

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ

Препринт № 13

О.Л. Жижимов

ОЦЕНКА РАЗМЕРА
ОБЛАСТИ ГЕНЕРАЦИИ
МАГНИТНОГО
ПОЛЯ ЗЕМЛИ

НОВОСИБИРСК 1988

Жижимов О.Л. Оценка размера области генерации магнитного поля Земли. - Новосибирск, 1988. - 12с. (Препр./ ИГиГ СО АН СССР; №13).

На основе простейшей модели источника магнитного поля Земли сделана попытка оценить его собственный размер. За основу анализа взяты сферические гармонические коэффициенты. Показано, что модель дискретных источников поля для дипольной и квадрупольной компонент независимо приводит к размеру $\sim 0,2 R$, где R - радиус Земли. Полученные результаты обсуждаются с точки зрения строения планеты.

Работа предназначена для специалистов в области геомагнетизма.

Печатается по решению секции
минералогии, петрографии и
рудных месторождений Ученого
совета ИГиГ СО АН СССР

© Институт геологии
и геофизики
СО АН СССР, 1979

ACADEMY OF SCIENCES OF THE USSR
SIBERIAN BRANCH
INSTITUTE OF GEOLOGY AND GEOPHYSICS

Preprint

Belitsky I.A., Habuda S.P., Kriger Yu.G., Moroz N.K.,
Naumov V.P., Nogteva V.V., Panich A.M., Paukov I.E.

**STRUCTURE TRANSFORMATIONS
OF WATER IN ZEOLITES.
MORDENITE**

NOVOSIBIRSK-1979

При построении теории магнитного поля Земли возникает вопрос, от ответа на который зависит само содержание этой теории. Это вопрос о локализации области генерации поля. В магнитогидродинамических теориях такой областью является все внешнее ядро, в котором возникают самоподдерживающиеся токи (см., например, / 1 /). Именно условия во внешнем ядре Земли являются приемлимыми практически для всех динамотеорий. Можно сделать утверждение, что аккуратная оценка размера области генерации поля, сделанная на основе экспериментальных данных с привлечением разумных предположений о структуре источников, могла бы быть полезной при анализе той или иной теории магнитного поля Земли. Исходным материалом для подобной оценки, по-видимому, могут служить коэффициенты сферического гармонического анализа, в вычислении которых к настоящему времени достигнут определенный прогресс.

В пользу возможности оценить собственный размер области генерации магнитного поля Земли на основе анализа сферических коэффициентов можно высказать следующие соображения. Хорошо известно, что разложение поля по сферическим функциям на поверхности Земли эквивалентно разложению поля по малому параметру - отношению размера источника к расстоянию до него (в этой работе везде речь будет идти только о внутренних источниках). При этом каждый сферический коэффициент может быть интерпретирован как компонента соответствующего мультиполя (точечного!), расположенного в центре Земли. Зная величину малого параметра, можно оценить характерный размер источника, если привлечь некоторые дополнительные гипотезы о его структуре.

В настоящей работе сделана попытка оценить размер источника исходя из предположения о его "простоте", т.е. считается, что структура источника сама по себе генерирует лишь самые низшие мультиполи. Конечность высших мультиполей определяется конечностью размера источника и мелкомасштабными вариациями в строении верхних слоев нашей планеты. В качестве рабочей модели используется модель с конечным числом дискретных простейших элементов: магнитных зарядов и диполей,

расположенных оптимальным образом внутри Земли. Такой выбор связан в первую очередь с простотой используемой модели, что позволяет практически все вычисления сделать аналитически. Для удобства основные математические сведения приводятся в тексте.

