

61.84-1/1982-3

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн

На правах рукописи

УДК 550.382



СПИЧАК Вячеслав Валентинович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В  
ТРЕХМЕРНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

Специальность - 01.04.12 - Геофизика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

доктор физико-математических наук

ИЦАНОВ Михаил Семенович

Москва - 1983

О Г Л А В Л Е Н И Е

	стр.
Введение.....	6
Глава I. Современные методы моделирования электромагнитных полей в трехмерно-неоднородных средах (обзор).....	14
I.1. Математическое и физическое моделирование электромагнитных полей.....	14
I.2. Постановка задачи математического моделирования...	17
I.2.1. Модели среды и неоднородности.....	18
I.2.2. Модель источника поля.....	19
I.2.3. Основные предположения и уравнения поля.....	21
I.3. Сравнительный анализ методов численного моделирования на ЭВМ.....	22
I.3.1. Методы интегральных уравнений.....	22
I.3.2. Методы дифференциальных уравнений.....	28
I.3.3. Гибридные схемы.....	31
I.3.4. Другие подходы.....	33
Глава II. Применение метода баланса для численного моделирования электромагнитных полей.....	36
2.1. Постановка краевой задачи.....	37
2.2. Краевые условия и выбор границ области моделирования.....	41
2.3. Аппроксимация уравнения и краевых условий.....	44
2.4. Решение системы линейных алгебраических уравнений на ЭВМ.....	46
2.5. Критерии правильности полученных результатов.....	47

	стр.
Глава III. Интегральные представления электромагнитных полей в неоднородных средах; интегральные краевые ус- ловия.....	49
3.1. Обобщенные интегральные формулы для неоднородной среды.....	49
3.1.1. Постановка задачи.....	49
3.1.2. Электромагнитные тензоры Грина и их свойства...	50
3.1.3. Формулы Стреттона-Чу для неоднородной среды....	52
3.1.4. Формулы Стреттона-Чу для однородной среды.....	53
3.2. Интегралы типа Стреттона-Чу в неоднородной среде и их свойства.....	58
3.2.1. Определения.....	58
3.2.2. Свойства интегралов типа Стреттона-Чу.....	59
3.3. Разделение электромагнитных полей в горизонтально- слоистой среде.....	67
3.3.1. Постановка задачи.....	68
3.3.2. Применение интегралов типа Стреттона-Чу для разделения электромагнитных полей в горизон- тально-слоистой среде.....	70
3.4. Построение интегральных краевых условий для векто- ров поля.....	74
3.4.1. Интегральные соотношения между компонентами электромагнитного поля.....	74
3.4.2. Применение интегральных краевых условий в гиб- ридной схеме моделирования.....	76
Глава IV. Асимптотические краевые условия.....	78
4.1. Связь между интегральными и асимптотическими краевы- ми условиями.....	78
4.2. Постановка задачи.....	81

	стр.
4.3. Асимптотические представления трехмерных электрических полей.....	85
4.4. Трехмерные обобщенные асимптотические краевые условия.....	94
Глава V. Численная реализация алгоритма моделирования электромагнитных полей.....	101
5.1. Конечно-разностная аппроксимация уравнения и краевых условий.....	101
5.1.1. Дискретизация области моделирования.....	101
5.1.2. Приближенные формулы численного дифференцирования и интегрирования.....	104
5.1.3. Оценка точности аппроксимации.....	111
5.2. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом блочной верхней релаксации.....	121
5.2.1. Свойства матрицы.....	121
5.2.2. Достаточные условия сходимости итерационного процесса.....	127
5.2.3. Алгоритм выбора параметров пространственной сетки.....	129
5.2.4. Критерий останова итерационного процесса и контроль точности моделирования.....	131
Глава VI. Пакет программ FDM3D для численного моделирования трехмерных электромагнитных полей..	135
6.1. Назначение пакета.....	135
6.2. Технические характеристики и требования к используемой ЭВМ.....	135
6.3. Общая характеристика программного комплекса.....	135
6.3.1. Основные особенности численного алгоритма...	135
6.3.2. Минимизация времени счета.....	136

	стр.
6.3.3. Использование оперативной памяти ЭВМ.....	136
6.3.4. Тестирование исходных данных.....	137
6.3.5. Эксплуатация комплекса.....	137
6.4. Функции пакета FDM3D и используемые алгоритмы.....	138
Глава VII. Результаты анализа трехмерных электромагнитных полей с помощью пакета программ FDM3D .....	148
7.1. Сравнительная оценка эффективности применения метода интегральных уравнений и метода баланса.....	148
7.2. Тестирование пакета.....	155
7.2.1. Сравнение с аналитическим решением для шара.....	156
7.2.2. Сравнение результатов, полученных с помощью метода интегральных уравнений и метода баланса .	156
7.3. Анализ эффективности применения асимптотических краевых условий.....	161
7.4. Моделирование структуры типа "остров".....	161
<b>З а к л ю ч е н и е</b> .....	169
Приложение I. Электромагнитные функции Грина для неоднородных сред и их свойства.....	171
П I.1. Уравнения поля.....	171
П I.2. Лемма Лоренца для неоднородной среды.....	173
П I.3. Соотношения взаимности.....	175
П I.4. Интегральные представления электрического и магнитного полей.....	179
П I.5. Некоторые формулы и правила действий с диадными тензорными функциями.....	182
Приложение 2. Графики и карты изолиний компонент поля из банка решений.....	185
<b>Л и т е р а т у р а</b> .....	206

## В В Е Д Е Н И Е

Одной из главных проблем современной геоэлектрики является учет искажающего влияния геоэлектрических неоднородностей на результаты электромагнитных зондирований и разработка методики, позволяющей производить интерпретацию экспериментальных данных над реальными трехмерными геоэлектрическими структурами.

Многолетний опыт интерпретации данных магнитотеллурического зондирования (МТЗ) и магнитовариационного зондирования (МВЗ) с помощью одномерных моделей показал, что, несмотря на большую полезность такого подхода, с его помощью не удастся получить правильное представление о действительном распределении электропроводности в земной коре и верхней мантии.

Появление быстродействующих ЭВМ привело к интенсивной разработке методов численного моделирования геоэлектрических аномалий. С помощью двумерных моделей Е- и Н-поляризации, а также квазитрехмерных ("пленочных") моделей был исследован ряд интересных для практики ситуаций (Бердичевский М.Н., Дмитриев В.И., Жданов М.С., Файнберг Э.Б., Варенцов И.М., Дебабов А.С., Зингер Б.Ш., Юдин М.Н., Jones F.W. и др.). Полученные результаты легли в основу современных представлений о структуре электромагнитных полей над неоднородностями в толще Земли.

Вследствие того, что реальные аномалии трехмерны, их интерпретация в классе одномерных и даже двумерных моделей часто приводит к неверным результатам.

В настоящее время в нашей стране и за рубежом ведутся работы по моделированию трехмерных электромагнитных полей (Юдин М.Н., Дмитриев В.И., Барашков И.С., Табаровский Л.А., Jones F.W., Hohmann G.W., Weidelt P., Rankin D., Pridmore D.F., Hvozدارа M. и др.). Однако, ряд нерешенных теоретических, методических и вычис-

лительных вопросов, связанных с трехмерным моделированием, сужает область его применения в условиях ограниченности ресурсов ЭВМ. Поэтому представляется актуальным развитие новых, более эффективных подходов к математическому моделированию электромагнитных полей в трехмерно-неоднородных средах.

Целью настоящей работы является разработка на основе метода конечных разностей эффективного подхода к численному моделированию электромагнитных полей в трехмерных средах и создание соответствующего пакета программ, предназначенного для исследования реальных геоэлектрических ситуаций с помощью ЭВМ среднего класса.

При этом в диссертации решаются следующие задачи:

- выбор решаемого уравнения поля, наиболее удобного для рассматриваемого класса моделей, и его корректная конечно-разностная аппроксимация;
- построение достаточно точных краевых условий для электромагнитного поля на границе области моделирования;
- эффективное решение систем линейных алгебраических уравнений очень большой размерности;
- разработка способов оценки точности моделирования.

В диссертационной работе обоснована принципиальная возможность создания на основе метода конечных разностей эффективных алгоритмов моделирования электромагнитных полей в трехмерных средах.

В частности, предложен алгоритм численного моделирования трехмерных квазистационарных электромагнитных полей, к характерным особенностям которого относятся:

- решение краевой задачи относительно векторного электрического поля, подчиняющегося интегро-дифференциальному уравнению, в котором вклад электрических зарядов выражен в явном виде;
- использование асимптотических краевых условий;

- вычисление магнитного поля по электрическому из 2-го уравнения Максвелла в интегральной форме;
- конечно-разностная аппроксимация исходного уравнения на основе метода баланса;
- решение системы линейных алгебраических уравнений итерационным методом блочной верхней релаксации;
- контроль точности решения с помощью независимых критериев.

На основе аппарата интегралов типа Стрэттона-Чу, обобщенного в работе для неоднородных сред, построены интегральные соотношения между компонентами электрического и магнитного полей, записываемые по всей поверхности, ограничивающей рассматриваемую область. Предложена гибридная схема численного моделирования, в которой применение методов дифференциальных уравнений во внутренней части области может сочетаться с использованием полученных интегральных соотношений на ее границе.

На модельном примере показано, что с увеличением размеров области (по сравнению с размерами неоднородности) указанные интегральные соотношения асимптотически переходят в известные условия излучения Зоммерфельда. С использованием спектрального представления полей дан независимый вывод асимптотических краевых условий в непроводящей среде.

С помощью разработанного пакета программ FDM3D, включающего в себя средства машинной графики, показано, что применение асимптотических краевых условий повышает точность результатов моделирования. Исследована морфология электромагнитного поля над некоторыми типичными геоэлектрическими неоднородностями.

Диссертационная работа включает в себя 7 глав и 2 приложения.

В первой главе рассматриваются методы физического и математического моделирования квазистационарных электромагнитных полей



в трехмерных средах. Отмечается, что, несмотря на ряд достижений в области физического моделирования, связанных с работами Кобзовой В.М., Ковтун А.А., Кузнецова А.Н., Doveso H.M., Brewitt-Taylor C.R. и др. исследователей, имеющиеся трудности (главным образом, технического характера) снижают эффективность этого подхода и, соответственно, сужают класс рассматриваемых моделей.

Альтернативой этому подходу является математическое (численное) моделирование на ЭВМ. Работы в этом направлении ведут многие исследователи (Дмитриев В.И., Табаровский Л.А., Юдин М.Н., Барашков И.С., Hohmann G.W., Weidelt P., Jones F.W., Pridmore D.F., Hvozda M. и др.). В рамках этого вида моделирования рассматриваются две основные группы методов: методы интегральных уравнений (МИУ) и методы дифференциальных уравнений (МДУ). Дается сравнительный анализ обеих групп методов, а также гибридных подходов, основанных на совместном использовании МИУ и МДУ. Отмечается, что основным недостатком МИУ является большая "ресурсоемкость", что делает его особенно эффективным лишь при моделировании локальных неоднородностей небольшого размера (по сравнению с длиной волны в них) и простой формы, помещенных в горизонтально-неоднородную среду с небольшим числом слоев.

Методы дифференциальных уравнений (в частности, метод конечных разностей) более универсальны. К их преимуществам можно отнести также простоту численной реализации и сравнительно невысокие требования к ресурсам используемой ЭВМ. Вместе с тем, делается вывод, что повышение эффективности МДУ должно быть связано с построением достаточно точных краевых условий на конечном расстоянии от неоднородности, поиском методов решения систем линейных алгебраических уравнений очень большой размерности, нахождением эффективных критериев точности результатов.

Во второй главе перечислены главные особенности предложен-

ного автором алгоритма численного моделирования трехмерных квазистационарных электромагнитных полей, основанного на конечно-разностной аппроксимации уравнения баланса.

Отмечается, что при решении этого уравнения в неограниченной области остро стоит вопрос о разумном выборе размеров области моделирования и соответствующих краевых условий (это особенно касается тех частей области, которые находятся в непроводящей среде, где поле затухает наиболее медленно). Предлагается с этой целью использовать асимптотические краевые условия I-го порядка для непроводящей среды.

Матрица системы линейных алгебраических уравнений, которая получается в результате дискретизации уравнения и краевых условий, обладает рядом свойств (разреженность, ленточность, неприводимость, свойство Янга (A)), благодаря которым, несмотря на очень большую размерность, соответствующая система линейных алгебраических уравнений эффективно решается итерационным методом блочной верхней релаксации (МБВР).

В этой же главе рассматриваются способы контроля точности моделирования. В случае, когда задача решается одним из методов дифференциальных уравнений (в частности, методом конечных разностей) для контроля точности результатов предлагается использовать интегральный критерий.

В последующих трех главах приведенные выше узловые моменты алгоритма раскрываются более детально. В частности, третья и четвертая главы посвящены выводу различных краевых условий, применение которых повышает эффективность численного моделирования квазистационарных электромагнитных полей.

В третьей главе рассматриваются интегральные представления электромагнитных полей. С помощью леммы Лоренца формулы Стрэттона-Чу записываются для неоднородных сред . Аппарат интегралов .

типа Стрэттона-Чу, развитый в работах Жданова М.С., также обобщается на случай неоднородных сред. На его основе выводятся важные для практики формулы разделения поля на нормальное и аномальное, а также интегральные соотношения между компонентами поля, записываемые по всей поверхности области моделирования. Отмечается, что эти соотношения можно использовать в качестве краевых условий, а также в рамках гибридной схемы моделирования (в сочетании с одним из методов дифференциальных уравнений).

Однако, с увеличением размеров области моделирования вычислительная эффективность интегральных краевых условий снижается. В общем случае, возникающие при этом трудности численного моделирования могут перевесить преимущества таких краевых условий. Поэтому представляется целесообразным, наряду с интегральными, рассмотреть и другие краевые условия.

В четвертой главе на примере модельной задачи показывается, что с увеличением размеров области моделирования (по сравнению с размерами области неоднородности) интегральные краевые условия асимптотически переходят в локальные дифференциальные краевые условия, эквивалентные условиям излучения Зоммерфельда. Делается вывод, что на больших расстояниях от области неоднородности асимптотические краевые условия более эффективны.

В следующих параграфах этой главы выводятся асимптотические краевые условия ( $N$ -го порядка) для непроводящей среды, в которой аномальное поле затухает наиболее медленно.

В пятой главе рассматриваются вопросы численной реализации предложенного алгоритма. В частности, исследуются точность аппроксимации, свойства матрицы полученной системы линейных алгебраических уравнений, а также достаточные условия сходимости итерационного метода блочной верхней релаксации. Предложен алгоритм разбиения области моделирования пространственной сетки с учетом за-

данной точности аппроксимации и локальных условий блочного диагонального преобладания матрицы системы линейных алгебраических уравнений. Предлагается объективный критерий останова итерационного процесса, позволяющий увязать необходимое число итераций с точностью аппроксимации исходного уравнения.

В шестой главе описан созданный автором пакет программ численного моделирования квазистационарных электромагнитных полей в трехмерных средах, который характеризуется сравнительно небольшим временем счета, адаптацией к возможностям используемой ЭВМ, графическим представлением результатов в виде графиков и карт изолиний компонент поля в любом сечении пространственной сетки.

В седьмой главе представлены результаты, полученные с помощью этого пакета. В начале главы с помощью несложных количественных оценок сравнивается вычислительная эффективность применения метода объемных интегральных уравнений и метода баланса. Проводится сравнение результатов, полученных с помощью пакета FDM3D, с аналитическим решением, а также с результатами, полученными другими авторами методом интегральных уравнений для призматической неоднородности, погруженной в нижнее однородное полупространство. На примере той же модели демонстрируется эффективность применения асимптотических краевых условий. В последнем параграфе этой главы приводятся результаты численного моделирования для характерной для геоэлектрики модели "остров в океане".

В Приложении I рассматриваются свойства электромагнитных тензоров Грина в неоднородных средах.

В Приложении 2 приводятся результаты моделирования некоторых трехмерных аномалий в виде графиков и карт изолиний компонент поля.

В диссертационной работе защищаются следующие положения:

I. Эффективное решение краевой задачи нахождения электромаг-

нитных полей в трехмерной среде может быть осуществлено на основе метода баланса и применения итерационного метода блочной верхней релаксации для решения получающейся системы линейных алгебраических уравнений.

2. Аппарат интегралов типа Стрэттона-Чу для неоднородных сред позволяет сконструировать интегральные краевые условия, эффективные при небольших размерах области моделирования.

3. Применение асимптотических краевых условий повышает эффективность численного моделирования электромагнитных полей.

4. Разработанный пакет программ численного моделирования дает возможность решать практические задачи анализа электромагнитных данных над трехмерными геоэлектрическими структурами.

Работа выполнена в аспирантуре Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн АН СССР.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. Жданову М.С. за постоянное внимание к данной работе и плодотворное обсуждение научных вопросов. Автор признателен также к.ф.-м.н. Варенцову И.М. и Голубеву Н.Г. за полезные дискуссии и ценные советы.

## Г л а в а I

### СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ТРЕХМЕРНО-НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ (обзор)

#### I.I. Математическое и физическое моделирование электромагнитных полей

Моделирование электромагнитных полей (как математическое, так и физическое) стало в настоящее время основным инструментом анализа их поведения в типичных для практики ситуациях. Поэтому перед тем, как перейти к более подробному рассмотрению метода математического моделирования, мы остановимся кратко на сравнительных достоинствах и недостатках обоих подходов.

Физическое моделирование подразумевает физическую природу модели источника первичного поля, среды и неоднородности. При этом различают два основных метода: метод сплошных сред и метод электрических сеток [39]. В первом методе моделью служит поле электрического тока в сплошной среде [3, 26, 73], во втором используют электрические цепи с сосредоточенными параметрами [47].

Метод сплошных сред основан на использовании критерия электродинамического подобия

$$C = \mu \omega \sigma L^2 \quad (I.I.I)$$

( $\mu$  - магнитная проницаемость,  $\omega$  - частота,  $\sigma$  - удельная электропроводность, а  $L$  - характерный линейный размер).

Говоря о достоинствах этого метода, необходимо отметить уникальность соответствующих установок, простоту и экономичность, а также возможность моделирования сред с большими контрастами электропроводности.

В то же время, некоторые из этих достоинств оборачиваются недостатками, если подходить к проблеме более широко, а именно, с точки зрения использования моделирования электромагнитных полей в реальных практических ситуациях. Действительно, очень небольшое число установок физического моделирования в мире делает практически невозможным их применение в качестве инструмента для анализа наблюдаемых полей (не говоря уже о повторном использовании результатов моделирования, возможном лишь при подсоединении к физическим установкам вычислительных комплексов). Кроме того, следует отметить ряд трудностей технического характера: сложность подбора материалов, характеризующихся достаточно широким диапазоном изменения электропроводности и не подверженных частотной дисперсии; трудности технической реализации моделей многослойных сред; недостаточно развитая техника моделирования с использованием твердых материалов и легкоплавких металлов; трудности, связанные с получением экспериментальных кривых в широком частотном диапазоне.

Другим важным подходом в рамках физического моделирования является метод электрических сеток, реализуемый на практике в двух модификациях [ 39 ]. Первая из них основана на дискретизации области моделирования, представлении полученных элементарных объемов с помощью элементов электрической сети (схемы замещения) и измерении напряжений и токов в цепи, моделирующих, соответственно, электрическое и магнитное поля. Вторая модификация основана на получении схем замещения непосредственно из конечно-разностных уравнений, описывающих моделируемое поле [ 47 ] .

Как указывается в [ 39, с.211 ], "наиболее важным преимуществом электрических сеток является то, что с их помощью можно моделировать объемные поля, описываемые уравнениями с правой частью". Важным достоинством этого метода является также возможность его

использования в гибридных аналого-цифровых комплексах. Необходимо также отметить, что применение в рамках этого подхода идей диакоптики [ 25 ] может дать хорошие результаты

Однако, несмотря на внешнюю привлекательность рассмотренного выше подхода, он не свободен и от недостатков, характерных как для других методов физического моделирования (погрешности измерений, технические сложности при построении моделей), так и для математического моделирования (ошибки дискретизации области моделирования и уравнений поля).

В целом, суммируя указанные выше достоинства и недостатки физического моделирования, следует сказать, что его возможности ограничены классом сравнительно простых моделей среды и неоднородности, что естественно, сужает область его применимости.

Альтернативой этому подходу является математическое (имитационное, численное) моделирование, под которым мы понимаем анализ поведения электромагнитного поля путем решения на ЭВМ уравнений, описывающих соответствующий геофизический объект.

В настоящее время численное моделирование на ЭВМ электромагнитных полей стало наиболее мощным и сравнительно легко доступным аппаратом для анализа сложных геоэлектрических ситуаций. Если раньше геофизики удовлетворялись рассмотрением упрощенных моделей (случаи E- и H-поляризации [ 5, 10, 61 ], пленочные модели [ 9, 23, 10 ], осесимметричные модели [ 36 ]), то появление мощных быстродействующих компьютеров сделало правомерной постановку задачи практической реализации численного моделирования трехмерных электромагнитных полей, возбуждаемых трехмерными источниками в двумерной или трехмерной среде или двумерными источниками - в трехмерной среде.



Математическое моделирование таких полей дает возможность получить более полное представление об их морфологии, чем то, которое может быть получено методами физического моделирования. Кроме того, исследование чувствительности различных компонент поля к изменению параметров модели, требующее многовариантных расчетов, можно осуществить практически лишь на основе численного моделирования.

Таким образом, математическое моделирование является, в силу указанных выше причин, наиболее подходящим инструментом для анализа трехмерных электромагнитных полей в сложных геофизических ситуациях.

Для того, чтобы перейти к оценке возможностей различных методов математического моделирования электромагнитных полей, рассмотрим сначала постановку задачи.

## 1.2. Постановка задачи математического моделирования

Рассмотрим типичные задачи практической геоэлектрики. В толще Земли (в коре или в верхней мантии) расположены области, отличающиеся по своим свойствам (в частности, удельной электропроводностью) от окружающей среды. Поиск таких неоднородностей по измеренному на земной поверхности электромагнитному полю составляет, как известно, суть "обратной" задачи геоэлектрики. В то же время, один из главных путей её решения требует умения находить электромагнитное поле в некоторой окрестности неоднородности (и, в частности, на поверхности Земли) по известным параметрам источника, возбуждающего поле, среды и самой неоднородности, то есть решения так называемой "прямой" задачи. Одним из путей, ведущих к цели (а в сложных ситуациях - практически единственной возможностью), является применение математического, или численного, моделирования на ЭВМ уравнений, описывающих геофизический объект. Его сос-

тавными частями являются: среда (разрез), неоднородность и источник первичного поля. Рассмотрим их по-порядку.

### 1.2.1. Модели среды и неоднородности

Геоэлектрическая неоднородность обычно выделяется на фоне среды с известными свойствами, главным из которых для нас является удельная электропроводность  $\sigma$ .

В рамках плоской модели Земли (справедливой, "если размеры исследуемой области и глубина проникновения поля в Землю намного меньше земного радиуса" [2, с. 42]) функцию электропроводности  $\sigma$  часто можно представить в виде:

$$\sigma(x, y, z) = \sigma_{(1)}(z) + \sigma_{(2)}(x, z) + \sigma_{(3)}(x, y, z), \quad (1.2.1)$$

(где  $\sigma_{(1)} \equiv \sigma_n$  - электропроводность так называемого "нормального разреза",  $\sigma_{(2)}(x, z)$  и  $\sigma_{(3)}(x, y, z)$  - соответственно, двумерная и трехмерная "избыточные" электропроводности;  $x, y, z$  - декартовы координаты, причем ось  $z$  направлена вертикально вниз.

В том случае, когда на основании экспериментальных данных это сделать непосредственно не удастся, всегда есть возможность искусственного разбиения трехмерной функции  $\sigma$ . В обеих ситуациях мы будем понимать под моделью среды одномерную функцию  $\sigma_n \equiv \sigma_{(1)}(z)$ , а под моделью неоднородности - функцию  $\sigma \equiv \sigma_{(2,3)} = \sigma_{(2)}(x, z) + \sigma_{(3)}(x, y, z)$ , причем  $\sigma_{(2)} \geq 0$ , а  $\sigma_{(3)} > 0$ .

Не останавливаясь на разбиении (1.2.1) более подробно, отметим лишь, что такое представление  $\sigma$  дает возможность решить задачу в три этапа, считая, что

- а)  $\sigma(x, y, z) \approx \sigma_{(1)}(z)$
  - б)  $\sigma(x, y, z) \approx \sigma_{(1)}(z) + \sigma_{(2)}(x, z)$
  - в)  $\sigma(x, y, z) = \sigma_{(1)}(z) + \sigma_{(2)}(x, z) + \sigma_{(3)}(x, y, z)$
- (1.2.2)

Действительно, решение задачи в предположении

а) можно получить аналитически [ 2 ]. Это грубое решение можно затем использовать в качестве начального приближения на следующем этапе. И, наконец, полученное новое приближение используется на последнем этапе ( $G = G_{(1)} + G_{(2)} + G_{(3)}$ ).

В заключение заметим, что для рассматриваемого круга задач можно считать неоднородность и окружающую ее среду изотропными и немагнитными.

### 1.2.2. Модель источника поля

Мы будем рассматривать электромагнитные поля, которые индуцируются в Земле внешними токами, локализованными в некоторой области атмосферы  $Q$  (рис. 1). Эти токи могут иметь как искусственную, так и естественную природу. В обоих случаях будем считать, что они изменяются во времени периодически с круговой частотой  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Соответствующую временную зависимость удобно представлять множителем  $\exp(-i\omega t)$ .

При достаточном удалении от области локализации источника возбуждаемое им первичное поле можно, как известно, аппроксимировать полем плоской волны. Как отмечается в [ 12, с. 6 ], "это справедливо для включений, которые имеют небольшие по сравнению с длиной волны во вмещающей среде размеры". Поэтому для наших целей в качестве модели источника можно принять плоскую волну, фронт которой совпадает с плоскостью раздела Земля - атмосфера:

$$\bar{E}^p = \bar{E}_0 e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad \bar{H}^p = \bar{H}_0 e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad (1.2.3)$$

где  $\bar{E}_0$  и  $\bar{H}_0$  - комплексные амплитуды, а  $k_z$  - пространственная частота по оси  $z$ . В частности, такая модель источника возбуждения соответствует пульсациям и бухтообразным вариациям, наблюдаемым в средних и низких широтах [ 2 ].

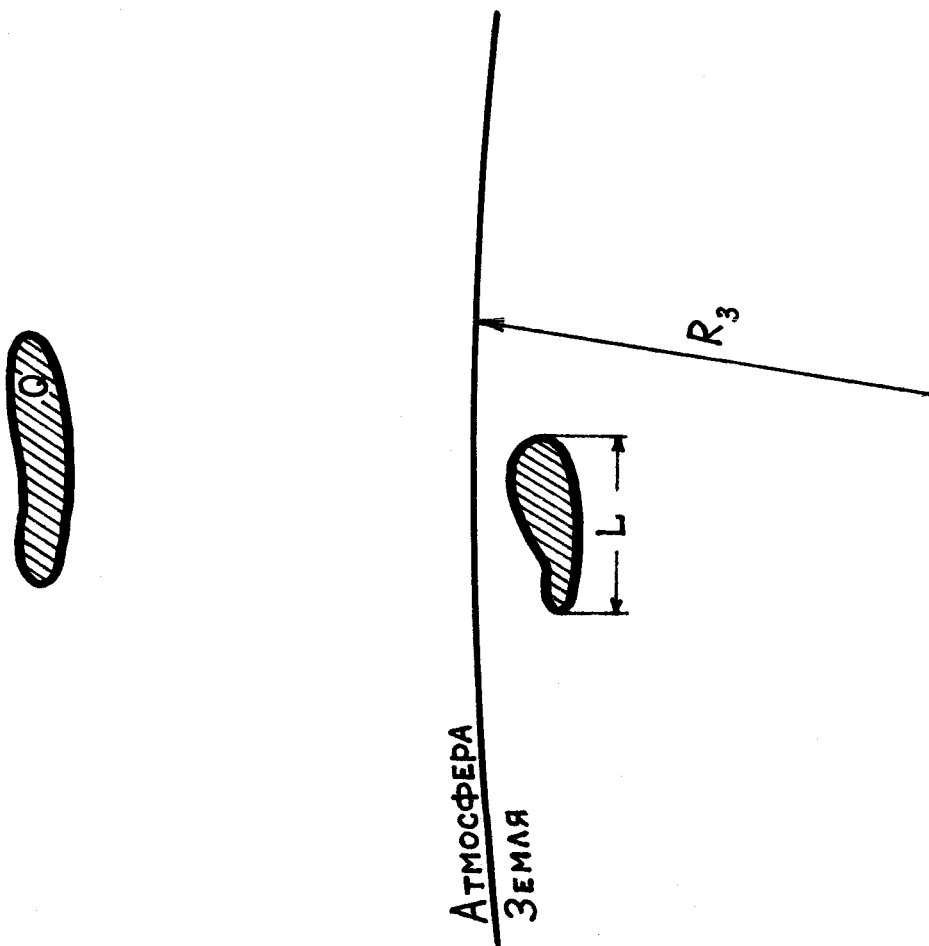


Рис. 1.

### 1.2.3. Основные предположения и уравнения поля

Перечислим теперь основные предположения, которые позволяют сформулировать математическую модель геофизического объекта исследований - уравнения поля.

Как уже указывалось выше, сферичностью Земли можно пренебречь при выполнении двух условий:

$$L \ll R \quad (1.2.4)$$

$$\lambda_h \ll R \quad (1.2.5)$$

где  $L$  - линейный размер неоднородности,  $\lambda_h$  - длина волны во вмещающей среде,  $R$  - радиус Земли (рис. 1).

Для аппроксимации первичного поля полем плоской волны необходимо, чтобы выполнялось условие

$$L_Q \ll \lambda_0 \quad (1.2.6)$$

где  $L_Q$  - линейный размер области локализации источников  $Q$ ,  $\lambda_0$  - длина волны в атмосфере.

Мы считаем также, что поле источника периодически во времени и квазистационарно [ 2 ].

Наконец, как уже отмечалось, мы предполагаем, что среда изотропна и немагнитна, т.е.

$$\mu \equiv \mu_0, \quad (1.2.7)$$

где  $\mu_0$  - магнитная проницаемость вакуума.

Перечисленные выше условия позволяют, как известно [ 2 ], записать уравнения Максвелла для рассматриваемой модели в виде:

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{H} &= \mathcal{G} \bar{E} \\ \nabla \times \bar{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \bar{H}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

После Фурье-преобразования (1.2.8) по времени мы можем записать уравнения, которым должны удовлетворять гармоники квази-

стационарного поля

$$\nabla \times \bar{H} = \sigma \bar{E} \quad (I.2.9)$$

$$\nabla \times \bar{E} = i\omega\mu_0 \bar{H}$$

Таким образом, задача теперь сводится к нахождению электромагнитного поля  $(\bar{E}, \bar{H})$ , удовлетворяющего (I.2.9), по заданному в некоторой области пространства (включающей в себя неоднородность) распределению удельной электропроводности  $\sigma(x, y, z)$  и фиксированной частоты  $\omega$ .

### 1.3. Сравнительный анализ методов численного моделирования на ЭВМ

Несмотря на обилие различных подходов, до сих пор не было эффективных и надежных программ, которые позволяли бы моделировать трехмерные электромагнитные поля в достаточно широком классе геоэлектрических моделей. Одна из главных причин такого положения состоит, на наш взгляд, в том, что до последнего времени для численного моделирования трехмерных электромагнитных полей соответствующие математические методы конечных разностей, конечных элементов, интегральных уравнений и др. применялись формально, без учета специфики задач электромагнитного моделирования, а также того, что в этой ситуации ограниченность ресурсов ЭВМ предъявляет повышенные требования ко всем этапам расчета и требует комплексного подхода к проблеме в целом.

Рассмотрим основные методы, применяемые для численного моделирования трехмерных квазистационарных электромагнитных полей.

#### 1.3.1. Методы интегральных уравнений

Пионером применения метода интегральных уравнений для численного моделирования электромагнитных полей является В.И.Дмитриев

[10] . Этот метод использовался для моделирования трехмерных неоднородностей в работах Райше ( Raiche A.P. ), Хомана ( Hohmann G.W. ), Вайдельта ( Weidelt P. ) и др. [24, 54, 55, 56, 76, 78, 83 ] . В СССР метод интегральных уравнений успешно развивался Дмитриевым В.И., Табаровским Л.А. и их коллегами [1, 11, 15, 16, 37, 38] .

Параллельно с методом (объемных) интегральных уравнений (МИУ) развивался и метод граничных интегральных уравнений (МГИУ) [14, 32, 33, 35, 66] .

Рассмотрим эти два подхода по-порядку.

а) М И У

Этот метод основан на численном решении уравнения Фредгольма 2-го рода<sup>x)</sup>, которое можно вывести из уравнений Максвелла (I.2.II) с помощью аппарата функций Грина (см. главу III и Приложение I):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}^n(\vec{r}) + i\omega\mu_0 \iiint_V (\sigma - \sigma_n) \hat{G}^e(\vec{r}|\vec{r}') \vec{E}(\vec{r}') dV', \quad (I.3.I)$$

где  $\vec{E}^n$  - нормальное поле, вычисляемое в предположении, что  $\sigma = \sigma_n$  (см. п. I.2.I),  $\hat{G}^e(\vec{r}|\vec{r}')$  - тензор Грина электрического типа (см. главу III),  $\vec{r}$  и  $\vec{r}'$  - координаты точек наблюдения и источника, соответственно,  $V$  - рассматриваемая область, (здесь и всюду далее за положительное направление нормали к границе  $V$  принято направление внутри области).

Основная идея этого подхода состоит в следующем. Область (рис. 2 б) разбивается пространственной сеткой на элементарные

---

x) Здесь и всюду далее для определенности рассматривается лишь уравнение относительно электрического поля  $\vec{E}$ . После его численного решения магнитное поле  $\vec{H}$  можно вычислить, например, с помощью второго уравнения Максвелла.

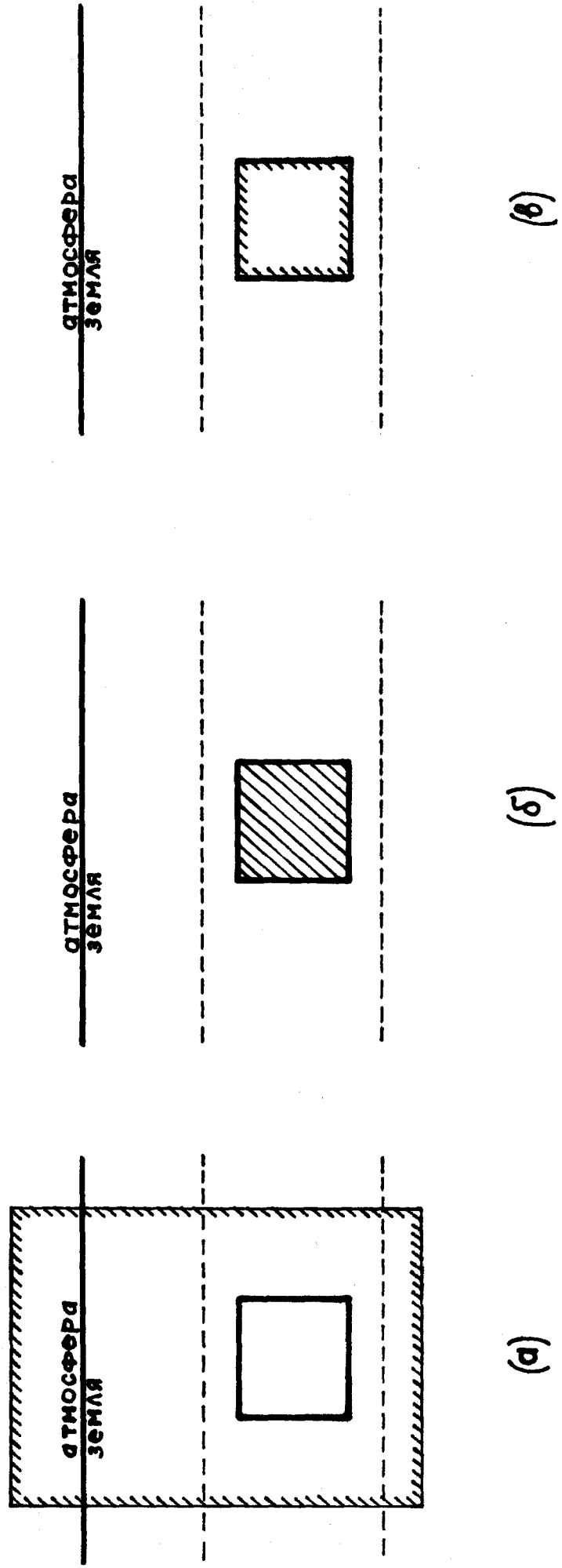


Рис. 2. Области моделирования, соответствующие разным методам: а) - МДУ, б) - МГУ, в) - МГУУ.



ячейки. Внутри каждой из них поле считается постоянным. Поэтому во втором члене (1.3.1) его можно вынести за знак интеграла. Для получения системы линейных алгебраических уравнений относительно значений поля  $\bar{E}$  в элементарных ячейках остается рассчитать соответствующие тензорные коэффициенты.

Рассмотрим главные преимущества и недостатки этого метода. К достоинствам следует отнести его большую (по сравнению, например, с методами дифференциальных уравнений) физическую прозрачность. Кроме того, как видно из (1.3.1), второй член не равен нулю лишь при  $\sigma \neq \sigma_n$ , т.е. интегрирование необходимо проводить только по аномальной области. Наконец, при численной аппроксимации (1.3.1) отсутствует неустойчивая процедура численного дифференцирования, характерная для большинства других методов.

В то же время, этот метод применим для моделирования лишь локальных трехмерных аномалий (или, в обозначениях п. 1.2.1, при  $\sigma_a = \sigma_{(3)}(x, y, z)$ ). Большие трудности возникают при численной реализации (1.3.1). Действительно, расчет тензорных коэффициентов и, в частности, компонент тензора Грина  $\hat{G}^e$  является нетривиальной самостоятельной задачей, для решения которой используют преобразования Ханкеля [ 54, 83 и др. ], метод линейной фильтрации [ 49, 80 ], метод деформации путей в комплексной плоскости переменной интегрирования [ 17, 35 ]. Как указывается в работе [ 83 ], при решении задачи с числом узлов  $11 \times 6 \times 3$  (соответственно, по осям  $x, y, z$ ) расчет тензорных коэффициентов занимает 70 с, в то время как на решение системы линейных алгебраических уравнений затрачивается 50 с. Таким образом, расчет тензорных коэффициентов является одним из "узких" мест метода, и от эффективности решения этой проблемы зависит плодотворность подхода в целом. Другая трудность возникает на этапе решения системы линейных алгебраических уравнений. Заполненность

матрицы системы приводит к тому, что ограниченность ресурсов ЭВМ становится критическим фактором. Как отмечается в [ 16 ] , "ограничение на размерность алгебраической системы в конечном счете оборачивается ограничением математической модели: мы можем рассчитывать поля для не слишком больших тел". Количественные оценки, выполненные в п. 7.1 настоящей работы, подтверждают этот вывод.

Частично этот недостаток можно преодолеть, применяя "метод разреженной матрицы" [ 30 ] , который основан на пренебрежении взаимодействием между достаточно удаленными участками, т.е. приравнивании нулю элементов матрицы, малых по сравнению с диагональными. В результате уменьшается необходимый объем оперативной памяти ЭВМ и сокращается как время вычисления коэффициентов матрицы, так и время решения системы уравнений. Другим упрощением (и, следовательно, сужением класса моделируемых объектов) является решение задачи в длинноволновом приближении. При этом можно, во-первых, упростить вычисление элементов тензора Грина [ 57 ] и, во-вторых, воспользоваться при численном решении (I.3.1) методом возмущений [ 2 ] . И, наконец, существенно упрощает дело учет симметрии структуры. Это относится к решению задач как с осевой симметрией [ I, II, 36 ] , так и с "зеркальной" симметрией [ 78 ] .

Оценивая преимущества и недостатки метода в целом, следует сказать, что он, по-видимому, дает наиболее точные результаты (за сравнительно небольшое время) для аномалий небольшого размера (по сравнению с длиной волны в них), имеющих простую форму и "находящихся не очень близко к точке вычисления поля" [ 70 ] .

#### б) МГИУ

Метод граничных интегральных уравнений основан на представлении электромагнитного поля в виде интеграла по поверхности области

(рис. 2 в) с помощью формул Стрэттона-Чу [14], метода вспомогательных (фиктивных) источников [35] или метода потенциалов [32]. После перехода к пределу при стремлении точки наблюдения к границе области поочередно изнутри и снаружи можно, пользуясь непрерывностью тангенциальных компонент электромагнитного поля на границе, получить необходимые уравнения только по поверхности области  $V$  относительно неизвестных плотностей поля. Для численного решения этих уравнений используются метод Крылова-Боголюбова, вариационные подходы, методы типа Бубнова-Галеркина и др. В частности, в работе [33] для получения системы линейных алгебраических уравнений применяется метод коллокации, а искомые плотности аппроксимируются гладкими финитными функциями, образующими конечное разбиение единицы на поверхности области.

Рассматриваемый метод имеет одно очевидное преимущество по сравнению с МИУ. Действительно, при численном решении уравнений, записанных по поверхности области, а не по ее объему, размерность соответствующей системы линейных алгебраических уравнений существенно уменьшается. Это особенно важно при моделировании неоднородностей большого размера ( $L$ ), так как отношение размеров матриц уменьшается с ростом  $L$  как  $1/L$ .

Однако, несмотря на это преимущество, с помощью МГИУ до сих пор были получены результаты лишь для однородных тел с вращательной симметрией, погруженных в однородное пространство [33, 66]. Это связано с недостаточно развитым математическим аппаратом для моделирования неоднородностей с произвольным распределением  $\sigma_a(x, y, z)$ , погруженных в горизонтально-слоистый разрез, а также с трудностями, возникающими на этапе численной аппроксимации сингулярных интегральных уравнений и решения получающейся в результате системы линейных алгебраических уравнений с плохо обусловленной матрицей.

Таким образом, методы интегральных уравнений наиболее эффективны при моделировании неоднородностей сравнительно простой формы и малых размеров, помещенных в горизонтально-слоистую среду с небольшим числом слоев.

### 1.3.2. Методы дифференциальных уравнений

Развитие геоэлектрики приводит к необходимости рассчитывать трехмерные электромагнитные поля в сложных ситуациях, когда неоднородность имеет произвольную форму и размеры (в частности, она может не быть локальной), а аномальная электропроводность  $\sigma_a$  изменяется в модели произвольным образом. В этом случае, как уже указывалось выше, применение методов интегральных уравнений становится малоэффективным.

Единственным практическим подходом к таким задачам оказывается непосредственное решение дифференциальных уравнений с частными производными, или применение так называемых "методов дифференциальных уравнений", главными из которых являются метод конечных разностей (МКР) и метод конечных элементов (МКЭ). Рассмотрим их применение к задаче численного моделирования трехмерных электромагнитных полей более подробно.

#### а) МКР

Этот метод, в основе которого лежит разностная аппроксимация производных, применяется для численного решения дифференциального уравнения относительно электрического или магнитного полей в некоторой области пространства, содержащей в себе неоднородность (рис. 2 а).

В частности, в работах Джоунса Ф.У ( Jones F.W. ) и его коллег [ 53, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 65 ] , а также Юдина М.Н. [ 42, 44, 46 ] , для этой цели используется уравнение :

$$\Delta \bar{E} - \nabla (\nabla \cdot \bar{E}) + k^2 \bar{E} = 0 \quad (I.3.2)$$
$$(k^2 = i\omega\mu_0\sigma, \operatorname{Re} k > 0),$$

которое непосредственно следует из (I.3.I).

К преимуществам метода относится его большая (по сравнению с методами интегральных уравнений) универсальность, простота численной реализации, а также ленточная структура матрицы получающейся системы линейных алгебраических уравнений. Последнее обстоятельство немаловажно, так как благодаря ему существенно уменьшается время решения задачи, а также объем требуемой оперативной памяти ЭВМ.

Вместе с тем, несмотря на десятилетний опыт применения этого метода в геоэлектрике, круг решенных с его помощью задач ограничен локальными моделями со сравнительно простой структурой электропроводности. Это связано, на наш взгляд, как с трудностями технологического характера (в частности, с необходимостью достаточно точной аппроксимации вторых производных в (I.3.2)), так и с более существенной проблемой задания краевых условий, характерной для применения всех методов дифференциальных уравнений к задачам такого типа.

#### б) МКЭ

Метод конечных элементов, в зависимости от конкретных приложений, интерпретируется как метод взвешенных остатков или вариационная процедура. Эквивалентность уравнений, получаемых в результате применения этих двух подходов, дает основание рассматривать их одновременно, в контексте применения методов дифференциальных уравнений.

В работе [ 74 ] был применен метод взвешенных остатков (типа метода Галеркина), причем вся рассматриваемая область была разбита на гексаэдральные элементы, в качестве базисных были взяты кусочно-постоянные функции, а неизвестные компоненты поля ап-

проксимированы полиномами третьей степени. Результаты моделирования однородного призматического тела, помещенного в нижнее полупространство, показали, что даже при сравнительно небольшом контрасте электропроводностей (1:10) точность результатов составляет 10%. В то же время, выбор более сложных базисных функций (и весов), лучше описывающих неизвестную функцию, приводит к резкому ухудшению свойств матрицы получающейся в результате системы линейных алгебраических уравнений [ 68 ] .

В работах [ 45, 69, 70 ] для получения конечно-элементных уравнений использовался вариационный подход.

Как показано в [ 70 ] , решение уравнения (I.3.2) в конечной области  $V$  эквивалентно нахождению стационарной точки<sup>x)</sup> функционала энергии

$$F(\bar{E}) = \iiint_V (\nabla \times \bar{E} \cdot \nabla \times \bar{E} - k^2 \bar{E} \cdot \bar{E}) dV \quad (I.3.3)$$

При решении задачи в вариационной постановке (I.3.3) необходимо соблюдать осторожность, так как на низких частотах ( $\omega \leq 0,1$  Гц) вклад второго члена в правой части (I.3.3) становится сравнимым с ошибками округления [ 69 ] . Кроме того, при попытке использовать наиболее характерное свойство МКЭ, а именно, возможность разбиения области на элементы любой конфигурации, могут возникать осцилляции и даже расходимость процесса решения [ 70 ] .

Таким образом, несмотря на то, что теоретически "конечные элементы" хорошо приспособлены для моделирования геологических разрезов со сложным распределением электропроводности, гибкость метода

---

<sup>x)</sup> Речь идет о нахождении стационарной точки, а не минимума, функционала  $F$ , так как дифференциальный оператор, стоящий в левой части (I.3.1), не является положительно определенным и, следовательно, не удовлетворяет условиям теоремы минимума.

достигается ценой значительных вычислительных усилий. Даже для решения сравнительно простых задач требуемое процессорное время настолько велико, что, как отмечается в [ 70 ], "требуется следующее поколение ЭВМ".

Характеризуя методы дифференциальных уравнений в целом, подчеркнем, что они более универсальны по сравнению с методами интегральных уравнений. В то же время, для повышения их вычислительной эффективности требуется решить ряд проблем: построение достаточно точных краевых условий, выбор размеров области моделирования, нахождение объективных критериев для разбиения области пространственной сеткой.

### 1.3.3. Гибридные схемы

Одним из путей совершенствования методов численного моделирования трехмерных электромагнитных полей является применение гибридных ("смешанных", "неклассических") подходов, сочетающих в себе достоинства методов дифференциальных и интегральных уравнений. При этом во внутренней части области моделирования используется МДУ (что позволяет рассматривать модели с произвольным распределением электропроводности), а во внешней части - интегральные соотношения между компонентами поля (это дает возможность ограничить область моделирования областью, лишь ненамного превышающей размеры неоднородности).

Первый шаг в этом направлении был сделан в работе [ 83 ], где с помощью аппарата функций Грина были исключены из рассмотрения области нормального разреза, лежащие выше и ниже неоднородностей:

$$\bar{E}^a(\bar{z}_0) = \iint_S \{ [\nabla \times \hat{G}^e(\bar{z}_0 | \bar{z})] [\bar{n} \times \bar{E}^a(\bar{z})] \} dS, \quad (1.3.4)$$

где  $S$  - поверхность границы раздела слоев,  $\bar{E}^a$  - аномальное

поле ( $\bar{E}^{\alpha} \equiv \bar{E} - \bar{E}^n$ ); точки  $\bar{z}_0$  выбираются в исключаемой области.

Та же цель преследуется и в работе [ 43 ], в которой вертикальные размеры областей, лежащих выше и ниже слоя, содержащего неоднородности, последовательно (в ходе итерационного процесса) уменьшаются. Это происходит в результате уточнения краевых условий на верхней и нижней границах области моделирования после аналитического продолжения спектров полей.

Дальнейшее повышение эффективности гибридных схем достигается при уменьшении области моделирования не только по вертикали, но и по горизонтали. Так, в работах [ 64, 68, 71, 75 ] область ограниченных размеров (границы которой расположены недалеко от неоднородности) покрывается конечно-элементной сеткой. В результате применения МКЭ к внутренней части области и МИУ - к внешней возникает 2 системы уравнений: 1) конечно-элементные уравнения во внутренних узлах (соответствующая часть матрицы имеет характерную ленточную структуру) и 2) уравнения, связывающие неизвестные в граничных и внутренних узлах (соответствующая часть матрицы является заполненной) по формуле:

$$\bar{E}^{\alpha}(\bar{z}_0) = \iiint_V \sigma_{\alpha} \hat{G}^e \bar{E}(\bar{z}) dV, \quad (I.3.5)$$

где  $\bar{z}_0$  - лежит на границе области  $V$ .

Гибридные схемы обычно делятся на 2 вида: прямые и итерационные. В прямых гибридных методах матрица системы обращается непосредственно, тогда как в итерационных методах значения неизвестных на границе области сначала считаются известными, затем вычисляются значения во внутренних узлах, пересчитываются по формуле (I.3.5) в значения на границе и т.д.

Как показывают оценки, сделанные в [ 64 ], итерационные



гибридные схемы в целом экономичнее прямых как по объему используемой оперативной памяти, так и по времени счета. Однако, даже для сравнительно небольших пространственных сеток ( $10 \times 10 \times 10 = 1000$  узлов) требуется  $2 \cdot 10^6$  слов оперативной памяти. Для ЭВМ среднего класса эта величина является критической: дальнейший рост объема требуемой памяти может быть достигнут лишь за счет привлечения медленной внешней памяти, что, в свою очередь, значительно увеличивает время счета.

Таким образом, несмотря на определенные достоинства гибридных схем, их практическое использование сопряжено с рядом трудностей. В частности, потребность в ресурсах ЭВМ остается достаточно высокой, не гарантирована сходимость итерационного процесса (в случае применения наиболее экономичной итерационной схемы), отсутствуют внутренние критерии точности полученных результатов. (Последнее замечание, которое можно отнести и к другим упоминавшимся выше численным методам, для гибридных схем, пожалуй, наиболее актуально).

#### 1.3.4. Другие подходы

Как следует из проведенного выше рассмотрения различных методов, численное моделирование трехмерных электромагнитных полей в сложных средах является достаточно трудной задачей, связанной с проблемами построения эффективного алгоритма и его численной реализации. Последнее обстоятельство усугубляется тем, что при полномасштабном численном моделировании требования к ресурсам ЭВМ (особенно, к объему оперативной памяти) находятся на пределе возможностей используемых на практике ЭВМ среднего класса. Поэтому в тех случаях, когда это возможно, целесообразно уже на этапе постановки задачи учитывать ее специфику с тем, чтобы обеспечить наи-

более эффективное решение рассматриваемого узкого класса проблем. Ценой такого повышения эффективности является, очевидно, потеря универсальности. В то же время, в ряде случаев это оправдано.

В частности, большой практический интерес представляют модели, в которых трехмерная неоднородность аппроксимируется протяженными горизонтально-неоднородными тонкими слоями. Как отмечается в [ 40 ] , такое приближение справедливо, если толщина поверхностного слоя мала по сравнению с 1) толщиной скин-слоя вещества поверхностного слоя и 2) глубиной проникновения поля в подстилающую среду. В таких моделях электропроводность слоя зависит только от двух горизонтальных координат, в то время как поля трехмерны. Численное моделирование, основанное на использовании подобных моделей, получило название "пленочного", или квазитрехмерного.

В большинстве работ, основанных на таком подходе [ 23, 40, 50 ] , используются граничные условия Прайса-Шейнмана или Дмитриева. Усовершенствование этого подхода, основанное на применении приближенных граничных условий Жданова - Бердичевского [ 2 ] , привело к возможности моделирования неоднородных слоев конечной толщины [ 21 ] . В связи с этим представляется, что дальнейший прогресс в использовании данного подхода, может быть связан с применением все более точных граничных условий, что существенно расширит класс рассматриваемых моделей.

Наконец, отметим оригинальный подход к проблемам численного моделирования в геоэлектрике, основанный на методе интегрирования по траекториям (в пространстве состояний) [ 18 ] . Однако, несмотря на очевидное преимущество, связанное с невозрастанием времени счета с ростом размерности задачи, возможности применения этого подхода ограничены, к сожалению, достаточно простыми моделями, для которых а priori известна функция Грина, или моделями с очень плавными изменениями электропроводности.

Мы рассмотрели все основные методы и подходы, применяемые в настоящее время для моделирования трехмерных квазистационарных электромагнитных полей в геоэлектрике. Из сравнения их достоинств и недостатков следует, что наиболее универсальными методами, пригодными для моделирования достаточно широкого класса практических ситуаций, следует считать методы дифференциальных уравнений. В то же время, их применение тормозится рядом трудностей теоретического, методологического и вычислительного характера, главными из которых, на наш взгляд, являются:

- 1) построение точных краевых условий;
- 2) выбор размеров области моделирования и объективных критериев для ее оптимального разбиения пространственной сеткой;
- 3) нахождение эффективных методов решения систем линейных алгебраических уравнений;
- 4) эффективная программная реализация численного алгоритма в условиях ограниченности ресурсов ЭВМ;
- 5) поиск внутренних критериев точности моделирования.

Рассмотрим эти узловые вопросы в контексте алгоритма численного моделирования трехмерных электромагнитных полей, основанного на применении метода баланса.

## Г л а в а П

### ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА БАЛАНСА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

При всех различиях применяемых методов можно выделить общие для всех основные этапы моделирования:

- а) постановка задачи;
- б) аппроксимация уравнений и краевых условий;
- в) решение системы линейных алгебраических уравнений на ЭВМ;
- г) контроль правильности полученных результатов.

От эффективности реализации каждого из этих этапов зависят не только точность и быстрота расчетов, но и сама возможность получения достоверных результатов. Действительно, уже на этапе постановки задачи необходимо учитывать возможные диапазоны изменения параметров источника, среды и неоднородности. От этого зависят размеры области моделирования (рис. 2), выбор подходящего уравнения и краевых условий, метода дискретизации и т.д. Соответственно, прогресс в моделировании трехмерных геоэлектрических неоднородностей должен быть связан с выбором решаемого уравнения в зависимости от параметров модели, применением по-возможности точных краевых условий, поисков путей быстрого решения больших систем линейных алгебраических уравнений специального вида, а также критериев контроля правильности полученных результатов.

