\kappa\xi}$ выходной момент M_θ . Этот момент парируется гироскопическим моментом, равным произведению кинетического момента гироскопа H на угловую скорость вынужденной прецессии $\dot{\alpha}$. Учитывая, что в каждую пару входят два гироскопа, можем записать:

$$2H\dot{\alpha} = R\{w_x - \alpha g\} = M_\theta .$$

3. Для исключения влияния качки корабля (цепь стабилизации) гиро-платформа снабжена двумя парами гиромоторов. Два гиромотора связаны между собой антипараллелограммом. Это означает, что поворот одного гироскопа вызывает поворот соединенного с ним в противоположенную сторону. Помимо этого на осях прецессии в каждой паре установлены датчики моментов ДМ и датчики углов прецессии ДУП. Как только на оси карданова подвеса появляется возмущающий момент (трение, натяжение проводов и т.п.), так появляется наклон платформы.

6. Рассмотрим упрощенную схему. Пусть углы α и θ малы. Тогда для угла α можно записать следующее уравнение:

$$J\ddot{\alpha} = M_{\alpha} + 2H\dot{\theta}.$$

Здесь J – момент инерции гиropлатформы, $J\ddot{\alpha}$ – момент сил инерции, создаваемый вращательным ускорением платформы, θ – угол прецессии гироскопов, $2H\dot{\theta}$ – момент гироскопического сопротивления двух гиromоторов. Обозначив момент инерции гиromоторов как A , для угла прецессии θ можем записать следующее уравнение

$$2A\ddot{\theta} = M_{\theta} - 2H\dot{\alpha},$$

где $2A\ddot{\theta}$ – момент сил инерции, обусловленный вращательным ускорением гиromоторов.

7. Ограничимся линейной прецессионной теорией. В этом случае будем полагать, что J и A равны нулю. Тогда сигнал с акселерометров, возникающий при горизонтальных ускорениях, преобразуется в парирующий момент M_{θ} :

$$M_{\theta} = R\{w_x - \alpha g\} = R\{w_x\} - R\{\alpha g\} = 2H\dot{\alpha},$$

где $R\{*\}$ – заданный линейный оператор со своей частотной характеристикой, или

$$2H\dot{\alpha} + R\{\alpha g\} = R\{w_x\}.$$

В левой части этого уравнения находятся члены, зависящие от угла наклона чувствительной системы акселерометра α . В правой части – горизонтальные ускорения, которые являются инерциальной помехой для регистрации наклонов. Используя алгоритмы фильтрации можно выделить низкочастотные наклоны, а высокочастотные ускорения подавить. В этом случае акселерометры здесь могут выступать как датчики угла наклона.

8. Рассмотрим сначала систему с **пропорциональной коррекцией**. Пусть оператор $R\{*\} = k$, т.е. реакция ДМ на сигнал акселерометра пропорциональна углу наклона. Это самый простой вариант. Тогда последнее уравнение превратится в дифференциальное уравнение первого порядка

$$2H\dot{\alpha} + k\alpha g = kw_x,$$

и, соответственно,

$$\frac{2H}{kg}\dot{\alpha} + \alpha = \frac{w_x}{g}$$

Введем обозначение $\tau = \frac{2H}{kg}$, тогда уравнение стабилизатора принимает вид

$$\tau\dot{\alpha} + \alpha = \frac{w_x}{g}.$$

9. Получим передаточную функцию силового гиросtabilизатора, используя для этого операторный подход, как это делали ранее, введя оператор дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$. Тогда

$$(\tau D + 1)\alpha = \frac{w_x}{g}, \quad \alpha = \frac{1}{\tau D + 1} \frac{w_x}{g}.$$

Таким образом, передаточная функция будет иметь вид $\mathbf{W}(D) = \frac{1}{\tau D + 1}$, а соответствующая амплитудно-частотная характеристика – $\mathbf{W}(i\omega) = \frac{1}{i\tau\omega + 1}$.

10. Ранее было получено выражение для оценки систематической ошибки за счет горизонтальных ускорений и наклона платформ:

$$\delta g_{w_x, \alpha} = \frac{a_x^2}{4g} (2 \operatorname{Re} \mathbf{W}(i\omega) - |\mathbf{W}(i\omega)|^2).$$

Для полученной АЧХ преобразования будем иметь:

$$|\mathbf{W}(i\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \tau^2 \omega^2}, \quad \operatorname{Re} \mathbf{W}(i\omega) = \frac{1}{1 + \tau^2 \omega^2},$$

$$\delta g_{w_x, \alpha} = \frac{a_x^2}{4g} \frac{1}{1 + \tau^2 \omega^2}.$$

Таким образом, у силовой гиросплатформы существует систематическая ошибка, зависящая от частоты качки. Можно записать сигнал с акселерометра и, зная частотную характеристику преобразования, вычислить поправку в показания гравиметра.

11. Пример. Пусть $a_x = 50000$ мГал, тогда $\frac{a_x^2}{4g} = 625$ мГал. Потребуем, чтобы $\delta g_{w_x, \alpha} < 1$ мГал. Тогда, для $\tau\omega$ должно выполняться условие $\tau\omega > 25$. Для силовых платформ это вполне достижимо. Достижимо даже такое условие, как $\tau\omega > 90$, при котором $\delta g_{w_x, \alpha} < 0,1$ мГал. Если $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$, то $\tau = 90 \text{ с} \approx 1,5$ мин.

12. Недостаток таких платформ в том, что в них может существовать курсовая (скоростная) девиация, т.е. ошибка, обусловленная вращением Земли и движением судна, пренебрегать которыми нельзя.

13. Рассмотрим случай **пропорционально-интегральной коррекции**. Теперь $R\{*\}$ описывает сумму действия усилителя с коэффициентом k и интегратор с коэффициентом k' . Т.к. D – оператор дифференцирования, то оператор интегрирования будет ему обратным, т.е. $\frac{1}{D}$, соответственно $R = k + \frac{k'}{D}$, и для оператора R можно записать

$$R\{*\} = k\{*\} + k' \int (*) dt.$$

Тогда уравнение для парирующего момента

$$2H\dot{\alpha} + R\{\alpha g\} = R\{w_x\},$$

которое было получено ранее, представится следующим образом:

$$2H\dot{\alpha} + (k\alpha g + k'g \int \alpha dt) = kw_x + k' \int w_x dt.$$

Продифференцируем это уравнение:

$$2H\ddot{\alpha} + k\dot{\alpha}g + k'\alpha g = k\dot{w}_x + k'w_x,$$

или

$$\frac{2H}{k'g}\ddot{\alpha} + \frac{k}{k'}\dot{\alpha} + \alpha = \frac{k}{k'}\frac{\dot{w}_x}{g} + \frac{w_x}{g}.$$

Полученное уравнение – уравнение 2-го порядка и соответствует уравнению колебательного движения маятника с трением.

14. Введем обозначения: $\frac{2H}{k'g} = \tau^2$, $\frac{k}{k'} = h\tau$, где h – некоторый безразмерный параметр.

С учетом введенных соотношений, последнее уравнение приобретет вид

$$\tau^2\ddot{\alpha} + h\tau\dot{\alpha} + \alpha = h\tau\frac{\dot{w}_x}{g} + \frac{w_x}{g}.$$

Используя операторную запись, в которой D – оператор дифференцирования, можно записать:

$$(\tau^2 D^2 + h\tau D + 1)\alpha = (h\tau D + 1)\frac{w_x}{g}.$$

Соответствующая передаточная функция будет иметь вид:

$$\mathbf{W}(i\omega) = \frac{1 + ih\tau\omega}{1 + ih\tau\omega - \tau^2\omega^2} = \frac{(1 + ih\tau\omega)(1 - ih\tau\omega - \tau^2\omega^2)}{(1 - \tau^2\omega^2) + h^2\tau^2\omega^2} = \frac{1 - \tau^2\omega^2 + h^2\tau^2\omega^2 - ih\tau^3\omega^3}{(1 - \tau^2\omega^2) + h^2\tau^2\omega^2}.$$

15. Действительная часть и модуль полученной передаточной функции –

$$|\mathbf{W}(i\omega)|^2 = \frac{1 + h^2\tau^2\omega^2}{(1 - \tau^2\omega^2)^2 + h^2\tau^2\omega^2}, \quad \text{Re } \mathbf{W}(i\omega) = \frac{1 - \tau^2\omega^2 + h^2\tau^2\omega^2}{(1 - \tau^2\omega^2)^2 + h^2\tau^2\omega^2}.$$

Соответствующая ошибка за горизонтальные ускорения и наклон платформы будет иметь вид:

$$\delta g_{w_x, \alpha} = \frac{a_x^2}{4g} \left(2 \operatorname{Re} \mathbf{W}(i\omega) - |\mathbf{W}(i\omega)|^2 \right) = \frac{a_x^2}{4g} \left(\frac{1 - 2\tau^2 \omega^2 + h^2 \tau^2 \omega^2}{(1 - \tau^2 \omega^2)^2 + h^2 \tau^2 \omega^2} \right).$$

Пусть $h = \sqrt{2}$, тогда $\delta g_{w_x, \alpha} = \frac{a_x^2}{4g} \left(\frac{1}{1 + \tau^4 \omega^4} \right)$. Такой частотной характеристикой обладает фильтр Баттерворта 2-го порядка. Таким образом, нами был получен следующий результат: при $\omega\tau \gg 1$, $\delta g_{w_x, \alpha} \approx \frac{a_x^2}{4g} \left(\frac{1}{\tau^4 \omega^4} \right)$. Рассмотрим пример. Пусть $a_x = 50000$ мГал и

$\delta g_{w_x, \alpha} < 0,1$ мГал. Тогда, $\frac{a_x^2}{4g} \approx 625$ и $\frac{625}{\tau^4 \omega^4} < 0,1$. Для выполнения этого условия необходимо,

чтобы $\tau^4 \omega^4 > 6250$, или $\tau\omega > 9$. Это легко достижимое требование. Напомним, что ω - частота вынужденных колебаний, на пример, частота качки судна, а величина τ определяется соотношением $\frac{2H}{k'g} = \tau^2$. Величина $L = \frac{2H}{k'}$ называется приведенной длиной маятника. Чем больше L , тем больше период “маятника”, тем меньше он подвержен возмущающему влиянию горизонтальных ускорений. В гироскопии доказано, что гироскопический маятник с приведенной длиной равной радиусу Земли, не возмущаем горизонтальными ускорениями. Такой маятник носит название маятника Шулера, и его период равен 84,4 мин. Платформы такого типа применяются в инерциальной навигации, и прежде, чем использовать такие стабилизаторы, гироскопы необходимо выставить в горизонт.

17. Подведем итоги первых лекций.

1. Кажущаяся сила тяжести, которую измеряет гравиметр, представляет собой сумму удельной силы притяжения и возмущающих ускорений первого и второго порядков: $w_\xi = g + w_z + w_x \alpha + w_y \beta - g \frac{\alpha^2}{2} - g \frac{\beta^2}{2}$.
2. Возмущающие горизонтальные ускорения и наклоны платформы могут давать систематическую ошибку в показания гравиметра. Величина этой ошибки зависит, как от частотной характеристики горизонтальных ускорений, так и от системы стабилизации, на которой установлен гравиметр.
3. Частотная характеристика этой ошибки определяется передаточной функцией системы стабилизации \mathbf{W} и имеет вид $\delta g_{w_x, \alpha} = \frac{a_x^2}{4g} \left(2 \operatorname{Re} \mathbf{W}(i\omega) - |\mathbf{W}(i\omega)|^2 \right)$.
4. Применение гироскопов позволяет значительно понизить величину ошибки $\delta g_{w_x, \alpha}$, по сравнению с ошибкой, возникающей при использовании обычного карданова подвеса.
5. Наиболее совершенными являются силовые гиropлатформы, которые позволяют практически до минимума свести величину ошибки $\delta g_{w_x, \alpha}$.

18. Следует так же отметить, что описанные типы систем стабилизации далеко не исчерпывают весь перечень систем, которые используются для стабилизации гравиметров. Так, на пример, существуют гиropлатформы, построенные по принципу следящих систем за гировертикалью, ведутся работы по созданию так называемых инерциальных систем с различного вида коррекцией, по созданию трехосных платформ, способных удерживать не только горизонт, но и азимут, для управления платформой активно внедряется цифровая техника.

Лекция 6. Эффект Этвеша.

1. Во второй лекции было показано, что гравиметр измеряет кажущуюся силу тяжести g_k , которая является суммой истинной силы тяжести и возмущающих ускорений, как первого, так и второго порядка:

$$g_k = g + w_z + w_x \alpha + w_y \beta - g \frac{\alpha^2}{2} - g \frac{\beta^2}{2}.$$

При выводе этой формулы мы предполагали, что система координат, связанная с гравиметром, совершает колебательные движения относительно некоторой неподвижной точки, т.е. в среднем положение системы координат остается неизменным. Именно поэтому постоянные составляющие компонент w_x , w_y , w_z равны нулю. Это было бы справедливо и при совершении гравиметром прямолинейного равномерного движения. Однако, при движении гравиметра по криволинейной траектории на пробное тело гравиметра действуют центробежная и кориолисова силы, приводящие к систематическим ошибкам измерения силы тяжести. Этот эффект получил в гравиметрии название эффекта Этвеша. В частности, такие ошибки возникают при движении судна, на борту которого находится гравиметр, по поверхности океана.

2. Как известно, абсолютное ускорение точки в подвижной системе координат есть результирующая трех видов ускорения: переносного, относительного и кориолисового:

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_{пер} + \mathbf{w}_{отн} + \mathbf{w}_{кор}.$$

В нашем случае, переносное ускорение – это осеостремительное ускорение, обусловленное суточным вращением Земли. Возникающая при этом сила инерции вместе с силой притяжения образуют силу тяжести \mathbf{g} . Таким образом, возмущающими ускорениями остаются относительное и кориолисово.

3. Если пренебречь несферичностью Земли, то относительное ускорение точки движущейся с *постоянной скоростью* по поверхности Земли будет равно центростремительному ускорению, направленному к центру планеты. Соответствующая этому ускорению удельная сила инерции будет направлена вверх, и она будет уменьшать вес пробного тела. Величина этого ускорения будет определяться выражением:

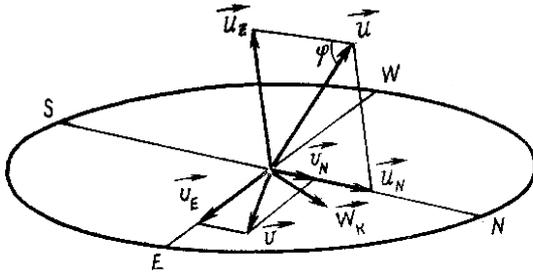
$$w_{отн} = w_y = -\frac{v^2}{R},$$

где R – средний радиус Земли, v – относительная скорость движения точки (скорость движения судна).

4. В теоретической механике показано, что кориолисово ускорение равно удвоенному векторному произведению угловой скорости вращения системы отсчета \mathbf{u} (в нашем случае \mathbf{u} – вектор скорости суточного вращения Земли, направленный на полюс мира) на вектор относительной скорости \mathbf{v} движения точки относительно этой системы:

$$\mathbf{w}_{кор} = 2(\mathbf{u} \times \mathbf{v}).$$

Вектор $\mathbf{w}_{кор}$ лежит в плоскости экватора и ортогонален вектору скорости \mathbf{v} .



5. Представим вектор \mathbf{u} в виде суммы двух векторов: горизонтального \mathbf{u}_n , направленного на север, и вертикального \mathbf{u}_z , направленного к центру Земли: $\mathbf{u} = \mathbf{u}_n + \mathbf{u}_z$. Вектор относительной скорости \mathbf{v} , также разложим по двум направлениям – северному и восточному: $\mathbf{v} = \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_e$. Таким образом, для кориолисова ускорения можно написать:

$$w_{кор} = 2[(\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_z) \times (\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_e)] = 2[(\mathbf{u}_n \times \mathbf{v}_e) + (\mathbf{u}_z \times \mathbf{v})].$$

Из полученного соотношения следует, что ускорение Кориолиса имеет две составляющие. Одно из них, описываемое первым слагаемым, – вертикальное, второе – горизонтальное. Вертикальная составляющая вносит ошибку в измеренное значение силы тяжести, горизонтальная – отклоняет вертикаль. Угол наклона зависит от широты местонахождения судна и его скорости. Однако этот угол невелик. При скорости судна в 10 узлов отклонение от вертикали не будет превосходить $15''$. Таким образом, основной вклад в измеренное значение силы тяжести вносит первый член.

6. Горизонтальная и вертикальная компоненты вектора \mathbf{u} зависят от широты местности:

$$u_n = u \cos \varphi, \quad u_z = u \sin \varphi.$$

В этом случае кориолисово ускорение приобретает вид:

$$w_{кор} = 2uv_e \cos \varphi.$$

При этом если судно движется в восточном направлении, ускорение Кориолиса направлено вверх, тем самым увеличивает значение силы тяжести, а если в западном, то это ускорение направлено вниз, и значение силы тяжести уменьшается.

7. Таким образом, возмущающее ускорение первого порядка w_z будет состоять из трех компонент – вертикальной компоненты ускорения, связанного с перемещением системы отсчета гравиметра относительно некоторой точки, проекции кориолисова ускорения на вертикальную ось и центростремительного ускорения:

$$w_z = \ddot{z} - 2uv_e \cos \varphi - \frac{v^2}{R}.$$

Соответственно, для кажущегося ускорения силы тяжести без учета возмущающих ускорений второго порядка можно записать:

$$g_k = g + \ddot{z} - \frac{v^2}{R} - 2uv_e \cos \varphi.$$

8. Так как нашей задачей стоит определение значения g , то последнее уравнение может быть переписано в следующем виде:

$$g + \ddot{z} = g_k + \frac{v^2}{R} + 2uv_e \cos \varphi = g_k + \delta g_s.$$

Здесь символом δg_s , обозначена поправка Этвеша: $\delta g_s = 2uv_e \cos \varphi + \frac{v^2}{R}$. Физический смысл этой поправки достаточно ясен: при движении судна на восток, скорость судна складывается с линейной скоростью вращения Земли, и тем самым увеличивается значение центробежной силы, а при движении судна на запад – наоборот. Это свойство учитывает первый член поправки. Второе слагаемое учитывает тот факт, что при движении по сферической поверхности центробежная сила всегда уменьшает вес пробного тела по сравнению с весом покоящегося тела.

9. Сделаем следующее замечание. Если скорость перемещения гравиметра высокая, как это бывает в аэрогравиметрии, то при вычислении поправки Этвеша необходимо учитывать эллиптичность Земли. В этом случае формула для поправки Этвеша при горизонтальном полете будет иметь вид:

$$\delta g_s = 2uv_e \cos B + \frac{v_n^2}{M + H} + \frac{v_e^2}{N + H},$$

где M – радиус кривизны меридиана, $M = \frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 B)^3}}$, e – эксцентриситет эллипсоида, a – большая полуось эллипсоида, B – геодезическая широта; N – радиус кривизны 1-го вертикала, $N = \frac{a}{\sqrt{(1-e^2 \sin^2 B)^3}}$; H – высота полета, v_e , v_n – восточная и северная составляющие скорости, $v_e = (N+H)L \cos B$, $v_n = (M+H)B$, L – геодезическая долгота.

