УДК 550.83

Линейные преобразования и системы в геофизике. Ч. I. Линейные преобразования: учебное пособие /Ю.В.Напалков, Л.А.Сердобольский. - М.: МИНГ, 1989, - 122с.

Рассмотрена основа теории линейных преобразований. На базе преобразования Фурье подробно изложена теория спектральных представлений сигналов, широко применяемая в полевой геофизике. Даны основные свойства частотных спектров сигналов. Приведены основные сведения о разрывных функциях и их применении в теории сигналов. Изложены основы спектральной теории дискретизации сигналов и теории дискретного преобразования Фурье.

Учебное пособие предназначено для студентов специальности 0802 "Геофизические методы поисков и разведки".

Ил. 18, Библ.: 21 назв.

Издание подготовлено на кафедре полевой геофизики

Рецензент : Преподаватель кафедры геофизики Воронежского Госуниверситета к.ф-м.н. Б.Л.Корыстин

© Московский институт нефти и газа им.И.М.Губкина, 1989 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

В разведочной геофизике, как и во всех областях науки и техники, занимающихся передачей и обработкой информации, два вопроса являются фундаментальными - как и с к а ж а ю т с я (преобразуются) сигналы, проходя через регистрирующие и обрабатывающие системы, и к а к эти системы искажают (преобразуют) проходящие через них сигналы. Иными словами, ч т о делают системы с сигналами и к а к они это делают. Многообразие природы и формы геофизических сигналов, способов их регистрации и обработки затрудняют прямой ответ на эти вопросы. Однако для ясного понимания существа геофизических методов разведки и работы их аппаратурных средств ответ, очевидно, необходим.

Наиболее общим математическим аппаратом для описания прохождения сигналов через системы их передачи и обработки является теория линейных преобразований и, особенно, спектральное исчисление, базирующееся на преобразовании Фурье. Оно позволяет перейти от сигналов к их спектрам и исследовать искажения спектров сигналов системами передачи, а также служит основой для изучения этих систем. Теория линейных преобразований и линейных систем имеет практически всеобщее применение во всех разделах теории и практики сейсморазведки и других методов геофизической разведки.

Курс "Линейные преобразования и системы" является дисциплиной геофизического образования студентов специальности 08.02 "Геофизические методы поисков и разведки". Лекции по этому курсу, читаемые авторами в МИНГ им.И.М.Губкина с 1978 г., послужили основой данного учебного пособия. Оно разделено на две части, первая из которых посвящена теории линейных преобразований, а вторая - теории линейных систем.

В первой части пособия описаны свойства линейных преобразований и систем, рассмотрены общие свойства интегрального преобразования Фурье, его применения в описании разрывных

функций, широко используемых в теории сигналов. Изложена спектральная теория дискретизации сигналов, дающая теоретическое обоснование цифровой регистрации и обработке геофизических полей. Часть завершается рассмотрением дискретных сигналов и основных линейных операций с ними в векторном пространстве сигналов.

Глава I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ СИГНАЛОВ

Линейным преобразованием сигнала называется любое преобразование, при котором амплитуда сигнала на выходе системы, осуществляющей преобразование, пропорциональна амплитуде входного сигнала. При изменении амплитуды входного сигнала в n раз амплитуда сигнала на выходе линейной системы должна измениться во столько же раз. Если же сигнала на входе нет, то и на выходе линейной системы сигнала не должно быть.

Эти требования не подразумевают сохранение формы импульсного сигнала при его прохождении через линейную систему, - она практически всегда изменяется. Лишь стационарные синусоидальные колебания сохраняют свою форму, проходя через линейную систему. У них изменяется амплитуда и начальная фаза колебаний, а их частота остается неизменной.

Заметим, что при большой амплитуде колебаний искажается и форма синусоидальных колебаний. Но это - нелинейные искажения, ограничивающие диапазон линейности "сверху", со стороны максимально допустимой амплитуды колебаний. Есть ограничение линейности реальных систем и "снизу", со стороны самых малых амплитуд сигналов. Оно вызвано собственными шумами системы передачи.

Таким образом, требование линейности преобразования выполняется реальными системами в определенных пределах изменения амплитуд сигналов на их входах. Однако, этот диапазон линейности весьма широк, и практически во всех случаях преобразование геофизических сигналов регистрирующими и обрабатывающими системами можно считать линейными.

§ I. Основные свойства линейных преобразований

Основным содержанием теории линейных преобразований и систем в геофизике является описание линейных преобразований сигналов, осуществляемых линейными системами, составляющими геофизический канал. Поэтому при описании основных свойств линейных преобразований будем иметь в виду линейную систему, осуществляющую заданное линейное преобразование входного сигнала $u(t)$ в выходной сигнал $w(t)$.

Обозначим линейное преобразование символом $\Lambda\{\ \}$, то есть будем писать:

$$w(t) = \Lambda\{u(t)\}\ . \qquad (I.I)$$

Эта запись означает, что в результате преобразования $\Lambda\{\}$ входного сигнала $u(t)$ на выходе системы получается сигнал $w(t)$.

I. Свойство аддитивности. Основным свойством линейного преобразования является свойство аддитивности (суммируемости) (die Addition (нем.) и addition (англ.) - - сложение, прибавление), которое состоит в том, что преобразование суммы сигналов равно сумме тех же преобразований суммируемых сигналов. Это означает, что реакция системы на сумму входных воздействий равна сумме реакций системы на каждое воздействие.

Для входного сигнала, состоящего из двух слагаемых $u_1(t)$ и $u_2(t)$, $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$, основное свойство аддитивности определяется следующим выражением:

$$w(t) = \Lambda\{u(t)\} = \Lambda\{u_1(t) + u_2(t)\} = \Lambda\{u_1(t)\} +$$

$$+ \Lambda\{u_2(t)\} = w_1(t) + w_2(t). \qquad (I.2)$$

Здесь слева записана реакция системы на суммарный входной сигнал, а справа - сумма реакций системы на слагаемые сигналы $u_1(t)$ и $u_2(t)$.

Свойство аддтивности можно распространить на любое число слагаемых n:

$$\Lambda\left\{\sum_{i=1}^{n} u_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^{n} \Lambda\left\{u_i(t)\right\}. \qquad (I.3)$$

Это же свойство справедливо и для бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых, например, для интеграла функции при любых пределах интегрирования

$$\Lambda\left\{\int u(t)\,dt\right\} = \int \Lambda\left\{u(t)\right\} dt. \qquad (I.4)$$

2. Свойство однородности. При одинаковых слагаемых входного сигнала из равенства (I.3) следует свойство однородности линейного преобразования

$$\Lambda\left\{n\,u(t)\right\} = n\Lambda\left\{u(t)\right\}. \qquad (I.5)$$

Имея в виду, что n может быть не только целым действительным числом, но и любым, в частности, дробным или комплексным, свойство однородности обычно выделяют специально.

Объединяя свойства аддитивности и однородности линейного преобразования, можно сказать, что линейное преобразование преобразует линейную комбинацию входных сигналов в такую же линейную комбинацию преобразованных сигналов (реакций системы на эти сигналы):

$$\Lambda\left\{\sum_{\xi} q_\xi u_\xi(t)\right\} = \sum_{\xi} q_\xi \Lambda\left\{u_\xi(t)\right\}. \qquad (I.6)$$

3. Следствия. Из свойства однородности линейного преобразования следует прямая пропорциональность амплитуды выходного сигнала амплитуде входного сигнала:

$$W(t) = \Lambda\left\{A\,u(t)\right\} = A\Lambda\left\{u(t)\right\}, \qquad (I.7)$$

где A – амплитуда входного сигнала. В частности, если A = 0, то

$$\Lambda\left\{0\right\} = 0. \qquad (I.8)$$

Таким образом, из свойства однородности вытекает, что зависимость амплитуды выходного сигнала от амплитуды сигнала на входе преобразователя (системы) имеет вид прямой линии, исходящей из начала координат (W, U). Эта зависимость называется амплитудной характеристикой системы.

Из свойства аддитивности линейного преобразования следует, что амплитудная характеристика преобразователя является нечетной функцией. Учитывая (I.8), можно записать:

$$\Lambda\left\{u - u\right\} = \Lambda\left\{u\right\} + \Lambda\left\{-u\right\} = \Lambda\left\{0\right\} = 0,$$

то есть

$$\Lambda\left\{u\right\} = -\Lambda\left\{-u\right\}. \qquad (I.9)$$

Следовательно, линейное преобразование преобразует сигнал с сохранением его знака (полярности).

§ 2. Алгебраические действия с линейными преобразованиями

Для линейных преобразований можно определить алгебраические действия сложения и умножения, причем сумма и произведение линейных преобразований являются также линейными преобразованиями.

I. Сложение линейных преобразований. Суммой линейных преобразований Λ_1 и Λ_2 называется преобразование Λ, преобразующее сигнал $u(t)$ в сигнал $W(t)$ в соответствии с равенством

$$W(t) = \Lambda\left\{u(t)\right\} = \Lambda_1\left\{u(t)\right\} + \Lambda_2\left\{u(t)\right\} = (\Lambda_1 + \Lambda_2)\left\{u(t)\right\},$$

то есть

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 . \qquad (I.10)$$

Применение (I.10) к сумме двух сигналов подтверждает аддитивность суммы:

$$\Lambda\{u_1 + u_2\} = \Lambda_1\{u_1 + u_2\} + \Lambda_2\{u_1 + u_2\} =$$

$$= \Lambda_1\{u_1\} + \Lambda_1\{u_2\} + \Lambda_2\{u_1\} + \Lambda_2\{u_2\} =$$

$$= (\Lambda_1 + \Lambda_2)\{u_1\} + (\Lambda_1 + \Lambda_2)\{u_2\} = \Lambda\{u_1\} + \Lambda\{u_2\}. \qquad (I.11)$$

Применение (I.10) к сигналу с постоянным множителем подтверждает однородность суммы преобразований:

$$\Lambda\{nu\} = \Lambda_1\{nu\} + \Lambda_2\{nu\} = n\Lambda_1\{u\} + n\Lambda_2\{u\} =$$

$$= n(\Lambda_1\{u\} + \Lambda_2\{u\}) = n\Lambda\{u\}. \qquad (I.12)$$

Очевидно, что понятие суммы линейных преобразований можно распространить на любое конечное число преобразований. Сложение линейных преобразований осуществляется аппаратурными средствами путем параллельного подключения преобразователей, что применяется в сейсморазведке в виде так называемых многоканальных фильтров.

2. Умножение линейных преобразований. П р о и з в е д е н и е м линейных преобразований Λ_1 и Λ_2 называется преобразование Λ, преобразующее сигнал u в сигнал W в соответствии с равенством

$$W = \Lambda\{u\} = \Lambda_2\{\Lambda_1\{u\}\} = (\Lambda_2\Lambda_1)\{u\}. \qquad (I.13)$$

Аддитивность произведения линейных преобразований следует из результата подстановки суммы сигналов $u = u_1 + u_2$ в (I.13):

$$W = \Lambda\{u\} = \Lambda_2\{\Lambda_1\{u_1 + u_2\}\} = \Lambda_2\{\Lambda_1\{u_1\} + \Lambda_1\{u_2\}\} =$$

$$= \Lambda_2\Lambda_1\{u_1\} + \Lambda_2\Lambda_1\{u_2\} = \Lambda\{u_1\} + \Lambda\{u_2\}. \qquad (I.14)$$

Однородность произведения следует из подстановки в (I.13) сигнала с постоянным множителем n:

$$\Lambda\{nu\} = \Lambda_2\{\Lambda_1\{nu\}\} = \Lambda_2\{n\Lambda_1\{u\}\} =$$

$$= n\Lambda_2\Lambda_1\{u\} = n\Lambda\{u\}. \qquad (I.15)$$

Понятие произведения линейных преобразований применимо к любому числу линейных преобразований. Произведение линейных преобразований осуществляется аппаратурным путем в результате последовательного подключения преобразователей, что широко применяется в регистрирующих и обрабатывающих системах.

3. Комбинации линейных преобразований. С л о ж н е операции с линейными преобразованиями вытекают из линейности суммы и произведения линейных преобразований, например, линейными преобразованиями оказываются:

а) степень линейного преобразования

$$\Lambda^{(n)} = \underbrace{\Lambda \cdot \Lambda \cdot \ldots \cdot \Lambda}_{n} \qquad (I.16)$$

Естественно, что степень преобразования рассматривается в смысле последовательного многократного применения одного и того же преобразования к исходному сигналу, но не как алгебраическое возведение в степень результата одного преобразования;

б) линейные комбинации линейных преобразований:

$$\Lambda = \sum_{\xi} C_{\xi} \Lambda_{\xi}, \qquad (I.17)$$

где C_{ξ} – постоянное число;

в) степенные многочлены линейных преобразований

$$\Lambda = a_n \Lambda_1^{(n)} + a_{n-1} \Lambda_1^{(n-1)} + \ldots + a_1 \Lambda_1 . \qquad (I.18)$$

§ 3. Основные виды линейных операций

Рассмотрим некоторые типичные линейные преобразования, наиболее широко применяемые в теории линейных систем.

1. Пропорциональность и линейные комбинации. Простейшим видом линейного преобразования является линейная функция, выражающая прямолинейную зависимость (пропорциональность) между входным сигналом $u(t)$ и выходным сигналом $w(t)$:

$$w(t) = \Lambda\{u(t)\} = c\,u(t). \qquad (I.19)$$

В применении к линейным системам это соотношение между входным и выходным сигналами представляет собой амплитудную характеристику линейной неискажающей системы с коэффициентом усиления c. Впоследствии при рассмотрении теории линейных систем будет введено более общее понятие амплитудной характеристики системы, описывающей свойства искажающей системы.

Как отмечалось выше, амплитудная характеристика проходит через начало координат, то есть не имеет постоянной составляющей. Если рассматривать алгебраическую прямолинейную зависимость с постоянной составляющей

$$w(t) = c\,u(t) + B, \qquad (I.20)$$

то окажется, что это преобразование не удовлетворяет свойству аддитивности, то есть является нелинейным.

Вследствие линейности преобразований типа (I.19) можно представить сигнал в виде линейной комбинации более простых элементарных сигналов $q_\xi(t)$:

$$u(t) = \sum_\xi u_\xi\, q_\xi(t), \qquad (I.21)$$

где u_ξ – амплитуды элементарных слагаемых, их весовые коэффициенты.

Подставив такое представление входного сигнала в (I.19), получим, в соответствии с принципом аддитивности, такое же представление выходного сигнала:

$$w(t) = c\,u(t) = c\sum_\xi u_\xi\, q_\xi(t) = \sum u_\xi\, w_\xi(t). \qquad (I.22)$$

Здесь

$$w_\xi(t) = \Lambda\{q_\xi(t)\} = c\,q_\xi(t) -$$

результат преобразования элементарного сигнала $q_\xi(t)$.

2. Интегральное преобразование. Распространяя эту линейную комбинацию на бесконечно большое число бесконечно малых слагаемых, можно получить общее выражение интегрального преобразования функции:

$$w(t) = \int u(\xi)\, q(\xi, t)\, d\xi\,. \qquad (I.23)$$

Здесь целочисленный индекс суммирования ξ перешел в непрерывную переменную интегрирования, а t в подинтегральном выражении оказывается параметром, который является аргументом результата преобразования $w(t)$. Выражение (I.23) представляет собой общую форму записи преобразования функции $u(\xi)$ в функцию $w(t)$ с ядром преобразования $q(\xi, t)$.

3. Дифференциальное преобразование. Рассмотрим преобразование, осуществляемое линейным дифференциальным уравнением n-го порядка, содержащим производные в первой степени:

$$w(t) = \Lambda\{u(t)\} = a_n \frac{d^n u(t)}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}u(t)}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0\, u(t). \qquad (I.24)$$

Если положить в (I.24) $u = u_1 + u_2$, получим:

$$w(t) = \Lambda\{u_1 + u_2\} = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dt^i}(u_1 + u_2) = \sum_i a_i \frac{d^i u_1}{dt^i} + \sum_i a_i \frac{d^i u_2}{dt^i} = \Lambda\{u_1\} + \Lambda\{u_2\}.$$

Результат доказывает аддитивность преобразования, осуществляемого дифференциальным уравнением типа (I.24), вследствие чего дифференциальное уравнение такого типа и называется линейным. Заметим, что, если в правую часть (I.24) прибавить постоянное

слагаемое, то уравнение перестанет удовлетворять свойству аддитивности.

4. Преобразование сдвига. Преобразование сдвига сигнала во времени (или по расстоянию) также удовлетворяет свойству аддитивности и однородности и поэтому является линейным преобразованием. Если сигнал в результате прохождения через систему запаздывает на время τ, то $w(t) = u(t-\tau) = \Lambda\{u(t)\}$.
Положив $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$, получим:

$$w(t) = \Lambda\{u_1(t)\} + \Lambda\{u_2(t)\} = u_1(t-\tau) + u_2(t-\tau). \qquad (I.25)$$

Очевидно, что свойство аддтивности удовлетворяется.

5. Преобразование растяжения и сжатия. Растяжение и сжатие сигнала можно описать введением множителя a в его аргумент, то есть преобразованием вида

$$\Lambda\{u(t)\} = u(at). \qquad (I.26)$$

При $a < I$ сигнал растягивается, а при $a > I$ – сжимается. Проверка на аддитивность показывает, что это преобразование линейное

$$\Lambda\{u_1(t) + u_2(t)\} = u_1(at) + u_2(at).$$

§ 4. Основы теории спектральных преобразований

I. Принцип наложения (суперпозиции). Аддитивность линейного преобразования служит обоснованием применимости к линейным системам принципа наложения, который в физике часто называется принципом суперпозиции (*die Superposition* – нем., *Superposition* – англ. – наложение). Сущность принципа наложения заключается в независимости одновременного прохождения нескольких сигналов через линейную систему. В соответствии с этим принципом при прохождении через систему одновременно нескольких сигналов $u_\xi(t)$ каждый из них независимо от остальных дает на выходе системы сигнал

$$w_\xi(t) = \Lambda\{u_\xi(t)\}.$$

Результирующий выходной сигнал по свойству аддитивности оказывается равным сумме откликов на отдельные сигналы, то есть равен

$$w(t) = \sum_{\xi=1}^{n} w_\xi(t) = \sum_\xi \Lambda\{u_\xi(t)\} = \Lambda\{\sum_\xi u_\xi(t)\}.$$

Свойство аддитивности линейного преобразования и принцип суперпозиции для линейной системы являются двумя способами (математическим и физическим) описания одного и того же явления – взаимной независимости одновременного преобразования нескольких сигналов линейными системами.

В теории линейных систем принцип суперпозиции имеет фундаментальное значение в связи с тем, что основные способы изучения искажения сигнала линейной системой базируются на способе разложения вида (I.2I) входного сигнала на сумму элементарных сигналов с весовыми коэффициентами. В качестве элементарных сигналов обычно принимают либо гармонические функции (синусоиды, косинусоиды), либо разрывные функции (единичную функцию, единичный импульс). Для представления сигнала в виде суммы более простых по форме слагаемых можно использовать и другие функции, но указанные выше элементарные функции получили наибольшее применение благодаря удобству использования детально разработанного математического аппарата преобразования Фурье.

2. Понятие о спектральном преобразовании сигнала. При представлении сигнала в виде линейной комбинации элементарных функций совокупность весовых коэффициентов разложения называется с п е к т р о м сигнала. В случае дискретного или интегрального разложения имеет место дискретное или интегральное преобразование сигнала в его спектр.

В общем случае можно говорить о разложении сигнала $u(t)$ по системе элементарных функций $q_\xi(t)$ с весовыми коэффициентами $\tilde{u}_\xi$:

$$u(t) = a \sum_{\xi=\xi_1}^{\xi_2} \tilde{u}_\xi q_\xi(t), \qquad (I.27)$$

где $\xi = \xi_1, \xi_1+1, \xi_1+2, \ldots, \xi_2$ и a – некоторый масштабный множитель.

Совокупность элементарных функций $q_\xi(t)$ называется с и с т е м о й б а з и с н ы х ф у н к ц и й, б а з и с о м или я д р о м преобразования ([6],[17],[18] и др.). Пределы суммирования ξ_1 и ξ_2 определяются видом сигнала и базиса разложения и могут быть бесконечными.

Система базисных функций $q_\xi(t) = q(\xi, t)$ образуется из совокупности функций двух переменных, одна из которых совпадает с аргументом разлагаемого сигнала (t),а вторая играет роль параметра (ξ). При выбранной системе базисных функций разложение сигнала (I.27) определяется совокупностью весовых коэффициентов (амплитуд) элементарных функций. Совокупность этих амплитуд $\tilde{u}_\xi = \tilde{u}(\xi)$, как функция параметра (номера) ξ, представляет собой с п е к т р сигнала в выбранном базисе. В разложении (I.27) имеется в виду, что параметр принимает дискретные значения, и соответствующие базисные функции можно пересчитать по номерам ξ. В этом случае коэффициенты разложения образуют дискретный (линейчатый) спектр. При непрерывном изменении параметра ξ коэффициенты оказываются сплошной функцией параметра, и разложение записывается в виде интегральной суммы. При этом функция коэффициентов разложения (спектр) $\tilde{u}(\xi)$ приобретает смысл плотности распределения амплитуд базисных функций $q(\xi, t)$ и образует сплошной спектр исходного сигнала. В результате связь между исходным сигналом и его спектром описывается интегральным преобразованием вида:

$$u(t) = a\int_{\xi_1}^{\xi_2} \tilde{u}(\xi)\, q(t,\xi)\, d\xi. \qquad (I.28)$$

Спектральное преобразование (I.28), позволяющее найти сигнал $u(t)$ по его спектру $\tilde{u}(\xi)$,обычно называют о б р а т н ы м с п е к т р а л ь н ы м п р е о б р а з о в а н и е м или с и н т е з о м в данном базисе $q(\xi, t)$.

При весьма общих предположениях о сигнале и ядре преобразования, которые всегда удовлетворяются в технических приложениях, спектральное преобразование является однозначным. Это означает, что каждому сигналу в данном базисе соответствует один единственный спектр, в котором содержатся все свойства исходного сигнала. Поэтому спектр сигнала может быть определен по сигналу при помощи интегрального преобразования, имеющего вид, аналогичный (I.28):

$$\tilde{u}(\xi) = b\int_{t_1}^{t_2} u(t)\, p(t,\xi)\, dt. \qquad (I.29)$$

Это интегральное преобразование определяет "спектр" $\tilde{u}(\xi)$ по его "сигналу" $u(t)$ и обычно называется п р я м ы м с п е к т р а л ь н ы м п р е о б р а з о в а н и е м или а н а л и з о м сигнала в базисе $p(t,\xi)$.При этом исходный сигнал $u(t)$ играет роль плотности распределения амплитуд системы базисных функций $p(t,\xi)$.Совокупность формул прямого и обратного преобразований называется ф о р м у л а м и о б р а щ е н и я. Функции $p(t,\xi)$ и $q(\xi, t)$ являются ядрами (или базисами) соответственно прямого и обратного спектральных преобразований данного вида. Для существования данного взаимно-однозначного обратимого преобразования эти ядра должны образовать полную систему ортогональных функций на интервале ортогональности $T = t_2 - t_1$ и быть такими, чтобы интегралы преобразований (I.28) и (I.29) существовали (сходились) во всем диапазоне изменения параметров ξ и t. В общем случае ядра $p(t,\xi)$и $q(\xi,t)$ прямого и обратного преобразования могут быть разными. Функции $u(t)$ и $\tilde{u}(\xi)$, взаимно определяемые парой интегральных преобразований (I.28) и (I.29), называются т р а н с ф о р м а н т а м и преобразования данного вида.

Спектральное соответствие между трансформантами обозначают двусторонней стрелкой:

$$u(t) \longleftrightarrow \tilde{u}(\xi). \qquad (I.30)$$

В большинстве случаев $u(t)$ является действительным сигналом с аргументом в виде времени или расстояния. Спектральная трансформанта $\tilde{u}(\xi)$ - обычно комплексная функция комплексного или мнимого аргумента, имеющая модуль и фазовую функцию (аргумент). Таким образом, сигналу обычно соответствует комплексный спектр, состоящий из двух функций - амплитудного (модуля) и фазового (аргумента) спектров. Комплексные спектры будем обозначать той же буквой, что и соответствующий сигнал, и отмечать сверху волнистой чертой (тильдой).

Из определения спектрального преобразования (I.28), (I.29) следует, что оно линейно, так как удовлетворяет условиям аддитивности и однородности. Поэтому спектральная трансформанта линейной комбинации сигналов является той же линейной комбинацией трансформант этих сигналов.

3. Основные типы спектральных преобразований. Имеется многочисленный класс обратимых интегральных преобразований, обладающих однотипными ядрами прямого и обратного преобразований. Хотя понятие "однотипность" строго не определено, однако подразумевается, что ядра либо совпадают, либо отличаются лишь знаком аргумента, либо являются комплексно сопряженными функциями. Таким образом:

$$p(|\xi|, t) = q(|\xi|, t), \qquad (I.31)$$

или

$$p(\xi, t) = q^*(\xi, t).$$

(Звездочка означает комплексное сопряжение функции).

Для таких преобразований формулы обращения (I.28) и (I.29) приобретают одинаковый, "симметричный" вид и могут отличаться только знаком аргумента ядра преобразования и масштабными множителями. Их обычно называют преобразованиями типа Фурье, а ядра, удовлетворяющие условию (I.31) - ядрами Фурье. Примерами преобразований типа Фурье являются преобразования Лапласа, Фурье, Хенкеля, Френеля, Гильберта, Дирака. Ядра интегральных преобразований $p(t,\xi)$ и $q(t,\xi)$ содержат две переменные, связанные определенными соотношениями, простейшими из которых являются операции сложения, умножения и возведения в степень. Эти соотношения применяются в ядрах преобразований различных типов. Если обе переменные t и ξ связаны между собой операцией сложения (вычитания) то, очевидно, они являются величинами одной размерности. Поэтому преобразование с ядром типа $p(t \pm \xi)$ предполагает взаимное смещение подинтегральных функций $u(t)$ и $p(t \pm \xi)$, в результате чего получается преобразование типа свертки:

$$u(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, p(t \pm \xi)\, dt \longrightarrow u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\xi)\, q(t \pm \xi)\, d\xi .$$

Примерами преобразования типа свертки являются преобразования Френеля, Гильберта, Дирака.

Преобразование Френеля:

$$\tilde{u}(\xi) = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{+j(\xi - t)^2} dt \xleftrightarrow{Fr} u(t) = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\xi)\, e^{-j(\xi - t)^2} . \qquad (I.32)$$

Здесь $e^{\pm j\xi^2}$ - комплексные функции Френеля.

Преобразование Гильберта:

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)}{\xi - t}\, dt \xleftrightarrow{H} u(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{u}(\xi)}{t - \xi}\, d\xi . \qquad (I.33)$$

Преобразование Дирака:

$$u(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, \delta(\xi - t)\, dt . \qquad (I.34)$$

Здесь $\delta(\xi)$ - единичный импульс Дирака (см. далее гл. II).

Важный тип интегральных преобразований образуют ядра, содержащие переменные t и ξ в виде произведения и имеющие вид $p(t \cdot \xi)$. К ним относятся преобразования Лапласа и Фурье, которые записываются следующим образом.

Преобразование Лапласа:

$$\tilde{u}(\xi) = \int_{0}^{\infty} u(t)\, e^{-2\pi\xi t} dt \xleftrightarrow{La} u(t) = \frac{1}{j}\int_{\alpha - j\infty}^{\alpha + j\infty} \tilde{u}(\xi)\, e^{+2\pi\xi t} d\xi . \qquad (I.35)$$

Здесь $\xi = \alpha + jf$ - комплексная переменная, $\alpha > 0$.

Преобразование Фурье:

$$\tilde{u}(jf) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-j2\pi f t} dt \xleftrightarrow{Fu} u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(jf)\, e^{+j2\pi f t} dt . \qquad (I.36)$$

Здесь ξ и t – действительные переменные.

Наконец, переменные t и ξ ядра преобразований могут быть связаны степенной зависимостью, так что само ядро имеет вид $p=t^{\xi}$ или $p=\xi^{t}$. Примером этому может служить преобразование Меллина, которое имеет вид:

$$\tilde{u}(\xi)=\int_0^{\infty} u(t)t^{\xi-1}dt \xleftrightarrow{Me} u(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} u(\xi)t^{1-\xi}d\xi. \qquad (I.37)$$

Существует еще много других видов спектральных преобразований, не входящих в эти два типа (преобразование Хенкеля, Радона и др.).

Вид интегрального преобразования определяется базисами (ядрами), то есть системами ортогональных функций, принятых в этих преобразованиях.

4. Обобщенное преобразование Фурье. Спектральное преобразование, в котором трансформанты находятся из условия минимального среднеквадратичного отклонения функции от ее интегрального разложения, обычно называется обобщенным преобразованием Фурье. В дальнейшем (гл. Ш, § 4) будет показано, что подобная оценка различия двух функций (сигналов) соответствует их рассмотрению в векторном евклидовом пространстве сигналов, то есть пространстве с "энергетической", пифагоровой метрикой.

Для сигнала $u(t)$ это условие имеет вид:

$$\int_T \left[u(t)-a\int_{\xi_1}^{\xi_2}\tilde{u}(\xi)q(t,\xi)\,d\xi\right]^2 dt = min. \qquad (I.38)$$

Для нахождения из этого условия трансформанты $\tilde{u}(\xi_k)$ с конкретным значением аргумента ξ_k надо найти экстремум выражения (I.38) по переменной $\tilde{u}(\xi_k)$. Дифференцируя $\tilde{u}(\xi_k)$ и приравнивая результат нулю, получаем выражение:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{u}(\xi_k)}\left\{\int_T\left[u(t)-a\int_{\xi_1}^{\xi_2}\tilde{u}(\xi)q(t,\xi)\,d\xi\right]^2 dt\right\}=$$

$$=\int_T\left[u(t)-a\int_{\xi_1}^{\xi_2}\tilde{u}(\xi)q(t,\xi)\,d\xi\right]q(t,\xi_k)\,dt=0$$

или

$$\int_T u(t)q(t,\xi_k)\,dt = a\int_{\xi_1}^{\xi_2}\tilde{u}(\xi)\left\{\int_T q(t,\xi)q(t,\xi_k)\,dt\right\}d\xi. \qquad (I.39)$$

По условию выбора функций для ядра преобразования совокупность $q(t,\xi)$ образует систему ортогональных функций по t с параметром ξ. В общем случае это система комплексно-сопряженных функций, для которых условие ортогональности заключается в том, что внутренний интеграл в правой части (I.39) отличен от нуля только в том случае, когда под интегралом находится комплексно-сопряженная функция с одинаковым значением параметра ξ.

$$\int_T q(t,\xi)q(t,\xi_k)\,dt = \begin{cases} 0 \text{ при } \xi \neq \xi_k \\ \int_T |q(t,\xi_k)|^2 dt = \|q(\xi_k)\|^2 \end{cases} \qquad (I.40)$$

при $\xi=\xi_k$ и $q(t,\xi)=q^*(t,\xi_k)$.