1. Потенциал нецентрального произвольно ориентированного мультиполя

В любом учебнике по электродинамике можно найти вывод выражения для мультипольного разложения потенциала системы зарядов на большом расстоянии от нее (см., например, / 2 /). Если \vec{a}_i - координаты i -го заряда, \vec{z}_i - вектор i -го заряда к точке наблюдения A , радиус-вектор которой равен \vec{z} (см. рис.1), потенциал в точке наблюдения определяется суммой:

$$V(\vec{z}) = \sum_i \frac{q_i}{z_i} = \sum_i \sum_{\ell, m} \frac{4\pi}{2\ell+1} \frac{q_i a_i^\ell}{z^{\ell+1}} Y_{\ell m}^*(\hat{a}_i) Y_{\ell m}(\hat{z}). \quad (1)$$

Здесь q_i - величина i -го заряда, $Y_{\ell m}(\hat{n})$ - сферические функции; "шляпка" над вектором означает единичный вектор $\hat{a} = \vec{a}/a$, значок "*" - комплексное сопряжение. Обычно величины

$$Q_{\ell m} = \sum_i \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} q_i a_i^\ell Y_{\ell m}^*(\hat{a}_i) \quad (2)$$

называют проекциями 2ℓ -польного момента системы зарядов в циклической системе координат (см., например, / 3 /), которая связана с декартовой простыми соотношениями для радиус-вектора

$$\begin{aligned} z_{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(x+iy), & z^{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(x-iy), \\ z_0 &= z, & z^0 &= z \\ z_{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x-iy), & z^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x+iy). \end{aligned} \quad (3)$$

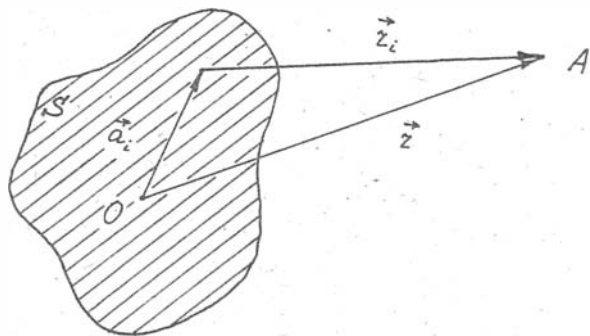


Рис.1

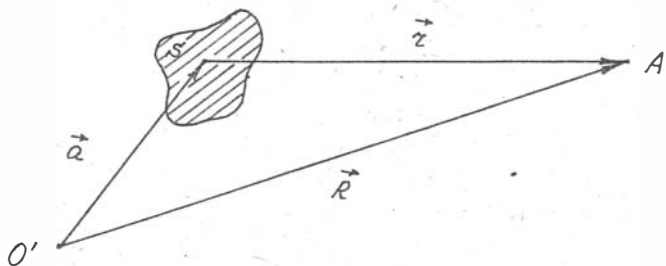


Рис.2

Циклические компоненты любого вектора \vec{B} могут быть записаны в виде

$$B_{\mu} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |\vec{B}| \cdot Y_{1\mu}(\hat{\vec{B}}),$$

$$B^{\mu} = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} |\vec{B}| \cdot Y_{1\mu}^*(\hat{\vec{B}}), \quad \mu = -1, 0, 1. \quad (4)$$

С учетом (2) выражение (1) принимает вид

$$V(\vec{r}) = \sum_{e,m} \sqrt{\frac{4\pi}{2e+1}} Q_{em} r^{-(e+1)} Y_{em}(\hat{\vec{r}}). \quad (5)$$

Если центр системы координат сместить относительно центра системы зарядов S на вектор \vec{a} , изменятся величина мультипольных моментов (2) и значения сферических функций Y_{em} (потенциал, естественно, останется прежним). Можно найти связь между вектором трансляции \vec{a} и мультипольными моментами, определенными в разных системах координат.