10. Приведем выражение для поправки Этвеша $\delta g_s = 2uv_e \cos \varphi + \frac{v^2}{R}$ к виду удобному для расчетов. С учетом того, что сила тяжести измеряется в миллигалах, а скорость v в км/ч или в узлах (1 узел = 1 мор. миля/ч = 1852 м/ч, 1 мор. миля равна длине дуги 1° большого круга) и положив в расчетах радиус Земли $R = 6370$ км, а угловую скорость вращения Земли $u = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, получим

$$\delta g_s = 4,05v_e \cos \varphi + 0.0012v^2$$

при измерении скорости в км/ч, и

$$\delta g_s = 7,50v_e \cos \varphi + 0.004v^2$$

при измерении скорости в узлах. Обратим внимание на то, что v_e – восточная составляющая скорости. Если скорость измеряется в узлах, то эта скорость соответствует скорости изменения долготы, выраженной в минутах, т.е. $v_e = \dot{\lambda} R \cos \varphi$. С учетом этого замечания поправка Этвеша может быть представлена в следующем виде:

$$\delta g_s = 7,50\dot{\lambda} \cos^2 \varphi + 0.004v^2.$$

Первый член в этих формулах – основной и составляет главную часть поправки. Очевидно, что максимальных значений он достигает при движении судна вдоль параллели и равен нулю при движении вдоль меридиана. Так на широте $\varphi = 45^\circ$ при движении судна

по параллели со скоростью 12 узлов первый член поправки равен 63,9 мГал, а второй – 0,6 мГал.

Очевидно, что максимальных значений поправка Этвеша достигает при движении судна вдоль параллели, и равна нулю при движении вдоль меридиана.

11. Определим необходимую точность измерения приращения долготы при допустимой погрешности 0,1 мГал на широте 45° . Очевидно, что $\varepsilon_g = 7,50 \cdot \varepsilon_\lambda \cos^2 \varphi = 3,75 \varepsilon_\lambda$. Отсюда следует, что точность определения скорости изменения долготы должна быть не хуже 0,027 минут дуги в час. Если эту скорость определять как отношение разности измеренных долгот за промежуток времени между измерениями $\dot{\lambda} = \frac{\lambda(t+T) - \lambda(t-T)}{2T}$, то ошибка определения скорости изменения долготы

будет определяться соотношением $\varepsilon_\lambda = \frac{\sqrt{2}\varepsilon_\lambda}{2T} = \frac{\varepsilon_\lambda}{\sqrt{2}T}$. Это означает, что

$\varepsilon_\lambda < 1,41 \cdot \varepsilon_\lambda T \approx 0,038T$. В частности, при дискретизации навигационных отчетов в 10 минут, т.е. в 1/6 часа, точность определения долготы должна быть не хуже 0,006' или 0,04". На широте в 45° 0,04" соответствуют 8-10 м. Это очень высокое требование и в открытом океане до сих пор невыполнимое даже с применением спутниковой навигационной системы JPS, хотя частота обсерваций может быть высокой и составлять секунды.

12. Подведем итог этой лекции. На вход гравиметра поступает кажущееся ускорение силы тяжести, которое помимо силы притяжения содержит в себе влияние возмущающих ускорений первого и второго порядков. Способы подавления влияния ускорений второго порядка нами рассматривались в предыдущих лекциях, посвященных гиросtabilизаторам, и было показано, что их влияние можно практически свести до минимума. Таким образом, основной сигнал, поступающий на вход гравиметра, состоит из определяемой удельной силы тяжести, вертикального ускорения, связанного с качкой судна, и эффекта Этвеша. Задача состоит в том, чтобы суметь выделить из этого набора полезную (искомую) составляющую. Для этого нужно знать, что будет происходить с сигналом при его прохождении через гравиметр, т.е. знать передаточную функцию гравиметра. Но перед тем как рассматривать основные особенности строения морских гравиметров, следует остановиться на вопросах фильтрации сигналов. Этому и будет посвящена следующая лекция.

Лекция 7. Применение методов фильтрации к измерению силы тяжести.

1. Вновь рассмотрим выражение для кажущейся силы тяжести, которую измеряет гравиметр:

$$g_\kappa = g + w_z + w_x \alpha + w_y \beta - g \frac{\alpha^2}{2} - g \frac{\beta^2}{2}.$$

Мы рассмотрели влияние ускорений второго порядка и показали, что их влияние может быть сильно подавлено за счет применения гиросtabilизаторов. Таким образом, основной сигнал, который измеряет гравиметр, является суммой удельной силы тяжести и

возмущающих вертикальных ускорений, которые в свою очередь состоят из вертикальных ускорений, связанных с качкой судна и ускорений, возникающих при движении судна по поверхности Земли:

$$g_{\kappa} = g + \ddot{z} + \Delta g_{\circ}.$$

Если задать движение судна прямолинейным с постоянной скоростью, то эффект Этвеша будет постоянным, и переменная составляющая будет суммой влияния силы тяжести и вертикальных ускорений: $g_{\kappa} = g + \ddot{z}$. По своей природе силы гравитации и силы инерции неразличимы. Поэтому для их разделения надо либо вычислять вертикальные возмущающие ускорения, что невозможно, либо применить методы фильтрации.

2. Надо заметить, что вертикальные возмущающие ускорения в несколько десятков, а то и в сотни раз, превышают значения определяемой силы тяжести. Кроме того, возмущающие ускорения, которые в основном обусловлены качкой корабля, меняются во времени во много раз быстрее, чем сила тяжести, т.е. имеют более высокочастотную составляющую. Это справедливо для морских измерений. Для того чтобы уменьшить динамический диапазон и подавить влияние высокочастотной помехи чувствительный элемент гравиметра опускают в вязкую среду, и тем самым пытаются уменьшить влияние вертикальных высокочастотных возмущающих ускорений. Это означает что сигнал, проходя через гравиметр, претерпевает изменения, которые определяются передаточной функцией гравиметра, включающей в себя фильтр низких частот:

$$s = \mathbf{W}_{\text{фиц}} \Gamma \{g + \ddot{z}\}.$$

Встает вопрос, каковы должны быть параметры гравиметра и фильтра для того, чтобы выделить полезную информацию. Для этого необходимо знать особенности поведения энергетических спектров полезного сигналов и помехи.

3. Напомним физический смысл понятия энергетического спектра или спектральной плотности случайной стационарной функции. Для этого представим себе, что мы располагаем записью случайной функции на некотором конечном, но достаточно длинном интервале времени. Тогда эта функция представима рядом Фурье:

$$x(t) = \sum_{k=0}^N (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t).$$

Мощность каждой гармоники пропорциональна квадрату ее амплитуды. Так как сигнал является случайной функцией, то и коэффициенты ряда Фурье a_k и b_k также будут случайными числами. Предположим, что имеется множество подобных функций, о которых известно, что они относятся к одному и тому же случайному процессу, т.е. у них одинаковые математические ожидания (средние значения), дисперсии и автокорреляционные функции. В этом случае для каждой реализации можно получить свои коэффициенты a_k и b_k . В силу их случайности, средние значения коэффициентов \bar{a}_k и \bar{b}_k , вычисленные по всем реализациям, будут равны нулю. В то же время средние значения квадратов коэффициентов на каждой частоте будут отличны от нуля. Обозначим эти значения, как $\langle a_k^2 \rangle$ и $\langle b_k^2 \rangle$. Известно, что дисперсия случайного стационарного процесса равна среднему значению квадратов отклонений процесса от своего среднего значения. По отношению к отдельным гармоникам, дисперсия будет равна половине квадрата амплитуды. Таким образом, возможно, получить последовательность

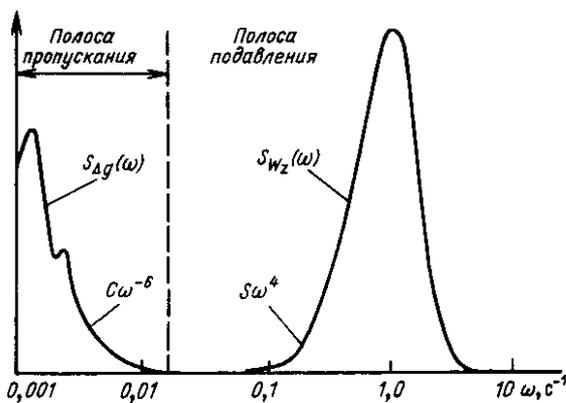
элементарных дисперсий $\sigma_k^2(\omega_k) = \frac{\langle a_k^2 \rangle + \langle b_k^2 \rangle}{2}$. Тогда, дисперсия всего процесса $x(t)$ будет равна сумме всех элементарных гармоник $\sigma_x^2 = \sum_{k=0}^N \sigma_k^2(\omega_k)$.

4. В теории случайных функций показано, что при уменьшении частотного интервала $\Delta\omega = \omega_k - \omega_{k-1}$, дисперсия случайных гармоник также будет уменьшаться, причем, $\Delta\omega$ и σ_k^2 имеют одинаковый порядок малости. Это означает, что их отношение $\frac{\sigma_k^2}{\Delta\omega}$ будет стремиться к некоторому определенному значению $S(\omega_k) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{\sigma_k^2(\omega_k)}{\Delta\omega}$. Таким образом, дисперсия процесса $x(t)$ может быть выражена следующим образом:

$$\sigma_x^2 = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega.$$

Функция $S(\omega)$ носит название спектральной плотности сигнала. Зная спектральную плотность, можно определить дисперсию суммы всех элементарных гармоник, слагающих случайный процесс, лежащих в диапазоне частот $[\omega_m, \omega_n]$:

$$\sigma_x^2(\omega_m, \omega_n) = \int_{\omega_m}^{\omega_n} S(\omega) d\omega.$$



5. Как мы уже отмечали, на вход гравиметра поступает сумма ускорения силы тяжести и вертикальной составляющей ускорения, возникающего при движении самого гравиметра. Спектральная плотность такого сигнала $S(\omega)$ представляет собой сумму спектральных плотностей силы тяжести $S_g(\omega)$ и вертикальных возмущающих ускорений $S_z(\omega)$, и представлена на рисунке. Из рисунка видно, что она имеет две области.

Одна область, область “низких” частот, несет полезную информацию, и в ней спектральная плотность сигнала $S(\omega)$ соответствует спектральной плотности силы тяжести $S_g(\omega)$. Другая область, область “высоких” частот, в которой спектральная плотность представляет собой колоколообразную функцию, соответствует спектральной плотности вертикальных возмущающих ускорений $S_z(\omega)$. Следует заметить, что такая ситуация, когда частотные области полезного сигнала и помехи разделены, практически всегда соответствует морским гравиметрическим наблюдениям. Это связано с тем, что сам случайный процесс связан с качкой корабля и имеет характер почти периодических колебаний. Период этих колебаний зависит от тоннажа судна, акватории и состояния моря и может меняться от первых секунд до нескольких десятков секунд в открытом океане. В то же время периоды гармоник, соответствующие аномальному полю силы тяжести могут составлять сотни секунд, т.е. десятки минут и часы. Но в аэрогравиметрии, где скорости

движения носителя высокие, гармоники, соответствующие изменению силы тяжести, могут иметь период близкий к периодам вертикальных возмущающих ускорений. И тогда такого частотного разделения сигналов может и не наблюдаться. Таким образом, ставится задача методами фильтрации выделить из суммарного сигнала полезный сигнал, соответствующий измеряемому полю силы тяжести. Для этого необходимо определить частоту среза фильтра ω_0 и построить сам фильтр, который был бы наиболее оптимальным для решения данной задачи.

6. Решим вопрос о выборе значения частоты среза ω_0 . Для начала определим, какой функцией можно аппроксимировать случайную помеху, связанную с перемещением гравиметра. Для этого представим себе, что вертикальные перемещения гравиметра описываются как некоторая сумма гармоник:

$$z(t) = \sum_{i=1}^N a_i \cos(\omega_i t + \varphi_i).$$

Тогда вертикальные ускорения, соответствующие этому закону перемещения будут представлены следующим образом:

$$\ddot{z}(t) = -\sum_{i=1}^N a_i \omega_i^2 \cos(\omega_i t + \varphi_i).$$

Следовательно, спектральная плотность вертикальных ускорений будет соответствовать спектральной плотности процесса $z(t)$ с множителем ω^4 :

$$S_{\ddot{z}}(\omega) \approx \omega^4 S_z(\omega).$$

7. Пусть фильтр будет идеальным фильтром низких частот, т.е. он будет пропускать гармоники до частоты ω_0 . Тогда погрешность такого фильтра будет складываться из погрешности, возникающей от гармоник возмущающих вертикальных ускорений имеющих частоту ниже частоты среза $\sigma_{e\ddot{z}}^2$, и погрешности σ_{eg}^2 , возникающей за счет того, что убираются гармоники, соответствующие полезному сигналу (силе тяжести) и имеющие частоту выше частоты среза:

$$\sigma_e^2 = \sigma_{e\ddot{z}}^2 + \sigma_{eg}^2,$$

где

$$\sigma_{e\ddot{z}}^2 = 2 \int_0^{\omega_0} S_{\ddot{z}}(\omega) d\omega = F_n(\omega_0),$$

$$\sigma_{eg}^2 = 2 \int_{\omega_0}^{\infty} S_g(\omega) d\omega = F_e(\omega_0).$$

В зависимости от значения ω_0 одна из дисперсий будет увеличиваться, а другая – уменьшаться, и, соответственно, это будет приводить к увеличению погрешности σ_e^2 . Оптимальное значение ω_0 может быть найдено из условия:

$$\frac{d\sigma_e^2}{d\omega_0} = \frac{dF_g(\omega_0)}{d\omega_0} + \frac{dF_n(\omega_0)}{d\omega_0} = 0.$$

С учетом того, как были определены функции $F_n(\omega)$ и $F_g(\omega)$, и что дифференцирование в них осуществляется по верхнему пределу, последнее условие может быть переписано следующим образом:

$$\frac{d\sigma_e^2}{d\omega_0} = S_z(\omega_0) - S_g(\omega_0) = 0.$$

8. Обычно ω_0 находится на пересечении функций $S_z(\omega)$ и $S_g(\omega)$, т.е. $S_z(\omega_0) = S_g(\omega_0)$, и значение этой частоты в морской гравиметрии находится вблизи начала частотных координат, т.е. в области низких частот. С учетом того, что энергетический спектр изолированного объекта с избыточной плотностью убывает пропорционально экспоненте, т.е. быстрее степенной функции, поведение спектральной функции силы тяжести за частотой среза заведомо можно аппроксимировать как степенную функцию:

$$S_g(\omega) \sim C\omega^{-2m},$$

где m – некоторое целое число, которое нужно задать. В этом случае можно написать, что $C\omega_0^{-2m} = S\omega_0^4$, или $\omega_0^{4+2m} = \frac{C}{S}$, $\omega_0 = \sqrt[4+2m]{\frac{C}{S}}$.

9. Сделаем предположение, что $m = 3$. Такое предположение заведомо выполнимо для глубоководных районов морей и океанов. При таком предположении получим следующие соотношения для $F_n(\omega)$ и $F_g(\omega)$:

$$F_n(\omega_0) = 2 \int_0^{\omega_0} S\omega^4 d\omega = 2S \frac{\omega_0^5}{5},$$

$$F_g(\omega_0) = 2 \int_{\omega_0}^{\infty} C\omega^{-6} d\omega = 2C \frac{\omega_0^{-5}}{5}.$$

Последующие выкладки будут выглядеть следующим образом:

$$\text{для ошибки фильтра: } \sigma_e^2 = \frac{2}{5} (S\omega_0^5 + C\omega_0^{-5}),$$

$$\text{для частоты } \omega_0: \omega_0^5 = \sqrt{\frac{C}{S}}, \omega_0^{-5} = \sqrt{\frac{S}{C}}.$$

Тогда,

$$\sigma_e^2 = \frac{2}{5} \left(S\sqrt{\frac{C}{S}} + C\sqrt{\frac{S}{C}} \right) = \frac{4}{5} \sqrt{CS}.$$

Нами получена формула для оценки дисперсии ошибки. К сожалению, в этой формуле остаются неопределенными величины C и S .

10. Еще раз отметим, что выбор частоты среза очень важен для аэрогравиметрии, и не так важен - для морской. В то же время, в последние годы существенно возрос интерес к малоглубинным акваториям, перспективным на нефть и газ. Для таких районов выбор оптимальных параметров фильтра также может оказаться принципиально важным, поскольку частота полезного сигнала может перекрываться с частотой помехи.

Лекция 8. Элементы теории фильтрации.

1. Современный морской гравиметр – достаточно сложная система преобразования информации, на вход которой поступает смесь “полезного сигнала” (силы тяжести) и помехи (возмущающие ускорения) $x(t)$, а на выходе - отклик динамической системы $y(t)$. Зная математическую модель динамической системы и ее состояние в некоторый момент времени, принятый в качестве начального, можно установить алгоритм, с помощью которого по $x(t)$ можно вычислить $y(t)$:

$$y(t) = \Gamma\{x(t)\},$$

т.е. связь между входной $x(t)$ и выходной $y(t)$ функциями определяются оператором $\Gamma\{*\}$. Оператор называется линейным, если он удовлетворяет условиям аддитивности и однородности: $\Gamma\{k_1x(t) + k_2z(t)\} = k_1\Gamma\{x(t)\} + k_2\Gamma\{z(t)\}$.

2. Связь между функциями $x(t)$ и $y(t)$ можно определить выражением

$$y(t) = \int_0^t h(\tau)x(t-\tau)d\tau + F(t; y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{n-1}(0)).$$

Для того чтобы решение было установившимся необходимо текущий момент взять в бесконечной удаленности от начального. В этом случае процессы, зависящие от начальных условий, затухнут, т.к. для асимптотически устойчивых систем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t; y(0), \dot{y}(0), \dots, y^{n-1}(0)) = 0,$$

и связь между входной и выходной функциями будет определяться следующим интегральным соотношением, носящим название интеграла типа свертки,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau,$$

здесь $h(\tau)$ – весовая функция. Реальные физические системы характеризуются тем, что выходной сигнал формируется из входной информации, полученной в текущий момент t , и всей предшествующей. Такие системы называются казуальными (причинными) или физически реализуемыми системами. Соответствующее для этого случая интегральное соотношение примет вид:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau.$$

3. Другой распространенный способ задания зависимости между входным и выходным сигналами – с помощью дифференциального уравнения

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = x(t).$$

С таким способом описания линейных систем мы уже сталкивались, когда рассматривали реакцию карданова подвеса и гиросtabilизаторов на наклон.

4. Для описания линейных систем используют понятия импульсной характеристики, передаточной функции, амплитудно-фазовой характеристики и переходной функции. Для выяснения смысла этих понятий рассмотрим интегральное соотношение

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau,$$

и зададим несколько тестов.

Тест 1. Пусть $x(t) = \delta(t)$, где $\delta(t)$ – импульс или функция Дирака. Тогда

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau = h(t).$$

$h(t)$ – реакция динамической системы на импульс или импульсная характеристика.