Рассматривая в (I.39) интеграл справа как бесконечную сумму слагаемых с различными значениями параметра ξ и имея в виду, что слагаемые этой суммы, кроме $\tilde{u}(\xi_k)\|q(\xi_k)\|^2$, равны нулю, получаем:

$$a\tilde{u}(\xi_k)\cdot\|q(\xi)\|^2=\int_T u(t)q(t,\xi_k)\,dt \qquad (I.41)$$

или

$$\tilde{u}(\xi)=\frac{1}{a\|q\|^2}\int_T u(t)\,q(t,\xi)\,dt=b\int_T u(t)\,q(t,\xi)\,dt, \qquad (I.42)$$

где $\|q\|=\frac{1}{\sqrt{ab}}$ – нормирующий множитель, определяемый по (I.40), так называемая "норма" рассматриваемого пространства сигналов (см. гл. Ш, § 4).

Поскольку полученное выражение (I.42) справедливо для любого значения ξ, индекс "к" в нем опущен. Выражение (I.42) определяет трансформанту обобщенного преобразования Фурье. Очевидно, что одну из постоянных, например a, можно принять за единицу. Тогда, положив a = I, с учетом (I.28) можно получить спектральное соответствие в таком виде:

$$\tilde{u}(\xi)=\frac{1}{\|q\|^2}\int_T u(t)\,q^*(t,\xi)\,dt \longleftrightarrow u(t)=$$

$$=\int_{\xi_1}^{\xi_2}\tilde{u}(\xi)\,q(t,\xi)\,d\xi. \qquad (I.43)$$

Условие минимального среднеквадратического отклонения (I.38) обеспечивает минимальную суммарную ("интегральную") ошибку представления сигнала $u(t)$ его разложением (I.28) или (I.43).

Глава П. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЧАСТОТНЫХ И ВОЛНОВЫХ СПЕКТРОВ

§ I. Основы теории преобразования Фурье

I. Понятие о частотных и волновых спектрах. В технике наиболее широко применяется разложение сигналов по гармоническим функциям $\sin$ и $\cos$ или по комплексным гармоникам e^{i}, которое обычно называют преобразованием Фурье. Основной задачей этого разложения является нахождение комплексных амплитуд гармоник при разложении сигналов в базисе комплексных гармонических функций. Совокупность этих амплитуд образует комплексный спектр сигнала. Операция нахождения спектра по сигналу называется "изображением сигнала по Фурье", "нахождением Фурье-образа", "прямым преобразованием Фурье" или "анализом". Обратная операция нахождения сигнала по его Фурье-спектру называется "обратным преобразованием Фурье" или "синтезом". Часто нецелесообразно различать прямое и обратное преобразования Фурье и приписывать функциям наименования "сигнал" и "спектр". Более удобным оказывается говорить об обратимом преобразовании Фурье и называть преобразованные функции "трансформантами по Фурье" или "Фурье-трансформантами".

Сейсморазведка имеет дело с сейсмическими волнами, которые представляют собой процессы, распространяющиеся во времени и пространстве. Поэтому аргументами функций, описывающих сейсмические сигналы, могут быть как время, так и пространственные координаты.

Если рассматривать сигналы как функции времени, то мерой их упорядоченности является п е р и о д колебаний T (с). Фурье-трансформанты временного изображения сигналов являются функциями ч а с т о т ы – круговой ω (рад/с) или циклической f (Гц). Поэтому такие Фурье-трансформанты называются ч а с т о т н ы м и спектрами. Если же рассматривать пространственное описание сигналов, то мерой их пространственной упорядоченности является д л и н а в о л н ы λ (км). В этом случае Фурье-трансформанты являются функциями в о л н о в ы х ч и с е л – кругового ν (рад/км) и циклического $\varkappa$ (I/км), из-за чего такие Фурье-трансформанты называют в о л н о в ы м и спектрами. Период и длина волны, частоты и волновые числа связаны между собой через значение скорости v распространения волны:

$$\lambda=vT;\quad \nu=\omega/v;\quad \varkappa=f/v;$$

$$\omega=2\pi f;\quad \nu=2\pi\varkappa.$$

В этих соотношениях предполагается, что измерение волновых параметров производится вдоль направления распространения волны, по лучу. Если же измерения производятся не по лучу, а в произвольном направлении, то используют понятия кажущейся скорости $v^*=v/\sin\alpha$ и кажущихся волновых чисел $\nu^*=\nu\cdot\sin\alpha$, где α –угол между направлением распространения волны (лучом) и нормалью к линии измерения. Учитывая, что практически всегда наземные сейсмические наблюдения дают кажущиеся волновые параметры, впредь условимся, что всегда используются кажущиеся скорости и волновые числа

и для сокращения письма не будем специально отмечать этот факт "звездочкой".

Если произвести многомерную Фурье-трансформацию волнового сигнала по всем аргументам времени и пространства, то образуется многомерный частотно-волновой спектр пространственно-временного сигнала. Для простоты в данной главе будут рассматриваться одномерные временные сигналы и их частотные спектры. Волновые спектры пространственных сигналов получаются заменой переменных – времени на расстояние, а частоты – на волновое число.

2. Периодические сигналы. Ряды Фурье. Дискретные спектры

Рассмотрим ограниченный по времени сигнал $u(t)$ длительностью T и представим его в виде суммы элементарных гармонических функций с частотами, увеличивающимися на одну и ту же величину $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$. Для определенности пусть это будут косинусоиды с разными амплитудами, частотами и фазами. Тогда можно исходный сигнал $u(t)$ записать в виде следующей суммы:

$$u(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\Delta\omega t - \varphi_n), \qquad (\text{П.I})$$

где n = I, 2, 3 ... – порядковый номер гармоники.

В общем случае сумма (П.I) может иметь бесконечное число слагаемых, причем каждое слагаемое представляет собой косинусоидальное колебание с амплитудой C_n, круговой частотой $\omega_n = n\Delta\omega$ и фазовым сдвигом φ_n. Постоянная C_0 является постоянной составляющей сигнала. При n = I слагаемое представляет собой косинусоиду с частотой

$$\Delta\omega = 2\pi/T, \qquad (\text{П.2})$$

где T – период колебания.

Эта первая гармоника в разложении (П.I) обладает наибольшим периодом T и наименьшей частотой $\Delta\omega = 2\pi\Delta f$ из всех гармоник разложения, а T и $f_1 = \Delta f$ называются соответственно основным периодом и основной частотой этого разложения.

Заметим, что постоянную составляющую сигнала (при n = 0) можно рассматривать как "нулевую гармонику" разложения, период

которой равен бесконечности, а частота равна нулю. Однако по причинам, которые станут ясными в дальнейшем, ее нельзя внести в общую сумму и распространить суммирование и на значение n = = 0. Все последующие слагаемые представляют собой косинусоиды с кратными частотами $f_n = n\Delta f = n/T$ и

$$\omega_n = n\Delta\omega = \frac{2\pi n}{T}. \qquad (\text{П.3})$$

Таким образом, все последующие периоды укладываются целое число раз в основной период. Разложение функции в ряд вида (П.I), состоящий из суммы гармонических функций с кратными периодами и частотами, называется разложением в ряд Фурье.

Из (П.I) следует важный вывод, что записанная сумма представляет собой периодическую функцию с периодом T. Поэтому суммой тригонометрических функций вида (П.I) можно аппроксимировать только периодические функции, причем основной период разложения T (период первой гармоники) равен периоду этой исходной периодической функции. Если непериодическая, ограниченная по времени длительностью T функция представляется в виде ряда Фурье (П.I), то полученное разложение совпадает с исходной функцией на интервале ее существования, а вне этого интервала, где $u(t) = 0$, дает периодическое повторение этой функции с периодом T.

На рис. П-I приведены примеры периодических функций и указаны их периоды повторения T. При выборе основного периода T в разложении Фурье П-I сигнала длительностью T_c необходимо, чтобы период разложения T был не меньше его длительности T_c. В противном случае повторяющийся сигнал будет накладываться сам на себя, суммироваться в местах наложения, и получится периодический сигнал, каждый период которого не будет совпадать с исходным сигналом, то есть разложение будет соответствовать сигналу иной формы (рис. П-2а). Если выбрать $T = T_c$, то разложение (П.I) будет аппроксимировать периодическую функцию, на каждом периоде совпадающую по форме и длительности с исходным сигналом (рис. П-2б). Если выбрать период повторения T большим длительности сигнала T_c, то периоды полученой периодической функции, даваемой рядом Фурье (П.I), будут включать сигнал и "пустые" места, как показано на рис. П-2в и П-2г. Из сказанного следует, что при разложении в ряд Фурье периодической функции вопрос о выборе

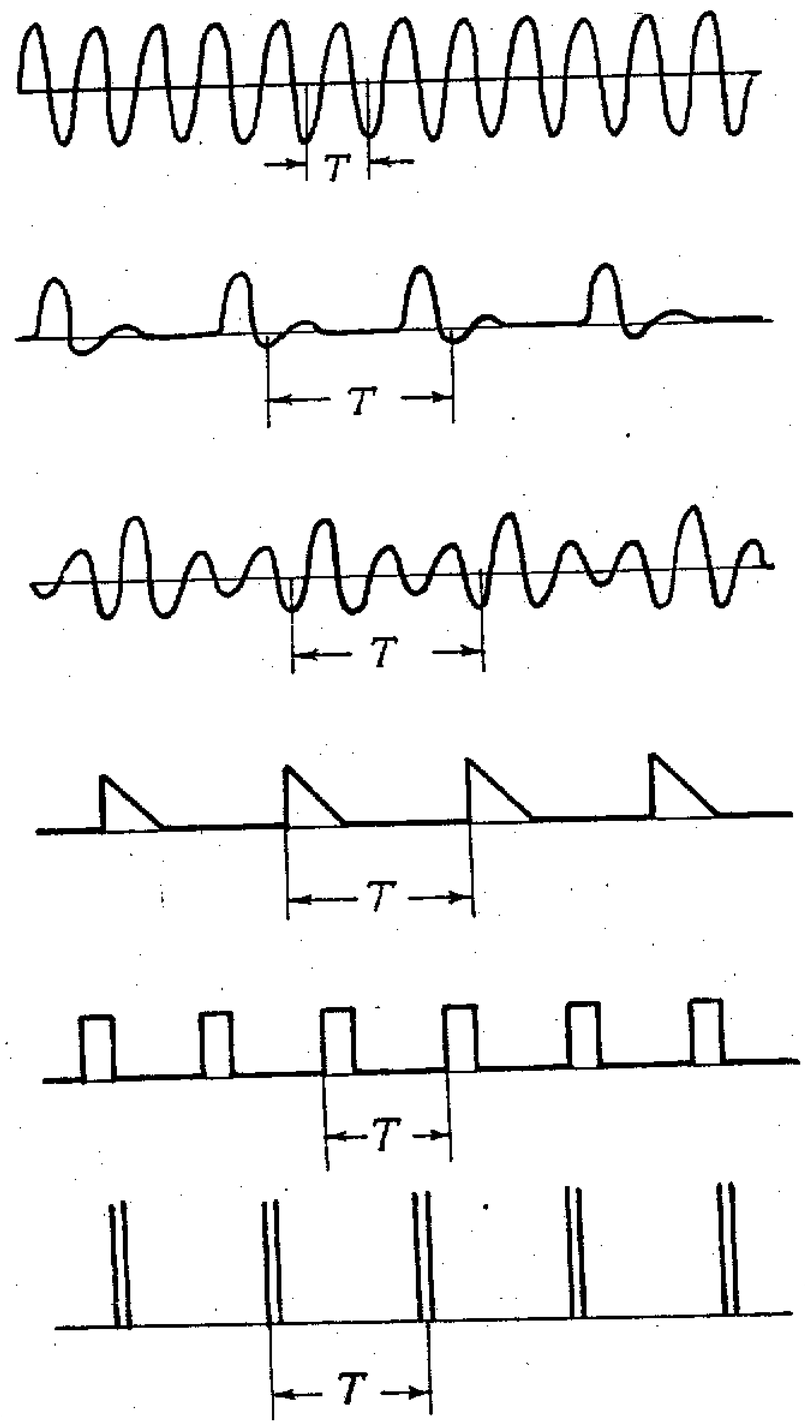


Рис. П-I. Примеры периодических функций

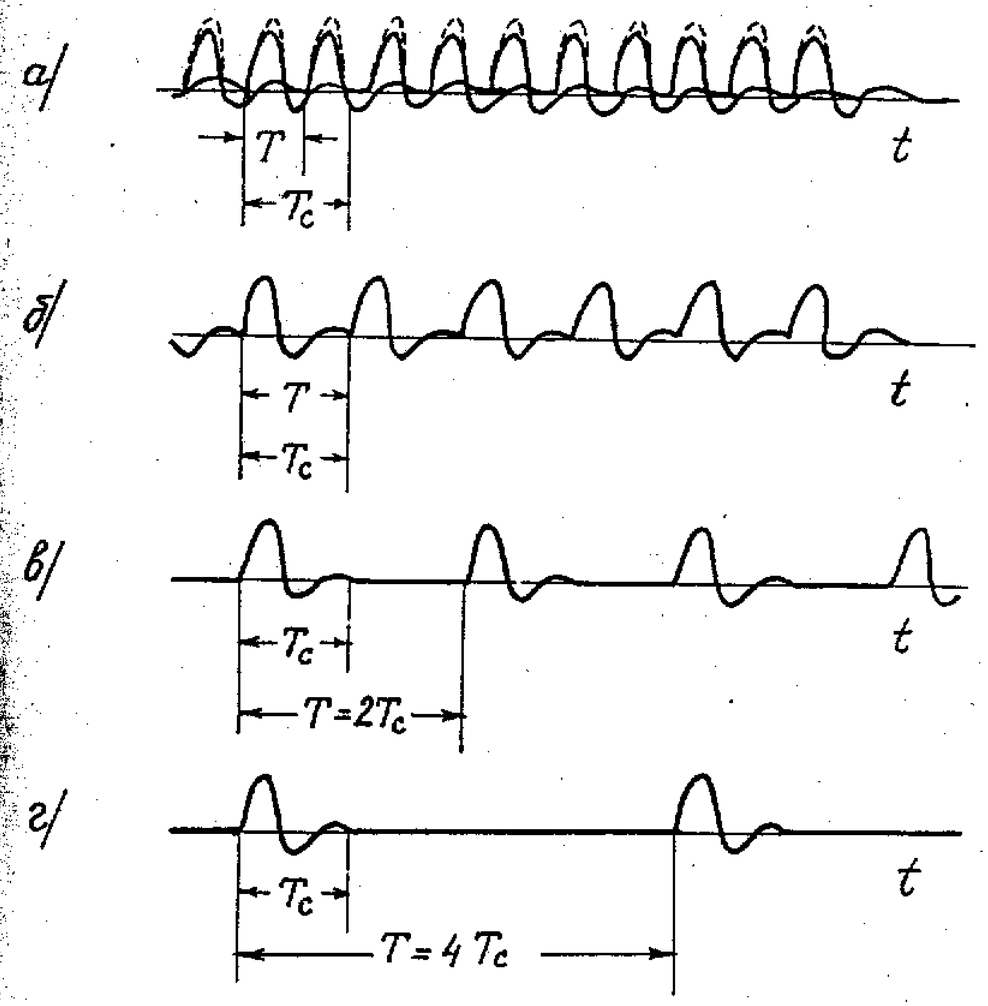


Рис. П-2. Изменение интервала повторения периодов

основного периода не возникает, так как он равен периоду исходной периодической функции. В результате этого и интервал изменения частот в разложении оказывается однозначно определенным, равным

$$\Delta f = \frac{1}{T_c} = \frac{1}{T} . \qquad (П.4)$$

В сейсморазведке обычно приходится иметь дело с сигналами импульсного типа, так что разложение периодической функции в ряд Фурье само по себе представляет ограниченный интерес. При аппроксимации импульсного сигнала одним периодом периодической функции, даваемой рядом Фурье, возможен некоторый произвол в выборе T, который ограничивается лишь условием $T \geqslant T_c$. Выбранное значение T определяет вид аппроксимирующей периодической функции и шаг между гармониками, то есть вид соответствующего спектра.

Совокупность амплитуд C_n гармоник в разложении (П.I) называется амплитудным частотным спектром, а совокупность фазовых сдвигов φ_n -фазовым частотным спектром сигнала.

Амплитудный и фазовый спектры можно изобразить в виде точек в системе координат (C_n, f) и (φ_n, f), однако больше принято изображать их в виде вертикальных линий соответствующей величины, как показано на рис. П-3а. В связи с таким их изображением, а также по аналогии с оптическими спектрами, такие дискретные спектры называют линейчатыми спектрами.

Чтобы представить периодическую функцию в виде ряда Фурье (П.I), необходимо вычислить амплитуды C_n, фазы φ_n и основную частоту Δf или, иначе говоря, определить амплитудный и фазовый спектры разлагаемой функции.

Как уже отмечалось, основная частота (частота первой гармоники) определяется по периоду функции в соответствии с (П.2). Для определения остальных параметров (C_n и φ_n) сумму (П.I) представим в ином виде:

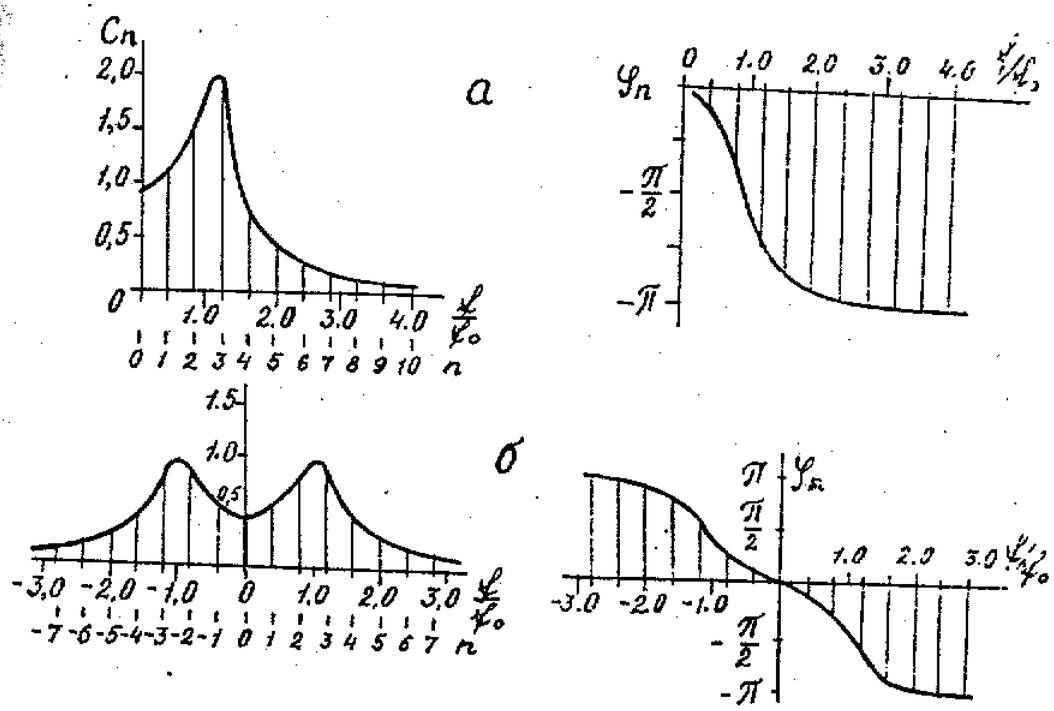


Рис. П-3. Односторонний (а) и двусторонний (б) дискретные спектры

$$u(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\Delta\omega t - \varphi_n) =$$

$$= C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\varphi_n \cos n\Delta\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\varphi_n \sin n\Delta\omega t =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\Delta\omega t + b_n \sin n\Delta\omega t) . \qquad (П.5)$$

В (П.5) обозначено:

$$a_0 = 2C_0 ,$$
$$a_n = C_n \cos\varphi_n , \qquad (П.6)$$
$$b_n = C_n \sin\varphi_n .$$

Из (П.6) следует, что

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}\,, \qquad (П.7)$$

$$tg\,\varphi_n = \frac{b_n}{a_n}\,. \qquad (П.8)$$

Таким образом, каждая гармоника разложения (П.I) или (П.5) определяется парой параметров C_n и φ_n, либо параметров a_n и b_n, причем, зная одну пару, можно по (П.6) или (П.7) и (П.8) найти вторую пару.

Из теории рядов Фурье известно, что параметры a_n и b_n могут быть определены по заданной периодической функции с периодом T по формулам:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\cos n\Delta\omega t\,dt\,, \qquad (П.9)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\sin n\Delta\omega t\,dt\,.$$

Постоянная составляющая сигнала $a_0/2$ находится по формуле (П.9) для a_n при $n = 0$.

Доказательство формул (П.8) можно найти в любом учебнике по математическому анализу или по теории рядов Фурье.

3. Комплексная форма ряда Фурье. Комплексный дискретный спектр.

Обычно бывает удобнее применять ряд Фурье не в виде суммы действительных гармоник, даваемых выражением (П.I) или (П.5), а в более компактной комплексной форме, которая может быть получена из действительной формы (П.5) следующим образом. Выразим в (П.5) синусы и косинусы через показательные функции по формулам Эйлера:

$$\cos n\Delta\omega t = \frac{e^{jn\Delta\omega t} + e^{-jn\Delta\omega t}}{2}\,,$$

$$\sin n\Delta\omega t = \frac{e^{jn\Delta\omega t} - e^{-jn\Delta\omega t}}{2j}\,, \qquad (П.10)$$

где e – основание натуральных логарифмов, а

j – мнимая единица.

Тогда вместо (П.5) получим разложение $u(t)$ в следующем виде:

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{jn\Delta\omega t} + e^{-jn\Delta\omega t}}{2} + b_n\frac{e^{jn\Delta\omega t} - e^{-jn\Delta\omega t}}{2}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n - jb_n}{2}e^{jn\Delta\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n + jb_n}{2}e^{-jn\Delta\omega t}\,. \qquad (П.11)$$

Из (П.9) следует, что коэффициенты a_n являются четной функцией, а коэффициенты b_n – нечетной функцией относительно номера гармоники n, то есть

$$a(-n) = a(n)\,,$$
$$b(-n) = -b(n)\,. \qquad (П.12)$$

Поэтому, если во второй сумме выражения (П.11) изменить знак n на отрицательный, то всю сумму можно представить в виде:

$$u(t) = \sum_{n=\infty}^{\infty}\frac{a_n - jb_n}{2}e^{jn\Delta\omega t} = \sum_{n=\infty}^{\infty}\tilde{u}(n)\,e^{jn\Delta\omega t}\,, \qquad (П.13)$$

где обозначено

$$\tilde{u}(n) = \frac{a_n - jb_n}{2}\,. \qquad (П.14)$$

Подставляя в (П.14) выражения для a_n и b_n, по (П.9) получим:

$$\tilde{u}(n) = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\,\frac{\cos n\Delta\omega t - j\sin n\Delta\omega t}{2}\,dt = \qquad (П.15)$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)\,e^{-jn\Delta\omega t}\,dt.$$

Выражения (П.13) и (П.15) представляют собой пару взаимно-однозначных преобразований Фурье. Преобразование (П.15), определяющее совокупность дискретных комплексных коэффициентов $\tilde{u}(n)$ ряда Фурье, является прямым комплексным преобразованием Фурье, а преобразование (П.15), при помощи которого по коэффициентам $\tilde{u}(n)$ определяется сигнал $u(t)$, -обратным преобразованием Фурье. Полученная формула (П.13) представляет собой комплексную форму записи ряда Фурье. Ряд представляет собой сумму комплексных гармоник

$$e^{jn\Delta\omega t} = \cos n\Delta\omega t + j\sin n\Delta\omega t \qquad (П.16)$$

с комплексными амплитудами $\tilde{u}(n)$, которые можно выразить через модуль $|\tilde{u}(n)|$ и фазовую функцию $\varphi(n)$.

Таким образом, комплексные амплитуды содержат в себе как амплитудный, так и фазовый спектры сигнала, то есть являются комплексным спектром сигнала

$$\tilde{u}(n) = |\tilde{u}(n)|\,e^{j\varphi(n)}. \qquad (П.17)$$

Модуль $|\tilde{u}(n)|$ представляет собой амплитудно-частотный спектр сигнала, а $\varphi(n)$ - его фазово-частотный спектр. Из (П.7), (П.8) и (П.14) следует, что

$$|\tilde{u}(n)| = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} = \frac{c_n}{2}, \qquad (П.18)$$

$$tg\,\varphi(n) = -\frac{b_n}{a_n}; \quad \varphi(n) = -\varphi_n. \qquad (П.19)$$

Таким образом, в комплексной форме ряда Фурье амплитуды гармоник вдвое меньше, но число их вдвое больше, так как каждая гармоника действительной формы ряда распадается на две одинаковые гармоники с разными по знаку частотами: $n\Delta\omega$ и $-n\Delta\omega$.

В результате амплитудный спектр сигнала оказывается состоящим из двух половинок по положительным и отрицательным частотам, симметричных относительно нулевой частоты, то есть является четной функцией частоты (рис. П-3).

В теории рядов Фурье доказывается, что для представимости функции тригонометрическим рядом Фурье она должна подчиняться определенным условиям, которые называются условиями Дирихле, или условиями ограниченного изменения (ограниченной вариации). Эти условия сводятся к тому, что периодическая функция в пределах одного периода должна быть кусочно-непрерывной, иметь конечное число максимумов и минимумов и конечное число разрывов первого порядка (то есть конечной амплитуды). При этом, в точках непрерывности ряд сходится к значению функции, а в точках конечного разрыва - к полусумме значений функции в точке разрыва.

Сейсмические сигналы заведомо удовлетворяют указанным условиям, так что мы в дальнейшем не будем беспокоиться о существовании спектров сигналов и останавливаться на этом подробно. Отметим только, что указанные условия ограниченной вариации являются достаточными условиями, но не необходимыми. В ряде случаев и при несоблюдении некоторых из этих условий ряд будет существовать и сходиться к заданной функции.

4. Импульсные сигналы. Интегралы Фурье. Сплошные спектры

Сейсмическая запись представляет собой наложение последовательности сейсмических импульсов, время прихода, форма и интенсивность которых определяются положением геологических границ и физическими свойствами среды. В связи с этим в сейсморазведке основной интерес представляет изучение спектров отдельных сейсмических импульсов, вызванных определенными геологическими

объектами, и интерференционных картин, возникающих в результате наложения нескольких отдельных импульсов.

Используя рассмотренный выше аппарат ряда Фурье, получим спектр импульсного непериодического сигнала из спектра периодической функции путем беспредельного увеличения периода повторения этого сигнала. Прежде всего посмотрим, что будет происходить с дискретным (линейчатым) спектром периодической последовательности импульсов, следующих через период T, если, не меняя форму самого импульса, увеличить период его повторения в m раз, то есть сделать его равным $T_m = mT$ (рис. П-4а). Как следует из основных соотношений для ряда Фурье (П.2), (П.13) и (П.15), при увеличении основного периода периодической функции интервал $\Delta f = \Delta\omega/2\pi$ между гармониками спектра уменьшается. Если этот интервал для периода T был $\Delta f = 1/T$, то при увеличении периода в m раз он во столько же раз уменьшается:

$$\Delta f_m = \frac{1}{T_m} = \frac{1}{mT} = \frac{\Delta f}{m}.$$

В то же время, судя по (П.15), где основной период T находится в знаменателе, амплитуды гармоник одной и той же частоты при возрастании основного периода пропорционально уменьшаются. В результате растяжение основного периода приводит к тому, что гармоники более плотно заполняют ось частот, а их амплитуды уменьшаются (рис. П-4б). Увеличивая период до бесконечности, можно от периодической функции, состоящей из последовательности импульсов, прийти к отдельному импульсу. При этом частотный интервал между гармониками спектра будет беспредельно уменьшаться, амплитуды гармоник становятся бесконечно малой величиной, а сумма (П.13) перейдет в интеграл, выражающий спектр одиночного сигнала в виде сплошной функции частоты $\tilde{u}(\omega)$. В результате из (П.15) при $T \to \infty$ будем иметь:

$$n\Delta\omega \to \omega; \quad \frac{2\pi}{T} = \Delta\omega \to d\omega; \qquad (П.20)$$

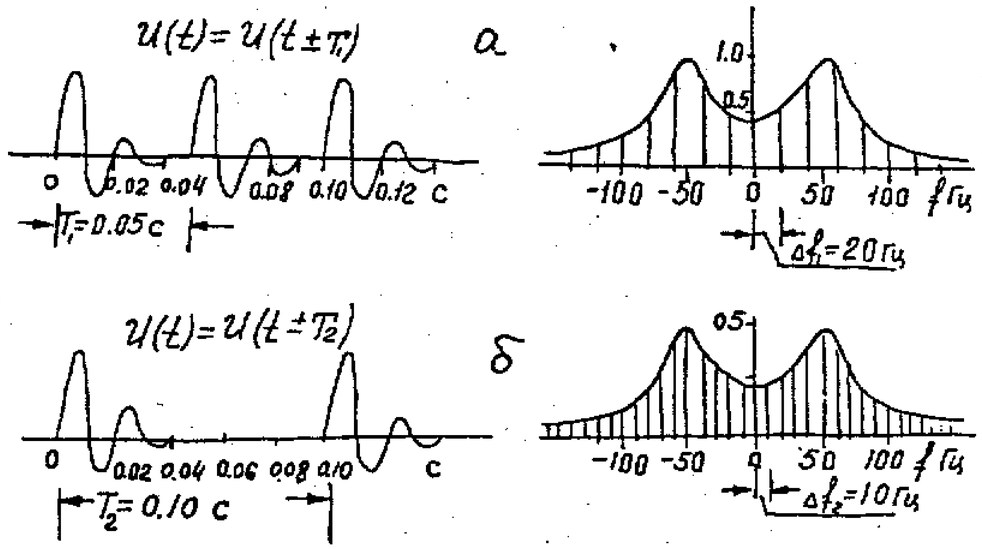


Рис. П-4. Связь дискретности спектра с периодичностью сигнала

$$\lim_{T\to\infty} \tilde{u}(n) = \lim \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} u(t)e^{-jn\Delta\omega t}dt =$$

$$= \frac{d\omega}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-j\omega t}dt = \tilde{u}(\omega)\,\frac{d\omega}{2\pi}, \qquad (П.21)$$

где обозначено:

$$\tilde{u}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-j\omega t}dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\cos\omega t\,dt - j\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\sin\omega t\,dt. \qquad (П.22)$$

Аналогично, переходя в (П.13) к пределу при $T \to \infty$ и учитывая (П.21), получаем:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\omega)\, e^{j\omega t}d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\omega)\cos\omega t\,d\omega + j\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(\omega)\sin\omega t\,d\omega. \qquad (П.23)$$

Выражения (П.22) и (П.23) представляют собой пару взаимно-однозначных интегральных преобразований Фурье.

$$\tilde{u}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,e^{-j\omega t}dt \xleftrightarrow{F_u} u(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(\omega)\,e^{j\omega t}d\omega. \quad (\text{П}.24)$$

Выражения (П.22) позволяют вычислить комплексный частотный спектр $\tilde{u}(\omega)$ импульсного сигнала $u(t)$ (операция анализа), а формула (П.23) осуществляет обратную операцию определения импульса по его сплошному комплексному спектру (операция синтеза сигнала).