В работе [ 20 ] нами был предложен алгоритм численного моделирования трехмерных электромагнитных полей над геоэлектрическими неоднородностями на основе метода баланса и конечно-разностной аппроксимации исходных уравнений. При разработке этого алгоритма упомянутым выше вопросам было уделено основное внимание.

Перейдем к рассмотрению особенностей предложенного алгоритма. (Его численная реализация описана в главе V).

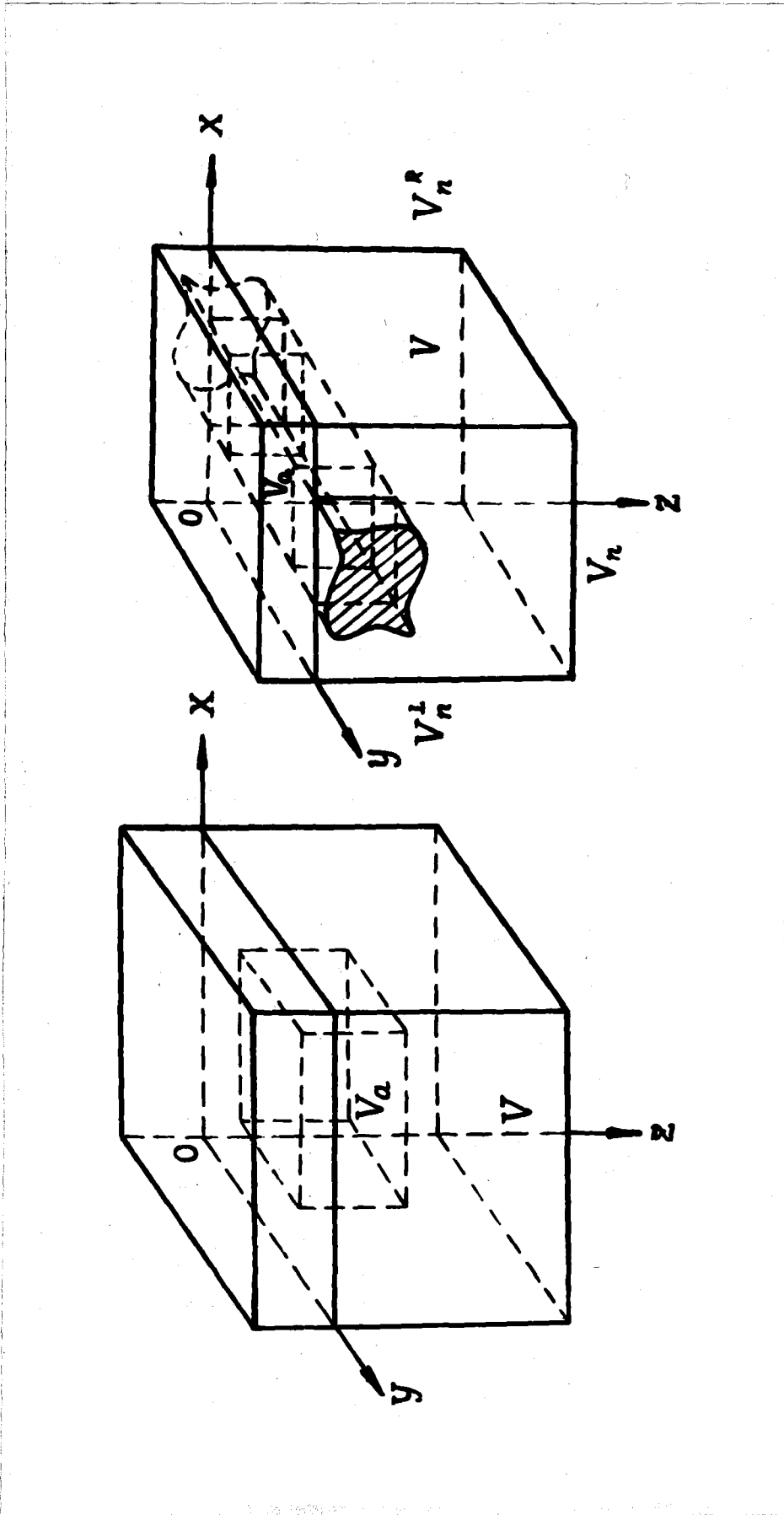
### 2.1. Постановка краевой задачи

Рассмотрим две модели геоэлектрических разрезов, отражающие часто встречающиеся на практике ситуации. На рис. 3а представлена модель (А) горизонтально-слоистого разреза, осложненного трехмерной неоднородностью электропроводности, локализованной в области  $V_a$ . Начало декартовой системы координат совпадает с поверхностью Земли, ось  $Oz$  направлена вниз. Без ограничения общности в качестве области  $V_a$  можно взять прямоугольную призму, верхняя грань которой лежит в плоскости границы "атмосфера-Земля", а нижняя - на глубине  $z = z_a$ . В рамках этой модели распределение электропроводности  $\sigma$  можно задать следующим образом:

$$\sigma_A = \begin{cases} \sigma_0, & p \in R^- \\ \sigma_a, & p \in V_a \\ \sigma_n, & p \in R^+ \setminus V_a \end{cases}$$

где  $R^+ = \{(x, y, z) | z \geq 0\}$ ,  $R^- = \{(x, y, z) | z < 0\}$ ,  $V_a$  - область неоднородности,  $\sigma_0 = 0$ ,  $\sigma_a = \sigma_a(x, y, z)$ ,  $\sigma_n$  - электропроводность нормального разреза,  $p$  - точка с координатами  $(x, y, z)$ .

Рассмотрим другую типичную модель (В), в которой горизонтально-слоистый разрез осложнен трехмерной неоднородностью, имеющей бесконечную протяженность в направлении  $y$  (рис. 3б). В этой модели распределение электропроводности задается следующим образом:



(а) (б)

Рис. 3. Типичные модели:

а) локальная неоднородность, б) неоднородность, выходящая на бесконечности в двумерный разрез.

$$\sigma_B = \begin{cases} \sigma_0 & , p \in R^- \\ \sigma_a & , p \in V_a \\ \sigma_n^L & , p \in V_n^L \\ \sigma_n^R & , p \in V_n^R \\ \sigma_n & , p \in V_n \end{cases}$$

где  $V_n^L$ ,  $V_n^R$  и  $V_n$  - нормальные разрезы, соответственно, "слева", "справа" и ниже области  $V_a$ ,  $\sigma_0 = const$ ,  $\sigma_a = \sigma(x, y, z)$ ,  $\sigma_n^L = \sigma_n^L(z)$ ,  $\sigma_n^R = \sigma_n^R(z)$ ,  $\sigma_n = \sigma_n(z)$ , причем  $\sigma_n^L \equiv \sigma_n^R \equiv \sigma_n$  при  $z > z_a$  и  $\sigma_a(x, y, z) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} \sigma_a^{(1)}(x, z)$  и  $\sigma_a(x, y, z) \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} \sigma_a^{(2)}(x, z)$ , т.е. при  $y \rightarrow \pm\infty$  трехмерная неоднородность переходит в двумерную.

Будем решать задачу дифракции плоской электромагнитной волны с зависимостью от времени  $\exp(-i\omega t)$  на описанных выше геоэлектрических неоднородностях. Рассмотрим решение этой задачи в области  $V$ , имеющей форму прямоугольной призмы (рис. 3). В модели А область  $V$  содержит внутри себя всю аномальную область  $V_a$ , а в модели В - только область с трехмерным распределением электропроводности  $\sigma_a$ .

Полагая, что во всем пространстве магнитная проницаемость постоянна и равна магнитной проницаемости вакуума ( $\mu \equiv \mu_0$ ) и пренебрегая токами смещения (см. п. 1.2 главы I), мы можем записать соответствующие уравнения Максвелла в интегральной форме:

$$\iiint_V [\nabla \times \vec{H}] dv = \iiint_V \sigma \vec{E} dv \quad (2.1.1)$$

$$\iiint_V [\nabla \times \vec{E}] dv = \iiint_V i\omega\mu_0 \vec{H} dv, \quad (2.1.2)$$

где  $V$  - некоторый конечный объем, ограниченный поверхностью  $S$ .

Или, используя теорему Стокса:

$$\oint_S [\bar{n} \times \bar{H}] ds = \iiint_V \sigma \bar{E} dv \quad (2.1.3)$$

$$\oint_S [\bar{n} \times \bar{E}] ds = \iiint_V i\omega\mu_0 \bar{H} dv \quad (2.1.4)$$

Из уравнений (2.1.3) и (2.1.4) можно получить уравнения относительно только электрического или только магнитного поля. В частности, для электрического поля имеем:

$$\oint_S [\nabla \times [\bar{n} \times \bar{E}]] ds = \iiint_V k^2 \bar{E} dv \quad (2.1.5)$$

Но

$$[\nabla \times [\bar{n} \times \bar{E}]] = (\bar{E} \nabla) \bar{n} - (\bar{n} \cdot \nabla) \bar{E} + \bar{n} (\nabla \cdot \bar{E}) - \bar{E} (\nabla \cdot \bar{n}) - \bar{n} (\nabla \cdot \bar{E}) - (\bar{n} \cdot \nabla) \bar{E} \quad (2.1.6)$$

Подставляя (2.1.6) в (2.1.5), получаем:

$$\oint_S (\bar{n} \cdot \nabla) \bar{E} ds - \oint_S (\nabla \cdot \bar{E}) d\bar{s} + \iiint_V k^2 \bar{E} dv = 0 \quad (2.1.7)$$

Учитывая, что

$$\nabla \cdot \bar{E} = - \left( \bar{E}, \frac{\nabla \sigma}{\sigma} \right) = - (\bar{E}, \nabla \ln \sigma) \quad (\sigma \neq 0), \quad (2.1.8)$$

записываем окончательно:

$$\oint_S \nabla \bar{E} d\bar{s} + \oint_S (\bar{E}, \nabla \ln \sigma) d\bar{s} + \iiint_V k^2 \bar{E} dv = 0 \quad (2.1.9)$$

С физической точки зрения интегро-дифференциальное уравнение (2.1.9) описывает баланс токов в объеме  $V$  (в этом нетрудно



убедиться, разделив обе части (2.1.9) на  $i\omega\mu_0$ , поэтому его можно называть уравнением баланса. (Известный "метод баланса" [27] состоит в интегрировании дифференциального уравнения по элементарным объемам пространственной области и приводит к тому же уравнению).

Заметим, что использование уравнения (2.1.9), а не, например, (1.3.2) из главы I, накладывает на неизвестную функцию  $\bar{E}$  более слабые ограничения, а именно: требуется лишь интегрируемость на  $S$  первой производной от  $\bar{E}$ , в то время как в (1.3.2) необходимо, чтобы  $\bar{E}$  была дважды непрерывно-дифференцируемой функцией.

Перейдем теперь к рассмотрению краевых условий.

## 2.2. Краевые условия и выбор границ области моделирования

При решении краевой задачи в неограниченной области основную трудность представляет сужение области до разумных размеров и задание на границе этой области соответствующих краевых условий (рис. 2а). Ясно, что от эффективности решения этой проблемы зависят точность результатов и время счета. Проблема выбора оптимальной области моделирования и адекватных краевых условий особенно остро стоит в трехмерном численном моделировании электромагнитных полей, так как в этом случае, как указывалось выше, ограниченность ресурсов ЭВМ накладывает как на алгоритм, так и на его численную реализацию жесткие требования.

До сих пор при решении таких задач делалось предположение, что на некотором конечном расстоянии от неоднородностей их полем можно пренебречь по сравнению с нормальным полем [42, 59, 74]. При этом граница области моделирования (естественно, большей, чем область, занимаемая неоднородностями среды) отодвигалась от аномалиеобразующих тел максимально далеко-

насколько позволяли ресурсы ЭВМ (см. п. 1.3 главы I).

Однако очевидно, что такое решение вопроса не является удовлетворительным, поскольку точность задания указанных краевых условий увеличивается с расстоянием медленно (особенно в атмосфере).

Кардинальным решением проблемы могло бы стать использование точных интегральных краевых условий, записываемых по всей поверхности области моделирования, в частности, совпадающей с областью неоднородности (см. главу III):

$$\frac{1}{\bar{\epsilon}} \bar{E}(\bar{z}_0) = \bar{E}^n(\bar{z}_0) + \bar{K}_0^e(\bar{z}_0) + \Delta \bar{K}^e(\bar{z}_0) \quad (2.2.1)$$

где

$$\bar{K}_0^e(\bar{z}_0) = \oint_S \{ [\nabla \times \hat{G}_0^e][\bar{n} \times \bar{E}] + \hat{G}_0^e[\bar{n} \times \nabla \times \bar{E}] \} ds' \quad (2.2.2)$$

$$\Delta \bar{K}_0^e(\bar{z}_0) = \iiint_S \{ [\nabla \times \Delta \hat{G}^e][\bar{n} \times \bar{E}] + \Delta \hat{G}^e[\bar{n} \times \nabla \times \bar{E}] \} ds'$$

( $\Delta \hat{G}^e \equiv \hat{G}^e(\bar{z}_0/\bar{z}') - \hat{G}_0^e(\bar{z}_0/\bar{z}')$ );  $\hat{G}^e$  и  $\hat{G}_0^e$  - тензоры Грина электрического типа, соответственно, рассматриваемой среды и свободного пространства с электропроводностью  $\sigma = \sigma(\bar{z}_0)$ ;  $\bar{z}_0 \in S$ , а интегрирование ведется по координатам  $\bar{z}'$  ).

В то же время, как показывает практика [ 33 ], при численной аппроксимации сингулярных интегралов типа (2.2.2) возникают большие технические трудности, которые могут, в конечном счете, свести на нет преимущества, связанные с возможностью значительного уменьшения области моделирования.

С другой стороны, при увеличении размеров области моделирования вклад периферийных участков поверхности в поле в рассматриваемой точке этой поверхности уменьшается. Соответственно, интегральные краевые условия переходят в локальные дифференциальные

краевые условия, справедливые асимптотически. (Это особенно хорошо видно на примере модельной задачи, рассмотренной в главе IV).

Несмотря на то, что асимптотические краевые условия теоретически менее точны, чем интегральные, они, тем не менее, учитывают характер поведения аномального поля на конечном расстоянии от неоднородности и поэтому являются более точными по сравнению с условиями, в которых аномальное поле на границе области вообще не учитывается.

Сказанное в наибольшей степени справедливо для плохо проводящих сред, в частности, для атмосферы, где, как уже отмечалось, аномальное поле затухает особенно медленно. В главе IV выведены асимптотические краевые условия для аномального поля в непроводящей среде:

$$\bar{E}^a + x \frac{\partial \bar{E}^a}{\partial x} + y \frac{\partial \bar{E}^a}{\partial y} + z \frac{\partial \bar{E}^a}{\partial z} = 0 \quad (2.2.3)$$

С их применением границы области моделирования можно приблизить к области неоднородности практически без потери точности. При этом, в связи с уменьшением числа дискретных переменных, сокращается и время решения системы линейных алгебраических уравнений. Таким образом, повышается эффективность моделирования в целом (см. главу УП).

На боковых границах в Земле поле локально аппроксимируется плоской волной (аналогично двумерному случаю [ 5 ]), а на нижней границе области моделирования связи между соседними узлами сетки устанавливаются с помощью билинейной интерполяции.

В случае зеркальной симметрии модели и нормального разреза задача, очевидно, может решаться только для половины (одна плоскость симметрии) или для четверти модели. При этом для каждой компоненты поля на соответствующих гранях задаются точные естественные краевые условия типа Дирихле ( $E_\alpha = 0$ ,  $\alpha = x, y, z$ )

или Неймана ( $\frac{\partial E_\alpha}{\partial n} = 0, \alpha = x, y, z$ ).

Если задача решается для модели типа В (рис. 3б), то на боковых гранях  $y = \text{const}$ , перпендикулярных оси простирания структуры, для всех компонент электрического поля справедливы краевые условия типа Неймана ( $\frac{\partial \vec{E}}{\partial n} = 0$ ).

### 2.3. Аппроксимация уравнения и краевых условий

Для решения дифференциальных уравнений с помощью ЭВМ приходится переходить от непрерывных значений аргументов и функций к дискретным. В зависимости от типа решаемого уравнения это можно осуществить разными методами. Наиболее общим подходом к получению дискретных аналогов уравнений и краевых условий можно считать, по-видимому, метод взвешенных остатков (который эффективно "работает" и в случае несамосопряженных операторов). В частности, дискретный аналог уравнения баланса (2.1.9), записанного для всей области  $V$ , можно получить, разбив ее пространственной сеткой на ряд элементарных ячеек  $\Delta V$ , взяв в качестве весовых функций

$$\Psi_i = \begin{cases} 1 & , \quad \bar{x} \in \Delta V_i \\ 0 & , \quad \bar{x} \notin \Delta V_i \end{cases}$$

( $i = 1, 2, \dots, N$ ; где  $N$  - количество ячеек).

а в качестве пробных - полиномы первой степени. К тому же дискретному уравнению для каждой элементарной ячейки  $\Delta V_i$ , мы придем, составляя для нее баланс токов, а затем аппроксимируя производные конечными разностями (см. главу У).

Подход, связанный с аппроксимацией интегро-дифференциального уравнения (2.1.9) (вместо дифференциального уравнения 2-го порядка (I. 3.2)) "дает необходимый формализм для использования рядов Тейлора при выводе разностных уравнений вблизи интерфейсов

или границ" [ 8I ] . Действительно, аппроксимация уравнения (I. 3.2 ) вблизи скачков электропроводности может привести к значительным ошибкам [ 74 ]

Кроме того, использование уравнения (2.1.9) вместо (I. 3.2) при численном решении задачи имеет следующие преимущества. Во-первых, конечно-разностная аппроксимация этого уравнения может осуществляться по 7-точечной схеме (см. главу У), что уменьшает требуемую оперативную память ЭВМ и время счета. Во-вторых, при аппроксимации уравнения (2.1.9) в областях, где  $\Delta\sigma = 0$  , второй член уравнения исчезает, тогда как при аппроксимации уравнения (I. 3.2 ) соответствующий член остается как в областях с  $\Delta\sigma \neq 0$  так и в областях, где  $\Delta\sigma = 0$  , что вносит дополнительные погрешности в расчеты. Наконец, при аппроксимации асимптотических краевых условий (2.2.3) мы остаемся в рамках 7-точечного шаблона, так как в них входят произвольные только I-го порядка.

В результате численной аппроксимации уравнения и краевых условий в каждом узле  $(\ell, m, n)$  пространственной сетки записывается линейное алгебраическое уравнение относительно неизвестных компонент дискретной векторной функции  $\bar{U}$  :

$$\bar{U}(\ell, m, n) = \hat{D}_{\ell, m, n}^{(0)-1} \{ \hat{D}_{\ell, m, n}^{(1)} \bar{U}(\ell, m, n-1) + \hat{D}_{\ell, m, n}^{(2)} \bar{U}(\ell, m-1, n) + \hat{D}_{\ell, m, n}^{(3)} \bar{U}(\ell-1, m, n) +$$

(2.2.4)

$$+ \hat{D}_{\ell, m, n}^{(4)} \bar{U}(\ell+1, m, n) + \hat{D}_{\ell, m, n}^{(5)} \bar{U}(\ell, m+1, n) + \hat{D}_{\ell, m, n}^{(6)} \bar{U}(\ell, m, n+1) \}$$

$$(\ell = 1, \dots, L; m = 1, \dots, M; n = 1, \dots, N),$$

где  $\hat{D}_{\ell, m, n}^{(i)}$  ( $i = 0, 1, \dots, 6$ ) - матричные коэффициенты в узлах сетки  $(\ell, m, n)$ , а  $\bar{U}$  - значения неизвестной функции.

Таким образом, мы рассмотрели основные вопросы, связанные с численной аппроксимацией уравнения и краевых условий (более подробно они анализируются в главе У), приводящей к системе линей-

ных алгебраических уравнений. Рассмотрим теперь метод, который используется для ее решения с помощью ЭВМ.

#### 2.4. Решение системы линейных алгебраических уравнений на ЭВМ

Выбор решаемого уравнения (2.1.9), а также способа его дискретизации позволил нам получить систему уравнений с рядом "хороших" свойств.

Действительно, как будет показано в главе V, соответствующая матрица

- а) разрежена;
- б) имеет ленточную структуру;
- в) неприводима;
- г) обладает свойством Янга (A);
- д) в широком диапазоне значений параметров модели и сетки имеет диагональное преобладание.

Отметим, что при численной аппроксимации уравнения (I. 3.2) или интегрального уравнения (I. 3.1) эти свойства частично или полностью утрачиваются и часто возникает проблема выбора подходящего способа решения системы линейных уравнений большой размерности с нерегулярной матрицей (обзор методов решения таких систем дан в работе [ 8 ] ).

В то же время, система линейных алгебраических уравнений, которая получается в результате дискретизации уравнения (2.1.9), обладает рядом указанных выше особенностей, благодаря которым, несмотря на очень большую размерность, она может быть эффективно решена одним из итерационных методов. В частности, в работе используется с этой целью метод блочной верхней релаксации (МБВР) [ 4 ] успешно зарекомендовавший себя при решении двумерных задач [ 5 ] .

## 2.5. Критерии правильности полученных результатов

Точность моделирования электромагнитных полей в большинстве случаев можно оценить лишь косвенно, так как существующие способы контроля в большинстве случаев являются необходимыми, а не достаточными условиями правильности результатов.

Для контроля точности используют "внешние" и "внутренние" методы. К "внешним" относятся:

- а) сравнение с результатами других авторов;
- б) сравнение с результатами, полученными другим методом.

Эти два критерия были до сих пор основными при проверке правильности решений, полученных разными авторами [64, 70 и др.] В то же время, как показали результаты сравнений, указанных выше критериев правильности явно недостаточно. Необходимо использовать способы контроля, когда точность может быть оценена "внутренними" средствами того или иного численного метода.

Как отмечается в [28, с. 35], "идея численной оценки правильности иногда представляется внутренне противоречивой, поскольку кажется, что численные результаты не могут быть использованы для подтверждения их собственной правильности. В действительности существует несколько способов, которые позволяют выявить явную неправильность численных результатов".

К таким критериям можно отнести проверку:

- а) теоремы взаимности;
- б) закона сохранения энергии;
- в) точности, с которой удовлетворяются уравнения и краевые условия;
- г) сходимости решения с увеличением числа неизвестных.

И, наконец, к "смешанному" типу (с точки зрения применения МДУ) можно отнести критерий, предложенный нами в работе [86] и основанный на оценке точности, с которой удовлетворяется инте-

гральное тождество:

$$\bar{E}(\bar{z}_0) = \bar{E}^n(\bar{z}_0) + i\omega\mu_0 \iiint_{V_a} \hat{G}^e(\bar{z}_0/\bar{z}) \Delta \bar{E}(\bar{z}) dV \quad (2.5.1)$$

при подстановке в него вычисленного методом конечных разностей (или конечных элементов) решения.

При описании алгоритма мы не затронули ряд вычислительных, технологических и методических вопросов, связанных с практическим осуществлением этого подхода. Проблема численной реализации алгоритма и воплощение его в конкретной программе на ЭВМ представляет собой чрезвычайно важную самостоятельную задачу, которая будет более подробно рассмотрена в главах V и VI.

Перейдем теперь к построению интегральных краевых условий, которые уже упоминались выше. Рассмотрим с этой целью интегральные представления электромагнитных полей на основе аппарата интегралов типа Стрэттона-Чу.



### Г л а в а Ш

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ; ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

Аппарат интегралов типа Стрэттона-Чу, развитый в работах [ 2 , 13 ] является одним из эффективных инструментов анализа переменных электромагнитных полей Земли. С его помощью удается решать такие задачи, как разделение поля на внешнюю и внутреннюю части, аналитическое продолжение поля, выделение главной части глубинных аномалий и др. В настоящей главе теория интегралов типа Стрэттона-Чу обобщается для неоднородных сред, что существенно расширяет область ее применения в геоэлектрике. В частности, это позволяет решить задачу разделения поля на нормальную и аномальную части в горизонтально-слоистой среде и записать для такой среды интегральные соотношения между компонентами поля на некоторой замкнутой поверхности. Они могут служить интегральными краевыми условиями при решении краевой задачи, а также использоваться в гибридной схеме численного моделирования.

### 3.1. Обобщенные интегральные формулы для неоднородной среды

#### 3.1.1. Постановка задачи

Рассмотрим магнитооднородную среду ( $\mu = \mu_0$  - магнитная проницаемость вакуума) с заданным распределением электропроводности  $\sigma(\vec{r})$ . Выделим в ней некоторый объем  $D$ , ограниченный поверхностью  $S$ . Электромагнитное поле в модели возбуждается источниками, расположенными вне области  $D$ . Будем предполагать, что зависимость полей от времени выражена множителем  $e^{-i\omega t}$ , а токами смещения можно пренебречь.

Необходимо найти выражения для электромагнитного поля в лю-

бой точке  $\bar{e}_0$  внутри области  $D$  по его значениям на внутренней стороне поверхности  $S$ .

### 3.1.2. Электромагнитные тензоры Грина и их свойства

Электрическое и магнитное поле в рассмотренной модели верду в области  $D$  удовлетворяет уравнениям Максвелла:

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{H} &= \sigma(\bar{e}) \bar{E} \\ \nabla \times \bar{E} &= i\omega\mu_0 \bar{H} \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

В силу принципа единственности [ 52 ] электромагнитное поле в конечной области, свободной от источников, однозначно определяется тангенциальными компонентами поля на границе  $S$ . Кроме того, исходные уравнения (3.1.1) линейны относительно токов. Это дает основание представить искомое электромагнитное поле в любой точке  $\bar{e}$  внутри области  $D$  в виде ( строгое доказательство этого положения дано в Приложении I):

$$\bar{E}(\bar{e}) = \iint_S \{ \hat{\mathcal{G}}_{11}(\bar{e}|\bar{e}') \bar{J}(\bar{e}') + \hat{\mathcal{G}}_{12}(\bar{e}|\bar{e}') \bar{M}(\bar{e}') \} ds' \quad (3.1.2)$$

$$\bar{H}(\bar{e}) = \iint_S \{ \hat{\mathcal{G}}_{21}(\bar{e}|\bar{e}') \bar{J}(\bar{e}') + \hat{\mathcal{G}}_{22}(\bar{e}|\bar{e}') \bar{M}(\bar{e}') \} ds', \quad \bar{e} \in S$$

где  $\bar{J}(\bar{e}')$  и  $\bar{M}(\bar{e}')$  - плотности, соответственно, электрических и магнитных (фиктивных) источников на поверхности  $S$ , а  $\hat{\mathcal{G}}_{11}$ ,  $\hat{\mathcal{G}}_{12}$ ,  $\hat{\mathcal{G}}_{21}$ ,  $\hat{\mathcal{G}}_{22}$  - электромагнитные тензоры Грина, векторные компоненты которых имеют смысл электрических и магнитных полей, возбуждаемых в точке  $\bar{e}$  электрическими или магнитными источниками единичной интенсивности и расположенными в точке  $\bar{e}'$  поверхности  $S$  (т.е. точечными электрическими и магнитными диполями); интегрирование ведется по координате  $\bar{e}'$ .

Перечислим свойства, которыми обладают функции  $\hat{\mathcal{Y}}_{ij}(i, j = 1, 2)$  (более подробно они рассматриваются в Приложении I).

Во-первых, они, как поля элементарных источников электрического и магнитного типов, подчиняются следующим уравнениям Максвелла:

$$\begin{aligned} \nabla \times \hat{\mathcal{Y}}_{11} &= i\omega\mu_0 \hat{\mathcal{Y}}_{21} \\ \nabla \times \hat{\mathcal{Y}}_{21} &= \mathcal{G}(\bar{z}) \hat{\mathcal{Y}}_{11} + \hat{I} \delta(\bar{z} - \bar{z}') \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \hat{\mathcal{Y}}_{12} &= i\omega\mu_0 \hat{\mathcal{Y}}_{22} - \hat{I} \delta(\bar{z} - \bar{z}') \\ \nabla \times \hat{\mathcal{Y}}_{22} &= \mathcal{G}(\bar{z}) \hat{\mathcal{Y}}_{12}, \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

где  $\delta$  - функция Дирака, а  $\hat{I}$  - идемпотент.

Из (3.1.3) и (3.1.4) следует, что  $\hat{\mathcal{Y}}_{11}$  и  $\hat{\mathcal{Y}}_{12}$  удовлетворяют также уравнениям:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \hat{\mathcal{Y}}_{11} - k^2(\bar{z}) \hat{\mathcal{Y}}_{11} &= i\omega\mu_0 \hat{I} \delta(\bar{z} - \bar{z}') \\ \nabla \times \nabla \times \hat{\mathcal{Y}}_{12} - k^2(\bar{z}) \hat{\mathcal{Y}}_{12} &= -i\omega\mu_0 \nabla \times \hat{I} \delta(\bar{z} - \bar{z}') \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

а  $\hat{\mathcal{Y}}_{21}$  и  $\hat{\mathcal{Y}}_{22}$  - уравнениям:

$$\nabla \times \nabla \times \hat{\mathcal{Y}}_{21} - k^2(\bar{z}) \hat{\mathcal{Y}}_{21} - \nabla \mathcal{G} \times \frac{1}{\mathcal{G}} \nabla \times \hat{\mathcal{Y}}_{21} = \nabla \times \hat{I} \delta(\bar{z} - \bar{z}') \quad (3.1.6)$$

$$\nabla \times \nabla \times \hat{\mathcal{Y}}_{22} - k^2(\bar{z}) \hat{\mathcal{Y}}_{22} - \nabla \mathcal{G} \times \frac{1}{\mathcal{G}} \nabla \times \hat{\mathcal{Y}}_{22} = -\mathcal{G}(\bar{z}) \hat{I} \delta(\bar{z} - \bar{z}'),$$

где  $k^2(\bar{z}) = i\omega\mu_0 \mathcal{G}(\bar{z})$ .

Во-вторых, тензорные функции  $\hat{\mathcal{Y}}_{ij}(i, j = 1, 2)$  обладают симметрией и, пользуясь леммой Лоренца, нетрудно показать, что они удовлетворяют следующим соотношениям взаимности:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{Y}}_{11}(\bar{z}|\bar{z}') &= \hat{\mathcal{Y}}_{11}(\bar{z}'|\bar{z}) \\ \hat{\mathcal{Y}}_{22}(\bar{z}|\bar{z}') &= \hat{\mathcal{Y}}_{22}(\bar{z}'|\bar{z}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{Y}}_{12}(\bar{\mathcal{E}}|\bar{\mathcal{E}}') &= -\tilde{\hat{\mathcal{Y}}}_{21}(\bar{\mathcal{E}}'|\bar{\mathcal{E}}) \\ \hat{\mathcal{Y}}_{21}(\bar{\mathcal{E}}|\bar{\mathcal{E}}') &= -\tilde{\hat{\mathcal{Y}}}_{12}(\bar{\mathcal{E}}'|\bar{\mathcal{E}})\end{aligned}\quad (3.1.7)$$

где "волной" обозначена операция транспонирования.

### 3.1.3. Формулы Страттона-Чу для неоднородной среды

Как следует из формул (3.1.3), (3.1.4) и (3.1.7), электрическое и магнитное поле в представлении (3.1.2) можно выразить через любую одну из функций  $\hat{\mathcal{Y}}_{ij}(i, j = 1, 2)$ .

Введем для удобства тензорные функции "электрического" и "магнитного" типа по формулам:

$$\begin{aligned}\hat{G}^e(\bar{\mathcal{E}}|\bar{\mathcal{E}}') &\equiv \hat{\mathcal{Y}}_{11}(\bar{\mathcal{E}}|\bar{\mathcal{E}}') \cdot (i\omega\mu_0)^{-1} \\ \hat{G}^m(\bar{\mathcal{E}}|\bar{\mathcal{E}}') &\equiv \hat{\mathcal{Y}}_{21}(\bar{\mathcal{E}}|\bar{\mathcal{E}}') \cdot (i\omega\mu_0)^{-1}\end{aligned}\quad (3.1.8)$$

Тогда, используя (3.1.3), (3.1.4), (3.1.7), (3.1.8), все тензорные функции  $\hat{\mathcal{Y}}_{ij}(i, j = 1, 2)$  можно выразить через  $\hat{G}^e$  и  $\hat{G}^m$ :

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{Y}}_{11}(\bar{\mathcal{E}}|\bar{\mathcal{E}}') &= i\omega\mu_0 \hat{G}^e(\bar{\mathcal{E}}|\bar{\mathcal{E}}') \\ \hat{\mathcal{Y}}_{12}(\bar{\mathcal{E}}|\bar{\mathcal{E}}') &= -\tilde{\hat{\mathcal{Y}}}_{21}(\bar{\mathcal{E}}'|\bar{\mathcal{E}}) = -i\omega\mu_0 \tilde{\hat{G}}^m(\bar{\mathcal{E}}'|\bar{\mathcal{E}}) = -\tilde{\nabla}' \times \tilde{\hat{G}}^e(\bar{\mathcal{E}}|\bar{\mathcal{E}}') \\ \hat{\mathcal{Y}}_{21}(\bar{\mathcal{E}}|\bar{\mathcal{E}}') &= i\omega\mu_0 \hat{G}^m(\bar{\mathcal{E}}|\bar{\mathcal{E}}')\end{aligned}\quad (3.1.9)$$

$$\hat{\mathcal{Y}}_{22}(\bar{\mathcal{E}}|\bar{\mathcal{E}}') = -\nabla \times \tilde{\hat{G}}^m(\bar{\mathcal{E}}|\bar{\mathcal{E}}) = -\tilde{\nabla}' \times \tilde{\hat{G}}^m(\bar{\mathcal{E}}|\bar{\mathcal{E}}')$$

где оператор  $\nabla'$  действует на координаты вектора  $\bar{\mathcal{E}}'$ .

Выражая поверхностные электрические и магнитные токи через тангенциальные компоненты, соответственно, магнитного и электри-

ческого поля

$$\vec{J} = [\vec{n} \times \vec{H}] \quad (3.1.10)$$

$$\vec{M} = -[\vec{n} \times \vec{E}]$$

(напомним, что  $\vec{n}$  - единичный вектор внутренней нормали к поверхности  $S$ ) и подставляя (3.1.9) и (3.1.10) в (3.1.2), получаем:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \iiint \{ i\omega\mu_0 \hat{G}^e(\vec{r}|\vec{r}') [\vec{n} \times \vec{H}] + [\vec{\nabla}' \times \hat{G}^e(\vec{r}|\vec{r}')][\vec{n} \times \vec{E}] \} ds' \quad (3.1.11a)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \iiint \{ i\omega\mu_0 \hat{G}^m(\vec{r}|\vec{r}') [\vec{n} \times \vec{H}] + [\vec{\nabla}' + \hat{G}^m(\vec{r}|\vec{r}')][\vec{n} \times \vec{E}] \} ds',$$

( $\vec{r} \in D$ ).

Отметим, что формулы (3.1.11a) для полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  в области  $D$  можно вывести непосредственно с помощью леммы Лоренца (см. Приложение I), при этом вне области  $D$  выполняется:

$$\iiint \{ i\omega\mu_0 \hat{G}^{e,m}(\vec{r}|\vec{r}') [\vec{n} \times \vec{H}] + [\vec{\nabla}' \times \hat{G}^{e,m}(\vec{r}|\vec{r}')][\vec{n} \times \vec{E}] \} ds' = 0, \quad (3.1.11b)$$

( $\vec{r} \in D_e$ )

где  $D_e = E^3 \setminus \bar{D}$  - дополнение области  $\bar{D}$  (с границей) до всего пространства.

Итак, формулы (3.1.11a) и (3.1.11b), представляют собой интегральные формулы Стреттона-Чу для неоднородной среды. Отметим, что для случая горизонтально-слоистой среды соответствующее обобщение формул Стреттона-Чу было впервые получено в [22].

#### 3.1.4. Формулы Стреттона-Чу для однородной среды

Покажем теперь, что в случае однородной среды формулы (3.1.11) редуцируются к известным формулам Стреттона-Чу [2].

Действительно, при  $\epsilon = const$  из уравнений (3.1.3) и (3.1.5)

следует:

$$\Delta \hat{\mathcal{P}}_{11} + k^2 \hat{\mathcal{P}}_{11} + \frac{1}{\mathcal{C}} \nabla \nabla \delta(\bar{z} - \bar{z}') = -i\omega\mu_0 \hat{I} \delta(\bar{z} - \bar{z}'),$$

где  $k^2 = i\omega\mu_0 \mathcal{C} = \text{const}$ .

Или, в операторном виде:

$$[\Delta + k^2] \hat{\mathcal{P}}_{11} = -[i\omega\mu_0 \hat{I} + \frac{1}{\mathcal{C}} \nabla \nabla] \delta(\bar{z} - \bar{z}') \quad (3.1.12)$$

Введем скалярную функцию  $G(\bar{z}|\bar{z}')$  так, чтобы

$$\hat{\mathcal{P}}_{11} = [i\omega\mu_0 \hat{I} + \frac{1}{\mathcal{C}} \nabla \nabla] G \quad (3.1.13)$$

Такая подстановка удовлетворяет уравнению (3.1.12), если функция  $G$  удовлетворяет скалярному уравнению

$$\Delta G + k^2 G = -\delta(\bar{z} - \bar{z}') \quad (3.1.14)$$

и, следовательно, имеет вид:

$$G(\bar{z}|\bar{z}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|\bar{z} - \bar{z}'|}}{|\bar{z} - \bar{z}'|} \quad (3.1.15)$$

С другой стороны, при постоянном значении  $\mathcal{C}$  из уравнений (3.1.4) и (3.1.6) следует:

$$\Delta \hat{\mathcal{P}}_{22} + k^2 \hat{\mathcal{P}}_{22} = (i\omega\mu_0)^{-1} \nabla \nabla \delta(\bar{z} - \bar{z}') + \mathcal{C} \hat{I} \delta(\bar{z} - \bar{z}')$$

Или, в операторном виде,

$$[\Delta + k^2] \hat{\mathcal{P}}_{22} = [\mathcal{C} \hat{I} + (i\omega\mu_0)^{-1} \nabla \nabla] \delta(\bar{z} - \bar{z}') \quad (3.1.16)$$

Из (3.1.16) видно, что тензорную функцию  $\hat{\mathcal{P}}_{22}$  можно также выразить через скалярную функцию  $G$ , удовлетворяющую уравнению (3.1.14):

$$\hat{\mathcal{P}}_{22} = -[\mathcal{C} \hat{I} + (i\omega\mu_0)^{-1} \nabla \nabla] G \quad (3.1.17)$$

Тогда из уравнений (3.1.3) и (3.1.4), с учетом (3.1.13) и (3.1.17), следует:

$$\hat{\mathcal{G}}_{12} = -[\nabla \times \hat{I}G] \quad (3.1.18)$$

$$\hat{\mathcal{G}}_{21} = [\nabla \times \hat{I}G] \quad (3.1.19)$$

Таким образом, в однородной среде появляется дополнительное свойство симметрии электромагнитных тензорных функций:

$$\hat{\mathcal{G}}_{12}(\bar{z}|\bar{z}') = -\hat{\mathcal{G}}_{21}(\bar{z}|\bar{z}') \quad (3.1.20)$$

Обозначим в случае однородной среды "электрическую" и "магнитную" функции Грина, введенные ранее согласно (3.1.8), через  $\hat{G}_0^e$  и  $\hat{G}_0^m$ , соответственно. Тогда, согласно (3.1.8), (3.1.13) и (3.1.19), записываем:

$$\hat{G}_0^e = [\hat{I} + \frac{1}{K^2} \nabla \nabla] G \quad (3.1.21)$$

$$\hat{G}_0^m = [\nabla \times \hat{I}G] \cdot (i\omega\mu_0)^{-1}$$

Непосредственной проверкой можно удостовериться, что

$$\hat{G}_0^e(\bar{z}|\bar{z}') = \tilde{\hat{G}}_0^e(\bar{z}|\bar{z}') \quad (3.1.22)$$

$$\hat{G}_0^m(\bar{z}|\bar{z}') = -\tilde{\hat{G}}_0^m(\bar{z}|\bar{z}')$$

Выразим теперь электромагнитные тензорные функции  $\hat{\mathcal{G}}_{ij}$  через  $\hat{G}_0^e$  и  $\hat{G}_0^m$ , учитывая (3.1.3), (3.1.4), (3.1.7) и (3.1.20):

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{G}}_{11} &= i\omega\mu_0 \hat{G}_0^e \\ \hat{\mathcal{G}}_{21} &= i\omega\mu_0 \hat{G}_0^m = \nabla \times \hat{G}_0^e \\ \hat{\mathcal{G}}_{12} &= -\hat{\mathcal{G}}_{21} = -i\omega\mu_0 \hat{G}_0^m = -\nabla \times \hat{G}_0^e \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

$$\hat{\rho}_{22} = -\nabla \times \hat{G}_0^m = -(i\omega\mu_0)^{-1} [\nabla \times \nabla \times \hat{G}_0^e] = -\mathcal{G} \hat{G}_0^e$$

Подставляя (3.1.21) и (3.1.10) в (3.1.2), записываем:

$$\bar{E}(\bar{z}) = \iiint \{ i\omega\mu_0 \hat{G}_0^e(\bar{z}|\bar{z}') [\bar{n} \times \bar{H}] + [\nabla \times \hat{G}_0^e(\bar{z}|\bar{z}')][\bar{n} \times \bar{E}] \} ds' \quad (3.1.24)$$

$$\bar{H}(\bar{z}) = \iiint \{ i\omega\mu_0 \hat{G}_0^m(\bar{z}|\bar{z}') [\bar{n} \times \bar{H}] + [\nabla \times \hat{G}_0^m(\bar{z}|\bar{z}')][\bar{n} \times \bar{E}] \} ds', \quad (\bar{z} \in D)$$

Выражения (3.1.24) представляют собой формулы Стреттона-Чу для однородной среды, согласующиеся с полученными ранее формулами (3.1.11) для неоднородной среды.

Если использовать только "электрическую" тензорную функцию, то формулы (3.1.24) принимают вид:

$$\bar{E}(\bar{z}) = \iiint \{ i\omega\mu_0 \hat{G}_0^e [\bar{n} \times \bar{H}] + [\nabla \times \hat{G}_0^e][\bar{n} \times \bar{E}] \} ds' \quad (3.1.25)$$

$$\bar{H}(\bar{z}) = \iiint \{ [\nabla \times \hat{G}_0^e][\bar{n} \times \bar{H}] + \mathcal{G} \hat{G}_0^e [\bar{n} \times \bar{E}] \} ds', \quad (\bar{z} \in D).$$

Перепишем теперь правые части (3.1.24), учитывая (3.1.13), (3.1.17)-(3.1.19) и (3.1.8):

$$\begin{aligned} & \iiint \{ i\omega\mu_0 \hat{G}_0^e [\bar{n} \times \bar{H}] + [\nabla \times \hat{G}_0^e][\bar{n} \times \bar{E}] \} ds' = \\ & = \iiint \{ i\omega\mu_0 [\hat{I} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla] G [\bar{n} \times \bar{H}] + [\nabla \times G \hat{I}][\bar{n} \times \bar{E}] \} ds' \\ & \iiint \{ [\nabla \times \hat{G}_0^e][\bar{n} \times \bar{H}] + \mathcal{G} \hat{G}_0^e [\bar{n} \times \bar{E}] \} ds' = \\ & = \iiint \{ [\nabla \times (G \hat{I})][\bar{n} \times \bar{H}] + \mathcal{G} [\hat{I} + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla] G [\bar{n} \times \bar{E}] \} ds' \end{aligned} \quad (3.1.26)$$



$$[\nabla \times (G \hat{I})][\bar{n} \times \bar{E}] = [\nabla \times (G \hat{I}[\bar{n} \times \bar{E}])] = [\nabla \times G[\bar{n} \times \bar{E}]] = [[\bar{n} \times \bar{E}] \times \nabla' G] \quad (3.1.27)$$

и, аналогично,

$$[\nabla \times (G \hat{I})][\bar{n} \times \bar{H}] = [[\bar{n} \times \bar{H}] \times \nabla' G]$$

Кроме того, можно показать, что

$$\iint i\omega\mu_0 \left\{ \frac{1}{k^2} \nabla \nabla G \right\} [\bar{n} \times \bar{H}] ds' = - \iint (\bar{n} \times \bar{E}) \nabla G ds'$$

$$\iint G \left\{ \frac{1}{k^2} \nabla \nabla G \right\} [\bar{n} \times \bar{E}] ds' = - \iint (\bar{n} \times \bar{H}) \nabla G ds' \quad (3.1.28)$$

Действительно, учитывая (3.1.21) и (3.1.22), а также тот факт, что оператор  $\nabla$  действует только на координаты вектора  $\bar{e}$ , а  $\nabla'$  - на координаты вектора  $\bar{e}'$ , записываем:

$$\begin{aligned} i\omega\mu_0 \left\{ \frac{1}{k^2} \nabla \nabla G \right\} [\bar{n} \times \bar{H}] &= \frac{1}{\epsilon} [\bar{n} \times \bar{H}] \nabla \nabla G = \frac{1}{\epsilon} ([\bar{n} \times \bar{H}] \nabla) \nabla G = \\ &= \frac{1}{\epsilon} \nabla (\nabla G, [\bar{n} \times \bar{H}]) = - \frac{1}{\epsilon} \nabla (\nabla' G, [\bar{n} \times \bar{H}]) = - \frac{1}{\epsilon} \nabla \{ \nabla' (G[\bar{n} \times \bar{H}]) - \\ &- G \nabla' \cdot [\bar{n} \times \bar{H}] \} \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

Проинтегрируем (3.1.29) по замкнутой поверхности  $S$  :

$$\iint i\omega\mu_0 \left\{ \frac{1}{k^2} \nabla \nabla G \right\} [\bar{n} \times \bar{H}] ds' = - \frac{1}{\epsilon} \nabla \iint \{ \nabla' (G[\bar{n} \times \bar{H}]) - G \nabla' \cdot [\bar{n} \times \bar{H}] \} ds' \quad (3.1.30)$$

Как непосредственно следует из уравнений Максвелла,

$$-\frac{1}{\epsilon} \nabla_s' \cdot [\bar{n} \times \bar{H}] = (\bar{n} \times \bar{E}) \quad (3.1.31)$$

Кроме того, очевидно,

$$\iint \{ \nabla' \cdot (G[\bar{n} \times \bar{H}]) \} ds' \equiv 0 \quad (3.1.32)$$

Подставляя (3.1.31) и (3.1.32) в (3.1.30), получаем первую

из формул (3.1.28). Вторая формула (3.1.28) непосредственно следует из первой, если поменять местами  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$ , а также заменить  $\sigma$  на  $i\omega\mu_0$ .

Окончательно формулы (3.1.24) с учетом (3.1.27) и (3.1.28) принимают вид:

$$\bar{E}(\bar{z}) = \iiint \{ i\omega\mu_0 [\bar{n} \times \bar{H}] G + (\bar{n} \bar{E}) \nabla' G + [ [\bar{n} \times \bar{E}] \times \nabla' G ] \} ds' \quad (3.1.33)$$

$$\bar{H}(\bar{z}) = \iiint \{ [ [\bar{n} \times \bar{H}] \times \nabla' G ] + (\bar{n} \bar{H}) \nabla' G + \sigma G [ \bar{n} \times \bar{E} ] \} ds'$$

Таким образом, мы получили формулы Стреттона-Чу для однородной среды.

### 3.2. Интегралы типа Стреттона-Чу в неоднородной среде и их свойства

#### 3.2.1. Определения

Введем в рассмотрение интегральные операторы  $\hat{F}$  и  $\hat{\Psi}$ , такие что

$$\hat{F}^r(\hat{G})\bar{p} = \iint_{\Gamma} i\omega\mu_0 \hat{G} [\bar{n} \times \bar{p}] ds' \quad (3.2.1)$$

$$\hat{\Psi}^r(\hat{G})\bar{p} = \iint_{\Gamma} [ [\nabla' \times \hat{G}] [\bar{n} \times \bar{p}] ] ds' ,$$

где  $\bar{p}$  - произвольное векторное поле, заданное и интегрируемое на замкнутой поверхности  $\Gamma$ ,  $\bar{n}$  - вектор внутренней нормали к  $\Gamma$ .

Пусть  $\bar{e}(\bar{z})$  и  $\bar{h}(\bar{z})$  - произвольные кусочно-дифференцируемые векторные поля, заданные вдоль некоторой гладкой замкнутой поверхности  $S$ , ограничивающей конечную область  $D$  пространства  $E^3$ . Пусть  $\hat{G}^e(\bar{z}|\bar{z}')$  и  $\hat{G}^m(\bar{z}|\bar{z}')$  - тензорные функции, всюду в  $E^3$  удовлетворяющие уравнениям (3.1.1) с заданными параметрами  $\mu_0$ ,  $\omega$  и  $\sigma(\bar{z})$ , кусочно-непрерывным в  $\bar{D}$  ( $\bar{D}$  - замы-

кание области  $D$ ), а также условиям излучения на бесконечности.

Определим на  $S$  векторные поля  $\bar{u}(\bar{\rho})$  и  $\bar{v}(\bar{\rho})$  ( $\bar{\rho} \in S$ ) так, чтобы выполнялось:

$$\bar{u}_\tau = \bar{e}_\tau, \quad \bar{v}_\tau = \bar{h}_\tau \quad (3.2.2)$$

$$u_n = \frac{i}{\mu_0 \omega} \nabla \cdot [\bar{n} \times \bar{h}], \quad v_n = -\frac{1}{\sigma^*} \nabla \cdot [\bar{n} \times \bar{e}],$$

где индексами  $\tau$  и  $n$  обозначены, соответственно, тангенциальные и нормальные компоненты векторов  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{e}$ ,  $\bar{h}$  по отношению к поверхности  $S$ , а параметр  $\sigma^* = \sigma^*(\bar{\rho})$  совпадает с  $\sigma(\bar{\rho})$  всюду на  $S$ , кроме, быть может, множества точек меры нуль:

$$\sigma^*(\bar{\rho}) = \sigma(\bar{\rho}), \quad \bar{\rho} \in S$$

Тогда, очевидно, выражения

$$\begin{aligned} \bar{M}^e(\bar{\rho}) &= \hat{F}^s(\hat{G}^e) \bar{v} + \hat{\Psi}^s(\hat{G}^e) \bar{u} \\ \bar{M}^m(\bar{\rho}) &= \hat{F}^s(\hat{G}^m) \bar{v} + \hat{\Psi}^s(\hat{G}^m) \bar{u} \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

имеют смысл в любой точке пространства, не принадлежащей  $S$ , и, как мы покажем ниже, представляют собой решения уравнений Максвелла (3.1.1). Интегралы (3.2.3), следуя терминологии [2], будем называть интегралами типа Стрэттона-Чу для неоднородной среды.

### 3.2.2. Свойства интегралов типа Стрэттона-Чу

Свойства интегралов типа Стрэттона-Чу, перечисленные в [2, 13] для случая однородной среды, без труда переносятся на случай неоднородной среды.

I. Векторы  $\bar{M}^e$  и  $\bar{M}^m$ , введенные согласно (3.2.3), вне поверхности  $S$  удовлетворяют уравнениям Максвелла (3.1.1).

Убедимся в справедливости сделанного утверждения непосред-

венной проверкой. Действительно, используя (3.1.3)-(3.1.8), а также то обстоятельство, что оператор  $\nabla$  действует только на координаты вектора  $\bar{z}$ , можно записать:

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{M}^e(\bar{z}) &= \iiint \{ i\omega\mu_0 [\nabla \times \hat{G}^e(\bar{z}|\bar{z}')] \bar{v}_\epsilon + [\nabla \times \bar{\nabla}' \times \hat{G}^e(\bar{z}|\bar{z}')] \bar{u}_\epsilon \} ds' = \\ &= \iiint \{ (i\omega\mu_0)^2 \hat{G}^m(\bar{z}|\bar{z}') \bar{v}_\epsilon + i\omega\mu_0 [\nabla \times \hat{G}^m(\bar{z}|\bar{z}')] \bar{u}_\epsilon \} ds' = \\ &= i\omega\mu_0 \iiint \{ i\omega\mu_0 \hat{G}^m(\bar{z}|\bar{z}') \bar{v}_\epsilon + [\bar{\nabla}' \times \hat{G}^m(\bar{z}|\bar{z}')] \bar{u}_\epsilon \} ds' = i\omega\mu_0 \bar{M}^m(\bar{z}) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \bar{M}^m(\bar{z}) &= \iiint \{ i\omega\mu_0 [\nabla \times \hat{G}^m(\bar{z}|\bar{z}')] \bar{v}_\epsilon + [\nabla \times \bar{\nabla}' \times \hat{G}^m(\bar{z}|\bar{z}')] \bar{u}_\epsilon \} ds' = \\ &= \mathcal{O}(\bar{z}) \iiint \{ i\omega\mu_0 \hat{G}^e(\bar{z}|\bar{z}') \bar{v}_\epsilon + i\omega\mu_0 \hat{G}^m(\bar{z}'|\bar{z}) \bar{u}_\epsilon \} ds' = \\ &= \mathcal{O}(\bar{z}) \iiint \{ i\omega\mu_0 \hat{G}^e(\bar{z}|\bar{z}') \bar{v}_\epsilon + [\bar{\nabla}' \times \hat{G}^e(\bar{z}|\bar{z}')] \bar{u}_\epsilon \} ds' = \mathcal{O}(\bar{z}) \bar{M}^e(\bar{z}), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Из (3.2.4) следует, что вне поверхности  $S$  (т.е. при  $\bar{z} \neq \bar{z}'$ ) векторы  $\bar{M}^e$  и  $\bar{M}^m$  удовлетворяют тем же уравнениям, что и "электрическая" ( $\hat{G}^e$ ) и "магнитная" ( $\hat{G}^m$ ) тензорные функции.