Пусть центр новой системы координат находится в точке O' (см. рис.2). Очевидны следующие соотношения:

$$V(\vec{R}) = \sum_{e,m} \sqrt{\frac{4\pi}{2e+1}} Q_{em} r^{-(e+1)} Y_{em}(\hat{\vec{r}}),$$

$$\vec{R} = \vec{r} + \vec{a} \quad (6)$$

Здесь Q_{em} - мультипольные моменты (2), определенные относительно "собственной" системы координат O . Чтобы привести (6) к виду

$$V(\vec{R}) = \sum_{e,m} \sqrt{\frac{4\pi}{2e+1}} Q_{em} R^{-(e+1)} Y_{em}(\hat{\vec{R}}) \quad (7)$$

достаточно воспользоваться известным разложением по биполярным гармоникам (см. /3/):

$$r^{-(e+1)} Y_{em}(\hat{\vec{r}}) =$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi}{(2e)!}} \sum_{e_1, e_2} (-1)^{e+e_2} \sqrt{\frac{(2e_2)!}{(2e_1+1)!}} \frac{a^{e_1}}{R^{e_1+1}} \{Y_{e_1}(\hat{\vec{a}}) \otimes Y_{e_2}(\hat{\vec{R}})\}_{em}. \quad (8)$$

$$e_1 = e_2 - e$$

Значок \otimes означает неприводимое (относительно группы вращений) произведение сферических функций :

$$\{ \vec{Y}_{e_1}(\vec{\hat{a}}) \otimes \vec{Y}_{e_2}(\vec{\hat{R}}) \}_{em} = \sum_{m_1, m_2} C_{e_1, m_1, e_2, m_2}^{em} Y_{e_1, m_1}(\vec{\hat{a}}) Y_{e_2, m_2}(\vec{\hat{R}}), \quad (9)$$

где $C_{e_1, m_1, e_2, m_2}^{em}$ - коэффициенты Клебша-Гордона [3]. В результате простых преобразований можно получить связь между Q_{em} и q_{em} :

$$Q_{em} = \sum_{e', m'} G_{mm'}^{ee'} q_{e'm'} a^{e-e'} Y_{e-e', m-m'}^*(\vec{\hat{a}}), \quad (10)$$

$$G_{mm'}^{ee'} = \left\{ \frac{4\pi (2e'+1)(e+m)!(e-m)!}{(2e-2e'+1)(2e'+1)(e'+m)!(e'-m)!(e-e'+m-m')!(e-e'-m+m')!} \right\}^{1/2}$$

Суммирование в (10) распространяется на все e' , m' , удовлетворяющие условиям

$$0 \leq e' \leq e, \quad -e' \leq m' \leq e', \quad -e+e' \leq m-m' \leq e-e'$$

Из (10) видно, что при $a \rightarrow 0$, $Q_{em} \rightarrow q_{em}$. Отдельный интерес представляет случай, когда система S обладает лишь дипольным моментом. При этом

$$Q_{em} = \sum_{m'} G_{mm'}^{e1} q_{1m'} a^{e-1} Y_{e-1, m-m'}^*(\vec{\hat{a}}), \quad (11)$$

$$G_{mm'}^{e1} = \left\{ \frac{12\pi (e+m)!(e-m)!}{(4e^2-1)(1-m')!(1+m')!(e-1-m+m')!(e-1+m-m')!} \right\}^{1/2}$$

2. Магнитный диполь конечного размера

Для нахождения собственного размера источников магнитного поля необходимо приписать этим источникам некоторую магнитную структуру. Самая простая модель источника с дипольным моментом — система двух разноименных зарядов, симметрично расположенных относительно центра Земли. Согласно выражению (10) мультипольные моменты ранга ℓ такой системы равны

$$Q_{em} = \sum_i \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}} q^{(i)} a_i^\ell Y_{em}^*(\hat{a}_i), \quad i = 1, 2.$$

Поскольку $q^{(2)} = -q^{(1)}$, $\hat{a}_2 = -\hat{a}_1$ с учетом соотношений

$$Y_{em}(-\hat{a}) = (-1)^\ell Y_{em}(\hat{a}) \quad (12)$$

все мультипольные моменты с четными ℓ обращаются в нуль. Таким образом, потенциал диполя конечного размера (расстояние между зарядами $2a$) принимает вид

$$V(\vec{R}) = \sum_{em} B_{em} Y_{em}(\hat{R}), \quad (13)$$

$$B_{em} = \frac{8\pi}{2\ell+1} q \frac{a^\ell}{R^{\ell+1}} Y_{em}^*(\hat{a}), \quad \ell = 1, 3, 5, \dots, \quad (14)$$

где вектор \hat{a} направлен по оси диполя, q — один из зарядов.