Интегральное преобразование (П.24) можно получить из обобщенного преобразования Фурье, приняв в качестве ядра преобразования комплексную гармонику $e^{j\omega t}$:

$$q(\omega_1,t)\,q^*(\omega_2,t)\,dt=\int_{2\pi} e^{j\omega_1 t}e^{-j\omega_2 t}dt=\begin{cases}0;\ \omega_1\neq\omega_2\\ \|q(\omega)\|^2=2\pi;\ \omega_1=\omega_2\end{cases}$$

В результате в соответствии с (I.40) и (I.42) получаем интегральное преобразование Фурье (П.24).

Аналогично терминологии, касающейся рядов Фурье, эти операции анализа и синтеза обычно называют прямым и обратным преобразованиями Фурье, а сами функции $u(t)$ и $\tilde{u}(\omega)$ - трансформантами по Фурье или Фурье-трансформантами. Как прямое, так и обратное преобразования взаимно-однозначны, так что заданному сигналу $u(t)$ соответствует только один единственный спектр $\tilde{u}(\omega)$, определяемый преобразованием (П.22), а по заданному спектру $\tilde{u}(\omega)$ при помощи преобразования (П.23) можно найти только одну вполне определенную функцию $u(t)$.

5. Комплексный сплошной спектр импульсного сигнала

Полученная формула обратного преобразования Фурье (П.23) представляет собой разложение импульсного сигнала на интегральную сумму бесконечно большого числа комплексных гармоник вида:

$$e^{j\omega t}=\cos\omega t+j\sin\omega t \quad (\text{П}.25)$$

с бесконечно малыми амплитудами, плотность распределения которых описывается функцией $\tilde{u}(\omega)$. Функция частоты $\tilde{u}(\omega)$ по (П.22) в общем случае является комплексной и представляет собой сплошной комплексный спектр импульсного сигнала $u(t)$. Как в комплексной функции, в ней можно выделить действительную и мнимую части, или модуль и фазовую функцию, то есть можно записать комплексный спектр в таких вариантах:

$$\tilde{u}(\omega)=|\tilde{u}(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}=|\tilde{u}(\omega)|\cos\varphi(\omega)+j|u(\omega)|\sin\varphi(\omega)=$$
$$=Re\{\tilde{u}(\omega)\}+Im\{\tilde{u}(\omega)\}=\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\cos\omega t\,dt-$$
$$-j\int_{-\infty}^{\infty}u(t)\sin\omega t\,dt. \quad (\text{П}.26)$$

Действительные функции частоты $Re\{\tilde{u}(\omega)\}, Im\{\tilde{u}(m)\}, |\tilde{u}(\omega)|, \varphi(\omega)$ будем называть к о м п о н е н т а м и комплексного спектра. Эти компоненты связаны между собой соотношениями:

$$Re\{\tilde{u}(\omega)\}=|\tilde{u}(\omega)|\cdot\cos\varphi(\omega),$$
$$Im\{\tilde{u}(\omega)\}=|\tilde{u}(\omega)|\cdot\sin\varphi(\omega). \quad (\text{П}.27)$$
$$|\tilde{u}(\omega)|=\sqrt{Re^2\{\tilde{u}(\omega)\}+Im^2\{\tilde{u}(\omega)\}}$$

$$\cos\varphi(\omega)=\frac{Re\{\tilde{u}(\omega)\}}{|\tilde{u}(\omega)|}$$
$$\sin\varphi(\omega)=\frac{Im\{\tilde{u}(\omega)\}}{|\tilde{u}(\omega)|} \quad (\text{П}.28)$$
$$tg\,\varphi(\omega)=\frac{Im\{\tilde{u}(\omega)\}}{Re\{\tilde{u}(\omega)\}}$$

Для краткости записи впредь будем обозначать действительную и мнимую компоненты $Re(\omega)$ и $Im(\omega)$ соответственно.

Модуль $|\tilde{u}(\omega)|$ комплексного спектра характеризует амплитуды гармоник спектра как функции частоты. Он называется амплитудно-частотным спектром сигнала. Функция $\varphi(\omega)$ характеризует взаимный сдвиг гармоник спектра по начальной фазе колебания и называется фазово-частотным спектром сигнала.

Для выяснения физической сущности преобразования Фурье воспользуемся спектральным представлением сигнала, подставив в него спектр в амплитудно-фазовой форме $\tilde{u}(\omega)=|\tilde{u}(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$:

$$u(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{u}(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{u}(\omega)|e^{j(\omega t+\varphi(\omega))}d\omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{u}(\omega)|\cos(\omega t+\varphi(\omega))d\omega+\frac{j}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\tilde{u}(\omega)|\sin(\omega t+\varphi(\omega))d\omega. \qquad (П.29)$$

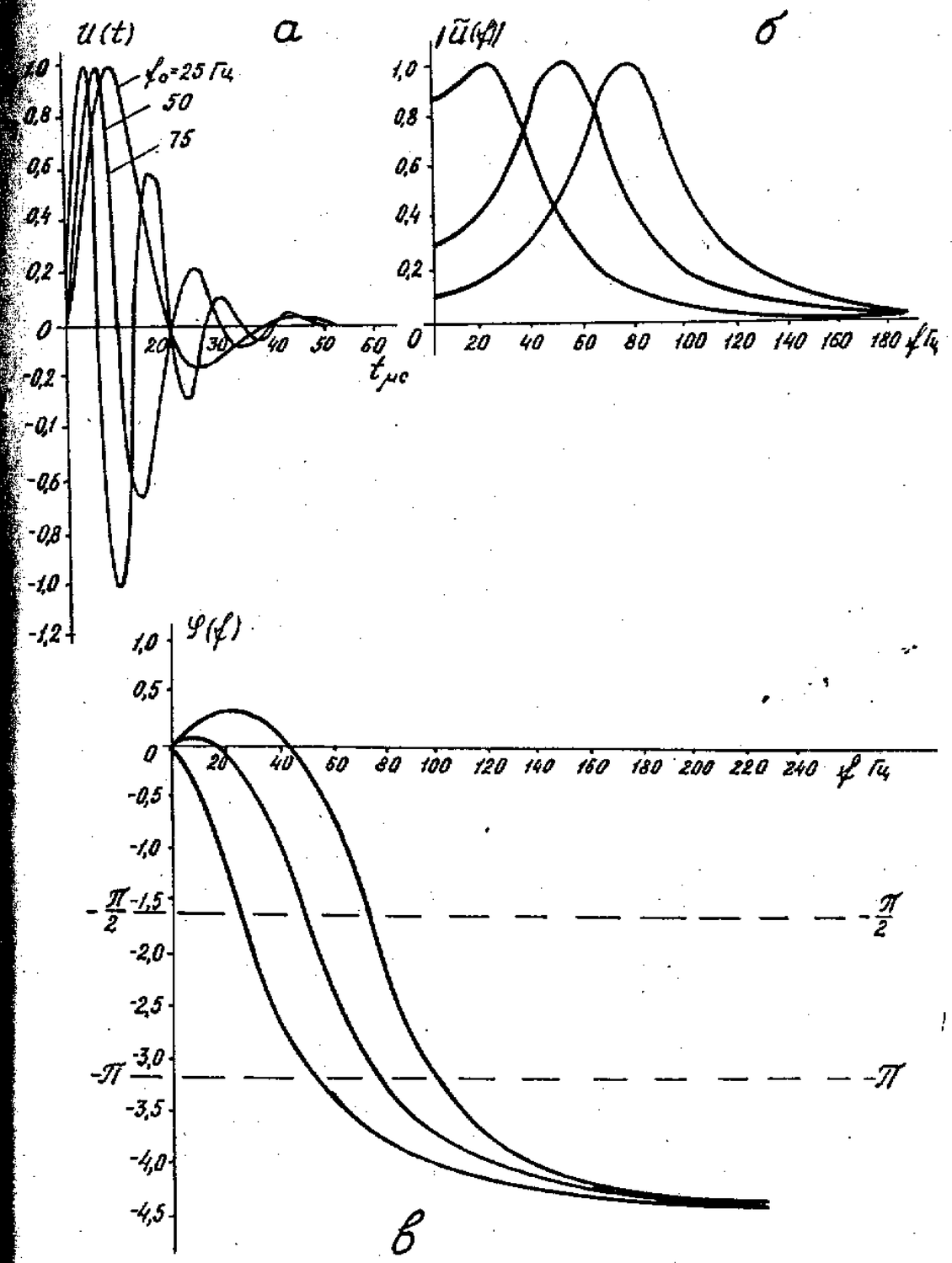
Поскольку модуль $|\tilde{u}(\omega)|$ – четная, а синус – нечетная функция частоты, подынтегральное выражение мнимой части оказывается нечетной функцией. Интеграл нечетной функции в симметричных пределах равен нулю. Поэтому в выражении (П.29) мнимая часть равна нулю, что вполне естественно, так как рассматривается спектральное представление реального сигнала.

Подынтегральное выражение действительной части (П.29) – четная функция частоты, поэтому ее можно представить удвоенным интегралом только по положительным частотам. Как видно из (П.29), сигнал представляется в виде бесконечной суммы гармонических слагаемых с частотами, непрерывно меняющимися от нуля до бесконечности. Каждая гармоника представляет собой косинусоиду с бесконечно малой амплитудой

$$da(\omega)=\frac{1}{\pi}|\tilde{u}(\omega)|d\omega \qquad (П.30)$$

и с начальным фазовым сдвигом $\varphi(\omega)$. Модуль комплексной функции $|\tilde{u}(\omega)|=\frac{da(\omega)}{d\omega}\pi$ имеет смысл и размерность плотности амплитуд гармонических слагаемых и характеризует амплитуды гармоник в зависимости от частоты. Поэтому он называется амплитудно-частотным спектром сигнала. Аргумент комплексной функции $\varphi(\omega)$ описывает зависимость фазового сдвига гармоники от частоты и называется фазово-частотным спектром сигнала. Сама комплексная функция $\tilde{u}(\omega)=|\tilde{u}(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$ характеризует частотный состав импульсного сигнала $u(t)$ и называется комплексным частотным спектром этого сигнала.

На рис. П-5 приведены изображения сигналов и спектров, как комплексных функций частоты. Сигналы показаны на рис. 5а,



с. П-5. Спектры импульсов Берлаге $u(t)=te^{-2\pi\alpha t}\sin 2\pi f_0 t$

а) Импульс Берлаге при α =25 и f_0 =25,50,75 Гц.
б) Амплитудно-частотные спектры,
в) Фазово-частотные спектры

параметр – видимая частота в герцах. На рис. 5б,в изображены компоненты спектров (модуль, фаза) в прямоугольных координатах.

§ 2. Основные свойства частотных спектров

I. Симметрия преобразования Фурье. Важным общим свойством преобразования Фурье является его симметричность. Как следует из (П.24), нахождение спектра по сигналу и сигнала по спектру сводится к аналогичным операциям умножения на комплексную гармонику и интегрирования по соответствующему аргументу. Знак показателя комплексной гармоники следует учитывать при одновременном рассмотрении прямого и обратного преобразований.

Прямое и обратное преобразования Фурье предполагают интегрирование в бесконечных пределах. Для прямого преобразования (П. 22) это не всегда необходимо. Импульсы физических процессов обычно имеют начало – момент своего возникновения. Его можно принять за начало отсчета времени, так что весь импульс расположится в области положительных времен. Обратное преобразование Фурье всегда предполагает интегрирование в бесконечных пределах как по положительным, так и по отрицательным частотам. Вспомним, что отрицательные частоты возникли, когда для более компактной записи ряда Фурье (П.5) через формулы Эйлера (П.10) были введены отрицательные номера дискретных гармоник и получена запись ряда в комплексной форме (П.13) и (П.15). При этом амплитуды всех гармоник стали вдвое меньше, а число гармоник удвоилось за счет появления "отрицательных дублеров".

Таким образом, симметричность амплитудно-частотного спектра есть следствие комплексности спектра. Ясно, что вторая, симметричная половина спектра никакой дополнительной информации не несет. Поэтому для простоты часто изображают лишь правую половину амплитудно-частотного спектра. Однако забывать о существовании второй симметричной половины спектра нельзя.

2. Симметрия компонент частотного спектра действительного сигнала. Из определения частотного спектра (П.22) и его компонент по (П.27) и (П.28) следует, что реальная компонента спектра, определяемая четной подинтегральной гармоникой (косинусом), является функцией четной, а мнимая часть из тех же соображений оказывается нечетной функцией частоты:

$$Re(\omega) = Re(-\omega); \quad Im(\omega) = -Im(-\omega). \qquad (П.31)$$

Очевидно, что амплитудно-частотный спектр является четной функцией частоты. Из определения фазового спектра через его синус и нечетности мнимой части спектра непосредственно следует нечетность фазово-частотного спектра. Таким образом, амплитудно-частотный спектр и действительная компонента спектра являются симметричными, а фазово-частотный спектр и мнимая часть спектра – кососимметричными функциями частоты.

3. Начальные значения сигнала и частотного спектра. Рассмотрим основные соотношения интегрального преобразования Фурье (П.26) и (П.29), положив в них $t = 0$ и $\omega = 0$. При $t = 0$ из (П.29) получим:

$$u(t=0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{u}(\omega)d\omega = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}Re(\omega)d\omega - j\int_{-\infty}^{\infty}Im(\omega)d\omega\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}Re(\omega)d\omega = 2\int_{0}^{\infty}Re(f)df. \qquad (П.32)$$

Здесь учтено, что мнимая часть спектра является нечетной функцией частоты, и, следовательно, второй интеграл равен нулю. В результате начальное значение сигнала равно среднему значению реальной части частотного спектра. При нулевом начальном значении сигнала реальная часть его спектра должна быть знакопеременной функцией частоты с нулевым средним значением.

Положив в (П.26) $\omega = 0$, получим:

$$\tilde{u}(\omega=0) = Re(\omega=0) = \int_{-\infty}^{\infty}u(t)dt. \qquad (П.33)$$

Таким образом, среднее значение сигнала или его постоянная составляющая равна значению реальной части его спектра на нулевой частоте, то есть амплитуде нулевой гармоники. Знакопеременному сигналу без постоянной составляющей соответствует частотный спектр, выходящий из нуля оси частот, то есть без нулевой гармоники.

4. Амплитудно-частотный спектр как огибающая модулей реальной и мнимой частей спектра. Рассмотрим соотношение между модулем комплексного спектра и его реальной и мнимой частями. Из (П.27) следует:

$$|\tilde{u}(\omega)| \geq |Re(\omega)|; \quad |\tilde{u}(\omega)| \geq |Im(\omega)| \qquad (П.34)$$

и

$$|\tilde{u}(\omega)| = \begin{cases} Re(\omega) & при \quad Im(\omega) = 0 \\ Im(\omega) & при \quad Re(\omega) = 0. \end{cases} \qquad (П.35)$$

Поэтому абсолютные значения реальной и мнимой частей находятся внутри амплитудно-частотного спектра и совпадают с ним в точках, в которых другая компонента равна нулю. Покажем, что в этих точках совпадают и наклоны (касательные) модуля $|\tilde{u}(\omega)|$ и абсолютных значений $|Re(\omega)|$ и $|Im(\omega)|$. Дифференцируя квадрат модуля $|\tilde{u}(\omega)|^2$, получим:

$$|\tilde{u}(\omega)| \cdot |\tilde{u}(\omega)|' = |Re(\omega)| \cdot |Re(\omega)|' + |Im(\omega)| \cdot |Im(\omega)|'. \qquad (П.36)$$

В точках совпадения модуля и компонент в соответствии с (П.35) имеем:

$$Re(\omega) = 0; \quad |\tilde{u}(\omega)| = |Im(\omega)|; \quad |\tilde{u}(\omega)|' = |Im(\omega)|'$$
$$Im(\omega) = 0; \quad |\tilde{u}(\omega)| = |Re(\omega)|; \quad |\tilde{u}(\omega)|' = |Re(\omega)|' \qquad (П.37)$$

Совпадение в некоторых точках значений $|\tilde{u}(\omega)|$ с $|Im(\omega)|$ или с $|Re(\omega)|$ и производных этих же функций свидетельствует о том, что $|\tilde{u}(\omega)|$ является огибающей для $|Re(\omega)|$ и $|Im(\omega)|$.

5. Связь между действительной и мнимой частями спектра каузального сигнала. Каузальным или причинным сигналом называется сигнал, возникающий в определенный момент времени, который можно принять за начало отсчета времени $t = 0$ (causa -

причина, лат.). Термин означает, что сигнал вызван определенной физической причиной в момент $t = 0$. Условно каузальный сигнал можно записать так: $u(t<0) = 0$. Реальная и мнимая части спектра каузального сигнала оказываются взаимно зависимыми и связанными преобразованием Гильберта, имеющим следующий вид:

$$Re(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Im(\nu)}{\omega-\nu}d\nu \xleftrightarrow{H} Im(\omega) = \frac{-1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Re(\nu)}{\omega-\nu}d\nu, \qquad (П.38)$$

где H над символом преобразования означает преобразование Гильберта. Доказательство этого свойства спектров будет приведено ниже, после изучения спектров разрывных функций и преобразования свертки.

6. Спектры четных и нечетных сигналов. Рассмотрим спектр четной функции, подставив в общее выражение для спектра (П.26) четную функцию $u(t) = u(-t)$. Так как в первом интеграле содержится произведение двух четных функций, то его подынтегральная функция - четная. Каждому значению t будет соответствовать такое же и с тем же знаком значение подынтегральной функции с аргументом ($-t$). Во втором интеграле умножение четной функции $u(t)$ на нечетный синус приводит к нечетной функции, интегрирование которой в бесконечных пределах дает нуль. В результате мнимая часть спектра четной функции равна нулю, и он является действительной функцией частоты. Амплитудно-частотный спектр оказывается равным абсолютному значению реальной части:

$$\tilde{u}(\omega) = Re(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\cos\omega t\,dt = 2\int_{0}^{\infty} u(t)\cos\omega t\,dt \qquad (П.39)$$
$$|\tilde{u}(\omega)| = |Re(\omega)|.$$

Фазовый спектр оказывается равным:

$$\cos\varphi(\omega) = \frac{Re(\omega)}{|\tilde{u}(\omega)|} = \frac{Re(\omega)}{|Re(\omega)|} = \begin{cases} +1 & Re(\omega) > 0 \\ -1 & Re(\omega) < 0 \end{cases}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0 & Re(\omega) > 0 \\ -\pi & Re(\omega) < 0 \end{cases} \qquad (П.40)$$

Таким образом, фазовый спектр становится разрывной функцией, меняющей свое значение от нуля до $-\pi$ и обратно в точках смены знака реальной части спектра. Для определения спектра четного сигнала достаточно интегрирование проводить только по одной из полуосей времени (рис. П-6а).

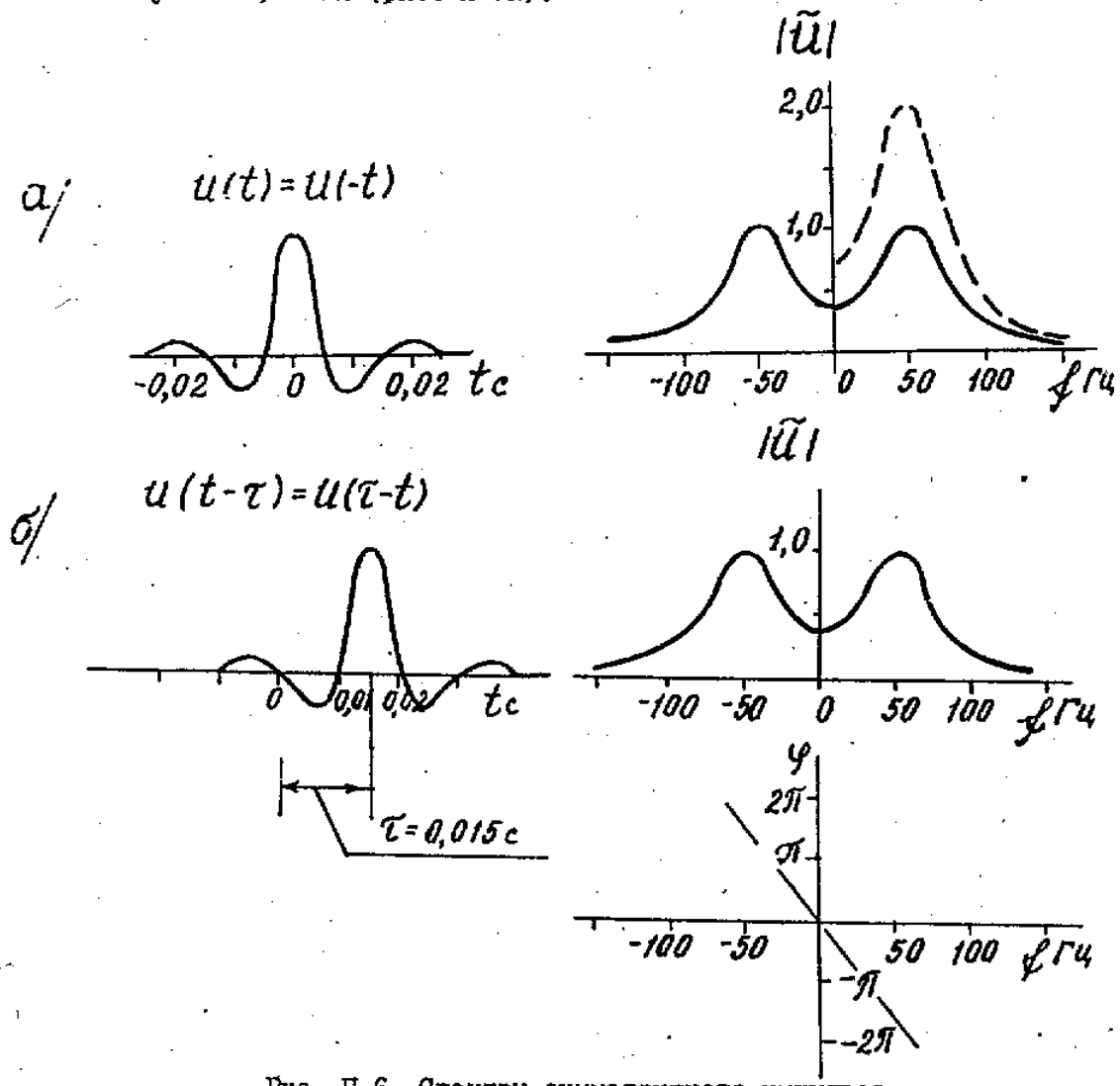


Рис. П-6. Спектры симметричного импульса: а) четного, б) смещенного на время τ

Функцию, симметричную относительно точки $t = \tau$, можно получить из четной функции, перенеся начало координат в точку симметрии. В следующем разделе будет показано, что сдвиг не отражается на амплитудно-частотном спектре и приводит лишь к возникновению линейного фазового спектра. При этом спектр усложняется и станет комплексным (рис. П-6б).

При вычислении спектра нечетной функции можно при помощи рассуждений, аналогичных предыдущим, прийти к выводу, что в (П.26) из-за нечетности подынтегральной функции первый интеграл равен нулю. Во втором интеграле произведение двух нечетных функций образует четную функцию, и интеграл сохраняется. В результате:

$$\tilde{u}(\omega) = -j\,Im(\omega) = -j\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\sin\omega t\,dt = -2j\int_{0}^{\infty} u(t)\sin\omega t\,dt \qquad (П.41)$$

$$\text{и} \quad |\tilde{u}(\omega)| = |Im(\omega)|.$$

Спектр нечетного сигнала является чисто мнимой функцией частоты, амплитудно-частотный спектр его равен модулю мнимой компоненты спектра (рис. П-7а).

Фазовый спектр определяется соотношениями:

$$\sin\varphi(\omega) = \frac{Im(\omega)}{|\tilde{u}(\omega)|} = \frac{Im(\omega)}{|Im(\omega)|} = \begin{cases} +1 & Im(\omega) > 0 \\ -1 & Im(\omega) < 0 \end{cases} \qquad (П.42)$$

так что:

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & Im(\omega) > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & Im(\omega) < 0 \end{cases} \qquad (П.43)$$

Аналогично четной функции, смещение нечетной функции относительно центра косой симметрии приводит к усложнению спектра, так как у него появляется реальная часть и фазовый спектр, отличный от (П.43) (рис. П-7б).

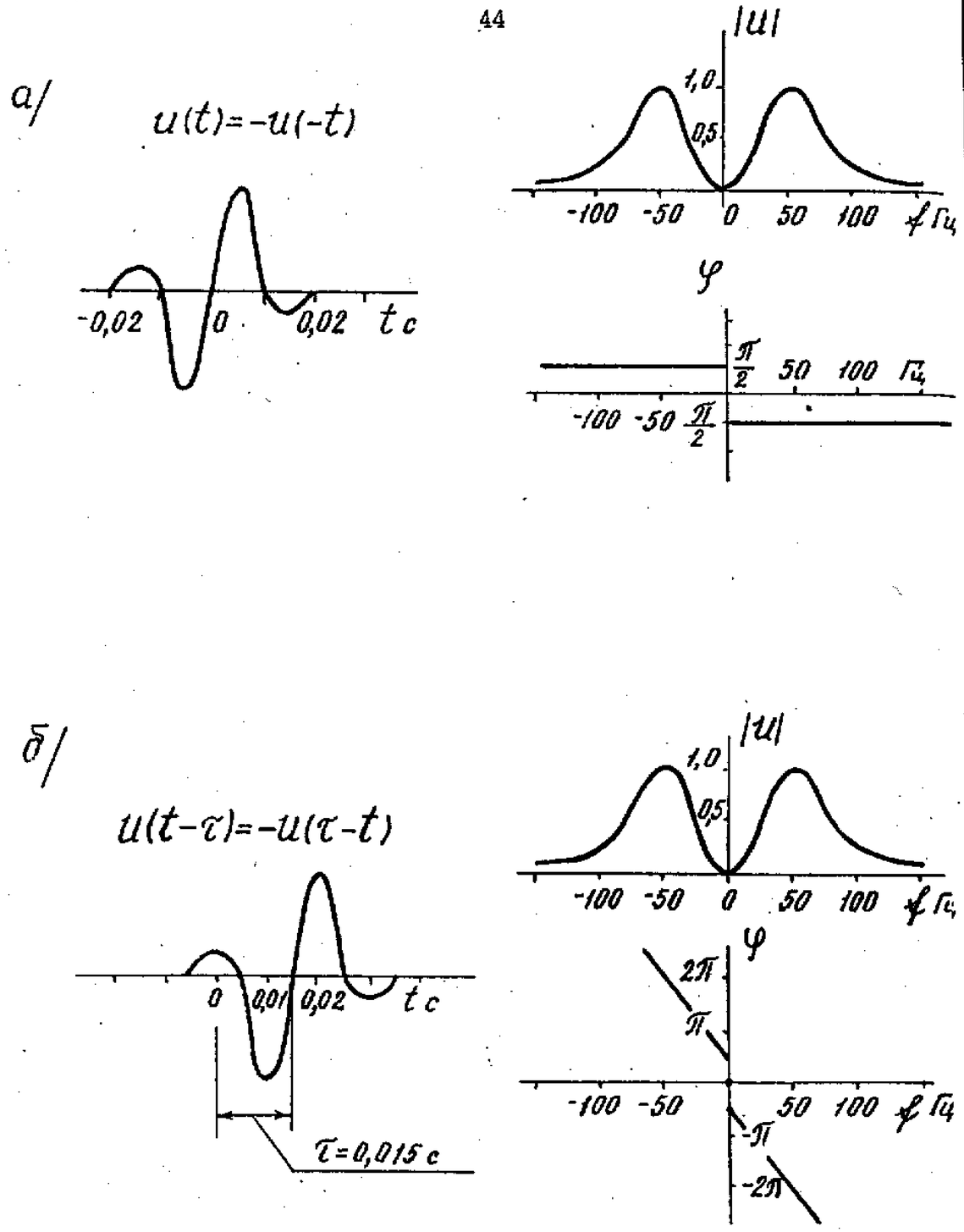


Рис. П-7. Спектры кососимметричного импульса:
а) нечетного, б) смещенного на время τ

7. Спектры комплексных сигналов. Все свойства частотных спектров, изложенные выше, относились к спектрам действительных сигналов. В теории сигналов, кроме действительных, широко применяются комплексные модели сигналов. В данном разделе отметим особенности комплексных спектров комплексных сигналов.

При определении спектра комплексного сигнала фактически вычисляются две компоненты спектра раздельно для реальной и мнимой частей спектра. Далее вычисляют амплитудный и фазовый спектры результирующего комплексного спектра. Все свойства спектров надо проверять для новых комплексных спектров. В частности, например, перестают действовать симметрии компонент спектра. Рассмотрим более подробно, во что вырождаются эти свойства симметрии применительно к комплексному сигналу. Найдем частотный спектр комплексного сигнала, записанного в виде:

$$W(t) = u(t) + j v(t) = |W(t)| e^{j\psi(t)}. \qquad (П.44)$$

Применив к $W(t)$ преобразованию Фурье, получим комплексный частотный спектр $\tilde{W}(\omega)$ исходного комплексного сигнала:

$$W(t) \overset{Fu}{\longleftrightarrow} \tilde{W}(\omega) = R_w(\omega) + j J_w(\omega) = |\tilde{W}(\omega)| e^{j\psi(\omega)} =$$

$$= \tilde{u}(\omega) + j\tilde{v}(\omega) = R_u(\omega) + j J_u(\omega) + j[R_v(\omega) + j J_v(\omega)] =$$

$$= R_u(\omega) - J_v(\omega) + j[R_v(\omega) + J_u(\omega)].$$

Таким образом:

$$\tilde{W}(\omega) = R_w(\omega) + j J_w(\omega), \qquad (П.45)$$

где

$$R_w(\omega) = R_u(\omega) - J_v(\omega); \; J_w(\omega) = R_v(\omega) + J_u(\omega). \qquad (П.46)$$

Отсюда получаем амплитудно-частотный $|\tilde{W}(\omega)|$ и фазово-частотный $\Psi(\omega)$ спектры комплексного сигнала $W(t)$:

$$|\tilde{W}(\omega)| = \sqrt{(R_u - J_v)^2 + (J_u + R_v)^2} = \sqrt{R_u^2 - 2R_u J_v + J_v^2 + J_u^2 + 2J_u R_v + R_v^2} =$$

$$= \sqrt{|U(\omega)|^2 + |V(\omega)|^2 + 2(J_u R_v - R_u J_v)}\ ; \qquad (П.47)$$

$$\left.\begin{aligned} tg\,\Psi(\omega) &= \frac{J_w(\omega)}{R_w(\omega)} = \frac{J_u(\omega) + R_v(\omega)}{R_u(\omega) - J_v(\omega)}\ ; \\ \sin\Psi(\omega) &= \frac{J_w(\omega)}{|\tilde{W}(\omega)|} = \frac{J_u(\omega) + R_v(\omega)}{|\tilde{W}(\omega)|}\ . \end{aligned}\right\} \qquad (П.48)$$

Так как $U(t)$ и $V(t)$ - действительные функции t, то действительные части их спектров $R_u(\omega)$ и $R_v(\omega)$ являются четными функциями, а мнимые - $J_u(\omega)$ и $J_v(\omega)$ - нечетными функциями частоты. Поскольку выражения (П.47) для амплитудно-частотного спектра и (П.48) для фазово-частотного спектра комплексного сигнала содержат как четные, так и нечетные компоненты, то эти спектры в общем случае не обладают симметрией. Симметричными амплитудными и кососимметричными фазовыми спектрами обладают только действительные функции.