Действительно,

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \bar{M}^e(\bar{z}) &= i\omega\mu_0 \nabla \times \bar{M}^m(\bar{z}) = i\omega\mu_0 \mathcal{O}(\bar{z}) \bar{M}^e(\bar{z}) \\ \nabla \times \nabla \times \bar{M}^m(\bar{z}) &= \nabla \times (\mathcal{O}(\bar{z}) \bar{M}^e(\bar{z})) = \mathcal{O}(\bar{z}) \nabla \times \bar{M}^e(\bar{z}) + \nabla \mathcal{O}(\bar{z}) \times \bar{M}^e(\bar{z}) = \\ &= i\omega\mu_0 \mathcal{O}(\bar{z}) \bar{M}^m(\bar{z}) + \nabla \mathcal{O}(\bar{z}) \times \frac{1}{\mathcal{O}(\bar{z})} \nabla \times \bar{M}^m(\bar{z}), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \bar{M}^e(\bar{z}) - k^2(\bar{z}) \bar{M}^e(\bar{z}) &= 0 \\ \nabla \times \nabla \times \bar{M}^m(\bar{z}) - k^2(\bar{z}) \bar{M}^m(\bar{z}) - \nabla \mathcal{O} \times \frac{1}{\mathcal{O}} \nabla \times \bar{M}^m(\bar{z}) &= 0, \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

где, как и раньше,  $k^2(\bar{z}) = i\omega\mu_0\mathcal{G}(\bar{z})$

2. Если плотности  $\bar{u}$  и  $\bar{V}$  интегралов типа Стрэттона-Чу совпадают с граничными значениями векторных полей  $\bar{e}$  и  $\bar{h}$ , которые удовлетворяют в области  $\bar{D}$  уравнениям Максвелла

$$\nabla \times \bar{h} = \mathcal{G}(\bar{z})\bar{e}$$

$$\nabla \times \bar{e} = i\omega\mu_0\bar{h},$$

то

$$\bar{M}^e(\bar{z}) = \begin{cases} \bar{u}(\bar{z}) & , \bar{z} \in D \\ 0 & , \bar{z} \in D_e \end{cases}$$

$$\bar{M}^m(\bar{z}) = \begin{cases} \bar{V}(\bar{z}) & , \bar{z} \in D \\ 0 & , \bar{z} \in D_e \end{cases}$$

(3.2.6)

где  $D^e = E^3 \setminus \bar{D}$ .

Доказательство непосредственно следует из формул (3.1.IIa) и (3.1.IIб).

3. Если плотности  $\bar{u}$  и  $\bar{V}$  интегралов типа Стрэттона-Чу совпадают с граничными значениями векторных полей  $\bar{e}$  и  $\bar{h}$ , которые удовлетворяют в области  $D_e$  и на поверхности  $S$  уравнениям Максвелла

$$\nabla \times \bar{h} = \mathcal{G}(\bar{z})\bar{e}$$

$$\nabla \times \bar{e} = i\omega\mu_0\bar{h}$$

и исчезают в бесконечности, т.е.

$$\bar{e} \xrightarrow{\bar{z} \rightarrow \infty} 0$$

$$\bar{h} \xrightarrow{\bar{z} \rightarrow \infty} 0,$$

(3.2.7)

то

$$\begin{aligned} \bar{M}^e(\bar{z}) &= \begin{cases} 0 & , \bar{z} \in D \\ -u & , \bar{z} \in D_e \end{cases} \\ \bar{M}^m(\bar{z}) &= \begin{cases} 0 & , \bar{z} \in D \\ -V & , \bar{z} \in D_e \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Для доказательства (3.2.8) окружим область  $D$  сферой радиуса  $R$  и рассмотрим область  $D_R$ , ограниченную поверхностями  $S$  и  $S_R$  (рис. 4).

Устремляя радиус  $R$  сферы к бесконечности и учитывая (3.2.7) и (3.2.6), записываем:

$$\begin{aligned} -\bar{M}^e(\bar{z}) &= \begin{cases} 0 & , \bar{z} \in D \\ \bar{u}(\bar{z}) & , \bar{z} \in D_e \end{cases} \\ -\bar{M}^m(\bar{z}) &= \begin{cases} 0 & , \bar{z} \in D \\ \bar{V}(\bar{z}) & , \bar{z} \in D_e \end{cases} \end{aligned}$$

где появление знака "минус" в левых частях связано с тем, что на поверхности  $S$  направление внутренней нормали  $\bar{n}_e$  к области  $D_R$  противоположно принятому ранее положительному направлению нормали к этой поверхности (рис. 4). Таким образом, (3.2.8) доказано.

4. Пусть функции  $\bar{u}(\bar{z})$  и  $\bar{V}(\bar{z})$  непрерывно дифференцируемы вдоль некоторой поверхности  $S$ , ограничивающей конечную область пространства, и удовлетворяют вдоль  $S$  условиям:

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{i}{\mu_0 \omega} \nabla \cdot [\bar{n} \times \bar{V}] \\ V_n &= -\frac{1}{\sigma^*} \nabla \cdot [\bar{n} \times \bar{u}], \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

где  $\sigma^* = \sigma^*(\bar{z})$ , причем  $\sigma^*(\bar{z}) = \sigma(\bar{z})$ ,  $\bar{z} \in S$  (кроме, быть может, множества точек меры нуль).

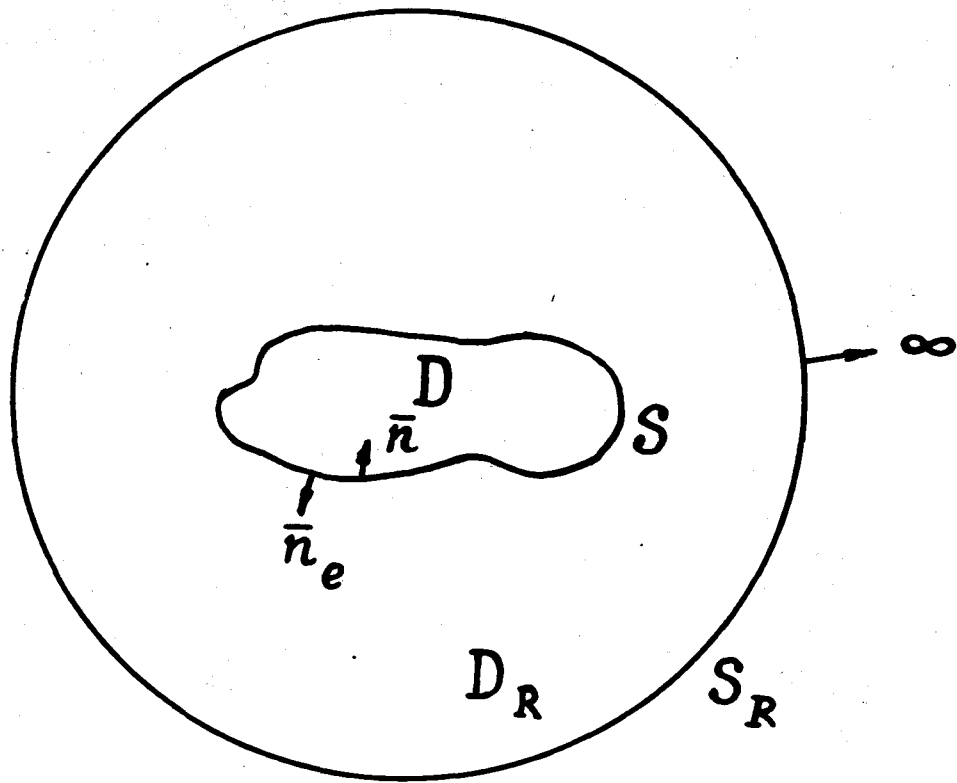
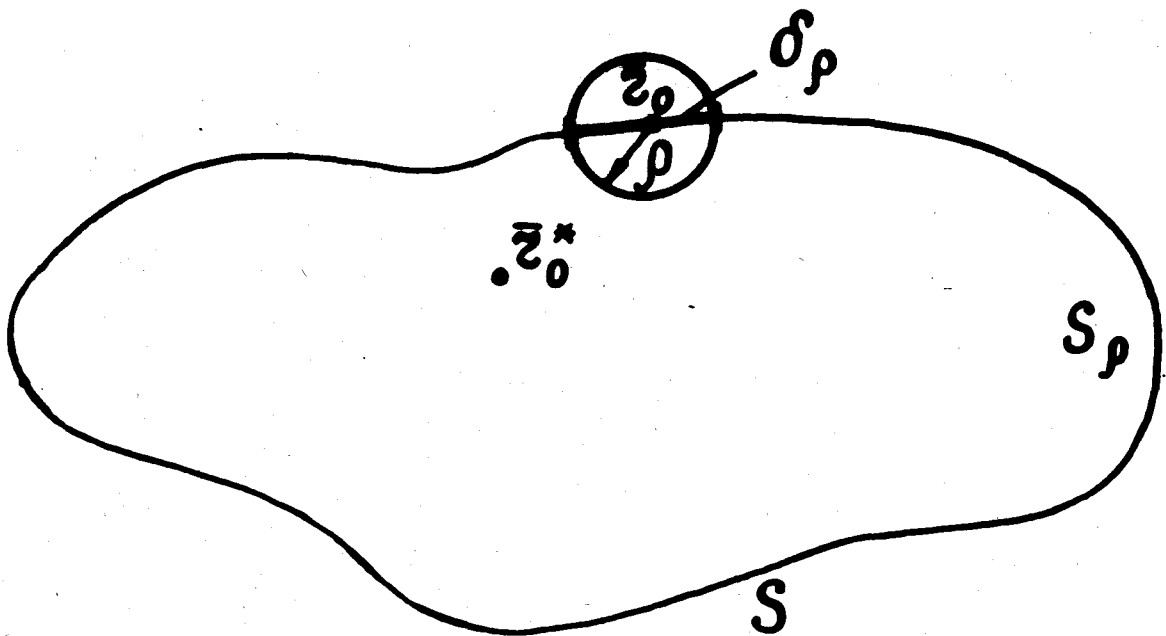


Рис. 4



$$S = S_p \cup \delta_\rho$$

Рис. 5

Тогда на внутренней и внешней сторонах поверхности  $S$  существуют предельные значения интегралов типа Стреттона-Чу, равные (в регулярных точках):

$$\bar{M}_+^e(\bar{z}_0) = \lim_{\substack{\bar{z} \rightarrow \bar{z}_0 \\ (\bar{z} \in D)}} \bar{M}^e(\bar{z}) = \bar{K}_0^e(\bar{z}_0) + \Delta \bar{K}^e(\bar{z}_0) + \frac{1}{2} \bar{u}(\bar{z}_0) \quad (\text{а})$$

$$\bar{M}_+^m(\bar{z}_0) = \lim_{\substack{\bar{z} \rightarrow \bar{z}_0 \\ (\bar{z} \in D)}} \bar{M}^m(\bar{z}) = \bar{K}_0^m(\bar{z}_0) + \Delta \bar{K}^m(\bar{z}_0) + \frac{1}{2} \bar{v}(\bar{z}_0) \quad (\text{б})$$

(3.2.10)

$$\bar{M}_-^e(\bar{z}_0) = \lim_{\substack{\bar{z} \rightarrow \bar{z}_0 \\ (\bar{z} \in D_e)}} \bar{M}^e(\bar{z}) = \bar{K}_0^e(\bar{z}_0) + \Delta \bar{K}^e(\bar{z}_0) - \frac{1}{2} \bar{u}(\bar{z}_0) \quad (\text{в})$$

$$\bar{M}_-^m(\bar{z}_0) = \lim_{\substack{\bar{z} \rightarrow \bar{z}_0 \\ (\bar{z} \in D_e)}} \bar{M}^m(\bar{z}) = \bar{K}_0^m(\bar{z}_0) + \Delta \bar{K}^m(\bar{z}_0) - \frac{1}{2} \bar{v}(\bar{z}_0), \quad (\text{г})$$

где

$$\bar{K}_0^{e,m}(\bar{z}_0) = \hat{F}^s(\hat{G}_0^{e,m}(\bar{z}_0/\bar{z}')) \bar{v} + \hat{\Psi}^s(\hat{G}_0^{e,m}(\bar{z}_0/\bar{z}')) \bar{u}$$

$$\Delta \bar{K}^{e,m}(\bar{z}_0) = \hat{F}^s(\Delta \hat{G}_0^{e,m}(\bar{z}_0/\bar{z}')) \bar{v} + \hat{\Psi}^s(\Delta \hat{G}_0^{e,m}(\bar{z}_0/\bar{z}')) \bar{u},$$

$\hat{G}_0^{e,m}(\bar{z}_0/\bar{z}')$  - функции Грина однородной среды с  $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\bar{z}_0)$ ,

а  $\Delta \hat{G}_0^{e,m}(\bar{z}_0/\bar{z}')$  -  $\hat{G}_0^{e,m}(\bar{z}_0/\bar{z}') - \hat{G}_0^{e,m}(\bar{z}_0/\bar{z}'')$ .

Сингулярные интегралы  $\bar{K}_0^{e,m}$  определяются в смысле главного значения по Коши.

Докажем справедливость (3.2.10а) и (3.2.10б). Возьмем точку  $\bar{z}_0^*$  вне поверхности  $S$ :  $\bar{z}_0^* \in D$  (рис. 5). Очевидно, интегралы  $\bar{M}^{e,m}(\bar{z}_0^*)$  можно представить в виде:

$$\bar{M}^{e,m}(\bar{z}_0^*) = \bar{K}_0^{e,m}(\bar{z}_0^*) + \Delta \bar{K}^{e,m}(\bar{z}_0^*), \quad (3.2.11)$$

где  $\bar{K}_0^{e,m}(\bar{z}_0^*)$  и  $\Delta \bar{K}^{e,m}(\bar{z}_0^*)$  - обыкновенные неособенные интегралы ( $\bar{z}_0^* \notin S, \bar{z}' \in S$ ).



Найдем предельные значения  $\bar{M}^{e,m}(\bar{z}_0^*)$  при  $\bar{z}_0^* \rightarrow \bar{z}_0$   
 ( $\bar{z}_0 \in S, \bar{z}_0^* \in D$ ):

$$\lim_{\bar{z}_0^* \rightarrow \bar{z}_0} \bar{M}^{e,m}(\bar{z}_0^*) = \lim_{\bar{z}_0^* \rightarrow \bar{z}_0} \{ \bar{K}_0^{e,m}(\bar{z}_0^*) + \Delta \bar{K}^{e,m}(\bar{z}_0^*) \} \quad (3.2.12)$$

Заметим предварительно, что

$$\begin{aligned} \Delta \bar{K}^{e,m}(\bar{z}_0^*) &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \{ [\hat{F}^{S_\rho}(\hat{G}^{e,m}) - \hat{F}^{S_\rho}(\hat{G}_0^{e,m})] \bar{V} + \\ &+ [\hat{\Psi}^{S_\rho}(\hat{G}^{e,m}) - \hat{\Psi}^{S_\rho}(\hat{G}_0^{e,m})] \bar{u} \} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \{ \hat{F}^{S_\rho}(\Delta \hat{G}^{e,m}) \bar{V} + \hat{\Psi}^{S_\rho}(\Delta \hat{G}^{e,m}) \bar{u} \}, \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

где  $\bar{z}' \in S$ , а  $S_\rho = S \setminus \delta_\rho$  - часть поверхности  $S$ , из которой вырезана область  $\delta_\rho$  сферой с центром в точке  $\bar{z}_0$  и радиусом  $\rho$  (рис. 5).

Тогда, с учетом (3.2.13), можно записать:

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{z}_0^* \rightarrow \bar{z}_0} \Delta \bar{K}^{e,m}(\bar{z}_0^*) &= \lim_{\bar{z}_0^* \rightarrow \bar{z}_0} \lim_{\rho \rightarrow 0} \{ \hat{F}^{S_\rho}(\Delta \hat{G}^{e,m}(\bar{z}_0^*/\bar{z}')) \bar{V} + \hat{\Psi}^{S_\rho}(\Delta \hat{G}^{e,m}(\bar{z}_0^*/\bar{z}')) \bar{u} \} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \{ \hat{F}^{S_\rho}(\Delta \hat{G}^{e,m}(\bar{z}_0/\bar{z}')) \bar{V} + \hat{\Psi}^{S_\rho}(\Delta \hat{G}^{e,m}(\bar{z}_0/\bar{z}')) \bar{u} \} \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

где учтено, что, согласно [16], существует конечный предел

$$\lim_{\bar{z}' \rightarrow \bar{z}_0} \Delta \hat{G}^{e,m}(\bar{z}_0/\bar{z}').$$

Следовательно, предел (3.2.14) существует как обыкновенный несобственный интеграл:

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{z}_0^* \rightarrow \bar{z}_0} \Delta \bar{K}^{e,m}(\bar{z}_0^*) &= \hat{F}^S(\Delta \hat{G}^{e,m}(\bar{z}_0/\bar{z}')) \bar{V} + \hat{\Psi}^S(\Delta \hat{G}^{e,m}(\bar{z}_0/\bar{z}')) \bar{u} = \\ &= \Delta \bar{K}^{e,m}(\bar{z}_0) \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Интегралы  $\bar{K}_0^{e,m}(\bar{z}_0^*)$  являются обычными интегралами типа Страттона-Чу для однородной среды, поэтому их пределы определяются известными выражениями [2]:

$$\lim_{\substack{\bar{z}_0^* \rightarrow \bar{z}_0 \\ (\bar{z}_0^* \in D)}} \bar{K}_0^e(\bar{z}_0^*) = \bar{K}_0^e(\bar{z}_0) + \frac{1}{2} \bar{u}(\bar{z}_0) \quad (3.2.16)$$

$$\lim_{\substack{\bar{z}_0^* \rightarrow \bar{z}_0 \\ (\bar{z}_0^* \in D)}} \bar{K}_0^m(\bar{z}_0^*) = \bar{K}_0^m(\bar{z}_0) + \frac{1}{2} \bar{V}(\bar{z}_0)$$

Подставляя (3.2.15) и (3.2.16) в (3.2.12), получаем (3.2.10а) и (3.2.10б), что и требовалось доказать. Аналогично доказываются (3.2.10в) и (3.2.10г) (при этом  $\bar{z}_0^* \in D_e$ ).

Из (3.2.10), в частности, следует, что

$$\begin{aligned} \bar{M}_+^e - \bar{M}_-^e &= \bar{u}(\bar{z}_0) \\ \bar{M}_+^m - \bar{M}_-^m &= \bar{V}(\bar{z}_0), \bar{z}_0 \in S \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Формулы (3.2.10) и (3.2.17) можно рассматривать как электромагнитные аналоги формул Сохоцкого-Племеля [ 2 ].

5. Пусть функции  $\bar{u}$  и  $\bar{V}$  непрерывно-дифференцируемы вдоль некоторой гладкой поверхности  $S$ , ограничивающей конечную область пространства, и удовлетворяют вдоль  $S$  условиям (3.2.9).

Для того, чтобы функции  $\bar{u}$  и  $\bar{V}$ , заданные лишь на  $S$ , были граничными значениями некоторых функций  $\bar{M}^e(\bar{z})$  и  $\bar{M}^m(\bar{z})$ , удовлетворяющих в  $D$  уравнениям Максвелла, необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} F^s(\hat{G}^e(\bar{z}|\bar{z}')) \bar{V} + \hat{\Psi}^s(\hat{G}^e(\bar{z}|\bar{z}')) \bar{u} &= 0 \\ F^s(\hat{G}^m(\bar{z}|\bar{z}')) \bar{V} + \hat{\Psi}^s(\hat{G}^m(\bar{z}|\bar{z}')) \bar{u} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

для всех  $\bar{z} \in \bar{D}$ .

Необходимость (3.2.18) вытекает из формул (3.2.6).

Покажем, что это условие также достаточно.

Положим

$$\bar{M}^e(\bar{z}) = \hat{F}^s(\hat{G}^e(\bar{z}/\bar{z}'))\bar{V} + \hat{\Psi}^s(\hat{G}^e(\bar{z}/\bar{z}'))\bar{u}$$

Тогда, в силу (3.2.18),

$$\bar{M}_-^e(\bar{z}_0) = 0, \quad \bar{z}_0 \in S.$$

Следовательно, на основании (3.2.17),

$$\bar{M}_+^e(\bar{z}_0) = \bar{u}(\bar{z}_0) \quad (3.2.19)$$

Аналогично, если положить

$$\bar{M}^m(\bar{z}) = \hat{F}^s(\hat{G}^m(\bar{z}/\bar{z}'))\bar{V} + \hat{\Psi}^s(\hat{G}^m(\bar{z}/\bar{z}'))\bar{u},$$

то

$$\bar{M}_+(\bar{z}_0) = \bar{V}(\bar{z}_0), \quad \bar{z}_0 \in S. \quad (3.2.20)$$

Соотношения (3.2.19) и (3.2.20) и доказывают сделанные утверждения.

Рассмотрим некоторые приложения развитой выше теории к решению задач электромагнетизма.

### 3.3. Разделение электромагнитных полей в горизонтально-слоистой среде

При решении широкого класса физических задач и, в частности, при изучении естественного переменного электромагнитного поля Земли, часто возникает проблема разделения электромагнитного поля, заданного на некоторой (в частности, земной) поверхности, на внешнюю и внутреннюю или нормальную и аномальную части.

Задача разделения электромагнитного поля, заданного на произвольной поверхности, на внешнюю и внутреннюю части в однородной среде решена в [2] с помощью аппарата обычных интегралов типа Стреттона-Чу. В этой же работе дано решение задачи о разде-

лении поля на нормальную и аномальную части с помощью спектральных разложений (в предположении, что поле задано на горизонтальной поверхности границы раздела Земля-Воздух). В то же время, для разделения на нормальную и аномальную части электромагнитного поля, измеренного на произвольной криволинейной поверхности, например, в толще океана, требуется применение обобщенных интегралов типа Стреттона-Чу для неоднородных сред. В пп. 3.1 и 3.2 настоящей главы развит необходимый математический аппарат для решения такой задачи.

### 3.3.1. Постановка задачи

Пусть горизонтально-слоистый разрез Земли с электропроводностью  $\sigma_n = \sigma_n(z)$  осложнен трехмерной неоднородностью, локализованной в области  $D$  (существенна лишь ограниченность размеров неоднородности по вертикали), электропроводность  $\sigma_D$  внутри которой есть

$$\sigma_D = \sigma_n(z) + \sigma_\alpha(x, y, z),$$

где  $\sigma_\alpha(x, y, z)$  - произвольная функция координат. Модель возбуждается сторонними токами, текущими с плотностью  $\vec{j}^a$  в области  $Q$  атмосферы (рис. 6).

Пусть электромагнитное поле  $(\vec{E}, \vec{H})$  измерено на некоторой поверхности  $\Gamma$ , простирающейся влево и вправо в бесконечность и имеющей произвольный рельеф. Верхнее полупространство, ограниченное  $\Gamma$ , обозначим  $V_+$ , а нижнее -  $V_-$ . Требуется разделить поле на нормальное  $(\vec{E}^n, \vec{H}^n)$  и аномальное  $(\vec{E}^a, \vec{H}^a)$  поля, обусловленные, соответственно, сторонними токами  $\vec{j}^a$  и избыточными токами  $\vec{j}^D = \sigma_\alpha(x, y, z)\vec{E}$ , текущими в неоднородности  $D$ .

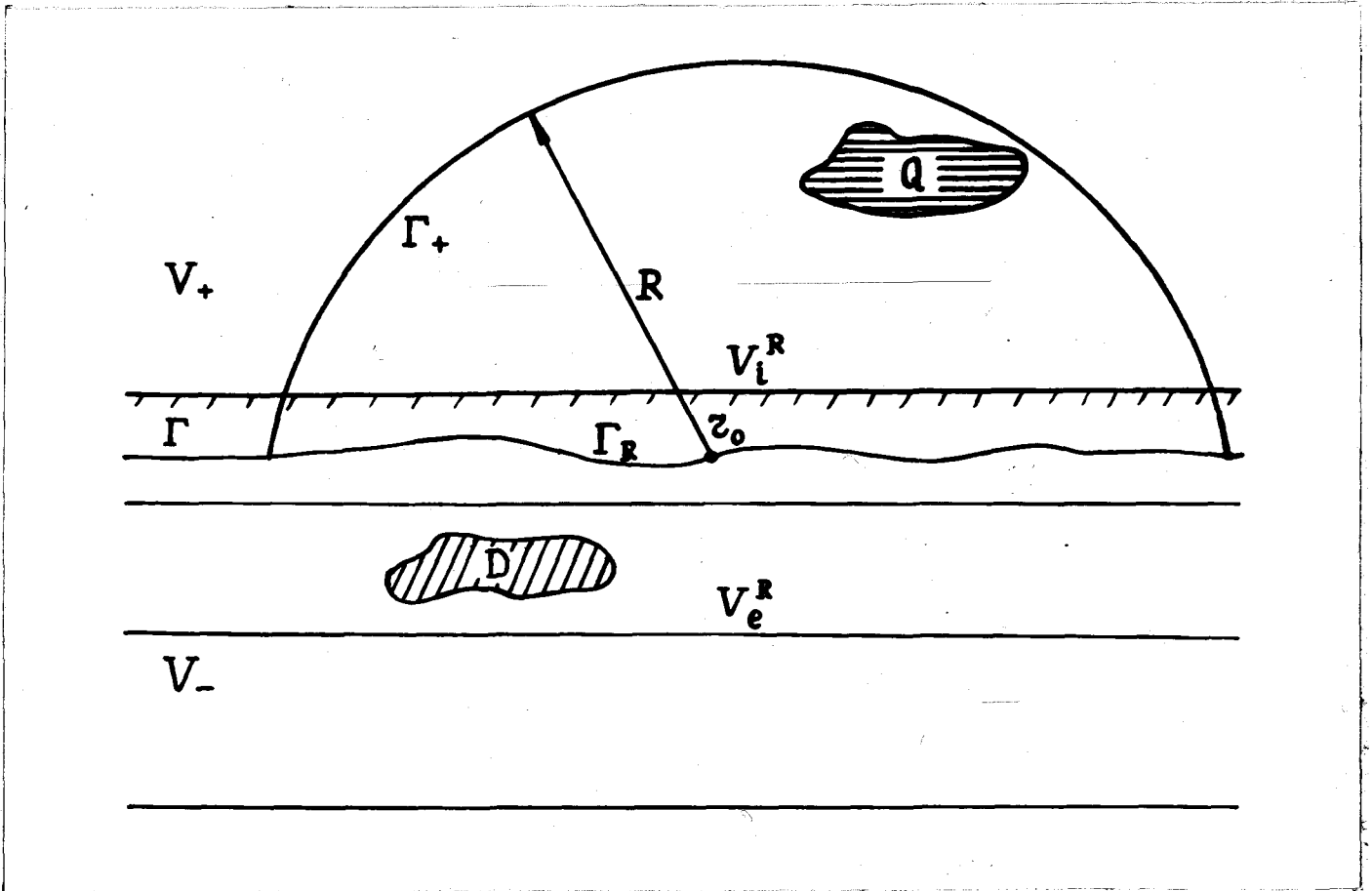


Рис. 6. Разделение электромагнитного поля, заданного на поверхности  $\Gamma$ , на нормальную и аномальную части.

### 3.3.2. Применение интегралов типа Стреттона-Чу для разделения электромагнитных полей в горизонтально-слоистой среде

Схема применения аппарата интегралов типа Стреттона-Чу в неоднородной среде для решения поставленной задачи полностью аналогична приведенной в [2] для более простого случая разделения поля на внешнюю и внутреннюю части.

Выберем на поверхности  $\Gamma$  точку  $\bar{z}_0$  и опишем из нее сферу радиуса  $R$  так, чтобы область источника  $Q$  оказалась внутри сферы. Пусть  $\Gamma_+$  - часть сферы, лежащая в  $V_+$ , а  $\Gamma_R$  - часть поверхности  $\Gamma$ , находящаяся внутри сферы. Рассмотрим интегралы типа Стреттона-Чу по замкнутой кусочно-гладкой поверхности  $S^R = \Gamma_+ \cup \Gamma_R$  :

$$\bar{M}^{e,m}(\bar{z}) = \hat{F}^{S^R}(\hat{G}_n^{e,m})\bar{H} + \hat{\Psi}^{S^R}(\hat{G}_n^{e,m})\bar{E}, \quad (3.3.1)$$

где  $\hat{G}_n^{e,m}$  - "электрическая" и "магнитная" тензорные функции Грина нормального горизонтально-слоистого разреза  $\sigma_n$ .

Представим  $\bar{M}^{e,m}(\bar{z})$  в виде суммы

$$\bar{M}^{e,m}(\bar{z}) = \bar{M}_n^{e,m}(\bar{z}) + \bar{M}_a^{e,m}(\bar{z}),$$

в которой интегралы  $\bar{M}_n^{e,m}(\bar{z})$  и  $\bar{M}_a^{e,m}(\bar{z})$  определяются по значениям нормального  $(\bar{E}^n, \bar{H}^n)$  и аномального  $(\bar{E}^a, \bar{H}^a)$  электромагнитных полей:

$$\bar{M}_n^{e,m}(\bar{z}) = \hat{F}^{S^R}(\hat{G}_n^{e,m})\bar{H}^n + \hat{\Psi}^{S^R}(\hat{G}_n^{e,m})\bar{E}^n$$

$$\bar{M}_a^{e,m}(\bar{z}) = \hat{F}^{S^R}(\hat{G}_n^{e,m})\bar{H}^a + \hat{\Psi}^{S^R}(\hat{G}_n^{e,m})\bar{E}^a$$

Нормальное электромагнитное поле вне области  $Q$  удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned}\nabla \times \bar{H}^n &= \sigma_n \bar{E}^n \\ \nabla \times \bar{E}^n &= i\omega\mu_0 \bar{H}^n, \quad \bar{x} \in V_i^R\end{aligned}$$

и исчезает в бесконечности. Поэтому, согласно (3.2.8),

$$\bar{M}_n^e(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & , \quad \bar{x} \in V_i^R \\ -\bar{E}^n(\bar{x}) & , \quad \bar{x} \in V_e^R \end{cases} \quad (3.3.2a)$$

$$\bar{M}_n^m(\bar{x}) = \begin{cases} 0 & , \quad \bar{x} \in V_i^R \\ -\bar{H}^n(\bar{x}) & , \quad \bar{x} \in V_e^R \end{cases} \quad (3.3.2b)$$

где  $V_i^R$  и  $V_e^R$  - области, внутренняя и внешняя по отношению к  $S^R$ .

Аномальное электромагнитное поле в  $V_i^R \subset V_+$  удовлетворяет уравнениям:

$$\begin{aligned}\nabla \times \bar{H}^a &= \sigma_n \bar{E}^a \\ \nabla \times \bar{E}^a &= i\omega\mu_0 \bar{H}^a, \quad \bar{x} \in V_i^R \subset V_+.\end{aligned}$$

Следовательно, согласно (3.2.6),

$$\bar{M}_a^e(\bar{x}) = \begin{cases} \bar{E}^a(\bar{x}) & , \quad \bar{x} \in V_i^R \\ 0 & , \quad \bar{x} \in V_e^R \end{cases} \quad (3.3.3a)$$

$$\bar{M}_a^m(\bar{x}) = \begin{cases} \bar{H}^a(\bar{x}) & , \quad \bar{x} \in V_i^R \\ 0 & , \quad \bar{x} \in V_e^R \end{cases} \quad (3.3.3b)$$

Суммируем (3.3.2a) и (3.3.3a), а также (3.3.2b) и (3.3.3b):

$$\bar{M}^e(\bar{z}) = \begin{cases} \bar{E}^\alpha(\bar{z}) & , \bar{z} \in V_i^R \\ -\bar{E}^n(\bar{z}) & , \bar{z} \in V_e^R \end{cases} \quad (3.3.4a)$$

$$\bar{M}^m(\bar{z}) = \begin{cases} \bar{H}^\alpha(\bar{z}) & , \bar{z} \in V_i^R \\ -\bar{H}^n(\bar{z}) & , \bar{z} \in V_e^R \end{cases} \quad (3.3.4b)$$

Без ограничения общности можно считать, что электрическое и магнитное поля непрерывны по обе стороны от поверхности  $\Gamma$  (точки  $\Gamma$ , где это условие не выполняется, исключим из рассмотрения). Следовательно, существуют пределы

$$\bar{M}_\alpha^e(\bar{z}_0) = \lim_{\substack{\bar{z} \rightarrow \bar{z}_0 \\ (\bar{z} \in V_i^R)}} \bar{M}^e(\bar{z}) = \bar{E}^\alpha(\bar{z}_0) \quad (3.3.5a)$$

$$\bar{M}_n^e(\bar{z}_0) = \lim_{\substack{\bar{z} \rightarrow \bar{z}_0 \\ (\bar{z} \in V_e^R)}} \bar{M}^e(\bar{z}) = -\bar{E}^n(\bar{z}_0) \quad (3.3.5b)$$

$$\bar{M}_\alpha^m(\bar{z}_0) = \lim_{\substack{\bar{z} \rightarrow \bar{z}_0 \\ (\bar{z} \in V_i^R)}} \bar{M}^m(\bar{z}) = \bar{H}^\alpha(\bar{z}_0) \quad (3.3.6a)$$

$$\bar{M}_n^m(\bar{z}_0) = \lim_{\substack{\bar{z} \rightarrow \bar{z}_0 \\ (\bar{z} \in V_e^R)}} \bar{M}^m(\bar{z}) = -\bar{H}^n(\bar{z}_0) \quad (3.3.6b)$$

С другой стороны, предельные значения  $\bar{M}^{e,m}$  можно найти по формулам (3.2.10):

$$\bar{M}_\alpha^e(\bar{z}_0) = \bar{K}_0^e(\bar{z}_0) + \Delta \bar{K}^e(\bar{z}_0) + \frac{1}{2} \bar{E}(\bar{z}_0) \quad (3.3.7a)$$

$$\bar{M}_n^e(\bar{z}_0) = \bar{K}_0^e(\bar{z}_0) + \Delta \bar{K}^e(\bar{z}_0) - \frac{1}{2} \bar{E}(\bar{z}_0) \quad (3.3.7b)$$

$$\bar{M}_\alpha^m(\bar{z}_0) = \bar{K}_0^m(\bar{z}_0) + \Delta \bar{K}^m(\bar{z}_0) + \frac{1}{2} \bar{H}(\bar{z}_0) \quad (3.3.8a)$$



$$\bar{M}_n^m(\bar{z}_0) = \bar{K}_0^m(\bar{z}_0) + \Delta \bar{K}^m(\bar{z}_0) - \frac{1}{2} \bar{H}(\bar{z}_0), \quad (3.3.86)$$

где сингулярные интегралы

$$\bar{K}_0^e(\bar{z}_0) = \iint_{S_R} \{ i\omega\mu_0 \hat{G}_0^e[\bar{n} \times \bar{H}] + [\nabla \times \hat{G}_0^e][\bar{n} \times \bar{E}] \} ds' \quad (3.3.9)$$

$$\bar{K}_0^m(\bar{z}_0) = \iint_{S_R} \{ i\omega\mu_0 \hat{G}_0^m[\bar{n} \times \bar{H}] + [\nabla \times \hat{G}_0^m][\bar{n} \times \bar{E}] \} ds'$$

определяются в смысле главного значения по Коши.\*)

Приравнивая (3.3.5а) и (3.3.7а), (3.3.5б) и (3.3.7б), (3.3.6а) и (3.3.8а), (3.3.6б) и (3.3.8б), получаем:

$$\begin{aligned} \bar{E}^a(\bar{z}_0) &= \frac{1}{2} \bar{E}(\bar{z}_0) + \bar{K}_0^e(\bar{z}_0) + \Delta \bar{K}^e(\bar{z}_0) \\ \bar{E}^n(\bar{z}_0) &= \frac{1}{2} \bar{E}(\bar{z}_0) - \bar{K}_0^e(\bar{z}_0) - \Delta \bar{K}^e(\bar{z}_0) \\ \bar{H}^a(\bar{z}_0) &= \frac{1}{2} \bar{H}(\bar{z}_0) + \bar{K}_0^m(\bar{z}_0) + \Delta \bar{K}^m(\bar{z}_0) \\ \bar{H}^n(\bar{z}_0) &= \frac{1}{2} \bar{H}(\bar{z}_0) - \bar{K}_0^m(\bar{z}_0) - \Delta \bar{K}^m(\bar{z}_0) \end{aligned} \quad (3.3.10)$$

Перейдем теперь к пределу при  $R \rightarrow \infty$ . Тогда, в силу условия излучения на бесконечности, интегралы  $\bar{K}_0^{e,m}$  и  $\Delta \bar{K}^{e,m}$  по полусфере  $\Gamma_+$  стремятся к нулю и остается лишь интегрирование по поверхности  $\Gamma$ .

Таким образом, формулы (3.3.10) дают решение поставленной задачи.

Отметим, что в случае однородного нормального разреза

---

ж) Правые части (3.3.9) можно преобразовать так, чтобы в них вместо тензоров  $\hat{G}_0^{e,m}$  входила лишь одна скалярная функция Грина однородного пространства с  $G = G(\bar{z}_0)$  (см. п. 3.2).

( $\sigma_n(z) = \sigma = const$ ) интегралы  $\Delta \bar{K}^m(\bar{z}_0) \equiv \Delta \bar{K}^e(\bar{z}_0) = 0$ , и формулы (3.3.10) переходят в известные формулы разделения поля на внешнюю и внутреннюю части:

$$\bar{E}^a(\bar{z}_0) = \frac{1}{2} \bar{E}(\bar{z}_0) + \bar{K}_0^e(\bar{z}_0)$$

$$\bar{E}^n(\bar{z}_0) = \frac{1}{2} \bar{E}(\bar{z}_0) - \bar{K}_0^e(\bar{z}_0)$$

(3.3.11)

$$\bar{H}^a(\bar{z}_0) = \frac{1}{2} \bar{H}(\bar{z}_0) + \bar{K}_0^m(\bar{z}_0)$$

$$\bar{H}^n(\bar{z}_0) = \frac{1}{2} \bar{H}(\bar{z}_0) - \bar{K}_0^m(\bar{z}_0)$$

#### 3.4. Построение интегральных краевых условий для векторов поля

##### 3.4.1. Интегральные соотношения между компонентами электромагнитного поля

Интегральные связи между компонентами электромагнитного поля, устанавливаемые с помощью аппарата функций Грина, широко используются для численного моделирования трехмерных неоднородностей в геоэлектрике (см. главу I). В частности, метод объемных интегральных уравнений (МИУ) основан на применении формулы (I.3.1), а в гибридных схемах аномальные токи интегрируются по формуле (I.3.5).

С другой стороны, как отмечалось в главе I, с вычислительной точки зрения более эффективными могут быть интегральные соотношения, записываемые по поверхности, а не по объему, неоднородности. Так, в работе [22] такие соотношения были записаны для случая, когда электропроводность внутри неоднородности постоянна, тогда как в работах [14, 32] предполагалось, что она может ступенчато изменяться вдоль одного направления.

На основании описанной выше обобщенной теории интегралов типа Стреттона-Чу можно записать интегральные соотношения между компонентами электромагнитного поля по поверхности неоднородности, внутри которой электропроводность изменяется по произвольному закону.

Действительно, пусть неоднородность  $D$  с заданным распределением электропроводности  $\sigma = \sigma(\bar{z})$  ( $\bar{z} \in D$ ) погружена в горизонтально-слоистую среду с  $\sigma = \sigma_n(z)$  ( $\bar{z} \in D$ ). Потребуем также, чтобы  $\lim_{\substack{\bar{z} \rightarrow \bar{z}^s \\ (\bar{z} \in D)}} \sigma_a(\bar{z}) = 0$  (где  $\bar{z}^s$  - точка на поверхности  $S$ ).

Тогда на основании (3.2.6), (3.2.10в, г) и (3.3.10) для каждой точки поверхности  $S$  можно записать:

$$\frac{1}{2} \bar{E}(\bar{z}_0) = \bar{E}^n(\bar{z}_0) + \bar{K}_0^e(\bar{z}_0) + \Delta \bar{K}^e(\bar{z}_0) \quad (3.4.1)$$

$$\frac{1}{2} \bar{H}(\bar{z}_0) = \bar{H}^n(\bar{z}_0) + \bar{K}_0^m(\bar{z}_0) + \Delta \bar{K}^m(\bar{z}_0),$$

где  $\bar{z}_0 \in S$ ,  $\bar{E}^n$  и  $\bar{H}^n$  - нормальные поля, удовлетворяющие уравнениям

$$\nabla \times \bar{H}^n = \sigma_n(z) \bar{E}^n$$

$$\nabla \times \bar{E}^n = i\omega\mu_0 \bar{H}^n,$$

а  $\bar{K}_0^{e,m}(\bar{z}_0)$  и  $\Delta \bar{K}^{e,m}(\bar{z}_0)$  - интегралы, определенные ранее в п.3.2.2.

С учетом (3.3.9) и (3.1.1) интегральные формулы (3.4.1) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \bar{E}(\bar{z}_0) = & \bar{E}^n(\bar{z}_0) + \iint_S \{ [\nabla \times \hat{G}_0^e][\bar{n} \times \bar{E}] + \hat{G}_0^e[\bar{n} \times \nabla \times \bar{E}] \} ds + \\ & + \iint_S \{ [\nabla \times \Delta \hat{G}^e][\bar{n} \times \bar{E}] + \Delta \hat{G}^e[\bar{n} \times \nabla \times \bar{E}] \} ds \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \bar{H}(\bar{z}_0) = \bar{H}^n(\bar{z}_0) + \iint_S \{ i\omega\mu_0 \hat{G}_0^m [\bar{n} \times \bar{H}] + \frac{1}{\mathcal{O}} [\nabla \times \hat{G}_0^m] [\bar{n} \times \nabla \times \bar{H}] \} ds +$$

$$+ \iint_S \{ i\omega\mu_0 \Delta \hat{G}^m [\bar{n} \times \bar{H}] + \frac{1}{\mathcal{O}} [\nabla \times \Delta \hat{G}^m] [\bar{n} \times \nabla \times \bar{H}] \} ds, \quad (3.4.2)$$

где, как и ранее,  $\Delta \hat{G}^{e,m} = \hat{G}_1^{e,m} - \hat{G}_0^{e,m}$ ,  $\hat{G}_1^{e,m}$  и  $\hat{G}_0^{e,m}$  — электромагнитные тензоры Грина внешней (слоистой) среды и свободного пространства с  $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\bar{z}_0)$ , соответственно.

### 3.4.2. Применение интегральных краевых условий в гибридной схеме моделирования

Как известно, трудности применения сеточных методов для численного моделирования трехмерных электромагнитных полей связаны с необходимостью выбора "избыточной" области решения задачи для задания возможно более точных краевых условий. В то же время, аппроксимация объемного интегрального уравнения относительно электрического или магнитного полей приводит к заполненной матрице системы линейных алгебраических уравнений и, как следствие, к трудностям "технологического" характера, связанным с ее обращением.

Полученные выше соотношения (3.4.2) можно рассматривать как интегральные краевые условия для значений поля в точках поверхности  $S$ . Использование таких краевых условий позволяет ограничиться решением краевой задачи только для аномальной области. При этом внутри такой области соответствующие уравнения могут быть записаны с помощью одного из методов дифференциальных уравнений.

Сочетание применения точных интегральных соотношений (3.4.2) в узлах на границе и одного из методов дифференциальных уравне-

ний внутри области может быть основой гибридной схемы численного моделирования нового типа. Характерной особенностью этой схемы, отличающей ее от предложенных ранее, является то, что интегрирование по объему аномальной области (по формуле (1.3.5) из главы I) заменено в ней интегрированием лишь по ее поверхности. При численной реализации такого подхода это обстоятельство имеет важное значение, так как позволяет снизить требования к ресурсам используемой ЭВМ (за счет уменьшения заполненности матрицы системы уравнений) и, следовательно, повысить эффективность гибридного метода в целом.

В заключение добавим, что предложенная гибридная схема может быть использована как в прямом, так и в итерационном вариантах (см. п. 1.3.3 главы I).

Аппарат интегралов типа Страттона-Чу, обобщенный в настоящей главе для неоднородных сред, позволил нам сформулировать интегральные краевые условия, которые можно записать по поверхности рассматриваемой области (в частности, совпадающей с аномальной).

К сожалению, из-за сингулярного характера интегралов, входящих в (3.4.2) и (3.4.3), численная реализация таких краевых условий сопряжена с рядом вычислительных трудностей (см. п. 1.3.1 главы I). В следующей главе мы рассмотрим менее точные, но, с вычислительной точки зрения, более простые краевые условия, основанные на асимптотическом представлении электромагнитных полей вдали от неоднородностей.

Г л а в а IУ

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

4.1. Связь между интегральными и асимптотическими  
краевыми условиями

Покажем, что интегральные краевые условия при увеличении размеров области моделирования можно заменить дифференциальными асимптотическими краевыми условиями. Рассмотрим с этой целью модельный пример. Пусть все неоднородности среды, имеющей постоянную электропроводность  $\sigma$ , заключены в некоторой области, ограниченной сферической поверхностью  $S_R$  (рис. 7).

Возьмем точку  $\bar{e}$  в области  $D_e$ , внешней по отношению к поверхности  $S_R$ , и запишем интегральные соотношения, связывающие электрическое поле в этой точке с его значениями в точках поверхности  $S_R$ :

$$\bar{E}^{\alpha}(\bar{e}) = \iint_{S_R} \{ [\bar{n} \times \nabla \times \bar{E}^{\alpha}] G + (\bar{n} \bar{E}^{\alpha}) \nabla' G + [ [\bar{n} \times \bar{E}^{\alpha}] \times \nabla' G ] \} ds', \quad (4.1.1)$$

где  $G = \frac{e^{ikr}}{4\pi r}$  - функция Грина среды,  $r = |\bar{e} - \bar{e}'|$ ,  $\bar{e}' \in S_R$ .

Если выбирать точки  $\bar{e}$  достаточно близко к поверхности  $S_R$ , то интегральное соотношение (4.1.1) можно использовать в качестве интегрального краевого условия при решении краевой задачи в области, ограниченной поверхностью  $S_R$ . (Аналогичное краевое условие было предложено в работе [83]). Недостатком такого подхода как уже отмечалось выше, является то, что все граничные значения оказываются при этом взаимосвязанными, что снижает вычислительную эффективность используемых краевых условий.

С другой стороны, если в (4.1.1) устремить точку наблюдения  $\bar{e}$  в бесконечность, то можно получить менее точные, но, с вычислительной точки зрения, более эффективные асимптотические

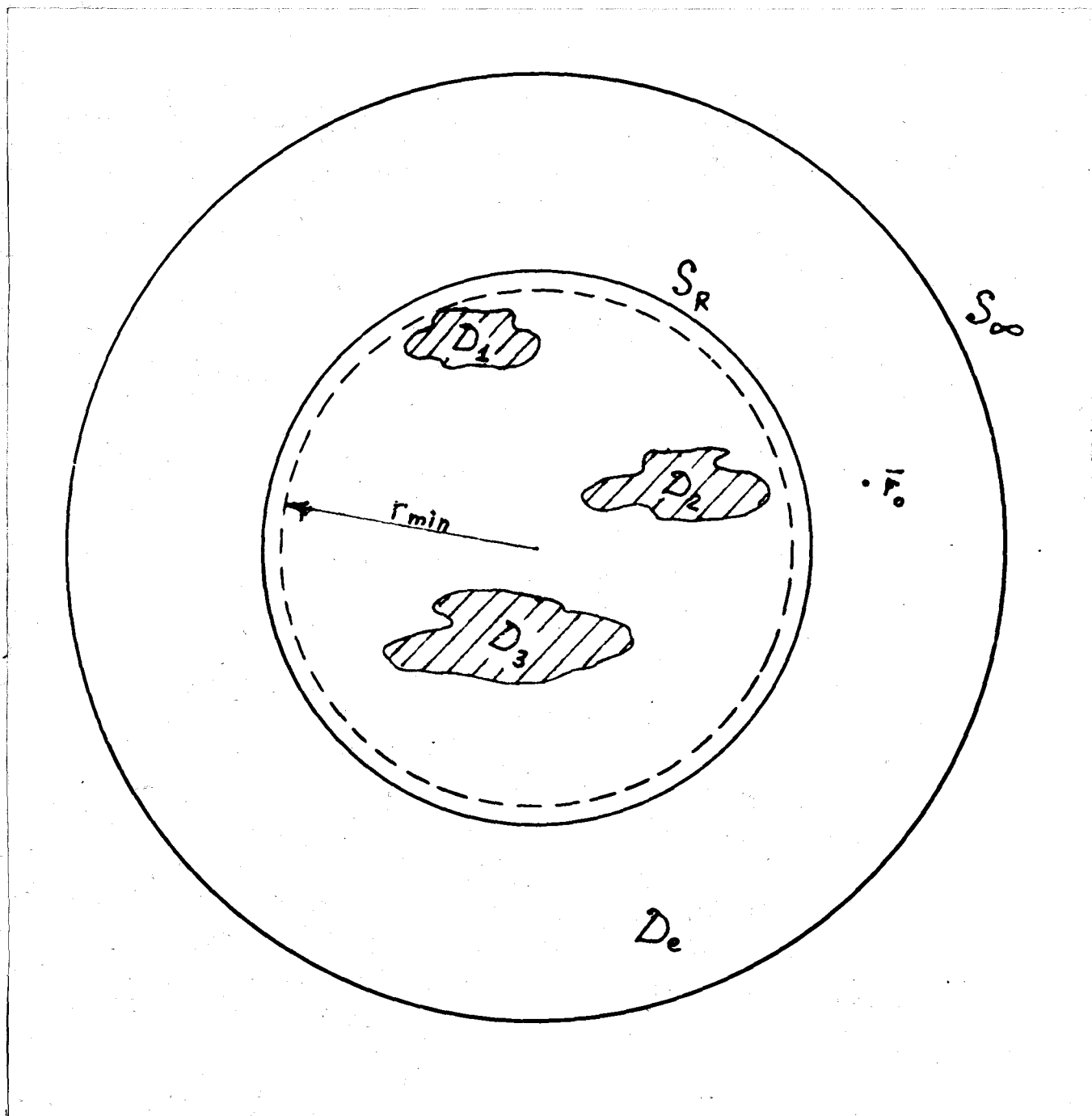


Рис. 7.

краевые условия.

Рассмотрим с этой целью асимптотику функции Грина при  $\bar{z} \rightarrow \infty$ . Согласно [30, с. 198] мы можем записать:

$$G = \frac{e^{ik|\bar{z}-\bar{z}'|}}{4\pi|\bar{z}-\bar{z}'|} \rightarrow \frac{e^{ikz}}{4\pi z} e^{-ik\hat{z}\cdot\bar{z}'}, \quad (4.1.2)$$

где  $z = |\bar{z}|$ ,  $\hat{z} = \bar{z}/z$ ,

$$\nabla'G \rightarrow -ik\hat{z} \frac{e^{ikz}}{4\pi z} e^{-ik\hat{z}\cdot\bar{z}'} \quad (4.1.3)$$

Подставим формулы (4.1.2) и (4.1.3) в (4.1.1):

$$\begin{aligned} \bar{E}^a(\bar{z}) = \frac{e^{ikz}}{4\pi z} \iint \{ [\bar{n} \times \nabla \times \bar{E}^a] - (\bar{n} \bar{E}^a) ik\hat{z} - \\ - [(\bar{n} \times \bar{E}^a) \times \hat{z}] \} e^{-ik\hat{z}\cdot\bar{z}'} ds' \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Так как интеграл в правой части (4.1.4) не зависит от  $z$ , то обозначая его через  $\bar{I}$  и дифференцируя обе части (4.1.4) по  $z$ , получим:

$$\frac{\partial \bar{E}^a}{\partial z} = \frac{\bar{I}}{4\pi} \left( \frac{ike^{ikz}}{z} - \frac{e^{ikz}}{z^2} \right) \quad (4.1.5)$$

Или, учитывая (4.1.4):

$$\bar{E}^a - ikz \bar{E}^a + z \frac{\partial \bar{E}^a}{\partial z} = 0 \quad (4.1.6)$$

Таким образом, на достаточно большом расстоянии  $z$  справедливо дифференциальное асимптотическое соотношение (4.1.6), эквивалентное условию излучения Зоммерфельда [84]. Заметим, что при его численной реализации связанными друг с другом оказываются лишь узлы в окрестности рассматриваемой точки границы области моделирования и, следовательно, соответствующая часть



матрицы системы линейных алгебраических уравнений имеет ленточную структуру.

Аналогично, оценивая асимптотику интегралов, входящих в интегральные краевые условия (3.4.2), можно было бы получить дифференциальные асимптотические краевые условия и в более общем случае горизонтально-слоистых сред.

Как уже отмечалось выше, при численном моделировании электромагнитных полей над трехмерными геоэлектрическими неоднородностями наиболее острой является проблема выбора достаточно точных краевых условий в непроводящей среде (атмосфере). Для получения таких условий мы воспользуемся несколько иным подходом, более эффективным для решения этой задачи.

#### 4.2. Постановка задачи

Рассмотрим геоэлектрическую модель, в которой двумерный разрез осложнен трехмерной неоднородностью (заключенной в конечной области  $V_{3D}$ ) с произвольным распределением электропроводности (рис. 3):

$$\sigma = \sigma(\bar{R}) = \begin{cases} \sigma_{(1,2)}(x, z) & ; \bar{R} \notin V_{3D} \\ \sigma_{(1,2)}(x, z) + \sigma_{(3)}(x, y, z); & \bar{R} \in V_{3D}, \end{cases} \quad (4.2.1)$$

где  $\bar{R}(x, y, z)$  - радиус-вектор точки наблюдения, а  $\sigma_{(1,2)}$  и  $\sigma_{(3)}$  определяются согласно (п. 1.2.1) из главы I.

Сечение двумерного разреза изображено на рис. 8. Он состоит из проводящей Земли, контактирующей при  $z = 0$  с непроводящей атмосферой  $V_0$ . В Земле выделяются прямоугольная область  $V_a$  с произвольным двумерным распределением электропроводности и три области, где электропроводность меняется лишь по  $z$ : область  $V_n^L$  (левый нормальный разрез), область  $V_n^R$  (правый нормальный разрез) и область  $V_n$  (нижний нормальный разрез):

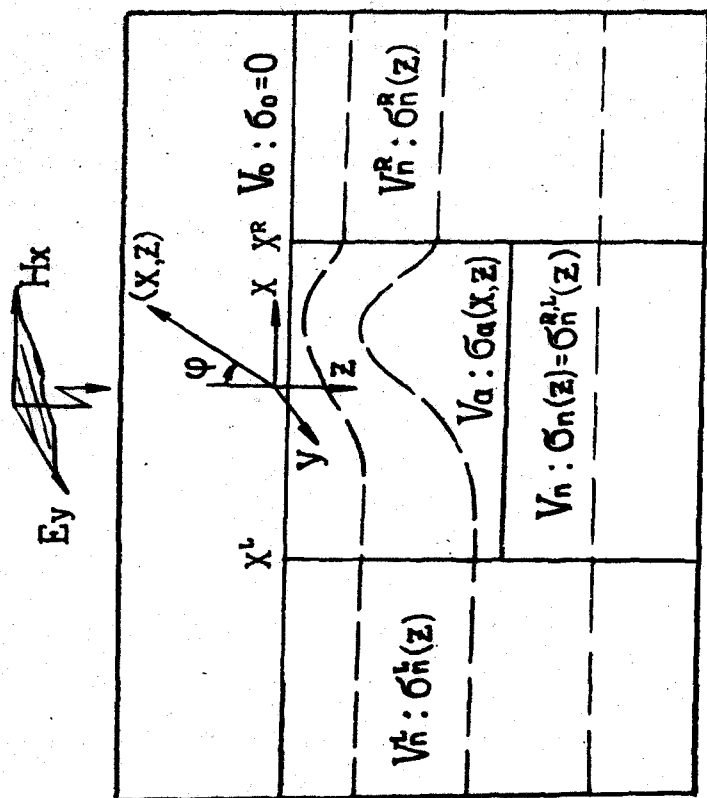


Рис. 8. Двумерный разрез области моделирования.

$$\sigma_{(z,z)}(\bar{z}) = \begin{cases} \sigma_0 & \bar{z} \in V_0 \\ \sigma_a(x,z) & \bar{z} \in V_a \\ \sigma_n^L(z) & \bar{z} \in V_n^L \\ \sigma_n^R(z) & \bar{z} \in V_n^R \\ \sigma_n(z) = \sigma_n^L(z) = \sigma_n^R(z), \bar{z} \in V_n \end{cases} \quad (4.2.2)$$

где  $\bar{z}(x,z)$  - радиус-вектор точки наблюдения в плоскости двумерного разреза  $xOz$ .