Тест 2. Пусть $x(t) = e^{pt}$. В этом случае:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) e^{p(t-\tau)} d\tau = e^{pt} \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-p\tau} d\tau = e^{pt} L(h(t)).$$

Оператор $L(h(t)) = \mathbf{W}(p)$ – оператор преобразования Лапласа, а соответствующая функция носит название передаточной функции.

Тест 3. Пусть $x(t) = \mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$, т.е. входной сигнал – функция Хевисайда. Для этого случая получим:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) \mathbf{1}(t - \tau) d\tau = \int_0^t h(\tau) d\tau = H(t).$$

Функция $H(t)$ – реакция системы на ступенчатую функцию и носит название переходной функции. Производная этой функции будет равна функции Дирака:

$$\frac{dH}{dt} = h(t), \quad \frac{d\mathbf{1}(t)}{dt} = \delta(t).$$

Тест 4. Пусть $x(t) = e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$. Этот случай аналогичен тесту 2, в котором $p = i\omega$. В этом случае $\mathbf{W}(p)|_{p=i\omega} = \mathbf{W}(i\omega)$, и передаточная функция носит название частотной характеристики:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau = e^{i\omega t} \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = e^{i\omega t} \mathbf{W}(i\omega).$$

Функция $\lambda(\omega) = |\mathbf{W}(i\omega)| = \sqrt{(\operatorname{Re} \mathbf{W})^2 + (\operatorname{Im} \mathbf{W})^2}$ – амплитудная частотная характеристика (АЧХ), а функция $\varphi(\omega) = \arg \mathbf{W}(i\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} \mathbf{W}}{\operatorname{Re} \mathbf{W}}$ – фазовая частотная характеристика (ФЧХ). Частотная характеристика показывает, что если на вход системы с линейным оператором будет подан периодический сигнал $x(t) = a \cos \omega t$, то на выходе будет сигнал $y(t) = \lambda_a(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$, т.е. амплитуда сигнала изменится в λ раз, и произойдет задержка сигнала (фазовый сдвиг).

5. Если нам известна вся реализация сигнала как для прошедших, так и «будущих» моментов времени, то для этого случая частотная характеристика будет определяться соотношением:

$$W(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Пусть $h(\tau) = h(-\tau)$, т.е. импульсная характеристика системы является четной функцией. Тогда:

$$W(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^0 h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau.$$

Введя обозначение $\tau' = -\tau$, получим:

$$\begin{aligned} W(i\omega) &= - \int_{-\infty}^0 h(-\tau') e^{i\omega\tau'} d\tau' + \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_0^{\infty} h(-\tau') e^{i\omega\tau'} d\tau' + \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} h(\tau) (e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}) d\tau = 2 \int_0^{\infty} h(\tau) \cos \omega\tau d\tau. \end{aligned}$$

Это означает, что для четной весовой функции частотная характеристика имеет только действительную часть, и, следовательно, не возникает фазовых искажений. Такого рода фильтры называют окнами.

6. Рассмотрим пример, где весовая функция имеет прямоугольную форму:

$$h(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2T} & |\tau| \leq T \\ 0 & |\tau| > T \end{cases}.$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика в этом случае будет иметь вид:

$$\mathbf{W}(i\omega) = 2 \int_0^T \frac{1}{2T} \cos \omega\tau d\tau = \frac{\sin \omega T}{\omega T}.$$

Обратим внимание на то, что гармоники с увеличением частоты затухают по амплитуде. Кроме того гармоники с периодом, кратным T , будут полностью подавлены, поскольку ωT будет равно $k\pi$. Частота $\omega = \frac{\pi}{T}$ носит название частоты Найквиста. Физически применение такого фильтра означает осреднение функции $x(t)$ в окне размером в $2T$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t-\tau)d\tau.$$

Повторное применение такого фильтра к полученному на выходе сигналу будет означать повторное осреднение сигнала в прямоугольном окне. Частотная характеристика такого сглаживания будет равна произведению АЧХ первого сглаживания на АЧХ повторного сглаживания:

$$\mathbf{W}(i\omega) = \mathbf{W}_1(i\omega)\mathbf{W}_2(i\omega) = \frac{\sin \omega T_1}{\omega T_1} \frac{\sin \omega T_2}{\omega T_2}.$$

В том случае, если длины весовых окон совпадают, т.е. $T_1 = T_2$, то частотная характеристика такого преобразования будет иметь вид:

$$\mathbf{W}(i\omega) = \left(\frac{\sin \omega T}{\omega T} \right)^2.$$

Такая частотная характеристика соответствует треугольному окну. При последующих сглаживаниях получаемых выходных сигналов будет увеличиваться степень в амплитудно-частотной характеристике, и форма кривой АЧХ будет приближаться к форме Гауссовой кривой.

7. Рассмотрим теперь случай, когда входной $x(t)$ и выходной $y(t)$ сигналы связаны дифференциальным уравнением, в частности, уравнением 1-го порядка:

$$\tau \dot{y}(t) + y(t) = x(t).$$

Решим это уравнение в предположении, что $y(0) = 0$, $x(t) = 1$ при $t > 0$:

$y(t) = Ce^{-\frac{t}{\tau}} + 1$; из условия $y(0) = C + 1 = 0$ следует, что $C = -1$, и окончательно:

$$y(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = H(t).$$

Это означает, что импульсная характеристика такого преобразования будет иметь вид:

$$h(t) = \frac{dH}{dt} = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}},$$

и соответственно

$$y(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\theta}{\tau}} x(t-\theta) d\theta.$$

Для того чтобы получить передаточную функцию необходимо представить входную функцию $x(t)$ в экспоненциальном виде: $x(t) = e^{pt}$. Передаточная функция будет определена следующим образом:

$$\mathbf{W}(p) = e^{-pt} \Gamma\{e^{pt}\} = \frac{1}{\tau} e^{-pt} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\theta}{\tau}} e^{p(t-\theta)} d\theta = \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} e^{\left(-\frac{1}{\tau}-p\right)\theta} d\theta = \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} e^{-\frac{1+p\tau}{\tau}\theta} d\theta = \frac{1}{p\tau + 1}.$$

8. Отметим, что такой же результат был нами получен в первых лекциях, когда рассматривался вопрос о стабилизации гравиметра, но там он был получен с помощью символического метода. Напомним, что для этого определяется оператор дифференцирования D , и с его помощью исходное дифференциальное уравнение представляется в виде:

$$(\tau D + 1)y = x.$$

Отсюда следует, что $y = \frac{1}{1 + \tau D} x$ и соответственно $\mathbf{W}(p) = \frac{1}{1 + p\tau}$, $\mathbf{W}(i\omega) = \frac{1}{1 + i\tau\omega}$.

Амплитудная и фазовая характеристики такой системы будет иметь вид:

$$\lambda(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\text{arctg}(\tau\omega).$$

Параметр τ носит название постоянной времени, и он определяет частоту среза $\omega_{cp} = \frac{1}{\tau}$.

9. Дифференциальному уравнению 1-го порядка удовлетворяют все гравиметрические датчики. Так, в гравиметре ГМН параметр τ можно подобрать равным 1000 – 2000 с. В этом случае для высокочастотной помехи будет выполняться условие $\omega\tau \gg 1$, и, следовательно, амплитуда помехи a уменьшится примерно в $\omega\tau$ раз. Это означает что для помехи с частотой ω равной 1 с^{-1} , амплитуда помехи уменьшится в 1000 – 2000 раз, т.е. помеха в 100 Гал, пройдя через такую систему, на выходе будет равна 100 мГал. В то же время будет наблюдаться и сдвиг фазы на величину равную $-\frac{\pi}{2}$. Таким образом, системы, которые описываются дифференциальным уравнением 1-го порядка, интегрируют входной сигнал.

Лекция 9. Фильтрация сигналов. Ошибки.

1. Выбираемые параметры фильтра определяются в первую очередь поставленной задачей и формой фильтруемого сигнала. В этом разделе будем под сигналом понимать аномальное поле силы тяжести Δg , которое является функцией расстояния, а при измерении на подвижном основании будет и функцией времени:

$$\Delta g(s) = \Delta g(vt + s_0) = \Delta g(t),$$

где v – скорость носителя, s_0 – начальное положение носителя. Форма сигнала может быть самой разнообразной, и к тому же этот сигнал осложнен помехой, в частности вертикальными возмущающими ускорениями $z(t)$. Ставится задача наилучшим образом воспроизвести форму полезного сигнала. Однако, проходя через фильтр, сигнал искажается. Основные факторы, определяющие ошибку в выходном сигнале, являются запаздывание и сглаживание, т.е. эти факторы определяют динамическую погрешность гравиметра.

2. Если система гравиметра является линейной, то для нее справедливо следующая зависимость между входным и выходным сигналом:

$$x(t) = \int_0^{\infty} h(\xi) [\Delta g(t - \xi) + z(t - \xi)] d\xi.$$

В этом выражении, как и в предыдущей лекции, при рассмотрении входного сигнала не учитываются центростремительное и кориолисово ускорения. Динамическими погрешностями будем называть следующие возникающие ошибки:

$$e_g(t) = \int_0^{\infty} h(\xi) \Delta g(t - \xi) d\xi - \Delta g(t)$$

– разность между откликом системы на входной сигнал силы тяжести и истинной силой тяжести, и

$$e_z(t) = \int_0^{\infty} h(\xi) z(t - \xi) d\xi$$

– погрешность, возникающая при прохождении вертикальных ускорений через систему гравиметра.

3. Рассмотрим следующую модель. Пусть система гравиметра описывается дифференциальным уравнением 3-го порядка, хотя в большинстве случаев системы гравиметров описываются уравнениями 1-го или 2-го порядков,

$$a_0 T^3 \dddot{x} + a_1 T^2 \ddot{x} + T \dot{x} + x = \Delta g + z.$$

Пусть входной сигнал представляет собой линейный фон:

$$\Delta g(t) = \Delta g_0 + W_{xz} \cdot vt.$$

В этой формуле W_{xz} – горизонтальный градиент силы тяжести, v – скорость перемещения гравиметра (скорость судна). Отклик гравиметра на такой входной сигнал будет та же линейная функция, но сдвинутая на некоторое время C :

$$x(t) = \Delta g_0 + W_{xz} \cdot v(t - C).$$

Подставим это выражение в уравнение системы гравиметра:

$$W_{xz} v T + \Delta g_0 + W_{xz} v(t - C) = \Delta g_0 + W_{xz} vt.$$

Следствием из этого уравнения является то, что $C = T$, т.е. это и есть время запаздывания. Это справедливо для установившегося процесса, в котором к определенному моменту времени все переходные процессы закончились. Для динамической ошибки e_g получим:

$$e_g = x - \Delta g = \Delta g_0 + W_{xz} v(t - T) - (\Delta g_0 + W_{xz} vt) = -W_{xz} vT.$$

4. Пример. Пусть $W_{xz} = 50 \text{ Э} = 5 \text{ мГал/км}$, и пусть $v = 10$ узлов, что соответствует скорости в 5 м/с или 0,005 км/с. Положим время запаздывания равным 5 минутам ($T = 300$ с). В этом случае ошибка e_g будет равна:

$$e_g = -5 \cdot 0,005 \cdot 300 = 7,5 \text{ мГал.}$$

5. Рассмотрим следующий тест, в котором входной сигнал представляется в виде синусоидальной модели:

$$\Delta g(t) = \frac{\Delta g_0}{2} (1 - \cos ks).$$

Здесь $s = vt$ – расстояние, зависящее от скорости судна и времен, k – волновое число $k = \frac{2\pi}{L}$, L – период волны. С учетом этих замечаний для модели можно записать:

$$\Delta g(t) = \frac{\Delta g_0}{2} (1 - \cos \frac{2\pi}{L} vt) = \frac{\Delta g_0}{2} (1 - \cos \omega t).$$

Пусть $\Delta g_0 = 15 \text{ мГал}$, $L = 5$ миль, $v = 10$ узлов (напомним, что скорость в 1 узел соответствует скорости 1 мили в час). Круговая частота ω , соответствующая этой модели будет равна $\omega = \frac{2\pi}{1800c} = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$.

Вертикальные ускорения для этого теста представим, как $\ddot{z} = \ddot{z}_0 \cos \omega t$, и значение частоты ω положим равной 1 с^{-1} .

6. Рассмотрим исходное дифференциальное уравнение гравиметра 3-го порядка как систему из трех дифференциальных уравнений 1-го порядка, соединенных в цепочку:

$$\rightarrow \boxed{\Gamma_0} \rightarrow \boxed{\Gamma_0} \rightarrow \boxed{\Gamma_0} \rightarrow$$

Здесь Γ_0 – передаточная функция одного звена, $\Gamma_0(p) = \frac{1}{\tau p + 1}$. Соответственно трехзвенная цепочка, представляющая исходное дифференциальное уравнение будет иметь следующую передаточную функцию:

$$\Gamma(p) = \left(\frac{1}{\tau p + 1} \right)^3,$$

а n -звенная – $G(p) = \left(\frac{1}{\tau p + 1}\right)^n$. τ – постоянная времени одного звена. Соответствующее дифференциальное уравнение представится в следующем виде:

$$x + n\tau \dot{x} + \frac{n(n-1)}{2!} \tau^2 \ddot{x} + \dots = \Delta g.$$

Таким образом, постоянная времени всей цепи $T = n\tau$. В зависимости от количества звеньев постоянная времени цепочки T в n раз больше постоянной времени τ одного звена.

7. Для частотной характеристики n -звенной цепочки можно написать

$$G(i\omega) = \left(\frac{1}{i\omega\tau + 1}\right)^n,$$

и, соответственно, для амплитудно-частотной и фазово-частотной характеристик:

$$\lambda(\omega) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}\right)^n, \quad \varphi(\omega) = -n \operatorname{arctg} \tau\omega.$$

8. Наш тестовый сигнал, проходящий через такую цепочку, на выходе будет иметь вид:

$$x(t) = \frac{\Delta g_0}{2} [1 - \lambda(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))] + \frac{z_0}{(\tau\omega)^n} \cos(\omega t - n\frac{\pi}{2}).$$

Когда ω мало, то $\varphi(\omega) = -n\tau\omega$, и, если в то же время $\tau\omega \gg 1$, то

$$x(t) \approx \frac{\Delta g_0}{2} (1 - \lambda(\omega) \cos \omega(t - n\tau)) + \dots$$

9. Как осуществить выбор параметров n и τ ? Для этого потребуем, что бы вертикальные ускорения были подавлены в 1000000 раз, т.е. ускорения амплитудой в 100 Гал на выходе не превышали бы 0,1 мГал. Это означает, что для данной частоты $\lambda(\omega) = 10^{-6}$ (120 дБ). Пусть $n = 3$, $\tau = 100$ с и $\omega = 1$ с⁻¹, тогда $\lambda(\omega) \approx \frac{1}{(\tau\omega)^n} = \frac{1}{(300)^3} \approx 3,7 \cdot 10^{-8}$, т.е.

фильтр с запаздыванием $T = n\tau = 300$ с = 5 мин заведомо обеспечивает подавление помехи в 120 дБ. Рассмотрим, что будет происходить с полезным сигналом. В нашем примере круговая частота полезного сигнала равна $3,5 \cdot 10^{-3}$. Рассчитаем значение амплитудной характеристики для данной частоты:

$$\lambda(\omega) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}}\right)^n = (1 + \tau^2 \omega^2)^{-\frac{3}{2}} \approx 1 - \frac{3}{2}(\tau\omega)^2 = 1 - \frac{3}{2} 0,35^2.$$

Полученный результат означает, что подавление амплитуды полезного сигнала заданной частоты будет равно

$$1 - \lambda(\omega) = \frac{3}{2} 0,35^2 \approx 0,18,$$

т.е. амплитуда полезного сигнала будет подавлена на 18%. Для нашего примера амплитудная ошибка составит $(15 \text{ мГал}) \cdot 0,18 \approx 3 \text{ мГал}$.

10. Рассмотрим цепочку из звеньев 2-го порядка

$$u \rightarrow \boxed{\Gamma_0} \rightarrow x \rightarrow \boxed{\Gamma_0} \rightarrow \boxed{\Gamma_0} \rightarrow$$

в каждом звене которой входной и выходной сигналы удовлетворяют дифференциальному уравнению 2-го порядка:

$$\tau^2 \ddot{x} + 2\zeta \tau \dot{x} + x = u.$$

Для получения выражения передаточной функции и частотной характеристики отдельного звена сделаем следующие выкладки:

$$(\tau^2 p^2 + 2\zeta \tau p + 1)x = u; \quad x = (1 + 2\zeta \tau p + \tau^2 p^2)^{-1} u;$$

$$\Gamma_0(p) = \frac{1}{1 + 2\zeta \tau p + \tau^2 p^2}, \quad \Gamma_0(i\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta i \tau \omega - \tau^2 p^2}.$$

n -звенная цепочка будет иметь следующую передаточную функцию

$$\Gamma(p) = (1 + 2\zeta \tau p + \tau^2 p^2)^{-n},$$

а соответствующая амплитудно-частотная характеристика –

$$\begin{aligned} \lambda(\omega) &= \left[(1 - \tau^2 \omega^2)^2 + 4\zeta^2 \tau^2 \omega^2 \right]^{\frac{n}{2}} = \left[1 - 2\tau^2 \omega^2 + \tau^4 \omega^4 + 4\zeta^2 \tau^2 \omega^2 \right]^{\frac{n}{2}} = \\ &= \left[(1 + \tau^4 \omega^4) + (4\zeta^2 - 2)\tau^2 \omega^2 \right]^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Для того, чтобы получить характеристику с большей крутизной, следует избавиться от второго слагаемого $(4\zeta^2 - 2)\tau^2 \omega^2$. Это возможно при $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$, и

$$\lambda(\omega) = (1 + \tau^4 \omega^4)^{\frac{n}{2}}.$$

Фазовая характеристика одного звена будет определяться следующим образом:

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{\sqrt{2}\tau\omega}{1 - \tau^2 \omega^2},$$

а фазовая характеристика n -звенной цепочки:

$$\varphi(\omega) = -n \arctg \frac{\sqrt{2}\tau\omega}{1 - \tau^2 \omega^2}.$$

Время запаздывания определяется для каждой частоты своим значением фазы и при ω , стремящимся к нулю, будет равно:

$$T = -\frac{\varphi(\omega)}{\omega} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \sqrt{2n}\tau.$$

11. Рассмотрим пример. Пусть $T = 5$ мин = 300 с, и $n = 3$, т.е. цепочка состоит из трех звеньев. В этом случае значение τ соответствует значению 70 с ($\tau = \frac{300}{3\sqrt{2}}$). Рассмотрим, что произойдет с полезным сигналом при этих параметрах фильтра. При частоте полезного сигнала $\omega = 3,5 \cdot 10^{-3}$ с⁻¹ $\lambda(\omega) \approx 1 - \frac{3}{2}(\tau\omega)^4 \approx 0,995$, т.е. амплитудное искажение полезного сигнала составит 0,5%, и при амплитуде полезного сигнала в 15 мГал составит 0,075 мГал ($|e_g| = 0,075$ мГал). Для помехи с частотой $\omega = 1$ с⁻¹ получим $\tau\omega = 70$, $\lambda(\omega) \approx \frac{1}{(\tau\omega)^6} \approx 8,5 \cdot 10^{-12} < 1 \cdot 10^{-11}$. Стоит еще раз отметить, что запаздывание является функцией частоты.