Рассмотрим частные случаи выражений (П.47) и (П.48) для амплитудного и фазового спектров.

Четная комплексная функция. В этом случае $U(t)$ и $V(t)$ - четные действительные функции, обладающие действительными частотными спектрами. Поэтому $J_u(\omega) = J_v(\omega) = 0$. Получаем:

$$|\tilde{W}(\omega)| = \sqrt{|U(\omega)|^2 + |V(\omega)|^2}\ ; \qquad (П.49)$$

$$\sin\Psi(\omega) = \frac{R_v(\omega)}{|\tilde{W}(\omega)|}\ .$$

В результате четная комплексная функция имеет четные амплитудно-частотный и фазово-частотный спектры.

Нечетная функция. В этом случае $U(t)$ и $V(t)$ - нечетные действительные функции, обладающие мнимыми частотными спектрами, так что $R_u(\omega) = R_v(\omega) = 0$. Тогда:

$$|\tilde{W}(\omega)| = \sqrt{|U(\omega)|^2 + |V(\omega)|^2}\ ;$$

$$\sin\Psi(\omega) = \frac{J_u(\omega)}{|\tilde{W}(\omega)|}\ . \qquad (П.50)$$

Аналогично спектру действительной функции амплитудный спектр нечетной комплексной функции оказывается четной функцией частоты, а фазовый спектр - нечетной функцией частоты.

Комплексная функция с разной четностью действительной и мнимой частей. Пусть в комплексной функции (П.44) действительная часть четная, а мнимая нечетная, то есть $U(t) = U(-t)$ и $V(t) = -V(-t)$. Тогда спектр действительной части будет действительной функцией, а мнимой части - мнимой функцией частоты. Так как $J_u(\omega) = 0$, $R_v(\omega) = 0$, то и $J_w(\omega) = 0$. Тогда из (П.47) и (П.48) получаем:

$$\tilde{W}(\omega) = R_w(\omega) = R_u(\omega) - J_v(\omega). \qquad (П.51)$$

В результате спектр рассматриваемой комплексной функции оказывается действительной несимметричной функцией частоты.

Если комплексная функция $W(t)$ состоит из нечетной действительной и четной мнимой компонент, то аналогично получаем:

$$R_u(\omega) = J_v(\omega) = 0 \quad \text{и поэтому } R_w(\omega) = 0,$$

$$\tilde{W}(\omega) = j\,J_w(\omega) = j\left[J_u(\omega) + R_v(\omega)\right]. \qquad (П.52)$$

В данном случае частотный спектр комплексной функции является чисто мнимой несимметричной функцией частоты.

§ 3. Теоремы о преобразовании сигналов и спектров

I. Теорема о линейности спектрального преобразования

Пусть имеем несколько сигналов $u_1(t); u_2(t); \dots u_n(t)$ и соответствующие им спектры:

$$\begin{aligned} u_1(t) &\longleftrightarrow \tilde{u}_1(\omega) \\ u_2(t) &\longleftrightarrow \tilde{u}_2(\omega) \\ &\dots\dots\dots \\ u_n(t) &\longleftrightarrow \tilde{u}_n(\omega) \end{aligned} \qquad (П.53)$$

Тогда спектр суммы этих функций, умноженных на постоянные коэффициенты C_i, будет равен сумме спектров этих функций, умноженных на эти же числа:

$$u_\Sigma(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i u_i(t) \longleftrightarrow \tilde{u}_\Sigma(\omega) = \sum_{i=1}^{n} C_i \tilde{u}_i(\omega). \qquad (П.54)$$

Справедливость этого соотношения непосредственно следует из линейности операции интегрирования, рассмотренной в § 4 гл. I. Его можно проинтерпретировать и в обратном порядке – от спектров к сигналам. Можно считать, что даны спектры $\tilde{u}_i(\omega)$, а результат применения обратного преобразования Фурье к сумме спектров $\tilde{u}_\Sigma(\omega)$ дает сумму сигналов $u_\Sigma(t)$. Поэтому можно не фиксировать внимание на "спектрах" и "сигналах", а сформулировать рассматриваемое свойство в более общем виде: преобразование Фурье от линейной комбинации функций приводит к той же линейной комбинации Фурье-трансформант этих функций. Таким образом, трансформация Фурье обладает свойством аддитивности и является линейным преобразованием.

2. Теоремы о смещениях сигнала во времени и спектра по частоте.

Рассмотрим, как изменится спектр сигнала, если сигнал сдвинется во времени без изменения формы, или, иначе говоря, если изменится начало координат на оси времени. Смещенный и несмещенный сигналы являются разными, но зависимыми. Поэтому их спектры также должны быть связанными, и эта связь устанавливается данной теоремой. Условие теоремы имеет вид:

$$u(t) \longleftrightarrow \tilde{u}(\omega) = |\tilde{u}(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}. \qquad (П.55)$$

$$u(t-\tau) = u_\tau(t) \longleftrightarrow \tilde{u}_\tau(\omega) = |\tilde{u}_\tau(\omega)| e^{j\varphi_\tau(\omega)}. \qquad (П.56)$$

Требуется выразить спектр $\tilde{u}_\tau(\omega)$ смещенного на τ сигнала через спектр $\tilde{u}(\omega)$ несмещенного сигнала.

Для выяснения искомой зависимости применим к смещенной функции "прямое" преобразование Фурье и произведем замену переменных, обозначив $\theta = t - \tau$. Тогда, заменив $t = \theta + \tau$; $dt = d\theta$, получим:

$$\tilde{u}_\tau(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(\theta) e^{-j\omega(\theta+\tau)} d\theta =$$

$$= e^{-j\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} u(\theta) e^{-j\omega\theta} d\theta = e^{-j\omega\tau} \tilde{u}(\omega). \qquad (П.57)$$

Интеграл в правой части (П.57) равен спектру исходного несмещенного сигнала. То обстоятельство, что интегрирование производится по переменной θ, а не t, не имеет значения, так как это делается в бесконечных пределах, то есть по всем значениям времени. В результате смещение сигнала вдоль оси времени на τ соответствует умножению спектра на множитель $e^{-j\omega\tau}$, который можно назвать функцией смещения.

$$\tilde{u}_\tau(\omega) = |\tilde{u}_\tau(\omega)| e^{j\varphi_\tau(\omega)} = e^{-j\omega\tau} \tilde{u}(\omega) =$$

$$= e^{-j\omega\tau} |\tilde{u}(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = |\tilde{u}(\omega)| e^{j[\varphi(\omega) - \omega\tau]}. \qquad (П.58)$$

Из (П.58) следует, что

$$|\tilde{u}_\tau(\omega)| = |\tilde{u}(\omega)|, \qquad (П.59)$$
$$\varphi_\tau(\omega) = \varphi(\omega) - \omega\tau,$$

то есть смещение сигнала во времени не изменяет его амплитудно-частотный спектр, а отражается только на его фазовом спектре. Последний получает слагаемое в виде линейной функции частоты ($-\omega\tau$) - прямой линии, наклон которой определяется величиной смещения сигнала τ (рис. П-6б, П-7б). Смещение сигнала вправо, то есть запаздывание сигнала во времени, приводит к повороту фазового спектра по часовой стрелке. При неизменном амплитудно-частотном спектре деформация фазово-частотного спектра приводит к изменению действительной и мнимой частей спектра.

Рассмотренная теорема о смещении сигнала во времени имеет важное значение в сейсморазведке, где приходится иметь дело с сигналами, приходящими к сейсмоприемникам в разное время. В частности, на этой теореме базируется спектральная теория интерференционных систем, широко применяемая в сейсморазведке. Из результата (П.59) следует, что для созданий искусственной задержки сигнала задерживающее устройство должно пропускать сигнал без изменения его амплитудно-частотного спектра и изменять его фазовый спектр, вычитая из фазового спектра исходного сигнала линейную функцию частоты. Таким образом, по (П.59) полный фазовый спектр сигнала $\varphi_\tau(\omega)$ состоит из двух слагаемых, которые назовем динамическим ($\varphi_g(\omega)$) и кинематическим $\varphi_K(\omega\tau)$ фазовыми спектрами. Динамический фазовый спектр определяет форму конкретно реализованного сигнала в множестве сигналов, обладающих одинаковым амплитудным спектром. Поскольку речь идет о форме сигнала, то эта часть фазового спектра относится к динамическим характеристикам сигнала. Кинематический фазовый спектр определяет положение сигнала на оси абсцисс (времени или пространства) относительно начала и поэтому является кинематической характеристикой сигнала.

Разделение общего фазового спектра на его динамическую и кинематическую части можно осуществить путем представления его во временной форме [20]:

$$\varphi(\omega) = \varphi_g(\omega) + \varphi_K(\omega) = \varphi_g(\omega) + \omega\tau =$$
$$= |\omega|\left[\frac{\varphi_g(\omega)}{|\omega|} + \tau\right] = |\omega|\vartheta(\omega) = |\omega|\left[\vartheta_g(\omega + \tau\right]. \qquad (П.60)$$

Здесь $\vartheta(\omega)$ - временное представление фазового спектра, а $\vartheta_g(\omega)$ - его динамическая часть.

Смещение сигнала по оси времени приводит к изменению слагаемого τ, то есть к смещению функции $\vartheta(\omega)$ по вертикальной оси. Сместив временной спектр по вертикали вдоль оси ординат так, чтобы он пошел через начало координат $\vartheta(0)=0$, можно исключить кинематическое смещение τ и получить динамический фазовый спектр сигнала.

Далее рассмотрим парную теорему о смещении спектра по частоте и о влиянии этого смещения на форму сигнала. В этой теореме устанавливается связь между двумя сигналами $u(t)$ и $u_\nu(t)$, имеющими одинаковые по форме спектры, но смещенные по частоте на ν. Условия теоремы записываются так:

Если $u(t) \longleftrightarrow \tilde{u}(\omega)$ и $u_\nu(t) \longleftrightarrow \tilde{u}_\nu(\omega) = \tilde{u}(\omega \pm \nu)$,

то требуется выразить сигнал $u_\nu(t)$ через сигнал $u(t)$. Применив к $\tilde{u}(\omega \pm \nu)$ обратное преобразование Фурье и проводя рассуждения и выкладки, аналогичные предыдущим, получим:

$$u_\nu(t) = u(t)\, e^{\mp j\nu}. \qquad (П.6I)$$

Из полученного результата следует, что при умножении сигнала на функцию смещения $e^{\mp j\nu t}$ его спектр смещается по частоте на $\pm\nu$. Выражение (П.6I) теоремы смещения спектра по частоте вполне аналогично соотношению (П.57) теоремы смещения сигнала по времени, только время и частота в них меняются ролями, что является следствием симметрии прямого и обратного преобразования Фурье. Однако следует подчеркнуть, что в данном случае знак у ν в аргументе спектра $\tilde{u}(\omega \pm \nu)$ и в показателе сте-

пени функции смещения в (П.61) меняется на обратный, в то время как в предыдущей (парной) теореме знак у смещения τ сохранялся. Этот факт является следствием разных знаков в ядрах прямого и обратного преобразований Фурье.

Полученное выражение (П.61) носит формальный математический характер, так как утверждает, что при смещении спектра реального сигнала по частоте сигнал становится комплексным. Для выяснения физического смысла и возможностей применения этой теоремы к реальным сигналам рассмотрим гармонику, модулированную сигналом способом так называемой "балансной модуляции" [19]. Это означает, что сигнал $u(t)$ умножается на гармонику (синусоиду или косинусоиду), играющую роль несущей частоты. При умножении сигнала $u(t)$ на косинусоиду с частотой ν в соответствии с рассмотренной теоремой получаем:

$$u(t)\cos\nu t = \frac{1}{2}\left[u(t)e^{j\nu t} + u(t)e^{-j\nu t}\right] \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \tilde{u}_\nu(\omega) = \frac{1}{2}\left[\tilde{u}(\omega-\nu) + \tilde{u}(\omega+\nu)\right]. \qquad (П.62)$$

В результате спектр исходного сигнала $\tilde{u}(\omega)$ распадается на две одинаковые части с половинной амплитудой, которые смещаются в разные стороны на несущую частоту ν. На рис. П-8а приведен сигнал в виде импульсоиды с основной частотой 50 Гц и ее амплитудный спектр, имеющий максимум на этой частоте. На рис. П-8б показан результат умножения этого сигнала на косинусоиду с частотой 200 Гц и расщепления амплитудного спектра на два "уполовиненных" спектра, смещенных на эту частоту.

3. Теоремы о дифференцировании сигнала и спектра

Сигнал и его производная являются разными, но взаимозависимыми функциями. Очевидно, что их спектры также должны быть связанными определенным образом. То же самое можно сказать и о связи сигналов, соответствующих спектру и его производной. Начнем рассмотрение этих связей со спектра производной сигнала. Пусть дано соответствие между сигналами и их спектрами:

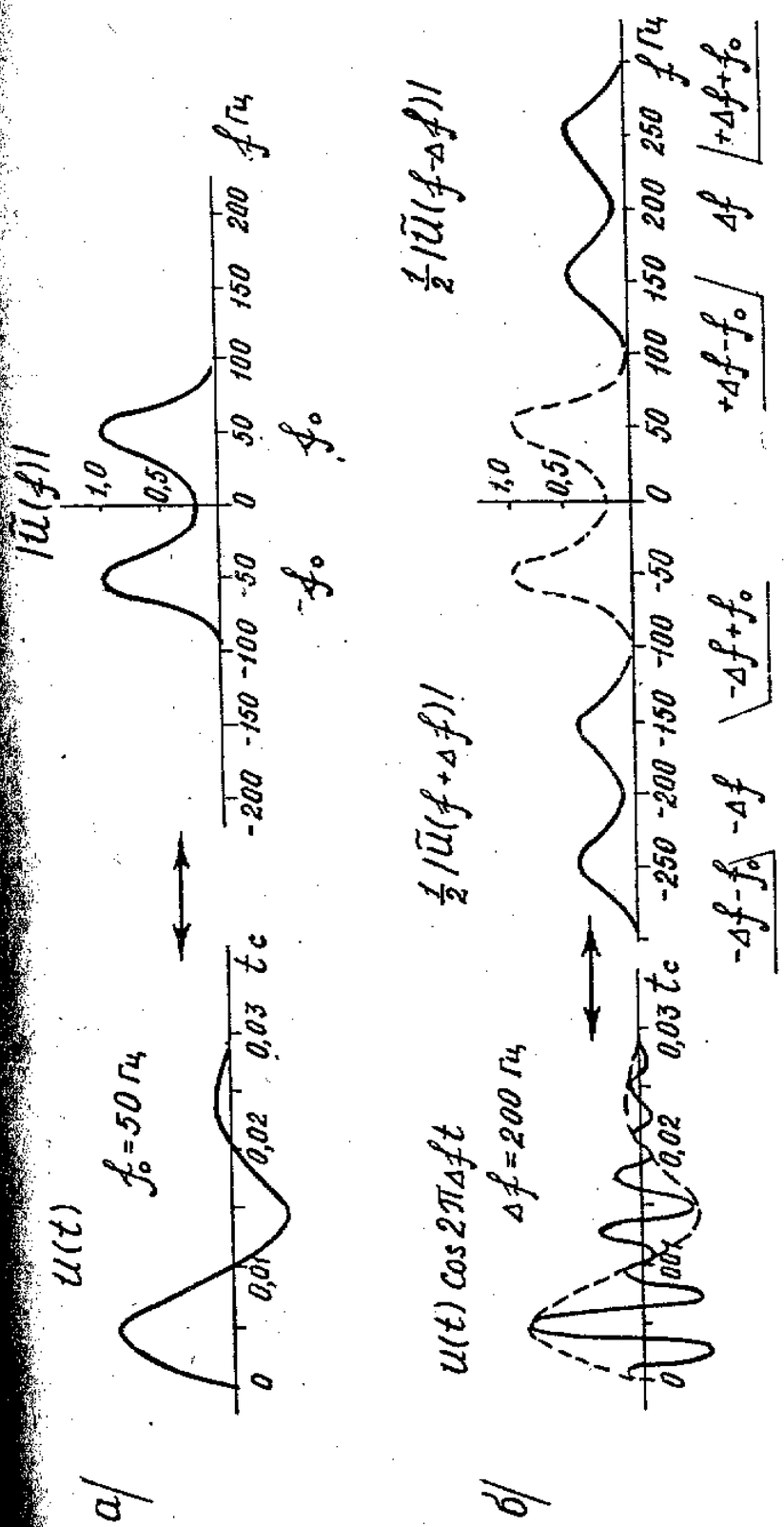


Рис. П-8. Теорема смещения спектра по частоте

$$u(t) \longleftrightarrow \tilde{u}(\omega),$$

$$u'(t) = \frac{du(t)}{dt} = u_1(t) \longleftrightarrow \tilde{u}_1(\omega).$$

Чтобы найти $\tilde{u}_1(\omega)$ по $\tilde{u}(\omega)$, применим к $u_1(t)$ преобразование Фурье и проинтегрируем полученное выражение по частям. Тогда получим:

$$\tilde{u}_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} u_1(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} du(t) =$$

$$= u(t) e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, de^{-j\omega t} =$$

$$= j\omega \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, e^{-j\omega t} dt + u(t)\, e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} =$$

$$= j\omega\, \tilde{u}(\omega) + u(t)\, e^{-j\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty}. \qquad (П.63)$$

В полученном выражении первый член дает спектр исходной функции, умноженный на $j\omega$. Второй член определяется поведением исходной функции в бесконечности. Все физические процессы и порождаемые ими сигналы не могут бесконечно продолжаться во времени и в пространстве. Поэтому без ущерба для общности можно считать, что сигналы ограничены во времени от t_1 до t_2. Тогда спектр производной сигнала (П.63) можно записать в следующем виде:

$$u'(t) = u_1(t) \longleftrightarrow \tilde{u}_1(\omega) = j\omega\, \tilde{u}(\omega) + u(t_2) e^{-j\omega t_2} - u_1(t) e^{-j\omega t_1}. \qquad (П.64)$$

Таким образом, операция дифференцирования сигнала заменяется в области спектров алгебраической операцией умножения спектра на "мнимую" частоту $j\omega$ и сложения со сфазированными начальным и конечным значениями сигнала. Понятие "фазирование"

предполагает определение положения величины на оси абсцисс при помощи функции смещения, определяющей кинематическую фазу этой величины. Это понятие базируется на рассмотренной выше теореме смещения и, в частности, введенном там понятии функции смещения, а также динамического и кинематического фазовых спектров сигнала. В данном случае это понятие применяется к начальному $u(t_1)$ и конечному $u(t_2)$ значениям сигнала.

Наиболее типичной физической ситуацией является случай, когда сигнал имеет нулевые начальное и конечное значения, так что $u(t_1) = u(t_2) = 0$, и выражение теоремы о спектре производной принимает вид

$$u'(t) = u_1(t) \longleftrightarrow \tilde{u}_1(\omega) = j\omega\, \tilde{u}(\omega). \qquad (П.65)$$

Операция дифференцирования сигнала во временной области заменяется операцией умножения спектра на частоту в спектральной области. В некоторых задачах модель сигнала удобно представить в виде разрывной функции, скачком меняющей значения от 0 до $u(t_1)$ в момент времени t_1, который обычно принимается за начало отсчета времени. Тогда теорема о спектре производной принимает вид

$$u'(t) = u_1(t) \longleftrightarrow u_1(\omega) = j\omega\, \tilde{u}(\omega) - u(t=0). \qquad (П.66)$$

Это наиболее распространенная форма записи рассматриваемой теоремы.

Применяя выражение (П.66) последовательно к производным сигнала более высокого порядка, можно получить выражение для спектра производной n -го порядка.

$$\frac{d^{(n)} u(t)}{dt^n} = u_n(t) \longleftrightarrow \tilde{u}_n(\omega) =$$

$$= (j\omega)^n \tilde{u}(\omega) - (j\omega)^{n-1} u(+0) - (j\omega)^{n-2} u'(+0) - \ldots \qquad (П.67)$$

$$\ldots - u^{(n-1)}(+0) =$$

$$= (j\omega)^n \tilde{u}(\omega) - \sum_{i=1}^{n} (j\omega)^{n-i} u^{(i-1)}(+0). \qquad (П.68)$$

Здесь через $u^{(i-1)}(+0)$ обозначено предельное значение (i-I)-го производной сигнала $u(t)$ при $t \to +0$, то есть справа, в области положительных значений времен.

При нулевых начальных условиях из (П.68) получаем

$$\frac{d^{(n)} u(t)}{dt^n} = u_n(t) \longleftrightarrow \tilde{u}_n(\omega) = (j\omega)^n \tilde{u}(\omega). \qquad (П.69)$$

Обратную теорему о сигнале, соответствующем производной спектра, можно получить в результате применения обратного преобразования Фурье к производной спектра и интегрированию по переменной $j\omega$. В результате преобразований, аналогичных предыдущим, можно получить

$$\frac{d\tilde{u}(\omega)}{d\omega} = \tilde{u}_1(\omega) \longleftrightarrow u_1(t) = -t\,u(t). \qquad (П.70)$$

При этом имеется в виду, что спектры реальных сигналов стремятся к нулю при беспредельном возрастании частоты. Вследствие симметрии прямого и обратного преобразований Фурье выражения парных теорем (П.65) и (П.70) оказываются аналогичными.

4. Теоремы об интегрировании сигнала и спектра

Рассмотрим две парные теоремы: о связи между спектрами сигнала и его интеграла и о связи между сигналами, соответствующими спектру и интегралу от спектра. Для решения первого вопроса введем обозначения:

$$u(t) \longleftrightarrow \tilde{u}(\omega),$$
$$\int_{-\infty}^{t} u(t)\,dt = u_{-1}(t) \longleftrightarrow \tilde{u}_{-1}(\omega). \qquad (П.71)$$

Вычислим искомый спектр, применив к $u_{-1}(t)$ прямое преобразование Фурье и способ интегрирования по частям:

$$\tilde{u}_{-1}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{-1}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{t} u(\tau)\,d\tau \right] e^{-j\omega t} dt =$$
$$= \frac{1}{(-j\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} u_{-1}(t)\,d e^{-j\omega t} =$$
$$= \frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt - \frac{1}{j\omega} \left[u_{-1}(t) e^{-j\omega t} \right]_{t=+\infty}.$$

В полученном выражении второе слагаемое из-за комплексной гармоники не имеет предела, так что рассматриваемая теорема имеет смысл только в том случае, когда этот член равен нулю. Для этого необходимо следующее условие:

$$\lim_{t \to \infty} u_{-1}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,dt = \tilde{u}(\omega = 0) = 0. \qquad (П.72)$$

Тогда спектр интеграла становится равным

$$\tilde{u}_{-1}(\omega) = \frac{\tilde{u}(\omega)}{j\omega}. \qquad (П.73)$$

Это соотношение в совокупности с условием (П.72) является конечным результатом рассматриваемой теоремы. Условие (П.72) требует отсутствия у сигнала постоянной составляющей, а в спектре сигнала – нулевой гармоники, то есть среднее значение сигнала должно быть равно нулю. Это условие данной теоремы является вполне естественным, так как наличие у сигнала постоянной составляющей приводит к беспредельному возрастанию его интеграла. Последнее обстоятельство исключает возможность применения к нему преобразования Фурье, и теорема теряет смысл.

Полученный результат можно распространить и на интеграл n-й кратности

$$u_{-n}(t) = \underbrace{\iiint}_{n}^{t} u(\tau)\,d\tau \longleftrightarrow \tilde{u}_{-n}(\omega) = \frac{\tilde{u}(\omega)}{(j\omega)^n}. \qquad (П.74)$$

В этом случае условие (П.72) должно распространяться на интеграл (n-I) кратности от сигнала.

Парную теорему о сигнале, соответствующем интегралу от спектра, можно получить аналогичным путем, применив обратное преобразование Фурье к интегралу от спектра, введя обозначения:

$$\int_{-\infty}^{j\omega} \tilde{u}(j\omega)\, d(j\omega) = \tilde{u}_{-1}(j\omega) \longleftrightarrow u_{-1}(t),$$

в результате получим

$$u_{-1}(t) = -\frac{u(t)}{t} \quad \text{при } u(t=0) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}(j\omega)\, d(j\omega) = 0. \qquad (\text{П}.75)$$

Последнее условие, требующее нулевого начального значения сигнала, соответствует обычным свойствам реальных сигналов. Аналогия между (П.73) и (П.75) является следствием симметричности прямого и обратного преобразований Фурье.

5. Теорема изменения масштабов сигнала и спектра

Если у сигнала $u(t)$ аргумент заменить на at ($a \neq 1$), то изменится его горизонтальный масштаб. При $a > 1$ сигнал будет сжиматься, а при $a < 1$ – растягиваться во времени. Чтобы при изменении горизонтального масштаба не менялась площадь сигнала, умножим его на a и рассмотрим функцию $u_a(t) = a\,u(at)$. Посмотрим, как повлияет на спектр изменение горизонтального масштаба сигнала вследствие изменения коэффициента a. Таким образом, условие теоремы можно записать так:

если $u(t) \longleftrightarrow \tilde{u}(\omega)$ и $u_a(t) = a\,u(at) \longleftrightarrow \tilde{u}_a(\omega)$,

то требуется выразить $\tilde{u}_a(\omega)$ через $\tilde{u}(\omega)$. Для определения $\tilde{u}_a(\omega)$ подставим сигнал $u_a(t)$ в прямое преобразование Фурье:

$$\tilde{u}_a(\omega) = a\int_{-\infty}^{\infty} u(at)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(at)\, e^{-j\frac{\omega}{a}(at)}\, d(at) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(\theta)\, e^{-j\frac{\omega}{a}\theta} d\theta = \tilde{u}\left(\frac{\omega}{a}\right). \qquad (\text{П}.76)$$

Интеграл в правой части представляет собой спектр исходной функции $u(t)$, но полученный при частотах ω/a. Таким образом, при изменении горизонтального масштаба сигнала горизонтальный масштаб соответствующего ему спектра меняется в обратном направлении. При растяжении сигнала спектр сжимается, а при сжатии –

растягивается. В результате можно сделать общий вывод, что более длительным во времени сигналам соответствуют более узкие спектры и наоборот, более коротким сигналам (импульсным) должны соответствовать более широкие спектры. На рис. П-9 приведен пример взаимного соответствия растяжения сигнала и спектра по горизонтальным осям.

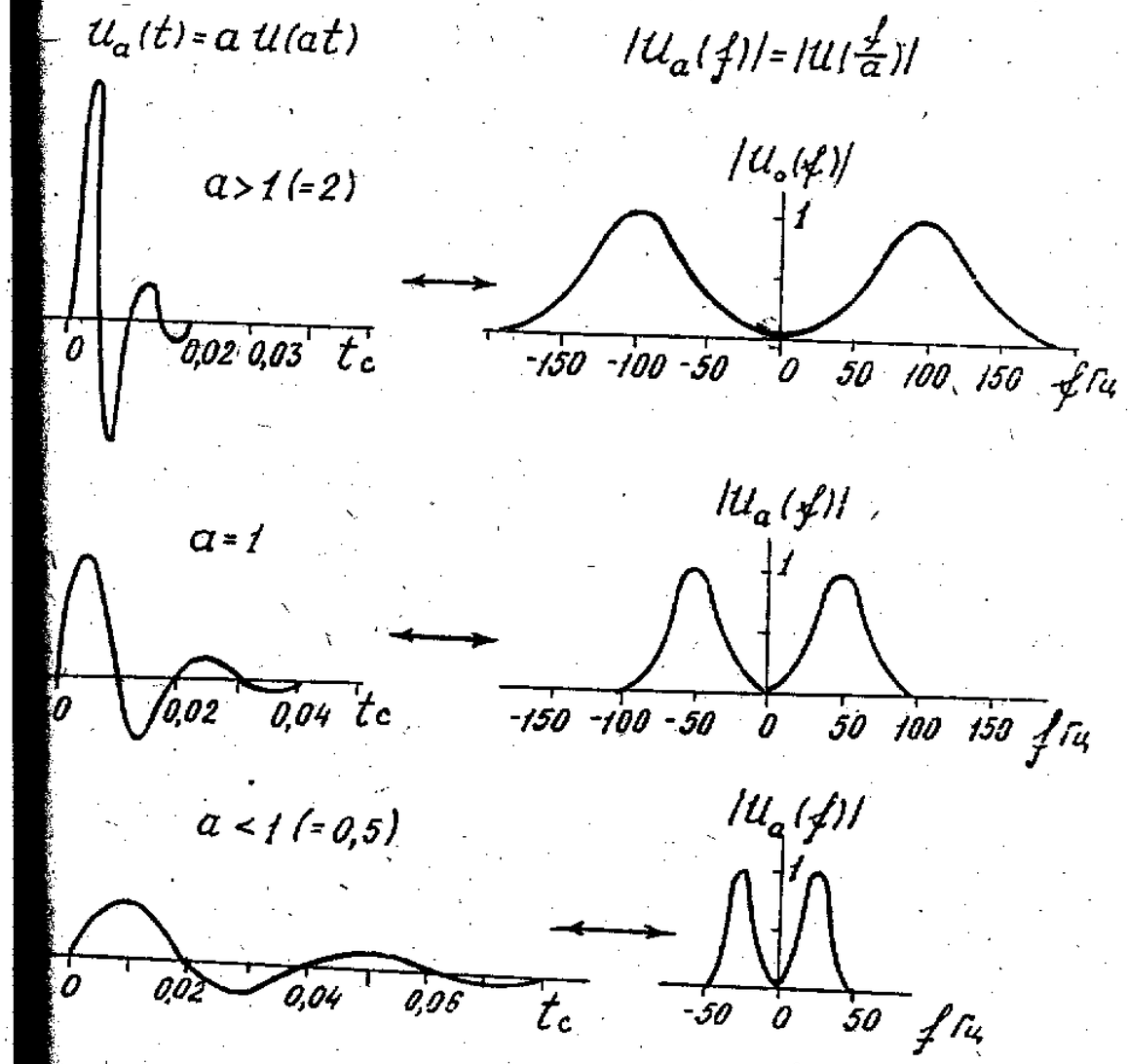


Рис. П-9. Теорема масштабов

6. Теорема о спектре сигнала в обратном времени

Сигналом в обратном времени называется сигнал, перевернутый в обратном направлении относительно начала отсчета времени. Имея в виду соответствия между сигналами и спектрами $u(t) \leftrightarrow \tilde{u}(\omega) = |\tilde{u}(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$ и $u(-t) \leftrightarrow \tilde{u}_{-}(\omega)$, вычислим спектр сигнала в обратном времени $\tilde{u}_{-}(\omega)$. Для этого подставим в (П.22) сигнал $u(-t)$ и обозначим $-t = t_1$:

$$\tilde{u}_{-1}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(-t) e^{-j\omega t} dt = -\int_{+\infty}^{-\infty} u(t_1) e^{j\omega t_1} dt_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t_1) e^{j\omega t_1} dt_1 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(t_1) \cos \omega t_1 dt_1 + j \int_{-\infty}^{\infty} u(t_1) \sin \omega t_1 dt_1 = \tilde{u}^*(\omega) = |\tilde{u}(\omega)| e^{-j\varphi(\omega)}. \quad (П.77)$$

Получился спектр, комплексно-сопряженный спектру исходного сигнала. Таким образом, сигналу в обратном времени соответствует комплексно-сопряженный спектр, имеющий тот же самый амплитудно-частотный спектр и противоположный по знаку фазово-частотный спектр по сравнению с фазовым спектром сигнала в прямом времени.