Модель возбуждается произвольно поляризованной плоской электромагнитной волной, вертикально падающей на земную поверхность. Зависимость поля от времени выражена множителем  $\exp(-i\omega t)$ . Токами смещения пренебрегаем, магнитная проницаемость повсеместно равна проницаемости  $\mu_0$  вакуума.

Электрические и магнитные поля в модели удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \Delta \bar{E} + \nabla(\bar{E}, \nabla \ln \sigma) + k^2 \bar{E} &= 0 \\ \Delta \bar{H} + [\nabla \ln \sigma \times \bar{H}] + k^2 \bar{H} &= 0 \\ (k^2 = i\omega\mu_0\sigma), \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

переходящим в непроводящей среде в уравнения Лапласа:

$$\Delta \bar{E} = 0, \quad \Delta \bar{H} = 0 \quad (4.2.4)$$

Как отмечалось выше, численное моделирование может быть сведено к решению краевой задачи для уравнений (4.2.3) в некоторой конечной области  $V$ , целиком содержащей внутри себя область трехмерной неоднородности  $V_{3D}$ . При этом границы области  $V$  в двумерном сечении  $xOz$  находятся в соответствующих областях

нормального разреза и в атмосфере (рис. 3, 8).

Один из наиболее естественных способов задания краевых условий заключается в следующем. Решая двумерную краевую задачу, находим поле, отвечающее распределению электропроводности  $\sigma(x, z)$ . Полученные значения используем в качестве краевых условий I-го рода для трехмерной задачи. При этом, как уже отмечалось выше, часто предполагают, что граница области моделирования настолько удалена от области  $V_{3D}$ , что влиянием трехмерных неоднородностей на ней можно пренебречь. Однако, заранее трудно определить, сколь далеко следует отнести эту границу от области  $V_{3D}$ . Поэтому такой выбор краевых условий может оказаться весьма неточным, особенно в непроводящей среде, где затухание электромагнитного поля происходит наиболее медленно и определяется лишь геометрическим фактором. В этом случае для повышения точности задания краевых условий приходится чрезмерно увеличивать область моделирования  $V$  (по сравнению с областью трехмерной неоднородности  $V_{3D}$ ). Это приводит к тому, что при численном решении краевых задач резко возрастает размерность соответствующих систем линейных уравнений и, в конечном итоге, снижается эффективность моделирования.

Эти трудности могут быть преодолены с помощью краевых условий, учитывающих асимптотическое поведение трехмерных электромагнитных полей вдали от неоднородностей среды. В двумерных задачах геоэлектрики асимптотические краевые условия были впервые получены Вивером Дж.Т. и Бревит-Тейлором С.Р. [82]. Затем в работе [19] были построены обобщенные асимптотические краевые условия, обладающие более высокой точностью.

Для трехмерных задач в настоящее время известны лишь аналоги простейших условий Вивера-Бревит-Тейлора [6]. Вывод трехмерных обобщенных асимптотических краевых условий дается в следующих параграфах.

### 4.3. Асимптотические представления трехмерных электрических полей

Получим асимптотику трехмерного электромагнитного поля вдали от неоднородностей, ограничившись для краткости анализом электрических компонент. Представим поле в виде суммы двух составляющих:

$$\bar{E} = \bar{E}^{2D} + \bar{E}^{3D}, \quad \bar{H} = \bar{H}^{2D} + \bar{H}^{3D} \quad (4.3.1)$$

где  $\bar{E}^{2D}$ ,  $\bar{H}^{2D}$  - двумерное поле, возбуждаемое плоской волной в среде с электропроводностью  $\sigma_{(2)}(x, z)$  и распадающееся, как известно, на  $\bar{E}$  и  $\bar{H}$  - поляризованные части:

$$\bar{E}^{2D} = \bar{E}^{2DE} + \bar{E}^{2DH}, \quad \bar{H}^{2D} = \bar{H}^{2DE} + \bar{H}^{2DH}, \quad (4.3.2)$$

а  $\bar{E}^{3D}$ ,  $\bar{H}^{3D}$  - составляющая, обусловленная влиянием трехмерной неоднородности  $V_{3D}$  и удовлетворяющая уравнениям:

$$\nabla \times \bar{H}^{3D} = \sigma_{2D} \bar{E}^{3D} + \bar{j}^{изб.} \quad (4.3.3)$$

$$\nabla \times \bar{E}^{3D} = i\omega\mu_0 \bar{H}^{3D}$$

в которых  $\bar{j}^{изб.} = \sigma_{(3)}(\bar{E}^{2D} + \bar{E}^{3D})$  - плотность избыточного тока, текущего в трехмерной неоднородности.

Асимптотика двумерного поля подробно изучена в случае E-поляризации в работах [19, 86]. В случае H-поляризации асимптотические разложения электрических полей имеют сходную структуру. В целом, для поля  $\bar{E}^{2D}$  справедливо следующее представление при  $z \rightarrow \infty$  [6]:

$$\bar{E}^{2D}(z, \varphi) = \sum_{p=1}^N \frac{\bar{a}^{(p)}}{z^p} + \bar{P}_H \cdot f_0(z, \varphi) + O\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right), \quad (4.3.4)$$

где вектор  $\bar{P}_H$  составлен из компонент нормального магнитного поля на поверхности Земли:

$$\bar{P}_H = (H_y^n, -H_x^n, 0), \quad (4.3.5)$$

$(\varrho, \varphi)$  - система полярных координат в верхнем полупространстве (рис. 8):

$$\begin{aligned} \varrho &= \sqrt{x^2 + z^2} & x &= \varrho \sin \varphi \\ \varphi &= \arctg \frac{x}{|z|} & z &= -\varrho \cos \varphi \end{aligned}$$

$\bar{\alpha}^{(p)}(\varphi)$  - некоторые ограниченные и непрерывные функции угла  $\varphi$ , а  $f_0$  - скалярная функция, определяемая входными импедансами  $Z^{R,L}$  правого и левого нормальных разрезов и положением точки наблюдения:

$$f_0(\varrho, \varphi) = \frac{Z^R - Z^L}{\pi} \cdot \varphi + \frac{Z^R + Z^L}{2} - i\omega\mu_0 \varrho \cos \varphi \quad (4.3.6)$$

Исследуем асимптотику поля  $\bar{E}^{3D}$  в непроводящей атмосфере вдали от геоэлектрических неоднородностей. В силу (4.3.3) и 4-ого уравнения Максвелла всюду в атмосфере:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y^{3D}}{\partial x} - \frac{\partial E_x^{3D}}{\partial y} &= i\omega\mu_0 H_z^{3D} \\ \frac{\partial E_x^{3D}}{\partial x} + \frac{\partial E_y^{3D}}{\partial y} &= \frac{\partial E_z^{3D}}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

Перейдем в формулах (4.3.7) к пространственным спектрам:

$$\begin{aligned} -i\alpha e_y + i\beta e_x &= i\omega\mu_0 h_z \\ -i\alpha e_x - i\beta e_y &= -e'_z \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

где

$$\begin{Bmatrix} e_{x,y,z} \\ h_z \end{Bmatrix} = \iint_{-\infty}^{\infty} \begin{Bmatrix} E_{x,y,z}^{3D} \\ H_z^{3D} \end{Bmatrix} \exp(i(\alpha x + \beta y)) dx dy$$

а штрих означает дифференцирование по  $z$ .

Воспользуемся формулами продолжения спектров внутреннего поля с поверхности Земли в верхнее полупространство [2]:

$$h_z(\alpha, \beta, z) = h_z(z) = h_z(0) \exp(n_0 z) \quad (4.3.9)$$

$$e'_z(\alpha, \beta, z) = e'_z(z) = e'_z(0) \exp(n_0 z),$$

$$n_0 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

Подставим (4.3.9) в (4.3.8) и разрешим полученную систему уравнений относительно  $e_x$  и  $e_y$ :

$$e_x(z) = [\omega\mu_0\beta h_z(0) - i\alpha e'_z(0)] \exp(n_0 z) / n_0^2 \quad (4.3.10a)$$

$$e_y(z) = [-\omega\mu_0\alpha h_z(0) - i\beta e'_z(0)] \exp(n_0 z) / n_0^2$$

Кроме того, в силу (4.3.9), запишем:

$$e'_z(z) = n_0 e'_z(0) \exp(n_0 z) / n_0^2 \quad (4.3.10б)$$

Обозначим через  $e_{x,y}^{TE}$  ( $e_z^{TE} \equiv 0$ ) и  $e_{x,y,z}^{TM}$  спектры поперечно-электрической ( $\bar{E}^{3DTE}$ ) и поперечно-магнитной ( $\bar{E}^{3DTM}$ ) частей поля  $\bar{E}^{3D}$ . Тогда формулы (4.3.10) принимают вид:

$$e_x(z) = e_x^{TE}(z) + e_x^{TM}(z)$$

(4.3.II)

$$e_y(z) = e_y^{TE}(z) + e_y^{TM}(z)$$

$$e_z(z) = e_z^{TM}(z),$$

где

$$\begin{pmatrix} e_x^{TE} \\ e_y^{TE} \end{pmatrix} = \omega \mu_0 \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} h_z(0) \exp(n_0 z) / n_0^2$$

(4.3.I2)

$$\begin{pmatrix} e_x^{TM} \\ e_y^{TM} \\ e_z^{TM} \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ i n_0 \end{pmatrix} e'_z(0) \exp(n_0 z) / n_0^2$$

Выполним обратное преобразование Фурье спектров  $e_{x,y}^{TE}$ , перейдя к полярной системе координат  $(\alpha, \gamma)$  в спектральной области:

$$\alpha = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = n_0 \quad \alpha = \alpha \cos \gamma$$

$$\gamma = \arctg \beta / \alpha \quad \beta = \alpha \sin \gamma$$

и к сферическим координатам  $(R, \theta, \Psi)$  - в верхнем полупространстве:

$$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad x = R \sin \theta \cos \Psi$$

$$\theta = \arctg(\sqrt{x^2 + y^2} / |z|), \quad y = R \sin \theta \sin \Psi$$

$$\Psi = \arctg(y/x) \quad z = -R \cos \theta$$



Получим в результате:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E_x^{3DTE} \\ E_y^{3DTE} \end{pmatrix} &= \frac{\omega\mu_0}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix} h_z(\alpha, \beta, 0) \exp[n_0 z - i(\alpha x + \beta y)] / n_0^2 d\alpha d\beta = \\ &= \frac{\omega\mu_0}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} \sin\gamma \\ -\cos\gamma \end{pmatrix} \int_0^{\infty} h_z(x, \gamma, 0) \exp\{-xR[\cos\theta + i\sin\theta\cos(\gamma - \psi)]\} dx d\gamma = \\ &= \frac{\omega\mu_0}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} \sin\gamma \\ -\cos\gamma \end{pmatrix} I^h(R, \gamma, \theta, \psi) d\gamma, \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

где

$$I^h(R, \gamma, \theta, \psi) = \int_0^{\infty} h_z(x, \gamma, 0) \exp\{-xR[\cos\theta + i\sin\theta\cos(\gamma - \psi)]\} dx \quad (4.3.14)$$

Представим спектр  $h_z(x, \gamma, 0)$  рядом Маклорена по переменной  $x$ :

$$h_z(x, \gamma, 0) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{h_p(\gamma)}{p!} x^p, \quad (4.3.15)$$

$$h_p(\gamma) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (x > 0)}} \frac{\partial^p h_z(x, \gamma, 0)}{\partial x^p}, \quad (4.3.16)$$

сходящимся на любом конечном интервале  $x \in (0, \tilde{x})$ . Действительно, при возбуждении поля диполем в слоистой среде, аналитичность функции  $h_z(x)$  устанавливается непосредственным анализом известных выражений [10]. В среде, содержащей локальные геоэлектрические неоднородности, аномальное магнитное поле возбуждается

совокупностью электромагнитных диполей, описывающих избыточные токи. Поэтому и в этой общей ситуации сохраняется свойство аналитичности спектра  $h_z(x, \gamma, 0)$  при  $x > 0$ .

Ограничимся конечным числом членов в разложении (4.3.15):

$$h_z(x, \gamma, 0) = \sum_{p=0}^{N-1} \frac{h_p(\gamma)}{p!} x^p + R_N^h(x, \gamma) \quad (4.3.17)$$

и, учитывая ограниченность односторонних производных (4.3.16), запишем для остаточного члена в (4.3.17) следующую асимптотическую оценку:

$$R_n^h(x, \gamma) = O(x^N), \quad x \rightarrow 0 \quad (4.3.18)$$

Подставляя (4.3.17) в интеграл (4.3.14), получаем:

$$I^h = \sum_{p=0}^{N-1} \frac{h_p(\gamma)}{p!} I_p^h + \int_0^\infty R_N^h e^{-xR\Phi} dx, \quad (4.3.19)$$

где

$$I_p^h = \int_0^\infty x^p e^{-xR\Phi} dx,$$

а

$$\Phi = \Phi(\gamma, \theta, \psi) = \cos \theta + i \sin \theta \cos(\gamma - \psi),$$

$$\operatorname{Re} \Phi > 0 \quad \text{в секторе} \quad |\theta| < \pi/2.$$

Для того, чтобы вычислить интеграл  $I_p^h$ , введем новую переменную интегрирования  $u = xR\Phi$  и, таким образом, представим  $I_p^h$  контурным интегралом в комплексной плоскости  $U$ :

$$I_p^h = \int_0^\infty x^p e^{-xR\Phi} dx = \frac{1}{R^{p+1} \Phi^{p+1}} \int_{\mathcal{L}} u^p e^{-u} du,$$

$$\mathcal{L} = \{u, \operatorname{arg} u = \nu_0 = \operatorname{const}, |\nu_0| < \pi/2\}$$

Подинтегральная функция в последнем интеграле аналитична в секторе между лучом  $\mathcal{L}$  и положительной действительной полуосью и убывает экспоненциально при  $|u| \rightarrow \infty$ . Следовательно, интеграл по пути  $\mathcal{L}$  равен интегралу по положительному лучу действительной оси, т.е. табличному интегралу Эйлера [29] :

$$I_p^h = \frac{1}{R^{p+1} \Phi^{p+1}} \int_0^\infty t^p e^{-t} dt = \frac{\Gamma(p+1)}{R^{p+1} \Phi^{p+1}} = \frac{p!}{R^{p+1} \Phi^{p+1}} \quad (4.3.20)$$

Исследуем второй интеграл в (4.3.19). Сходимость этого интеграла при любом  $R > 0$  обеспечивается сходимостью интегралов  $I^h$  и  $I_p^h$ . Оценим его абсолютную величину. Для этого разобьем область интегрирования на два интервала:  $(0, x_0)$  и  $(x_0, \infty)$ . Согласно (4.3.18) имеем

$$|R_N^h(x, \gamma)| \leq K_N x^N, \quad x \leq x_0$$

где  $K_N$  - положительная константа, не зависящая от  $\gamma$ . Следовательно, на интервале  $(0, x_0)$  справедлива следующая оценка:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{x_0} R_N^h e^{-xR\Phi} dx \right| &\leq K_N \int_0^{x_0} x^N e^{-xR\Phi} dx \leq \\ &\leq K_N \int_0^\infty x^N e^{-xR\Phi} dx = \frac{K_N N!}{R^{N+1} \Phi^{N+1}} = O\left(\frac{1}{R^{N+1}}\right) \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

Далее, выберем такую величину  $R = R_0$ , чтобы интеграл  $\int_0^\infty R_N^h e^{-xR_0\Phi}$  сходилась, и введем обозначение:

$$T_N(x) = \int_{x_0}^\infty R_N^h(x, \gamma) e^{-xR_0\Phi} dx$$

Функция  $T_N(x)$  непрерывна и ограничена на интервале  $(x_0, \infty)$ :

$$\sup_{x \in [x_0, \infty)} |T_N(x)| = M_N < \infty$$

Интегрируя по частям на интервале  $(x_0, \infty)$ , получаем при  $R > R_0$ :

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_0}^{\infty} R_N^h e^{-xR\Phi} dx - \int_{x_0}^{\infty} e^{-x(R-R_0)\Phi} R_N^h e^{xR_0\Phi} dx \right| \\ &= \left| \Phi(R-R_0) \int_{x_0}^{\infty} T_N(x) e^{-x(R-R_0)\Phi} dx \right| \end{aligned}$$

Таким образом, при  $R \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{x_0}^{\infty} R_N^h e^{-xR\Phi} dx \right| \leq |\Phi|(R-R_0) M_N \int_{x_0}^{\infty} e^{-x(R-R_0)\cos\theta} dx = \\ &= \frac{|\Phi| M_N}{\cos\theta} e^{-x_0(R-R_0)\cos\theta} = \underline{O}(e^{-x_0 R}) \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

Суммируя (4.3.21) и (4.3.22), получаем асимптотическую оценку

$$\int_0^{\infty} R_N^h e^{-xR\Phi} dx = \underline{O}\left(\frac{1}{R^{N+1}}\right), \quad R \rightarrow \infty \tag{4.3.23}$$

Подставляя (4.3.20) и (4.3.23) в (4.3.19), приходим к асимптотическому разложению интеграла  $I^h(R)$  при  $R \rightarrow \infty$ :

$$I^h(R) = \sum_{p=1}^{N-1} \frac{h_p(\gamma)}{R^{p+1} \Phi^{p+1}} + \underline{O}\left(\frac{1}{R^{N+1}}\right) \tag{4.3.24}$$

и, возвращаясь к выражению (4.3.13), записываем асимптотическое представление электрического поля ТЕ-моды при  $R \rightarrow \infty$ :

$$E_{x,y}^{3DTE} = \sum_{p=1}^N \frac{B_{x,y}^{(p)}(0, \Psi)}{R^p} + \underline{O}\left(\frac{1}{R^{N+1}}\right), \tag{4.3.25}$$

где

$$\begin{pmatrix} B_x^{(p)} \\ B_y^{(p)} \end{pmatrix} = \frac{\omega\mu_0}{4\eta^2} \int_{-\eta}^{\eta} \begin{pmatrix} \sin\gamma \\ \cos\gamma \end{pmatrix} \frac{h_{p-1}(\gamma)}{\Phi^p(\gamma, \theta, \psi)} d\gamma$$

есть ограниченные функции координатных углов  $\theta$  и  $\psi$ .

Аналогично, используя интегральное представление электрического поля ТМ-моды, вытекающее из (4.3.12)

$$\begin{pmatrix} E_x^{3DTM} \\ E_y^{3DTM} \\ E_z^{3DTM} \end{pmatrix} = -\frac{i}{4\eta^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ in_0 \end{pmatrix} e'_2(\alpha, \beta, 0) \exp[n_0 z - i(\alpha x + \beta y)] / n_0^2 d\alpha d\beta =$$

$$= -\frac{i}{4\eta^2} \int_{-\eta}^{\eta} \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \\ i \end{pmatrix} \int_0^{\infty} e'_2(\alpha, \gamma, 0) \exp\{-\alpha R [\cos\theta + i\sin\theta \cos(\gamma - \psi)]\} d\alpha d\gamma,$$

и разложение спектра  $e'_2(\alpha, \gamma, 0)$  в ряд Маклорена, подобное (4.3.17):

$$e'_2(\alpha, \gamma, 0) = \sum_{p=0}^{N-1} \frac{e_p(\gamma)}{p!} \alpha^{p+R} R_N^e(\alpha, \gamma),$$

приходим к соответствующему асимптотическому представлению поперечно-магнитного электрического поля:

$$E_{x,y,z}^{3DTM} = \sum_{p=1}^N \frac{C_{x,y,z}^{(p)}(\theta, \psi)}{R^p} + O\left(\frac{1}{R^{N+1}}\right), \quad (4.3.26)$$

где  $C_{x,y,z}^{(p)}$  - ограниченные функции  $\theta$  и  $\psi$  :

$$\begin{pmatrix} C_x^{(p)} \\ C_y^{(p)} \\ C_z^{(p)} \end{pmatrix} = -\frac{i}{4\pi R^2} \int_{\mathcal{F}} \begin{pmatrix} \cos \gamma \\ \sin \gamma \\ i \end{pmatrix} \frac{e_{p-1}(\gamma)}{\Phi^p(\gamma, \theta, \psi)} d\gamma$$

Суммируя разложения (4.3.25) и (4.3.30), записываем асимптотическое представление электрического поля  $\bar{E}^{3D}(R \rightarrow \infty)$  :

$$\bar{E}^{3D} = \bar{E}^{3DTE} + \bar{E}^{3DTM} = \sum_{p=1}^N \frac{\bar{A}^{(p)}(\theta, \psi)}{R^p} + O\left(\frac{1}{R^{N+1}}\right), \quad (4.3.27a)$$

в котором

$$\bar{A}_{x,y}^{(p)} = \bar{B}_{x,y}^{(p)} + \bar{C}_{x,y}^{(p)}, \quad \bar{A}_z^{(p)} = \bar{C}_z^{(p)} \quad (4.3.27b)$$

Наконец, объединяя (4.3.27) с асимптотическим разложением (4.3.4) двумерной составляющей  $\bar{E}^{2D}$ , находим искомое асимптотическое представление трехмерного электрического поля  $\bar{E}$  :

$$\bar{E} = \bar{E}^{2D} + \bar{E}^{3D} = \sum_{p=1}^N \frac{\bar{A}^{(p)}(\theta, \psi)}{R^p} + \sum_{p=1}^N \frac{\bar{a}^{(p)}}{z^p} + \bar{P}_H \cdot f_0(z, \varphi) + O\left(\frac{1}{R^{N+1}}\right) \quad (4.3.28)$$

#### 4.4. Трехмерные обобщенные асимптотические краевые условия

Используем полученные асимптотические представления электрического поля для вывода краевых условий, эффективных при конечном удалении границы области моделирования в непроводящей атмосфере от геоэлектрических неоднородностей в Земле. Непосредственно из формулы (4.3.28) следует, что краевые условия I-го рода, не учитывающие влияния трехмерного распределения электропровод-

ности

$$\bar{E}(x, y, z) = \bar{E}^{2D}(x, z), \quad (4.4.1)$$

имеют точность порядка  $O(1/R)$ .

Если бы нам были известны функции  $\bar{A}^{(p)}(\theta, \psi)$  ( $p = 1, 2, \dots, N$ ), то можно было бы построить более точные краевые условия I-го рода:

$$\bar{E} = \bar{E}^{2D} + \sum_{p=1}^N \frac{\bar{A}^{(p)}(\theta, \psi)}{R^p}, \quad (4.4.2)$$

имеющие точность  $O(1/R^{N+1})$ . Однако, мы не можем определить эти функции, не зная электромагнитных полей  $\bar{E}^{3D}$ ,  $\bar{H}^{3D}$  на поверхности Земли. Поэтому используем другой подход к построению краевых условий повышенной точности, основанный на дифференциальных преобразованиях асимптотического разложения (4.3.28).

Рассмотрим семейство операторов  $L^{(p)}$  ( $p = 1, 2, \dots, N$ )

$$L^{(p)} = 1 + \frac{R}{p} \frac{\partial}{\partial R} = 1 + \frac{1}{p} \left[ x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right], \quad (4.4.3)$$

аннулирующих в разложении (4.3.28) слагаемые с индексом  $p$ :

$$L^{(p)} \left[ \frac{1}{R^s} \right] = \left( 1 + \frac{R}{p} \frac{\partial}{\partial R} \right) \frac{1}{R^s} = \begin{cases} (1 - s/p) \frac{1}{R^s}, & s \neq p \\ 0, & s = p \end{cases} \quad (4.4.4)$$

$$L^{(p)} \left[ \frac{1}{z^s} \right] = \left( 1 + \frac{R}{p} \frac{\partial}{\partial R} \right) \frac{1}{z^s} = \left( 1 + \frac{z}{p} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{1}{z^s} = \begin{cases} (1 - s/p) \frac{1}{z^s}, & s \neq p \\ 0, & s = p \end{cases}$$

Образует дифференциальный оператор  $N$ -ого порядка

$$D_N = L^{(1)} \cdot L^{(2)} \dots L^{(N)} = \prod_{p=1}^N L^{(p)} = \sum_{p=0}^N C_N^p \frac{1}{p!} R^p \frac{\partial^p}{\partial R^p}, \quad (4.4.5)$$

обладающий в силу (4.4.4) фундаментальным свойством:

$$D_N \left[ \frac{1}{R^s} \right] = \begin{cases} 0 & , \quad 1 \leq s \leq N \\ \frac{1}{R^s} \prod_{p=1}^N (1-s/p) = \frac{(-1)^N C_{s-1}^N}{R^s} & , \quad s > N \end{cases} \quad (4.4.6)$$

$$D_N \left[ \frac{1}{z^s} \right] = \begin{cases} z \prod_{p=1}^N (1+1/p) = (N+1)z & , \quad s = -1 \\ 1 & , \quad s = 0 \\ 0 & , \quad 1 \leq s \leq N \\ \frac{1}{z^s} \prod_{p=1}^N (1-s/p) = \frac{(-1)^N C_{s-1}^N}{z^s} & , \quad s > N \end{cases}$$

Применим оператор  $D_N$  к разложению (4.3.28). Пользуясь свойствами (4.4.6), получаем:

$$\begin{aligned} D_N [\bar{E}] &= \sum_{p=1}^N \bar{A}^{(p)}(\theta, \psi) D_N \left[ \frac{1}{R^p} \right] + \sum_{p=1}^N \bar{a}^{(p)}(\varphi) D_N \left[ \frac{1}{z^p} \right] + \\ &+ \bar{P}_H \cdot D_N [f_0(z, \varphi)] + \underline{O}(1/R^{N+1}) = \\ &= \bar{P}_H \cdot [f_0(z, \varphi) - N \cdot i\omega\mu_0 z \cos \varphi] + \underline{O}(1/R^{N+1}) \end{aligned} \quad (4.4.7)$$

Выражение (4.4.7) позволяет записать приближенные краевые условия для электрического поля в непроводящей атмосфере вдали от неоднородностей среды:

$$D_N [\bar{E}] = \bar{P}_H \cdot f_N(z, \varphi), \quad (4.4.8)$$

$$f_N(z, \varphi) = f_0(z, \varphi) - N \cdot i\omega\mu_0 z \cos \varphi = \frac{z^R - z^L}{R} \varphi + \frac{z^{R+z^L}}{2} - i\omega\mu_0 (N+1) z \cos \varphi$$

Эти условия, выполняемые с точностью  $\underline{O}\left(\frac{1}{R^{N+1}}\right)$ , представляют собой трехмерные аналоги двумерных обобщенных асимптотических краевых условий  $N$ -ого порядка, выведенных в работе [19].

Наиболее просто выглядят асимптотические краевые условия



первого порядка, имеющие точность  $O(1/R^2)$  :

$$\bar{E} + R \frac{\partial \bar{E}}{\partial R} = \bar{P}_H f_1(z, \varphi) \quad (4.4.9a)$$

В прямоугольных координатах они принимают вид:

$$\bar{E} + x \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} + y \frac{\partial \bar{E}}{\partial y} + z \frac{\partial \bar{E}}{\partial z} = \bar{P}_H f_1(x, z), \quad (4.4.9b)$$

$$f_1(x, z) = \frac{z^R - z^L}{\mathcal{H}} \operatorname{arctg} \frac{x}{|z|} + \frac{z^R + z^L}{2} - 2i\omega\mu_0 z$$

и совпадают с полученными в работе 86 трехмерными аналогами двумерных асимптотических краевых условий Вивера-Бревит-Тейлора.

Для того, чтобы записать в исходной прямоугольной системе координат асимптотические краевые условия произвольного порядка  $N$ , преобразуем выражение для оператора  $D_N$ . Подставляя в формулу (4.4.5) представление оператора  $L^{(P)}$  в прямоугольных координатах (4.4.3), получаем с помощью метода математической индукции:

$$D_N = \sum_{p=0}^N C_N^p \sum_{\substack{u,v,w=0 \\ u+v+w=p}}^p \frac{1}{u!v!w!} x^u y^v z^w \frac{\partial^p}{\partial x^u \partial y^v \partial z^w} \quad (4.4.10)$$

Таким образом, в прямоугольных координатах краевые условия (4.4.8) имеют вид:

$$D_N[\bar{E}] = \sum_{p=0}^N C_N^p \sum_{\substack{u,v,w=0 \\ u+v+w=p}}^p \frac{x^u y^v z^w}{u!v!w!} \frac{\partial^p}{\partial x^u \partial y^v \partial z^w} = \bar{P}_H f_N(x, z), \quad (4.4.11)$$

$$f_N(x, z) = \frac{z^R - z^L}{\mathcal{H}} \operatorname{arctg} \frac{x}{|z|} + \frac{z^R + z^L}{2} - i\omega\mu_0(N+1)z$$

Численная аппроксимация асимптотических краевых условий первого порядка (4.4.9б) не представляет особой сложности. В частности, используя конечно-разностный метод, мы получаем в граничных узлах в атмосфере уравнения такой же структуры, как и во внутренних узлах области  $V$ .

При использовании асимптотических краевых условий порядка  $N \geq 2$  возникают трудности аппроксимации производных второго и высших порядков по нормали к границе области  $V$ . Для того, чтобы избежать этих трудностей, выразим в формуле (4.4.10) соответствующие нормальные производные через тангенциальные, воспользовавшись следующими соотношениями, вытекающими из уравнений (4.2.4):

$$\frac{\partial^{2s}}{\partial z^{2s}} [\bar{E}] = (-1)^s \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^s [\bar{E}]$$

$$\frac{\partial^{2s+1}}{\partial z^{2s+1}} [\bar{E}] = (-1)^s \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)^s \frac{\partial}{\partial z} [\bar{E}],$$

Следовательно, для любого  $W$  ( $W = 0, 1, 2, \dots$ ) справедливо:

$$\frac{\partial^W}{\partial z^W} = (-1)^t \sum_{s=0}^t C_t^s \frac{\partial^W}{\partial x^{2s} \partial y^{2(t-s)} \partial z^q}, \quad (4.4.12)$$

где  $t$  - целая часть числа  $(W/2)$ ,

$$q = \begin{cases} 0, & W = 2K \\ 1, & W = 2K+1 \end{cases}$$

Таким образом, на верхней границе области  $V$  краевое условие (4.4.II) можно записать в виде, содержащем только первую производную по нормали к границе:

$$D_N[\bar{E}] = \left\{ 1 + \sum_{p=1}^N C_N^p \sum_{\substack{u,v,w=0 \\ u+v+w=p}}^p \frac{(-1)^t}{u!v!w!} x^u y^v z^w \sum_{s=0}^t C_t^s \frac{\partial^p}{\partial x^{u+2s} \partial y^{v+2(t-s)} \partial z^w} \right\} \bar{E} =$$

$$= \bar{P}_H \cdot f_N(x, z) \quad (4.4.13)$$

В частности, при  $N = 2$  асимптотические краевые условия на верхней границе области  $V$  имеют вид:

$$D_2[\bar{E}] = \left\{ 1 + 2\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right) + xy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + xz \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \right.$$

$$\left. + yz \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \frac{1}{2} \left[ (x^2 - z^2) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (y^2 - z^2) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \right\} \bar{E} = \bar{P}_H \cdot \left( \frac{z^R - z^L}{\eta} \operatorname{arctg} \frac{x}{|z|} + \right.$$

$$\left. + \frac{z^R + z^L}{2} - 3i\omega\mu_0 z \right).$$

Краевые условия, аналогичные (4.4.13), можно получить и для боковых границ области  $V$ , лежащих в атмосфере.

Остается определить краевые условия на границе области моделирования в нижнем полупространстве. Поскольку в проводящей среде электромагнитное поле вдали от геоэлектрических неоднородностей затухает экспоненциально, ограничимся применением на боковых границах условий I-го рода, учитывающих двумерное решение  $\bar{E}^{2D}$  и обеспечивающих непрерывность горизонтальных компонент электрического поля на поверхности Земли:

$$E_{x,y}(x,y,z) = \begin{cases} E_{x,y}(x,y,0) \frac{E_{x,y}^{2D}(x,z)}{E_{x,y}^{2D}(x,0)}, & |E_{x,y}^{2D}(x,0)| > 0 \\ E_{x,y}^{2D}(x,z), & |E_{x,y}^{2D}(x,0)| = 0 \end{cases}$$

$$E_z(x, y, z) = E_z^{2D}(x, z)$$

На нижней границе области  $V$  граничные значения электрического поля могут быть заданы с помощью горизонтальной интерполяции.

Асимптотические краевые условия (4.4.8) для электрического поля в непроводящей атмосфере позволяют существенно приблизить границу области моделирования к неоднородностям среды, что, в свою очередь, дает возможность уменьшить вычислительные затраты без потери точности моделирования (см. главу УП).

Отметим, что полученные условия можно применить также в случае непроводящего основания разреза или однородного слоя изолятора. Кроме того, с помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше, можно получить асимптотические представления и соответствующие краевые условия для магнитного поля.

Таким образом, в этой главе мы получили асимптотические краевые условия, учитывающие вклад от аномального поля на конечном расстоянии от неоднородностей среды. Их применение, как показывает практика, повышает эффективность численного моделирования.

Наряду с этим, важное значение имеют и другие узловые вопросы, обсуждавшиеся в главе П. В следующей главе мы рассмотрим вычислительные аспекты предложенного алгоритма.

Г л а в а У

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА МОДЕЛИРОВАНИЯ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

5.1. Конечно-разностная аппроксимация уравнения и  
краевых условий

Для получения системы линейных алгебраических уравнений и ее последующего решения с помощью ЭВМ необходимо перейти от непрерывных значений переменной к дискретным. Различные "механизмы" такого перехода, рассмотренные ранее в главе I, основываются, главным образом, на (1) применении рядов Тейлора, (2) интегрировании первоначального уравнения и дискретизации и (3) вариационной формулировке.

Каждый из указанных подходов имеет свои достоинства и, соответственно, области применения. Так, первый метод, применимый к дифференциальным уравнениям в общем случае, особенно часто используется при выводе порядка аппроксимации разностных схем. Вариационная постановка привлекательна тем, что при этом естественные граничные условия (см. п. 2.2.3) являются прямым следствием стационарности соответствующего функционала [ 70 ] . И, наконец, второй подход (часто называемый "методом баланса") применим в общем случае и дает особенно простые дискретные схемы для задач с внутренними границами и неравномерными сетками [ 81 ] . Воспользуемся последним методом для получения дискретных аналогов уравнения (2.1.9).

5.1.1. Дискретизация области моделирования

Для того, чтобы решать краевую задачу относительно уравнения (2.1.9), необходимо сначала провести дискретизацию области

решения  $V$ . В случае, когда электропроводность в области меняется скачкообразно, производные от искомой функции могут претерпевать разрывы. Поэтому целесообразно вычислять значения самой функции в узлах одной сетки, а значения функции электропроводности задавать в узлах некоторой промежуточной сетки [18], не беспокоясь при этом относительно выполнения внутренних граничных условий.

Будем считать, что границы области моделирования  $V$  параллельны координатным плоскостям (что, естественно, не ограничивает общности). Разобьем область  $V$  на элементарные прямоугольные призмы некоторой трехмерной сеткой  $\Sigma$  и введем также вторую (промежуточную) сетку  $\tilde{\Sigma}$ , узлы которой расположены в серединах соответствующих ячеек сетки  $\Sigma$  (рис. 9). При этом узел  $(\ell, m, n)$  сетки  $\tilde{\Sigma}$  соответствует точке с координатами  $(x_\ell, y_m, z_n)$  ( $1 \leq \ell \leq L$ ,  $1 \leq m \leq M$ ,  $1 \leq n \leq N$ ), а переменные расстояния между узлами этой сетки (размеры ячеек) вдоль осей  $x, y, z$  равны, соответственно,  $d_\ell = x_{\ell+1} - x_\ell$ ,  $f_m = y_{m+1} - y_m$  и  $g_n = z_{n+1} - z_n$ .

Значения электропроводности  $\sigma(x, y, z)$  определим в узлах промежуточной сетки, так что  $\sigma_{\ell+1/2, m+1/2, n+1/2}$  - заданная электропроводность в точке с координатами  $(x_{\ell+1/2} d_\ell, y_{m+1/2} f_m, z_{n+1/2} g_n)$ . В тех же узлах вычисляются величины  $K^2(x_{\ell+1/2} d_\ell, y_{m+1/2} f_m, z_{n+1/2} g_n) = K_{\ell, m, n}^2$ . В точках области, лежащих в атмосфере, мы имеем:

$$K_{\ell, m, n}^2 = 0 \quad (1 \leq n \leq q-1)$$

где номер  $q$  соответствует узлам, лежащим в плоскости  $z = 0$ .

Во внутренних узлах части области  $V$ , находящейся в нижнем полупространстве, значения  $K_{\ell, m, n}^2$  вычисляются следующим образом:

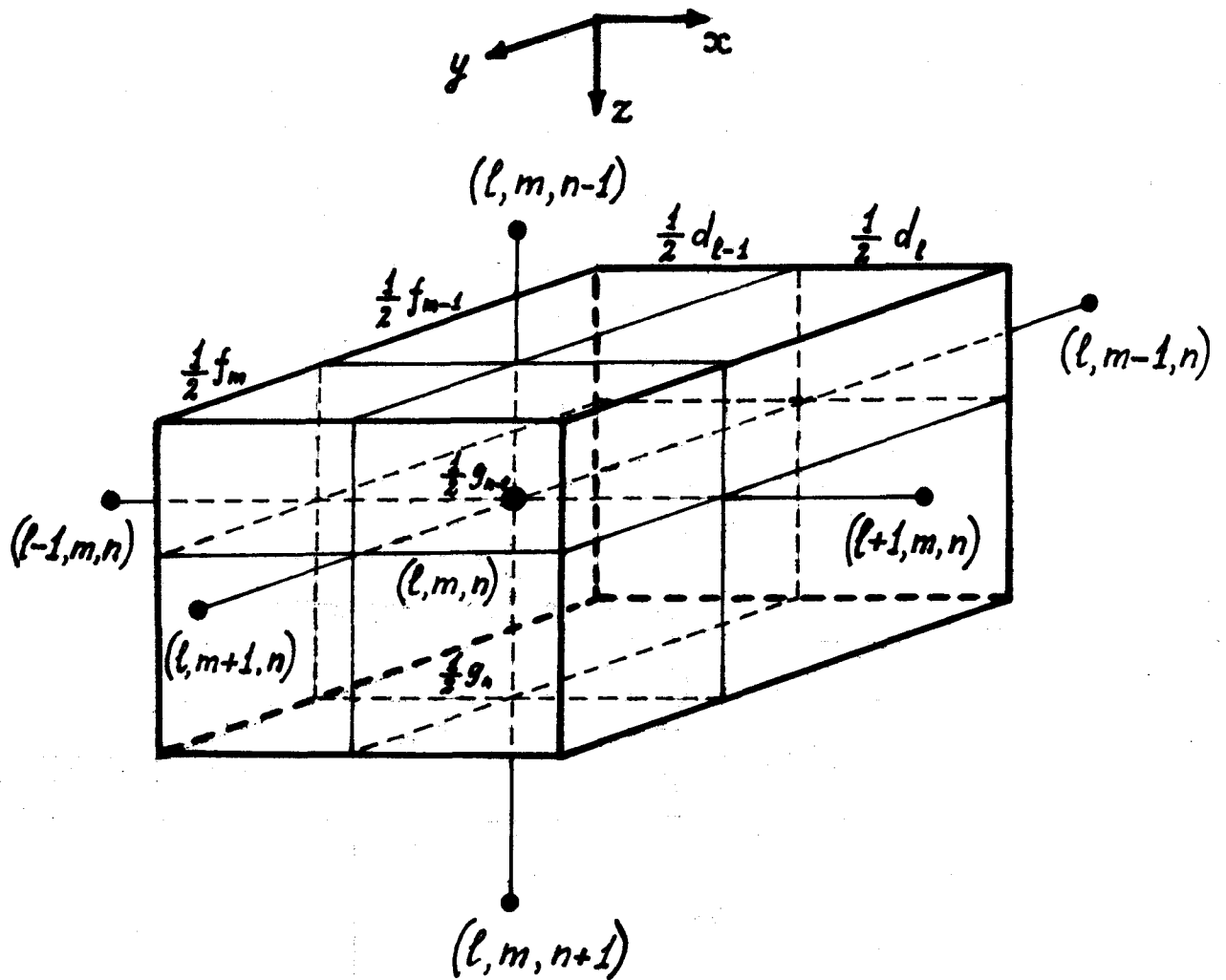


Рис. 9. Элементарная ячейка пространственной сетки, по которой производится интегрирование.

$$\begin{aligned}
 K_{\ell, m, n}^2 = & \frac{1}{8V_{\ell, m, n}} \left( K_{\ell+1/2, m+1/2, n+1/2}^2 \cdot d_{\ell} f_m g_n + K_{\ell-1/2, m+1/2, n+1/2}^2 \cdot \right. \\
 & \cdot d_{\ell-1} f_m g_n + K_{\ell+1/2, m-1/2, n+1/2}^2 \cdot d_{\ell} f_{m-1} g_n + K_{\ell+1/2, m-1/2, n-1/2}^2 \cdot \\
 & \cdot d_{\ell} f_{m-1} g_{n-1} + K_{\ell-1/2, m+1/2, n-1/2}^2 \cdot d_{\ell-1} f_m g_{n-1} + K_{\ell+1/2, m+1/2, n-1/2}^2 \cdot \\
 & \cdot d_{\ell} f_m g_{n-1} + K_{\ell-1/2, m-1/2, n+1/2}^2 \cdot d_{\ell-1} f_{m-1} g_n + K_{\ell-1/2, m-1/2, n-1/2}^2 \cdot \\
 & \left. \cdot d_{\ell-1} f_{m-1} g_{n-1} \right),
 \end{aligned}$$

где  $V_{\ell, m, n} = \frac{1}{8} (d_{\ell} + d_{\ell-1})(f_m + f_{m-1})(g_n + g_{n-1})$ ,

$(2 \leq \ell \leq L-1, 2 \leq m \leq M-1, 2 \leq n \leq N-1)$  - объемы ячеек сетки  $\bar{\Sigma}$ .

На "левой" грани  $x = \text{const}$  (рис. 3) мы записываем:

$$\begin{aligned}
 K_{\ell, m, n}^2 = & \frac{K_{3/2, m+1/2, n+1/2}^2 \cdot f_m g_n + K_{3/2, m-1/2, n+1/2}^2 \cdot f_{m-1} g_n}{(f_m + f_{m-1})(g_n + g_{n-1})} + \\
 & + \frac{K_{3/2, m-1/2, n-1/2}^2 \cdot f_{m-1} g_{n-1} + K_{3/2, m+1/2, n-1/2}^2 \cdot f_m g_{n-1}}{(f_m + f_{m-1})(g_n + g_{n-1})} \\
 & (2 \leq m \leq M-1, 2 \leq n \leq N-1)
 \end{aligned}$$

Аналогичные формулы для  $K^2$  справедливы и для других границ области  $V$ .

### 5.1.2. Приближенные формулы численного дифференцирования и интегрирования

Для получения дискретных уравнений в узлах пространственной сетки  $\bar{\Sigma}$  перейдем от непрерывной векторной функции  $\bar{E}$ , определенной всюду в рассматриваемой области, к ее дискретному аналогу. Введем с этой целью векторную функцию  $\bar{U}_{\ell, m, n}$ , область



определения которой являются узлы пространственной сетки  $\Sigma$ .

Запишем для каждой элементарной ячейки  $V_{l,m,n}$  уравнение баланса

$$\iint_{S_{l,m,n}} \nabla \bar{U}_{l,m,n} d\bar{s} + \iint_{S_{l,m,n}} (\bar{U}_{l,m,n} \nabla \ln \sigma_{l,m,n}) d\bar{s} + \iiint_{V_{l,m,n}} \kappa_{l,m,n}^2 \bar{U}_{l,m,n} dv = 0, \quad (5.1.1)$$

которое эквивалентно трем скалярным уравнениям относительно декартовых компонент векторной функции  $U$  в узле  $(l, m, n)$ .

Отметим, что численная аппроксимация (5.1.1) имеет ряд преимуществ по сравнению с аппроксимацией соответствующего дифференциального уравнения 2-го порядка:

- в каждой ячейке пространственной сетки сохраняется баланс токов (2.1.9);
- аппроксимация 3-го члена в уравнении (5.1.1) достаточно точна и вблизи скачков электропроводности;
- при аппроксимации (5.1.1) в областях, где  $\nabla \sigma = 0$ , второй член уравнения исчезает, что не вносит необязательных погрешностей в расчеты.

Рассмотрим теперь аппроксимацию неизвестной, производной и интегралов в уравнении (5.1.1).

Значения  $U_x$ ,  $U_y$ ,  $U_z$  на гранях элементарной ячейки  $S_{l\pm 1/2}$ ,  $S_{m\pm 1/2}$ ,  $S_{n\pm 1/2}$  аппроксимируются по формулам:

$$U_x \Big|_{S_{l\pm 1/2}} \approx 1/2 (U_{x_{l,m,n}} + U_{x_{l\pm 1,m,n}})$$

$$U_x \Big|_{S_{m\pm 1/2}} \approx 1/2 (U_{x_{l,m,n}} + U_{x_{l,m\pm 1,n}})$$

и аналогично для других граней и других компонент.

Первые производные от  $U_x$ ,  $U_y$ ,  $U_z$  на этих же поверхностях заменяются двухточечными односторонними разностями, например:

$$\left. \frac{\partial U_x}{\partial x} \right|_{S_{\ell+1/2}} = \frac{U_{x_{\ell+1,m,n}} - U_{x_{\ell,m,n}}}{d_{\ell}}$$

$$\left. \frac{\partial U_x}{\partial x} \right|_{S_{\ell-1/2}} = \frac{U_{x_{\ell,m,n}} - U_{x_{\ell-1,m,n}}}{d_{\ell-1}}$$

Производные от  $\ln \sigma$  аппроксимируются по трехточечной схеме с учетом неравномерности сетки [ 4 ], например:

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} (\ln \sigma) \right|_{\substack{x=x_{\ell+1/2} \\ y=y_{m+1/2} \\ z=z_{n-1/2}}} \approx \frac{1/2(d_{\ell-1}+d_{\ell}) \ln \sigma_{\ell+3/2,m+1/2,n-1/2}}{1/4(d_{\ell+1}+d_{\ell})(d_{\ell-1}+2d_{\ell}+d_{\ell+1})} +$$

$$+ \frac{1/2(d_{\ell+1}-d_{\ell}) \ln \sigma_{\ell+1/2,m+1/2,n-1/2}}{1/4(d_{\ell-1}+d_{\ell})(d_{\ell+1}+d_{\ell})} - \frac{1/2(d_{\ell+1}+d_{\ell}) \ln \sigma_{\ell-1/2,m+1/2,n-1/2}}{1/4(d_{\ell-1}+d_{\ell})(d_{\ell-1}+2d_{\ell}+d_{\ell+1})}$$

Поверхностные интегралы в (5.1.1) вычисляются по правилу прямоугольника, а объемный интеграл аппроксимируется в предположении, что в каждой из ячеек сетки  $\sum$  значения  $\bar{E}_{\ell,m,n}$  остаются постоянными.

Аналогично вычисляются производные при аппроксимации крайних условий (2.2.3), а также интегралы и производные в формуле (2.1.4) для нахождения магнитного поля по известному электри-

ческому в тех же узлах пространственной сетки.

В результате замены производных в уравнении (5.1.1) их конечно-разностными аналогами и последующей аппроксимации интегралов мы получаем в каждом узле  $(\ell, m, n)$  сетки  $\Sigma$  линейное алгебраическое уравнение:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{\ell, m, n} = \hat{D}_{\ell, m, n}^{(0)-1} \{ & \hat{D}_{\ell, m, n}^{(1)} \bar{U}_{\ell, m, n-1} + \hat{D}_{\ell, m, n}^{(2)} \bar{U}_{\ell, m-1, n} + \hat{D}_{\ell, m, n}^{(3)} \bar{U}_{\ell-1, m, n} + \\ & + \hat{D}_{\ell, m, n}^{(4)} \bar{U}_{\ell+1, m, n} + \hat{D}_{\ell, m, n}^{(5)} \bar{U}_{\ell, m+1, n} + \hat{D}_{\ell, m, n}^{(6)} \bar{U}_{\ell, m, n+1} \} \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

$$(\ell = 1, 2, \dots, L; \quad m = 1, 2, \dots, M; \quad n = 1, 2, \dots, N),$$

Здесь  $\hat{D}_{\ell, m, n}^{(i)}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, 6$ ) - матричные коэффициенты, определяемые геометрией сетки, распределением электропроводности  $\sigma$ , а также частотой  $\omega$ :

$$\hat{D}_{\ell, m, n}^{(i)} = \alpha_{\ell, m, n}^{(i)} \hat{I} + \hat{B}_{\ell, m, n}^{(i)} \quad (5.1.3)$$

$$\hat{D}_{\ell, m, n}^{(0)} = (\alpha_{\ell, m, n}^{(0)} - \tilde{K}_{\ell, m, n}^2) \hat{I} - \hat{B}_{\ell, m, n}^{(0)} \quad (5.1.4)$$

$$\hat{B}_{\ell, m, n}^{(0)} = \sum_{i=1}^6 \hat{B}_{\ell, m, n}^{(i)}, \quad (5.1.5)$$

где все матрицы  $\hat{D}^{(i)}$ ,  $\hat{B}^{(i)}$ ,  $\hat{I}$  имеют размерность  $(3 \times 3)$ ;  $\hat{I}$  - единичная матрица.

Определим коэффициенты  $\tilde{K}_{\ell, m, n}^2$ ,  $\alpha_{\ell, m, n}^{(i)}$ , а также матрицы  $\hat{B}_{\ell, m, n}^{(i)}$ , входящие в (5.1.3)-(5.1.5). Введем для удобства обозначений параметры  $p$ ,  $q$ , и  $z$ , которые могут принимать значения 0 или 1. Тогда мы можем записать:

$$\tilde{K}_{\ell, m, n}^2 = i\omega\mu_0 \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 \sum_{z=0}^1 \sigma_{\substack{\ell-p+1/2 \\ m-q+1/2 \\ n-z+1/2}} \cdot V_{\substack{\ell-p \\ m-q \\ n-z}}, \quad (5.1.6)$$

где  $V_{\substack{\ell-p \\ m-q \\ n-z}} = \frac{1}{8} \Delta x_{\ell-p} \Delta y_{m-q} \Delta z_{n-z}$

$$\alpha_{\ell,m,n}^{(1)} = \frac{1}{\Delta z_{n-1}} \sum_p \sum_q S_{\ell,m}^{p,q} ; \alpha_{\ell,m,n}^{(4)} = \frac{1}{\Delta x_\ell} \sum_p \sum_q S_{m,n}^{p,q}$$

(5.1.7)

$$\alpha_{\ell,m,n}^{(2)} = \frac{1}{\Delta y_{m-1}} \sum_p \sum_q S_{\ell,n}^{p,q} ; \alpha_{\ell,m,n}^{(5)} = \frac{1}{\Delta y_m} \sum_p \sum_q S_{\ell,n}^{p,q}$$

$$\alpha_{\ell,m,n}^{(3)} = \frac{1}{\Delta x_{\ell-1}} \sum_p \sum_q S_{m,n}^{p,q} ; \alpha_{\ell,m,n}^{(6)} = \frac{1}{\Delta z_n} \sum_p \sum_q S_{\ell,m}^{p,q}$$

$$\alpha_{\ell,m,n}^{(0)} = \sum_{i=1}^6 \alpha_{\ell,m,n}^{(i)} (> 0),$$

где

$$\Delta x_\ell = x_{\ell+1} - x_\ell$$

$$\Delta y_m = y_{m+1} - y_m$$

$$\Delta z_n = z_{n+1} - z_n,$$

$$\left( \begin{array}{l} \ell=1,2,\dots,L-1; \\ m=1,2,\dots,M-1; \\ n=1,2,\dots,N-1 \end{array} \right)$$

$$S_{\ell,n}^{p,q} = \frac{1}{4} \Delta x_{\ell-p} \Delta z_{n-q}$$

$$S_{m,n}^{p,q} = \frac{1}{4} \Delta y_{m-p} \Delta z_{n-q}$$

$$S_{\ell,m}^{p,q} = \frac{1}{4} \Delta x_{\ell-p} \Delta y_{m-q}$$

(В (5.1.7) и всюду ниже значения, принимаемые параметрами  $p, q$  и  $z$  при суммировании, для простоты опущены).

$$\hat{B}_{\ell,m,n}^{(1)} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b'_{31} & b'_{32} & b'_{33} \end{pmatrix}$$

$$\hat{B}_{\ell,m,n}^{(4)} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{B}_{\ell,m,n}^{(2)} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b'_{21} & b'_{22} & b'_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{B}_{\ell,m,n}^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.1.8)$$

$$\hat{B}_{\ell,m,n}^{(3)} = - \begin{pmatrix} b'_{11} & b'_{12} & b'_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{B}_{\ell,m,n}^{(6)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Коэффициенты  $b_{ij}$  и  $b'_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) в (5.1.8) вычисляются следующим образом:

$$(b_{\ell,m,n})_{11} = \beta^{(1)} \sum_p \sum_q S_{m,n}^{p,q} \nabla_{\ell}^+ \mathcal{G}_{\ell+1/2, m-p+1/2, n-q+1/2} + \beta^{(2)} \sum_p \sum_q S_{m,n}^{p,q} \nabla_{\ell}^- \mathcal{G}_{\ell+1/2, m-p+1/2, n-q+1/2}$$

$$(b_{\ell,m,n})_{22} = \beta^{(1)} \sum_m \sum_p \sum_q S_{\ell,n}^{p,q} \nabla_m^+ \mathcal{G}_{\ell-p+1/2, m+1/2, n-q+1/2} + \beta^{(2)} \sum_m \sum_p \sum_q S_{\ell,n}^{p,q} \nabla_m^- \mathcal{G}_{\ell-p+1/2, m+1/2, n-q+1/2}$$

$$(b_{\ell,m,n})_{33} = \beta^{(1)} \sum_n \sum_p \sum_q S_{\ell,m}^{p,q} \nabla_n^+ \mathcal{G}_{\ell-p+1/2, m-q+1/2, n+1/2} + \beta^{(2)} \sum_n \sum_p \sum_q S_{\ell,m}^{p,q} \nabla_n^- \mathcal{G}_{\ell-p+1/2, m-q+1/2, n+1/2}$$

$$(b_{\ell,m,n})_{12} = \sum_q \gamma_{n-q} \nabla_m^- \mathcal{G}_{\ell+1/2, m+1/2, n-q-1/2}$$

$$(b_{\ell,m,n})_{13} = \sum_q \gamma_{m-q} \nabla_n^- \mathcal{G}_{\ell+1/2, m-q+1/2, n+1/2}$$

$$(b_{\ell,m,n})_{21} = \sum_q \gamma_{n-q} \nabla_{\ell}^- \mathcal{G}_{\ell+1/2, m+1/2, n-q+1/2}$$

$$(b_{\ell,m,n})_{23} = \sum_q \gamma_{\ell-q} \nabla_n^- \mathcal{G}_{\ell-q+1/2, m+1/2, n+1/2}$$

(5.1.9)

$$(b_{l,m,n})_{31} = \sum_q \gamma_{m-q} \nabla_l^- \mathcal{G}_{l+1/2, m-q+1/2, n+1/2}$$

$$(b_{l,m,n})_{32} = \sum_q \gamma_{l-q} \nabla_m^- \mathcal{G}_{l-q+1/2, m+1/2, n+1/2}$$

$$(b'_{l,m,n})_{1i} = (b_{l-1,m,n})_{1i}$$

$$(b'_{l,m,n})_{2i} = (b_{l,m-1,n})_{2i}$$

$$(b'_{l,m,n})_{3i} = (b_{l,m,n-1})_{3i}$$

$$(i = 1, 2, 3) ,$$

где

$$\nabla_l^+ \mathcal{G}_{l+1/2, m+1/2, n+1/2} = \ln \frac{\mathcal{G}_{l+3/2, m+1/2, n+1/2}}{\mathcal{G}_{l+1/2, m+1/2, n+1/2}}$$

$$\nabla_l^- \mathcal{G}_{l+1/2, m+1/2, n+1/2} = \ln \frac{\mathcal{G}_{l+1/2, m+1/2, n+1/2}}{\mathcal{G}_{l-1/2, m+1/2, n+1/2}}$$

(операторы  $\nabla_m^+$ ,  $\nabla_m^-$ ,  $\nabla_n^+$ ,  $\nabla_n^-$  определяются аналогично);

$$\beta_l^{(1)} = \frac{\Delta x_{l-1} + \Delta x_l}{(\Delta x_l + \Delta x_{l+1})(\Delta x_{l-1} + 2\Delta x_l + \Delta x_{l+1})}$$

$$\beta_l^{(2)} = \frac{\Delta x_{l+1} - \Delta x_{l-1}}{(\Delta x_{l-1} + \Delta x_l)(\Delta x_l + \Delta x_{l+1})}$$

(Аналогично вычисляются коэффициенты  $\beta_m^{(1)}$ ,  $\beta_m^{(2)}$ ,  $\beta_n^{(1)}$  и  $\beta_n^{(2)}$ ); кроме того:

$$\gamma_\ell = \frac{1}{4}(\Delta x_\ell + \Delta x_{\ell-1})$$

$$\gamma_m = \frac{1}{4}(\Delta y_m + \Delta y_{m-1})$$

$$\gamma_n = \frac{1}{4}(\Delta z_n + \Delta z_{n-1})$$

### 5.1.3. Оценка точности аппроксимации

Для того, чтобы количественно оценить качество конечно-разностной аппроксимации уравнения баланса (5.1.1) в каждом узле пространственной сетки, воспользуемся известным подходом, основанным на спектральном представлении функции  $\bar{U}$  [31].