Т.к. магнитное поле Земли на поверхности в основном дипольно, можно предположить, что его источником является диполь конечного размера. Конечный размер при этом обеспечивает существование гармоник более высокого порядка в потенциале магнитного поля. Тем самым можно определить размер самого диполя.

Представим реальный потенциал магнитного поля Земли в виде

$$V(\vec{R}) = \sum_{em} A_{em} Y_{em}(\hat{R}), \quad (15)$$

где коэффициенты A_{em} связаны со стандартными гармоническими

коэффициентами линейными соотношениями (см. /4/)

$$\begin{aligned}
 A_{em} &= (-1)^m \frac{R}{2} \sqrt{\frac{2\pi}{2\ell+1}} (g e^m + i h e^m), \\
 A_{e0} &= R \sqrt{\frac{2\pi}{2\ell+1}} g e^0, \quad A_{e-m} = (-1)^m A_{em}^*.
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Параметры модельного диполя определяются следующим образом. Сравнивая (14) и (15) при $\ell=1$, получаем систему трех уравнений

$$B_{1m}(q, \vec{a}) - A_{1m} = 0, \quad m = -1, 0, 1
 \tag{17}$$

относительно четырех неизвестных, три из которых

$$qa/R, \quad \vec{a}$$

легко определяются. Несложные вычисления дают:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg} \theta &= \sqrt{-2A_{11}A_{1-1}} / A_{10}, \quad e^{i\varphi} = \sqrt{-A_{1-1}/A_{11}}, \\
 \frac{qa}{R} &= \frac{3R}{8\pi} \frac{A_{10}}{Y_{10}^*(\vec{a})},
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

где θ, φ - сферические углы вектора \vec{a} . Интересующую нас величину $z = a/R$ можно определить из уравнений для $\ell=3$, подбирая ее таким образом, чтобы отклонения B_{3m} от A_{3m} были минимальными. Поскольку

$$B_{3m} = \frac{8\pi}{7} \cdot \left(\frac{qa}{R}\right) \cdot z^2 Y_{3m}^*(\vec{a}) \equiv z^2 C_{3m}
 \tag{19}$$

минимизация скалярной функции

$$\begin{aligned}
 F(z) &= \sum_m (B_{3m} - A_{3m})^* (B_{3m} - A_{3m}) = \\
 &= (B_3 - A_3)^+ (B_3 - A_3) = (z^2 C_3 - A_3)^+ (z^2 C_3 - A_3)
 \end{aligned}$$

приводит к выражению

$$\xi_1 = \left\{ (A_3^+ C_3 + C_3^+ A_3) / 2 C_3^+ C_3 \right\}^{1/2}, \quad (20)$$

что и является оценкой собственного размера диполя. Здесь под величинами A_3 , C_3 следует понимать матрицы-столбцы, каждая из которых составлена из коэффициентов A_{3m} , C_{3m} . Значок "+" означает эрмитово сопряжение. Можно применить и другой критерий выбора величины ξ , потребовав соответствия лишь средних (по мультиплету) значений величин A_{3m} и B_{3m} . Полученная таким критерием оценка дает несколько другой результат

$$\xi_2 = \left\{ A_3^+ A_3 / C_3^+ C_3 \right\}^{1/2}. \quad (21)$$

Численные значения ξ для обоих случаев приведены на рис.3. Для анализа были использованы гармонические коэффициенты из работы / 5 /.