7. Теоремы о произведении сигналов и спектров

В теории линейных систем часто приходится иметь дело со спектром, который может быть представлен в виде произведения двух комплексных функций частоты. Наиболее типичным примером этому может служить спектр сигнала на выходе линейной системы, который получается в результате умножения спектра входного сигнала на комплексную частотную характеристику системы. Введем обычные обозначения:

$$u_1(t) \leftrightarrow \tilde{u}_1(\omega); \; u_2(t) \leftrightarrow \tilde{u}_2(\omega); \; u(t) \leftrightarrow \tilde{u}(\omega) = \tilde{u}_1(\omega) \cdot \tilde{u}_2(\omega).$$

Рассматриваемая теорема о произведении спектров позволяет выразить сигнал $u(t)$ через функции $u_1(t)$ и $u_2(t)$ в виде интегрального выражения, которое называется и н т е г р а л о м с в е р т к и.

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau) u_2(t-\tau) d\tau. \quad (П.78)$$

Операция, которую надо произвести над функциями $u_1(t)$ и $u_2(t)$ по соотношению (П.78), чтобы получить $u(t)$, называется операцией свертывания или конволюцией функций $u_1(t)$ и $u_2(t)$ (convolve - свертывать, скручивать - англ.).

Для доказательства этого утверждения запишем выражение прямого преобразования Фурье для $\tilde{u}_1(\omega) \leftrightarrow u_1(t)$ и, помножив это выражение на $u_2(\omega)$, внесем его справа под знак интегрирования. После очевидных преобразований получим:

$$\tilde{u}(\omega) = \tilde{u}_1(\omega) \cdot \tilde{u}_2(\omega) = \tilde{u}_2(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau) \left[u_2(\omega) e^{-j\omega\tau} \right] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} u_2(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau.$$

Используя теорему о смещении сигнала во времени, можно сказать, что выражение в квадратных скобках этого равенства представляет собою спектр функции $u_2(t-\tau)$. Меняя порядок интегрирования, последнее выражение можно записать так:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau) u_2(t-\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt = \tilde{u}_1(\omega) \cdot \tilde{u}_2(\omega) = \tilde{u}(\omega). \quad (П.79)$$

В полученном выражении слева записано выражение прямого преобразования Фурье для функции, стоящей в квадратных скобках. Имея в виду правую часть (П.79) и условие теоремы, можно получить искомое соотношение (П.78) и тем самым доказать теорему свертывания.

Операцию свертывания двух функций ввиду ее широкого использования обычно для краткости обозначают специальным символом в виде звездочки между свертываемыми функциями. Применив это обозначение, результат рассмотренной теоремы свертывания можно записать в таком виде:

$$\tilde{u}(\omega) = \tilde{u}_1(\omega)\cdot\tilde{u}_2(\omega) = |\tilde{u}_1(\omega)||\tilde{u}_2(\omega)|e^{j(\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega))} \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow u(t) = u_1(t) * u_2(t). \qquad (П.80)$$

Вследствие симметричности преобразования Фурье парную теорему о произведении сигналов можно сформулировать аналогично предыдущей: спектр сигнала, равного произведению двух сигналов, равен свертке спектров этих сомножителей.

$$u(t) = u_1(t)\cdot u_2(t) \longleftrightarrow \tilde{u}(\omega) = \tilde{u}_1(\omega) * \tilde{u}_2(\omega) = \qquad (П.81)$$

$$= Re_1(\omega) * Re_2(\omega) - Im_1(\omega) * Im_2(\omega) + j\left[Re_1(\omega) * Im_2(\omega) + Re_2(\omega) * Im_1(\omega)\right].$$

8. Операции свертывания и корреляции

Рассмотрим структуру интеграла свертки (П.78) и механизм операции свертывания двух функций, как определенной математической операции. Прежде всего заметим, что переменная интегрирования τ во второй функции стоит со знаком минус. Это означает, что $u_2(-\tau)$ – функция, развернутая в обратном времени (рис. П-10,б). Кроме того, аргументом второй функции является $t-\tau$, что указывает на смещение u_2 по оси времен на t (рис. П-10, в-д). При каждом значении t необходимо перемножить взаимно смещенные таким образом функции и результат перемножения проинтегрировать, что даст одно единственное значение результата свертки – функции $u(t)$ для времени t. Учитывая, что t – переменная, приходим к выводу, что, задавая разные значения t и производя для каждого t описанные выше операции, мы получим некоторую новую функцию $u(t)$, которая будет являться результатом свертки исходных функций: $u(t) = u_1(t) * u_2(t)$.

Таким образом, в результате свертывания двух функций получается новая функция, определяемая свойствами свертываемых функций и взаимными сдвигами между ними. Если свертываемые функции ограничены во времени, то их произведение отлично от нуля на интервале времени, равном сумме длительности этих функций, так как их произведение становится равным нулю, когда области их сущест-

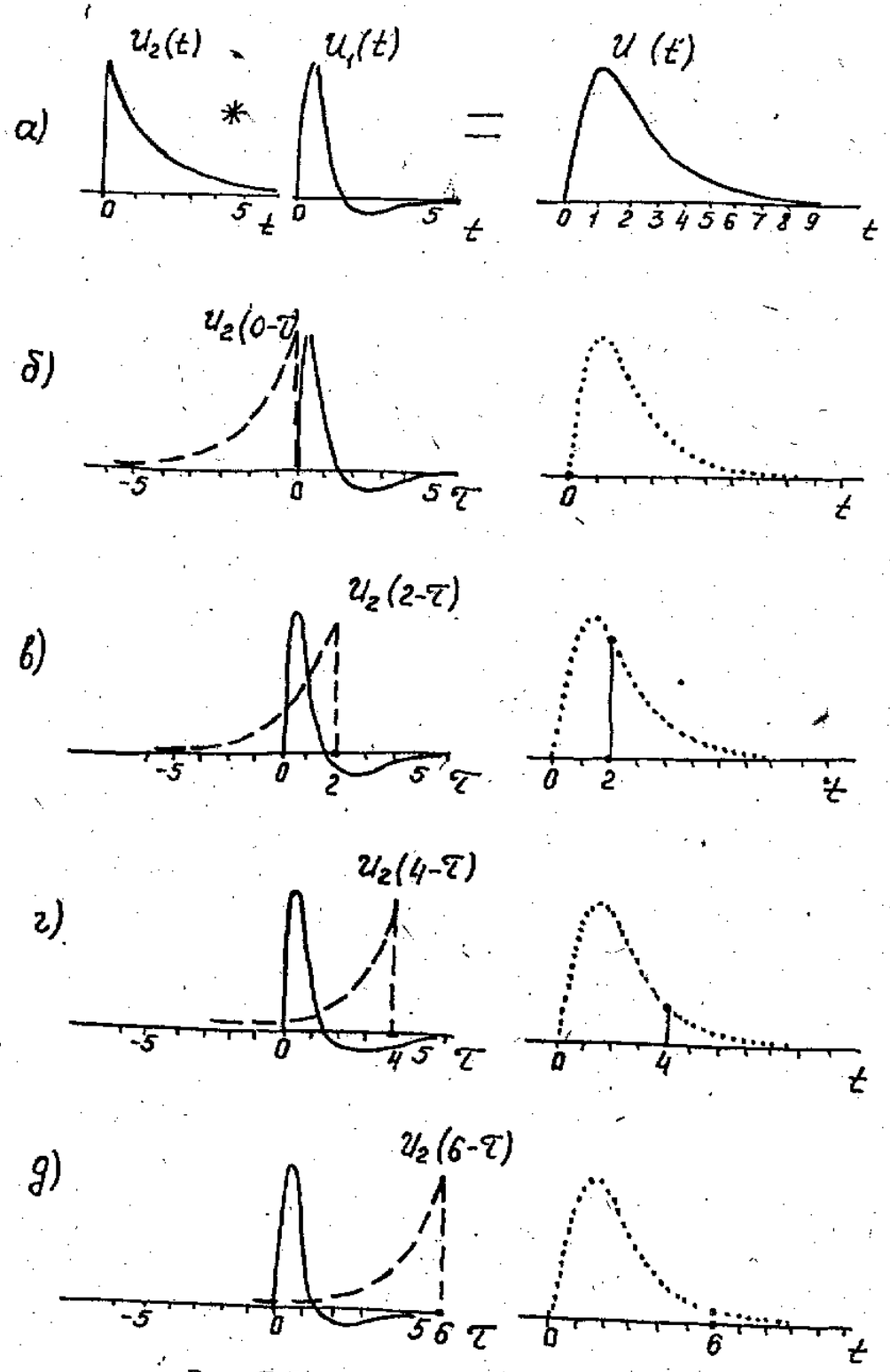


Рис. П-10. Теорема свертывания

вования не перекрываются. Но результат операции свертывания может оказаться нулевым и при перекрывающихся сигналах. Если вспомнить, что свертка двух функций соответствует перемножению их спектров, то становится ясным, что со спектральной точки зрения результат свертывания определяется частотными диапазонами свертываемых сигналов. Если частотные диапазоны не перекрываются, то результат перемножения спектров, так же как и свертывания сигналов, окажется нулевым.

Далее рассмотрим операцию свертывания двух сигналов, когда один из них, например второй, имеет обратный знак аргумента, то есть рассматривается в обратном времени. Тогда в соответствии с теоремой о спектре сигнала в обратном времени его спектр окажется сопряженным спектру исходного второго сигнала. Поэтому их свертку можно записать следующим образом:

$$u(t) = u_1(t) * u_2(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau)\, u_2(\tau - t)\, d\tau \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \tilde{u}(\omega) = \tilde{u}_1(\omega) \cdot u_2^*(\omega) = |\tilde{u}_1(\omega)| \cdot |\tilde{u}_2(\omega)| e^{j(\varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega))} \qquad (\text{П}.82)$$

В полученном выражении ни одна из подынтегральных функций не переворачивается, обе они перемножаются со взаимным сдвигом в их естественном "прямом" времени. Выражение (П.82) представляет собою корреляционную функцию двух сигналов. Если сигналы разные, как в случае (П.82), то применяются термины "взаимнокорреляционная функция" (ВКФ), "функция взаимной корреляции" (ФВК), "кросс-корреляция", "кросс-вариация" и др. Операция корреляции равносильна свертке сигнала с сигналом в обратном времени, вследствие чего образуется разность фазовых спектров коррелируемых сигналов. Комплексный частотный спектр взаимнокорреляционной функции (П.82) называется взаимным спектром этих функций. Взаимный спектр образуется в результате перемножения спектра неподвижного ("пассивного") сигнала на сопряженный спектр подвижного ("активного") сигнала. Операцию корреляции в отличие от операции свертывания иногда обозначают звездочкой в кружке [16]. Если коррелируемые сигналы одинаковы, то результат называется "автокорреляционной функцией" (АКФ), "функцией автокорреляции" (ФАК), "автокорреляцией", "автоковариацией", "ковариацией" и др. Положив в (П.82) $u_1(t) = u_2(t)$, получим выражение автокорреляционной функции сигнала $u_1(t)$:

$$\text{АКФ}\{u_1(t)\} = u(t) = u_1(t) \circledast u_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau)\, u_1(\tau - t)\, d\tau \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \tilde{u}(\omega) = \tilde{u}_1(\omega) \cdot \tilde{u}_1^*(\omega) = |\tilde{u}_1(\omega)| \cdot |\tilde{u}_1(\omega)| e^{j(\varphi_1(\omega) - \varphi_1(\omega))} = |\tilde{u}_1(\omega)|^2. \qquad (\text{П}.83)$$

Из выражений свертки (П.78), взаимной корреляции (П.82) и автокорреляции (П.83) следует, что в спектральном выражении этих операций амплитудные спектры перемножаются.

Фазово-частотные спектры в этих операциях ведут себя по-разному. Свертке сигналов соответствует сложение фазовых спектров, так что безразлично, какой из свертываемых сигналов играет активную роль, то есть переворачивается и смещается, а который из них пассивен, то есть остается неподвижным. Поэтому операция свертывания обладает свойством коммутативности (переместительности) относительно свертываемых сигналов.

В спектральном соответствии взаимнокорреляционной функции фазовый спектр образуется как разность фаз обоих сигналов, причем из фазы пассивного сигнала вычитается фаза активного сигнала. Очевидно, что если поменять роли коррелируемых сигналов, то изменится знак у фазово-частотного спектра взаимнокорреляционной функции, в результате чего получится ВКФ в обратном времени. Таким образом, взаимнокорреляционная функция не коммутативна относительно коррелируемых сигналов, так что если

$$u_1(t) \circledast u_2(t) = u(t) = \text{ВКФ}(t),$$

то

$$u_2(t) \circledast u_1(t) = u(-t) = \text{ВКФ}(-t). \qquad (\text{П}.84)$$

Принимается, что в выражении корреляции активной является правая функция.

При автокорреляции вычитание одинаковых фазовых спектров приводит к исчезновению фазы и мнимой части спектра. В результате спектр АКФ является действительной функцией частоты, равной квадрату амплитудно-частотного спектра коррелируемого сигнала (энергетический спектр сигнала).

Основные процедуры обработки сейсморазведочных данных сводятся к свертке сейсмических записей с операторами фильтров и к взаимной корреляции этих записей между собой. Поэтому достаточно типичной является процедура свертки или корреляции нескольких функций. В связи с этим возникают вопросы об ассоциативности (сочетательности) и дистрибутивности (распределительности) этих операций. Будем по-прежнему считать, что в операции корреляции первый сомножитель пассивен, а активным является второй (правый) сомножитель, и в фазовом спектре результирующей функции фаза активного сомножителя вычитается. Тогда процедуру корреляции трех сигналов можно записать в таком виде:

$$W(t) = u_1(t) \circledast u_2(t) \circledast u_3(t).$$

В данном случае существенен порядок осуществления процедур корреляции. Без изменения порядка записи сигналов возможны два варианта осуществления процедуры корреляции трех сигналов:

$$W_1(t) = (u_1(t) \circledast u_2(t)) \circledast u_3(t) \longleftrightarrow \tilde{W}_1(\omega) =$$

$$= |\tilde{u}_1(\omega)| \cdot |\tilde{u}_2(\omega)| \cdot |\tilde{u}_3(\omega)| \, e^{j(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3)}; \qquad (П.85)$$

$$W_2(t) = u_1(t) \circledast (u_2(t) \circledast u_3(t)) \longleftrightarrow \tilde{W}_2(\omega) =$$

$$= |\tilde{u}_1(\omega)| \cdot |\tilde{u}_2(\omega)| \cdot |\tilde{u}_3(\omega)| \, e^{j(\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3)} \qquad (П.86)$$

Первой осуществляется операция, заключенная в скобки. Вследствие того, что результирующие динамические фазовые спектры у результатов двойной корреляции $W_1(t)$ и $W_2(t)$ оказываются разными, получаемые сигналы отличаются по форме, хотя

и обладают одинаковым частотным составом. Таким образом, операция корреляции не обладает свойством ассоциативности.

Для проверки свойства дистрибутивности (распределительности) запишем равенство

$$W(t) = u(t) \circledast [v_1(t) + v_2(t)] = u(t) \circledast v_1(t) + u(t) \circledast v_2(t).$$

В результате можно сделать вывод, что корреляционная процедура обладает свойством дистрибутивности. В более общем виде это свойство можно сформулировать так: корреляционная функция сигнала с линейной комбинацией других сигналов равна той же линейной комбинации корреляционных функций этих сигналов.

$$W(t) = u(t) \circledast \sum_i c_i v_i(t) = \sum_i c_i \, u(t) \circledast v_i(t). \qquad (П.87)$$

Очевидно, что операция свертки обладает свойствами ассоциативности и дистрибутивности, так как в спектральном представлении фазовый спектр результирующего сигнала состоит из суммы фазовых спектров свертываемых сигналов, порядок сложения которых безразличен.

9. <u>Теорема энергий</u>

Из выражения взаимно-корреляционной функции (П.82) следует так называемая теорема энергий. Выразим правую часть этого равенства через обратное преобразование Фурье:

$$W(t) = u_1(t) \circledast u_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau) \, u_2(\tau - t) \, d\tau = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{W}(\omega) e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_1(\omega) \cdot \tilde{u}_2^*(\omega) \, e^{j\omega t} d\omega. \qquad (П.88)$$

При $t = 0$ отсюда следует:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau) \, u_2(\tau) \, d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u}_1(\omega) \cdot \tilde{u}_2^*(\omega) \, d\omega. \qquad (П.89)$$

Это выражение называется общей теоремой энергий, а стоящие в в нем слева и справа интегралы – взаимной энергией сигналов во временном и в частотном представлении. Равенство (П.89) означает равенство взаимной энергии двух сигналов, выраженной через сигналы или через спектры.

Если сигналы одинаковы, то из (П.89) при $u_1(t)=u_2(t)=u(t)$ получаем собственно теорему энергий – теорему Рэлея:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{u}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{u}(f)|^2 df. \qquad (П.90)$$

Левый интеграл этого выражения дает значение энергии сигнала во временном представлении, а правый – определяет эту же энергию в спектральном виде. Подынтегральное выражение $|\tilde{u}(f)|^2$ описывает плотность распределения энергии сигнала по частоте и поэтому называется энергетическим спектром сигнала.

Глава III. СИНГУЛЯРНЫЕ СИГНАЛЫ И СПЕКТРЫ

§ I. Основные сведения о сингулярных функциях

I. Понятие сингулярной функции

В технических вопросах, связанных с передачей сигналов, широко используются разрывные функции: единичный импульс Дирака (дельта-функция) $\delta(t)$, единичный импульс (символ) Кронекера $K_r(t)$, единичная функция $step(t)$ (функция Хевисайда), прямоугольная функция $rect(t)$ или $box(t)$, знаковая функция (сигнатура) $sign(t)$ или $sgn(t)$, а также их частотные спектры. Эти функции скачком меняют свое значение при некоторых значениях аргумента, так что формально к ним неприменимы методы математического анализа. Разрывные функции оказываются очень удобными при аппроксимации физических процессов, в которых физические величины быстро меняют свои значения в некоторые моменты времени или в некоторых точках пространства. Во многих вопросах теории сейсморазведки, например в теории аппаратуры, в теории направленного излучения и приема сейсмических волн, при описании

распределения физических, и в частности упругих свойств в геологической среде, наряду с непрерывными функциями оказывается целесообразным использовать функции разрывного типа.

В цифровой вычислительной технике, применяемой для обработки непрерывных сейсмических сигналов, приходится прибегать к дискретизации сигналов, осуществлять математические операции с дискретными функциями и восстанавливать непрерывные сигналы по их дискретным представлениям. При этом удобно использовать разрывные, импульсные функции, а математические операции описывать на языке импульсной техники в виде теории исчисления конечных разностей и теории матриц.

В отличие от непрерывных дифференцируемых ("регулярных") функций разрывные функции часто называют "сингулярными" ([5], [9],[I4],[I6],[I7] и др.). Однако нет общепринятой формулировки этого термина. Иногда термин "сингулярная функция" отождествляют с понятием "обобщенная функция".

Из дальнейшего будет видно, что упомянутым разрывным функциям соответствуют вполне определенные непрерывные частотные спектры, к которым применимы методы математического анализа. Обоснование математических операций с разрывными функциями дается теорией обобщенных функций, в которой понятие функции расширяется до "обобщенной функции", включающее в себя как непрерывные, так и разрывные функции. Несмотря на некоторую абстрактность, теория обобщенных функций, как обоснование применения сингулярных функций, нашла широкое применение в научно-технических вопросах, связанных с преобразованием и передачей сигналов ([4],[5],[9],[I6] и др.). Естественно, что в последнее время она широко используется в теории обработки сейсмических данных ([I],[8],[I0],[I5] и др.).

Основным содержанием теории обобщенных функций является строгое обоснование математических действий и прежде всего операций дифференцирования и интегрирования для разрывных функций. При построении теории обобщенных функций могут быть использованы разные подходы, но в большинстве случаев общая теория базируется на рассмотрении функционалов, образованных интегралом от произведения сингулярной и гладкой ограниченной ("основной" или "фундаментальной") функции. Существует "частный" подход, использующий аппроксимирующие (производящие) гладкие функции как аналитические модели разрывных функций.

Для наших целей нет необходимости вдаваться в подробности общей теории обобщенных функций. В дальнейшем, по мере описания свойств разрывных функций, будут приведены аналитические непрерывные модели этих функций, на которых основан "частный" подход в теории сингулярных функций.

2. Единичные импульсы Дирака и Кронекера

Свойства единичного импульса Дирака. Единичным импульсом Дирака или дельта-функцией называется безразмерная бесконечно короткая функция, обладающая следующими свойствами (рис. Ш-I,б):

а) функция равна нулю при всех значениях аргумента, кроме заданного значения $t = \tau$;

б) при значении аргумента $t = \tau$ функция принимает бесконечно большое значение;

в) площадь этой функции равна единице.

Расположенный в точке $t = \tau$ импульс Дирака записывается так:

$$\delta(t-\tau) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = \tau, \\ 0 & \text{при } t \neq \tau. \end{cases} \qquad (Ш.I)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t-\tau)\,dt = 1 \quad \text{при } (t_1-\tau)(t_2-\tau) < 0. \qquad (Ш.2)$$

Иногда определение импульса Дирака дополняют еще следующими условиями ([I4], [I6] и др.):

г) импульс Дирака является симметричной (при $\tau = 0$ – четной) функцией

$$\delta(t) = \delta(-t) \text{ и } \int_{-\varepsilon}^{0} \delta(t)\,dt = \int_{0}^{+\varepsilon} \delta(t)\,dt = \frac{1}{2} \quad (\varepsilon > 0); \qquad (Ш.3)$$

д) средняя мощность импульса Дирака на бесконечном интервале равна единице

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta^2(t)\,dt = 1.$$

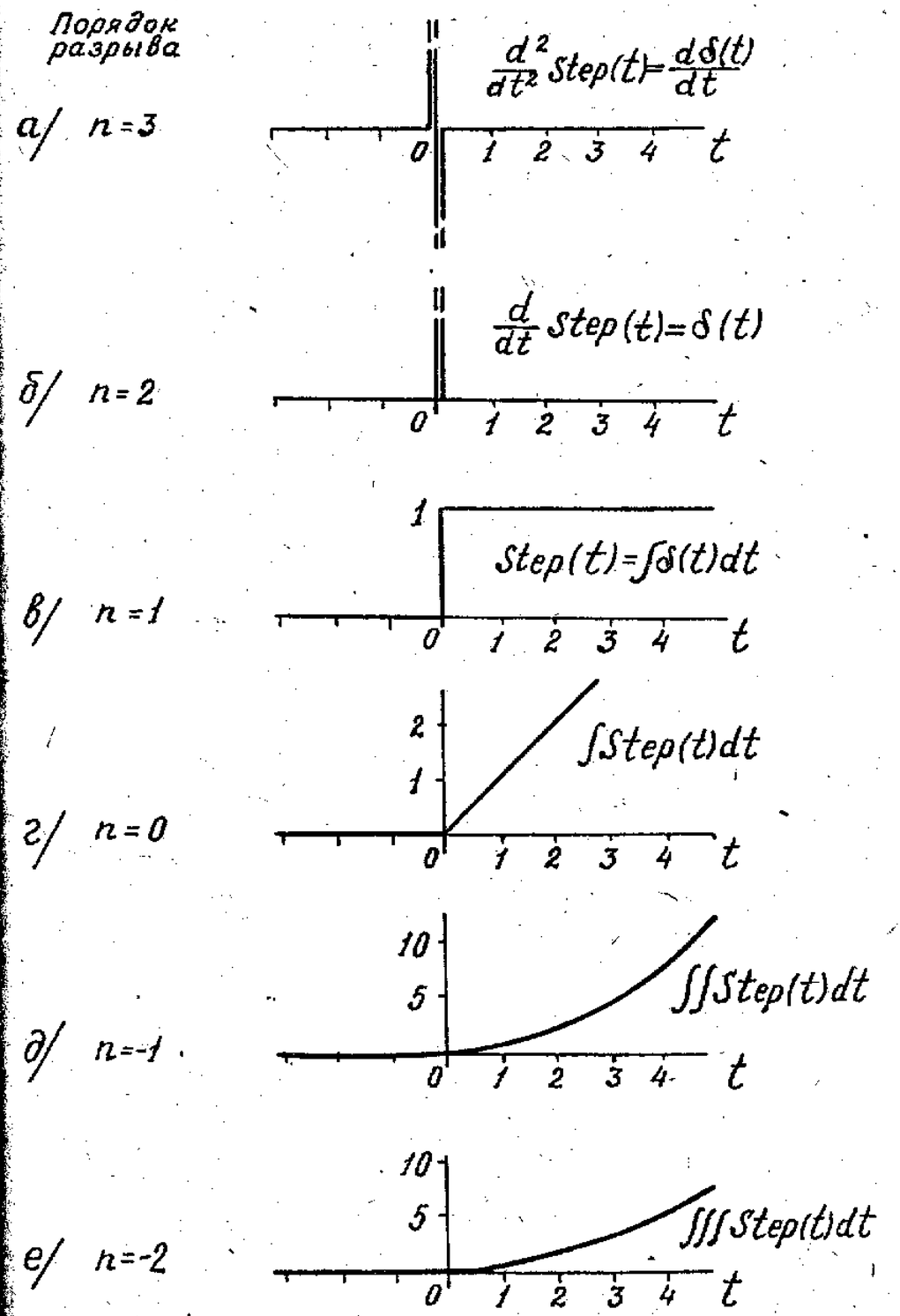


Рис. Ш-I. Разрывные функции различных порядков

Умножение импульса Дирака $\delta(t-\tau)$ на непрерывную функцию $u(t)$ приводит к бесконечно короткому импульсу бесконечно большой амплитуды с площадью, равной $u(\tau)$:

$$u(t)\delta(t-\tau) = u(\tau)\delta(t-\tau). \qquad (Ш.4)$$

Интеграл от этого произведения имеет конечное значение, представляет собой свертку сигнала $u(t)$ с импульсом Дирака и называется преобразованием Дирака ([9], [16]):

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\delta(\tau-t)dt = u(t) * \delta(t) = u(\tau). \qquad (Ш.5)$$

Способность импульса Дирака в результате указанного преобразования (Ш.5) выделять конкретное отсчетное значение сигнала в момент $t=\tau$ называется фильтрационным свойством этого импульса. Преобразование Дирака (Ш.5) иногда используется для определения импульса Дирака.

Спектр импульса Дирака. Импульс Дирака является самым коротким из всех возможных вариантов импульсов, и поэтому должен иметь самый широкий спектр. Этот спектр можно определить в результате свертки импульса Дирака с комплексной гармоникой, то есть применить к гармонике преобразование Дирака.

$$\delta(t) * e^{-j\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = e^{-j\omega t}. \qquad (Ш.6)$$

Записанное выражение (Ш.6) можно рассматривать как преобразование Фурье от импульса Дирака, смещенного на время t. Результат представляет собой функцию смещения, вызванную положением импульса Дирака на оси времени. Таким образом, можно записать спектральное соответствие:

$$\delta(t-\tau) \longleftrightarrow e^{-j\omega\tau}, \qquad (Ш.7)$$
$$\delta(t) \longleftrightarrow 1.$$

Полученный спектр импульса Дирака представляет собой действительно единичную постоянную величину и, таким образом, содержит все гармоники с одинаковыми амплитудами, то есть является наиболее широким из всех возможных вариантов спектров.

Отметим далее некоторые важные соотношения, связанные с импульсом Дирака и часто применяемые в теории сигналов.

Свертка с производными импульса Дирака. Первая производная импульса Дирака представляет собою биполярный импульс бесконечной амплитуды и нулевой длительности (рис. Ш-I,а). Свертка гладкой ограниченной функции с производной единичного импульса Дирака обладает дифференцирующим действием. Пусть $u(t)$ гладкая (дифференцируемая любое число раз) функция ограниченной протяженности, так что $u(\pm\infty) = 0$. Именно такие функции выбираются в качестве "основных" или "фундаментальных" для функционалов, содержащих сингулярные функции в теории обобщенных функций. Составим выражение свертки этой функции с производной импульса Дирака и проинтегрируем по частям.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(\tau-t)\, u(\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, d\delta(\tau-t) =$$
$$= u(\tau)\delta(\tau-t)\Big|_{\tau=-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-t)\, du(\tau) =$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-t)\, u'(\tau)\, d\tau = -u'(t).$$

Аналогичным путем можно получить и общее выражение для n-ой производной гладкой ограниченной функции ([18]):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n-1)}(\tau-t)\, u(\tau)\, d\tau = (-1)^n u^{(n)}(\tau). \qquad (Ш.8)$$

Производные и интегралы от единичного импульса Дирака можно рассматривать как серию разрывных функций различного порядка. Обычно разрыв конечной амплитуды типа $\mathrm{Step}(t)$ принимается за разрыв первого порядка. Тогда импульс Дирака будет описывать

разрыв второго порядка, а интегралы от $step(t)$ окажутся разрывными функциями нулевого и отрицательных порядков (рис. Ш-I, г-е).