Выполняя Фурье-преобразование функции  $\bar{U}$  и предполагая ее периодичность (что, впрочем, не ограничивает общности), мы можем записать:

$$u_x \sim \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} C_{x,\alpha,\beta,\gamma} e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$$

$$u_y \sim \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} C_{y,\alpha,\beta,\gamma} e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$$

$$u_z \sim \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} C_{z,\alpha,\beta,\gamma} e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)}$$

(5.1.10)

где  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  - спектры функции  $\bar{U}$ ;  $C_x$ ,  $C_y$ ,  $C_z$  - коэффициенты разложения, а  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  - пространственные частоты по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , соответственно.

Проведем оценку точности аппроксимации отдельных членов в левой части уравнения (5.1.1) по отношению к отдельной Фурье-моде:

$$\bar{u} \sim \bar{c} e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \quad (5.1.11)$$

Будем считать (для упрощения выкладок), что

$$\Delta x_\ell = \Delta x \quad (\ell = 1, 2, \dots, L-1)$$

$$\Delta y_m = \Delta y \quad (m = 1, 2, \dots, M-1)$$

$$\Delta z_n = \Delta z \quad (n = 1, 2, \dots, N-1),$$

а также введем следующие обозначения:

$$\bar{u}(x_0, y_0, z_0) = \bar{u}_{(0,0,0)}$$

$$\bar{u}(x_0, y_0, z_0 \pm \Delta z) = \bar{u}_{(0,0,\pm 1)}$$

$$\bar{u}(x_0, y_0 \pm \Delta y, z_0) = \bar{u}_{(0,\pm 1,0)}$$

$$\bar{u}(x_0 \pm \Delta x, y_0, z_0) = \bar{u}_{(\pm 1,0,0)},$$

где  $(x_0, y_0, z_0)$  - координаты центрального узла рассматриваемой ячейки.

Проведем анализ для первого из 3-х скалярных уравнений, которым эквивалентно векторное уравнение (5.1.1). Аналогичные оценки будут, очевидно, справедливы и для двух других скалярных уравнений.

а) Оценка точности аппроксимации I-го члена уравнения



Подставим  $x$ -компоненту Фурье-моды (5.1.11) в первый интеграл соответствующего скалярного уравнения:

$$\oint_S \frac{\partial u_x}{\partial n} ds = I_1 = \iint_{S(1/2, 0, 0)} \frac{\partial u_x}{\partial x} dydz - \iint_{S(-1/2, 0, 0)} \frac{\partial u_x}{\partial x} dydz + \iint_{S(0, 1/2, 0)} \frac{\partial u_x}{\partial y} dx dz - \iint_{S(0, -1/2, 0)} \frac{\partial u_x}{\partial y} dx dz + \iint_{S(0, 0, 1/2)} \frac{\partial u_x}{\partial z} dx dy - \iint_{S(0, 0, -1/2)} \frac{\partial u_x}{\partial z} dx dy, \quad (5.1.12)$$

где  $S(\dots)$  - поверхности ячейки, параллельные соответствующим координатным плоскостям.

Дифференцируя  $x$ -компоненту Фурье-моды (5.1.11), мы можем записать:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = C_x i\alpha e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} = i\alpha u_x$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = i\beta u_x$$

(5.1.13)

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = i\gamma u_x$$

Подставляя (5.1.13) в (5.1.12), получаем:

$$I_1 = i\alpha C_x e^{i\alpha x_0} \left( e^{i\alpha \frac{\Delta x}{2}} - e^{-i\alpha \frac{\Delta x}{2}} \right) \int_{y_0 - \frac{\Delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\Delta y}{2}} e^{i\beta y} dy \int_{z_0 - \frac{\Delta z}{2}}^{z_0 + \frac{\Delta z}{2}} e^{i\gamma z} dz +$$

$$\begin{aligned}
 & + i\beta C_x e^{i\beta y_0} \left( e^{i\beta \frac{\Delta y}{2}} - e^{-i\beta \frac{\Delta y}{2}} \right) \int_{x_0 - \frac{\Delta x}{2}}^{x_0 + \frac{\Delta x}{2}} e^{i\alpha x} dx \int_{z_0 - \frac{\Delta z}{2}}^{z_0 + \frac{\Delta z}{2}} e^{i\gamma z} dz + \\
 & + i\gamma C_x e^{i\gamma z_0} \left( e^{i\gamma \frac{\Delta z}{2}} - e^{-i\gamma \frac{\Delta z}{2}} \right) \int_{x_0 - \frac{\Delta x}{2}}^{x_0 + \frac{\Delta x}{2}} e^{i\alpha x} dx \int_{y_0 - \frac{\Delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\Delta y}{2}} e^{i\beta y} dy = \\
 & = -\delta u_{x(0,0,0)} \sin\left(\frac{\alpha \Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta \Delta y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\gamma \Delta z}{2}\right) \cdot \frac{n^2}{\alpha \beta \gamma},
 \end{aligned}$$

(5.1.14)

где  $n^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ .

При конечно-разностной аппроксимации этого же члена уравнения мы имеем (с учетом формул, приведенных в п. 5.1.2):

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_1 & \sim \left( u_{x(1,0,0)} - 2u_{x(0,0,0)} + u_{x(-1,0,0)} \right) \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} + \\
 & + \left( u_{x(0,1,0)} - 2u_{x(0,0,0)} + u_{x(0,-1,0)} \right) \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} + \\
 & + \left( u_{x(0,0,1)} - 2u_{x(0,0,0)} + u_{x(0,0,-1)} \right) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta z}
 \end{aligned}$$

(5.1.15)

Учитывая, что

$$u_{x(1,0,0)} = C_x e^{i(\alpha(x_0 + \Delta x) + \beta y_0 + \gamma z_0)} = u_{x(0,0,0)} \cdot e^{i\alpha \Delta x}$$

и, аналогично,

$$u_{x(-1,0,0)} = u_{x(0,0,0)} \cdot e^{-i\alpha\Delta x}$$

$$u_{x(0,\pm 1,0)} = u_{x(0,0,0)} \cdot e^{\pm i\beta\Delta y}$$

$$u_{x(0,0,\pm 1)} = u_{x(0,0,0)} \cdot e^{\pm i\gamma\Delta z}$$

записываем:

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &\sim u_{x(0,0,0)} \left( e^{i\alpha\Delta x} + e^{-i\alpha\Delta x} - 2 \right) \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} + \\ &+ \left( e^{i\beta\Delta y} + e^{-i\beta\Delta y} - 2 \right) \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} + \left( e^{i\gamma\Delta z} + e^{-i\gamma\Delta z} - 2 \right) \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta z} = \\ &= -4 u_{x(0,0,0)} \left\{ \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \sin^2 \left( \frac{\alpha \Delta x}{2} \right) + \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} \sin^2 \left( \frac{\beta \Delta y}{2} \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta z} \sin^2 \left( \frac{\gamma \Delta z}{2} \right) \right\} \end{aligned} \tag{5.1.16}$$

Оценим разность  $\bar{I}_1 - I_1$  при  $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$ , разлагая синусы в выражениях (5.1.14) и (5.1.16) в ряды Тейлора:

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_1 &\sim -4u_{x_{(0,0,0)}} \left\{ \left[ \left( \frac{\alpha \Delta x}{2} \right)^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{\alpha \Delta x}{2} \right)^4 + O \left( \frac{\alpha \Delta x}{2} \right)^4 \right] \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} + \right. \\
 &+ \left[ \left( \frac{\beta \Delta y}{2} \right)^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{\beta \Delta y}{2} \right)^4 + O \left( \frac{\beta \Delta y}{2} \right)^4 \right] \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} + \\
 &+ \left. \left[ \left( \frac{\gamma \Delta z}{2} \right)^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{\gamma \Delta z}{2} \right)^4 + O \left( \frac{\gamma \Delta z}{2} \right)^4 \right] \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta z} \right\} = \\
 &= -u_{x_{(0,0,0)}} \Delta V \left[ n^2 - \frac{1}{12} (\alpha^4 \Delta x^2 + \beta^4 \Delta y^2 + \gamma^4 \Delta z^2) + \right. \\
 &+ \left. O(\alpha^4 \Delta x^2 + \beta^4 \Delta y^2 + \gamma^4 \Delta z^2) \right], \tag{5.1.17}
 \end{aligned}$$

где  $\Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ ,

$$\begin{aligned}
 I_1 &\sim -8u_{x_{(0,0,0)}} \frac{n^2}{\alpha \beta \gamma} \left[ \frac{\alpha \Delta x}{2} - \frac{1}{6} \left( \frac{\alpha \Delta x}{2} \right)^3 + O \left( \frac{\alpha \Delta x}{2} \right)^3 \right] \cdot \\
 &\cdot \left[ \frac{\beta \Delta y}{2} - \frac{1}{6} \left( \frac{\beta \Delta y}{2} \right)^3 + O \left( \frac{\beta \Delta y}{2} \right)^3 \right] \cdot \left[ \frac{\gamma \Delta z}{2} - \frac{1}{6} \left( \frac{\gamma \Delta z}{2} \right)^3 + O \left( \frac{\gamma \Delta z}{2} \right)^3 \right] = \\
 &= -u_{x_{(0,0,0)}} \Delta V \left[ n^2 - \frac{1}{24} n^2 (\alpha^2 \Delta x^2 + \beta^2 \Delta y^2 + \gamma^2 \Delta z^2) + \right. \\
 &+ \left. O(\alpha^2 \Delta x^2 + \beta^2 \Delta y^2 + \gamma^2 \Delta z^2) \right] \tag{5.1.18}
 \end{aligned}$$

Таким образом, из (5.1.17) и (5.1.18) следует:

$$\bar{I}_1 = I_1 [1 + O(\alpha^2 \Delta x^2 + \beta^2 \Delta y^2 + \gamma^2 \Delta z^2)] \quad (5.1.19)$$

В частности, при  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$  мы имеем:

$$\bar{I}_1 = I_1 [1 + O(n^2 h^2)], \quad (5.1.20)$$

т.е. на равномерной сетке аппроксимация I-го интеграла в (5.1.1) имеет 2-ой порядок точности по  $(nh)$ .

Перейдем теперь к оценке точности аппроксимации 2-го и 3-го интегралов в (5.1.1), предполагая при этом для определенности, что электропроводность изменяется по экспоненциальному закону вдоль оси  $z$  :

$$\sigma = \sigma_0 e^{-\varkappa z} \quad (5.1.21)$$

б) Оценка точности аппроксимации 2-го члена уравнения

Вычислим точное значение 2-го интеграла соответствующего скалярного уравнения:

$$\iint_S \left[ u_x \frac{\partial}{\partial x} (\ln \sigma) + u_y \frac{\partial}{\partial y} (\ln \sigma) + u_z \frac{\partial}{\partial z} (\ln \sigma) \right] dy dz = I_2 = \quad (5.1.22)$$

$$= \iint_{S_{(1/2, 0, 0)}} [\dots] dy dz - \iint_{S_{(-1/2, 0, 0)}} [\dots] dy dz$$

Но из (5.1.21) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x} (\ln \sigma) = \frac{\partial}{\partial y} (\ln \sigma) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\ln \sigma) = -\varkappa \quad (5.1.23)$$

Подставляя (5.1.23) в (5.1.22) и учитывая (5.1.11), записываем:

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \iint_{S_{(1/2,0,0)}} C_2 e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} (-x) dy dz - \iint_{S_{(-1/2,0,0)}} C_2 e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} (-x) dy dz = \\
 &= \frac{C_2 x}{\beta \gamma} \left\{ \left[ e^{i\beta(y_0 + \frac{\Delta y}{2})} - e^{i\beta(y_0 - \frac{\Delta y}{2})} \right] \left[ e^{i\gamma(z_0 + \frac{\Delta z}{2})} - e^{i\gamma(z_0 - \frac{\Delta z}{2})} \right] \cdot \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left[ e^{i\alpha(x_0 + \frac{\Delta x}{2})} - e^{i\alpha(x_0 - \frac{\Delta x}{2})} \right] \right\} = -\frac{8i}{\beta \gamma} u_{2(0,0,0)} x \sin\left(\frac{\alpha \Delta x}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta \Delta y}{2}\right) \sin\left(\frac{\gamma \Delta z}{2}\right)
 \end{aligned}$$

(5.1.24)

При конечно-разностной аппроксимации этого интеграла мы имеем:

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_2 &\sim \frac{1}{2} \left\{ C_2 e^{i[\alpha(x_0 + \Delta x) + \beta y_0 + \gamma z_0]} - C_2 e^{i[\alpha(x_0 - \Delta x) + \beta y_0 + \gamma z_0]} \right\} \cdot \\
 &\quad \Delta y \cdot \ln \frac{\sigma_0 e^{-x(z_0 + \frac{\Delta z}{2})}}{\sigma_0 e^{-x(z_0 - \frac{\Delta z}{2})}} = -i x u_{2(0,0,0)} \Delta y \Delta z \cdot \sin(\alpha \Delta x)
 \end{aligned}$$

(5.1.25)

Оценим полученные значения  $I_2$  и  $\tilde{I}_2$  при  $\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_2 &\sim -i x u_{2(0,0,0)} \Delta y \Delta z \left[ \alpha \Delta x - \frac{1}{6} (\alpha \Delta x)^3 + O(\alpha \Delta x)^3 \right] = \\
 &= -i x \alpha u_{2(0,0,0)} \Delta V \left[ 1 - \frac{1}{6} \alpha^2 \Delta x^2 + O(\alpha \Delta x)^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &\sim -\frac{\delta i \alpha}{\beta \gamma} u_{z(0,0,0)} \left[ \frac{\alpha \Delta x}{2} - \frac{1}{6} \left( \frac{\alpha \Delta x}{2} \right)^3 + O(\alpha \Delta x)^3 \right] \left[ \frac{\beta \Delta y}{2} - \frac{1}{6} \left( \frac{\beta \Delta y}{2} \right)^3 + \right. \\
 &+ O(\beta \Delta y)^3 \left. \right] \cdot \left[ \frac{\gamma \Delta z}{2} - \frac{1}{6} \left( \frac{\gamma \Delta z}{2} \right)^3 + O(\gamma \Delta z)^3 \right] = \\
 &= -i \alpha u_{z(0,0,0)} \Delta V \left[ 1 - \frac{1}{24} (\alpha^2 \Delta x^2 + \beta^2 \Delta y^2 + \gamma^2 \Delta z^2) + O(\alpha^2 \Delta x^2 + \beta^2 \Delta y^2 + \gamma^2 \Delta z^2) \right]
 \end{aligned}
 \tag{5.1.27}$$

Из (5.1.26) и (5.1.27) следует, что

$$\tilde{I}_2 = I_2 \left[ 1 + O(\alpha^2 \Delta x^2 + \beta^2 \Delta y^2 + \gamma^2 \Delta z^2) \right]
 \tag{5.1.28}$$

В частности, на равномерной сетке ( $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$ ) :

$$\tilde{I}_2 = I_2 \left[ 1 + O(n^2 h^2) \right]$$

Таким образом, конечно-разностный оператор  $\tilde{I}_2$  аппроксимирует исходный  $I_2$  со вторым порядком точности по  $(nh)$  (в классе экспоненциально изменяющихся функций электропроводности).

в) Оценка точности аппроксимации 3-го члена уравнения

Поступая по аналогии с рассмотренными выше оценками (пп.

а) и б)), мы последовательно записываем:

$$\iiint_V k^2 u_x dx dy dz = I_3 = i \omega \mu_0 \sigma_0 C_x \int_{x_0 - \frac{\Delta x}{2}}^{x_0 + \frac{\Delta x}{2}} e^{i \alpha x} dx \int_{y_0 - \frac{\Delta y}{2}}^{y_0 + \frac{\Delta y}{2}} e^{i \beta y} dy \cdot$$

$$\int_{z_0 - \frac{\Delta z}{2}}^{z_0 + \frac{\Delta z}{2}} e^{(i \gamma - \alpha) z} dz = \frac{4}{\alpha \beta (i \gamma - \alpha)} k_{(0,0,0)}^2 u_{x(0,0,0)} \sin\left(\frac{\alpha \Delta x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\beta \Delta y}{2}\right).$$

$$\cdot \left[ e^{(iy-x)\frac{\Delta z}{2}} - e^{-(iy-x)\frac{\Delta z}{2}} \right] \xrightarrow{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} \frac{4}{\alpha \beta (iy-x)} k_{(0,0,0)}^2 u_{x(0,0,0)}$$

$$\cdot \left[ \frac{\alpha \Delta x}{2} - \frac{1}{6} \left( \frac{\alpha \Delta x}{2} \right)^3 + O(\alpha \Delta x)^3 \right] \left[ \frac{\beta \Delta y}{2} - \frac{1}{6} \left( \frac{\beta \Delta y}{2} \right)^3 + O(\beta \Delta y)^3 \right]$$

$$\cdot \left[ (iy-x)\Delta z + \frac{1}{24} (iy-x)^3 \Delta z^3 + O(\gamma \Delta z)^3 \right] =$$

$$= k_{(0,0,0)}^2 u_{x(0,0,0)} \Delta V \left[ 1 + O(\alpha^2 \Delta x^2 + \beta^2 \Delta y^2 + \gamma^2 \Delta z^2) \right] \quad (5.1.29)$$

$$\tilde{I}_3 \sim \frac{1}{8} i \omega \mu_0 u_{x(0,0,0)} \Delta x \Delta y \Delta z \left[ 4 \sigma_0 e^{-x(z_0 - \frac{\Delta z}{2})} + 4 \sigma_0 e^{-x(z_0 + \frac{\Delta z}{2})} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} k_{(0,0,0)}^2 u_{x(0,0,0)} \Delta V \left( e^{\frac{x \Delta z}{2}} + e^{-\frac{x \Delta z}{2}} \right) = k_{(0,0,0)}^2 u_{x(0,0,0)} \Delta V \cdot \text{ch} \left( \frac{x \Delta z}{2} \right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\Delta x, \Delta y, \Delta z \rightarrow 0} k_{(0,0,0)}^2 u_{x(0,0,0)} \Delta V \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x \Delta z}{2} \right)^2 + O(x \Delta z)^2 \right] =$$

$$= k_{(0,0,0)}^2 u_{x(0,0,0)} \Delta V \left[ 1 + O(\Delta z)^2 \right]. \quad (5.1.30)$$

Из (5.1.29) и (5.1.30) следует:

$$\tilde{I}_3 = I_3 \left[ 1 + O(\alpha^2 \Delta x^2 + \beta^2 \Delta y^2 + \gamma^2 \Delta z^2) \right] \quad (5.1.31)$$

В частности, на равномерной сетке:

$$\tilde{I}_3 = I_3 \left[ 1 + O(n^2 h^2) \right]$$

Таким образом, на основании (5.1.19), (5.1.28) и (5.1.31) можно заключить, что аппроксимация всего рассмотренного скаляр-



ного уравнения имеет 2-ой порядок точности по  $(nh)$ .

Можно показать, что аналогичные оценки аппроксимации (5.1.1) справедливы и для двух других скалярных уравнений, а также для более широкого класса функций электропроводности.

### 5.2. Решение системы линейных алгебраических уравнений методом блочной верхней релаксации

Рассмотрим решение системы линейных алгебраических уравнений

$$D\bar{x} = 0 \quad (5.2.1)$$

получающейся при конечно-разностной аппроксимации векторного уравнения (5.1.1).

#### 5.2.1. Свойства матрицы

Матрица  $D$  имеет блочно-ленточную структуру и разрежена (рис. 10).

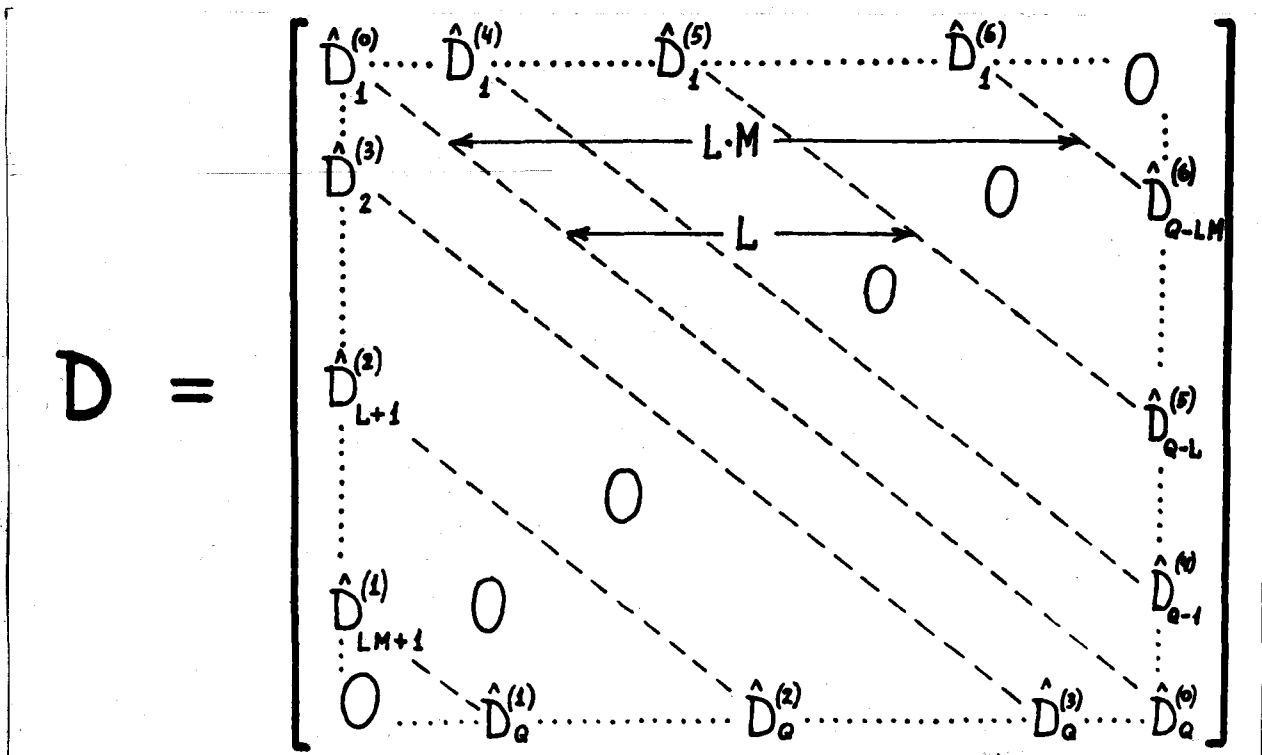


Рис. 10.

(  $Q = L \cdot M \cdot N$  - число узлов в рассматриваемой области;  $D_{ij}$  - подматрицы размером  $(3 \times 3)$  ).

Таким образом, в каждом  $i$ -ом узле можно записать:

$$\sum_{j=0}^6 \hat{D}_{ij} \bar{u}_i = 0, \quad i \in \{I\} \quad (5.2.2)$$

где

$$\{I\} = 1, 2, \dots, Q$$

Отметим, что при фиксированном порядке нумерации узлов можно установить взаимно-однозначное соответствие между индексами  $i$  и тройками чисел  $(\ell, m, n)$ . В частности, соответствие  $(\ell, m, n) \rightarrow (i)$  имеет вид:

$$i = (n-1)L \cdot M + (m-1)L + \ell \quad (5.2.3)$$

Тогда условие  $\hat{D}_{ij} \neq 0$  означает наличие связи между узлами сетки  $(\ell^{(1)}, m^{(1)}, n^{(1)})$  и  $(\ell^{(2)}, m^{(2)}, n^{(2)})$ , соответствующими индексам  $i$  и  $j$ . Таким образом, свойства матрицы  $D$  можно изучать, рассматривая связи между узлами пространственной сетки.

Построим ориентированный граф с вершинами в узлах сетки, так что блоку  $\hat{D}_{ij} \neq 0$  соответствуют стрелки, направленные от узла  $(i)$  к узлу  $(j)$  и наоборот (рис. II).

Граф, соответствующий всей рассматриваемой области, является, очевидно, односвязным (отсюда следует неприводимость матрицы  $D$ ), 2-циклическим, что соответствует наличию свойства Янга (A) [79]. Кроме того, он допускает разбиение множества  $\{I\}$  на 2 множества  $\{S\}$  и  $\{T\}$ , таких что  $\{S\} \cup \{T\} = \{I\}$  и  $\{S\} \cap \{T\} = \{0\}$ ; при этом для любого блока  $\hat{D}_{ij}$  имеет место:  $i \in \{S\}$  и  $j \in \{T\}$ , или наоборот [79]. В частности, такое разбиение получается, если решать систему в "четно-нечетном" порядке, который является согласованным с данным разбиением матрицы на блоки [4].

Рассмотрим теперь наличие у матрицы  $D$  свойства блочного

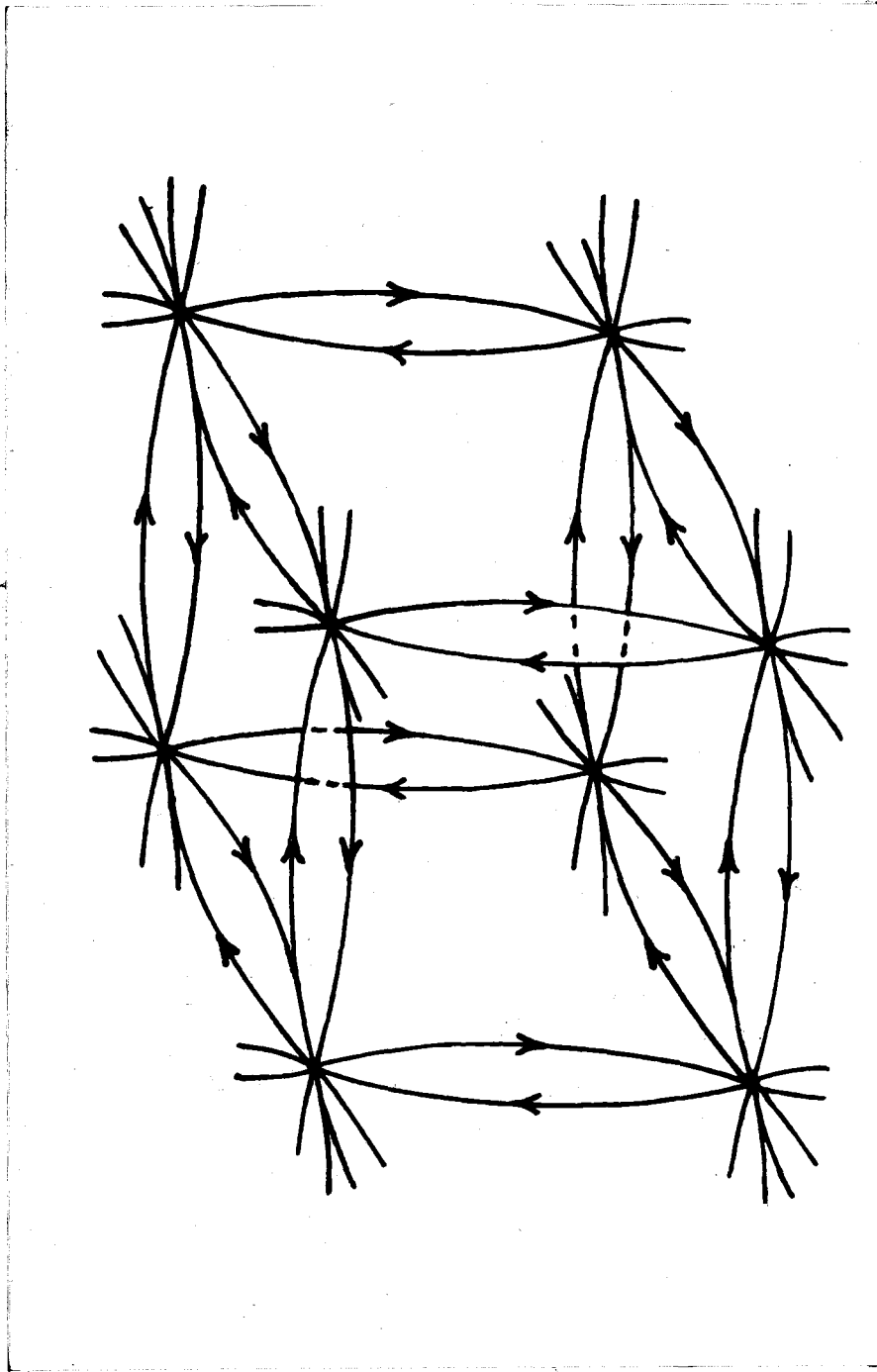


Рис. 11. Фрагмент пространственного ориентированного графа.

диагонального преобладания [ 5I ] .

Диагональное преобладание (блочное)

Введем для удобства дальнейшего изложения следующие известные определения норм матрицы [ 67 ] :

$$\Lambda(A) = \|A\| = \sup_{|\bar{x}|=1} \|A\bar{x}\| \quad (5.2.4)$$

$$\lambda(A) = (\|A^{-1}\|)^{-1} = \inf_{|\bar{x}|=1} \|A\bar{x}\|$$

Тогда, согласно [ 5I ] , необходимым и достаточным условием блочного диагонального преобладания матрицы системы является выполнение в каждом узле пространственной сетки неравенства:

$$\Lambda(\hat{D}^{(0)}) \geq \sum_{i=1}^6 \Lambda(\hat{D}^{(i)}), \quad (5.2.5)$$

где мы для краткости опустили индекс узла.

Выразим нормы, входящие в (5.2.5), через параметры модели и сетки, используя формулы, приведенные в п. 5.1.2. Тогда на основании неравенства треугольника мы можем записать:

$$\Lambda(\hat{D}^{(i)}) = \Lambda(\alpha^{(i)}\hat{I} + \hat{B}^{(i)}) \leq \alpha^{(i)} + \Lambda(\hat{B}^{(i)}), \quad (i=1,2,\dots,6)$$

И, следовательно,

$$\sum_{i=1}^6 \Lambda(\hat{D}^{(i)}) \leq \alpha^{(0)} + \sum_{i=1}^6 \Lambda(\hat{B}^{(i)}) \quad (5.2.6)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \Lambda(\hat{D}^{(0)}) &= \Lambda[(\alpha^{(0)} - \tilde{k}^2)\hat{I} - \hat{B}^{(0)}] \geq \Lambda[(\alpha^{(0)} - \tilde{k}^2)\hat{I}] - \Lambda(\hat{B}^{(0)}) \geq \\ &\geq |\alpha^{(0)} - \tilde{k}^2| - \sum_{i=1}^6 \Lambda(\hat{B}^{(i)}) \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Запишем теперь (5.2.5) с учетом (5.2.6) и (5.2.7):

$$|\alpha^{(0)} - \tilde{k}^2| - \sum_{i=1}^6 \Lambda(\hat{B}^{(i)}) \geq \alpha^{(0)} + \sum_{i=1}^6 \Lambda(\hat{B}^{(i)})$$

или

$$\sum_{i=1}^6 \Lambda(\hat{B}^{(i)}) \leq \frac{1}{2} \alpha^{(0)} (\sqrt{1 + (|\tilde{k}^2|/\alpha^{(0)})^2} - 1) \quad (5.2.8)$$

Предположим для упрощения расчетов, что рассматриваемая сетка равномерна:  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$ .

Тогда

$$\begin{aligned} \alpha^{(0)} &= \sum_{i=1}^6 \alpha^{(i)} = 6h \\ |\tilde{k}^2| &= \mu_0 \omega \tilde{\sigma} h^3, \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

где  $\tilde{\sigma}$  - средняя электропроводность в данном узле.

Введем "локальную" глубину скин-слоя:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \tilde{\sigma}}} \quad (5.2.10)$$

Из (5.2.9) и (5.2.10) следует:

$$\frac{|\tilde{k}^2|}{\alpha^{(0)}} = \frac{1}{6} \mu_0 \omega \tilde{\sigma} h^3 = \frac{1}{3} \left(\frac{h}{\delta}\right)^2 \quad (5.2.11)$$

Оценим  $\Lambda(\hat{B}^{(i)})$ , предполагая, как и в п. 5.1.3, экспоненциальную зависимость электропроводности от расстояния:

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}_0 e^{-\alpha z} \quad (\alpha > 0) \quad (5.2.12)$$

В частности, при  $i = 1$  мы имеем:

$$\begin{aligned} \Lambda(\hat{B}^{(1)}) &= \sqrt{(b'_{31})^2 + (b'_{32})^2 + (b'_{33})^2} = \sqrt{\left[\frac{h}{2}(-\alpha h)\right]^2 + \left[\frac{h}{2}(-\alpha h)\right]^2 + \left[\frac{\alpha}{2} h^2\right]^2} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha h^2 \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

Нетрудно убедиться, что оценка (5.2.13) справедлива и при  $i = 2, 3, \dots, 6$ . Таким образом,

$$\sum_{i=1}^6 \Lambda(\hat{B}^{(i)}) = 3\sqrt{3} \alpha h^2 \quad (5.2.14)$$

Подставляя (5.2.9), (5.2.11) и (5.2.14) в (5.2.8), получим:

$$3\sqrt{3} \alpha h^2 \leq \frac{1}{2} \cdot 6h \left( \sqrt{1 + \frac{1}{9} \left( \frac{h}{\delta} \right)^4} - 1 \right)$$

Или, обозначая  $\frac{h}{\delta} = \varrho$  и  $h\alpha = \chi$ ,

$$\chi \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left( \sqrt{1 + \frac{1}{9} \varrho^4} - 1 \right) \quad (5.2.15)$$

(напомним, что, в соответствии с (5.2.12), параметр  $1/\alpha$  означает расстояние, на котором величина электропроводности  $\sigma$  изменяется в  $e$  раз).

Так как на практике обычно  $\varrho^4 \ll 1$ , то (5.2.15) можно записать в виде:

$$\chi \leq C \varrho^4, \quad (5.2.16)$$

где

$$C = \frac{1}{18\sqrt{3}}$$

Если в формулу (5.2.15) вместо "локальной" глубины скин-слоя подставить его максимальное значение на всей сетке ( $\delta_{\max} = \max_{1 \leq j \leq Q} \delta_j$ ), то выполнение (5.2.15) для  $\delta_{\max}$  будет достаточным условием блочного диагонального преобладания матрицы системы.

Таким образом, мы выразили условия блочного диагонального преобладания матрицы через локальные параметры модели и сетки.

### 5.2.2. Достаточные условия сходимости итерационного процесса

Рассмотренное выше свойство матрицы является важным при решении системы линейных алгебраических уравнений. Действительно, при ее решении одним из прямых методов не накапливаются ошибки округления [ 85 ]. В то же время, при использовании итерационных методов соответствующий итерационный процесс сходится.

В работе для решения системы (5.2.1) применяется, как уже отмечалось, итерационный метод блочной верхней релаксации:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{(l,m,n)}^{(t+1)} = & (1-\nu)\bar{U}_{(l,m,n)}^{(t)} - \nu \hat{D}_{l,m,n}^{(0)^{-1}} \left\{ \hat{D}_{l,m,n}^{(1)} \bar{U}_{(l,m,n-1)}^{(t)} + \hat{D}_{l,m,n}^{(2)} \bar{U}_{(l,m-1,n)}^{(t)} + \right. \\ & \left. + \hat{D}_{l,m,n}^{(3)} \bar{U}_{(l-1,m,n)}^{(t)} + \hat{D}_{l,m,n}^{(4)} \bar{U}_{(l-1,m,n)}^{(t+1)} + \hat{D}_{l,m,n}^{(5)} \bar{U}_{(l,m+1,n)}^{(t+1)} + \hat{D}_{l,m,n}^{(6)} \bar{U}_{(l,m,n+1)}^{(t+1)} \right\} \quad (5.2.17) \end{aligned}$$

(где  $t$  - номер итерации, а  $\nu$  - параметр релаксации ( $1 \leq \nu < 2$ ), позволяющий наиболее эффективно использовать свойства матрицы  $D$  и дающий экономию ресурсов ЭВМ.

Покажем, что свойство блочного диагонального преобладания гарантирует невырожденность исходной матрицы  $D$ , а также сходимость итерационного процесса (5.2.17).

Действительно, так как матрица  $D$  является блочно-неприводимой и строгое неравенство в (5.2.4) выполняется для узлов пространственной сетки, находящихся в атмосфере, то  $D$  является блочно-неприводимой матрицей с диагональным преобладанием [ 79 ]. Следовательно, по теореме I из [ 51 ], она не вырождена, что обеспечивает существование решения линейной системы (5.2.1).

Докажем, что боковая матрица Якоби, соответствующая блочной матрице  $D$ , является "сходящейся".

Действительно, пусть  $A = I - D^{(0)-1}$  - блочная матрица Якоби, где  $I$  - единичная матрица, а  $D^{(0)}$  - матрица, у которой ненулевыми являются лишь блоки на главной диагонали, совпадающие с соответствующими блоками матрицы  $D$ . Для каждого  $i$ -го узла имеет место:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^Q \Lambda(A_{ij}) &\equiv \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^Q \Lambda(D_{ii}^{(0)-1} D_{ij}) \leq \Lambda(D_{ii}^{(0)-1}) \left( \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^Q \Lambda(D_{ij}) \right) = \\ &= \Lambda(\hat{D}^{(0)-1}) \sum_{j=1}^6 \Lambda(\hat{D}^{(j)}) = d^{-1} (\hat{D}^{(0)}) \sum_{j=1}^6 \Lambda(\hat{D}^{(j)}) \end{aligned}$$

Но так как, по предположению, для каждого  $i$ -го узла удовлетворяется (5.2.4), то мы получаем, что

$$\sum_{j=1}^Q \Lambda(A_{ij}) \leq 1$$

Но, по теореме 2 [5I], для любого собственного значения матрицы  $A$  выполнено:

$$|\chi_p| \leq \sum_{j=1}^Q \Lambda(A_{ij}) \leq 1 \quad p=1,2,\dots,P,$$

где  $P$  - число собственных значений матрицы  $A$ .

А так как в (5.2.4), по крайней мере, для одного узла выполнено строгое неравенство, то по теореме 3 [5I],  $|\chi_p| < 1$  ( $p=1,2,\dots,P$ ) и  $\rho(A) = \max_p |\chi_p| < 1$ . Следовательно, итерационный процесс с матрицей  $A$  сходится. Поэтому для любого начального приближения  $\bar{x}^{(0)}$  сходятся блочные итерационные методы Якоби, Гаусса-Зайделя и последовательной верхней релаксации [79].

Так как блочная матрица  $D$ , как показано выше, имеет согласованный порядок, является 2-циклической и ее диагональные



подматрицы не вырождены, то, по теореме 4.3 [79], существует соотношение

$$(\gamma + \nu - 1)^2 = \gamma \nu^2 \varphi^2$$

между собственными значениями  $\varphi$  блочной матрицы Якоби  $A$  и собственными значениями  $\gamma$  итерационной матрицы  $\mathcal{L}(\nu)$  метода блочной верхней релаксации, что делает оправданным применение последнего метода для решения данной системы линейных уравнений.

### 5.2.3. Алгоритм выбора параметров пространственной сетки

Достаточные условия сходимости итерационного процесса, полученные в п. 5.2.2, дают основание считать, что в случае, когда процесс сходится, мы получим в результате точное решение. (под "точным решением" здесь понимается решение краевой задачи для математической модели реальной физической ситуации. Поэтому в этом параграфе мы будем иметь в виду только фазу численного решения формализованной задачи).

В суммарную погрешность конечного результата  $\varepsilon$  вносят вклад:

- а) ошибки аппроксимации исходного уравнения ( $\varepsilon_1$ ) (в данном случае - это, главным образом, ошибки усечения рядов Тейлора);
- б) ошибки округления ( $\varepsilon_2$ ), связанные с дискретным представлением данных в ЭВМ.

Ошибки первого рода непосредственно связаны с выбором параметров пространственной сетки (см. п. 5.1.2). В то же время, ошибки второго рода, на которые оказывают влияние свойства матрицы

и выбранный метод решения соответствующей системы линейных алгебраических уравнений, связаны с параметрами сетки косвенно (п. 5.2.2).

Из анализа, проведенного в п.п. 5.1.2 и 5.2.2, следует, что уменьшение размеров ячеек сетки, с одной стороны, повышает точность аппроксимации (и, следовательно, уменьшает ошибку  $\varepsilon_1$ ), а с другой стороны, ухудшает свойства матрицы системы (исчезает диагональное преобладание, ухудшается обусловленность матрицы), что приводит к снижению точности (следовательно, к увеличению ошибки  $\varepsilon_2$ ) и увеличению времени счета. Таким образом, неограниченное измельчение сетки может дать обратный ожидаемому результат: суммарная ошибка решения  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  может значительно возрасти. Поэтому параметры сетки, существенно влияющие на точность получаемых результатов, необходимо выбирать в ходе решения некоторой оптимизационной задачи.

Действительно, пусть задано распределение электропроводности  $\sigma$  ( $\bar{\sigma}$ ) в некоторой области моделирования  $V$  (размеры этой области, включающей в себя все неоднородности среды, будем считать известными).

Точность аппроксимации при заданной частоте  $\omega$  (а, следовательно, и ошибка  $\varepsilon_1$ ) контролируется параметром

$\tau_i = \frac{h_i}{\delta_i}$  ( $i=1,2,\dots,Q$ ) (см. п. 5.2.2), где  $h_i$  - характерный размер  $i$ -ой ячейки,  $\delta_i$  - "средняя" глубина скин-слоя в этой ячейке. (Обычно на практике  $\tau \in [0.1 + 0.5]$ ).

Потребуем, чтобы в каждом узле пространственной сетки  $\Sigma$  выполнялось локальное достаточное условие сходимости (условие блочного диагонального преобладания) в ослабленной форме (см. формулу (5.2.16)):

$$\chi_i \leq C \tau_i^\alpha \quad (2 \leq \alpha \leq 4) \quad (5.2.18)$$

где  $C$  и  $\alpha$  - управляющие параметры.

Тогда задачу минимизации суммарной ошибки  $\varepsilon$  можно поставить в виде следующей (вообще говоря, нелинейной) оптимизационной задачи.

Необходимо найти такое разбиение области  $V$  пространственной сеткой  $\Sigma$ , чтобы размеры ячеек сетки  $h_i$  удовлетворяли (5.2.18), а также условию:

$$\sum_i h_i = H \quad (5.2.19)$$

где  $H$  - линейный размер области  $V$  в соответствующем направлении, и выполнялся критерий:

$$K = \max_i \tau_i \rightarrow \min \quad (5.2.20)$$

Отметим, что выбранный критерий позволяет сделать ошибку равномерной в области  $V$ .

При значении  $\alpha = 2$  поставленная задача становится линейной и может быть решена с помощью аппарата линейного программирования. Соответствующее время решения пренебрежимо мало по сравнению с временем решения системы линейных уравнений. В то же время, уменьшение суммарной ошибки  $\varepsilon$  (а также времени счета), которое достигается в результате оптимального выбора параметров сетки, является достоинством этого алгоритма.

#### 5.2.4. Критерий останова итерационного процесса и контроль точности моделирования

Одно из преимуществ решения системы линейных алгебраических уравнений итерационным методом состоит в том, что при этом можно удовлетвориться некоторым приближенным решением, искусственно ограничив число итераций. С другой стороны, если нет ограничения на число итераций (т.е. на время решения), то итерационный про-

цесс может продолжаться неограниченно долго.

Эта дилемма разрешается, как известно, введением так называемого "критерия останова", учитывающего качество полученного решения. В большинстве задач, решаемых итерационными методами, используется критерий, максимизирующий степень стабилизации решения [ 4 ] :

$$\frac{\|\bar{U}^{(t+1)} - \bar{U}^{(t)}\|}{\|\bar{U}^{(t+1)}\|} < \varepsilon_0, \quad (5.2.21)$$

где  $t$  - номер итерации,  $\varepsilon_0$  - заданный "порог", а норма  $\|\dots\|$  понимается в метрике  $L_2$ .

Однако, как показывают результаты сравнения прямых и итерационных методов решения [ 7 ], критерий (5.2.21) является недостаточным. В частности, он не учитывает точность аппроксимации исходного уравнения. Поэтому соответствующее число итераций может быть как слишком малым, так и неоправданно большим.

Другой, более прогрессивный, тип критерия, основанный на контроле точности выполнения исходного уравнения в каждом узле сетки был предложен в работе [ 11 ] . Однако, вносимая при этом погрешность аппроксимации самого критерия, эквивалентная погрешности аппроксимации исходного уравнения, снижает его эффективность.

В то же время, можно применить критерий останова, являющийся одновременно критерием контроля точности решения исходного уравнения (5.1.1). Действительно, на основании (5.1.1) мы можем записать:

$$-\iint_S \nabla \bar{U} d\bar{s} = \iint_S (\bar{U}, \nabla \ln \sigma) d\bar{s} + \iiint_V k^2 \bar{U} dV, \quad (5.2.22)$$

где  $S$  - поверхность рассматриваемой области моделирования, а

$V$  - ее объем.

Перейдя в (5.2.22) к нормам, мы получаем:

$$\frac{\left\| \iint_S (\bar{U}, \nabla \ln \sigma) d\bar{s} + \iiint_V k^2 \bar{U} dv \right\|}{\left\| \iint_S \nabla \bar{U} d\bar{s} \right\|} - 1 = 0 \quad (5.2.23)$$

Нетрудно видеть, что величина, стоящая в знаменателе (5.2.23), зависит только от краевых условий и инвариантна по отношению к параметрам модели и разбиению сетки. Кроме того, ошибка аппроксимации интегралов в числителе (5.2.23) существенно меньше, чем в случае указанного выше критерия. Поэтому представляется естественным использовать (5.2.23) в качестве критерия останова итерационного процесса, позволяющего увязать необходимое число итераций с точностью аппроксимации (5.1.1):

$$F < \varepsilon_0 \quad (5.2.24)$$

где  $F$  - величина, стоящая в левой части (5.2.23).

Однако, приведенный критерий, по-видимому, не позволяет контролировать точность решения исходной краевой задачи. Как уже указывалось в главе II, с этой целью можно использовать критерий, основанный на выполнении известного интегрального тождества при подстановке в него конечно-разностного решения:

$$\left\| \bar{U}^a - i\omega\mu_0 \iiint_{V_a} \hat{G}^e \Delta \sigma \bar{U} dv \right\| < \varepsilon_0 \quad (5.2.25)$$

При этом контроль точности моделирования осуществляется в рамках применяемого метода баланса.

Мы рассмотрели как принципиальные особенности предложенного алгоритма (гл. II и, подробнее, гл. III и IV), так и вопросы его численной реализации (глава V). Важную роль в получении точных конечных результатов играет также адекватная программная реализа-

ция алгоритма. Программы, созданные на основе алгоритма, имеют свои характерные особенности (структуры данных, технологию счета и т.д.), от которых не в последнюю очередь зависит эффективность моделирования. В следующей главе мы приведем краткое описание комплекса программ *FDM3D*, предназначенного для численного моделирования квазистационарных электромагнитных полей в трехмерных средах.

## Г л а в а У I

### ПАКЕТ ПРОГРАММ FDM3D ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

#### 6.1. Назначение пакета

Пакет программ FDM3D предназначен для численного моделирования электромагнитных полей, возбуждаемых внешними источниками в Земле, содержащей локальную или вытянутую вдоль одной оси на бесконечность трехмерную неоднородность (см. рис. 3 из главы II).

#### 6.2. Технические характеристики и требования к используемой ЭВМ

Пакет FDM3D в настоящий момент включает в себя более 150 модулей (~20000 операторов), написанных на алгоритмическом языке ФОРТРАН-IV. Он может быть использован в полном объеме на ЭВМ, размер оперативной памяти которых не менее 256 К. Кроме того, для работы FDM3D требуется участок на магнитном диске (МД) размером 3 Мб. Время работы отдельных программ, составляющих пакет, зависит от быстродействия и режима работы конкретной ЭВМ.

#### 6.3. Общая характеристика программного комплекса

##### 6.3.1. Основные особенности численного алгоритма

Точность всех результатов численного моделирования зависит, главным образом, от точности расчета электрического поля (см. п. 6.3.4), которая, в свою очередь, обеспечивается следующими особенностями алгоритма :

- а) использованием асимптотических краевых условий;
- б) применением метода баланса для получения дискретных уравнений во внутренних точках области моделирования;
- в) выполнением на ЭВМ скалярных произведений с двойной точ-

ностью (при итерационном решении системы линейных алгебраических уравнений).

### 6.3.2. Минимизация времени счета

Основная часть общего времени работы программ пакета в последовательном режиме приходится на решение системы линейных уравнений, поэтому уменьшение времени работы всей системы достигается, главным образом, за счет его экономии в программе *SOLVER*.

Для этого используются следующие приемы:

- а) уменьшение области решения задачи в 2 или 4 раза при наличии симметрии источника, модели и среды;
- б) выполнение на ЭВМ всех операций с комплексными числами с помощью действительной арифметики (только в программе *SOLVER*);
- в) хранение всей необходимой информации в оперативной памяти ЭВМ и использование медленных внешних носителей (МД) только для копирования решения в ходе итерационного процесса;
- г) ускорение сходимости итерационного процесса с помощью введения параметра релаксации.

### 6.3.3. Использование оперативной памяти ЭВМ

Размер оперативной памяти, требуемой для работы любой программы, является одной из наиболее важных её эксплуатационных характеристик. При создании пакета программ *FDM3D* этому вопросу было уделено особое внимание в связи с резким возрастанием размеров всех массивов по сравнению с двумерным случаем. Критической в этом отношении является программа *SOLVER*.

В целом умеренные требования программ *FDM3D* к оперативной памяти обусловлены:

- а) эффективным использованием файла на магнитном диске;
- б) возможностью автономной работы всех программ пакета;



в) хранением в оперативной памяти только ненулевых элементов матрицы и правой части системы линейных алгебраических уравнений при её решении с помощью программы *SOLVER* .

#### 6.3.4. Тестирование исходных данных

Во всех программах пакета производится контроль исходной информации. При обнаружении ошибки выдается диагностическое сообщение на АЦПУ с указанием модуля, в котором она обнаружена. Если дальнейшее выполнение программы становится бессмысленным, то её работа на этом прекращается. В противном случае программа не прерывается, а неправильное значение переменной при необходимости (без вмешательства пользователя) заменяется альтернативным.

Кроме того, на АЦПУ печатаются сообщения о начале работы программ и их успешном (или неуспешном) завершении.

#### 6.3.5. Эксплуатация комплекса

Удобство эксплуатации всего пакета *FDM3D* или отдельных его программ обеспечивается:

а) адаптацией пакета к возможностям используемой ЭВМ (в частности, к размеру её оперативной памяти);

б) надежностью работы, которая является следствием своевременного обнаружения ошибок, а также записи необходимых промежуточных и конечных результатов на внешний носитель (МД);

в) гибкостью, обусловленной возможностью использования программ пакета как в последовательном режиме ("*ON-LINE*"), так и в автономном ("*OFF-LINE*");

г) минимальным объемом исходных данных;

д) графическим представлением результатов (в виде графиков и карт изолиний).

#### 6.4. Функции пакета FDM3D и используемые алгоритмы

Численное моделирование электромагнитных полей с помощью FDM3D преследует 3 основные цели:

1) решение конкретных прямых задач, то есть нахождение электромагнитного поля по заданным параметрам источника, среды и аномалии;

2) анализ информативности различных компонент электромагнитного поля и его трансформаций;

3) решение обратных задач (методом подбора).

В соответствии с этой схемой, пакет FDM3D может быть использован для выполнения следующих основных функций:

1) нахождения электрического поля (как суммарного, так и аномального) по алгоритму, описанному в главах II и V, и вычисления магнитного поля (как суммарного, так и аномального) по известному электрическому полю на основании 2-го уравнения Максвелла, записанного в интегральной форме;

2) вычисления тензорных импедансов, магнитных передаточных функций и кажущихся сопротивлений (согласно [2]);

3) накопления полученных решений на внешнем носителе информации (т.е. создания банка решений) с целью их последующего использования.

Таким образом, основой всего комплекса являются программы, предназначенные, главным образом, для нахождения электрического поля (рис. 12). Приведем их краткие характеристики.