3. Моделирование магнитного квадруполь

Поскольку при помощи магнитного диполя конечного размера удалось смоделировать лишь мультиполи нечетного ранга, необходимо дополнить используемую модель источника квадруполем конечного размера. Такой квадруполь проще всего представить в виде двух диполей, расположенных симметрично относительно центра Земли. Чтобы система двух диполей была центральной и не обладала дипольным моментом, необходимо

$$\vec{a}_2 = -\vec{a}_1, \quad \vec{q}_{1m}^{(2)} = -\vec{q}_{1m}^{(1)}, \quad (22)$$

где $q_{1m}^{(i)}$ и \vec{a}_i - циклические проекции и радиус-векторы составляющих диполей.

мультипольный момент системы двух диполей можно вычислить по формуле (11), учитывая (22) и (12). Подстановка полученного выражения в (13) позволяет найти коэффициенты разложения

потенциала по сферическим функциям

$$V_{em} = \frac{8\pi}{R^{e+1}} \sum_{m'} S_{mm'}^{(e)} q_{1m'} a^{e-1} Y_{e-1, m-m'}^*(\vec{a}), \quad (23)$$

где $\vec{a} = \vec{a}_1$, $q_{1m} = q_{1m}^{(1)}$, $e = 2, 4, 6, \dots$,

$$S_{mm'}^{(e)} = \left\{ \frac{3(e+m)!(e-m)!}{(2e+1)(4e^2-1)(1+m')!(1-m')!(e-1-m+m')!(e-1+m-m')!} \right\}^{1/2}. \quad (24)$$

Суммирование в (23) проводится по всем m' , удовлетворяющих условиям

$$-1 \leq m' \leq 1, \quad -e+1 \leq m-m' \leq e-1.$$

Следуя рассуждениям предыдущего раздела, параметры модельного квадруполья могут быть определены из системы пяти уравнений

$$V_{2m}(q_{1m'}, \vec{a}) - A_{2m} = 0, \quad m = -2, \dots, 2. \quad (25)$$

Элементарные преобразования (25) с учетом (23) и явных выражений для сферических функций позволяют получить комплексное алгебраическое уравнение на углы θ , φ вектора \vec{a}

$$(4x^2+1)y^4 A_{22} + 4xy^3 A_{21} + \sqrt{6}y^2 A_{20} + A_{2-2} = 0, \quad (26)$$

$$x = \text{ctg } \theta, \quad y = e^{i\varphi},$$

после решения которого легко определяются величины

$$\{q_{11}\} = A_{22} \{d S_{21}^{(2)} \cdot Y_{11}^*(\vec{a})\}^{-1},$$

$$\{q_{10}\} = [A_{21} - d S_{11}^{(2)} \{q_{11}\} Y_{10}^*(\vec{a})] \{d S_{10}^{(2)} Y_{11}^*(\vec{a})\}^{-1},$$

$$\{q_{1-1}\} = A_{2-2} \{d S_{-2-2}^{(2)} \cdot Y_{1-1}^*(\vec{a})\}^{-1},$$

где $d = 8\pi/5R^2$. Оставшаяся неопределенной величина $\{$ находится минимизацией невязки коэффициентов разложения потенциала при $e = 4$. Поскольку формально минимизируется такая же функция,

что и в предыдущем разделе

$$F(\xi) = \sum_m (B_{4m} - A_{4m})^* (B_{4m} - A_{4m}) = \\ = \xi^4 C_4^+ C_4 - \xi^2 (C_4^+ A_4 + A_4^+ C_4) + A_4^+ A_4$$

ответ аналогичен (20)

$$\xi_1 = \left\{ (A_4^+ C_4 + C_4^+ A_4) / 2 C_4^+ C_4 \right\}^{1/2} \quad (27)$$

Здесь матрица-столбец C_4 связана с матрицей-столбцом B_4 соотношением

$$B_{4m} = \xi^2 C_{4m}, \quad m = -4, \dots, 4.$$

Существует и более грубая оценка ξ , аналогичная (21)