Импульс Дирака от сложного аргумента. Если аргумент импульса Дирака имеет масштабный множитель a, то справедливо следующее соотношение:

$$\delta(at) = \frac{\delta(t)}{|a|} \qquad \text{или} \quad \delta(t) = |a|\,\delta(at). \qquad (Ш.9)$$

В знаменателе абсолютное значение множителя $|a|$ сохраняет четность импульса Дирака. Этим свойством обеспечивается постоянство площади импульса Дирака при изменении масштаба по оси абсцисс. Оно следует из преобразования Дирака, если в него подставить (Ш.9). Из свойства (Ш.9) следует, что для импульса Дирака по частоте имеет место соотношение

$$2\pi\delta(2\pi f) = 2\pi\delta(\omega) = \delta(f). \qquad (Ш.10)$$

Импульс Дирака с волновым аргументом (волновой импульс) можно представить следующим образом:

$$\delta(vt - x) = \frac{1}{v}\,\delta\left(t - \frac{x}{v}\right), \qquad (Ш.11)$$

где v – скорость распространения импульса вдоль оси x.

Последовательность импульсов Дирака можно задать, снабдив дельта-импульс сложным функциональным аргументом с заданным распределением нулей. Тогда получим:

$$\delta(\varphi(t)) = \sum_i \frac{\delta(t - t_i)}{|\varphi'(t_i)|}. \qquad (Ш.12)$$

Здесь t_i – корни функции $\varphi(t)$.

Это равенство следует из (Ш.9), если учесть, что вблизи точки $t = t_i$.

$$\varphi(t) = \varphi(t_i) + \varphi'(t_i)(t - t_i) = \varphi'(t_i)(t - t_i), \qquad (Ш.13)$$

где $\varphi(t_i) = 0$, а $\varphi'(t_i) = const$.

Например, эквидистантную бесконечную последовательность импульсов Дирака (решетку с равными интервалами) можно записать в виде импульсов Дирака с синусоидальным аргументом:

$$\delta(\sin\omega t) = \sum_i \delta(\omega t - \pi i). \qquad (Ш.14)$$

Здесь $i = 0, 1, 2, \ldots \pm\infty$; $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$, и импульсы следуют через интервал $t_i = \frac{T}{2} i$.

Регулярные модели импульса Дирака. Непрерывной моделью импульса Дирака может служить функция "колокольного" вида (рис. Ш-2г)

$$\lim_{\beta\to 0} \delta_\beta(t - \tau) = \lim_{\beta\to 0} \frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\, e^{-[\beta(t-\tau)]^2} = \delta(t - \tau). \qquad (Ш.15)$$

Легко проверить, что с нормирующим множителем $\beta/\sqrt{\pi}$ площадь этой фигуры равна единице при любом значении параметра β. В то же время, при уменьшении этого параметра ширина ее уменьшается, а амплитуда увеличивается. В пределе получается импульс Дирака в момент $t = \tau$.

Другими моделями импульса Дирака являются рассматриваемые далее функции (Ш.24) и "синус-кардинал" (Ш.31), а также производные функций рис. Ш-2 а,б,в.

В теории линейных систем импульс Дирака играет фундаментальную роль, так как используется в качестве тестового входного сигнала, дающего на выходе системы ее основную характеристику – так называемую импульсную или временную характеристику.

Импульс Кронекера. Импульсом (или символом) Кронекера называется бесконечно короткий импульс с единичной амплитудой. У

этого импульса нет общепринятого обозначения, и мы его будем обозначать $Kr(\quad)$. Импульс Кронекера является аналогом импульса Дирака в дискретной математике. Он принимается безразмерной функцией, и его умножение на сплошную функцию приводит к вырезанию одного значения этой функции.

$$u(t)\,Kr(t-\tau) = u(\tau). \qquad (Ш.16)$$

Это выражение аналогично преобразованию Дирака (Ш.5). Вырезающее свойство импульса Кронекера применяется при дискретизации сплошных сигналов.

3. Единичная и знаковая функции

Определение и свойства единичной и знаковой функций. Единичной функцией (функцией Хевисайда) называется разрывная функция, скачком меняющая свое постоянное значение 0 при $t < \tau$ на постоянное значение I при $t > \tau$ (рис. Ш-I,в, рис. Ш-2,а,б,в; рис. Ш-3,а). При $t = \tau$ обычно принимается значение I/2, так как к этому значению сходится ряд Фурье в точках разрыва функции. Обычно применяют безразмерную единичную функцию. Часто ее обозначают σ или $step(\ )$ [2I], но применяются и другие обозначения.

Знаковой функцией (сигнатурой) называется разрывная функция, скачком меняющая свое значение в точке $t = \tau$ от постоянного значения -I до постоянного значения +I (рис. Ш-3,б). Знаковую функцию обычно считают безразмерной и обозначают $Sign(\ )$ или $Sgn(\ )$. Очевидно, что знаковая функция является кососимметричной относительно точки $t = \tau$, а при $\tau = 0$ - нечетной функцией. При нулевом значении аргумента знаковая функция равна нулю $Sign(0) = 0$.

Единичную функцию можно представить в виде суммы постоянной величины I/2 = $const$ и половины значения знаковой функции $1/2\ sign(t-\tau)$. Таким образом, единичную и знаковую функции можно записать так:

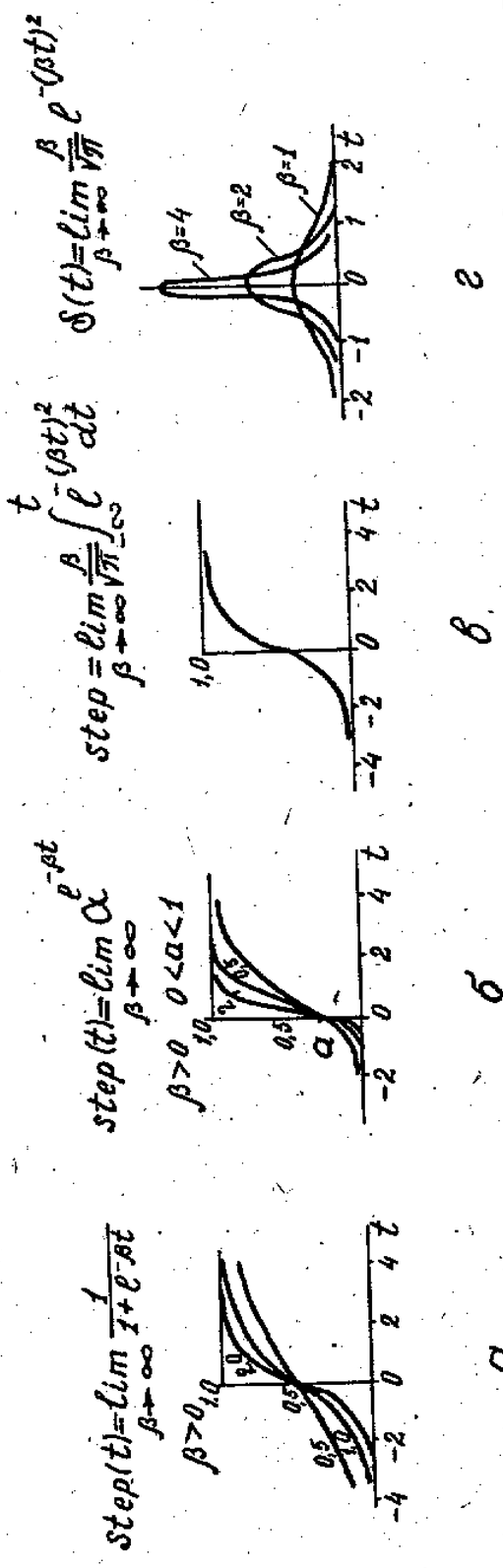


Рис. Ш-2. Переходные модели единичной функции (а,б,в) и единичного импульса (г)

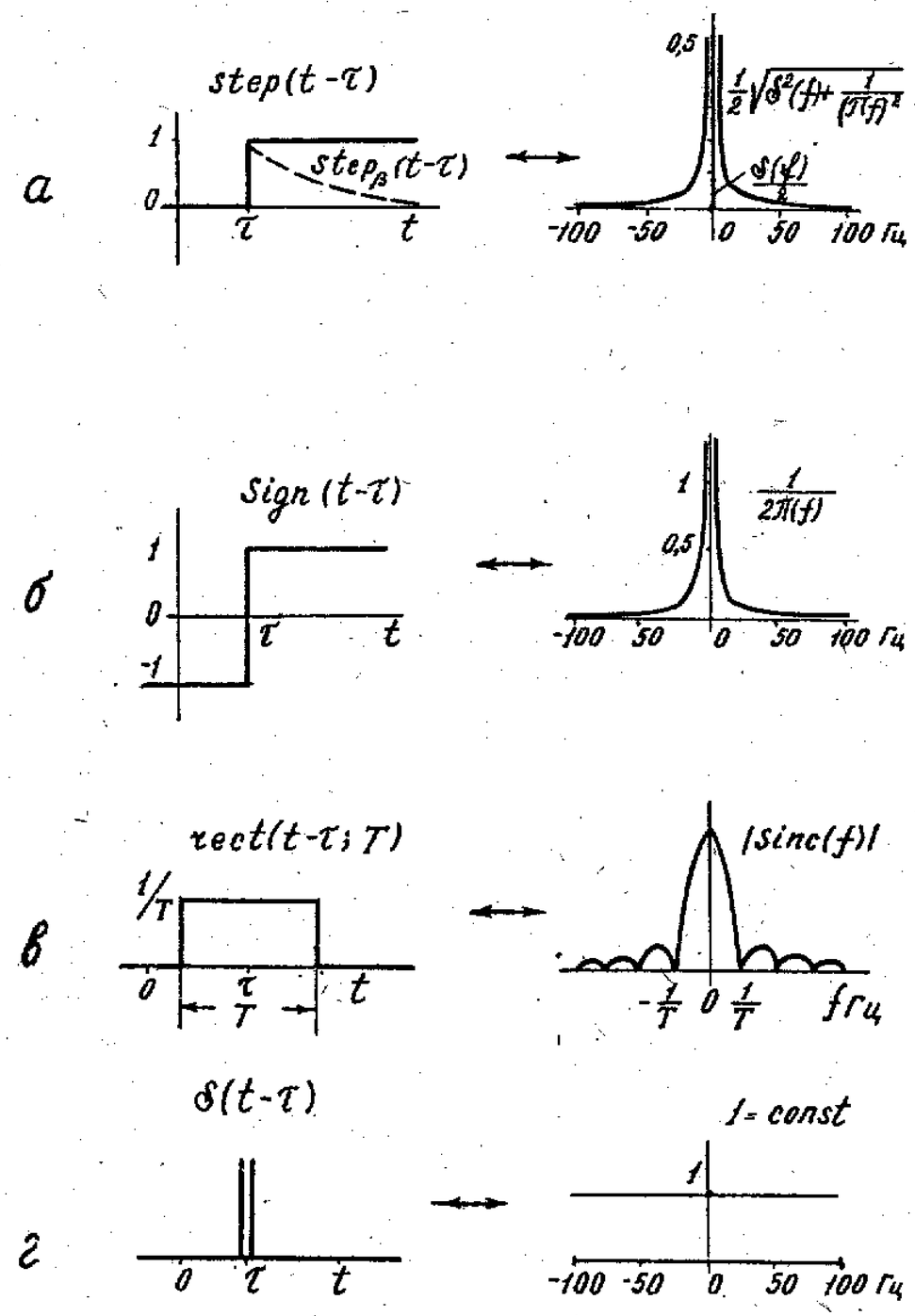


Рис. Ш-3. Разрывные функции и их амплитудно-частотные спектры

$$\mathrm{step}(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t<\tau \\ 1 & \text{при } t>\tau \end{cases} \qquad (Ш.17)$$

$$\mathrm{sign}(t-\tau) = \begin{cases} -1 & \text{при } t<\tau \\ 0 & \text{при } t=\tau \\ 1 & \text{при } t>\tau \end{cases} \qquad (Ш.18)$$

$$\mathrm{Step}(t-\tau) = \frac{1}{2}(t-\tau) + \frac{1}{2}\,\mathrm{sign}(t-\tau). \qquad (Ш.19)$$

В последнем выражении $\frac{1}{2}(t-\tau)$ представляет собою симметричную функцию времени с постоянным значением I/2 и сдвинутым на τ центром симметрии.

Спектр единичной функции. Единичная функция не удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости функций, вследствие чего ее преобразование Фурье представляется расходящимся интегралом. Однако частотный спектр единичной функции существует, и его можно вычислить искусственным приемом, который сводится к вычислению спектра по Лапласу и переходе от него к спектру по Фурье.

Вычислим преобразование Фурье вспомогательной функции

$$\mathrm{Step}_\beta(t) = e^{-\beta t}\,\mathrm{step}(t), \quad \text{где } \beta>0. \qquad (Ш.20)$$

При $\beta \to 0$ $\mathrm{step}_\beta(t) \to \mathrm{step}(t)$, чем мы и воспользуемся на заключительном этапе вычисления Фурье-спектра единичной функции. Подставив вспомогательную функцию (Ш.20) в выражение преобразования Фурье, получим:

$$\mathrm{step}_\beta(t) \longleftrightarrow \mathcal{F}u\{\mathrm{step}_\beta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t}\,\mathrm{step}(t)\,e^{-j\omega t}dt =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(\beta+j\omega)t}dt = \frac{e^{-(\beta+j\omega)t}}{-(\beta+j\omega)}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\beta+j\omega}. \qquad (Ш.21)$$

Здесь $\mathcal{F}u\{\ \}$ – символ прямого спектрального преобразования Фурье.

При вычислении окончательного результата следует иметь в виду, что единичная функция не обладает симметрией, так что ей должен соответствовать комплексный спектр. Между тем, формально полагая в (Ш.21) $\beta = 0$, получим ложный результат в виде чисто мнимого спектра $1/j\omega$. Поэтому сначала выделим в (Ш.21) действительную и мнимую части.

$$\mathcal{F}u\{step_\beta(t)\} = \frac{\beta}{\beta^2+\omega^2} - j\frac{\omega}{\beta^2+\omega^2} = R_\beta(\omega) + jI_\beta(\omega). \quad (Ш.22)$$

Найдем пределы отдельно для действительной и мнимой частей при $\beta \to 0$:

$$\lim_{\beta\to 0} j\,I_\beta(\omega) = \lim_{\beta\to 0}\frac{-j\omega}{\beta^2+\omega^2} = -\frac{j}{\omega} \quad (Ш.23)$$

$$\lim_{\beta\to 0} R_\beta(\omega) = \lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2} = \begin{cases} 0 & \text{при } \omega \neq 0 \\ \infty & \text{при } \omega = 0. \end{cases} \quad (Ш.24)$$

Таким образом, мнимая часть соответствует ранее найденному мнимому спектру, а действительная часть с точностью до постоянного множителя представляет собой импульс Дирака по частоте. Для определения масштаба этого импульса найдем площадь фигуры (Ш.24)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\beta}{\beta^2+\omega^2}\,d\omega = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+(\omega/\beta)^2}\,d\left(\frac{\omega}{\beta}\right) = \operatorname{arctg}\frac{\omega}{\beta}\Big|_{\omega=-\infty}^{\infty} = \pi.$$

Здесь использован табличный интеграл [2]. В результате, площадь действительной части искомого спектра единичной функции не зависит от параметра β и равна π. Сама действительная часть искомого спектра с учетом (Ш.1), (Ш.2) и (Ш.10) оказывается равной

$$\pi\delta(\omega) = \frac{\delta(f)}{2}.$$

Полученный результат означает, что единичная функция обладает специфическим комплексным спектром, действительная часть которого представляет собой сингулярную функцию частоты в виде половины единичного импульса Дирака.

$$step(t) \longleftrightarrow \frac{\delta(f)}{2} - \frac{j}{2\pi f} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}. \quad (Ш.25)$$

На рис. Ш-4 приведены единичная функция, ее экспоненциально-затухающая модель и их частотные спектры.

<u>Спектры знаковой функции и постоянной величины</u>. В соответствии с (Ш.19) и (Ш.25) единичная функция представляется полусуммой постоянной величины (единицы) и знаковой функции, а ее спектр – действительной и мнимой частями (Ш.25)

$$step(t) = \frac{1(t)}{2} + \frac{1}{2}\,sign(t) \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \mathcal{F}u\{step(t)\} = \frac{\delta(f)}{2} + \frac{1}{j2\pi f}.$$

Имея в виду реальность спектра четной функции и мнимость – нечетной функции, очевидно, можно из сопоставления (Ш.19) и (Ш.25) записать такие спектральные соответствия (рис. Ш-3,б).

$$1(t) \longleftrightarrow \delta(f). \quad (Ш.26)$$

$$sign(t) \longleftrightarrow \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{j2\pi f}. \quad (Ш.27)$$

<u>Регулярные модели единичной и знаковой функций</u>. Можно предложить много вариантов гладких моделей единичной функции. Некоторые приведены на рис. Ш-2,а,б,в. Особенностью модели (б) является возможность задавать произвольное значение ($0 < a < 1$) модели при нулевом значении аргумента. В остальных случаях это значение постоянно и равно 1/2.

Модели знаковой функции можно получить вычитанием 1/2 из модели единичной функции. Между единичным импульсом Дирака, единичной функцией Хевисайда и знаковой функцией существует связь

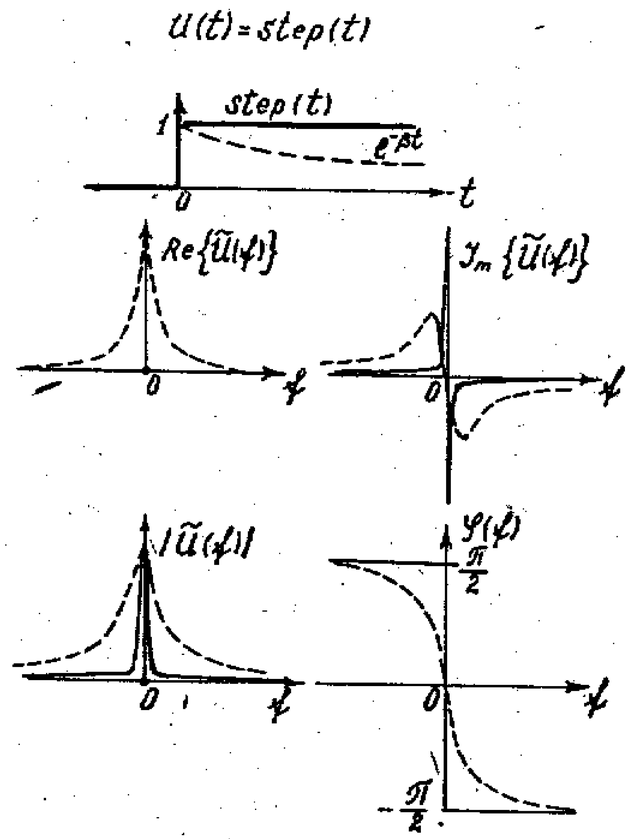


Рис. Ш-4. Единичная функция, ее экспоненциально затухающая модель (а) и их частотные спектры (б,в,г,д)

$$\delta(t) = \frac{d\,step(t)}{dt} = \frac{d\,sign(t)}{dt}. \qquad (Ш.28)$$

Поэтому дифференцирование любой модели – единичной или знаковой – дает модель импульса Дирака и наоборот, интегрирование модели импульса Дирака приводит к модели единичной функции. Например, интегрирование модели дельта-импульса (рис. Ш-2,г) приводит к модели единичной функции (в) на рис. Ш-2.

4. Прямоугольная функция

Определение и свойства прямоугольной функции. Прямоугольной функцией называется функция, имеющая постоянное значение на заданном интервале аргумента T и равная нулю вне этого интервала (рис. Ш-3,в). Прямоугольную функцию с единичной амплитудой можно представить в виде разности двух единичных функций, взаимно смещенных на интервал T. Такая прямоугольная функция имеет площадь, равную T. Часто применяется нормированная по площади прямоугольная функция с амплитудой $1/T$ и площадью, равной единице. Очевидно, что регулярную модель прямоугольной функции можно составить в виде разности взаимно смещенных моделей единичной функции.

Прямоугольную функцию обычно обозначают символом $rect(\,)$ ([4],[17] и др.) (rectangle – прямоугольник, англ.), реже $\Pi(\,)$ ([16]) и $Box(\,)$ [21] (Box – коробка, ящик, сундук; англ.). В дальнейшем будем пользоваться нормированной по площади прямоугольной функцией и обозначать ее $rect$.

Если прямоугольная функция единичной площади и длительности T расположена на временной оси с центром в точке τ, то ее можно записать так:

$$rect(T, t-\tau) = \frac{1}{T}\left[step\left(t-\tau+\frac{T}{2}\right) - step\left(t-\tau-\frac{T}{2}\right)\right] = \begin{cases} \frac{1}{T} & при\ \tau-\frac{T}{2} < t < \tau+\frac{T}{2} \\ 0 & при\ \tau-T/2 > t > \tau+T/2 \end{cases} \qquad (Ш.29)$$

Прямоугольная функция применяется при описании процедуры вырезания из длительного процесса нужного интервала протяженностью T. Это может быть участок сейсмической записи ("окно обработки"), однородный пласт в сейсмогеологическом разрезе, равномерное распределение интенсивности приемной или излучающей интерференционной системы, полоса пропускания идеального одноканального или многоканального частотного или скоростного фильтра, воспроизводящая цель и т.п.

Прямоугольную функцию единичной площади можно рассматривать как сингулярную ограниченную модель импульса Дирака, так как при бесконечном сокращении ее длительности она стремится к дельта-функции.

$$\lim_{T\to 0} rect\,(T,t) = \delta(t). \qquad (III.30)$$

Аналогично при сокращении длительности прямоугольной функции единичной амплитуды она стремится к единичному импульсу Кронекера.

Спектр прямоугольной функции. Вычислим спектр прямоугольника, расположенного симметрично относительно начала координат.

$$rect\,(T,t) \longleftrightarrow Fu\{rect\,(T,t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} rect\,(T,t)\,e^{-j\omega t}dt =$$
$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{-j\omega T}\,e^{-j\omega t}\Big|_{-T/2}^{+T/2} = \frac{e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}}{j\omega T} = \qquad (III.31)$$
$$= \frac{\sin \omega T/2}{\omega T/2} = sinc\left(\frac{\omega T}{2}\right).$$

Полученная функция имеет большое значение в теории сигналов и поэтому получила специальное название "синус-кардинал" и обозначение $sinc\,(\ )$. Иногда ее называют функцией Дирихле [II] или функцией отсчета. Последнее название вызвано тем, что в теореме отсчетов В.А.Котельникова, которая рассматривается в следующем разделе, разложение сигнала производится по этим функциям.

Спектр прямоугольной функции приведен на рис. III-3,в. Это убывающая синусоида, имеющая вид функции "замечательного предела":

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Таким образом, $sinc\,(\omega = 0) = 1$, а нули расположены через интервал по частоте $\Delta f = 1/T$. Очевидно, что в соответствии с теоремой масштабов, увеличение длительности прямоугольника приводит к сжатию его спектра. При $T \to 0$ прямоугольный импульс переходит в импульс Дирака, а его спектр – (синус-кардинал) – в постоянную величину – единицу, что является парным (обратным) спектральным соотношением по отношению к (III.26).

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1\,(f). \qquad (III.32)$$

§ 2. Спектральная теория дискретизации функций

I. Дискретизация отсчетными и дискретными значениями

Изучаемое в сейсморазведке поле упругих волн является функцией непрерывных координат пространства и времени. По пространственным координатам дискретность сейсмической информации определяется отдельными каналами, регистрирующими сейсмические колебания в отдельных точках наблюдений. При обработке полевых сейсмических данных применяется запись сейсмических волн в дискретном цифровом виде. Преобразование аналоговой формы сейсмической записи в цифровую осуществляется процедурой кодирования, состоящей из дискретизации сигнала во времени и квантования амплитуд его отсчетных значений по уровню (аналого-цифрового преобразования сигнала). Каждая из этих процедур вызывает специфические искажения сигналов и создает особенности в операциях обработки сейсмических записей. Вопросы теории квантования сигналов выходят за рамки тематики данной книги. Здесь будут рассмотрены вопросы дискретизации функций, описывающих как сигналы, так и системы, к которым применима теория спектральных преобразований.

Дискретизацией сплошной функции называется процедура представления этой функции последовательностью ее значений при отдельных, специально выбранных дискретных значениях аргумента. В результате дискретизации сплошной функции образуется дискретная функция,

представляющая упорядоченную последовательность импульсных значений функции – функция дискретного аргумента. Эта последовательность для временных сигналов называется "временным рядом" ([7], [13]). В вычислительной технике обычно применяется эквидистантная дискретизация, то есть дискретизация с постоянным интервалом между отсчетами. Этот интервал называется ш а г о м д и с к р е т и з а ц и и.

Возможны различные подходы к вопросу дискретизации. Первый подход использует формальную дискретизацию отсчетными значениями сплошной функции, которые образуют безразмерный временной ряд (арифметическая дискретизация). Такой способ обычно применяется при автоматической дискретизации сигналов для ввода в цифровую вычислительную машину. В этом случае имеет значение лишь арифметическая сторона дискретизации, при которой размерность и абсолютная величина (масштаб) исходной функции и ее дискретного представления не имеют значения. Дискретизацию отсчетными значениями можно осуществить в результате умножения сплошной функции $u(t)$ на эквидистантную последовательность единичных импульсов Кронекера $Kr(t-\mu\Delta t)$. В результате образуется цифровой ряд $u(\mu\Delta t)$, представляющий собой последовательность отсчетных значений $u(t)$ через интервал Δt.

$$u(\mu\Delta t) = u(t)\,Kr(t-\mu\Delta t) \qquad (Ш.33)$$

$$\mu = 0;\ \pm 1;\ \pm 2;\ \ldots \pm\infty .$$

Второй принцип – дискретизация дискретными значениями, применяется при совместном рассмотрении и сопоставлении сплошных ("распределенных") и дискретных ("сосредоточенных") физических систем (физическая дискретизация). В этом случае важное значение приобретает способ преобразования сплошной функции в ее дискретный образ, связь между ними и соотношение их размерностей. В сейсморазведке приходится иметь дело с объектами (системами), свойства которых могут быть либо распределенными непрерывно на некотором интервале аргумента, либо сосредоточенными в отдельных точках. В этих случаях имеет значение физическая природа дискретизируемых объектов, соотношение их размерностей, масс, мощностей и пр.

Связь между сплошной и дискретной функциями, описывающими реальные физические системы, можно установить на основе следующих условий:

а) дискретные и отсчетные значения при одних и тех же значениях аргумента – пропорциональны;

в) площадь сплошной функции равна сумме значений вписанных в нее дискрет, то есть

$$\sum_{\mu} u_{\Delta}(\mu\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,dt = \sum_{\mu}\int_{\mu\Delta t-\Delta t/2}^{\mu\Delta t+\Delta t/2} u(t)\,dt. \qquad (Ш.34)$$

Здесь Δt – шаг дискретизации;

μ – номер отсчета сплошной функции $u(t)$;

$t_{\mu}=\mu\Delta t$ – дискретный аргумент;

$u_{\Delta}(\mu\Delta t)$ – дискретная функция.

Дискретные значения ("дискреты") здесь и далее обозначаются индексом Δ. Интеграл в (Ш.34) разбит на одинаковые интервалы Δt и представлен в виде суммы интегралов по участкам Δt с центром в точках $t_{\mu}=\mu\Delta t$. Приравнивая слагаемые с одинаковыми номерами μ, получаем:

$$u(\mu\Delta t) = \int_{t_{\mu}-\Delta t/2}^{t_{\mu}+\Delta t/2} u(t)\,dt. \qquad (Ш.35)$$

Если выбрать интервал дискретизации настолько малым, что в его пределах можно приближенно считать изменение функции линейным, то последнее выражение можно представить в таком виде:

$$u_{\Delta}(\mu\Delta t) = u(\mu\Delta t)\,\Delta t. \qquad (Ш.36)$$

Использованное здесь условие равенства площадей можно интерпретировать как условие сохранения "количества свойства" системы или сигнала: интенсивности, чувствительности, массы, заряда. При этом отсчетные значения $u(\mu\Delta t)$ сплошной функции

$u(t)$ приобретают смысл плотности распределения свойства, порции которого концентрируются в отдельных точках в виде дискрет дискретизированной функции. Полученное соотношение (Ш.36) свидетельствует о том, что дискретное значение функции (дискрета) получается в результате умножения отсчетного значения сплошной функции (плотности распределения свойства) на шаг дискретизации аргумента Δt.

Принцип равенства площадей позволяет приравнять площадь (интеграл) сплошной функции и площадь (интеграл) дискретизированной импульсами Кронекера функции, то есть записать

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,Kr(t-\mu\Delta t)\,dt = \sum_{\mu}\int_{t_\mu-\Delta t/2}^{t_\mu+\Delta t/2} u(\mu\Delta t)\,dt =$$

$$= \sum_{\mu} u(\mu\Delta t)\Delta t = \sum_{\mu} u_\Delta(\mu\Delta t)\,; \quad \text{то есть}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\,Kr(t-\mu\Delta t)\,dt = \Delta t \sum_{\mu} u(\mu\Delta t). \qquad (Ш.37)$$

Эту формулу следует рассматривать не как строгое математическое выражение, а как формальное соотношение, принятое за определение связи между сплошными дискретными функциями. Формулы (Ш.33) отсчетной (арифметической) дискретизации, (Ш.37) – физической дискретизации и (Ш.36) связи отсчетов и дискрет можно принять за определение процедуры дискретизации сигналов и спектров. В дальнейшем они использованы при изложении вопросов дискретизации.

Математическое описание процедуры дискретизации можно построить на применении импульсов Дирака, а не Кронекера ([13],[15]). Но в дискретной математике аналогом импульса Дирака является импульс Кронекера, так что переход к импульсам Кронекера неминуем и лучше его осуществить заранее.

2. <u>Спектр эквидистантной последовательности импульсов Кронекера</u>

Бесконечную эквидистантную последовательность импульсов Кронекера как периодическую функцию с периодом Δt можно разложить в ряд Фурье:

$$Kr(t-\mu\Delta t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} C(r)\,e^{j2\pi rFt} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} C(r)\,e^{j2\pi rt/\Delta t}, \qquad (Ш.38)$$

где $F = 1/\Delta t$ и $r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm\infty$.

Коэффициенты этого ряда $C(r)$ определяются по обычным формулам

$$C(r) = \frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta t} Kr(t-\mu\Delta t)\,e^{-j2\pi rFt}\,dt = \frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta t} e^{-j2\pi r\mu\Delta t F}\,dt =$$

$$= e^{-j2\pi r\mu}\cdot\frac{1}{\Delta t}\int_{\Delta t} dt = 1. \qquad (Ш.39)$$

Здесь использовано соотношение дискретизации (Ш.37) и учтено, что $F\Delta t = 1$, а r и μ – целые числа.