1. Программа MODEL осуществляет ввод исходной информации о модели (файл данных DTMDL), проверяет её, записывает в рабочий файл (РФ) на магнитном диске и распечатывает на АЦПУ (рис. 13). Возможна работа программы в режиме коррекции.

2. Программа GRID предназначена для построения пространст-

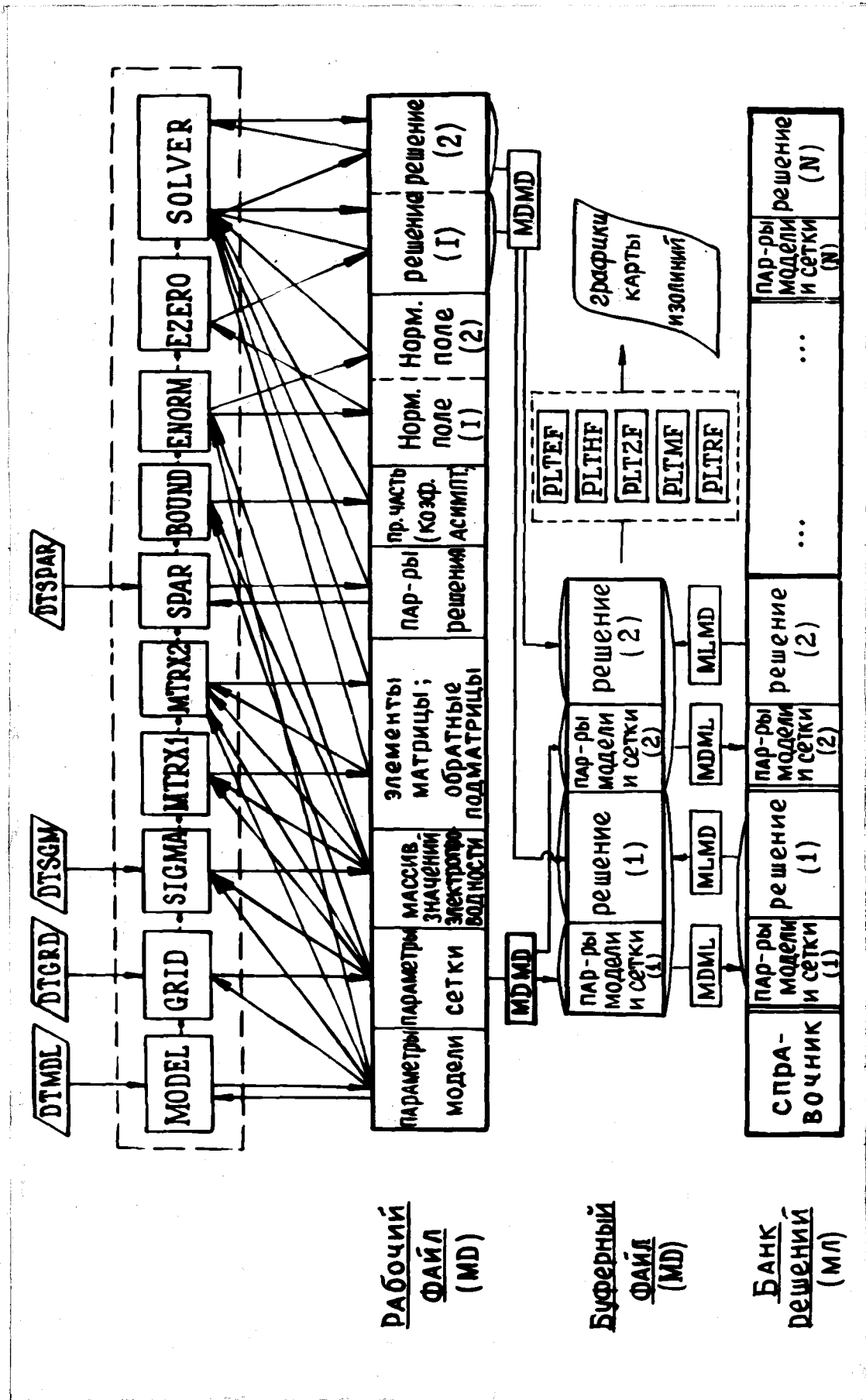


Рис. 12. Схема применения пакета программ FDM3D для численного моделирования трехмерных электромагнитных полей.

PARAMETERS OF THE SOURCE

TYPE OF THE SOURCE: PL, WAVE

ANGLE OF POLARIZATION: 90 (DEGREES)

TIME PERIOD (SEC) : 10.00 (FREQUENCY (HZ) : 0.1000E 00)

CONDUCTIVITY IN THE ATMOSPHERE (S/M) : 0.1000E-05

CONDUCTIVITY DISTRIBUTION IN THE NORMAL SECTION

(STEPWISE FUNCTION)

LAYER	THICKNESS (KM)	CONDUCTIVITY (S/M)
1	17.05	0.1000E-01

GEOM. PARAMETERS OF ANORMAL REGION (KM) :

TYPE OF INHOMOGENEITY: LOCAL

	X-AXIS	Y-AXIS	Z-AXIS
DIMENSIONS :	1.00	2.00	2.00
COORDINATES:	-0.50 0.50	-1.00 1.00	0.25 2.25
DEPTH OF THE UPPER BOUND:	0.25		

CONDUCTIVITY DISTRIBUTION IN ANORMAL REGION

IN X-AXIS IN Y-AXIS

SYMMETRY: YES YES

TYPE OF CONDUCTIVITY DISTRIBUTION : CONSTANT

CONSTANT ANORMAL CONDUCTIVITY (S/M) : 0.2000E 00

SYMMETRY IN X-AXIS IS TAKEN INTO ACCOUNT

SYMMETRY IN Y-AXIS IS TAKEN INTO ACCOUNT

Рис. 13. Листинг АЦЦУ с параметрами модели.

венной сетки, записи её параметров в РФ и печати их на АЦПУ (рис. 14 ). Предусмотрена работа программы в двух режимах: "автоматическом" и "ручном".

Автоматическое построение сетки основано на учете точности аппроксимации отдельных членов уравнения, а также условий сходимости итерационного процесса (п. 5.2.3). При "ручном" способе размеры всех ячеек по координатам  $x$ ,  $y$ ,  $z$  считываются из файла данных DTGRD .

3. Программа SIGMA формирует массив значений электропроводности в ячейках пространственной сетки по заданному в DTSGM закону её распределения во всей области, записывает его в РФ и печатает на АЦПУ значения электропроводности в двух взаимно-перпендикулярных вертикальных сечениях в символьном виде (рис.

15 ). Предусмотрена возможность "ручного" задания значений электропроводности в любой ячейке пространственной сетки (из файла данных DTSGM ).

4. Программы MTRX1 и MTRX2 предназначены для вычисления всех элементов матрицы системы линейных уравнений.

5. Программа SPAR осуществляет ввод (из файла DTSPAR ) и тестирование данных, необходимых для решения системы линейных алгебраических уравнений (в частности, параметров итерационного процесса). Возможна работа программы в режиме коррекции.

6. Программа BOUND формирует массивы типов краевых условий для компонент поля на всех границах области моделирования (в зависимости от типа аномалии, симметрии источника, нормального разреза и аномалии) и вычисляет необходимые коэффициенты для асимптотических краевых условий.

7. Программа ENORM вычисляет нормальное поле во всех узлах пространственной сетки, причем в случае, когда источник - плоская волна, расчет производится на основе рекуррентных соотношений,

GRID PARAMETERS

NUMBER OF NODES :

NTOT	NX	NY	NZ	NZA	NZE
1701	7	9	27	10	16

NUMBER OF CELLS IN ANOM. REGION :

NXAN	NYAN	NZAN
1	2	8

NUMBER OF NODES IN ANOM. REG.

----- = 0.03  
TOTAL NUMBER OF NODES

DISPLACEMENTS (KM) :

DX :								
0,50	0,50	0,90	0,50	0,50	0,50			
DY :								
0,50	0,50	0,50	0,50	1,00	2,00	2,00	2,00	
DZ :								
2,00	1,50	1,00	0,80	0,60	0,40	0,30	0,20	
0,10	0,10	0,10	0,10	0,05	0,05	0,05	0,10	
0,20	0,20	0,60	0,40	0,40	0,40	0,40	1,00	
3,00	10,00							

COORDINATES OF NODES (KM) :

X :								
0,0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00		
Y :								
0,0	0,50	1,00	1,50	2,00	3,00	5,00	7,00	
9,00								
Z :								
-7,00	-5,00	-3,50	-2,50	-1,70	-1,10	-0,70	-0,40	
-0,20	-0,10	0,0	0,10	0,20	0,25	0,30	0,35	
0,45	0,65	0,85	1,45	1,85	2,25	2,65	3,05	
4,05	7,05	17,05						

Рис. I4. Листинг АЦЦУ с параметрами сетки.

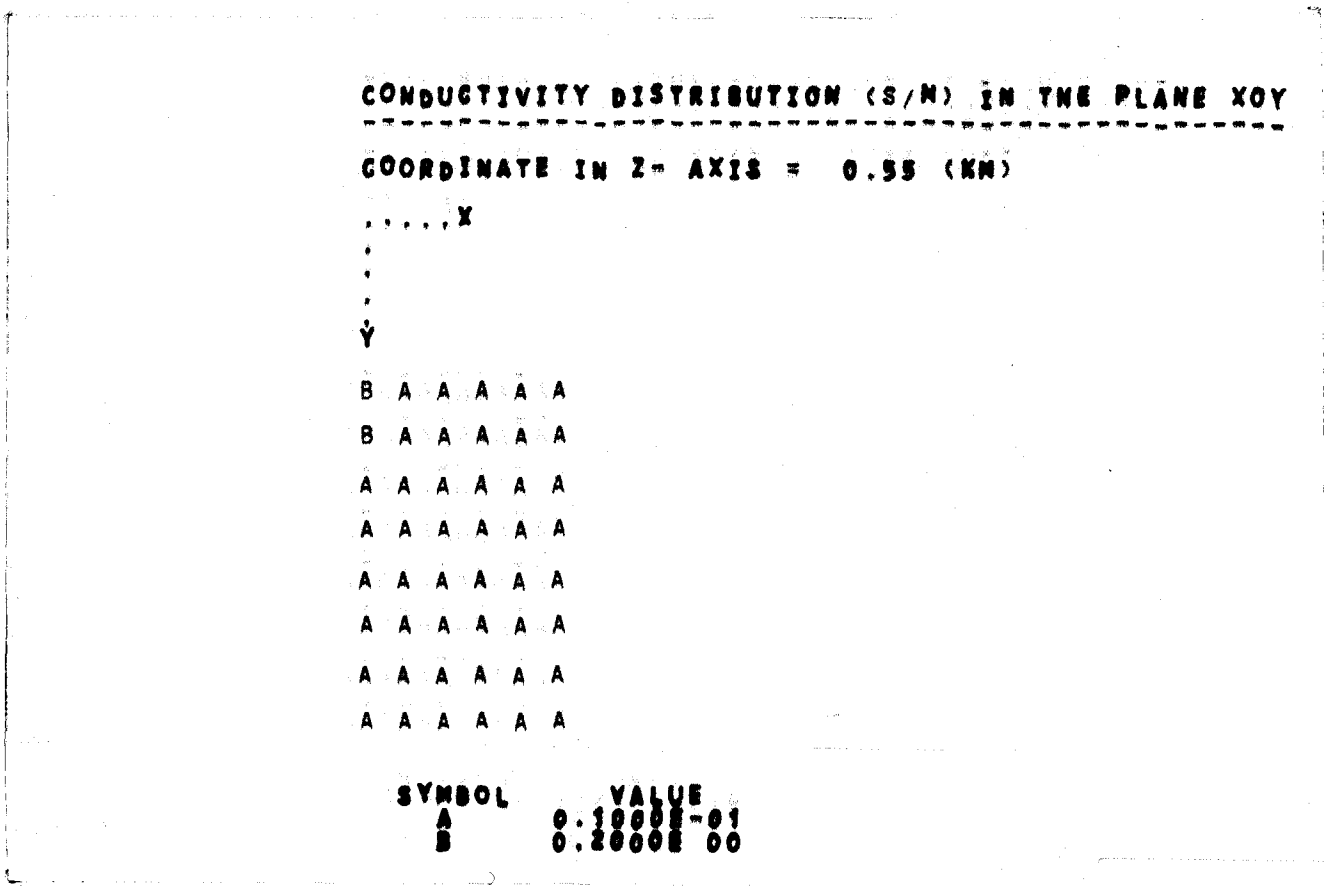


Рис. 15. Листинг АППУ с символьным представлением распределения электропроводности.

приведенных в [ 2 ].

8. Программа EZERO формирует начальное приближение для итерационного решения системы линейных алгебраических уравнений. В качестве начального приближения может быть взято нормальное поле или решение, полученное ранее для близких по величине параметров источника, среды и аномалии.

9. Программа SOLVER предназначена для решения системы линейных алгебраических уравнений методом верхней релаксации. Основные характеристики этой программы уже приводились выше (см. разд. 6.3.2 и 6.3.3). Добавим к этому, что "удельное" время счета на ЭВМ ЕС-1055 I-ой итерации в I узле составляет: при использовании "обычных" краевых условий (без асимптотики) - 1.5 мсек;  
б) с применением асимптотических краевых условий - 2.2 мсек. Соответственно, время решения системы в приведенном на рис. 13 примере равно 200 сек и 360 сек (с учётом симметрии).

Графическое представление рассчитанного электрического поля осуществляется программой PLTEF. С её помощью можно строить графики и карты изолиний действительной и мнимой частей, амплитуды и фазы любой компоненты суммарного или аномального поля в любом сечении пространственной сетки (рис. 16). Горизонтальный и вертикальный размеры карты изолиний могут быть заданы. При этом программа эффективно учитывает искажения, связанные с различной шириной и высотой печатаемых на АЦПУ символов. Таким образом, все углы на карте изолиний соответствуют действительным (с точностью до погрешностей билинейной интерполяции).

Рассмотрим теперь работу программ, в которых в качестве основной исходной информации используется рассчитанное ранее электрическое поле (см. рис. 12).

Программа PLTHF вычисляет магнитное поле, как указывалось выше, на основании 2-го уравнения Максвелла, записанного в ин-





тегральной форме. Графическое представление результатов осуществляется аналогично программе PLTEF.

Программы PLTZF, PLTMF и PLTRF предназначены для расчета и графического представления, соответственно, импедансов, магнитных функций и кажущихся сопротивлений в любом горизонтальном сечении пространственной сетки. Так как для расчета этих тензорных функций необходимо иметь, как минимум, два решения задачи при различных параметрах источника, то в обоих используемых файлах (рабочем и буферном) с этой целью зарезервировано 2 участка. (Отметим, что при наличии определенной симметрии можно ограничиться только одним решением).

#### Сервисные программы

Программы MDML и MLMD осуществляют копирование информации с одного внешнего носителя на другой, а MDMD с одного участка магнитного диска на другой. Кроме названных выше, в пакете имеются и другие программы, выполняющие вспомогательные функции. Это, в частности, программы линейной (LININT), арктангенциальной (ARCINT) и билинейной (BILIN) интерполяции, программа сортировки в оперативной памяти по методу Шелла (SORT) и др.

Наличие в РФ двух участков для различных решений позволяет использовать приведенные выше программы в различных сочетаниях, удобных пользователю. В частности, графическое представление результатов может быть осуществлено спустя некоторое время после их получения. Однако, длительное хранение результатов моделирования при этом практически невозможно. Проблема решается путем создания банка решений на внешнем носителе (МД или МЛ). При выбранной структуре FDM3D, минимально необходимой информацией для восстановления всех функций от электрического поля являются параметры модели, сетки, решение задачи (электрическое поле) при двух раз-

личных параметрах источника, а также некоторые другие данные из РФ. Соответственно, это определяет и размер буферного файла, предназначенного, во-первых, для записи информации из рабочего файла в банк решений и, во-вторых, для её восстановления и графического представления.

Мы рассмотрели все основные функции пакета *FDM3D*. Как уже указывалось ранее, важной функцией, которая может быть реализована с помощью банка решений, является решение обратной задачи методом подбора. Для эффективного осуществления этой конечной цели пакет *FDM3D* используется в настоящее время для расчетов трехмерных электромагнитных полей при различных сочетаниях параметров источника, среды и аномального включения.

## Г л а в а У П

### РЕЗУЛЬТАТЫ АНАЛИЗА ТРЕХМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТА ПРОГРАММ FDM3D

В этой главе приведены некоторые результаты численного моделирования электромагнитных полей в трехмерных средах с помощью пакета FDM3D. На примере тестовых моделей нар и локальная неоднородность, расположенная в приповерхностном слое земной коры, проводится сравнение результатов, полученных методом баланса (МБ) с помощью пакета программ FDM3D, и другими методами. Кроме того, на примере модели ТН-10 анализируется эффективность применения асимптотических краевых условий, полученных в главе IV. В заключении главы приведены результаты расчетов поля для модели "остров", характерной для морской геоэлектрики.

#### 7.1. Сравнительная оценка эффективности применения метода интегральных уравнений и метода баланса

Как отмечается в работе [ 30 с. 26 ], "конечная цель численной модели состоит в обеспечении точности и детальности результатов, соответствующих требованиям задачи, при максимальной гибкости и минимальных усилиях и стоимости вычислений". Таким образом, задача численного моделирования - это "оптимизационная" задача, в которой необходимо достичь цели при наложенных извне ограничениях, наиболее существенными из которых являются оперативная память ЭВМ и время счета ( в "интегральном" смысле - стоимость вычислений). Последний фактор играет немаловажную роль, особенно при использовании соответствующего пакета программ для проведения многовариантных расчетов.

Сделаем оценку вычислительной эффективности метода баланса

и сравним ее с аналогичной оценкой для часто применяемого метода интегральных уравнений.

На точность результатов влияют, как уже указывалось (глава У), точность аппроксимации исходного уравнения, а также ошибки, возникающие при решении на ЭВМ системы линейных алгебраических уравнений.

При наличии у матрицы системы свойства диагонального преобладания (см. главу У) ошибки второго вида можно свести к минимуму (как при решении системы уравнений итерационным методом, так и при ее решении прямым методом, например, методом исключения). В то же время, ошибки первого типа существенно зависят от вида решаемого уравнения и способа его дискретизации. Поэтому для сравнительной оценки эффективности метода интегральных уравнений (МИУ) и метода баланса (МБ) применительно к решению соответствующего уравнения относительно электрического поля мы будем учитывать только этот вид ошибок.

Рассмотрим ситуацию, когда ресурсы ЭВМ ( $T$  - время решения и  $Q$  - объем оперативной памяти (в словах)) зафиксированы.

Как при аппроксимации интегрального уравнения (1.3.1), так и при аппроксимации интегро-дифференциального уравнения (2.1.9), естественным критерием точности аппроксимации является параметр  $\zeta = \frac{h}{\delta}$ , где  $h$  - характерный линейный размер ячейки пространственной сетки, а  $\delta$  - локальная глубина скин-слоя. Очевидно, с уменьшением  $\zeta$  точность аппроксимации растет и ограничена, в конечном счете, лишь доступным объемом оперативной памяти ЭВМ ( $Q$ ). Оценим минимальное значение параметра  $\zeta = \zeta_{\text{мин}}$ , которого можно достичь (при заданных  $T$  и  $Q$ ) при моделировании локальной неоднородности с характерным линейным размером  $L$  с помощью МИУ и МБ.

1) МИУ

Как известно, при моделировании векторных электромагнитных полей с помощью МИУ получается полностью заполненная матрица системы линейных алгебраических уравнений, которую приходится хранить в оперативной памяти (в принципе, можно воспользоваться внешней памятью [ 74 ] , но в этом случае существенно увеличивается время решения  $T$ ; мы же принимаем, что время решения для МИУ и МБ примерно одинаково). Кроме того, в оперативной памяти необходимо хранить также вектор решения и вектор правой части.

Будем считать для простоты, что пространственная сетка покрывает область моделирования (совпадающую в данном случае с аномальной областью) так, что все линейные размеры ячеек одинаковы и равны  $h$ . Обозначим число узлов и ячеек по осям  $x, y, z$  через  $N_{yz}^\alpha$  и  $N_{xz}^\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ ), соответственно. Тогда мы, очевидно, имеем:

$$N_{xz}^\alpha = \frac{L}{\tau \sigma} \tag{7.1.1}$$

$$N_{yz}^\alpha = \frac{L}{\tau \sigma} + 1 \quad (\alpha = x, y, z)$$

При этом должно выполняться ограничение по используемой памяти ЭВМ:

$$(6N_{yz}^z)^2 + 6N_{yz}^z + 6N_{yz}^z \leq Q, \tag{7.1.2}$$

где

$$N_{yz} = N_{yz}^x = N_{yz}^y = N_{yz}^z.$$

Пренебрегая в левой части (7.1.2) вторым и третьим слагаемым по сравнению с первым, записываем:

$$N_{\text{уз.}}^6 \leq \frac{Q}{36}$$

или, учитывая (7.1.1):

$$\tau \geq \frac{L}{df_1(Q)} = \tau_{\text{мин}}^{\text{мич}}, \quad (7.1.3)$$

где

$$f_1(Q) = (Q/36)^{1/6}$$

## 2) МБ

Сделаем аналогичную оценку для решения уравнения (2.1.9) с использованием асимптотических краевых условий.

В этом случае размеры области моделирования превышают размеры области неоднородности, а именно: по горизонтали - примерно на  $2\delta$  (здесь  $\delta$  - глубина скин-слоя окружающей среды, которая, вообще говоря, отличается от соответствующей величины для аномальной зоны, однако, для наших целей можно приближенно считать их одинаковыми), а по вертикали - примерно на  $3\delta$ . Таким образом,

$$N_{\text{яв.}}^{x,y} = \frac{L}{2\delta} + \frac{C_1}{\tau}, \quad N_{\text{яв.}}^z = \frac{L}{3\delta} + \frac{C_2}{\tau},$$

где  $C_1 = 2$ ,  $C_2 = 3$ .

При решении системы линейных алгебраических уравнений с помощью итерационного метода блочной верхней релаксации в оперативной памяти ЭВМ хранятся только ненулевые элементы матрицы, векторы решения и правой части. При этом выполняется ограничение:

$$C \cdot \left( \frac{L}{\sigma \delta} + \frac{C_1}{c} + 1 \right)^2 \cdot \left( \frac{L}{\sigma \delta} + \frac{C_2}{c} + 1 \right) \leq Q, \quad (7.1.4)$$

где  $C$  - константа, характеризующая степень использования оперативной памяти ЭВМ конкретным пакетом программ. В частности, для FDM3D  $C=26$ .

Рассмотрим для простоты два предельных случая: а)  $L \gg \delta$ ,  
б)  $L \ll \delta$ .

а)  $L \gg \delta$

При этом, очевидно, выполняются неравенства:

$$\frac{L}{\sigma \delta} \gg \frac{1}{c} \gg 1 \quad (7.1.5)$$

Из (7.1.4) с учетом (7.1.5) следует:

$$C \left( \frac{L}{\sigma \delta} \right)^3 \leq Q,$$

откуда

$$\sigma \geq \frac{L}{\delta f_2(Q)} = \sigma'_{\text{мин}}^{\text{МБ}} \quad (7.1.6)$$

где

$$f_2(Q) \approx (Q/C)^{1/3}$$

б)  $L \ll \delta$

Это соответствует неравенствам:

$$1 \ll \frac{L}{\sigma \delta} \ll \frac{1}{c} \quad (7.1.7)$$

Тогда из (7.1.4) с учетом (7.1.7) имеем:



$$\frac{c \cdot c_1^2 \cdot c_2}{\tau^3} \leq Q$$

Отсюда следует:

$$\tau \geq \frac{1}{f_3(Q)} = \tau_{\text{мин.}}^{\text{МБ}} \quad (7.1.8)$$

где

$$f_3(Q) = (Q/c \cdot c_1^2 \cdot c_2)^{1/3} = (Q/312)^{1/3}$$

Сравним теперь оценки (7.1.6) и (7.1.8), полученные для метода баланса с асимптотическими краевыми условиями, с оценкой (7.1.3) для метода интегральных уравнений.

а)  $L \geq \delta^0$

$$\frac{\tau_{\text{мин.}}^{\text{МБ}}}{\tau_{\text{мин.}}^{\text{МИУ}}} = \frac{f_2(Q)}{f_1(Q)} = Q^{1/6} \cdot (6/c)^{1/3} \approx 0.6 Q^{1/6} \quad (7.1.9)$$

Так как для используемых в настоящее время ЭВМ  $Q \geq 10^4$ , то из (7.1.9) следует, что в случае, когда размеры тела достаточно велики ( $L \geq \delta^0$ ), мы имеем:

$$\tau_{\text{мин.}}^{\text{МБ}} < \tau_{\text{мин.}}^{\text{МИУ}}, \quad (7.1.10)$$

т.е. практически на всех ЭВМ с помощью метода баланса можно добиться большей точности аппроксимации (а в силу сказанного выше, и точности конечных результатов), чем методом интегральных уравнений.

б)  $L \ll \delta$

$$\frac{\tau_{\text{мин.}}^{\text{МИУ}}}{\tau_{\text{мин.}}^{\text{МБ}}} = \frac{L}{\delta} \frac{f_3(Q)}{f_1(Q)} = \frac{L}{\delta} Q^{1/6} \cdot (6/(c \cdot c_1^2 \cdot c_2))^{1/3} \approx 0.3 Q^{1/6} \frac{L}{\delta} \quad (7.1.11)$$

Из (7.1.11) следует, что при малых размерах тел ( $L \ll \delta$ ) неравенство

$$\tau_{\text{мин}}^{\text{МИУ}} < \tau_{\text{мин}}^{\text{МБ}} \quad (7.1.12)$$

выполняется практически для всего диапазона изменения  $Q$ . И, следовательно, в этом предельном случае метод интегральных уравнений является более эффективным, чем метод баланса.<sup>ж)</sup>

Отметим, что при решении соответствующей краевой задачи с "обычными" краевыми условиями, не учитывающими вклада от аномального поля, значения  $C_2$  и  $C_3$  возрастает (в частности, согласно работе [62], в этом случае  $C_2 \approx 24$ ,  $C_3 \approx 16$ ) и, как следствие, ухудшается оценка для  $\tau_{\text{мин}}$ . Аналогично, аппроксимация дифференциального уравнения на менее экономичном, чем 7-точечный, шаблоне приводит к увеличению параметра  $C$  и, в конечном счете, к потере точности (при тех же  $Q$  и  $T$ !).

Сравнение эффективности различных подходов можно было бы провести и рассматривая максимально допустимые частоты возбуждающего поля или линейные размеры  $L_{\text{макс}}$  аномальной области.

Например, при фиксированных  $Q, T$  и  $\tau$  из (7.1.3) следует:

$$\tau^{\text{МИУ}} \leq \tau \delta f_1(Q) = L_{\text{макс}}^{\text{МИУ}} \quad (7.1.13)$$

Аналогично, на основании (7.1.6) и (7.1.8) имеем:

$$L^{\text{МБ}} \leq \tau \delta f_2(Q) = L_{\text{макс}}^{\text{МБ}} \quad (7.1.14)$$

---

ж) Сделанные здесь выводы, основанные на количественных оценках, совпадают с выводами из работы [70], полученными на основе численных экспериментов на ЭВМ.

Тогда

$$\frac{L_{\text{макс.}}^{\text{МИУ}}}{L_{\text{макс.}}^{\text{МБ}}} = \frac{f_1(Q)}{f_2(Q)} = \frac{(Q/36)^{4/6}}{(Q/C)^{4/3}} = Q^{-1/6} (C/6)^{4/3} \approx 1.65 \cdot Q^{-1/6} \quad (7.1.15)$$

Из (7.1.15) вытекает, что практически для всех реальных значений  $Q$

$$L_{\text{макс.}}^{\text{МИУ}} < L_{\text{макс.}}^{\text{МБ}} \quad (7.1.16)$$

В то же время, неравенства (7.1.13) и (7.1.14) можно использовать и непосредственно для оценки максимально возможных линейных размеров области неоднородности при заданных значениях  $Q$ ,  $\delta$  и  $\tau$ .

Сделанные выше оценки являются, конечно, весьма приближенными и не претендуют на строгость. Однако, они показывают, что сравнение эффективности различных методов численного моделирования необходимо проводить с учетом ограниченности ресурсов ЭВМ.

Перейдем теперь к анализу результатов, полученных с помощью пакета *FDM3D*.

## 7.2. Тестирование пакета

Как уже отмечалось в гл. У, одним из необходимых условий достоверности результатов является их сравнение с результатами, полученными другим методом и/или другими авторами. Так, для тестирования пакета *FDM3D* результаты, полученные нами, сравнивались с аналитическим решением, а также с результатами, полученными методом интегральных уравнений.

### 7.2.1. Сравнение с аналитическим решением для шара

Для сравнения использовалось известное аналитическое решение для шара (радиуса  $a = 2$  км) в однородном пространстве, возбуждаемого плоской волной [2]. Удельная электропроводность шара составляет  $\sigma_T = 10^{-4}$  См/м, а окружающего пространства -  $\sigma_H = 10^{-6}$  См/м, период  $T = 0.01$  с.

В работе было проведено численное моделирование эквивалентного (по объему) куба со стороной, равной 3.2 км. На рис. 17 представлены результаты для профиля, проходящего через центр куба (шара). Видно, что с увеличением расстояния  $z$  от центра согласованность результатов растет. В то же время, рассогласование кривых ( $\leq 10\%$ ) на небольших расстояниях от центра ( $z/a \approx 2$ ), очевидно, объясняется разной геометрической формой моделей.

### 7.2.2. Сравнение результатов, полученных с помощью метода интегральных уравнений и метода баланса

Рассмотрим для примера известную модель призмы в однородном полупространстве (рис. 18). Результаты, полученные для этой модели с помощью пакета программ FDM3D, можно сравнить с результатами, полученными по программе Тинга и Хомана [76] методом интегральных уравнений. Как видно из рис. 19, относительное рассогласование результатов на периоде  $T = 10$  с не превышает 5%. Это справедливо и в отношении пространственного распределения поля. В частности, карта изолиний  $|E_y|$  (рис. 20), практически совпадает с соответствующей картой из работы [76].

В то же время, с помощью графических средств представления результатов, имеющихся в пакете FDM3D, можно строить карты изолиний компонент поля не только на поверхности Земли, но и в любом другом горизонтальном или вертикальном сечении пространст-

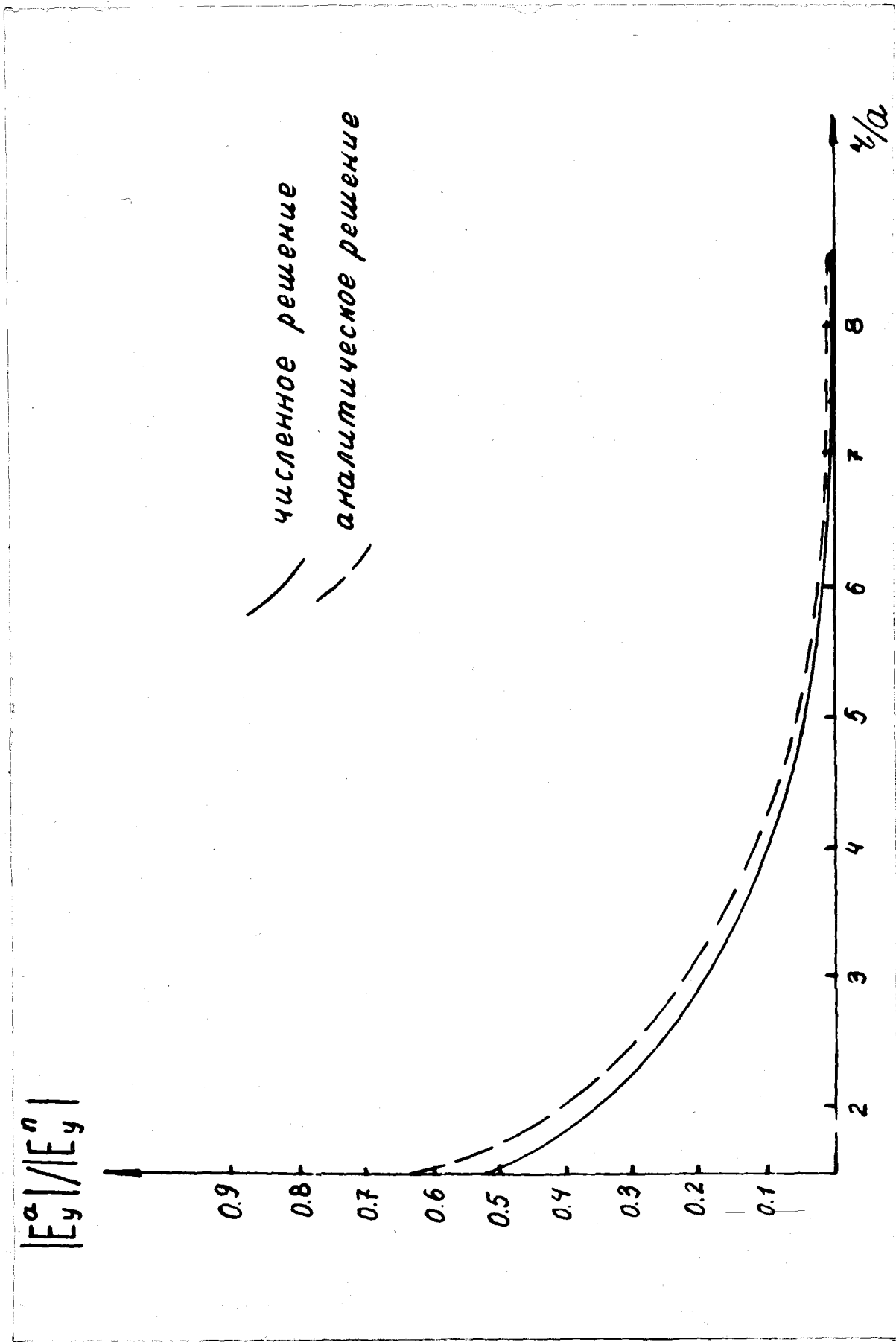
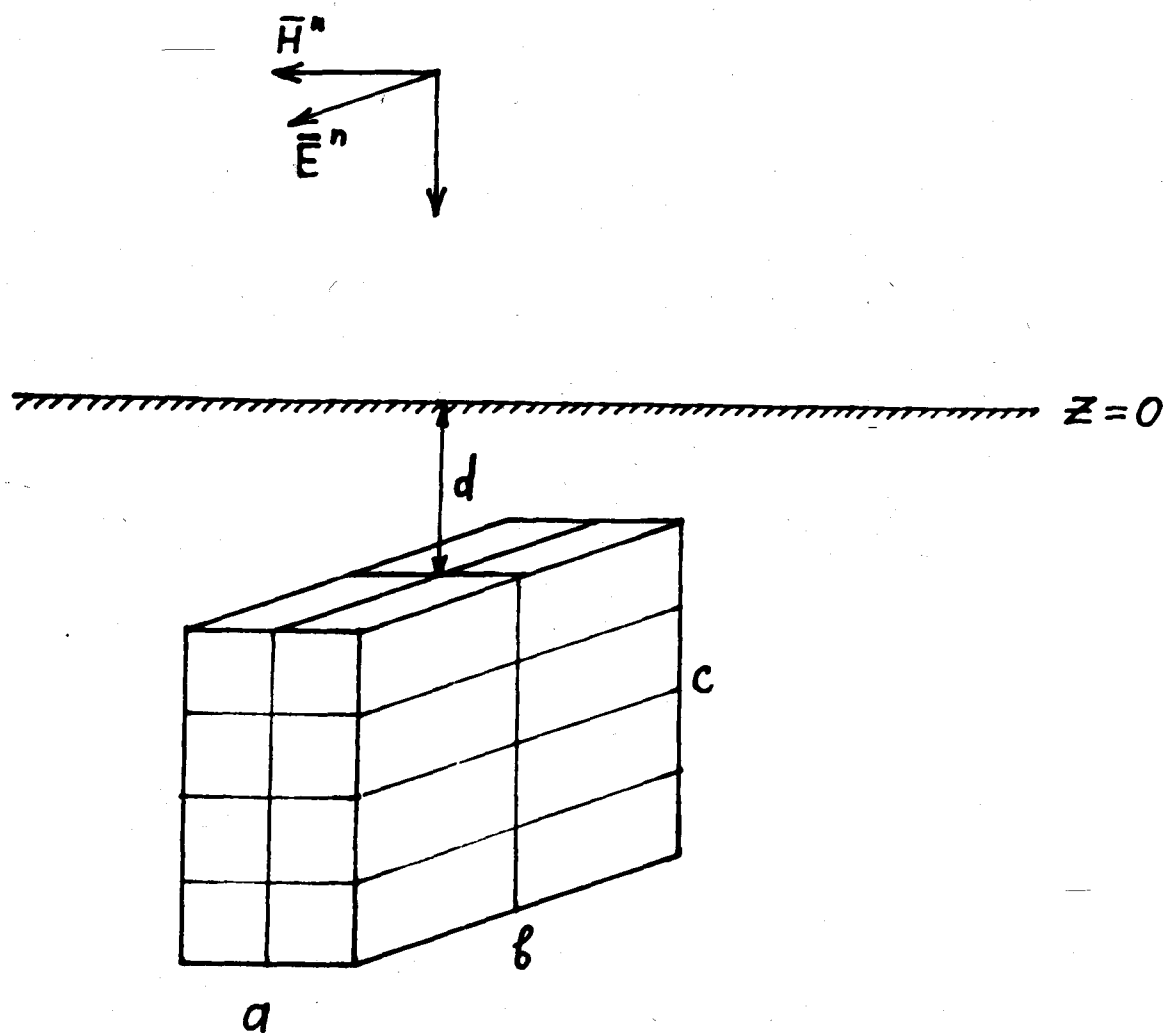


Рис. 17. Сравнение результатов численного моделирования куба с аналитическим решением для эквивалентного шара.



$$T = 10 \text{ c}$$

$$b_T = 0.2 \text{ CM/M}, \quad b_n = 0.01 \text{ CM/M}$$

$$a = 1 \text{ KM}, \quad b = 2 \text{ KM}, \quad c = 2 \text{ KM}, \quad d = 0.25 \text{ KM}$$

Рис. 18. Модель ТН-10 ("Призма в однородном полупространстве").

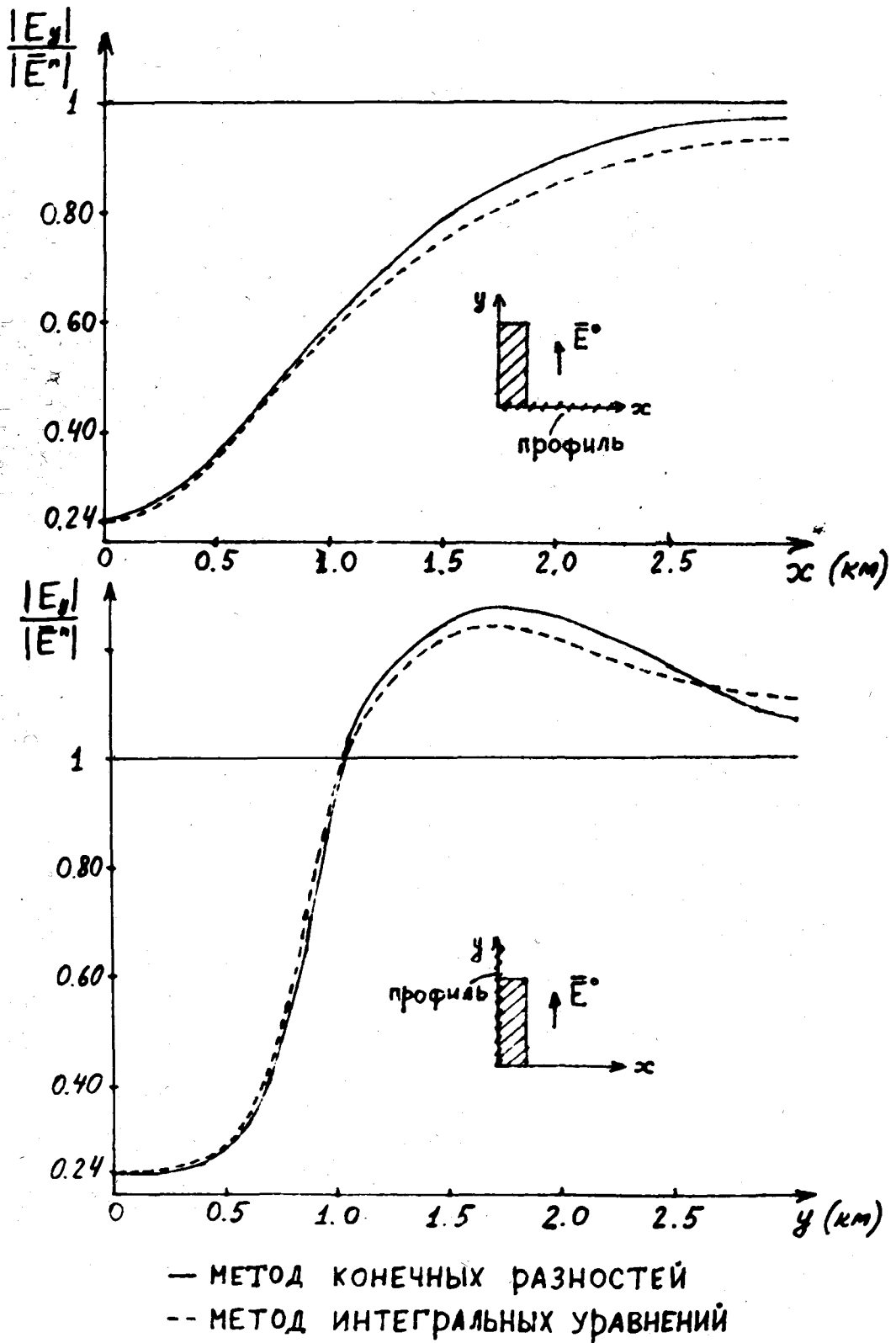
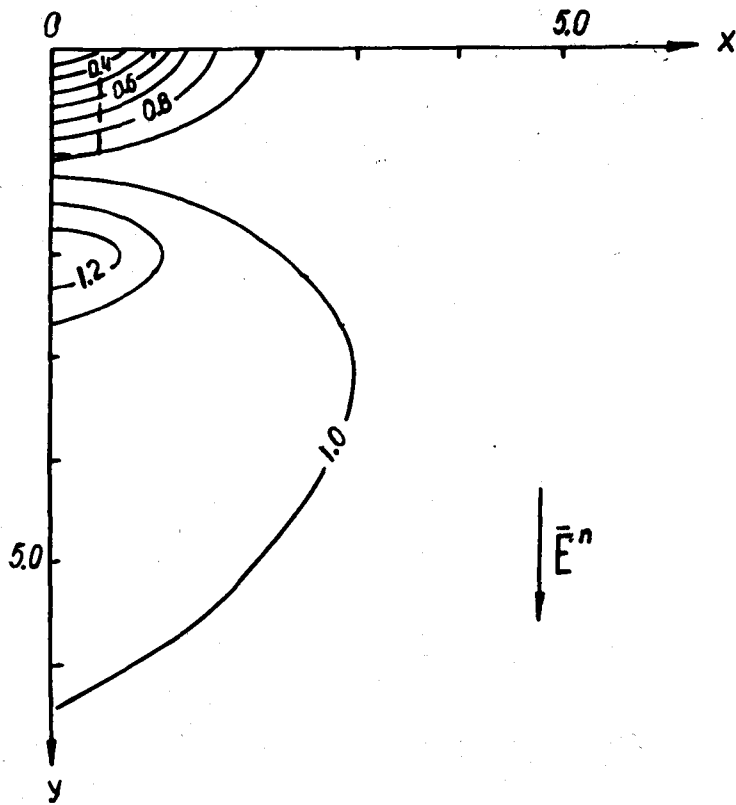


Рис. 19. Сравнение результатов, полученных с помощью МКР и МИУ, для модели ТН-10 ("Призма").

Модель ТН-10



Карта изолиний  $\frac{|E_y|}{|E^n|}$

Рис. 20.



венной сетки (Приложение 2).

Отметим также, что результаты для этой модели (ТН-10) получены нами за время  $t \approx 3$  мин., что меньше времени, затраченного на получение соответствующих результатов с помощью программы Тинга и Хомана [76].

### 7.3. Анализ эффективности применения асимптотических краевых условий

Покажем на примере той же модели ТН-10, что применение асимптотических краевых условий в атмосфере (см. главу IV) позволяет получить более точные результаты, чем тогда, когда на границе области моделирования аномальное поле полагается равным нулю.

Как мы уже отмечали, в последнем случае приходится выбирать границы области моделирования достаточно далеко от аномалии, что ведет к неоправданным затратам ресурсов ЭВМ. В то же время, если границы находятся на небольшом расстоянии от неоднородности, то использование таких краевых условий приводит к потере точности.

На рис. 21 и рис. 22 представлены результаты проведенного нами сравнения в случае, когда границы удалены от неоднородности на расстояние  $z \approx 0.2 \delta'$ , где  $\delta'$  - глубина скин-слоя окружающей среды. При этом различие результатов (естественно, максимальное на границе области) составляет до 10%. С уменьшением размеров области моделирования неучет вклада от аномального поля сказывается на результатах еще сильнее.

Таким образом, применение асимптотических краевых условий повышает эффективность численного моделирования.

### 7.4. Моделирование структуры типа "остров"

Исследование аномалий электромагнитного поля над океаническими структурами представляется сегодня одной из наиболее актуа-

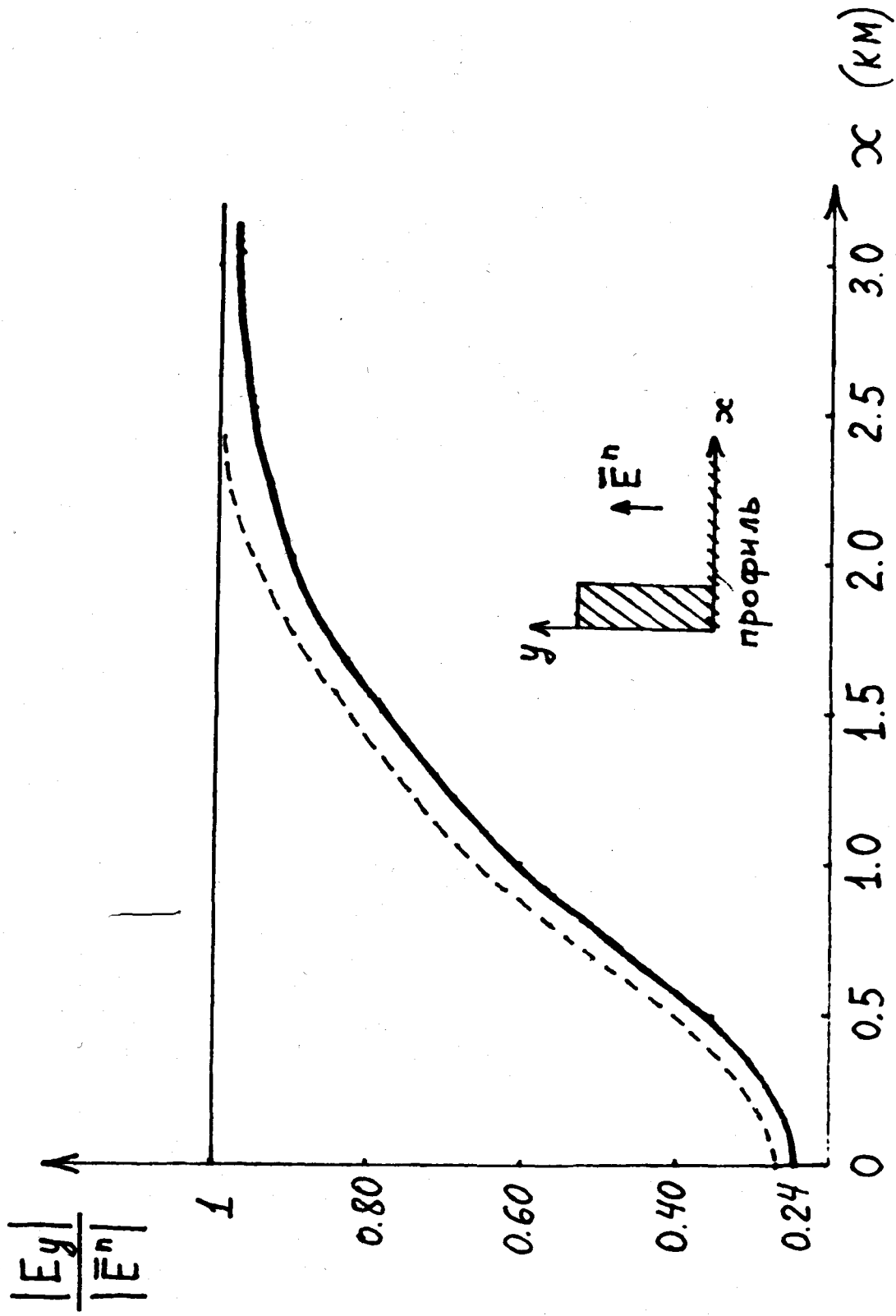
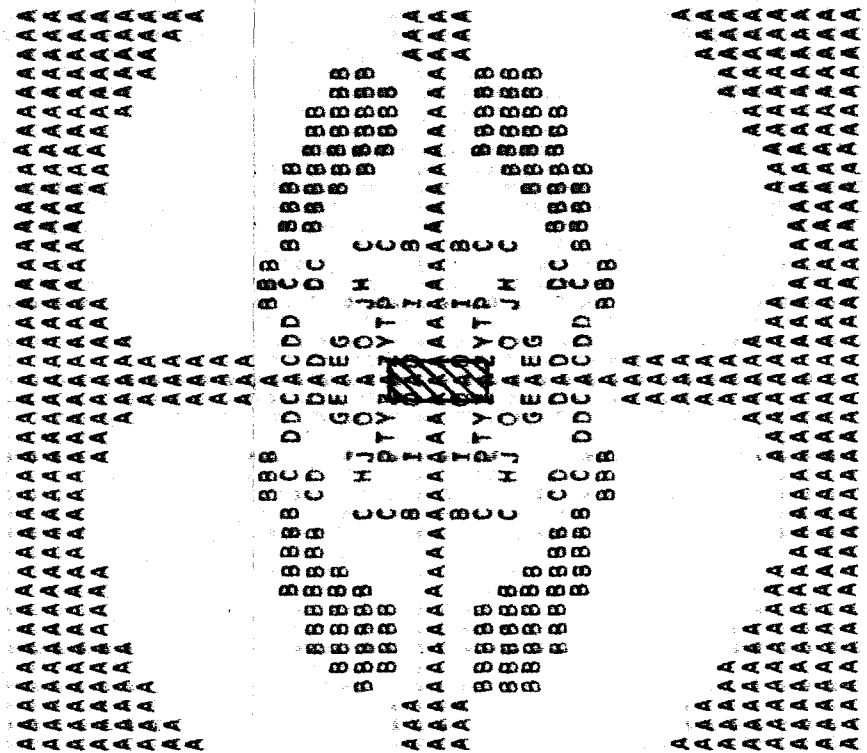
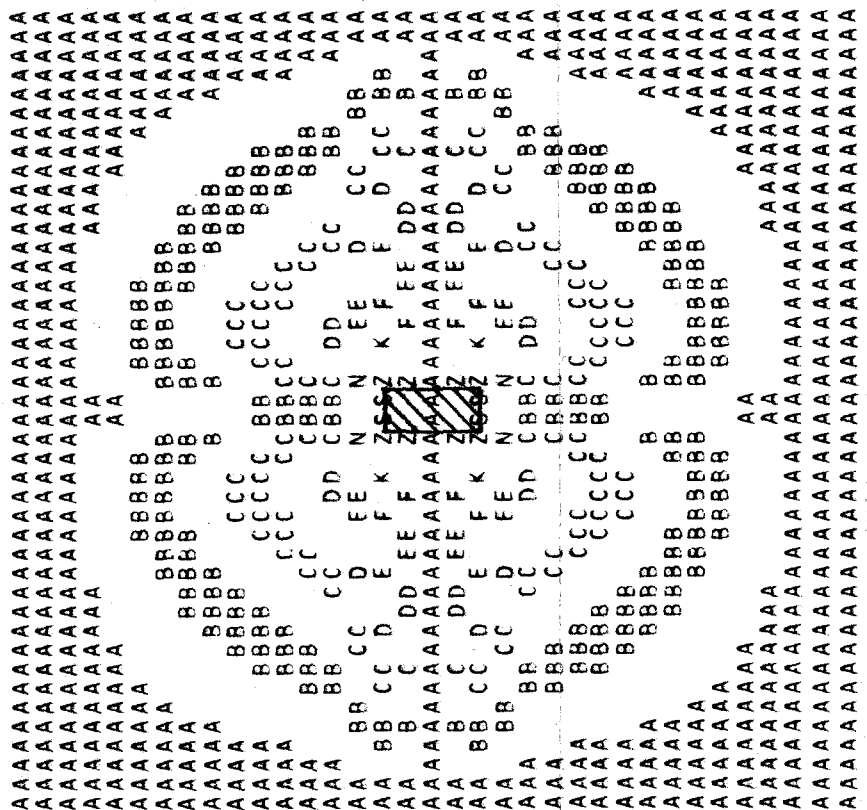


Рис. 21. Сравнение точности решений, полученных для модели "Прямая" с асимптотическими кривыми условиями (сплошная линия) и без учета вклада аномального поля на границе (пунктирная линия).

.....x  
:  
:  
:  
y



.....x  
:  
:  
:  
y



(δ)

(α)

Рис. 22. Карты изолиний  $|E_x|$  для модели "Призм":  
 а) без учета вклада аномального поля на границе;  
 б) с асимптотическими краевыми условиями.

льных в практической геоэлектрике. В частности, одной из характерных моделей океанических структур является модель типа "Остров". Несмотря на физическую трехмерность такой задачи, при определенных условиях (Глава I) ее можно редуцировать к так называемой квазитрехмерной постановке. При этом неоднородности рельефа океанического дна и изменение толщины водного слоя заменяются эквивалентными изменениями суммарной продольной проводимости верхнего слоя, который аппроксимируется бесконечно тонкой пленкой Прайса-Шейнманна. Плохо проводящие образования земной коры и верхней мантии имитируются однородным слоем с электропроводностью  $\sigma_2$ , а хорошо проводящие образования мантии - однородным основанием с электропроводностью  $\sigma_3$ .

Эквивалентная трехмерная модель приведена на рис. 23 (см. также Приложение 2). Расчеты для нее проводились на периодах  $T = 675$  с,  $T = 168$  с и  $T = 21$  с. Сравнение результатов, полученных для этой модели с помощью пакета FDM3D и Бердичевским М.Н. и Голубцовой Н.С. (МГУ) методом пленок (МП) [34] по программе Дебабова А.С., показывает, что на всех периодах относительное рассогласование не превышает 15% (см., например, рис. 24). Это, по-видимому, объясняется тем, что при заданном горизонтальном контрасте электропроводности ( $S_{max}/S_{min} = 300$ ) в верхнем слое, аномалии в поведении поля на поверхности обусловлены, главным образом, распределением токов в горизонтальной плоскости.