12. В морской гравиметрии большое применение нашли фильтры Баттерворта (Butterworth). Эти фильтры имеют наиболее плоскую АЧХ в полосе пропускания с частотой среза $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$. АЧХ таких фильтров определяется следующим образом:

$$\lambda(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^{2n} \omega^{2n}}}.$$

Соответствующая передаточная функция может быть определена следующим образом:

$$\lambda^2(\omega) = |\Gamma(i\omega)|^2 = \Gamma(i\omega)\Gamma^*(i\omega) = \frac{1}{1 + \tau^{2n} \omega^{2n}},$$

$$\Gamma(i\omega) = \frac{1}{B_n(i\omega\tau)}.$$

$B_n(x)$ – полином Баттерворта. Характерная особенность этих полиномов заключается в том, что их нули на комплексной плоскости располагаются по окружности равномерно. Основные формулы для полиномов:

$$B_n(x) = \prod_{k=1}^{n/2} \left(x^2 + 2x \sin \frac{2k-1}{2n} \pi + 1 \right), \text{ при четном } n,$$

$$B_n(x) = (x+1) \prod_{k=1}^{(n-1)/2} \left(x^2 + 2x \sin \frac{2k-1}{2n} \pi + 1 \right), \text{ при нечетном } n.$$

Так при $n = 2$, $B_2(x) = x^2 + \sqrt{2}x + 1$, для $n = 3$ – $B_3(x) = (1+x)(x^2 + x + 1)$ и т.д.

В развернутом виде полином Баттерворта представляется в виде:

$$B_n(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + \dots + x^n,$$

причем коэффициенты a_k обладают свойствами симметрии: $a_1 = a_{n-1}$, $a_2 = a_{n-2}, \dots, a_k = a_{n-k}$.

13. Передаточная функция фильтра Баттерворта 3-го порядка имеет вид:

$$\Gamma(p) = \frac{1}{\tau^3 p^3 + 2\tau^2 p^2 + 2\tau p + 1}.$$

Отсюда следует, что для АЧХ и ФЧХ фильтра можно записать:

$$\lambda(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^6 \omega^6}}, \quad \varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{2\tau\omega - \tau^3 \omega^3}{1 - 2\tau^2 \omega^2}.$$

Для малых значений $\tau\omega$

$$\lambda(\omega) \approx 1 - \frac{1}{2} \tau^6 \omega^6, \quad \varphi(\omega) \approx -2\tau\omega.$$

Время запаздывания такого фильтра $T = 2\tau$.

14. Рассмотрим пример. Пусть частота среза $\omega_0 = 0,01 \text{ с}^{-1}$, т.е. $\tau = 100 \text{ с}$. Тогда время запаздывания $T = 200 \text{ с}$. Амплитудная погрешность для полезного сигнала с частотой $\omega = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ будет равна

$$1 - \lambda = \frac{1}{2} \tau^6 \omega^6 = \frac{1}{2} 0,35^6 \approx 0,92 \cdot 10^{-3} \approx 0,1\%.$$

Таким образом, амплитудная погрешность у такого фильтра практически отсутствует. Для помехи с частотой $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$ получим $\lambda \approx (\tau\omega)^{-3} = 10^{-6}$, что также означает практически полное ее подавление. Основная погрешность такого фильтра в диапазоне нижних частот формируется в основном за счет фазовых искажений:

$$\begin{aligned} e_g &= \frac{\Delta g_0}{2} [1 - \lambda(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))] - \frac{\Delta g_0}{2} (1 - \cos \omega t) = \\ &= \frac{\Delta g_0}{2} \cos \omega t - \frac{\Delta g_0}{2} \lambda(\omega) \cos \omega t \cos \varphi + \frac{\Delta g_0}{2} \lambda(\omega) \sin \omega t \sin \varphi = \\ &= \frac{\Delta g_0}{2} [(1 - \lambda(\omega) \cos \varphi) \cos \omega t + \lambda(\omega) \sin \omega t \sin \varphi]. \end{aligned}$$

И окончательно,

$$|e_g| = \frac{\Delta g_0}{2} \sqrt{(1 - \lambda \cos \varphi)^2 + \lambda^2 \sin^2 \varphi} = \frac{\Delta g_0}{2} \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos \varphi}.$$

Эта ошибка может достигать больших величин. С учетом амплитудной и фазовой погрешности выражение для общей ошибки будет иметь вид:

$$e_g = \frac{\Delta g_0}{2} [1 - \lambda \cos(\omega t + \omega T + \varphi)] - \frac{\Delta g_0}{2} (1 - \cos \omega t),$$

$$|e_g| = \frac{\Delta g_0}{2} \sqrt{1 + \lambda^2 - 2\lambda \cos(\varphi + T\omega)}.$$

Таким образом, если амплитудная погрешность может быть сведена до минимума, то фазовая погрешность существует и ее необходимо учитывать. Возможность практически полного подавления помехи с практически малой амплитудной погрешностью полезного сигнала в полосе пропускания делают этот фильтр популярным в морской гравиметрии.

Лекция 10. Восстановление сигнала. Цифровые фильтры.

1. В предыдущих лекциях было показано, что при прохождении сигнала через гравиметр и фильтры может происходить следующее. Во-первых, происходит подавление высокочастотных вертикальных ускорений, и выходной сигнал может их практически не содержать. Во-вторых, проходя через гравиметр, полезный сигнал искажается в зависимости от АЧХ гравиметра, и выходной сигнал отличается от полезной составляющей входного сигнала. Таким образом, возникает задача по выходному сигналу восстановить полезный входной сигнал, т.е. задача восстановления сигнала.

2. Задача восстановления полезного сигнала может быть осуществлена разными способами. Одни из них – лучше, другие – хуже. Например, возможно просто сместить выходной сигнал на некоторое время, учитывающее время запаздывания. При таком способе восстановления сигнала предполагается, что при прохождении полезного сигнала через гравиметр все пропущенные гармоники не изменили своей амплитуды (АЧХ гравиметра постоянна), а фазовый сдвиг для всех пропущенных гармоник одинаков (ФЧХ постоянна). Такой способ восстановления сигнала нельзя назвать оптимальным, поскольку в нем не учитываются динамические особенности гравиметра. Можно ввести поправку за время запаздывания следующим образом. Пусть система гравиметра описывается дифференциальным уравнением 1-го порядка:

$$T\dot{x} + x = \Delta g + \ddot{z}.$$

Производную \dot{x} в момент времени t_k можно представить приближенным образом

$$\Delta x(t_k) \approx T\dot{x}(t_k) \cong \frac{T[x(t_k + \theta) - x(t_k - \theta)]}{2\theta},$$

где θ - некоторый временной интервал. В этом случае, для искомого сигнала Δg можно написать:

$$\Delta g(t_k) = x(t_k) + \frac{T}{2\theta} [x(t_k + \theta) - x(t_k - \theta)] = \frac{T}{2\theta} x(t_k - \theta) + x(t_k) + \frac{T}{2\theta} x(t_k + \theta).$$

3. В общем виде для системы гравиметра можно написать, что входной и выходной сигналы связаны некоторым дифференциальным уравнением, которое в операторной записи будет иметь вид:

$$\Gamma(p)x(t) = \Delta g(t) + \ddot{z}(t).$$

Оператор $\Gamma(p)$ вносит динамические погрешности. Можно к выходному сигналу $x(t)$ применить некоторый фильтр с тем, что бы на выходе получить сигнал $y(t)$ наилучшим образом совпадающий с искомым сигналом $\Delta g(t)$:

$$y(t) = W_{\text{фиц}}(p)\{x(t)\}.$$

Можно попытаться пойти и другим путем, т.е. попытаться построить такой фильтр низких частот, что бы на выходе гравиметра был сигнал без фазовых погрешностей:

$$W_0(p)\{\Delta g + z\} = \Delta \tilde{g}$$

В этом случае можно записать

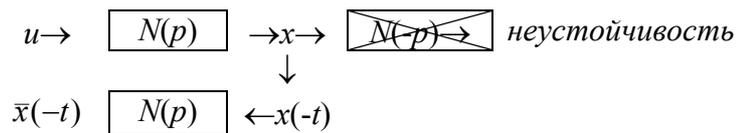
$$W_0(p)\Gamma(p)\{x(t)\} = \Delta \tilde{g}.$$

Это означает, что фильтр низких частот должен удовлетворять соотношению $W_{\text{фиц}} = W_0\Gamma$.

4. Можно ли реализовать такой фильтр в реальном времени? К сожалению, это невозможно. Любой фильтр в реальном времени будет вносить фазовые искажения. Это связано с тем, что для исключения фазовых искажений фильтр низких частот должен иметь только действительную частотную характеристику:

$$W(i\omega) = \frac{1}{|N(i\omega)|^2}.$$

С учетом того, что $i\omega = p$, можно записать $|N(p)|^2 = N(p)N(-p)$. Однако реализация фильтра $N(-p)$ приводит к неустойчивости решения, поэтому можно эту схему реализовать другим путем, а именно пропустить через фильтр с частотной характеристикой $N(p)$ тот же сигнал, но в обратном направлении:



Здесь под u можно понимать показания гравиметра. Но для реализации этой схемы необходимо знать весь сигнал $x(t)$. А такая схема уже не будет схемой реализованной в реальном времени.

5. То, что излагалось в предыдущих разделах, касалось как общих вопросов фильтрации, так и аналоговых вариантов фильтрации. Это связано с тем, что в радиотехнике разработано достаточное количество схем, реализующих различные фильтры. В настоящее время все большее распространение получают цифровые технологии. Появление цифровых технологий и развитие вычислительной техники дает гораздо большее число возможностей для осуществления задачи выделения полезного сигнала. Рассмотрим некоторые положения цифровой фильтрации сигналов применительно к задачам, рассматриваемым в этом курсе.

6. Пусть данные заданы с равномерным временным интервалом h . В нашем случае под этими данными можно понимать сигнал, поступающий с гравиметра. Введем

некоторые обозначения. Будем обозначать значение сигнала во время t_k как k -ый отсчет. Соответственно, $t_k + h = k+1$, $t_k + 2h = k+2$ и т.д. Очень важным в теории цифровой фильтрации является выбор величины временного интервала h . Это связано с точностью аппроксимации сигнала по заданным его значениям. Так, например, всегда можно построить производную сигнала любого порядка по аппроксимационной полиномиальной функции. Если говорить об аппроксимации сигнала с помощью рядов Фурье, то важное значение имеет понятие частоты Найквиста. Это связано с тем, что любой реальный сигнал можно представить только конечным числом отсчетов N . Тогда, наименьшая частота гармоники, которая может участвовать в аппроксимации сигнала будет равна $\frac{2\pi}{Nh}$, а соответствующая ей наибольшая частота будет равна $\frac{2\pi}{2h} = \frac{\pi}{h}$. Это свойство известно в литературе как теорема Котельникова.

7. Начнем с простого случая. Пусть входной сигнал $x(t)$ и выходной сигнал $y(t)$ связаны дифференциальным уравнением 1-го порядка:

$$T\dot{y} + y = x(t).$$

Для заданного дискретного сигнала производную $\dot{y}(t)$ можно представить следующей аппроксимацией:

$$\dot{y}(k) = \frac{y(k) - y(k-1)}{h}.$$

При вычислении производной таким образом всегда возникает вопрос о величине временного интервал h . С одной стороны для более точного вычисления значения производной интервал h следовало бы уменьшить. С другой стороны это может привести к неустойчивости вычисления производной в силу наличия ошибок в исходных значениях. Так что выбор величины h всегда должен определяться практическим путем, в том числе и моделированием сигнала для данной конкретной ситуации.

8. Перепишем исходное уравнение с помощью предложенной аппроксимации производной:

$$\frac{T}{h}[y(k) - y(k-1)] + y(k) = x(k).$$

Заметим, что значение постоянной времени T может быть достаточно большим (100 с и более). Полученное уравнение можно переписать следующим образом:

$$\left(1 + \frac{T}{h}\right)y(k) - \frac{T}{h}y(k-1) = x(k),$$

или

$$y(k) = C_0 x(k) + C_1 y(k-1).$$

Полученное уравнение показывает, что каждый отсчет в выходной последовательности $y(k)$ связан со значениями входной последовательности в тот же момент времени $x(k)$ и предыдущим значением выходной последовательности $y(k-1)$. Такой фильтр носит

название рекурсивного. При этом коэффициенты такого фильтра определяются соотношениями:

$$C_0 = \left(1 + \frac{T}{h}\right)^{-1}, \quad C_1 = C_0 \frac{T}{h},$$

и для них должно выполняться условие $C_0 + C_1 \equiv 1$. При вычислении значений этих коэффициентов необходимо особое внимание уделить точности их вычисления.

9. Как было показано, такой фильтр реализует дифференциальное уравнение 1-го порядка (звено 1-го порядка). С его помощью возможно аппроксимировать фильтр, состоящий из цепочки звеньев. Например, фильтр из трехзвенной цепочки можно получить следующим образом:

$$\begin{aligned} y_1(k) &= C_0 x(k) + C_1 y_1(k-1) \text{ – выходной сигнал первого звена,} \\ y_2(k) &= C_0 y_1(k) + C_1 y_2(k-1) \text{ – выходной сигнал второго звена,} \\ y_3(k) &= C_0 y_2(k) + C_1 y_3(k-1) \text{ – выходной сигнал третьего звена.} \end{aligned}$$

10. Введем операторы смещения: $z\{x(k)\} = x(k+1)$ и $z^{-1}\{x(k)\} = x(k-1)$. Тогда приведенные выше соотношения можно записать:

$$\begin{aligned} (1 - C_1 z^{-1})y_1 &= C_0 x, \\ (1 - C_1 z^{-1})y_2 &= C_0 y_1, \\ (1 - C_1 z^{-1})y_3 &= C_0 y_2. \end{aligned}$$

Дальнейшие выкладки приобретут вид:

$$y_2 = \frac{C_0}{(1 - C_1 z^{-1})} y_1, \quad (1 - C_1 z^{-1})y_3 = C_0 \frac{C_0}{(1 - C_1 z^{-1})} y_1, \quad (1 - C_1 z^{-1})^2 y_3 = C_0^2 y_1,$$

и далее,

$$(1 - C_1 z^{-1})^3 y_3 = C_0^3 x.$$

Это соотношение может быть переписано следующим образом:

$$\begin{aligned} (1 - 3C_1^2 z^{-1} + 3C_1 z^{-2} - C_1^3 z^{-3})y_3 &= C_0^3 x, \\ y_3(k) - 3C_1^2 y_3(k-1) + 3C_1 y_3(k-2) - C_1^3 y_3(k-3) &= C_0^3 x, \end{aligned}$$

или

$$y(k) = C_0^3 x(k) + 3C_1^2 y(k-1) - 3C_1 y(k-2) + C_1^3 y(k-3).$$

11. Сделаем замечание по поводу частотной характеристики цифрового фильтра. Частотную характеристику фильтра, состоящего из трех звеньев 1-го порядка, мы рассматривали на предыдущих лекциях. Однако частотная характеристика цифрового фильтра будет отличаться от частотной характеристики аналогового фильтра. Это связано

с тем, что максимально возможная частота гармоники, участвующей в аппроксимации сигнала, определяется частотой Найквиста и зависит от интервала дискретизации h . Поэтому частотные характеристики цифровых фильтров вычисляются через так называемое z -преобразование. Получаемая в результате частотная характеристика является периодической функцией с периодом, равным 2π . И если при низких гармониках частотные характеристики аналогового и цифрового фильтра практически совпадают, то при более высоких гармониках они начинают расходиться.

12. Аналогично тому, как мы рассматривали фильтр, представляющий собой цепочку из звеньев 1-го порядка, рассмотрим цепочку, состоящую из трех звеньев второго порядка. Для такой системы справедлива запись:

$$\begin{aligned} T^2 \ddot{y}_1 + \sqrt{2T} \dot{y}_1 + y_1 &= x, \\ T^2 \ddot{y}_2 + \sqrt{2T} \dot{y}_2 + y_2 &= y_1, \\ T^2 \ddot{y}_3 + \sqrt{2T} \dot{y}_3 + y_3 &= y_2. \end{aligned}$$

Постоянная времени T определяет частоту среза - $\omega_{cp} = \frac{2\pi}{T}$. Заменим производные их дискретными аналогами:

$$\begin{aligned} h \dot{y}(k) &\cong \frac{3}{2} y(k) - 2y(k-1) + \frac{1}{2} y(k-2), \\ h^2 \ddot{y}(k) &\cong y(k) - 2y(k-1) + y(k-2). \end{aligned}$$

Это не единственный способ численного представления производных, для них можно написать и более простые и более сложные выражения. Цифровой фильтр будет представлен соотношением:

$$y(k) = C_0 x(k) + C_1 y(k-1) + C_2 y(k-2).$$

Коэффициенты фильтра будут определяться следующим образом:

$$C_0 = \left(1 + \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{T}{h} + \frac{T^2}{h^2} \right)^{-1}, \quad C_1 = C_0 \left(\frac{2T^2}{h^2} + 2\sqrt{2} \frac{T}{h} \right), \quad C_2 = C_0 \left(\frac{T^2}{h^2} + \frac{T}{h\sqrt{2}} \right),$$

при этом коэффициенты удовлетворяют условию $C_0 + C_1 + C_2 = 1$.

13. Рассмотрим вопрос о выводе строгих формул для частотных характеристик цифровых фильтров. Передаточная функция $\Gamma(p)$ определяется следующим образом:

$$\Gamma(p) = e^{-pt} \Gamma \left\{ e^{pt} \right\}_{p=i\omega}.$$

Оператор смещения был определен как $z\{x(k)\} = x(k+1)$. Тогда $z\{e^{pt_k}\} = e^{p(t_k+h)}$, и передаточная функция этого оператора будет следующей

$$\Gamma(p) = e^{-pt_k} z\{e^{pt_k}\} = e^{ph}.$$

Следовательно, в данном случае оператор z эквивалентен умножению на e^{ph} . Дискретный аналог фильтра 1-го порядка описывается соотношением:

$$y(k) = C_0 x(k) + C_1 y(k-1).$$

Тогда справедливы следующие выкладки:

$$(1 - C_1 e^{-ph})y(k) = C_0 x(k), \quad y(k) = \frac{C_0}{1 - C_1 e^{-ph}} x(k),$$

и передаточная функция звена будет равна

$$\Gamma(p) = \frac{C_0}{1 - C_1 e^{-pt}}.$$

14. Выражения для частотной и амплитудно-частотной характеристик фильтра 1-го порядка будет иметь вид:

$$\Gamma(i\omega) = \frac{C_0}{1 - C_1 (\cos \omega h - i \sin \omega h)} = \frac{C_0}{(1 - C_1 \cos \omega h) + i C_1 \sin \omega h},$$

$$|\Gamma(i\omega)| = \frac{C_0}{\sqrt{1 - 2C_1 \cos \omega h + C_1^2}}.$$

Для цепочки из трех звеньев получим:

$$\Gamma_1(i\omega) = |\Gamma(i\omega)|^3 = \frac{C_0^3}{(1 - 2C_1 \cos \omega h + C_1^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Для $\omega h \ll 1$, при условии, что $\cos \omega h \approx 1$, $\sin \omega h \approx \omega h$, можно для частотной характеристики написать

$$\Gamma(i\omega) \approx \frac{C_0}{(1 - C_1) + i \omega h C_1}.$$

Так как коэффициенты C_0 и C_1 определяются соотношениями

$$C_0 = \left(1 + \frac{T}{h}\right)^{-1}, \quad C_1 = C_0 \frac{T}{h},$$

получим $C_0 = 1 - C_1 = 1 - \frac{\frac{T}{h}}{1 + \frac{T}{h}} = \frac{1}{1 + \frac{T}{h}}$, и для частотной характеристики можно написать:

$$G(i\omega) \approx \frac{1}{1 + i\omega h \frac{C_1}{C_0}} = \frac{1}{1 + i\omega T},$$

Эта характеристика совпадает с передаточной функцией звена 1-го порядка. Аналогичным образом можно получить частотные характеристики для фильтров и более высокого порядка.