Из (Ш.39) следует, что все гармоники дискретного частотного спектра периодической последовательности импульсов Кронекера имеют одинаковую амплитуду, равную единице, так что сам спектр представляет собой также эквидистантную последовательность импульсов Кронекера с шагом F. Поэтому можно записать результат

$$Kr(t-\mu\Delta t) = \sum_{r} e^{-j2\pi rFt} \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow Kr(f-rF) = \sum_{\mu} e^{-j2\pi r\Delta t f}, \qquad (Ш.40)$$

$$F\Delta t = 1\,;\ r = 0\,;\pm 1\,;\pm 2\,;\ldots\pm\infty;\ \mu = 0\,;\pm 1\,;\pm 2\,;\ldots\pm\infty$$

Дискретизированный отсчетными значениями сигнал в соответствии с (Ш.33) и (Ш.40) можно представить в таком виде:

$$u(\mu\Delta t) = u(t)\,Kr(t-\mu\Delta t) = u(t)\sum_{r} e^{-j2\pi rFt}. \qquad (Ш.41)$$

3. Спектр дискретизированного сигнала

Обозначим спектры сплошной $u(t)$ и вписанной в нее дискретной функции $u_\Delta(t)$ соответственно:

$$u(t) \longleftrightarrow \tilde{u}(f) \qquad (\text{III}.42)$$
$$u_\Delta(t) \longleftrightarrow \tilde{u}_\Delta(f).$$

Тогда, применив к обеим частям (III.41) преобразование Фурье и используя теорему смещения спектра, получим

$$\tilde{u}_\Delta(f) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \tilde{u}(f - rF); \; r = 0; 1; 2, \ldots \text{ и } F\Delta t = 1. \qquad (\text{III}.43)$$

Из этого выражения следует, что спектр дискретизированной функции представляет собой периодическую функцию по частоте, состоящую из бесконечной суммы спектров ее огибающей, взаимно смещенных на период F, обратный шагу дискретизации Δt.

На рис. III-5 приведен пример дискретизации временного сигнала. Для периода по частоте иногда применяется специальный термин - "период".

В результате дискретизации сигнала его спектр искажается наложением побочных спектров, что приводит к увеличению амплитуды его высокочастотных гармоник, и не позволяет точно восстановить сигнал по его дискретному представлению. Явление искажения спектра сигнала при его дискретизации называется "алайсинг-эффект" или "эйлисинг-эффект" [10], "элайсинг-эффект" [8] (aliasing - наложение, англ.). В переводах иностранной литературы встречаются еще такие термины: "явление подмены частот" [13], "явление маскировки частот", "свертывание спектра" [1]. Эти искажения можно интерпретировать как зеркальное отражение периферийных частей основного спектра в точках частотной оси

$$f_n = F/2 + nF; \quad n = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots \pm \infty.$$

Первая частота зеркального отражения при $f_N = \frac{F}{2} = 1/2\,\Delta t$, равная половине периода повторения спектра, называется частотой Найквиста. Из (III.43) и рис. III-5 следует, что алайсинг-эффект можно ослабить сокращением шага дискретизации, что приведет к

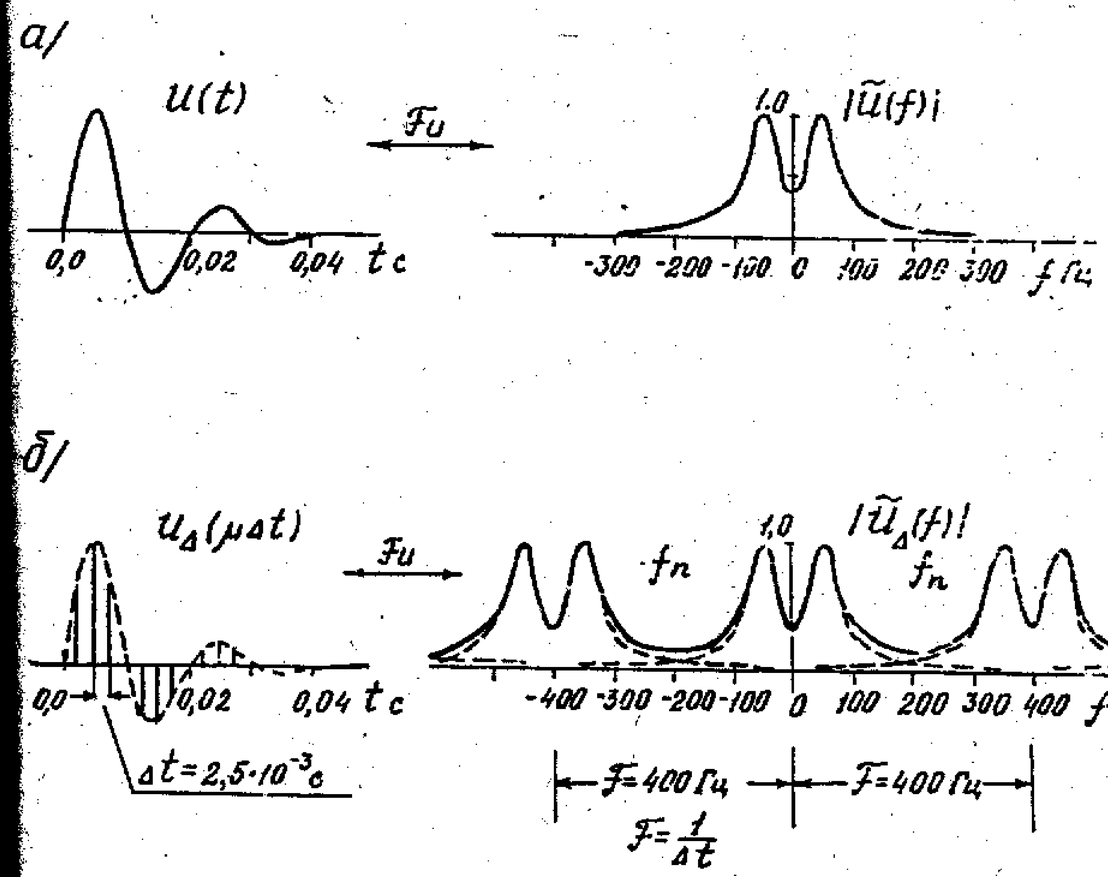


Рис. III-5. Амплитудно-частотные спектры сплошной функции (а) и вписанной в нее дискретной функции (б)

пропорциональному увеличению периода взаимного смещения побочных спектров. На рис. Ш-6 приведен пример изменения периода F и областей перекрытия побочных спектров при изменении шага дискретизации сигнала. Если по техническим причинам сокращение шага дискретизации невозможно, то алайсинг-эффект, как эффект наложения "зеркальных частот", можно ослабить специальным фильтром нижних частот, отсекающим "хвосты" спектра с частотами, превышающими частоту Найквиста. Эти фильтры имеют соответствующее название "антиалайсинговые фильтры", "фильтры зеркальных частот" и т.п. В результате действия этого фильтра спектр сигнала оказывается укороченным ("усеченным"), но амплитуды оставшихся гармоник основной части спектра процедурой дискретизации не искажаются.

Если сигнал имеет спектр, ограниченный частотой $f_{гр}$, то есть амплитуды гармоник спектра за пределами этой граничной частоты пренебрежимо малы, то можно выбрать такой шаг дискретизации сигнала $\Delta t = 1/F$, чтобы $f_{гр} \leq F/2 = f_N = 1/2\Delta t$. В этом случае, как показано на рис. Ш.6б, в, исчезает взаимное наложение побочных спектров и основной период периодического спектра (период) совпадает со спектром исходного сигнала. Следовательно, сигнал с ограниченным спектром можно полностью восстановить по его дискретному представлению, если выбрать шаг дискретизации не больше обратной величины ширины его двустороннего спектра

$$\Delta t \leq 1/2 f_2 . \qquad (Ш.44)$$

4. Теорема отсчетов Уиттекера-Котельникова

Выше было показано, что при дискретизации сигнала в общем случае происходит искажение его частотного спектра, в результате чего искажается и восстановленный по этому спектру сигнал. Дискретный сигнал может иметь бесконечно большое число сплошных огибающих различной формы, так что в общем случае сигнал нельзя однозначно восстановить по дискретному представлению. Теорема отсчетов, носящая имена Уиттекера Е.(1915 г.), Котельникова В.А. (1933 г.) и Шенона К. (1949 г.) указывает, что сигнал с ограни-

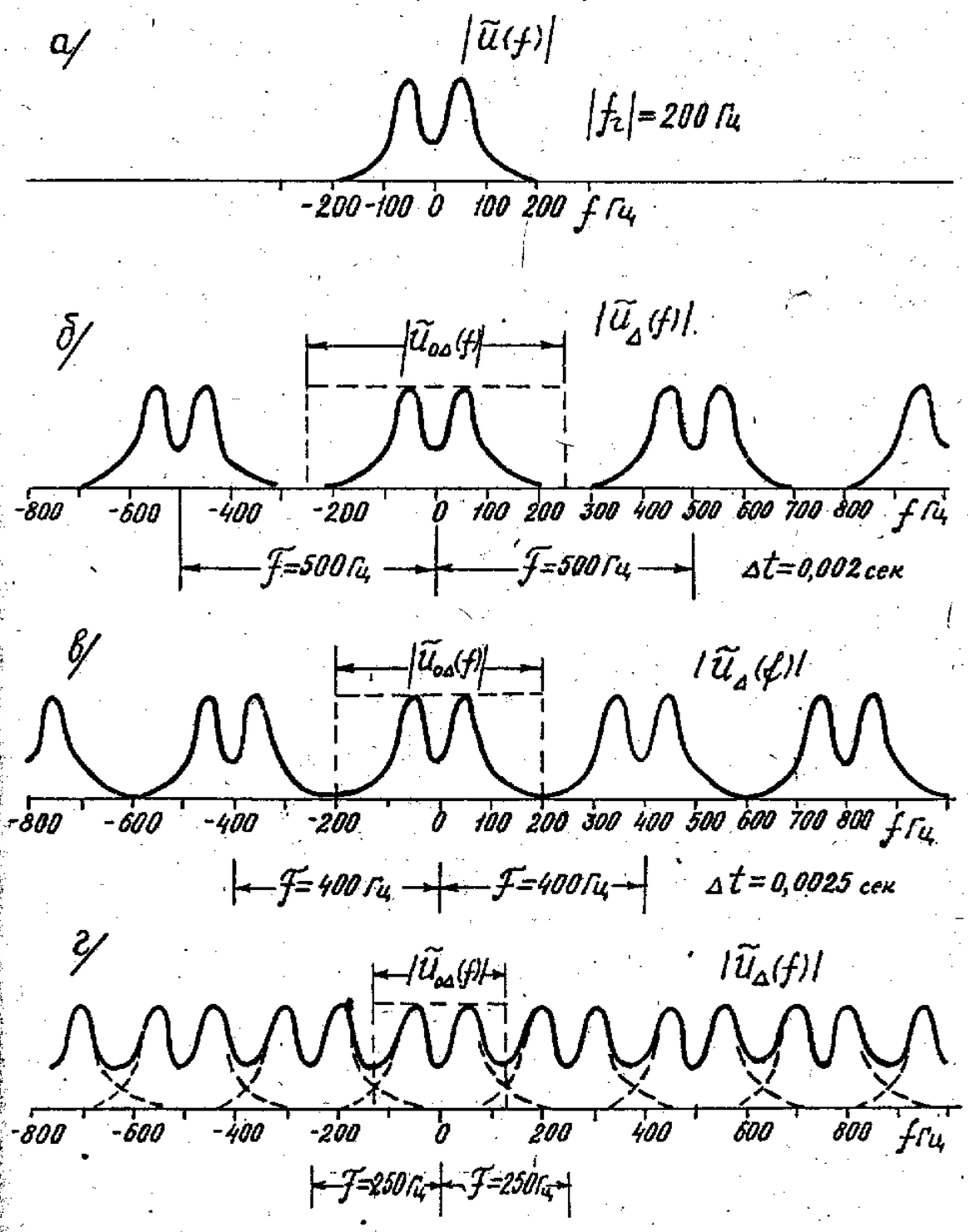


Рис. Ш-6. Формирование периодического спектра при дискретизации сигнала

ченным спектром можно с любой точностью разложить по функциям отсчета (Ш.31), и для определения этого разложения достаточно знать лишь его дискретные значения с шагом дискретизации, удовлетворяющим условию (Ш.44). Из этого разложения следует, что сигнал со спектром, ограниченным частотами $\pm f_2$, полностью определяется и может быть передан по каналу связи без потери информации своими отсчетными значениями через интервал $\Delta t < 1/2 f_2$ [4],[14],[15],[16],[17],[19] и др. Для вывода упомянутого разложения воспользуемся (Ш.43), применив его к частотному спектру $\tilde{u}(f)$ временного сигнала $u(t)$. В результате получим исходные соответствия Фурье-трансформант

$$u(t) \longleftrightarrow \tilde{u}(f)$$

$$u(\mu\Delta t) \longleftrightarrow \tilde{u}_\Delta(f) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \tilde{u}(f - rF); \; \Delta t F = 1. \qquad (Ш.45)$$

Вырежем при помощи прямоугольной функции из периодического спектра $\tilde{u}_\Delta(f)$ его основную центральную часть (центральный период) (рис. Ш-6). Обозначим этот кусок периодического спектра через $\tilde{u}_{\Delta 0}(f)$, а соответствующий ему сигнал – через $u_0(t)$, в результате получим еще одно соответствие Фурье-трансформант

$$u_0(t) \longleftrightarrow \tilde{u}_{\Delta 0}(f) = \tilde{u}_\Delta(f) \cdot F \cdot rect\,(F, f) \qquad (Ш.46)$$

В правой части (Ш.46) записано произведение двух спектральных функций, которому во временной области по теореме о произведении спектров соответствует свертка Фурье-трансформант. Поэтому, учитывая (Ш.31), (Ш.33) и (Ш.37), можно получить искомое разложение

$$\tilde{u}_{\Delta 0}(f) = u_\Delta(f) \cdot F \cdot rect\,(F, f) \longleftrightarrow u_0(t) = u(\mu\Delta t) *$$

$$* F\,sinc\,(F, t) = F \int_{-\infty}^{\infty} Kr\,(\tau - \mu\Delta t) \cdot u(\tau) \cdot sinc\,(t - \tau)\, d\tau =$$

$$= F\Delta t \sum_{\mu} u\,(\mu\Delta t)\, sinc\,(t - \mu\Delta t),$$

и окончательно можно записать:

$$u_0(t) = \sum_{\mu} u\,(\mu\Delta t)\, \frac{\sin \pi F (t - \mu\Delta t)}{\pi F (t - \mu\Delta t)}. \qquad (Ш.47)$$

Полученное выражение представляет собой разложение сигнала $u_0(t)$ с искаженным явлением алайсинг ограниченным спектром $(|f| \le f_r)$ по функциям отсчета $sinc\,(t - \mu\Delta t)$, взаимно смещенным на $\mu\Delta t$ с амплитудами, равными отсчетным значениям сигнала $u\,(\mu\Delta t)$. На рис. Ш-7 показана почленная развертка суммы (Ш.47), иллюстрирующая разложение сигнала на сумму функций отсчета. Принимая во внимание, что $sinc\,(0) = 1$, из (Ш.47) и рис. Ш-7 следует, что в точках $t = \mu\Delta t$ сигнал $u_0(t)$ с искаженным и усеченным спектром совпадает с отсчетными значениями исходного сигнала

$$u_0\,(\mu\Delta t) = u\,(\mu\Delta t).$$

В промежутках между этими точками значения сигнала $u_0(t \ne \mu\Delta t)$ формируются из периферийных частей функций отсчета. Если исходный сигнал обладает ограниченным спектром, не выходящим за ограничивающий прямоугольник, то рассматриваемые спектры и сигналы совпадают, то есть

$$\tilde{u}(f) = \tilde{u}_{\Delta 0}(f) \longleftrightarrow u(t) = u_0(t). \qquad (Ш.48)$$

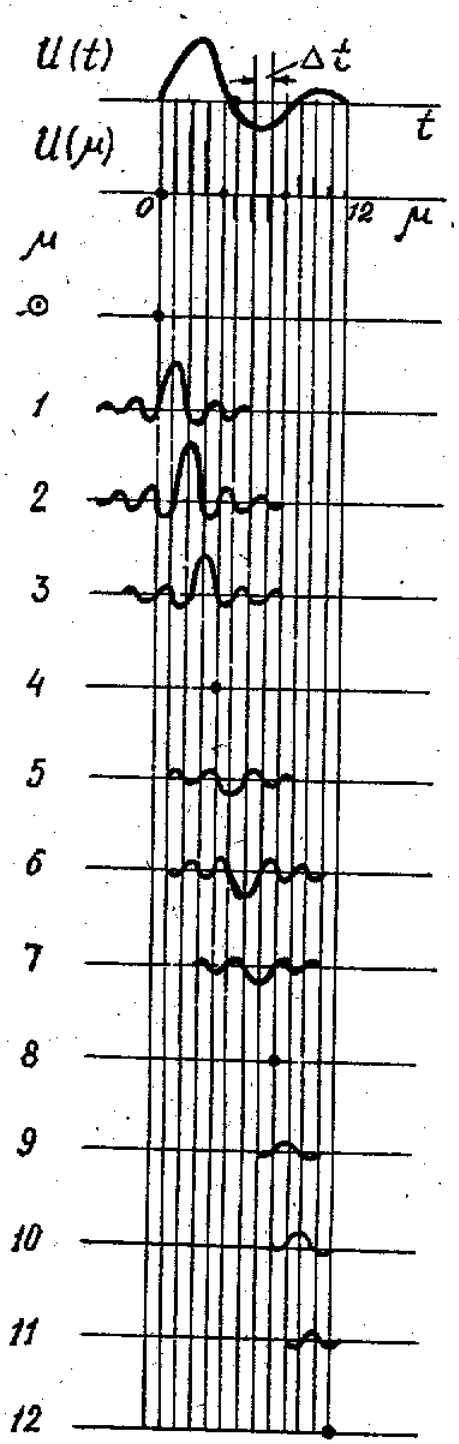


Рис. II-7. Разложение сигнала на сумму функций отсчета по теореме В.А.Котельникова

В этом случае разложение (II.47) оказывается справедливым и для исходного сигнала $U(t)$. Это означает, что сигнал $U(t)$ настолько простой формы, что полностью определяется своими отсчетными значениями $U(\mu\Delta t)$. Очевидно, что усложнение формы сигнала приведет к расширению спектра сигнала, увеличению $f_г$ и сокращению шага дискретизации Δt. Если спектр сигнала $U(t)$ шире ограничивающего прямоугольника, то $U_0(t)$ представляет собой результат идеальной низкочастотной фильтрации сигнала, синтезированного по искаженному алайсингом спектру, то есть характеризует искажения, вызванные явлением алайсинга.

Вследствие симметричности преобразования Фурье можно рассматривать парную теорему отсчетов для частотного спектра, соответствующего сигналу ограниченной длительности T. Тогда, поменяв в (II.47) местами частоту f и время t, можно записать выражение для частотного варианта теоремы отсчетов

$$\tilde{U}_0(f) = \sum_{\mu} \tilde{U}(\mu\Delta f)\,\frac{\sin \pi T(f-\mu\Delta f)}{\pi T(f-\mu\Delta f)}; \quad \Delta f \cdot T = 1. \qquad (II.49)$$

Можно также привести трактовку теоремы отсчетов в пространственно-волновом варианте. Пространственный сигнал $U(x)$ с ограниченным волновым спектром $|\varkappa| \le |\varkappa_2|$ может быть представлен разложением по функциям отсчета с амплитудами $U(\mu\Delta x)$, где $\Delta x = 1/2\,\varkappa_2$. Следовательно, в ограниченном диапазоне частоты, скорости и углов выхода волны достаточно иметь дискретные наблюдения волнового поля с шагом $\Delta x \le 1/2\,\varkappa_г$, чтобы полностью восстановить это сплошное поле.

Парный вариант этой теоремы для пространственных сигналов дает разложение волнового поля сейсмического сигнала по функциям отсчета при ограниченной протяженности пространственного сигнала $U(x)$.

Пространственно-волновой вариант теоремы отсчетов дает основание для правильного выбора шага пространственной дискретизации волнового поля (шага наблюдений Δx). Этот шаг должен

выбираться так, чтобы выполнялось условие $\Delta x \le 1/2\, æ_r$, где $æ_r = \frac{f_{max}}{V^*_{min}}$, то есть должен определяться максимальной частотой f_{max} и минимальной кажущейся скоростью V^*_{min} регистрируемых колебаний.

§ 3. Дискретное преобразование Фурье

I. Спектры дискретных сигналов

Преобразование Фурье строго применимо только к регулярным и сингулярным сплошным функциям, для которых возможна операция интегрирования. Для спектрального представления дискретных сигналов приходится прибегать к искусственным приемам, которые сводятся к представлению дискретных сигналов их сплошными моделями в виде функций с непрерывным аргументом, к которым применимо преобразование Фурье. Связь между сплошными функциями и их дискретными представлениями рассматривалась раньше при обсуждении вопросов дискретизации сигналов. Воспользуемся формулами отсчетной дискретизации (Ш.33) и (Ш.37). В выражении обычного преобразования Фурье сплошного сигнала заменим сигнал его дискретным представлением (Ш.33) и применим выражение (Ш.37). Тогда получим:

$$\tilde{u}_\Delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\, Kr(t-\mu\Delta t) e^{-j\omega t} dt = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} u_\Delta(\mu\Delta t) e^{-j\omega\mu\Delta t} \quad (Ш.50)$$

Полученное выражение примем за формальное определение частотного спектра дискретной функции, причем индекс Δ, символизирующий дискретность, обычно для простоты будем опускать.

Из (Ш.50) следует, что спектр дискретной функции с шагом дискретизации Δt является непрерывной периодической функцией с периодом по частоте (периодом) $F = 1/\Delta t$, а само выражение (Ш.50) представляет собой разложение периодической функции $\tilde{u}(\omega)$ в ряд Фурье с коэффициентами ряда $u_\Delta(\mu\Delta t) = \Delta t\, u(\mu\Delta t)$. Поэтому обратное преобразование записывается как обычное Фурье-преобразование периодической функции. В результате получаем пару преобразований Фурье дискретных сигналов $u_\Delta(\mu\Delta t)$ или разложение в ряд Фурье периодического спектра $\tilde{u}(f) = \tilde{u}(f+F)$

$$u_\Delta(\mu\Delta t) = \frac{1}{F}\int_F \tilde{u}(f) e^{j2\pi f\mu\Delta t} df \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \tilde{u}(f) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} u_\Delta(\mu\Delta t) e^{-j2\pi f\mu\Delta t} = Re\{\tilde{u}(f)\} + j\,Im\{\tilde{u}(f)\}, \quad Ш(51)$$

где $Re\{\tilde{u}(f)\} = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} u_\Delta(\mu\Delta t)\cos 2\pi f\mu\Delta t$

$$Im\{\tilde{u}(f)\} = -\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} u_\Delta(\mu\Delta t)\sin 2\pi f\mu\Delta t.$$

2. Основные свойства спектров дискретных сигналов

Основные свойства Фурье-спектров дискретных сигналов аналогичны рассмотренным выше в разделе II, § 2 свойствам спектров сплошных сигналов. Кроме отмеченных там общих свойств спектров Фурье, спектры дискретных функций обладают следующими специфическими свойствами:

а) спектры временных дискретных сигналов представляют последовательность дискрет этих сигналов $u_\Delta(\mu\Delta t)$, помноженных на функции смещения $e^{-j\omega\mu\Delta t}$, определяющих в частотной области их положение на оси времени;

б) спектры временных дискретных сигналов с шагом дискретизации Δt являются периодическими функциями частоты с периодом $F = 1/\Delta t$;

в) спектры дискретных временных сигналов зависят от частоты только через показатели степени функций смещения.

Поскольку дискретные и отсчетные ($u_\Delta(\mu\Delta t)$ и $u(\mu\Delta t)$) значения функции (Ш.36) отличаются только масштабным множителем Δt, в дальнейшем символ дискретности Δ опустим.

3. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

Аналогично применяемому понятию и термину "дискретное преобразование Лапласа" преобразование (Ш.51) – ряд Фурье – следовало бы назвать дискретным преобразованием Фурье. Однако в последнее время в связи с широким применением вычислительной техники под термином ДПФ понимается специальный вычислительный ва-

риант этого преобразования, в котором спектр дискретного сигнала также дискретизируется с целью его вычисления на ЭВМ. Предполагается, что сигнал ограничен во времени на интервале T, а его спектр – на интервале $F = 2f_2$ с граничными частотами $\pm f_2$. Это условие противоречиво и строго соблюдаться не может, так как ограниченная по длительности функция имеет бесконечную по частоте Фурье-трансформанту. Поэтому интервалы T и F выбирают такой протяженности, чтобы это условие выполнялось приближенно с достаточной точностью. Для этого дискретизация производится в соответствии с теоремой отсчетов, так что длительности трансформант T и F и шагов дискретизации Δt и Δf связаны соотношениями

$$T\Delta f = 1\ ;\quad F\Delta t = 1;$$
$$\frac{T}{\Delta t} = \frac{F}{\Delta f} = TF = \frac{1}{\Delta t\,\Delta f} = N, \qquad (\text{Ш}.52)$$

где N – число интервалов дискретизации, а

$N+1$ – число отсчетов (точек дискретизации) сигнала и спектра.

Таким образом, при одновременной дискретизации сигнала и спектра в соответствии с теоремой отсчетов числа отсчетов сигнала и спектра оказываются одинаковыми. Для дискретизации спектра по-прежнему воспользуемся соотношениями дискретизации (Ш.33) и (Ш.37). Тогда из (Ш.51) получим:

$$u(\mu\Delta t) = \frac{1}{F}\int_F \tilde{u}(f)e^{j2\pi f\mu\Delta t}Kr(f-n\Delta f)\,df =$$

$$= \frac{1}{F}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{u}(n\Delta f)e^{j2\pi n\Delta f\mu\Delta t}\int_{\Delta f}df = \frac{1}{F}\sum_{n=0}^{N-1}\Delta f\,u(n\Delta f)e^{j2\pi n\mu\Delta f\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{u}(n\Delta f)e^{j2\pi\frac{n\mu}{N}} \longleftrightarrow \tilde{u}(n\Delta f) =$$

$$= \sum_{\mu=0}^{N-1}u(\mu\Delta t)e^{-j2\pi\mu n\Delta f\Delta t} = \sum_{\mu=0}^{N-1}u(\mu\Delta t)e^{-j2\pi\frac{n\mu}{N}}. \qquad (\text{Ш}.53)$$

Эти формулы лежат в основе способов численного определения Фурье-трансформант. Разработаны алгоритмы так называемого "б ы с т р о г о п р е о б р а з о в а н и я Ф у р ь е" (БПФ), позволяющие производить вычисления преобразования Фурье наиболее экономным способом. Они широко освещены во многих монографиях и учебниках ([1], [7], [10], [15], [17] и др.).

§ 4. Представление сигналов в векторном пространстве сигналов

1. Понятие пространства сигналов

При описании совокупности элементов, обладающих некоторым общим свойством или признаком, часто оказывается удобным давать этому множеству элементов геометрическую интерпретацию. Тогда элементы множества рассматриваются как векторы в некотором векторном пространстве, размерность которого определяется структурой и свойствами элементов и может быть любой (произвольно большой). Векторным пространством в этом случае будет называться множество элементов, которое можно интерпретировать геометрически в виде векторов.

Дискретные сигналы удобно рассматривать в виде векторов в так называемом "пространстве сигналов", приняв их отдельные отсчетные значения за компонент вектора по осям некоторой многомерной системы координат. Например, если сигнал представлен двумя своими отсчетами: $u_1 = u(\Delta t)$ и $u_2 = u(2\Delta t)$ или тремя отсчетами $v_1 = v(\Delta t)$; $v_2 = v(2\Delta t)$ и $v_3 = v(3\Delta t)$, то их можно представить как вектора соответственно в двумерном пространстве (на плоскости) или в трехмерном пространстве (в объеме):

$$\bar{u} = \bar{i}\,u_1 + \bar{j}\,u_2,$$

$$\bar{v} = \bar{i}\, v_1 + \bar{j}\, v_2 + \bar{k}\, v_3 .$$

Здесь $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – общепринятые обозначения единичных координатных векторов в трехмерной векторной алгебре.

Двумерные и трехмерные вектора можно наглядно и просто изобразить на чертеже и мысленно представить на плоскости или в пространстве. Сейсмические сигналы характеризуются гораздо большим числом отсчетов. Например, одна сейсмическая трасса длительностью в 1 с с шагом дискретизации 2 мс содержит 500 отсчетов. Поэтому сейсмическая информация представляется в многомерном пространстве, наглядное геометрическое изображение которого оказывается невозможным. Остается возможность его аналитического описания в виде многомерных векторов.

$$\bar{u} = \sum_{\mu=1}^{n} u_\mu \bar{e}_\mu = \sum_{\mu=1}^{n} u(\mu \Delta t)\, \bar{e}_\mu . \qquad (\text{II}.54)$$

Здесь $u_\mu = u(\mu \Delta t)$ – отсчеты сигнала,

$\bar{e}_\mu$ – единичные координатные вектора.

Рассматривая свойства и преобразования сигналов, интерпретируемых как многомерные вектора, можно пользоваться мысленной аналогией между трехмерными и многомерными объектами (векторами), формально увеличивая размерность пространства с $n = 3$ до нужного числа $n > 3$. Различные сигналы из данного множества соответствуют различным векторам в пространстве или точкам пространства, определяемым концами этих векторов.

2. Метрика векторного пространства

Векторное пространство характеризуется своими р а з м е р н о с т ь ю и м е т р и к о й [17]. Размерность векторного пространства сигналов определяется необходимым числом отсчетов их аргумента для разложения сигнала-вектора по осям координат и осуществления необходимых операций с сигналами. При свертке или корреляции двух сигналов один из них должен целиком переместиться относительно другого сигнала. Для этой операции необходимое число отсчетов должно быть не менее суммы отсчетов коррелируемых

сигналов, что определяет необходимую для этой операции размерность векторного пространства.

Метрикой пространства называется способ измерения и сравнения между собой элементов этого пространства. Оценка величины (размера) элемента называется его н о р м о й. Отличие двух элементов (векторов) векторного пространства определяется "расстоянием" между элементами (точками концов векторов). Способ оценки этого расстояния называется м е т р и к о й пространства. Норма равна расстоянию элемента (конца вектора) от начала координат, то есть от нуля. Метрика и норма обозначаются двойными вертикальными черточками, так что $\|\bar{u}_k\|$ и $\|\bar{u}_e\|$ – нормы соответствующих векторов, а $\|\bar{u}_k - \bar{u}_e\|$ – расстояние между ними.