Действительно, на рис. 25 хорошо видна "канализация" токов на поверхности "Острова", отражающая структуру горизонтального распределения электропроводности в модели. С увеличением периода "канализация" размывается в результате увеличения глубин проникновения тока в соседние области.

Таким образом, из анализа модели "Остров" на периодах  $T = 675$  с,  $T = 168$  с и  $T = 21$  с с помощью пакета программ FDM3D

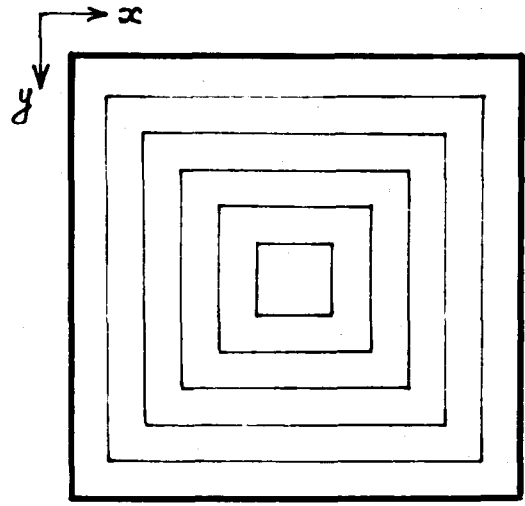
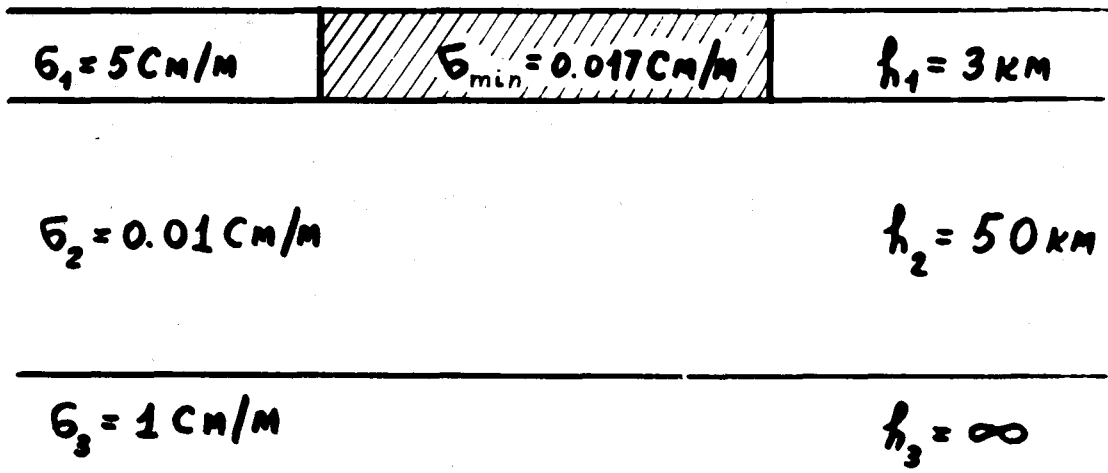
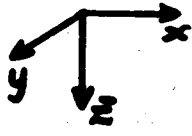


Рис. 23. Модель "Остров".

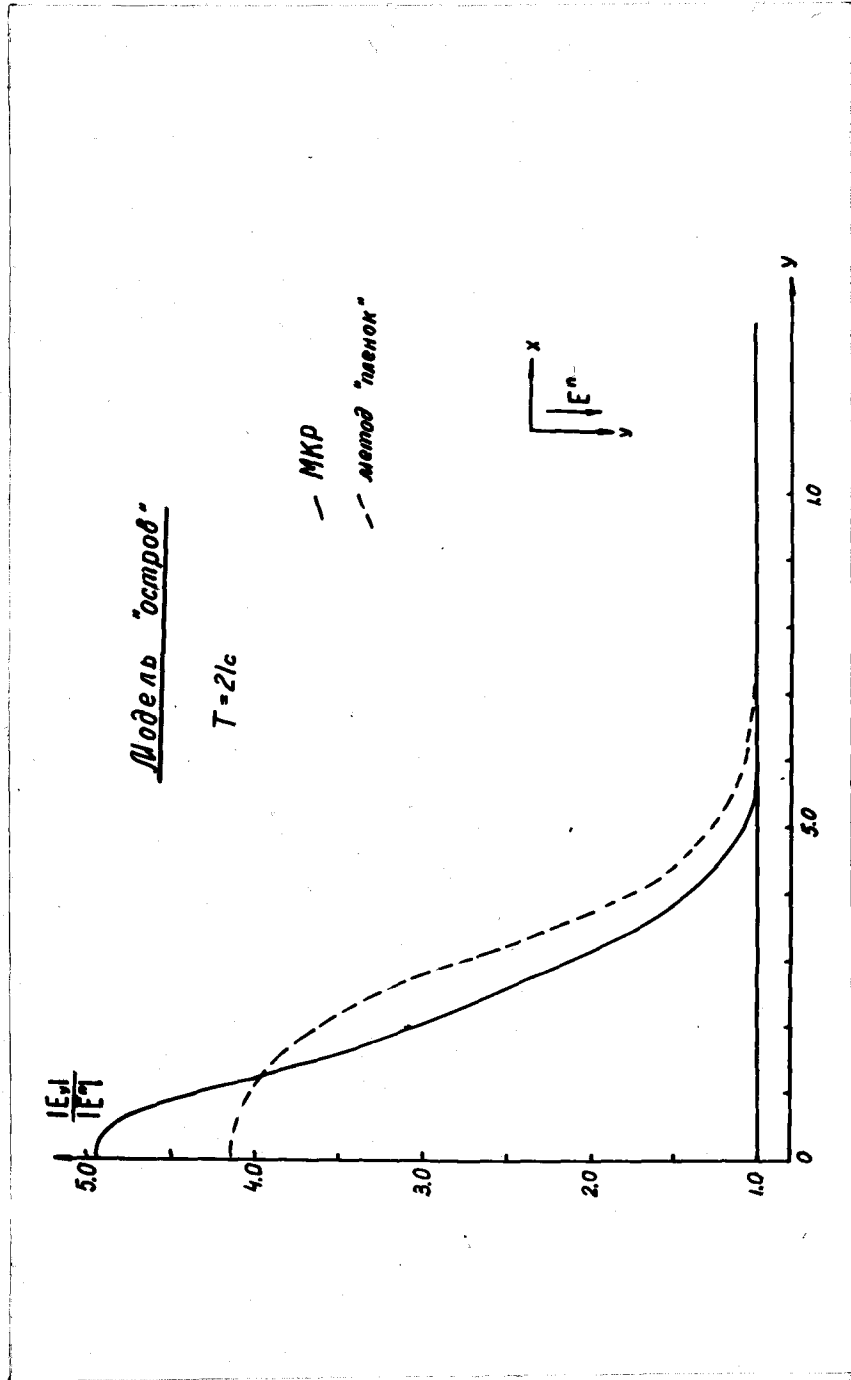
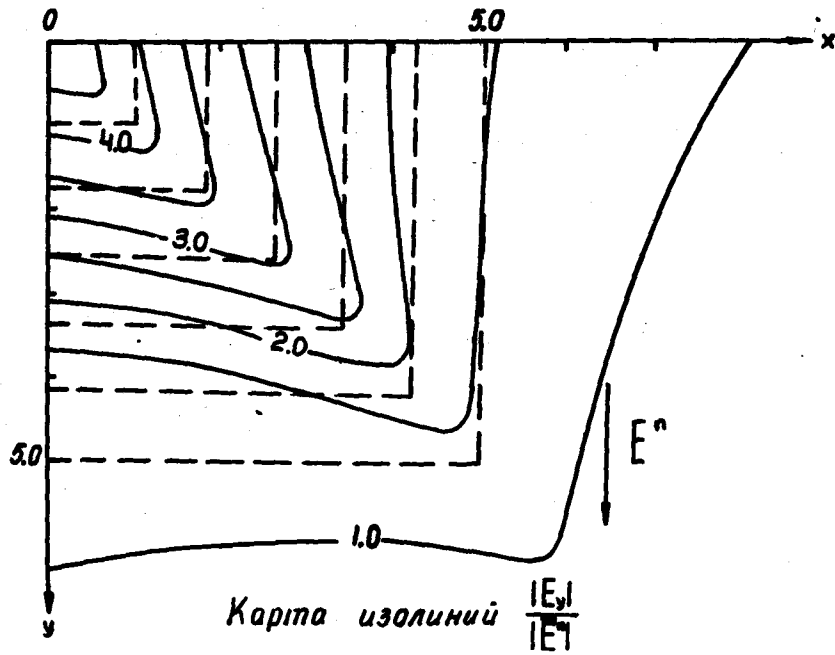


Рис. 24. Сравнение результатов моделирования методом "пленок" и с помощью метода конечных разностей (МКР).

Модель "остров" T=21c



Модель "остров" T=168c

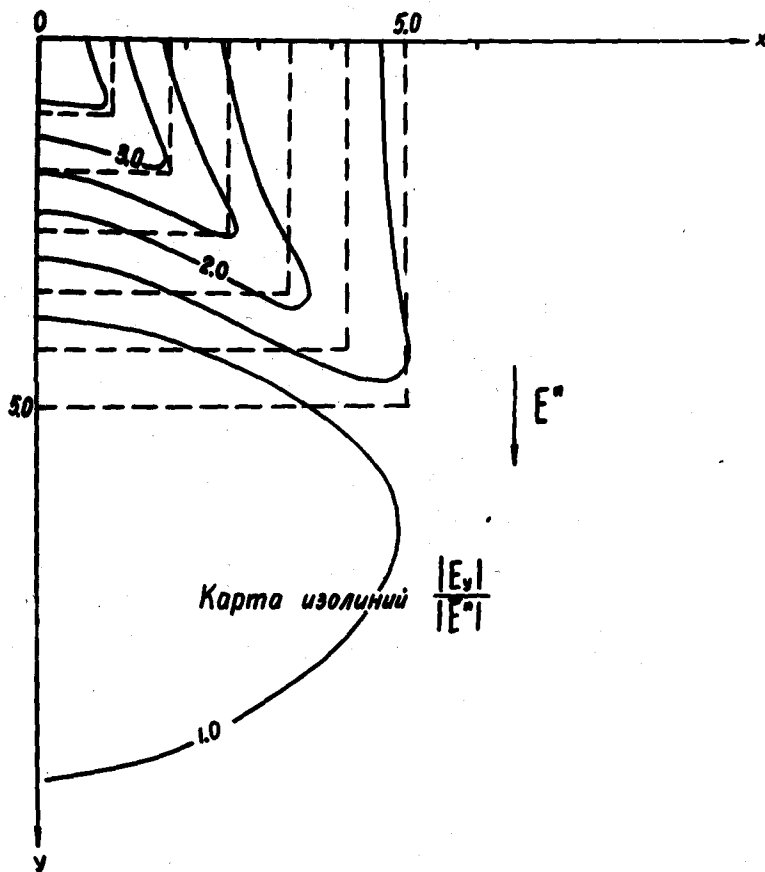


Рис. 25. Карты изолиний нормированного электрического поля для периодов  $T = 21$  с и  $T = 168$  с.

следует, что для океанических структур с очень большим градиентом электропроводности по горизонтали ( $\geq 300$ ) область применимости "метода пленок", по-видимому, шире, чем это обычно считалось.

В заключение отметим, что в настоящей главе мы ограничились, главным образом, результатами, демонстрирующими эффективность предложенного алгоритма и созданного на его основе пакета программ (см. также Приложение 2). В то же время, функциональные возможности и эксплуатационные характеристики комплекса (см. главу VI) позволяют решать как теоретические, так и практические вопросы современной геоэлектрики.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе рассмотрены теоретические, методические и вычислительные аспекты математического моделирования электромагнитных полей в трехмерных средах. Сформулируем основные результаты проведенных исследований:

1. Предложен алгоритм численного моделирования квазистационарных электромагнитных полей в трехмерно-неоднородных средах.

2. Аппарат интегралов типа Стрэттона-Чу обобщен для неоднородных сред. На его основе сконструированы интегральные краевые условия для компонент электрического и магнитного полей, которые записываются по всей поверхности области неоднородности, а также выведены формулы для разделения электромагнитного поля, наблюдаемого на некоторой замкнутой поверхности, на нормальную и аномальную части.

3. Предложена гибридная схема численного моделирования на основе методов дифференциальных уравнений и полученных интегральных соотношений между компонентами электрического или магнитного полей.

4. На модельном примере показано, что с увеличением размеров области моделирования (по сравнению с размерами неоднородности) интегральные краевые условия переходят в известные условия излучения Зоммерфельда.

5. Выведены асимптотические краевые условия для компонент аномального электрического поля в непроводящей среде.

6. Предложен алгоритм дискретизации области моделирования, учитывающий точность аппроксимации и свойство блочного диагонального преобладания матрицы системы, выраженные через параметры модели и сетки.

7. Разработаны эффективные интегральные критерии останова

итерационного процесса и контроля точности полученных результатов.

8. Создан пакет программ численного моделирования квазистационарных электромагнитных полей в трехмерно-неоднородных средах. С его помощью на конкретных практических примерах показано, что применение асимптотических краевых условий в непроводящей среде повышает эффективность моделирования, а также исследован ряд моделей типичных геоэлектрических ситуаций, важных для адекватной интерпретации полей.

П р и л о ж е н и е I

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ  
НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД И ИХ СВОЙСТВА

П I. I. Уравнения поля

Аппарат функций Грина является важным средством анализа электромагнитных полей. Понимаемые как отклик поля на возбуждение точечным источником, электромагнитные функции Грина дают возможность описать электрическое или магнитное поле, наблюдаемое в некоторой точке пространства, в виде интегралов по объему, занимаемому источниками электрического и магнитного типов, или интегралов по некоторой замкнутой поверхности, ограничивающей область, не содержащую источников. Возможность получения таких представлений обусловлена справедливостью принципа суперпозиции для линейных полей. Таким образом, в наиболее общем виде электрическое и магнитное поле в некоторой точке  $\vec{r}$  (вне области источников) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \iiint \left\{ \hat{\mathcal{G}}_{11}(\vec{r}|\vec{r}') \vec{J}(\vec{r}') + \hat{\mathcal{G}}_{12}(\vec{r}|\vec{r}') \vec{M}(\vec{r}') \right\} dV' \\ \vec{H}(\vec{r}) &= \iiint \left\{ \hat{\mathcal{G}}_{21}(\vec{r}|\vec{r}') \vec{J}(\vec{r}') + \hat{\mathcal{G}}_{22}(\vec{r}|\vec{r}') \vec{M}(\vec{r}') \right\} dV' \end{aligned} \quad (\text{П I. I. I})$$

где  $\vec{J}$  и  $\vec{M}$  - объемные плотности электрических и магнитных токов, а  $\hat{\mathcal{G}}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) - тензорные электромагнитные функции Грина;  $\vec{r}'$  - координата точки источника.

Из (П I. I. I) видно, что  $\hat{\mathcal{G}}_{11}$ ,  $\hat{\mathcal{G}}_{12}$  и  $\hat{\mathcal{G}}_{21}$ ,  $\hat{\mathcal{G}}_{22}$  имеют смысл, соответственно, электрических и магнитных полей, возбуждаемых в точке  $\vec{r}$ , соответственно, электрическим и магнитным диполем, расположенными в точке  $\vec{r}'$ .

Выпишем уравнения, которым удовлетворяют введенные согласно

(П.1.1) электромагнитные функции  $\hat{\mathcal{G}}_{ij}$ .

Уравнения поля имеют в данном случае вид:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \mathcal{G} \vec{E} + \vec{J} \\ \nabla \times \vec{E} &= i\omega\mu_0 \vec{H} - \vec{M} \end{aligned} \quad (\text{П.1.2})$$

Подставляя (П.1.1) в (П.1.2) и учитывая, что оператор  $\nabla$  действует только на координаты вектора  $\vec{r}$ , записываем:

$$\begin{aligned} & \iiint \{ [\nabla \times \hat{\mathcal{G}}_{21}] \vec{J} + [\nabla \times \hat{\mathcal{G}}_{22}] \vec{M} \} dV' = \\ & = \mathcal{G} \iiint \{ \hat{\mathcal{G}}_{11} \vec{J} + \hat{\mathcal{G}}_{12} \vec{M} \} dV' + \vec{J}; \\ & \iiint \{ [\nabla \times \hat{\mathcal{G}}_{11}] \vec{J} + [\nabla \times \hat{\mathcal{G}}_{12}] \vec{M} \} dV = \end{aligned} \quad (\text{П.1.3})$$

$$= i\omega\mu_0 \iiint \{ \hat{\mathcal{G}}_{21} \vec{J} + \hat{\mathcal{G}}_{22} \vec{M} \} dV' - \vec{M}$$

или

$$\begin{aligned} & \iiint \{ [\nabla \times \hat{\mathcal{G}}_{21}] \vec{J} + [\nabla \times \hat{\mathcal{G}}_{22}] \vec{M} - \mathcal{G} \hat{\mathcal{G}}_{11} \vec{J} - \\ & - \mathcal{G} \hat{\mathcal{G}}_{12} \vec{M} - \vec{J} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \} dV' = 0; \\ & \iiint \{ [\nabla \times \hat{\mathcal{G}}_{11}] \vec{J} + [\nabla \times \hat{\mathcal{G}}_{12}] \vec{M} - i\omega\mu_0 \hat{\mathcal{G}}_{21} \vec{J} - \\ & - i\omega\mu_0 \hat{\mathcal{G}}_{22} \vec{M} + \vec{M} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \} dV' = 0, \end{aligned} \quad (\text{П.1.4})$$

где  $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$  - функция Дирака, имеющая, как известно, свойство:

$$\iiint \vec{A}(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV' = \vec{A}(\vec{r}) \quad (\text{П.1.5})$$

Так как (П.1.4) должно быть справедливо при любых  $\vec{J}$  и  $\vec{M}$ , положим в (П.1.4) поочередно  $\vec{J} = 0$  и  $\vec{M} = 0$ . В результате получим уравнения, которым должны удовлетворять электромагнитные

тензорные функции Грина:

$$\nabla \times \hat{\mathcal{G}}_{11} = i\omega\mu_0 \hat{\mathcal{G}}_{21} \quad (\text{П. I. 6})$$

$$\nabla \times \hat{\mathcal{G}}_{21} = \mathcal{G} \hat{\mathcal{G}}_{11} + \hat{I} \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\nabla \times \hat{\mathcal{G}}_{12} = i\omega\mu_0 \hat{\mathcal{G}}_{22} - \hat{I} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (\text{П. I. 7})$$

$$\nabla \times \hat{\mathcal{G}}_{22} = \mathcal{G} \hat{\mathcal{G}}_{12}$$

где  $\hat{I}$  - идем-фактор.

Из (П. I. 6) и (П. I. 7) следует, что  $\hat{\mathcal{G}}_{11}$  и  $\hat{\mathcal{G}}_{12}$  удовлетворяют также уравнениям

$$\nabla \times \nabla \times \hat{\mathcal{G}}_{11} - k^2 \hat{\mathcal{G}}_{11} = i\omega\mu_0 \hat{I} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (\text{П. I. 8})$$

$$\nabla \times \nabla \times \hat{\mathcal{G}}_{12} - k^2 \hat{\mathcal{G}}_{12} = -i\omega\mu_0 \nabla \times \hat{I} \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

а функции  $\hat{\mathcal{G}}_{21}$  и  $\hat{\mathcal{G}}_{22}$  - уравнениям:

$$\nabla \times \nabla \times \hat{\mathcal{G}}_{21} - k^2 \hat{\mathcal{G}}_{21} - \nabla \mathcal{G} \times \frac{1}{\mathcal{G}} \nabla \times \hat{\mathcal{G}}_{21} = \nabla \times \hat{I} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (\text{П. I. 9})$$

$$\nabla \times \nabla \times \hat{\mathcal{G}}_{22} - k^2 \hat{\mathcal{G}}_{22} - \nabla \mathcal{G} \times \frac{1}{\mathcal{G}} \nabla \times \hat{\mathcal{G}}_{22} = -\mathcal{G} \hat{I} \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

### П. 2. Лемма Лоренца для неоднородной среды

Электромагнитные тензорные функции Грина  $\hat{\mathcal{G}}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) для изотропного пространства, введенные согласно (п. I. I. 2) удовлетворяют, как известно [4I], соотношениям взаимности, которые, в свою очередь, отражают свойства симметрии электромагнитного поля в рассматриваемой неоднородной среде. Для вывода этих соотношений естественно воспользоваться леммой Лоренца, которую мы сформулируем для случая квазистационарных электромагнитных полей, возбуждаемых источниками электрического ( $\vec{J}$ ) и магнитного ( $\vec{M}$ ) типов в неоднородной, изотропной среде с электропроводностью  $\mathcal{G}(\vec{r})$  и магнитной проницаемостью  $\mu = \text{const}$ . Как и ранее, будем пред-

полагать, что зависимость полей от времени характеризуется множителем  $\exp(-i\omega t)$  <sup>х)</sup>.

Пусть в некоторой области  $V$  среды с параметрами  $\epsilon(\vec{r})$ ,  $\mu$  существуют 2 множества источников  $\vec{J}^a, \vec{M}^a$  и  $\vec{J}^b, \vec{M}^b$ , которые возбуждают электромагнитные поля, имеющие одинаковую частоту  $\omega$ . Обозначим поле, вызванное лишь источниками типа "а", через  $\vec{E}^a, \vec{H}^a$ , а поле, вызванное лишь источниками типа "в" - через  $\vec{E}^b, \vec{H}^b$ . Соответствующие уравнения имеют вид:

$$\nabla \times \vec{H}^a = \epsilon(\vec{r}) \vec{E}^a + \vec{J}^a \quad (\text{III.2.1})$$

$$\nabla \times \vec{E}^a = i\omega\mu \vec{H}^a - \vec{M}^a \quad (\text{III.2.2})$$

$$\nabla \times \vec{H}^b = \epsilon(\vec{r}) \vec{E}^b + \vec{J}^b \quad (\text{III.2.3})$$

$$\nabla \times \vec{E}^b = i\omega\mu \vec{H}^b - \vec{M}^b \quad (\text{III.2.4})$$

Умножая (III.2.1) скалярно на  $\vec{E}^b$ , а (III.2.4) - скалярно на  $\vec{H}^a$  и складывая полученные уравнения, имеем:

$$\nabla \cdot [\vec{H}^a \times \vec{E}^b] = \epsilon(\vec{r})(\vec{E}^a, \vec{E}^b) + (\vec{J}^a, \vec{E}^b) - i\omega\mu(\vec{H}^a, \vec{H}^b) + (\vec{M}^b, \vec{H}^a) \quad (\text{III.2.5})$$

Меняя в (III.2.5) местами "а" и "в", получаем:

$$\nabla \cdot [\vec{H}^b \times \vec{E}^a] = \epsilon(\vec{r})(\vec{E}^b, \vec{E}^a) + (\vec{J}^b, \vec{E}^a) -$$

$$-i\omega\mu(\vec{H}^b, \vec{H}^a) + (\vec{M}^a, \vec{H}^b)$$

---

<sup>х)</sup> Отметим, что лемма Лоренца справедлива и в более общем случае нестационарных электромагнитных полей в анизотропных неоднородных средах [41].

Вычитая (III.2.5) из (III.2.6), записываем:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \{ [\vec{E}^b \times \vec{H}^a] - [\vec{E}^a \times \vec{H}^b] \} = (\vec{E}^a, \vec{J}^b) + \\ + (\vec{H}^b, \vec{M}^a) - (\vec{E}^b, \vec{J}^a) - (\vec{H}^a, \vec{M}^b) \end{aligned} \quad (\text{III.2.7})$$

Интегрируя (III.2.7) по всей области  $V$  и применяя теорему Гаусса, получаем:

$$\begin{aligned} \oint_S \{ [\vec{E}^a \times \vec{H}^b] - [\vec{E}^b \times \vec{H}^a] \} d\vec{s} = \iiint_V \{ (\vec{E}^a, \vec{J}^b) + \\ + (\vec{H}^b, \vec{M}^a) - (\vec{E}^b, \vec{J}^a) - (\vec{H}^a, \vec{M}^b) \} dv \end{aligned} \quad (\text{III.2.8})$$

где  $S$  - поверхность, ограничивающая область  $V$ , а вектор нормали к поверхности направлен внутрь области.

Устремим теперь диаметр рассматриваемой области к бесконечности. Тогда, учитывая условия излучения для полей  $\vec{E}^a$ ,  $\vec{H}^a$ ,  $\vec{E}^b$  и  $\vec{H}^b$ , мы можем записать:

$$\iiint_V \{ (\vec{E}^a, \vec{J}^b) + (\vec{H}^b, \vec{M}^a) - (\vec{E}^b, \vec{J}^a) - (\vec{H}^a, \vec{M}^b) \} dv = 0, \quad (\text{III.2.9})$$

где интегрирование проводится по всему пространству.

Соотношение (III.2.9) является математическим выражением принципа взаимности для рассматриваемого случая.

### III.3. Соотношения взаимности

Воспользуемся теперь леммой Лоренца в форме (III.2.9) для вывода соотношений взаимности для электромагнитных тензорных функций Грина в неоднородной среде.

$$a) \quad \hat{\mathcal{G}}_{11}(\vec{r}|\vec{r}') = \hat{\mathcal{G}}_{11}(\vec{r}'|\vec{r}) \quad (\text{III.3.1})$$

где "волной" обозначена операция транспонирования.

Расположим последовательно в точках с радиус-векторами  $\vec{r}'$

и  $\vec{e}''$  электрические диполи с моментами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , соответственно:

$$\begin{aligned} \vec{J}^a &= \vec{a} \delta(\vec{e} - \vec{e}') \\ \vec{J}^b &= \vec{b} \delta(\vec{e} - \vec{e}'') \end{aligned} \quad (\text{П.3.2})$$

где  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  - произвольные постоянные векторы,  $\delta$  - функция Дирака, а  $\vec{e}$  - радиус-вектор точки наблюдения, и положим, что источников магнитного типа нет:

$$\begin{aligned} \vec{M}^a &= 0 \\ \vec{M}^b &= 0 \end{aligned} \quad (\text{П.3.3})$$

Тогда, в соответствии с (П.1.1), мы можем записать:

$$\begin{aligned} \vec{E}^a &= \hat{\mathcal{G}}_{11}(\vec{e}|\vec{e}') \vec{a} \\ \vec{E}^b &= \hat{\mathcal{G}}_{11}(\vec{e}|\vec{e}'') \vec{b} \end{aligned} \quad (\text{П.3.4})$$

Подставим (П.3.2)-(П.3.4) в (П.1.9):

$$\begin{aligned} \iiint \{ (\hat{\mathcal{G}}_{11}(\vec{e}|\vec{e}') \vec{a}, \vec{b} \delta(\vec{e} - \vec{e}'') - (\hat{\mathcal{G}}_{11}(\vec{e}|\vec{e}'') \vec{b}, \\ \vec{a} \delta(\vec{e} - \vec{e}')) \} dV = 0, \end{aligned} \quad (\text{П.3.5})$$

где интегрирование проводится по координате точки наблюдения.

С учетом свойства  $\delta$ -функции записываем:

$$(\vec{b}, \hat{\mathcal{G}}_{11}(\vec{e}''|\vec{e}') \vec{a}) = (\vec{a}, \hat{\mathcal{G}}_{11}(\vec{e}'|\vec{e}'') \vec{b})$$

Отсюда непосредственно следует:

$$\hat{\mathcal{G}}_{11}(\vec{e}''|\vec{e}') = \tilde{\mathcal{G}}_{11}(\vec{e}'|\vec{e}'')$$

("волной", как и ранее, обозначена операция транспонирования), или, в прежних обозначениях,

$$\hat{\mathcal{G}}_{11}(\vec{e}|\vec{e}') = \tilde{\mathcal{G}}_{11}(\vec{e}'|\vec{e}) \quad , \text{ что и т.д.}$$

$$\text{б) } \hat{\mathcal{G}}_{22}(\vec{e}|\vec{e}') = \tilde{\mathcal{G}}_{22}(\vec{e}'|\vec{e}) \quad (\text{П.3.6})$$



Расположим последовательно в точках с радиус-векторами  $\vec{r}'$  и  $\vec{r}''$  магнитные диполи с моментами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , соответственно:

$$\begin{aligned} \vec{M}^a &= \vec{a} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \\ \vec{M}^b &= \vec{b} \delta(\vec{r} - \vec{r}'') \end{aligned} \quad (\text{П.3.7})$$

Будем считать, что источников электрического типа в обоих случаях нет:

$$\begin{aligned} \vec{J}^a &= 0 \\ \vec{J}^b &= 0 \end{aligned} \quad (\text{П.3.8})$$

Тогда, в соответствии с (П.1.1), имеем:

$$\begin{aligned} \vec{H}^a &= \hat{\mathcal{Y}}_{22}(\vec{r}|\vec{r}') \vec{a} \\ \vec{H}^b &= \hat{\mathcal{Y}}_{22}(\vec{r}|\vec{r}'') \vec{b}. \end{aligned} \quad (\text{П.3.9})$$

Подставляя (П.3.7)-(П.3.9) в (П.1.9), записываем:

$$\iiint \{ (\hat{\mathcal{Y}}_{22}(\vec{r}|\vec{r}'') \vec{b}, \vec{a} \delta(\vec{r} - \vec{r}') - (\hat{\mathcal{Y}}_{22}(\vec{r}|\vec{r}') \vec{a}, \vec{b} \delta(\vec{r} - \vec{r}'')) \} dV = 0 \quad (\text{П.3.10})$$

Из (П.3.10) следует:

$$(\vec{b}, \hat{\mathcal{Y}}_{22}(\vec{r}''|\vec{r}') \vec{a}) = (\vec{a}, \hat{\mathcal{Y}}_{22}(\vec{r}'|\vec{r}'') \vec{b})$$

или, в других обозначениях:

$$\hat{\mathcal{Y}}_{22}(\vec{r}|\vec{r}') = \hat{\mathcal{Y}}_{22}(\vec{r}'|\vec{r}) \quad , \text{ что и т.д.} \quad (\text{П.3.11})$$

$$\text{в ) } \hat{\mathcal{Y}}_{12}(\vec{r}|\vec{r}') = -\hat{\mathcal{Y}}_{21}(\vec{r}'|\vec{r})$$

Поместим в точку с радиус-вектором  $\vec{r}$  электрический диполь с моментом  $\vec{a}$ , а затем в точку с радиус-вектором  $\vec{r}''$  - магнитный диполь с моментом  $\vec{b}$ . В предположении, что в рассматриваемой области других источников нет, имеем:

$$\begin{aligned} \vec{J}^a &= \vec{a} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \\ \vec{M}^a &= 0 \end{aligned} \quad (\text{П.3.12})$$

$$\begin{aligned} \vec{J}^b &= 0 \\ \vec{M}^b &= \vec{b} \delta(\vec{z} - \vec{z}'') \end{aligned} \quad (\text{III.3.13})$$

Тогда, в соответствии с (III.I.I):

$$\begin{aligned} \vec{H}^a &= \hat{\mathcal{Y}}_{21}(\vec{z}|\vec{z}') \vec{a} \\ \vec{E}^b &= \hat{\mathcal{Y}}_{12}(\vec{z}|\vec{z}'') \vec{b} \end{aligned} \quad (\text{III.3.14})$$

Подставляя (III.3.12)-(III.3.14) в (III.I.9), записываем:

$$\iiint \left\{ \left( \hat{\mathcal{Y}}_{12}(\vec{z}|\vec{z}'') \vec{b}, \vec{a} \delta(\vec{z} - \vec{z}') \right) + \left( \hat{\mathcal{Y}}_{21}(\vec{z}|\vec{z}') \vec{a}, \vec{b} \delta(\vec{z} - \vec{z}'') \right) \right\} dV = 0$$

Отсюда получаем:

$$\left( \vec{a}, \hat{\mathcal{Y}}_{12}(\vec{z}|\vec{z}'') \vec{b} \right) = - \left( \vec{b}, \hat{\mathcal{Y}}_{21}(\vec{z}'|\vec{z}') \vec{a} \right)$$

Или, в других обозначениях:

$$\hat{\mathcal{Y}}_{12}(\vec{z}|\vec{z}') = - \tilde{\mathcal{Y}}_{21}(\vec{z}'|\vec{z}) \quad , \text{ что и т.д.}$$

Таким образом, мы показали, что электромагнитные тензорные функции Грина для неоднородной среды удовлетворяют следующим соотношениям взаимности:

$$\hat{\mathcal{Y}}_{ij}(\vec{z}|\vec{z}') = (-1)^{i+j} \tilde{\mathcal{Y}}_{ji}(\vec{z}'|\vec{z}) \quad (i, j = 1, 2) \quad (\text{III.3.15})$$

Отметим, что в случае однородной среды соотношения (III.3.15) дополняются еще двумя:

$$\hat{\mathcal{Y}}_{11}(\vec{z}|\vec{z}') = \tilde{\mathcal{Y}}_{11}(\vec{z}|\vec{z}') \quad (\text{III.3.16})$$

$$\hat{\mathcal{Y}}_{21}(\vec{z}|\vec{z}') = - \tilde{\mathcal{Y}}_{21}(\vec{z}|\vec{z}') \quad (\text{III.3.17})$$

### III.4. Интегральные представления электрического и магнитного полей

Выведем формулы для электрического и магнитного полей в области без источников, аналогичные известным формулам Страттона-Чу для однородной среды. Воспользуемся с этой целью леммой Лоренца в форме (III.2.8), а также правилами действия с тензорными функциями, приведенными в п. III.5.

Рассмотрим два электромагнитных поля  $\vec{E}^a$ ,  $\vec{H}^a$  и  $\vec{E}^b$ ,  $\vec{H}^b$ , создаваемых произвольными источниками, расположенными вне конечной области  $V$  пространства, и следующими двумя системами источников, сосредоточенными внутри  $V$ :

$$\begin{aligned} \vec{J}^a &= 0, \quad \vec{M}^a = 0 \\ \vec{J}^b &= \vec{a} \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad \vec{M}^b = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.4.1})$$

Поля  $\vec{E}^a$ ,  $\vec{H}^a$  и  $\vec{E}^b$ ,  $\vec{H}^b$  удовлетворяют внутри  $V$  следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H}^a &= \mathcal{G} \vec{E}^a \\ \nabla \times \vec{E}^a &= i\omega\mu_0 \vec{H}^a \end{aligned} \quad (\text{III.4.2})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H}^b &= \mathcal{G} \vec{E}^b + \vec{a} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \\ \nabla \times \vec{E}^b &= i\omega\mu_0 \vec{H}^b \end{aligned} \quad (\text{III.4.3})$$

Заметим, что в соответствии с (III.I.I)

$$\begin{aligned} \vec{E}^b &= \hat{\mathcal{L}}_{11} \vec{a} \\ \vec{H}^b &= \hat{\mathcal{L}}_{21} \vec{a} \end{aligned} \quad (\text{III.4.4})$$

Согласно (III.2.8) имеем

$$\begin{aligned} \oint_S \{ [\vec{E}^a \times \hat{\mathcal{L}}_{21}(\vec{r}|\vec{r}') \vec{a}] - [\hat{\mathcal{L}}_{11}(\vec{r}|\vec{r}') \vec{a} \times \vec{H}^a] \} d\vec{s} = \\ = \iiint_V (\vec{E}^a, \vec{a} \delta(\vec{r} - \vec{r}')) dV \end{aligned} \quad (\text{III.4.5})$$

Или, без индекса "а":

$$\oint_S \{ [\vec{n} \times \vec{E}] \hat{\varphi}_{21}(\vec{r}|\vec{r}') \vec{a} + \hat{\varphi}_{11}(\vec{r}|\vec{r}') \vec{a} [\vec{n} \times \vec{H}] \} ds = (\vec{a}, \vec{E}(\vec{r}))$$

Меняя местами  $\vec{r}$  и  $\vec{r}'$  и учитывая соотношения взаимности, записываем:

$$\oint_S \{ \vec{a} \hat{\varphi}_{11}(\vec{r}'|\vec{r}) [\vec{n} \times \vec{H}] - \vec{a} \hat{\varphi}_{12}(\vec{r}'|\vec{r}) [\vec{n} \times \vec{E}] \} ds = (\vec{a}, \vec{E}(\vec{r}'))$$

Отсюда, с учетом произвольности вектора  $\vec{a}$ , следует:

$$\oint_S \{ \hat{\varphi}_{11}(\vec{r}'|\vec{r}) [\vec{n} \times \vec{H}] - \hat{\varphi}_{12}(\vec{r}'|\vec{r}) [\vec{n} \times \vec{E}] \} ds' = \vec{E}(\vec{r}')$$

Обозначая

$$\begin{aligned} [\vec{n} \times \vec{H}] &= \vec{J}^s \\ -[\vec{n} \times \vec{E}] &= \vec{M}^s \end{aligned} \quad (\text{III.4.6})$$

и учитывая, что правая часть (III.4.5) равна нулю при  $\vec{r}' \in V$ , записываем окончательно:

$$\oint_S \{ \hat{\varphi}_{11}(\vec{r}'|\vec{r}) \vec{J}^s + \hat{\varphi}_{12}(\vec{r}'|\vec{r}) \vec{M}^s \} ds' = \begin{cases} \vec{E}(\vec{r}), & \vec{r} \in V \\ 0, & \vec{r} \in V^c \end{cases} \quad (\text{III.4.7})$$

Аналогично, выбрав в качестве источников

$$\begin{aligned} \vec{J}^a &= 0 & ; & & \vec{M}^a &= 0 \\ \vec{J}^b &= 0 & ; & & \vec{M}^b &= \vec{a} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \end{aligned}$$

и учитывая, что в этом случае

$$\begin{aligned} \vec{E}^b &= \hat{\varphi}_{12} \vec{a} \\ \vec{H}^b &= \hat{\varphi}_{22} \vec{a}, \end{aligned}$$

последовательно записываем:

$$\oint_S \{ [\vec{E}^a \times \hat{\mathcal{Y}}_{22}(\vec{r}|\vec{r}') \vec{a}] - [\hat{\mathcal{Y}}_{12}(\vec{r}|\vec{r}') \vec{a} \times \vec{H}^b] \} d\vec{s} =$$

$$= - \iiint_V (\vec{H}^a, \vec{a} \delta(\vec{r} - \vec{r}')) dV$$

$$\oint_S \{ [\vec{n} \times \vec{E}] \hat{\mathcal{Y}}_{22}(\vec{r}|\vec{r}') \vec{a} + \hat{\mathcal{Y}}_{12}(\vec{r}|\vec{r}') \vec{a} [\vec{n} \times \vec{H}] \} d\vec{s} =$$

$$= - \vec{a} \vec{H}(\vec{r}')$$

$$\oint_S \{ -\vec{a} \hat{\mathcal{Y}}_{12}(\vec{r}|\vec{r}') [\vec{n} \times \vec{H}] + \vec{a} \hat{\mathcal{Y}}_{22}(\vec{r}|\vec{r}') [\vec{n} \times \vec{E}] \} d\vec{s}' =$$

$$= - \vec{a} \vec{H}(\vec{r})$$

(П.4.8)

$$\oint_S \{ \hat{\mathcal{Y}}_{12}(\vec{r}|\vec{r}') [\vec{n} \times \vec{H}] - \hat{\mathcal{Y}}_{22}(\vec{r}|\vec{r}') [\vec{n} \times \vec{E}] \} d\vec{s}' =$$

$$= \vec{H}(\vec{r})$$

$$\oint_S \{ \hat{\mathcal{Y}}_{12}(\vec{r}|\vec{r}') \vec{J}^s + \hat{\mathcal{Y}}_{22}(\vec{r}|\vec{r}') \vec{M}^s \} d\vec{s} = \begin{cases} \vec{H}(\vec{r}), & \vec{r} \in V \\ 0, & \vec{r} \in \bar{V} \end{cases}$$

III.5. Некоторые формулы и правила действий  
с диадными тензорными функциями

Определим сначала "внешнее" произведение двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (или диаду) формулой:

$$\hat{A} = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle \equiv \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} \quad (\text{III.5.1})$$

где  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ;  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

Отметим, что для тензоров, записанных в виде (III.5.1), справедливы следующие правила действий [77, с. 46-48]:

$$\vec{c} \hat{A} = (\vec{c} \vec{a}) \vec{b} = \vec{b} (\vec{c} \vec{a}) = \vec{b} (\vec{a} \vec{c}) \quad (\text{III.5.2})$$

$$\hat{A} \vec{c} = \vec{a} (\vec{b} \vec{c}) = (\vec{b} \vec{c}) \vec{a} = (\vec{c} \vec{b}) \vec{a} \quad (\text{III.5.3})$$

Т.о.,

$$\tilde{\hat{A}} = \vec{b} \vec{a} \quad (\text{III.5.4})$$

где, как и ранее, волной обозначена операция транспонирования.

Кроме того:

$$\hat{A} \vec{c} = \vec{c} \tilde{\hat{A}} \quad (\text{III.5.5})$$

$$\hat{A} \times c = \vec{a} [\vec{b} \times c] \quad (\text{III.5.6})$$

$$\vec{c} \times \hat{A} = [\vec{c} \times \vec{a}] \vec{b} \quad (\text{III.5.7})$$

Пусть  $\vec{d}_i$  - орты декартовой системы координат. Тогда, очевидно, любой тензор

$$\hat{G}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{III.5.8})$$

можно записать в виде:

$$\hat{G} = \sum_{i=1}^3 \vec{G}_i \vec{d}_i \quad (\text{III.5.9})$$

где  $\vec{G}_i$  - столбцы в представлении (III.5.8). Тогда, по определению,

$$\nabla \cdot \hat{G} = \sum_{i=1}^3 (\nabla \cdot \vec{G}_i) \vec{d}_i \quad (\text{III.5.10})$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \hat{G} &= \sum_{i=1}^3 [\nabla \times \vec{G}_i] \vec{d}_i = \\ &= \vec{d}_1 \left( \frac{\partial \vec{G}_3}{\partial y} - \frac{\partial \vec{G}_2}{\partial z} \right) + \vec{d}_2 \left( \frac{\partial \vec{G}_1}{\partial z} - \frac{\partial \vec{G}_3}{\partial x} \right) + \\ &+ \vec{d}_3 \left( \frac{\partial \vec{G}_2}{\partial x} - \frac{\partial \vec{G}_1}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.5.11})$$

где  $\vec{G}_i$  - вектор-строки в представлении (III.5.8).

Из (III.5.4), (III.5.9) и (III.5.11) следует также:

$$\vec{\nabla} \times \hat{G} = \sum_{i=1}^3 [\nabla \times \vec{G}_i] \vec{d}_i = \sum_{i=1}^3 \vec{d}_i [\nabla \times \vec{G}_i] \quad (\text{III.5.12})$$

$$\nabla \times \hat{G} = \sum_{i=1}^3 [\nabla \times \vec{G}_i] \vec{d}_i \quad (\text{III.5.13})$$

$$\vec{\nabla} \times \hat{G} = \sum_{i=1}^3 \vec{d}_i [\nabla \times \vec{G}_i] \quad (\text{III.5.14})$$

Докажем следующую полезную формулу для диадных функций, зависящих от двух переменных  $\vec{e}$  и  $\vec{e}'$ :

$$\nabla \times (\hat{G}(\vec{e}|\vec{e}') \vec{a}(\vec{e}')) = [\vec{\nabla} \times \hat{G}(\vec{e}|\vec{e}')] \vec{a}(\vec{e}') \quad (\text{III.5.15})$$

учитывая, что оператор  $\nabla$  действует только на координаты вектора  $\vec{a}$  :

$$\begin{aligned}\nabla \times (\hat{G}\vec{a}) &= \nabla \times \left( \sum_{i=1}^3 \langle \vec{G}_i \vec{d}_i \rangle \vec{a} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^3 [\nabla \times \langle \vec{G}_i \vec{d}_i \rangle \vec{a}] = \sum_{i=1}^3 [\nabla \times \{ \vec{G}_i (\vec{d}_i \vec{a}) \}] = \\ &= \sum_{i=1}^3 [\nabla \times (\vec{G}_i a_i)] = \sum_{i=1}^3 \{ \nabla a_i \times \vec{G}_i + a_i \nabla \times \vec{G}_i \} = \\ &= \sum_{i=1}^3 a_i [\nabla \times \vec{G}_i] = \sum_{i=1}^3 [\nabla \times \vec{G}_i] (\vec{d}_i \vec{a}) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \langle [\nabla \times \vec{G}_i] \vec{d}_i \rangle \vec{a} = [\nabla \times \hat{G}] \vec{a}\end{aligned}$$

, что и т.д.



**П Р И Л О Ж Е Н И Е 2**

**Графика и карты изолиний компонент поля  
из банка решений**

**Модель "КУБ в однородном пространстве"**

PARAMETERS OF THE SOURCE

TYPE OF THE SOURCE: PL<sub>2</sub> WAVE

ANGLE OF POLARIZATION: 90 (DEGREES)

TIME PERIOD (SEC) : 0.1000E-01 (FREQUENCY (HZ) : 100.0 )

CONDUCTIVITY IN THE ATMOSPHERE (S/M) : 0.1000E-05

CONDUCTIVITY DISTRIBUTION IN THE NORMAL SECTION

(STEPWISE FUNCTION)

LAYER	THICKNESS (KM)	CONDUCTIVITY (S/M)
1	118.90	0.1000E-05

GEOM. PARAMETERS OF ANORMAL REGION (KM) :

TYPE OF INHOMOGENEITY: LOCAL

	X-AXIS	Y-AXIS	Z-AXIS
DIMENSIONS :	3.20	3.20	3.20
COORDINATES:	-1.60 1.60	-1.60 1.60	1.60 4.80
DEPTH OF THE UPPER BOUND:	1.60		

CONDUCTIVITY DISTRIBUTION IN ANORMAL REGION

IN X-AXIS IN Y-AXIS

SYMMETRY: YES YES

TYPE OF CONDUCTIVITY DISTRIBUTION : CONSTANT

CONSTANT ANORMAL CONDUCTIVITY (S/M) : 0.1000E-03

SYMMETRY IN X-AXIS IS TAKEN INTO ACCOUNT

SYMMETRY IN Y-AXIS IS TAKEN INTO ACCOUNT

GRID PARAMETERS

NUMBER OF NODES :

NTOT NX NY NZ NZA NZE  
 2340 10 13 18 5 12

NUMBER OF CELLS IN ANOM. REGION :

NXAN NYAN NZAN  
 2 2 4

NUMBER OF NODES IN ANOM. REG.  
 TOTAL NUMBER OF NODES

DISPLACEMENTS (KM) :

DX :	0.80	0.80	0.80	1.00	1.50	2.00	2.50
3.00							
DY :	0.80	0.80	0.80	1.50	2.00	2.50	3.00
3.50	4.00	4.50	5.00				
DZ :	5.00	2.00	0.80	0.80	0.80	0.80	0.80
10.00	0.80	0.80	0.80	2.50	10.00	40.00	
60.00							

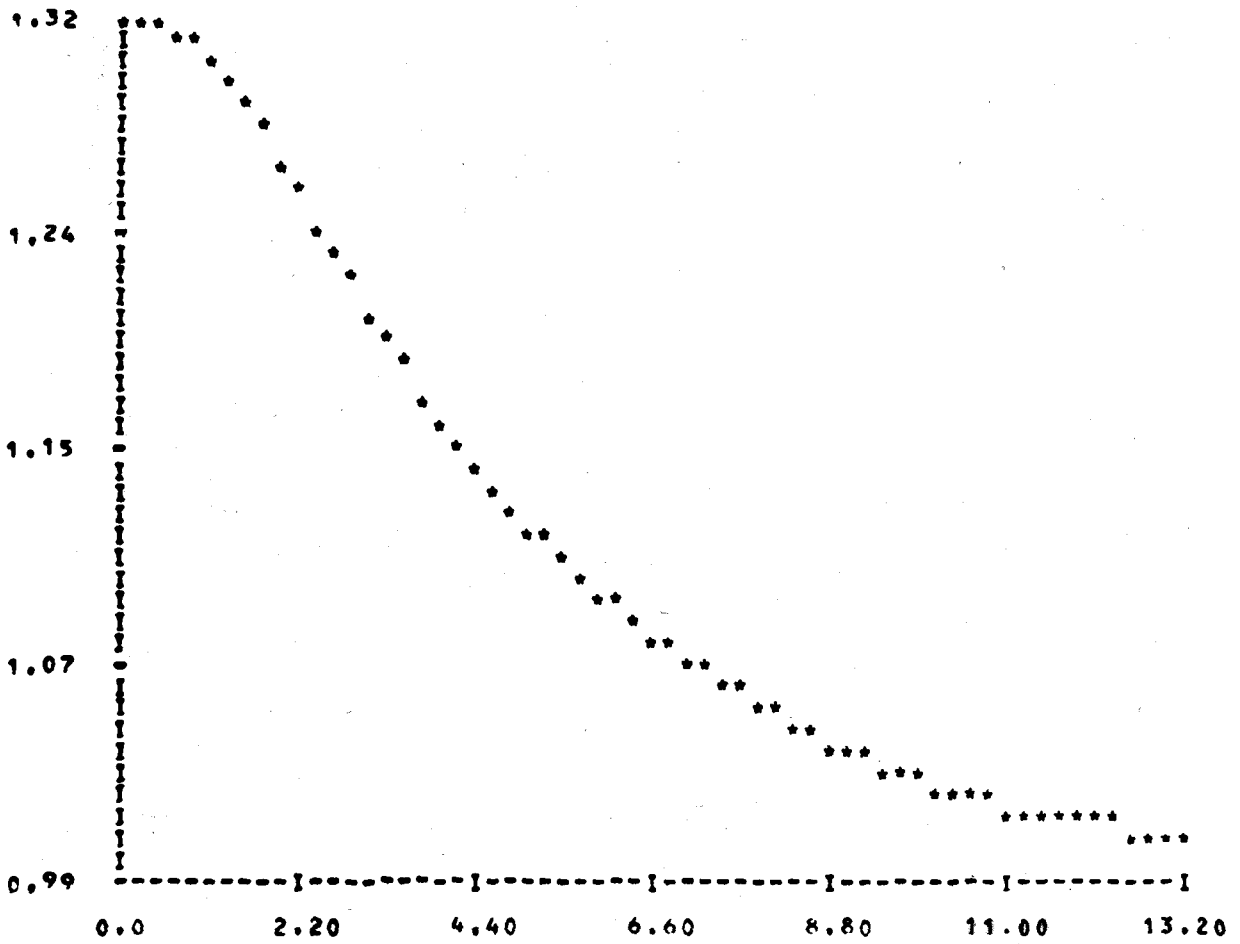
COORDINATES OF NODES (KM) :

X :	0.80	1.60	2.40	3.20	4.20	5.70	7.70
10.20	13.20						
Y :	18.80	19.70	24.20	29.20	4.70	6.70	9.20
12.20	15.70	16.70	24.20	29.20			
Z :	-18.60	-3.60	-1.60	-9.60	8.20	8.60	13.60
-12.40	3.20	4.00	5.60	8.60			
52.90	112.90						



MAGNETIC FIELD GRAPHS

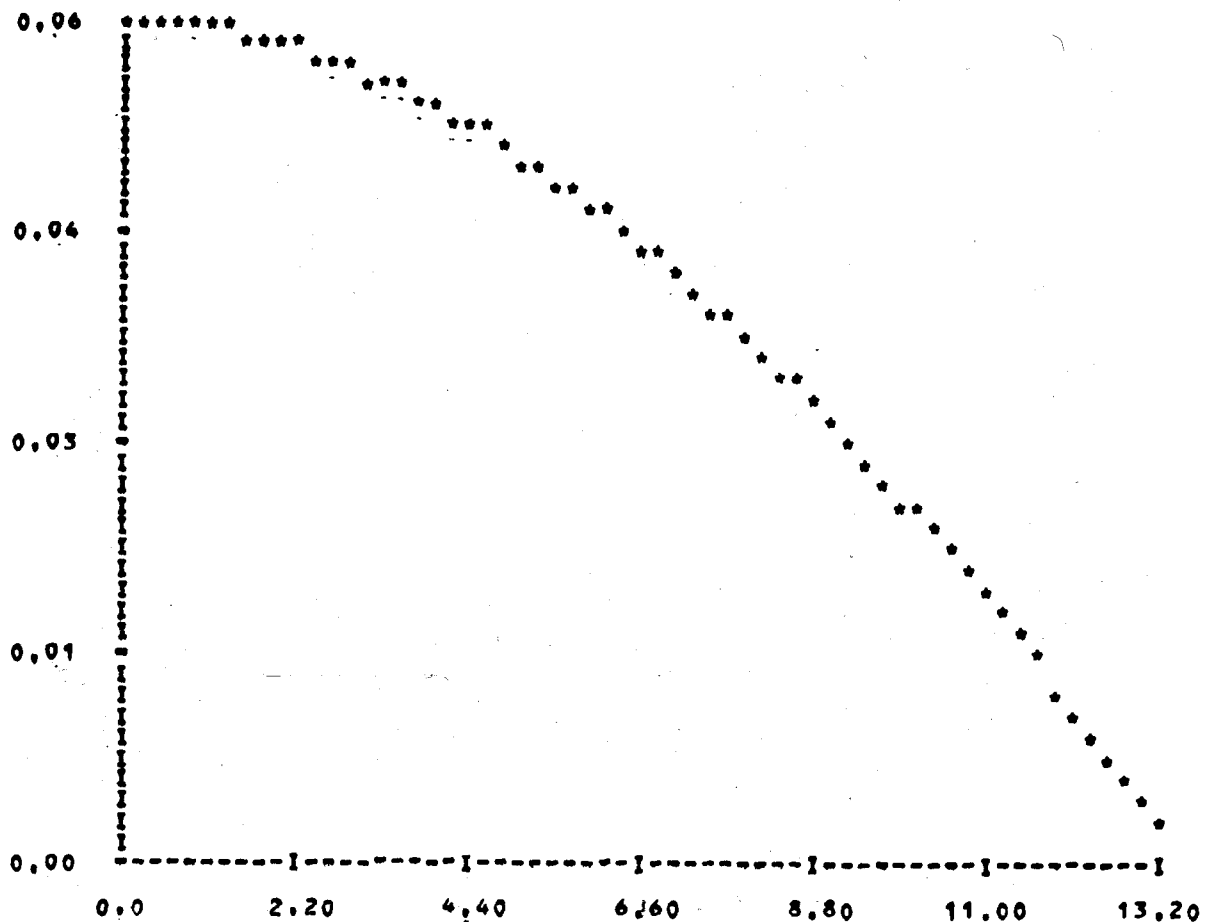
-----  
COMPONENT : HX  
KIND OF FIELD : TOTL  
FORM : AMPL  
PLANE : XOY  
COORD. OF PL. : -3.60 KM  
AXIS : OX  
-----



HORIZONTAL STEP= 0.22 (KM)  
VERTICAL STEP= 0.85E-02

SYMBOL	NUMB. OF PROFILE	COORDINATE OF PROFILE
*	1	0.0

ELECTRIC FIELD GRAPHS  
-----  
COMPONENT | EY  
KIND OF FIELD | ANRM  
FORM | AMPL  
PLANE | XOY  
COORD. OF PL. | OX = 8.60 KM  
AXIS |



HORIZONTAL STEP= 0.22 (KM)  
VERTICAL STEP= 0.15E-02

SYMBOL	NUMB. OF PROFILE	COORDINATE OF PROFILE
*	1	0.0

Модель "ОСТРОВ"

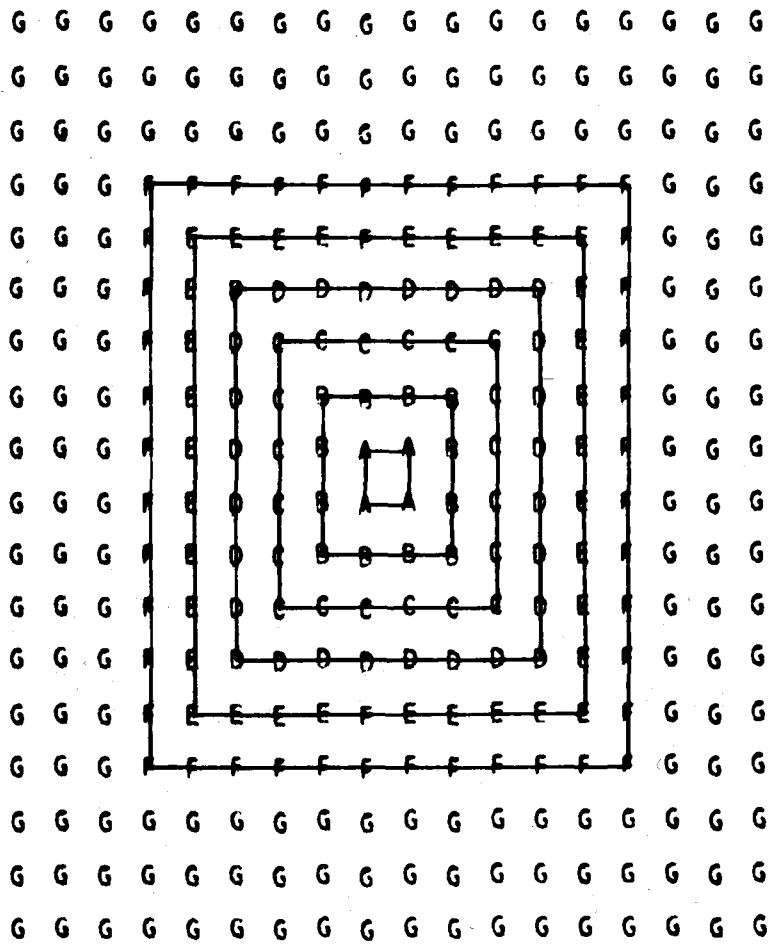


CONDUCTIVITY DISTRIBUTION (S/M) IN THE PLANE XOY

COORDINATE IN Z- AXIS = 0.75 (KM)

.....X

Y



SYMBOL	VALUE
A	0.16000E+01
B	0.30000E+01
C	0.60000E+01
D	0.16000E+00
E	0.50000E+00
F	0.16000E+01
G	0.50000E+01

GRID PARAMETERS

NUMBER OF NODES :

3890 NX NY NZ N3A N3B

NUMBER OF CELLS IN ANOM. REGION :

12 NYAN NZAN

NUMBER OF NODES IN ANOM. RES.