15. До сих пор нами рассматривались алгоритмы фильтрации, основанные на рекурсии, когда выходной сигнал определяется не только входным сигналом, но и предыдущими значениями выходного сигнала. В то же время, если иметь всю временную запись сигнала, то фильтрацию можно осуществить и на нерекурсивных алгоритмах. Эти алгоритмы основаны на описании фильтрации интегралом типа свертки:

$$y(t) = \int_{-\theta}^{\theta} h(\xi)x(t - \xi)d\xi.$$

Дискретный аналог этого интеграла будет иметь вид

$$y(k) = \sum_{j=-n}^n w_j x(k - j),$$

при этом коэффициенты удовлетворяют условию $\sum_{j=-n}^n w_j \equiv 1$. Частотная характеристика такого фильтра определяется видом ядра преобразования $h(\xi)$ в интегральном уравнении

$$\int_{-T}^T h(\xi)(\Delta g(t - \xi) + z(t - \xi))d\xi = \Delta g(t),$$

при этом восстановление сигнала должно быть произведено с приемлемой точностью. Ядро преобразования можно подобрать путем моделирования. Использование такого подхода предполагает, что гравиметр не вносит динамических погрешностей.

16. Для исключения динамических погрешностей необходимо разрабатывать новые алгоритмы. Покажем один из возможных путей решения этой задачи. Пусть система описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$T\dot{x}(t) + x(t) = \Delta g(t) + z(t).$$

Тогда для $\Delta g(t)$ можно записать:

$$\Delta g(t) = \int_{-\theta}^{\theta} h(\xi)(T\dot{x}(t - \xi) + x(t - \xi))d\xi = \int_{-\theta}^{\theta} h(\xi)T\dot{x}(t - \xi)d\xi + \int_{-\theta}^{\theta} h(\xi)x(t - \xi)d\xi.$$

Проинтегрируем первое слагаемое в этом выражении по частям:

$$\int_{-\theta}^{\theta} h(\xi) \dot{x}(t - \xi) d\xi = h(\xi) x(t - \xi) \Big|_{-\theta}^{\theta} + \int_{-\theta}^{\theta} \dot{h}(\xi) x(t - \xi) d\xi.$$

Дальнейшие преобразования будут иметь вид:

$$\Delta g(t) = \int_{-\theta}^{\theta} h(\xi) (T\dot{x}(t - \xi) + x(t - \xi)) d\xi = \int_{-\theta}^{\theta} (T\dot{h}(\xi) + h(\xi)) x(t - \xi) d\xi = \int_{-\theta}^{\theta} h_0(\xi) x(t - \xi) d\xi,$$

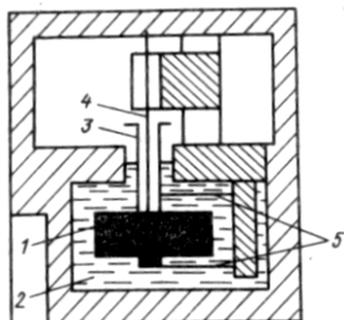
где $h_0(\xi) = T\dot{h}(\xi) + h(\xi)$ - ядро преобразования, исключающее динамические погрешности. Результат такой фильтрации во многом определяется выбором функции $h(\xi)$, для чего необходимо моделировать как полезный сигнал, так и помеху.

17. Стоит отметить, что разработка алгоритмов восстановления сигнала является очень важным направлением в гравиметрии, которое постоянно развивается.

Лекция 11. Гравиметры. Струнный гравиметр.

1. Все приборы для измерения силы тяжести основаны на взвешивании пробной массы (пробного тела). Это пробное тело должно удерживаться в корпусе прибора (опора). Состояние пробного тела служит мерой гравитационного поля. Можно фиксировать или смещение пробного тела, или силу, которую необходимо приложить к телу, чтобы удерживать его в положении равновесия. Эти силы могут быть силой натяжения, электростатического типа и т.п., но не гравитационного. Принципиально важен тот факт, что эти приборы обладают только одной степенью свободы движения пробного тела, а направление перемещения совпадает с осью чувствительности прибора.

2. Реально существующие гравиметры: BGM (США); струнный гравиметр VS MIT (США); KSS-10 (ФРГ), в котором пробное тело удерживается электромагнитными силами; SL L&R – гравиметры фирмы Лакоста и Ромберга. Все эти приборы имеют фиксированную ось чувствительности. Существуют также гравиметры Японии, Китая, но они не получили широкого распространения. В России (СССР) был создан ряд гравиметров для измерения силы тяжести на море и в воздухе (аэрогравиметрия). Созданием гравиметров занимались многие научные институты – ин-т Физики Земли, ВНИИГеофизика, ГАИШ и другие. Рассмотрим основные идеи, заложенные в различные типы гравиметров, и начнем со струнного гравиметра.



3. Во ВНИИГеофизике под руководством А.М. Лозинской разрабатывался струнный гравиметр ГСД (гравиметр струнный демпфированный) для аэрогравиметрии. Принципиальное устройство гравиметра следующее. Струна 4 - полоска из бериллиевой бронзы - помещена в трубку 3. Струна сварена с танталовым грузом 1 (пробное тело). Груз помещен в вязкую жидкость 2. Горизонтальные перемещения пробного тела ограничены пружинами 5, имеющими вид пластин. Частота f собственных колебаний такой струны определяется соотношением:

$$f = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

где l – длина струны, ρ – удельная масса струны, T – ее натяжение, которое определяется весом пробного тела, и соответственно зависит от силы тяжести.

4. Здесь уместно сделать следующее замечание. Как известно, гравиметры подразделяются на два типа – динамические и статические. К числу динамических относятся маятниковые гравиметры, в которых определяется период колебаний маятника, и баллистические, в которых определяются время прохождения определенного расстояния пробным телом при падении. В статических гравиметрах определяется сила натяжения пружины, которая удерживает пробное тело в положении равновесия. Здесь возникает вопрос, к какому типу относится струнный гравиметр? С одной стороны, в этих гравиметрах определяется частота колебаний струны, которая связана с силой тяжести так же, как и период гравиметрического маятника. Но маятниковый прибор – гравиметр явно динамического типа. По этой причине и струнные гравиметры часто относят к динамическим гравиметрам. Но это не так. Дело в том, что струна в этих гравиметрах по своей сути играет роль пружины, удерживающей массу в положении равновесия. Удлинение (растяжение) пружины связано с ее натяжением законом Гука $T = kx$, k – коэффициент жесткости пружины. Тем самым значение частоты собственных колебаний струны определяется ее растяжением x . А такие гравиметры относятся к приборам статического типа.

5. Натяжение струны T определяется весом пробного тела и дополнительной упругой силой, возникающей при взаимодействии струны с корпусом прибора,

$$T = mg + T_0 = m \left(g + \frac{T_0}{m} \right) = mG.$$

Параметр $G = g + \frac{T_0}{m}$ можно назвать динамической силой тяжести. Тогда для натяжения струны справедливо, что $T = mG$, а для частоты собственных колебаний

$$f = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{mG}{\rho}}.$$

Это означает, что частота колебаний прямо пропорциональна квадратному корню из G .

6. Принцип измерения силы тяжести струнным гравиметром состоит в следующем.

Пусть $g = g_0$, тогда $G_0 = g_0 + \frac{T_0}{m}$, а соответствующую этому значению g частоту примем за

опорную: $f = f_{on}$. Тогда $\left(\frac{f}{f_{on}} \right)^2 = \frac{G}{G_0}$. Последующие преобразования будут иметь вид:

$$\frac{f^2 - f_{on}^2}{f_{on}^2} = \frac{G - G_0}{G_0} = \frac{\Delta g}{G_0},$$

где $\Delta g = G - G_0 = g - g_0$. Следовательно $\Delta g = G_0 \frac{f^2 - f_{on}^2}{f_{on}^2}$. Далее,

$f^2 - f_{on}^2 = [(f - f_{on}) + f_{on}]^2 - f_{on}^2 = 2f_{on}(\Delta f) + (\Delta f)^2$, где $\Delta f = f - f_{on}$. Тогда для Δg можно записать:

$$\Delta g = \frac{2G_0}{f_{on}} \left(\Delta f + \frac{\Delta f^2}{2f_{on}} \right) = C\Delta f + C_1\Delta f^2.$$

Здесь множители C и C_1 – масштабные, и с их помощью осуществляется перевод изменения частоты в приращение силы тяжести.

7. Так как в реальных ситуациях значение параметра T_0 не известно, то струнные гравиметры необходимо эталонировать с целью определения коэффициентов C и C_1 . Помимо этого, как у любой механической системы, ее параметры могут меняться во времени. Поэтому и в этих гравиметрах также необходимо учитывать сползание нуля-пункта. Кроме того, т.к. в точке наблюдения определяется частота колебаний струны, то для определения этой частоты нужно время. Рассмотрим пример. Пусть $T_0 = 0$, $G_0 = 10^6$ мГал, а опорная частота $f_0 = 1000$ Гц, тогда $\Delta g = 2 \cdot 10^3 \Delta f + (\Delta f)^2$. Это означает, что изменение частоты на 1 Гц будет соответствовать изменению силы тяжести на $2 \cdot 10^3$ мГал. Таким образом, для получения сотых мГал, необходимо измерять частоту с высокой точностью.

8. Все предыдущие рассуждения были справедливы для неподвижного гравиметра. При вертикальном движении гравиметра натяжение струны T будет переменной величиной. Продольные колебания струны подчиняются закону линейного осциллятора:

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = m(g + w_z) + T_0 = m(G + w_z),$$

где параметр m характеризует массу груза, подвешенного к струне, h – вязкость среды, k – упругие свойства струны. Мгновенное натяжение струны определяется, согласно закону Гука, выражением

$$T = kx = m(g + w_z) + T_0.$$

Тогда, величину растяжения можно представить следующим образом:

$$x = \frac{T}{k} = \frac{m}{k} g^*.$$

Подставим это выражение в уравнение колебаний струны:

$$\frac{m^2}{k} \ddot{g}^* + h \frac{m}{k} \dot{g}^* + mg^* = m(G + w_z),$$

или, введя обозначения $\tau_1^2 = \frac{m}{k}$, $\tau = \frac{h}{k}$, последнее уравнение можно представить в следующем виде:

$$\tau_1^2 \ddot{g}^* + \tau \dot{g}^* + g^* = G + w_z.$$

Мгновенная частота колебаний струны будет определяться соотношением:

$$f = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{\rho}} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{kx}{\rho}} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{mg^*}{\rho}}.$$

Эта формула аналогична той, которая была написана для неподвижного гравиметра.

9. Исходя из полученного уравнения колебательного движения струны, для введенной нами ускорения силы тяжести g^* можно написать:

$$g^* = (\tau_1^2 D^2 + \tau D + 1)^{-1} \{G + w_z\} \approx G + w_z^*.$$

Последняя запись в приближенном уравнении объясняется тем, что параметр G меняется медленно, т.е. с низкой частотой, и он проходит через систему практически без искажений. В то же время, для вертикального ускорения w_z , меняющегося с высокой частотой, динамическими искажениями, возникающими при прохождении сигнала, пренебрегать нельзя, и, поэтому,

$$w_z^* = (1 + \tau D + \tau_1 D^2) \{w_z\}.$$

По абсолютному значению величина w_z^* должна удовлетворять условию $|w_z^*| \ll |w_z|$. Для выполнения этого условия необходимо увеличивать значение h , т.е. значение коэффициента трения, а для этого и необходима жидкость, в которую следует погрузить пробное тело.

10. Для струнного гравиметра, неподверженного возмущающим ускорениям, было получено соотношение, связывающее приращение силы тяжести с изменением частоты:

$$\Delta g = C \cdot \Delta f + C_1 \cdot \Delta f^2.$$

Для сигнала, осложненного вертикальными ускорениями \mathcal{U} , это соотношение может быть переписано в следующем виде:

$$\Delta g + w_z^* = C \cdot \Delta f + C_1 \cdot \Delta f^2.$$

Так как частота измеряется в течении некоторого времени, то происходит ее усреднение, и значение приращения частоты рассматривается как разность между средней частотой в точке наблюдения и опорной частоты:

$$\Delta f = \bar{f} - f_{on}.$$

Поэтому и выражение для измеренного значения Δg , приобретает вид:

$$\Delta g_{изм} = \Delta g + \overline{w_z^*} + \frac{\overline{(w_z^*)^2} - (\overline{w_z^*})^2}{4g}.$$

Это выражение, в частности, отмечает тот факт, что измеренная величина приращения силы тяжести $\Delta g_{изм}$ искажена влиянием вертикальных возмущающих ускорений, и третье слагаемое в этом выражении соответствует поправке Броуна.

11. Рассмотрим два предельных случая. Первый, когда интервал усреднения частоты – очень мал. Тогда

$$\overline{(w_z^*)^2} \cong (\overline{w_z^*})^2,$$

и, как следствие $\Delta g_{изм}$ будет равно $(\Delta g + \overline{w_z^*})$. Во втором случае, интервал осреднения частоты – достаточно большой. Тогда $\overline{(w_z^*)^2} \approx 0$, и для $\Delta g_{изм}$ можно записать следующее соотношение:

$$\Delta g_{изм} = \Delta g - \frac{\overline{(w_z^*)^2}}{4g}.$$

Это означает, что измеренные значения силы тяжести будут искажены за счет возмущающих вертикальных ускорений, и учет их достигается введением поправки Броуна (второй член в уравнении).

12. Отметим основной недостаток струнных гравиметров. Как показал опыт, очень часто изменение отсчетов во времени у таких гравиметров происходит скачкообразно (ступенчато), что связано с резким изменением внутренних характеристик струны. Вопрос о том, когда такой момент наступает и как его учитывать, остается проблемой.

Лекция 12. Морские гравиметры рычажного типа.

1. В морской гравиметрии струнные гравиметры не получили распространения. Исторически, появление морских набортных гравиметров связано с развитием сухопутных приборов, приспособленных для морских измерений. Рассмотрим основные принципы, заложенные в конструкции морских гравиметров. Первым гравиметром, патриархом морских Советских (Российских) гравиметров, был аналог американского гравиметра Норгарда. Принцип, заложенный в этот тип гравиметров, заключен в том, что к горизонтально расположенной нити прикреплен рычаг (маятник), и это рычаг (маятник) в опорном пункте наблюдений под действием упругих сил нити также находится в горизонтальном положении. При изменении силы тяжести маятник отклоняется от положения горизонта, и фиксируется этот угол отклонения. Т.к. угол отклонения маятника при малых изменениях действующей силы изменяется согласно закону Гука,

т.е. прямо пропорционально приложенной силе, то это угол и является откликом системы на изменение силы тяжести.

2. Выпишем уравнение, которому удовлетворяет такая система. Момент силы, создаваемый весом пробной массы m , расположенной на конце рычага на расстоянии a от нити (оси вращения), и углом отклонения рычага φ от горизонтального положения, представляется в следующем виде:

$$M(\varphi) = mga \cos \varphi .$$

Момент, создаваемый закрученной нитью, будет зависеть помимо угла отклонения φ рычага от некоторого фиксированного в корпусе прибора положения, также и от начального угла закручивания Φ , необходимого для удержания маятника в горизонтальном положении, и коэффициента жесткости нити k :

$$m(\varphi) = k(\Phi + \varphi) .$$

Из условия равенства моментов следует, что

$$m(\varphi) = M(\varphi) ,$$

и, соответственно,

$$k(\Phi + \varphi) = mga \cos \varphi .$$

3. Пусть $g = g_0$ и $\varphi = 0$, тогда $mg_0a = k\Phi$. Из полученного уравнения можно написать:

$$\frac{ma}{k} = \frac{\Phi}{g_0} = \nu_0 .$$

Полученная величина ν_0 можно назвать номинальной угловой чувствительности.

Рассмотрим пример. Пусть угол $\Phi = 10$ рад = 573° , $g_0 = 10^6$ мГал, тогда $\nu_0 = \frac{10 \text{ рад}}{10^6 \text{ мГал}} =$

$\frac{(2 \cdot 10^6)''}{10^6 \text{ мГал}} = \frac{2''}{\text{мГал}}$. В настоящее время умеют делать системы со значением номинальной чувствительности равным $1'' \text{ мГал}^{-1}$.

4. Из уравнения $k(\Phi + \varphi) = mga \cos \varphi$ можно получить следующее соотношение:

$$\Phi + \varphi = \frac{mga}{k} \cos \varphi = \Phi \frac{g}{g_0} \cos \varphi .$$

Отсюда следует, что $\varphi = \Phi \left(\frac{g}{g_0} \cos \varphi - 1 \right)$, или $\varphi = \nu_0 (g \cos \varphi - g_0)$, т.е. величина угла

отклонения рычага от горизонта связана с изменением силы тяжести Δg . Для чувствительности упругой системы можно написать следующие выражение:

$$\nu(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial g} = \nu_0 \left(\cos \varphi - g \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial g} \right) = \nu_0 (\cos \varphi - \nu g \sin \varphi).$$

Дальнейшие преобразования:

$$(1 + \nu_0 g \sin \varphi) \nu = \nu_0 \cos \varphi, \quad \nu = \nu_0 \frac{\cos \varphi}{1 + \nu_0 g \sin \varphi}.$$

Характер изменения чувствительности в зависимости от наклона маятника будет следующим: при $\varphi = 0$ чувствительность системы будет равна номинальной $\nu = \nu_0$. При значения угла φ меньше нуля ($\varphi < 0$) чувствительность системы будет выше номинальной ($\nu > \nu_0$), а при значения угла φ больше нуля ($\varphi > 0$) чувствительность системы будет ниже номинальной ($\nu < \nu_0$). При некотором значении угла $\varphi \sin \varphi = -\frac{1}{\nu_0 g}$, и значение чувствительности вырастает до бесконечности, рычаг опрокидывается.

5. Угол отклонения рычага от горизонта может быть измерен только относительно корпуса прибора. Если корпус прибора наклонен на некоторый угол α , то момент силы, создаваемый весом грузика m , будет представлен следующим образом:

$$M(\varphi) = mga \cos(\varphi + \alpha),$$

соответственно, выражения для угла φ и чувствительности ν приобретут вид:

$$\varphi = \nu_0 (g \cos(\varphi + \alpha) - g_0), \quad \nu = \nu_0 \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{1 + \nu_0 g \sin(\varphi + \alpha)}.$$

Эти соотношения показывают, что чувствительность системы зависит не только от угла отклонения маятника от приборного горизонта, но и от угла наклона самого прибора.