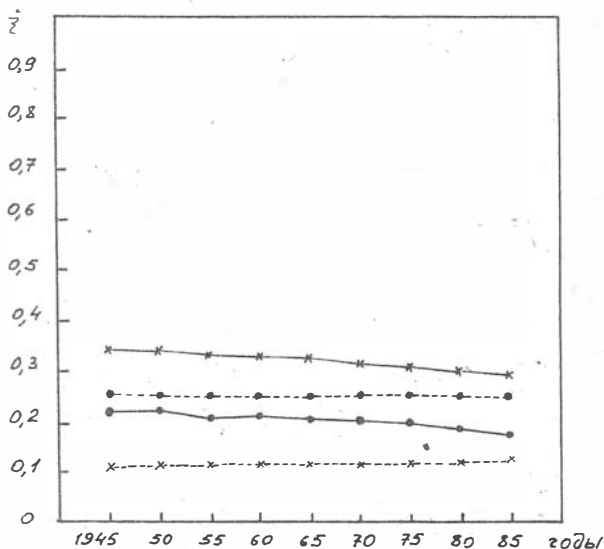


Рис.3 Размер модельных источников ξ_1 (•) и ξ_2 (×) для диполя (сплошная линия) и квадруполь (пунктирная линия).

$$\xi_2 = \left\{ A_4^+ A_4 / C_4^+ C_4 \right\}^{1/2}, \quad (28)$$

полученная минимизацией невязки средних (по мультиплету $\ell=4$) коэффициентов разложения потенциала.

Численные значения ξ_1 и ξ_2 по данным работы / 5 / для различных эпох приведены на рис.3 сплошной линией.

4. Обсуждение полученных результатов

Представленные на рис. 3 различные оценки размера системы источников магнитного поля Земли позволяют сделать некоторые выводы.

Прежде всего следует отметить, что средний размер источников по сделанным оценкам ($\xi \sim 0,2$) меньше размера внешнего ядра Земли (размер внешнего ядра $\xi \sim 0,5$), в котором согласно распространенной теории генерируются токи, порождающие магнитное поле. Это противоречие, конечно, не в коей мере не отрицает правильность самой теории динамо, ввиду явной модельности сделанных оценок. Тем не менее можно, наверное, утверждать, что если в совершенно различных моделях источников поля систематически будет указание на размер, меньший, чем граница внешнего ядра, то этот факт обязательно должен найти отражение в теории геомагнетизма.

Размер $\xi \approx 0,2$ соответствует границе внутреннего ядра. Не исключено, что полученное соответствие не является простым совпадением. Более того, независимость моделирования в четных и нечетных гармониках при практически одном и том же результате в простом совпадении позволяет усомниться. Во всяком случае, область вблизи границы внутреннего ядра должна играть существенную роль в физике происхождения магнитного поля Земли.

В заключение автор благодарит В.В.Кузнецова за постоянный интерес к данной работе и обсуждения.

Л и т е р а т у р а

1. Паркинсон У. Введение в геомагнетизм. М.:Мир, 1986. 528с.
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.:Наука, 1973. 504с.
3. Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.:Наука, 1975. 440с.
4. Жижимов О.Л. О вращении источников магнитного поля Земли. Новосибирск, 1983. 11с. (Препринт № 1 ИГиГ СО АН СССР).
5. David R. Barraclough, International Geomagnetic Reference Field: the fourth generation//Phys. Earth Planet. Inter. 1987. Vol. 48. P.279-292.

Утверждено к печати
Институтом геологии и геофизики СО АН СССР

Технический редактор Н.Н.Александрова

Подписано к печати 20.06.88. МН 09484.

Бумага 60x84/16. Печ.л.0,75. Уч.-изд.л.0,55.

Тираж 200. Заказ 325. Бесплатно.

Институт геологии и геофизики СО АН СССР
Новосибирск, 90. Ротапринт.