Пространство, в котором определены понятия нормы и метрики, называется нормированным метрическим пространством. Норма и метрика могут определяться по-разному, но существуют некоторые требования к определению нормы любого вида как характеристики величины элемента, и метрики, как оценки различия между элементами пространства или точками пространства (концами векторов).

Н о р м о й вектора $\bar{u}$ называется неотрицательное число $\|\bar{u}\|$, удовлетворяющее следующим требованиям (аксиомам [6], [17], [18] и др.):

а) $\|\bar{u}\| > 0$ при $\bar{u} \neq 0$ и $\|0\| = 0$;

б) $\|\alpha \bar{u}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{u}\|$ при любом α; (II.55)

в) $\|\bar{u}_1 + \bar{u}_2\| \leq \|\bar{u}_1\| + \|\bar{u}_2\|$ – неравенство треугольника.

Аналогичные требования предъявляются к метрике, характеризующей расстояния между точками пространства.

В технических приложениях для оценки различных свойств сигналов находят применение три способа задания нормы пространства сигналов ([17], [18] и др.).

I способ $\|\bar{u}\|_I = \max |u(\mu)|$. (II.56)

Норма равна значению абсолютной величины максимальной компоненты вектора, то есть максимальному отсчетному значению (амплитуде) дискретизированного сигнала. В данном случае норма характеризует амплитудный ("динамический") диапазон сигнала.

II способ

$$\|\bar{u}\|_{II} = \sum_{\mu=1}^{n} |u(\mu)|. \qquad (III.57)$$

Норма равна сумме абсолютных значений компонент вектора, то есть площади сигнала или интеграла его модуля. Этот способ нормирования пространства применяется в теории кодирования сигналов для оценки расстояния между ними по кратчайшей (геодезической) ломаной линии, соответствующей применяемому дискретному коду. Для представления сигналов в нормированном пространстве данного типа сигналы должны быть абсолютно интегрируемы, то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(t)|\,dt < \infty .$$

Это условие обеспечивает сходимость (конечность) суммы (III.57).

III способ

$$\|\bar{u}\|_{III} = \sqrt{\sum_{\mu=1}^{n} |u(\mu)|^2}. \qquad (III.58)$$

Норма представляет собой длину (модуль), определяемую по многомерной теореме Пифагора. Способ используется в спектральной теории сигналов и характеризует их энергию. Квадрат нормы представляет собой сумму квадратов дискрет дискретизированного сигнала или интегральную сумму квадрата амплитуд сплошного сигнала, то есть пропорционален энергии сигнала. Этот способ пригоден для оценки функций с интегрируемым квадратом, что соответствует реальным физическим сигналам с конечной энергией.

Аналогичным образом вводятся три типа метрик пространства. Поскольку данное пособие посвящено основам спектральной теории сигналов, то в дальнейшем будет использована только метрика третьего типа, основанная на теореме Пифагора. Для краткости будем в дальнейшем ее называть "энергетической" метрикой.

3. Евклидово векторное пространство

Пространство, в котором определена операция скалярного произведения векторов, называется эвклидовым пространством. Для n -мерных векторных пространств сигналов скалярное произведение двух векторов

$$\bar{u} = \sum_{k=1}^{n} u_k \bar{e}_k \quad \text{и} \quad \bar{v} = \sum_{k=1}^{n} v_k \bar{e}_k$$

определяется следующим выражением:

$$(\bar{u}\bar{v}) = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k = |\bar{u}|\cdot|\bar{v}| \cos(\widehat{uv}). \qquad (III.59)$$

Здесь $|\bar{u}|$ и $|\bar{v}|$ – модули перемножаемых векторов, а $\widehat{uv}$ – угол между этими векторами.

Из формулы скалярного произведения (III.59) следуют конкретные выражения нормы и метрики евклидова пространства. Положив $\bar{u} = \bar{v}$, получаем определение нормы по теореме Пифагора:

$$(\bar{u}\bar{u}) = \sum_{k=1}^{n} u_k^2 = \|\bar{u}\|_{III}^2 = |\bar{u}|^2. \qquad (III.60)$$

Если в (III.59) подставить $\bar{u} = \bar{v} - \bar{w}$, то получим определение метрики

$$(\bar{u}\bar{u}) = \sum_{k=1}^{n} (\bar{v}_k - \bar{w}_k)^2 = \|\bar{v} - \bar{w}\|^2. \qquad (III.61)$$

Таким образом, определение в векторном пространстве операции скалярного произведения равносильно принятию в нем энергетической (пифагоровой) метрики. Евклидово n -мерное пространство обладает следующими специфическими свойствами.

I. Теорема о параллелограмме. Сумма квадратов диагоналей векторного параллелограмма равна удвоенной сумме квадратов сторон:

$$|\bar{u}+\bar{v}|^2+|\bar{u}-\bar{v}|^2=2(|\bar{u}|^2+|\bar{v}|^2). \qquad (Ш.62)$$

2. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца. Из скалярного произведения векторов (Ш.59) следует:

$$(\bar{u}\bar{v}) \le |\bar{u}|\cdot|\bar{v}|, \qquad (Ш.63)$$

так как $\cos(\widehat{uv}) \le 1$.

3. Неравенство треугольника

$$|\bar{u}+\bar{v}| \le |\bar{u}|+|\bar{v}|. \qquad (Ш.64)$$

Модуль суммы двух векторов (сторона треугольника) меньше суммы модулей этих векторов (суммы двух других сторон треугольника).

4. Представление интегральных преобразований в евклидовом пространстве сигналов

Дискретное представление интегрального преобразования. Все интересующие нас преобразования сигналов сводятся к схеме интегральных преобразований, рассмотренных в главе П. Здесь рассмотрим дискретное моделирование интегральных преобразований, лежащих в основе вычислительных схем и алгоритмов.

Рассмотрим линейное векторное преобразование сигнала $u(t)$ с ядром преобразования $h(t,\xi)$. Функция $h(t,\xi)$ описывает свойства преобразователя, то есть является характеристикой системы, преобразующей входной сигнал $u(t)$ в выходной сигнал $W(t)$. В дальнейшем будем ее называть системной функцией. Изменение параметра ξ системной функции приводит к изменению результата преобразования, так что на выходе системы получается выходной сигнал в виде функции аргумента ξ.

$$W(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t,\xi)\,u(t)\,dt. \qquad (Ш.65)$$

Физическая природа переменных t и ξ может быть как одинаковой, так и различной, Например, t и ξ могут быть временем, как в преобразовании типа свертки (преобразования Гильберта, Френеля и др.), либо t может быть временем, а ξ – комплексной или мнимой частотой, как в преобразованиях Лапласа или Фурье.

В результате дискретизации подинтегральной функции с шагами Δt и $\Delta\xi$ интеграл (Ш.65) перейдет в сумму

$$W(k\Delta\xi)=\sum_{\mu=1}^{n} h(k\Delta\xi;\mu\Delta t)\,u(\mu\Delta t)=$$

$$=h_{k_1}u_1+h_{k_2}u_2+\ldots+h_{k_n}u_n=\sum_{\mu} h_{k\mu}u_{\mu}. \qquad (Ш.66)$$

Если представить системную функцию $h_{k\mu}$ и сигнал u_{μ} в виде векторов в пространстве сигналов, то нетрудно заметить, что дискретный аналог преобразования (Ш.66) представляет собою скалярное произведение этих векторов.

$$W_k=(\bar{h}_{k\mu}\cdot\bar{u}_{\mu}). \qquad (Ш.67)$$

Изменение параметра ξ приводит к изменению номера (индекса) k, в результате чего на выходе преобразователя образуется дискретная скалярная функция W_k. При каждом значении параметра ξ в (Ш.65) или индекса k в (Ш.66) получается линейное разностное уравнение, так что при изменении k от I до m образуется система разностных уравнений вида:

$$\begin{aligned}
&h_{11}u_1+h_{12}u_2+\ldots+h_{1\mu}u_{\mu}+\ldots+h_{1n}u_n=W_1\\
&h_{21}u_1+h_{22}u_2+\ldots+h_{2\mu}u_{\mu}+\ldots+h_{2n}u_n=W_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&h_{k1}u_1+h_{k2}u_2+\ldots+h_{k\mu}u_{\mu}+\ldots+h_{kn}u_n=W_k\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \qquad (Ш.68)$$

. . . . . .

$$h_{m1}u_1 + h_{m2}u_2 + \ldots + h_{m\mu}u_\mu + \ldots + h_{mn}u_n = W_n .$$

Как известно из теории матриц, подобную систему уравнений можно записать в матричной форме ([2],[6] и др.).

$$HU = W \qquad (Ш.69)$$

где

$$H = \begin{vmatrix} h_{11}\, h_{12} \ldots\ldots h_{1n} \\ h_{21}\, h_{22} \ldots\ldots h_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ h_{m1}\, h_{m2} \ldots\ldots h_{mn} \end{vmatrix} = |h_{k\mu}| \text{ – прямоугольная } (m \times n) \text{ матрица}$$

$$U = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{vmatrix}$$ – матрица первого порядка (m xI) или вектор-столбец входного сигнала

$$W = \begin{vmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_m \end{vmatrix}$$ – матрица первого порядка (m xI) или вектор-столбец выходного сигнала

Здесь нет возможности напоминать основы матричного исчисления, так что ограничимся лишь некоторыми замечаниями, имеющими непосредственное отношение к излагаемым вопросам. Система уравнений (Ш.68), моделирующих интегральное преобразование в дискретном виде, служит обоснованием введенного в матричном исчислении правила умножения матриц. В теории матриц рассматриваются прямоугольные матрицы и матрицы-столбцы, а основной операцией является их перемножение. Операция перемножения матриц не обладает свойством коммутативности, так что различает операции "умножения справа" и "умножения слева". Стандартной операцией является умножение прямоугольной матрицы ($m \times n$) справа на матрицу-столбец (m xI), в результате чего получается матрица-столбец (m xI). Алгоритм операции умножения определяется выражениями (Ш.68) и сводится к вычислению суммы результатов последовательного умножения элементов каждой строки слева направо прямоугольной матрицы H_μ на элементы матрицы-столбца U_k сверху вниз. Результатом является матрица-столбец W_m. Очевидно, что для осуществления умножения число столбцов прямоугольной матрицы должно равняться числу элементов матрицы-столбца. Это же правило перемножения распространяется и на перемножение двух прямоугольных матриц, у которых для выполнения операции перемножения необходимо равенство числа столбцов левой матрицы числу строк правой матрицы.

Важную роль в теории матриц играет операция "транспонирования", в результате которой столбцы матрицы становятся строками, а строки – столбцами. Транспонированную матрицу обычно обозначают штрихом или символом " T". Например,

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad A^T = A' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} . \qquad (Ш.70)$$

Матрица – строка (горизонтальная матрица первого порядка) в матричном исчислении играет подчиненную роль и обычно рассматривается как результат транспонирования матрицы-столбца. Для комплексных матриц операция транспонирования обычно дополняется сопряжением ее комплексных элементов. Такие матрицы называются сопряженными-транспонированными (иногда – сопряженными по Эрмиту).

<u>Дискретное представление преобразования свертки</u>. Наибольший интерес для дальнейшего представляет интегральное преобразование свертки, в котором t и ξ – переменные одинаковой размерности образуют разность ($\xi - t$). В дискретном варианте этому соответствуют $\xi = k\Delta t$ и $t = \mu\Delta t$ и разность номеров отсчетов (индексов) – ($k - \mu$) Δt . Тогда дискретное преобразование свертки можно записать в виде скалярного произведения векторов и в виде произведения соответствующих матриц

$$W_k = (\bar{h}_{k-\mu} \cdot \bar{u}_\mu) = \sum_\mu h(k-\mu)\, u(\mu). \qquad (\text{III}.71)$$

Изменение индекса k (номера отсчета выходного сигнала W_k) приводит к изменению значения номеров компонент вектора системной функции $\bar{h}$, вследствие чего он двигается в пространстве сигналов. В развернутой матричной форме выражение дискретной свертки для пятиэлементных матриц записывается в таком виде:

$$H_{k-\mu}\, U_\mu = W_k \qquad (\text{III}.72)$$

$$\begin{array}{c|ccccc} k \backslash \mu & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline -2 & h_0 & h_{-1} & h_{-2} & h_{-3} & h_{-4} \\ -1 & h_1 & h_0 & h_{-1} & h_{-2} & h_{-3} \\ 0 & h_2 & h_1 & h_0 & h_{-1} & h_{-2} \\ 1 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 & h_{-1} \\ 2 & h_4 & h_3 & h_2 & h_1 & h_0 \end{array} \times \begin{vmatrix} u_{-2} \\ u_{-1} \\ u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} h_0 u_{-2} + h_{-1} u_{-1} + h_{-2} u_0 + h_{-3} u_1 + h_{-4} u_2 \\ h_1 u_{-2} + h_0 u_{-1} + h_{-1} u_0 + h_{-2} u_1 + h_{-3} u_2 \\ h_2 u_{-2} + h_1 u_{-1} + h_0 u_0 + h_{-1} u + h_{-2} u_2 \\ h_3 u_{-2} + h_2 u_{-1} + h_1 u_0 + h_0 u_1 + h_{-1} u_2 \\ h_4 u_{-2} + h_3 u_{-1} + h_2 u_0 + h_1 u_1 + h_0 u_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} W_{-2} \\ W_{-1} \\ W_0 \\ W_1 \\ W_2 \end{vmatrix}$$

Операция свертывания коммутативна относительно подынтегральных функций, то есть любую из них можно принять за неподвижную (пассивную), а другую – за смещаемую и переворачиваемую (активную). Обычно в качестве активной принимается системная функция, описывающая свойства преобразования.

Из приведенной схемы (III.72) видно, что в процедуре свертки матрица преобразования H (активная функция) состоит из одинаковых строк, сдвинутых взаимно на один индекс, что соответствует сдвигу системной функции на один шаг дискретизации. Нумерация индексов в строках матрицы преобразования свидетельствует о том, что системная функция записана в обратном времени (перевернута), как и следует ей быть в преобразовании свертки (II.78) и (III.71).

Процедура свертки (III.72) иллюстрируется рис. III-8,а, из которого видно, что с возрастанием K (аргумента входного сигнала) перевернутая системная функция двигается слева направо мимо сигнала $u(t)$.

Рассмотрим интегральную операцию корреляции сигнала $u(t)$ с системной функцией $h(t)$. Она отличается от рассмотренной выше операции свертки тем, что системная функция не переворачивается и оба сомножителя под интегралом (II.82) берутся в своем естественном времени. В дискретном варианте операцию корреляции также можно представить в виде скалярного произведения векторов или в виде произведения соответствующих матриц.

$$W_k = (\bar{h}_{\mu-k}\, \bar{u}_\mu) = \sum_\mu h(\mu-k)\, u(\mu). \qquad (\text{III}.73)$$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
k \backslash \mu & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
-2 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \\
-1 & h_{-1} & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\
0 & h_{-2} & h_{-1} & h_0 & h_1 & h_2 \\
+1 & h_{-3} & h_{-2} & h_{-1} & h_0 & h_1 \\
+2 & h_{-4} & h_{-3} & h_{-2} & h_{-1} & h_0
\end{array}
\times
\begin{array}{c}
u_\mu \\
\hline
u_{-2} \\ u_{-1} \\ u_0 \\ u_1 \\ u_2
\end{array}
=
\begin{array}{c}
W_k \\
\hline
W_0 \\ W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4
\end{array}
=
$$

$$
= \begin{vmatrix}
h_0 u_{-2} + h_1 u_{-1} + h_2 u_0 + h_3 u_1 + h_4 u_2 \\
h_{-1} u_{-2} + h_0 u_{-1} + h_1 u_0 + h_2 u_1 + h_3 u_2 \\
h_{-2} u_{-2} + h_{-1} u_{-1} + h_0 u_0 + h_1 u_1 + h_2 u_2 \\
h_{-3} u_{-2} + h_{-2} u_{-1} + h_{-1} u_0 + h_0 u_1 + h_1 u_2 \\
h_{-4} u_{-2} + h_{-3} u_{-1} + h_{-2} u_0 + h_{-1} u_1 + h_0 u_2
\end{vmatrix}. \qquad (\text{Ш}.74)
$$

Из сравнения матриц преобразований в операциях свертки (Ш.72) и корреляции (Ш.73) следует, что матрицы преобразования (системные матрицы) в них взаимно транспонированы. Таким образом, перевертывание системной функции в обратное время приводит к транспонированию соответствующей матрицы преобразования. Естественно считать прямую матрицу соответствующей активной функции (в нашем случае – системной функции) в прямом времени, а транспонированную матрицу, соответствующей функции в обратном времени. Поэтому можно считать, что в матричной форме преобразование свертки определяется транспонированной матрицей преобразования.

В то же время операция корреляции определяется матрицей преобразования в прямом, не транспонированном виде.

Дискретное представление преобразования Фурье. Рассмотрим с векторной точки зрения другой важный тип интегрального преобразования – преобразование Фурье. Дискретное преобразование Фурье было рассмотрено выше и определялось соотношением (Ш.53). Очевидно, что алгоритмы анализа (левая часть (Ш.53)) и синтеза (правая часть (Ш.53)) имеют одинаковую структуру, так что достаточно рассмотреть какую-либо одну из этих спектральных операций. Для определенности рассмотрим операцию анализа, то есть определение спектра дискретного сигнала. Сомножители в сумме (Ш.53) можно представить в виде скалярного произведения векторов в пространстве сигналов.

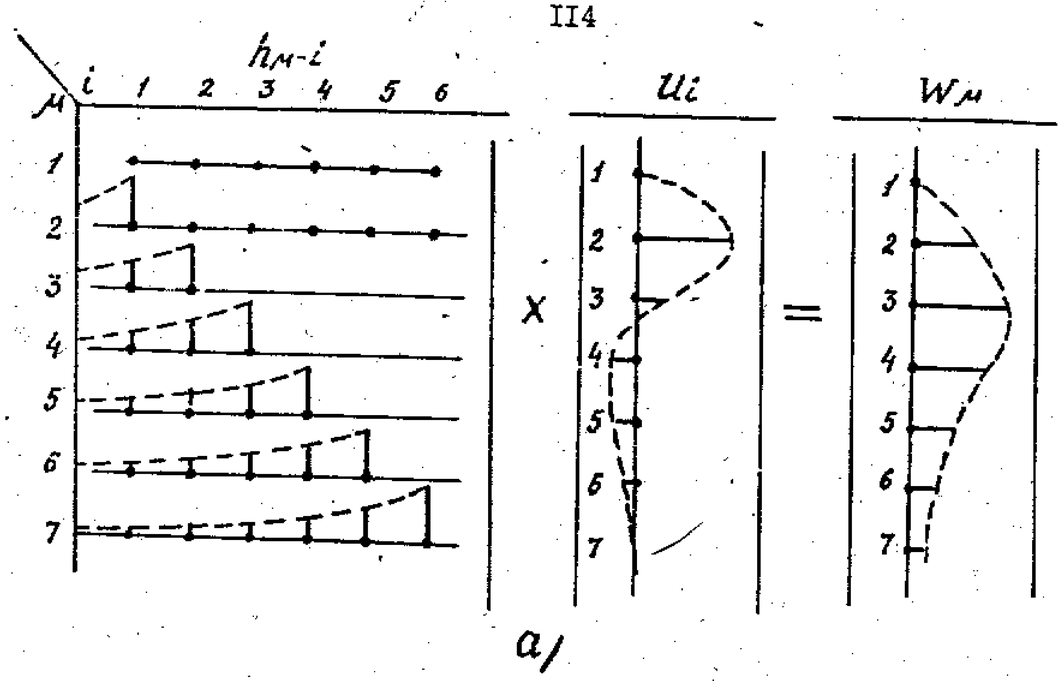
$$
\bar{u}_\mu = \bar{u}(\mu\Delta t) \quad \text{и} \quad \bar{E}_\mu = \bar{e}^{-j2\pi n\Delta f \mu\Delta t} = \bar{e}^{-jn\Delta\omega\mu\Delta t}
$$

$$
\tilde{u}(n\Delta\omega) = (\bar{E}_{n\mu}\,\bar{u}_\mu) = \sum_\mu e^{-jn\Delta\omega\mu\Delta t}\cdot \bar{u}_\mu =
$$

$$
= \sum_\mu \cos n\Delta\omega\mu\Delta t\cdot u_\mu - j\sum_\mu \sin n\Delta\omega\Delta t\cdot u_\mu . \qquad (\text{Ш}.75)
$$

В данном варианте представления интегрального преобразования скалярным произведением векторов "активный" сомножитель не вращается в пространстве сигналов, как в преобразовании свертки, а представляет собой гармонику, меняющую свое растяжение в зависимости от дискретного изменения ее частоты $n\Delta\omega$. Это – комплексная гармоника, вследствие чего и само выражение (Ш.75) распадается на два скалярных произведения – действительную и мнимую части результирующего комплексного спектра. Эту комплексную матрицу можно представить в виде суммы двух матриц, соответствующих действительной и мнимой частям комплексной гармоники.

В развернутой матричной форме рассматриваемое спектральное преобразование выглядит следующим образом:



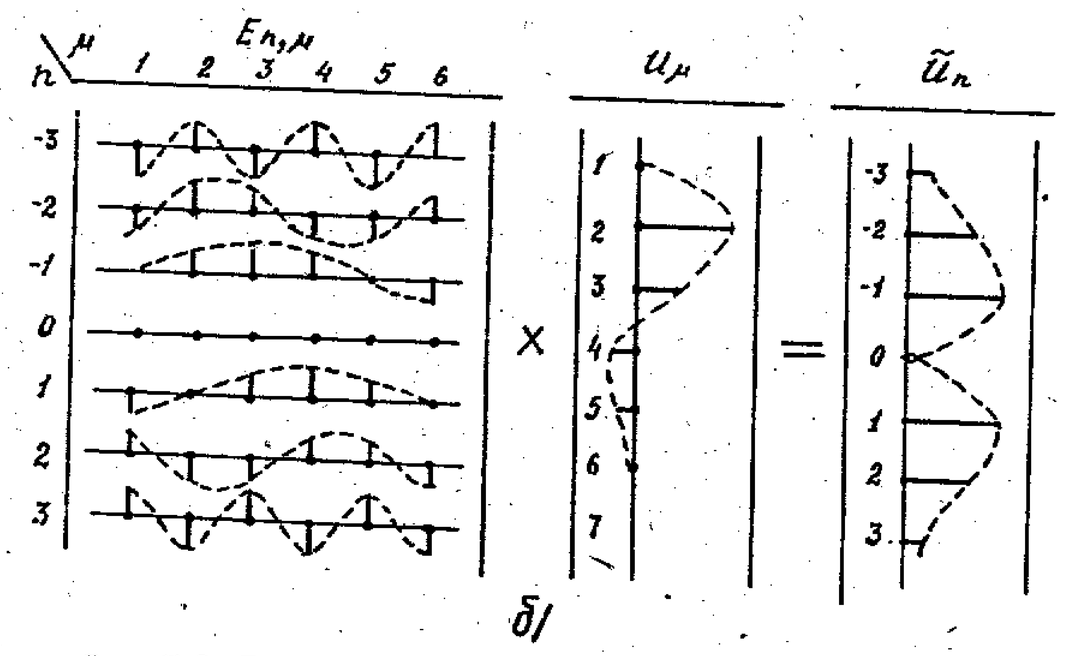


Рис. III-8. Перемножение матриц при осуществлении преобразований:

а) операция свертывания (смещение ядра преобразования),
б) операция частотного анализа (растяжение ядра преобразования)

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
n \backslash \mu & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
\hline
-1 & E_{-21} & \cdots & E_{-23} & \cdots & E_{-25} \\
-2 & E_{-11} & \cdots & \cdots & \cdots & E_{-15} \\
-3 & E_{01} & \cdots & \cdots & \cdots & E_{05} \\
-4 & E_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & E_{15} \\
-5 & E_{21} & \cdots & \cdots & \cdots & E_{25}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
u_\mu \\
\hline
\begin{vmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{vmatrix}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\tilde{u}_n \\
\hline
\begin{vmatrix} \tilde{u}_{-2} \\ \tilde{u}_{-1} \\ \tilde{u}_0 \\ \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{vmatrix}
\end{array}.
$$

На рис. III-8,б приведена графическая модель произведения матриц, соответствующая вычислению действительной части частотного спектра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бат М. Спектральный анализ в геофизике. - М.: Недра, 1980.

2. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. - М.: Наука, 1980.

3. Гарднерм М.Ф.,Бернс Дж.Л. Переходные процессы в линейных системах. - М.: Физматгиз, 1961.

4. Гудмен Дж. Введение в Фурье-оптику. - М.: Мир, 1970.

5. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и " Z " -преобразования. - М.: Наука, 1971.

6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. - М.: Наука, 1974.

7. Канасевич Э.Р. Анализ временных последовательностей в геофизике. - М.: Недра, 1985.

8. Кулханек О. Введение в цифровую фильтрацию в геофизике. - М.: Недра, 1981.

9. Конторович М.И. Операционное исчисление и процессы в электрических цепях. - М.: Наука, 1964.

10. Козлов Е.А., Гогоненков Г.Н. и др. Цифровая обработка сейсмических данных. - М.: Недра, 1973.

11. Кондратьев И.К. Линейные обрабатывающие системы в сейсморазведке. - М.: Недра, 1976.

12. Гольдин С.В. Линейные преобразования сейсмических сигналов. - М.: Недра, 1974.

13. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. - М.: Мир, 1982.

14. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. - М.: Мир, 1982.

15. Рапопорт М.Б. Вычислительная техника в полевой геофизике. - М.: Недра, 1984.

16. Сороко Л.М. Основы голографии и когерентной оптики. - М.: Наука, 1971.

17. Трахтман А.М. Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов. - М.: Сов. радио, 1972.

18. Френкс Л. Теория сигналов. - М.: Радио, 1974.

19. Харкевич А.А. Спектры и анализ. Избранные труды, Т. 2. - М.: Наука, 1973.

20. Худзинский Л.Л. О частотно-фазовом анализе сейсмических волн. Сб. статей."Динамика земной коры". ИФЗ им.О.Ю.Шмидта АН СССР. - М.: Наука, 1965.

21. Шериф Р., Гелдарт Л. Сейсморазведка, т. 2. - М.: Мир, 1987.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Предисловие 3

Глава I. Основные понятия теории линейных преобразований сигналов 4

§ I. Основные свойства линейных преобразований . . . 5

I. Свойство аддитивности 5

2. Свойство однородности 6

3. Следствия 6

§ 2. Алгебраические действия с линейными преобразованиями 7

I. Сложение линейных преобразований 7

2. Умножение линейных преобразований 8

3. Комбинации линейных преобразований 9

§ 3. Основные виды линейных операций . . . . . IO

I. Пропорциональность и линейные комбинации . . IO

2. Интегральное преобразование II

3. Дифференциальное преобразование II

4. Преобразование сдвига I2

5. Преобразование растяжения и сжатия I2

§ 4. Основы теории спектральных преобразований . . . I2

I. Принцип наложения (суперпозиции) I2

2. Понятие о спектральном преобразовании . . . I3

3. Основные типы спектральных преобразований. . I6

4. Обобщенное преобразование Фурье I8

Глава II. Основы теории частотных и волновых спектров. . 20

§ I. Основы теории преобразования Фурье 20

I. Понятие о частотных и волновых спектрах . . 20

2. Периодические сигналы. Ряды Фурье. Дискретные спектры 22

3. Комплексная форма ряда Фурье. Комплексный дискретный спектр 28

4. Импульсные сигналы. Интеграл Фурье. Сплошные спектры 31

5. Комплексный сплошной спектр импульсного сигнала 34

Стр.

§ 2. Основные свойства частотных спектров 38

I. Симметрия преобразования Фурье 38

2. Симметрия компонент частотного спектра действительного сигнала 38

3. Начальные значения сигнала и частотой спектра 39

4. Амплитудно-частотный спектр как огибающая модулей реальной и мнимой частей спектра . . . 40

5. Связь между действительной и мнимой частями спектра каузального сигнала 40

6. Спектры четных и нечетных сигналов 4I

7. Спектры комплексных сигналов 45

§ 3. Теоремы о преобразовании сигналов и спектров. . 48

I. Теорема о линейности спектрального преобразования 48

2. Теоремы о смещениях сигнала во времени и спектра по частоте 49

3. Теоремы о дифференцировании сигнала и спектра 52

4. Теоремы об интегрировании сигнала и спектра . 56

5. Теорема изменения масштабов сигнала и спектра 58

6. Теорема о спектре сигнала в обратном времени 60

7. Теоремы о произведении сигналов и спектров. . 60

8. Операции свертывания и корреляции 62

9. Теорема энергий 67

Глава III. Сингулярные сигналы и спектры 68

§ I. Основные сведения о сингулярных функциях 68

I. Понятие сингулярной функции 68

2. Единичные импульсы Дирака и Кронекера 79

Свойства единичного импульса Дирака 70

Спектр импульса Дирака 72

Свертка с производными импульса Дирака . . . 73

Импульс Дирака от сложного аргумента 74

Регулярные модели импульса Дирака 75

Импульс Кронекера 75

3. Единичная и знаковая функции 76

Определение и свойства единичной и знаковой функций 76

Стр.

Спектр единичной функции 79
Спектры знаковой функции и постоянной величины 8I
Регулярные модели единичной и знаковой функций 8I
4. Прямоугольная функция 83
Определение и свойства прямоугольной функции 83
Спектр прямоугольной функции 84

§ 2. Спектральная теория дискретизации функций . . . 85
I. Дискретизация отсчетными и дискретными значениями 85
2. Спектр эквидистантной последовательности импульсов Кронекера 88
3. Спектр дискретизированного сигнала 90
4. Теорема отсчетов Уиттекера-Котельникова . . 92

§ 3. Дискретное преобразование Фурье 98
I. Спектры дискретных сигналов 98
2. Основные свойства спектров дискретных сигналов 99
3. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) 99

§ 4. Представление сигналов в векторном пространстве сигналов . . . . . IOI
I. Понятие пространства сигналов . . . . . IOI
2. Метрика векторного пространства IO2
3. Евклидово векторное пространство IO5
4. Представление интегральных преобразований в евклидовом пространстве сигналов IO6
Дискретное представление интегрального преобразования IO6
Дискретное представление преобразования свертки IO9
Дискретное представление преобразования Фурье II3

Литература II6

1989, поз. 12

Ю. В. Напалков, Л. А. Сердобольский

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И СИСТЕМЫ В ГЕОФИЗИКЕ

Часть I.

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Редактор И. А. Исакова
Корректор И. М. Худякова

дписано в печать 27.05.89. Л-19654. Тираж 200 экз. Уч.-изд.л. 7,2. Формат ×90/16. Заказ 270. Цена 30 коп.

Московский институт нефти и газа им. И. М. Губкина
117917, ГСП-1, Ленинский просп., д. 65

Отдел оперативной полиграфии МИНГ им. И. М. Губкина

Ц.3 №1