6. Рассмотрим динамику упругой системы:

$$J(\ddot{\varphi} + \ddot{\alpha}) + h\dot{\varphi} + k(\varphi + \Phi) = m(g + w_z)a \cos(\varphi + \alpha) + mw_x a \sin(\varphi + \alpha).$$

В этом уравнении J – момент инерции, h – коэффициент трения маятника относительно корпуса прибора, k – коэффициент крутильной жесткости нити. Сделаем следующие преобразования в предположении малого угла φ :

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \alpha) &= \cos \varphi \cos \alpha - \sin \varphi \sin \alpha = \cos \alpha - \varphi \sin \alpha, \\ \sin(\varphi + \alpha) &= \sin \alpha + \varphi \cos \alpha. \end{aligned}$$

Теперь исходное уравнение можно переписать так:

$$J(\ddot{\varphi} + \ddot{\alpha}) + h\dot{\varphi} + k(\varphi + \Phi) = mga \cos(\varphi + \alpha) + mw_z a (\cos \alpha - \varphi \sin \alpha) + mw_x a (\sin \alpha + \varphi \cos \alpha).$$

Далее, с учетом того, что

$$\begin{aligned}w_z \cos \alpha + w_x \sin \alpha &= w_\zeta, \\-w_x \cos \alpha + w_z \sin \alpha &= -w_\xi,\end{aligned}$$

и пренебрегая членом $J\ddot{\alpha}$, поскольку этот член является линейной добавкой к вертикальному ускорению, запишем

$$J\ddot{\phi} + h\dot{\phi} + k(\phi + \Phi) \cong mga \cos(\phi + \alpha) + ma(w_\zeta + \varphi w_\xi).$$

7. Введем обозначения $\frac{h}{k} = \tau$, $\frac{J}{k} = \tau_1^2$. Тогда

$$\tau_1^2 \ddot{\phi} + \tau \dot{\phi} + \phi = \nu_0 g \cos(\phi + \alpha) - \Phi + \nu_0 (w_\zeta + \varphi w_\xi),$$

$$\cos(\phi + \alpha) = 1 - \frac{(\phi + \alpha)^2}{2}, \quad \Phi = \nu_0 g_0,$$

$$\tau_1^2 \ddot{\phi} + \tau \dot{\phi} + \phi = \nu_0 \left[(g - g_0) - \frac{(\phi + \alpha)^2}{2} g_0 + w_\zeta - \varphi w_\xi \right].$$

Номинальная чувствительность ν_0 переводит изменение ускорения силы тяжести в угол. Основная задача состоит в том, чтобы через значение угла φ определить значение g . Но чувствительность гравиметра может меняться в зависимости от наклона гравиметра, и это приводит к дополнительным возмущающим ускорениям.

8. Перепишем полученное соотношение следующим образом:

$$\tau_1^2 \ddot{\phi} + \tau_0 \dot{\phi} + \phi = \nu_0 \left(\Delta g_0 + w_\zeta - g \frac{\alpha^2}{2} \right) + \nu_0 (w_\xi - g \alpha) \varphi - \nu_0 g \frac{\varphi^2}{2}.$$

Первое слагаемое в этой формуле присутствует во всех гравиметрах с фиксированной осью чувствительностью. Второй и третий члены обусловлены колебаниями оси чувствительности.

9. На практике $\tau_1 \ll \tau_0$, и когда нет ускорений $w_\xi = w_\zeta = 0$, $\alpha = \text{const}$, $\varphi^2 \approx 0$, уравнение динамики системы приобретет следующий вид

$$\tau_0 \dot{\phi} + \phi = \nu_0 \left(\Delta g - g \frac{\alpha^2}{2} \right) - \nu_0 g \alpha \varphi.$$

Слагаемое $g \frac{\alpha^2}{2} = \Delta g_\alpha$ учитывает наклон системы. Введем обозначение $\Delta g - g \frac{\alpha^2}{2} = \Delta \tilde{g}$.

Тогда

$$\tau_0 \dot{\phi} + (1 + \nu_0 g \alpha) \varphi = \nu_0 \Delta \tilde{g}.$$

Это уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\frac{\tau_0}{1 + \nu_0 g \alpha} \dot{\phi} + \phi = \frac{\nu_0}{1 + \nu_0 g \alpha} \Delta \tilde{g},$$

или

$$\tau \dot{\phi} + \phi = \nu \Delta \tilde{g},$$

где ν - угловая чувствительность системы при малых углах φ и α .

10. Если $\dot{\phi} = 0$, т.е. рычаг находится в покое, то $\phi = \nu \Delta \tilde{g}$. Это означает, что отклонение маятника системы определяется угловой чувствительностью. Если положить $\Delta \tilde{g} = 0$, то решение однородного дифференциального уравнения $\tau \dot{\phi} + \phi = 0$, будет следующим:

$$\phi = \phi_0 e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Здесь τ - постоянная времени ($\tau = \frac{\tau_0}{1 + \nu_0 g \alpha}$), зависящая от положения рычага относительно горизонта, т.е. от угла α . Отметим, что отношение $\frac{\nu}{\tau}$ - постоянно ($\frac{\nu}{\tau} = const$).

11. Вернемся к полученному ранее дифференциальному уравнению

$$\tau_1^2 \ddot{\phi} + \tau_0 \dot{\phi} + \phi = \nu_0 \left(\Delta g_0 + w_\zeta - g \frac{\alpha^2}{2} \right) + \nu_0 (w_\xi - g \alpha) \phi - \nu_0 g \frac{\phi^2}{2}.$$

В предположении, что $\tau_1 \ll \tau_0$ и $\Delta \tilde{g} = \Delta g - g \frac{\alpha^2}{2}$, это уравнение может быть переписано в следующем виде:

$$\tau_0 \dot{\phi} + \phi = \nu_0 \left(\Delta \tilde{g} + w_\zeta + (w_\xi - g \alpha) \phi - g \frac{\phi^2}{2} \right).$$

Отметим следующий факт. Даже в том случае, когда значения угла отклонения рычага от положения приборного горизонта ϕ колеблются относительно нуля, присутствие члена $g \frac{\phi^2}{2}$ приводит к тому, что появляется некоторый уровень, который по своему поведению не будет отличим от характера изменения поля силы тяжести, т.е. возникает систематическая ошибка в измерениях.

12. Пусть $w_\zeta \approx \mathcal{Z}$. Такой ситуации можно добиться на специальном испытательном стенде, когда установленный на этом стенде прибор совершает только вертикальные перемещения. Приращение силы тяжести Δg также будет в этом случае равно нулю. Для уравнения движения рычага маятника можно записать

$$\tau_0 \dot{\varphi} + \varphi = v_0 \dot{z},$$

пренебрегая при этом остальными членами в исходном уравнении. Кроме того, т.к. $|\tau_0 \dot{\varphi}| \gg |\varphi|$, то и это уравнение приобретет вид: $\tau_0 \dot{\varphi} = v_0 \dot{z}$. Отсюда следует, что скорость изменения угла φ связана с величиной вертикального ускорения, а сам угол – прямо пропорционален скорости перемещения системы.

$$\varphi = \frac{v_0}{\tau_0} z.$$

Далее можно записать

$$g \frac{\varphi^2}{2} = \frac{g}{2} v_0 \left(\frac{v_0}{\tau_0} \right)^2 z^2 = K z^2.$$

Таким образом, это слагаемое прямо пропорционально квадрату скорости вертикального перемещения основания. К сожалению, коэффициент K узнать практически невозможно. Поэтому на испытательном стенде надо таким образом отрегулировать прибор, что бы он в наименьшей степени зависел от вертикальной скорости основания. Следует отметить, что этот недостаток присущ всем гравиметрам с фиксированной осью чувствительности. Нелинейность может быть самого разного происхождения. Поэтому необходимо добиваться линейности систем в зависимости от внешних сил, иначе могут возникать систематические ошибки.

13. Рассмотрим следующее возмущающее ускорение второго порядка, для которого, с учетом сглаживающего оператора гравиметра Γ , можем записать:

$$\Gamma(w_{\xi} - g\alpha)\varphi = \Gamma\tilde{w}_{\xi}\varphi = \delta g_{cc}.$$

Компоненту \tilde{w}_{ξ} можно измерить с помощью акселерометра. Угол наклона рычага φ может быть также измерен. Это, на пример, сделано в гравиметре GSS-2, в котором эти величины измеряются и отдельно учитываются. В действительности нас интересует только главная часть ускорения w_{ξ} , для которой можно записать $w_{\xi} \approx \ddot{x}$. С учетом того,

что $\varphi = \frac{v_0}{\tau_0} \dot{z}$, получим

$$\delta g_{cc} = \frac{v_0}{\tau_0} \overline{\ddot{x}\dot{z}},$$

где знак черты означает осреднение. Эффект, связанный с появлением систематической ошибки δg_{cc} носит название кросс-каплинга (cross-coupling). Чем больше величина v_0 тем больше этот эффект. Для его уменьшения следует увеличить значение τ_0 , и обычно эту величину стараются сделать более 1000 с.

14. Рассмотрим пример. Пусть $\ddot{x} = a_x \cos(\omega t)$, $\ddot{z} = a_z \cos(\omega t + \delta)$, тогда

$$\begin{aligned}\delta g_{cc} &= \frac{V_0}{\tau_0 \omega} a_x a_z \overline{\cos(\omega t) \cos(\omega t + \delta)} = \frac{V_0}{\tau_0 \omega} a_x a_z \overline{\cos(\omega t) \cos(\omega t + \delta - \frac{\pi}{2})} = \\ &= \frac{V_0}{2\tau_0 \omega} a_x a_z \cos(\delta - \frac{\pi}{2}) = \frac{V_0}{2\tau_0 \omega} a_x a_z \sin \delta.\end{aligned}$$

δ - разность фаз между вертикальным и горизонтальным ускорениями. Эффект максимален при $\delta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. Пусть $v_0 = 2'' \frac{1}{\text{мГал}} = 10^{-5} \frac{\text{рад}}{\text{мГал}}$, $\tau_0 = 200 \text{ с}$, $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$, $a_x = a_y = 50000 \text{ мГал}$. В этом случае $v_0 = 0,5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{рад}}{\text{мГал}} = 1 \frac{\text{рад} \cdot \text{с}}{\text{м}}$, и эффект за кросс-каплинг будет равен $\delta g_{cc} = \frac{1}{400} \cdot 0,5 \cdot 0,5 = \frac{1}{1600} = 62,5 \text{ мГал}$. Как видно, эта величина – достаточно большая, и ее необходимо учитывать.

15. Рассмотрим две идентичные системы рычажного типа. Ясно, что в таких системах, когда рычаги повернуты в разные стороны, эффекты будут иметь противоположенные знаки, и в одном случае увеличивать значения силы тяжести, а в другом – уменьшать. Это дает способ исключить влияние эффекта кросс-каплинга: гравиметр должен включать две системы, повернутые в разные стороны. Другой путь – использовать два идентичных гравиметра с системами, повернутыми в противоположенные стороны. Средний отчет из показаний таких гравиметров будет свободен от этого эффекта. Для подбора идентичных гравиметров в рабочую пару необходимо их тестировать на специальном орбитальном стенде.

16. Из серийных гравиметров, выпускаемых в бывшем Советском Союзе, гравиметр серии МГК реализовывает изложенные в этой лекции принципы. Этот гравиметр имеет сканирующее устройство для перевода угла отклонения рычага чувствительного элемента в цифровой сигнал и блок вычислительного устройства для предварительной обработки сигнала. Гравиметр имеет стабилизацию силовой платформой.

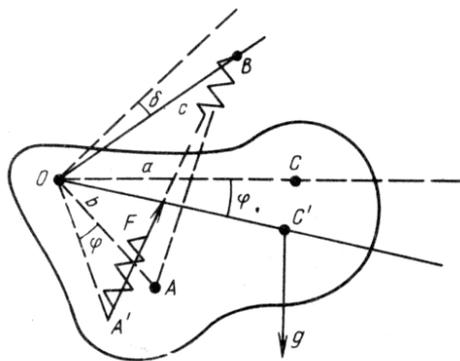
Лекция 13. Гравиметр ГМН-К.

1. Рассмотрим принципиальное устройство морского набортного гравиметра ГМН-К (гравиметр морской набортный кварцевый), разработанный в отделе гравиметрии ВНИИГеофизики в 70-х годах под руководством В.О.Баграмянца. Теоретическое обоснование этого гравиметра было проведено в отделе гравиметрии ГАИШ В.Л.Пантелеевым. Было организовано серийное производство этого гравиметра, и он получил широкое распространение в Советском Союзе. В основу этого гравиметра был положен сухопутный гравиметр ГАК (гравиметр астазированный кварцевый), который был приспособлен для морских наблюдений. Астазирование вводится для повышения угловой чувствительности. В отличие от гравиметров аналогичных гравиметру МГК, здесь применяется компенсационный способ измерения. Следует отметить, что в настоящее время астазирование потеряло свою актуальность, поскольку появились датчики малых перемещений, например, емкостные. В то же время, астазирование приводит к дополнительным проблемам и разного рода неприятностям. Система гравиметра – цельнокварцевая, исключение – рычаг (маятник), который имеет металлическую насадку, которая служит, в том числе, и для температурной компенсации.

2. Плавленный кварц имеет особенность – термоэластический коэффициент, характеризующий относительное изменение крутильной жесткости материала к изменению температуры, у него положителен. При изменении температуры на 1° жесткость кварца увеличивается на 10^{-4} . Эта величина достаточно большая и может привести к ошибкам до 120 мГал/град.

3. Чувствительная система гравиметра опущена в специальное масло. С одной стороны это необходимо для подавления высокочастотных помех. Кроме этого, это масло используется и для температурной компенсации показаний гравиметра. Это связано с тем, что вязкость этого масла относительно мало зависит от температуры, но существует температурная зависимость плотности масла, а именно, с увеличением температуры плотность масла уменьшается. В то же время, жесткость кварца возрастает, что должно найти свое проявление в том, что маятник поднимется. Но, за счет того, что плотность масла стала меньше, архимедова сила выталкивания приводит к тому, что маятник опускается. Таким образом, добиваются температурной компенсации. Тем не менее, поскольку добиться полной температурной компенсации таким образом практически невозможно, то гравиметр необходимо термостатировать, т.е. поддерживать постоянную температуру чувствительной системы.

4. Как уже отмечалось, жидкостная среда создает благоприятные условия для борьбы с вибрациями (высокочастотными помехами). Основные демпфирующие силы возникают между демпфирующими пластинами.



5. Получим уравнение равновесия астазированной системы, представленной на рисунке. OC – рычаг, A – точка, к которой прикреплена пружина, точки O , A и C жестко связаны между собой. Введем обозначения: $OC = a$ – длина рычага, $OA = b$, $OB = c$. $AB = l(\varphi)$. $\angle AOB = \frac{\pi}{2} - \delta$, $\angle A'OB = \frac{\pi}{2} - \delta + \varphi$. Упругая сила F , удерживающая маятник в равновесии, определяется уравнением $F = f(l - l_0)$, где f – коэффициент линейной жесткости, l_0 – первоначальная длина пружины. Момент упругих сил равен:

$$M(\varphi) = F(\varphi) \cdot b \cdot \sin(OA'B).$$

Из теоремы синусов следует:

$$\frac{\sin OA'B}{\sin BOA'} = \frac{OB}{BA'}, \quad \sin OA'B = \frac{OB}{BA'} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta + \varphi\right) = \frac{c}{l} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta + \varphi\right),$$

$$M(\varphi) = F(\varphi) \cdot \frac{bc}{l(\varphi)} \cdot \cos(\varphi - \delta) = f(l - l_0) \frac{bc}{l(\varphi)} \cdot \cos(\varphi - \delta).$$

6. Если предположить, что $l_0 = 0$, то $M(\varphi) = fbc \cdot \cos(\varphi - \delta)$. Если считать, что отсутствует наклон гравиметра, то момент силы тяжести рычага будет равен $M = mga \cos \varphi$. Эти моменты должны компенсировать друг друга при условии равновесия:

$$fbc \cdot \cos(\varphi - \delta) = mga \cos \varphi .$$

Пусть $\varphi = 0$, тогда $fbc \cos \delta = mg_0 a$. Если $\delta = 0$, то $fbc \cos \varphi = mg_0 a \cos \varphi$ или $fbc = mg_0 a$. При любом значении угла φ равновесие достигается только при определенном значении g_0 . Этот случай полного астазирования. Но в то же время это положение неустойчиво. Если, например, значение силы тяжести увеличится ($g > g_0$), то момент M будет больше момента m , что приведет к тому, что рычаг опустится, и наоборот. В реальных системах полного астазирования не добиваются.

7. Уравнение для чувствительности системы $\nu = \frac{\partial \varphi}{\partial g}$ можно получить из уравнения

$$fbc \cdot \cos(\varphi - \delta) = mga \cos \varphi ,$$

продифференцировав его по g :

$$\nu fbc \sin(\varphi - \delta) = ma \cos \varphi - \nu mga \sin \varphi ,$$

$$[mga \sin \varphi - fbc \sin(\varphi - \delta)]\nu = ma \cos \varphi .$$

При угле φ , равном нулю ($\varphi = 0$), чувствительность системы ν будет равна номинальной ν_0 ($\nu = \nu_0$), и, следовательно,

$$fbc \sin \delta \cdot \nu_0 = ma ,$$

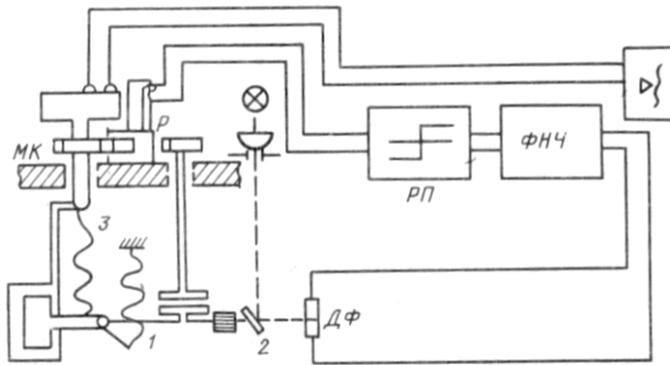
т.е.

$$\nu_0 = \frac{ma}{fbc \sin \delta} .$$

Крутильная жесткость равна $k = fbc \sin \delta$, где f – линейная жесткость. Уменьшение угла δ приводит к увеличению угловой чувствительности.

8. Гравиметр ГМН-К – астазированный. В то время это было нужно для того, чтобы иметь хороший сигнал от светового блика при отклонении маятника от положения равновесия. Принцип измерения в этом приборе, как уже отмечалось, компенсационный. Это означает, что при изменении силы тяжести, которое вызывает отклонение маятника, маятник устанавливается в горизонтальное положение с помощью компенсационной пружины, и сила натяжения этой пружины характеризует изменение силы тяжести. Для этих целей в этом приборе предусмотрена обратная связь, т.е. световой блик устанавливается на нулевой уровень. Делается это электромеханическим путем, для чего устанавливается специальный фоторезистор, с помощью которого фиксируется положение блика.