TOTAL NUMBER OF NODES

DISPLACEMENTS (KM) :

CX : 3.50 1.00 0.80 0.80 0.80 0.80 0.80 0.80 0.80 0.80  
 1.00 0.80 0.80 0.80 0.80 0.80 0.80 0.80 0.80 1.00  
 3.50

CY : 3.50 1.00 0.80 0.80 0.80 0.80 0.80 0.80 0.80 0.80  
 1.00 0.80 0.80 0.80 0.80 0.80 0.80 0.80 0.80 1.00  
 3.50

CZ : 7.00 2.00 1.50 1.50 25.00 25.00 25.00 25.00 25.00 5.00  
 5.00

COORDINATES OF NODES (KM) :

X : -14.50 -9.50 -6.00 -1.80 -4.20 -3.40 -2.60 -1.80 -1.80  
 -1.00 0.00 1.00 1.80 2.60 3.40 4.20 5.00 5.00  
 6.00 9.50 14.50

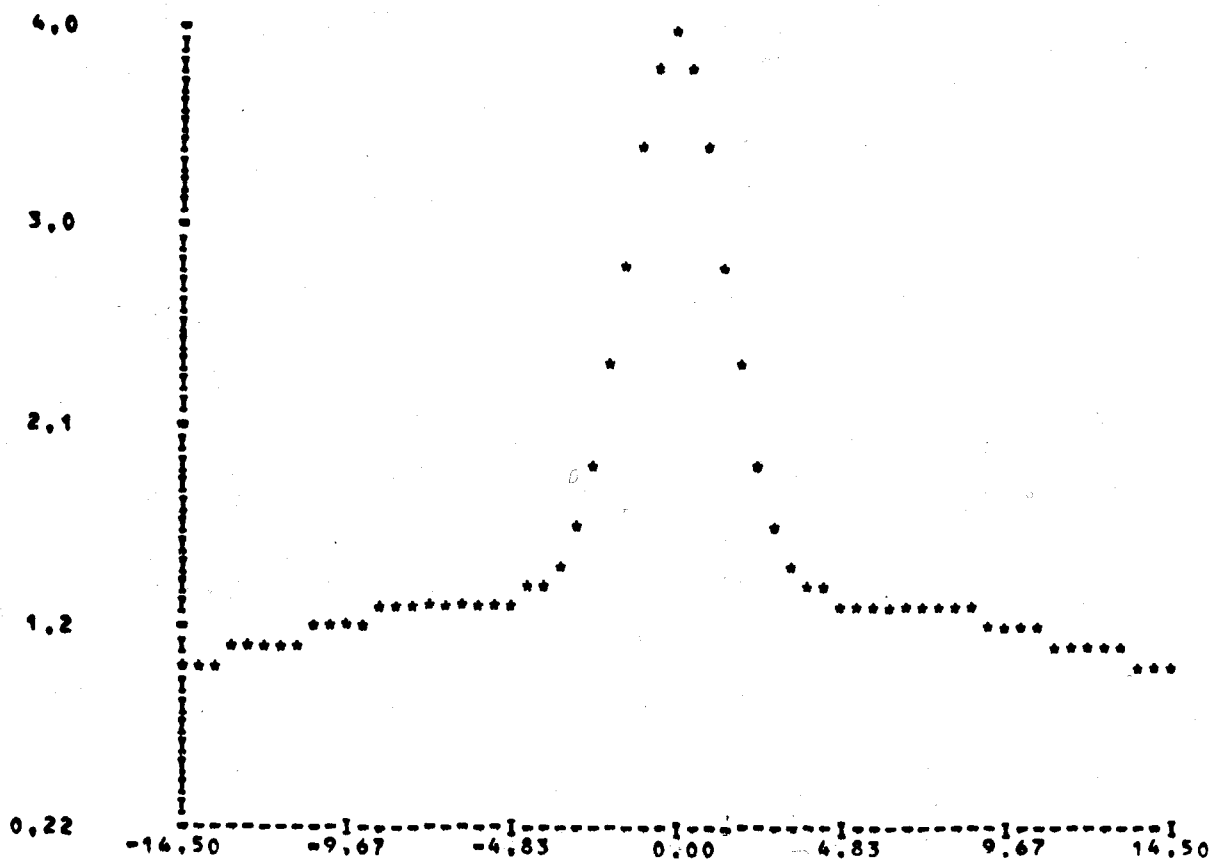
Y : -14.50 -9.50 -6.00 -3.00 -4.20 -3.40 -2.60 -1.80 -1.80  
 -1.00 0.00 1.00 1.80 2.60 3.40 4.20 5.00 5.00  
 6.00 9.50 14.50

Z : -19.00 -9.00 -2.00 0.0 1.50 3.00 28.00 53.00 53.00  
 52.00 63.00

ELECTRIC FIELD GRAPHS

```

-----
COMPONENT          | EY
KIND OF FIELD     | TOTL
FORM              | AMPL
PLANE             | XOY
COORD. OF PL.    | 0.0  KM
AXIS              | OX
    
```

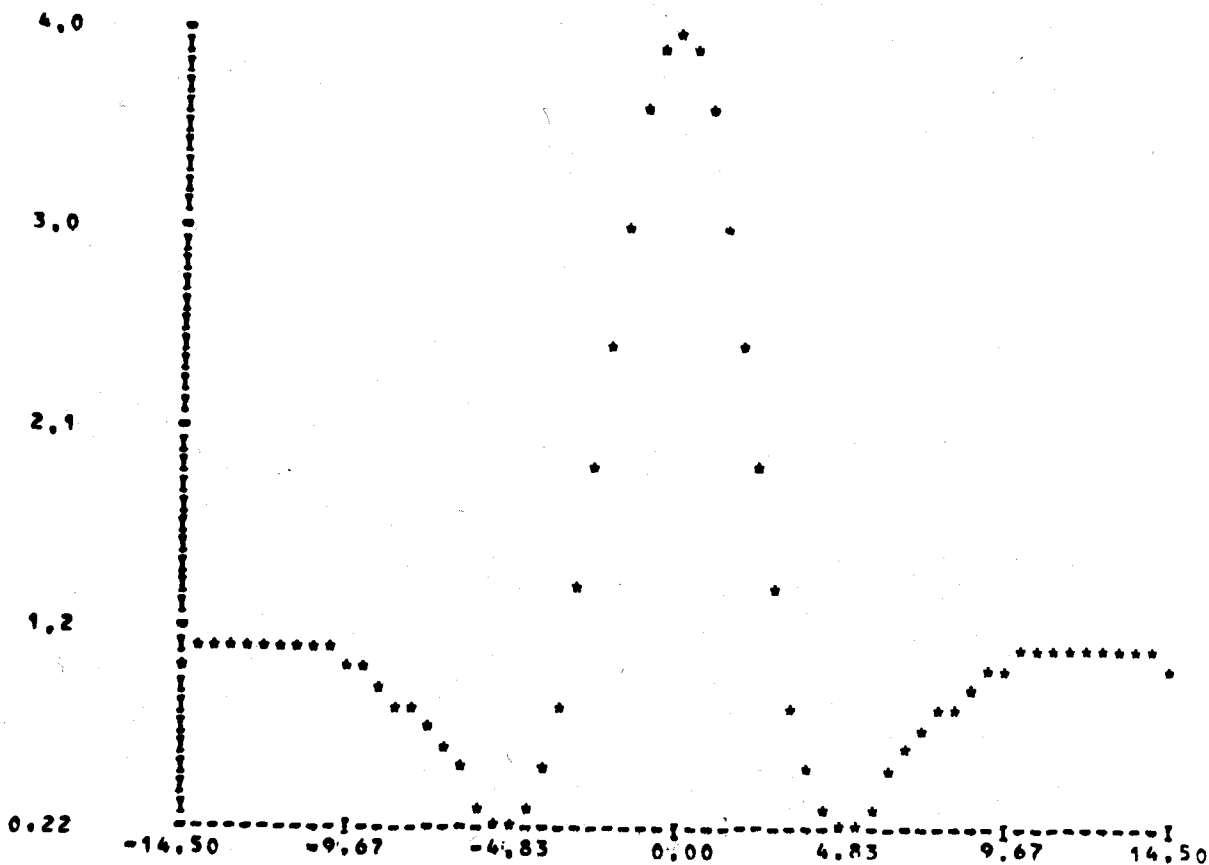


HORIZONTAL STEP= 0.48 (KM)  
 VERTICAL STEP= 0.94E-01

SYMBOL	NUMB. OF PROFILE	COORDINATE OF PROFILE
*	10	0.00

ELECTRIC FIELD GRAPHS

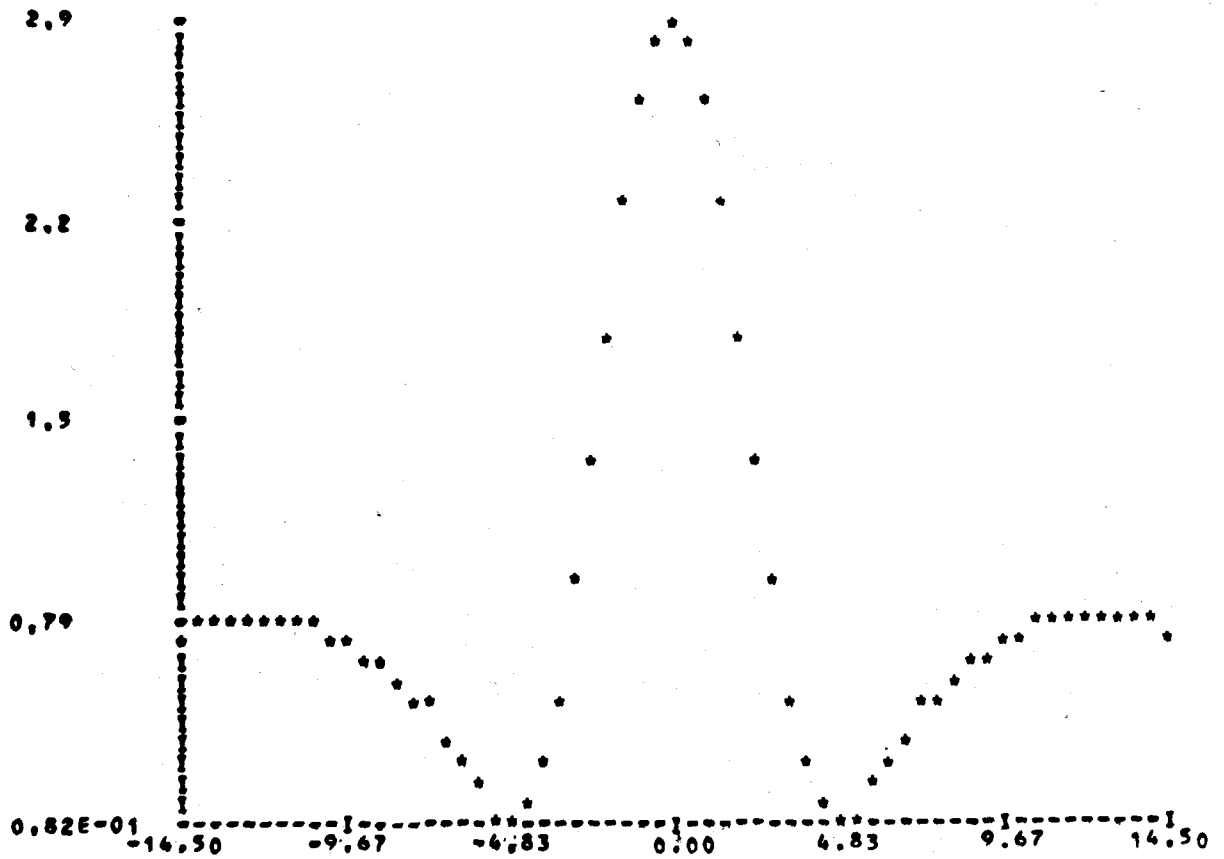
-----  
 COMPONENT | EY  
 KIND OF FIELD | TOTL  
 FORM | AMPL  
 PLANE | XOY  
 COORD. OF PL. | OY 0.0 KM  
 AXIS |



HORIZONTAL STEP= 0.48 (KM)  
 VERTICAL STEP= 0.94E-01

SYMBOL	NUMB. OF PROFILE	COORDINATE OF PROFILE
.	10	0.00

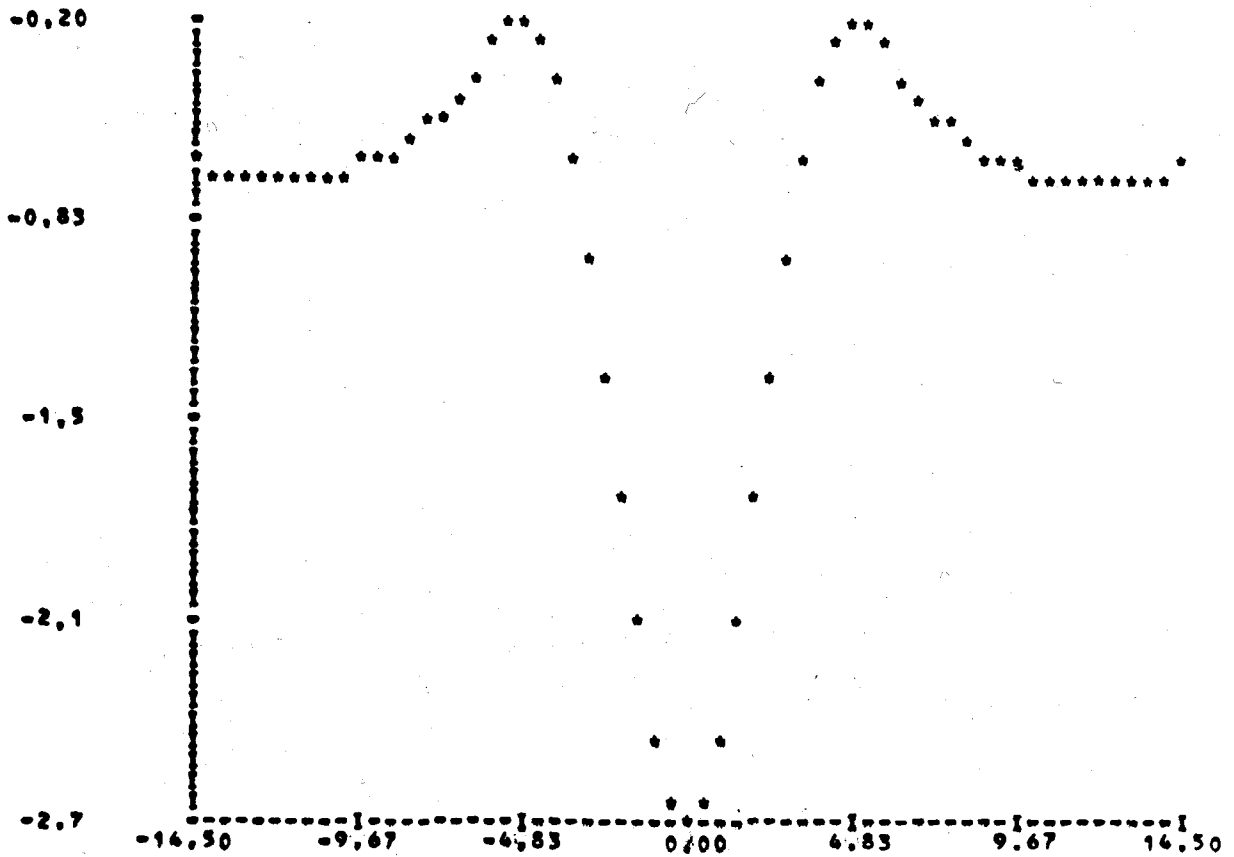
ELECTRIC FIELD GRAPHS  
 -----  
 COMPONENT | EY  
 KIND OF FIELD | TOTL  
 FORM | REAL  
 PLANE | XOY  
 COORD. OF PL. | OY 0.0 KM  
 AXIS |



HORIZONTAL STEP= 0.48 (KM)  
 VERTICAL STEP= 0.71E-01

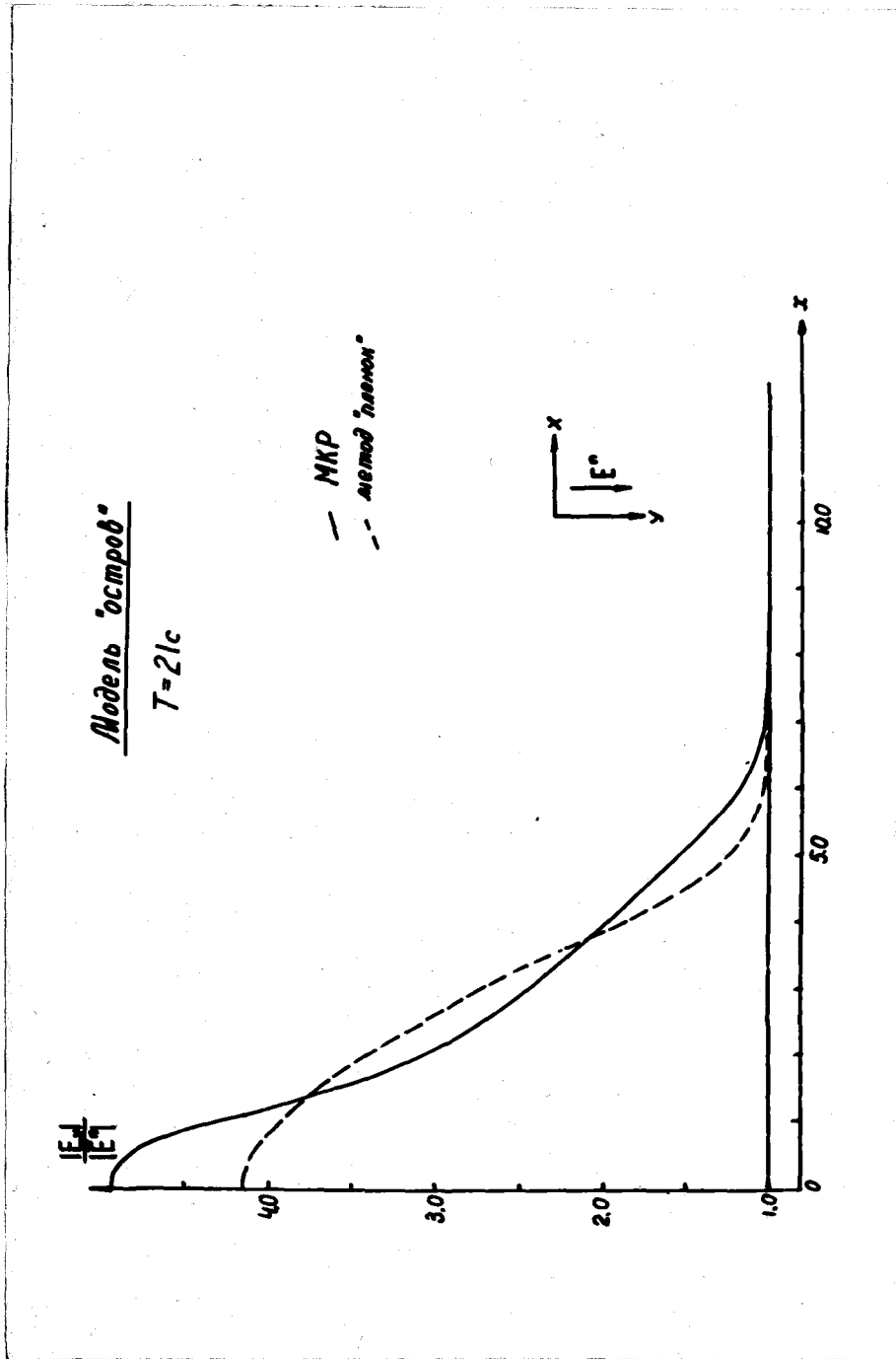
SYMBOL	NUMB. OF PROFILE	COORDINATE OF PROFILE
*	10	0.00

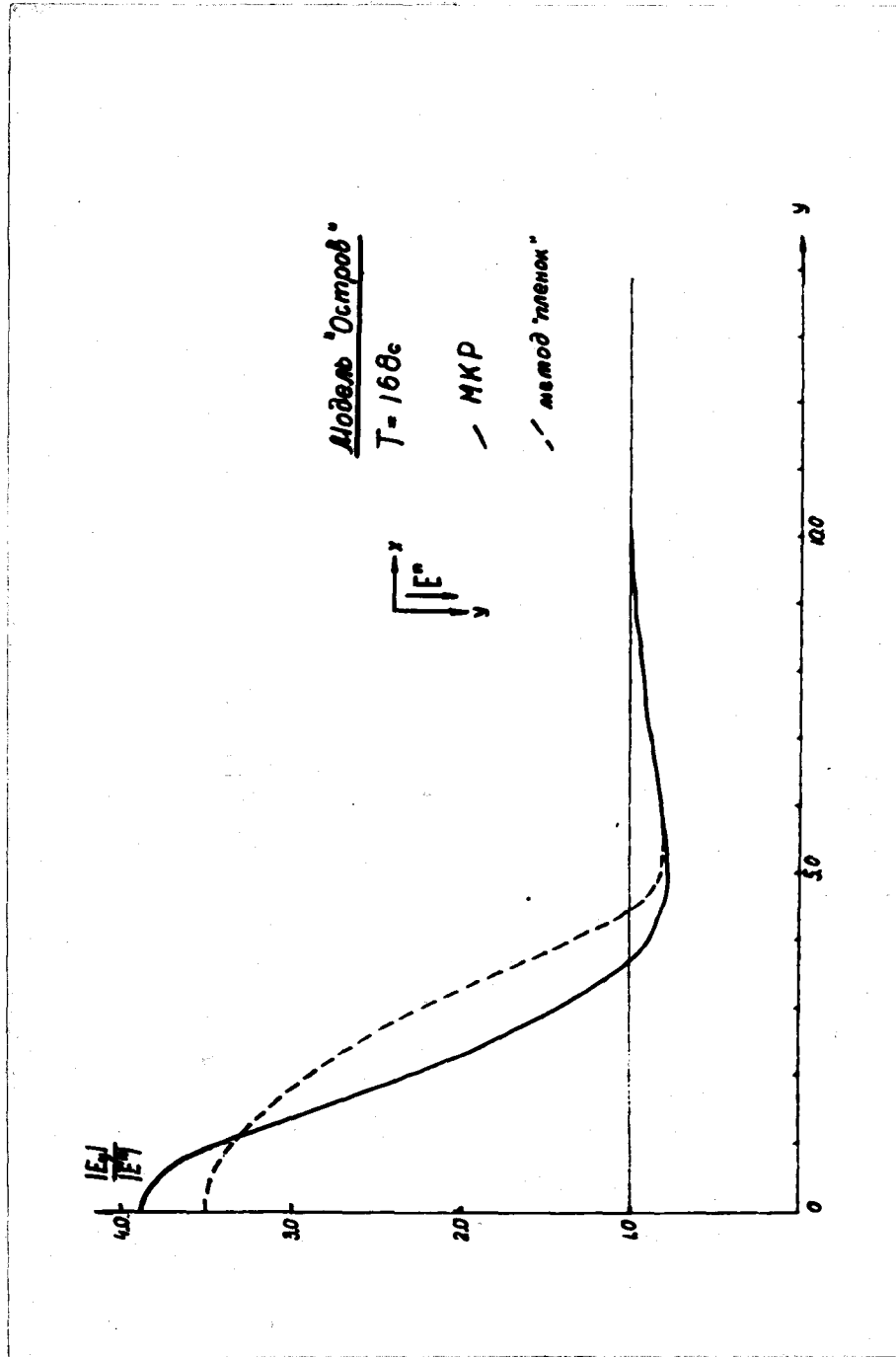
ELECTRIC FIELD GRAPHS  
 -----  
 COMPONENT | BY  
 KIND OF FIELD | TOTL  
 FORM | IMAG  
 PLANE | XOY  
 COORD. OF PL, | OY 0.0 KM  
 AXIS |



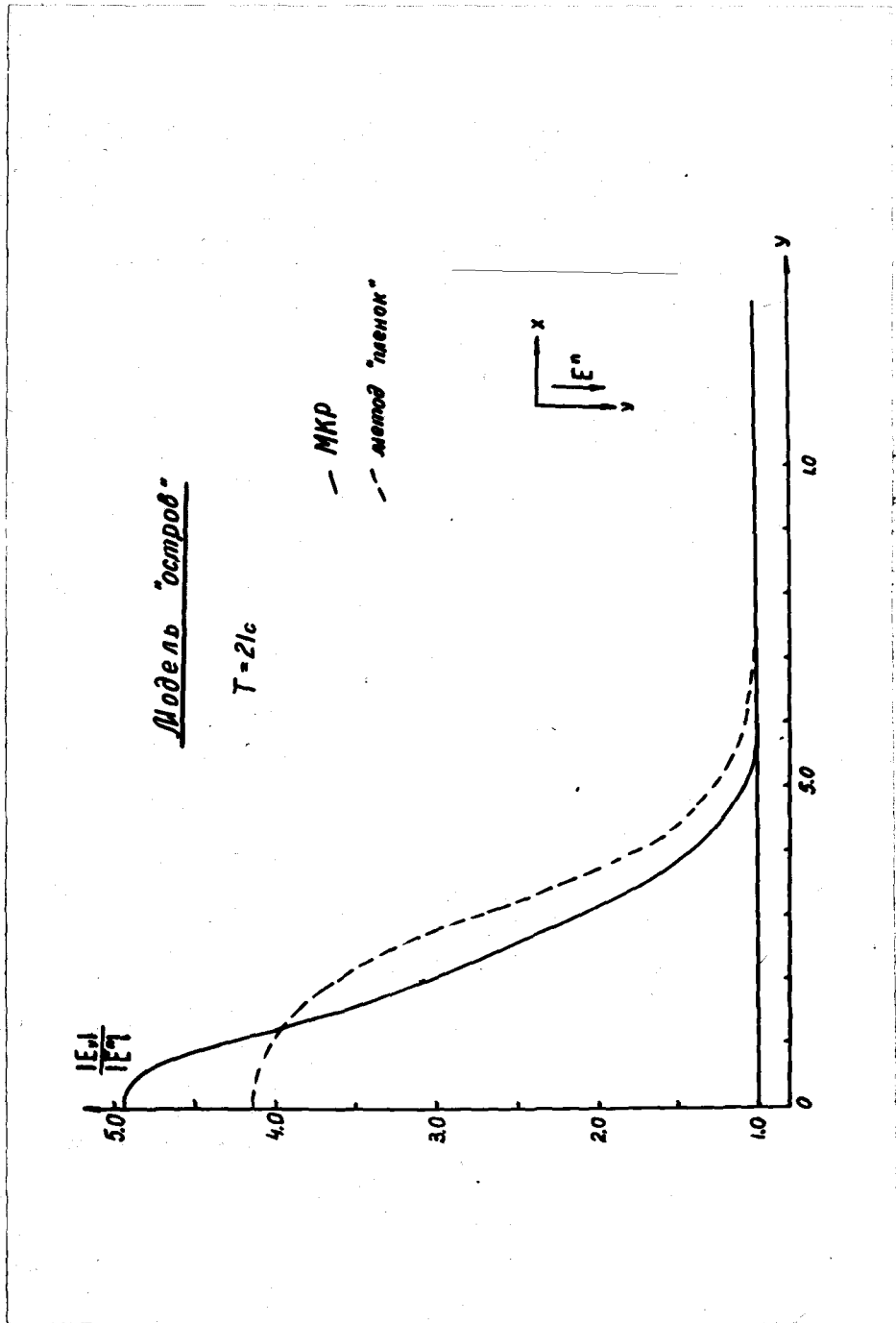
HORIZONTAL STEP= 0.48 (KM)  
 VERTICAL STEP= 0.62E-01

SYMBOL	NUMB. OF PROFILE	COORDINATE OF PROFILE
*	10	0.00





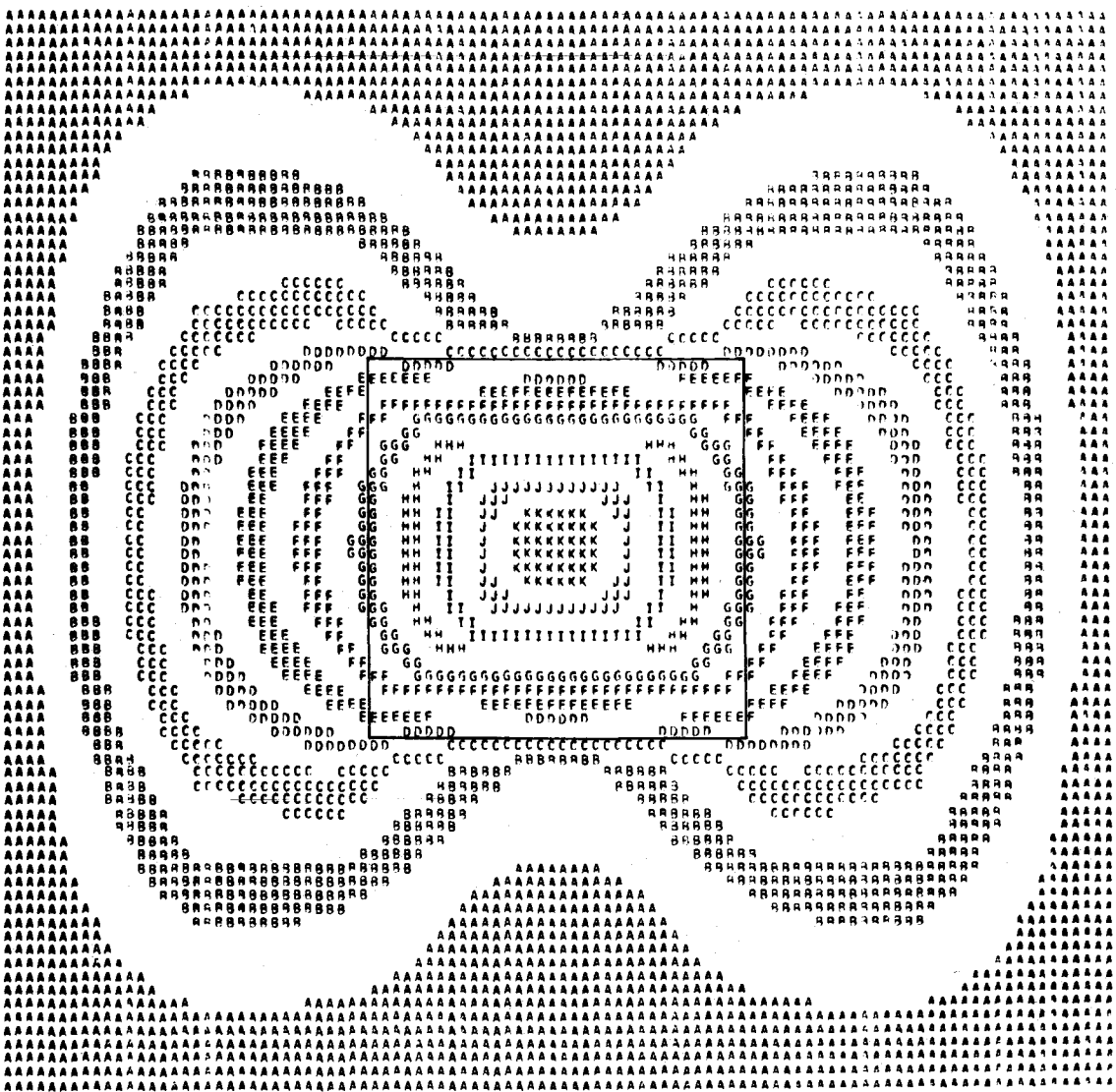




ELECTRIC FIELD ISOLINES

COMPONENT : XY  
KIND OF FIELD : AMRN  
FORM : IMAR  
PLANE : XOY  
COORD. OF PL. : 3.00 KM

HORIZONTAL AXIS: RANGE(-14.50 14.50), STEP= 0.29 (KM)  
VERTICAL AXIS: RANGE(-14.50 14.50), STEP= 0.37 (KM)



**Модель "ПРИЗМА в однородном полупространстве"**

GRID PARAMETERS

-----

NUMBER OF NODES :

NTOT	NX	NY	NZ	NZA	NZE
1701	7	9	27	10	16

NUMBER OF CELLS IN ANOM. REGION I

NXAN	NYAN	NZAN
1	2	8

NUMBER OF NODES IN ANOM. REG.

----- = 0,03  
TOTAL NUMBER OF NODES

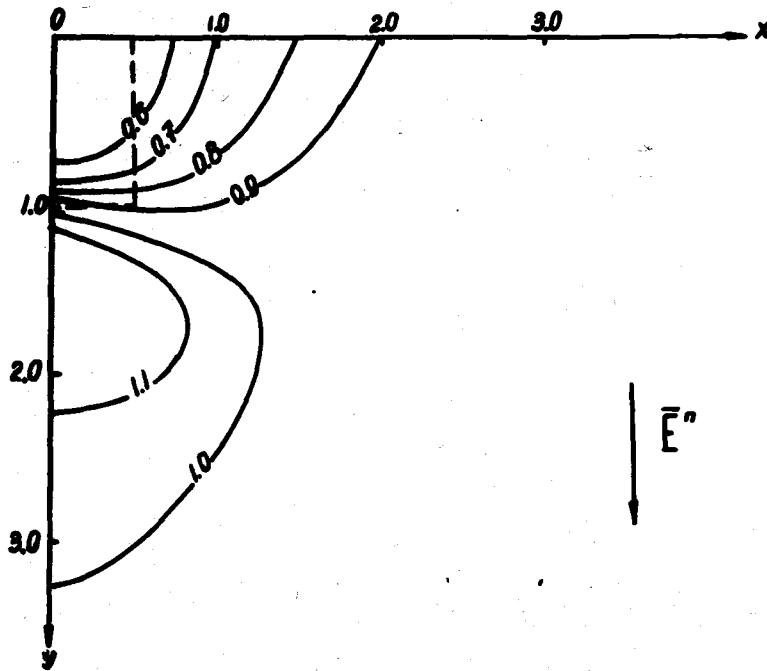
DISPLACEMENTS (KM) :

DX :							
0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50		
DY :							
0,50	0,50	0,50	0,50	1,00	2,00	2,00	2,00
DZ :							
2,00	1,50	1,00	0,80	0,60	0,40	0,30	0,20
0,10	0,10	0,10	0,10	0,05	0,05	0,05	0,10
0,20	0,20	0,60	0,40	0,40	0,60	0,40	1,00
3,00	10,00						

COORDINATES OF NODES (KM) :

X :							
0,0	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	
Y :							
0,0	0,50	1,00	1,50	2,00	3,00	3,00	7,00
9,00							
Z :							
-7,00	-5,00	-3,50	-2,50	-1,70	-1,10	-0,70	-0,40
-0,20	-0,10	0,0	0,10	0,20	0,25	0,30	0,35
0,45	0,65	0,85	1,45	1,85	2,25	2,65	3,05
6,05	7,05	17,05					

Модель ТН-1



Карта изолиний  $\frac{|E_y|}{|E^n|}$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Баранков И.С., Дмитриев В.И. Метод двумерных интегральных уравнений расчета магнитотеллурических полей в слоистой среде при наличии осесимметричной неоднородности. - В кн.: Вычислительные методы и программирование /Под ред. Дмитриева В.И., Ильинского А.С. - М.: Изд-во МГУ, 1982, т. 36, с. 14-27.
2. Бердичевский М.Н., Жданов М.С. Интерпретация аномалий переменного электромагнитного поля Земли. - М.: Недра, 1981.-328 с.
3. Вагин С.А., Ковтун А.А. Особенности амплитудной и фазовой аномалии магнитотеллурических параметров над трехмерными неоднородностями.-В кн.: Изучение глубинного строения земной коры и верхней мантии на акваториях морей и океанов электромагнитными методами. - М.: ИЗМИРАН, 1981, с. 155-160.
4. Вазов В., Форсайт Дж. Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных. - М.: Изд-во ИИ, 1963. - 487 с.
5. Варенцов И.М., Голубев Н.Г. Об одном алгоритме конечно-разностного моделирования электромагнитных полей. - В кн.: Фундаментальные проблемы морских электромагнитных исследований. - М.: ИЗМИРАН, 1980, с. 169-185.
6. Варенцов И.М., Голубев Н.Г. Применение асимптотических граничных условий в задачах моделирования ЭМП в неоднородных средах. - В кн.: Проблемы морских электромагнитных исследований. - М.: ИЗМИРАН, 1980, с. 77-95.
7. Варенцов И.М., Голубев Н.Г. Прямые и итерационные методы решения линейных систем в двумерных задачах моделирования электромагнитных полей. - В кн.: Математические методы в геоэлектрике. - М.: ИЗМИРАН, 1982, с. 27-46.
8. Дафф И.С. Обзор исследований по разреженным матрицам. -

ТИИЭР, 1977, т. 65, № 4, с. 5-46.

9. Дебабов А.С. О моделировании на ЭВМ электромагнитных полей в неоднородных средах. - ДАН СССР, 1980, т. 250, № 2, с. 326-331.
10. Дмитриев В.И. Электромагнитные поля в неоднородных средах. - М.: Изд-во МГУ, 1969 - 131 с.
11. Дмитриев В.И., Барашков И.С. Метод интегральных уравнений расчета магнитотеллурических полей в слоистой среде при наличии осесимметричной неоднородности. - В кн.: Электромагнитные зондирования. - М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 70.
12. Дмитриев В.И., Барышникова И.А., Захаров Е.В. Аномальные электромагнитные поля пластовых тел. - Л.: Недра, 1977. - 167 с.
13. Дмитриев В.И., Жданов М.С. Методы решения обратных задач геофизики. - В кн.: Вычислительная математика и техника в разведочной геофизике. - М.: Недра, 1982, с. 89-106.
14. Дмитриев В.И., Захаров Е.В. Метод решения задач электродинамики неоднородных сред. - ЖЭМ и МФ, 1970, т. 10, № 6, с. 1458-1464.
15. Дмитриев В.И., Пleshко В.Ю. К расчету электромагнитного поля в слоистой среде с локальной неоднородностью. - В кн.: Вычислительные методы и программирование/ Под ред. Дмитриева В.И., Ильинского А.С. - М.: Изд-во МГУ, 1982, т. 36, с. 27-35.
16. Дмитриев В.И., Фарзан Р.Х. Метод расчета аномального электромагнитного поля от локальной неоднородности. - В кн.: Математические модели электромагнитной разведки в геофизике/ Под ред. Дмитриева В.И., Катаи И. - Будапешт, 1980, с. 13-29.
17. Дрейзин Ю.А., Вьюрков В.В., Полюдов А.Н. Алгоритмы ускоренного расчета электромагнитных полей в горизонтально-слоистой

- проводящей среде. - В кн.: Электромагнитные зондирования. - М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 59.
18. Дрейзин Ю.А., Шамраев И.М., Селяндин Б.Д. Вопросы использования метода интегрирования по траекториям в задачах геоэлектрики. - В кн.: Электромагнитные зондирования. - М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 60.
19. Жданов М.С., Варенцов И.М., Голубев Н.Г. Обобщенные асимптотические краевые условия в двумерных задачах геоэлектрики. - М.: ИЗМИРАН, 1980, препринт № 35 (301).
20. Жданов М.С., Спичак В.В. Конечно-разностное моделирование электромагнитных полей над трехмерными геоэлектрическими неоднородностями. - В кн.: Проблемы морских электромагнитных исследований. - М.: 1980, с. 102-114.
21. Жданов М.С., Тихомирова О.Ю. Квазитрехмерное моделирование электромагнитных полей над поверхностными неоднородностями. - В кн.: Математические методы в геоэлектрике. - М.: ИЗМИРАН, 1982, с. 70-80.
22. Захаров Е.В., Ильин И.В. Интегральные представления электромагнитных полей в неоднородной слоистой среде. - Изв. АН СССР. Физика Земли, 1970, № 8, с. 62-71.
23. Зингер Б.Ш., Файнберг Э.Б. Электромагнитная индукция в неоднородной тонкой пленке. - М.: ИЗМИРАН, 1979, препринт № 13 (242).
24. Котерман М., Мартен Ж.-Л., Дегок П., Габийяр Р. Численное моделирование при электромагнитном дистанционном зондировании неоднородной Земли. - ТИИЭР, 1979, т. 67, № 7, с. 39-46.
25. Крон Г. Исследование сложных систем по частям - диакоптика. - М.: Наука, 1972.- 544 с.
26. Мардерфельд Б.Е., Билинский А.И., Кобзова В.М. Магнитотеллурическое зондирование над островами различной формы. - В кн.:



- Изучение глубинного строения земной коры и верхней мантии на акваториях морей и океанов электромагнитными методами. - М.: ИЗМИРАН, 1981, с. 80-84.
27. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. - 2-е изд., перераб., доп., - М.: Наука, 1980. - 536 с.
28. Миллер Е., Поджо А. Применение метода моментов в электромагнитных задачах. - В кн.: Численные методы теории дифракции. - М.: Мир, 1983, с. 9-46.
29. Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. - М.: Наука, 1978. - 376 с.
30. Поджо А., Миллер Е. Решение трехмерных задач рассеяния электромагнитных волн с помощью интегральных уравнений. - В кн.: Вычислительные методы в электродинамике/ Под ред. Р. Миттры. - М.: Мир, 1977, с. 177-309.
31. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. - М.: Мир, 1975, - 392 с.
32. Смагин С.И. Решение трехмерной задачи дифракции электромагнитных волн методом потенциалов. - В кн.: Численные методы в интерпретации геофизических наблюдений. - Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1980, с. 109-123.
33. Смагин С.И., Цецохо В.А. О численном решении интегральных уравнений с особенностями по замкнутым поверхностям. - Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР, 1982, препринт № 350.
34. Сравнительный анализ искажений электромагнитного поля, вызванных влиянием геологических структур в океанах и на континентах (отчет МГУ), 1982, Приложение 2.
35. Табаровский Л.А. Построение интегральных уравнений для задач дифракции методом вспомогательных источников. - Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1971, препринт.
36. Табаровский Л.А. Интегральные уравнения для квазитрехмерных

- осесимметричных задач дифракции. - Новосибирск: ИГиГ СО АН СССР, 1972, препринт.
37. Табаровский Л.А. Применение метода интегральных уравнений в задачах геоэлектрики. - Новосибирск: Наука, 1975. - 139 с.
38. Табаровский Л.А., Соколов В.П., Кривоуцкий В.С. Математическое моделирование электромагнитных полей в горизонтально-неоднородных средах. - В кн.: Методика и результаты комплексных геофизических исследований земной коры Сибири/ Под ред. Фотиади Э.Э. - Новосибирск: Изд-во ИГиГ СО АН СССР, 1981, с. 106-112.
39. Тетельбаум И.М., Тетельбаум Я.И. Модели прямой аналогии. - М.: Наука, 1979. - 383 с.
40. Уивер Дж. Т. Электромагнитная индукция в неоднородных приповерхностных тонких слоях Земли. - ТИИЭР, т. 67, № 7, 1979, с. 80-86.
41. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. - М.: Мир, 1978, т. I. - 547 с.
42. Юдин М.Н. Расчет магнитотеллурического поля методом сеток в трехмерно неоднородных средах. - В кн.: Проблемы морских электромагнитных исследований. - М.: 1980, с. 96-101.
43. Юдин М.Н. Алгоритм итерационного построения граничных условий при численном решении геолого-геофизических задач. - В кн.: Математические методы исследований в геологии. М.: 1981, вып. 6, с. 12-19.
44. Юдин М.Н. Трехмерное моделирование по методу конечных разностей. - В кн.: Электромагнитные зондирования. - М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 73.
45. Юдин М.Н. Альтернирующий метод численного решения прямых задач геоэлектрики. - В кн.: Математические методы в геоэлектрике. - М.: ИЗМИРАН, 1982, с. 47-52.

46. Ддин М.Н., Шнейдер В.А. О расчете магнитотеллурического поля в трехмерной среде методом сеток. - В кн.: Геомагнитные исследования, № 29, М.: Радио и связь, 1982, с. 84-90.
47. Brewitt-Taylor C.R., Johns P.B. On the construction and numerical solution of transmission-line and lumped network models of Maxwell's equations. - Int. J. Num. Meth. Engn., 1980, vol. 15, No 1, p. 13-30.
48. Brewitt-Taylor C.R., Weaver J.T. On the finite difference solution of two-dimensional induction problems.- Geophys. J.R. astr. Soc., 1976, vol. 47, No 2, p. 375-396.
49. Das U.C., Verma S.K. Numerical considerations on computing the EM response of three-dimensional inhomogeneities in a layered earth.- Geophys. J.R. astr., Soc., 1981, vol. 66, No 3, p. 733-740.
50. Dawson T.W., Weaver J.T. Three-dimensional induction in a non-uniform thin sheet at the surface of a uniformly conducting earth.- Geoph. J.R. astr. Soc., 1979, vol. 59, No 3, p. 445-462.
51. Feingold D.G., Varga R.S. Block diagonally dominant matrices and generalization of the Gerschgorin circle theorem.- Pacific J. Math., 1962, vol. 12, No 4, p. 1241-1250.
52. Harrington R.F. Time-harmonic electromagnetic fields.- N.Y.: 1961. - 229 p.
53. Hibbs R.D., Jones F.W. Electromagnetic induction in three-dimensional structures for various source fields.- J. Geomag. Geoelectr., 1978, vol. 30, No 1, p. 1-18.
54. Hohmann G.W. Three-dimensional induced polarization and electromagnetic modelling.- Geophysics, 1975, vol. 40, No 2, p. 309-324.

55. Hohmann G.W. Three-dimensional magnetotelluric interpretation.- In: Proc. of the Fourth Workshop on electromagnetic induction in the Earth and Moon, Murnau, Federal Republic of Germany, 1976.
56. Hohmann G.W. Three-Dimensional Integral Equation Modelling.- In: Proc. of Workshop on Modelling of Electrical and Electromagnetic Methods. University of California, Berkeley, California, 1978, p. 117-146.
57. Hvozدارa M. Electromagnetic induction of a three-dimensional conductivity inhomogeneity in the two-layered Earth. Part I. Theory.- *Studia Geophysica et Geodaetica*, 1981, vol. 25, No 2, p. 167-180.
58. Jones F.W. The perturbation of geomagnetic fields by two-dimensional and three-dimensional conductivity inhomogeneities.- *Pure and Applied Geophys.*, 1974, vol 112, No 5, p. 793-800.
59. Jones F.W. Three-Dimensional Electromagnetic Scattering.- In: Proc. of Workshop on Modelling of Electrical and Electromagnetic Methods. University of California. Berkeley, California, 1978, p . 100-105.
60. Jones F.W., Lokken J.E. Irregular coastline and channeling effects in three-dimensional geomagnetic perturbation models.- *Phys. Earth Planet. Inter.*, 1975, vol. 10, No 2, p. 140-150.
61. Jones F.W., Pascoe L.J. The perturbation of alternating geomagnetic fields by three-dimensional conductivity inhomogeneities.- *Geophys. J.R. astr. Soc.*, 1972, vol. 27, No 2, p. 479-485.
62. Jones F.W., Vozoff K. The calculation of magnetotelluric quantities for three-dimensional conductivity inhomogeneities.- *Geophysics*, 1978, vol. 43, No 6, p. 1167-1175.

63. Lam H.L., Jones F.W., Hibbs R.D. The response of perturbation and induction arrows to a three-dimensional buried anomaly.- *Geophysics*, 1982, vol. 47, No 1, p. 51-59.
64. Lee K.H., Pridmore D.F., Morrison H.F. A hybrid three-dimensional electromagnetic modelling scheme.- *Geophysics*, 1981, vol 46, No 5, p. 796-805.
65. Lines L.R., Jones F.W. The perturbation of alternating geomagnetic fields by three-dimensional island structures.- *Geophys. J.R. astr. Soc.*, 1973, vol. 32, No 2, p. 133-154.
66. Oshiro F.K., Mitzner K.M. Digital computer solution of three-dimensional scattering problems. - In: *Proc of IEEE International Antennas and Propagation Symposium*, Ann. Arbor, Michigan, 1967, p. 257-258.
67. Ostrowski A.M. On some metrical properties of operator matrices and matrices partitioned into blocks.- *J. Math. Anal. and Appl.*, 1961, vol. 2, No 2, p. 161-209.
68. Petrick B. Application of the Sinc-Galerkin Method to the Solution of the 3D source - 3D body electromagnetic scattering problem.- In: *Proc. of Workshop on Modelling of Electrical and Electromagnetic Methods*. University of California, Berkeley, California, 1978, p. 158-167.
69. Pridmore D.F. 3D-finite-element modelling of electric and electromagnetic data.- In: *Proc. of Workshop on Modelling of Electrical and Electromagnetic Methods*. University of California, Berkeley, California, 1978, p. 27-35.
70. Pridmore D.F., Hohmann G.W., Ward S.H., Sill W.R. An investigation of finite-element modelling for electrical and electromagnetic data in three dimensions.- *Geophysics*, 1981, vol. 46, No 7, p. 1009-1024.

71. Pridmore D.F., Lee K.H. A hybrid 3-D electromagnetic modelling scheme.- *Geophysics*, 1980, vol. 45, No 4, p. 553.
72. Raiche A.P. An integral equation approach to three-dimensional modelling.- *Geophys. J.R. astr. Soc.*, 1974, vol. 36, No 2, p. 363-376.
73. Romaswamy V., Jones F.W., Dosso H.W. and Nienaber W.  
A comparison of numerical, analogue model, and field-station vertical magnetic-fields for the Vancouver Island region.- *Phys. Earth and Planet. Inter.*, 1980, vol. 22, No 1, p. 60-67.
74. Reddy I.K., Rankin D., Phillips R.J. Three-dimensional modelling in magnetotelluric and magnetic variational sounding.- *Geophys. J.R. astr. Soc.*, 1977, vol. 51, No 2, p. 313-325.
75. Sheen W.L. EMMMMMA, a computer program for three dimensional modelling of airborne electromagnetic surveys.- In: *Proc. of Workshop on modelling of electrical and electromagnetic methods*. University of California, Berkeley, California, 1978, p. 53-61.
76. Stodt J.A., Hohmann G.W., Ting S.C. The telluric-magnetotelluric method in two- and three-dimensional environments.- *Geophysics*, 1981, vol. 46, No 8, p. 1137-1147.
77. Tai C.T. Dyadic Green's functions in electromagnetic theory.- Scranton: PA, Intext, 1971. - 246 p.
78. Ting S.C., Hohmann G.W. Integral equation modelling of three-dimensional magnetotelluric response.- *Geophysics*, 1981, vol. 46, No 2, p. 182-197.
79. Varga R.S. *Matrix Iterative Analysis*.- N.J.: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1962. - 322 p.
80. Verma S.K., Das U.C. Application of digital linear filter technique in 3D EM modelling.- In: *Proc. of the Sixth Work -*

shop on Electromagnetic induction in the Earth and Moon.  
University of Victoria, Victoria, British Columbia, Canada,  
1982.

81. Wachspress E.L. Iterative solution of elliptic systems. -  
- N.J.: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1966.- 299 p.
82. Weaver J.T., Brewitt-Taylor C.R. Improved boundary condi-  
tions for the numerical solution of E-polarization problems  
in geomagnetic induction.- Geophys. J.R. astr. Soc., 1978,  
vol. 54, No 2, p. 309-317.
83. Weidelt P. Electromagnetic induction in three-dimensional  
structures.- J. Geophys., 1975, vol. 41, No 1, p. 85-109.
84. Wilcox C. Spherical means and radiation conditions. - Arch.  
Ration. Mech. Anal., 1959, vol. 3, No 2, p. 133-148.
85. Wilkinson J.H. Error analysis of direct methods of matrix  
inversion. - J. Assoc. Comp. Mach., 1961, vol. 8, No 3, p.281-  
-330.
86. Zhdanov M.S., Golubev N.G., Spichak V.V. and Varentsov Iv.M.  
The construction of effective methods for electromagnetic  
modelling. - Geophys. J.R. astr. Soc., 1982, vol. 68, No 3,  
p. 589-607.