9. Структурная схема гравиметра представлена на рисунке. Изменение силы тяжести приводит к отклонению рычага 1, на котором расположено зеркало 2. В свою очередь, зеркало отклоняет луч света, падающий от лампы, и посылает его на дифференциальный фоторезистор ДФ. Луч высвечивает на светочувствительном слое площадку, которая в исходном положении разделена на две равные половины. При отклонении рычага освещение площадки смещается, разбаланс светового потока создает электрический



сигнал, который поступает на вход фильтра низких частот $\Phi НЧ$. Сглаженный сигнал поступает на усилитель и релейный преобразователь $РП$, включающий реверсный двигатель. Направление вращения ротора двигателя определяется знаком выходного сигнала $\Phi НЧ$. Двигатель через редуктор $Р$ соединен с микровинтом $МК$, к которому прикреплен верхний конец компенсационной пружины 3

упругой системы. Как только рычаг под действием силы тяжести изменит свое положение, включится двигатель, который будет вращать микровинт до тех пор, пока рычаг не займет исходное положение. Процесс отслеживания микровинтом изменения силы тяжести не безинерционный. Динамика этого процесса подчинена определенным дифференциальным уравнениям. Рассмотрим их.

10. Упругая система гравиметра (УСГ), как и во всех морских гравиметрах, имеет сверхкритическое демпфирование и с высокой точностью описывается дифференциальным уравнением первого порядка. Возмущающей силой является сумма изменения силы тяжести Δg и проекция силы инерции на ось чувствительности, главную часть которой составляют сила инерции, созданная вертикальным ускорением w_z , и компенсационная сила $-\Delta g_k$, образованная упругими связями рычага с корпусом прибора через измерительную пружину и микровинт:

$$\tau \dot{\varphi} + \varphi = \nu_0 (\Delta g - \Delta g_k + w_z).$$

В частном случае, когда основание неподвижно, а рычаг находится в положении равновесия при $\varphi = 0$, получим, что $\Delta g = \Delta g_k$. Это означает, что компенсационная сила упругости компенсационной пружины в точности соответствует измеряемому приращению силы тяжести. В этом и состоит суть компенсационного или “нулевого” метода отсчета.

11. Деформация измерительной пружины измеряется положением микровинта. С учетом масштабного коэффициента, переводящего обороты микровинта в миллигалы, будем измерять положения винта в единицах силы тяжести и обозначать буквой s :

$$s = \Delta g_k + s_0.$$

12. При $\varphi \neq 0$ “сигнал рассогласования” поступает на вход фильтра нижних частот $\Phi НЧ$. В гравиметре ГМН этот фильтр реализован как звено первого порядка. Выражая выходной сигнал фильтра в миллигалах, получим:

$$\tau_1 \dot{\varphi} + \varphi = \frac{\varphi}{\nu_0}.$$

13. Сигнал на выходе релейного преобразователя зависит лишь от знака φ . После усилителя этот сигнал включает двигатель, который вращает микровинт с постоянной

скоростью v_0 . Таким образом, скорость изменения отсчета микровинта гравиметра зависит от $\bar{\varphi}$ следующим образом:

$$\dot{s} = v_0 \operatorname{sign} \bar{\varphi}.$$

Чтобы получить отсчет s , нужно проинтегрировать это уравнение

$$s = \int_0^t \dot{s} dt + s_0,$$

где s_0 – положение микровинта в начальный момент.

14. Для того чтобы замкнуть цепь автоматического регулирования положения рычага, необходимо установить зависимость Δg_k от s . Формула $s = \Delta g_k + s_0$ справедлива лишь при отключенной системе автоматической обратной связи. Рассмотрим случай, когда она включена. Пусть в исходном положении $\bar{\varphi} > 0$ (сила тяжести возросла). Тогда $\dot{s} = v_0$,

согласно уравнению $s = \int_0^t \dot{s} dt + s_0$, отсчет прибора будет меняться по линейному закону

$$s = v_0 t + s_0,$$

и при этом будет расти и компенсационная сила Δg_k . Поскольку этот член входит в уравнение $\tau \dot{\varphi} + \varphi = v_0 (\Delta g - \Delta g_k + w_z)$ со знаком минус, рост Δg_k вызовет уменьшение φ , а, следовательно, и $\bar{\varphi}$. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока $\bar{\varphi}$ не изменит знак на обратный. Однако и упругая система, и фильтр обладают инерцией, и если Δg_k становится равным Δg (это условие при котором статическое положение рычага – исходное, т.е. $\varphi = 0$), отклонение рычага все еще остается положительным. Это видно, если уравнение $\tau \dot{\varphi} + \varphi = v_0 (\Delta g - \Delta g_k + w_z)$ при $w_z = 0$ переписать следующим образом:

$$\varphi = v_0 (\Delta g - \Delta g_k) - \tau \dot{\varphi}.$$

Поскольку $\dot{\varphi} < 0$, то при $\Delta g = \Delta g_k$ угол φ остается больше нуля. Только при $\Delta g_k > \Delta g$ наступает момент, когда угол φ становится равным нулю. Но в этом случае измеряемая пружина будут перенапряжена. При $\varphi = 0$ двигатель остановится, но под действием перенапряженной пружины угол φ будет по-прежнему уменьшаться и через некоторое время станет отрицательным. Аналогично, с некоторым опозданием на выходе ФНЧ также будет отрицательный сигнал, и направление движения двигателя изменится на обратное. Далее этот процесс повторится точно также.

15. В теории автоматического регулирования доказано, что при наличии релейного переключателя и двух и более инерционных звеньев в замкнутой цепи регулирования в системе возникают автоколебания. Для их исключения необходимо, чтобы смена направления вращения двигателя произошла раньше, чем рычаг упругой системы займет горизонтальное исходное положение. Это условие реализовано в гравиметре ГМН введением “гидродинамического форсирования” в управление рычагом УСГ. Для этого шток микровинта помимо пружины соединен с пластинами, которые через вязкое трение сцеплены с пластиной, жестко связанной с рычагом. Тогда компенсирующая сила будет

зависеть не только от положения микровинта, измеряемого величиной s , но и от скорости изменения последней:

$$\Delta g_k = s + \tau_2 \dot{s}.$$

Тогда при $\dot{s} > 0$ величина Δg_k становится равной Δg раньше, чем деформация измерительной пружины будет соответствовать отсчету $s = \Delta g_k$. Как показывает практика, показания гравиметра ГМН при такой системе управления рычагом упругой системы становится устойчивым.

16. Выпишем уравнения, описывающие динамику гравиметра ГМН:

$$\tau\phi + \varphi = v_0(\Delta g - \Delta g_k + w_z),$$

$$\tau_1 \dot{\phi} + \bar{\varphi} = \frac{\varphi}{v_0},$$

$$\dot{s} = v_0 \operatorname{sign} \bar{\varphi},$$

$$\Delta g_k = s + \tau_2 \dot{s}.$$

Первое уравнение описывает движение рычага под действием вертикального ускорения. Оно мало чем отличается от уравнения $\tau\phi + \varphi = v_0(\Delta g + w_z)$, описывающего движение рычага, построенного по разомкнутой схеме. Это связано с тем, что Δg_k содержит медленную составляющую, которая определяется изменением силы тяжести Δg , и быструю, связанную с качкой корабля. Последняя очень мала по амплитуде, т.к. скорость отработки микровинта (0,2 – 0,8 мГал/с) много меньше скорости изменения w_z (десятки тысяч миллигал за секунду). Из этого следует, что наличие в Δg_k составляющей с периодом качки корабля не влияет на вынужденные колебания рычага упругой системы. Следовательно, обратная связь не уменьшает амплитуды вынужденных колебаний упругой системы гравиметра.

17. Третье уравнение системы говорит о том, что в случае идеального реле скорость изменения отсчета по абсолютному значению равна v_0 (0,2 – 0,8 мГал/с), что обычно бывает больше наблюдаемой скорости изменения силы тяжести на борту движущегося судна. При скорости судна в 10 – 20 узлов, последняя, как правило, не превышает 0,1 мГал/с. Скорость изменения отсчета, заключенная в пределах $-v_0 < \dot{s} < v_0$, принципиально возможна лишь при условии $\bar{\varphi} = 0$. Отсюда следует, что $\varphi = \phi = 0$ и $\Delta g = \Delta g_k$. Тогда из последнего уравнения следует, что $s + \tau_2 \dot{s} = \Delta g$. Это и есть уравнение, определяющее зависимость отсчета гравиметра от изменения силы тяжести. Оно является уравнением первого порядка с передаточной функцией $\Gamma(p) = (1 + \tau_2 p)^{-1}$. Отметим, что это уравнение справедливо только для медленных процессов, для оценки влияния качки корабля это уравнение непригодно.

18. Следует отметить, что динамические искажения не зависят ни от постоянной времени УСГ, ни от динамических параметров ФНЧ. Это означает, что без ущерба для точности и быстродействия можно применять упругие системы с очень большой постоянной времени (1000 с и более). Объясняется это тем, что в рабочем режиме среднее положение рычага неизменно ($\varphi_{cp} = 0$), а постоянную величину никакие фильтры не искажают.

19. Основным недостатком гравиметра ГМН – отсутствие устройств для цифровой записи и обработки информации. Вся регистрация производится на самописец. Этот недостаток преодолевается самими сотрудниками лабораторий и организаций, использующих этот прибор для съемки. Еще один недостаток – существенная нелинейность структурной схемы гравиметра, связанная с релейным преобразователем. Этот недостаток и некоторые другие были учтены в последующей модификации этого гравиметра, который получил название ГМН-КМ (Флагман). Рассмотрим вопрос о гармонической линеаризации, введенной в этот гравиметр.

20. Суть гармонической линеаризации системы заключается в том, что кроме сигнала с ФНЧ на релейный преобразователь РП подается переменное напряжение с некоторой частотой (8 – 10 Гц), которое “сканирует” релейную характеристику преобразователя. Среднее значение выходного сигнала в этом случае будет зависеть не только от знака $\bar{\varphi}$, но и от значения сканирующего сигнала. Пусть линеаризующий сигнал представляет собой гармоническое колебание с частотой f и амплитудой a . Тогда на выходе РП будем иметь:

$$\dot{s} = v_0 \operatorname{sign}(\bar{\varphi} + a \cos 2\pi ft) .$$

После дальнейшего прохождения сигнала через динамическую систему он неизбежно сглаживается, поэтому высокочастотной частью \dot{s} можно пренебречь. Для “медленной” части \dot{s} при малых значениях $\bar{\varphi}$ можно приближенно записать:

$$\dot{s} = q(a)\bar{\varphi} ,$$

где $q(a)$ – коэффициент гармонической линеаризации. В теории автоматического регулирования доказано, что в данном случае

$$q(a) = \frac{2v_0}{\pi a} .$$

Так как эта величина имеет размерность обратной времени, то введем обозначение

$$\tau_3 = \frac{\pi a}{2v_0} .$$

21. С учетом сделанных замечаний третье уравнение, описывающее динамику гравиметра ГМН $\dot{s} = v_0 \operatorname{sign} \bar{\varphi}$, будет заменено линеаризованным

$$\dot{s} = q(a)\bar{\varphi} = \frac{\bar{\varphi}}{\tau_3} ,$$

и вся система уравнений приобретет вид:

$$\tau \dot{\phi} + \phi = v_0 (\Delta g + w_z - \Delta g_k) ,$$

$$\tau_1 \dot{\bar{\phi}} + \bar{\phi} = \frac{\bar{\varphi}}{v_0} ,$$

$$\Delta g_k = s + \tau_2 \dot{s} ,$$

$$\tau_3 \dot{s} = \bar{\varphi} .$$

Последовательно заменяя $\bar{\varphi}$ на φ , а φ на s , получим:

$$\begin{aligned} \tau(\tau_1\ddot{\varphi} + \dot{\varphi})v_0 + (\tau_1\dot{\varphi} + \bar{\varphi})v_0 &= v_0(\Delta g + w_z - \Delta g_k), \\ \tau(\tau_1\tau_3\ddot{s}' + \tau_3\dot{s}') + (\tau_1\tau_3\dot{s}' + \tau_3\dot{s}) + \tau_2\dot{s} + s &= \Delta g + w_z. \end{aligned}$$

Обозначив

$$\begin{aligned} a_1 &= \tau_2 + \tau_3, \\ a_2 &= (\tau + \tau_1)\tau_3, \\ a_3 &= \tau\tau_1\tau_3, \end{aligned}$$

получим дифференциальное уравнение третьего порядка

$$a_3\ddot{s}'' + a_2\dot{s}' + a_1\dot{s} + s = \Delta g + w_z.$$

Следовательно, передаточная функция гравиметра имеет вид:

$$\Gamma(p) = (1 + a_1p + a_2p + a_3p)^{-1}.$$

22. Конструкция гравиметра позволяет по желанию оператора изменять параметры τ и τ_3 , добиваясь наилучших, в определенном смысле, динамических характеристик системы. Так, при $\tau = 560$ с, $\tau_1 = 40$ с, $\tau_2 = 250$ с, $\tau_3 = 50$ с, $a = 10$ мГал, $v_0 = 0,314$ мГал/с полоса пропускания составляет около $0,01$ с⁻¹, а переходная характеристика при данной полосе пропускания – самая короткая. Динамические искажения в этом случае эквивалентны фильтру, составленному из последовательной цепочки трех апериодических звеньев первого порядка. Аналогичным образом можно настроить параметры так, что система будет эквивалентна, например, фильтру Баттерворта третьего порядка.

Лекция 14. Методика морской гравиметрической съемки и обработки наблюдений.

1. Измерение силы тяжести на подвижном основании развивалось как съемка на морских судах, а измерение силы тяжести на самолетах и вертолетах до сих пор носят характер опытно-методических работ. Следствием этого является то, что методика морской гравиметрической съемки хорошо разработана в отличие от методики аэрогравиметрической, которая имеет свои специфические особенности, связанные, в основном, с высокими скоростями носителя, с вопросами определения высотных и плановых координат самолета (вертолета). Тем не менее, как морская, так и аэрогравиметрия, имеют многие общие положения, которые находят свое отражение в методике съемки. Более подробно остановимся на особенностях методики морской съемки.

2. Измерения силы тяжести на море производятся относительным методом. Как и при наземной съемке, морские измерения должны быть приведены к Мировой гравиметрической сети. Это означает, что первоначальные опорные наблюдения, выполненные в исходном порту, и конечные опорные наблюдения, выполненные в порту захода, должны быть привязаны к пунктам Мировой опорной сети. Очень часто продолжительность рейса, в течение которого выполняются гравиметрические измерения,

составляет 2 – 4 месяца, а иногда и больше. Очень важно, чтобы за это время сползание нуля-пункта гравиметра было линейным, а само сползание было бы минимальным.

3. Следующая особенность морских гравиметрических исследований – большой диапазон изменения силы тяжести. Это требует тщательного эталонирования приборов. Ошибка в определении цены деления (масштабного коэффициента) морского гравиметра может привести к значительным систематическим ошибкам в определении приращения силы тяжести. Таким образом, большая продолжительность рейса, широкий диапазон изменения силы тяжести требуют применения такой методики съемки, которая позволяла бы надежно контролировать как линейность сползания нуля-пункта, так и величину масштабного коэффициента. Очевидно, что для такого контроля необходимы промежуточные заходы в порты, где известны значения силы тяжести.

4. Помимо промежуточных заходов в порты с пунктами с известными опорными значениями силы тяжести, применение группы приборов может также помочь выявить случайные ошибки в определении масштабных коэффициентов. Выявить такие ошибки возможно на основе анализа показаний гравиметров и расхождения показаний во времени. Кроме того, применение группы гравиметров дает возможность оценить качество (точность) съемки, хотя для независимого контроля необходимо сопоставить измеренные значения силы тяжести со значениями, полученными в других экспедициях (независимый контроль).

5. Так как основной вклад в изменение аномального поля силы тяжести вносит рельеф морского дна, то необходимо, чтобы морские гравиметрические наблюдения сопровождалось непрерывным эхолотированием.

6. Важной особенностью морской гравиметрической съемки является необходимость точного определения координат, скорости и курса судна. От знания этих параметров зависит точность учета поправки за нормальное поле Земли при вычислении аномальных значений силы тяжести, и что самое главное, точность вычисления поправки Этвеша.

7. Таким образом, для успешного проведения гравиметрических работ на море необходимо выполнение нескольких условий:

- наличие специально оборудованной гравиметрической лаборатории, в которой может располагаться группа приборов;
- лаборатория должна располагаться вблизи центра масс корабля с целью уменьшения влияния качки судна, и оснащена кондиционером для поддержания постоянной температуры;
- для наблюдения за смещением нуля-пункта гравиметров необходимы заходы на контрольные пункты. В промежутках между заходами линейность дрейфа нуля-пункта должна быть гарантирована;
- гравиметры должны обладать широким диапазоном измерения силы тяжести;
- судно должно быть оборудовано точным глубоководным эхолотом и совершенной системой навигации.

8. Совершенно очевидно, что успех гравиметрических наблюдений во многом определяется качеством подготовки приборов к гравиметрическому рейсу. Как правило, этот подготовительный этап начинается за 2 – 3 месяца до начала экспедиции. На этом этапе проверяется готовность приборов к работе, определяются их основные параметры, которые используются при обработке результатов наблюдений. Работы по подготовке приборов к работе включают в себя эталонирование (определение масштабного коэффициента измерительной пружины), определение динамических параметров,

испытание на стендах горизонтальных и вертикальных колебаний, а также на орбитальном стенде. Помимо этого, в процессе подготовки гравиметра к работе производится юстировка уровней прибора, определяется характер сползания нуля-пункта гравиметра, исследуется работа термостата и характер температурной зависимости, и т.д. Рассмотрим перечисленные этапы работы.

9. Эталонирование гравиметров, т.е. определение зависимости показаний гравиметра от изменения силы тяжести, возможно по пунктам с известными приращениями силы тяжести (эталонировочном полигоне) и методом наклона. Эталонирование гравиметров по пунктам с известными приращениями силы тяжести была бы наиболее желательной, т.к. в этом случае гравиметр находится в рабочем состоянии. Но, к сожалению, для морских гравиметров, которые должны иметь большой диапазон измерений, таких полигонов нет. Поэтому для эталонирования гравиметров в лабораторных условиях используют специальные плиты (УЭГ, УЭП), наклон которых имитирует уменьшение силы тяжести. При этом предполагается, что гравиметры имеют фиксированную ось чувствительности, и есть устройство, позволяющее определить угол наклона плиты.

10. Рассмотрим особенности эталонирования гравиметров методом наклона. Допустим, что ось чувствительности гравиметра не совпадает с вертикалью, а составляет с ней некоторый угол γ . Тогда проекция силы тяжести на ось чувствительности будет равна

$$g_\gamma = g \cos \gamma .$$

В этом случае разность отсчетов между показаниями гравиметра с вертикальной (m_0) и наклоненной осью чувствительности (m) будет соответствовать величине

$$\Delta g = g - g_\gamma = g(1 - \cos \gamma) = 2g \sin^2 \frac{\gamma}{2} \approx g \frac{\gamma^2}{2} \left(1 - \frac{\gamma^2}{12}\right).$$

Таким образом, измеряя угол γ , определяется величина Δg . Цена деления гравиметра будет определяться соотношением:

$$C = \frac{\Delta g}{m_0 - m} .$$

11. Ошибка определения величины Δg будет зависеть от точности определения угла γ .

$\delta(\Delta g) = g\gamma \delta\gamma$, и, соответственно, $\frac{\varepsilon_{\Delta g}}{g} = |\gamma| \varepsilon_\gamma$, где ε_γ – ошибка в определении угла наклона.

Из соотношения $\Delta g = \frac{g}{2} \gamma^2$, следует, что $\gamma = \sqrt{\frac{2\Delta g}{g}}$ и $\varepsilon_\gamma = \frac{\varepsilon_{\Delta g}}{g|\gamma|} = \frac{\varepsilon_{\Delta g}}{\sqrt{2g\Delta g}}$. Последнее

соотношение говорит о том, что чем выше нам нужна точность в определении значения Δg , тем выше должна быть точность определения угла наклона. Так, например, при $\Delta g = 450$ мГал, $g = 10^6$ мГал и $\varepsilon_{\Delta g} = 0,1$ мГал, ошибка в определении угла наклона ε_γ не должна превышать 0,67”.

12. Для определения разности отсчетов гравиметра, соответствующих величине Δg , необходимо, чтобы при горизонтальном положении плиты ($\gamma = 0$) отсчет гравиметра был бы максимальным (для случая положительной цены деления) или минимальным (для случая отрицательной цены деления). Так как положение вершины параболы возможно

определить только с некоторой угловой ошибкой α , то при наклоне плиты на угол γ в противоположенные стороны, наклоны оси чувствительности гравиметра будут соответствовать следующим углам:

$$\gamma' = \gamma + \alpha, \quad \gamma'' = \gamma - \alpha.$$

Соответствующие значения Δg :

$$\Delta g' = g \frac{(\gamma')^2}{2}, \quad \Delta g'' = g \frac{(\gamma'')^2}{2}.$$

Эти значения не равны друг другу. Разность этих показаний будет расти с увеличением угла γ . Однако, для среднего значения Δg из этих двух величин, можно записать:

$$\Delta g = \frac{1}{2}(\Delta g' + \Delta g'') = \frac{g}{4}((\gamma + \alpha)^2 + (\gamma - \alpha)^2) = \frac{g}{2}\gamma^2 + \frac{g}{2}\alpha^2.$$

Последний член не зависит от γ и не превышает 0,1 мГал при значении угла $\alpha \sim 1'$.

13. Из приведенных рассуждений следует, что, во-первых, необходимо тщательно выставить уровни гравиметра (произвести юстировку уровней), во-вторых, при эталонировке гравиметров надо тщательно выставлять углы наклона гравиметра, т.к. все это влияет на определение масштабного множителя. Кроме того, при вычислении цены деления следует брать полусумму значений отсчетов на симметричных ветвях параболы. Для того чтобы учесть сползание нуля-пункта, необходимо завершить наблюдения при исходном положении прибора. Оценка точности определения цены деления производится по повторным наблюдениям.

14. Гравиметры типа ГМН имеют три пружины: главную (астазирующую), измерительную и диапазонную. Измерительная и диапазонная пружины требуют эталонирования. Перестройка диапазона может привести к некоторому изменению цены деления измерительной пружины. Чтобы определить зависимость цены деления от перестройки диапазона нужно процедуру эталонирования повторить при других положениях диапазонного винта. В гравиметрах этого типа (с обратной связью) зависимость приращения силы тяжести связана с изменением отсчетов соотношением $\Delta g = C(m - m_0)$.

14. В гравиметрах ИФЗ, построенных по разомкнутой схеме, зависимость Δg от разности отсчетов определяется квадратической зависимостью:

$$\Delta g = C_1(m - m_0) + C_2(m - m_0)^2,$$

или

$$\Delta g = C(m - m_0), \quad \text{где } C = C_1 + C_2(m - m_0).$$

Так как здесь число неизвестных равно двум (C_1, C_2), то соответственно для определения этих коэффициентов необходимо иметь как минимум два уравнения:

$$\begin{aligned} \Delta g_1 &= C_1(m_1 - m_0) + C_2(m_1 - m_0)^2, \\ \Delta g_2 &= C_1(m_2 - m_0) + C_2(m_2 - m_0)^2. \end{aligned}$$

Оценка точности определения коэффициентов осуществляется по повторным измерениям.

15. Отметим одну особенность, которую необходимо учитывать при обработке материалов для таких гравиметров – коэффициент C_1 зависит от начального отсчета m_0 . При вычислении Δg относительно другого начала отсчета M_0 получим:

$$\Delta g = [C_1 + 2C_2(M_0 - m_0)](m - M_0) + C_2(m - M_0) + C_1(M_0 - m_0) + C_2(M_0 - m_0)^2.$$

Поскольку приращения Δg вычисляются относительно опорного пункта, последние два слагаемых несущественны, и их можно отбросить. Тогда, обозначив

$$\bar{C}_1 = C_1 + 2C_2(M_0 - m_0),$$

получим формулу для вычисления приращения Δg относительно отсчета M_0 :

$$\Delta \bar{g} = \bar{C}_1(m - M_0) + C_2(m - M_0)^2.$$

16. Очень важным этапом при подготовке гравиметров к полевым наблюдениям является этап испытания гравиметров на стендах вертикальных, горизонтальных и орбитальных колебаний. Начнем со стенда вертикальных ускорений. Этот стенд представляет собой платформу, которая совершает вертикальные перемещения по синусоидальному закону, период и амплитуда которого может меняться по желанию оператора. При испытании гравиметра на таком стенде возможно выявить возникающие систематические ошибки, обусловленные вертикальной качкой корабля, и причина которых может являться нелинейность упругой системы, или нелинейность преобразователя угла наклона рычага (маятника) системы в электрический сигнал. В гравиметрах с обратной связью возникновение систематических ошибок возможно в преобразователях и усилителях, приводящих в действие механизм цепи компенсации приращения силы тяжести. В случае больших ошибок (величина допустимой ошибки определяется точностью съемки) необходимо выполнить регулировку узлов гравиметра. Кроме того, испытания на “вертикальном” стенде позволяют определить некоторые динамические параметры гравиметров, в частности, постоянную времени упругой системы. Как было ранее показано, колебания рычага упругой системы пропорциональны вертикальной скорости перемещения платформы

$$\varphi = v_0 \frac{v_z}{\tau},$$

где v_0 – угловая чувствительность. При экспериментальных исследованиях наблюдается не сам угол φ , а некоторая величина u , зависящая от того угла. Если считать преобразование “угол-сигнал” линейным, то $u = q\varphi$, и уравнение приобретет следующий вид:

$$u = q_1 \frac{v_z}{\tau}.$$

Коэффициент $q_1 = qv_0$ переводит ускорение в единицы измеряемой величины u (если u измеряется в милливольтгах, то размерность q_1 – мВ/мГал). Эта величина определяется статически при эталонировке гравиметра методом наклона. Задавая синусоидальные

колебания с амплитудой $amp w_z$ и частотой ω , получим амплитуду колебаний рычага упругой системы гравиметра, выраженной в единицах u – $amp u$. Отношение этих амплитуд будет определять коэффициент сглаживания упругой системы гравиметра:

$$N = q_1 \frac{amp w_z}{amp u}.$$

В то же время, коэффициент сглаживания равен $\tau\omega$. Тогда постоянная времени определяется по формуле

$$\tau = \frac{N}{\omega}.$$

Надежной гарантией правильности определения постоянной времени на вертикальном стенде является совпадение ее значения со значением, определенным из переходного процесса.

17. Стенд горизонтальных колебаний (горизонтальный стенд) представляет собой платформу, совершающий поступательные горизонтальные перемещения по синусоидальному закону. Основная задача испытаний гравиметров на этом стенде – исследование качества гиросtabilизаторов. Как было показано во второй и третьей лекциях, систематическая ошибка, связанная с горизонтальными ускорениями, обусловлена проекцией горизонтальной силы инерции на ось чувствительности и занижением силы тяжести вследствие того, что изменяется проекция силы тяжести на ось чувствительности:

$$\delta g_{w_x, \alpha} = \overline{w_x \alpha} - a^2 \frac{g}{2}.$$

При синусоидальных колебаниях с амплитудой a будем иметь:

$$w_x = a\omega^2 \cos \omega t, \quad \alpha = \frac{a_x}{g} \lambda(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)),$$

$$\delta g_{w_x, \alpha} = \frac{a^2}{4g} (2\lambda(\omega) \cos(\varphi(\omega)) - \lambda^2(\omega)) = \frac{a^2}{4g} (2 \operatorname{Re} \mathbf{W}(i\omega) - |\mathbf{W}(i\omega)|^2),$$

где $\lambda(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ – амплитудная и фазовая характеристики стабилизатора. Задача испытаний будет состоять в том, что надо будет проверить, насколько предсказанная теоретически систематическая ошибка совпадет с наблюдаемой на практике. Тут стоит отметить, что динамические параметры стабилизатора заранее не известны, поэтому данная задача может быть решена при одновременном уточнении этих параметров. При экспериментальных исследованиях гиросtabilизатор устанавливается на горизонтальный стенд с вмонтированным в него гравиметром. Наблюдения, позволяющие сделать вывод о качестве стабилизатора, выполняются с помощью гравиметра, систематическая ошибка которого определяется по приведенным формулам. Однако горизонтальные ускорения могут проявлять себя не только через вынужденные колебания гиросtabilизатора, но и через деформацию деталей гравиметра (ось подвески рычага, пружины гравиметра, корпус прибора), а также за счет подвижности демпфирующей жидкости, в которую погружена демпфирующая система. Существуют определенные методические приемы, с помощью которых некоторые из этих причин возникновения систематических ошибок

могут быть выявлены, и в дальнейшем попытаться их устранить или уменьшить их влияние.

18. Испытанию на орбитальном стенде подвергаются те гравиметры, для которых эффект кросс-каплинг создает большие систематические погрешности. К таким гравиметрам относятся все приборы с несдвоенными упругими системами рычажного типа, в том числе и гравиметры ГМН. Орбитальный стенд – это механизм, у которого площадка, на которой устанавливается гравиметр, совершает поступательное движение по замкнутой траектории (эллипс или окружность). Как было показано в лекции 12, ошибка за счет эффекта кросс-каплинг, определяется следующим образом:

$$\delta g_{cc} = \frac{V_0}{\tau_0} \overline{\dot{x}\dot{z}},$$

где V_0 – номинальная чувствительность системы гравиметра, $\tau_0 = \frac{h}{k}$ (h – коэффициент вязкого трения маятника относительно корпуса прибора, k – коэффициент крутильной жесткости нити). Пусть гравиметр перемещается по окружности с радиусом R и угловой скоростью ω . В этом случае достигается максимальный эффект кросс-каплинг, так как вертикальная и горизонтальная составляющие ускорения смещены друг относительно друга на 90° . Амплитуды вертикальной скорости и горизонтального ускорения соответственно равны

$$\dot{z}_0 = R\omega, \dot{x}_0 = R\omega^2,$$

и для эффекта кросс-каплинг получим:

$$\delta g_{cc} = \frac{V_0}{2\tau_0} R^2 \omega^3.$$

В приведенном случае погрешность увеличивает измеренное значение силы тяжести. При обратной ориентации рычага упругой системы эффект кросс-каплинг будет уменьшать измеренное значение. Основная задача испытаний на стенде «Орбита» - подбор приборов в пары с близкими параметрами. Противоположенная ориентация двух приборов в каждой паре позволит исключить одну из самых значительных систематических погрешностей, обусловленную совместным действием вертикальных и горизонтальных ускорений.

19. Гравиметрические наблюдения на море можно разделить на два вида – опорные и морские (полевые) наблюдения. Как уже отмечалось, измерения силы тяжести на море – относительные, т.е. измеряется приращение силы тяжести относительно некоторого пункта с известным значением $g_{оп}$, принятым в качестве опорного. В качестве опорного значения принимают береговое значение силы тяжести на причале у места стоянки судна. Так как приращение силы тяжести относительно опорного наблюдения можно представить, как $\Delta g = C(m - m_0)$, где C – масштабный коэффициент, m – отсчет гравиметра в море, m_0 – отсчет гравиметра на опорном пункте, то становится понятным, что значение m_0 должно быть определено с высокой точностью. Следствием этого является необходимость длительных наблюдений на опорных пунктах (исходных, промежуточных и конечных), с тем, чтобы быть уверенным, что в дальнейшем при обработке наблюдений не будет внесена систематическая погрешность в результаты. Обычно такие наблюдения должны проводиться не менее полутора суток, а лучше – и больше. В продолжительных экспедициях необходимы контрольные наблюдения, которые проводятся в портах захода по программе опорных наблюдений.

20. Морские измерения силы тяжести выполняют при движении судна с постоянной скоростью и, как правило, в неименном направлении. При этом расстояние между галсами определяется как точностью, так и масштабом съемки. Большое значение при морских наблюдениях имеет точность определения координат судна, так как с этим связана и точность определения поправки Этвеша. В настоящее время практически все суда оснащены системой JPS (системой спутниковой навигации), которая обеспечивает точность плановой привязки судна до 150 м даже в открытом океане с высокой степенью дискретизации по времени. Поэтому проблема учета поправки Этвеша переходит в проблему дальнейшей обработки сигнала. В то же время условие прямолинейности галса при гравиметрических наблюдениях желательно соблюдать и в этих условиях, поскольку резкие изменения в направлении движения судна могут привести к длительным нелинейным переходным процессам в системе гравиметра, которые учесть практически невозможно.

21. В морской гравиразведке большое внимание уделяется точности измерений. Поэтому при планировании галсов необходимо предусматривать как внешний, так и внутренний контроль точности измерений. Внешний контроль осуществляется при сопоставлении полученных данных с данными других экспедиций. В этом случае

точность съемки определяется по формуле $\varepsilon = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^m \frac{\Delta_i^2}{2m}}$, где Δ_i – невязки между

наблюдёнными значениями силы тяжести в данном пункте и значениями силы тяжести, полученными в предыдущих экспедициях, m – число сопоставлений. Внутренний контроль – определение ошибки измерений по точкам пересечений с собственными измерениями. Однако, в этом случае, средняя квадратическая ошибка измерений может оказаться меньше, так как часть систематической погрешности, свойственная данной экспедиции, не будет обнаружена. В частном случае приблизительно оценить ошибку съемки возможно по сходимости между гравиметрами (парами гравиметров), установленными на борту судна. Однако, такая ошибка может быть использована только для внутреннего контроля и, тем более, не соответствовать истинной точности наблюдений.

22. Обработка гравиметрических наблюдений включает в себя два этапа – текущую обработку на борту судна и последующую обработку после экспедиции (камеральную). Очень часто часть камеральной обработки выполняется и на борту судна после завершения отдельных этапов работ, на пример, захода в промежуточный порт с известным значением силы тяжести. Рассмотрим основные операции обработки гравиметрических данных.

22.1 Перевод отсчета каждого гравиметра в миллигалы осуществляется по формуле

$$g = C(m - m_{on}),$$

где m и m_0 – текущий и средний отсчет на опорном пункте, C – масштабный коэффициент.

22.2 В отсчет каждого гравиметра вносят поправку за линейный дрейф нуль-пункта

$$\Delta g_i = -a(t - t_0),$$

где a – коэффициент сползания нуль-пункта. Этот коэффициент определен экспериментально в период подготовки прибора к рейсу, или по результатам измерения на опорных пунктах.

22.3 Исключение динамических погрешностей. В простейшем случае это осуществляется по следующей формуле:

$$\Delta g_{дин} = \frac{a_1 [g(t+T) - g(t-T)]}{2T},$$

где a_1 – постоянная запаздывания отклика гравиметра на линейно изменяющийся сигнал. Более точно динамические искажения можно учесть на основе решения дифференциальных уравнений, приведенных в лекции 8.

22.4 Для исключения систематической погрешности, обусловленной эффектом корс-каплинг, отсчеты пары гравиметров, ориентированных в противоположенные стороны, объединяются с помощью весового среднего

$$\Delta g_r = p_1 s_1(t) + p_2 s_2(t),$$

где p_1 и p_2 – весовые коэффициенты.

22.5 Учет эффекта Этвеша (лекция 6) по следующим формулам:

$$\delta g_s = 4,05 v_e \cos \varphi + 0.0012 v^2$$

при измерении скорости судна в км/ч, и

$$\delta g_s = 7,50 v_e \cos \varphi + 0.004 v^2$$

при измерении скорости в узлах. Напомним, что v_e – восточная составляющая скорости. Если скорость измеряется в узлах, то эта скорость соответствует скорости изменения долготы, выраженной в минутах, т.е. $v_e = \lambda R \cos \varphi$. С учетом этого замечания поправка Этвеша может быть представлена в следующем виде:

$$\delta g_s = 7,50 \lambda \cos^2 \varphi + 0.004 v^2.$$

В то же время стоит отметить, что учет поправки только по приведенным формулам возможен в случае прямолинейного движения судна. В настоящее время, когда использование спутниковой навигации JPS позволяет получать значения координат судна с высокой степенью точности через небольшие промежутки времени (секунды), возникает задача непрерывного учета поправки Этвеша как выходной координаты динамической системы гравиметрического комплекса. Это означает, что отклик гравиметра на скорость судна будет определяться его частотной характеристикой:

$$\delta g_s = \Gamma \{ 7,50 \lambda \cos^2 \varphi + 0.004 v^2 \}.$$

В свою очередь, это определяет и более сложные алгоритмы учета поправки Этвеша.

22.6 Вычисление наблюдаемого значения силы тяжести в морском пункте производится по формуле

$$g_{набл} = g_{он} + \delta g_r + \delta g_s,$$

где g_{on} – значение силы тяжести на опорном пункте, δg_r – средний весовой отсчет пары гравиметров или весовое среднее между парами гравиметров, δg_s – поправка Этвеша.

22.7 Обычно на этом этапе предварительная обработка данных заканчивается. Хотя на этом же этапе происходит анализ работы гравиметров, оценка точности съемки.

23. В камеральный период, после того как станут известными отсчеты гравиметров на заключительном опорном пункте, уточняется поправка за сползание нуля-пункта гравиметра и происходит вся переобработка данных, а также вычисление аномалий силы тяжести в редукции за свободный воздух, в редукции Буге и в других редукциях.

Список литературы

1. *Гайнанов А.Г., Пантелеев В.Л.* Морская гравиразведка. – М.: Недра, 1991. – 216 с.
2. *Делинджер П.* Морская гравиметрия. – М.: Недра, 1981. – 272 с.
3. *Пантелеев В.Л.* Основы морской гравиметрии. – М.: Недра, 1983. – 256 с.

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Пантелеев Валерий Леонтьевич
Булычев Андрей Александрович

ИЗМЕРЕНИЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА ПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ
(конспект лекций)

Подписано в печать 17.06.2003
Формат 60x90 1/16
Тираж 100 экз.

Ордена «Знак Почета» Издательство Московского Университета
125009, Москва, ул. Б. Никитская, 5/7

Типография Геологического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова