Е. Г. ЛАРЧЕНКО

МЕХАНИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ РАБОТ

ГЕОДЕЗИЗДАТ
· 1956 ·

Е. Г. ЛАРЧЕНКО

МЕХАНИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ РАБОТ

Допущено Главным управлением сельскохозяйственных вузов в качестве учебника для землеустроительных факультетов сельскохозяйственных вузов

Издательство геодезической литературы
МОСКВА • 1956

АННОТАЦИЯ

Книга является учебником по механизации вычислительных работ для студентов землеустроительных факультетов сельскохозяйственных вузов; она полезна также для инженеров и техников, выполняющих вычислительные работы.

В первых четырех главах книги изложены вопросы оценки точности результатов вычислений с приближенными числами и даны общие сведения о способах и средствах вычислений. В последующих пяти главах более подробно рассматриваются средства упрощения и механизации вычислительных работ, включая счетные логарифмические линейки, таблицы, номограммы и счетные машины, а также использование этих средств при обработке, главным образом, геодезических измерений.

Автор *Ефим Герасимович Ларченко*

Редактор А. В. Гордеев — Техн. редактор Г. М. Кузьмин
Редактор изд-ва А. И. Иноземцева — Корректор А. Д. Грудзинский

Т — 08687. Сдано в набор 9/V 1956 г. Подп. к печати 14/IX 1956 г.
Формат бум. $70\times108^1/_{16}$. Бум. л. $9^3/_8$ Печ. л. 18,75. Усл.-печ. л. 25,7. Уч.-изд. л. 22,3
В печ. л. 42 500 зн. Тираж 9 000 экз. Зак. 322 Цена 7 р. 80 к.+переплет 1 р.

Рижская картфабрика, Алтонавас 43.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Во всех отраслях народного хозяйства общей проблемой является механизация производственных операций с целью повышения производительности труда и ускорения процесса производства.

Почти каждому инженеру и технику приходится выполнять вычисления. В некоторых отраслях производства, например в землеустройстве и геодезии, на различные вычисления тратят до 30 и более процентов рабочего времени, поэтому естественно стремление к упрощению и механизации вычислительных работ.

Учебник написан на основе программы, утвержденной Министерством высшего образования СССР в мае 1954 г. Он представляет собой несколько расширенный курс лекций автора для студентов землеустроительного и геодезического факультетов. При составлении его использовано учебное пособие «Техника вычислений» (Геодезиздат, 1952), с учетом современных советских и зарубежных достижений и исследований автора в этой области.

В книге освещены вопросы точности инженерно-технических расчетов и современные средства механизации вычислительных работ, включая счетные логарифмические линейки, номограммы, различные таблицы, малые вычислительные машины, счетно-аналитические и электронные машины.

Центральное место в книге отведено рассмотрению наиболее распространенных в СССР малых вычислительных машин и рациональных приемов решения геодезических задач. О счетно-аналитических и электронных машинах даны лишь краткие сведения, необходимые для того, чтобы инженер-землеустроитель имел представление о достижениях в области вычислительной техники.

Автор учел рецензии на книгу «Техника вычислений», опубликованные в Сборнике статей по геодезии Главного управления геодезии и картографии (вып. 6 и 7, 1954) и в Астрономическом журнале (изд. Академии наук СССР, вып. 5, 1954), за которые рецензентам А. И. Буланову, А. В. Буткевичу и Л. С. Хренову автор выражает глубокую признательность. Учтены также рецензии на «Технику вычислений», опубликованные в 1954—1955 гг. в Китайской Народной Республике, Германской Демократической Республике и Чехословацкой Республике.

При составлении настоящей книги автор пользовался советами заслуженного деятеля науки и техники доктора технических наук профессора А. С. Чеботарева, за что выражает ему глубокую признательность.

Рукопись учебника прочли и дали свои замечания кандидат технических наук доцент А. В. Гордеев и доктор технических наук профессор

А. В. Маслов; главу «Счетные машины и применение их при вычислительных работах» просмотрели: старший инженер отдела механизации учета и вычислительных работ Политехнического музея Т. А. Бызов и сотрудники НИИ счетного машиностроения инженер З. В. Алферова и кандидат технических наук В. Н. Рязанкин, которым автор книги также выражает сердечную благодарность.

Автор считает своей обязанностью отметить труд рецензентов этой книги — кандидата технических наук доцента И. В. Зубрицкого и доктора технических наук профессора П. И. Шилова.

Е. Ларченко.

Апрель 1956 г.

ВВЕДЕНИЕ

Быстрый рост производительности труда в нашей стране является, прежде всего, результатом внедрения новой техники, а также результатом разработки новых рациональных способов и приемов работы на имеющихся машинах и приборах.

В настоящее время разработано много способов и приемов вычислений. Сконструированы и изготовлены различного рода счетные машины и во многом механизирована вычислительная работа, благодаря чему достигнуто значительное повышение производительности инженерно-технического труда.

Особенность инженерно-технических вычислений заключается в том, что в этих вычислениях приходится иметь дело с числами не точно, а лишь приближенно представляющими значение тех или иных величин. Для краткости эти числа в дальнейшем будем называть *приближенными*.

Приближенные числа получаются как при измерении величин с той или иной точностью, так и при округлении чисел. В результате действий над приближенными числами получают приближенные значения величин, имеющие ошибки (погрешности), вызванные ошибками в компонентах.

Рассмотрим такой пример. Пусть требуется по измеренным данным вычислить площадь прямоугольника

$$P = a \cdot h = 451{,}31\ м \cdot 100{,}01\ м = 45\ 135{,}5131\ м^2.$$

Однако хорошо известно, что величины a и h содержат ошибки измерений, и поэтому вычисленное по этим величинам значение площади P также будет иметь некоторую ошибку. Если значения величин a и h ошибочны каждая на $+0{,}01$ *м* (в действительности при измерении линий стальной лентой ошибки будут гораздо больше), то значение площади будет таким

$$P = 451{,}32 \cdot 100{,}02 = 45\ 141{,}0264\ м^2.$$

Сопоставляя первое и второе значения P, видим, что при выполнении подобных вычислений результат достаточно записать до целых квадратных метров, так как в таких произведениях неверны не только цифры, стоящие после запятой, но вызывают сомнение и целые квадратные метры. В нашем случае достаточно записать

$$P = 451{,}31 \cdot 100{,}01 = 45\ 141\ м^2.$$

Приведем еще такой пример. Пусть требуется найти значение величины q из выражения

$$q = \frac{435{,}21}{0{,}12},$$

в котором возможные ошибки в компонентах a и b равны 0,01. Произведя вычисление, получим

$$q = 3626{,}75.$$

Изменив значения a и b на 0,01, будем иметь

$$q = \frac{435{,}22}{0{,}11} = 3\,956{,}54.$$

Сопоставляя первое и второе значения q, видим, что частное имеет только одну верную цифру, и поэтому, оставляя одну запасную цифру, результат следует записать так:

$$q = \frac{435{,}21}{0{,}12} = 3{,}6 \cdot 10^3.$$

Этот же результат получим, если делимое округлим до трех знаков, а делитель оставим без изменения, т. е.

$$q = \frac{435}{0{,}12} = 3{,}6 \cdot 10^3.$$

Из этих примеров видим, что нет надобности удерживать все цифры при вычислениях с приближенными числами.

Между тем, можно привести много примеров, когда в погоне за мнимой точностью при вычислениях с приближенными числами оставляют все цифры, напрасно затрачивая время на выписывание ненужных цифр и вычисления с ними. Это важно потому, что при работе на автоматических вычислительных машинах при увеличении каждого из компонентов на один знак, производительность труда падает при умножении и делении примерно на 15% (см. § 82).

В ответах, полученных в результате арифметических действий с приближенными числами, накапливаются, вообще говоря, значительные ошибки, происходит потеря точности, зависящая от двух факторов:

а) влияния ошибок компонентов (исходных данных) и

б) влияния округлений чисел в процессе вычислений.

Кроме того, при решении некоторых задач, например, при решении систем линейных алгебраических уравнений, могут быть случаи исчезновения значащих цифр слева (цифр высших разрядов) при вычитании двух близких между собой значений тех или иных величин. В этих случаях относительная ошибка разности может увеличиться в несколько раз по сравнению с относительной ошибкой уменьшаемого и вычитаемого и при дальнейших вычислениях грубо исказить искомые результаты. Это обстоятельство всегда надо иметь в виду при планировании и выполнении вычислительных работ. Поэтому каждый вычислитель должен усвоить основные правила вычислений с приближенными числами (с достаточной, но не излишней точностью) и уметь оценить точность полученных результатов вычислений.

Производительность труда при решении вычислительных задач и точность решения этих задач главным образом зависят от средств вычислений, которые при этом могут быть использованы.

Средствами вычислений являются: 1) таблицы, 2) счетные приборы, в том числе различные логарифмические линейки; 3) графики и номограммы; 4) счетные машины.

Способ вычисления при помощи таблиц является самым древним и наиболее распространенным. В настоящее время, в связи с широким внедрением в производство счетных машин, особое значение имеют таблицы натуральных значений различных функций. Вычислитель должен уметь выбрать таблицы соответствующей точности, уметь проверить их и наиболее рационально использовать.

Самым распространенным счетным прибором является логарифмическая линейка, обладающая огромными возможностями. Многие вычисления на логарифмической линейке предельно механизированы и их можно выполнять быстрее, чем даже на автоматических машинах. Достигаемая на обыкновенной линейке точность (3—4 значащие цифры) во многих случаях достаточна при вычислениях, связанных с составлением различных проектов, в том числе землеустроительных.

Номограммы играют роль специальных счетных приспособлений. По существу без вычислений определяются по номограмме численные значения одних переменных по численным значениям других. Номограммы чрезвычайно выгодно применять при массовых расчетах с небольшой точностью (2—3 значащие цифры).

Наиболее мощным средством механизации вычислительных работ являются счетные машины.

В настоящее время в разных странах имеется большое количество различных типов счетных машин. К числу машин, наиболее широко применяемых для механизации учета и вычислительных работ, относятся:

1. *Машины с ручной установкой исходных данных:* суммирующие и вычислительные. Суммирующие машины предназначены главным образом для действий сложения и вычитания, а вычислительные — для действий умножения и деления.

На суммирующих машинах при выполнении действий с пятизначными числами при работе «слепым» методом можно делать до 2000 сложений в час с записью итогов через 10 слагаемых. На полуавтоматических и автоматических вычислительных машинах можно делать до 250—350 умножений и делений пятизначных чисел в час с записью каждого произведения или частного, состоящего из шести цифр.

Следует отметить, что при работе на малых клавишных автоматических машинах на запись результата требуется времени примерно столько же, сколько и на само вычисление. Так, например, при умножении пятизначных чисел на автоматической вычислительной машине САЛ IIс требуется времени:

на установку сомножителей	4,0	*сек.*
„ работу машины	4,5	„
„ запись шестизначного произведения	8,6	„

Поэтому для увеличения производительности труда необходимо стремиться к уменьшению числа промежуточных записей при вычислениях (см. § 82).

Малые клавишные вычислительные машины являются лучшим средством индивидуальных инженерно-технических расчетов. Эти машины в сравнении с рычажным арифмометром увеличивают производительность вычислительного труда в 2—4 раза в зависимости от типа машины и приемов работы на ней.

2. *Счетно-аналитические машины с автоматическим вводом исходных данных,* состоящие из комплекта 4—12 отдельных машин, куда входят: перфораторы, контрольники, сортировки, табулятор, вычислительный перфоратор и др. Счетно-аналитические машины применяются при массовых учетных работах и инженерно-технических расчетах. Применение

комплекта счетно-аналитических машин дает возможность увеличить производительность вычислительного труда, по сравнению с работой на арифмометре, в 10—20 раз, а по отдельным видам вычислений — в 100 раз и более.

3. *Быстродействующие вычислительные машины,* работающие на принципе электронной техники, могут складывать, вычитать, умножать и делить за доли секунды.

Такие машины применяются в настоящее время для решения разнообразных задач в различных областях, требующих большого объема вычислений, например, в астрономии, аэродинамике, геодезии, радиотехнике, статистике, экономике, химии, ядерной физике и других областях.

4. *Машины специального назначения,* предназначенные для решения каких-либо однотипных специальных задач. К ним можно, например, отнести интеграторы, служащие для решения дифференциальных уравнений; минимизаторы, предназначенные для решения систем уравнений под условием минимума суммы квадратов ошибок. Имеются специальные машины для решения систем линейных алгебраических уравнений; созданы электронные машины для решения систем с большим числом неизвестных. Например, имеется специальная электронная машина для решения систем, имеющих до 1200 линейных алгебраических уравнений.

При решении инженерно-технических задач производительность труда во многом зависит не только от типа счетной машины, но и от правильного выбора наиболее рациональных приемов работы на ней. Например, на обычном арифмометре можно определять неизвестные по формулам

$$x = \frac{\Sigma ap}{\Sigma p}; \quad y = \sqrt{\frac{a \cdot b \cdot c}{d}}$$

без записи промежуточных данных, значительно увеличивая этим производительность труда (см. § 70).

Из сказанного должно быть ясным, что предметом «механизации вычислительных работ» является:

1) *изучение основных правил вычислений с приближенными числами с достаточной, но не излишней точностью;*

2) *изучение главнейших способов и приемов вычислений;*

3) *изучение основных средств вычислений и способов рационального их использования.*

Глава I

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПРИБЛИЖЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ВЕЛИЧИН И ИХ ТОЧНОСТИ

§ 1. Источники происхождения приближенных чисел. Правила округления чисел

Результаты всяких измерений, в каких бы условиях они ни производились, всегда содержат те или иные ошибки. Это подтверждается хотя бы тем, что при повторных измерениях одной и той же величины, одним и тем же инструментом получаются, вообще говоря, различные результаты. С какой бы точностью мы ни производили измерения, результат не будет абсолютно точным; он будет иметь некоторое отклонение от точного значения величины, содержать некоторую ошибку.

В числах, получаемых в результате измерений, не всегда верна последняя и даже предпоследняя цифры. Например, при измерении линий стальной лентой мы записываем результаты до *сантиметров*, тогда как ошибка линий, в зависимости от их длины и характера местности, может достигать нескольких *дециметров*. Так, в приводимых ниже результатах пятикратного измерения линии стальной лентой:

372,63 *м*,
372,44 ,
372,52 ,
372,57 ,
372,48 ,

десятые и сотые доли метра вследствие ошибок измерений получились разными.

Принято в результатах измерений оставлять одну — две меняющиеся цифры. Другими словами, точность вычислений должна быть по крайней мере в десять раз выше точности измерений.

Вычисления необходимо вести так, чтобы в процессе их выполнения не вносить дополнительных погрешностей в результаты измерений и не искажать тем самым выводимые для измеренных величин наилучшие значения. В силу этого полученные из измерений числа вычислитель должен условно рассматривать, как имеющие все знаки верными, т. е. считать, что эти числа имеют ошибки не более половины единицы последнего знака, если нет других указаний относительно их точности. Производя действия над этими числами, вычислитель неизбежно должен прибегать к дальнейшим *округлениям* в промежуточных вычислениях. Кроме того, в вычисления будут вводиться округленные значения иррациональных постоянных (π, e), тригонометрических функций и т. п. В процессе вычислений эти ошибки округлений будут накапливаться и иногда в значительном размере, поэтому при вычислении удерживают один (или даже два) запасный знак, в зависимости от количества арифметических действий над приближенными числами, о чем будет сказано в главе II.

Чтобы не загромождать вычисления бесполезно большим числом цифр, округляют числа с таким расчетом, чтобы результат получился с достаточной, но вместе с тем не излишней точностью.

Правило округления чисел состоит в том, что при округлении следует последнюю цифру, которая остается, увеличивать на единицу, если отбрасываемая часть числа больше половины единицы последнего оставляемого разряда, и оставлять без изменения, если отбрасываемая часть числа меньше этой величины. Согласно этому правилу нужно при округлении числа π писать: 3,141 593; 3,141 59; 3,1416; 3,142; 3,14.

Если отбрасываемая часть числа равна половине единицы последнего оставляемого разряда, то при округлении его последнюю из остающихся цифр увеличивают на единицу, если она нечетная, и оставляют без изменения, если она четная. Следуя этому правилу, при округлении чисел 3,645 и 3,635 до сотых долей единицы нужно в обоих случаях писать 3,64, что выражает первое число с недостатком, а второе — с избытком. Иногда, в целях правильного дальнейшего округления, числа, оканчивающиеся цифрой 5, полученные с недостатком, отмечают точкой, а числа, полученные с избытком,— черточкой. Например, при округлении чисел 25,554 и 17,146 до двух десятичных знаков записывают $25{,}5\dot{5}$ и $17{,}1\bar{5}$. Иногда отмечают лишь те округленные числа, оканчивающиеся цифрой 5, которые получены с избытком.

Таким образом, особенность ошибок округления заключается в том, что эти ошибки по абсолютному значению не превышают половины единицы последнего оставленного знака данного числа.

§ 2. Абсолютные и относительные ошибки приближенных чисел

Условимся называть ошибкой (погрешностью) данного приближенного числа разность между точным числом и его приближенным значением, т. е.

$$x - a = \Delta, \tag{1}$$

где x — точное число, a — его приближенное значение и Δ — ошибка приближенного числа. Очевидно, что ошибка Δ может быть положительной, отрицательной или равна нулю. Абсолютное значение ошибки Δ будем называть для краткости *абсолютной ошибкой.*

Истинное значение величины x в большинстве случаев нам неизвестно, а значит неизвестна и ошибка Δ. Обычно в этих случаях приближенное число оценивают по его предельной ошибке, которую обозначают $\Delta_{пр}$. Абсолютное значение предельной ошибки будем называть для краткости *предельной абсолютной ошибкой.*

В округленных числах отброшенная цифра нам, как правило, неизвестна. В этих случаях неизвестно и значение абсолютной ошибки. Известно только то, что эта ошибка не превышает половины единицы последнего знака. Наибольшее значение ошибки округления, равное 0,5 единицы последнего знака округленного числа, назовем *предельной абсолютной ошибкой округления* и обозначим ее буквой α. Таким образом, $\Delta_{пр} = \alpha = 0{,}5$ единицы последнего знака. Например можно сказать, что округленные числа 68 и 4,3 имеют абсолютную предельную ошибку α соответственно 0,5 и 0,05.

Абсолютная ошибка обычно не характеризует точности результатов измерений или вычислений. Например, если абсолютная ошибка некоторой измеренной величины получилась 1 *см*, то еще нельзя сказать, хорошо или плохо произведено измерение, если не знать размера величины. Если, например, эта ошибка относится к длине линии на местности в 1000 *м*, то можно сказать, что измерение произведено достаточно точно; если же эта ошибка относится к длине линии на плане в 10 *см*, то, очевидно, измерение выполнено грубо. Поэтому для характеристики точности приближенных чисел употребляют *относительную ошибку* ε, которая представляет собой отношение ошибки Δ к значению самой величины

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{a}. \qquad (2)$$

Относительная ошибка определяется отношением двух именованных величин одной и той же размерности, поэтому она является отвлеченным или, как говорят, безразмерным числом.

В геодезической практике относительную ошибку выражают обычно аликвотной дробью (дробью, у которой числитель равен единице) и записывают

$$\varepsilon = \frac{1}{\frac{a}{\Delta}};$$

(знаменатель $\frac{a}{\Delta}$ выражают приближенно целым числом).

Чем меньше относительная ошибка, тем с большей точностью известен результат, поэтому в большинстве случаев критерием точности служит относительная ошибка. При помощи относительной ошибки обычно оценивается точность измерения линий, площадей, объемов; точность же углов оценивают при помощи абсолютной ошибки, так как ошибка измерения угла, вообще, не зависит от величины самого угла.

Аликвотные дроби наглядно выражают относительные ошибки, но иногда для удобства вычислений их обращают в десятичные дроби и выражают в процентах (%) или в промиллях (‰).

Так, относительные ошибки приближенных значений величины π будут:

$$\text{для } \pi = 3{,}1 \cdots \varepsilon = \frac{0{,}042}{3{,}1} = \frac{1}{75} \text{ или } 1{,}3\%;$$

$$\text{„} \quad \pi = 3{,}14 \cdots \varepsilon = \frac{0{,}0016}{3{,}14} = \frac{1}{1970} \text{ или } 0{,}05\%;$$

$$\text{„} \quad \pi = 3{,}142 \cdots \varepsilon = \frac{0{,}00041}{3{,}14} = \frac{1}{7600} \text{ или } 0{,}013\%.$$

В тех случаях, когда абсолютная ошибка неизвестна, а известно лишь ее предельное значение, вычисляют для характеристики точности результата предельную относительную ошибку как отношение предельной абсолютной ошибки к приближенному значению данной величины. Если, например, приближенные (округленные) числа 0,01 и 1,00 даны каждое с предельной абсолютной ошибкой в 0,005, то они имеют следующие предельные относительные ошибки:

$$\frac{0{,}005}{0{,}01}=\frac{0{,}5}{1} \text{ или } 50\%,$$

$$\frac{0{,}005}{1{,}00}=\frac{0{,}5}{100} \text{ или } 0{,}5\%.$$

Таким образом, число 1,00 в 100 раз относительно точнее числа 0,01.

Предельная относительная ошибка числа не зависит от места запятой. Так, например, предельная относительная ошибка чисел 685; 6,85; 0,685 одинакова и равна

$$\frac{0{,}5}{685}=\frac{0{,}005}{6{,}85}=\frac{0{,}0005}{0{,}685}=\frac{1}{1370} \text{ или } 0{,}073\% \text{ или } 0{,}73‰.$$

Таким образом, предельная относительная ошибка округленного числа равна половине единицы, разделенной на это число без запятой. Поэтому относительно точнее то число, которое больше, если его прочитать без запятой. Так, например, округленное число 6485,4 относительно точнее округленного числа 0,000 65 в 1000 раз.

§ 3. Различные способы оценки точности приближенных чисел

Точность приближенного числа может быть оценена следующими способами:

1) посредством вычисления границ возможных значений приближенного числа;

2) при помощи вычисления предельной абсолютной и предельной относительной ошибок приближенного числа;

3) подсчетом числа цифр, заслуживающих доверия;

4) определением средней квадратической ошибки приближенного числа и связанной с ней практически предельной ошибки.

Первый способ состоит в том, что вначале устанавливаются низшие и высшие *границы* компонентов, входящих в данную формулу, а затем по этим границам вычисляются низшие и высшие границы искомых величин. Поясним этот способ на примере.

Пример 1. Определить низшую и высшую границы произведения, считая компоненты округленными числами

$$x = 24 \cdot 1{,}44.$$

Низшая граница множимого равна $24 - 0{,}5 = 23{,}5$; высшая граница множимого будет $24 + 0{,}5 = 24{,}5$. Низшая и высшая границы множителя равны соответственно 1,435 и 1,445. Поэтому низшая и высшая границы произведения будут:

$$23{,}5 \cdot 1{,}435 = 33{,}7225,$$

$$24{,}5 \cdot 1{,}445 = 35{,}4025.$$

Следовательно, возможные значения x лежат в пределах

$$33{,}7225 \leqslant x \leqslant 35{,}4025.$$

При этом способе приближенное значение величины x можно получить как среднее арифметическое из низшей и высшей границ

$$x = \frac{33{,}7225 + 35{,}4025}{2} = 34{,}5625.$$

В полученном результате только первая цифра установлена твердо, вторая же имеет небольшие колебания, поэтому в ответе следует оставить только две цифры

$$x = 35,$$

так как остальные цифры произведения не заслуживают доверия.

Рассмотренный «способ границ» является строгим способом оценки точности приближенных чисел, но требует гораздо больше вычислений, чем другие способы и поэтому в геодезической практике обычно не применяется.

Второй способ оценки состоит в вычислении предельных абсолютных и относительных ошибок приближенного числа. При практическом применении этого способа используют теоремы о предельных ошибках алгебраической суммы, произведения, частного и т. д. В этих теоремах предполагается самое неблагоприятное стечение обстоятельств, при котором все ошибки компонентов имеют наибольшие значения, и не компенсируются (взаимно не погашаются). Это может привести к неверным выводам относительно точности найденного результата. По указанной причине этот способ в геодезической практике применяется редко.

Для приближенной характеристики точности результатов вычислений применяется способ *непосредственного подсчета числа цифр, заслуживающих доверия*, основанный на правилах, устанавливающих зависимость между числом точных цифр результата и числом точных цифр, имеющихся в компонентах. Не будучи строгим, этот способ все же заслуживает внимания, так как его применение не составляет почти никакого труда. Подробное изложение этого способа дается в § 4, 12 и 13.

В геодезической практике чаще всего точность приближенных чисел оценивают при помощи *средней квадратической ошибки* и связанной с ней предельной ошибки. Средняя квадратическая ошибка приближенного числа определяется по формуле

$$m = \pm\sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2}{n}} = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}, \tag{3}$$

где $\Delta_1, \ \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ — возможные значения ошибки приближенного числа с учетом их распределений (см. § 5—10), а n — число их.

Способ оценки точности результатов вычислений при помощи средней квадратической ошибки имеет то достоинство, что при установлении предельной ошибки результата вычислений он учитывает компенсацию ошибок компонентов, входящих в данную формулу. Это обстоятельство особенно сказывается при большом числе компонентов, и поэтому рассматриваемый способ целесообразно применять, как выяснится в дальнейшем (см. § 11 и 12), когда число компонентов больше трех.

§ 4. Характеристика точности приближенных чисел количеством верных, значащих цифр. Способы записи приближенных чисел

Значащими цифрами данного числа будем называть *все цифры, за исключением нулей слева до первой цифры, отличной от нуля, и нулей справа, стоящих вместо неизвестных цифр*. Например, следующие числа имеют такое количество значащих цифр:

180,65	5 значащих цифр;		
0,006 03	3	„	„ ;
6,003 04	6	„	„ ;
3,040	4	„	„ .

Нуль, стоящий в конце числа, может иметь двоякий смысл. Так в следующих двух записях цифра нуль имеет разный смысл:

а) 1 *га* = 10 000 *кв. м*;

б) на земном шаре в настоящее время живет 2 400 000 000 человек.

В первом случае мы имеем точное соотношение, и нули здесь являются значащими цифрами. Во втором случае нули поставлены взамен неизвестных цифр, и число имеет только две значащие цифры.

Во избежание путаницы не следует писать нули вместо неизвестных цифр; лучше употреблять словесное название или степень десяти (2,4 миллиарда или $2{,}4 \cdot 10^9$).

Для приближенной оценки точности округленных чисел пользуются способом подсчета числа верных значащих цифр, который позволяет оценить точность приближенных чисел по самому их начертанию. Например, округленное число 4,80 имеет три значащие цифры и ошибка его не больше 0,005; если же дано округленное число 4,8 и больше о нем ничего не известно, то можно лишь сказать, что оно имеет две значащие цифры и ошибка его не превышает 0,05.

По правильно записанным приближенным числам можно судить об их точности. Если, например, угол в 58° вычислен с точностью до минуты, он должен быть записан так: 58°00′; расстояние, вычисленное с точностью до 0,1 *м*, должно быть записано не 136,30, а 136,3 *м*.

Если абсолютное значение ошибки (погрешности) приближенного числа больше единицы последнего знака, но меньше 10 единиц, то говорят, что все цифры данного числа верны, кроме последней, которую называют сомнительной.

При вычислении *промежуточных* значений необходимо сохранять одну или две *запасные* цифры, в зависимости от сложности вычислений. Запасные цифры доверия не заслуживают и, чтобы не смешивать их с надежными цифрами, их обычно пишут в уменьшенном размере или отделяют от верных запятой. Например логарифмы синусов углов в триангуляции 2 класса записывают так: 9.901 0086,6; 9.960 2542,9 и т. д.

Сохранение запасных цифр при вычислении вызвано необходимостью получения результата с точностью грубейшего компонента, так как точность результата, вообще говоря, меньше точности компонента, имеющего наименьшее количество значащих цифр (см., например, § 12).

При записи чисел необходимо помнить, что в СССР принято отделять целую часть числа от дробной запятой, а характеристику логарифма от мантиссы точкой. Так, например, линейный коэффициент расширения стальных лент и логарифм этого коэффициента следует записать так

$$k = 0{,}000\,012\,3 = 1{,}23 \cdot 10^{-5}; \quad \lg k = 5.090_{-10}.$$

Огромное значение в технике вычислений имеет четкое написание цифр, так как неправильность подсчетов во многих случаях проистекает от небрежных записей (при небрежной записи цифр иногда принимают цифру 9 за 4, цифру 0 — за 6 и т. п.). Все вычисления должны вестись чернилами в определенных схемах без каких бы то ни было черновых записей.

При сложении и вычитании писать числа нужно так, чтобы цифры одного разряда приходились под соответствующими цифрами того же разряда во всех числах. В числах, состоящих из многих цифр, следует делать интервалы; например, число секунд в радиане и логарифм этого числа нужно записывать так:

$$\rho'' = \frac{180 \cdot 60 \cdot 60''}{\pi} = \frac{648\ 000''}{\pi} = 206\ 264'',8;$$

$$\lg \rho'' = 5.314\ 4251.$$

§ 5. Распределение ошибок округленных чисел

Ошибки округленных чисел, вообще говоря, являются случайными. Эти ошибки изменяются в пределах от —0,5 до +0,5 единицы последнего, оставленного после округления знака данного числа, причем количество ошибок в каждом интервале остается примерно одинаковым, если число ошибок значительно. Рассмотрим для примера такой опыт (табл. 1). В первой графе табл. 1 приведены интервалы ошибок, выраженные в единицах последнего знака, взятых из таблиц квадратных корней наугад чисел с пятью знаками и затем округленных до трех знаков. Всего взято 1000 чисел.

Во второй графе таблицы показано количество ошибок в каждом интервале или, как принято говорить, частоты значений ошибок Δ; в третьей графе показаны относительные частоты, представляющие отношение абсолютных частот к числу всех ошибок n.

Таблица 1

Граничные значения интервалов округления ошибок	Количество ошибок в интервале (частоты)	Относительные частоты	Средняя плотность на единицу интервала	Относительные плотности
1	2	3	4	5
— 0,5				
— 0,4	93	0,093	930	0,93
— 0,3	102	0,102	1020	1,02
— 0,2	100	0,100	1000	1,00
— 0,1	108	0,108	1080	1,08
0,0	103	0,103	1030	1,03
+ 0,1	100	0,100	1000	1,00
+ 0,2	103	0,103	1030	1,03
+ 0,3	103	0,103	1030	1,03
+ 0,4	98	0,098	980	0,98
+ 0,5	90	0,090	900	0,90
	1000	1,000		

Из табл. 1 видно, что ошибки обладают частотами, примерно одинаковыми для всех интервалов ошибок округлений. Теоретически установлено и опытным путем подтверждено, что при массовых испытаниях относительные частоты колеблются вблизи некоторого числа $P(A)$, называемого вероятностью случайного события A*.

В качестве математической вероятности события принято считать отношение $\frac{m}{n}$, где m — число случаев, благоприятствующих появлению события, а n — число всех равновозможных случаев.

Вероятность лежит в тех же границах, в которых может заключаться и относительная частота, т. е.

$$0 \leqslant P(A) \leqslant 1.$$

Относительная частота, найденная из большого числа повторных опытов, принимается за вероятность. Вероятность ошибки округления не зависит от величины самой ошибки и для принятого нами интервала (табл. 1) равна 0,1. Вероятность того, что ошибка округления числа

* Г. П. Боев. Теория вероятностей, М.—Л., Гостехиздат, 1950, стр. 20.

будет лежать между $-0{,}5$ и $+0{,}5$ единицы последнего знака округленного числа, как вероятность достоверного события, будет равна единице, т. е.

$$P(-0{,}5 \leqslant \Delta \leqslant +0{,}5) = 1.$$

Можно составить таблицу округления чисел в интервале от $-0{,}50$ до $+0{,}50$ через 0,01, тогда было бы не 10, а 100 интервалов. Если число ошибок, приходящихся на произвольно выбранную единицу ширины интервала, называемое средней *плотностью распределения,* будет одинаково, то такое распределение ошибок называют равномерным (табл. 1).

На основании рассмотренного опыта можно сказать, что ошибки округленных чисел являются случайными ошибками, подчиняющимися закону равномерного распределения.

В теоретических исследованиях рассматривают предел средней плотности при безграничном дроблении интервала и плотность вероятности выражают функцией

$$\varphi(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \leqslant X < x + \Delta x)}{\Delta x}. \qquad (4)$$

Плотность, выраженную равенством (4), называют теоретической плотностью вероятности. Из равенства (4) видно, что приближенно величина

$$\varphi(x)\,\Delta x = P(x \leqslant X < x + \Delta x)$$

выражает вероятность того, что случайная величина X будет находиться в пределах между x и $x + \Delta x$.

Пусть случайная величина Δ принимает все значения интервала ($a = -0{,}5$, $b = +0{,}5$) единицы последнего знака с одинаковой плотностью вероятности, выражаемой формулой

$$\varphi(\Delta) = C, \qquad (5)$$

где C — некоторое положительное число.

Из теории вероятностей известно, что вероятность

$$P(a \leqslant \Delta < b) = \int_a^b \varphi(\Delta)\,d\Delta. \qquad (6)$$

В данном случае будем иметь

$$P(-0{,}5 \leqslant \Delta \leqslant +0{,}5) = \int_a^b C\,d\Delta = C(b-a) = 1,$$

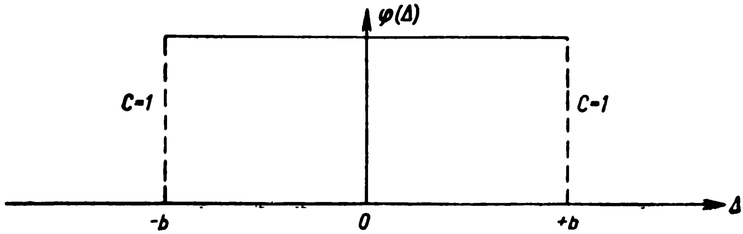
как вероятность достоверного события; отсюда

$$C = \frac{1}{b-a}. \qquad (7)$$

Так как для ошибок округленных чисел $a = -\alpha = -0{,}5$; $b = \alpha = +0{,}5$, то для плотности равномерного распределения вероятности в этом случае будем иметь

$$C = \varphi(\Delta) = \frac{1}{2\alpha} = 1. \qquad (8)$$

В последней графе табл. 1 приведены относительные плотности для каждого интервала ошибки, вычисленные как отношения относительной частоты к ширине интервала. В соответствии с формулой (8) график равномерного распределения вероятностей ошибок округления представлен на фиг. 1.



Фиг. 1. График распределения ошибок округления чисел

На фиг. 1 графически показано теоретическое распределение вероятностей ошибок округленных чисел; практически же распределение этих ошибок, как правило, весьма близко к теоретическому, что видно из последней графы табл. 1.

§ 6. Зависимость между предельной и средней квадратической ошибками округления

Ранее (§ 2) было установлено, что предельная абсолютная ошибка округления α равна 0,5 единицы последнего знака округленного числа. Следовательно, возможные значения ошибки округления лежат в интервале: $-0{,}5 = -\alpha \leqslant \Delta \leqslant +\alpha = +0{,}5$. Возьмем в этом интервале все значения ошибки, кратные величине $\sigma = \frac{\alpha}{k}$ (k — целое положительное число)

$$-k\sigma;\ -(k-1)\,\sigma;\cdots;\ -3\sigma;\ -2\sigma;\ -\sigma;\ 0;\ +\sigma;\ +2\sigma;\ +3\sigma;\cdots;\ +(k-1)\,\sigma;\ +k\sigma. \qquad (9)$$

Число всех значений в этом ряду равно $2k+1$. В частном случае, когда $k=5$, будем иметь следующий ряд возможных значений ошибки округления:

$$-0{,}5;\ -0{,}4;\ -0{,}3;\ -0{,}2;\ -0{,}1;\ 0;\ +0{,}1;+0{,}2;\ +0{,}3;\ +0{,}4;\ +0{,}5.$$

Так как ошибки округления равновероятны, т. е. все значения их в ряду встречаются одинаково часто, то для вычисления средней квадратической ошибки каждое значение можно взять один раз. Следовательно, согласно (3) средняя квадратическая ошибка округления

$$m = \pm\sqrt{\frac{\Sigma\Delta^2}{n}} = \pm\sqrt{\frac{2\,(0{,}1^2+0{,}2^2+0{,}3^2+0{,}4^2+0{,}5^2)}{11}} = \pm\,0{,}32$$

единицы последнего знака, где n — число взятых значений ошибки округления. Если при округлении отбрасывают не одну, а две цифры (от $-0{,}50$ до $+0{,}50$ через 0,01), то число ошибок будет не 11, а 101 и средняя квадратическая ошибка округления будет

$$m = \pm\,0{,}29 \text{ единицы последнего знака.}$$

Рассмотрим этот вопрос в общем виде.

Взяв среднее арифметическое из квадратов всех значений ошибки округления ряда (9), получим квадрат средней квадратической ошибки округления в виде

$$m^2 = \frac{2\left[(\sigma)^2 + (2\sigma)^2 + (3\sigma)^2 + \cdots + (k\sigma)^2\right]}{2k+1},$$

то есть

$$m^2 = 2\sigma^2 \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2}{2k+1}.$$

Известно, что

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

поэтому

$$m^2 = 2\sigma^2 \frac{k(k+1)(2k+1)}{(2k+1)\,6} = \frac{k^2\sigma^2(k+1)}{3k}.$$

Так как $\alpha = k\sigma$, то

$$m^2 = \frac{\alpha^2(k+1)}{3k} = \alpha^2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3k}\right),$$

или

$$m = \pm\alpha\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3k}}. \qquad (10)$$

При неограниченном возрастании k в пределе получим

$$m = \pm\frac{\alpha}{\sqrt{3}}. \qquad (11)$$

Так как α есть предельная абсолютная ошибка округления, равная 0,5 единицы последнего знака, то

$m = \pm\frac{0{,}5}{\sqrt{3}} \approx \pm 0{,}29 \approx \pm 0{,}3$ единицы последнего знака округленного числа.

Например, округленным числам 803,5; 608; 0,044 соответствуют средние квадратические ошибки округления: $\pm 0{,}03$; $\pm 0{,}3$; $\pm 0{,}0003$.

Формула (11) выведена для четного округленного числа. Если округленное число нечетное, то ряд значений ошибок имеет вид

$$-(k-1)\sigma;\ \cdots;\ -3\sigma;\ -2\sigma;\ -\sigma;\ 0;\ +\sigma;\ +2\sigma;\ +3\sigma;\ \cdots;\ +(k-1)\sigma,$$

т. е. в этом ряду отсутствуют предельные значения ошибки округления ($\pm k\sigma = \pm 0{,}5$ единицы последнего знака числа), так как они отнесены при округлении к четному числу. Легко видеть, что для этого случая зависимость между средней квадратической и предельной ошибками округления будет выражаться формулой:

$$m = \pm\alpha\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{3k}}. \qquad (12)$$

При неограниченном возрастании k

$$m = \pm\frac{\alpha}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом из изложенного в этом параграфе следует, что средняя квадратическая ошибка для четных и нечетных округленных чисел будет одинаковой.

Упражнения

1. Сколько значащих цифр имеют округленные числа: 0,3051; 30,51; 300,0; 300,32; 5,430 0.

2. Округлить до четырех верных значащих цифр следующие числа: 4,305 61; 8 300,04; 0,004 803 6.

3. Записать число e с тремя верными значащими цифрами и определить предельные абсолютную и относительную ошибки результата.

4. Округлить числа: 483,41; 841,56; 0,002 431; 5,034, исходя из того, что предельная относительная ошибка каждого из этих чисел 1 : 1000.

5. Вычислить относительную ошибку стороны квадрата координатной сетки, построенной линейкой Дробышева, если ее абсолютная ошибка 0,1 *мм*.

6. С какой абсолютной ошибкой можно определить экваториальный радиус Земли, если его относительная ошибка 0,05%.

7. С каким числом верных значащих цифр необходимо найти $\sqrt{0,1}$, чтобы его относительная ошибка не превышала 1%.

8. Пользуясь четырехзначными таблицами натуральных значений тригонометрических функций и считая углы безошибочными, определить предельные относительные ошибки $\sin 0°41'$; $\sin 40°41'$; $\sin 80°41'$, выразив их в аликвотных дробях и в процентах.

9. С какой абсолютной ошибкой необходимо определить коэффициент нитяного дальномера теодолита, чтобы его относительная ошибка не превысила 0,1%.

10. С какой абсолютной ошибкой необходимо определить длину 20-метровой ленты, чтобы относительная ошибка длины линии, вызванная ошибкой компарирования, не превышала $\frac{1}{5000}$.

Глава II

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ВЫЧИСЛЕНИЙ С ПРИБЛИЖЕННЫМИ ЧИСЛАМИ

§ 7. Общие замечания о распределении ошибок (погрешностей) в результатах вычислений

В § 5 отмечалось, что ошибки округленных чисел являются случайными величинами с равномерным распределением вероятностей с плотностью

$$\varphi(\Delta) = \frac{1}{2\alpha},$$

где α — абсолютное значение предельной ошибки округления, равное 0,5 единицы последнего знака.

Но если вероятности ошибок округления отдельных чисел подчиняются равномерному распределению, то вероятности ошибок сумм, разностей, произведений, частных и других результатов вычислений с округленными числами, как увидим ниже, приближенно подчиняются так называемому нормальному распределению, которое называют еще законом Гаусса.

Плотность вероятности нормального распределения выражается функцией

$$y_\Delta = \varphi(\Delta) = \frac{1}{m\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\Delta^2}{2m^2}}, \tag{13}$$

где m — средняя квадратическая ошибка, $\pi = 3{,}1416$, $e = 2{,}7183$.

Кривая нормального распределения, соответствующая уравнению (13) (фиг. 2), представляет собой колоколообразную кривую, асимптотически приближающуюся к оси абсцисс.

Эта кривая обладает следующими свойствами:

1) значения функции $\varphi(\Delta)$ при любых Δ являются положительными, и поэтому нормальная кривая расположена над осью абсцисс;

2) функция $\varphi(\Delta)$ является четной, и поэтому нормальная кривая симметрична относительно оси ординат;

3) $\varphi(\Delta) \to 0$ при $\Delta \to \pm\infty$, поэтому ось абсцисс является асимптотой для обеих ветвей нормальной кривой;

4) $\varphi(\Delta)$ имеет максимум при $\Delta = 0$;

5) точки перегиба нормальной кривой находятся вправо и влево от оси ординат на расстоянии, равном средней квадратической ошибке m;

в промежутках от $-m$ до $+m$ кривая выпукла, вне этого промежутка — вогнута (фиг. 2);

6) площадь, заключенная между осью абсцисс и асимптотически приближающейся к ней кривой, соответствует вероятности, значение которой равно единице*.

Ошибки результатов вычислений, подчиняющиеся нормальному распределению, обладают следующими свойствами:

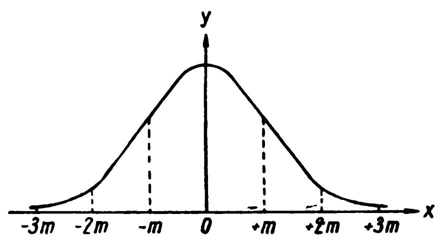
1. Положительные ошибки имеют ту же вероятность, как и равные им по абсолютной величине отрицательные. Это значит, что практически одинаковые по абсолютной величине ошибки, положительные и отрицательные, в одном и том же ряду встречаются примерно одинаково часто.

2. Чем больше абсолютная величина ошибки, тем меньше ее вероятность; практически это выражается в том, что, чем больше ошибка по абсолютной величине, тем реже она встречается.

3. Вероятность того, что ошибка результата вычислений не выйдет за пределы утроенной средней квадратической ошибки, близка к единице или точнее

$$P(-3m \leqslant \Delta_{\text{пр}} \leqslant +3m) = 0{,}997.$$

Необходимо подчеркнуть, что правило $3m$ для нахождения предельной ошибки верно лишь при условии нормального распределения ошибок результатов вычислений. Поэтому при оценке точности результатов вычислений необходимо знать закон распределения ошибок функций, по которым производятся вычисления.



Фиг. 2. Кривая нормального распределения ошибок

Рассмотрим пример распределения ошибок суммы округленных чисел, приведенный проф. А. С. Чеботаревым в статье «Некоторые вопросы оценки точности измерений»**.

Около 50 лет назад проф. А. С. Чеботарев вывел формулу, по которой можно получать теоретическое распределение суммы округленных чисел, и произвел следующий опыт. Из семизначных таблиц логарифмов наудачу брал логарифмы и затем округлял их до пяти знаков, каждый раз фиксируя величину и знак ошибки округления. Всего ошибок округления было найдено 4096. Затем были получены 512 сумм ошибок округления по 8 ошибок в каждой сумме***.

Для данного примера средняя квадратическая ошибка округления равна $m_8 = \frac{50}{\sqrt{3}}\sqrt{8} = 82$ единицы седьмого знака логарифма. Теоретически мыслимая предельная ошибка округления суммы восьми логарифмов равна

$$\alpha \cdot n = 50 \cdot 8 = 400 \text{ единицам седьмого знака логарифма.}$$

* П. И. Шилов. Способ наименьших квадратов, М., Геодезиздат, 1941, стр. 366.
** Труды ЦНИИГАиК, вып. 96, М., Геодезиздат, 1953.
*** В опыте были получены и другие суммы, но мы их здесь не приводим.

В табл. 2 приведено опытное число сумм ошибок, по 8 ошибок в каждой сумме, распределенных по интервалам через 80 единиц последнего знака семизначного логарифма, и число этих ошибок в соответствии с нормальным распределением.

Из табл. 2 видно, что распределение сумм ошибок округления подчиняется нормальному распределению и обладает теми свойствами, которые из него вытекают.

Таблица 2

Величина абсолютной суммы ошибок округления	Опытное число сумм ошибок	Число сумм ошибок по нормальному распределению
0— 80	339	340
81—160	151	146
161—240	21	24
241—320	1	2
321—400	0	0

Утроенная средняя квадратическая ошибка суммы восьми округленных чисел равна

$$3m_8 = 3 \cdot 82 = 246 \text{ единиц седьмого знака логарифма.}$$

Из таблицы видно, что из опытного числа сумм ошибок только одна ошибка выходит за пределы $3m$. Приведенные данные показывают, что за предельную ошибку суммы округленных чисел есть все основания брать утроенную среднюю квадратическую ошибку, т. е. считать

$$\Delta_{\text{пр}} = 3m.$$

Если распределение сумм случайных величин теоретически и опытным путем исследовано подробно, то этого нельзя сказать относительно ошибок произведений, частных и других результатов вычислений, с которыми приходится иметь дело в инженерной практике. Это объясняется тем, что задача разыскивания закона распределения в перечисленных случаях становится очень сложной и поэтому ее решают приближенно.

Чтобы приближенно решить вопрос о законе распределения ошибок произведений, частных и других комбинированных действий, мы поставили некоторые опыты (§ 8, 9 и 10), на основании которых пришли к выводу, что ошибки таких результатов вычислений приближенно подчиняются нормальному распределению и в этих случаях для оценки точности результатов вычислений можно пользоваться правилом $3m$.

§ 8. Распределение ошибок функции $q_i = \frac{a_i b_i}{c_i}$

Для простоты рассуждений будем считать числа a_i, b_i и c_i однородными* и взятыми с одинаковым числом десятичных знаков.

* Под однородными понимают числа примерно одинаковые по абсолютной величине.

Тогда теоретическое значение средней квадратической ошибки величины q_i будет выражаться равенством

$$m_{q_i} = m_i\sqrt{3} = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}\sqrt{3} = \alpha, \tag{14}$$

где α — предельная ошибка округления, равная 0,5 единицы последнего знака.

Для выяснения закона распределения ошибок случайной переменной q_i, когда компоненты a_i, b_i и c_i, по которым они вычисляются, подчиняются равномерному распределению, был поставлен такой опыт. Из таблиц наугад выбирались числа a_i, b_i, c_i и каждый раз вычислялась величина q_i. Для каждого числа наугад было взято 1010 значений и вычислено 1010 значений величин q_i. Затем выбранные числа a_i, b_i, c_i были округлены (путем уменьшения на два знака) и вновь были вычислены 1010 значений величины q_i Разность между двумя значениями q_i считалась истинной ошибкой

$$\Delta q_i = q_i - q'_i, \ (i = 1, 2, 3, \ldots, 1010).$$

По истинным ошибкам вычислена эмпирическая средняя квадратическая ошибка

$$m_{\text{эмп.}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{1010} \Delta q_i^2}{n}} = \pm\ 0{,}52 \text{ единицы последнего знака.}$$

Теоретическое значение средней квадратической ошибки, как видно из формулы (14), равно 0,50 единицы последнего знака. Несколько преувеличенное значение $m_{\text{эмп}}$ против теоретического можно отчасти объяснить тем, что при выборе из таблиц величин a_i, b_i, c_i последние не всегда были одинаковы по своему значению, что требовалось по условию, при котором получено $m_{q_i} = \alpha$.

Полученные из опыта 1010 ошибок распределены по интервалам (табл. 3). В этой таблице показано число ошибок для нормального распределения, соответствующего плотности вероятности, выражающейся формулой (13).

Таблица 3

Интервалы ошибок в единицах последнего знака	Опытное число ошибок Δq			Число ошибок по нормальному распределению k'	Разность
	+	—	всего ошибок k		$k - k'$
0,0–0,2	154	145	299	303	— 4
0,2–0,4	116	131	247	261	— 14
0,4–0,6	96	102	198	196	+ 2
0,6–0,8	64	69	133	126	+ 7
0,8–1,0	41	30	71	71	0
1,0–1,2	24	21	45	33	+ 12
1,2–1,4	8	5	13	14	— 1
1,4–1,6	0	2	2	5	— 3
1,6–1,8	0	1	1	1	0
1,8–2,0	1	0	1	0	+ 1
	504	506	1010	1010	0

Анализируя данные табл. 3, видим, что ошибки Δq подчиняются распределению, близкому к нормальному.

§ 9. Распределение ошибок функции $S_i = \sum_{j=1}^{\nu} a^2_{ij}$

Опыт был поставлен для изучения распределения ошибок выражения

$$S_i = a^2_{i1} + a^2_{i2} + a^2_{i3} + a^2_{i4} + a^2_{i5} + a^2_{i6} + a^2_{i7} + a^2_{i8} + a^2_{i9} + a^2_{i10}, \qquad (15)$$

где величины a наугад выбирались из таблиц и ошибки их считались случайными.

Всего из таблиц выбрано 3000 значений a с пятью значащими цифрами и вычислено 300 значений S, т. е. в формуле (15) $i = 1, 2, 3, \ldots, 300$. Затем числа a были округлены до трех значащих цифр и было вычислено 300 значений S'. Разность между двумя соответствующими значениями S и S' считалась истинной ошибкой

$$\Delta S_i = S_i - S'_i; \quad i = 1, 2, 3, \ \ldots, 300.$$

Средняя квадратическая ошибка S получилась равной

$$m_S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{300} \Delta S^2_i}{n}} = \pm 0{,}059.$$

Опытное число ошибок и число ошибок по соответствующему нормальному распределению показано в табл. 4.

Анализируя данные табл. 4, видим, что распределение ошибок сумм квадратов округленных чисел близко к нормальному. Этому можно дать следующее объяснение. Допустим, что числа a_{ij}, входящие в формулу (15), имеют ошибки округления Δa_{ij}. Тогда нетрудно видеть, что отдельная ошибка в сумме квадратов ν чисел равна

$$\Delta S_i = 2 \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij} \Delta a_{ij} + \sum_{j=1}^{\nu} (\Delta a_{ij})^2. \qquad (16)$$

Таблица 4

Интервалы ошибок	Опытное число ошибок ΔS			Число ошибок по нормальному распределению k'	Разность $k - k'$
	+	—	всего ошибок k		
0					
0,03	67	72	139	116	+ 23
0,06	52	43	95	90	+ 5
0,09	21	10	31	55	— 24
0,12	13	11	24	26	— 2
0,15	3	3	6	9	— 3
0,18	1	0	1	3	— 2
0,21	0	1	1	1	0
0,24	2	1	3	0	+ 3
	159	141	300	300	0

Учитывая это, можно написать

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left\{ 2 \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij} \Delta a_{ij} + \sum_{j=1}^{\nu} (\Delta a_{ij})^2 \right\}}{n} \to 0, \qquad (17)$$

$$n \to \infty,$$

что и подтверждается опытом.

Рассмотрим формулу (16) более подробно. Если ошибки Δa подчиняются равномерному распределению, то и линейная функция $2a\Delta a$ так же будет подчиняться равномерному распределению. Из теоремы Ляпунова А. М. известно, что при значительном числе слагаемых, независимо от того, каким законам распределения вероятностей подчиняются слагаемые, если нет сильно выделяющихся ошибок, сумма может рассматриваться, как случайная величина, приближенно подчиняющаяся нормальному распределению. Первый член формулы (16) будет приближенно подчиняться нормальному распределению, поскольку в этой сумме выполняется условие теоремы Ляпунова. Поэтому ошибки Δs (формулы 16) будут приближенно подчиняться нормальному распределению (второй член формулы (16) можно считать практически пренебрегаемым).

§ 10. Распределение ошибок функции $P_i = \sum_{j=1}^{v} a_{ij} b_{ij}$.

Опыт проводился для изучения распределения ошибок выражения

$$P_i = a_{i1} b_{i1} + a_{i2} b_{i2} + \ldots + a_{i10} b_{i10} \tag{18}$$

при $i = 1, 2, 3, \ldots, 200$.

Каждая величина P_i состояла из суммы 10 произведений чисел $a_{ij} b_{ij}$, выбранных из таблиц наугад с пятью значащими цифрами. Всего из таблиц было выбрано 2000 значений a и 2000 значений b, по которым вычислено 200 значений P. Затем числа a и b округлены до трех значащих цифр и вычислены 200 значений P'. Истинные ошибки сумм произведений вычислялись по формуле

$$\Delta P_i = P_i - P'_i; \quad i = 1, 2, 3, \ldots, 200.$$

Средняя квадратическая ошибка получилась равной

$$m_P = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{200} \Delta P_i^2}{n}} = \pm 1{,}85.$$

Таблица 5

Интервалы ошибок	Опытное число ошибок ΔP			Число ошибок с нормальным распределением k'	Разность $k - k'$
	+	—	всего ошибок k		
0					
0,5	23	23	46	43	+ 3
1,0	24	15	39	40	— 1
1,5	13	21	34	34	0
2,0	17	15	32	28	+ 4
2,5	7	10	17	21	— 4
3,0	8	5	13	14	— 1
3,5	5	1	6	9	— 3
4,0	2	3	5	5	0
4,5	1	2	3	3	0
5,0	1	1	2	2	0
5,5	2	0	2	1	+ 1
6,0	0	1	1	0	+ 1
	103	97	200	200	0

Опытное число ошибок ΔP и число ошибок по соответствующему нормальному распределению показано в табл. 5.

Из табл. 5 видно, что распределение ошибок сумм произведений весьма близко к нормальному распределению. В этом случае, как и ранее (см. § 9), можно написать

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \Delta P_i}{n} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{\nu} a_{ij}\,\Delta b_{ij} + \sum\limits_{j=1}^{\nu} b_{ij}\,\Delta a_{ij} + \sum\limits_{j=1}^{\nu} \Delta a_{ij}\,\Delta b_{ij}\right)}{n} \to 0. \qquad (19)$$

$$n \to \infty$$

На основании данных § 8—10 можно с полной определенностью говорить о малой вероятности больших ошибок (погрешностей) в результатах вычислений. Можно полагать, что ошибки результатов вычислений (сумм, произведений, частных, квадратов, квадратных корней, кубов и различных их комбинаций) приближенно подчиняются нормальному распределению. Исходя из этого, при оценке точности результатов вычислений за предельные ошибки мы будем считать утроенные средние квадратические ошибки, если число компонентов, входящих в данную формулу, будет больше трех.

§ 11. Оценка точности алгебраической суммы

Пусть дана алгебраическая сумма приближенных значений величин

$$S = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n,$$

имеющих ошибки

$$\Delta x_1,\ \Delta x_2,\ \Delta x_3, \ldots,\ \Delta x_n.$$

Ошибка (приращение) любой функции может быть получена, вообще говоря, приближенно по формуле полного дифференциала. Для данной функции S полный дифференциал точно равен приращению функции.

Взяв полный дифференциал суммы S

$$dS = dx_1 + dx_2 + dx_3 + \cdots + dx_n$$

и полагая дифференциалы равными ошибкам, получим

$$\Delta S = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 + \cdots + \Delta x_n. \qquad (20)$$

Следовательно, *ошибка алгебраической суммы равна алгебраической сумме ошибок слагаемых.*

Относительная ошибка алгебраической суммы приближенных величин будет

$$\varepsilon_S = \frac{\Delta S}{S} = \frac{[\Delta x]}{[x]}.$$

Так как истинные значения ошибок вообще неизвестны, то приходится иметь дело с предельными ошибками, для которых

$$|\Delta S|_{\text{пр}} = [|\Delta x|_{\text{пр}}],$$

т. е. предельная абсолютная ошибка алгебраической суммы равна сумме предельных абсолютных ошибок слагаемых.

Относительная предельная ошибка определяется по формуле

$$\varepsilon_{S_{\text{пр}}} = \frac{|\Delta S|_{\text{пр}}}{S} = \frac{[|\Delta x|_{\text{пр}}]}{[x]}.$$

Можно доказать, что относительная ошибка суммы любых положительных округленных чисел лежит в интервале, границами которого являются наибольшая и наименьшая из относительных ошибок слагаемых.

Необходимо особо отметить, что *при определении ошибок разности, когда вычитаемое близко по величине к уменьшаемому, малые ошибки в числах, входящих в вычисления, могут повлечь большую относительную ошибку результата.* Приведем пример. Определим относительную ошибку разности $R = \operatorname{tg} 10°01' - \sin 10°01'$.

Будем иметь

$$\operatorname{tg} 10^\circ 01' = 0{,}1766,$$
$$\sin 10^\circ 01' = 0{,}1739,$$
$$R = 0{,}0027.$$

Предельные относительные ошибки уменьшаемого и вычитаемого примерно одинаковы и равны $\frac{0,5}{1750} = \frac{1}{3500}$, а предельная относительная ошибка разности получилась равной $\frac{1}{27}$

По указанной причине следует избегать употребления формул, в которые входит разность близких между собой приближенных чисел; их следует или преобразовать, или близкие по значению уменьшаемое и вычитаемое брать с бóльшим числом верных значащих цифр, чтобы результат имел заданную точность.

Проанализируем отдельные примеры сложения приближенных чисел. Возьмем случай, когда *слагаемые имеют разное число десятичных знаков;* пусть необходимо сложить приближенные числа

$$\begin{array}{r} 60{,}4 \\ +\;\; 2{,}02 \\ 0{,}222 \\ 0{,}0462 \\ \hline S = 62{,}6882 \end{array}$$

Так как первое слагаемое имеет предельную ошибку округления $\pm 0{,}05$, то в полученной сумме уже сотые доли неверны. Записывать результат в таком виде не имеет смысла, поэтому три последние цифры суммы надо отбросить.

Для упрощения действия сложения все более точные слагаемые следует округлить, оставив (во избежание внесения в сумму новой ошибки округления) в каждом из них одну или две запасные цифры.

Для нашего примера будем иметь:

$$\begin{array}{r} 60{,}4 \\ +\;\; 2{,}02 \\ 0{,}22 \\ 0{,}05 \\ \hline S = 62{,}69 \end{array}$$

В этой сумме возможная абсолютная ошибка будет не больше $0{,}05 + 0{,}005 \cdot 3 = 0{,}065$.

Рассмотрим теперь сумму приближенных чисел, в которой *все слагаемые округлены до одного и того же знака.* Пусть необходимо сложить приближенные числа

$$\begin{array}{r} 20{,}31 \\ 18{,}02 \\ 19{,}01 \\ 20{,}02 \\ 20{,}01 \\ 20{,}52 \\ \hline S = 117{,}89 \end{array}$$

Если каждое слагаемое округлено с предельной ошибкой $\pm\alpha$, то согласно формуле (20) сумма n слагаемых будет иметь предельную ошибку

$$\Delta_{пр} = \pm an = \pm 0{,}005 \cdot 6 = \pm 0{,}03.$$

Предельная ошибка суммы, получаемая по формуле

$$\Delta_{пр} = \pm \alpha n, \qquad (21)$$

является теоретическим пределом и при большом числе слагаемых для практического использования применяется редко. Гораздо чаще в этом случае предельную ошибку определяют как утроенную среднюю квадратическую ошибку, так как ошибки сумм подчиняются нормальному распределению.

Воспользуемся формулами, известными из теории ошибок. Если имеем функцию $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, то средняя квадратическая ошибка функции определяется по формуле

$$m_S = \pm \sqrt{m^2_{x_1} + m^2_{x_2} + \cdots + m^2_{x_n}}. \qquad (22)$$

При $m_{x_1} = m_{x_2} = \cdots = m_{x_n} = m$ будем иметь

$$m_S = m\sqrt{n}. \qquad (23)$$

Если, кроме того, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — приближенные числа, полученные в результате округления, для которых, как мы знаем, $m = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{3}}$, то

$$m_S = \pm \frac{\alpha}{\sqrt{3}}\sqrt{n} = \pm \alpha \sqrt{\frac{n}{3}}. \qquad (24)$$

Относительная средняя квадратическая ошибка в этом случае будет

$$\frac{m_S}{S} = \pm \frac{\alpha}{S}\sqrt{\frac{n}{3}}. \qquad (25)$$

Если слагаемые близки по величине между собой и, следовательно,

$$S \approx nx,$$

то

$$\frac{m_S}{S} = \pm \frac{\alpha}{nx}\sqrt{\frac{n}{3}} = \pm \frac{\alpha}{x\sqrt{3n}}, \qquad (26)$$

т. е. *относительная средняя квадратическая ошибка суммы примерно равных слагаемых обратно пропорциональна корню квадратному из числа слагаемых.*

Средняя квадратическая ошибка суммы приближенных чисел ($S = 117{,}89$), приведенной выше, согласно формуле (24) выразится так:

$$m_S = \pm 0{,}005\sqrt{\frac{6}{3}} = \pm 0{,}007,$$

а ее относительная средняя квадратическая ошибка согласно формуле (26) будет

$$\frac{m_S}{S} = \pm \frac{0{,}005}{20\sqrt{18}} = \pm \frac{1}{17\,000} \text{ или } 0{,}06\%.$$

За x в данном выражении принято его приближенное значение, равное 20.

Считая за предельную ошибку суммы утроенную среднюю квадратическую ошибку, можно написать

$$(\Delta S)_{\text{пр}} = 3m_S = 3\alpha\sqrt{\frac{n}{3}} = \alpha\sqrt{3n}\,. \tag{27}$$

Разделив (21) на (27), получим

$$\frac{\Delta_{\text{пр}}}{(\Delta S)_{\text{пр}}} = \frac{\alpha n}{\alpha\sqrt{3n}} = \sqrt{\frac{n}{3}},$$

откуда

$$\Delta_{\text{пр}} = (\Delta S)_{\text{пр}}\sqrt{\frac{n}{3}}, \tag{28}$$

Из формулы (28) видно, что при $n = 3$ предельная ошибка $\Delta_{\text{пр}} = (\Delta S)_{\text{пр}}$; при $n = 12$ она в два раза больше $(\Delta S)_{\text{пр}}$. Очевидно, чем больше слагаемых, тем больше будет расхождение между предельными ошибками, вычисленными по формулам (21) и (27).

Учитывая, что ошибки сумм n округленных чисел при $n > 3$ приближенно подчиняются нормальному распределению, можно с вероятностью, близкой к единице, предельную ошибку суммы приближенных чисел вычислять по формуле (27). При $n < 3$ предельную ошибку суммы приближенных чисел следует вычислять по формуле (21).

§ 12. Оценка точности произведения и частного

Пусть дано выражение

$$p = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n\,.$$

Натуральный логарифм этого произведения равен

$$\ln p = \ln x_1 + \ln x_2 + \ln x_3 + \cdots + \ln x_n\,.$$

Чтобы определить относительную ошибку суммы, найдем полный дифференциал $\ln p$ и заменим дифференциалы ошибками

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta x_1}{x_1} + \frac{\Delta x_2}{x_2} + \frac{\Delta x_3}{x_3} + \cdots + \frac{\Delta x_n}{x_n}. \tag{29}$$

Отсюда видно, что *относительная ошибка произведения равна алгебраической сумме относительных ошибок отдельных сомножителей.*

Если вместо истинных значений ошибок Δx в формулу (29) подставим предельные ошибки и возьмем самый неблагоприятный случай, когда слагаемые имеют один и тот же знак, то получим формулу для предельной относительной ошибки произведения

$$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{\text{пр}} = \left|\frac{\Delta x'_1}{x_1}\right| + \left|\frac{\Delta x'_2}{x_2}\right| + \cdots + \left|\frac{\Delta x'_n}{x_n}\right|, \tag{30}$$

где $\Delta x'_1$, $\Delta x'_2$, . . . , $\Delta x'_n$ — предельные ошибки сомножителей.

Таким образом, *предельная относительная ошибка произведения нескольких приближенных чисел равна сумме предельных относительных ошибок сомножителей.*

Остановимся теперь на вопросе определения числа верных значащих цифр в произведении округленных чисел. Сначала разберем этот вопрос на отдельных примерах.

Пусть дано произведение двух приближенных (округленных) чисел $p = 43{,}4 \cdot 0{,}403 = 17{,}4902$. Требуется определить предельные относительную и абсолютную ошибки произведения. Согласно формуле (30) напишем

$$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{\text{пр}}=\frac{0,5}{434}+\frac{0,5}{403}\approx\frac{1}{400}.$$

Отсюда предельная абсолютная ошибка произведения равна

$$|\Delta p|_{\text{пр}}=\frac{p}{400}=\frac{17,5}{400}=0,04.$$

Таким образом, уже четвертая цифра произведения может быть ошибочна на 4 единицы, и получение остальных цифр не имеет никакого смысла. *В произведении получилось три верных значащих цифры, т. е. столько, сколько их есть в каждом из сомножителей.* Оставляя одну запасную цифру, следует наше произведение записать так:

$$p=43,4\cdot 0,403=17,49.$$

Возьмем теперь пример с разным числом значащих цифр. Пусть дано произведение двух приближенных чисел

$$p=603,21\cdot 0,32=193,0272.$$

Предельная относительная ошибка произведения равна

$$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{\text{пр}}=\frac{0,5}{60\,321}+\frac{0,5}{32}\approx\frac{1}{60},$$

а предельная абсолютная ошибка произведения

$$|\Delta p|_{\text{пр}}=\frac{p}{60}=\frac{193}{60}=3,2.$$

Значит, в данном примере *в произведении получилось только две верных значащих цифры, т. е. столько, сколько их есть в числе с меньшим количеством значащих цифр.*

Можно доказать, что в общем случае в результате вычислений будет не больше (меньше может быть) верных значащих цифр, чем их имеется в грубейшем компоненте, считая грубейшим тот, который меньше, если его прочитать без запятой. Поэтому в результате вычислений следует сохранять столько значащих цифр, сколько их имеет приближенный компонент с наименьшим числом значащих цифр, или оставлять еще одну запасную цифру.

Количество верных значащих цифр в произведении приближенных чисел можно также установить, исходя из следующих элементарных рассуждений. Пусть необходимо найти произведение двух приближенных (округленных) чисел

$$p=2,3212\cdot 0,34.$$

Данные сомножители приближенны: они могут иметь другие значащие цифры вправо, которые нам неизвестны. Поставим вместо неизвестных цифр знаки вопросов и представим умножение в следующем виде:

$$\begin{array}{r|l}
 & 2,3212?\\
 & \;0,34?\\
\hline
 & ??????\\
9 & 2848?\\
69 & 636?\\
\hline
0,78 & 9208??
\end{array}$$

Все цифры, находящиеся вправо от проведенной вертикальной черты, складываются с вопросами, т. е. неизвестными нам цифрами. Таким образом, и в этом случае в результате будет верных значащих цифр не больше двух, т. е. не больше, чем их имеется в грубейшем компоненте. Пользование цифрами, стоящими направо от вертикальной черты, вообще говоря, излишне, а следовательно, и вычисление их представляет излишнюю работу. Этой ненужной вычислительной работы можно избежать, если более точные компоненты перед производством действий округлять, оставляя в них на одну значащую цифру больше, чем имеется их в компоненте с меньшим числом значащих цифр. Для приведенного примера следует написать

$$p = 2{,}32 \cdot 0{,}34 = 0{,}789,$$

оставив в произведении одну запасную цифру.

Таким образом, *по числу значащих цифр в сомножителях можно устанавливать число верных цифр в произведении* и иметь приближенное суждение о точности полученного результата.

Однако проф. А. С. Чеботарев справедливо отмечает*, что установление точности результата вычислений по числу значащих цифр в компонентах требует некоторой осторожности. Так, если даны два округленных числа 102 и 999, то для первого числа предельная относительная ошибка равна $\frac{0{,}5}{102} \approx \frac{1}{200}$, а для второго $\frac{0{,}5}{999} \approx \frac{1}{2000}$, т. е. хотя оба числа имеют по три значащие цифры, но относительная ошибка первого в десять раз больше относительной ошибки второго числа. Поэтому в числах, начинающихся с единицы, иногда оставляют одну дополнительную верную значащую цифру.

При большом числе сомножителей формула (30), хотя и остается теоретически верной, практически мало пригодна. В этом случае в геодезической практике относительную предельную ошибку произведения определяют обычно через относительную среднюю квадратическую ошибку. Из теории ошибок известна формула

$$\left(\frac{m_p}{p}\right)^2 = \left(\frac{m_1}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2}{x_2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{m_n}{x_n}\right)^2, \tag{31}$$

где $\frac{m_p}{p}$ — относительная средняя квадратическая ошибка произведения, а $\frac{m_1}{x_1}, \frac{m_2}{x_2}, \ldots, \frac{m_n}{x_n}$ — относительные средние квадратические ошибки сомножителей. Если

$$\frac{m_1}{x_1} = \frac{m_2}{x_2} = \cdots = \frac{m_n}{x_n} = \frac{m}{x},$$

то из (31) следует, что

$$\frac{m_p}{p} = \frac{m}{x}\sqrt{n}.$$

Но так как $m = \pm\frac{\alpha}{\sqrt{3}}$, то

$$\frac{m_p}{p} = \pm\frac{\alpha}{x}\sqrt{\frac{n}{3}}. \tag{32}$$

Предельную относительную среднюю квадратическую ошибку при

---

* А. С. Чеботарев. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей, М., 1936, стр. 71.

$n > 3$ считают в этом случае равной утроенной средней квадратической относительной ошибке, так как относительные ошибки произведения [формула (29)] приближенно подчиняются нормальному распределению

$$\left(\frac{\Delta_p}{p}\right)_{\text{пр}} = 3\left|\frac{m_p}{p}\right|.$$

Поэтому и на основании (32)

$$\left(\frac{\Delta_p}{p}\right)_{\text{пр}} = \frac{3\alpha}{x}\sqrt{\frac{n}{3}} = \frac{\alpha\sqrt{3n}}{x}. \qquad (33)$$

Из (33) видно, что предельная относительная ошибка произведения приближенных чисел пропорциональна квадратному корню из числа сомножителей.

При $n = 3$ предельные относительные ошибки произведения, определяемые по формулам (30) и (33), одинаковы, а при $n > 3$ ошибка $\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{\text{пр}}$, определяемая по формуле (33), меньше ошибки $\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{\text{пр}}$, определяемой по формуле (30).

На основании теории вероятностей, в случае нормального распределения, доказывается, что действительные относительные ошибки в крайне редких случаях (в среднем в трех случаях из 1000) могут превзойти предельную ошибку, вычисленную по формуле (33), поэтому на практике за предельную относительную ошибку произведения при $n > 3$ принято считать ошибку, определяемую по формуле (33), а при $n \leqslant 3$ — по формуле (30).

Рассмотрим вопрос об ошибке частного

$$q = \frac{x_1}{x_2}.$$

Тем же путем, каким мы нашли ошибку произведения, можно получить, что

$$\frac{\Delta q}{q} = \frac{\Delta x_1}{x_1} - \frac{\Delta x_2}{x_2}.$$

Предельная относительная ошибка частного определяется из равенства

$$\left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{\text{пр}} = \left|\frac{\Delta x'_1}{x_1}\right| + \left|\frac{\Delta x'_2}{x_2}\right|, \qquad (34)$$

т. е. предельная относительная ошибка частного равна сумме предельных относительных ошибок делимого и делителя.

Приведем пример определения числа верных значащих цифр в частном по числу значащих цифр в делимом и делителе.

Допустим, что необходимо вычислить

$$q = \frac{356{,}34}{0{,}10}.$$

При точном делении в частном получим: $q = 3563{,}4$. Но так как делимое и делитель — округленные числа и грубейший компонент (0,10) имеет только две значащие цифры, то и в результате мы получим не более чем две верные значащие цифры, т. е. в частном (вообще говоря) будут неверны уже целые десятки, а может быть и сотни. Действительно, предельная относительная ошибка частного будет

$$\left(\frac{\Delta q}{q}\right)_{пр}=\frac{0,5}{35\,634}+\frac{0,5}{10}\approx\frac{1}{20},$$

а абсолютная предельная ошибка частного

$$|\Delta q|_{пр}=\frac{q}{20}=\frac{3600}{20}=180.$$

Учитывая это, результат деления необходимо представить так:

$$q=\frac{356}{0,10}=3,6\cdot 10^3.$$

Вообще следует избегать деления на приближенные числа с малым числом значащих цифр. Например, при решении обратной геодезической задачи пользуются формулами

$$S=\frac{x'-x}{\cos\alpha}=\frac{y'-y}{\sin\alpha}.$$

В случае, когда дирекционный угол α близок к 0 или 90°, значения S, найденные по косинусу и синусу, будут недопустимо расходиться между собой. Ясно, что в таких случаях точнее будет результат, полученный по тригонометрической функции, значение которой имеет большее число значащих цифр.

На основании приведенных рассуждений можно сделать вывод, что при умножении приближенного числа на точное число N абсолютная ошибка произведения пропорциональна числу N; при делении приближенного числа на точное число N абсолютная ошибка частного меньше ошибки приближенного числа в N раз. Относительная ошибка в обоих случаях равна относительной ошибке приближенного числа.

Еще раз подчеркнем, что при умножении и делении компоненты следует округлять, оставляя у более точных на одну цифру больше, чем их имеется в числе с наименьшим количеством значащих цифр. Например, если надо вычислить величину p по приближенным числам, имеющим одинаковое число десятичных знаков, но разное число значащих цифр

$$p=\frac{0,083\cdot 956,463}{864,981\cdot 113,293},$$

то эти числа следует округлить так:

$$p=\frac{0,083\cdot 956}{865\cdot 113,3}.$$

Это значительно облегчит вычисления и не отразится на точности их результата.

§ 13. Оценка точности степени и корня

Пусть требуется найти ошибку степени

$$y=x^n,$$

где x — приближенное значение некоторой величины, а n — точное число. Логарифмируя это выражение, получим

$$\ln y=n\ln x.$$

Дифференцируя полученное равенство и заменяя дифференциалы ошибками, будем иметь

$$\frac{\Delta y}{y} = n\frac{\Delta x}{x}. \tag{35}$$

Отсюда следует, что *относительная ошибка степени равна показателю степени, умноженному на соответствующую относительную ошибку основания.* Это значит, что при возведении в степень относительная ошибка увеличивается пропорционально показателю степени, т. е. при возвышении в квадрат ошибка удваивается, в куб — утраивается и т. д.

Все это относится и к предельной относительной ошибке степени.

Если возвышение в степень дает результат с пониженной точностью по сравнению с точностью основания степени, то извлечение корня, как увидим ниже, дает результат с более высокой точностью, чем точность подкоренного числа.

Пусть требуется определить ошибку корня

$$y = \sqrt[n]{x}.$$

Логарифмируя это равенство, затем дифференцируя его обе части и заменяя дифференциалы ошибками, найдем

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{1}{n}\cdot\frac{\Delta x}{x}, \tag{36}$$

т. е. ***при извлечении корня из приближенного числа относительная ошибка уменьшается пропорционально показателю корня.***

При вычислении корня иногда берут под знаком корня в два раза больше значащих цифр, чем их необходимо получить в результате извлечения корня; между тем, как это видно из (36), достаточно взять под знаком корня столько верных значащих цифр, сколько их нужно получить в результате.

В геодезических вычислениях чаще всего приходится извлекать квадратные корни из приближенных чисел. Из формулы (36) видно, что относительная ошибка квадратного корня в два раза меньше относительной ошибки подкоренного выражения. Так как относительная ошибка приближенного числа характеризуется числом верных значащих цифр этого числа, то, вообще говоря, в квадратном корне верных значащих цифр будет не меньше, чем их имеется в подкоренном выражении. Допустим, что при определении длины линии по координатам, округленным до одного сантиметра, получилось

$$S = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2} = \sqrt{86\,456{,}8839}.$$

В данном примере под корнем верных значащих цифр не больше пяти, т. е. цифры, стоящие после запятой, вообще говоря, неверны и данное число можно округлить до целых единиц. Но если бы даже все цифры под корнем были верны, а корень необходимо было найти с пятью значащими цифрами (с абсолютной ошибкой до 1 *см*), то и в этом случае подкоренное число можно было бы округлить до целых единиц, т. е. записать

$$\sqrt{86\,457} = 294{,}03.$$

Вообще же при извлечении квадратных корней рекомендуется под знаком корня брать одну запасную цифру, чтобы можно было правильно округлить значение корня.

Пример 2. Определить, с какой предельной абсолютной ошибкой и с каким числом верных знаков можно вычислить длину стороны квадрата, если известно, что площадь его $P = 5{,}28$ *га*.

Искомая сторона квадрата

$$a = \sqrt{P} = \sqrt{52\,800} = 229{,}78 \text{ м}.$$

На основании (36) напишем

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta P}{P}.$$

Так как $\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\text{пр}} = \frac{0{,}5}{528} = \frac{1}{1000}$, то

$$\left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{пр}} \approx \frac{1}{2000}$$

и

$$(\Delta a)_{\text{пр}} = \frac{230}{2000} = 0{,}12 \text{ м},$$

т. е. сторона квадрата будет иметь только три верные цифры.

§ 14. Оценка точности функции одного аргумента

Рассмотрим теперь вопрос об ошибке функции

$$y = f(x).$$

Пусть x — приближенное значение некоторой величины, имеющей ошибку Δx, которая вызывает ошибку в величине y, равную Δy.

Ввиду малости ошибки Δx можно написать

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x. \tag{37}$$

Разделив обе части равенства (37) на y, найдем величину относительной ошибки y

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{f'(x)}{y}\,\Delta x,$$

или

$$\frac{\Delta y}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}\,\Delta x. \tag{38}$$

Правая часть равенства (38) представляет собой дифференциал натурального логарифма $f(x)$, поэтому можно написать

$$\frac{\Delta y}{y} = d \ln f(x) = \frac{1}{M}\, d \lg f(x),$$

и

$$\frac{\Delta y}{y} = \Delta \ln f(x) = \frac{1}{M}\, \Delta \lg f(x), \tag{39}$$

где $M = 0{,}4343$.

Таким образом, *относительная ошибка функции одного аргумента равна ошибке натурального логарифма этой функции.* Как видно из (37), (38) и (39), наибольшему значению ошибки Δx соответствует наибольшее значение ошибки Δy, поэтому эти формулы справедливы и для случая предельных ошибок.

Пример 3. Вычислить абсолютную и относительную ошибки площади круга, если округленное значение радиуса $r = 5{,}96$ *см*.

Имеем для площади круга

$$P = \pi \cdot r^2 = 3,142 \cdot 5,96^2 = 111,61 \text{ см}^2.$$

Принимая предельную абсолютную ошибку в длине радиуса равной 0,005 *см*, получим для предельной абсолютной ошибки площади круга согласно формуле (37)

$$|\Delta P|_{\text{пр}} = \pi \cdot 2r \cdot |\Delta r|_{\text{пр}} = 3,1 \cdot 2 \cdot 6,0 \cdot 0,005 = 0,19 \text{ см}^2.$$

Принимая во внимание величину абсолютной ошибки $|\Delta P|_{\text{пр.}}$, следует написать окончательное значение площади круга в таком виде

$$P = 111,6 \text{ см}^2.$$

Предельная относительная ошибка площади круга равна

$$\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\text{пр}} = \frac{0,19}{112} = \frac{1}{590}.$$

Не вычисляя предельной абсолютной ошибки, можно вычислить предельную относительную ошибку по формуле (39).

§ 15. Оценка точности функции нескольких аргументов

Пусть дана функция

$$u = f(x, y, z, \ldots, w),$$

где x, y, $z, \ldots$, w известны приближенно и равны соответственно a, b, $c \ldots$

Для простоты рассуждения будем говорить о функции только трех аргументов.

Положим

$$x = a + \Delta a,$$
$$y = b + \Delta b,$$
$$z = c + \Delta c,$$

где Δa, Δb и Δc — неизвестные нам ошибки величин a, b и c.

Истинное значение функции u будет

$$u = f(x, y, z) = f(a + \Delta a, b + \Delta b, c + \Delta c).$$

Обозначив приближенное значение функции u через u_0, напишем

$$u_0 = f(a, b, c).$$

Тогда ошибка функции u выразится так:

$$\Delta u = u - u_0 = f(a + \Delta a, b + \Delta b, c + \Delta c) - f(a, b, c). \qquad (40)$$

Выражение (40) есть приращение функции u, когда аргументы a, b и c получили приращения Δa, Δb, Δc.

В дифференциальном исчислении доказывается, что при непрерывности функции и ее частных производных первого порядка приращение Δu функции отличается от ее полного дифференциала du на величину высшего порядка малости по сравнению с ошибками Δa, Δb и Δc. Поэтому можно практически считать, что полный дифференциал функции u равняется ошибке этой функции, т. е.

$$\Delta u = \frac{\partial f}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial f}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial f}{\partial c}\Delta c. \qquad (41)$$

Истинные значения ошибок почти всегда бывают неизвестны, поэтому обычно берут наихудший случай и предельную абсолютную ошибку функции u вычисляют по формуле

$$|\Delta u|_{\text{пр}} = \left|\frac{\partial f}{\partial a}\Delta a'\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial b}\Delta b'\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial c}\Delta c'\right|, \qquad (42)$$

где $\Delta a'$, $\Delta b'$, $\Delta c'$ — предельные ошибки аргументов.

Таким образом, *предельная абсолютная ошибка функции нескольких аргументов равна сумме абсолютных значений произведений частных производных на предельные ошибки аргументов.*

Нетрудно показать, что относительная ошибка функции нескольких аргументов определится из выражения

$$\frac{\Delta u}{u} = d[\ln f(a, b, c)], \qquad (43)$$

т. е. равна полному дифференциалу натурального логарифма этой функции, причем при вычислении предельной относительной ошибки нужно брать сумму абсолютных значений частных дифференциалов.

Пример 4. Пользуясь формулой

$$P = \frac{a \cdot b \cdot \sin\beta}{2},$$

вычислить площадь P треугольника, а также предельные относительную и абсолютную ошибки, если $a = 103{,}4$ *м*, $b = 180{,}3$ *м* и $\beta = 42°06'$; все эти приближенные числа даны с точностью $\pm 0{,}5$ единицы последнего знака.

Взяв из таблиц значение $\sin 42°06' = 0{,}6704$, определим площадь

$$P = \frac{1}{2} \cdot 103{,}4 \cdot 180{,}3 \cdot 0{,}6704 = 6250{,}1 \text{ м}^2.$$

Относительную ошибку получим, исходя из формулы (43):

$$\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\text{пр}} = \left|\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|\frac{\Delta b}{b}\right| + |\operatorname{ctg}\beta \cdot \Delta\beta|,$$

где ошибка $\Delta\beta$ выражена в *радианной* мере*.

Подставляя числовые данные, будем иметь

$$\left(\frac{\Delta P}{P}\right)_{\text{пр}} = \frac{0{,}5}{1030} + \frac{0{,}5}{1800} + 1{,}11\,\frac{0{,}5}{3438} \approx \frac{1}{1000}.$$

Абсолютную предельную ошибку легко вычислить по относительной

$$|\Delta P|_{\text{пр}} = \frac{P}{1000} = \frac{6250}{1000} \approx 6{,}2 \text{ м}^2.$$

Величина $\Delta u_{\text{пр}}$ в формуле (42) является теоретическим пределом ошибки Δu, и когда число переменных значительно (больше трех), то мало вероятно, что истинное значение ошибки Δu когда-либо будет близко к $\Delta u_{\text{пр}}$. Такой мало вероятный случай может быть лишь тогда, когда все слагаемые в формуле (41) будут с одним и тем же знаком, а ошибки аргументов близки к предельным значениям. Поэтому практически за предельную ошибку функции следует брать утроенную среднюю квадратическую ошибку, вычисляя последнюю по формуле

$$m_u = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 m^2_a + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 m^2_b + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 m^2_c}. \qquad (44)$$

* О радианной мере угла см. § 21.

Вывод формулы (44) дается в курсах теории ошибок и способа наименьших квадратов.

§ 16. Установление допустимых размеров ошибок аргументов по заданному значению ошибки функции

В инженерной практике приходится решать задачу, которую можно формулировать так. Определить, с какой ошибкой или с каким числом верных значащих цифр должны быть взяты компоненты, чтобы результат вычислительных операций получился с заданной точностью. Задача эта, вообще говоря, неопределенна и без дополнительных условий ее решить нельзя, так как мы имеем одно уравнение с несколькими неизвестными ошибками аргументов. При решении этой задачи все величины, входящие в данную формулу, обычно разделяют на две группы. В одну группу включают величины, ошибки которых можно свести к минимуму, а в другую — все остальные величины.

В отдельных случаях конструкция формулы покажет, что некоторые значения (например, стоящие под знаком корня) могут быть взяты менее точно, без ущерба для результата вычислений.

В ряде случаев различный характер измерений различных величин обусловливает необходимость или возможность одни данные получить с меньшей, а другие — с большей точностью, выбирая различные средства и методы измерений.

Полагая ошибки величин первой группы равными нулю, а относительные ошибки величин второй группы одинаковыми, можно найти их по заданной относительной ошибке результата вычислений, используя так называемый *«принцип равных влияний»*. Определив таким путем относительные ошибки компонентов, можно затем более детально решить задачу, уменьшая ошибки одних чисел и увеличивая ошибки других, но с таким расчетом, чтобы окончательная ошибка результата не превзошла заданной величины.

Разберем этот вопрос на примерах.

Пример 5. Определить, с каким числом верных значащих цифр необходимо знать цену деления планиметра μ, чтобы относительная ошибка площади, определенной планиметром, не выходила за пределы 1 : 500.

Напишем рабочую формулу для вычисления площади при помощи планиметра

$$P = \mu (n_2 - n_1) = \mu \cdot r,$$

где μ — цена деления планиметра, а r — разность отсчетов по счетному механизму планиметра.

Относительная ошибка площади, в зависимости от ошибок μ и r, выразится формулой

$$\frac{|\Delta P|}{P} = \frac{|\Delta \mu|}{\mu} + \frac{|\Delta r|}{r} = \frac{1}{500}.$$

Полагая в первом приближении

$$\frac{\Delta \mu}{\mu} = \frac{\Delta r}{r},$$

можно написать

$$2 \frac{|\Delta \mu|}{\mu} = \frac{1}{500},$$

откуда

$$|\Delta\mu| = \frac{\mu}{1000}.$$

При вычислении площади на плане масштаба 1 : 5000 цена деления планиметра около 0,025 *га*, значит для этого случая

$$|\Delta\mu| = \frac{0,025}{1000} = 0,000\,025,$$

т. е. цену деления планиметра необходимо вычислить с четырьмя десятичными знаками или с тремя верными значащими цифрами.

Если, например, при определении цены деления планиметра по площади квадратов координатной сетки получилось, что

$$\mu = \frac{P}{2009} = 0,024\,854\,3,$$

то, учитывая, что μ рассматривается как постоянное число, нужно взять значение ее с одним запасным знаком, т. е. считать ее равной 0,02485.

Пример 6. Определить, с каким числом знаков необходимо найти коэффициент k нитяного дальномера трубы с внешней фокусировкой, чтобы относительная ошибка определения расстояния при помощи дальномера не вышла за пределы 1 : 500.

Для упрощения рассуждений будем полагать, что линии горизонтальны и определяются по формуле

$$S = kl + c.$$

Так как в данном случае постоянное c дальномера можно непосредственно измерить с практически пренебрегаемой ошибкой, то относительную ошибку длины линии можно выразить формулой

$$\frac{|\Delta S|}{S} = \frac{|\Delta k|}{k} + \frac{|\Delta l|}{l}.$$

где $|\Delta k|$ и $|\Delta l|$ — абсолютные ошибки коэффициента k и отсчета по рейке l. Принимая относительные ошибки равными, т. е. полагая

$$\frac{\Delta k}{k} = \frac{\Delta l}{l}$$

и учитывая условия задачи, будем иметь

$$\frac{|\Delta S|}{S} = \frac{1}{500} = 2\frac{|\Delta k|}{k}.$$

Если k близко к 100, то

$$|\Delta k| = \frac{k}{1000} = \frac{100}{1000} = 0,1,$$

т. е. коэффициент необходимо определить с точностью до 0,1, но учитывая, что этот коэффициент есть для данных условий постоянное число, следует взять его значение с одним запасным знаком, т. е. определить его с точностью до 0,01.

§ 17. О потере точности при комбинированных вычислениях с приближенными числами

Выше мы уже отмечали, что приближенные числа получаются или при округлении чисел, или при измерении тех или иных величин. Чтобы не вносить в результаты вычислений дополнительных ошибок, вычислитель обычно считает, что числа, полученные из измерений, содержат ошибки, не превосходящие половины единицы последнего знака.

При вычислении необходимо иметь в виду, что чем больше число сложений, вычитаний, умножений, возведений в степень, тем больше влияние ошибок исходных данных, тем больше, вообще говоря, теряется точность в результатах вычислений. Никакие запасные цифры в промежуточных результатах не спасут положения. Запасные цифры необходимы в этом случае лишь для того, чтобы не вносить дополнительных ошибок в процессе вычислений.

Рассмотрим некоторые примеры.

Проанализируем алгебраическую сумму округленных чисел

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

В соответствии с формулой (27) предельная ошибка в сумме S будет

$$(\Delta S)_{\text{пр}} = \alpha \sqrt{3n},$$

где α — предельная ошибка округленных чисел, взятых с одинаковым количеством десятичных знаков. При $\alpha = 0{,}5$ единицы последнего знака и при $n = 34$, величина $(\Delta S)_{\text{пр}}$ равна 5 единицам последнего знака. Это значит, что в сумме из 34 одинаково округленных слагаемых последняя цифра будет неверной; при $n = 3400$ могут оказаться неверными две последние значащие цифры, так как $(\Delta S)_{\text{пр}}$ в этом случае равна 50 единицам последнего знака.

Отсюда видно, что если сумму из 34 слагаемых необходимо получить, например, с двумя верными десятичными знаками, то каждое слагаемое необходимо взять с тремя десятичными знаками. Для получения суммы из 3400 слагаемых с двумя верными десятичными знаками, каждое слагаемое необходимо взять с четырьмя десятичными знаками.

Проанализируем накопление ошибок при вычислении по формуле

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{c_i}; \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{45}$$

Для простоты рассуждений будем считать, что числа a_i, b_i, c_i примерно одинаковы по абсолютному значению и имеют одинаковую предельную ошибку округления α. Исследования, проведенные нами, показывают, что ошибки выражений $\frac{a_i b_i}{c_i}$ подчиняются распределению, близкому к нормальному (см. § 8). Поэтому предельную ошибку величины Q можно вычислить по формуле

$$(\Delta Q)_{\text{пр}} = 3m_Q = 3\alpha \sqrt{n}. \tag{46}$$

Из формулы (46) видно, что при $n = 10$ предельная ошибка $(\Delta Q)_{\text{пр}} = 5$ единицам последнего знака, т. е. в этом случае в результате может оказаться неверной одна цифра последнего разряда исходных компонентов; при $n = 1000$ соответственно $(\Delta Q)_{пр} = 50$ единицам последнего знака, т. е. в этом случае могут оказаться неверными две цифры.

Рассмотрим еще потерю точности при вычислении определителя D преобразованной нормальной системы уравнений (§ 87)

$$D = c_{11} \cdot c_{22} \cdot c_{33} \cdot \ldots \cdot c_{nn}.$$

Для простоты рассуждений положим, что компоненты этой формулы даны с одинаковым числом десятичных знаков и что

$$c_{11} \approx c_{22} \approx \cdots \approx c_{nn} = c.$$

Учитывая это, теоретическое значение предельной относительной ошибки определителя D в соответствии с формулой (30) может быть найдено из выражения

$$\left(\frac{\Delta D}{D}\right)_{пр} = n\frac{\alpha}{c}, \tag{47}$$

где $\alpha = 0{,}5$ единицы последнего знака, а n — число сомножителей.

Из (47) видно, что при $n = 10$ относительная ошибка произведения будет в 10 раз больше относительной ошибки каждого сомножителя, т. е. в произведении становится меньше на одну верную цифру, так как число верных значащих цифр находится в обратной зависимости от величины относительной ошибки.

Предполагая, что ошибки произведений подчиняются нормальному распределению и считая за предельную утроенную среднюю квадратическую ошибку, в соответствии с формулой (33) напишем

$$\left(\frac{\Delta D}{D}\right)'_{пр.} = \frac{\alpha\sqrt{3n}}{c}. \tag{48}$$

Из (48) видно, что произведение может уменьшиться на одну верную цифру только при $n > 34$ и на две верные цифры — при $n > 3400$.

Разделив (47) на (48), будем иметь

$$\frac{n \cdot \alpha}{c} : \frac{\alpha\sqrt{3n}}{c} = \sqrt{\frac{n}{3}}. \tag{49}$$

Из (49) видно, что при $n > 3$ следует пользоваться формулой (48), так как при вычислении по формуле (47) предельная ошибка будет преувеличена в $\sqrt{\frac{n}{3}}$. При пользовании формулой (47) в этом случае можно не заметить в результатах вычислений грубых ошибок или промахов.

При умножении и делении приближенных (округленных) чисел необходимо брать компоненты примерно с одинаковым числом значащих цифр, т. е. с одинаковой относительной ошибкой, зная, что чем меньше верных значащих цифр, тем больше относительная ошибка, причем увеличение относительной ошибки в 10 раз соответствует уменьшению числа на одну значащую цифру.

При вычислении по сложным формулам в результатах вычислений происходит потеря точности от влияния ошибок исходных компонентов и промежуточных округлений. Чтобы предотвратить недопустимое влияние ошибок округлений промежуточных величин, необходимо их вычислять с соответствующим количеством запасных знаков.

Упражнения

1. Вычислить абсолютную ошибку длины линии, равной 1243,56 *м*, если ее относительная ошибка 1 : 2000

2. Найти произведение приближенных (округленных) чисел и определить абсолютную и относительную (предельные) ошибки результата

$$P = 0{,}0022 \cdot 253{,}8351.$$

3. Длина линии, измеренная стальной десятисаженной лентой, получилась равной 246,8 саж. С возможно большей точностью вычислить длину этой линии в метрах, если 1 саж. = 2,133 60 *м*.

4. С возможно большей точностью вычислить $\frac{1}{e}$, зная, что e приближенно равно 2,72.

5. Вычислить длину линии по формуле

$$S = \frac{\Delta x}{\cos \alpha},$$

если $\Delta x = 8{,}68$ *м*, а $\cos \alpha = 0{,}0224$, и определить предельную абсолютную ошибку результата.

6. Длина стороны треугольника триангуляции определена с относительной ошибкой 1 : 10 000. Вычислить, скольким единицам 5-го знака логарифма соответствует эта ошибка.

7. Определить предельную ошибку угла C прямоугольного треугольника ABC, если катет $b = 56{,}3$, а гипотенуза $a = 204{,}3$.

8. Вычислить площадь прямоугольника, если длина его 333,4 *м* и ширина 8,2 *м* даны с предельной ошибкой $\pm 0{,}1$ *м*.

9. Пользуясь формулой

$$P = \frac{2}{3} ah,$$

вычислить площадь параболического сектора, если $a = 26{,}3$ *м* и $h = 0{,}08$ *м* верны до половины единицы последнего знака.

10. Пользуясь формулой

$$v = \frac{1}{2} \pi abh,$$

вычислить объем параболоида, если $a = 13{,}4$ *м*, $b = 12{,}9$ *м* и $h = 3{,}2$ *м* верны до половины единицы последнего знака.

11. Определить предельную абсолютную и относительную ошибки в радиусе круга, площадь которого 186,3 *см*^{2}.

12. Ошибка логарифма числа равна $1{,}2 \cdot 10^{-5}$. Вычислить относительную предельную ошибку этого числа.

13. Корни уравнения

$$x^2 - 2x + \lg 2 = 0$$

надо получить с четырьмя точными значащими цифрами. С каким числом значащих цифр надо взять свободный член уравнения?

Глава III

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СПОСОБАХ И СРЕДСТВАХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

§ 18. Краткий обзор способов и средств вычислений

Все существующие способы вычислений можно разделить на четыре группы.

I. *Сокращенные способы непосредственных вычислений.* Эти способы состоят в рационально видоизмененном применении обычных арифметических действий и в применении правил комбинированных вычислений.

II. *Табличные способы вычислений.* Здесь средством вычислений являются таблицы, которые содержат значения тех или иных функций. Примером таблиц функции одного переменного могут служить таблицы логарифмов чисел, логарифмов тригонометрических функций, квадратов чисел, натуральных значений тригонометрических функций и т. п.; примером таблиц функции двух переменных — таблицы приращений координат, поправок за наклон линий к горизонту, превышений и т. п.

Всякие таблицы составляются для определенных функций с заранее установленной точностью и по определенной системе. Качество каждой таблицы определяется ее верностью, компактностью, удобством и простотой использования.

III. *Способы вычислений при помощи счетных машин и приборов.* Выдающиеся ученые прошлых столетий Паскаль, Лейбниц, Чебышев сконструировали и построили первые вычислительные машины, действовавшие на механических принципах.

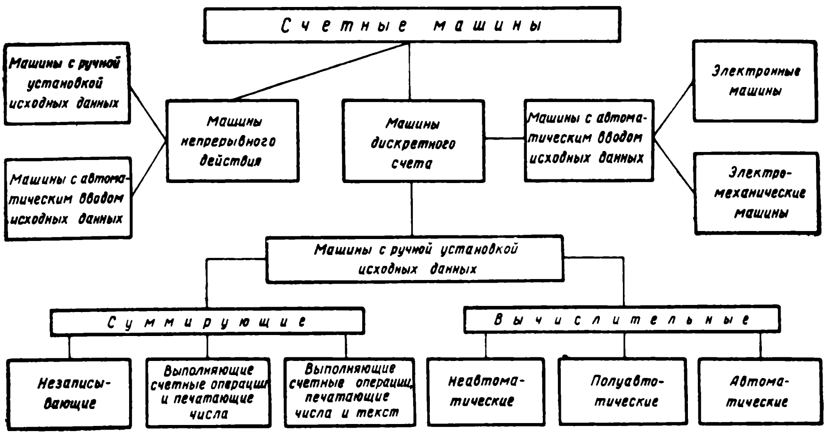
Вслед за механическими машинами стали развиваться электрические и в последнее десятилетие электронные машины.

В настоящее время имеется много машин различных систем. Существуют и разные способы их классификации. Можно применять классификацию, согласно которой все счетные машины по характеру вычислительного процесса делят на два класса (фиг. 3): машины непрерывного действия (модулирующие устройства) и машины дискретного счета (цифровые вычислительные машины).

Машины непрерывного действия представляют физическую систему (модель), в которой числа изображаются в том или ином масштабе физическими величинами. В качестве таких величин используются длины отрезков, электрические напряжения, электрические сигналы, углы поворота и др.

Примером модулирующего устройства может служить обычная логарифмическая линейка, на которой логарифмам чисел соответствуют длины отрезков. Вместо сложения и вычитания логарифмов чисел складывают или вычитают отрезки, а результаты читают на шкалах линейки.

К сожалению, перевод чисел в физические величины и, наоборот, переход от результатов измерений физических величин к числам на таких машинах выполняются с ограниченной точностью, зависящей от качества изготовления элементов машины, инерционных погрешностей в процессе работы и других факторов. Кроме того, результат вычислений при помощи модулирующих устройств не может быть получен с меньшей погрешностью, чем та, с которой он прочитывается на шкале. Машины непрерывного действия обеспечивают получение результата с точностью от 2 до 5 значащих цифр. По этой причине машины непрерывного действия в областях, где необходима большая точность (например, при астрономических и геодезических вычислениях), мало применяются*.



Фиг. 3. Классификация счетных машин

На машинах дискретного счета принципиально можно получить результат с неограниченной точностью, зависящей от числа разрядов в счетчиках. Решение любой математической задачи на машинах дискретного счета сводится к автоматическому выполнению заданной последовательности арифметических действий.

Машины дискретного счета можно разделить на две группы: с ручной установкой исходных данных (суммирующие и вычислительные машины) и с автоматическим вводом исходных данных (счетно-аналитические—электрические или смешанные—и быстродействующие электронные вычислительные машины).

Производительность труда на суммирующих машинах при выполнении действий с пятизначными числами характеризуется такими показателями:

а) при работе на полноклавишных машинах — около 1200 сложений в час с записью итогов через 10 слагаемых;

б) при работе слепым методом на десятиклавишных машинах — около 1600 сложений с записью итогов через 10 слагаемых;

в) при работе на десятиклавишных суммирующих машинах — около 160 умножений в час с записью каждого произведения из шести цифр.

В тех же условиях на рычажном арифмометре можно сделать около 400, а на русских счетах — около 700 сложений в час; умножений на арифмометре можно сделать около 160, т. е. столько же, сколько и на

* Машины непрерывного действия подробно описаны в книге Н. Е. Кобринского «Математические машины непрерывного действия», М., Гостехиздат, 1954.

десятиклавишной суммирующей машине. На полуавтоматических и автоматических машинах можно сделать около 250—350 умножений или делений пятизначных чисел в час с записью каждого произведения или частного из шести цифр.

Вычислительные машины с ручной установкой исходных данных (малые вычислительные машины) нашли наибольшее распространение в инженерной практике. Эти машины подробно будут описаны в главе VII.

Электрические счетно-аналитические машины возникли в связи с потребностью статистики и учета.

В связи с тем, что при работе на машине с ручной установкой на установку чисел и запись результатов затрачивается больше времени, чем на работу самой машины, возникла необходимость создать машины с автоматической установкой исходных данных и записью чисел. В настоящее время автоматическая установка исходных данных выполняется главным образом при помощи отверстий, пробитых на карточке из плотного картона или на особой ленте. Машина воспринимает данные, зафиксированные при помощи отверстий на карточке, методом ощупывания, подобно тому методу, которым пользуются слепые при чтении книг с выступающими буквами.

Комплект счетно-аналитических машин состоит из а) вспомогательных машин, служащих для перфораций карточек (пробивки отверстий) и для контроля перфорации, и б) основных, служащих для группировки карточек, выполнения арифметических действий и печатания результатов (см. § 84).

В связи с требованиями, поставленными различными отраслями современной науки и практики, появилась необходимость создания быстродействующих электронных цифровых машин. Краткие сведения об этих машинах и их применении при инженерно-технических вычислениях даны в § 85 главы VII.

IV. *Графические способы вычислений.* В этом случае используют различного рода графики и номограммы. Вычисление при помощи номограмм, т. е. чертежей, устанавливающих графически зависимость между числовыми значениями величин, связанных между собой формулой, является одним из наиболее удобных средств, когда достаточна небольшая точность вычислений (2—3 значащие цифры). Графические способы вычислений разобраны в главе IX.

Значительное повышение производительности вычислительного труда достигается применением и других простейших средств вычислений (русских счетов, логарифмических линеек и т. п.).

§ 19. Выбор способов и средств вычислений

В зависимости от характера вычислений, а также от точности исходных данных применяется тот или иной способ и те или иные средства вычислений. Если вычисления ведутся от случая к случаю, то рационально применять способы непосредственных вычислений и таблицы. Наоборот, при массовых вычислениях следует применять в первую очередь счетные машины и таблицы с достаточным числом знаков. Если требуется небольшая точность результатов вычислений (2—3 значащие цифры) и проводятся массовые вычисления по одним и тем же формулам, то наиболее выгодно использование номограмм.

В геодезической практике часто приходится вычислять различные поправки, ошибки и другие величины с двумя и тремя значащими цифрами. В этих случаях незаменимым прибором является логарифмическая линейка, которая в умелых руках дает возможность получать результаты вычислений с такой быстротой, с какой записываются числа на бумаге.

Во многих случаях наиболее выгодно применять комбинированный способ вычислений, при котором, учитывая необходимую точность результата, разные члены одной и той же формулы рационально определять при помощи различных средств вычислений. *Вычислитель в каждом отдельном случае, исходя из точности данных величин и учитывая точность, с которой нужно получить результат вычислений, должен применять такие средства вычислений, которые дадут возможность получить результат с необходимой точностью в кратчайший срок.*

Подчеркнем еще раз, что, пользуясь точными формулами, можно получить результат с недопустимой погрешностью, если средства вычислений не соответствуют количеству верных значащих цифр в данных числах; если, например, логарифмы чисел с шестью верными значащими цифрами определять при помощи пятизначных таблиц или арифметические действия с четырехзначными числами производить при помощи обычной (25-сантиметровой) логарифмической линейки. Однако при контрольных вычислениях иногда целесообразно применять средства вычислений, дающие более грубые результаты, чем требуется. Так, например, приращения координат, вычисленные с четырьмя значащими цифрами, можно проверять при помощи логарифмической линейки или при помощи номограммы.

Вопрос о выборе способов и средств вычислений станет более ясным после того, как читатель ознакомится с этими способами и изучит средства вычислений.

§ 20. Формула, алгорифм и схема вычислений. Проверка вычислений

Всякое вычисление должно производиться по заранее установленному правилу. Чаще всего вычисление ведется по определенной формуле, показывающей, какие действия надо произвести над данными числами, чтобы получить значение искомой величины.

Весьма важное значение имеет определенный порядок расположения отдельных действий, обеспечивающий четкость вычислений. Для четкости и быстроты вычисления ведут по определенной схеме, в которой каждое входящее в вычисление число записывается на заранее отведенном для него месте. При массовых вычислениях схемы заранее размножаются на листах бумаги определенного размера и на них приводится формула, в соответствии с которой составлена схема. Такие листы называют *бланками* или *формулярами*. Схема составляется с учетом рациональной организации вычислений и облегчения их контроля и рассчитана на применение определенных средств вычислений. Использование хорошо составленной схемы способствует механизации вычислительной работы, сводя ее к элементарным однообразным операциям.

В качестве примера вычислений по схеме найдем поправки к измеренным направлениям за внецентренную установку инструмента по формуле

$$c'' = \frac{e\rho'' \sin(M + \Theta)}{S},$$

где e — расстояние между центром инструмента и центром знака; Θ — угол при центре инструмента, считаемый от направления на центр знака до начального направления по ходу часовой стрелки; M — измеренное направление, для которого вычисляется поправка; S — расстояние между пунктами.

Вычисления произведем при помощи таблиц логарифмов по схеме табл. 6. Для данной станции постоянными величинами являются: e, Θ, ρ''. Запишем их перед вычислением на схеме и найдем постоянное число $\lg\ (e\rho'')$.

Таблица 6

Вычисление поправок за центрировку

Пункт Абсютино, пирамида.

$e = 0{,}348$ м; $\lg e = 9.5416$;

$\Theta = 145°20'$; $\lg \rho'' = 5.3144$; $\lg (e\rho'') = 4.8560$.

Название направлений / Обозначения	Дубово, пир.	Веха №2	Веха №4
M	0°00'	124°31	135°17'
$M+\Theta$	145°20	269°51	280°37'
$\lg \sin (M+\Theta)$	9.7550	0.0000n	9.9925n
$\lg \sin (M+\Theta) + \lg (e\rho)$	4.6110	4.8560	4.8485
$\lg S$	3.4322	3.1584	3.2175
$\lg c''$	1.1788	1.6976n	1.6310n
c''	+15″,1	−49″,8	−42″,8

Вычисление по схеме, приведенной в табл. 6, производится так. Из журнала измерений горизонтальных углов выписываются все направления M, начиная с нулевого. Прибавив к каждому значению M угол Θ находят логарифмы синусов углов $M + \Theta$. Выписав на край бумажки постоянное число $\lg (e\rho'')$, прикладывают его последовательно к логарифмам синусов углов $M + \Theta$ и находят их суммы. Затем из ведомости предварительного решения треугольников выписывают логарифмы сторон S и вычитают их из логарифмов, написанных над ними. Полученные разности и дадут логарифмы поправок за центрировки, по которым находят значения самих поправок.

У логарифмов синусов углов $M + \Theta$, бóльших 180°, проставляется буква n (негатив), которая должна напоминать, что в этих случаях поправки c имеют знак минус.

Для контроля вычисления поправок следует повторить, используя другие средства (специальные таблицы, арифмометр, номограмму и т. п.), тщательно проверив правильность исходных данных. При отсутствии других вычислительных средств вычисления проверяются «во вторую руку» — другим лицом, совершенно независимо от первого.

Всегда надлежит помнить, что без проверки результат вычисления ненадежен. Пока проверка не произведена, вычисление нельзя считать законченным. Любое действие можно проверить, повторяя его, но так как простое повторение мало надежно, то повторные вычисления следует выполнять каким-либо другим способом: например, контрольное сложение нескольких чисел на счетах следует делать не сверху вниз, а снизу вверх.

В геодезических вычислениях правильность результатов часто проверяется применением контрольных формул. Так, например, площадь многоугольника по координатам его вершин вычисляется по формуле

$$2P = \sum_{1}^{n} x_k (y_{k+1} - y_{k-1})$$

и проверяется по формуле

$$2P = \sum_{1}^{n} y_k (x_{k-1} - x_{k+1});$$

По приведенным формулам проверяется только правильность арифметических действий, но неверность координат по этим формулам не обнаружится.

Обратная геодезическая задача (вычисление дирекционного угла и длины линии по координатам ее концов) на плоскости обычно решается по формулам

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \\ S = \frac{x_b - x_a}{\cos \alpha} &= \frac{y_b - y_a}{\sin \alpha} \end{aligned}\right\}, \qquad (50)$$

Контролем вычисления здесь служит получение одинаковых (в пределах точности вычисления) значений длины S как по абсциссам, так и по ординатам точек.

Пример решения обратной геодезической задачи по формулам (50) приведен в табл. 7. За окончательное значение длины линии S берется среднее из значений, найденных по абсциссам и ординатам, но если румбический угол близок к 0 или 90°, значения S, вычисленные по абсциссам и ординатам, могут недопустимо расходиться и за окончательное значение нельзя брать среднее из них. В этих случаях за окончательное значение нужно взять то, которое определено по тригонометрической функции ($\sin \alpha$ или $\cos \alpha$) с бóльшим числом значащих цифр. В приведенном примере (табл. 7) за окончательное значение длины линии $A'B'$ нужно взять значение, найденное по формуле

$$S = \frac{x_b - x_a}{\cos \alpha} = \frac{439{,}99}{0{,}99984} = 440{,}06.$$

Таблица 7

Решение обратной геодезической задачи

Порядок действий	Формулы и обозначения	Линия $A-B$	Линия $A'-B'$
1	y_b	+ 400,31	+ 408 24
3	y_a	− 182,28	+ 400,31
5	$y_b - y_a$	+ 582,59	+ 7,93
9	$\sin\alpha$	+0,86 381	+ 0 01 803
11	$S = \frac{y_b - y_a}{\sin\alpha}$	674,44	439,82
2	x_b	+ 540,00	+ 100,01
4	x_a	+ 200,21	+ 540,00
6	$x_b - x_a$	+ 339,79	− 439,99
10	$\cos\alpha$	+0,50 382	− 0,99 984
12	$S = \frac{x_b - x_a}{\cos\alpha}$	674,43	440,06
7	$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$	+1,71 456	− 0,01 802
8	Румбический угол	св 59°44′,8	юв 1°02′,0
13	Дирекционный угол	59°44′,8	178°58′,0
14	S_0	674,44	440,06

Для дополнительной проверки найденного значения S можно воспользоваться формулой:

$$S = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} = 440{,}06$$

Обратную задачу при помощи арифмометра лучше решать по формулам

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} \\ S &= (x_b - x_a) \sec \alpha = (y_b - y_a) \operatorname{cosec} \alpha \end{aligned}\right\}, \qquad (51)$$

так как на арифмометре значительно производительней выполнять действия умножения, чем деления (см. § 72).

Если порядок вычисления трудно выразить формулой, его выражают алгорифмом, представляющим собой определенное правило. В математике алгорифмом называют точное правило, определяющее вычислительный процесс, необходимый для получения искомого результата. Процесс вычисления в соответствии с заданным алгорифмом можно автоматизировать как на малых, так и на больших вычислительных машинах.

Широко применяются, например, алгорифмы при решении систем нормальных уравнений путем последовательного исключения неизвестных (см. главу VIII).

§ 21. Выражение углов в радианной, градусной и градовой мерах

Известно, что при выражении углов в радианной мере за меру угла принимается радиан, представляющий собой отношение длины дуги, описанной из вершины угла, к радиусу этой дуги. Известно также, что градус представляет собой единицу измерения углов и равняется центральному углу с соответствующей дугой, равной 1 : 360 части окружности.

В последнее время иногда углы измеряют в *десятичной (градовой)* системе. В этой системе прямой угол делят на 100 частей, называемых *градами*; град делят на 100 *десятичных минут,* минуту на 100 *десятичных секунд.* В градовой системе величину угла записывают в следующих видах

$$246^{g},68\ 93\quad 54$$
$$\text{или } 246^{g}68^{c}93^{cc},54$$
$$\text{или } 246^{g}68'93'',54$$

Переход от радианной меры к градусной и наоборот устанавливается из соотношения

$$180^\circ \text{ соответствует } \pi = 3{,}14159\ldots,$$
$$\alpha^\circ \qquad\quad \text{"} \qquad\quad x,$$

откуда

$$\alpha^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot x = \rho^\circ \cdot x,$$

$$\alpha' = \frac{180 \cdot 60'}{\pi} x = \rho' \cdot x,$$

$$\alpha'' = \frac{180 \cdot 60 \cdot 60''}{\pi} x = \rho'' \cdot x,$$

где ρ — величина *радиана*, соответственно равная

$$\rho^\circ = 57^\circ{,}295\,779\ldots; \quad \rho' = 3437'{,}7467\ldots; \quad \rho'' = 206\,264''{,}80\ldots$$

Если, например, значение некоторого угла в радианах 1,281, то величина этого угла в градусах будет: $\alpha^\circ = 57^\circ{,}296 \cdot 1{,}281 = 73^\circ{,}40$. Значение этого угла в минутах будет: $\alpha' = 3437'{,}7 \times 1{,}281 = 4404'$.

Обратный переход от градусной меры к радианной осуществляется при помощи соотношений

$$x = \frac{\alpha^\circ}{\rho^\circ} = \frac{\alpha'}{\rho'} = \frac{\alpha''}{\rho''}.$$

Если, например, в градусной мере угол равен $1^\circ 12' 06''$, то в радианной мере он будет равен

$$x = \frac{1^\circ{,}2017}{57^\circ{,}30} = \frac{72'{,}10}{3438'} = \frac{4326''}{206\,265''} = 0{,}020\,97.$$

При переводе углов из градусной меры в радианную пользуются выражением

$$x = \frac{\alpha}{\rho},$$

имея в виду, что величины α и ρ выражаются в единицах одной размерности.

При переводе градусной меры в радианную и наоборот обычно пользуются таблицами, а при приближенном переводе — равенствами

$$\rho^\circ = 57^\circ, \quad \rho' = 3400', \quad \rho'' = 210\,000''.$$

Переход от радианной меры к градовой и наоборот устанавливается из соотношения

$$\begin{array}{lcl} 200^g & \text{соответствуют} & \pi = 3{,}14159\ldots \\ \alpha^g & \text{»} & y, \end{array}$$

откуда

$$\alpha^g = \frac{200^g}{\pi} \cdot y = \rho^g \cdot y,$$

$$\alpha^c = \frac{20\,000^c}{\pi} \cdot y = \rho^c \cdot y,$$

$$\alpha^{cc} = \frac{2\,000\,000^{cc}}{\pi} \cdot y = \rho^{cc} \cdot y,$$

где ρ — величина радиана, соответственно равная

$$\rho^g = 63^g{,}661\,977\ldots; \quad \rho^c = 6366^c{,}1977\ldots; \quad \rho^{cc} = 636\,619^{cc}{,}77\ldots.$$

Численные соотношения, служащие для перевода градусных в градовые деления окружности и наоборот, приведены в приложении 1.

§ 22. Практические указания по производству вычислений

Чтобы получить верный результат с минимальной затратой времени и труда, надо прежде всего выбрать средства вычислений, дающие возможность находить ответ с достаточной, но не излишней точностью, и рациональные приемы вычислений.

1. Основной принцип, которым должен руководствоваться вычислитель, — это расположение всех вычислений в схемы. При составлении схемы, наиболее благоприятной для выполнения вычислений и чтения

результатов, необходимо проанализировать формулы. Возможно, формулы следует преобразовать с таким расчетом, чтобы уменьшить количество записей, на которые уходит примерно столько же времени при работе на малых вычислительных машинах, сколько на само вычисление (см. § 82), и приспособить их для удобного расположения в схему.

2. На схеме должны быть записаны или отпечатаны формулы и значения всех постоянных величин, входящих в формулы.

Особенно внимательно нужно записать на схему исходные данные, так как ошибки переписывания их труднее всего поддаются выявлению.

Вычислитель должен всегда помнить, что проверка — необходимая часть всякого вычисления. Вторичное вычисление по тем же формулам не гарантирует от ошибок, даже если оно выполнено другим лицом независимо от первого. Более надежный контроль достигается вычислением по другим формулам или при помощи обратных действий.

3. При вычислениях возможны различные ошибки, происходящие от

а) употребления неправильной формулы или неправильного ее понимания;

б) неправильной записи исходных данных и постоянных величин, входящих в формулы;

в) неправильной установки чисел на машину или неправильного списывания промежуточных результатов со счетчиков машины;

г) неверной выборки значений из таблиц или опечаток в таблицах, неправильного определения места запятой, неисправности счетной машины, неясно записанных цифр и т. п.

Грубые ошибки в результатах вычислений могут быть также от нарушения правил вычислений с приближенными числами: неправильного округления компонентов, входящих в формулу, промежуточных результатов и др.

4. Если при вычислении допущена ошибка, необходимо найти ее и исправить результат. Во многих случаях предварительно результат можно проверить при помощи логарифмической линейки, номограммы, планиметра и т. п. Применением этих средств крупные ошибки обнаруживаются почти наверняка. Если все же ошибка не будет обнаружена, следует проверить правильность исходных данных и применяемых формул, а также средств вычислений. Таблицы удобнее всего проверять при помощи конечных разностей (см. § 58).

5. Для удобства вычислений нужно пользоваться вычислительной бумагой, разграфленной синими горизонтальными линиями в обычную линейку и красными вертикальными линиями — в широкую линейку.

Нужно все время обращать внимание на чистоту и аккуратность записей. Практика показывает, что небрежное и нестандартное написание цифр приводит к тому, что одну цифру принимают за другую. Писать рекомендуется чернилами и только на одной стороне листа. При записи цифр нужно пользоваться вычислительным шрифтом, которым записаны числа в табл. 6 и 7.

6. Проверять правильность переписанного удобнее всего вдвоем, при этом оригинал должен читать тот, кто снимал копию. Если проверка вдвоем невозможна, то следует сложить копию и оригинал так, чтобы одинаковые числа оказались по возможности рядом.

7. Каждый вычислительный лист должен иметь ясный заголовок. Желательно также указывать на вычислительном листе название и номер журнала, из которого взяты исходные данные.

На каждом вычислительном листе должны быть написаны фамилии вычислителя и проверявшего вычисления, а также указаны даты вычисления и проверки.

Глава IV

СОКРАЩЕННЫЕ СПОСОБЫ НЕПОСРЕДСТВЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ. ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРИ ПОМОЩИ ПРИБЛИЖЕННЫХ ФОРМУЛ

§ 23. Сокращенное сложение и вычитание

Сокращенных приемов арифметических действий существует много. Однако практическое значение для упрощения вычислений имеют только некоторые из них.

При устном сложении двух чисел целесообразно действия производить поразрядно, например

$$528 + 331 = 528 + 300 + 30 + 1 = 859 \text{ или } 528 + 331 = (500 + 300) + \\ + (20 + 30) + (8 + 1) = 859.$$

Поразрядно можно производить и вычитание, например,

$$962 - 324 = 962 - 300 - 20 - 4 = 638.$$

В целях упрощения сложения и вычитания пользуются «круглыми числами» и дополнениями, например,

$$3645 + 498 = 3645 + 500 - 2 = 4143;$$
$$5356 - 4992 = 5356 - 5000 + 8 = 364.$$

Двухзначные и трехзначные числа удобно складывать в уме, применяя следующий прием. Допустим, необходимо сложить числа

$$\begin{array}{r} 32 \\ 29 \\ 53 \\ 98 \\ 29 \\ \hline 241 \end{array}$$

К первому числу 32 прибавляют в уме сначала единицы (9), а затем десятки (20) второго числа, к полученному числу прибавляют единицы, а потом десятки следующего числа и т. д., считая в уме только ответы. Для нашего примера будем иметь ответы:

32; 41; 61; 64; 114; 122; 212; 221; 241.

Письменное сложение двух чисел или вычитание одного числа из другого удобнее и быстрее вести слева направо, как записываются числа.

Допустим необходимо сложить

39 035,41
2 818,93
41 854,34

Начинают сложение с левой стороны. Первая цифра будет 4, так как сумма цифр, стоящих справа от складываемой, больше десяти (в нашем примере 11). Также и в дальнейшем увеличивают сумму цифр данного разряда на единицу, если сумма цифр следующего разряда больше десяти. Таким же путем можно выполнять и вычитание одного числа из другого.

При отсутствии счетов или других средств вычислений можно сложение нескольких многозначных чисел делать сначала справа налево, а потом, для контроля, слева направо. При этом при сложении цифр одного столбца в уме нужно отмечать лишь результаты последовательного сложения

		Контроль
3456,3		
8314,2		
1408,4		
8035,1		
4563,2		
2356,8		
2,0	. . . .	26
32	. . . .	19
20	. . . .	20
19	. . . .	32
26	. . . .	2,0
28134,0		28134,0

Для нашего примера при сложении цифр в столбце десятых в уме нужно отмечать числа: 3—5—9—10—12—20; а записать 2,0; при сложении цифр в столбце единиц в уме нужно отмечать: 6—10—18—23—26—32 и записать 32 и т. д.

Для контроля выполняют сложение справа налево и при этом сложение цифр одного и того же столбца делают в уме снизу вверх.

§ 24. Сокращенное умножение

На практике иногда применяют прием сокращенного умножения, при котором *множитель записывается в обратном порядке*. Например, число 31 415 в обратном порядке записывается так: 51 413.

Ниже показан обычный и сокращенный приемы умножения двух чисел 46,525 и 3,126.

46,525	46525
3,126	6213
279 150	139575
930 50	4652
4652 5	930
139575	279
145,437 150	145,436

В этом приеме сокращенного умножения каждое отдельное произведение получается обычным путем, но при этом во множимом не учитываются цифры, стоящие правее соответствующей цифры множителя.

В нашем примере на 3 умножается число 46525, на 1 умножается уже только число 4652, на 2 — 465 и на 6 — 46.

Отбрасывая цифры множимого, в произведение вводят поправку, если она больше половины единицы последней цифры произведения. В нашем примере в последнем произведении (6×46) замечаем, что отбрасываемая во множимом цифра 5 при умножении ее на 6 дает 30, т. е. три единицы последней цифры произведения; прибавив их к последнему произведению, записываем его равным 279.

Нетрудно видеть, что последние цифры каждого произведения есть тысячные доли, почему они и записываются на одной вертикали. В самом деле, первое произведение получается путем умножения 46,525 на 3 целых и в произведении получаются поэтому тысячные доли; второе и третье произведения получаются от умножения соответственно 46,25 на 0,1 и 46,5 на 0,02 и в произведении также получаются тысячные доли и т. д. Пользуясь этим, можно всегда сообразить положение запятой, но для контроля при установлении ее положения следует делать приближенную оценку результата или пользоваться правилом, изложенным в § 25.

При применении описанного приема сокращенного умножения (с учетом поправок на отбрасываемые цифры) необходимо для получения n верных цифр в произведении подписать первую цифру множителя под $(n+1)$-ой цифрой множимого, если произведение первых значащих цифр множимого и множителя меньше десяти. Если же произведение первых значащих цифр множимого и множителя больше или равно десяти, то для получения n верных цифр в произведении необходимо подписать первую цифру множителя под n-ой цифрой множимого.

Пример 7. Вычислить произведение 86,53 и 0,5414 с двумя верными знаками. Так как $8 \times 5 = 40 > 10$ и $n = 2$, то под второй цифрой множимого надо подписать первую цифру множителя и выполнять действие так:

$$\begin{array}{r} 86{,}5 \\ \underline{145} \\ 432 \\ \underline{35} \\ 46{,}7 \end{array}$$

Точное значение этого произведения равно 46,847 ..., а после округления до десятых — 46,8.

Пример 8. Найти произведение 42,341 и 0,02316 с двумя верными значащими цифрами. Так как $4 \times 2 < 10$ и $n = 2$, то под третьей цифрой множимого подписываем первую значащую цифру множителя и выполняем действие следующим образом:

$$\begin{array}{r} 42{,}34 \\ \underline{6132} \\ 847 \\ 127 \\ \underline{6} \\ 0{,}980 \end{array}$$

Точное значение этого произведения равно 0,9806 ..., а после округления до тысячных — 0,981.

При сокращенном умножении, как и при всяких арифметических действиях с приближенными числами, для надежности n-го знака результата, последний должен быть получен с $n+1$ знаками.

§ 25. Определение положения запятой в произведении и частном

Для определения положения запятой в произведении и частном введем понятие о *значности* числа. Значностью числа называют число цифр в его целой части, а для чисел, меньших единицы, — число нулей после запятой до первой цифры, отличной от нуля. Для чисел, бо́льших или равных единице, значность считается положительной, а для чисел, меньших единицы, — отрицательной (или нуль).

Для примера в табл. 8 показаны некоторые числа и их значности.

Таблица 8

Число	Значность	Число	Значность
13 000	+ 5	1,32	+ 1
4008,3	+ 4	0,48	0
320,8	+ 3	0,0803	— 1
32,08	+ 2	0,00460	— 2

Отметим, что в большинстве руководств и пособий по изучению логарифмической линейки вместо значности употребляют слово «порядок». Мы считаем, что слово «порядок» в данном случае менее подходит, так как это слово определяет другие понятия. Например, числа 0,099 и 0,102 имеют один порядок малости, разные значности и разное количество значащих цифр (две и три).

Значность произведения и частного можно установить по значности компонентов, участвующих в их получении. При установлении значности N_{ab} произведения двух чисел a и b необходимо различать два случая:

а) $N_{ab} = N_a + N_b$, если первая значащая цифра произведения меньше, чем каждая из первых значащих цифр сомножителей и

б) $N_{ab} = N_a + N_b - 1$, если первая значащая цифра произведения больше первой значащей цифры каждого из сомножителей.

При равенстве первых цифр сомножителя и произведения судят по вторым цифрам и т. д. Вывод написанных формул дан в § 38.

Пример 9. При умножении 430,8 на 0,0620 получилось 2671. Значность первого сомножителя $N_a = +3$; значность второго сомножителя $N_b = -1$. Так как первая значащая цифра произведения (2) меньше, чем каждая из первых значащих цифр сомножителей, то для определения значности произведения пользуются формулой

$$N_{ab} = N_a + N_b = 3 + (-1) = +2.$$

Значит, произведение данных двух чисел равно 26,71.

При установлении значности $N_{\frac{a}{b}}$ частного $\left(\frac{a}{b}\right)$ необходимо также различать два случая:

а) $N_{\frac{a}{b}} = N_a - N_b$, если первая значащая цифра делимого меньше первой значащей цифры делителя и

б) $N_{\frac{a}{b}} = N_a - N_b + 1$, если первая значащая цифра делимого больше первой значащей цифры делителя.

Пример 10. При делении 0,0496 на 0,00841 получилось число 5892. Для установления значности частного нужно воспользоваться первой формулой, так как первая значащая цифра делимого (4) меньше первой значащей цифры делителя (8):

$$N_{\frac{a}{b}} = N_a - N_b = (-1) - (-2) = +1.$$

Таким образом, в частном будет одна цифра до запятой, т. е. частное будет равно 5,892.

Пользуясь изложенными правилами, можно определять положение места запятой в частном и в произведении при любом способе их получения. Но обычно к этим правилам опытные вычислители прибегают редко, так как значность результата для них известна из существа решаемой задачи, или эта значность устанавливается посредством грубого подсчета результата.

§ 26. Сокращенное деление

При непосредственном сокращенном делении многозначных чисел применяют последовательное упрощение делимого и делителя.

Для получения частного с n значащими цифрами делитель берут с $(n+1)$ значащими цифрами и для первой цифры частного производят деление обычным путем. Получив первый остаток, делят его на делитель, взятый только с n знаками (значащими цифрами); второй остаток — на делитель, взятый с $(n-1)$ знаками и т. д.

Пример 11. Разделить 16208,51 на 8642,52 так, чтобы результат получился с четырьмя верными значащими цифрами.

Делитель берем с пятью знаками и делим 16208,51 на 8642,5. Получившийся первый остаток 75660 делим только на 8642; второй остаток 6524 делим уже на 864; третий остаток 476 делим только на 86 и, наконец, четвертый остаток 46 на 9 (округленное число 8,6).

$$\begin{array}{r|l}
16208{,}51 & \underline{8642{,}5} \\
\underline{8642{,}5} & 18755 \\
7566\ 0 & \\
\underline{6913\ 6} & \\
652\ 4 & \\
\underline{604\ 8} & \\
47\ 6 & \\
\underline{43\ 0} & \\
4\ 6 &
\end{array}$$

Значность частного определяем по формуле

$$N_{\frac{a}{b}} = N_a - N_b = 5 - 4 = +1.$$

Таким образом, частное получится равным 1,876.

Деление можно еще более упростить применением счетной логарифмической линейки. Последние три цифры частного можно получить в этом случае путем деления остатка (6524) на округленный делитель (864).

§ 27. Особые приемы устного умножения, возведения в квадрат и деления

Практика вычислений выработала много различных приемов, ускоряющих получение произведения и частного. На некоторых из них мы остановимся ниже.

Умножение, когда один из сомножителей — число, близкое к единице какого-нибудь разряда

Прием этот виден из следующих примеров.

Пример 12. $863 \cdot 98 = 863\,(100 - 2) = 863 \cdot 100 - 863 \cdot 2 = 86\,300 - 1726 = 84\,574$.

Пользуясь этим приемом, удобно, например, переводить длины линий, измеренные 24-метровой лентой, длина которой при измерении считалась условно за 20 *м*.

Пример 13. $224{,}51 \cdot \frac{24}{20} = 224{,}51 \cdot 1{,}2$.

Умножение на 0,2 надо делать в уме, для чего данное число нужно разделить на десять, потом удвоить и сложить с данным числом. Поэтому решение данного примера следует записать так:

$$+\begin{array}{r} 224{,}51 \\ 44{,}90 \\ \hline 269{,}41 \end{array}$$

Умножение числа на 15

Обозначая число через a, можно написать:

$$a \cdot 15 = a\,(10 + 5) = 10a + 5a = 10a + \frac{10a}{2}$$

Таким образом, чтобы умножить число на 15, надо умножить его на десять и к результату прибавить половину полученного числа.

Пример 14. $224{,}36 \cdot 15$. Решение записываем так:

$$+\begin{array}{r} 2243{,}6 \\ 1121{,}8 \\ \hline 3365{,}4 \end{array}$$

Очевидно, что для умножения числа на 1,5 надо к данному числу прибавить частное от деления его на 2.

Умножение на числа: 9; 99; 999 и т. д.

Пример 15. $219 \cdot 9 = 219\,(10 - 1) = 2190 - 219 = 971$.

$121 \cdot 99 = 121\,(100 - 1) = 12100 - 121 = 11\,979$.

Значит, чтобы умножить на число, написанное девятками, надо к множимому приписать справа столько нулей, сколько во множителе девяток и из этого числа отнять множимое.

Пользуясь этим приемом, удобно переводить грады в градусы, учитывая, что

$$\alpha^{\circ} = \alpha^{g} \cdot \frac{90}{100} = \alpha^{g} \cdot 0{,}9 = \alpha^{g}\,(1 - 0{,}1) = \alpha^{g} - 0{,}1\ \alpha^{g}.$$

При непосредственных арифметических вычислениях полезно также пользоваться следующими приемами:

Чтобы умножить число на 0,05 надо перенести запятую влево на один знак и разделить полученное число на 2.

Чтобы разделить число на 0,05 надо перенести запятую вправо на один знак и полученное число умножить на 2.

Чтобы умножить число на 25, надо перенести запятую вправо на два знака и разделить полученное число на 4.

Чтобы разделить число на 25, надо перенести запятую влево на два знака и полученное число умножить на 4.

Чтобы умножить число на 125, надо перенести запятую вправо на три знака и полученное число разделить на 8.

Чтобы разделить число на 125, надо перенести запятую влево на три знака и умножить полученное число на 8.

Чтобы умножить число на 0,24 надо разделить данное число на 4 и от полученного числа отнять 0,01 данного.

Чтобы возвести в квадрат число, оканчивающееся на 5, надо умножить число десятков на число десятков, увеличенное на единицу, и приписать 25. Например

$$65^2 = 6 \text{ десятков} \times 7 \text{ десятков} + 25 = 4225.$$

Чтобы возвести в квадрат число, близкое к 50, надо отнять от него 25, умножить разность на 100 и прибавить квадрат разности между данным числом и числом 50. Например

$$54^2 = (54 - 25) \cdot 100 + 16 = 2916.$$

Чтобы возвести в квадрат число, близкое к 100, надо удвоить его, затем отнять 100, умножить разность на 100 и прибавить квадрат разности между данным числом и числом 100. Например:

$$109^2 = (218 - 100) \cdot 100 + 81 = 11881.$$

Существует много других приемов, но они сокращают время, затраченное на вычисление, только при большой и регулярной практике.

§ 28. Сокращенный способ извлечения квадратного корня

Для сокращенного извлечения квадратных корней существует ряд способов, но когда требуется извлечь корень с большим числом значащих цифр, наиболее удобным следует считать способ, основанный на следующей теореме.

Если после вычисления не менее половины числа значащих цифр корня разделить остаток на удвоенное значение найденной части корня, то частное дает остальные цифры корня.

Предположим, что квадратный корень извлекается с заданной точностью из числа B и пусть найденная часть корня равна b. Надо найти остальную часть корня.

Обозначив оставшуюся неизвестной часть корня через x, напишем

$$\sqrt{B} = b + x.$$

Отсюда

$$B = b^2 + 2bx + x^2$$

и

$$\frac{B - b^2}{2b} = x + \frac{x^2}{2b}, \text{ т. е. } x = \frac{B - b^2}{2b} - \frac{x^2}{2b}.$$

Разность $B - b^2$ — остаток, получившийся после извлечения первой части корня. Вторую часть корня можно получить из приближенного равенства

$$x = \frac{B - b^2}{2b}.$$

При определении x по этой формуле мы делаем ошибку, равную $\frac{x^2}{2b}$, но эта ошибка не превосходит единицы последнего знака корня, если в первой части корня будет на одну значащую цифру больше, чем в числе x.

Поясним этот способ на примере.

Пример 16. Требуется найти $\sqrt{48\,630{,}2614}$ с пятью значащими цифрами. Так как в результате достаточно иметь пять значащих цифр, то подкоренное число округляем до пяти значащих цифр и обычным путем находим первые три цифры корня. Делением остатка 230 на найденное удвоенное значение корня 440 получаем остальные две цифры корня

$$\sqrt{48630} = 220{,}52$$

$$\begin{array}{r|r} & 4 \\ \cline{2-2} 42 & 86 \\ 2 & 84 \\ \hline 440 & 230 \end{array}$$

Вторую часть значения корня $x = \frac{230}{440} = 0{,}52$ удобно получить при помощи логарифмической линейки.

Существует много различных средств и способов извлечения квадратных корней. Квадратные корни удобно определять при помощи специальных таблиц (см. приложение 2) и счетных машин (см. главу VII).

§ 29. Проверка вычислений при помощи числа 9

При вычислениях надо применять контроль, на выполнение которого требуется меньше времени, чем на само вычисление. При непосредственных вычислениях иногда применяют способ контроля действий при помощи числа 9. Этот способ основан на следующей теореме арифметики*: «Если некоторое число x является результатом выполнения действий сложения, умножения, возведения в степень над данными натуральными числами a, b, $c, \ldots$, то, заменяя каждое из этих чисел его остатком a', b', $c', \ldots$ от деления на некоторое число k и производя те же действия, мы получим вместо x новое число y, дающее при делении на k тот же остаток, что и x». Число k берут обычно равным 9.

Число 9 удобно применять потому, что остаток от деления натурального числа на 9 равен остатку от деления суммы цифр числа на 9, т. е. остаток от деления некоторого числа на 9 можно найти, складывая сначала цифры числа, затем цифры суммы цифр и т. д., пока не получится однозначное число. Для числа, например, $a = 416$ остаток от деления его на 9 будет равен 2, так как $4 + 1 + 6 = 11$ и $1 + 1 = 2$.

Из приведенной теоремы следует, что для контроля действий сложения, умножения и возведения в степень чисел, следует произвести те же действия над остатками, например,

$$a + b = 416 + 8091 = 8507.$$

Остаток от деления числа a на 9

$$4 + 1 + 6 = 11; \quad 1 + 1 = 2.$$

Остаток от деления числа b на 9

$$8 + 0 + 9 + 1 = 18; \quad 1 + 8 = 9.$$

---

* В. М. Брадис, Средства и способы элементарных вычислений, Учпедгиз, 1954, стр. 34.

Остаток от деления суммы $a+b$ на 9

$$8+5+0+7=20; \quad 2+0=2.$$

Контроль: $2+9=11$; $1+1=2$.

Контроль суммы при помощи девятки, вообще говоря, нельзя считать целесообразным, так как на выполнение такого контроля требуется не меньше времени, чем на обратное действие, особенно если действие выполнять на счетах.

Более выгодно при помощи числа 9 контролировать произведения. Например,

$$a \cdot b = 416 \cdot 8091 = 3\,365\,856.$$

Остаток произведения

$$3+3+6+5+8+5+6=36; \quad 3+6=9.$$

Остаток произведения остатков сомножителей

$$2 \cdot 9 = 18; \quad 1+8=9.$$

В обоих случаях остатки получились равными 9, значит произведение получено правильно.

Способ проверки девяткой не обнаруживает ошибки от перестановки цифр, замены цифры 0 цифрой 9 или наоборот.

Число k можно положить равным 11. Проверка при помощи числа 11 производится так же просто, как и при помощи числа 9.

§ 30. О малых величинах различных порядков

В инженерных вычислениях часто приходится иметь дело с так называемыми *малыми величинами различных порядков*. Понятие о степени или порядке малых величин условное и относительное, однако, несмотря на условность деления малых величин на различные порядки, можно при оценке относительной величины различных чисел установить некоторую определенность; оказывается возможным принять, что если некоторая величина A уменьшается в n раз, то она переходит в следующий порядок малых величин.

Условно считают малыми величинами первого, второго, третьего и т. д. порядков относительно некоторой постоянной величины A следующие величины:

$$A:n=\frac{A}{n}; \quad \frac{A}{n}:n=\frac{A}{n^2}; \quad \frac{A}{n^2}:n=\frac{A}{n^3} \text{ и т. д.}$$

Если величину A положить равной единице, а величину первого порядка обозначить α, то очевидно, что

$$\alpha=\frac{1}{n}; \quad \alpha^2=\frac{1}{n^2}; \quad \alpha^3=\frac{1}{n^3} \text{ и т. д.}$$

Таким образом, если малые величины первого порядка по отношению к некоторой постоянной возводить во вторую, третью и т. д. степени, то получаются малые величины соответственно второго, третьего и т. д. порядков по отношению к этой постоянной (в нашем случае единице).

Если α, β, γ — малые величины первого порядка относительно некоторой величины, то α^2, β^2, γ^2, $\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$, $\frac{\alpha\beta^2}{\gamma}$, $\frac{\alpha\beta^3}{\gamma^2}$ и т. д. будут величинами второго порядка малости; α^3, β^3, $\alpha^2\beta$, $\frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma}$, $\frac{\alpha^3\beta}{\gamma}$ и т. д. — величинами третьего порядка и т. д. При вычислении малыми высших порядков принято пренебрегать, так как практически это не влияет на точность результатов.

Например, ограничиваясь точностью в 0,01 при вычислении $2{,}52^2 = (2{,}5 + 0{,}02)^2 = 6{,}25 + 5 \cdot 0{,}02 + 0{,}02^2$, величиной $0{,}02^2 = 0{,}0004$ можно пренебречь, как малой величиной второго порядка.

Пренебрегая малыми величинами высших порядков в точных, но громоздких формулах, получают различные приближенные формулы, которые весьма полезны при технических вычислениях, так как по ним можно получить результат с необходимой точностью гораздо быстрее, чем по точным формулам. Так, например, если α, β и γ — малые величины первого порядка относительно единицы, то можно принять

$$(1 \pm \alpha)(1 \pm \beta)(1 \pm \gamma) \approx 1 \pm \alpha \pm \beta \pm \gamma.$$

В этой формуле отброшены как малые величины второго и третьего порядков четыре члена: $\pm \alpha\beta$, $\pm \alpha\gamma$, $\pm \beta\gamma$ и $\pm \alpha\beta\gamma$.

Необходимо отметить, что относительно выражений, представляющих отношения малых величин одного и того же порядка

$$\frac{\alpha}{\beta}, \quad \frac{\alpha}{\gamma}, \quad \frac{\alpha^2}{\beta^2}, \quad \frac{\alpha\beta^2}{\gamma^3}\dots$$

трудно сказать что-нибудь определенное, так как такие отношения могут быть близки к единице, но они могут быть также и большими и малыми величинами, ибо в пределах одного порядка α, β и γ могут значительно различаться между собой.

§ 31. Вычисления при помощи приближенных формул

В геодезических вычислениях широко применяют приближенные формулы, выведенные на основе *ряда Тейлора*.

Из курса высшей математики известен ряд Тейлора вида

$$f(x) = f(a) + (x - a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1 \cdot 2} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(a) + \cdots \quad (52)$$

Написав $x + h$ вместо x и x вместо a, можно представить этот ряд так:

$$f(x + h) = f(x) + \frac{hf'(x)}{1!} + \frac{h^2 f''(x)}{2!} + \frac{h^3 f'''(x)}{3!} + \cdots \quad (53)$$

Правая часть равенства (52) представляет собой степенной ряд разложения функции $f(x)$ по степеням разности $x - a$, а правая часть равенства (53) — разложения функции $f(x + h)$ в ряд по степеням h. Если $f(x)$ — целая рациональная функция, то эти равенства представляют собой точные конечные выражения.

Ряд Тейлора выгодно употреблять для определения значений функции, соответствующих значениям x, близким к a, т. е. в тех случаях, когда $x - a$ или h достаточно малы по абсолютной величине.

В геодезических вычислениях часто употребляются *знакопеременные ряды*, которые дают возможность очень просто производить оценку точности результата вычислений. Именно при монотонно убывающих по абсолютной величине членах знакопеременного ряда остаток имеет знак своего первого члена и по абсолютной величине меньше его.

Если в (52) положить $a = 0$, то получится так называемый *ряд Маклорена*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} f''(0) + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} f'''(0) + \cdots, \quad (54)$$

служащий для разложения функции $f(x)$ по степеням переменной x.

Иногда приходится вычислять $f(x) = (1+x)^m$, где m — любое вещественное число, а x — малая величина. Разложим в ряд $f(x) = (1+x)^m$ по степеням x по формуле (54), для чего найдем последовательные производные

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}; \quad f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2};$$
$$f'''(x) = m(m-1)(m-2)(1+x)^{m-3};\ldots$$

Полагая $x = 0$, получим

$$f(0) = 1; \quad f'(0) = m; \quad f''(0) = m(m-1);$$
$$f'''(0) = m(m-1)(m-2)\ldots$$

Поэтому

$$f(x) = (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots \quad (55)$$

Ряд (55) называют *биномиальным*, а коэффициенты его — биномиальными коэффициентами; это равенство легко получить, применяя формулу бинома Ньютона.

Отметим некоторые частные случаи биномиального ряда, имеющие важное практическое значение:

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots; \quad (56)$$

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots; \quad (57)$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \cdots; \quad (58)$$

$$\sqrt{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 - \cdots; \quad (59)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \cdots; \quad (60)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + \cdots; \quad (61)$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - \cdots; \quad (62)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots; \quad (63)$$

При малом x в приведенных и других биномиальных рядах достаточно пользоваться двумя-тремя членами разложения, обрывая ряд, вообще говоря, на таком члене, величина которого меньше ошибки результата вычислений. Например, допустим, что требуется определить $\sqrt{0{,}98}$ с тремя верными десятичными знаками. На основании формулы (59) напишем:

$$\sqrt{0{,}98} = (1-0{,}02)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\cdot 0{,}02 - \frac{1}{8}\cdot 0{,}0004 - \cdots$$

Членом $\frac{1}{8}x^2 = \frac{1}{8}\cdot 0{,}0004$ как величиной второго порядка малости и последующими членами как величинами высших порядков малости можно пренебречь, и результат будет верен до четырех десятичных знаков

$$\sqrt{0{,}98} = 0{,}9900.$$

В табл. 9* приведены некоторые употребительные приближенные формулы с указанием интервалов, в которых надлежит брать переменные x, чтобы получить результаты вычислений верными до k точных десятичных знаков.

Таблица 9

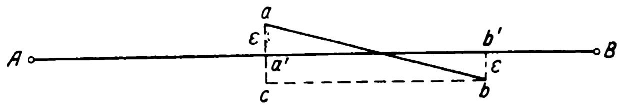
Приближенная формула	Число точных десятичных знаков					
	$k=2$		$k=3$		$k=4$	
	x находится в интервале					
	от	до	от	до	от	до
$(1+x)^2 \approx 1+2x$	−0,07	+0,07	−0,022	+0,022	−0,007	+0,007
$(1+x)^3 \approx 1+3x$	−0,04	+0,04	−0,012	+0,012	−0,004	+0,004
$1:(1+x) \approx 1-x$	−0,06	+0,07	−0,022	+0,022	−0,007	+0,007
$1:(1+x) \approx 1-x+x^2$	−0,16	+0,18	−0,077	+0,081	−0,036	+0,037
$\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x$	−0,19	+0,21	−0,062	+0,064	−0,020	+0,020
$\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{}x^2$	−0,39	+0,46	−0,19	+0,20	−0,09	+0,09
$\sqrt[3]{1+x} \approx 1+\frac{1}{3}x$	−0,20	+0,22	−0,068	+0,068	−0,021	+0,021
$\sqrt[3]{1+x} \approx 1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2$	−0,39	+0,47	−0,19	+0,21	−0,09	+0,09
$\sin x \approx x$	−17°	+17°	− 8°,2	+ 8°,2	− 3°,8	+ 3°,8
$\sin x \approx x-\frac{1}{6}x^3$	−51°	+51°	−32°	+32°	−20°	+20°
$\cos x \approx 1$	− 5°,7	+ 5°,7	− 1°,8	+ 1°,8	− 0°,5	+ 0°,5
$\cos x \approx 1-\frac{1}{2}x^2$	−33°	+33°	−18°	+18°	−10°	+10°
$\operatorname{tg} x \approx x$	−14°	+14°	− 6°,4	+ 6°,4	− 3°,0	+ 3°,0
$\operatorname{tg} x \approx x+\frac{1}{3}x^3$	−29°	+29°	−18°	+18°	−11°	+11°
$\ln(1+x) \approx x$	−0,09	+0,10	−0,030	+0,031	−0,00	+0,010
$\lg(1+x) \approx 0{,}4343\,x$	−0,14	+0,15	−0,047	+0,048	−0,015	+0,015
$e^x \approx 1+x$	−0,10	+0,09	−0,031	+0,031	−0,010	+0,010
$10^x \approx 1+2{,}30\,x$	−0,04	+0,04	−0,014	+0,014	−0,004	+0,004
$\ln\frac{1+x}{1-x} \approx 2x$	−0,19	+0,19	−0,090	+0,090	−0,042	+0,042
$\lg\frac{1+x}{1-x} \approx 0{,}869\,x$	−0,25	+0,25	−0,119	+0,119	−0,055	+0,055

При помощи ряда Тейлора можно с любой, практически необходимой и достаточной точностью определять натуральные значения тригонометрических функций, вычислять логарифмы чисел, извлекать корни из любых чисел и решать ряд геодезических задач.

* См. В. М. Брадис, Теория и практика вычислений, 1937, стр. 47.

Пример 17. Определить, на какую величину можно допускать отклонение концов мерной ленты от створа линии, чтобы ошибка в длине линии, вызываемая этим источником, не превышала 1 : 5000.

Допустим, что концы ленты ab оказались отклоненными от створа линии AB на величину ε (фиг. 4).



Фиг. 4. Отклонение ленты от створа линии

Из чертежа видно, что разницу между длиной ленты l и ее проекцией $a'b' = cb$ на линию AB можно определить по формуле

$$\Delta l = l - \sqrt{l^2 - (2\varepsilon)^2} = l - l\sqrt{1 - \left(\frac{2\varepsilon}{l}\right)^2} = l - l\left[1 - \left(\frac{2\varepsilon}{l}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Разлагая выражение $\left[1 - \left(\frac{2\varepsilon}{l}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$ в ряд по формуле (59) и ограничиваясь по малости ε по сравнению с l первым членом разложения, получим

$$\Delta l = l - l\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2\varepsilon}{l}\right)^2\right] = 2\,\frac{\varepsilon^2}{l}.$$

Относительная ошибка в длине линии в соответствии с принятым условием будет

$$\frac{\Delta l}{l} = 2\,\frac{\varepsilon^2}{l^2} = \frac{1}{5000},$$

откуда, при длине ленты $l = 20$ *м*, найдем

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{l^2}{10\,000}} = \frac{20\text{ м}}{100} = 0{,}20\text{ м}.$$

§ 32. Дифференциальные формулы

В некоторых вопросах геодезии, располагая значениями функций для некоторых значений аргументов, приходится определять новые значения тех же функций для изменившихся значений аргументов. Эту задачу можно решить или непосредственно, или путем вычисления поправок к прежним значениям функций. Первый метод требует обычно много времени, тогда как второй (при помощи дифференциальных формул) гораздо быстрее приводит к цели. С такой задачей, решение которой мы разберем на отдельных примерах, приходится, в частности, иметь дело при составлении сборных планов укрупненных колхозов по планам отдельных участков, имеющих разную ориентировку и разные начала координат.

Используем для решения этой задачи ряд Тейлора, написав его в следующем виде:

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \frac{h^3}{6}f'''(a) + \cdots \qquad (64)$$

При знакопеременном ряде членами со второй степенью h и выше можно пренебречь, если $\left|\frac{h^2}{2}f''(a)\right| \leqslant 0{,}5$ единицы последнего вычисляемого знака, и членами с третьей степенью h и выше можно пренебречь, если $\left|\frac{h^3}{6}f'''(a)\right| \leqslant 0{,}5$ единицы последнего знака и т. д.

Используем написанный ряд для вычисления поправок в приращения за поворот осей координат.

Пусть

$$f(a) = f(\alpha) = \Delta x = S\cos\alpha$$

и

$$f(a+h) = f(\alpha + \delta\alpha) = \Delta x + \delta x = S\cos(\alpha + \delta\alpha),$$

где $\delta\alpha$ — разность дирекционных углов одной и той же линии в новой и старой системах координат, т. е.

$$\delta\alpha = \alpha_{\text{нов}} - \alpha_{\text{ст.}}.$$

Тогда поправку в приращение Δx за поворот осей координат согласно равенству (64) можно получить по формуле

$$\delta x = -\Delta y\frac{\delta\alpha}{\rho} - \Delta x\frac{\delta\alpha^2}{2\rho^2} + \Delta y\frac{\delta\alpha^3}{6\rho^3} + \cdots \qquad (65)$$

Аналогично можно получить поправку в приращение Δy.

$$\delta y = +\Delta x\frac{\delta\alpha}{\rho} - \Delta y\frac{\delta\alpha^2}{2\rho^2} - \Delta x\frac{\delta\alpha^3}{6\rho^3} + \cdots \qquad (66)$$

Если приращения не превышают 400 *м* и $\delta\alpha \leqslant 1°$, можно пользоваться формулами

$$\left.\begin{aligned} \delta x &= -\Delta y\frac{\delta\alpha'}{3438'} \\ \delta y &= +\Delta x\frac{\delta\alpha'}{3438'} \end{aligned}\right\}. \qquad (67)$$

Ошибки приращений от применения упрощенных формул (67) в этом случае не превысят 0,1 *м*.

Поправки δx и δy удобно находить по номограмме или на логарифмической линейке.

Исходя из (64), можно написать следующие формулы для преобразования прямоугольных координат из одной координатной системы в другую

$$\left.\begin{aligned} X &= X_0 + (x - x_0) - (y - y_0)\frac{\delta\alpha}{\rho} - (x - x_0)\frac{\delta\alpha^2}{2\rho^2} + \cdots \\ Y &= Y_0 + (y - y_0) + (x - x_0)\frac{\delta\alpha}{\rho} - (y - y_0)\frac{\delta\alpha^2}{2\rho^2} - \cdots \end{aligned}\right\}, \qquad (68)$$

где X_0 и Y_0 — координаты в новой системе координат некоторой точки, координаты которой в старой системе x_0 и y_0; X и Y — новые координаты другой точки, для которой координаты в старой системе равны x и y.

Пример 18. Преобразовать прямоугольные координаты вершин разомкнутого хода в новую систему координат введением дифференциальных поправок в старые приращения по формулам (67); $\delta\alpha = \alpha_{нов.} - \alpha_{ст.} = -1^\circ 03',4$ (табл. 10).

Таблица 10

№ точки	S	Приращения в старой системе		Поправки за поворот осей координат		Новые приращения		Новые координаты	
		Δx	Δy	δx	δy	ΔX	ΔY	X	Y
А								$-4262,3$	$+3068,2$
	81,5	$+58,7$	$+56,5$	$+1,0$	$-1,1$	$+59,7$	$+55,4$		
33							-1	$-4202,6$	$+3123,6$
	154,4	$+7,1$	$+154,2$	$+2,8$	$-0,1$	$+9,9$	$+154,1$		
34						$+1$	-2	$-4192,7$	$+3277,6$
	341,0	$-106,9$	$+323,8$	$+6,0$	$+2,0$	$-100,9$	$+325,8$		
35							-1	$-4293,5$	$+3603,2$
	235,9	$+203,3$	$+119,7$	$+2,2$	$-3,8$	$+205,5$	$+115,9$		
36								$-4088,0$	$+3719,0$
	83,1	$+47,5$	$+68,2$	$+1,2$	$-0,9$	$+48,7$	$+67,3$		
Б								$-4039,3$	$+3786,3$
	895,9	$+209,7$	$+722,4$	$+13,2$	$-3,9$	$+222,9$	$+718,5$	$+223,0$	$+718,1$

Контроль вычисления поправок

$$\Sigma\,\delta x = -\Sigma\,\Delta y\,\frac{\delta\alpha'}{\rho'} = -722,4\left(\frac{-63,4}{3438}\right) = +13,2;$$

$$\Sigma\,\delta y = +\Sigma\,\Delta x\,\frac{\delta\alpha'}{\rho'} = +209,7\left(\frac{-63,4}{3438}\right) = -\ 3,9.$$

Пример 19. Вычислить, на сколько увеличится площадь круга, измеренного при помощи планиметра и контрольной линеечки на плане в масштабе 1 : 10 000, если длина контрольной линеечки, равная 6,00 *см*, увеличится на 0,01 *см*.

В данном случае $f(a) = \pi r^2$, поэтому ошибка площади будет равна $hf'(a) = 0,01 \cdot 2\,\pi r = 0,01 \cdot 6,28 \cdot 6 = 0,38$ *см*^{2}, что на местности соответствует 0,38 *га*. Таким образом, ошибка в длине радиуса на 0,1 *мм* приводит к относительной ошибке площади

$$\frac{0,38}{\pi r^2} = \frac{0,38}{110} = \frac{1}{300}.$$

Так как длина контрольных линеек известна обычно с ошибкой, большей 0,1 *мм*, то следует определять цену деления планиметра не при помощи контрольной линеечки, а по квадратам координатной сетки (в этом случае, помимо повышения точности определения цены деления планиметра, учитывается и деформация бумаги).

Пример 20. Вычислить изменение логарифма синуса угла α при изменении самого угла на $\Delta\alpha$. Эта задача, возникающая в геодезических уравнительных вычислениях, решается разложением в ряд функции

$$y = \lg \sin(\alpha + \Delta\alpha).$$

Согласно формуле (53) имеем

$$\lg \sin(\alpha + \Delta\alpha) = \lg \sin \alpha + \frac{\Delta\alpha}{\rho} M \operatorname{ctg} \alpha + \cdots,$$

где M — модуль перехода от натуральных к десятичным логарифмам, а $\Delta\alpha$ — малое изменение угла.

Выражая поправку угла в секундах, можно с достаточной точностью написать

$$\lg \sin(\alpha + \Delta\alpha) - \lg \sin \alpha = \frac{\Delta\alpha''}{206\,000''} M \operatorname{ctg} \alpha.$$

Например, при изменении угла $\alpha = 30^\circ$ на $10''$ логарифм синуса угла изменится на величину

$$\frac{10'' \cdot 0{,}434}{206\,000''} 1{,}73 \cdot 10^6 = 36 \text{ единиц шестого знака.}$$

Эту же величину можно найти по таблицам, как разность

$$\lg \sin 30^\circ 00' 10'' - \lg \sin 30^\circ 00' 00'',$$

которая обычно дается на $10''$ в таблицах.

В примерах 18—20 мы применяли приближенные дифференциальные формулы для случая одной переменной.

Остановимся теперь на приближенных формулах с несколькими переменными и выведем для примера дифференциальную формулу, выражающую зависимость между изменением дирекционного угла α и изменением координат какого-нибудь конца отрезка прямой. Напишем известную формулу

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y - y_0}{x - x_0},$$

где x_0 и y_0 — неизменные координаты первой точки; x и y — координаты второй точки, которые получили изменения dx и dy.

Определим дифференциал написанной функции

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{(x - x_0)\, dy - (y - y_0)\, dx}{(x - x_0)^2}.$$

Учитывая, что

$$x - x_0 = S \cos \alpha,$$
$$y - y_0 = S \sin \alpha,$$

и выражая поправку дирекционного угла в секундах, можем написать

$$d\alpha'' = \rho'' \frac{\cos \alpha\, dy - \sin \alpha\, dx}{S}. \tag{69}$$

Для формулы (69), представляющей собой *дифференциальную формулу дирекционного угла*, имеются таблицы*, позволяющие находить поправки $d\alpha''$ в зависимости от параметров S, α, dx и dy.

Формула (69) пригодна для вычисления поправки дирекционного угла и тогда, когда изменяются координаты первой точки, а координаты второй остаются без изменения, только в этом случае знак поправки $d\alpha''$ изменяется на обратный. Нетрудно вывести дифференциальную формулу дирекционного угла для общего случая, когда оба конца отрезка изменяют свое положение.

---

* Л. Я. Нейшулер. Таблицы для определения поправок в дирекционные углы за дифференциальные изменения координат пунктов триангуляции III и IV классов, Центральная вычислительная часть, 1948.

При составлении дифференциальных формул для функций нескольких переменных можно пользоваться формулой Тейлора. Пусть имеем функцию

$$u = f(x, y, z, \dots w).$$

Приближенные значения независимых переменных обозначим x_0, y_0, $z_0, \dots, w_0$, а малые поправки к ним $\delta x, \delta y, \delta z, \dots, \delta w$, т. е. будем считать, что

$$x = x_0 + \delta x, \quad y = y_0 + \delta y, \quad z = z_0 + \delta z, \dots$$

Пользуясь главным членом формулы Тейлора для многих переменных, можно написать выражение для приближенного значения приращения функции

$$\delta u = f(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z, \dots) - f(x_0, y_0, z_0, \dots) =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 \delta x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 \delta y + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 \delta z + \cdots, \tag{70}$$

где

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = k_1, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = k_2, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 = k_3, \dots$$

постоянные числа, вычисленные для значений x_0, y_0, $z_0, \dots$

Таким образом, приближенную формулу для вычисления приращения (поправки) функции общего вида можно выразить так:

$$\delta u = k_1 \delta x + k_2 \delta y + k_3 \delta z + \cdots \tag{71}$$

Применение формулы (71) рассмотрим на примере определения дифференциальной поправки дирекционного угла, вызванной небольшим изменением координат обоих концов данного отрезка.

Дирекционный угол линии выразим формулой

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{y - y'}{x - x'}.$$

В нашем примере

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = \frac{1}{1 + \left(\frac{y - y'}{x - x'}\right)^2} \cdot \frac{1}{x - x'}.$$

Учитывая, что

$$x - x' = S_0 \cos \alpha_0 \text{ и } y - y' = S_0 \sin \alpha_0,$$

представим последнее равенство в таком виде

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = \frac{\cos \alpha_0}{S_0},$$

где α_0 и S_0 — приближенные значения α и S.

Аналогично определим частные производные по переменным x, y' и x'

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = \frac{-\sin \alpha_0}{S_0}; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)_0 = \frac{-\cos \alpha_0}{S_0}; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)_0 = \frac{\sin \alpha_0}{S_0}.$$

Выражая поправку дирекционного угла в секундах, будем иметь согласно формуле (71)

$$\delta \alpha'' = \frac{\rho''}{S_0} (\sin \alpha_0 \delta x' - \cos \alpha_0 \delta y' - \sin \alpha_0 \delta x + \cos \alpha_0 \delta y). \tag{72}$$

Пример 21. Дано: $\alpha_0 = 59°44'51''$; $S_0 = 674{,}44$ *м*.

Вычислить поправку дирекционного угла по поправкам координат концов отрезка, равным $\delta x' = +0{,}06$ *м*; $\delta y' = -0{,}08$ *м*; $\delta x = +0{,}12$ *м*; $\delta y = +0{,}65$ *м*.

Согласно формуле (72) имеем

$$\delta\alpha'' = \frac{\rho''}{S_0}\left[\sin\alpha_0(\delta x' - \delta x) + \cos\alpha_0(\delta y - \delta y')\right] =$$

$$= \frac{206\ 300}{674{,}4}\left[0{,}8641(-0{,}06) + 0{,}5034(+0{,}73)\right] = +96'',7.$$

Таким образом, новый дирекционный угол $\alpha = 59°46'28''$.

В геодезической практике аналогичные задачи приходится решать при определении координат точек по методу многократной засечки (прямой и обратной).

Упражнения

1. Применяя приемы сокращенных арифметических действий, вычислить выражения

$$486{,}493 \cdot 0{,}0506;$$
$$63{,}0029 \cdot 0{,}0036;$$
$$5{,}634 : 0{,}028,$$

имея в виду, что все написанные числа округлены так, что ошибка в каждом случае не превосходит половины единицы последней цифры.

2. Применяя сокращенный способ, извлечь квадратные корни:

$\sqrt{635{,}354}$ с 4-значащими цифрами;

$\sqrt{0{,}039\ 546}$ с 3-значащими цифрами;

$\sqrt{213\ 065{,}48}$ с 5-значащими цифрами.

3. Написать приближенную формулу для произведения $(1+x)(1+y)$, имея в виду, что x и y — малые величины.

4. *При помощи биномиальных рядов вычислить* $1:0{,}96$; $\sqrt{1{,}08}$; $1:\sqrt{0{,}968}$; $0{,}995^3$; $\sqrt[3]{0{,}95}$, имея в виду, что 0,96; 1,08; 0,968; 0,995; 0,95 — округленные числа.

5. Пользуясь биномиальным рядом, вычислить поправку за наклон линии к горизонту, если длина наклонной линии равна 156,58 *м*, а превышение одного конца линии над другим 2,68 *м*.

6. Пользуясь рядом Тейлора, вычислить lg 200,42, если известно, что lg 200,00 = = 2,30 103. Полученный результат сравнить с данными таблиц логарифмов.

7. Координаты начала линии изменились на величины: $dx = +0{,}08$ *м*, $dy = -0{,}12$ *м*, а координаты конца линии остались без изменения. Вычислить, на сколько секунд изменится дирекционный угол, если прежняя величина его $\alpha = 30°00'00''$, а длина линии $S = 200{,}00$ *м*.

Глава V

СЧЕТНАЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ЛИНЕЙКА

§ 33. Общие замечания об устройстве и применении счетных логарифмических линеек

Счетная логарифмическая или, как ее иначе называют, логарифмическая линейка — простой по конструкции и гениальный по замыслу счетный прибор. При помощи обычной логарифмической линейки можно производить умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня, находить по данным углам натуральные значения всех тригонометрических функций, по натуральным значениям тригонометрических функций находить углы, а также производить разные комбинированные действия. Кроме того, при помощи логарифмической линейки можно находить корни квадратных уравнений, определять логарифмы и антилогарифмы чисел и тригонометрических функций и производить ряд других вычислений. При помощи счетной линейки можно, например, вычислять на карте или на плане площади различных фигур, ограниченных как прямыми, так и кривыми линиями.

Имеется много систем специальных логарифмических линеек, приспособленных для работы в определенных отраслях; ими пользуются механики, электрики, геодезисты, экономисты, колхозные бригадиры и другие специалисты.

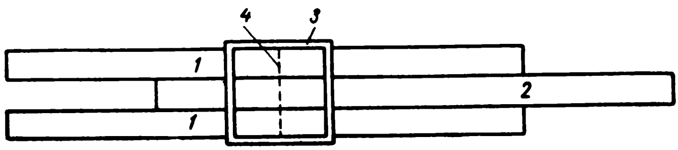
По конструкции логарифмические линейки также разнообразны; кроме обычных, имеются круглые, цилиндрические, с разрезными шкалами и др. Имеются линейки с микрометрическими винтами, с лупами и другими приспособлениями, облегчающими и уточняющими вычисления.

При всем многообразии систем логарифмических линеек они отличаются между собой только деталями, так как их шкалы построены по одному и тому же принципу. Поэтому для изучившего приемы вычислений на линейке какой-нибудь одной системы не возникает особых затруднений при пользовании линейками других систем. В настоящей книге рассматривается логарифмическая линейка обычного типа и специальные геодезические линейки МГМ и ВТС.

Ниже увидим, что точность результатов вычислений на логарифмической линейке зависит от длин ее шкал. Логарифмическая линейка обычного типа длиной 25 *см* дает возможность получать четыре значащие цифры в интервале от 1 до 2 и три — на остальной части основной шкалы с ошибкой порядка одной единицы последнего знака. Кроме 25-сантиметровых линеек, имеются логарифмические линейки длиной 12,5; 50 *см* и т. д.

Логарифмические линейки можно применять в различных отраслях народного хозяйства для быстрого и достаточно точного вычисления. В геодезической практике логарифмической линейкой широко пользуются при определении различных поправок (за наклон линий к горизонту, за температуру, при уравнительных вычислениях), при вычислении превышений геодезического нивелирования и т. п. Линейка — незаменимый инструмент для оценки точности измерений и результатов вычислений, т. е. при вычислении различного рода ошибок. Счетную линейку используют при различных контрольных вычислениях и применяют ее также в сочетании с другими средствами вычислений.

Логарифмическая линейка обычной системы, как и большинство линеек других систем, состоит из трех частей (фиг. 5): *1* — корпуса ли-



Фиг. 5. Части счетной линейки

нейки, *2* — движка, скользящего в пазу корпуса, и *3* — бегунка — металлической рамки со стеклом, на котором нанесена тонкая черта — визирная линия *4* (указатель), называемая иногда «визиром». Есть линейки с несколькими визирными линиями. Бегунок на линейке удерживается при помощи пружины, которая соприкасается с верхним пазом корпуса линейки.

При выборе логарифмической линейки необходимо обращать внимание на ее качество, которое характеризуется следующими признаками:

а) штрихи на шкалах должны быть четкими и ясными;

б) движок и бегунок должны ходить свободно, везде с одинаковым трением, не перемещаться самопроизвольно; не должно быть заметно щелей между движком и линейкой;

в) шкалы движка должны быть равны тождественным шкалам линейки;

г) бегунок должен оставаться на месте при перемещении движка;

д) визирная линия бегунка должна быть перпендикулярна к осям шкал и при установке ее на начальный (или конечный) штрих на одной шкале должна проходить через начальные (или конечные) штрихи на остальных шкалах линейки;

е) визирная линия должна быть нанесена на нижней (прилегающей к линейке) поверхности стекла бегунка и представлять собой весьма тонкую черту.

Счетная линейка требует *бережного обращения*. Во избежание деформации нельзя линейку держать в горячем или влажном месте. Ее нельзя ронять; нельзя царапать ее поверхность. Если шкалы линейки загрязнятся, ее нужно протереть тряпочкой, смоченной винным спиртом, но не бензином и не водой (бензин растворяет краску, а от воды разбухает дерево).

При бережном отношении линейка работает много лет, а в небрежных руках скоро начинает давать результаты пониженной точности или оказывается вовсе непригодной для работы.

Логарифмическая линейка имеет почти ту же давность, что и сами логарифмы. В 1620 г. английский астроном и топограф Гунтер предложил логарифмическую шкалу, которая в сочетании с циркулем служила вначале удобным средством для умножения и деления. Вскоре циркуль был заменен второй шкалой, тождественной с первой. В XIX веке к линейке приспособили «бегунок», и с этого времени линейку стали применять во всех вычислениях, где достаточно иметь две — четыре верные значащие цифры.

§ 34. Понятие о функциональной шкале

Для установления приемов вычисления при помощи логарифмической линейки необходимо сначала остановиться на понятии о функциональной шкале.

Возьмем функцию одного независимого переменного в виде

$$y = mf(x), \tag{73}$$

где m — некоторое произвольное число. Будем предполагать, что эта функция является однозначной, непрерывной и монотонной, например, возрастающей в интервале от $x = a$ до $x = b > a$. Для различных значений переменного x составим табл. 11 соответствующих значений функции y.

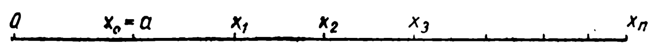
Таблица 11

Значение аргумента	$x_0 = a$	x_1	x_2	...	$x_n = b$
Значение функции	$mf(x_0)$	$mf(x_1)$	$mf(x_2)$	...	$mf(x_n)$

Начиная от некоторой определенной точки O, отложим по прямой линии (на оси шкалы) отрезки, длины которых выражаются числами

$$mf(x_0),\quad mf(x_1),\quad mf(x_2), \ldots, mf(x_n).$$

В конце каждого такого отрезка проведем штрихи, перпендикулярные к оси шкалы, и около штрихов подпишем соответствующие значения независимого переменного x (фиг. 6).



Фиг. 6. Схема функциональной шкалы, построенной по уравнению $y = mf(x)$

Построенная таким образом шкала называется *функциональной*, а число m называется ее *модулем*, или *масштабом*. Таким образом, функциональная шкала есть графическое изображение функции одного независимого переменного.

Шкалы бывают *равномерные* и *неравномерные*. Равномерные шкалы характеризуются тем, что на них отрезки пропорциональны числам, подписанным на шкале. Уравнение равномерной шкалы имеет вид

$$y = mx.$$

Примером равномерной шкалы может служить шкала, которая наносится на обычной чертежной линейке или треугольнике, а также шкала мантисс и миллиметровая шкала логарифмической линейки.

Шкалы, на которых отсчеты непропорциональны соответствующим им отрезкам, называются неравномерными. Функциональные шкалы, построенные для уравнений

$$y = m \lg x, \quad y = m \lg \sin \alpha \text{ и т. п.},$$

относятся к неравномерным.

При построении функциональной шкалы надо исходить из размеров ее рабочей части. Если переменная x изменяется в промежутке от a до b, т. е. если

$$a \leqslant x \leqslant b,$$

то в начале шкалы будет отсчет a, а в конце — отсчет b. В этом случае длина рабочей части шкалы будет

$$l = m\,[f(b) - f(a)], \tag{74}$$

а уравнивание шкалы

$$y = m\,[f(x) - f(a)]. \tag{75}$$

Уравнениями (73), (74) и (75) пользуются как при построении шкал логарифмической линейки, так и при построении шкал некоторых простейших номограмм-чертежей, также являющихся хорошим счетным приспособлением.

§ 35. Основные шкалы линейки. Отсчеты на шкалах

Основной шкалой, или *шкалой оснований* будем называть такую, которая строится согласно уравнению

$$y = m \lg x. \tag{76}$$

Для обычных линеек $m = 250$ *мм*, а переменная x изменяется в пределах от 1 до 10. Задаваясь различными значениями x, мы будем получать различные значения функции y. В табл. 12 даны значения y для $m = 250$ *мм*.

Таблица 12

x	1	2	3	. . .	10
$y = m \lg x$ в миллиметрах	0	75,2	119,3		250,0

В соответствии с табл. 12 на шкале оснований нанесены значения функции $m \lg x$, а подписаны аргументы x. Так как при $x = 1$ функция $m \lg x = 0$, то против начального штриха подписана цифра 1; при $x = 10$ функция $m \lg x = 250$ *мм*, поэтому против крайнего правого штриха подписано число 10. Иногда вместо 10 против конечного штриха подписывается 1. На логарифмической линейке нанесены две тождественные шкалы оснований (фиг. 7); одна — на корпусе линейки (шкала A), а вторая — на движке (шкала A_1). В последующем изложении для краткости слово «корпус» будем опускать.

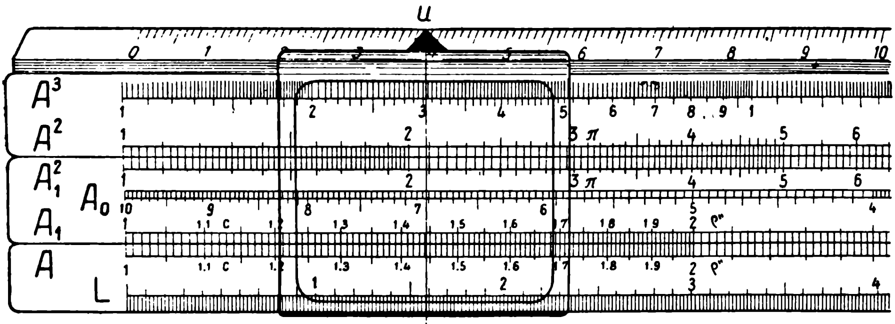
Кроме крупных делений, на шкалах оснований нанесены более мелкие деления, а именно:

в интервале	1—2	через	0,01,
„ „	2—4	„	0,02,
„ „	4—10	„	0,05.

• Различную цену одного деления в разных местах шкалы приходится брать потому, что логарифмы чисел увеличиваются непропорционально самим числам.

Таким образом, на логарифмических шкалах линейки, в том числе и на основных, отложены отрезки y, выражающие логарифмы чисел в некотором масштабе, а против концов их подписаны соответствующие числа x. Из свойств логарифмов известно, что логарифмы чисел, отличающихся между собой лишь положением запятой, будут иметь одинаковые мантиссы и разные характеристики, т. е. каждая метка шкалы имеет не одно, а множество значений. Например метку 1442 (фиг. 7, шкалы A и A_1) можно читать, как 1,442; 14,42; 144,2; 0,1442 и т. д.

Прежде чем приступить к действиям на линейке, необходимо натренироваться в производстве отсчетов, так как наибольшее затруднение у начинающих вызывает правильное чтение чисел на шкалах. На фиг. 8 изображены в увеличенном виде три отрезка шкалы оснований с различной ценой одного деления.



Фиг. 7. Шкалы на линейке и на верхней стороне движка:

A — основная шкала на корпусе линейки; A_1 — основная шкала на движке; A_0 — обратная шкала на движке; A_1^2 — шкала квадратов на движке; A^2 — шкала квадратов на корпусе линейки; A^3 — шкала кубов: U — указатель на бегунке, служащий для отсчета по миллиметровой шкале; L — шкала мантисс десятичных логарифмов.

На отрезке I с ценой деления, равной одной сотой, по указателю (визирной линии) a_1b_1 прочтем 1,142. Так как мантисса логарифмов не изменяется от увеличения или уменьшения чисел в 10^k раз, то этим же положением указателя можно пользоваться для определения чисел 11,42; 114,2; 0,1142 и т. д. На отрезке II с ценой деления, равной двум сотым, по указателю a_2b_2 можно прочесть 2,19; 21,9; 0,219 и т. д. На отрезке III с ценой деления, равной пяти сотым, по указателю a_3b_3 можно прочесть 4,97; 49,7; 0,497 и т. д.

При чтении и установке чисел на линейке рекомендуется не обращать внимания на положение запятой и на нули, стоящие в конце числа. Число на линейке нужно читать отдельными цифрами в последовательном порядке. Например, отсчет по индексу a_3b_3 надо сделать так: 4—9—7, после чего поставить запятую в зависимости от значности данного числа. Установку чисел на шкалах также рекомендуется делать, не обращая внимания на запятую и на нули, которые имеются в начале или в конце числа.

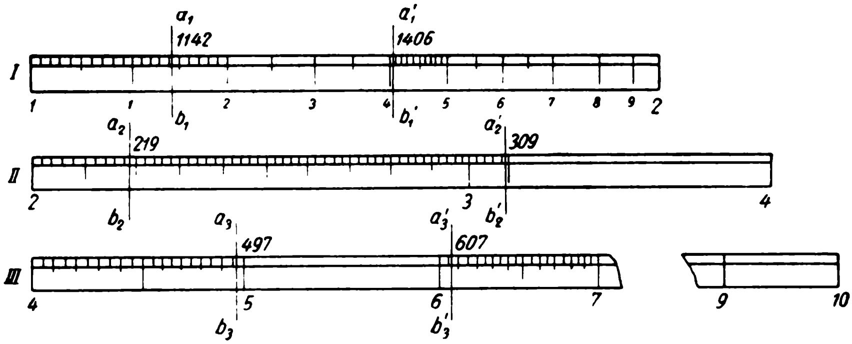
Рассмотрим три примера на трех отрезках шкал с разной ценой деления (фиг. 8).

1. Нужно установить на шкале число 14060 (или 14,06; 0,1406; 0,01406 и т. д.). Первая значащая цифра числа — 1, поэтому число

нужно установить в первой части шкалы между 1 и 2. Вторая цифра нашего числа — 4, третья — 0 и четвертая — 6. Установленное число 1—4—0—6 будет соответствовать на шкале индексу $a'_1b'_1$ (фиг. 8, *I*).

2. Нужно установить число 3,09 (или 309; 0,0309; 3090 и т. д.). Число 3—0—9 будет соответствовать показанию указателя $a'_2b'_2$ (фиг. 8, *II*). Визирная линия бегунка (указатель $a'_2b'_2$) должна быть установлена ровно на $4^1/_2$ деления от большого штриха, подписанного цифрой 3, так как в этой части малое деление соответствует двум единицам.

3. Нужно установить число 6,07 (или 0,607; 6070; 0,0607 и т. д.). Число 6—0—7 находится в промежутке между 6 и 7, как показывает указатель $a'_3b'_3$ (фиг. 8, *III*). Так как малое деление в этой части шкалы соответствует пяти единицам некоторого разряда, то визирную линию бегунка (указатель $a'_3b'_3$) нужно установить на глаз в расстоянии от штриха, подписанного цифрой 6, немного меньшем чем полтора малых деления.



Фиг. 8. Отрезки шкалы оснований с различной ценой деления

В первой части шкалы оснований (фиг. 8, *I*) можно устанавливать четырехзначные числа, во второй и третьей частях (фиг. 8, *II* и *III*) — трехзначные числа, поэтому при установке на счетной линейке чисел большей значности их нужно округлять до трех или четырех знаков, в зависимости от того, в какой части шкалы приходится устанавливать число.

Самое важное при работе на логарифмической линейке — правильная установка и правильное чтение чисел на шкалах. Вычислитель должен помнить, что почти все ошибки в вычислениях при работе на линейке объясняются неверным чтением и неправильной установкой чисел на шкалах.

§ 36. Умножение

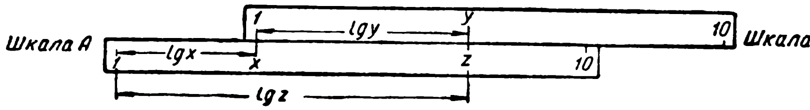
Умножение производится как при помощи шкал оснований, нанесенных на линейке и движке (шкалы A и A_1 на фиг. 7), так и при помощи шкал квадратов, о которых будет сказано ниже. Рассмотрим сначала умножение при помощи шкал оснований.

Умножение на логарифмической линейке основано на известном свойстве логарифмов

$$\lg z = \lg (x \cdot y) = \lg x + \lg y.$$

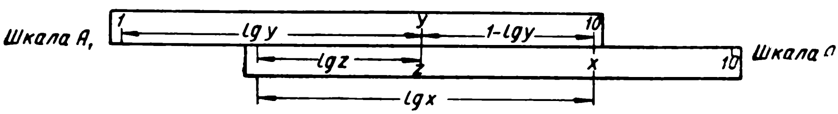
Так как на этих шкалах линейки нанесены в одном и том же масштабе логарифмы чисел, то графически умножение можно изобразить так, как показано на фиг. 9.

Из фиг. 9 видно, что при умножении мы графически складываем логарифмы чисел, а читаем сами числа, поскольку именно они и подписаны на шкалах линейки.



Фиг. 9. Умножение, когда движок выдвигается вправо

При умножении может встретиться такое положение движка, когда число y, взятое на движке, выйдет за пределы линейки. Это получается в тех случаях, когда сумма мантисс логарифмов сомножителей больше единицы. Например, если $x=3$, а $y=5$, то $\lg x=0.477$ и $\lg y=0.699$, а сумма мантисс сомножителей равна 1.176. В этих случаях против числа x на линейке устанавливают не начальный штрих движка, а его конечный штрих, при этом взаимное расположение шкалы линейки и движка окажется таким, какое показано на фиг. 10.



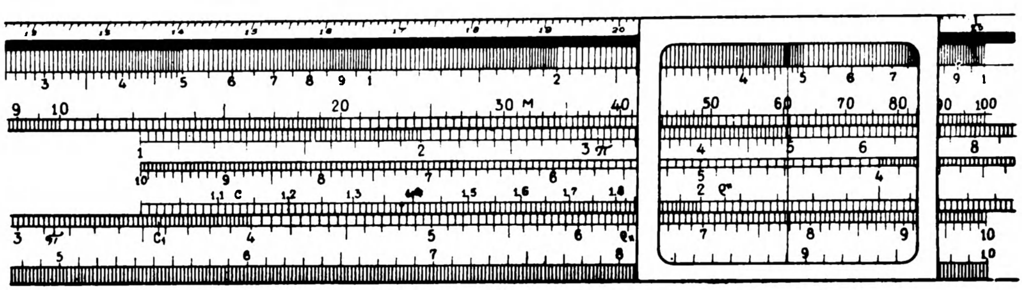
Фиг. 10. Умножение, когда движок выдвигается влево

Из фиг. 10 видно, что

$$\lg z=\lg x-(1-\lg y)=\lg x+\lg y-1.$$

В последнем выражении — 1 относится к характеристике логарифма произведения и изменяет только местоположение запятой в произведении.

Таким образом, правило умножения двух чисел при помощи логарифмической линейки можно сформулировать так. *При помощи начального или конечного штриха движка на основной шкале линейки установить один из сомножителей; второй сомножитель установить на шкале движка при помощи визирной линии бегунка; произведение прочитать на основной шкале линейки против визирной линии бегунка.*

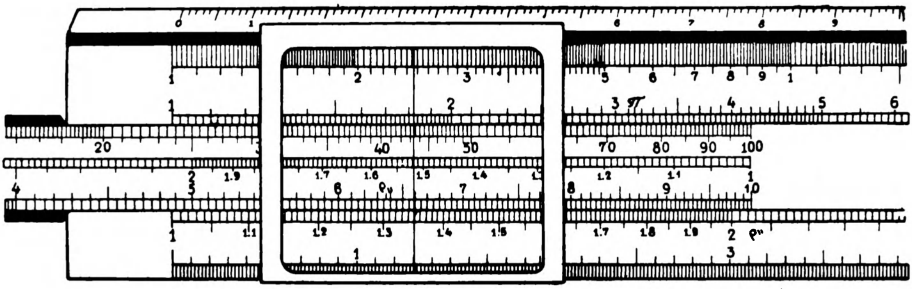


Фиг. 11. Умножение на основных шкалах (движок вправо)

В соответствии с этим правилом приведем два примера: 1) когда движок при умножении выдвигается вправо и 2) когда движок выдвигается влево.

1. Умножить 3,49 на 2,23. Сначала устанавливаем начальный штрих движка против отсчета 3—4—9 на основной шкале линейки (фиг. 11). После этого визир бегунка устанавливаем на отсчет 2—2—3 на основной шкале движка; результат 7—7—7 читаем против визира на основной шкале линейки. Нетрудно видеть, что произведение будет 7,77.

2. Умножить 20,5 на 0,658. Против отсчета 2—0—5 (фиг. 12), взятого на основной шкале линейки (на шкале A), устанавливаем конечный штрих (помеченный числом 10) движка. Затем устанавливаем визир бегунка на отсчет 6—5—8 на основной шкале движка. Отсчет 1—3—4—9, сделанный против визира на основной шкале линейки, дает результат.



Фиг. 12. Умножение на основных шкалах (движок влево)

Произведение равно 13,49. После некоторой тренировки легко каждый раз сообразить, когда движок следует выдвигать вправо и когда влево.

При умножении на линейке положение запятой в произведении нельзя устанавливать по обычным арифметическим правилам, так как обычно мы не получаем всех знаков произведения. Проще всего определять место запятой по смыслу решаемой задачи или делать грубый подсчет произведения в уме, округляя сомножители до одной значащей цифры.

В отдельных случаях для определения места запятой в произведении можно воспользоваться правилом, изложенным в § 38.

§ 37. Деление

Рассмотренная в § 36 схема умножения может быть использована и для деления, как действия обратного умножению.

Из фиг. 9 и 10 видно, что

$$\lg x = \lg z - \lg y$$

и

$$\lg x = \lg z - \lg y + 1.$$

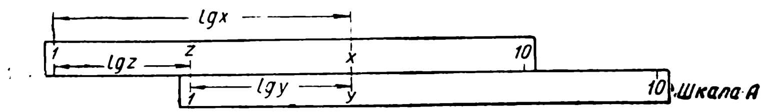
На фиг. 11 показано деление ($7{,}77 : 2{,}23 = 3{,}49$), когда движок расположился вправо, а на фиг. 12 — деление ($13{,}49 : 0{,}658 = 20{,}5$), когда движок расположился влево.

Таким образом, правило деления на логарифмической линейке можно сформулировать так. *При помощи визирной линии бегунка установить делимое на шкале линейки и совместить с ним делитель, взятый на шкале движка. Частное прочитать против начала или конца шкалы движка.*

Можно выполнять деление путем установки делимого на основной шкале движка, а делителя на линейке, т. е. пользоваться схемой, показанной на фиг. 13. В этом случае правило деления можно выразить так.

Визирную линию бегунка установить на делитель, взятый на основной шкале линейки (на шкале А), под нее подвести делимое, взятое на основной шкале движка (на шкале A_1). Частное прочитать на движке против начального или конечного штриха шкалы А.

При комбинированном умножении и делении, когда нужен только



Фиг. 13. Случай деления ($z = x:y$), когда делимое устанавливается на шкале движка

конечный результат, рекомендуется для сокращения работы чередовать деление с умножением. Так, если нужно вычислить выражение $\frac{abc}{def}$, то сначала a делят на d, частное (не читая его) умножают на b, полученный результат делят на e и т. д. При этом промежуточные результаты не читают, а только отмечают их при помощи визирной линии бегунка.

§ 38. Определение положения запятой в произведении и частном

В большинстве практических вопросов положение запятой в результате вычислений опытный вычислитель устанавливает, исходя из самого существа дела, так как заранее знает приближенный результат вычисления. Положение запятой можно также определить грубым подсчетом результата. Кроме указанного, при работе на основных шкалах логарифмической линейки, можно пользоваться особым правилом установления положения запятой, основанным на понятии значности десятичного числа. Значность числа равна характеристике десятичного логарифма данного числа плюс единица, или, иначе, значность числа, большего единицы, положительна и равна числу цифр до запятой, а значность числа, меньшего единицы, отрицательна и по абсолютной величине равна числу нулей после запятой до первой цифры, отличной от нуля (см. § 25).

Установим правило значности произведения двух чисел, найденного при помощи шкал оснований логарифмической линейки.

Напишем

$$\lg (x \cdot y) = \lg x + \lg y.$$

Положим, что

$$\lg x = n_x + m_x$$

и

$$\lg y = n_y + m_y,$$

где n_x и n_y — характеристики (целые части логарифма), а m_x и m_y — мантиссы (дробные части логарифма) данного числа.

Очевидно, что

$$\lg (x \cdot y) = (n_x + n_y) + (m_x + m_y).$$

Возможны два случая

а) $$m_x + m_y < 1,$$

б) $$m_x + m_y \geqslant 1.$$

В первом случае характеристика $\lg (x \cdot y)$ равна $n_x + n_y$, во втором случае $n_x + n_y + 1$.

Так как значность числа всегда равна характеристике его логарифма плюс единица, т. е.

$$N_x = n_x + 1,$$
$$N_y = n_y + 1,$$

то значность произведения $(x \cdot y)$ будет:

$$N_{xy} = n_x + n_y + 1 \text{ для первого случая}$$

и

$$N_{xy} = n_x + n_y + 2 \text{ для второго случая,}$$

или

$$N_{xy} = N_x - 1 + N_y - 1 + 1 = N_x + N_y - 1$$

и

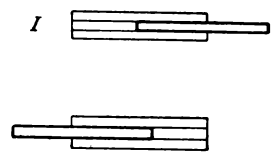
$$N_{xy} = N_x - 1 + N_y - 1 + 2 = N_x + N_y.$$

Когда произведение берется при движке, выдвинутом вправо (фиг. 14, *I*), будем иметь первый случай, а когда влево (фиг. 14, *II*) — второй:

$$\text{I. } N_{xy} = N_x + N_y - 1,$$
$$\text{II. } N_{xy} = N_x + N_y.$$

I

II



Фиг. 14. Положение движка, выдвинутого вправо и влево

Пример 22. Умножить 11,27 на 0,0347.

Значность первого сомножителя равна +2, а значность второго —1; расположение движка на линейке соответствует первому случаю, поэтому значность произведения будет

$$N_{xy} = +2 - 1 - 1 = 0;$$

следовательно,

$$11{,}27 \cdot 0{,}0347 = 0{,}391.$$

Пример 23. Умножить 0,561 на 4,11.

В этом случае значность первого сомножителя равна нулю, а значность второго +1. Так как расположение движка соответствует второму случаю, то значность произведения будет

$$N_{xy} = 0 + 1 = +1;$$

поэтому

$$0{,}561 \cdot 4{,}11 = 2{,}31.$$

По произведению первых значащих цифр сомножителей можно заранее определить, влево или вправо выдвигать движок. Если это произведение меньше 10, движок следует выдвигать вправо, а если больше 10, — влево. Если произведение двух чисел точно равно 10, то доказанное правило о значности произведения не действует при выдвижении движка вправо и действует при выдвижении его влево, например $x \cdot y = 2{,}0 \cdot 5{,}0 = 10$.

Аналогично правилу для определения значности произведения можно получить правило значности частного. При установлении запятой в частном мы также будем иметь два случая:

а) если движок выходит вправо (т. е. частное получается при помощи начального штриха движка), то значность частного равна разности значностей делимого и делителя плюс 1;

б) если движок выходит влево (т. е. частное получается при помощи конечного штриха движка), то значность частного равна разности значностей делимого и делителя.

Соответственно этим двум случаям будем иметь

$$N_{\frac{x}{y}} = N_x - N_y + 1,$$

$$N_{\frac{x}{y}} = N_x - N_y.$$

На некоторых линейках имеются значки $P - 1$ и $Q + 1$, напоминающие о необходимости вычитания единицы при установлении значности произведения и прибавления единицы при установлении значности частного.

Пример 24. Разделить 5,41 на 0,238.

Так как расположение линейки и движка соответствует первому случаю, то значность частного определится так:

$$N_{\frac{x}{y}} = N_x - N_y + 1 = 1 - 0 + 1 = +2,$$

то есть

$$5{,}41 : 0{,}238 = 22{,}7.$$

Пример 25. Разделить 3,03 на 82,1.

Для этого примера расположение линейки и движка соответствует второму случаю, поэтому значность частного определится так:

$$N_{\frac{x}{y}} = N_x - N_y = 1 - 2 = -1,$$

то есть

$$3{,}03 : 82{,}1 = 0{,}0369.$$

Нельзя пользоваться правилом о значности частного, если выполнять деление $1 : x$ при движке, выдвинутом вправо, например при делении $1 : 2$; $1 : 5$ и т. д.

Во всех случаях, когда приближенное значение результата не известно, следует, как мы уже указывали, пользоваться грубым подсчетом результата в уме. Для произведения, приведенного в примере 22, можно приближенно написать

$$11{,}27 \cdot 0{,}0347 \approx 10 \cdot 0{,}03 = 0{,}3.$$

Для частного, приведенного в примере 25, можно написать

$$3{,}03 : 82{,}1 \approx 3 : 100 = 0{,}03.$$

§ 39. Извлечение квадратного корня и возведение в квадрат

Извлечение квадратного корня и возведение в квадрат можно производить при помощи основных шкал линейки и движка, но гораздо проще эти действия выполняются при помощи основной шкалы и шкалы квадратов. Шкала квадратов A^2 (см. фиг. 7) строится согласно уравнению

$$y = \frac{m}{2} \lg x, \tag{77}$$

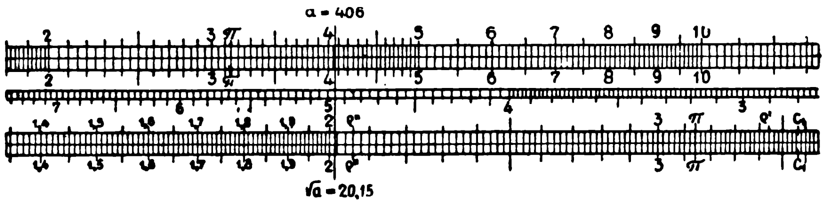
где m — масштаб основной шкалы, равный для обычных линеек 250 *мм*.

Как видно из этого уравнения, шкала квадратов (для значений от 1 до 10) в два раза короче, чем шкала оснований. Поэтому вся шкала квадратов состоит из двух половин: первая от 1 до 10, а вторая от 10 до 100 (или снова от 1 до 10). Деления на шкале квадратов в два раза мельче, чем на шкале оснований, поэтому шкала квадратов дает меньшую точность.

Как и на основных шкалах, на шкале квадратов имеется три вида делений, но с другой ценой деления, а именно:

от 1	до 2	цена одного деления		0,02;
„ 2	„ 5	„	„	0,05;
„ 5	„ 10	„	„	0,1.

Визирная линия, установленная на какое-либо число на шкале квадратов, указывает на шкале оснований квадратный корень из этого числа (фиг. 15).



Фиг. 15. Извлечение квадратного корня

При извлечении квадратных корней необходимо помнить, что если значность данного числа нечетная, то число устанавливается в первой половине шкалы квадратов, если четная или равна нулю, то во второй. Так, например, при извлечении квадратного корня из 5 визирную линию необходимо устанавливать в первой половине шкалы квадратов, а при извлечении из 50 — во второй.

Извлечение квадратных корней при помощи логарифмической линейки выполняют в следующем порядке.

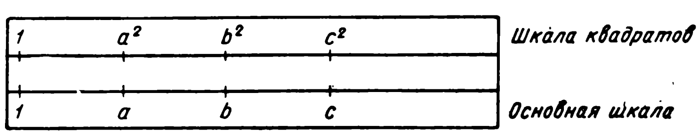
1. *Разбивают данное число на грани, по две цифры в каждой,* причем, если данное число больше 1, то разбивку производят влево от запятой, а если меньше 1, то вправо от запятой.

2. Если в крайней левой грани (высшей грани) одна значащая цифра, то *устанавливают число* в первой половине шкалы квадратов, если две, то во второй.

3. *Значность корня* равна числу граней, если подкоренное число больше 1, и числу чисто нулевых граней (состоящих только из нулей), если оно меньше 1, причем в первом случае значность положительна, а во втором — отрицательна.

Пример 26. $\sqrt{406{,}3} = 20{,}15$. Подкоренное число устанавливаем в первой половине шкалы квадратов.

$\sqrt{0{,}0004063} = 0{,}02015$. То же.



Фиг. 16. Возведение в квадрат

$\sqrt{4063} = 63{,}7$. Подкоренное число устанавливаем во второй половине шкалы.

$\sqrt{0,004063} = 0,0637$. То же.

При помощи шкалы квадратов весьма просто производится возведение в квадрат. Визир устанавливаем на данное число на шкале оснований и результат читаем на шкале квадратов (фиг. 16).

Значность квадрата равна $N_{x^2} = 2N_x$, если ответ читается в правой половине шкалы квадратов, и $N_{x^2} = 2N_x - 1$, если ответ читается в левой половине шкалы квадратов.

Пример 27. Найти: $x^2 = 0,076^2$.

Ответ 5—7—8 читаем на шкале квадратов. Так как ответ получился в правой половине шкалы квадратов, то значность квадрата равна удвоенной значности возвышаемого числа: $N_{x^2} = 2\,(-1) = -2$, т. е. после запятой надлежит поставить два нуля и потом приписать те цифры, которые прочтены на шкале квадратов.

Ответ: $x^2 = 0,00578$.

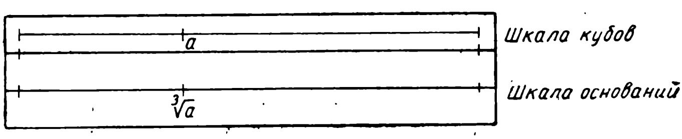
§ 40. Извлечение кубического корня и возведение в куб

Возведение в куб и извлечение кубического корня можно производить при помощи шкалы квадратов и шкалы оснований, но гораздо проще эти действия выполняются при помощи шкалы кубов A^3 (см. фиг. 7), которая строится согласно уравнению

$$y = \frac{m}{3} \lg x, \tag{78}$$

где m — масштаб основной шкалы, равный для обычных линеек 250 *мм*. Нетрудно видеть, что шкала кубов состоит из трех одинаковых подшкал.

Чтобы извлечь кубический корень из данного числа, достаточно визир бегунка установить на число, взятое на шкале кубов, и результат прочесть против визира на шкале оснований (фиг. 17).



Фиг. 17. Извлечение кубического корня

Кубический корень извлекают следующим образом.

1. *Разбивают данное число на грани,* по три цифры в каждой грани, причем, если число больше 1, то разбивку производят влево от запятой, а если меньше 1, то вправо от запятой.

2. Если в крайней левой (высшей) грани одна значащая цифра, то *устанавливают число* в левой трети шкалы кубов, если две — в средней, если три — в правой.

3. *Значность корня* равна числу граней, если подкоренное число больше 1, и числу чисто нулевых граней, если оно меньше 1, причем в первом случае значность положительна, а во втором — отрицательна.

Пример 28.

$\sqrt[3]{8'068} = 20,1$. Подкоренное число устанавливаем в левой трети шкалы кубов.

$\sqrt[3]{0,008'068} = 0,201$. То же.

$\sqrt[3]{0{,}080'68} = 0{,}432$. Подкоренное число устанавливаем в средней трети шкалы кубов.

$\sqrt[3]{80{,}68} = 4{,}32$. То же.

$\sqrt[3]{806{,}8} = 9{,}31$. Подкоренное число устанавливаем в правой трети шкалы кубов.

$\sqrt[3]{0{,}000'806'8} = 0.0931$. То же.

При возведении в куб данное число устанавливаем на шкале оснований, а результат читаем против визира на шкале кубов.

Значность куба равна:

$N_{x^3} = 3N_x$, если ответ получается в правой трети шкалы кубов;

$N_{x^3} = 3N_x - 1$, если ответ получается в средней трети шкалы кубов;

$N_{x^3} = 3N_x - 2$, если ответ получается в левой трети шкалы кубов.

Пример 29.

Найти $20{,}1^3$. Устанавливаем визир на число 2—0—1, взятое на шкале оснований, а ответ читаем на шкале кубов в левой ее части: 8—0—7. Так как значность данного числа равна 2, то значность куба будет

$$N_{x^3} = 3N_x - 2 = 3(+2) - 2 = +4;$$

следовательно,

$$20{,}1^3 \approx 8070 = 8{,}07 \cdot 10^3.$$

Пример 30.

Найти $0{,}0931^3$. Устанавливаем визир на число 9—3—1, взятое на шкале оснований, и на шкале кубов, в правой трети, читаем: 8—0—7. В данном примере значность куба будет

$$N_{x^3} = 3N_x = 3(-1) = -3;$$

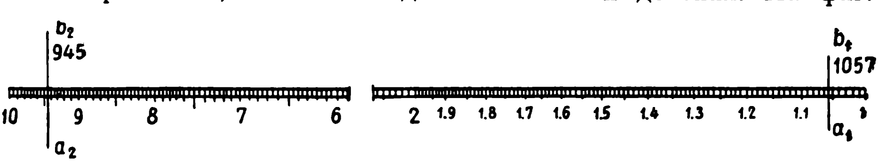
следовательно,

$$0{,}0931^3 = 0{,}000807.$$

§ 41. Обратная шкала

Изготовляемые в настоящее время счетные логарифмические линейки имеют, кроме основных шкал, еще так называемую *обратную шкалу* A_0 на движке (см. фиг. 7). Деления на обратной шкале подписаны справа налево, а в остальном эта шкала в точности такая же, как и шкалы A и A_1.

Отсчет по обратной шкале необходимо делать справа налево, т. е. в том направлении, в каком подписаны на ней деления. На фиг. 18

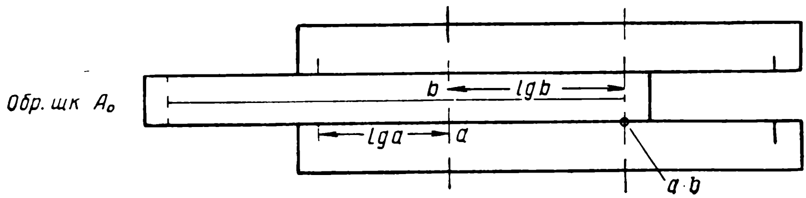


Фиг. 18. Обратная шкала

индексам a_1b_1 и a_2b_2 соответствуют отсчеты 1—0—5—7 и 9—4—5.

Для умножения при помощи обратной шкалы числа a на число b (фиг. 19) необходимо один из сомножителей взять на основной шкале линейки, а другой на обратной шкале, и метки, соответствующие им, поставить друг против друга. Число, соответствующее произведению, находится на основной шкале линейки против начального или конечного штриха обратной шкалы. Значность произведения равна сумме значностей сомножителей, если движок выдвинут вправо, и на единицу меньше этой суммы, если движок выдвинут влево.

Обратная шкала особенно удобна при перемножении нескольких чисел. Например, произведение трех множителей можно получить при одной установке движка, если два сомножителя перемножить с помощью обратной шкалы, а умножение на третий произвести обычным приемом.



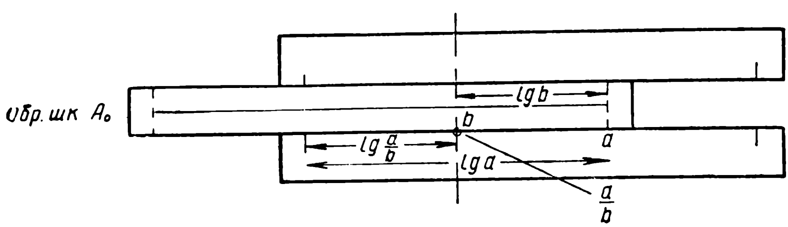
Фиг. 19. Умножение при помощи обратной шкалы

Пример 31. Перемножить три числа: 41,3 · 0,601 · 0,0208.

Устанавливаем визир на основной шкале линейки против числа 4—1—3 и под него подводим число 6—0—1, взятое на обратной шкале. Затем устанавливаем визир на число 2—0—8 на основной шкале движка и против него на основной шкале линейки читаем результат 5—1—7.

Ответ: 0,517.

При делении с помощью обратной шкалы делимое берется на основной шкале линейки и с ним соединяется конечный (или начальный) штрих движка. Делитель берется на обратной шкале и против него на основной шкале линейки читается частное (фиг. 20).



Фиг. 20. Деление при помощи обратной шкалы

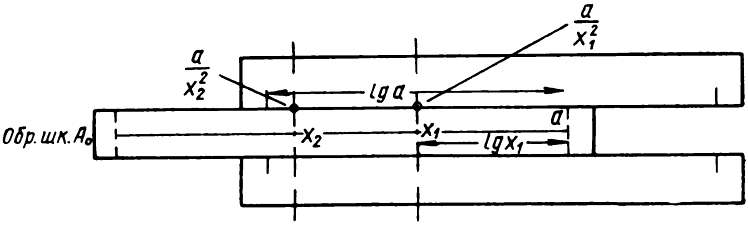
Значность частного при таком делении равна разности значностей делимого и делителя, если движок выдвинут вправо, и на единицу больше этой разности, если движок выдвинут влево. Нетрудно видеть, что, пользуясь обратной шкалой, можно вычислять при одной установке движка выражения вида $\frac{a \cdot b}{c}$

В геодезической практике (при нахождении весов) часто вычисляют выражения вида

$$q = \frac{a}{x}, \quad q' = \frac{b}{x^2},$$

где a и b — некоторые постоянные числа, а x принимает различные значения. Пользуясь обратной шкалой, можно каждое из этих выражений вычислять при одном положении движка.

При делении постоянного на квадрат переменного удобно пользоваться обратной шкалой и шкалой квадратов (фиг. 21).



Фиг. 21. Вычисление выражения $\frac{a}{x^2}$

Пример 32. Пользуясь формулой $q' = \frac{b}{x^2}$, вычислить значения q' при постоянном $b = 80{,}2$ и при $x = 2{,}01$; $2{,}52$; $12{,}5$.

Метку, соответствующую делимому 8—0—2, берем на шкале квадратов и совмещаем с ней конечный правый штрих движка. На значения x, взятые на обратной шкале, устанавливаем визир и против него читаем на шкале квадратов ответы: 19,9; 12,6; 0,513.

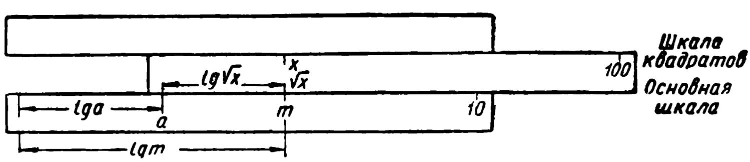
При отсутствии на линейке обратной шкалы можно пользоваться «опрокинутым движком»; для этого надо вставить движок в пазы линейки так, чтобы подписи делений на его шкале возрастали справа налево.

Вычисление при помощи обратной шкалы или «опрокинутого движка» во многих случаях значительно уменьшает число перемещений движка и тем самым увеличивает производительность вычислительного труда.

§ 42. Комбинированные вычисления на разных шкалах

Кроме отдельных действий, на логарифмической линейке бывает особенно выгодно производить различные комбинированные действия, используя имеющиеся на ней различные шкалы.

Рассмотрим некоторые примеры таких вычислений.



Фиг. 22. Вычисление по формуле $m = \pm a \sqrt{x}$

Пример 33. Вычислить: $m = \pm a \sqrt{x}$ при $a = 1{,}5$ и $x = 19$ (фиг. 22). Ответ: $m = \pm 6{,}5$.

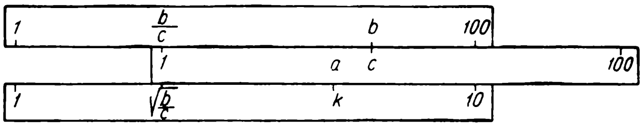
Вычисление на логарифмической линейке данного выражения особенно выгодно, когда a — постоянное число, а x принимает различные значения. Например, таким путем можно быстро вычислять допустимые угловые невязки в сумме измеренных углов по формуле

$$(f_\beta)_{пр} = \Delta_{пр} \sqrt{n},$$

где $\Delta_{пр}$ — предельная ошибка измерения угла, а n — число измеренных углов.

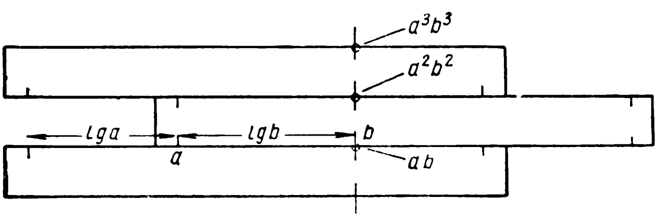
Пример 34. Вычислить $M=\frac{m}{\sqrt{x}}$ при $m=\pm 3{,}8$ и $x=8$. На отсчет 3—8, взятый на основной шкале линейки, устанавливаем визир и под него подводим число 8 шкалы квадратов движка. Под единицей движка читаем на основной шкале линейки ответ: 1,34.

Пример 35. Вычислить $k=a\sqrt{\frac{b}{c}}$ при $a=0{,}44$, $b=50{,}5$, $c=22{,}4$. Деление производим на шкале квадратов (фиг. 23), для чего на 5—0—5

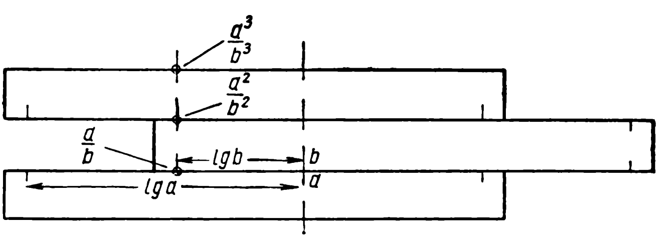


Фиг. 23. Вычисление по формуле $k=a\sqrt{\frac{b}{c}}$

(во второй половине шкалы квадратов) ставим визир и под него подводим 2—2—4, взятое на шкале квадратов движка. Частное $\frac{b}{c}$ получится в первой половине шкалы квадратов, а против начального штриха движка на основной шкале линейки будет $\sqrt{\frac{b}{c}}$. Не сдвигая движка, ставим



Фиг. 24. Вычисление выражений a^2b^2 и a^3b^3

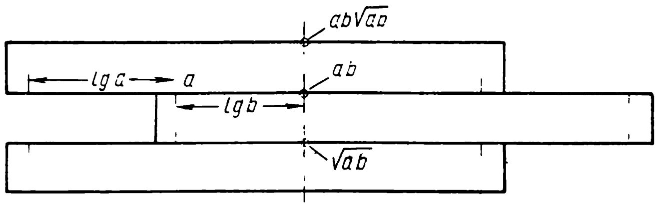


Фиг. 25. Вычисление выражений $\frac{a^2}{b^2}$ и $\frac{a^3}{b^3}$

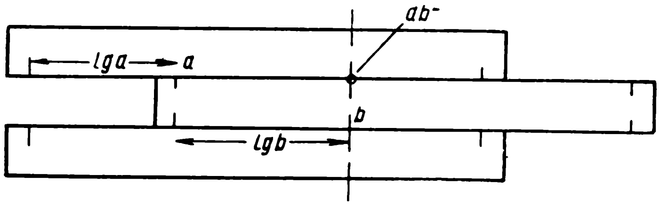
визир на 4—4 на шкале движка и против него на основной шкале линейки читаем результат:

$$k=0{,}661.$$

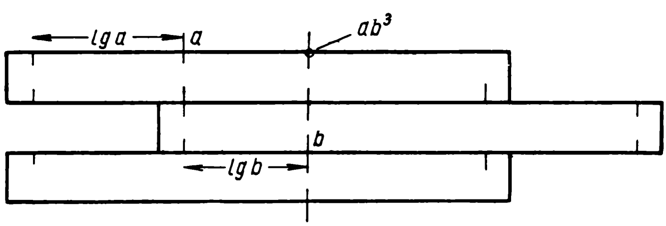
Выражения вида: ab^2; $\frac{a}{b}\sqrt{c}$; $\frac{a}{b^2}$; $\frac{a^2}{b}$; abc^2 и т. п., легко вычисляются при одном положении движка, используя основные шкалы, шкалы квадратов и обратную шкалу.



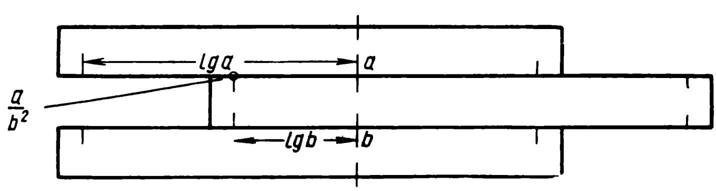
Фиг. 26. Вычисление выражений $\sqrt{ab}$ и $ab\sqrt{ab}$



Фиг. 27. Вычисление выражения ab^2



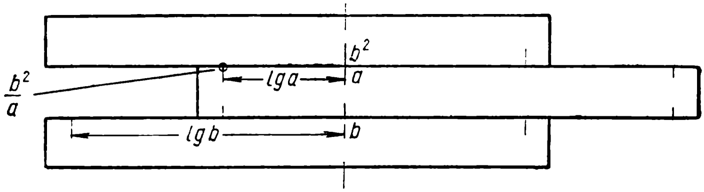
Фиг. 28. Вычисление выражения ab^3



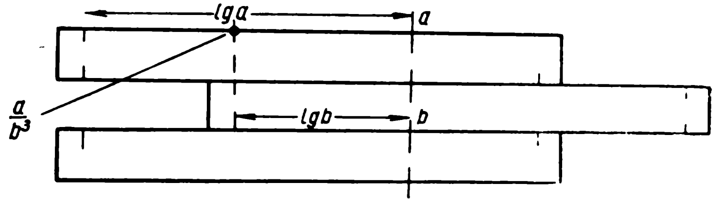
Фиг. 29. Вычисление выражения $\frac{a}{b^2}$

Необходимо отметить, что наиболее ярко достоинства логарифмической линейки выявляются именно при комбинированных вычислениях, и особенно в тех случаях, когда при одном положении движка выполняется несколько действий.

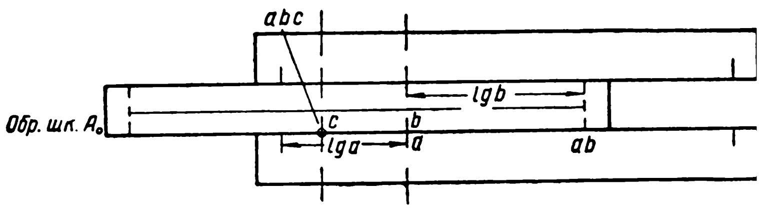
На фиг. 24—36 показаны приемы вычисления (при одном положении



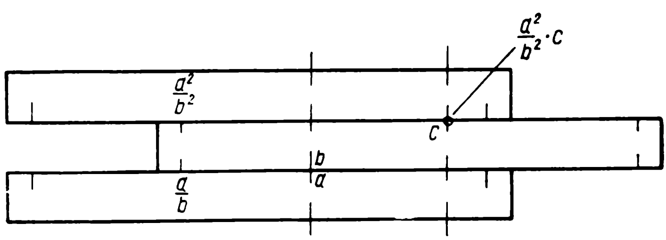
Фиг. 30. Вычисление выражения $\frac{b^2}{a}$



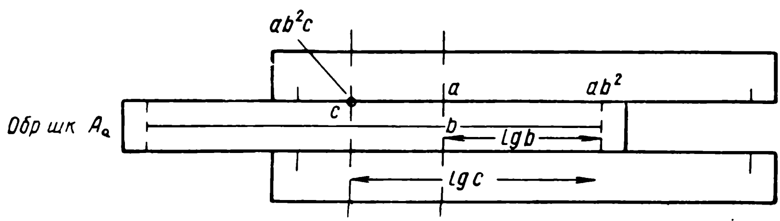
Фиг. 31. Вычисление выражения $\frac{a}{b^3}$



Фиг. 32. Вычисление выражения $a \cdot b \cdot c$

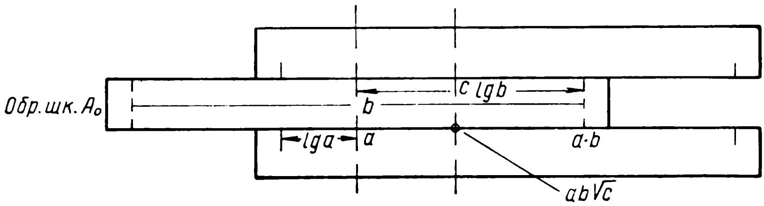


Фиг. 33. Вычисление выражения $\frac{a^2}{b^2}\,c$

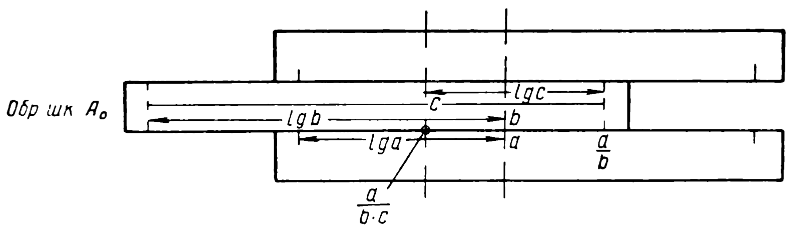


Фиг. 34. Вычисление выражения $a \cdot b^2 \cdot c$

движка) некоторых выражений, применяющихся в инженерно-технических и хозяйственных расчетах.



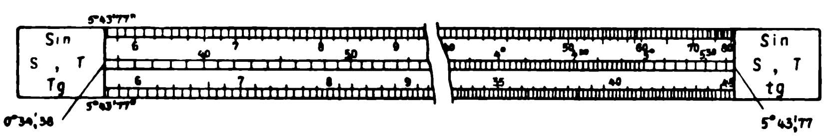
Фиг. 35. Вычисление выражения $a \cdot b \cdot \sqrt{c}$



Фиг. 36. Вычисление выражения $\frac{a}{bc}$

§ 43. Тригонометрические шкалы

На обратной стороне движка нанесены шкалы тригонометрических функций (фиг. 37): сверху шкала синусов (шкала Sin), посередине



Фиг. 37. Тригонометрические шкалы

шкала синусов и тангенсов малых углов (шкала S, T) и внизу шкала тангенсов (шкала Tg). Шкала синусов и тангенсов малых углов нанесена для значений углов от 0°34′,38 до 5°43′,77; шкала синусов — для углов от 5°43′,77 до 90° и шкала тангенсов — для углов от 5°43′,77 до 45°. Эти значения углов выбраны с таким расчетом, чтобы для каждой шкалы значение функции крайнего правого отсчета было в десять раз больше значения функции начального левого отсчета. Именно:

$$\sin 0°34',38 \approx \operatorname{tg} 0°34',38 \approx 0{,}01000;$$
$$\sin 5°43',77 \approx \operatorname{tg} 5°43',77 \approx 0{,}1000;$$
$$\sin 90° = 1{,}000; \quad \operatorname{tg} 45° = 1{,}000.$$

При построении тригонометрических шкал использовано уравнение функциональной шкалы

$$y = m\,[f(x) - f(a)]. \tag{79}$$

Заменяя в этом уравнении $f(x)$ и $f(a)$ логарифмами синусов и тангенсов углов и имея в виду, что $\lg \sin 0°34',38 \approx \lg \operatorname{tg} 0°34',38 \approx -2$, а

$\lg \sin 5°43',77 \approx \lg \operatorname{tg} 5°43',77 \approx -1$, получим следующие уравнения тригонометрических шкал:

$$y = m (\lg \sin \alpha + 2) \approx m (\lg \operatorname{tg} \alpha + 2) \text{ для средней шкалы;}$$

$$y = m (\lg \sin \alpha + 1) \quad \text{„ шкалы синусов;}$$

$$y = m (\lg \operatorname{tg} \alpha + 1) \quad \text{„ „ тангенсов.}$$

Таким образом, на тригонометрических шкалах линейки нанесены логарифмы синусов и тангенсов углов, а подписаны соответствующие им углы.

Вначале необходимо ознакомиться с делениями на тригонометрических шкалах и научиться по данным углам определять натуральные значения тригонометрических функций, и, наоборот, по натуральным значениям тригонометрических функций определять углы. Необходимо также помнить, что значность чисел верхней и нижней тригонометрических шкал (шкал Sin и Tg) на всем протяжении шкал равна нулю, а значность чисел средней шкалы равна -1.

Так как масштаб тригонометрических шкал равен масштабу основной шкалы линейки, то натуральное значение синусов и тангенсов углов в пределах, подписанных на шкалах, находится весьма просто, а именно: *совместив концевые штрихи линейки и движка, можно против любого угла, отмеченного на тригонометрических шкалах, прочитать на основной шкале линейки (шкале А) соответствующее натуральное значение синуса или тангенса.* Например:

$$\sin 10°15' = 0{,}1779; \quad \sin 2°32' = 0{,}0442;$$

$$\operatorname{tg} 3°45' = 0{,}0655; \quad \operatorname{tg} 15°45' = 0{,}282.$$

Зная величину тангенса или синуса какого-либо угла, можно определить угол, установив визир по основной шкале линейки на отсчет, равный натуральному значению тригонометрической функции, и прочитать значение угла на соответствующей шкале движка. На линейках некоторых типов шкалы синусов и тангенсов нанесены в масштабе шкалы квадратов. На таких линейках левый штрих шкалы синусов соответствует углу $0°34',38$, а правый $90°$; отсчет, равный $5°43',8$, располагается внутри шкалы. Шкала S, T на таких линейках отсутствует. Тригонометрические шкалы, масштаб которых равен масштабу шкалы квадратов, менее точны, и мы в дальнейшем будем считать, что для рассматриваемой линейки шкала синусов имеет масштаб основной шкалы.

При определении натуральных значений других наиболее употребительных тригонометрических функций, для которых углы не показаны на шкалах движка, пользуются формулами

$$\cos \alpha = \sin (90° - \alpha);$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \text{ для углов от 0 до 45°;}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} (90° - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} (90° - \alpha)} \text{ для углов от 45 до 90°;}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} (90° - \alpha) \text{ для углов от 45 до 90°.}$$

Синусы и тангенсы углов от 0 до $0°34',38$ определяют, пользуясь соотношениями

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha' \sin 1' = \frac{\alpha'}{\rho'} = \frac{\alpha'}{3438'}.$$

Можно также малые углы увеличить, например, в два, десять или даже сто раз (но чтобы результат не превышал 5°44′), а найденное натуральное значение синуса или тангенса во столько же раз уменьшить.

Пример 36. $\operatorname{tg} \alpha = 1,349$. Определить угол α.

Используем соотношение

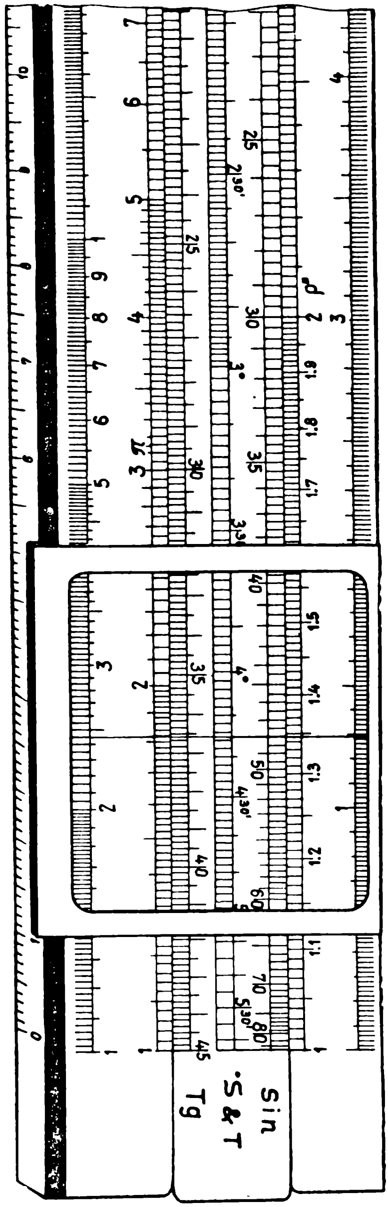
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)} = 1,349,$$

откуда

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{1}{1,349} = 0,742.$$

Установив движок так, чтобы его конечные штрихи совпали с конечными штрихами линейки, устанавливаем на визир отсчет 7—4—2 шкалы A_1 линейки, а на шкале Tg против визира читаем значение угла 36°36′. Значит $(90^\circ - \alpha) = 36^\circ 36'$, откуда $\alpha = 53^\circ 24'$. Используя правило пропорции, можно определить значение угла α значительно проще (см. § 45).

Рассмотренный пример более просто можно решить при помощи так называемого опрокинутого движка, как показано на фиг. 38. В данном случае против визира, установленного на отсчет 1,349 (на основной шкале линейки), на опрокинутом движке по шкале Tg читаем значение $90^\circ - \alpha = 36^\circ 36'$.



Фиг. 38. Определение угла α на опрокинутом движке

При помощи черточек, нанесенных на краях вырезов на оборотной стороне линейки, можно определять натуральные значения синусов и тангенсов, а также углы по заданным синусам и тангенсам при нормальном (не перевернутом) положении движка. На краях правого выреза на линейке имеются две черты: для шкалы Sin и для шкалы S, T. Когда движок выдвинут вправо, конец шкалы A укажет на шкале A_1 величину синуса угла, значение которого поставлено против штриха, нанесенного на краю выреза линейки. Очевидно, что при таком положении движка конец шкалы A_1 укажет на шкале A косеканс данного угла. Аналогично, при выдвижении движка влево начало шкалы A укажет на шкале A_1 тангенс угла, значение которого стоит против черточки в левом вырезе линейки; одновременно с этим конец шкалы A_1 отметит на шкале A котангенс того же угла.

Умножение и деление на синус или тангенс данного угла может быть выполнено также без перевертывания движка, при помощи штрихов, нанесенных в вырезах линейки (см. § 45).

§ 44. Вычисления при помощи тригонометрических шкал

Учитывая, что масштаб тригонометрических шкал равен масштабу основных шкал линейки и движка, можно при помощи этих шкал, пользуясь изложенными выше правилами, выполнять различные вычисления.

Рассмотрим некоторые примеры геодезических вычислений с использованием тригонометрических шкал.

Вычисление превышений по формуле $h = S \operatorname{tg} \nu$, где S — горизонтальное проложение линии, ν — угол наклона (фиг. 39).

Отсчет по тригонометрической шкале, соответствующий значению угла ν, может выйти за пределы основной шкалы линейки. В этом слу-

Фиг. 39. Вычисление превышений

чае против отсчета S на основной шкале устанавливают не начальный, а конечный штрих движка. Нетрудно видеть, что превышения вычисляются по правилам умножения на основных шкалах линейки.

Пример 37. $h = 102{,}8 \cdot \operatorname{tg} 0°51'$. Против отсчета 1—0—2—8 основной шкалы A линейки ставим начальный штрих шкалы S, T. Визир ставим на 0°51′ на шкале S, T и против него на шкале A читаем ответ 1—5—2. Для определения положения запятой в результате можем подсчитать значность произведения, учитывая, что значность чисел на всем протяжении средней шкалы равна —1

$$N_h = N_S + N_{\operatorname{tg} \alpha} - 1 = +3 + (-1) - 1 = +1.$$

Превышение равно 1,52 *м*.

Пример 38. $h = 80{,}5 \cdot \operatorname{tg} 2°12'$. Против отсчета 8—0—5 шкалы A ставим конечный штрих шкалы S, T и против визирной линии, установленной на 2°12′, читаем на шкале A ответ 3—0—9. Значность превышения равна

$$N_h = N_S + N_{\operatorname{tg} \alpha} = +2 + (-1) = +1.$$

Превышение равно 3,09 *м*.

Пример 39. $h = 206 \cdot \operatorname{tg} 0°13'$. Увеличиваем угол в 10 раз и вычисляем аналогично предыдущему. Против 2°10′ средней шкалы читаем на шкале A ответ: 7—7—8. Превышение равно 0,78 *м*.

Вычисление сближения меридианов по формуле $\gamma = \Delta\lambda \sin \varphi$, где $\Delta\lambda$ — разность долгот места наблюдения и осевого меридиана, φ — широта места наблюдения.

Вычисление ведется по такой же схеме, как и вычисление превышений.

Пример 40. $\gamma = 1°41',8 \cdot \sin 42°45' = 101',8 \cdot \sin 42°45'$.

Против отсчета 1—0—1—8 шкалы A ставим начальный штрих шкалы синусов (шкалы Sin). Визир ставим на 42°45′ на шкале синусов и против визира читаем на шкале A ответ: 6—9—0.

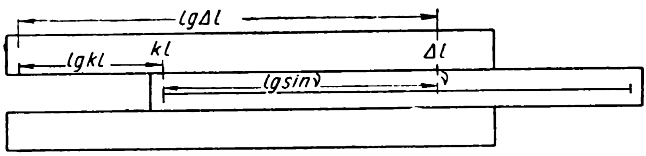
Значность произведения равна

$$N_{\gamma} = N_{\Delta\lambda} + N_{\sin\varphi} - 1 = +3 + 0 - 1 = +2.$$

Сближение равно $69',0 = 1°09',0$.

Вычисление поправок за наклон линии к горизонту (фиг. 40) по формуле

$$\Delta l = kl \sin^2 \nu.$$



Фиг. 40. Вычисление поправок за наклон линии к горизонту

Пример 41. $\Delta l = 115 \cdot \sin^2 4°15'$.

Против отсчета 1—1—5 шкалы квадратов ставим начальный штрих движка. Визир ставим на $4°15'$ на шкале S, T и против него на шкале квадратов читаем ответ: 6—3—0. Поправка равна 0,6 *м*.

Пример 42. $\Delta l = 90{,}5 \cdot \sin^2 6°10'$. Против отсчета 9—0—5 шкалы квадратов ставим конечный штрих шкалы синусов. Визир ставим на $6°10'$ шкалы синусов (шкалы S), против него на шкале квадратов читаем ответ: 1—0—4. Поправка равна 1,0 *м*.

Пример 43. Вычислить: $k = \frac{0{,}506}{\operatorname{tg} 10°15'}$.

На отсчет 5—0—6 шкалы A ставим визир и под него подводим метку $10°15'$ шкалы тангенсов. Против начального штриха шкалы движка читаем ответ: 2—7—9. Значность результата равна $N_k = 0 - 0 + 1 = +1$, поэтому частное будет 2,79.

При помощи шкал синусов удобно контролировать приращения прямоугольных координат, пользуясь формулами

$$\Delta y = S \cdot \sin \alpha;$$

$$\Delta x = S \cdot \cos \alpha = S \cdot \sin (90° - \alpha).$$

Вычисление рекомендуется выполнять с опрокинутым движком, дающим возможность быстрее определять значения Δx и Δy. Место запятой в прочитанных на основной шкале отсчетах можно устанавливать, исходя из следующих соображений. Так как значения синусов малых углов, определенных по средней шкале, находятся в пределах

$$0{,}01 \leqslant \sin \alpha \leqslant 0{,}1,$$

а значения синусов, взятых по верхней шкале, — в пределах

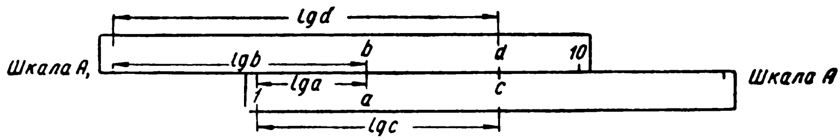
$$0{,}1 \leqslant \sin \alpha \leqslant 1{,}0,$$

то величина приращения в первом случае будет меньше $0{,}1 \cdot S$, а во втором случае — больше $0{,}1 \cdot S$.

§ 45. Вычисления на основе пропорции

Определение неизвестных величин, входящих в пропорцию, производится при одной установке движка или, во всяком случае, не более чем при двух. Рассмотрим какие-нибудь две пары чисел a, b и c, d, для которых соответствующие штрихи находятся друг против друга на шкалах с одинаковыми масштабами (например, на шкалах A и A_1, A и T, A^2 и A_1^2 и т. д.).

Из фиг. 41 видно, что $\lg b - \lg a = \lg d - \lg c$, откуда $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$. Аналогично можно показать, что при любом положении движка числа, для



Фиг. 41. Пропорции

которых соответствующие штрихи стоят один против другого на шкалах с одинаковыми масштабами, пропорциональны и отношения этих чисел всегда равны постоянному числу. Пусть требуется определить x, y, z из равенств

$$\frac{x}{2{,}05} = \frac{y}{3{,}60} = \frac{z}{5{,}08} = 1{,}35.$$

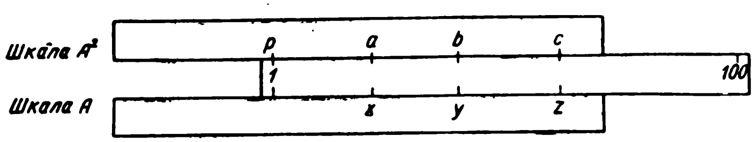
Если рассматривать число 1,35 как дробь $\frac{1{,}35}{1}$, то легко при одной установке движка получить все неизвестные. Для этого следует взять на шкале A метку 1,35 и поставить против нее начальный штрих движка, после чего против отсчетов 2,05; 3,60 и 5,08 на шкале A_1 прочитать на шкале A линейки ответы: $x = 2{,}77$; $y = 4{,}86$; $z = 6{,}86$.

Используя правила пропорции, можно на линейке легко вычислять выражения, содержащие квадраты и кубы чисел, тригонометрические величины и др. Рассмотрим примеры таких вычислений.

Пример 44. Определить x, y, z из уравнений

$$p = \frac{a}{x^2} = \frac{b}{y^2} = \frac{c}{z^2},$$

где p, a, b и c соответственно равны 1,8; 2,3; 3,4; 12,3.



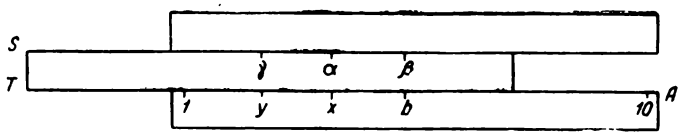
Фиг. 42. Пропорциональные вычисления

Начальный штрих движка (фиг. 42) совмещаем с отсчетом 1,8 на шкале квадратов, после чего устанавливаем визирную линию на отсчеты 2,3; 3,4; 12,3 на шкале квадратов и на основной шкале A движка против визира читаем: $x = 1{,}13$, $y = 1{,}37$, $z = 2{,}62$.

Пример 45. Решить треугольник по формуле синусов

$$\frac{b}{\sin\beta}=\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{y}{\sin\gamma},$$

если сторона b равна 465 *м*, а углы β, α, γ соответственно равны 76°35′, 53°42′, 49°43′. Ставим визирную линию бегунка (фиг. 43) против отсчета 465 на шкале A и подводим под визирную линию штрих шкалы синусов, соответствующий значению угла 76°35′. Против данных значений двух других углов на шкале A читаем $x = 386$ *м*, $y = 366$ *м*.



Фиг. 43. Решение треугольников

Пример 46. При решении некоторых геодезических задач целесообразно вычислять выражения $x = a\sin\alpha$ при нормальном (не перевернутом) положении движка. Перепишем это равенство в виде

$$\frac{x}{a}=\frac{\sin\alpha}{1},$$

что даст возможность определить x по известным a и α по правилу пропорции. Пусть $a = 0{,}56$, а $\alpha = 30°0'$. Штрих шкалы синусов, соответствующий углу $\alpha = 30°0'$, устанавливаем против верхнего штриха в правом вырезе линейки. Тогда против конечного штриха шкалы A на шкале A_1 прочтем $\sin\alpha = 0{,}5$, а против каждого числа шкалы A на шкале A_1 прочтем произведение этого числа на $\sin\alpha$. В нашем примере против 0,56 на шкале A_1 найдем $x = 0{,}28$.

§ 46. Логарифмирование и потенцирование

На нижнем краю корпуса линейки имеется равномерная шкала L (см. фиг. 7), которая построена согласно уравнению

$$y = mx,$$

где m — масштаб шкалы, а x — мантиссы десятичных логарифмов чисел, нанесенных на основной шкале линейки. На шкале L отложены отрезки y, а подписаны мантиссы логарифмов чисел. Так как шкала L построена в том же масштабе, что и основная шкала A, то вычисление логарифмов чисел, а также нахождение чисел по их логарифмам при помощи этих шкал производятся весьма просто.

Чтобы найти логарифм числа, ставят визир на метку шкалы A, соответствующую данному числу, и против нее на шкале L читают мантиссу этого числа.

В табл. 13 показаны отсчеты (числа), взятые на шкале A, на тригонометрических шкалах, на шкале L, и логарифмы, соответствующие этим отсчетам.

Чтобы найти число по его логарифму, ставят визирную линию бегунка на метку шкалы L, соответствующую мантиссе данного числа,

Таблица 13

Числа	Отсчеты по шкале L	Логарифмы
1,05	021	0.021
2,06	314	0.314
20,6	314	1.314
0,206	314	9.314_{-10}
$\sin 30^\circ\ 0' = 0{,}500$	699	9.699_{-10}
$\sin 5^\circ 30' = 0{,}0958$	982	8.982_{-10}
$\operatorname{tg} 30^\circ\ 0' = 0{,}577$	761	9.761_{-10}

и против визирной линии на шкале A читают число, ставя запятую в соответствии с характеристикой логарифма.

При помощи шкалы L можно находить логарифмы тригонометрических функций и, наоборот, по логарифмам тригонометрических функций находить углы. Для этого необходимо движок вставить в пазы линейки так, чтобы тригонометрические шкалы оказались снаружи и конечные штрихи их совместить с конечными штрихами шкал на линейке. При таком положении движка логарифмы тригонометрических функций и углы по их логарифмам находят так же, как логарифмы и антилогарифмы чисел. При этом необходимо помнить, что характеристика логарифма для верхней и нижней тригонометрических шкал (шкал Sin и Tg) всегда будет — 1, а для средней шкалы — 2.

Дано: $\lg \sin \alpha = 8.560_{-10}$. Найти угол α. Ставим визирную линию на метку шкалы L, соответствующую 560, и на шкале S, T читаем: $\alpha = 2^\circ 05'$.

При помощи шкалы L и других шкал линейки выполняют возведение в любую степень, а также некоторые комбинированные действия. Например, требуется вычислить $y = 3{,}64^{1,5}$. Логарифмируя, получим: $\lg y = 1{,}5 \lg 3{,}64$. На шкале L находим $\lg 3{,}64 = 0.561$. Умножив на линейке 1,5 на 0.561, получим $\lg y = 0.842$. По найденному логарифму определяем при помощи шкал L и A число $y = 6{,}96$.

§ 47. Особые значки на линейке

Для облегчения вычислений с часто встречающимися постоянными величинами на шкалах многих линеек сделаны особые пометки, подписанные соответствующими буквами. На шкалах A, A_1, A^2, A_1^2 (см. фиг. 7) сделаны пометки, соответствующие числу $\pi = 3{,}142$. На шкалах A и A_1 нанесены пометки для чисел:

$$\rho^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ{,}30;\quad \rho' = \frac{180 \cdot 60'}{\pi} = 3438';$$

$$\rho'' = \frac{180 \cdot 60 \cdot 60''}{\pi} = 206\,265'';\quad \rho^{cc} = \frac{200 \cdot 100 \cdot 100^{cc}}{\pi} = 636\,620^{cc}.$$

Все эти числа дают величину радиана в градусах, минутах и секундах, причем $\rho^{cc} = 636\,620$ есть число секунд в радиане, когда окружность делится на 400 градов. Значок $c = \sqrt{\frac{4}{\pi}} = 1{,}128$ служит для вычисления площади круга по формуле:

$$P = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{d^2}{\frac{4}{\pi}} = \left(\frac{d}{c}\right)^2.$$

На шкалах A^2 и A_1^2 иногда наносится значок $M = \frac{1}{\pi} = 0{,}3183$. На некоторых линейках наносятся и другие значки, облегчающие специальные вычисления. При отсутствии значков для величин, часто встречающихся в вычислениях, вычислитель может их отметить на шкалах линейки сам тонко отточенным карандашом.

§ 48. Точность шкал логарифмической линейки

Точность линейки зависит от масштабов ее шкал, а значит (для обычных линеек) от размеров самой линейки.

Рассмотрим точность основной шкалы линейки. Напишем уравнение шкалы

$$y = m \lg x = mM \ln x.$$

Дифференцируя эту функцию и переходя от дифференциалов к ошибкам, получим

$$\Delta y = mM \frac{\Delta x}{x},$$

где Δy — ошибка в определении длины отрезка y, m — масштаб шкалы, $M = 0{,}43$, $\frac{\Delta x}{x}$ — относительная ошибка искомого числа.

Полагая $\Delta y = 0{,}1$ *мм* и $m = 25$ *см*, найдем относительную ошибку числа, определяемого на линейке

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta y}{Mm} = \frac{0{,}1}{0{,}43 \cdot 250} \approx \frac{1}{1000} = 0{,}1\%.$$

Такая относительная ошибка указывает на то, что в начале основной шкалы линейки могут отсчитываться числа с четырьмя, а в конце — с тремя значащими цифрами с ошибкой не более единицы последнего знака.

Аналогично можно проанализировать точность и других шкал линейки.

§ 49. Вычисление поправки за центрировку и редукцию

Поправку за центрировку и редукцию вычисляют по формуле

$$c'' = \frac{e\rho'' \sin(\Theta + M)}{S}.$$

Если линейный элемент e небольшой (не более 2—3 значащих цифр), то поправку c'' можно быстро и с достаточной точностью вычислять на обычной логарифмической линейке следующим образом:

а) находят постоянную величину для данной станции — $e\rho''$;

б) делят обычным путем на линейке постоянную величину $e\rho''$ на длину линии S и, не читая частного, ставят на него визирную линию бегунка;

в) не сдвигая бегунка, устанавливают движок так, чтобы метка на шкале синусов, соответствующая углу $(\Theta + M)$, пришлась против штриха на корпусе линейки в правом вырезе. Тогда против визира на шкале A_1 читают число, соответствующее поправке c''.

Пример 47. $e\rho'' = 0{,}348 \cdot 206\,300 = 71\,800$.

S	2705	1440	1650	2114
$\theta + M$	34°40′	89°50′	79°20′	32°00′
c''	15″,1	49″,8	42″,8	18″,0

Для вычисления поправок за центрировку и редукцию имеется специальная логарифмическая линейка, которая дает возможность находить поправку c'' при одной установке движка. При одной установке движка вычисляются также поправки c'' и на геодезической линейке МГМ (см. § 51) и на линейке ВТС (§ 52).

§ 50. Вычисление площадей

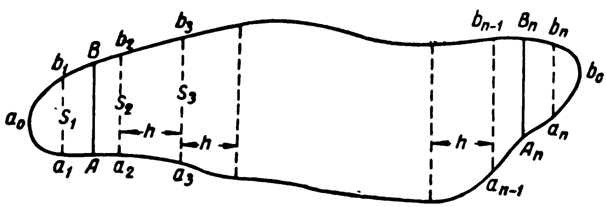
При графическом способе вычисления площадей удобно применять обычную логарифмическую линейку, умножение и деление на которой производится с относительной ошибкой около 0,1%. При помощи логарифмической линейки можно вычислять площади, ограниченные не только прямыми, но и кривыми линиями, с быстротой и точностью, которую может дать хороший планиметр.

Пусть требуется вычислить площадь, ограниченную кривой линией (фиг. 44). Разобьем фигуру на ряд узких полосок с одинаковой шириной h. Площадь нашей фигуры можно приближенно вычислить по формуле

$$P = h \cdot \sum_{i=1}^{n} S_i,$$

где $S_1, S_2, \ldots, S_n$ — средние линии трапеций.

Если к бегунку линейки прикрепить какой-нибудь указатель (на фиг. 7 указатель u), то значение ΣS_i легко измерить при помощи



Фиг. 44. Вычисление площади при помощи миллиметровой шкалы логарифмической линейки и трафарета

миллиметровой шкалы логарифмической линейки следующим образом. Нуль миллиметровой шкалы помещают в точку a_1, а указатель передвигают в точку b_1. Потом, не делая отсчета в точке b_1, прикладывают шкалу к линии a_2b_2 так, чтобы указатель пришелся над точкой a_2, после чего передвигают его до совмещения с точкой b_2 и т. д. Отсчет по миллиметровой шкале в точке b_n, выраженный в сантиметрах, даст двойную площадь фигуры в гектарах, если план составлен в масштабе 1 : 10 000, а $h = 0{,}5$ *см*. При другом значении h или при другом масштабе плана отсчет, сделанный в точке b_n, необходимо умножить на соответствующий коэффициент.

Чтобы не разбивать фигуру на трапеции, следует пользоваться трафаретом (из тонкого прозрачного целлулоида или прозрачной бумаги), состоящим из ряда параллельных равноотстоящих линий. Трафарет всегда можно наложить на фигуру так, что расстояние от линии a_1b_1 до точки a_0 и расстояние от линии a_nb_n до точки b_0 будут одинаковы и равны $\frac{h}{2}$. Если нужна бо́льшая точность, то измерение суммы отрезков начинают с точки a_2 и заканчивают в точке b_{n-1}. Площади фигур ABa_0 и $A_nB_nb_0$ вычисляют как площади параболических сегментов, равные $\frac{2}{3}$ произведения длины на ширину.

Исследования показывают, что при помощи миллиметровой шкалы логарифмической линейки и трафарета малые площади вычисляются точнее, чем при помощи планиметра.

§ 51. Вычисления на геодезической счетной линейке МГМ

Счетная линейка МГМ, сконструированная геодезистами Митиным, Герасимовым и Максимовым, отличается от обычной логарифмической линейки тем, что на ней построены специальные шкалы для геодезических вычислений. На линейке МГМ можно выполнять и те вычисления, которые производятся на обычной логарифмической линейке.

Счетная линейка МГМ имеет длину в 25 *см*. Как и обычная линейка, она состоит из трех частей: корпуса, движка и бегунка. На корпусе и движке нанесено 13 шкал; на фиг. 45, 46 и 47 показаны 12 шкал линейки; 13-я — миллиметровая равномерная шкала на рисунке не видна.

Геодезическая линейка предназначена, главным образом, для вычисления:

а) поправок за центрировки и редукции;

б) превышений;

в) сближения меридианов;

г) поправок за кривизну изображения геодезических линий;

д) поправок в длины линий при переходе с эллипсоида на плоскость в проекции Гаусса;

е) коэффициентов уравнений погрешностей;

ж) поправок в превышения за кривизну Земли и рефракцию.

Вычисление поправок за центрировки и редукции

Поправки за центрировки и редукции вычисляются по формуле

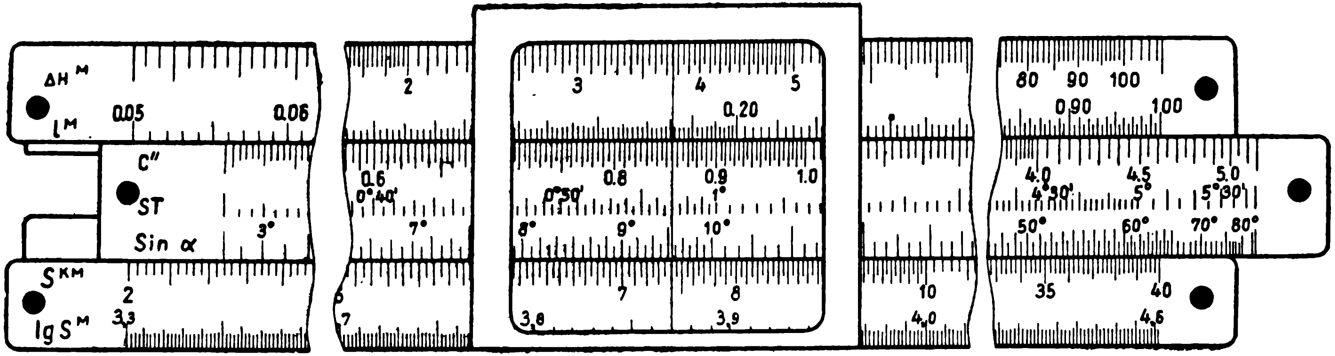
$$c'' = \frac{c\rho'' \sin(M+\Theta)}{S}$$

на шкалах (фиг. 45), помеченных значками $e^{м}$, c'', $S^{км}$ (или $\lg S$, если даны логарифмы сторон), и на шкале $\sin\alpha$, полагая $\alpha = M + \Theta$.

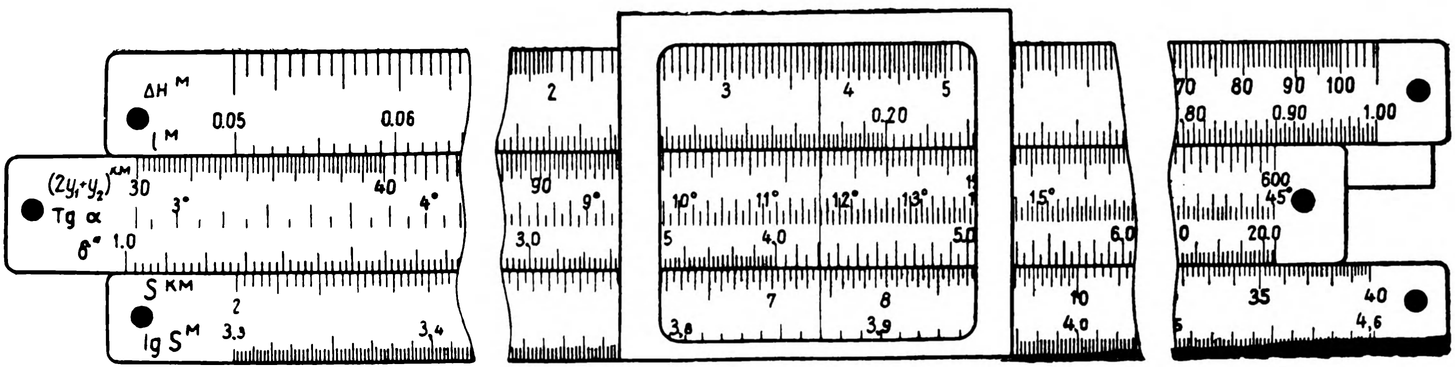
При нахождении поправок c'' пользуются правилом вычисления пропорций, представляя написанную выше формулу в виде

$$\frac{S}{\sin\alpha} = \frac{e\cdot 206}{c''},$$

причем коэффициент 206 учтен при построении шкалы e, а длина линии выражена в километрах.



Фиг. 45. Шкалы на верхней стороне линейки и движка



Фиг. 46. Шкалы на верхней стороне линейки и на оборотной стороне движка

Для нахождения поправки c'' ставят визир на шкале S на отсчет, соответствующий длине данной линии (или на отсчет на шкале $\lg S$, если дан логарифм линии), и подводят под него метку шкалы $\sin \alpha$ соответствующую данному углу. Не трогая движок, ставят визир на соответствующую метку шкалы e и против визира на шкале c'' читают результат. На фиг. 45 показано, что при $S = 7{,}00$, $\alpha = 9°00'$ и $e = 0{,}186$ поправка $c'' = 0'',86$; на этом значении и установлен визир.

Если длину линии S или линейный элемент e увеличить или уменьшить в несколько раз, то во столько же раз необходимо увеличить или уменьшить отсчет, сделанный по шкале c''.

Вычисление превышений

Это вычисление выполняется так же, как и на обычной логарифмической линейке, по формуле

$$h = S \operatorname{tg} \nu$$

при помощи шкалы $S^{км}$ (или $\lg S^{м}$) и тригонометрических шкал. На фиг. 46 для $S = 35{,}6$ *м* (против которого установлен конец движка) и $\nu = 11°45'$ на шкале $S^{км}$ против визира получается h равное 7,40 *м*.

Вычисление сближения меридианов

На линейке МГМ сближение меридианов вычисляют по формуле

$$\gamma' = [2] \operatorname{tg} \varphi \cdot y = k \cdot y,$$

где y — ордината данной точки (в километрах). Вычисление производится по координатам данной точки следующим образом. *Дополнительный индекс бегунка устанавливают на метку шкалы $x^{км}$* (фиг. 47), *соответствующую числу километров данной абсциссы x, и под визир бегунка подводят штрих 1,0 (или 10,0) шкалы δ'', нанесенной на движке. После этого, не изменяя установки движка, устанавливают визир на метку δ'' соответствующую данной ординате y, и на шкале $S^{км}$ против визира читают сближение меридианов в минутах.* При $x = 4200$ *км* и $y = 30$ *км*, $\gamma = 12',6$.

Вычисление поправок за кривизну изображения геодезических линий

Эти поправки вычисляются по формуле

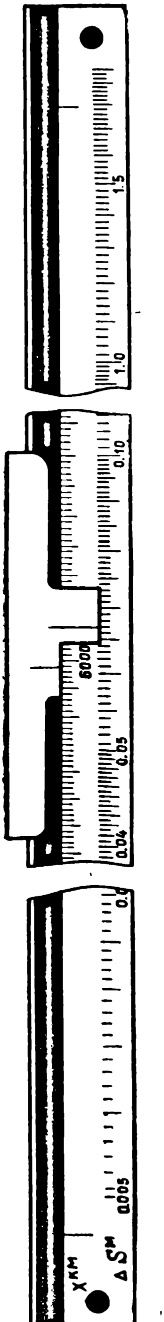
$$\delta_{1,2} = \frac{f}{3} (x_1 - x_2) (2y_1 + y_2),$$

где $\delta_{1,2}$ — поправка в направление с пункта 1 на пункт 2; x_1 и x_2 — абсциссы; y_1 и y_2 — ординаты точек 1 и 2, считаемые от осевого меридиана зоны; величина $\frac{f}{3} = \frac{\rho''}{6\,MN}$, вычисленная для широты в 50°, равна 0,000 844 (при пользовании этим числом для других широт СССР ошибка в вычислении поправки не выйдет за пределы 0'',03).

Поправки вычисляются при помощи шкал $(2y_1 + y_2)^{км}$, δ'' и $S^{км}$ с использованием пропорции

$$\frac{\frac{f}{3}(2y_1 + y_2)}{1} = \frac{\delta_{1,2}}{x_1 - x_2}.$$

Для определения $\delta_{1,2}$ штрих шкалы $(2y_1 + y_2)^{км}$, соответствующий значению $(2y_1 + y_2)$, соединяют со штрихом 1,00 (крайний правый *штрих) шкалы $e^{м}$ и против метки $(x_1 - x_2)$ на шкале $S^{км}$ читают на шкале δ'' ответ.*



Фиг. 47. Шкалы на ребре линейки и часть бегунка с первым и вторым дополнительными индексами

Если штрих, соответствующий отсчету $(x_1 - x_2)$, попадет мимо шкалы δ'', то движок выдвигают влево, и штрих, соответствующий отсчету $(2y_1 + y_2)$, соединяют со штрихом 0,10 шкалы $e^{м}$, отмеченным на линейке звездочкой; в этом случае отсчет по шкале δ'' необходимо уменьшить в 10 раз.

На фиг. 46 для значений $(2y_1 + y_2) = 67{,}4$ *км* и $x_1 - x_2 = 7{,}4$ *км* читаем против визира $\delta'' = 0'',42$.

Вычисление поправок в длины линий при переходе с эллипсоида на плоскость в проекции Гаусса

Вычисление производится по формуле

$$\Delta S = \frac{y_m^2}{2R^2} S,$$

где S — длина линии, выраженная в километрах; $y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$ среднее из ординат конечных точек линии; $\frac{1}{2R^2} = 0{,}000\,012\,27$ для радиуса кривизны R на широте 50°.

Сначала при помощи шкал $S^{км}$ и $\Delta S^{м}$ находят поправку на один километр длины, а потом для получения полной поправки найденную величину умножают на длину линии S.

Пример 48. Вычислить поправку в длину линии $S = 2148{,}35$ *м*, если ординаты ее концов равны: $y_1 = 73{,}8$ *км*, $y_2 = 74{,}2$ *км*.

Вычисляем $y_m = \frac{y_1 + y_2}{2} = 74{,}0$ *км*. Устанавливаем визир на отсчет 7—4—0 на шкале $S^{км}$ и против второго дополнительного индекса на шкале $\Delta S^{м}$ (фиг. 47) читаем поправку 0,067 на один километр линии. Сделанный отсчет умножаем на 2,15 *км*, для чего крайний левый штрих 1,0 шкалы δ'' совмещаем с отсчетом 0,067, установленным на шкале $S^{км}$, принимая надписи на шкале $S^{км}$ за сантиметры. После этого визир бегунка ставим на отсчет, соответствующий длине линии 2,15 на шкале δ'', и против визира на шкале $S^{км}$ читаем поправку 14,4 *см*.

Вычисление коэффициентов уравнений погрешностей

При уравнивании тригонометрических сетей по способу посредственных измерений коэффициенты вычисляются по формулам

$$a = -20{,}63 \frac{\sin \alpha}{S_{км}}; \quad b = 20{,}63 \frac{\cos \alpha}{S_{км}},$$

где α — дирекционный угол, а S — длина линии, выраженная в километрах. Эти формулы можно представить в виде

$$-\frac{S}{\sin\alpha}=\frac{0{,}1\cdot 206}{a};\quad \frac{S}{\cos\alpha}=\frac{0{,}1\cdot 206}{b},$$

которые аналогичны формуле для вычисления поправок за центрировки и редукции, если линейный элемент e центрировки положить равным постоянной величине 0,1 *м*.

Пример 49. $S=3{,}60$ *км*; $\alpha=16°00'$; вычислить коэффициенты a и b.

Устанавливаем визир на шкале $S^{км}$ против отсчета 3—6—0 и под него подводим штрих шкалы $\sin\alpha$, соответствующий 16°00′. Результат читаем на шкале c'' против штриха 0,1, помеченного звездочкой на шкале $e^{м}$. Ответ: $a=1{,}58$.

Для нахождения коэффициента b под визир, установленный на отсчете 3—6—0 шкалы $S^{км}$, подводим штрих шкалы $\sin\alpha$, соответствующий $90°-\alpha=74°00'$; результат читаем на шкале c'' против штриха 0,1 шкале $e^{м}$. Так как в нашем примере штрих 0,1 (шкалы $e^{м}$) вышел за пределы шкалы c'', то передвигаем движок вправо настолько, чтобы штрих шкалы c'', отмеченный звездочкой, занял то место, которое занимал правый крайний штрих движка; результат читаем на шкале c'' против штриха 0,10 шкалы $e^{м}$. Ответ: $b=5{,}52$.

Чтобы избежать двойной установки движка, нужно устанавливать в этих случаях длину S в правой части шкалы $S^{км}$.

Вычисление поправок в превышения за кривизну Земли и рефракцию

Поправка в превышения за кривизну Земли и рефракцию вычисляется по формуле

$$f=0{,}43\,\frac{S^2}{R}.$$

Вычисление производится при помощи шкал $S^{км}$ и $\Delta H^{м}$ путем установки визира на отсчет шкалы $S^{км}$, соответствующий длине линии S; поправка читается (против визира) на шкале $\Delta H^{м}$.

Для значений S, равных 3040 *м* и 3460 *м*, поправки f соответственно будут: 0,63 *м* и 0,81 *м*.

Если дан $\lg S$, то визир устанавливается на соответствующую метку шкалы $\lg S^{м}$, а результат читается на шкале $\Delta H^{м}$.

Выполнение других вычислений на счетной геодезической линейке

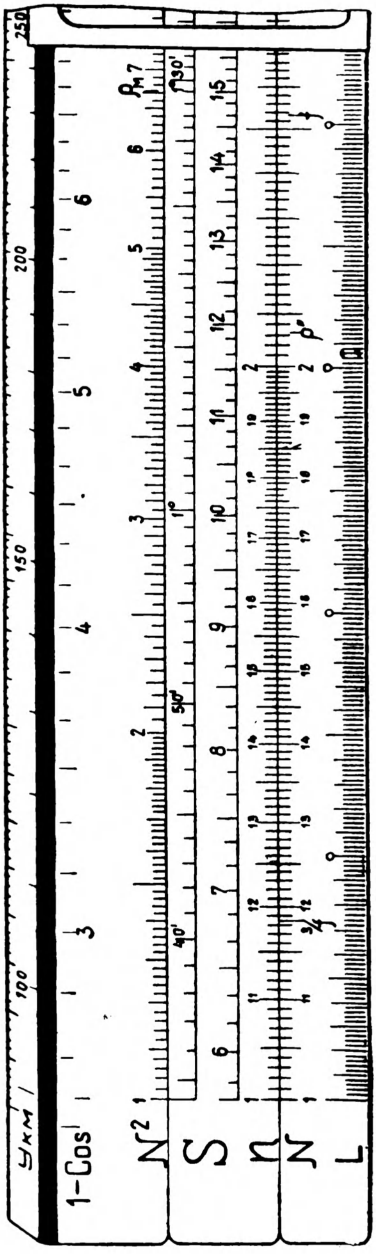
Кроме приведенных выше действий, на геодезической линейке можно производить умножение, деление, возведение в квадрат, извлечение квадратного корня и различные комбинированные действия.

Приращения прямоугольных координат вычисляются на шкалах $S^{км}$, $\sin\alpha$ и S, T так же, как и на обычной счетной линейке.

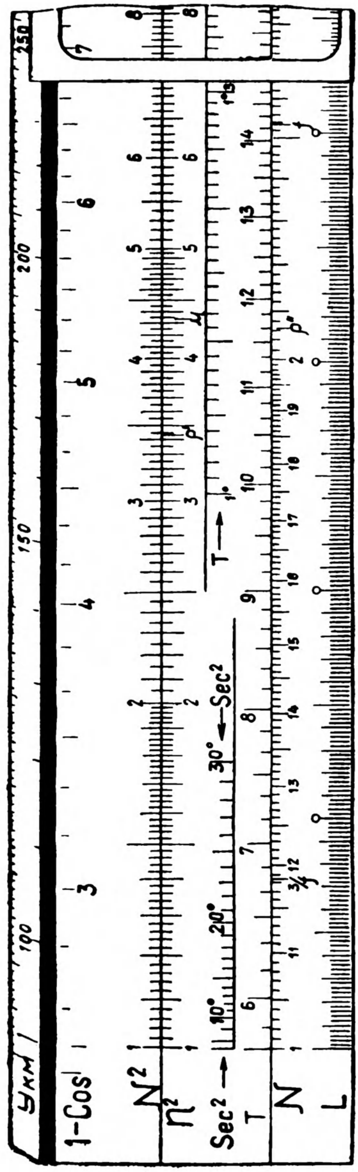
Умножение выполняется на шкалах $S^{км}$ и δ'' и на других шкалах. При умножении необходимо помнить, что начальным штрихом шкалы δ'' является штрих 1,0, а конечным штрихом — 10,0, которые совмещаются со штрихом на шкале $S^{км}$, соответствующим множителю.

При делении на шкалах $S^{км}$ и δ'' визир устанавливается против делимого, отсчитанного на шкале $S^{км}$, под него подводится делитель, взятый на шкале δ'', и результат читается на шкале $S^{км}$ против штриха 1,0 или штриха 10,0 шкалы δ''.

Возведение в квадрат производится или путем умножения числа самого на себя, или при помощи шкалы $\Delta H^{м}$.



Фиг. 48. Лицевые стороны линейки и движка



Фиг. 49. Лицевая сторона линейки и оборотная сторона движка

Как при возведении в квадрат, так и при извлечении квадратного корня при помощи шкал $\Delta H^{м}$ и c'', необходимо предварительно установить движок так, чтобы штрих 1,0 шкалы c'' был против штриха 1 шкалы $\Delta H^{м}$. Если возведение в квадрат или извлечение квадратного корня производится на шкалах $\Delta H^{м}$ и δ'', то движок должен быть установлен так, чтобы штрих 1 шкалы $\Delta H^{м}$ был против штриха 1,0 или штриха 10,0 шкалы δ''. Дальнейшие действия при извлечении квадратного корня и возведении в квадрат выполняются так же, как и на обычной логарифмической линейке.

§ 52. Вычисления на геодезической счетной линейке ВТС

На счетной линейке ВТС (Военно-топографической службы) построены специальные шкалы для топографо-геодезических вычислений. На ней можно также выполнять и те вычисления, которые производятся на обычной 25-сантиметровой логарифмической линейке. На лицевой стороне линейки ВТС и на лицевой стороне движка этой линейки нанесены семь шкал с различными метками, соответствующими константам, имеющим частое употребление при геодезических вычислениях (фиг. 48).

1. На левой половине скошенной передней грани линейки нанесена шкала для функции $Y_{км}$, а на правой — шкала для функции $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, для α — от 1° до 2°30′. Для углов от 2°30′ до 25° шкала $1 - \cos\alpha$ помещена на месте шкалы кубов (обыкновенной логарифмической линейки), которая на линейке ВТС отсутствует.

2. На шкале квадратов корпуса линейки отмечен штрих $\rho_{м}$ являющийся коэффициентом в формуле

$$\rho_{м} = 0{,}067\ S^2\ км.$$

3. На шкале чисел корпуса линейки сделаны пометки для постоянных величин: $f = 0{,}002533$; $\frac{3}{f} = 1184{,}4$; $\rho'' = 206\,265$; $\pi = 3{,}142$; $R = 6371$, служащие для облегчения вычислений по некоторым геодезическим формулам.

4. На шкале чисел движка сделана пометка $\rho^{g} = 63{,}66$, выражающая значение радиана в градовых делениях круга.

5. На лицевой стороне движка нанесены две шкалы синусов: верхняя для углов от 0°34′,4 до 5°44′,5 и нижняя для углов от 5°44′,5 до 90°.

6. На шкале L (шкала мантисс логарифмов) вместо подписей 1, 2, . . . , 1,0 поставлены кружочки, а середина шкалы (5) отмечена значком v.

7. На боковой грани корпуса линейки нанесена логарифмическая шкала $l_{см}$ для произведения $\rho''\ l_{см}$.

На обратной стороне движка нанесены следующие четыре шкалы (фиг. 49):

1. Шкала n^2 квадратов чисел с пометкой $\rho' = 3438'$.

2. Две шкалы тангенсов T, из них верхняя для углов от 1° до 5°42′,5 и нижняя — от 5°42′,5 до 45°.

3. Шкала $\sec^2$ для функции $\frac{1}{\cos^2\alpha} = \sec^2\alpha$, служащая для вычисления горизонтальных проложений расстояний, отсчитанных по вертикальной дальномерной рейке. На этой шкале первый штрих принят за нулевой, второй штрих соответствует 5°, третий — 8°.

На нижней поверхности корпуса линейки приведены постоянные и формулы, часто применяемые при геодезических вычислениях, и построены две номограммы из соединенных шкал (см. гл. IX) для уравнений:

$$\rho_{м} = 0{,}0067 \cdot d^2\ км;$$

$$k = \Phi\,(x_{км}).$$

Приведем некоторые примеры геодезических вычислений на линейке ВТС.

Вычисление поправок за центрировку и редукцию

При вычислении названных поправок пользуются правилом пропорции

$$\frac{c''}{e\rho''}=\frac{\sin(M+\Theta)}{S},$$

действуя в следующем порядке:

1) визир устанавливают на отсчет S шкалы N или на $\lg S$ шкалы L, под который передвижением движка подводят отсчет $(M+\Theta)$, взятый на шкале синусов (на шкале S);

2) не меняя положения движка, устанавливают визир на отсчет e на шкале $l_{см}$ и на шкале n читают ответ в секундах.

Пример: $S=1{,}53$ *км*; $e=18{,}5$ *см*; $M+\Theta=20°00'$; ответ: $c''=+8'',6$.

Вычисление горизонтальных проложений и превышений

Эти вычисления производят по формулам

$$S=d\cos^2\nu=\frac{d}{\sec^2\nu}$$

и

$$h=S\,\mathrm{tg}\,\nu$$

в следующем порядке:

1) визир устанавливают на отсчет d на шкале N, подводят под него отсчет ν, взятый на шкале $\sec^2$, и на шкале N против начального штриха нижней шкалы T читают ответ;

2) не перемещая движка, визир устанавливают на отсчет ν шкалы T (нижней или средней) и значение h читают против визира на шкале N.

Пример: $d=204$ *м*; $\nu=8°30'$; ответ: $S=199{,}5$ *м*; $h=29{,}8$ *м*.

При $\nu<1°$ значение угла можно увеличивать в 10 или 100 раз, если уменьшить соответственно значение h или воспользоваться формулой

$$h=S\frac{\nu'}{\rho'},$$

производя действия умножения или деления на шкалах N^2 и n^2.

Вычисление поправок за приведение к горизонту наклонных расстояний

Поправки за приведение к горизонту наклонных расстояний, измеренных лентой, вычисляют по формуле

$$\Delta d=d\,(1-\cos\nu),$$

а горизонтальное проложение по формуле

$$S=d-\Delta d.$$

Вычисление производят на шкалах n^2 и $(1-\cos)$ в следующем порядке:

1) под крайний левый штрих шкалы N^2 ставят отсчет d, взятый на шкале n^2;

2) визир устанавливают на значение ν, взятое на шкале $1 - \cos$, и против него на шкале n^2 читают значение Δd.

Пример: $d = 263{,}52$ *м*; $\nu = 5°25'$; ответ: $\Delta d = 1{,}18$ *м*.

Горизонтальное проложение $S = 263{,}52 - 1{,}18 = 262{,}34$ *м*.

Вычисление поправок за редуцирование расстояний на плоскость в проекции Гаусса

Вычисление производят на шкалах n^2 и $Y\,км$ по формуле

$$\Delta S_r = S\,\frac{y^2_m}{2\,R^2}$$

в следующем порядке:

1) под крайний левый штрих шкалы N^2 подводят отсчет S, взятый на шкале n^2;

2) визир ставят на отсчет y_m на шкале Yкм, учитывая, что $y_m = \frac{y_1 + y_2}{2}$ есть расстояние средней точки линии от осевого меридиана;

3) против визира на шкале n^2 читают значение ΔS_r.

При установке запятой в значении ΔS_r пользуются неравенствами

$$0{,}0001\;S < \Delta S_r < 0{,}001\;S \text{ при } |Y\,км| < 286\;км;$$
$$0{,}001\;S < \Delta S_r < 0{,}01\;S \;\;\text{»}\;\; |Y\,км| > 286\;км.$$

Пример: $S = 1200{,}34$ *м* $\cdot\, y_m^2 = 201$ *км*; ответ: 0,59 *м*.

Расстояние на плоскости в проекции Гаусса равно $1200{,}34 + 0{,}59 = 1200{,}93$ *м*.

Вычисление поправок за кривизну изображения геодезических линий на плоскости

Вычисление производится на шкалах N и n по формуле

$$\delta''_{1,2} = \frac{f}{3}\,(x_1 - x_2)\,(2y_1 + y_2)$$

в следующем порядке:

1) против метки $\frac{3}{f} = 1184$ на шкале N ставят отсчет $2y_1 + y_2$, взятый на шкале n;

2) визир устанавливают на отсчет $x_1 - x_2$ на шкале N и против него на шкале n читают значение $\delta_{1,2}$ в секундах.

Пример: $2y_1 + y_2 = 67{,}4$ *км*, $x_1 - x_2 = 7{,}4$ *км*; ответ: $+0'',42$.

В данном примере для получения ответа на шкале n движок необходимо передвинуть вправо.

Вычисление коэффициентов уравнений погрешностей

Вычисления производят на шкалах N (или L), S и n по формулам

$$a = -20{,}63\,\frac{\sin\alpha}{S\,км}; \quad b = +20{,}63\,\frac{\cos\alpha}{S\,км} = +20{,}63\,\frac{\sin(90-\alpha)}{S\,км},$$

пользуясь правилом пропорции;

1) визир устанавливают на отсчет S *км* на шкале N или на значение мантиссы $\lg S$ на шкале L;

2) под визир подводят отсчет α или $90 - \alpha$ на шкале S и против метки ρ'' на шкале n читают ответ.

Пример: $S = 3{,}60$ *км*; $\alpha = 16°00'$; ответ: $a = -1{,}58$; $b = +5{,}50$.

Вычисление поправок в превышения за кривизну Земли и рефракцию

Поправки определяют по номограмме, построенной на нижней поверхности корпуса линейки при $S < 10$ *км* или по формуле

$$\rho_м = 0{,}067\, S^2$$

на шкалах n и N^2, пользуясь меткой $\rho_м$ на шкале N^2.

Пример: $S = 3{,}46$ *км*; ответ: $\rho_м = 0{,}80$ *м*.

Вычисление сферических избытков треугольников

Вычисление производят на шкалах N, n и S по формуле

$$\varepsilon'' = f \cdot a \cdot b \cdot \sin C$$

или по формуле

$$\varepsilon'' = f \cdot a \cdot h,$$

где a — основание треугольника, h — его высота, определяемая графически на схематическом чертеже триангуляции.

При вычислении по первой формуле действия умножения рекомендуется производить в следующем порядке:

1) против начального штриха шкалы N устанавливают отсчет a на шкале n;

2) визир устанавливают на конечный (или начальный) штрих шкалы n и подводят под него отсчет b на шкале n;

3) визир устанавливают на начальный (или конечный) штрих шкалы n и под него подводят отсчет C на шкале S;

4) против метки f на шкале N читают ответ в секундах по шкале n.

Пример: $a = 14{,}45$ *км*; $b = 9{,}05$ *км*; $C = 36°10'$; ответ: $0'',20$.

Заключительные замечания о применении счетной линейки ВТС

Из приведенных примеров видно, что линейка ВТС является прибором, на котором многие топографо-геодезические вычисления предельно упрощены.

Кроме перечисленных действий, на линейке ВТС можно производить решение треугольников в триангуляции низших классов с точностью, достаточной для предварительных вычислений (см. § 45). Можно приближенно вычислять приращения прямоугольных координат (см. § 71) и решать обратные геодезические задачи. При помощи шкалы $1 - \cos$ можно определять приращения прямоугольных координат с точностью до 0,1 *м*.

Упражнения

1. Построить логарифмическую шкалу и описать, как при ее помощи и при помощи циркуля производить умножение и деление чисел.

2. При помощи логарифмической линейки вычислить, какой процент общей суммы (487,2) составляют указанные ниже числа. Сообразить: 1) каким образом можно вычислить проценты для всех чисел только при двух установках движка; 2) на сколько может отличаться вычисленная сумма процентов от 100%.

Данные числа	Проценты	Данные числа	Проценты
76,3		60,5	
68,4		40,3	
50,3		43,5	
56,1		20,4	
43,2		28 2	
		487,2	

3. При помощи логарифмической линейки (при двух установках движка) вычислить поправки к приращениям координат по невязкам $f_x = -0{,}48$ и $f_y = 0{,}59$ и длинам сторон теодолитного хода: 206,3; 193,8; 104,3; 95,6; 147,3; 80,3; 98,5; 148,3; 115,5; 129,5.

4. С минимальным количеством установок движка логарифмической линейки вычислить

$$g = \frac{0{,}603 \cdot 13{,}5 \cdot 1{,}86}{4{,}54 \cdot 6{,}35 \cdot 0{,}968}$$

и сообразить значность результата.

5. Извлечь квадратные корни из чисел: 104,5; 265; 0,265; 503; 0,503; 0,0503; 8,63; 0,000 863.

6. Извлечь кубические корни из чисел: 105; 1050; 105 000; 9,35; 0,935; 0,0935; 0,009 35.

7. По формулам

$$y = \frac{100}{x} \quad \text{и} \quad z = \frac{100}{x^2}$$

вычислить при одном положении движка величины y и z для следующих значений переменной x: 2,0; 3,05; 8,04; 10,5; 60,8.

8. По формуле

$$M = \pm 0{,}92\sqrt{x}$$

вычислить значения M (при одном положении движка) для следующих значений x: 20; 30; 8; 43; 59.

9. При помощи логарифмической линейки определить длину и направление линии по ее приращениям координат:

$$\Delta x = +203{,}8; \quad \Delta y = -60{,}5. \quad \text{Ответ: } \alpha = 343°28'; \quad S = 213.$$

10. Вычислить превышения одной точки над другой по горизонтальным проложениям линий, равным: 80,3; 103,8; 56,8; 93,4; 20,5, и углам наклона этих линий, равным соответственно 1°41′; 0°32′; 0°19′; 0°54′; 6°15′.

11. При помощи логарифмической линейки вычислить приращения прямоугольных координат по горизонтальным проложениям линий: 120,3; 80,4; 90,5 и соответствующим дирекционным углам: 30°00′; 140°30′; 250°45′.

12. При одном положении движка логарифмической линейки вычислить поправку за наклон линии к горизонту по формуле

$$\Delta S = 86{,}3 \cdot \sin^2 4°25'. \qquad \text{Ответ: } \Delta S = 0{,}5 \text{ м}.$$

13. $\lg \operatorname{tg} \alpha = 0{,}545$. При помощи логарифмической линейки определить значение угла α.

Ответ: $\alpha = 74°06'$

14. При нормальном (не перевернутом) положении движка обычной логарифмической линейки вычислить поправку c'' по формуле

$$c'' = \frac{\rho'' \cdot 0{,}042 \cdot \sin 108°40'}{1440} \qquad \text{Ответ: } c'' = +5'',7.$$

15. Пользуясь основными шкалами, обратной шкалой и шкалой квадратов при

одном положении движка, вычислить w по формуле

$$w = 3{,}8^{2,5}. \qquad \text{Ответ: } 28{,}2.$$

16. При одном положении движка определить диаметр трубы по формуле

$$d = 1{,}13 \sqrt{\frac{Q}{v}},$$

при расходе воды $Q = 0{,}168 \frac{м^3}{сек}$ и скорости $v = 2{,}1 \frac{м}{сек}$.

Ответ: 0,30 *м*.

Глава VI

ТАБЛИЦЫ, ИХ ВЫБОР, СОСТАВЛЕНИЕ И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

§ 53. Классификация таблиц

Инженеру-геодезисту и инженеру-землеустроителю приходится пользоваться в их практической деятельности различными таблицами, составляемыми для определенных функций. Таблицами называют совокупность численных значений данной функции, соответствующих последовательно расположенным значениям аргумента. Постоянная величина, на которую изменяется значение аргумента, называется *ступенью* или *шагом* таблицы.

Таблицы обычно делят на *общие* и *специальные*. Общими таблицами являются, например, таблицы логарифмов чисел, таблицы умножения и деления, таблицы квадратных корней и т. п. Примером специальных геодезических таблиц могут служить таблицы превышений, таблицы приращений координат, таблицы размеров рамок планшетов и т. п.

Кроме того, таблицы разделяют по системе расположения материала. Материал таблиц располагают по определенному закону так, чтобы они были компактны, удобны и по ним можно было быстро находить нужные величины. По системе расположения материала различают таблицы *с одним, двумя, тремя входами* и т. д. Число входов связано обычно с числом аргументов функции, для которой составлены таблицы.

Расположению в таблице или, как говорят, табулированию легко поддаются функции одного или двух аргументов и труднее табулировать функции большего числа аргументов. Табулирование выгодно еще для функций, медленно изменяющихся, а также для функций, у которых исчерпывающее число значений аргумента в пределах рабочей части не особенно велико.

В таблицах с одним входом обычно размещаются значения функции, зависящей от одного аргумента

$$y = f(x).$$

Таблицы с одним входом содержат два столбца, расположенные рядом, в одном из них даются значения аргумента, а в другом значения функции. Такие таблицы имеют следующий вид:

Значение аргумента	**Значение функции**
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
x_3	$f(x_3)$
.	.
.	.
.	.

Примером таблиц с одним входом может служить табл. 14 поправок за температуру стальной 20-метровой ленты, вычисленных по формуле

$$\Delta l_t = kl\,(t - 20°) = 0{,}00012 \cdot 20\,(t - 20°),$$

с шагом, равным 2°.

Таблица 14

$t - 20°$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Δl_t в *мм*	0,5	1,0	1,4	1,9	2,4	2,9	3,4	3,9	4,3	4,8

В таблицах с двумя входами размещают значения функции

$$z = f(x, y),$$

где x и y — независимые аргументы (табл. 15).

Таблица 15

Значения y / Значения x	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4
x_0	$f(x_0\ y_0)$	$f(x_0\ y_1)$	$f(x_0\ y_2)$		
x_1	$f(x_1\ y_0)$	$f(x_1\ y_1)$	$f(x_1\ y_2)$		
x_2	$f(x_2\ y_0)$	$f(x_2\ y_1)$	$f(x_2\ y_2)$		
x_3	$f(x_3\ y_0)$	$f(x_3\ y_1)$	$f(x_3\ y_2)$		
x_4	$f(x_4\ y_0)$	$f(x_4\ y_1)$	$f(x_4\ y_2)$	.	.
—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—

По сравнению с таблицами с одним входом расположение таблиц с двумя входами дает возможность экономить место, занимаемое материалом, без особого усложнения пользования ею. Значения функции располагаются в этом случае на пересечении столбца и строки, соответствующих определенным значениям аргументов x и y. Примером таблиц с двумя входами может служить также табл. 16 поправок за компарирование 24-метровой ленты (в сантиметрах), составленная по формуле

$$\Delta S = \frac{S}{24}\,\Delta l,$$

где S — длина линии, Δl — разность между длиной ленты, определенной на компараторе, и ее номинальной длиной.

Таблица 16

Δl *мм* / S *м*	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
20	0,1	0,2	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,8
40	0,2	0,3	0,5	0,7	0,8	1,0	1,2	1,3	1,5	1,7
60	0,3	0,5	0,7	1,0	1,2	1,5	1,7	2,0	2,2	2,5
80	0,3	0,7	1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,7	3,0	3,3
100	0,4	0,8	1,2	1,7	2,1	2,5	2,9	3,3	3,8	4,2
200	0,8	1,7	2,5	3,3	4,2	5,0	5,8	6,7	7,5	8,3
300	1,2	2,5	3,7	5,0	6,2	7,5	8,8	10,0	11,2	12,5

Таблицы с тремя входами составляются для размещения значений функции трех переменных

$$u = f(x, y, z).$$

При составлении таблиц с тремя аргументами дают последовательные значения одному из аргументов (например, z), вследствие чего функция заменяется рядом функций от двух аргументов

$$u_0 = f(x, y, z_0); \quad u_1 = f(x, y, z_1)\ldots; \quad u_n = f(x, y, z_n).$$

Значения каждой такой функции размещают в таблице с двумя входами. Таких таблиц будет n, т. е. столько, сколько взято отдельных значений z.

Часто составляют таблицы для функций одного аргумента, но с двумя входами (таблицы логарифмов чисел, таблицы квадратов и т. п.); таблицы для функций двух аргументов составляют с тремя входами.

В качестве примера таблиц с тремя входами можно назвать «Таблицы для вычисления дирекционных углов и расстояний» Л. Я. Нейшулера; «Таблицы умножения» О'Рурка, если их рассматривать в целом, и др.

Имеются таблицы с четырьмя и более входами, но мы на них останавливаться не будем. Скажем только, что, например, «Таблицы произведений четырехзначных чисел на двузначные» Л. Циммермана и «Таблицы умножения трехзначных чисел на трехзначные числа» А. А. Чудова имеют четыре входа.

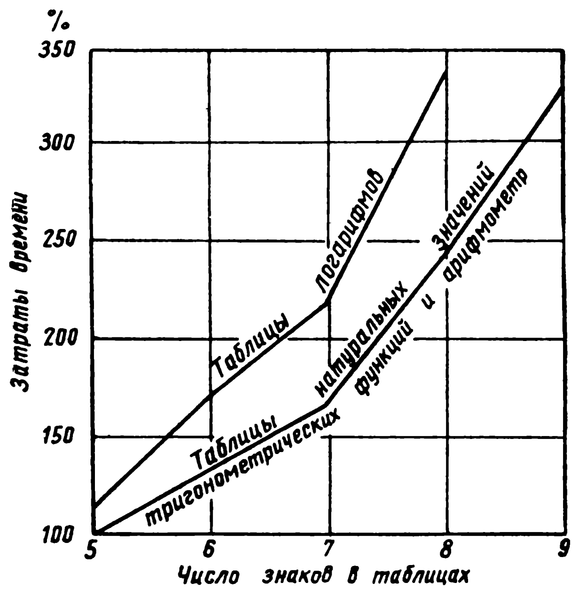
Как правило, таблицы составляются для тех или иных функций с определенным числом знаков, значит с определенной точностью.

§ 54. Общие замечания о выборе таблиц

Таблицы составляются с разным числом знаков. Например, при геодезических вычислениях применяются таблицы логарифмов, имеющие от четырех до восьми знаков. Таблицы натуральных значений тригонометрических функций при тех же вычислениях применяются от четырехзначных до десятизначных. Не безразлично, с каким числом знаков употреблять таблицы для тех или иных вычислений. Можно выбрать таблицы с недостаточным числом знаков, и тогда не получим требуемой точности в результате вычислений, если даже будем оперировать с точными числами. Если возьмем таблицы с бо́льшим числом знаков, чем требуется, то напрасно затратим много времени на вычисления, значительно понизим производительность вычислительного труда. При всех вычислениях необходимо выбирать таблицы с необходимым и достаточным числом знаков в зависимости от точности исходных данных и требуемой точности результатов вычислений.

Когда говорят о затрате времени на вычисления по таблицам, обычно ссылаются на немецкого астронома Энке (1791—1865), который установил, что для выполнения одного и того же вычисления при помощи пяти-, шести- и семизначных таблиц логарифмов потребное количество времени пропорционально числам 1, 2, 3*, т. е. вычисления, например, при помощи семизначных таблиц требуют времени больше в три раза, чем те же вычисления при помощи пятизначных таблиц логарифмов.

Для определения влияния числа знаков в таблицах на производительность вычислительного труда студенты-дипломники Московского института землеустройства провели хронометраж для учета времени, затрачиваемого на решение треугольников по формулам синусов при помощи таблиц логарифмов и таблиц натуральных значений тригонометрических функций и арифмометра. Было решено 23 треугольника разными лицами.



Фиг. 50. Кривые затрат времени при решении треугольников по таблицам с разным числом знаков

На фиг. 50 приведены кривые затрат времени, показывающие, какое большое влияние имеет количество знаков в таблицах на производительность вычислительного труда. Поэтому каждый вычислитель должен уметь выбирать таблицы с наименьшим, но достаточным числом знаков. Кроме того, вычислитель должен уметь простейшим путем проверить таблицы и, если понадобится, составить новые таблицы для данного вида вычислений.

В настоящее время, в связи с внедрением в практику различных счетных машин, особое значение имеют таблицы натуральных значений тригонометрических и других функций.

* См., например, Геодезия, Справочное руководство, том IX, 1949, стр. 428.

§ 55. Выбор таблиц логарифмов чисел с наименьшим, но достаточным числом знаков

Логарифмы вообще выражаются бесконечными десятичными дробями, поэтому табличное значение логарифма даже точного числа, почти всегда заключает некоторую ошибку, величина которой может достигать половины единицы последнего знака мантиссы*. Обычно мы имеем дело не с точными, а с приближенными числами; что также дает право сказать, что мантиссы логарифмов содержат ошибки.

Установим зависимость ошибки логарифма числа от ошибки самого числа. Напишем

$$y = \lg x = M \cdot \ln x,$$

где

$$M = \lg e = 0{,}43\ldots$$

Дифференцируя написанное равенство по x и заменяя дифференциалы ошибками, можем написать

$$\Delta \lg x = M \frac{\Delta x}{x}, \qquad (80)$$

т. е. *абсолютная ошибка десятичного логарифма числа равна относительной ошибке самого числа, умноженной на модуль M.*

Приближенно абсолютная ошибка десятичного логарифма числа равна половине относительной ошибки самого числа.

Пример 50. Определить, с каким числом знаков надо взять таблицы для нахождения логарифмов следующих приближенных чисел: $x_1 = 63{,}4$; $x_2 = 0{,}8032$; $x_3 = 485{,}86$.

По формуле (80) находим

$$\Delta \lg x_1 = 0{,}43 \frac{0{,}5}{634} \approx \frac{0{,}2}{634} \approx \frac{1}{3000} \approx 0{,}000\,3,$$

$$\Delta \lg x_2 = 0{,}43 \frac{0{,}5}{8032} \approx \frac{0{,}2}{8032} \approx \frac{1}{40\,000} \approx 0{,}000\,03,$$

$$\Delta \lg x_3 = 0{,}43 \frac{0{,}5}{48\,586} \approx \frac{0{,}2}{48\,586} \approx \frac{1}{240\,000} \approx 0{,}000\,004.$$

Значит, логарифм приближенного (округленного) числа с тремя верными значащими цифрами будет иметь ошибку в четвертом десятичном знаке, с четырьмя — в пятом знаке, с пятью — в шестом и т. д., независимо от числа знаков в мантиссах, помещенных в таблицах.

---

* Интересно отметить, что изобретатель натуральных логарифмов Непер и изобретатель десятичных логарифмов Бригг составили свои таблицы логарифмов с большим числом десятичных знаков. Таблицы Непера были опубликованы в 1614 г. с 17 десятичными знаками под названием «Описание свода логарифмов». Таблицы логарифмов чисел, изданные Бриггом в 1624 г., имеют 14 десятичных знаков. Известные таблицы Вега были изданы в 1794 г. с десятью, а потом издавались с семью десятичными знаками.

На протяжении почти 200 лет в наших средних школах употреблялись семизначные таблицы и только в конце XIX в. они были заменены пятизначными таблицами, а в настоящее время в средних школах пользуются четырехзначными таблицами. Четырехзначные таблицы во многих случаях дают достаточную точность.

Анализируя ошибки логарифмов различных чисел, можно установить следующее правило.

При вычислении по таблицам логарифмов следует пользоваться таблицами со столькими знаками, сколько верных значащих цифр имеется в данных числах.

При выполнении арифметических вычислений с логарифмами нескольких чисел обычно выбирают таблицы с одним запасным знаком, т. е. логарифмы чисел с четырьмя значащими цифрами находят по пятизначным таблицам, с пятью — по шестизначным и т. д. На основании формулы (80) можно показать, что в числе, полученном по n-значному логарифму, можно ручаться за верность только $n-1$ первых значащих цифр.

Действительно, из формулы (80) имеем

$$\frac{\Delta x}{x}=\frac{\Delta \lg x}{M},$$

откуда видно, что относительная ошибка числа, найденная по его логарифму, не зависит от величины самого числа. Полагая $\Delta \lg x = 0{,}5$ единицы n-го знака мантиссы логарифма, а $M = 0{,}43$, получим

$$\left(\frac{\Delta x}{x}\right)_{\text{пр}} = \frac{1{,}2}{10^n}. \qquad (81)$$

Отсюда видно, что наибольшая абсолютная ошибка n-значного числа лежит в пределах

$$0{,}1 < (\Delta x)_{\text{пр}} < 1{,}2, \qquad (82)$$

так как n-значное число больше 10^{n-1} и меньше 10^n. Например,

$$10^3 < 9\,999 < 10^4.$$

Из неравенства (82) видно, что даже n-ый знак числа, найденного по таблицам логарифмов, может быть неверен на 1,2. Поэтому нельзя, например, определять шестой знак по пятизначному логарифму или восьмой знак по семизначному логарифму. Так, при обработке микротриангуляции с длинами сторон треугольников около 0,5 *км*, нужно пользоваться пятизначными логарифмами (или даже шестизначными), если желательно, чтобы стороны были вычислены с ошибкой, не превышающей 1 *см*.

При вычислении сторон треугольников триангуляции 1 класса, длиной около 30 *км* нужно пользоваться таблицами логарифмов с восьмью знаками, если стороны треугольников и прямоугольные координаты вычислять с точностью до миллиметров, имея в виду, что при большом числе действий, для сохранения требуемой точности, полезно вычисления производить с одним запасным знаком.

Одно из основных требований, предъявляемых к таблицам логарифмов, заключается в том, чтобы аргументы (числа) были даны так часто, чтобы при нахождении логарифмов промежуточных чисел (не данных в таблицах), можно было пользоваться *простым (линейным)* интерполированием. Для этого необходимо ступень таблицы (разность между двумя соседними значениями аргументов) делать настолько малой, чтобы первые табличные разности (разности между двумя соседними мантиссами) были пропорциональны изменению аргумента.

Ниже (§ 62) будет доказано, что *пропорциональным* интерполированием (линейным) можно пользоваться только тогда, когда вторые разности (т. е. разности между первыми табличными разностями) меньше четырех единиц последнего знака мантиссы логарифма.

§ 56. Выбор таблиц логарифмов тригонометрических функций

В геодезических вычислениях приходится находить по таблицам логарифмы тригонометрических функций углов и определять углы по логарифмам этих тригонометрических функций.

Так как значения углов, с которыми мы имеем дело при вычислении, суть приближенные числа, то при выполнении этих действий нужно выбирать таблицы с достаточным и вместе с тем не излишним числом знаков.

Установим зависимость между ошибками углов и ошибками логарифмов тригонометрических функций. Напишем функции

$$\begin{aligned} y_1 &= \lg\sin\alpha = M\ln\sin\alpha, \\ y_2 &= \lg\cos\alpha = M\ln\cos\alpha, \\ y_3 &= \lg\operatorname{tg}\alpha = M\ln\operatorname{tg}\alpha, \\ y_4 &= \lg\operatorname{ctg}\alpha = M\ln\operatorname{ctg}\alpha, \\ y_5 &= \lg\sec\alpha = M\ln\sec\alpha, \\ y_6 &= \lg\operatorname{cosec}\alpha = M\ln\operatorname{cosec}\alpha. \end{aligned}$$

Дифференцируя эти функции по α и заменяя дифференциалы ошибками, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \Delta y_1 &= \Delta\lg\sin\alpha = M\operatorname{ctg}\alpha\frac{\Delta\alpha}{\rho} \\ \Delta y_2 &= \Delta\lg\cos\alpha = -M\operatorname{tg}\alpha\frac{\Delta\alpha}{\rho} \\ \Delta y_3 &= \Delta\lg\operatorname{tg}\alpha = \frac{2M}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{\Delta\alpha}{\rho} \\ \Delta y_4 &= \Delta\lg\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{2M}{\sin 2\alpha}\cdot\frac{\Delta\alpha}{\rho} \\ \Delta y_5 &= \Delta\lg\sec\alpha = M\operatorname{tg}\alpha\frac{\Delta\alpha}{\rho} \\ \Delta y_6 &= \Delta\lg\operatorname{cosec}\alpha = -M\operatorname{ctg}\alpha\frac{\Delta\alpha}{\rho} \end{aligned}\right\}. \tag{83}$$

Из уравнений (83) определим погрешности $\Delta\alpha$ отыскания углов по логарифмам разных тригонометрических функций, допуская, что $\Delta y_i = 0{,}5$ единицы последнего знака (табл. 17).

Таблица 17

Название функции	Максимальная ошибка $\Delta\alpha''$	
	угол определялся по шестизначным таблицам логарифмов	угол определялся по пятизначным таблицам логарифмов
$\lg\sin\alpha$	$+0'',24\operatorname{tg}\alpha$	$+2'',4\operatorname{tg}\alpha$
$\lg\cos\alpha$	$-0'',24\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha$	$-2'',4\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha$
$\lg\operatorname{tg}\alpha$	$+0'',12\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha$	$+1'',2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha$
$\lg\operatorname{ctg}\alpha$	$-0'',12\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha$	$-1'',2\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha$
$\lg\sec\alpha$	$+0'',24\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha$	$+2'',4\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}^2\alpha$
$\lg\operatorname{cosec}\alpha$	$-0'',24\operatorname{tg}\alpha$	$-2'',4\operatorname{tg}\alpha$

Из табл. 17 видно, что при одной и той же погрешности в логарифмах тригонометрических функций угол будет определен более точно по $\lg \operatorname{tg} \alpha$ или $\lg \operatorname{ctg} \alpha$. Малые углы более точно можно определить по $\lg \sin \alpha$ или $\lg \operatorname{cosec} \alpha$, а углы, близкие к 90°, — по $\lg \cos \alpha$ или $\lg \sec \alpha$.

Пример 51. Вычислить, с какой точностью будет определен угол по таблицам логарифмов тригонометрических функций, если известно, что $\lg \sin \alpha = 9.7034$.

Из формул (83) имеем

$$\Delta\alpha'' = \frac{\Delta \lg \sin \alpha \cdot \rho''}{M \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{\Delta \lg \sin \alpha \cdot \rho'' \cdot \operatorname{tg} \alpha}{M}.$$

Считая $\Delta \lg \sin \alpha = 0{,}00005$; $M = 0{,}43$; $\rho'' = 206\,000''$, $\operatorname{tg} \alpha = 0{,}59$, будем иметь

$$\Delta\alpha'' = \frac{0{,}5 \cdot 20'',6 \cdot 0{,}59}{0{,}43} = 14''.$$

То же получим по данным табл. 17, увеличив коэффициент $2'',4$ в 10 раз

$$\Delta\alpha'' = 24'' \cdot \operatorname{tg} \alpha = 24'' \cdot 0{,}59 = 14''.$$

§ 57. Выбор таблиц натуральных значений тригонометрических функций

При использовании счетных машин вместо таблиц логарифмов употребляются таблицы натуральных значений тригонометрических функций. Найдем зависимость между ошибками тригонометрических функций и ошибками углов. Напишем функции

$$y_1 = \sin \alpha; \quad y_2 = \cos \alpha; \quad y_3 = \operatorname{tg} \alpha;$$
$$y_4 = \operatorname{ctg} \alpha; \quad y_5 = \sec \alpha; \quad y_6 = \operatorname{cosec} \alpha.$$

Дифференцируя эти функции и заменяя дифференциалы ошибками, можно написать

$$\left.\begin{aligned}
\Delta y_1 &= \Delta_{\sin \alpha} = \cos \alpha \cdot \frac{\Delta\alpha}{\rho} \\
\Delta y_2 &= \Delta_{\cos \alpha} = -\sin \alpha \cdot \frac{\Delta\alpha}{\rho} \\
\Delta y_3 &= \Delta_{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\Delta\alpha}{\rho} \\
\Delta y_4 &= \Delta_{\operatorname{ctg} \alpha} = -\frac{1}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{\Delta\alpha}{\rho} \\
\Delta y_5 &= \Delta_{\sec \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \cdot \sec \alpha \cdot \frac{\Delta\alpha}{\rho} \\
\Delta y_6 &= \Delta_{\operatorname{cosec} \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{cosec} \alpha \cdot \frac{\Delta\alpha}{\rho}
\end{aligned}\right\}. \qquad (84)$$

По формулам (84) можно установить необходимое количество десятичных знаков и значащих цифр в натуральных значениях тригонометрических функций в зависимости от ошибок в самих углах, чем следует руководствоваться при выборе таблиц.

Из формул (84) видно, что выгоднее всего вводить в вычисления синусы углов, близких к 90 или 270°, и косинусы углов, близких к 0 или к 180°. Это положение объясняется еще и тем, что при одинаковом числе десятичных знаков синусы углов, близких к 90 или 270°, и косинусы углов, близких к 0 или к 180°, имеют наибольшее число верных значащих цифр.

Решая уравнения (84) относительно $\Delta\alpha$, найдем

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\alpha'' &= \frac{\Delta_{\sin\alpha}\cdot\rho''}{\cos\alpha}\\
\Delta\alpha'' &= -\frac{\Delta_{\cos\alpha}\cdot\rho''}{\sin\alpha}\\
\Delta\alpha'' &= \Delta_{\mathrm{tg}\,\alpha}\cdot\cos^2\alpha\cdot\rho''\\
\Delta\alpha'' &= -\Delta_{\mathrm{ctg}\,\alpha}\cdot\sin^2\alpha\cdot\rho''\\
\Delta\alpha'' &= \frac{\Delta_{\sec\alpha}\cdot\rho''}{\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\sec\alpha}\\
\Delta\alpha'' &= \frac{\Delta_{\mathrm{cosec}\,\alpha}\cdot\rho''}{\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\mathrm{cosec}\,\alpha}
\end{aligned}\right\}. \qquad (85)$$

Если углы определять по шестизначным таблицам натуральных значений тригонометрических функций и считать, что

$$\Delta\sin\alpha = \Delta\cos\alpha = \Delta\,\mathrm{tg}\,\alpha = \Delta\,\mathrm{ctg}\,\alpha = \Delta\sec\alpha = \Delta\,\mathrm{cosec}\,\alpha = 0{,}5\cdot 10^{-6}.$$

(0,5 единицы последнего знака), то

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\alpha'' &= +0'',10\cdot\sec\alpha\\
\Delta\alpha'' &= -0'',10\cdot\mathrm{cosec}\,\alpha\\
\Delta\alpha'' &= +0'',10\cdot\cos^2\alpha\\
\Delta\alpha'' &= -0'',10\cdot\sin^2\alpha\\
\Delta\alpha'' &= +0'',10\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha\cdot\cos\alpha = +0'',10\,\mathrm{cosec}\,\alpha\cos^2\alpha\\
\Delta\alpha'' &= +0'',10\cdot\mathrm{tg}\alpha\cdot\sin\alpha = +0'',10\sec\alpha\cdot\sin^2\alpha
\end{aligned}\right\}. \qquad (86)$$

Из формул (86) видно, что если пользоваться таблицами с одинаковым числом знаков, то находить угол по тангенсу и котангенсу всегда выгоднее, чем по любой другой тригонометрической функции.

Пример 52. Вычислить, с какой точностью будет определен угол, если известно, что синус этого угла равен 0,60144.

Ошибка угла, согласно первым формулам (85) и (86) будет

$$\Delta\alpha'' = \frac{\Delta_{\sin\alpha}\cdot\rho''}{\cos\alpha} = 1'',0\cdot\sec\alpha = 1'',2.$$

Вопрос о выборе таблиц натуральных значений тригонометрических функций для вычисления приращений координат точек теодолитных ходов можно решить следующим образом. Напишем формулы приращений координат

$$\Delta x = S\cos\alpha;\quad \Delta y = S\sin\alpha.$$

Допустим, что длина линии S безошибочна, а предельные абсолютные ошибки табличных значений $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ одинаковы и равны Δ

Тогда абсолютные ошибки в приращениях также одинаковы, т. е. можно написать, что

$$\delta = S \cdot \Delta,$$

где δ — абсолютная ошибка в Δx и Δy.

Полагая $\delta_{max} = 0{,}5$ *см* и $S_{max} = 500$ *м*, можно определить предельную абсолютную ошибку тригонометрической функции

$$\Delta = \frac{\delta}{S} = \frac{0{,}5\ см}{500\ м} = \frac{0{,}5}{50\ 000} = 0{,}00\ 001,$$

т. е. таблицы натуральных тригонометрических функций достаточно брать с пятью десятичными знаками.

Для сравнения определения точности углов по таблицам натуральных значений тригонометрических функций и по таблицам логарифмов по формулам (83) и (86) вычислены предельные ошибки $\Delta\alpha''$ угла α, определенного по тем и другим таблицам с шестью знаками для α, равного 45°, 10° и 80°, имея в виду максимальную табличную ошибку, равную 0,5 единицы последнего знака (табл. 18).

Таблица 18

Название тригонометрических функций	$\alpha = 45°$		$\alpha = 10°$		$\alpha = 80°$	
	максимальная ошибка $\Delta\alpha''$ угла, определенного по шестизначным таблицам					
	логарифмов	натуральных значений	логарифмов	натуральных значений	логарифмов	натуральных значений
sin α	0",24	0",14	0",04	0",10	1",36	0",58
cos α	0 ,24	0 ,14	1 ,36	0 ,58	0 ,04	0 ,10
tg α	0 ,12	0 ,05	0 ,04	0 ,10	0 ,04	0 ,003
ctg α	0 ,12	0 ,05	0 ,04	0 ,003	0 ,04	0 ,10
sec α	0 ,24	0 ,07	1 ,36	0 ,56	0 ,04	0 ,003
cosec α	0 ,24	0 ,07	0 ,04	0 ,003	1 ,36	0 ,56

Из табл. 18 видно, что углы, близкие к 45° (средней величины углов, какие обычно и бывают в геодезических сетях), лучше находить по таблицам натуральных значений тригонометрических функций. В этом случае вычисления по n-значным таблицам логарифмов тригонометрических функций вполне можно заменить n-значными таблицами натуральных значений. Во всех остальных случаях n-значные таблицы логарифмов тригонометрических функций можно заменить таблицами натуральных значений тригонометрических функций, если значения функций будут иметь n значащих цифр. Следовательно, для такой замены без потери точности таблицы натуральных значений тригонометрических функций должны быть составлены по принципу приблизительно одинаковой относительной ошибки (см. § 72).

§ 58. Составление и контроль таблиц при помощи конечных разностей

При составлении, контроле и употреблении таблиц используют конечные разности. Напишем функцию

$$y = f(x),$$

значение которой определено для ряда равноотстоящих значений аргументов

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \quad x_3 = a + 3h \text{ и т. д.}$$

Если независимой переменной x давать конечное приращение h, функция получит приращение, равное

$$\Delta' y_x = y_{x+h} - y_x.$$

Эта разность называется конечной разностью первого порядка функции y, или *первой разностью. Вторые разности,* или разности второго порядка, составляются из первых разностей

$$\Delta'' y_x = \Delta' y_{x+h} - \Delta' y_x.$$

Третьи разности составляются из вторых разностей

$$\Delta''' y_x = \Delta'' y_{x+h} - \Delta'' y_x \text{ и т. д.}$$

Разности разных порядков записываются так, как показано в табл. 19.

Таблица 19

Значения аргумента x	Значения функции $y = f(x)$	Конечные разности		
		первые $\Delta' y$	вторые $\Delta'' y$	третьи $\Delta''' y$
x_0	y_0			
		$\Delta' y_0$		
x_1	y_1		$\Delta'' y_0$	
		$\Delta' y_1$		$\Delta''' y_0$
x_2	y_2		$\Delta'' y_1$	
		$\Delta' y_2$		$\Delta''' y_1$
x_3	y_3		$\Delta'' y_2$	
		$\Delta' y_3$		$\Delta''' y_2$
x_4	y_4		$\Delta'' y_3$	
		$\Delta' y_4$		
x_5	y_5			

Табличные разности обычно записывают целыми числами в единицах младшего разряда значений функции, данных в таблицах.

Пример 53. Возьмем функцию $y = x^2$. Дадим x значения: 0, 1, 2, 3, 4, 5... и найдем соответствующие им значения функции и конечные разности. Результаты вычислений расположим в табл. 20.

Таблица 20

x	$y = x^2$	$\Delta' y$	$\Delta'' y$	$\Delta''' y$
0	0			
		1		
1	1		2	
		3		0
2	4		2	
		5		0
3	9		2	
		7		0
4	16		2	
		9		0
5	25		2	
		11		
6	36			

Так как вторые разности оказались постоянными, то эта таблица может быть продолжена следующим образом при помощи конечных разностей. Прибавляя 2 к 11, мы получим число 13, которое является следующим значением разности первого порядка. Прибавляя число 13 к числу 36, получим следующее значение функции $y = 49$, которое является квадратом 7. Таким путем можно расширить таблицу, не прибегая к непосредственному возведению данных чисел в квадрат.

Можно доказать, что для многочлена степени n разность n-го порядка есть величина постоянная. Но если для целых рациональных функций конечные разности — постоянные величины, то для трансцендентных функций вообще этого не будет. Однако и для этих функций конечные разности достаточно высокого порядка близки к постоянным и ими можно пользоваться при составлении и контроле таблиц. При составлении таблиц и для контроля вычислений необходимо через определенные промежутки вычислять значения функций непосредственным способом, а значения функций, лежащих между этими непосредственно вычисленными значениями, определять при помощи конечных разностей.

Основное достоинство каждой таблицы — ее правильность. Но, к сожалению, иногда в таблицах встречаются опечатки, не замеченные и не указанные в «необходимых исправлениях», прилагаемых к таблицам. Примером таблиц с большим числом опечаток является 9-е издание распространенных «Таблиц для вычисления прямоугольных координат» Ф. Гаусса (1947 г.). В этом неудачном издании таблиц Гаусса имеются в большом количество не оговоренные издательством опечатки, приводящие к путанице и браку при вычислениях приращений координат.

При внимательном просмотре любых таблиц грубые ошибки заметны непосредственно; для отыскания же небольших ошибок следует пользоваться конечными разностями.

Изучим схему распространения отдельной ошибки ε. Допустим, что вместо верной величины y_n в табл. 21 приведено ошибочное ее значение $y_n + \varepsilon$.

Таблица 21

x	y	$\Delta' y$	$\Delta'' y$	$\Delta''' y$
x_{n-2}	y_{n-2}			
		$\Delta' y_{n-2}$		
x_{n-1}	y_{n-1}		$\Delta'' y_{n-2} + \varepsilon$	
		$\Delta' y_{n-1} + \varepsilon$		$\Delta''' y_{n-2} - 3\varepsilon$
x_n	$y_n + \varepsilon$		$\Delta'' y_{n-1} - 2\varepsilon$	
		$\Delta' y_n - \varepsilon$		$\Delta''' y_{n-1} + 3\varepsilon$
x_{n+1}	y_{n+1}		$\Delta'' y_n + \varepsilon$	
		$\Delta' y_{n+1}$		
x_{n+2}	y_{n+2}			

Из табл. 21 видно, что в последующих разностях погрешность будет нарастать, например, третьи разности будут иметь погрешность в три раза большую, чем ошибка самой функции. Если вторые разности практически постоянны, то верное значение второй разности будет равно среднему арифметическому из трех смежных ошибочных разностей, т. е.

$$\Delta'' y_{n-1} = \frac{1}{3} (\Delta'' y_{n-2} + \varepsilon + \Delta'' y_{n-1} - 2\varepsilon + \Delta'' y_n + \varepsilon)$$

По найденному верному значению второй разности $\Delta'' y_{n-1}$ можно найти величину ошибки ε по формуле

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \{\Delta'' y_{n-1} - (\Delta'' y_{n-1} - 2\varepsilon)\}.$$

Верное значение самой функции y_n находят из тождества $y_n = (y_n + \varepsilon) - \varepsilon$ и для контроля произведенных расчетов опять вычисляют значения конечных разностей.

В табл. 22 приведен пример обнаружения опечатки в «Счетных таблицах для хозяйственных вычислений» Н. С. Беленького (Госфиниздат, 1949, стр. 451). Из табл. 22 видно, что первые разности постоянны, за исключением двух разностей 880 и 888, отклонение которых от 884 указывает на опечатку в значении функции, соответствующей $x_n=19$.

Таблица 22

x	y	$\Delta' y$	$\Delta'' y$
15	13260		
		+ 884	
16	14144		0
		+ 884	
17	15028		0
		+ 884	
18	15912		— 4
		+ 880	
19	16792		+ 8
		+ 888	
20	17680		— 4
		+ 884	
21	18564		0
		+ 884	
22	19448		0
		+ 884	
23	20332		

Для данного примера имеем

$$\Delta'' y_{n-1} = \frac{1}{3}(-4+8-4) = 0;$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\{0-(+8)\} = -4;$$

$$y_n = (y_n+\varepsilon)-4 = 16792-(-4) = 16796.$$

Если на данном участке той или иной таблицы имеется одна опечатка, то ее легко обнаружить по постоянству конечных разностей, но систематические ошибки этим методом выявить нельзя.

В таблицах даются значения функции только для определенных значений аргументов, значения же функции, соответствующие значениям аргументов, не данным в таблицах, но находящимся между данными, определяются путем *интерполяции*. Когда функция изменяется равномерно или почти равномерно, что определяется по величине вторых разностей, применяется *линейная интерполяция*.

Рассмотрим, например, выписку из четырехзначных таблиц натуральных значений тригонометрических функций (табл. 23).

Таблица 23

α	42°00′		42°30′		43°00′		43°30′		44°00′		44°30′		45°00′
tg α	0,9004		0,9163		0,9325		0,9490		0,9657		0,9827		1,0000
Δ'		159		162		165		167		170		173	
Δ''			3		3		2		3		3		

Несмотря на то, что ступень этой таблицы 30′, первые разности Δ' изменяются почти равномерно, а вторые — Δ'' — не превышают четырех единиц последнего знака; поэтому при использовании такой таблицы можно применять линейное интерполирование (см. § 62).

Найдем по этой таблице tg 42°13′. Будем иметь

$$\operatorname{tg} 42^\circ 13' = 0{,}9004 + \frac{0{,}0159}{30} \cdot 13 = 0{,}9073.$$

Значение тангенса этого угла, взятое по пятизначным таблицам (со ступенью в 1′), равно 0,90728.

Для облегчения нахождения поправок при интерполировании в таблицах часто помещаются таблички пропорциональных частей П. Ч. (пропорциональные части); в некоторых изданиях эти таблички обозначаются «PP». Такие таблички являются вспомогательным средством линейной интерполяции. Для примера, приведенного в табл. 23, таблички пропорциональных частей имеют следующий вид:

159		162		165	
1′	5,3	1′	5,4	1′	5,5
2	10,6	2	10,8	2	11,0
3	15,9	3	16,2	3	16,5
4	21,2	4	21,6	4	22,0
5	26,5	5	27,0	5	27,5
6	31,8	6	32,4	6	33,0
7	37,1	7	37,8	7	38,5
8	42,4	8	43,2	8	44,0
9	47,7	9	48,6	9	49,5

В заголовке каждого такого столбца ставится табличная разность, под ней с левой стороны линии — минуты от 1 до 9′, а с правой — соответственно произведение этих минут на отношение табличной разности к ступени таблицы.

При помощи приведенной таблички с $\Delta = 159$ тангенс угла 42°13′ определится так:

$$\operatorname{tg} 42^\circ 13' = 0{,}9004 + 0{,}0053 + 0{,}00159 = 0{,}9073.$$

Таблички П. Ч. полезны и при решении обратной задачи, в нашем примере — при определении угла по данному тангенсу, если значение последнего находится между табличными значениями.

Контроль табличек П. Ч. может быть произведен путем сравнения поправок, приходящихся на 1′, на 2′ и т. д. для различных табличных разностей. Так, в приведенном примере П. Ч. для табличных разностей 159, 162 и 165 соответственно имеем

на 1′	5,3;	5,4;	5,5 . . . . . . с разностью	0,1,
„ 2′	10,6;	10,8;	11,0 . . . . . . „ „	0,2,
„ 3′	15,9;	16,2;	16,5 . . . . . . „ „	0,3 и т. д.

Следует указать, что имеются таблицы, в которых как прямая, так и обратная задача решаются без интерполирования. Таковы, например, «Пятизначные таблицы логарифмов» С. В. Минина (изд. 1949 г.); они позволяют находить логарифмы и антилогарифмы пятизначных чисел без интерполяции с ошибкой, не превышающей единицы пятого знака.

§ 59. Вычисление натуральных значений тригонометрических функций малых углов

При геодезических вычислениях большую роль играют натуральные значения тригонометрических функций малых углов, которые можно вычислять при помощи рядов

$$\left.\begin{aligned} \sin x &= \frac{x''}{\rho''} - \frac{1}{6}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^3 + \frac{1}{120}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^5 - \cdots \\ \operatorname{tg} x &= \frac{x''}{\rho''} + \frac{2}{6}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^3 + \frac{2}{15}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^5 + \cdots \\ \cos x &= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^4 - \cdots \end{aligned}\right\}. \tag{87}$$

Точность определения натуральных значений тригонометрических функций зависит от числа членов, учитываемых в написанных рядах. Пользуясь этими рядами, легко подсчитать значения углов, для которых можно ограничиться тем или иным членом разложения. Если мы решаем, например, ограничиться только простейшим выражением:

$$\sin x = \frac{x''}{\rho''} = x'' \sin 1'',$$

то с точностью до шести десятичных знаков максимальную величину угла x, соответственно такому разложению, можно найти из равенства

$$\frac{1}{6}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^3 = 0{,}000\,0005 = 0{,}5 \cdot 10^{-6}.$$

откуда предельная величина угла будет

$$x = \sqrt[3]{3{,}0 \cdot 8{,}7 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{15}} = 10^3 \sqrt[3]{26{,}1} = 10^3 \cdot 2{,}96 \approx 49'.$$

Таким образом, при вычислении синуса малого угла по приближенной формуле

$$\sin x = \frac{x''}{\rho''}$$

будем иметь в результате шесть верных десятичных знаков для углов до 49′.

Полагая ошибки в натуральных значениях тригонометрических функций равными вторым членам соответствующих рядов и задаваясь ошибками углов, найдем предельные величины самих углов, при которых можно пользоваться выражениями

$$\sin x = \frac{x''}{\rho''},$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{x''}{\rho''}.$$

Ограничиваясь в рядах (87) первым членом разложения, для синуса и тангенса можем написать

$$\Delta \sin x = \cos x\, \Delta x = \frac{1}{6} x^3,$$

$$\Delta \operatorname{tg} x = \frac{\Delta x}{\cos^2 x} = \frac{2}{6} x^3,$$

где угол x выражен в радианной мере.

Следовательно,

$$x = \sqrt[3]{6 \cos x \, \Delta x}$$

и

$$x = \sqrt[3]{3 \frac{\Delta x}{\cos^2 x}}\,.$$

Полагая $\cos x = 1$ и выражая углы в градусах, можно написанные выражения представить так

$$x^\circ = 57^\circ{,}3 \sqrt[3]{\frac{6\,\Delta x''}{\rho''}} \ldots \text{для синуса}$$

и

$$x^\circ = 57^\circ{,}3 \sqrt[3]{\frac{3\,\Delta x''}{\rho''}} \ldots \text{для тангенса.}$$

Наконец, полагая соответственно $\Delta x'' = 0'',01$; $0'',1$; $1''$ и $1'$, получим предельные значения углов, для которых при вычислении натуральных значений синусов и тангенсов можно ограничиться первыми членами разложения в ряд (табл. 24).

Таблица 24

Ошибки в углах	Предельные значения углов, найденные по	
	синусу	тангенсу
0",01	0°,4	0°,3
0",1	0 ,8	0 ,6
1"	1 ,8	1 ,4
1′	6 ,9	5 ,5

При нахождении по таблицам натуральных значений тригонометрических функций косеканс и котангенс малых углов и секанс и тангенс углов, близких к 90°, линейное интерполирование применять нельзя, так как вторые разности в этих случаях получаются значительно больше четырех единиц последнего знака. В таких случаях или применяют интерполяционные формулы (см. § 61), или, что более просто, пользуются особыми величинами, получающимися от разложения в ряды $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{cosec} x$.

Разлагая эти функции в ряд, получим

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{ctg} x &= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45} - \cdots\right) \\ \operatorname{cosec} x &= \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 + \cdots\right) \end{aligned}\right\}, \tag{88}$$

где угол x выражен в радианах.

Выражая x в секундах дуги, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} x'' \operatorname{ctg} x &= \rho'' \left\{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^2 - \frac{1}{45}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^4 - \dots\right\} \\ x'' \operatorname{cosec} x &= \rho'' \left\{1 + \frac{1}{6}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^2 + \frac{7}{360}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^4 + \dots\right\} \end{aligned}\right\} . \tag{89}$$

Из равенств (89) видно, что величины $x'' \operatorname{ctg} x$ и $x'' \operatorname{cosec} x$ при малых углах весьма мало отличаются от $\rho'' = 206\,265''$. Например, при $x = 0°15' = 900''$ поправка $\rho'' \frac{1}{3}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{900^2}{206265} = 1'',3$. Поэтому правые части выражений (89) можно вычислить с большой точностью и составить соответствующие вспомогательные таблицы (табл. 25), служащие для определения $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{cosec} x$, а также $\operatorname{tg}(90° - x)$ и $\sec(90° - x)$, при малых значениях угла x.

Таблица 25

x	$x'' \operatorname{ctg} x$	$\operatorname{ctg} x$	x	$x'' \operatorname{cosec} x$	$\operatorname{cosec} x$
0°00′00″		∞	0°00′00″		∞
	206 265″			206 265″	
0 07 15		473,8	0 15 27		222,6
	206 264			206 266	
0 14 59		229,4	0 24 08		142,5
	206 263			206 267	
0 19 55		172,7	0 30 26		113,0
	206 262			206 268	
0 23 50		144,2	0 35 38		96,5
	206 261			206 269	
0 27 12		126,4	0 40 10		85,6
	206 260			206 270	
0 30 12		113,8	0 44 15		77,7
	206 259			206 271	
0 32 55		104,4	0 47 58		71,7
	206 258			206 272	
0 35 26		97,0	0 51 26		66,8
	206 257			206 273	
0 37 47		91,0	0 54 40		62,9
	206 256			206 274	
0 40 00		85,9	0 57 44		59,6
	206 255			206 275	
0 42 05		81,7	1 00 38		56,7
	206 254			206 276	
0 44 05		78,0	1 03 24		54,2
	206 253			206 277	
0 46 00		74,7	1 06 04		52,0
	206 252			206 278	
0 47 49		71,9	1 08 37		50,1
	206 251			206 279	
0 49 35		69,3	1 11 04		48,4
	206 250			206 280	
0 51 18		67,0	1 13 27		46,8
	206 249			206 281	
0 52 56		64,9	1 15 45		45,4
	206 248			206 282	
0 54 32		63,0	1 17 59		44,1
	206 247			206 283	
0 56 06		61,3	1 20 10		42,9

Примеры.

1. Дано $x = 0°48'13'',1 = 2893'',1$. Найти значения $\operatorname{ctg} x$ и $\operatorname{cosec} x$. Из табл. 25 имеем

$$x'' \operatorname{ctg} x = 206\,251'';$$

$$x'' \operatorname{cosec} x = 206\,272''.$$

Поэтому:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{206\ 251''}{x''} = \frac{206\ 251''}{2893'',1} = 71,291;$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{206\ 272''}{x''} = \frac{206\ 272''}{2893'',1} = 71,298.$$

2. Дано $\operatorname{ctg} x = 103,56$. Определить угол x. Из табл. 25 имеем

$$x'' \operatorname{ctg} x = 206\ 258'',$$

Отсюда

$$x'' = \frac{206\ 258''}{103,56} = 1991'',62 \text{ или } 0°33'11'',62.$$

В таблицах натуральных значений тригонометрtческих функций для малых углов x даются значения $\operatorname{ctg} x$, $\operatorname{cosec} x$, $\operatorname{tg}(90°-x)$ и $\sec(90°-x)$ с шагом аргумента в $1''$ или в $10''$, что облегчает нахождение значений этих функций.

§ 60. Вычисление логарифмов тригонометрических функций малых углов

Логарифмы синусов и тангенсов малых углов (а также косинусов и котангенсов углов, близких к 90°) изменяются очень быстро и не пропорционально изменению самих углов, поэтому находить логарифмы по данному углу и, обратно, углы по данному логарифму таких тригонометрических функций весьма неудобно и результаты получаются недостаточно точно. В этих случаях пользуются логарифмическими поправками, вычисляемыми на основании разложения тригонометрических функций и их логарифмов в ряды.

Для определения логарифмических поправок перепишем равенства (87) в следующем виде

$$\sin x = \frac{x''}{\rho''}\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^2 + \frac{1}{120}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^4 - \cdots\right],$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{x''}{\rho''}\left[1 + \frac{2}{6}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^2 + \frac{2}{15}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^4 + \cdots\right],$$

$$\cos x = \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^4 - \cdots\right].$$

Логарифмируя обе части, получим

$$\lg \sin x = \lg \frac{x''}{\rho''} + \lg\left[1 - \frac{1}{6}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^2 + \frac{1}{120}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^4 - \cdots\right],$$

$$\lg \operatorname{tg} x = \lg \frac{x''}{\rho''} + \lg\left[1 + \frac{2}{6}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^2 + \frac{2}{15}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^4 + \cdots\right],$$

$$\lg \cos x = \lg\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^4 - \cdots\right].$$

Логарифмы выражений, стоящих в квадратных скобках, разложим в ряды и, ограничиваясь членами четвертой степени, будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \lg\sin x &= \lg\frac{x''}{\rho''} - \frac{M}{6}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^2 - \frac{M}{180}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^4 \\ \lg\operatorname{tg} x &= \lg\frac{x''}{\rho''} + \frac{2M}{6}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^2 + \frac{7M}{90}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^4 \\ \lg\cos x &= -\frac{M}{2}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^2 - \frac{M}{12}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^4 \end{aligned}\right\}. \tag{90}$$

Если положить

$$\frac{M}{6}\left(\frac{x''}{\rho''}\right)^2 = \sigma(x)$$

и отбросить члены четвертого порядка, то выражения (90) можно переписать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \lg\sin x &= \lg x'' - \lg\rho'' - \sigma(x) \\ \lg\operatorname{tg} x &= \lg x'' - \lg\rho'' + \sigma(x) \\ \lg\cos x &= -3\sigma(x) \end{aligned}\right\}. \tag{91}$$

Величину $\sigma(x)$ называют *логарифмической поправкой*; пользуясь ею. удобно находить логарифмы тригонометрических функций малых углов.

Для нахождения угла x по данному логарифму синуса или тангенса имеем из (91):

$$\left.\begin{aligned} \lg x'' &= \lg\sin x + \lg\rho'' + \sigma(x) \\ \lg x'' &= \lg\operatorname{tg} x + \lg\rho'' - 2\sigma(x) \end{aligned}\right\}. \tag{92}$$

Во многих таблицах логарифмов обычно внизу каждой страницы, на которой помещены логарифмы чисел, даются значения величин

$$\left.\begin{aligned} S &= -\lg\rho'' - \sigma(x) = \lg\frac{\sin x}{x''} \\ T &= -\lg\rho'' + 2\sigma(x) = \lg\frac{\operatorname{tg} x}{x''} \end{aligned}\right\}. \tag{93}$$

Учитывая эти обозначения, можно формулы (91) представить в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} \lg\sin x &= \lg x'' + S \\ \lg\operatorname{tg} x &= \lg x'' + T \\ \lg\cos x &= S - T \end{aligned}\right\}. \tag{94}$$

С учетом (93) можно формулы (92) представить в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} \lg x'' &= \lg\sin x - S \\ \lg x'' &= \lg\operatorname{tg} x - T \end{aligned}\right\}. \tag{95}$$

Пример 54. Определить логарифм синуса угла 0°22′57″,71 по шестизначным таблицам логарифмов.

Воспользуемся таблицами К. Бремикера (издание Редбюро ГУГСК НКВД СССР, 1938 г.), на стр. 13 которых находим ближайший к заданному угол $0°22'50'' = 1370''$; этому углу соответствует $S = 4.685\,572$; $\lg x'' = \lg 1377{,}71$ находим как логарифм числа на этой же странице.

Пользуясь формулой $\lg \sin x = \lg x'' + S$, получим:

$$\lg \sin 0°22'57'',71 = 3.139\,158 + 4.685\,572 = 7.824\,730.$$

Пример 55. Определить угол x, если $\lg \operatorname{tg} x = 8.107\,831$.

Пользуясь таблицами Бремикера (табл. 11, стр. 199), находим, что приближенно искомый угол равен $0°44'04''$. По этому приближенному углу определяем величину $T = 4.685\,599$.

Находим $\lg x''$, пользуясь формулой

$$\lg x'' = \lg \operatorname{tg} x - T = 8.107\,831 - 4.685\,599 = 3.422\,232.$$

По $\lg x''$ находим на той же странице число $x'' = 2643{,}82$, и с помощью таблички, расположенной внизу страницы, превращаем секунды в градусы и минуты. Окончательное значение угла будет $0°44'03'',82$.

Остановимся теперь на точности выведенных формул. В формулах (91) не учтены члены четвертого порядка, которые должны быть меньше 0,5 единицы последнего знака. Исходя из этого, можно подсчитать предельные значения углов для разных тригонометрических функций при разном числе знаков. Так, например, предельное значение угла x для шестизначного логарифма синуса может быть найдено из равенства

$$\frac{Mx^4\, 10^6}{180\,\rho^4} = 0{,}5,$$

откуда

$$x° = \sqrt[4]{\frac{180 \cdot 0{,}5 \cdot 57{,}3^4}{0{,}43 \cdot 10^6}} = 3°{,}9.$$

§ 61. Интерполяционные формулы

Интерполирование есть нахождение значения функции (или аргумента), не приведенного в таблице, но находящегося между данными. Говоря образно, интерполирование представляет собой «чтение таблиц между строк».

Нахождение значения функций для данного аргумента, не содержащегося в таблице, называют *прямым интерполированием,* а нахождение аргумента по заданному значению функции(не содержащемуся в таблице) — *обратным интерполированием.*

Понятие об интерполировании можно уяснить при помощи чертежа. Возьмем график функции $y = f(x)$ (фиг. 51), для которой составлены таблицы.

Обозначим шаг таблицы через h, т. е. положим, что

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \cdots = h.$$

Очевидно, что ординаты точек $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ представляют значения функции, данные в таблицах. При линейном интерполировании задача по отысканию значения функции сводится к решению пропорции

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}, \qquad (96)$$

где y — искомое значение функции; x — заданное значение аргумента; x_0 и x_1 — табличные значения аргументов, между которыми находится заданное значение x; y_0 и y_1 — значения функций, данные в таблицах и соответствующие аргументам x_0 и x_1; h — шаг таблиц; Δy_0 — табличная разность (разность первого порядка).

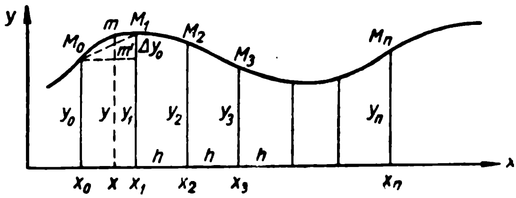
Графически линейное интерполирование представляет собой определение ординаты некоторой точки m', лежащей на хорде M_0M_1 (фиг. 51). При уменьшении шага таблиц h расхождение mm' значений ординат точек m и m' будет уменьшаться и может достигнуть пренебрегаемой величины. Это значит, что путем соответствующего выбора шага таблиц можно заменить кривую прямой и производить линейное интерполирование. Из формулы (96) получим

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta y_0. \tag{97}$$

Так как значение x лежит между x_0 и x_1, то $\frac{x - x_0}{h}$ представляет правильную дробь; обозначив ее через t, можно написать

$$y = y_0 + t \cdot \Delta y_0, \tag{98}$$

где $0 < t < 1$.



Фиг. 51. График функции $y = f(x)$

Выражение (97) представляет собой уравнение прямой, проходящей через две данные точки, откуда и происходит название *линейное интерполирование*. Это уравнение называют *интерполяционной формулой первого порядка*.

При обратном интерполировании решается та же пропорция (96), но заданным считается y, а искомым x.

Пример 56. Определить $\sqrt{70\,245}$ с точностью до 0,01. Из «Таблиц квадратных корней из чисел» находим (см. стр. 289)

$$\sqrt{7{,}02} = 2{,}6495; \quad \sqrt{7{,}03} = 2{,}6514,$$

Здесь: $x_0 = 7{,}02$; $x_1 = 7{,}03$; $h = 0{,}01$; $\Delta y_0 = 2{,}6514 - 2{,}6495 = 0{,}0019$; $t = \frac{0{,}0045}{h} = 0{,}45$.

Согласно формуле (98) имеем

$$y = y_0 + t \cdot \Delta y_0 = 2{,}6495 + 0{,}45 \cdot 0{,}0019 = 2{,}6504.$$

Таким образом, искомое значение корня равно 265,04.

При линейном интерполировании искомое значение функции преуменьшается в случае выпуклой кривой и преувеличивается в случае вогнутой кривой (см. фиг. 51). Ошибка интерполирования может быть уменьшена соответствующим уменьшением шага таблиц, но уменьшение шага таблиц не во всех случаях практически достижимо, главным образом потому, что при этом сильно увеличивается объем таблиц.

Если линейное интерполирование дает недостаточную точность, то кривую $y = f(x)$ (см. фиг. 51) заменяют параболой n-го порядка, проходящей через $n + 1$ точек, лежащих на данной кривой. Такое интерполирование называют *параболическим.* Напишем уравнение параболы второго порядка, для чего к выражению (97) прибавим член $\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{h^2}k$, где k — пока неизвестный коэффициент. Будем иметь

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{h^2} k. \qquad (99)$$

От равенства (99) потребуем, чтобы

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0,$$
$$y = y_1 \quad \text{»} \quad x = x_1,$$
$$y = y_2 \quad \text{»} \quad x = x_2.$$

Выполнение первых двух условий очевидно. При $x = x_0$ оба последних члена обращаются в нуль, и значит $y = y_0$. При $x = x_1$ третий член равен нулю, а член $\frac{x-x_0}{h} \Delta y_0 = \Delta y_0$, так как $x_1 - x_0 = h$. Значит,

$$y = y_0 + \Delta y_0 = y_1.$$

Подставим теперь в уравнение (99) x_2 вместо x. Учитывая, что $x_2 - x_1 = h$, а $x_2 - x_0 = 2h$, получим

$$y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + 2k,$$

откуда

$$k = \frac{y_2 - y_0 - 2\Delta y_0}{2}.$$

Учтем, что $y_2 - y_0 = (y_2 - y_1) + (y_1 - y_0) = \Delta y_1 - \Delta y_0$, а $\Delta y_1 - \Delta y_0 = \Delta'' y_0$ есть разность второго порядка. Тогда

$$k = \frac{\Delta y_1 + \Delta y_0 - 2\Delta y_0}{2} = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{2} = \frac{\Delta'' y_0}{2}$$

Теперь формулу (99) можно написать в таком виде:

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{h^2} \cdot \frac{\Delta'' y_0}{2}. \qquad (100)$$

Равенство (100) представляет уравнение параболы с осью, параллельной оси Y.

Представим это уравнение в другом виде. Для этого обозначим, как и раньше,

$$\frac{x - x_0}{h} = t$$

и учитывая, что

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{(x - x_0) - (x_1 - x_0)}{h} = t - 1,$$

получим

$$y = y_0 + t\,\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{1 \cdot 2} \Delta'' y_0.$$

Это равенство есть *интерполяционная формула второго порядка,* которая дает возможность учитывать вторые разности. Она является частным случаем формулы

$$y = y_0 + \frac{t}{1} \Delta' y_0 + \frac{t(t-1)}{1 \cdot 2} \Delta'' y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta''' y_0 + \cdots \qquad (101)$$

Равенство (101) называется *первой интерполяционной формулой Ньютона* для прямого интерполирования с равными интервалами одного аргумента.

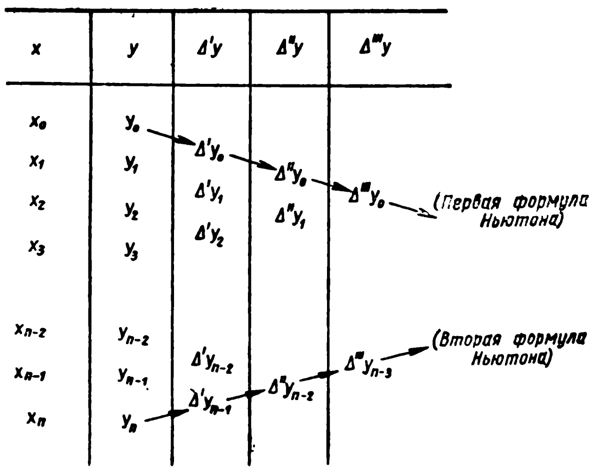
Для интерполирования в конце таблиц применяют вторую интерполяционную формулу Ньютона, аналогичную первой

$$y = y_n + u\,\Delta' y_{n-1} + \frac{u(u+1)}{1\cdot 2}\Delta'' y_{n-2} + \frac{u(u+1)(u+2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta''' y_{n-3} + \cdots, \quad (102)$$

где $u = \frac{x - x_n}{h}$.

Интерполяционные формулы Ньютона используют по схеме, приведенной в табл. 26.

Таблица 26



Кроме формул Ньютона, при пользовании таблицами применяют другие интерполяционные формулы. При интерполировании в середине таблиц часто используют формулу Бесселя, которая с третьими разностями имеет вид

$$y = y_0 + t\Delta' y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\cdot\frac{\Delta'' y_{-1} + \Delta'' y_0}{2} + \frac{t(t-1)\left(t - \frac{1}{2}\right)}{6}\Delta''' y_{-1}, \quad (103)$$

где $t = \frac{x - x_0}{h}$; $h = x_0 - x_{-1}$; $\Delta y_{-1} = y_0 - y_{-1}$.

В формуле Бесселя пользуются разностями по схеме, приведенной в табл. 27.

Из табл. 27 видно, что в формуле Бесселя берутся разности, отмеченные стрелками и находящиеся в горизонтальной строке.

В частном случае, когда $t = \frac{1}{2}$, т. е. интерполяция производится на середину, формула Бесселя с учетом третьих разностей примет вид

$$y_{\frac{1}{2}} = y_0 + \frac{\Delta' y_0}{2} - \frac{\Delta'' y_{-1} + \Delta'' y_0}{16}. \quad (104)$$

Таблица 27

x	y	$\Delta' y$	$\Delta'' y$	$\Delta''' y$	
x_{-2}	y_{-2}				
x_{-1}	y_{-1}	$\Delta' y_{-2}$	$\Delta'' y_{-2}$		
x_0	y_0	$\Delta' y_{-1}$	$\Delta'' y_{-1}$		
x_1	y_1	$\Delta' y_0$ —	$\Delta'' y_0$	$\rightarrow \Delta''' y_{-1} \rightarrow$	(формула Бесселя)
x_2	y_2	$\Delta' y_1$			

Формулой (104) удобно пользоваться при расширении таблиц (при уменьшении шага таблиц) в два раза, если четвертые разности по абсолютной величине не превышают 21 единицы последнего знака табличных значений функции.

Если шаг таблиц уменьшить в два раза, то первые разности уменьшатся в 2, вторые — в 4, третьи — в 8 раз и при пользовании такой расширенной таблицей можно будет применять более простые интерполяционные формулы с разностями младших порядков.

Для облегчения нахождения величин $\frac{t(t-1)}{2}$, входящих в интерполяционные формулы Ньютона и Бесселя, можно воспользоваться специальной табличкой (Приложение: «Таблица значений коэффициентов для интерполяционной формулы Ньютона третьего порядка»).

При линейном интерполировании задача обратного интерполирования так же проста, как и задача прямого интерполирования. При параболическом интерполировании задачу обратного интерполирования приходится решать путем последовательного приближения. На основании формулы (101) можно написать

$$t = \frac{y - y_0}{\Delta' y_0} - \frac{t(t-1)}{2} \cdot \frac{\Delta'' y_0}{\Delta' y_0} - \frac{t(t-1)(t-2)}{6} \cdot \frac{\Delta''' y_0}{\Delta' y_0}.$$

За первое приближение примем

$$t_1 = \frac{y - y_0}{\Delta' y_0}.$$

Следующее приближение получим по формуле

$$t_2 = t_1 - \frac{t_1(t_1 - 1)}{2} \cdot \frac{\Delta'' y_0}{\Delta' y_0} - \frac{t_1(t_1 - 1)(t_2 - 2)}{6} \cdot \frac{\Delta''' y_0}{\Delta' y_0},$$

или

$$t_2 = t_1 + t_1(1 - t_1) \frac{\Delta'' y_0}{2\,\Delta' y_0} - t_1(1 - t_1)(2 - t_2) \frac{\Delta''' y_0}{6\,\Delta' y_0}. \qquad (105)$$

Процесс последовательного приближения нужно продолжать до тех пор, пока в пределах точности вычислений два последовательных приближения окажутся одинаковыми.

По известному значению t найдем x из формулы

$$t = \frac{x - x_0}{h},$$

откуда

$$x = x_0 + t \cdot h.$$

Выяснению вопроса о том, когда можно пользоваться линейным интерполированием и когда необходимо применять параболическое интерполирование, посвящен следующий параграф.

§ 62. Предельные значения величин конечных разностей, подлежащие учету при вычислении с помощью таблиц

Обратим внимание на то, что величины y_0, y_1, $y_2 \ldots$ даны в таблицах с ошибкой, не превышающей 0,5 единицы последнего знака, поэтому можно употреблять линейное интерполирование, т. е. ограничиваться первыми разностями, когда

$$\left| \frac{t\,(t-1)}{2} \Delta'' y_0 \right| < 0{,}5 \text{ единицы последнего знака.}$$

При нелинейном интерполировании можно, очевидно, ограничиваться формулой:

$$y = y_0 + t\,\Delta y_0 + \frac{t\,(t-1)}{2} \Delta'' y_0,$$

если

$$\left| \frac{t\,(t-1)\,(t-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta''' y_0 \right| < 0{,}5 \text{ единицы последнего знака.}$$

В геодезической практике обычно пользуются линейным интерполированием или применяют интерполяционную формулу второго порядка.

Разберем подробнее вопрос, когда можно применять линейное интерполирование и пренебрегать вторыми разностями. При заданной разности $\Delta'' y_0$ значение величины $A = \left| \frac{t\,(t-1)}{2} \Delta'' y_0 \right|$ зависит от численного значения коэффициента $\frac{t\,(t-1)}{2}$, где, как мы отмечали ранее $0 < t < 1$.

Максимальное значение A будет при максимальном значении величины $|T| = |t\,(t-1)|$. Найдем $|T|_{max}$. Для этого возьмем первую производную от T по t и приравняем ее нулю.

$$\frac{dT}{dt} = T' = t + t - 1 = 0,$$

откуда

$$t = \frac{1}{2} \text{ и } |T|_{max} = \frac{1}{2} \left| \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right| = \frac{1}{4}.$$

Учитывая полученное значение T, можно написать, что

$$A_{max} = \frac{1}{8} |\Delta'' y_0| < \frac{1}{2},$$

откуда $|\Delta'' y_0| < 4$ единиц последнего знака.

Таким образом, если вторые разности меньше четырех единиц последнего знака, то ими и последующими можно пренебречь и применять линейное интерполирование, т. е. интерполяционную формулу первого порядка.

Аналогично можно доказать, что если третьи разности не превосходят 7 единиц последнего знака табличных значений функции, то можно допускать интерполяцию по формуле Ньютона второго порядка без потери точности таблиц.

В формуле Бесселя можно пренебрегать третьими и последующими разностями, т. е. применять квадратичную интерполяцию, если численные значения третьих разностей не более 62 единиц последнего знака. Поэтому эта формула считается более выгодной, чем формула Ньютона; удобство этой формулы заключается еще так же в том, что она имеет симметричный вид относительно начального значения функции y_0.

Пример 57. Определить $\lg \operatorname{tg} 0°35',5$ по пятизначным таблицам логарифмов тригонометрических функций.

Для решения задачи находим из таблиц значения логарифмов тангенсов углов и вычисляем конечные разности (табл. 28).

Таблица 28

Углы α	$\lg \operatorname{tg} \alpha$	$\Delta' y$	$\Delta'' y$	$\Delta''' y$
0°35′	8.007 81			
		+ 1223		
36	8.020 04		− 33	
		+ 1190		+ 2
37	8.031 94		− 31	
		+ 1159		
38	8.043 53			

Так как по абсолютной величине третьи разности $|\Delta''' y| < 7$ единиц последнего знака, то для нахождения $\lg \operatorname{tg} 0°36',5$ можно воспользоваться формулой Ньютона второго порядка

$$y = y_0 + t\,\Delta' y_0 + \frac{t(t-1)}{2}\Delta'' y_0,$$

где $t = \frac{x - x_0}{h}$.

Для нашего примера будем иметь

$$y = \lg \operatorname{tg} 0°36',5 = 8.02004 + \frac{0,5}{1} 0,01190 - \frac{0,5\,(0,5-1)}{2} 0,00031 =$$

$$= 8.02004 + 0.00595 + 0.00004 = 8.02603.$$

По формуле Бесселя (104) при интерполировании на середину имеем

$$y = \lg \operatorname{tg} 0°36',5 = 8.02004 + \frac{0,01190}{2} + \frac{0,00064}{16} = 8.02603.$$

При нахождении логарифмов синусов и тангенсов малых углов вместо интерполяционных формул удобнее применять формулы (94). Для нашего примера имеем*

$$y = \lg \operatorname{tg} 0°36',5 = \lg \alpha'' + T = \lg 2190 + T = 3.34044 + 4.68559 = 8.02603.$$

Пример 58. Пользуясь данными примера 57, найти угол α, если $\lg \operatorname{tg} \alpha = 8.013\ 97$.

---

* Пятизначные таблицы логарифмов чисел и тригонометрических функций, М., Геодезиздат, 1949, стр. 20.

Сначала определяем t по формуле

$$t = \frac{y - y_0}{\Delta' y_0} - \frac{t(t-1)}{2} \cdot \frac{\Delta'' y_0}{\Delta' y_0}.$$

Здесь: $y = 8.013\,97$; $y_0 = 8.007\,81$; $\Delta y_0 = +0{,}012\,23$; $x_0 = 0°35'$.
За первое приближение примем

$$t_1 = \frac{y - y_0}{\Delta' y_0} = \frac{616}{1223} = 0{,}504.$$

Второе приближение будет

$$t_2 = t_1 + t_1(1 - t_1)\frac{\Delta'' y_0}{2\,\Delta' y_0} =$$

$$= 0{,}504 + 0{,}504\,(1 - 0{,}504)\frac{-33}{2 \cdot 1223} = 0{,}504 - 0{,}003 = 0{,}501.$$

Очевидно, что за окончательное значение t можно принять 0,50, после чего значение угла (аргумента) найдем по формуле

$$\alpha = x = x_0 + t \cdot h = 0°35' + 0{,}50 \cdot 1' = 0°35',5.$$

§ 63. Краткий обзор важнейших таблиц, применяемых в геодезии и землеустройстве

Таблицы логарифмов чисел и тригонометрических функций

Таблиц логарифмов чисел и тригонометрических функций имеется очень много. Имеются таблицы с 3, 4, 5, 6, 7 и 8 знаками. Имеются таблицы и с большим числом знаков (например, наиболее точные таблицы с 61 десятичным знаком), но такие таблицы в геодезических вычислениях почти не употребляются, и мы на них останавливаться не будем. Наиболее точные геодезические вычисления достаточно производить по восьмизначным таблицам логарифмов чисел и тригонометрических функций.

Трехзначные таблицы логарифмов на практике почти не употребляются, так как результаты с тремя значащими цифрами значительно скорее получаются при помощи логарифмической линейки.

Четырехзначные таблицы редко применяются в практике геодезических вычислений, хотя и заслуживают большего внимания. Четырехзначные таблицы логарифмов чисел дают результаты примерно в 10 раз более точные, чем обычная (25-сантиметровая) линейка, помещаются всего на двух страницах и позволяют применять линейное интерполирование.

Почти во всех таблицах логарифмов чисел и тригонометрических функций ступень таблиц выбрана так, что вторые разности не превосходят четырех единиц последнего знака, а значит при пользовании такими таблицами можно применять линейное интерполирование.

В геодезии при обработке результатов измерений теодолитных ходов повышенной точности, где (в большинстве случаев) имеют дело с числами, содержащими четыре — пять верных значащих цифр, а углы измеряют с точностью до нескольких секунд, широко применяются *пятизначные* таблицы логарифмов чисел и тригонометрических функций.

Е. Пржевальский. Пятизначные таблицы логарифмов (имеется много изданий) Таблицы Пржевальского хорошо известны; они, кроме таблиц логарифмов чисел и тригонометрических функций, содержат ряд вспомогательных таблиц, которые облегчают и ускоряют вычисления.

Пятизначные таблицы логарифмов чисел и тригонометрических величин (ред. В. Н. Шишкин, Геодезиздат, М., 1949) нашли широкое применение. Эти таблицы составлены на основе таблиц Пржевальского и также содержат ряд вспомогательных таблиц. Ценными, в частности, являются таблицы квадратных корней из чисел, по которым можно находить квадратные корни с пятью верными значащими цифрами*.

---

* Следует указать, что определять по этим таблицам квадратные корни с одиннадцатью верными значащими цифрами, как это сделано в примере на стр. 14 таблиц, нельзя, так как результат будет верен только в тех случаях, когда значение корня, данное в таблицах округлено с недостатком.

Таблицы логарифмов чисел дополнены новым столбцом (С. Т. Р.), содержащим «средние табличные разности» двух смежных логарифмов в данной строке, что упрощает пользование таблицами и уменьшает случайные просчеты.

С. П. Глазенап. Пятизначные таблицы логарифмов с приложением других таблиц, упрощающих вычисления (имеется несколько изданий). В отличие от других, эти таблицы составлены с одним входом, имеют первые разности, что дает возможность производить вычисления проще и скорее, и во многих случаях устраняет ошибки, происходящие при пользовании таблицами логарифмов чисел с двумя входами, в которых табличные разности не даются. Наверху каждой страницы таблиц логарифмов чисел даны логарифмические поправки тригонометрических функций малых углов.

На основе таблиц почетного академика С. П. Глазенапа Военное издательство выпустило несколько изданий «Пятизначных таблиц логарифмов», приспособленных для нужд артиллеристов. Эти таблицы с успехом применяются и при геодезических вычислениях. В них даны логарифмы синусов и тангенсов от 0 до 1° и логарифмы косинусов и котангенсов от 89 до 90° через 1″ дуги, а логарифмы синусов и тангенсов от 1 до 8° и логарифмы косинусов и котангенсов от 82 до 89° через 10″.

Для облегчения пользования таблицами и ускорения нахождения нужных величин разные таблицы отпечатаны на бумаге разного цвета, а на полях указаны границы изменения аргумента на данном развороте книги, причем поля вырезаны так, как это делается в алфавитных книжках.

При обработке результатов измерений полигонометрии и триангуляции, а также съемочных сетей пользуются шестизначными таблицами логарифмов чисел и тригонометрических функций, из которых в нашей практике нашли применение следующие.

К. Бремикер. Таблицы логарифмов чисел и тригонометрических функций с шестью десятичными знаками. (Издание Редбюро ГУГК, М., 1938). Эти таблицы, изданные под редакцией Н. Ф. Булаевского, нашли широкое применение в геодезической практике. Кроме основных таблиц, они содержат таблицы логарифмов синусов и тангенсов от 0 до 5° через 1″ и логарифмы сумм и разностей чисел.

В. Иордан. Логарифмо-тригонометрические таблицы для нового (десятичного) деления с шестью знаками. Перевод под редакцией проф. Я. С. Безиковича (М., 1931). В книге даны подробные таблицы перевода десятичных делений в градусные и наоборот.

При обработке точной полигонометрии и триангуляции 1 и 2 классов применяются следующие семизначные и восьмизначные таблицы логарифмов чисел и тригонометрических функций.

Г. Вега. Таблицы семизначных логарифмов (Геодезиздат, М., 1955). Эти таблицы изданы фотоцинкографским способом и потому являются безусловно правильными. В прежних изданиях таблицы Вега назывались «Логарифмически-тригонометрическим руководством».

К. Брунс. Таблицы логарифмов чисел и тригонометрических функций с семью десятичными знаками (Редбюро ГУГК, М., 1939, редактор Н. Ф. Булаевский). По четкости шрифта и расположению материала эти таблицы считаются наилучшими из имеющихся семизначных таблиц. Таблицы изданы фотоцинкографским способом. В таблицах Брунса даны логарифмы тригонометрических функций малых углов через 1″ в пределах от 0 до 6°, т. е. больше на 1°, чем в таблицах Вега. Для вычисления малых углов внизу страниц, содержащих логарифмы чисел, помещены значения вспомогательных величин

$$S = \lg \frac{\sin x}{x} \text{ и } T = \lg \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

с восемью десятичными знаками (в таблицах Вега эти величины даны с семью десятичными знаками, а в «Пятизначных таблицах логарифмов чисел и тригонометрических функций» — с пятью десятичными знаками).

И. Баушингер и И. Петерс. Таблицы логарифмов чисел и тригонометрических функций с восемью десятичными знаками (Геодезиздат, М., 1942—1944). Таблицы состоят из двух томов: первый том — логарифмы чисел, второй — логарифмы тригонометрических функций через каждую секунду дуги.

Восьмизначные таблицы обеспечивают точность вычислений триангуляции 1 класса, но в некоторых специальных геодезических работах приходится применять таблицы логарифмов и с большим числом знаков.

При точных геодезических вычислениях следует иметь несколько таблиц с разным числом знаков, и в соответствии с числом значащих цифр в данных числах использовать таблицы с наименьшим, но достаточным числом знаков и этим ускорить вычисления без понижения точности результатов (см. § 54).

При решении задач по сложным геодезическим формулам различные поправки нужно находить по трех-, четырех-, пятизначным таблицам логарифмов, а основные величины по другим таблицам с большим числом знаков. Такое использование таблиц сокращает время, которое пришлось бы затратить при производстве всех вычислений только по точным таблицам (если, например, четырехзначные таблицы логарифмов располагаются на двух страницах, то восьмизначные таблицы логарифмов чисел представляют собой огромный том, объемом в 365 страниц большого формата).

В заключение обзора таблиц логарифмов отметим, что многие из них содержат таблицы квадратов чисел, которые можно использовать для умножения, если отсутствуют другие, более совершенные средства вычисления. При использовании таблиц квадратов, как таблиц умножения, пользуются тождеством

$$ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Умножение в этом случае сводят к трем операциям: сложению, вычитанию и нахождению квадратов чисел по таблицам.

Таблицы натуральных значений тригонометрических функций (для градусного и десятичного деления квадранта)

При геодезических вычислениях с применением счетных машин широко используются таблицы натуральных значений тригонометрических функций. Таблицы этого рода издаются с разным числом десятичных знаков (от 3 до 25 десятичных знаков).

Вопрос о выборе таблиц натуральных значений тригонометрических функций с необходимым числом знаков освещен § в 57. В общем, точность (относительная ошибка) результатов вычислений зависит не от числа десятичных знаков, а от числа верных значащих цифр в значениях данных функций, поэтому при нахождении малых углов по натуральным значениям синусов и тангенсов нужно брать таблицы с бо́льшим числом десятичных знаков.

Таблицы натуральных значений тригонометрических функций составляются по двум принципам: или с одинаковым числом десятичных знаков или, что более важно, с одинаковым числом значащих цифр (примерно с одинаковой относительной погрешностью округления).

В практике широкое применение нашли следующие таблицы натуральных значений тригонометрических функций.

Ф. Г. Гаусс. Пятизначные таблицы натуральных значений тригонометрических функций (вышло несколько изданий); таблицы составлены с одинаковым числом десятичных знаков для всех значений шести тригонометрических функций.

По типу названных таблиц Гаусса Геодезиздат выпустил «Пятизначные таблицы тригонометрических функций», в которых, как и в таблицах Гаусса, даны значения шести тригонометрических функций через 1′. В таблицах, выпущенных Геодезиздатом под редакцией Л. П. Пеллинена, в начале книги даны значения котангенса и косеканса малых углов (в пределах от 0 до 1°) и, соответственно, тангенса и секанса углов, близких к 90° (в пределах от 89 до 90°), через 1″. Те же функции для углов в пределах 1—10° (и 80—90°) даны со ступенью аргумента в 10″.

Л. С. Хренов. Пятизначные таблицы тригонометрических функций (третье издание этих таблиц вышло в 1954 г.). Таблицы составлены по принципу одинакового количества значащих цифр для всех шести тригонометрических функций. Книга состоит из двух основных (табл. I и II) и восьми вспомогательных таблиц, служащих для облегчения инженерно-технических расчетов. В табл. I даны натуральные значения котангенса и косеканса малых углов от 0 до 1° через 1″ и от 0 до 10° через 10″, что дает возможность путем линейного интерполирования находить котангенс и косеканс малых углов и, соответственно, секанс и тангенс углов, близких к 90°. Кроме того, здесь же дана вспомогательная таблица значений w'' ctg w и w'' cosec w, служащая для тех же целей.

В табл. II приведены натуральные значения шести тригонометрических функций через 1′ дуги от 0 до 360°. Синусы и тангенсы малых углов даны с семью—восемью десятичными знаками и пятью—шестью значащими цифрами.

«Пятизначные таблицы тригонометрических функций» проф. Л. С. Хренова относятся к лучшим таблицам такого рода, они хорошо приспособлены и для геодезических вычислений.

И. Петерс. Шестизначные таблицы тригонометрических функций (имеется несколько изданий). Книга содержит две таблицы (I и II). В табл. I приведены значения котангенсов и секансов углов от 0 до 1°20′ через 1″ (и соответственно тангенсов и секансов углов от 88°40′ до 90°). Здесь же на одной странице дана вспомогательная таблица произведений w'' ctg w и w'' cosec w.

В табл. II приведены значения шести тригонометрических функций через 10″ для углов от 0 до 90°; здесь же даны произведения w'' ctg w и w''cosec w для углов от 0 до 1°20′.

По типу таблиц Петерса Геодезиздатом изданы «Шестизначные таблицы тригонометрических функций», в которых приведены значения котангенсов и косекансов малых углов через 1″ от 0° до 1°24′, но не приведена вспомогательная табличка произведений w'' ctg w и w'' cosec w .

А. С. Филоненко и Е. Ф. Беликов. Таблицы шестизначных натуральных величин тригонометрических функций для счетных машин (Госкартогеодезия, 1932).

Основные таблицы даны для шести тригонометрических функций для углов от 0 до 90° с интервалом через минуту. Для удобства интерполирования внизу каждой страницы этих таблиц даны таблички для перевода секунд в доли минуты. Для малых углов приведены значения котангенсов для углов от 0 до 3° через 1″. Даны также таблицы квадратов чисел и ряд вспомогательных геодезических таблиц. В конце книги приведены примеры геодезических вычислений при помощи арифмометра и таблиц.

В. В. Кончин. Таблицы натуральных тригонометрических и редукционных величин (Геодезиздат, 1940).

На 15 страницах даны таблицы семизначных натуральных величин синусов и косинусов углов с интервалом в 1′ и на двух страницах — таблицы шестизначных величин синусов и косинусов углов с таким же интервалом. Кроме того, на двух страницах приведены таблицы шестизначных величин тангенсов углов от 0 до 9° с интервалом в 1′. Эти таблицы предназначены, главным образом, для вычисления приращений координат и превышений. Интерполирование осуществляется по строке Тейлора при помощи формул

$$\sin(\alpha_0 + q'') = \sin\alpha_0 + q\cos\alpha_0,$$
$$\cos(\alpha_0 + q'') = \cos\alpha_0 - q\sin\alpha_0,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha_0 + q'') = \operatorname{tg}\alpha_0 + q.$$

где α_0 — градусы и минуты данного угла, а q'' — число секунд данного угла. $q = q''\sin 1''$ выбирается из специальной таблички по аргументу q''.

В книге приведены примеры геодезических вычислений по обработке триангуляции и полигонометрии низших классов.

Проф. Л. С. Хренов. Таблицы тригонометрических функций. (Государственное издательство технико-теоретической литературы М.—Л., 1951). Книга, на титульном листе которой написано «Семизначные таблицы тригонометрических функций», содержит 11 различных таблиц, расположенных на 415 страницах большого формата.

Основными являются: таблица I, содержащая натуральные значения котангенсов и косекансов через 1″ дуги от 0 до 10° (на 121 стр.), и таблица II, содержащая натуральные значения шести тригонометрических функций через 10″ дуги от 0 до 360° (на 273 стр.). Таблицы составлены по принципу одинакового числа значащих цифр, поэтому, например, значения синусов и тангенсов малых углов даны до 11 десятичных знаков.

Для всех шести тригонометрических функций в таблице приведены их значения не менее как с семью значащими цифрами. Эти таблицы относятся к лучшим таблицам и по своей точности в большинстве случаев могут заменить семизначные таблицы логарифмов.

Восьмизначные таблицы тригонометрических функций. 2-е издание, М., 1951.

Таблицы содержат натуральные значения первых четырех тригонометрических функций и первые разности этих функций. В пределах от 0 до 13° приведены значения величин $x''\operatorname{ctg} x''$ (и соответственно $x''\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ для тангенсов в пределах от 77 до 90°), что дает возможность при определении котангенсов малых углов ограничиваться линейным интерполированием.

Таблицы составлены по принципу одинакового числа десятичных знаков (одинаковой абсолютной погрешности), так что для синусов и тангенсов малых углов можно по этим таблицам получить только 4—7 значащих цифр.

В объяснениях к таблицам допущены неточности, в частности, записано, что «Вблизи 0° функция ctg вместе с первой разностью возрастает чрезвычайно быстро, что исключает возможность интерполирования». На самом деле в указанном месте также можно применять интерполирование, но с использованием конечных разностей высших порядков, что требует много времени и поэтому вместо интерполирования, лучше пользоваться выражением w'' ctg w.

В этих таблицах (как и в ряде других источников) рекомендуется деление чисел, имеющих 7—8 значащих цифр, производить на арифмометре (с 13 разрядным счетчиком результатов) в два этапа. В таких случаях, вместо второго этапа, лучше пользоваться логарифмической линейкой или применять прием деления остатка без перестановки его на счетчике результатов и без перестановки делителя на рычагах арифмометра.

Таблицы для вычисления приращений прямоугольных координат

При вычислении приращений прямоугольных координат теодолитных ходов обычной точности, особенно при отсутствии счетных машин, применяются таблицы приращений прямоугольных координат Ф. Гаусса, П. М. Орлова. П. И. Галанина, М. Л. Рудштейна или И. Ф. Паленова.

Таблицы Гаусса содержат произведения натуральных значений синуса и косинуса на числа 10, 20, 30, . . . , 90. Из столбца «10» таблиц легко брать натуральные значения синуса и косинуса с четырьмя десятичными знаками.

Таблицы Гаусса выдержали много изданий, но лучшим из них надо считать издание 1937 г., под редакцией и с дополнениями проф. А. С. Чеботарева. Это и другие издания таблиц Гаусса имеют ряд вспомогательных таблиц, облегчающих геодезические вычисления. Издание девятое (1947 г.) таблиц Гаусса, как уже отмечалось, имеет много опечаток.

К недостатку этого издания таблиц Гаусса нужно отнести также и то, что они составлены только для формул

$$\Delta x = S \cos \alpha = \pm S \cos r,$$
$$\Delta y = S \sin \alpha = \pm S \sin r,$$

предназначенных, главным образом, для вычисления приращений прямоугольных координат. Все вспомогательные таблички, имевшиеся в прежних изданиях, в 9-ом издании не даны.

Таблицы приращений П. М. Орлова (имеется несколько изданий) представляют собой произведения натуральных значений синусов и косинусов углов на числа 1, 2, 3, . . . , 10. В столбцах 4, 5, . . . , 10 дано по пяти десятичных знаков, тогда как в соответствующих столбцах таблиц Гаусса приведены четырехзначные числа. В книге даны также пятизначные таблицы значений синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов углов через 1′.

«Таблицы для вычисления приращений прямоугольных координат», составленные П. И. Галаниным, имеют интервал для румба в 2′, а приращения в них даны для чисел от 1 до 5 с пятью, а для чисел от 6 до 9 с четырьмя десятичными знаками.

«Таблицы приращений координат», составленные М. Л. Рудштейном (было два издания: 1950 и 1954 гг.), имеют преимущество перед аналогичными таблицами Гаусса. В столбце «10» этих таблиц дано четыре, а в столбцах «40» и «50» — три десятичных знака (на один знак больше, чем в таблицах Гаусса), что повышает точность вычисления приращений и расширяет применение этих таблиц.

Таблицами Гаусса, Орлова и Рудштейна можно пользоваться, как таблицами произведений четырех- и пятизначных чисел на однозначные.

«Таблицы приращений прямоугольных координат» (Углетехиздат 1954) И. Ф. Паленова предназначены для вычислений приращений с точностью ± 1 *мм*. Таблицы расположены на 553 страницах большого формата; приращения в них даны для линий до 100 *м* через 1 *м* и для углов через 1′ дуги. Таблицы дают возможность находить по ним с точностью ± 1 *мм* горизонтальные проложения и превышения.

Приемы вычисления приращений прямоугольных координат и эффективность средств, применяемых при этом, описаны в § 71.

Таблицы для вычисления превышений

Все многочисленные таблицы, служащие для вычисления превышений, делят на тахеометрические (по наклонным расстояниям, измеряемым дальномером) и превышений, вычисляемых по горизонтальным проложениям.

Тахеометрические таблицы обычно составляются для формул

$$h' = \frac{1}{2} (kl + c) \sin 2\nu,$$

$$S = kl \cdot \cos^2 \nu + c \cos \nu = (kl + c) \cos^2 \nu,$$

или

$$S = kl + c - (kl + c) \sin^2 \nu = kl + c - \Delta S.$$

Таблицы, составленные для этих формул, имеют различное расположение материала на странице, различные ступени аргумента, различные форматы, объем и компоновку. Лучшими таблицами, очевидно, будут те, которые без особых вычислений и без излишних перелистываний страниц дают возможность наиболее быстро находить нужные величины. В табл. 29 приведены данные для некоторых тахеометрических таблиц и указано относительное время (полученное из специально поставленных опытов), затрачиваемое на нахождение превышений и горизонтальных проложений по этим таблицам.

Таблица 29

№ по пор.	Авторы таблиц	Год издания	Количество страниц	Время, затрачиваемое на вычисления, %	Формат, *см*
1	В. Иордан—Ф. Регер	1938	443	100	17 × 26
2	М. Л. Рудштейн и В. И. Ярымбаш	1951	435	120	13 × 20
3	М. М. Иванов	1952	187	120	13 × 17
4	И. В. Адрианов	1952	92	160	15 × 23
5	В. И. Ярымбаш	1953	191	120	22 × 29
6	Г. Г. Егоров	1954	46	150	13 × 20
7	В. Н. Ганьшин, Л. С. Хренов	1955	247	110	14 × 20

Из табл. 29 видно, что наиболее производительными являются тахеометрические таблицы В. Иордана — Ф. Регера и В. Н. Ганьшина — Л. С. Хренова; последние более удобны при работе в полевых условиях. Превышения в этих таблицах даны для наклонных расстояний, измеренных дальномером, от 8 до 349 *м* и углов наклона ν от 0 до 20°. В конце книги на 4 страницах даны превышения для $S = 100$ *м* и углов наклона ν от 0 до 20°; здесь же даны поправки за наклон линий, измеренных лентой.

Кроме тахеометрических таблиц, существует еще много таблиц, составленных для вычисления превышений по формуле

$$h = S \operatorname{tg} \nu,$$

где S — горизонтальное проложение линии. К таким относятся таблицы М. А. Савицкого (для углов наклона до 12°); Ф. В. Дробышева (для углов наклона до 26°); Г. Г. Егорова (для углов наклона до 30°) и др. Все таблицы такого рода представляют собой произведения чисел 100, 200, 300, . . . , 900 на $\operatorname{tg} \nu$.

Заслуживают внимания «Таблицы для вычисления превышений», составленные проф. Л. С. Хреновым (Москва, 1949). Таблицы имеют три входа и дают возможность непосредственно определять величины $S \operatorname{tg} \nu$ для углов наклона от 0°01′ до 5°50′ и для расстояний от 1 до 350 *м*. Помещенные в таблицах поправки позволяют сравнительно легко находить превышения и для углов наклона от 5°50′ до 11°40′ для тех же расстояний. Проф. Л. С. Хренов составил свои таблицы, исходя из принципа, положенного в основу «Новых тахеометрических таблиц», составленных в 1935 г. В. И. Ганьшиным, А. И. Петренко и Л. С. Хреновым. Если в формуле $h = S \operatorname{tg} \nu$ горизонтальное проложение S обозначить через A, а угол наклона ν через B и разложить $\operatorname{tg} B$ в ряд, ограничиваясь вторым членом разложения, то можно написать

$$h = AB + A \frac{B^3}{3}.$$

Если в этой формуле допустить перемену местами A и B, то будем иметь

$$h' = BA + B \frac{A^3}{3}$$

и разность $h - h'$ даст ошибку, вызванную таким изменением. В таблицах даны значения $\frac{h + h'}{2}$, почему ошибка δ от перемены местами S и ν сокращается вдвое и не будет превышать 3 *см.*

В книге проф. Хренова даны еще различные вспомогательные таблицы.

Таблицы для разбивки кривых

В таблицах для разбивки кривых приводятся элементы, необходимые для определения на местности главных точек закругления, а также данные для детальной разбивки кривой разными способами. Распространенными таблицами такого рода являются таблицы Важеевского, Федорова, Леонидова, а также таблицы, составленные Гипродором, Гушосдором и др.

Детальную разбивку закруглений производят способами: прямоугольных координат, полярным, продолженных хорд и способом секущих. Если кривую необходимо разбить на участке с ограниченной шириной, то можно применить способ и таблицы проф. Н. В. Федорова: «Полевые таблицы для разбивки круговых и переходных кривых и переходных кривых способом секущих», Москва, 1942.

Таблицы для вычисления и преобразования прямоугольных координат Гаусса

Прямоугольные плоские координаты Гаусса стали применяться у нас с 1930 г., после издания «Таблиц для вычисления координат Гаусса-Крюгера», составленных инженерами В. И. Звоновым и Д. А. Лариным, под редакцией и при участии проф. Ф. Н. Красовского. Эти таблицы составлены на эллипсоиде Бесселя и в настоящее время не употребляются, так как по постановлению Совета Министров СССР от 7.IV.1946 г. для геодезических и картографических работ в СССР принят эллипсоид Красовского.

В настоящее время для вычисления координат Гаусса используется ряд таблиц.

«Таблицы для логарифмического вычисления координат Гаусса-Крюгера» (Геодезиздат, М., 1946), составленные проф. Ф. Н. Красовским и доц. А. А. Изотовым. При помощи этих таблиц вычисляются:

а) плоские прямоугольные координаты x и y, сближение меридианов γ и масштаб изображения m по геодезическим координатам B и L (широте и долготе);

б) геодезические координаты B и L, сближение меридианов и масштаб изображения m на плоскости по прямоугольным плоским координатам x и y;

в) редукции длин линий и направлений при переходе с эллипсоида на плоскость.

В книге приведены два вида формул для решения этих задач, схемы и примеры вычислений и даны краткие объяснения.

«Таблицы для вычисления координат Гаусса-Крюгера» (Геодезиздат, М., 1947), составленные под руководством инж. Д. А. Ларина и при участии доцента А. А. Изотова, служат для решения тех же задач, что и названные выше таблицы, но они используются при решении задач с применением счетных машин, так как содержат натуральные значения коэффициентов рядов*.

«Таблицы координат Гаусса и таблицы размеров рамок и площадей трапеций топографических съемок» (Геодезиздат, М., 1947), составленные под руководством профессора А. М. Вировца, содержат:

а) значения координат Гаусса для вершин углов трапеций топографической съемки масштаба 1 : 25 000;

б) значения гауссова сближения меридианов для тех же точек;

в) размеры рамок и площадей трапеций топографической съемки для масштабов от 1 : 10 000 до 1 : 200 000 включительно.

Таблицы служат, главным образом, для построения рамок трапеций топографических карт и нанесения километровых линий на них; координаты по этим таблицам вычисляются с точностью около 0,2 *м.* В начале книги даны основные понятия о координатах Гаусса и объяснения к пользованию таблицами. В конце книги даны вспомо-

---

* К сожалению, и те и другие таблицы имеют значительное количество опечаток, почему необходимо выбираемые из таблиц величины внимательно сравнивать со смежными.

гательные таблицы, в том числе, содержащие величины $m - 1$, по которым можно вычислять линейные искажения и искажения в площадях проекции Гаусса по формулам:

$$\Delta S = S\,(m - 1),$$
$$\Delta P = 2P\,(m - 1).$$

Таблицы А. М. Вировца можно также применять для перечисления координат из зоны в зону.

«Таблицы для преобразования прямоугольных координат», составленные А. М. Вировцем и Б. Н. Рабиновичем (Геодезиздат, М., 1954).

Таблицы предназначены для преобразования прямоугольных координат Гаусса при переходе из трехградусной зоны в смежную трехградусную, из трехградусной в шестиградусную, из шестиградусной в трехградусную, а также из шестиградусной в шестиградусную зону.

«Таблицы для построения рамок трапеций топографических съемок масштабов 1 : 5000 и 1 : 2000» (Геодезиздат, М., 1951), составленные А. М. Вировцем. Таблицы содержат значения величин S, m, n, k, l'', δx и δy, служащие для вычисления прямоугольных координат Гаусса по известным широтам и долготам вершин рамок трапеций топографических съемок по формулам

$$x = S + mk + \delta x,$$
$$y = nl'' + \delta y.$$

Приложены также таблицы размеров рамок и площадей трапеций топографических съемок масштаба 1 : 5000 и 1 : 2000. Во введении приведены примеры использования таблиц с подробным объяснением.

«Таблицы прямоугольных координат углов рамок, размеров рамок и площадей» (Геодезиздат, М., 1953), составленные под руководством проф. А. М. Вировца, содержат значения прямоугольных координат Гаусса вершин рамок трапеций топографических съемок масштаба 1 : 5000 и значения размеров рамок и площадей трапеций топографических съемок масштабов 1 : 5000 и 1 : 2000. Путем простого интерполирования могут быть получены координаты углов трапеции топографических съемок масштаба 1 : 2000.

В начале книги, содержащей названные таблицы на 909 страницах, даны краткие сведения о применении трехградусных зон и дана разграфка и номенклатура листов карт топографических съемок в масштабах 1 : 5000 и 1 : 2000.

Книга необходима для организаций и учреждений, выполняющих топографические съемки в крупных масштабах; она является также ценным пособием для студентов средних и высших учебных заведений.

Некоторые специальные таблицы и таблицы элементарных функций

К числу таких таблиц, в первую очередь следует отнести «Сборник таблиц для геодезических вычислений», составленный Центральной геодезической частью Военно-топографической службы (Редакционно-издательский отдел ВТС, М., 1953).

Книга имеет восемь разделов, содержащих на 217 страницах различные таблицы, служащие для обработки результатов геодезических измерений и решения различных геодезических задач.

К специальным таблицам можно отнести «Таблицы для вычисления длин линий, определяемых ДНБ-2», составленные С. А. Антеловым (Геодезиздат, М., 1954) и «Таблицы расстояний к дальномерной насадке ДНБ-2», составленные А. П. Ильиным (Алма-Ата, 1954).

Специальными таблицами являются также «Таблицы барометрического нивелирования», наибольшее распространение из которых получили таблицы А. С. Чеботарева, таблицы С. И. Блохина и таблицы Л. С. Хренова.

Из таблиц элементарных функций отметим широко распространенные **«Таблицы Барлоу квадратов, кубов, квадратных корней, кубических корней и обратных величин целых чисел до 12 500»**, содержащие семь-восемь верных значащих цифр. Эти таблицы могут быть использованы для вычисления произведения двух чисел, для замены деления умножением на число, обратное делителю, для вычисления длины линии по координатам ее концов и выполнения других действий, связанных с вычислением указанных выше элементарных функций. Применение таблиц Барлоу значительно облегчает работу при вычислении коэффициентов нормальных уравнений.

Отметим еще **«Таблицы для вычисления дирекционных углов и расстояний»** Л. Я. Нейшулера (Москва, 1940). Эти таблицы составлены для функций

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{и} \quad S = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Дирекционный угол определяется по этим таблицам с точностью до 1′, а длина линии — с четырьмя верными значащими цифрами. Таблицы полезны для контрольных вычислений при решении обратных геодезических задач.

Заслуживают внимания **«Математические таблицы»** А. И. Хохлова (Москва, 1954), в которых даны пятизначные: таблицы логарифмов чисел; таблицы натуральных значений тригонометрических функций; таблицы логарифмов тригонометрических величин; таблицы квадратных корней и обратных величин, а также ряд вспомогательных табличек.

Имеется много таблиц различных авторов (С. А. Ангелова, И. В. Адрианова, И. В. Зубрицкого, М. П. Козлова, Е. Г. Ларченко и других) для вычисления поправок за центрировки и редукции.

В заключение отметим еще прекрасно изданные **«Пятизначные математические таблицы»** (Москва, 1948), составленные Б. И. Сегалом и К. А. Семендяевым, в которых даны значения основных элементарных и некоторых специальных функций (в частности, в этих таблицах даны значения интеграла вероятностей для аргументов, заключенных в пределах от 0 до 2,5, с интервалом в 0,001).

Упражнения

1. Определить, с каким числом знаков целесообразно взять таблицы для нахождения логарифмов следующих приближенных чисел: 505,4; 0,005 054; $5{,}054 \cdot 10^5$.

2. Определить, с какой предельной ошибкой будет найден угол по пятизначным таблицам логарифмов тригонометрических функций, если известно, что $\lg \operatorname{tg} \alpha = 9.89020_{-10}$

3. Вычислить, с какой предельной ошибкой будет определен по таблицам угол, если известно, что тангенс этого угла равен 0,806 34.

4. Объяснить, как контролировать таблицы при помощи конечных разностей.

5. Пользуясь приведенной в конце книги «Таблицей квадратных корней из чисел», вычислить с необходимой и достаточной точностью $\sqrt{4356{,}5}$.

6. Как выгоднее определять углы по логарифмам тангенсов или синусов углов?

7. С каким числом знаков целесообразно взять таблицы натуральных значений тригонометрических функций для обработки теодолитных ходов, углы которых даны до 0′,1?

8. С каким числом знаков целесообразно взять таблицы логарифмов для вычисления величины:

$$c = \frac{0{,}304 \cdot \sin 10°14'}{0{,}080\ 346\ 5},$$

если все числа в данном выражении являются приближенными (округленными)?

9. Как по значениям функций, приведенным в таблице, узнать, когда можно применять линейное интерполирование и когда необходимо пользоваться интерполяционной формулой второго порядка?

10. До какого значения угла x можно пользоваться приближенной формулой $\sin x'' = x \sin 1''$, чтобы ошибка в $\sin x$ не вышла за пределы $0{,}5 \cdot 10^{-5}$?

11. Пользуясь «Пятизначными таблицами логарифмов» Пржевальского, определить $\lg \sin 0°23',5$.

12. Пользуясь только «Шестизначными таблицами тригонометрических функций» Петерса, вычислить приращения прямоугольных координат по формулам:

$$\Delta x = 10^n \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2},$$

$$\Delta y = 10^n \frac{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)}{2},$$

если

$$\alpha = 32°00'12'', \text{ а } S = 1454{,}63.$$

13. Составить таблицу функции двух аргументов (поправок за искажение площадей в проекции Гаусса):

$$\Delta p = \frac{y^2{}_m}{R} p,$$

для $y_m = 100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 240, 260$ *км* и для $p = 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900$ *га*.

Глава VII

СЧЕТНЫЕ МАШИНЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ПРИ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ РАБОТАХ

§ 64. Исторические сведения о счетных машинах и приборах

Вычислительная работа относится к наиболее утомительной умственной деятельности человека; еще в глубокой древности стремились облегчить вычислительную работу. Первым вспомогательным средством вычислений были пальцы человеческой руки. К первым вычислительным приборам относятся *абак* и *счеты,* употреблявшиеся уже около четырех—трех тысяч лет до нашей эры.

Наибольшее распространение счеты получили в Китае и России; ими пользуются и в настоящее время, так как их удобство при выполнении сложения и вычитания бесспорно. Это самый простой и доступный прибор, дающий значительную экономию труда при умелом его использовании.

После изобретения счетов прошло пять тысяч лет, когда был создан следующий вычислительный прибор. В 1617 г. известный математик Непер — изобретатель логарифмов—описал приспособление для умножения многозначных чисел на однозначные; это приспособление вошло в литературу под названием *палочек Непера.*

В 1641 г. Паскаль, впоследствии знаменитый физик и математик, сконструировал первую механическую суммирующую машину для облегчения работы своего отца — сборщика налогов.

В 1673 г. один из изобретателей дифференциального исчисления Лейбниц задумал машину для умножения и закончил ее изготовление в 1694 г.

В 1847 г. русский педагог Куммер изобрел прибор для сложения и вычитания, названный им счислителем. Счислитель Куммера не получил распространения в России вследствие широкого применения у нас конторских счетов, но в Западной Европе приборы, построенные по принципу счислителя Куммера, нашли широкое применение.

Серийное производство и распространение во всем мире получила вычислительная машина — арифмометр, изобретенная в 1874 г. русскими инженерами Петербургского Монетного Двора. Патент на этот арифмометр получил главный механик этого двора инженер В. Т. Однер. В обсуждении конструкции первого арифмометра, называемого арифмометром Однера, принимал активное участие и академик П. Л. Чебышев.

Необходимо отметить, что арифмометр в его современном виде — результат ряда отдельных изобретений как русских ученых, так и русских специалистов-практиков. К таким изобретателям относится и

В. Я. Слонимский, который в 1845 г. изобрел «числительную машину, напоминающую по принципу действия арифмометр».

За свою машину Слонимский был удостоен Академией наук Демидовской премии второй степени.

Несмотря на бурный технический прогресс и на то, что с момента изобретения арифмометра прошло три четверти века, арифмометр Однера и в настоящее время — наиболее распространенная вычислительная машина. Заграничные арифмометры, отличаясь в деталях или по внешнему виду от арифмометра Однера, построены по принципу последнего.

В настоящее время, кроме рычажных арифмометров типа Однера, имеется много клавишных арифмометров как с ручным, так и с моторным приводом.

Прототипом современных автоматических вычислительных машин явилась машина, изобретенная в 1878 г. русским академиком, основоположником теории механизмов, П. Л. Чебышевым. Важнейшими особенностями машины академика Чебышева являются:

а) автоматический переход каретки из разряда в разряд;
б) оригинальная конструкция непрерывной передачи десятков;
в) наличие приспособления для установки делимого и уменьшаемого непосредственно на счетчике результатов.

Вычислительная машина Чебышева была первой, производившей умножение автоматическим путем. Однако в царской России это изобретение академика Чебышева не было реализовано, и единственный экземпляр, изготовленный самим изобретателем, оказался во Франции в одном из музеев Парижа.

В настоящее время в США построены малые вычислительные машины, у которых передача десятков происходит по принципу, предложенному П. Л. Чебышевым. Этот принцип дает возможность увеличить техническую скорость машины до 1200 рабочих циклов в минуту, тогда как машины, действующие на других принципах, имеют техническую скорость 300—500 рабочих циклов в минуту.

В области производства вычислений и механизации этих вычислений большой вклад в науку внес академик А. Н. Крылов (1863—1945), который с самого начала своей научной и практической деятельности занимался вопросами вычислений с приближенными числами. Он разработал теорию и конструкцию машины для решения дифференциальных уравнений и в 1904 г. опубликовал работу по этому вопросу. В 1906 г. он прочитал специальный курс лекций по приближенным вычислениям, в котором изложены рациональные приемы и методы технических расчетов. Советские конструкторы и ученые разработали много различных оригинальных счетных машин, а специальные заводы освоили их серийное производство.

Член-корреспондент АН СССР И. С. Брук сконструировал ряд математических машин, в том числе машину для интегрирования линейных дифференциальных уравнений, и машину, названную им минимизатором, для решения систем уравнений под условием минимума суммы квадратов поправок.

Профессор А. И. Дурнев сконструировал вычислительный прибор, состоящий из логарифмических шкал, нанесенных на вращающихся кругах; при помощи прибора можно производить различные вычисления (главным образом геодезические) с точностью до пяти верных значащих цифр.

Инженеры С. К. Неслуховский, В. Н. Рязанкин, А. А. Дулгарян и другие имеют большие заслуги в создании счетно-аналитических машин.

Советские ученые Л. И. Гутенмахер, Н. В. Корольков, Б. В. Волынский, В. П. Лебедев разработали электронный интегратор, служащий для решения систем дифференциальных уравнений.

Профессор В. С. Лукьянов создал гидравлический интегратор для решения уравнений с частными производными.

В последнее время вычислительные машины совершенствуются в направлении исключения влияния вычислителя на ход вычислений, что достигается применением малых автоматических машин с электрическим приводом, счетно-аналитических машин и быстродействующих электронных вычислительных машин.

При работе на малых автоматических вычислительных машинах вычислитель устанавливает исходные данные, проверяет правильность их установки на контрольном механизме и затем, нажав на соответствующую клавишу, через несколько секунд читает готовый результат с заданной точностью.

Счетно-аналитические машины предназначались сначала исключительно для статистики и учета. Эти машины появились в конце XIX века в статистическом бюро США и изобретатель принципа действия счетно-аналитических машин доктор Герман Голлерит применил их впервые для обработки результатов американской переписи населения в 1890 г. С большим успехом эти машины были применены при разработке материалов сельскохозяйственной переписи США в 1900 г. Важным этапом в развитии счетно-аналитических машин явилось изобретение работником статистического бюро США Пауэрсом в 1911 г. записывающего табулятора с механическим принципом передачи.

В настоящее время счетно-аналитические машины широко используются в различных странах как для целей учета, так и для различных инженерно-технических расчетов. В СССР выпускаются счетно-аналитические машины: для 45- и 80-колонных карточек. Эти машины нашли широкое применение в различных областях нашего народного хозяйства, в частности, они начинают успешно применяться в сельскохозяйственных учреждениях.

Огромным успехом в области вычислительной техники явилось применение электронных машин, конструкции которых разработаны в последнее десятилетие. Практической основой электронных цифровых машин явилась триггерная ячейка (электронное реле), изобретенная в 1918 г. советским ученым М. А. Бонч-Бруевичем. Спустя четверть века после изобретения триггерной ячейки, ее стали применять в вычислительных электронных машинах. В настоящее время на электронных машинах арифметические действия выполняются с очень большой скоростью (до нескольких тысяч действий в одну секунду). В создании цифровых быстродействующих вычислительных машин большие заслуги принадлежат акад. С. А. Лебедеву, члену-корреспонденту АН СССР И. С. Бруку, Ю. Я. Базилевскому, Б. И. Рамееву, В. Н. Рязанкину, П. Г. Хоменко, и многим другим ученым и практикам.

Счетные машины позволяют резко увеличить производительность вычислительного труда, что имеет огромное значение при определении показателей, необходимых для руководства различными производствами. Комплекты счетных машин установлены на фабриках механизированного счета, на счетных станциях различных министерств, предприятий и научных учреждений. В последнее время счетно-аналитические машины стали применяться на межколхозных счетных станциях. Эти машины должны найти широкое применение при проведении единого государственного учета и инвентаризации земель страны.

В связи с внедрением автоматических машин пересматриваются основы вычислений и изменяется вычислительная техника. Широко применявшиеся ранее логарифмические вычисления теперь во многих геодезических вычислениях почти полностью вытеснены. Составлены таблицы, которые дают не логарифмы функций, а их натуральные значения.

В настоящее время механизация вычислительных работ в СССР находится на высоком уровне, хотя все еще не удовлетворяет запросам нашего народного хозяйства; в частности, далеко недостаточно механизированы геодезические вычисления.

В деле механизации вычислительных работ наша страна имеет многолетний опыт. Партия и правительство уделяют большое внимание механизации трудоемких работ, в том числе и вычислительных, что отмечено в директивах XX съезда КПСС по шестому пятилетнему плану развития народного хозяйства СССР.

На многих заводах и предприятиях имеются машинно-счетные станции или вычислительные бюро. Такими бюро, оснащенными пока еще только малыми вычислительными машинами, располагают, в частности, аэрогеодезические предприятия.

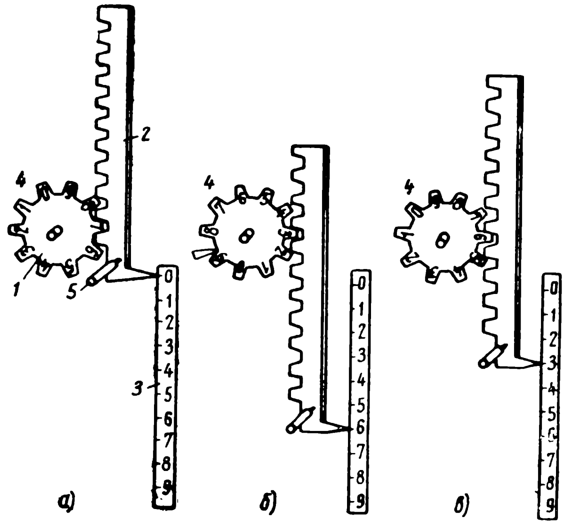
Для разработки теоретических основ проектирования счетных машин и отбора типов машин для серийного производства создан Научно-исследовательский институт счетного машиностроения. Проблемами механизации вычислений занимается также Институт точной механики и вычислительной техники АН СССР.

§ 65. Принципы устройства механизмов счетных машин

Основной принцип устройства малых вычислительных машин заключается в представлении каждого числа в виде расстояния или угла. Примером представления чисел в виде расстояний (отрезков) являются шкалы счетной линейки.

На фиг. 52 показан простейший вычислительный механизм, дающий понятие о представлении числа в виде расстояния. Этот механизм состоит из шестеренки *1*, зубчатой рейки *2*, шкалы *3* и указателя *4*. Счетная шестеренка *1*, имеющая десять зубьев, свободно вращается вокруг своей оси. Зубчатая рейка *2* представляет собой пластинку с десятью вырезами, шаг которых соответствует шагу зубьев шестеренки. Рейку *2* можно перемещать относительно шкалы *3* при помощи рукоятки *5*. Если зубья шестеренки и зубья рейки находятся в зацеплении, то при передвижении рейки на некоторое расстояние шестеренка повернется на соответствующий угол. Если, например, переместить рейку на шесть делений шкалы (фиг. 52, *б*), то шестеренка повернется на шесть зубьев, т. е. на 6/10 окружности. Для сложения какого-нибудь числа, например 3, с числом 6, которое появилось против указателя *4*, необходимо сначала вывести рейку из зацепления с зубьями шестеренки, поставить в исходное положение, включить зацепление и переместить рейку вниз на три деления шкалы, тогда против указателя мы прочтем сумму двух чисел, равную 9 (фиг. 52, *в*), так как в результате такой операции счетная шестеренка повернется на 9/10 окружности. Вместо указателя *4* в кожухе машин делают отверстия (окна), сквозь которые видны цифры, нанесенные на зубьях шестеренки или на специальных дисках, скрепленных с шестеренкой.

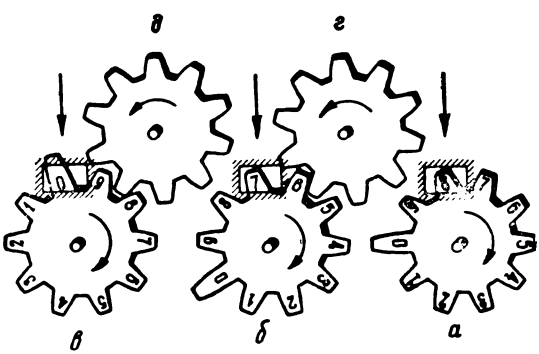
Действия с многозначными числами производятся при помощи нескольких зубчатых реек и соответствующего числа счетных шестеренок. На фиг. 53 показаны три основные и две (сверху) промежуточные шестеренки; последние служат для передачи десятков, которая осущест-



Фиг. 52. Схема простейшего вычислительного механизма, основанного на принципе перемещения зубчатой рейки

вляется следующим образом. Каждая промежуточная шестеренка находится в постоянном зацеплении с основной шестеренкой старшего разряда, а на каждой основной шестеренке десятый зуб длиннее остальных.

При вращении шестеренки *а* (фиг. 53) длинный зуб шестеренки войдет в зацепление с промежуточной шестеренкой *г* и повернет ее на одно деление. Так как эта промежуточная шестеренка находится в постоянном сцеплении со счетной шестеренкой старшего разряда, то она повернет эту шестеренку на столько делений, на сколько полных оборотов повернулось счетное колесо младшего разряда. Таким образом, при каждом полном обороте счетной шестеренки разряда единиц будет поворачиваться на одно деление шестеренка разряда десятков; при полном обороте шестеренки разряда десятков будет поворачиваться на одно деление шестеренка разряда сотен и т. д.



Фиг. 53. Схема передачи десятков

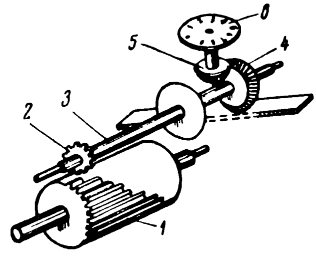
На фиг. 53 показан способ передачи десятков при помощи длинных зубьев основных шестеренок. В действительности, вместо длинных зубьев, в действующих машинах обычно используют более толстые зубья, а промежуточные шестеренки устанавливают в другой плоскости относительно основных шестеренок так, чтобы в зацепление с ними входили только более толстые зубья.

Наиболее употребительные малые вычислительные машины построены на следующих принципах:

а) ступенчатых валиков;

б) пропорционального рычага;

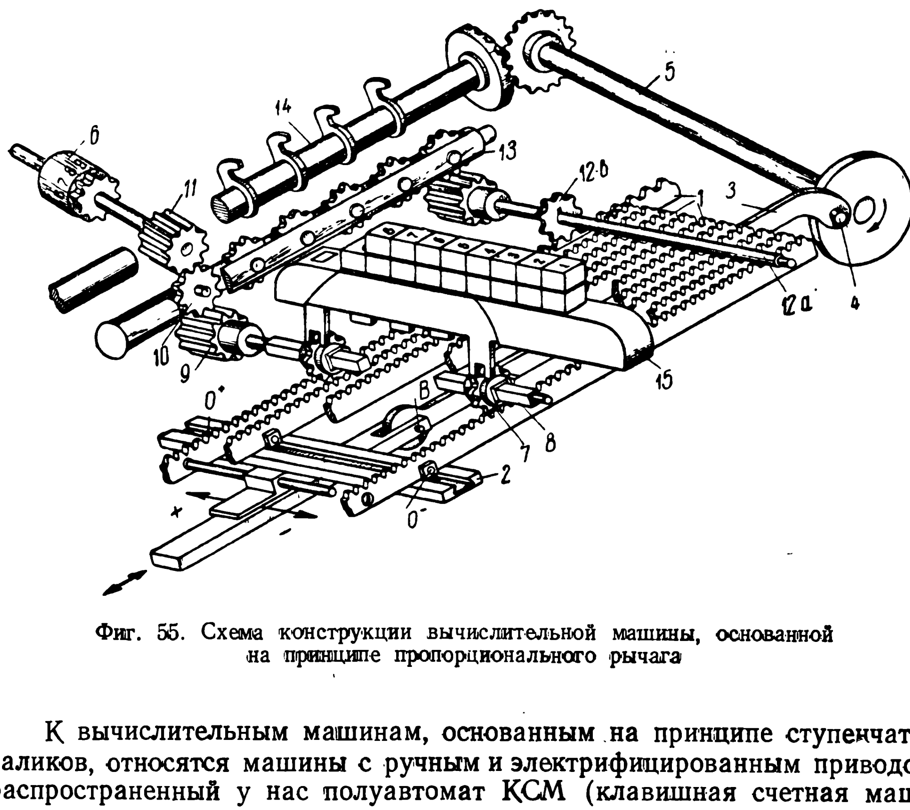
в) колеса Однера.



Фиг. 54. Схема конструкции вычислительной машины, основанной на принципе ступенчатых валиков

Принцип ступенчатых валиков. Схема конструкции вычислительной машины, основанной на принципе ступенчатых валиков, показана на фиг. 54. На цилиндрическом валике *1* расположены ступенями девять зубьев разной длины. За один оборот валик может повернуть установочную шестеренку *2* на разное количество зубьев в зависимости от положения самой шестеренки, которая передвигается по оси *3*. Если передвижная шестеренка *2* введена в сцепление с зубьями валика, то вращение последнего передается через конические шестеренки *4* и *5* на цифровой диск *6*, выполняющий функцию счетчика. Ступенчатые валики соединяются с ручкой или вращаются при помощи электрического привода.

В машинах, основанных на этом принципе, число разрядов равно числу узлов, один из которых показан на фиг. 54.



Фиг. 55. Схема конструкции вычислительной машины, основанной на принципе пропорционального рычага

К вычислительным машинам, основанным на принципе ступенчатых валиков, относятся машины с ручным и электрифицированным приводом: распространенный у нас полуавтомат КСМ (клавишная счетная машина), полуавтоматы КЕВ-II С и КЕЛ-С и автоматы САЛ-II С, САСЛ-II С и др.

Принцип пропорционального рычага. На фиг. 55 показана схема конструкции вычислительной машины, основанной на принципе пропорционального рычага. Механизм передачи числа, установленного на клавиатуре в счетный механизм такой машины, состоит в основном из десяти равноотстоящих параллельных зубчатых реек *1*, связанных между собой посредством пропорционального рычага *2*, закрепляемого в одной из концевых точек 0^+ или 0^-. При включении машины пропорциональный рычаг вращается около одной из этих точек при помощи шатуна *3* кривошипного механизма *4*, а движение рычага вызывает движение зубчатых реек. Это происходит следующим образом. Усилие ротора (вращающейся части) мотора передается на вал *5*, на переднем конце которого имеется кривошипный механизм *4*, преобразующий вращательное движение в поступательное. Это поступательное движение передается на рычаг *2* при помощи шатуна *3*. Если рычаг закреплен в точке 0^+ (при сложении), то движение его вызовет смещение зубчатых реек в положение, указанное на фиг. 56, *а*, при котором задняя рейка (нулевая) остается неподвижной (так как она находится непосредственно над осью вращения 0^+ пропорционального рычага), следующая рейка передвинется на одну десятую часть, последующая на две десятых величины перемещения передней рейки и т. д. Величина смещения реек определяется из подобия треугольников и выражается пропорцией:

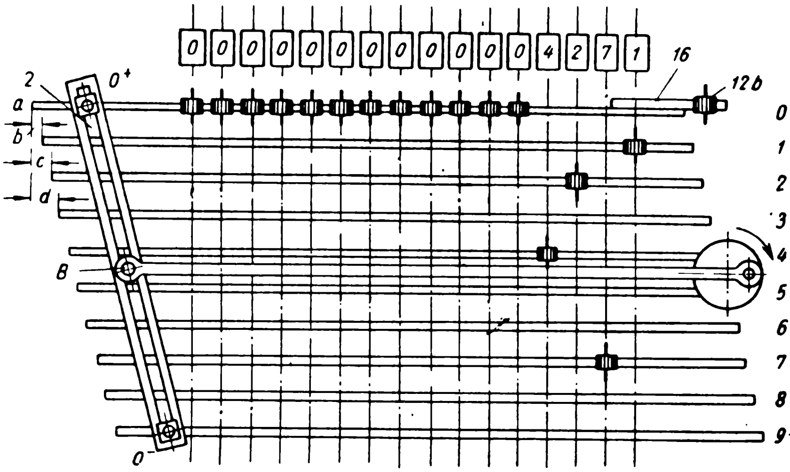
$$a : b : c : d \ldots = 0 : 1 : 2 : 3 \ldots$$

Перемещение реек, показанное на фиг. 56, *а*, соответствует полуобороту кривошипа; при второй половине оборота рейки возвращаются в начальное положение.

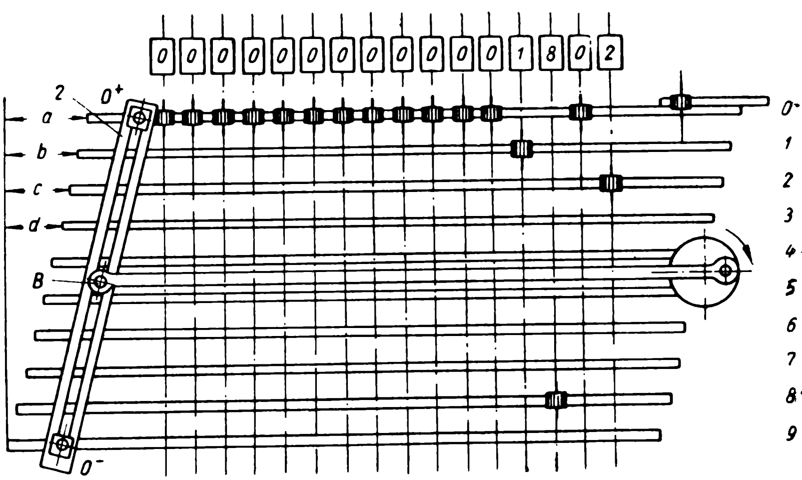
Смещение каждой рейки передается в счетчик *6* (фиг. 55) посредством нескольких шестеренок, начиная от шестеренки *7*, которая при помощи особой вилки, выступающей из клавиатурной рамы *15*, может передвигаться по четырехугольной оси *8* перпендикулярно к зубчатым рейкам. Число таких четырехугольных осей равно числу разрядов клавиатуры (на фиг. 56, *а* и 56, *б* схематически изображено 16 осей). Если установочная шестеренка *7*, находящаяся на оси *8*, сцеплена с зубчатой рейкой, то перемещение последней вызовет поворот четырехугольной оси *8*, которая передаст этот поворот через шестеренки *9*, *10* и *11* в счетный механизм (на фиг. 56, *а* и *б* установлены соответственно числа 4271 и 1802).

При вращении ведущего вала *5* зубчатые рейки движутся сначала в одном, а затем в противоположном направлении, но передача движения в счетный механизм происходит только при прямом движении реек. Такой порядок передачи движения обеспечивается особым механизмом и промежуточными шестеренками *10* (число их равно числу разрядов счетчика результатов), находящимися в одной вращающейся раме *13*. Движение этой рамы осуществляется с помощью кулачкового вала *14* так, что разъединение шестеренок *10* с шестеренками *9* и *11* происходит в момент, когда зубчатые рейки достигают своего крайнего правого положения, т. е. в момент, когда рейки имеют скорость, равную нулю. Работа машины состоит из двух циклов. При движении реек вправо происходит поразрядное суммирование на счетных колесах без передачи десятков, а при обратном ходе реек специальный механизм осуществляет передачу десятков.

Вычитание на рассматриваемой машине производится путем сложения десятичных дополнений. Но так как во всех разрядах получается дополнение до девяти, а в низшем разряде должно быть дополнение до десяти, то в этот разряд при помощи особых приспособлений прибавляется еще единица. Внесение этой единицы выполняется автоматически



а)



б)

Фиг. 56. Положение пропорционального рычага при сложении (а) и вычитании (б)

при помощи расположенной справа вспомогательной оси *12а* шестеренки 12*в* (фиг. 55) и специальной маленькой рейки *16* (фиг. 56, *а*). При нажиме на специальную клавишу «минус» закрепляется нижний конец пропорционального рычага, а значит и нижняя зубчатая рейка (фиг. 56, *б*). При работе мотора кривошип ведущего вала движется в том же направлении, что и при сложении, но пропорциональный рычаг поворачивается вокруг точки 0^-, поэтому нижняя зубчатая рейка остается в покое, вторая снизу перемещается на одну десятую часть, третья на две десятых и т. д.

К вычислительным машинам, основанным на принципе пропорционального рычага, относятся широко распространенные у нас автоматические машины моделей Р-37, Р-38, Р-37СМ и Р-38СМ.

Принцип колеса Однера. Как уже отмечалось, наиболее распространенной вычислительной машиной является арифмометр Однера, основанный на принципе установочной шайбы (однеровского колеса) с переменным числом зубьев от нуля до девяти. Подробно этот принцип описывается в § 66 и 67.

Принципы действия счетно-аналитических машин и электронных вычислительных машин изложены в § 84 и 85.

§ 66. Общее описание арифмометра

При помощи арифмометра можно выполнять сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение квадратных корней, а также различные комбинированные действия.

Арифмометры бывают двух типов: *рычажные и клавишные.* На рычажном арифмометре сложение и вычитание выполнять нецелесообразно; лучше делать это на суммирующих машинах или на счетах.

На клавишных арифмометрах можно с достаточно высокой производительностью выполнять наряду с другими действиями также сложение и вычитание.

Рычажным арифмометром отечественного производства является арифмометр «Феликс» (фиг. 57).

Арифмометр «Феликс», как и другие машины такого типа, имеет два главных механизма.

1. *Установочный механизм,* состоящий из однеровских колес (с переменным числом зубцов), смонтированных на одной общей оси (фиг. 58). На каждом из девяти колес имеются установочные рычажки *1*, выступающие в прорезах над крышкой корпуса арифмометра (фиг. 57).

2. *Счетный механизм,* состоящий из счетчика результатов *5* с приспособлением для передачи десятков и счетчика оборотов *7* без передачи десятков.

Счетчик результатов и счетчик оборотов смонтированы в подвижной каретке, приводящейся в движение при помощи рычага *11*. Счетчик результатов имеет тринадцать разрядов; на каждом цифровом колесе его нанесены цифры от 0 до 9. Счетчик оборотов имеет восемь разрядов; на его цифровых колесах нанесены 18 делений, помеченных белыми цифрами от 0 до 9 и красными от 1 до 8.

Счетчики гасятся путем вращения барашков *6* и *8*, которые нужно вращать в направлении от себя до момента их защелкивания.

Для передвижения каретки влево или вправо достаточно нажать рычаг *11* в соответствующем направлении.

Во избежание поломки арифмометра не допускается:

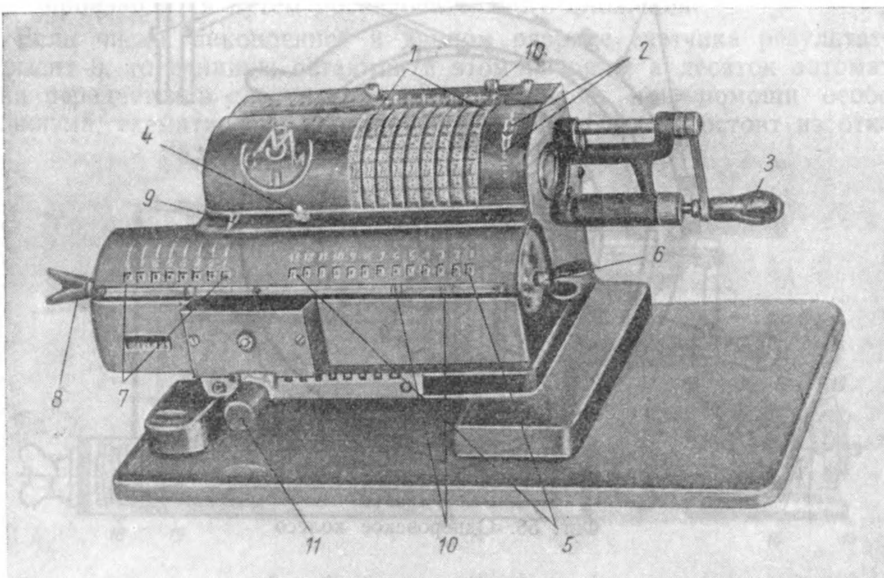
а) вращать рукоятку, если каретка при передвижении остановилась между двумя разрядами (при таком положении каретки не должны вращаться ни барашки, ни рукоятка);

б) вращать рукоятку, если барашки не защелкнуты;

в) передвигать каретку, если барашки не защелкнуты или рукоятка находится не на месте.

При работе нельзя останавливать рукоятку арифмометра на неполном обороте. Если во время действий на арифмометре обнаружится, что рукоятку начали вращать не в ту сторону, то необходимо закончить начатый оборот и только после этого повернуть рукоятку в обратном направлении. При несоблюдении изложенного порядка в результате вычислений могут появиться ошибки.

Вращать рукоятку следует со скоростью около 180 оборотов в минуту.



Фиг. 57. Рычажный арифмометр «Феликс»:

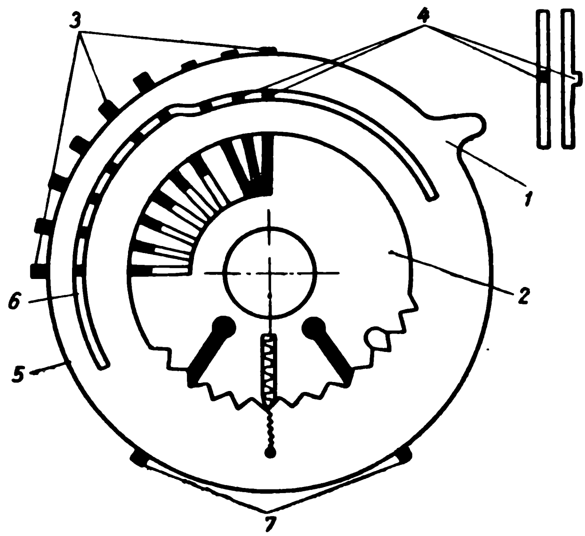
1 — установочные рычаги; *2* — стрелки-указатели положительного и отрицательного действия; *8* — оперативная рукоятка; *4* — рычаг гасительной гребенки; *5* — счетчик результатов; *6* — гасительный барашек счетчика результатов; *7* — счетчик оборотов; *8* — гасительный барашек счетчика оборотов; *9* — стрелка, указывающая положение каретки; *10* — металлические передвигающиеся запятые; *11* — рычаг передвижения каретки

§ 67. Устройство арифмометра и принцип работы на нем

Важнейшей деталью арифмометра является однеровское колесо (фиг. 58), состоящее из подвижной части и части, наглухо связанной с ведущей осью всего установочного механизма. Колесо имеет две шайбы: подвижную *5* и наглухо скрепленную с осью *2*. В теле шайбы *2* имеется девять радиальных вырезов, в которое входят девять выдвижных зубцов *3*. Каждый зубец имеет небольшой выступ *4*. На шайбу *2* надета подвижная шайба *5* с установочным рычагом *1*.

Подвижная шайба *5* имеет продольный двухрадиусный паз *6* (со скосом), в который входят выступы всех девяти зубцов. Если шайбу *5* поворачивать за установочный рычаг *1* по ходу часовой стрелки, то зубцы *3* при помощи боковых выступов *4* будут выдвигаться из тела шайбы *2*. Таким образом, если выступы *4* находятся в части продольного паза с большим радиусом, то зубцы выступают наружу из обода колеса, а если выступы находятся в пазу с малым радиусом, то зубцы находятся в скрытом положении.

В зависимости от угла поворота установочного рычага *1* может быть выдвинуто от одного до девяти зубцов *3*. На каждом однеровском колесе имеется по два отклоняющихся зубца *7*, служащих для передачи десятков; о действии этих зубцов будет сказано ниже.



Фиг. 58. Однеровское колесо

Всего на ведущей оси смонтировано девять описанных выше однеровских колес, поэтому установочный механизм дает возможность набирать на нем только девятизначное число (на фиг. 59 на оси *8* показано только пять однеровских колес). Если поворачивать рукоятку *10*, то последняя, через две шестеренки *11* и *12*, будет приводить во вращательное движение все однеровские колеса, а если на последних выдвинуть зубья *3*, то через промежуточные шестеренки *13* будут приводиться в действие цифровые колеса *14* счетчика результатов (фиг. 59).

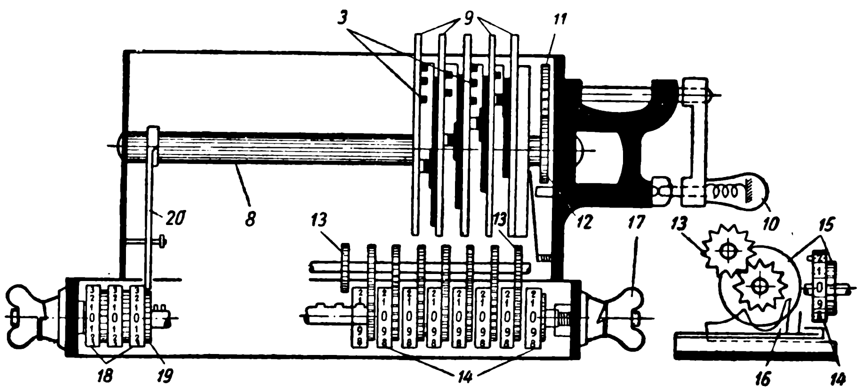
Счетчик результатов состоит из цифровых колес *14* с шестеренками *15*, фиксаторов цифровых колес *16* и гасительного барашка *17*. На каждом цифровом колесе нанесены цифры от 0 до 9; каждая цифра соответствует $^1/_{10}$ оборота цифрового колеса. Всего в счетчике результатов тринадцать цифровых колес, что определяет его емкость.

Счетчик оборотов состоит из восьми цифровых колес *18*, что дает возможность установить на нем восьмизначное число. На каждом цифровом колесе счетчика оборотов нанесено восемнадцать цифровых знаков: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 белым и 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 и 1 — красным цветом. К каждому цифровому колесу неподвижно прикреплены шестеренки *19*, которые получают вращение от рычага-толкателя *20*, сидящего на эксцентрике, укрепленном на ведущей оси установочного механизма.

При одном обороте оперативной рукоятки рычаг-толкатель повернет цифровое колесо счетчика на одну цифру, а выдвинутые зубья однеровских колес войдут в зацепление с промежуточными шестеренками *13* и повернут цифровые колеса счетчика результатов на столько делений, сколько выдвинуто зубьев на каждом однеровском колесе.

Если счетчики оборотов и результатов установить на нули, то после одного оборота оперативной рукоятки *10* по направлению часовой стрелки в счетчике результатов появится число, равное установленному на однеровских колесах установочного механизма, а в счетчике оборотов появится белая единица. При втором обороте число увеличится вдвое, при третьем втрое и т. д., а на счетчике оборотов будут появляться последовательно цифры 2, 3 и т. д. Таким образом, умножение на арифмометре производится путем последовательного сложения.

Если число, накопленное в данном разряде счетчика результатов, превысит 9, то единицы остаются в этом разряде, а десяток автоматически передается в следующий высший разряд при помощи особого механизма, схематически показанного на фиг. 60. Он состоит из откло-



Фиг. 59. Схема арифмометра

няющегося десятичного зубца *7*, укрепленного на однеровском колесе; десятичного рычага (молоточка) *21*, имеющего рабочий скос *22*; зубца *23*, укрепленного на цифровом колесе счетчика результатов (фиг. 60).

Когда цифровое колесо *14* проходит с 9 на 0 или с 0 на 9, зубец *23* нажимает на десятичный рычаг *21*, выдвигает его в направление к однеровскому колесу и ставит на пути движения десятичного зубца *7*; в таком положении рычаг *21* задерживается фиксирующим штифтом (не указанным на рисунке). При вращении однеровского колеса рабочий скос *22* молоточка отклоняет зубец *7* влево и заставляет его повернуть промежуточную шестеренку *13* следующего разряда на одно деление, которая, в свою очередь, поворачивает на одно деление цифровое колесо *14* счетчика результатов. После передачи десятка молоточек *21* возвращается при помощи упора на шайбе однеровского колеса в исходное положение.

На каждом однеровском колесе имеется два десятичных зубца *7*; один из них служит для передачи десятков при сложении и умножении, а другой — для заимствования десятков при вычитании и делении. Действие механизмов передачи десятков начинается с нижних разрядов и происходит в разное время.

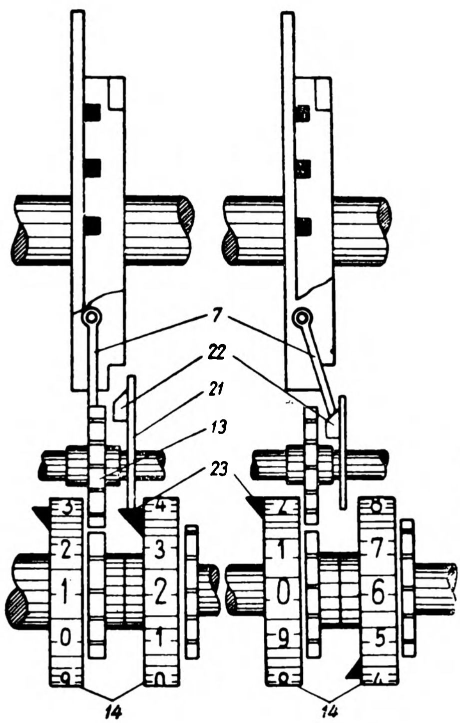
Из устройства арифмометра вытекает следующий порядок работы на нем.

Сложение и *умножение.* Арифмометр устанавливают в исходное положение, при котором:

а) показания счетчика результатов и счетчика оборотов приведены к нулю;

б) подвижная каретка установлена в требуемое положение.

При сложении первое слагаемое набирают на установочных рычагах и вращением рукоятки по ходу часовой стрелки переносят его на счетчик результатов. Затем устанавливают рычаги на второе слагаемое и также переносят его на счетчик результатов и т. д. На счетчике результатов получают таким образом сумму чисел, а на счетчике оборотов — число слагаемых, если оно не более девяти (так как на счетчике оборотов нет механизма для передачи десятков).



Фиг. 60. Схема передачи десятков

Умножение выполняется как операция последовательного сложения. Один из сомножителей, например число 32,45, набирают на установочных рычагах (на четырех справа), а другой, например 24,3, вращением рукоятки получают на счетчике оборотов. Для этого после установки рычагов на число 32,45 предвигают каретку так, чтобы стрелка *9*, указывающая положение каретки (фиг. 57), приходилась против цифры *3* (поскольку нужно умножить на трехзначное число). Установив таким образом каретку, вращают рукоятку арифмометра по ходу часовой стрелки два раза. Затем нажатием рычага *11* передвигают каретку на один разряд влево и вращают рукоятку арифмометра четыре раза. Снова передвигают каретку влево на один разряд и вращают рукоятку три раза. После этого на счетчике оборотов появится сомножитель 243, а на счетчике результатов число 788 535. Отделив справа налево запятой три десятичных знака, получим произведение 788,535.

Вычитание и *деление.* При вычитании набирают на установочных рычагах уменьшаемое и поворотом рукоятки арифмометра переносят его на счетчик результатов. Затем, вместо уменьшаемого, набирают на установочных рычагах вычитаемое и поворотом рукоятки в обратную сторону (против хода часовой стрелки) производят вычитание. На счетчике результатов читают разность.

В зависимости от характера вычислений, деление выполняют способом последовательного вычитания или способом подбора делимого, или, наконец, способом умножения делимого на обратную величину делителя. Разберем на примере первый способ, состоящий в многократном вычитании делителя из делимого.

Пусть требуется разделить 788,535 на 32,45 с точностью до 0,01. Заметим сначала, что число десятичных знаков в частном (получаемом на счетчике оборотов) при делении на арифмометре всегда равно разности между числом десятичных знаков делимого, установленного на счетчике результатов, и делителя, установленного на установочных рычагах, считая за десятичные знаки и нули, стоящие справа от установленных чисел на счетчике результатов и на рычагах арифмометра.

Это правило установки запятой в частном при делении на арифмометре (также и на других малых вычислительных машинах) можно выразить формулой

$$k_{\text{сч. об}} = k_{\text{сч. рез}} - k_{\text{уст.}},$$

где $k_{\text{сч. об}}$ — число десятичных знаков в частном, которое получится на счетчике оборотов; $k_{\text{сч. рез}}$ — число десятичных знаков в делимом, установленном на счетчике результатов; $k_{\text{уст}}$ — число десятичных знаков в делителе, установленном на рычагах арифмометра.

Деление выполняют следующим образом:

1. Приводят все части арифмометра в исходное положение и устанавливают данное число (делимое) 788,535 на установочных рычагах.

2. Вращением рукоятки переносят делимое на счетчик результатов, причем так, чтобы справа от делимого получился нуль.

3. Вращением гасительного барашка сбрасывают цифру *1*, появившуюся на счетчике оборотов.

4. При помощи гасительной планки сдвигают установочные рычаги в исходное положение и устанавливают на них (с правой стороны) делитель 32,45.

5. Так как в счетчике результатов установлено четыре десятичных знака (,5350), а на установочных рычагах два десятичных знака (,45) в частном на счетчике оборотов будет два десятичных знака, поэтому в счетчике оборотов устанавливают металлическую запятую между цифрами 2 и 3, надписанными на крышке этого счетчика.

6. Устанавливают подвижную каретку так, чтобы крайняя левая цифра делимого (7) находилась против крайней левой цифры делителя (3), как показано на фиг. 61:

— делитель на установочных рычагах **3 2 4 5**

— делимое на счетчике результатов $\boxed{7}\ \boxed{8}\ \boxed{8},\boxed{5}\ \boxed{3}\ \boxed{5}\ \boxed{0}$

Фиг. 61. Установка каретки арифмометра при делении

7. Вращают рукоятку арифмометра против хода часовой стрелки два раза. Если сделать третий оборот, то арифмометр даст сигнальный звонок, предупреждающий об излишне сделанном вычитании; кроме того, после третьего оборота, слева от делимого появятся девятки. В этом случае надо сделать один оборот в обратном направлении (по ходу часовой стрелки).

После этого, и вообще, когда против делителя на счетчике результатов останется число, меньшее делителя, подают каретку на один разряд влево и продолжают вычитание описанным образом. Эти действия продолжают до получения частного на счетчике оборотов с заданной точностью. В нашем примере на счетчике оборотов появится частное

24,30, а на счетчике результатов окажутся нули, так как данное число 788,535 делится на 32,45 без остатка.

При делении по способу вычитания можно устанавливать делимое в левой части счетчика результатов и производить деление указанным выше путем до получения в частном требуемой точности. В этом случае целую часть частного следует отделять от его дробной части по правилу значности чисел, изложенному в § 25.

§ 68. Поверка арифмометра

До производства вычислений следует убедиться в исправности арифмометра, для чего, кроме общего осмотра арифмометра, необходимо проверить правильность работы всех его механизмов.

Поверка арифмометра может быть выполнена следующими способами.

1. *Умножением произвольного числа на произвольное же число и последующим делением полученного произведения на то произвольное число, которое установлено на рычагах арифмометра.* Если арифмометр исправен, то на счетчике оборотов и на счетчике результатов должны остаться только нули.

2. *Умножением числа 37037037 на числа, кратные трем.* После умножения этого контрольного числа на три на счетчике результатов должно появиться число 111 111 111; после умножения на шесть — 222 222 222; после умножения на девять — 333 333 333 и т. д.

3. *Умножением числа 012345679 на числа, кратные 9.* После умножения этого числа на 9 на счетчике результатов должно получиться число 111 111 111; после умножения еще на 9 на счетчике оборотов должен получиться нуль, а на счетчике результатов — 222 222 222 и т. д. После умножения числа 012345679 на число 99 999 999 на счетчике результатов должно получиться число 4567887654321, а после деления этого числа на число, стоящее на рычагах, на счетчике оборотов и на счетчике результатов должны получиться нули.

При применении любого из перечисленных выше способов поверки арифмометра (лучшими из которых является последний) полезно отдельно проверить работу гасительных барашков счетчика оборотов и счетчика результатов.

§ 69. Извлечение квадратного корня на арифмометре

Существует несколько способов извлечения квадратных корней на арифмометре (или на другой вычислительной машине). Рассмотрим сначала *способ, основанный на свойстве нечетных чисел натурального ряда.*

Известно, что сумма n первых последовательных нечетных чисел равна числу слагаемых, возведенному в квадрат

$$S = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Следовательно, если из данного числа последовательно вычитать числа 1, 3, 5, 7, 9..., то число возможных вычитаний как раз и будет равно n, т. е. квадратному корню, который получится на счетчике оборотов.

Приведем примеры, начиная с простейших.

Пример 59. Извлечь квадратный корень из 49. Так как число $49 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 7^2$, то, установив его на счетчике результатов, вычитают из него последовательно нечетные числа от 1 до 13 включительно и получают на счетчике оборотов 7.

Пример 60. Извлечь квадратный корень из 169. Число 169 состоит из 13 нечетных чисел, т. е.

$$169=(1+3+5+7+9+11+13+15+17+19)+21+23+25=13^2$$

(сумма чисел в скобках составляет 100).

Устанавливают данное число на счетчике результатов с правой стороны. Каретку располагают так, чтобы стрелка-указатель разрядов приходилась против числа 2 счетчика оборотов, так как в данном числе две грани. На установочном рычаге во втором разряде (поскольку число имеет две грани) устанавливают цифру 1 и вращают рукоятку арифмометра против хода часовой стрелки; этим вычитают из 169 число 100. Чтобы вычесть остальные числа: 21, 23 и 25, удваивают число, стоящее на рычагах, т. е. рычаг с единицы передвигают на цифру 2 и подают каретку на один разряд влево. Затем на рычаге в первом разряде ставят 1 и поворачивают рукоятку арифмометра против хода часовой стрелки, вычитая, таким образом, число 21; потом на этом же рычаге ставят 3 и вычитают 23, потом ставят 5 и вычитают 25. После этого на счетчике результатов будут все нули, а на счетчике оборотов число 13.

Процесс извлечения квадратного корня можно значительно упростить, если воспользоваться правилом, изложенным в § 25, т. е. если половину (или несколько больше половины) числа цифр корня получать изложенным выше способом, а вторую половину — путем деления остатка на удвоенное значение найденной части корня, которое всегда будет на установочных рычагах. В результате на счетчике оборотов получают приближенное значение корня с ошибкой, не превышающей единицы последнего знака корня. Покажем это на примере.

Пример 61. Найти $\sqrt{64613{,}8}$ с точностью до 0,001. Действия производят в следующем порядке.

1. Устанавливают данное число на счетчике результатов так, чтобы справа от числа было пять нулей, т. е. чтобы в числе было шесть граней, так как нам нужно получить в корне шесть знаков (три до запятой и три после запятой).

2. Устанавливают каретку так, чтобы стрелка-указатель стояла против цифры 6, написанной на крышке счетчика оборотов.

3. Установочный рычаг ставят на цифру 1 (установку рычагов надо всегда начинать с разряда, на который установлена стрелка-указатель) и вычитают ее из 6, затем рычаг ставят на цифру 3 и вычитают ее из 5. Если установочный рычаг поставить на цифру 5 этого разряда и сделать вычитание, то в счетчике результатов появятся слева девятки (так как $5>2$). Появившиеся девятки надо сбросить поворотом рукоятки по ходу часовой стрелки. Затем этот установочный рычаг переводят с цифры 5 на цифру 4 и подают каретку на один разряд влево. Теперь в шестом разряде установочный рычаг будет показывать цифру 4, а на счетчике оборотов в шестом разряде будет стоять красная цифра 2. Всегда после подачи каретки на один разряд влево установочные рычаги должны показывать число, в два раза большее числа, имеющегося на счетчике оборотов; это служит контролем вычислений.

4. Установочный рычаг ставят последовательно в пятом разряде на цифры 1, 3, 5, 7, 9 и делают каждый раз вычитание чисел 41, 43, 45, 47, 49. После вычитания числа 49 звонка еще не будет и девятки слева на счетчике результатов еще не появятся. Учитывая, что следующее по порядку нечетное число будет $49+2=51$, ставят рычаг в пятом разряде на цифру 1, рычаг в шестом разряде на цифру 5 и делают вычитание, после которого появится сигнальный звонок, а слева на счетчике резуль-

татов — девятки. Сбросив девятки (поворотом рукоятки по ходу часовой стрелки), устанавливают рычаг в пятом разряде на цифру 0 и подают каретку еще на один разряд влево. Теперь на счетчике оборотов будет число 25, а на установочных рычагах число 50.

5. При этом положении каретки установочный рычаг четвертого разряда ставят на цифры 1, 3, 5, 7 и последовательно вычитают числа 501, 503, 505, 507. После этого переводят установочный рычаг четвертого разряда на цифру 8 и подают каретку на один разряд влево. Теперь на счетчике оборотов будет число 254, а на установочных рычагах — число, в два раза большее — 508.

6. Остальные цифры корня получают путем деления остатка на удвоенное значение найденной части корня (см. § 28), которое как раз и установлено на установочных рычагах. После деления на счетчике оборотов читают корень 254,192.

Более удобным способом извлечения квадратного корня, чем изложенный, является *способ последовательных приближений.*

Пусть

$$\sqrt{B} = b + x,$$

где b — приближенное значение корня, найденное по простейшей таблице или на логарифмической линейке, или, в крайнем случае, в уме, а x — некоторая поправка к корню. Из написанного выражения следует, что

$$x^2 = (\sqrt{B} - b)^2 = B + b^2 - 2b\sqrt{B},$$

откуда

$$\sqrt{B} = \frac{B + b^2}{2b} - \frac{x^2}{2b}.$$

Отбросив член, содержащий x, получим значение корня во втором приближении

$$\sqrt{B} \approx \frac{B + b^2}{2b} = b_1.$$

Для нахождения следующего приближения вычисляют

$$\sqrt{B} \approx \frac{B + b_1^2}{2b_1} = b_2 \text{ и т. д.}$$

Для нахождения квадратного корня с пятью значащими цифрами достаточно найти на обычной логарифмической линейке значение b и с помощью его определить b_1, которое уже будет иметь пять верных значащих цифр (последняя цифра может быть сомнительной). Для вычисления на арифмометре найденное число b умножают само на себя и, не сбрасывая со счетчика результатов полученного квадрата, прибавляют к нему подкоренное число B. Затем на установочных рычагах набирают число $2b$ и делят $B + b^2$ на $2b$, погасив предварительно счетчик оборотов.

Пример 62. $\sqrt{64\,613{,}8} = 255 + x$.

Тогда

$$b_1 = \frac{64\,613{,}8 + 255^2}{510} = 254{,}19,$$

то есть

$$\sqrt{64\,613{,}8} = 254{,}19.$$

§ 70. Некоторые рациональные приемы вычислений на арифмометре

Производительность работы на арифмометре (как и на других вычислительных машинах) зависит от скорости выполнения отдельных операций и от правильного выбора приемов работы.

Наибольшую производительность труда обеспечивают однотипные приемы вычислений, требующие минимального количества установок рычагов и гашения чисел, а также минимального количества поворотов рукоятки.

Так, *при умножении чисел с разным числом знаков* следует набирать на установочных рычагах число, имеющее наибольшее число знаков. *При умножении на цифры 6, 7, 8 и 9* следует пользоваться приемом «сокращенного умножения», т. е. умножать на (10 — 4), (10 — 3), (10 — 2) и (10 — 1). При этом надо вращать рукоятку по ходу часовой стрелки при умножении на единицу высшего разряда и потом против хода часовой стрелки при вычитании произведений данного числа на 4, 3, 2 и 1.

При умножении нескольких чисел на одно и то же число нужно это число считать за множимое, установить его на установочных рычагах и умножать на все данные множители. При этом нет надобности гасить сомножители и результаты, а лучше вращением рукоятки по ходу и против хода часовой стрелки подбирать на счетчике оборотов новые множители и получать на счетчике результатов новые произведения. Такой прием умножения принято называть «способом доумножения».

Деление на одно и то же число целесообразно заменять умножением на величину, обратную делителю, если деление повторяется более трех раз; (этот прием можно рекомендовать при решении систем линейных уравнений); при этом полезно пользоваться таблицей обратных величин.

Если требуется разделить несколько чисел на одно и то же число, то можно пользоваться методом подбора делимого. Для этого делитель устанавливают на установочных рычагах с правой стороны, а каретку ставят в такое положение, чтобы на счетчике оборотов получить столько знаков, сколько требуется значащих цифр в частном. Вращением рукоятки арифмометра по ходу часовой стрелки подбирают на счетчике результатов делимое или число, близкое к нему, тогда на счетчике оборотов получится частное. Например, при делении этим способом 252 на 18 поступают так. На установочных рычагах набирают делитель 18, а каретку устанавливают так, чтобы стрелка-указатель показывала второй разряд на счетчике оборотов. После первого оборота рукоятки арифмометра на счетчике результатов появится число 18; если сделать еще один оборот рукоятки, то на счетчике результатов появится число 36, большее чем 25 (первые две цифры делимого). Делают один оборот рукоятки против хода часовой стрелки и снова получают на счетчике результатов 18. Подают затем каретку на один разряд влево и вращают рукоятку по ходу часовой стрелки до тех пор, пока на счетчике результатов получится делимое 252; в это время на счетчике оборотов можно прочесть частное 14.

Необходимо отметить, что при вычислении на арифмометре на запись затрачивается около 30% времени, потребного на умножение, и около 20%, требуемого на деление двух чисел. Кроме того, промежуточные записи и повторные установки являются дополнительными источниками ошибок (см. § 82). Поэтому надо стремиться вычислять без записи промежуточных результатов и без повторных установок чисел.

Рассмотрим некоторые приемы вычислений без промежуточных записей. Например, выражение

$$\sqrt{\frac{a \cdot b \cdot c}{d}}$$

вычисляют следующим образом. Произведение $a \cdot b$ получают обычным путем на счетчике результатов, после чего гасят счетчик оборотов и на рычаги устанавливают число d. Имеющееся на счетчике результатов произведение ab делят на d и на счетчике оборотов получают $\frac{ab}{d}$. После этого, не гася счетчика оборотов, на рычаги устанавливают число c и вращают рукоятку в положительную сторону до тех пор, пока исчезнет число, стоящее на счетчике оборотов, тогда на счетчике результатов получится выражение $\frac{a \cdot b \cdot c}{d}$, из которого извлекают квадратный корень по способу, изложенному в предыдущем параграфе.

Рассмотрим еще пример вычисления на арифмометре общей арифметической средины по формуле

$$x = \frac{a_1p_1 + a_2p_2 + \cdot \cdot \cdot + a_np_n}{p_1 + p_2 + \cdot \cdot \cdot + p_n},$$

которой пользуются при вычислении вероятнейших значений неизвестных, координат центра тяжести фигур, средних уклонов полей севооборотов и при других вычислениях. Перед выполнением действий в низшем разряде на крайнем правом рычаге устанавливают единицу, в высших разрядах устанавливают число a_i так, чтобы высшие разряды суммы произведений не вышли за пределы счетчика результатов, на котором в высших разрядах получится $\sum_{i=1}^{n} a_ip_i$, а в низших разрядах $\sum_{1}^{n} p_i$. Деление производят обычным путем (методом последовательного вычитания делителя из делимого). Сумму $\sum_{1}^{n} p_i$ можно снять со счетчика результатов, установив ее на рычагах и повернув рукоятку один раз в обратном направлении; попутно этим самым будет проконтролирована установка $\sum_{1}^{n} p_i$ на рычагах арифмометра. При больших значениях a_i арифметическую средину следует вычислять по формуле

$$x = a_0 + \frac{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i},$$

где

$$\varepsilon_i = a_i - a_0.$$

Без записи промежуточных данных на арифмометре можно вычислять различные выражения, в том числе и выражение

$$\left(\frac{a \cdot b \cdot c \ldots}{d \cdot e \ldots} + km\right)\frac{q}{Q}.$$

При вычислении этого выражения поступают так:

1) обычным путем (методом последовательного вычитания) делят a на d;

2) на рычагах устанавливают число b и вращают рукоятку по ходу часовой стрелки до появления на счетчике оборотов нулей, тогда на счетчике результатов получают выражение

$$\frac{a \cdot b}{d};$$

3) число $\frac{a \cdot b}{d}$ делят на число e и затем, установив на рычаги число c, вращают по ходу часовой стрелки до появления нулей на счетчике оборотов, тогда на счетчике результатов появится выражение

$$(a \cdot b \cdot c) : (d \cdot e);$$

4) не гася счетчика результатов, умножают k на m (причем если произведение km — положительное число, то рукоятку арифмометра вращают по ходу, а если отрицательное число, то против хода часовой стрелки) и получают на счетчике результатов выражение

$$\frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e} + km;$$

5) получившееся на счетчике результатов выражение делят на Q и, установив на рычаги число q, вращают рукоятку по ходу часовой стрелки до появления на счетчике оборотов нулей, после чего на счетчике результатов получают окончательный ответ

$$\left(\frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e} + km\right)\frac{q}{Q}.$$

С учетом изложенного в настоящем параграфе, рассмотрим отдельные виды геодезических вычислений на арифмометре.

§ 71. Вычисление приращений прямоугольных координат

Приращения прямоугольных координат вычисляют по формулам:

$$\left.\begin{aligned} \Delta x &= S \cos \alpha \\ \Delta y &= S \sin \alpha \end{aligned}\right\}. \qquad (106)$$

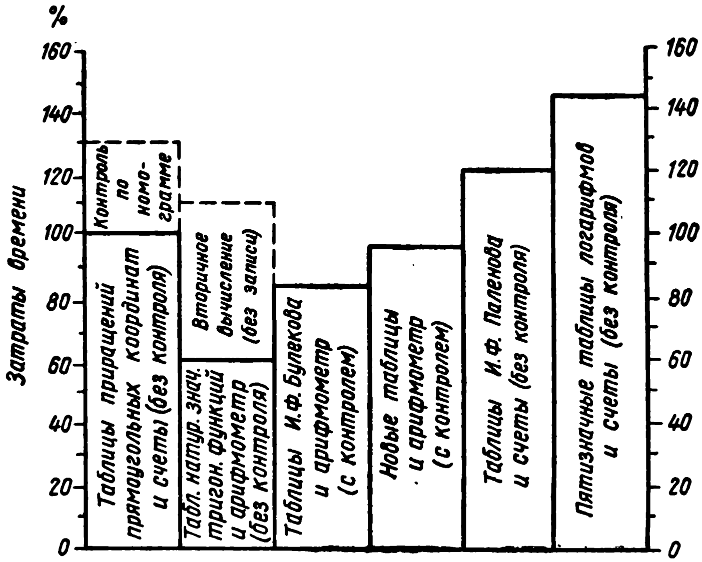
Для вычислений по формулам (106) составлены различные таблицы, облегчающие решение этой массовой геодезической задачи. На фиг. 62 приведена диаграмма затраты времени в процентах на вычисление приращений при помощи различных средств.

Диаграмма показывает, что при вычислении по таблицам логарифмов и по Таблицам приращений прямоугольных координат И. Ф. Паленова (Углетехиздат, 1954) затрачивается наибольшее количество времени.

Таблицы И. Ф. Паленова предназначены для вычисления приращений координат с точностью до 1 *мм* и применять их при обработке теодолитных ходов обычной точности явно невыгодно.

Из диаграммы также видно, что наиболее выгодно вычислять приращения координат при помощи таблиц натуральных значений тригонометрических функций и арифмометра, выполняя вычисления по способу доумножения. Этот способ заключается в следующем.

Пусть горизонтальное проложение линии $S = 211{,}48$ *м* и дирекционный угол $\alpha = 235°43',4$. Для получения Δx и Δy следует поступать так. Число 211,48 установить на рычаги арифмометра и умножить его на $\cos 235°43' = -0{,}56329$. Не гася установки и счетчиков, вращением рукоятки арифмометра против хода часовой стрелки (поскольку с увеличением угла $\cos\alpha$ убывает) умножить установленное на рычагах арифмометра число на 10 единиц последнего знака, соответствующих $0',4$, и на счетчике результатов получится $\Delta x = -119{,}10$. Не гася установки и счетчиков, вращением рукоятки арифмометра (после соответствующей установки каретки) по ходу и против хода часовой стрелки, на счетчике оборотов получить число 0,82626, выражающее $\sin 235°43'$. После этого, не гася счетчиков, умножить установленное на рычагах число на 7 единиц последнего знака, вращая рукоятку по ходу часовой стрелки, на счетчике результатов получится $\Delta y = -174{,}75$.



Фиг. 62. Диаграмма затрат времени на вычисление приращений при помощи различных средств

Применяя описанный прием, мы выигрываем время тем, что не гасим счетчики, и попутно с основными вычислениями на арифмометре находим поправки в приращения на десятые доли минуты дирекционного угла.

Приращения, подсчитанные по таблицам приращений прямоугольных координат, нуждаются в контроле, на который дополнительно уходит около 30% затрачиваемого на вычисления времени (даже тогда, когда осуществляется лишь приближенный контроль с помощью номограмм или логарифмической линейки). Столько же времени нужно затратить на приближенный контроль и при вычислении приращений с помощью таблиц логарифмов, таблиц натуральных значений тригонометрических функций и таблиц И. Ф. Паленова. Поэтому более выгодно применять таблицы, которые дают возможность вычислять и одновременно контролировать величины приращений.

Перед вычислением приращений необходимо проверить дирекционные углы и румбы, а также запись в ведомость длин линий (горизонтальных проложений), так как ошибки в длинах линий и в дирекционных углах контрольными формулами, применяемыми при вычислении приращений, не выявляются.

При вычислении приращений на арифмометре грубая ошибка может возникнуть при:

1) установке значений длин линий на рычаги арифмометра;
2) выборе значений функций из таблиц;
3) умножении на арифмометре;
4) снятии величин Δx и Δy со счетчика результатов и записи приращений в ведомость;
5) постановке запятой, отделяющей целую часть от дробной, в приращении;
6) перестановке местами Δx и Δy и в знаках приращений.

«Таблицы для вычисления приращений прямоугольных координат на арифмометре (с контролем)» И. Ф. Булекова, к сожалению, не дают полного контроля вычисленных по ним приращений и не позволяют использовать способ доумножения. Таблицы Булекова содержат значения функций:

$$\cos\alpha; \quad \sin\alpha - \cos\alpha; \quad 1 - \sin\alpha; \quad \operatorname{tg}\alpha,$$

и приращения по этим таблицам вычисляют по формулам

$$\Delta x = S\cos\alpha,$$

$$\Delta y = S\cos\alpha + S(\sin\alpha - \cos\alpha).$$

Для контроля приращений пользуются формулой

$$S = S\sin\alpha + S(1 - \sin\alpha). \tag{107}$$

По таблицам Булекова приращение Δx вычисляют обычным путем и записывают в ведомость, после чего, не гася счетчика результатов, но погасив счетчик оборотов, умножают установленное на рычагах арифмометра значение S на значение $(\sin\alpha - \cos\alpha)$, выбранное из таблиц, и на счетчике результатов получают значение Δy, которое записывают в ведомость. Затем, не гася счетчика результатов, но погасив счетчик оборотов, умножают S на значение $(1 - \sin\alpha)$, и на счетчике результатов в соответствии с формулой (107) получают значение S, которое должно соответствовать значению, имеющемуся в координатной ведомости.

Нетрудно видеть, что при вычислении приращений по таблицам Булекова выявляются только первые три названные ошибки, и то не всегда, так как неправильность выбора строки не обнаруживается.

Отметим, что ошибки в приращениях, вызванные ошибками в знаках приращений и перестановкой их местами, выявляются весьма просто (беглым просмотром), ошибки же, допущенные при чтении приращений на счетчике и их записи (причины 4 и 5) без дополнительных вычислений, часто выявить трудно.

Более полный контроль вычисления приращений координат можно получить по таблицам, составленным по типу чехословацких, которые даны для функции

$$\varepsilon = 1 + |\sin\alpha| + |\cos\alpha|.$$

Эти таблицы используются одновременно с таблицами натуральных значений тригонометрических функций; на фиг. 62 они названы новыми таблицами. Пользуясь такими таблицами, приращения координат на арифмометре вычисляют так:

1. Горизонтальное проложение S устанавливают на рычагах арифмометра и умножают его на значение $\cos\alpha$, взятое из таблиц. Получившееся на счетчике результатов значение Δx записывают в ведомость.

2. Не гася ни счетчика результатов, ни счетчика оборотов, вращением рукоятки арифмометра изменяют значение $\cos\alpha$ на значение $\sin\alpha$ и на счетчике результатов получают значение Δy, которое записывают в ведомость.

3. Не гася счетчиков, значение $\sin\alpha$ изменяют на значение ε и на счетчике результатов получают сумму

$$S + |\Delta x| + |\Delta y|,$$

из которой вычитают абсолютные значения Δx и Δy. Если на счетчике результатов после этого останется значение S, то все вычисления и записи сделаны правильно; не выявляются только ошибки в знаках приращений и перестановке их местами.

Производительность труда при вычислении указанным приемом приращений значительно увеличивается, если вычисления производить на клавишных арифмометрах, или на полуавтоматических, или на автоматических вычислительных машинах.

Существует много других формул для контроля приращений прямоугольных координат. В некоторых странах вычисление приращений контролируют по формулам*

$$\left.\begin{aligned} \Delta x + \Delta y &= S\sqrt{2}\sin(\alpha + 45^\circ) \\ \Delta x - \Delta y &= S\sqrt{2}\cos(\alpha + 45^\circ) \end{aligned}\right\}. \tag{108}$$

Практически достаточно использовать одну из этих формул, например, первую. Для этого необходимо иметь таблицы значений $\sqrt{2}\sin(\alpha + 45^\circ)$. В этом случае вычисление и контроль приращений Δx и Δy при работе на рычажном арифмометре можно выполнять так:

1. Значение длины линии S установить на рычаги и для контроля установки одним поворотом рукоятки по ходу часовой стрелки перенести его на счетчик результатов.

2. Умножить S на $\cos\alpha$ и полученное значение Δx с его знаком записать в ведомость.

3. Не гася счетчиков и установки, изменить значение $\cos\alpha$ на значение $\sin\alpha$ и полученное значение Δy и его знак записать в ведомость.

4. Не гася счетчиков и установки, изменить значение $\sin\alpha$ на значение $\sqrt{2}\sin(\alpha + 45^\circ)$ и на счетчике результатов получить алгебраическую сумму приращений $(\Delta x + \Delta y)$.

5. Погасить установку и на рычагах набрать Δy (или Δx) и одним поворотом рукоятки получить на счетчике результатов Δx (или Δy). Если полученное значение приращения с точностью до одной единицы последнего знака совпадает с записанным значением, то вычисления и записи сделаны правильно.

При работе на клавишных вычислительных машинах, имеющих окна для контроля установленного числа (в нашем случае S), порядок вычислений несколько изменится и упростится (не надо выполнять пункт 1 изложенного порядка вычислений).

При вычислении на машинах, имеющих окна контроля для установки значений S, удобно вычислять приращения по таблицам натуральных значений тригонометрических функций, пользуясь для контроля одной из следующих формул:

$$\Delta y = \Delta x \operatorname{tg} \alpha,$$

* 1) Z. Vermessungswesen, № 2, 1933, 39—41;
2) Österr. Z. Vermessungswesen, 1954, 42, № 5, Mitteilungsblatt, 31—33.

или

$$\Delta x = \Delta y \operatorname{ctg} \alpha,$$

при этом если одно из приращений по абсолютному значению близко к нулю, а другое — к значению S, то при $|\Delta x| > |\Delta y|$ лучше применять первую формулу, а при $|\Delta x| < |\Delta y|$ — вторую.

§ 72. Решение обратной геодезической задачи на плоскости

Решение обратной геодезической задачи на плоскости обычно выполняют по формулам (фиг. 63)

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \text{ или } \operatorname{ctg} \alpha_{AB} = \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} \\ S = \frac{y_B - y_A}{\sin \alpha} = \frac{x_B - x_A}{\cos \alpha} \end{aligned}\right\}, \qquad (109)$$

или по формулам

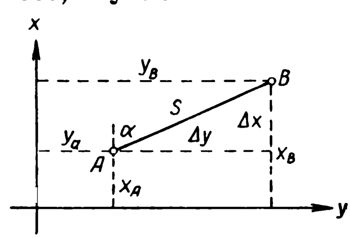
$$\left.\begin{aligned} S = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \\ \cos \alpha_{AB} = \frac{x_B - x_A}{S}, \quad \sin \alpha_{AB} = \frac{y_B - y_A}{S} \end{aligned}\right\} \qquad (110)$$

Пример решения обратной геодезической задачи по формулам (110) приведен в табл. 30.

Таблица 30

x' $x'-x$ x	y' $y'-y$ y	$\cos\alpha$ S $\sin\alpha$	α
+ 540,00 + 339,79 + 200,21	+ 400,31 + 582,59 — 182,28	0,503 81 674,44 0,863 81	59°44′,9

Значение длины линии S (табл. 30) получают на счетчике оборотов без промежуточных записей. Для этого число 339,79 умножают само на себя. Затем, погасив число на счетчике оборотов и на установочных рычагах, но не сбрасывая со счетчика результатов полученного квадрата разности абсцисс, умножают число 582,59 также само на себя. После этих действий на счетчике результатов получают сумму квадратов разностей координат. Погасив число, стоящее на счетчике оборотов и установочных рычагах, извлекают квадратный корень по способу, описанному в § 69.



Фиг. 63. Обратная геодезическая задача

Значения $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ получают путем деления разностей координат на длину линии S, применяя способ подбора делимого. Для этого значение $S = 674{,}44$ набирают на установочных рычагах и ставят каретку так, чтобы стрелка-указатель показывала шестой разряд счетчика оборотов; при такой начальной установке каретки в частном можно получить шесть значащих цифр. Сначала на счетчике результатов подбирают число, близкое к 339,79, и в счетчике оборотов читают частное 0,503 810. Затем, не гася делимого, делителя и частного, подбирают на счетчике результатов число, близкое к 582,59, и на счетчике оборотов получают частное 0,863 813.

Число десятичных знаков определяют по разности десятичных знаков делимого, получившегося на счетчике оборотов, и делителя, стоящего на установочных рычагах.

Иногда для контроля применяют формулу:

$$\mathrm{tg}(45^\circ + \alpha_{AB}) = \frac{\Delta x_{AB} + \Delta y_{AB}}{\Delta x_{AB} - \Delta y_{AB}} \tag{111}$$

Применение формулы (111) не контролирует правильности нахождения приращений (разностей координат), и ошибка в приращениях при применении формул (109) или (110) остается незамеченной.

Для *контроля и ускорения вычисления* на арифмометре (или на другой какой-либо малой вычислительной машине) формулы (109) перепишем в таком виде:

$$\mathrm{tg}\,\alpha_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y_{AB}}{\Delta x_{AB}}, \tag{112}$$

$$S = \sec\alpha_{AB}\,x_B - \sec\alpha_{AB}\,x_A, \tag{113}$$

$$S = \mathrm{cosec}\,\alpha_{AB}\,y_B - \mathrm{cosec}\,\alpha_{AB}\,y_A. \tag{114}$$

Обратную геодезическую задачу можно решать по формулам (112), (113) и (114) в следующем порядке.

1. По формуле (112) вычислить $\mathrm{tg}\,\alpha_{AB}$ и найти α_{AB} по таблицам натуральных значений тригонометрических функций.

2. По формуле (113) вычислить значение S без промежуточных записей, отбрасывая в значениях x_B и x_A одинаковые слева цифры.

3. Погасить оба счетчика и вычислить значение S по формуле (114).

Если оба значения S в пределах точности вычислений будут совпадать, то все вычисления, в том числе и нахождение приращений Δx_{AB} и Δy_{AB}, а также и все выборки из таблиц, выполнены правильно.

Вычисление по формулам (112) и (113) можно упростить, применяя прием умножения, который можно пояснить на следующем примере.

Пусть требуется найти произведение $\sec\alpha_{AB}(x_B - x_A) = 1{,}98487 \times \times (35\,540{,}00 - 35\,200{,}21)$. Значение x_A в схеме вычислений (табл. 31) подпишем под значение x_B.

$$x_B = 35\,540{,}00,$$
$$x_A = 35\,200{,}21.$$

На рычаги арифмометра установим значение $\sec\alpha_{AB}$. Перемножая цифры каждого разряда, будем вращать рукоятку арифмометра по ходу часовой стрелки столько раз, на сколько верхняя цифра больше нижней, и против хода столько раз, на сколько нижняя цифра больше верхней. На счетчике оборотов получится число $340{,}\bar{2}\bar{1}$, умножение на которое соответствует умножению на действительную разность $+339{,}79$ (цифры, отмеченные сверху черточкой, будут обозначены красным цветом, а остальные — черным). На счетчике результатов получится значение $S = 674{,}44$.

Опыт показывает, что применение описанного приема вычисления на арифмометре по формулам (112), (113) и (114) с полным контролем требует примерно столько же времени, сколько при вычислении по формулам (109) (с неполным контролем), и дает увеличение производительности труда примерно в два раза по сравнению с вычислением по формулам (109) и (111).

В табл. 31 приведены три примера решения обратной геодезической задачи по формулам (112), (113) и (114) с разной точностью определения дирекционных углов.

Таблица 31

Порядок действий	Формулы и обозначения	Линия $A-B$	Линия A_1-B_1	Линия* A_2-B_2
1	y_B	64 764,87	49 408,24	59 750,64
3	y_A	64 182,28	49 400,31	40 904,62
5	y_B-y_A	+ 582,59	+ 7,93	+ 18 846,02
9	cosec α_{AB}	+ 1,15766	+ 55,494	+ 1,1540679
11	S	674,44	440,07	21 749,59
2	x_B	35 540,00	86 100,01	6 193 556,72
4	x_A	35 200,21	86 540,00	6 182 699,83
6	x_B-x_A	+ 339,79	— 439,99	+ 10 856,89
10	sec α_{AB}	+ 1,98487	—1,00016	+ 2,003298
12	S	674,44	440,06	21 749,59
7	tg α_{AB}	+ 1,71456	—0,0180231	+1,7358581
8	Румб. угол	CB: 59°44′51″	$ЮB$: 1°01′57″,1	CB: 60°03′16″,01
13	Дирекционный угол	59°44′51″	178°58′02″,9	60°03′16″,01
14	S_{ok}	674,44	440,06	21 749,59

* Данные для определения длины и направления линии A_2-B_2 взяты из книги Б. Н. Рабиновича «Практикум по высшей геодезии», М., Геодезиздат, 1951, стр. 210.

Дирекционные углы линии $A-B$ и линии A_1-B_1 определены по 5-значным таблицам, а дирекционный угол линии A_2-B_2 — по 7-значным таблицам натуральных значений тригонометрических функций проф. Л. С. Хренова. Дирекционный угол линии A_1-B_1 близок к 180° (румбический угол около 1°), поэтому значение cosec $\alpha_{A_1B_1}$ найдено из выражения (см. табл. 25)

$$\operatorname{cosec} \alpha_{A_1B_1} = \frac{206\ 276''}{3717'',1} = 55,4937.$$

Остановимся теперь на вопросе о том, какими должны быть таблицы натуральных значений тригонометрических функций, чтобы они по своей точности могли заменить соответствующие таблицы логарифмов чисел и тригонометрических функций.

Напишем функции

$$\varphi_1 = \lg \operatorname{tg} \alpha; \quad \varphi_2 = \operatorname{tg} \alpha.$$

Дифференцируя эти выражения по α и заменяя дифференциалы ошибками, будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\Delta \lg \operatorname{tg} \alpha &= \frac{M}{\sin \alpha \cos \alpha} \cdot \frac{\Delta\alpha}{\rho} \\ \Delta \operatorname{tg} \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\Delta\alpha}{\rho}\end{aligned}\right\}, \tag{115}$$

где $M = 0{,}434$, а $\Delta\alpha$ — ошибка угла α.

Допустим, что n-значные таблицы $\lg \operatorname{tg} \alpha$ заменяются n-значными таблицами $\operatorname{tg} \alpha$, т. е. число знаков в мантиссе логарифма равно числу десятичных знаков в $\operatorname{tg} \alpha$, тогда

$$(\Delta \lg \operatorname{tg} \alpha)_{max} = (\Delta \operatorname{tg} \alpha)_{max} = 0{,}5 \cdot 10^{-n}.$$

Учитывая это, можно приравнять и правые части равенств (115). Тогда, обозначая ошибку угла, определяемого по $\lg \operatorname{tg} \alpha$ через $\Delta\alpha_1$, а ошибку угла, определяемого по $\operatorname{tg} \alpha$ — через $\Delta\alpha_2$, можем написать

$$\frac{\Delta\alpha_1}{\Delta\alpha_2} = 2{,}303 \operatorname{tg} \alpha. \tag{116}$$

Из равенства (116) видно, что $\Delta\alpha_1 \geqslant \Delta\alpha_2$, если $2{,}303 \operatorname{tg} \alpha \geqslant 1$, т. е. если $\alpha \geqslant 23°30'$. В этом случае n-значные таблицы логарифмов без снижения точности можно заменить n-значными таблицами натуральных значений тригонометрических функций.

Из равенств (115) и (116) следует

$$\frac{\Delta\alpha_1}{\rho} = \frac{\Delta \lg \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha \cos \alpha}{M}, \quad \frac{\Delta\alpha_2}{\rho} = \Delta \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \alpha.$$

Считая, что $(\Delta\alpha_1)_{max} = (\Delta\alpha_2)_{max}$ можно написать

$$\frac{(\Delta \lg \operatorname{tg} \alpha)_{max} \sin \alpha \cos \alpha}{M} = (\Delta \operatorname{tg} \alpha)_{max} \cos^2 \alpha.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \alpha = 0{,}4343 \frac{(\Delta \operatorname{tg} \alpha)_{max}}{(\Delta \lg \operatorname{tg} \alpha)_{max}} \tag{117}$$

Для таблиц натуральных значений и таблиц логарифмов с одинаковым числом n десятичных знаков

$$(\Delta \operatorname{tg} \alpha)_{max} = (\Delta \lg \operatorname{tg} \alpha)_{max},$$

тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = 0{,}4343.$$

При уменьшении или увеличении $\operatorname{tg} \alpha$ в 10, 100 и т. д. раз, для сохранения равенства (117) следует уменьшить или увеличить $(\Delta \operatorname{tg} \alpha_{max})$ в 10, 100 и т. д. раз, что будет соответствовать таблицам натуральных значений с $n + 1$, $n + 2$ и т. д. десятичными знаками.

Учитывая это, получим следующее число десятичных знаков в значении $\operatorname{tg} \alpha$ для различных значений угла α:

$0°15' \leqslant \alpha \leqslant 2°30'$	$n + 2$	десятичных знаков
$2\ 30 \leqslant \alpha \leqslant 23\ 30$	$n + 1$	» »
$23\ 30 \leqslant \alpha \leqslant 77\ 00$	n	» »
$77\ 00 \leqslant \alpha \leqslant 88\ 40$	$n - 1$	» »
$88\ 40 \leqslant \alpha \leqslant 89\ 50$	$n - 2$	» »

Это соответствует таблицам, составленным (для определенных интервалов углов) по принципу одинаковой относительной ошибки, т. е. таблицам, имеющим для разных значений углов разное количество десятичных знаков в значениях тригонометрических функций.

Пятизначные и семизначные таблицы проф. Л. С. Хренова составлены, исходя из принципа одинакового числа значащих цифр, и чтобы эти таблицы полностью заменили по своей точности пяти- и семизначные таблицы логарифмов, в них необходимо ввести некоторые изменения.

При определении углов $\alpha < 2°30'$, т. е. когда приближенно $20\ \Delta y < \Delta x$, во всех случаях следует применять формулу

$$\operatorname{ctg} \alpha_{AB} = \frac{\Delta x_{AB}}{\Delta y_{AB}} \tag{118}$$

и для нахождения угла α пользоваться табличками с шагом аргумента в $1''$ или в $10''$, имеющимися во всех современных таблицах натуральных значений тригонометрических функций.

Более точно (не прибегая к интерполяционным формулам) значения малых углов находят, пользуясь выражением $\alpha'' \operatorname{ctg} \alpha$, которое как известно, получается из разложения $\operatorname{ctg} \alpha$ в ряд. Для малых углов, находящихся в пределах $0° \leqslant \alpha \leqslant 0°15'$, с точностью до единицы последнего знака (см. табл. 25) имеет место равенство

$$\alpha'' \operatorname{ctg} \alpha = 206264''.$$

Мы проанализировали ошибки определения угла по $\lg \operatorname{tg} \alpha$ и по $\operatorname{tg} \alpha$. Аналогичным путем можно сделать анализ и для других тригонометрических функций. В частности отметим, что значения S по формулам (113) и (114) будут найдены более точно, чем по формулам (109), так как табличные значения $\sec \alpha$ и $\operatorname{cosec} \alpha$ имеют больше верных значащих цифр, а значит меньшую относительную ошибку, чем значения $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$. При малых значениях углов α следует пользоваться при определении $\operatorname{cosec} \alpha$ таблицами значений выражения

$$\alpha'' \operatorname{cosec} \alpha$$

или специальными табличками с шагом аргумента в 1 или $10''$.

§ 73. Сокращенный способ вычисления площади многоугольника по координатам его вершин

Из многих способов вычисления площадей на арифмометре остановимся на способе, который в геодезической литературе иногда называют способом «елочки»*. При вычислении площади этим способом число действий на арифмометре уменьшается, по сравнению с обычным способом, на 40%; он особенно выгоден в том случае, когда координаты вершин многоугольника имеют один и тот же знак (абсциссы могут быть положительны, а ординаты отрицательны или наоборот).

Напишем общеизвестные формулы, выражающие площадь многоугольника по координатам его вершин

$$2P = \sum_{1}^{n} x_i (y_{i+1} - y_{i-1}),$$

$$2P = \sum_{1}^{n} y_i (x_{i-1} - x_{i+1}).$$

* Этот способ впервые описал проф. В. В. Попов в журнале «Украинский Землевпорядник», № 1 за 1927 г.

В первой из написанных формул раскроем знак суммы и напишем сначала слагаемые с нечетными показателями для абсцисс, а потом с четными. Тогда, применительно, например, к пятиугольнику, будем иметь

$$2P = x_1 (y_2 - y_5) + x_3 (y_4 - y_2) + x_5 (y_1 - y_4) +$$
$$+ x_2 (y_3 - y_1) + x_4 (y_5 - y_3).$$

В написанном выражении ординаты расположены в определенном порядке, являясь поочередно уменьшаемым и вычитаемым. Это дает возможность вычислить площадь $2P$ при помощи арифмометра, применяя следующий порядок.

1. Передвинув установочные рычаги на нули, устанавливаем вращением рукоятки и соответствующим передвижением каретки на счетчике оборотов число y_5.

2. На установочных рычагах выбираем число x_1 и вращением рукоятки по ходу и против хода часовой стрелки изменяем число y_5, стоящее на счетчике оборотов, на число y_2. Тогда на счетчике результатов получится число, соответствующее выражению

$$x_1 (y_2 - y_5),$$

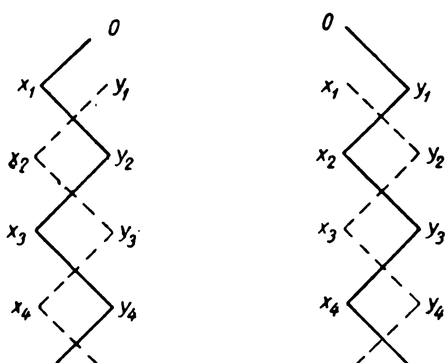
или его дополнение до 10^k, если $y_2 < y_5$, где k — число знаков до запятой.

3. Не гася счетчиков, набираем на установочных рычагах число x_3 и вращением рукоятки заменяем на счетчике оборотов число y_2 числом y_4. После этого на счетчике результатов получится число, соответствующее выражению

$$x_1 (y_2 - y_5) + x_3 (y_4 - y_2).$$

4. Продолжаем работу таким циркульным порядком до тех пор, пока на счетчике результатов будет получено значение двойной площади, при этом для нашего случая (для пятиугольника) на счетчике оборотов будет стоять число y_5, а на установочных рычагах — x_4.

Для контроля аналогично вычисляем площадь по другой формуле, набирая на установочных рычагах значения ординат и подбирая на счетчике оборотов соответствующие значения абсцисс. Если абсциссы и ординаты — положительные числа, то на счетчике результатов будет получено не число $2P$, а его дополнение до 10^k. Схематически вычисление площади этим способом представлено на фиг. 64.



Фиг. 64. Схема вычисления площади на арифмометре

Если число вершин многоугольника четное, то для сохранения описанного порядка вычисления площади необходимо координаты одной из вершин, например последней точки, написать два раза подряд и включить их в вычисление как координаты точки $n+1$, отчего площадь не изменится.

В табл. 32 приводится пример для вычисления площади шестиугольника описанным способом.

Таблица 32

№ точек	x	y	Формулы
1	+ 101,0	+ 130,4	$2P = x_1(y_2 - y_6) + x_3(y_4 - y_2) +$
2	+ 200,3	+ 59,3	$+ x_5(y_6 - y_4) + x_6(y_1 - y_6) +$
3	+ 301,2	+ 168,4	$+ x_2(y_3 - y_1) + x_4(y_5 - y_3) +$
4	+ 231,5	+ 603,3	$+ x_6(y_6 - y_5)$.
5	+ 300,0	+ 301,6	$-2P = y_1(x_2 - x_6) + y_3(x_4 - x_2) +$
6	+ 200,2	+ 120,4	$+ y_5(x_6 - x_4) + y_6(x_1 - x_6) +$
6	+ 200,2	+ 120,4	$+ y_2(x_3 - x_1) + y_4(x_5 - x_3) +$
			$+ y_6(x_6 - x_5)$.

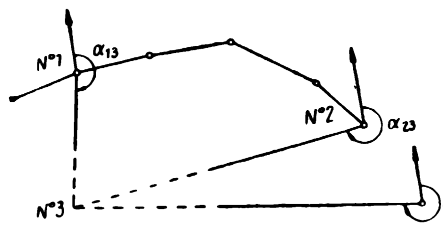
$2P =$ 16 984,66,

$-2P =$ ...983 015,34 (контрольная)

$2P =$ 1,70 *га*.

§ 74. Вычисление прямоугольных координат пункта, определяемого прямой засечкой

Определение координат боковых пунктов методом прямой засечки широко применяется при создании съемочной сети. Для вычисления координат боковых пунктов предложено много различных формул. Приведем пример (фиг. 65) вычисления координат бокового пункта по формулам тангенсов дирекционных углов направлений на определяемую точку.



Фиг. 65. Прямая засечка

Рабочие формулы, удобные для вычислений на арифмометре с минимальным количеством записей, представим в виде

$$x_3 = \frac{x_1 \operatorname{tg} \alpha_{13} - x_2 \operatorname{tg} \alpha_{23} + (y_2 - y_1)\,1}{\operatorname{tg} \alpha_{13} - \operatorname{tg} \alpha_{23}};$$

$$y_3 = (x_3 - x_1) \operatorname{tg} \alpha_{13} + y_1;$$

$$y_3 = (x_3 - x_2) \operatorname{tg} \alpha_{23} + y_2 \text{ (контроль).}$$

Решение прямой засечки на арифмометре рекомендуется выполнять в следующем порядке (табл. 33):

1. В схему вписать исходные данные x_1, y_1, x_2, y'_2, α_{13} и α_{23}.

2. По таблицам натуральных значений тригонометрических функций найти $\operatorname{tg} \alpha_{13}$ и $\operatorname{tg} \alpha_{23}$, записать их в схему и найти алгебраическую разность $\operatorname{tg} \alpha_{13} - \operatorname{tg} \alpha_{23}$.

3. Вычислить на арифмометре x_3 без промежуточных записей, при этом разность $(y_2 - y_1)$ следует прибавлять по способу, изложенному в § 72.

4. Дважды для контроля вычислить y_3 (без промежуточных записей). Произведения $(x_3 - x_1) \operatorname{tg} \alpha_{13}$ и $(x_3 - x_2) \operatorname{tg} \alpha_{23}$ рекомендуется получать в один прием (см. § 72).

Таблица 33

Название пунктов	α_{13} x_1 x_2 x_3	$\operatorname{tg}\alpha_{13}-\operatorname{tg}\alpha_{23}$ $\operatorname{tg}\alpha_{13}$ $\operatorname{tg}\alpha_{23}$ y_3	α_{23} y_1 y_2 y_3 (контроль)
	183°52′40″	+ 4,527 81	282°38′25″
№ 1	67 414,98	+ 0,067 78	53 188,63
№ 2	64 002,19	— 4,460 03	56 574,70
№ 3	64 801,12	53 011 46	53 011,45
	339°21′30″	— 2,779 38	67°24′10″
№ 1	63 075,88	— 0,376 705	53 661,37
№ 2	63 825,62	+ 2,402 67	53 667,37
№ 3	64 801,43	53 011,43	53 011,39

Повторное вычисление ординаты y_3 контролирует только правильность арифметических действий и не контролирует правильность наблюдений, выписку исходных данных, определение α_1 и α_2 и выборку из таблиц $\operatorname{tg}\alpha_{13}$ и $\operatorname{tg}\alpha_{23}$. Для контроля этих действий и повышения точности координаты точки № 3 необходимо вычислять по дирекционным углам двух других направлений или по дирекционному углу третьего направления и одному из дирекционных углов прежних направлений.

При наличии арифмометра, имеющего передачу десятков в счетчике оборотов и приспособления для переключения направления хода счетчика оборотов (см. § 77), координаты пункта, определяемого прямой засечкой, более быстро можно вычислять по формулам

$$y_2 = y_1 + \operatorname{tg}\alpha_{13}(x_2 - x_1) + (\operatorname{tg}\alpha_{13} - \operatorname{tg}\alpha_{23})(x_3 - x_2);$$

$$y_3 = y_2 - \operatorname{tg}\alpha_{23}(x_2 - x_3),$$

которые легко получаются из написанных выше формул. В этом случае порядок действий следующий:

1. На счетчик результатов в соответствующем разряде устанавливают значение y_1, а на счетчик оборотов значение x_1.
2. На рычаги устанавливают значение $\operatorname{tg}\alpha_{13}$ и вращением рукоятки арифмометра изменяют значение x_1 на значение x_2.
3. Не гася счетчиков, на рычаги устанавливают значение $(\operatorname{tg}\alpha_{13}-\operatorname{tg}\alpha_{23})$ и на счетчике результатов подбирают значение y_2, после чего значение x_3 появится на счетчике оборотов.
4. Не гася счетчиков, на рычаги устанавливают значение $\operatorname{tg}\alpha_{23}$ и при такой установке имеющееся на счетчике оборотов значение x_3 изменяют на значение x_2; после чего на счетчике результатов читают значение y_3.

§ 75. Вычисление прямоугольных координат пункта, определяемого обратной засечкой

Сущность задачи заключается в определении координат четвертой точки по координатам трех данных точек и измеренным двум углам β и γ (фиг. 66).

Первое решение обратной засечки дал голландский математик Снеллиус в 1614 г. Более удачное решение этой задачи предложил в

1692 г. французский математик Потенот. Поэтому задачу по определению точки обратной засечкой иногда называют задачей Снеллиуса — Потенота или просто задачей Потенота.

В настоящее время у нас и за рубежом предложено много различных формул для решения задачи Потенота.

При вычислении на арифмометре наиболее быстро и с контролем задача решается по следующим формулам

$$\operatorname{tg} \alpha_{14} = \frac{(y_2 - y_1)\operatorname{ctg}\beta + (y_1 - y_3)\operatorname{ctg}\gamma + (x_3 - x_2)\cdot 1}{(x_2 - x_1)\operatorname{ctg}\beta + (x_1 - x_3)\operatorname{ctg}\gamma + (y_2 - y_3)\cdot 1} = \frac{\Delta y^\circ_{14}}{\Delta x^\circ_{14}};$$

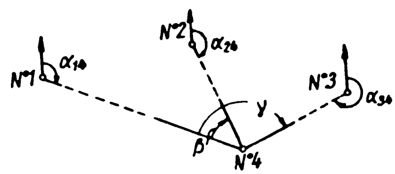
$$\alpha_{24} = \alpha_{14} + \beta;$$

$$\alpha_{34} = \alpha_{14} + \gamma;$$

$$x_4 = \frac{x_1 \operatorname{tg}\alpha_{14} - x_2 \operatorname{tg}\alpha_{24} + (y_2 - y_1)\cdot 1}{\operatorname{tg}\alpha_{14} - \operatorname{tg}\alpha_{24}};$$

$$y_4 = (x_4 - x_1)\operatorname{tg}\alpha_{14} + y_1;$$

$$y_4 = (x_4 - x_3)\operatorname{tg}\alpha_{34} + y_3 \text{ (контроль)}.$$



Фиг. 66. Обратная засечка

Решение задачи по этим формулам рекомендуется выполнять в следующем порядке:

1. В схему вычислений (табл. 34) вписать исходные данные — координаты: x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3 и измеренные углы β и γ.

2. Найти по таблицам ctg β и ctg γ.

Таблица 34*

Номер и название пункта	x_1 x_2 x_3 x_4	y_1 y_2 y_3 y_4 y_4	ctg β ctg γ Δx°_{14} Δy°_{14}	α_{14} β γ α_{24} α_{34}	tg α_{14} tg α_{24} tg α_{14}—tg α_{24} tg α_{34}
1. М. Корь	49 326,1	33 321,1		107°41′03″	—3,136 398
2. Дедово	51 864,4	34 024,6	+0,850 799	49 36 32	—0,418 452
3. Акино	49 052,9	36 940,2	—1,659 574	148 55 42	—2,717 946
4. Оп. 1968	48 676,5	35 358,6	— 1209,413	157 17 35	
		35 358,7	+ 3793,201	256 36 45	+4,20162

* Исходные данные для задачи взяты из «Краткого руководства по вычислению рабочих координат опознаков», В. В. Чичигина, 1951, стр. 33.

3. Без промежуточных записей вычислить Δx°_{14} с необходимым числом значащих цифр. При этом значение Δx°_{14} лучше всего получить как сумму трех произведений.

4. Вычислить Δy°_{14} и разделить его на значение Δx°_{14}. Значение Δy°_{14} надо получать в высших разрядах счетчика результатов, чтобы значение tg α_{14} можно было найти с необходимым количеством значащих цифр.

5. По tg α_{14} найти по таблицам дирекционный угол α_{14} и, прибавляя к нему измеренные углы β и γ, получить α_{24} и α_{34}. Затем по таблицам найти tg α_{34} или tg α_{24} для контроля вычислений и образовать разность tg α_{14} — tg α_{24}.

6. Без промежуточных записей вычислить x_4 и дважды для контроля вычислить y_4.

Для контроля искомую абсциссу можно вычислять еще по формуле

$$x_4 = \frac{x_1 \operatorname{tg} \alpha_{14} - x_3 \operatorname{tg} \alpha_{34} + (y_3 - y_1) \cdot 1}{\operatorname{tg} \alpha_{14} - \operatorname{tg} \alpha_{34}},$$

или

$$x_4 = \frac{x_2 \operatorname{tg} \alpha_{24} - x_3 \operatorname{tg} \alpha_{34} + (y_3 - y_2) \cdot 1}{\operatorname{tg} \alpha_{24} - \operatorname{tg} \alpha_{34}}.$$

Однако эти формулы контролируют только вычислительный процесс, который достаточно проверяется путем двойного вычисления y_4. Для полного контроля необходимо измерить в данной точке не два, а три угла, для чего надо иметь четыре точки с известными координатами и дважды решить задачу Потенота. Таким путем проверяются исходные данные и путем вычисления средних значений повышается точность определения координат искомой точки.

§ 76. Перевычисление местных прямоугольных координат в одну систему

При составлении сборных планов на землепользования колхозов и при составлении карт по материалам ведомственных съемок приходится перевычислять местные координаты (с разным началом и ориентировкой) в одну общую систему координат.

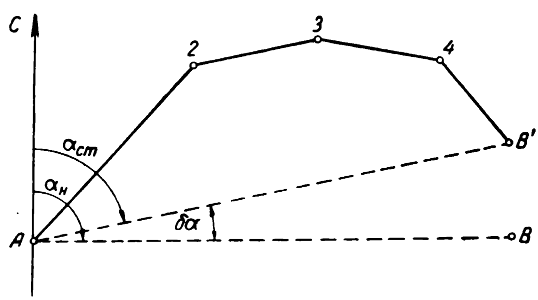
Эту задачу можно решать по формулам

$$(X_{i+1} - X_i) = \cos \delta\alpha\,(x_{i+1} - x_i) - \sin \delta\alpha\,(y_{i+1} - y_i),$$
$$(Y_{i+1} - Y_i) = \sin \delta\alpha\,(x_{i+1} - x_i) + \cos \delta\alpha\,(y_{i+1} - y_i). \qquad (119)$$

$$X_{i+1} = X_i + (X_{i+1} - X_i),$$
$$Y_{i+1} = Y_i + (Y_{i+1} - Y_i), \qquad (120)$$

где X и Y — координаты точек в общей системе (новые координаты); x и y — местные (старые) координаты; $\delta\alpha$ — разность дирекционных углов одной и той же линии в новой и старой системах координат.

Допустим, что требуется перевычислить местные координаты точек A, 2, 3, 4, B' хода между узловыми точками A и B (фиг. 67), координаты которых известны также в общей системе. При совмещении первой точки хода с узловой точкой A последняя точка хода вследствие разной ориентировки систем координат и разномасштабности линейных величин не совместится с точкой B, а займет некоторое положение B'. Поправки



Фиг. 67. Ход между узловыми точками

за поворот осей и перенос начала системы координат учитываются формулами (119) и (120), а поправки за разномасштабность учитываются при увязке хода.

Перевычисление координат по приведенным формулам удобно располагать в схему (табл. 35 и 36).

Таблица 35

№ точки	Координаты (старые)		Приращения (старые)		Приращения (новые)		Координаты (новые)	
	x	y	Δx	Δy	ΔX	ΔY	X	Y
A	x_a	y_a					X_a	Y_a
			x_2-x_a	y_2-y_a	X_2-X_a	Y_2-Y_a		
2	x_2	y_2					X_2	Y_2
			x_3-x_2	y_3-y_2	X_3-X_2	Y_3-Y_2		
3	x_3	y_3					X_3	Y_3
			x_4-x_3	y_4-y_3	X_4-X_3	Y_4-Y_3		
4	x_4	y_4					X_4	Y_4
			x_b-x_4	y_b-y_4	X_b-X_4	Y_b-Y_4		
B	x_b	y_b					X_b	Y_b
			x_b-x_a	y_b-y_a	X_b-X_a	Y_b-Y_a		

Таблица 36

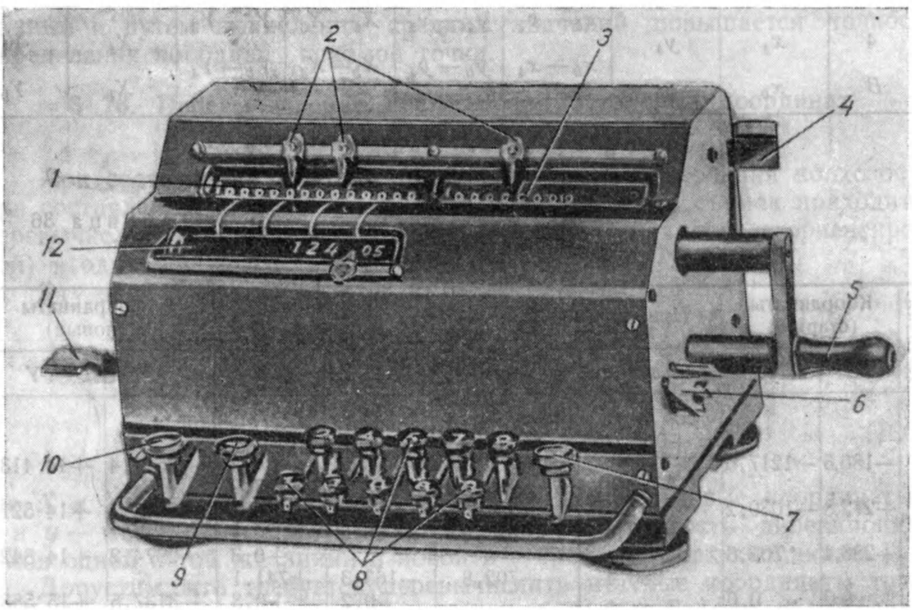
$\delta\alpha = \alpha_{нов} - \alpha_{ст} = -9°44',9$

№ точки	Координаты (старые)		Приращения (старые)		Приращения новые)		Координаты (новые)	
	x	y	Δx	Δy	ΔX	ΔY	X	Y
			$\cos\delta\alpha =$ $= +0,985\ 56$	$\sin\delta\alpha =$ $= +0,169\ 33$				
A	−180,5	−1217,0			+0,2	+0,3	−3521,4	+14 413,7
			+453,3	+187,4	+478,5	+107,9		
2	+272,8	−1030,2				+0,2	−3042,7	+14 521,9
			+ 13,6	+327,4	+ 68,5	+320,4		
3	+286,4	− 702,8				+0,3	−2974,2	+14 842,5
			−286,4	+702,8	−163,3	+741,1		
4	0,0	0,0			+0,2	+0,3	−3137,5	+15 583,9
			−295,0	−509,2	−377,0	−451,9		
B	−295,0	− 509,2					−3514,3	+15 132,3
			−114,5	+708,4	+ 6,7	+717.5	+ 7,1	+718,6
			$\sin\delta\alpha =$ $= -0,169\ 33$	$\cos\delta\alpha =$ $= +0,985\ 56$	$f_x = -0,4$	$f_y = -1,1$		

Сначала записывают старые координаты и их разности (приращения), а также координаты точек A и B в общей системе координат. Для удобства вычисления новых приращений $(X_{i+1} - X_i) = \Delta X_i$ и $(Y_{i+1} - Y_i) = \Delta Y_i$ записывают значения $\cos\delta\alpha$ и $\sin\delta\alpha$ сверху и снизу столбцов старых приращений. Далее вычисляют все приращения ΔX, начиная сверху, а затем приращения ΔY, начиная вычисления снизу. При вычислении новых приращений (например ΔX) набирают на установочных рычагах значение $\cos\delta\alpha$ и умножают это число на старое приращение $(x_{i+1} - x_i) = \Delta x_i$, затем, не гася счетчика результатов, умножают $\sin\delta\alpha$ на разность старых ординат, вращая ручку арифмометра в разные стороны, в зависимости от знаков сомножителей. Новое приращение, равное указанной алгебраической сумме, получится на счетчике результатов.

§ 77. Усовершенствованные арифмометры

В настоящее время в СССР и других странах выпускается много арифмометров различных типов, обычно представляющих собой модификации и усовершенствования русского арифмометра Однера. В некоторых арифмометрах рычажная установка чисел заменена клавишной, ручной привод заменен электрическим; установлены контрольные указатели, при помощи которых проверяется правильность числа, набранного на установочном механизме, и другие усовершенствования. Имеется, например, так называемый функциональный арифмометр для геодезических вычислений, сконструированный в Высшей технической школе в Штуттгарте и представляющий собой арифмометр Однера со специальной приставкой, заменяющей таблицу значений некоторых тригонометрических и других функций. В немецком геодезическом бюллетене*



Фиг. 68. Вычислительная машина ВК-1:

1 — счетчик результатов; *2* — металлические движки-запятые; *3* — счетчик оборотов; *4* — рычаг гашения счетчика оборотов; *5* — рукоятка; *6* — рычаг гашения установки чисел на клавишах; *7* — клавиша для отвода в крайнее левое положение набранного на клавиатуре числа; *8* — цифровые клавиши; *9* и *10* — клавиша поразрядного передвижения установленного числа вправо и влево; *11* — рычаг гашения счетчика результатов; *12* — окно контроля установки чисел

сообщается, что применение функционального арифмометра вдвое повышает скорость решения некоторых задач низшей геодезии.

Наша промышленность, кроме арифмометра «Феликс», выпускает следующие усовершенствованные арифмометры:

1) вычислительная десятиклавишная машина с ручным приводом ВК-1;

2) вычислительная полуавтоматическая десятиклавишная машина ВК-2;

3) вычислительная автоматическая десятиклавишная машина ВК-3.

---

* Bull. géod., 1953, № 29, 31.

Выпущено несколько арифмометров АИХ-1, действующих по принципу приближенных вычислений. Для геодезических вычислений удобны так называемые двойные арифмометры. Опишем эти вычислительные машины несколько подробнее.

Вычислительная машина ВК-1 (фиг. 68)

Машина ВК-1 работает по принципу однеровского колеса, имеющего переменное количество зубцов.

В отличие от арифмометра «Феликс» вычислительная машина ВК-1 имеет передвигающийся установочный механизм и неподвижные счетчики; кроме того, счетчик оборотов *3* (фиг. 68) снабжен механизмом передачи десятков. Емкость счетчика результатов 13 разрядов, а счетчика оборотов — 8 разрядов.

Скорость вращения рукоятки машины ВК-1 около 200 оборотов в минуту. На машине можно выполнять в час около 170 умножений и около 100 делений пятизначных чисел с записью каждого произведения и частного с шестью знаками.

На машине ВК-1 удобно выполнять все четыре арифметических действия. Работа на ней производится теми же приемами, что и на рычажном арифмометре, однако клавишная установка чисел значительно повышает производительность работы на этой машине по сравнению с рычажным арифмометром, особенно если вычислитель освоит работу так называемым ***слепым методом*** (когда устанавливают числа, не глядя на клавиатуру).

Установка чисел производится простым нажатием соответствующих цифровых клавиш *8*.

Для повышения производительности труда при работе слепым методом рекомендуется устанавливать числа на клавиатуре пальцами левой руки, нажимая цифровую клавишу *1* мизинцем, *2*, *3* — безымянным, *4*, *5*, *0* — средним, *6*, *7*, *8*, *9* — указательным пальцами.

Полуавтоматическая машина ВК-2

Полуавтоматическая вычислительная машина ВК-2 (фиг. 69) имеет 8-разрядный счетчик оборотов и 13-разрядный счетчик результатов. Машина работает от электродвигателя, делая около 350 оборотов в минуту. При вычислении счетчики остаются неподвижными, а передвигается установочный барабан. Числа устанавливают нажатием цифровых клавиш *1*. Установочный механизм имеет девять разрядов и контрольное окно *8*. Счетчик результатов *10* и счетчик оборотов *11* гасят соответственно рычагами *5* и *6*.

Рычаг *2* может занимать правое или левое положение, в которое он переводится для выключения автоматического движения установочного барабана.

Действие счетчика оборотов зависит от положения кнопки *7*. Если эту кнопку поставить на знак плюс или минус, то счетчик оборотов и счетчик результатов будут работать соответственно в одинаковом или различных направлениях.

Рычаг управления *4* может занимать три положения:

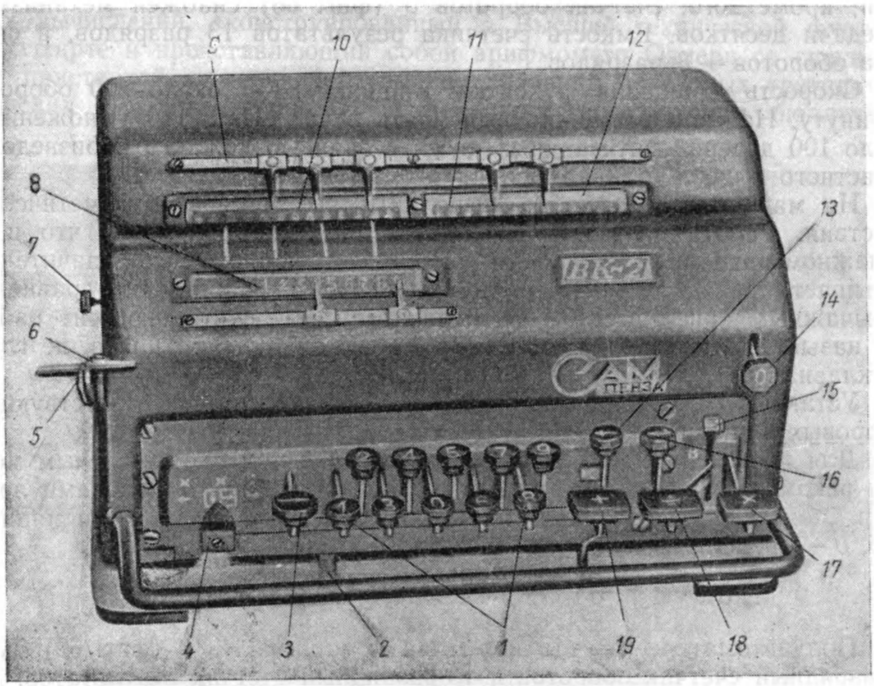
1) левое, при котором установочный механизм автоматически передвигается влево, как только клавиша умножения *17* или клавиша деления *18* освобождается и возвращается вверх;

2) среднее, при котором установочный механизм автоматически передвигается вправо на одно деление (автоматическое движение выключается, если рычаг *2* сдвинут влево);

3) правое, служащее для автоматического деления.

При сложении на машине ВК-2 рычаг *4* может быть в любом положении, но лучше, если этот рычаг будет занимать среднее или левое положение. При сложении и вычитании набранные на клавиатуре числа автоматически гасятся.

Умножение на машине ВК-2 производится полуавтоматически с автоматическим перемещением установочного барабана или перемещением его при помощи клавиш *3* и *16*. Во время умножения рычаг *15* должен быть поднят кверху.



Фиг. 69. Полуавтоматическая машина ВК-2:

1 — цифровые клавиши; *2* — переключатель движения установочного барабана при умножении; *3* — клавиша поразрядного перемещения установочного барабана вправо; *4* — рычаг переключения машины на вид работы; *5* — рычаг гашения счетчика результатов; *6* — рычаг гашения счетчика оборотов; *7* — кнопка изменения направления работы счетчика оборотов; *8* — контрольное окно, в котором появляется набранное на цифровых клавишах число; *9* — указатель разрядов (запятая); *10* — счетчик результатов; *11* — счетчик оборотов; *12* — сигнальное окно, указывающее направление работы счетчика оборотов; *13* — клавиша передвижения установочного барабана в крайнее левое положение; *14* — клавиша гашения установленного числа; *15* — рычаг автоматического гашения установленного числа при вычитании (стоп рычаг); *16* — клавиша поразрядного перемещения установочного барабана влево; *17* — клавиша умножения; *18* — клавиша вычитания и автоматического деления; *19* — клавиша сложения

Процесс умножения зависит от положения рычагов *2* и *4*. Если рычаг управления *4* находится в среднем положении, барабан при умножении надо перемещать из разряда в разряд при помощи клавиш *3* и *16*. Если рычаг *4* находится в среднем, а рычаг *2* — в правом положении, то при умножении барабан из разряда в разряд будет передвигаться автоматически вправо. Если рычаг *4* отведен влево, то установочный барабан в процессе умножения будет передвигаться также влево.

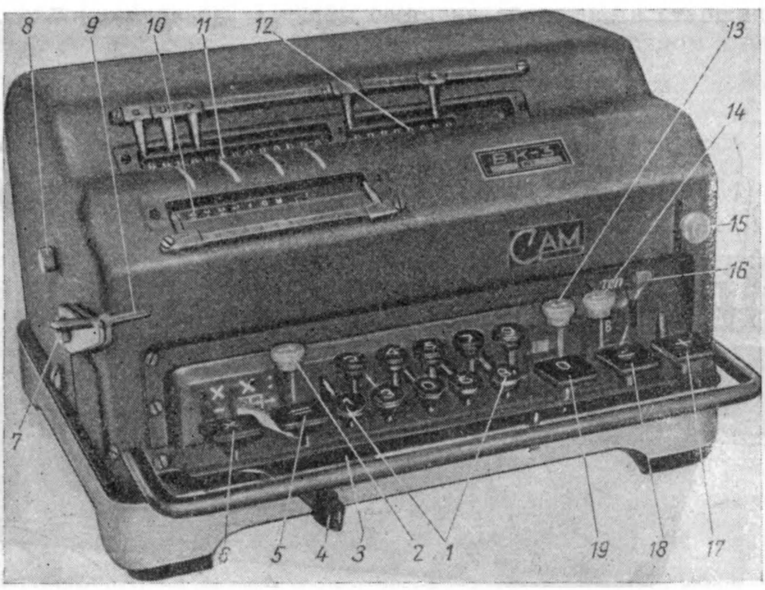
При любом положении рычага управления *4* и рычага *2* перед умножением необходимо сначала погасить счетчики (рычагами *5* и *6*) и установочный механизм (клавишей *14*). Затем путем нажатия на клавиши *1* набрать множимое и правильность набора проверить в контрольном окне *8*. После этого нажимают на клавишу умножения *17* и держат ее до тех пор, пока машина сделает столько ходов, сколько имеется единиц в данном разряде множителя. После перемещения установочного барабана в следующий разряд умножают на цифру этого разряда и т. д.

Деление на машине ВК-2 можно выполнить неавтоматически и автоматически. Рекомендуется только автоматическое деление. Для этого рычаг *4* устанавливают в правое положение. Набирают делимое и нажатием на клавишу *13* перемещают барабан в крайнее левое положение. Нажатием на клавишу *19* делимое передают в счетчик результатов. На барабан устанавливают делитель и нажатием на клавишу *13* опять перемещают его в крайнее левое положение. После нажатия на клавишу деления *18* машина автоматически вычисляет частное и выключается. Если не требуется получать все 8 разрядов в частном, то можно на требуемом разряде прервать деление путем нажатия на рычаг *15* или на клавишу деления.

Приспособление для передачи десятков и возможность при помощи кнопки *7* изменять направление работы счетчика оборотов позволяют на машине ВК-2 производить различные комбинированные вычисления.

Автоматическая машина ВК-3

Машина ВК-3 (фиг. 70) отличается от машины ВК-2 тем, что она



Фиг. 70. Автоматическая машина ВК-3:

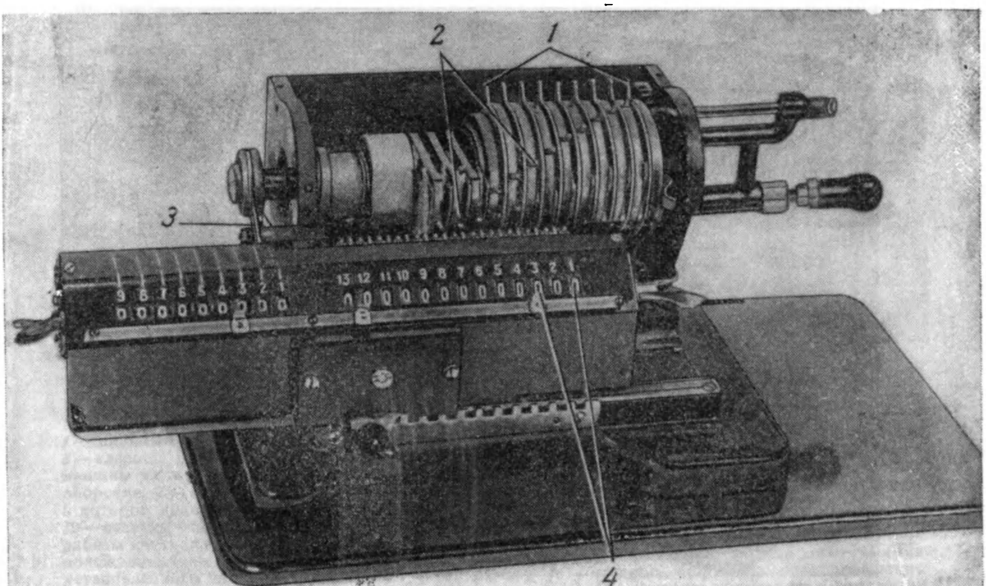
1 — цифровая клавиатура; *2* — клавиша поразрядного перемешения установочного барабана вправо; *3* — вспомсгательный рычаг управления; *4* — главный рычаг управления, переключающий машину на вид работы; *5* — клавиша результата при автоматическом умножении; *6* — подготовительная клавиша при автоматическом умножении; *7* — рычаг гашения счетчика результатов; *8* — рычаг изменения направления работы счетчика оборотов (на + или на —); *9* — рычаг гашения счетчика оборотов; *10* — контрольное окно, в котором появляется набранное на клавиатуре число; *11* — счетчик результатов; *12* — счетчик оборотов; *13* — клавиша передвижения установочного барабана в крайнее левое положение; *14* — клавиша поразрядного перемещения установочного барабана влево; *15* — клавиша гашения установочного числа; *16* — стоп-рычаг; *17* — клавиша сложения; *18* — клавиша вычитания и авмоматического деления; *19* — операционная клавиша О сложения с автоматическим гашением счетчика оборотов

производит автоматически не только деление, но и умножение Кроме того, она умножает по принципу сокращенного умножения, т. е. не умножает на цифры 6, 7, 8 и 9, а умножает на их дополнение до десяти с учетом единицы в высшем разряде. При выполнении автоматического умножения на машине ВК-3 пользуются двумя специальными клавишами. На клавиатуре набирают множимое и нажатием на клавишу (×) переносят его в невидимый умножающий механизм. Затем на клавиатуре набирают множитель и нажимают на клавишу (=), включающую машину на умножение. Произведение получается в счетчике результатов, множимое — в контрольном окне, а множитель — в счетчике оборотов. При помощи клавиши (+) на машине ВК-3 можно выполнять полуавтоматическое умножение так же, как и на машине ВК-2. Сложение, вычитание и деление на автоматической машине ВК-3 выполняются так же, как и на полуавтоматической машине ВК-2.

На машине ВК-3 можно получать квадрат числа упрощенным способом. Для этого возводимое в квадрат число набирают на клавиатуре и нажимают клавишу (=). Квадрат набранного числа появляется на счетчике результатов.

Арифмометр для приближенных вычислений

Отличие конструкции этого арифмометра от обычного заключается во взаимном расположении каретки (со счетчиком оборотов и счетчиком результатов), установочного механизма и рычага-толкателя, регистрирующего число оборотов. На фиг. 71 показан такой арифмометр при



Фиг. 71. Арифмометр для приближенных вычислений:

1 — установочные рычаги; *2* — десятичные зубцы; *8* — рычаг-толкатель (его новое местоположение); *4* — три окна счетчика результатов, в которых получаются запасные цифры, округляемые в окончательном результате

крайнем левом положении каретки (крайнее левое положение каретки обычного арифмометра см. на фиг. 57).

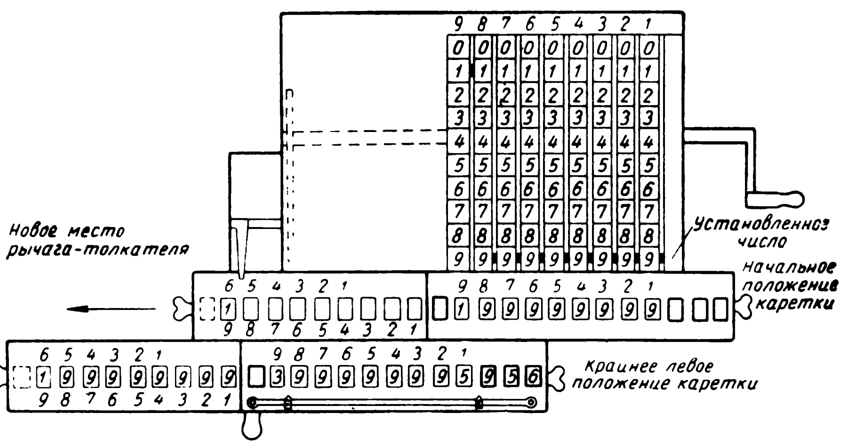
Новое расположение в арифмометре главных механизмов дает возможность производить на нем умножение и деление по правилу сокращенных вычислений с приближенными числами, сохраняя в результате вычислений не все цифры, а лишь столько, сколько их имеется в компоненте с наименьшим числом значащих цифр. Так, выполняя на таком арифмометре умножение, можно получить на счетчике результатов только цифры старших разрядов произведения, достаточные для определения верного значения результата, а цифры младших разрядов выйдут за пределы счетчика (на арифмометре обычной конструкции на счетчике результатов получаются все, обычно ненужные, цифры младших разрядов, а цифры старших разрядов при многозначных сомножителях могут выйти за пределы счетчика). Это дает возможность производить на таком арифмометре вычисления с числами бо́льшей значности примерно в 1,5 раза, чем на обычных арифмометрах.

Видоизмененный арифмометр (фиг. 71 и 72) имеет следующие особенности:

1. Счетчик оборотов и установочный механизм имеют одинаковое число (по 9) разрядов, а счетчик результатов — 13 разрядов, причем девять из них при начальном расположении каретки находятся против девяти разрядов установочного механизма: один разряд выходит влево, а три — вправо от установочного механизма (на фиг. 72 обведены жирными линиями).

2. При совмещении левого (старшего) разряда счетчика результатов со старшим разрядом (левым) установочного механизма рычаг-толкатель выходит влево за пределы счетчика оборотов и работает вхолостую.

3. При крайнем левом положении каретки рычаг-толкатель совмещается с крайним правым разрядом счетчика оборотов, а старший разряд установочного механизма — с четвертым слева разрядом счетчика

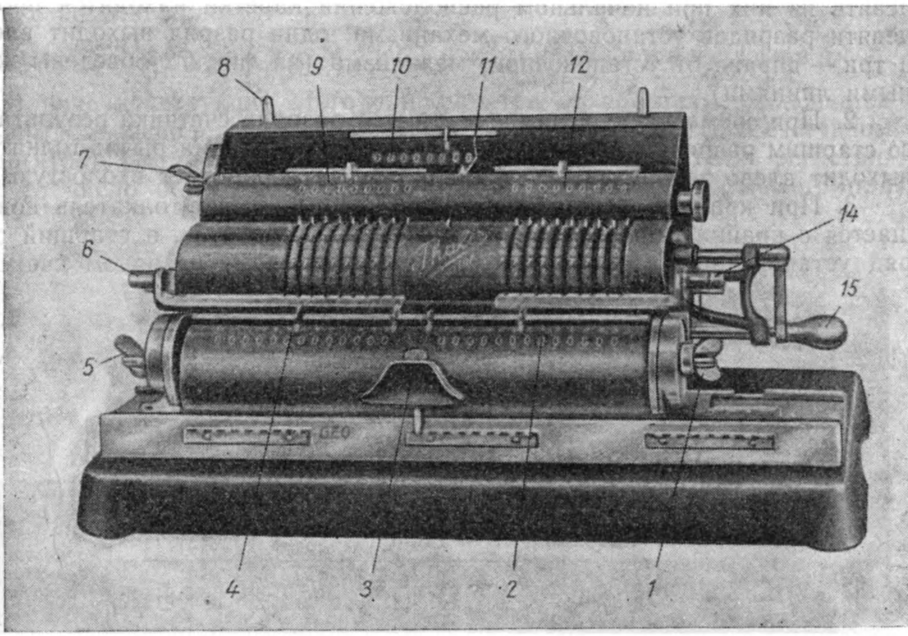


Фиг. 72. Схема арифмометра для приближенных вычислений

результатов, подписанным на фиг. 72 цифрой *1*. При таком положении каретки пять колес Однера установочного механизма выходят за пределы счетчика результатов и при вращении рукоятки арифмометра набранное на них число не будет изменять числа, имеющегося на счетчике результатов.

Описанная схема конструкции арифмометра дает возможность вести вычисления с приближенными числами с точностью до девяти верных значащих цифр в ответе.

На фиг. 72 при начальном положении каретки на счетчике результатов показано число 199 999 999, а на счетчике оборотов — 1, т. е. набранное на установочных рычагах число 199 999 999 умножено на 1. При конечном положении каретки (крайнем левом) на счетчике оборотов стоит число 199 999 999, а на счетчике результатов приближенное произведение числа, набранного на установочных рычагах, на это число; произведение имеет после округления последних трех цифр (956) девять верных значащих цифр, т. е. столько, сколько их имеется в исходных данных. Таким образом, такой арифмометр дает возможность производить действия с многозначными приближенными числами (до 9 знаков) за счет отбрасывания ненужных (неверных) цифр в результате, тогда как обычный арифмометр при умножении приближенных чисел дает в результате не больше шести верных цифр, а при делении—семи цифр. Кроме этого важного преимущества перед другими арифмометрами, такой арифмометр обладает еще и тем достоинством, что он снижает нагрузку на ручку арифмометра.



Фиг. 73. Двойной арифмометр

1 — барашек для гашения правого счетчика результатов; *2* — правый счетчик результатов; *3* — рычаг для передвижения каретки; *4* — левый счетчик результатов; *5* — барашек для гашения левого счетчика результатов; *6* — барашек для гашения левого установочного механизма; *7* — барашек для гашения счетчика оборотов; *8* — переключатель работы левой части машины на плюс или минус; *9* — контрольное окно левого установочного механизма; *10* — счетчик оборотов; *11* — указатель места каретки; *12* — контрольное окно правого установочного механизма, *13* — переключатель работы правой части машины на плюс или минус; *14* — барашек для гашения правого установочного механизма; *15* — рукоятка

Описанный арифмометр в отдельных произведениях дает результат, отличающийся от верного на одну единицу старшего разряда. Неверный результат получается при умножении движением каретки справа налево, когда высшие разряды выходят из зоны действия десяточников установочного барабана, вследствие чего передача десятков в высшие разряды нарушается. Например, при умножении числа 876543210 на число 0,114085 путем перемещения каретки справа налево получится неверный результат, равный 90000432,11. Правильный результат равен 100000432,11; он получается при умножении путем передвижения каретки слева направо.

В связи с этим описанный арифмометр не принят на производство, хотя идея, заложенная в нем, представляет большую ценность для вычислений с приближенными числами.

Двойной арифмометр

При решении многих геодезических задач наиболее производительной малой вычислительной машиной является двойной арифмометр. Имеется несколько систем двойных арифмометров, состоящих из двух установочных барабанов, двух счетчиков результатов, одного или двух счетчиков оборотов. Счетчики оборотов обычно имеют приспособление для изменения направления их вращения. На фиг. 73 показан общий вид двойного арифмометра. На таком арифмометре, например, приращения прямоугольных координат, вычисляют так. На рычагах, допустим, левого барабана арифмометра устанавливают $\cos\alpha$, а на рычагах правого $\sin\alpha$ и, умножив эти значения на горизонтальное проложение S, на левом счетчике результатов получают значение Δx, а на правом Δy На двойном арифмометре с производительностью, в полтора — два раза. большей, чем на обычном арифмометре, можно: решать прямые и обратные засечки, различные пропорции; вычислять координаты точки пересечения двух прямых; перевычислять координаты из одной системы в другую и решать другие задачи.

§ 78. Полуавтоматические вычислительные машины КЕВ-II С и КЕЛР-II С

На полуавтоматах любого типа вычислитель устанавливает исходные числовые данные и управляет движением каретки и ходами машины, а при работе на автоматах движение каретки и управление машины производятся автоматически.

Машины КЕВ-IIС и КЕЛР-IIС снабжены универсальными моторами, которые при соответствующем включении могут работать от переменного тока и постоянного тока напряжением от 110 до 220 *в*.

Во избежание порчи мотора необходимо предварительно убедиться, что он включен на то напряжение и вид тока, какие имеются на месте рабочей машины.

Мотор работает только тогда, когда нажимают какую-нибудь клавишу механизма управления; после освобождения клавиши мотор автоматически останавливается. При вычислении необходимо устанавливать машину на прочном столе, желательно на войлочной подкладке так, чтобы все ножки машины прилегали к подкладке.

Кроме описанных выше машин ВК-2 и ВК-3, основанных на принципе однеровского колеса, имеется много других полуавтоматических и автоматических машин, основанных на других принципах и обеспечивающих значительно бо́льшую производительность, чем арифмометры. Некоторые из этих машин, удобные для выполнения геодезических вычислений, опишем более подробно.

Вычислительная машина КЕВ-IIС (фиг. 74)

Машина имеет девятиразрядный установочный механизм с цифровыми клавишами *11*. Для удобства работы группы разрядов клавиатуры окрашены в разные цвета.

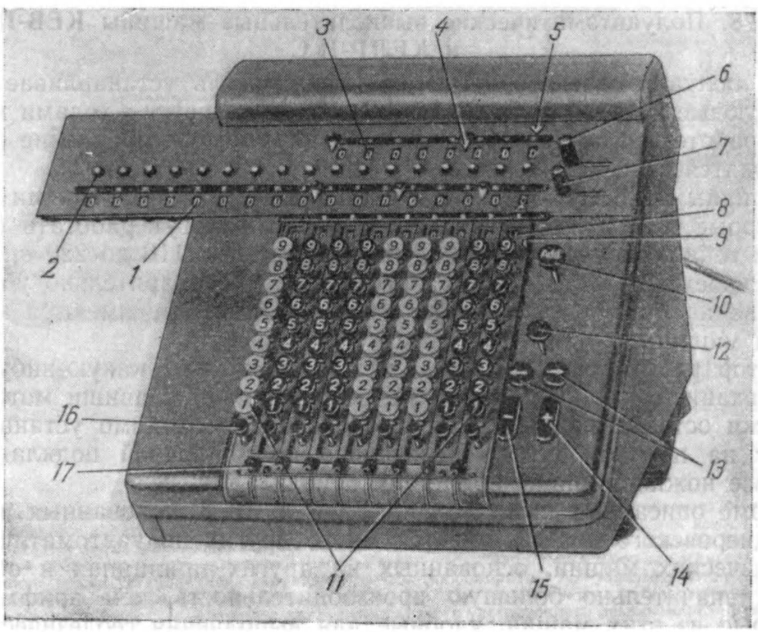
В каждом вертикальном ряду клавиш можно установить только одну цифру и в случае неправильной установки достаточно нажать другую клавишу в том же ряду. Число, установленное на клавишах, видно в контрольных окнах *8* клавиатуры. Между вертикальными рядами клавиатуры имеются поворотные линейки *17*, которые с двух сторон окрашены в разные цвета и служат для разделения клавиатуры на разряды. Красные клавиши 16 служат для поразрядного гашения клавиатуры. Общее гашение всей клавиатуры выполняется клавишей *12*.

Для включения автоматического гашения клавиатуры при сложении и вычитании служит клавиша *10*, которую для этого необходимо нажать и подвинуть на себя. При умножении и делении клавиша *10* должна быть освобождена, так как если она будет закреплена, то после первого хода машины клавиатура окажется погашенной.

Каретка со счетчиками результатов и оборотов передвигается от нажатия на транспортные клавиши *13*.

Счетчик результатов *1* и счетчик оборотов *3* имеют механизмы для передачи десятков. На счетчике результатов получаются суммы, разности и произведения чисел. При делении на счетчике результатов устанавливается делимое или путем поворота головок *2*, или при помощи клавиатуры. Неподвижный указатель *5* показывает положение каретки (разряд на счетчике оборотов) при работе.

При нажатии клавиши *14* (+) счетчик оборотов работает в положительном направлении, а при нажатии клавиши *15* (—) — в противоположном направлении. После перестановки рычага *9* с положения (+) на положение (—) счетчик оборотов работает на сложение от клавиши (—) и на вычитание от клавиши (+).



Фиг. 74. Вычислительная полуавтоматическая машина КЕВ-IIС:

1 — счетчик результатов; *2* — головки для установки чисел в счетчике результатов без клавиатуры; *3* — счетчик оборотов; *4* — металлическая передвигающаяся запятая; *5* — неподвижный указатель разрядов; *6* — рычаг для гашения счетчика оборотов: *7* — рычаг для гашения счетчика результатов; *8* — окно контроля установки чисел; *9* — рычаг переключечия действий счетчика оборотов; *10* — клавиша для включения автоматического гашения клавиатуры; *11* — цифровые клавиши установочного механизма; *12* — клавиша общего гашения клавиатуры; *13* — клавиши транспорта каретки; *14* — клавиша сложения и умножения; *15* — клавиша вычитания и деления; *16* — клавиши поразрядного гашения клавиатуры; *17* — линейки для разделения клавиатуры на разряды

Сложение на полуавтомате КЕВ-IIС производят следующим образом. Устанавливают на клавишах *11* данное число и, проверив правильность установки по окнам контроля, нажимают коротко клавишу (+).

Если клавиша *10* была в нижнем (нажатом) положении, то после нажатия клавиши (+) число, установленное на клавиатуре, после переноса на счетчик результатов, автоматически гасится. После этого на клавиатуре устанавливают другие слагаемые и действуют аналогичным образом. При установке чисел на клавиатуре необходимо следить, чтобы данные числа правильно располагались в соответствующих разрядах. В результате сложения на счетчике результатов получают сумму, а на счетчике оборотов — количество слагаемых.

Вычитание производят аналогично сложению. Погасив счетчик результатов и счетчик оборотов, устанавливают уменьшаемое на клавиатуре и нажатием клавиши (+) переносят уменьшаемое на счетчик результатов. Затем устанавливают на клавиатуре вычитаемое и нажатием клавиши (—) производят вычитание. Если нужно получить алгебраическую сумму, то при положительном слагаемом нажимают клавишу (+), а при отрицательном — клавишу (—).

Если при вычитании рычаг *9* был установлен на положение (+), то на счетчике оборотов получится дополнение до десяти (или до 10^k) количества сделанных вычитаний. В случае если требуется знать общее число действий при алгебраическом сложении, то при сложении рычаг *9* необходимо установить на (+), а при вычитании на (—).

Умножение на полуавтомате производят путем последовательного сложения аналогично тому, как это делают на арифмометре. При умножении, например, числа 456,35 на 54,2 поступают так. Освобождают клавишу *10* и набирают на клавиатуре число 456,35. Нажатием на клавишу *13* устанавливают каретку так, чтобы неподвижный указатель *5* показывал на счетчике оборотов третий разряд. Нажимают на клавишу (+) до тех пор, пока на счетчике оборотов не появится цифра 5; в случае если на счетчике оборотов появится цифра, бóльшая 5, то нажатием на клавишу (—) уменьшают ее до 5. Затем коротким нажимом на клавишу *13* транспорта каретки подают ее влево на один разряд, нажимают на клавишу (+) и умножают данное число на 4; затем подают каретку еще на один разряд влево и умножают число на 2. После этого на счетчике оборотов получится число 54,2, а на счетчике результатов — произведение 24734,170.

При умножении на цифры, бóльшие 5, следует пользоваться способом сокращенного умножения, как и при работе на арифмометре.

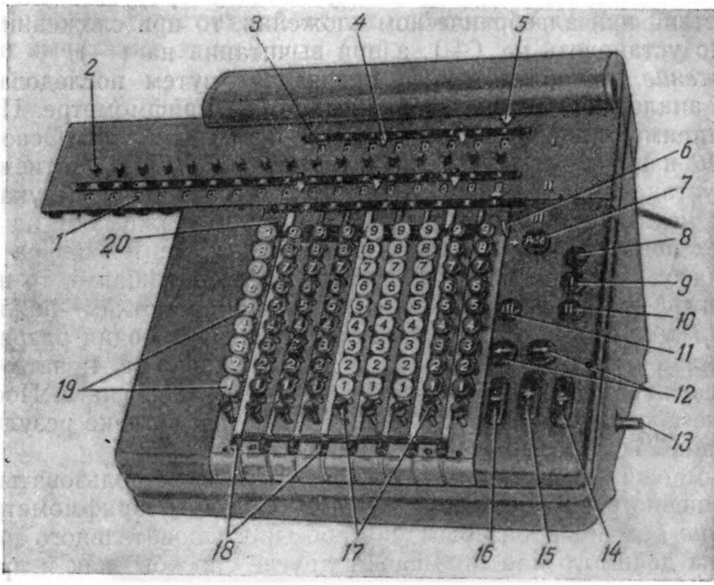
Деление обычно производят способом последовательного вычитания делителя из делимого или применяют другие способы, как и при работе на арифмометре. Деление по способу последовательного вычитания производят следующим образом. Ставят каретку вправо на требуемое число знаков, и на счетчике результатов устанавливают делимое либо поворотом установочных головок, либо посредством клавиатуры. Во втором случае делимое устанавливают на клавиатуре и коротким нажатием на клавишу (+) переносят его на счетчик результатов, затем гасят делимое, установленное на клавиатуре, и единицу, появившуюся на счетчике оборотов. После этого устанавливают делитель на клавиатуре так, чтобы его высший разряд приходился под высшим разрядом делимого и, переключив рычаг *9* в положение (—), производят деление. Для этого нажимают на клавишу *15* (—) и держат ее до остановки машины. Машина сделает некоторое число вычитаний (пока это возможно), после чего, благодаря специальному приспособлению — автостопу, остановится, когда вычитание станет невозможно. После остановки машины отпускают клавишу *15* (—), подают каретку влево на один разряд и снова нажимают на клавишу *15*. После остановки машины опять передвигают каретку на один разряд влево, нажимают клавишу *15* и т. д. После деления частное окажется на счетчике оборотов, а остаток или нули на счетчике результатов. Положение запятой в частном устанавливается перед делением по правилам, изложенным в § 25 и 67.

Извлечение квадратного корня и комбинированные действия на полуавтоматах производят аналогично действиям на арифмометре, описанным в § 69—77.

Вычислительная машина КЕЛР-IIC

Общий вид этой машины показан на фиг. 75. Она отличается от машины КЕВ-IIC тем, что на ней можно производить автоматическое деление и многократное умножение. Это обстоятельство делает машину КЕЛР-IIC удобной для решения таких геодезических задач, где приходится производить многократное умножение (например, для вычисления прямоугольных плоских координат Гаусса по геодезическим координатам).

Для нахождения произведения $d = a \cdot b \cdot c$ поступают следующим образом. Умножают a на b так же, как и на машине КЕВ-IIC. Затем



Фиг. 75. Вычислительная полуавтоматическая машина КЕЛР-IIC:

1 — счетчик результатов; *2* — головки для установки чисел на счетчике результатов без клавиатуры; *3* — счетчик оборотов; *4* — металлическая передвигающаяся запятая; *5* — неподвижный указатель разрядов; *6* — рычаг переключения счетчика оборотов; *7* — клавиша для включения автоматического гашения клавиатуры; *8* — клавиша для передачи числа из счетчика результатов в установочный механизм; *9* — клавиша гашения счетчика оборотов; *10* — клавиша гашения счетчика результатов; *11* — клавиша общего гашения клавиатуры; *12* — клавиши транспорта каретки; *13* — прерыватель автоматического деления; *14* — клавиша автоматического деления; *15* — клавиша сложения и умножения; *16* — клавиша вычитания; *17* — клавиша поразрядного гашения клавиатуры; *18* — линейка для разделения клавиатуры на разряды; *19* — цифровые клавиши; *20* — окна контроля установки чисел

ставят каретку в исходное положение и нажатием клавиши *8* передают результат умножения ab со счетчика результатов в установочный механизм, после чего в окнах контроля появится произведение. Далее умножают обычным путем это произведение на c и произведение abc читают на счетчике результатов.

Автоматическое деление на машинах типа КЕЛР-IIC производят следующим образом. При помощи клавиши *12* отводят каретку вправо и в высших разрядах счетчика результатов устанавливают делимое или при помощи головок *2*, или при помощи клавиатуры. Во втором случае необходимо после установки делимого погасить единицу, появившуюся на счетчике оборотов. Затем устанавливают на клавиатуре вместо делимого делитель и, пользуясь изложенными выше правилами, устанавливают запятую на счетчике оборотов для отделения в частном целой части числа от его дробной части. После этого при нажатии клавиши *14* происходит процесс автоматического деления, и каретка возвращается в исходное положение; частное читают на счетчике оборотов.

Действуя рычагом *13*, можно прерывать процесс автоматического деления на любом разряде частного.

§ 79. Автоматические вычислительные машины САЛ-II С и САСЛ-II С

За последнее время создан ряд автоматических вычислительных машин, которые после установки на них исходных чисел и нажатия соответствующей клавиши работают без участия вычислителя.

Некоторые малые автоматические машины имеют счетчик оборотов, счетчик результатов и один или два накапливающих счетчика, в которых можно хранить промежуточные результаты и производить различные комбинированные вычисления без записи промежуточных результатов.

У нас нашли большое распространение автоматические вычислительные машины САЛ-IIС и САСЛ-IIС, основанные на принципе ступенчатых валиков.

Автоматическая машина САЛ-IIС (фиг. 76)

Как и все вычислительные машины-автоматы, машина САЛ-IIС снабжена мотором, работающим от постоянного и переменного тока напряжением от 110 до 220 *в*.

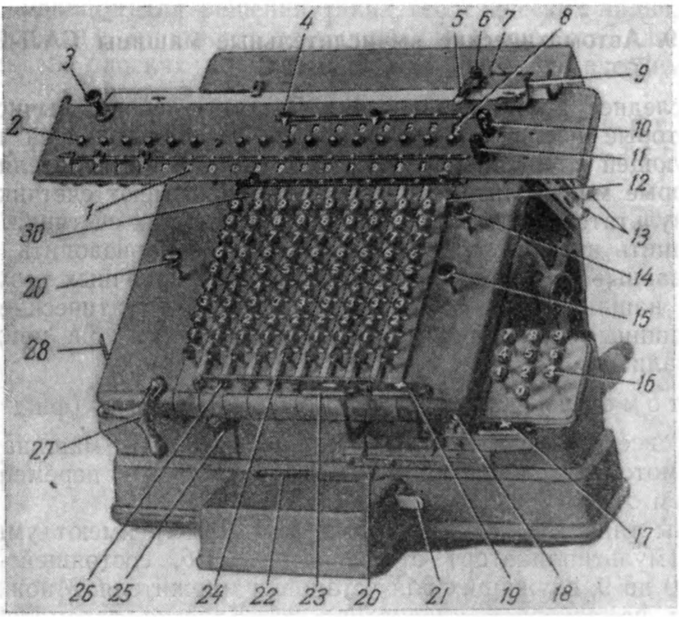
Машины типа САЛ-IIС (а также САСЛ-IIС) имеют умножающий механизм (мультипликатор) с клавиатурой *16*, состоящей из десяти клавиш от 0 до 9, служащих для установки множителя. Множимое устанавливается на основной клавиатуре *24*. Каретка автомата САЛ-IIС, в которой расположены счетчики результатов и оборотов, приводится в движение автоматически и после умножения возвращается в исходное положение. Автоматический возврат каретки можно выключить рычажком *7*, тогда каретка после умножения остается неподвижной и произведение, получившееся на счетчике результатов, можно делить на какое-нибудь другое число.

Счетчики можно гасить вручную путем сдвига вправо рычагов *10* и *11* и автоматически с помощью клавиши умножения *17*, но в этом случае движки (рычаги) *13* должны быть подняты кверху; для выключения автоматического гашения счетчиков рычаги *13* должны быть опущены вниз.

Сложение и вычитание на машине типа САЛ-IIС производят так же, как и на полуавтоматических машинах: при сложении нажимают клавишу *19*, а при вычитании — клавишу *23*. Для того чтобы клавиатура гасилась автоматически, клавиша *14* должна быть в верхнем (не нажатом) положении.

Умножение полностью автоматизировано. Множимое устанавливают на основной цифровой клавиатуре *24* и правильность установки проверяют в окнах контроля *30*. Множитель устанавливают на клавишах *16* мультипликатора и правильность установки проверяют в контрольном окне *22*. Затем нажимают клавишу *17*, отчего включается автоматическое умножение, по окончании которого машина сама останавливается, и в счетчике результатов читают произведение, а в счетчике оборотов — множитель. Если не гасить счетчик результатов, то на машине САЛ-IIС, как и на обычном арифмометре, можно получать суммы произведений. Для получения разности произведений $a \cdot b - c \cdot d$ пользуются клавишей *29*, которую перед выполнением умножения $c \cdot d$ необходимо нажать и оставить в таком положении до окончания действия.

Чтобы (в случае ошибки в наборе множителя) погасить установку множителя, необходимо сдвинуть вправо рычаг *20* и после этого потянуть к себе до упора рычаг *21*.



Фиг. 76. Вычислительная автоматическая машина САЛ-IIС:

1 — счетчик результатов; *2* — головки для установки числа на счетчике результатов; *3* — левый рычаг для свободного передвижения каретки; *4* — металлическая передвигающаяся запятая; *5* — неподвижный указатель разряда; *6* — клавиша ограничения движения каретки при автоматическом делении; *7* — рычаг выключения автоматического возврата каретки после умножения; *8* — счетчик оборотов; *9* — правый рычаг для свободного передвижения каретки; *10* — гаситель счетчика оборотов; *11* — гаситель счетчика результов; *12* — рычаг переключения действий счетчика оборотов; *13* — рычаги-включатели автоматического гашения счетчика оборотов и счетчика результатов; *14* — клавиша выключения автоматического гашения клавиатуры; *15* — клавиша общего гашения клавиатуры; *16* — клавиатура для установки множителя (мультипликатор); *17* — клавиша умножения; *18* — клавиша передачи делимого на счетчик результатов; *19* — клавиша сложения; *20* — рычаг возврата каретки множителя (мультипликатора); *21* — рычаг гашения установки множителя; *22* — контрольное окно установки множителя; *23* — клавиша вычитания; *24* — основная цифровая клавиатура; *25* — клавиша автоматического деления; *26* — линейка для разделения клавиатуры на разряды; *27* — ручка поразрядного передвижения каретки; *28* — прерыватель автоматического деления; *29* — клавиша для получения разности произведений; *30* — окна контроля установки чисел на основной клавиатуре

Деление, как и умножение, производится автоматически. Каретку ставят в исходное положение или непосредственно рукой, или при помощи клавиши умножения *17*. Затем в высших разрядах основной клавиатуры устанавливают делимое и после проверки правильности установки в окнах контроля *30* нажимают клавишу *18* для передачи делимого на счетчик результатов. После нажатия клавиши *18* машина автоматически погасит оба счетчика, передвинет каретку вправо до отказа, передаст делимое на счетчик результатов и погасит установку числа на клавиатуре. После этого на основной клавиатуре устанавливают делитель, начиная с высшего разряда, и нажимают клавишу деления *25*, после чего происходит процесс автоматического деления, который продолжается до тех пор, пока каретка не возвратится в исходное положение. Частное читают на счетчике оборотов, а остаток — на счетчике результатов.

Автоматическое деление можно прервать на любом разряде частного при помощи рычага *28*, который для этого нужно нажать от себя. Прерванное деление продолжить нельзя, так как делитель при остановке машины гасится.

Если нажать клавишу *25* автоматического деления, когда в делителе стоят нули, машина начнет работать безостановочно, и для ее остановки необходимо прерыватель *28* нажать от себя, а выключатель холостого хода, находящийся на той же левой стороне машины, но ближе к каретке (на рисунке не показан), — к себе.

Для того чтобы в частном не получать лишних (ненужных) знаков, можно ограничить движение каретки при помощи клавиши *6*. Для этого ставят каретку при помощи ручки *27* на заданный разряд, определяемый неподвижным указателем *5*, и нажимают клавишу *6* ограничения движения каретки. Деление производят обычным путем, начиная действия при исходном положении каретки, но после сделанной установки ход каретки будет ограничиваться установленным разрядом, и в частном будет получаться заданное количество знаков.

Вычислительная автоматическая машина САСЛ-IIС

Машина САСЛ-IIС, общий вид которой показан на фиг. 77, отличается от машины САЛ-IIС наличием накапливающего счетчика и некоторыми, связанными с этим дополнительными устройствами.

Накапливающий счетчик, как и счетчик оборотов и результатов, размещен в каретке и служит для получения итогов и хранения промежуточных данных. Переносить числа в накапливающий счетчик можно или вручную, или автоматически. В первом случае (при любом положении каретки) нужно повернуть ручку *9* к себе, после чего число со счетчика результатов перейдет в накапливающий счетчик. Одновременно с этим можно той же ручкой *9* гасить и счетчик оборотов, если рычаг выключения автоматического гашения, находящийся под кареткой, повернуть к себе.

При сложении автоматический перенос числа в накапливающий счетчик производится при исходном положении каретки путем короткого нажатия клавиши умножения.

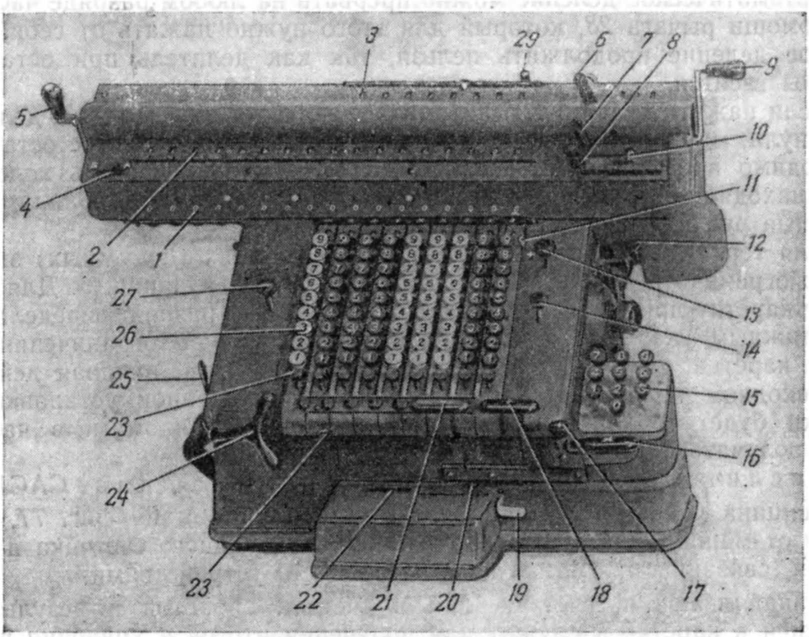
При автоматическом умножении произведение, стоящее на счетчике результатов, после нажатия клавиши умножения *16* переносится каждый раз в накапливающий счетчик, где происходит суммирование произведений.

Перенос числа в накапливающий счетчик можно делать как со знаком плюс, так и со знаком минус. Во втором случае (для вычитания) переключатель *4* должен быть переставлен из правого положения «А» в левое положение «S».

Гашение накапливающего счетчика возможно только тогда, когда переключатель *4* находится в правом положении «А».

Если число, полученное в накапливающем счетчике, необходимо разделить, то его переносят на счетчик результатов. Для этого сначала гасят счетчик результатов и ставят переключатель *4* в положение «А». Затем ставят рычаг *10* включения переноса в левое положение и оттягивают вправо до упора гаситель 7. После этих действий число, стоящее в накапливающем счетчике, перейдет на счетчик результатов и рычаг 10 возвратится в нормальное положение.

Все арифметические действия выполняются на автомате САСЛ-IIС так же, как и на машине САЛ-IIС, но наличие накапливающего счетчика облегчает производство комбинированных действий при решении ряда геодезических задач.



Фиг. 77. Вычислительная автоматическая машина САСЛ-IIС:

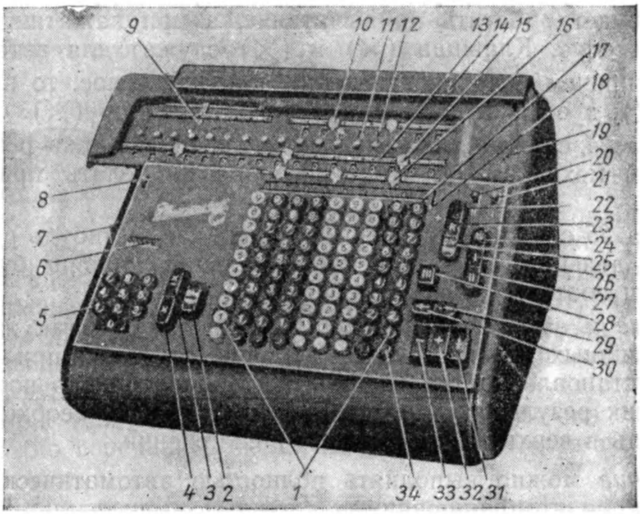
1 — счетчик результатов; *2* — накапливающий счетчик; *3* — счетчик оборотов; *4* — рычаг переключения накапливающего счетчика на вычитание; *5* — ручка свободного передвижения каретки; *6* — гаситель счетчика оборотов; *7* — гаситель накапливающего счетчика; *8* — гаситель счетчика результатов; *9* — ручка для передачи числа из счетчика результатов в накапливающий счетчик; *10* — вспомогательный рычаг для передачи числа из накапливающего счетчика в счетчик результатов; *11* — рычаг переключения действий счетчика оборотов; *12* — клавиша для ограничения движения каретки при делении; *13* — клавиша выключения автоматического гашения клавиатуры; *14* — клавиша общего гашения клавиатуры; *15* — клавиши умножающего механизма (мультипликатора); *16* — клавиша умножения; *17* — клавиша передачи делимого в счетчик результатов; *18* — клавиша сложения; *19* — рычаг гашения установки множителя; *20* — кнопка возврата каретки умножающего механизма; *21* — клавиша вычитания; *22* — окно для контроля установки множителя; *23* — клавиша автоматического деления; *24* — ручка поразрядного передвижения каретки; *25* — прерыватель автоматического деления; *26* — основная цифровая клавиатура; *27* — клавиша переключения действия счетчика оборотов (для получения разности произведений)

§ 80. Автоматическая вычислительная машина с механизмом обратного переноса чисел из счетчика результатов в установочное устройство

Машина действует на принципе ступенчатых валиков; она снабжена универсальным мотором мощностью 36 *вт* с переключением на постоянный и переменный ток напряжением от 110 до 220 *в*. Общий вид машины показан на фиг. 78.

На машине можно выполнять сложение, вычитание, автоматическое умножение, деление, многократное умножение и различные комбинированные вычислительные действия. Кроме того, на этой машине можно выполнять полуавтоматическое умножение и деление, что иногда целесообразно при вычислении по некоторым сложным формулам. Машина лучше, чем другие распространенные у нас вычислительные машины, приспособлена для инженерно-технических расчетов.

Клавиатура установки чисел состоит из двух полей: основного *1* и десятичного *5*; на десятичном поле клавиатуры устанавливается множитель. Установленное на основной клавиатуре число появляется в окне контроля *17*; гасится она путем нажатия на клавишу *28*. При помощи клавиш *34*, расположенных под каждым разрядом основной клавиатуры, можно поразрядно гасить цифровые клавиши. Клавиша с надписью *R* служит для выключения автоматического гашения, установленного на основной клавиатуре числа. Она во время сложения и вычитания, а также во время автоматического умножения и деления, должна быть поднята кверху, что делается коротким нажатием на клавишу *22*.



Фиг. 78. **Автоматическая машина с механизмом обратного переноса чисел из счетчика результатов в установочное устройство:**

1 — основное поле цифровых клавиш; *2* — клавиша подготовки деления; *3* — клавиша отрицательного умножения ($\underline{\times}$); *4* — клавиша положительного умножения (×); *5* — десятичная клавиатура установки множителя; *6* — окно контроля установки множителя; *7* — гаситель установки множителя; *8* — выключатель возврата каретки после умножения; *9* — ограничитель движения каретки; *10* — подвижная запятая счетчика оборотов; *11* — счетчик оборотов; *12* — головки для непосредственной установки числа в счетчик результатов; *13* — счетчик результатов; *14* — неподвижный указатель; *15* — подвижная запятая счетчика результатов; *16* — подвижная запятая в контрольном окне установочного механизма; *17* — окно контроля установки числа на цифровой клавиатуре; *18* — рычаг переключения направления работы счетчика оборотов; *19* — каретка; *20* — рычаг автоматического гашения счетчика результатов; *21* — рычаг автоматического гашения счетчика оборотов; *22* — клавиша освобождения клавиши (*R*); *23* — клавиша (*R*) включения автоматического гашения установленного на основной клавиатуре числа; *24* — клавиша передачи числа из счетчика результатов на установочный механизм: *25* — клавиша прерывания автоматического деления; *26* — клавиша (I) гашения счетчика оборотов; *27* — клавиша (II) гашения счетчика результатов; *28* — клавиша (III) гашения основной цифровой клавиатуры; *29* — клавиша поразрядного передвижения каретки вправо; *30* — клавиша поразрядного передвижения каретки влево; *31* — клавиша автоматического деления (÷); *32* — клавиша сложения (+); *33* — клавиша вычитания (-); *34* — клавиша поразрядного гашения числа, установленного на основной клавиатуре

Правильность установки множителя на десятичной клавиатуре контролируется в окне *6*. Если множитель установлен ошибочно, то появившееся число в окне *6* гасится при помощи рычага *7*.

Счетный механизм состоит из двух счетчиков: оборотов *11* и результатов *13*. Гашение счетчика результатов производится нажатием на клавишу *II*, а гашение счетчика оборотов на клавишу *I*. Оба счетчика при последующем умножении и делении автоматически гасятся, если рычаги *20* и *21* опущены вниз. Если рычаг *20* поднять кверху, то на счетчике результатов можно получать суммы произведений. Если рычаг *21* поднять кверху, то на счетчике оборотов можно получать суммы частных.

Управляют машиной при помощи различных клавиш, на которых сверху обычно имеются соответствующие надписи. Клавиша *32* служит для сложения и полуавтоматического умножения; клавиша *33* — для вычитания или полуавтоматического деления. Рычаг *18* служит для переключения направления работы счетчика оборотов. Если рычаг *18* поставить на минус (кверху), то счетчик оборотов при нажатии на клавишу (+) будет работать на вычитание, а при нажатии на клавишу (—) на сложение. Клавиши (×) и ($\underline{\times}$) служат для автоматического умножения, причем если произведение положительное, то нажимают на клавишу (×), а если отрицательное, то на клавишу ($\underline{\times}$).

Клавиша *24* служит для переноса числа из счетчика результатов на установочный механизм *17*, что целесообразно делать при повторном умножении.

Клавиша *25* служит для прерывания на каком-нибудь разряде автоматического деления. О назначении остальных клавиш будет сказано при описании соответствующих действий.

Сложение и вычитание на машине выполняется так же, как и на других клавишных вычислительных машинах. Чтобы при сложении и вычитании установленное на цифровых клавишах число после переноса его на счетчик результатов автоматически гасилось, необходимо клавишу *R* оставить в верхнем (не нажатом) положении.

Умножение можно выполнять полностью автоматически или, если понадобится при комбинированных сложных вычислениях, полуавтоматически при помощи клавиш *32*, *33*, *29* и *30*.

При автоматическом умножении множимое устанавливают на основной цифровой клавиатуре и правильность установки проверяют в окнах контроля *17*; множитель устанавливают на десятичной клавиатуре (начиная с высшего разряда) и правильность установки проверяют в окнах контроля *6*. Затем нажимают на клавишу умножения *4* и машина автоматически производит умножение методом последовательного сложения, начиная с низших разрядов. Во время процесса умножения клавиша (×) все время находится в нижнем положении и автоматически поднимается кверху после окончания действия и возвращения каретки в исходное положение. Если рычаг *8* опустить вниз, то каретка останется в правом положении, что целесообразно делать, когда полученное произведение необходимо разделить на какое-нибудь число.

При делении делимое устанавливают на левой стороне основной клавиатуры и нажимают на клавишу подготовки деления *2*. От нажатия на клавишу *2* гасятся оба счетчика, каретка автоматически передвигается в крайнее правое положение и установленное на цифровой клавиатуре делимое переносится на счетчик результатов, если рычаг *20* и *21* опущены вниз, и гасится клавиатура, если клавиша *23* не нажата. После этого на цифровой клавиатуре устанавливают делитель так, чтобы его высший разряд расположился под высшим разрядом делимого, и нажимают клавишу деления *31*.

Частное появится в счетчике оборотов. Числа в счетчике результатов можно устанавливать при помощи головок *12*, что выгодно при некоторых комбинированных вычислениях.

Запятую в частном следует устанавливать до начала деления, пользуясь правилами, изложенными выше или следующим правилом: если запятую в делимом, находящимся на счетчике результатов, передвижением каретки поставить против запятой делителя, находящегося в контрольном окне *17*, то запятая в частном будет находиться с правой стороны указателя *14*.

При помощи нажатия клавиши *25* автоматическое деление можно прервать на любом разряде. Этой клавишей также пользуются при необходимости остановить машину.

В счетчике оборотов получается частное из восьми знаков. Если в частном можно ограничиться меньшим числом знаков, то для сокращения времени на выполнение деления рычаг *9* следует опустить вниз, затем передвинуть его и застопорить так, чтобы он отделял необходимое число знаков.

Пользуясь клавишей *24*, на машине весьма удобно вычислять без записи промежуточных результатов выражения вида $a \cdot b \cdot c \cdot d \ldots$ следующим образом.

Получают на счетчике произведение ab и нажатием на клавишу *24* передают его на установочный механизм. При этом каретку следует устанавливать так, чтобы в установочном механизме получались не все цифры произведения ab, а только те, которые заслуживают доверия и один-два запасных знака. Произведение ab умножают на c, установив сомножитель c на десятичной клавиатуре *5* и т. д. Перед тем как передавать произведение из счетчика результатов в установочный механизм, его можно округлить, пользуясь одной из установочных головок *12*.

На машине (фиг. 78) из счетчика результатов на установочный механизм можно передавать числа, имеющие 8 и менее значащих цифр.

§ 81. Автоматическая вычислительная машина с тремя счетчиками и с механизмом переноса чисел из счетчика результатов в умножающий механизм

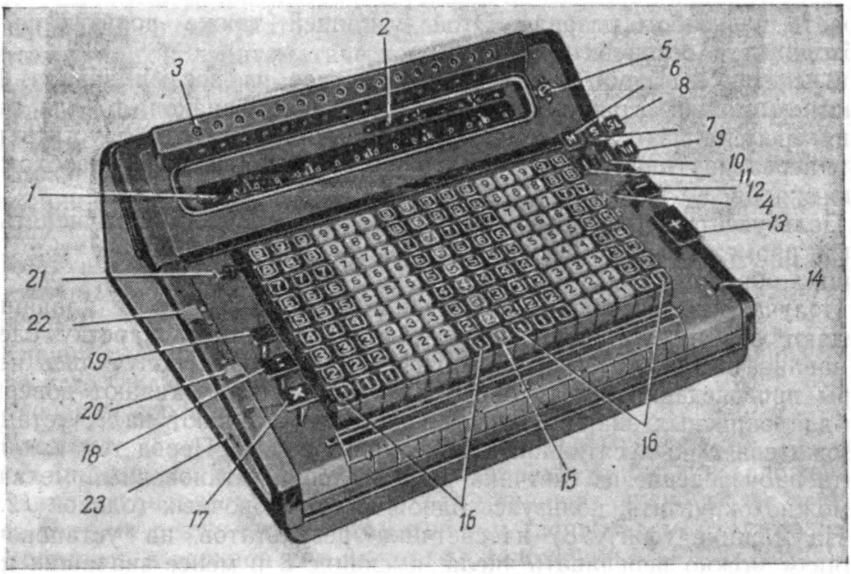
На фиг. 79 изображена автоматическая машина Р-38СМ, основанная на принципе зубчатых реек с пропорциональным рычагом. Эта модель отличается от моделей Р-38 и Р-37 таких машин наличием накапливающего счетчика и дополнительными приспособлениями, облегчающими и ускоряющими комбинированные действия.

Модели Р-37 и Р-38 отличаются друг от друга только числом разрядов цифровой клавиатуры и счетчиков: модель Р-37 имеет 12 разрядов, а модель Р-38 — 16 разрядов.

Механизмы машины приводятся в действие от мотора переменного тока в 120 или 220 вольт, находящегося позади машины. Напряжение сети должно соответствовать напряжению, указанному на щитке мотора; (чтобы прочитать данные мотора, нужно снять заднюю крышку, запертую крючком).

Числа, с которыми требуется производить операцию, устанавливаются на клавиатуре путем нажатия на клавиши. Каждый разряд представляет собой вертикальный ряд цифровых клавиш от 1 до 9. Нули на клавиатуре не берутся; в ряду, где должен быть нуль ничего не набирают. Различная окраска клавиатурных рядов помогает определению разрядов, а красный ряд *15*, делящий клавиатуру на две части, служит для ориентировки при умножении и делении. Правее красного ряда *15* устанавливается множимое, а левее множитель; нижний разряд множителя может находиться в красном ряду.

Делимое устанавливается левее красного ряда, а делитель правее, но так, чтобы первая значащая цифра высшего разряда делителя находилась в красном ряду. Механизм клавиатуры допускает нажатие только одной клавиши в каждом вертикальном ряду. Неверно нажатая клавиша автоматически выскакивает обратно при нажатии на нужную клавишу в данном же ряду.



Фиг. 79. Вычислительная автоматическая машина Р-38 СМ:

1 — счетчик результатов; *2* — счетчик оборотов; *3* — накапливающий счетчик; *4* — рычаг включения гашения счетчика оборотов от клавиши „*М*“; *5* — кнопка для преобразования в счетчике результатов дополнительного числа в прямое; *6* — клавиша передачи числа из счетчика результатов в умножающий механизм: 7 — клавиша передачи числа из счетчика результатов в накапливающий; *8* — клавиша передачи числа из накапливающего счетчика в счетчик результатов; *9* — клавиша гашения клавиатуры; *10* — клавиша гашения счетчика результатов; *11* — клавиша гашения счетчика оборотов; *12* — клавиша вычитания; *13* — клавиша сложения; *14* — рычаг включения и выключения автоматического гашения клавиатуры; *15* — красный ряд цифровой клавиатуры (низший разряд множителя или высший разряд делителя); *16* — цифровые клавиши; *17* — клавиша умножения; *18* — клавиша деления; *19* — клавиша переключения действия счетчика оборотов; *20* — рычаг переключения на сложение или вычитание; *21* — рычаг для установки множимого с числом значащих цифр больше 8; *22* — рычаг ограничения числа знаков в частном при делении; *23* — прерыватель деления

В машине отсутствует клавиша поразрядного гашения клавиатуры, так как если в каком-нибудь разряде надо погасить установленную цифру, то в этом же разряде надо нажать одновременно две клавиши. Общее гашение клавиатуры делается нажатием на клавишу III, обозначенную на фиг. 79 цифрой *9*.

Каретка заключает в себе счетчик результатов, счетчик оборотов и накапливающий счетчик. Счетчик оборотов гасится клавишей I, а счетчик результатов — клавишей II, которые обозначены на рисунке соответственно номерами *11* и *10*. Гашение счетчиков и клавиатуры можно производить сразу одновременным нажатием всех трех клавиш I, II и III.

Посредством кнопки *5* можно передвигать планку, в которой имеются окошки для замены дополняющего числа до 10 (в случае отрицательного результата) самим числом. Приспособление это основано на том, что на каждом цифровом барабане счетчика результатов (кроме первого разряда) нанесены два ряда цифр: нижний —1—2—3—4—5—6—7—8—9—0 и верхний —8—7—6—5—4—3—2—1—0—9.

На барабане первого разряда нанесено два ряда цифр: нижний —1—2—3—4—5—6—7—8—9—0 и верхний —9—8—7—6—5—4—3—2—1—0; в нижнем ряде нуль красного цвета.

Рычаг *21* дает возможность произвести умножение, когда один из сомножителей имеет больше восьми знаков. При передвижении рычага *21* к себе обе половины установочной клавиатуры (слева и справа красного ряда) действуют как одно целое, что дает возможность установить на ней множимое, имеющее свыше *8* знаков. Клавиша *19* служит для управления счетчиком оборотов. Она может быть установлена в трех положениях: а) поднята вверх, тогда счетчик оборотов работает в том же направлении, что и счетчик результатов; б) закреплена в среднем положении, тогда счетчик оборотов выключается (кроме деления); в) полностью нажата, тогда счетчик оборотов работает с обратным знаком относительно работы счетчика результатов, т. е. работает на вычитание от нажатия клавиши сложения и на сложение — от нажатия клавиши вычитания.

Сложение на машине выполняют следующим образом. Чтобы после каждого действия набранное на клавиатуре число автоматически гасилось, ставят рычаг *14* в положение «А» (к себе). Слагаемые устанавливают на клавиатуре и после каждой установки нажимают на клавишу *13* (+). Сумма получается на счетчике результатов *1*, а счетчик оборотов *2* покажет число слагаемых.

Вычитание производят так же, как и сложение, когда рычаг *14* находится в положении «А». Уменьшаемое устанавливают на счетчике результатов через клавиатуру. Затем на клавиатуре устанавливают вычитаемые и нажимают клавишу *12* (—).

Чтобы счетчик оборотов отсчитывал количество вычитаемых в том же направлении, что и при сложении, перед производством вычитания нажимают (до отказа) на клавишу *19*. При нажатии клавиши *19* до середины (полунажатие) счетчик оборотов выключается при всех арифметических действиях, за исключением случаев, когда производится деление обычным способом.

Если при сложении и вычитании не требуется автоматически гасить набранные на клавиатуре числа, то рычаг *14* ставится в положение «М» (от себя).

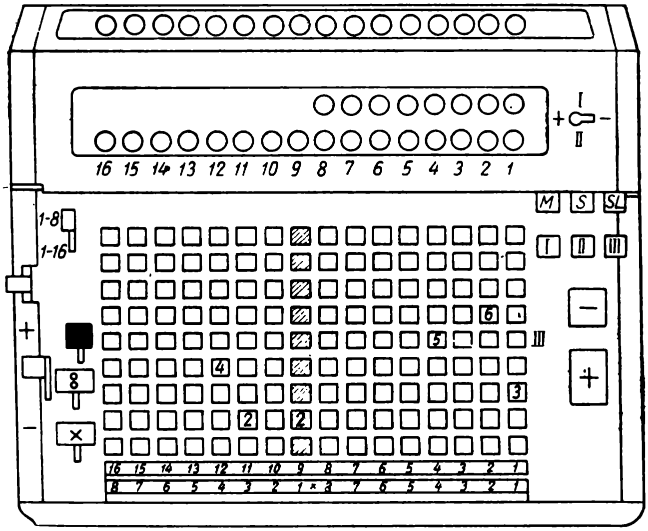
Перед *умножением* чисел, имеющих не более 8 знаков в каждом, рычаг *21* ставят в верхнее положение. Множимое устанавливают в правой части клавиатуры (с 1-го по 8-й разряд), отграниченной красным рядом, а множитель — в левой с 9-го по 16-й разряд. Затем производят автоматическое умножение нажатием клавиши *17* (X). При нажатии на эту клавишу включается мотор и машина сначала делает два подготовительных хода, после которых множитель переходит в умножающий механизм (мультипликатор), множимое остается в правой части цифровой клавиатуры, а каретка автоматически переходит вправо на число разрядов множителя без единицы. После этого начинается автоматический процесс умножения, который продолжается до возврата каретки в начальное положение и освобождения клавиши (X), которая во время всего процесса остается в нажатом положении.

Произведение получается на счетчике результатов *1*, множитель на счетчике оборотов *2*, а множимое — на цифровой клавиатуре.

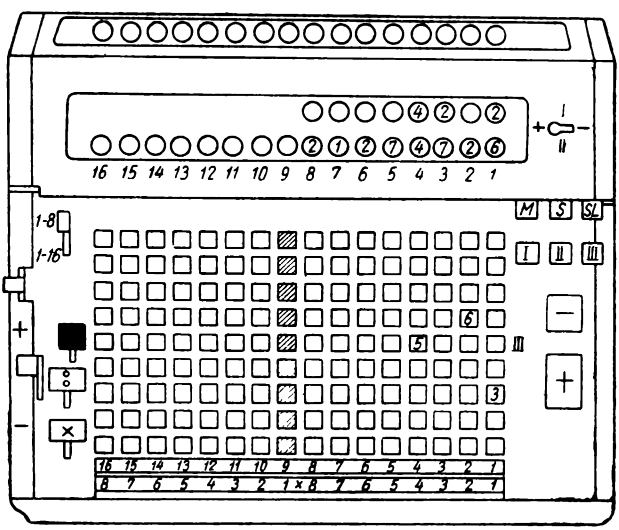
Покажем процесс умножения на примере. Для получения произведения:

$$5063 \cdot 4202 = 21\ 274\ 726$$

работу производят в следующем порядке.



Фиг. 80. Установка множимого и множителя на цифровой клавиатуре



Фиг. 81. Расположение произведения, множимого и множителя после выполнения процесса умножения

1. Рычаг *21* устанавливают в верхнее положение на «1—8», а рычаг *20* — в положение (+).

2. Множимое 5063 устанавливают в правой части клавиатуры, а множитель 4202 — в левой, как показано на фиг. 80, на которой заштрихованными квадратиками показан красный ряд цифровой клавиатуры.

3. Нажимают клавишу умножения (X), отчего включается мотор и машина автоматически выполняет процесс умножения, после окончания которого клавиша (X) поднимается кверху и мотор выключается.

4. Произведение читают на счетчике результатов. Для контроля множитель можно прочесть и на счетчике оборотов, а множимое — на цифровой клавиатуре (фиг. 81).

Если на счетчиках уже находились некоторые числа, то на счетчике результатов получается сумма произведений, а на счетчике оборотов — сумма множителей. На счетчике результатов можно получить как сумму, так и разность произведений; новое произведение вычитается из числа, имеющегося на счетчике результатов, если рычаг *20* установлен на знак (—).

При помощи рычага *21* (фиг. 79) можно найти произведение двух чисел, из которых одно содержит больше восьми знаков, но при этом в самом произведении содержится не более шестнадцати знаков. Действие это выполняют так.

1. Устанавливают рычаг *21* в положение «1—16» (к себе).

2. Множитель с меньшим числом знаков устанавливают в левой части цифровой клавиатуры так, чтобы нижний разряд множителя приходился в красном ряду.

3. Нажимают клавишу умножения (X), после чего машина сделает два подготовительных хода, передаст установленный множитель в умножающий механизм (мультипликатор), каретка передвинется вправо на число разрядов множителя без единицы и остановится в этом положении.

4. На цифровой клавиатуре устанавливают множитель, имеющий больше, чем восемь знаков, так, чтобы нижний разряд множителя приходился на первый разряд цифровой клавиатуры.

5. Переводят рычаг *21* в положение «1—8» (от себя), что вызывает автоматический процесс умножения, который заканчивается после возвращения каретки в исходное положение, а клавиши умножения — в нормальное положение.

На счетчике результатов получится произведение, а на счетчике оборотов — меньший множитель.

Деление на автоматической машине такого типа производят следующим образом. Делимое устанавливают в левой половине клавиатуры, начиная с крайнего левого ряда, делитель — в правой, начиная с красного ряда 15, делящего клавиатуру на две части. После установки делимого и делителя нажимают клавишу деления *18* (фиг. 79), отчего включается мотор и машина сначала делает два подготовительных хода и отводит каретку вправо до отказа, а затем автоматически выполняет деление и по окончании его останавливается; клавиша деления при этом подымается кверху, и мотор выключается.

Заметим, что при умножении красный ряд относится к левой части цифровой клавиатуры, и на нем устанавливается нижний разряд множителя, а при делении к правой части цифровой клавиатуры и на нем устанавливается высший разряд делителя.

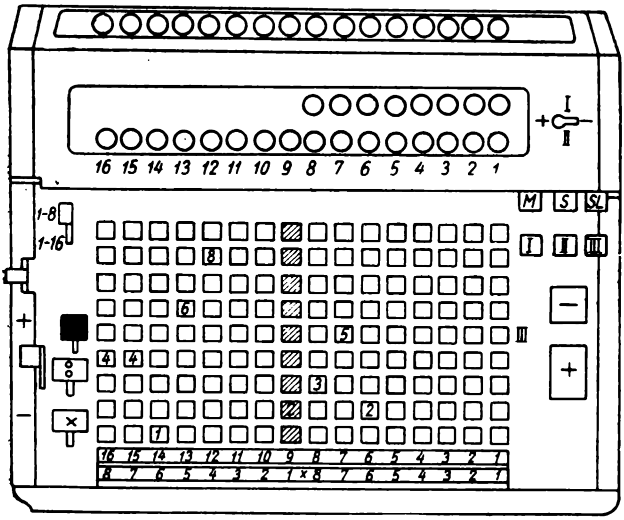
Покажем деление на примере

$$4416{,}8 : 2352 = 1{,}877\,8911.$$

Сначала гасим счетчики и цифровую клавиатуру, а затем выполняем деление в следующем порядке.

1. Устанавливаем делимое 4416,8 в левой части клавиатуры, а делитель 2352 — в правой, как показано на фиг. 82.

2. Нажимаем клавишу деления (:), отчего включается мотор, машина делает два подготовительных хода, а затем автоматически производит деление, по окончании которого на счетчике оборотов получится частное 1,877 891 1, на счетчике результатов — остаток 0,000 132 8, а на цифровой клавиатуре останется установленный делитель 2352.



Фиг. 82. Установка делимого и делителя на цифровой клавиатуре

Перед делением рычаг *22* устанавливают в положение *6* или *8*, в зависимости от необходимого числа знаков в частном. Если вычислитель забудет установить делитель и нажмет клавишу деления *18*, то мотор начнет работать беспрерывно. В этом случае необходимо для выключения мотора кнопку *23*, выступающую слева из кожуха, отвести к себе, после чего мотор остановится, а каретка останется в крайнем правом положении. Для возвращения каретки в начальное положение необходимо нажать клавишу умножения (X). Остановить машину таким образом можно и в том случае, когда необходимо немедленно прервать деление.

Изложенным выше способом можно производить деление на машине Р-38 в том случае, когда делимое содержит не более семи знаков. Если в делимом больше семи знаков, то применяют следующий способ деления. Устанавливают делимое на цифровой клавиатуре, начиная с высшего разряда, и нажимом на клавишу сложения (+) передают его на счетчик результатов. Получившуюся на счетчике оборотов единицу гасят или путем нажима на клавишу *10* (фиг. 79), или путем нажима на клавишу (—). Затем устанавливают делитель так, чтобы его высший разряд приходился в красном ряду, после чего нажимают клавишу деления (:) и по окончании процесса деления получают на счетчике оборотов частное.

При делении таким способом следует установить клавишу *19* в среднее положение, тогда счетчик оборотов будет работать только от клавиши деления и на нем не получится лишней единицы при передаче делимого на счетчик результатов.

Выполнение комбинированных действий упрощается при работе на автоматах, имеющих накапливающий счетчик и дополнительные клавиши *6*, *7* и *8* (фиг. 79). Накапливающий счетчик *3* управляется двумя клавишами *7* и *8*, находящимися на правой стороне машины. Нажатием клавиши *7* число, стоящее на счетчике результатов, передается на накапливающий счетчик. На счетчике результатов получают отдельные произведения, а на накапливающем счетчике—сумму этих произведений. Для гашения накапливающего счетчика необходимо нажать клавишу *8*, отчего число, стоящее на накапливающем счетчике, передается на счетчик результатов, который затем гасится при помощи клавиши *10*.

Рассмотрим некоторые комбинированные приемы вычислений с применением клавиш *6*, *7* и *8*.

Многократное умножение. Клавиша (М), обозначенная на фиг. 79 цифрой *6*, служит для многократного автоматического умножения и возведения в степень. При нажатии клавиши (М) число, находящееся на левой половине счетчика результатов, передается в невидимый снаружи умножающий механизм, после чего в специальном скошке над левой стороной счетчика результатов появляется буква (М), указывающая на то, что этот механизм занят.

Рассмотрим на примере многократное умножение на машине Р-38 СМ. Для нахождения произведения четырех чисел: 0,956 514 7 · · 0,865 835 1 · 0,935 148 1 · 0,895 645 8 = 0,693 654 9 действуют следующим образом:

1) устанавливают число 0,956 514 7 в левой половине клавиатуры так, чтобы последняя цифра *7* расположилась в красном ряду;

2) нажатием клавиши *13* (+) передают это число на счетчик результатов, а затем нажатием клавиши (М) передают его в умножающий механизм, после чего в специальном окошке над левой стороной счетчика результатов появляется буква (М);

3) набирают число 0,865 835 1 в правой половине клавиатуры так, чтобы цифра 8 была правее красного ряда;

4) нажимают на клавишу умножения (Х), после чего на левой половине счетчика результатов появляется произведение 0,956 514 7 · · 0,865 835 1 = 0,828 184 0 . . . , а на счетчике оборотов—число 0,956 514 7;

5) гасят клавиатуру и нажимают клавишу (М), после чего число 0,828 184 0 перейдет в умножающий механизм;

6) в правой части клавиатуры устанавливают число 0,935 148 1 и действуют далее описанным выше образом.

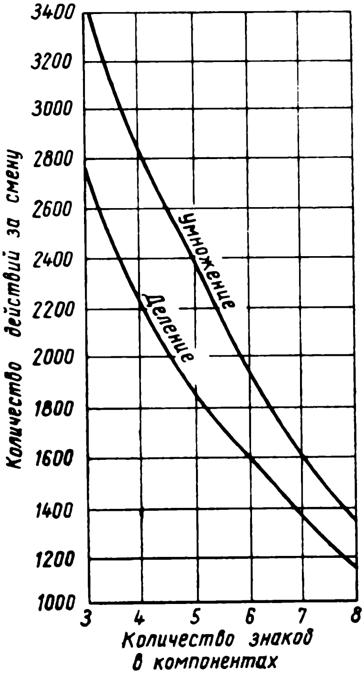
При помощи клавиши (М) весьма удобно на машине Р-38 СМ решать ряд геодезических задач, где требуется выполнять многократное умножение с точностью до 7—8 знаков.

§ 82. О путях повышения производительности труда при работе на малых вычислительных машинах

Темпы роста производительности труда принадлежат к основным показателям развития производства. Повышение производительности труда означает уменьшение затрат рабочего времени на производство единицы продукции, или увеличение количества продукции, производимой за единицу времени. Рост производительности вычислительного труда, как и всякого другого труда, прежде всего зависит от постоянного внедрения и совершенствования передовой техники, от лучшего использования существующих счетных машин, передовых рациональных приемов работы на них.

При работе на малых вычислительных машинах производительность труда главным образом зависит от количества знаков в числах, с которыми производятся арифметические действия; количества записей; количества знаков в результатах, которые приходится записывать; типа машины, на которой производятся вычисления; приема вычислений; условия работы и состояния первичных документов.

При умножении и делении на автоматических вычислительных машинах *увеличение компонентов на одну цифру вызывает падение производительности труда примерно на* 15%, что видно из графика (фиг. 83). На графике показано количество действий, производимых одним вычислителем за смену при наиболее благоприятных условиях работы на 1-ой Московской фабрике механизированного счета Управления союзмашучет*. При записи результатов с одной запасной цифрой чернилами и вычислительным шрифтом, как, например, это принято делать при геодезических вычислениях, количество действий за смену должно быть уменьшено в среднем на 30%.



Фиг. 83. Зависимость производительности труда при работе на автоматической машине САЛ-IIС от количества знаков в компонентах

Данные графика (фиг. 83) показывают, что надо округлять числа так, чтобы не тратить зря времени на вычисления с ненужными цифрами, однако при этом необходимо руководствоваться правилами вычислений с приближенными числами и не снижать точность результатов вычислений.

При умножении и делении на малых автоматических машинах *на запись результата требуется времени примерно столько, сколько на само вычисление* (фиг. 84). Даже при работе на обыкновенном арифмометре на запись затрачивается около 30% времени, требуемого на умножение, и около 20%, требуемого на деление двух чисел. Поэтому надо стремиться производить вычисления без записи промежуточных данных, что дает возможность увеличить производительность труда при вычислении на арифмометре на 10—20%, а при вычислении на автоматических вычислительных машинах на 50—100%. Кроме того, при вычислении без записи промежуточных данных уменьшается влияние ошибок округлений на результаты вычислений и, что весьма важно, уменьшается количество ошибок при списывании результатов со счетчиков.

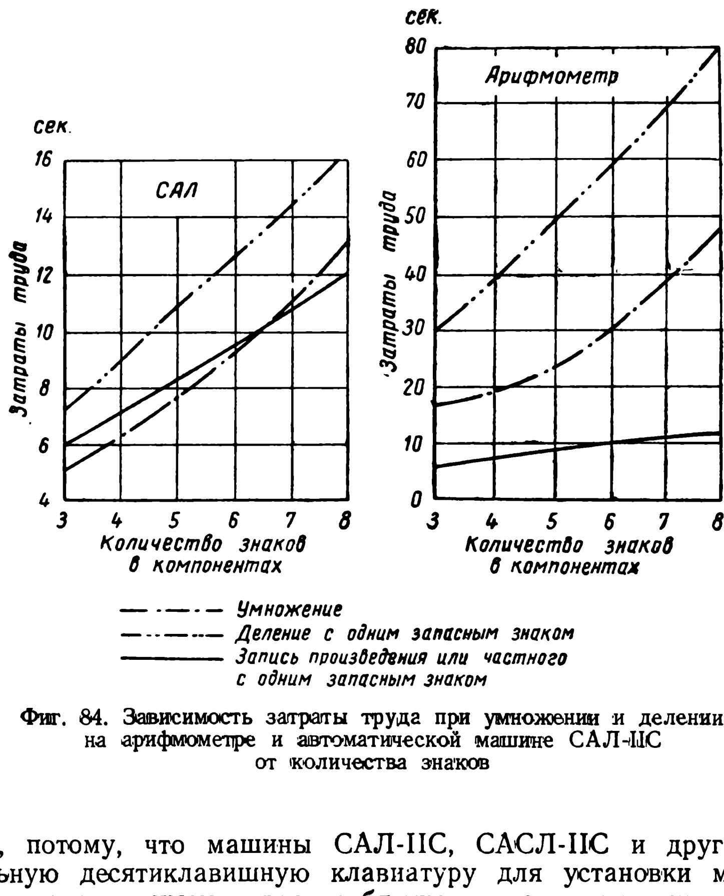
Из фиг. 84 видно, что при работе на автоматической машине САЛ-IIС на одно действие деления затрачивается примерно на 30—40% времени больше, чем на одно действие умножения.

При работе на обычном арифмометре на одно действие деления затрачивается на 60—100% времени больше, чем на одно действие

* Хронометражные нормы для операторов. (Нормирование труда по работе на счетных машинах, М., Госстатиздат, 1953.

умножения. Поэтому при работе на арифмометре и машинах типа САЛ, САСЛ и других желательно преобразовывать формулы так, чтобы в них меньше входило действий деления. Например, деление на $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ следует заменить умножением на $\operatorname{cosec}\alpha$, $\sec\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$; деление трех и более чисел на одно и то же постоянное число следует заменять умножением чисел на величину, обратную этому постоянному числу, и т. п.

При работе на машинах с пропорциональным рычагом (модели 37 и 38) на одно действие умножения затрачивается времени примерно на 10% больше, чем на упомянутых машинах. Это получается, главным



Фиг. 84. Зависимость затраты труда при умножении и делении на арифмометре и автоматической машине САЛ-IIС от количества знаков

образом, потому, что машины САЛ-IIС, САСЛ-IIС и другие имеют специальную десятиклавишную клавиатуру для установки множителя *слепым* методом и имеют приспособление для автоматического гашения счетчиков. Деление на машинах с пропорциональным рычагом на 12% более трудоемко, чем умножение.

Данные, приведенные на фиг. 84, показывают, что автоматические вычислительные машины по сравнению с арифмометром дают возможность увеличить производительность труда в 2—4 раза.

До применения вычислительных машин все формулы старались приводить к логарифмическому виду. С внедрением вычислительных машин алгорифмы, принятые для решения задач ручным способом, необходимо приспособить для решения на вычислительных машинах, по возможности, без записей промежуточных данных. Новое вычислительное средство влияет на всю методику решения задачи.

Предстоит большая научно-исследовательская работа по разработке конструкции больших и малых вычислительных машин для инженерно-технических расчетов. При этом необходимо учесть, что эти расчеты связаны с приближенными числами, тогда как почти все существующие машины, кроме арифмометра А. И. Хохлова, работают по принципу точных вычислений. Поэтому при вычислениях на таких машинах иногда первые слева цифры результата выходят за пределы счетчика.

Для инженерно-технических вычислений наиболее удобны те малые вычислительные машины, которые работали бы по принципу приближенных вычислений и имели бы приспособления для:

1) контроля установки чисел;
2) установки чисел непосредственно в счетчики;
3) передачи чисел из одной части машин в другую;
4) передачи десятков во всех счетчиках.

Кроме того, весьма желательно, чтобы машина имела три счетчика (оборотов, результатов и накапливающий) и приспособление для установки на установочный механизм не только самого числа, но и его знака.

На существующих малых машинах (в частности на обычном арифмометре) можно передавать числа из одной части машины в другую — окольным путем и производить вычисления без записи промежуточных чисел. Эти возможности малых вычислительных машин далеко не используются, что сильно снижает производительность труда при вычислениях на этих машинах.

Ниже приводятся математические выражения, численные значения которых легко вычислять на различных вычислительных машинах без записи промежуточных данных:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ \text{(I)}; \quad a\cdot b\cdot c\ldots \ \text{(II)}; \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i} \ \text{(III)}; \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{c_i} \ \text{(IV)}; \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \ \text{(V)};$$

$$\frac{a\cdot b\cdot c\ldots}{d\cdot e\cdot f\ldots} \ \text{(VI)}; \quad \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}}{c} \ \text{(VII)}; \quad \left\{\frac{a\cdot b\cdot c\ldots}{d\cdot e\cdot f\ldots} \pm km\right\}\frac{q}{Q} \ \text{(VIII)};$$

$$a:(b\cdot c\cdot d\ldots) \ \text{(IX)}; \quad \sqrt{\frac{a\cdot b\cdot c}{d}} \ \text{(X)}; \quad a^n \ \text{(XI)}; \quad \sqrt{a^2+b^2+c^2+\cdots} \ \text{(XII)}.$$

Выражения (I), (V), (VI), (VIII), (X) и (XII) можно вычислять на *обычном арифмометре* без записи промежуточных данных, устанавливая каждое число только один раз (см. § 70—76).

Следует отметить, что если при вычислении на счетчике результатов арифмометра окажется не само число, а его дополнение, то деление производится не путем последовательного вычитания делителя, а путем последовательного прибавления делителя, пока на счетчике результатов появится нуль или число, близкое к нему.

Если, например, на счетчике результатов оказалось дополнение ..999175, это значит, что само число равно —825, которое, допустим, требуется разделить на 25. Действие — 825 : 25 = — 33 выполняется так, что к дополнению ...99175 последовательно прибавляется число 25 до тех пор, пока на счетчике результатов появится нуль, тогда на счетчике оборотов появится число 33.

Выражения (I), (III), (V), (VI), (VII), (VIII), (X) и (XII) можно вычислить без промежуточных записей на полуавтоматических и на автоматических машинах.

Все выражения, кроме (IV), удобно вычислять на автоматической вычислительной машине, описанной в § 80. Выражение II лучше вычислять также на этой машине и на машине КЕЛР-IIС (см. фиг. 75), имеющей специальные приспособления, дающие возможность автоматически передавать числа со счетчика результатов на установочный механизм.

Выражение (IV) легко вычислять на автоматической машине, действующей на принципе пропорционального рычага (см. § 81), пользуясь специальной клавишей для выключения счетчика оборотов при всех действиях, кроме деления.

Мы перечислили возможность некоторых малых вычислительных машин, нашедших наибольшее распространение в Советском Союзе. На этих машинах без записей промежуточных данных можно вычислять выражения (I)—(XII), к которым для увеличения производительности вычислительного труда следует приводить формулы, встречающиеся в вычислительной практике.

Быстрый рост производительности труда в нашей стране является, прежде всего, результатом внедрения новой техники, результатом разработки новых рациональных способов и приемов работы на имеющихся машинах и приборах. Это целиком относится и к вычислительной технике.

§ 83. Некоторые рациональные приемы вычислений на полуавтоматических и автоматических машинах

Повышение производительности труда при работе на малых вычислительных машинах достигается как соответствующим выбором машины, так и применением специальных приемов вычислений. На всех описанных в настоящей главе полуавтоматических и автоматических машинах можно получать алгебраические суммы произведений, частных и производить различные комбинированные вычисления. Рассмотрим некоторые приемы вычислений на полуавтоматических и автоматических машинах.

• *Вычисление выражения вида* $\sum_{i=1}^{n} a_i^2$. Сумму квадратов чисел легко вычислить на любой машине. Но наиболее производительно это выражение можно вычислять на автоматической машине ВК-3, путем только одной установки значений a_i. Возводимое в квадрат число a_i набирается на клавиатуре и затем нажимается клавиша *5* (см. фиг. 70), после чего квадрат числа появится в счетчике результатов.

Вычисление выражения вида $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{c_i}$. Это выражение удобнее всего вычислять на машинах, действующих по принципу пропорционального рычага (модели Р-37, Р-38, Р-37СМ). Для этого клавишу *19* (см. фиг. 79) устанавливают в среднее положение, при котором счетчик оборотов работает только при делении. Множимое a_1 набирают в высших разрядах справа от красного ряда, а множитель b_1 — слева от красного ряда и нажимают клавишу (×). Произведение $a_1 b_1$ получается автоматически в счетчике результатов, а счетчик оборотов остается не занятым. После этого c_1 устанавливают на клавиатуре, начиная с красного ряда, и нажимают клавишу деления. Значение $\frac{a_1 b_1}{c_1}$ получится в счетчике оборотов.

Погасив остаток в счетчике результатов, но не гася счетчика оборотов, аналогично вычисляют $\frac{a_2 b_2}{c_2}$ и в счетчике оборотов получают $\frac{a_1 b_1}{c_1} + \frac{a_2 b_2}{c_2}$. Поступая таким путем и далее, получают в счетчике оборотов искомое выражение $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{c_i}$.

Извлечение квадратного корня. Эту операцию удобно выполнять на автоматических машинах по способу приближений, используя формулу

$$\sqrt{B} \approx \frac{b^2 + B}{2b} = b_1,$$

где b — первое приближение, определяемое на логарифмической линейке или каким-нибудь другим путем.

Найдем $\sqrt{27634}$ с пятью верными значащими цифрами. Выполняем действия в следующем порядке:

1) найденное на логарифмической линейке значение $b = 166$ возводим в квадрат;

2) к полученному числу прибавляем число $B = 27\,634$ и гасим счетчик оборотов;

3) устанавливаем на клавиатуре число $2b$ и производим деление. На счетчике оборотов получим $b_1 = 166{,}23$ с пятью верными значащими цифрами.

Вычисление выражений вида $\frac{a \cdot b \cdot d \ldots}{c \cdot e \ldots}$. При вычислении таких выражений получают на счетчике результатов произведение ab, а затем делят это произведение на c. Полученное частное умножают на d и делят результат на e и т. д.

Пользуясь этим приемом, удобно вычислять длины сторон геодезических сетей по формуле:

$$S_i = S_1 \frac{\sin A_1 \sin A_2 \ldots \sin (A_i + B_i)}{\sin (A_1 + B_1) \sin B_2 \ldots \sin B_i}.$$

Вычисление общей арифметической средины. Общая арифметическая средина вычисляется по формуле

$$x = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

или по формуле

$$x = a_0 + \frac{\varepsilon_1 p_1 + \varepsilon_2 p_2 + \cdots + \varepsilon_n p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} = a_0 + \frac{[\varepsilon p]}{p},$$

где

$$\varepsilon_i = a_i - a_0.$$

Обычно пользуются второй формулой, так как по ней результат получается быстрее.

Пусть требуется определить x по величинам a_i, значения которых равны: 355,316; 355,298; 355,308; 355,314. Веса этих величин соответственно равны: 4,81; 3,20; 0,35; 0,58.

Имеем:

$$x = 355{,}000 + \frac{0{,}316 \cdot 4{,}81 + 0{,}298 \cdot 3{,}20 + 0{,}308 \cdot 0{,}35 + 0{,}314 \cdot 0{,}58}{4{,}81 + 3{,}20 + 0{,}35 + 0{,}58}.$$

На машинах различных моделей величина x вычисляется по разному. При работе на автоматической машине Р-38-СМ (фиг. 79) без использования накапливающего счетчика поступают так.

1. Устанавливают значение $\varepsilon_1 = 0{,}316$ в правой части клавиатуры, а $p_1 = 4{,}81$ — в левой части и нажатием на клавишу (X) выполняют умножение, после чего произведение $p_1\varepsilon_1 = 1{,}519\,96$ получится на счетчике результатов, а вес p_1 — на счетчике оборотов.

2. Не гася счетчиков, умножают p_2 на ε_2, на счетчике результатов получают сумму произведений $p_1\varepsilon_1 + p_2\varepsilon_2$, а на счетчике оборотов сумму весов (множителей) $p_1 + p_2$. Продолжая действовать таким же образом дальше, получают на счетчике результатов $[\varepsilon p]$, а на счетчике оборотов — $[p]$.

3. В правой части клавиатуры устанавливают значение $[p]$ (так, чтобы первая значащая цифра пришлась в красном ряду) и гасят счетчик оборотов. Затем нажимают клавишу деления и на счетчике оборотов получают частное $\frac{[\varepsilon p]}{[p]} = 0{,}309\,11$. Искомая величина $x = 355{,}309$.

Без промежуточных записей значение общей арифметической средины можно вычислять на автоматах Р-37, Р-38, САЛ-IIС, САСЛ-IIС и, следовательно, эти машины можно использовать для решения нормальных уравнений по способу последовательных приближений.

На машине, показанной на фиг. 78, общую арифметическую средину вычисляют следующим образом. Рычаги *20* и *21* (для выключения автоматического гашения счетчиков) ставят в верхнее положение. При умножении числа a_i набирают в высших разрядах полной клавиатуры, а числа p_i — на десятичной клавиатуре и получают в счетчике результатов $\Sigma a_i p_i$, а в счетчике оборотов Σp_i. После этого на полной клавиатуре устанавливают значение Σp_i, гасят счетчик оборотов, нажимают на клавишу деления и в счетчике оборотов получают значение арифметической средины x.

§ 84. Краткие сведения о счетно-аналитических машинах и их применении

Все рассмотренные в настоящей главе малые вычислительные машины (с ручным приводом и с электроприводом) относятся к машинам с ручной установкой исходных данных.

В отличие от этих машин в счетно-аналитические машины исходные данные вводятся автоматически при помощи специального технического документа, называемого *перфорационной картой,* или сокращенно — *перфокартой.*

Большая производительность выполнения массовых вычислительных операций на этих машинах обусловливается в первую очередь автоматическим одновременным (параллельным) вводом нескольких различных чисел в механизмы машины при помощи перфокарт.

Название счетно-аналитические машины относится к комплекту машин, куда включают:

1) три перфоратора, служащие для перфорации (пробивки) карточек;

2) два контрольника, служащие для контроля перфорации*;

3) сортировальную машину, служащую для раскладывания карточек по каким-нибудь признакам;

---

* В настоящее время контроль перфорации на некоторых счетных станциях выполняется без контрольников методом контрольных сумм.

4) табулятор, служащий для выполнения процесса счета (суммирования) и автоматического печатания результатов счета.

Количество и тип машин, входящих в комплект, могут быть разные в зависимости от характера учетной или вычислительной работы.

Сущность работы счетно-аналитических машин заключается в следующем. Выполняется перфорация карточек в соответствии с данными первичных документов. Проверяется правильность перфорации на контрольнике, и проверенные карточки при помощи сортировки группируются по определенным признакам, в соответствии с предстоящим подсчетом на табуляторе. Затем суммируют и автоматически печатают ведомости на табуляторе. Перфокарты обрабатывают на сортировках и табуляторах обычно столько раз, сколько признаков (разрядов) предусматривается в учетной ведомости, например столько раз, сколько имеется земельных угодий, если земли учитывать по угодьям.

Числа, зашифрованные на перфокартах отверстиями, могут восприниматься сортировками и табуляторами механическим или электрическим путем. Выпускаемые в СССР счетно-аналитические машины являются электро-механическими. Перфокарта проходит между валиком и щеткой, последняя через отверстие в перфокарте касается валика и дает импульс тока, который путем коммутации* направляется в соответствующие механизмы машины.

Перфокарта

Перфокарта (фиг. 85) изготовляется из специального картона; она имеет стандартные размеры (длина $187{,}4 \pm 0{,}1$ *мм*; ширина $82{,}5 \pm 0{,}1$ *мм*; толщина $0{,}18 \pm 0{,}02$ *мм*), отклонение от которых недопустимо, так как перфокарты других размеров или не будут восприниматься механизмами машин, или в результаты вычислений будут вноситься ошибки. На лицевой стороне перфокарты напечатано десять строк (позиций) цифр, причем в каждой строке цифры одинаковы. В СССР применяются перфокарточки двух видов: 45-колонные, имеющие 45 цифр в каждом ряду (строчке) и 80-колонные, имеющие 80 цифр в каждом ряду.

Исходные цифровые данные фиксируются на карте путем пробивки отверстий. В 45-колонных карточках отверстия пробиваются круглые, а в 80-колонных — прямоугольные. Для контроля правильности укладки карточек левый верхний угол каждой карточки срезается.

На перфокарту наносят все числовые данные в десятичной системе счисления, входящие в расчет; в каждой колонке пробивается только одно отверстие. Таким образом, для обозначения n-значного числа требуется n колонок. В перфокарте (фиг. 85) в колонках 5, 6, 7, 8 пробито число 6254; в колонках 12, 13, 14, 15 — число — 2167; в колонках 18, 19, 20, 21 — число 0250; в колонках 27, 28, 29, 30 — число 0500. Непробитые колонки между зафиксированными на перфокарте числами иногда оставляют для внесения дополнительных данных в процессе вычисления.

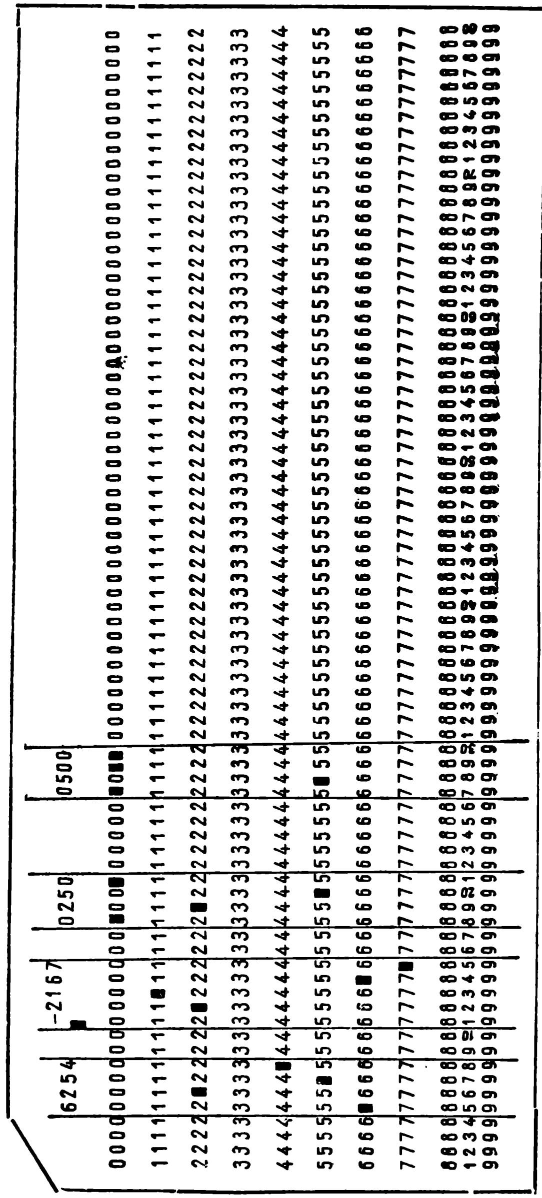
В каждой колонке перфокарты могут быть пробиты еще одно или два отверстия (выше нулевого ряда), называемые надсечками и предназначаемые для знака числа или обозначения условных признаков. Например, чтобы отметить, что число отрицательное, в 11 строке делают надсечку (на фиг. 85 число — 2167).

Таким образом, на перфокарте показываются исходные рабочие числа и числа обозначений признаков.

---

* Коммутация или настройка машины заключается в соединении контактов с помощью шнуров, по которым передаются электрические сигналы.

Размещение чисел на перфокарте ведется по определенной системе. План размещения чисел, соответствующих определенным признакам

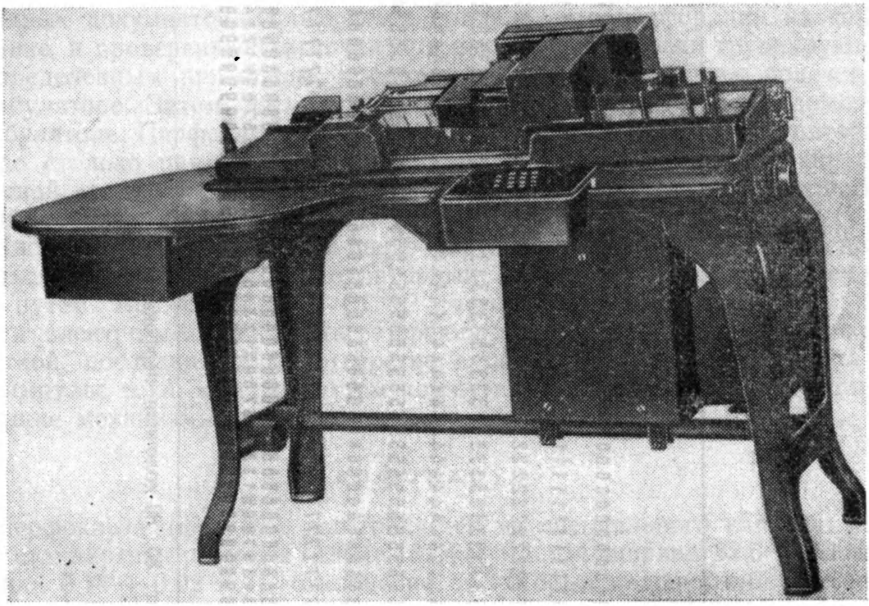


Фиг. 85. 80-колонная перфокарта

(разрезам), называется макетом перфокарты. Совокупность перфокарт составляет массив, который для осуществления расчета на счетно-аналитических машинах соответствующим образом группируется.

Перфораторы

Для перенесения данных на перфокарты путем пробивки отверстий служат особые машины, называемые перфораторами (фиг. 86), которые бывают одноперидными и двухпериодными. На однопериодных перфораторах отверстия на карточках пробиваются в момент нажатия на цифровую клавишу, при этом карточка автоматически сдвигается влево на одну колонку. На двухпериодных перфораторах карточка остается



Фиг. 86. Перфоратор однопериодный П-80

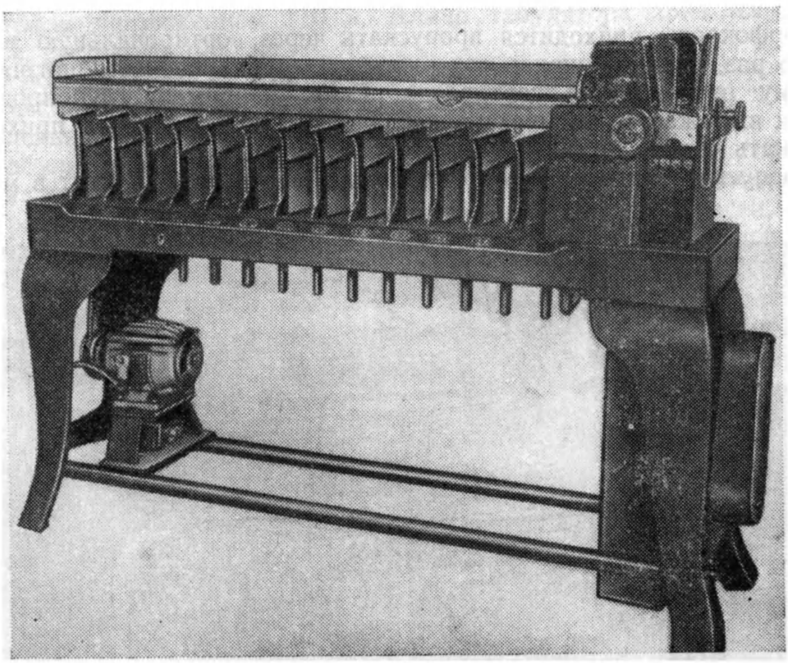
неподвижной и не пробивается во время набора чисел на клавиатуре машины. После окончания набора производится одновременно пробивка отверстий во всех колонках перфокарты.

Перфораторы являются подготовительными машинами. В комплекте счетно-аналитических машин они служат для ручного перенесения данных из первичного документа на перфокарту. Перфорация требует много времени, так как она выполняется ручным способом. Опытный оператор может пробить за 8 часов до 2500 карт. Для загрузки перфоратора имеется магазин, вмещающий около 250 карт. Перфоратор П-80 приводится в действие электромотором мощностью 75 *вт* от сети постоянного тока напряжением 110 *в*. Вес машины около 75 *кг*.

Качество учета или вычислений при помощи счетно-аналитических машин определяется тождественностью зафиксированных числовых данных соответствующим первичным документам. Для проверки перфорации применяются контрольные аппараты, называемые *контрольниками*. Работа по контролю перфокарт аналогична работе по пробивке карточек.

Карточки укладываются в магазин машины и затем подаются в контрольный механизм ее. Если при ручном наборе данных на клавиатуре контрольника набираемые числа не будут соответствовать отверстиям проверяемой перфокарты, то транспорт перфокарт прекращается, что сигнализирует о неправильности пробивки. Правильность пробивки перфокарт часто проверяют без контрольников, путем просматривания на свет (постоянные признаки) и другими способами. Для 80-колонного комплекта употребляется контрольник К80-1, на котором производят проверку правильности перфорации и подсчет количества проконтролированных карт. Производительность машины около 300 перфокарт в час. Питание электроаппаратуры контрольника и его мотора осуществляется от постоянного тока напряжением 110 *в*, мощностью 140 *вт*. Вес машины около 24 *кг*.

На перфорацию карточек и контроль правильности перфорации требуется около 70% времени, затрачиваемого на всю работу.



Фиг. 87. Сортировальная машина

Сортировка

Сортировальная машина сортирует перфокарты в определенной последовательности по группам, имеющим общие признаки. Главнейшие части машины: магазин для подачи перфокарт, транспортная система, сортировальное устройство и сортировальные карманы.

Для 80-колонного комплекта счетно-аналитических машин выпускается сортировка С80-1 (фиг. 87), которая, кроме обыкновенной раскладки перфокарт по группировочным признакам, может производить:

1) выборочную сортировку по всем 12 позициям перфокарты, т. е. исключение из сортировки и направление в запасной карман перфокарт, имеющих пробивки, по которым сортировка не должна производиться;

2) сортировку перфокарт с объединением групп, т. е. укладку в один сортировальный карман перфокарт, имеющих в колонке, по которой идет сортировка, различные пробивки;

3) отбор перфокарт по признаку предыдущей карты;

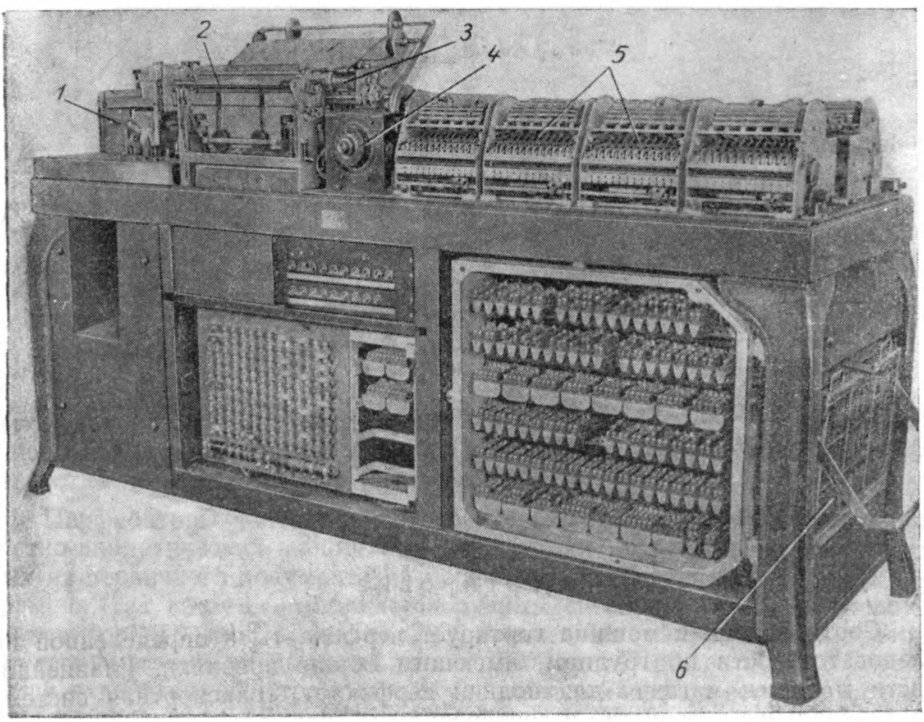
4) отбор перфокарт по любому многозначному признаку в пределах 12 рядом стоящих колонок;

Машина С80-1 приводится в действие от электродвигателя переменного тока напряжением 220 или 380 *в*, мощностью 0,6 *квт*. Питание электроаппаратуры машины С80-1 осуществляется от источника постоянного тока напряжением 110 *в*. Машина С80-1 имеет вес 265 *кг* и размеры: длину 1620 *мм*, ширину 420 *мм*, высоту 1150 *мм*.

Машина имеет 13 сортировальных карманов вместимостью по 500 перфокарт каждый. В приемном механизме вмещается до 900 перфокарт.

Перфокарты приходится пропускать через сортировальную машину столько раз, сколько знаков содержатся в группировочном признаке, по которому производится сортировка. Если, например, группировочный признак выражается четырехзначным числом, то перфокарты приходится пропускать четыре раза.

Пропускная способность сортировки около 400 перфокарт в минуту.



Фиг. 88. Табулятор Т-5 со снятыми щитками:

1 — подающий механизм; *2* — печатающий механизм; *3* — каретка; *4* — интервальный автомат; *5* — счетчики; *6* — коммутационная доска

Табулятор

Табулятор — многосчетчиковая, автоматически работающая счетно-печатающая машина. Табулятор выполняет два основных вида работы:

1) «на печать» — построчную запись чисел, воспринимаемых с перфокарт, и накопление их в счетчиках с последующей записью накопленных итогов;

2) «на итоги» — запись признаков (воспринимаемых с первой перфокарты группы), подсчет рабочих числовых величин без записи с последующей записью накопленных итогов.

Наша промышленность выпускает табуляторы различных моделей. К числу лучших относится табулятор Т-5 (фиг. 88), техническая скорость которого около 5000 карто-ходов в час «на печать» и 9000 — «на итоги».

Табулятор оснащен электромотором мощностью 0,3 *квт*, работающим со скоростью 960—1800 оборотов в минуту. После включения мотор работает непрерывно и приводит в действие все механизмы машины. Питание электропривода и электроаппаратуры осуществляется постоянным током напряжением 110 *в*. Длина табулятора 2300 *мм*, ширина 800 *мм*, вес около 1000 *кг*.

Основные узлы табулятора: 1) устройство подачи и восприятия карточек; 2) счетный механизм; 3) печатающий механизм; 4) устройство управления.

Табулятор Т-5 имеет 8 одиннадцатиразрядных счетчиков, семь печатающих секций, из них шесть по 12 знаков и одна — 11 знаков. Счетчики расположены на верхнем столе машины в правой части, начиная от печатающих механизмов (фиг. 88). Разряды каждого счетчика имеют выход на коммутационную доску машины, что дает возможность использовать каждый из них в отдельности.

На табуляторе Т-5 имеется 145 реле 42 типов, размещенных на трех рамах, из которых одна смонтирована под столом спереди машины (фиг. 88), а две другие также под столом сзади машины.

Табулятор предназначен, главным образом, для сложения и вычитания чисел; на нем можно делать до 72 000 сложений в час. Табулятор Т-5 можно настроить на умножение на основе последовательного сложения чисел. Однако умножение и некоторые специальные расчеты лучше производить на специальных для этих работ счетно-аналитических машинах.

Счетно-аналитические машины специального назначения

К таким счетно-аналитическим машинам, способствующим еще большей механизации учета и особенно вычислительных работ, относится умножающий перфоратор ПУ-80 (фиг. 89), основное назначение которого умножать два или больше чисел, пробитых на одной или нескольких карточках. Результаты арифметических действий (произведение, сумму произведений и др.) перфоратор автоматически пробивает на той же карточке, в которой пробиты исходные данные или в другой специальной выделенной для этого карточке.

Счетная система состоит из пяти одиннадцатиразрядных счетчиков, четыре из которых предназначены, главным образом, для умножения, а один только для сложения и вычитания.

Во время умножения перфокарта проходит через воспринимающий блок. Щетки блока нащупывают отверстия, при помощи которых зафиксированные множимое и множитель через коммутационное соединение направляют на соответствующие счетчики.

Перфоратор выполняет умножение не путем последовательного сложения (так как этот метод требует много времени), а с помощью специального умножающего устройства, состоящего из нескольких десятков электромагнитных реле (по принципу палочек Неппера).

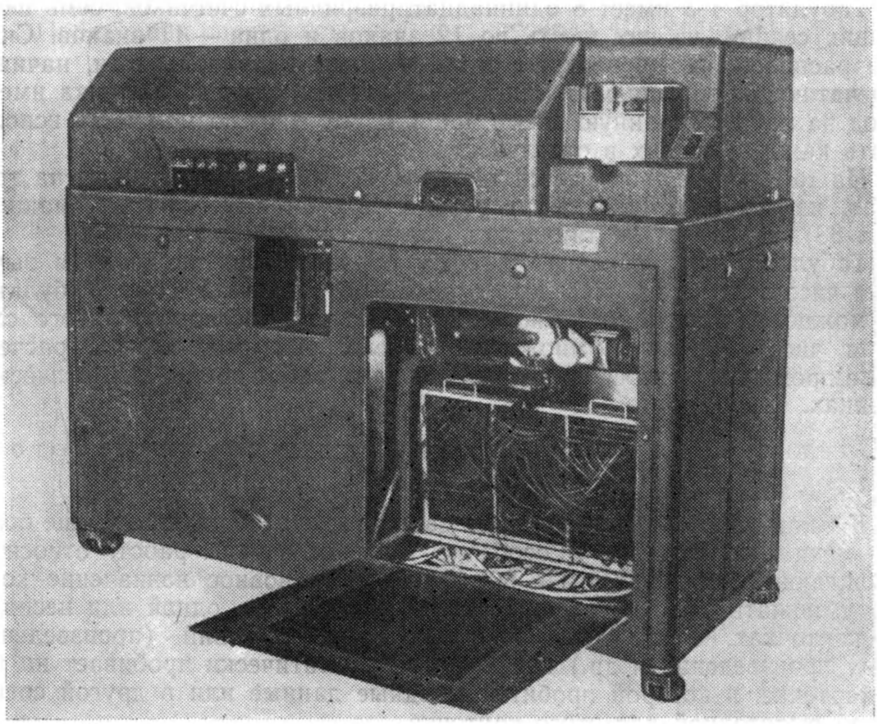
Счетчики множимого и множителя позволяют производить умножение семизначных на восьмизначные числа. Умножение на однозначное число производится за один рабочий цикл.

Производительность перфоратора колеблется от 500 произведений в час при семизначном множителе до 1200 при однозначном; количество цифр множимого в этом случае не играет роли. Имеются умножающие перфораторы и с большей производительностью.

На умножающем перфораторе можно получить выражения вида

$$c \pm a \cdot b; \quad a \cdot b \cdot c; \quad \sum_{i=1}^{n} a_i b_i; \quad (a \pm b)\, c.$$

Умножающий перфоратор можно настроить так, что он будет автоматически округлять результаты вычислений и округленные числа пробивать на карточках, что очень важно при инженерно-технических расчетах. Умножающий перфоратор ПУ-80 приводится в движение электромотором переменного тока напряжением 127 или 220 *в* мощностью 250 *вт*.



Фиг. 89. Умножающий перфоратор ПУ-80

Отметим еще важную для инженерно-технических вычислений машину — *итоговый перфоратор*. При решении некоторых задач найденные на табуляторе значения являются входными данными для получения других значений неизвестных. При решении, например, систем нормальных уравнений методом итерации значения неизвестных, вычисленные в первом приближении, являются входными данными для получения неизвестных во втором приближении и т. д. В этом случае при работе на счетно-аналитических машинах возникает необходимость в пробивке на карточках неизвестных, полученных на табуляторе. Такую пробивку выполняет автоматически итоговый перфоратор, который может пробивать до 5000 карточек в час.

В настоящее время для выполнения трудоемких вычислительных работ применяются *электронные вычислительные перфораторы,* на которых удобно и быстро можно выполнять все первые четыре арифметические действия. К числу таких машин относится электронный вычислитель ЭВ80-3 (см. стр. 224).

Счетно-аналитические машины на протяжении последнего полувека успешно применяются в различных странах для проведения учетно-статистических и бухгалтерских работ. В СССР комплекты этих машин установлены на различных предприятиях, в министерствах, на машино-счетных станциях и на фабриках механизированного счета. Этими машинами укомплектованы и машино-счетные межколхозные станции, которые организованы в некоторых областях нашей страны.

В последнее время счетно-аналитические машины применяются при составлении различных таблиц, астрономических и геодезических вычислениях большого объема.

§ 85. Краткие сведения об электронных вычислительных машинах и их применении

Электронные вычислительные машины являются наиболее мощным средством механизации однотипных вычислительных работ больших объемов. На электронных вычислительных машинах можно решать за несколько часов такие задачи, на решение которых при помощи арифмометра требуется десятки и даже сотни лет (см. § 86). Современная электронная машина в одну секунду может производить более 20 000 сложений и более 2000 умножений десятизначных чисел.

Электронные машины разделяют на два типа: *цифровые машины,* называемые машинами дискретного счета и *моделирующие устройства,* которые называют машинами непрерывного действия. Цифровые машины производят арифметические действия с числами, представленными в виде цифр, а машины непрерывного действия оперируют с величинами, представленными в виде электрических напряжений, или какими-нибудь другими физическими величинами. Точность цифровых машин ограничивается числом разрядов в счетчиках, т. е. может быть весьма большой; точность же машин непрерывного действия ограничивается точностью измерения электрических напряжений, значения которых могут быть получены с 2—3 значащими цифрами.

В настоящем параграфе мы рассмотрим в общем виде принципы действия цифровых вычислительных машин.

Цифровые вычислительные машины разделяются на *универсальные,* которые способны производить любые вычисления и *специализированные,* предназначенные для решения специальных задач. Так, например, имеются специализированные машины для баллистических расчетов, для решения линейных уравнений и др.

Электронные быстродействующие вычислительные машины представляют собой сложный комплекс большого количества различных элементов электронной автоматики.

Основными элементами электронных вычислительных машин являются электронные лампы и полупроводники, которые могут проводить или не проводить ток, т. е. находиться в состоянии «открыто» или «закрыто». В соответствии с этими двумя устойчивыми состояниями при работе на электронных вычислительных машинах чаще всего пользуются двоичной системой счисления, в которой используются только две цифры: единица и нуль.

Системы счисления, употребляемые в электронных вычислительных машинах

При выполнении вычислений на электронных вычислительных машинах чаще всего пользуются двоичной или двоично-десятичной системами счисления. В десятичной системе счисления всякое число N можно представить с помощью степеней десяти следующим образом

$$N = a_r a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0 = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \cdots + + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0.$$

Например, для $N = 6853$ будем иметь

$$6853 = 6.10^3 + 8.10^2 + 5.10^1 + 3.10^0.$$

Для двоичной системы счисления аналогично будем иметь равенство, изображающее данное число с помощью степеней двойки

$$N = a_m 2^m + a_{m-1} 2^{m-1} + \cdots + a_2 \cdot 2^2 + a_1 2^1 + a_0 \cdot 2^0.$$

В десятичной системе счисления в любом разряде числа допустимы цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. В двоичной системе счисления в каждом разряде допустимы только цифры 0 или 1, т. е. любое число в этой системе записывается комбинацией цифры 0 и цифры 1. Так, например, число 49 в двоичной записи изобразится числом 1 1 000 1 и по степеням двойки представится следующим образом:

$$1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 49.$$

В десятичной системе каждый следующий разряд в десять раз больше предыдущего, а в двоичной системе каждый следующий разряд в два раза больше предыдущего.

Применение двоичной системы увеличивает число разрядов, но зато снижает число употребляемых цифр до двух. Это обстоятельство особенно важно, так как в электронных машинах единицу удобно представить электрическим импульсом, а нуль отсутствием его. Это может быть проводящее или непроводящее состояние электронной лампы («да» или

Таблица 37

Числа					
десятичные	двоичные	десятичные	двоичные	десятичные	двоичные
0	0	10	1010	20	10100
1	1	11	1011	21	10101
2	10	12	1100	22	10110
3	11	13	1101	23	10111
4	100	14	1110	24	11000
5	101	15	1111	25	11001
6	110	16	10000	26	11010
7	111	17	10001	27	11011
8	1000	18	10010	28	11100
9	1001	19	10011	29	11101

«нет»). Кроме того, в двоичной системе чрезвычайно просто выполняются арифметические действия и в машинах, работающих по этой системе, уменьшается количество используемых элементов.

В табл. 37 для примера приведены первые 29 чисел натурального ряда в десятичной и двоичной системах.

Сложение и умножение в двоичной системе сводится к следующим простым действиям: $0+0=0$, $0+1=1$, $1+0=1$, $1+1=10$, $0\times 0=0$, $0\times 1=0$, $1\times 1=1$.

Сложим, например, числа 11 и 6, которые в двоичной системе соответственно изобразятся числами 1011 и 110:

$$\begin{array}{r} 1011 \\ +\ 110 \\ \hline 10001 \end{array}$$

Умножение в двоичной системе сводится к умножению на 0 или 1. Например, при умножении 7 на 5 имеем:

$$\begin{array}{r} 111 \\ \times\ 101 \\ \hline 111 \\ 111\ \ \\ \hline 100011 \end{array}$$

Значительным недостатком применения двоичной системы является необходимость переводить числа из десятичной системы в двоичную и обратно. Хотя этот перевод обычно выполняют машины, но на это требуется дополнительное время. Кроме того, запись чисел в этой системе занимает много места и не дает возможности читать числа в машине. Поэтому в некоторых новых машинах используется десятичная система, но каждая цифра разряда дается в двоичной системе. Такую систему называют двоично-десятичной.

Элементы электронных цифровых машин и их назначение

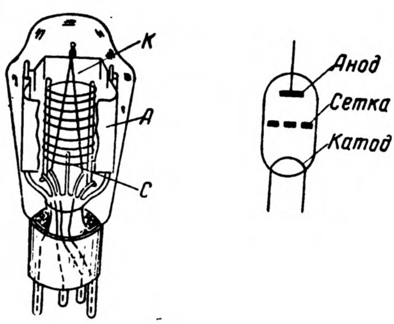
В современных вычислительных машинах применяются различные средства электронной автоматики. В машинах используются электронные лампы, кристаллические элементы (полупроводники), электронно-лучевые трубки, фотоэлементы, магнитные элементы и другие радиотехнические средства.

Основным элементом электронных цифровых машин является *электронная лампа*. Она представляет собой вакуумный сосуд, в котором находятся два основных электрода — катод и анод и несколько дополнительных электродов специального назначения.

Действие простейшей электронной лампы, имеющей только два основных электрода и носящей название *диод*, заключается в том, что из раскаленного катода испускаются электроны, которые затем под действием положительного напряжения на аноде притягиваются к последнему и образуют так называемый анодный ток.

В трехэлектродной лампе, носящей название — триод (фиг. 90), третий электрод, выполненный в виде сетки, расположен между анодом и катодом и управляет анодным током. Сетка, как и другие электроды, имеет вывод наружу лампы и соединена с некоторым источником электрических импульсов.

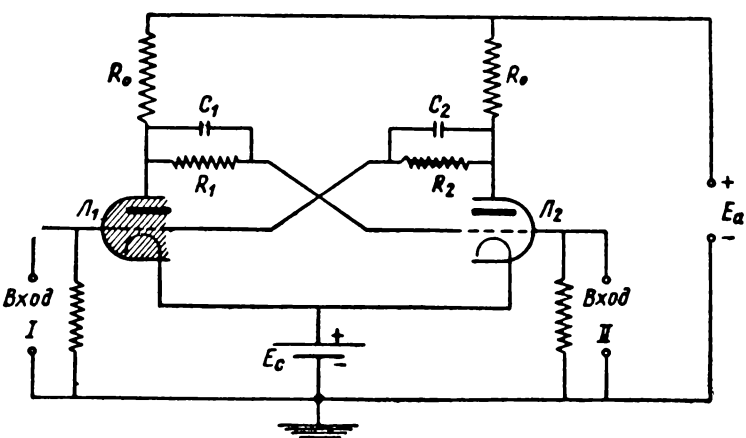
Управление анодным током в триоде заключается в следующем. Если от источника импульсов подается на сетку отрицательное напряжение, то притяжение электронов к аноду уменьшается, вследствие чего уменьшается и анодный ток и при некотором отрицательном напряжении на сетке анодный ток может совершенно прекратиться. Наоборот, если на сетку подается положительное напряжение, то притяжение электронов к аноду увеличивается, вследствие чего увеличивается и анодный ток. Сетка расположена в лампе очень близко к катоду, поэтому воздействие ее электростатического поля на электроны значительно сильнее поля анода.



Фиг. 90. Устройство трехэлектродной лампы (триода)

При помощи управляющей сетки в электронной лампе может быть получено два состояния: лампа «открыта», что значит идет анодный ток; лампа «закрыта», что значит ток отсутствует.

В электронных цифровых машинах используется электронное реле, называемое триггером, которое в простейшем случае представляет собой параллельное соединение двух триодов $Л_1$ и $Л_2$ (фиг. 91) с дополнительным взаимным соединением через сопротивления R_1 и R_2 анода одной лампы с сеткой другой лампы. Благодаря такому соединению триггер обладает двумя устойчивыми состояниями, в одном из которых закрыта одна лампа, в другом — другая. Выход из одного устойчивого состояния и вход в другое осуществляется под действием внешнего импульса, подаваемого на соответствующий вход в триггер. Время перехода триггера из одного устойчивого состояния в другое составляет величину порядка одной микросекунды.



Фиг. 91. Схема триодного триггера

Конденсаторы C_1 и C_2 служат для уменьшения времени срабатывания триггера; это достигается тем, что емкости конденсаторов шунтируют высокоомные сопротивления R_1 и R_2, а сопротивление конденсаторов импульсу невелико.

В дальнейшем для различия двух устойчивых состояний триггера будем обозначать одно из них (все равно какое) 1, а другое 0.

Из нескольких триггеров можно составить триггерные схемы. Такие схемы могут автоматически считать посылаемые в них импульсы, т. е.

могут играть роль счетчиков. Триггер переключается из одного состояния в другое, когда в него попадает импульс тока. Подавая на схему триггеров ряд импульсов тока, изображающих число в двоичной системе, можно за микросекунды произвести сложение этого числа с числом, которое уже стояло в схеме триггеров. Путем последовательного сложения можно выполнить умножение чисел. При сложении отрицательных чисел берут их дополнения. Деление выполняют путем многократного вычитания.

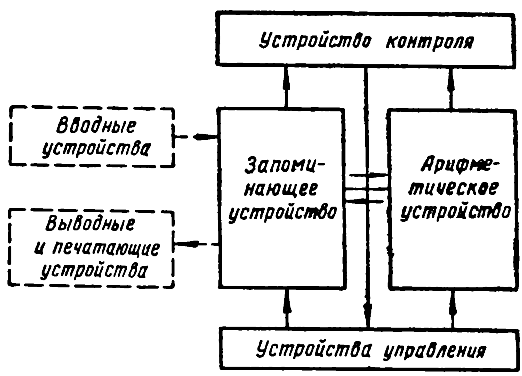
В электронных счетных машинах триггерные системы применяются в качестве электронных реле, электронных переключателей, усилителей импульсов и пр.

В последнее время вместо электронных ламп в некоторых электронных машинах стали применять полупроводники, обладающие значительными преимуществами перед электронными лампами. Полупроводники отличаются малыми размерами, прочностью, большим сроком службы и малым потреблением электроэнергии. Кристаллический триод — маленький кусочек германия или кремния с тремя выводами — заменяет собой громоздкую электронную лампу.

Современные большие электронные вычислительные машины содержат тысячи электронных ламп, полупроводников и разных радиодеталей. Для работы на электронных машинах, построенных на электронных лампах, требуется несколько десятков и даже сотен киловатт электроэнергии; машины же, построенные на полупроводниковых приборах, расходуют электроэнергии в десятки и сотни раз меньше.

Устройство электронных цифровых машин

Электронная цифровая машина состоит из следующих основных устройств, соединенных между собой каналами связи, по которым передаются необходимые числа и команды управления (фиг. 92).



Фиг. 92. Блок-схема электронной вычислительной машины

1. *Вводное устройство*, при помощи которого вводят в машину исходные числовые данные и программу вычислений. Ввод данных в машину осуществляется при помощи перфокарт, перфолент, магнитных лент и при помощи других средств.

Группа символов, зафиксированных на перфоленте или на другом каком-нибудь носителе исходных данных, выражающих последовательность операций, называется программой. Содержание программы зависит как от вида задачи, которую надо решать, так и от конструкции вычислительной машины.

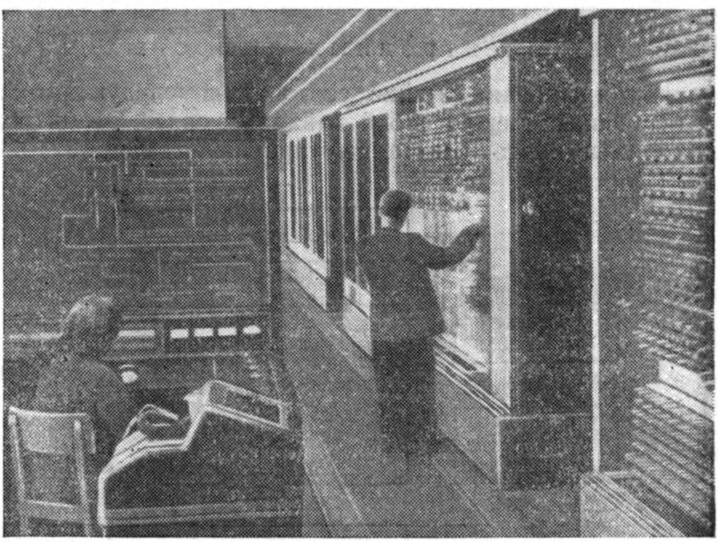
2. *Запоминающее устройство,* служащее для хранения промежуточных результатов и запоминания последовательности команд, которые требуются в будущих операциях. Команды программы кодируются в виде условных чисел, которые также хранятся в запоминающих устройствах. В электронных машинах обычно имеется два вида запоминающих устройств: оперативное (быстродействующее), например, электроннолучевые трубки, и дополнительное (медленное) — магнитный барабан, лента и др. В первом хранятся данные, часто используемые непосредственно в процессе вычислений, а во втором — остальные.

3. *Арифметическое устройство,* служащее для непосредственного сложения, вычитания, умножения и деления чисел, а также для выполнения некоторых простейших логических операций, например, сравнения чисел по абсолютной величине и с учетом знака.

4. *Устройство управления машиной,* обеспечивающие автоматическое выполнение заданной последовательности действий в соответствии с программой. Это устройство дает указание машине, где брать данные, как выполнять операции и куда направлять результаты.

5. *Устройство контроля,* служащее для сигнализации о неисправности машины и обнаружения ошибок в вычислениях.

6. *Выводное устройство,* при помощи которого результаты вычислений выводятся из машины; при этом используются перфокарты, перфоленты, магнитные ленты, печатающие машины и др.

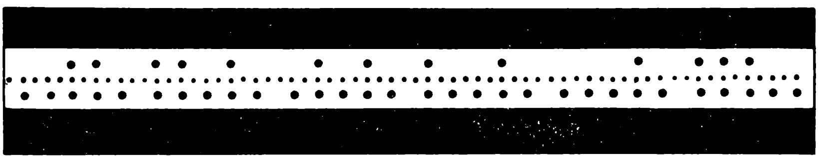


Фиг. 93. Общий вид БЭСМ

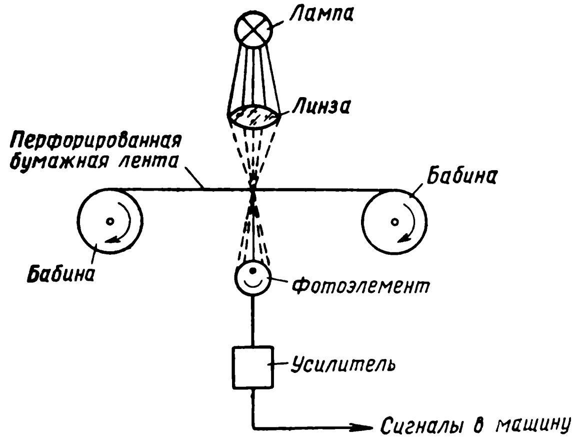
Первая большая электронная вычислительная машина ЭНИАК, сконструированная в Пенсильванском университете, была выпущена в 1946 г. Эта машина имела около 18 000 электронных ламп, весила около 30 *т*. Впервые она предназначалась для вычисления таблиц стрельбы: на вычисление траектории снаряда на этой машине затрачивается значительно меньше времени, чем требуется снаряду для поражения цели. В настоящее время машина ЭНИАК модернизирована и лучше приспособлена для решения задач по баллистике. Между прочим, на этой машине было вычислено число π с 2000 знаков, 2000 знак оказался равным нулю.

С 1951 г. в СССР работает быстродействующая электронная машина БЭСМ (фиг. 93), построенная под руководством академика С. А. Лебедева. Машина имеет около 5000 электронных ламп; на ней решают различные инженерно-технические задачи с большим объемом вычислений. В частности на ней получены значения 268 неизвестных, входящих в 800 начальных уравнений погрешностей. Решение этих уравнений методом итераций было выполнено менее чем за 20 часов, при этом сделано около 250 миллионов арифметических действий.

Ввод чисел и команд в БЭСМ осуществляется при помощи перфорированной бумажной ленты (фиг. 94), на которой предварительно пробиваются на специальных перфораторах отверстия, соответственно кодам чисел или команд.



Фиг. 94. Фотография перфорированной ленты



Фиг. 95. Схема вводного устройства

Вводное устройство состоит из двух бабин (катушек), на которые намотана бумажная лента (фиг. 95). Перфолента автоматически перематывается с одной бабины на другую, проходя над фотоэлементом под осветительной лампой. Свет от лампы через отверстия в ленте поступает на фотоэлемент, преобразуется в электрические сигналы и поступает в запоминающее устройство машины.

В качестве быстродействующего запоминающего устройства в БЭСМ использованы электронно-лучевые трубки, принцип работы которых напоминает работу телевизионных трубок. Всего в этом запоминающем устройстве может храниться до 1024 чисел. Каждое число может изображаться 32 двоичными разрядами (10-ю десятичными знаками). Перевод чисел из десятичной системы в двоичную и обратно выполняется самой машиной.

Дополнительные (медленные) запоминающие устройства БЭСМ состоят из магнитного барабана и магнитных лент. Магнитный барабан имеет емкость в 5120 чисел, он совершает 750 оборотов в минуту. На магнитных лентах использован принцип магнитной записи электрических импульсов аналогично записи звука на магнитофоне.

Арифметическое устройство БЭСМ параллельного действия осуществлено на триггерных ячейках (электронное реле). Сложение чисел на арифметическом устройстве выполняется менее чем за три миллисекунды. Контроль правильности вычислений выполняется при помощи специальных устройств, или путем программирования для вычислений в «две руки», со сличением на определенном этапе полученных результатов.

Вывод результатов вычислений, полученных на БЭСМ, осуществляется путем записи их на магнитную ленту, с которой затем (вне машины) числа печатаются на кинопленку на специальном фотопечатающем устройстве со скоростью 200 чисел в секунду. Кроме фотопечатающего устройства, в БЭСМ имеется электромеханическое печатающее устройство, работающее непосредственно от машины со скоростью около 100 чисел в минуту. Электромеханическое печатающее устройство используется в случаях, когда результаты вычислений занимают небольшой объем по сравнению с общим объемом вычислений. Это же устройство используется для печати контрольных значений в процессе вычислений.

Кроме БЭСМ, у нас сконструированы и успешно применяются другие, как большие, так и малые электронные вычислительные машины: Стрела-1, МЭСМ, Урал, Кристалл, ЭВ-80-3 и др.

Машина ЭВ-80-3 состоит из электронного вычислителя и автоматического перфоратора. Исходные данные, вводимые в машину, и результаты вычислений пробиваются на восьмидесятиколонных перфокартах. ЭВ-80-3 есть малогабаритная (весом около 1,5 *т*) машина. Скорость работы машины 100 перфокарт в минуту. За время прохода одной карты машина выполняет 4 умножения восьмизначных чисел. На решение на этой машине 30 линейных алгебраических уравнений требуется около 4 часов времени работы машины и около 11 часов на ручную перекладку перфокарт.

Заслуживает внимания для геодезических вычислений универсальная автоматическая вычислительная машина «Урал». В комплект машины входят 2 перфоратора, 2 печатающих устройства, 1 клавишное устройство, занимающие площадь около 50 $м^2$.

Машина «Урал» производит операции над числами, имеющими 9—10 десятичных знаков со скоростью в среднем около 100 действий в секунду. Счет в машине выполняется по двоичной системе счисления. Перевод из десятичной системы в двоичную и обратно производится в машине автоматически. Ввод и вывод в машину с магнитной ленты производится со скоростью 4500 чисел в минуту. Скорость печати результатов 100 чисел в минуту.

Электронная аппаратура машины «Урал» имеет 800 электронных ламп, 3000 германиевых диодов и потребляет около 8 *квт* электроэнергии.

Из специальных электронных вычислительных машин заслуживает внимания «Вычислительная машина специального назначения», предназначенная для решения систем линейных алгебраических уравнений методом итераций Гаусса—Зейделя (см. гл. VIII). На этой машине можно сразу решать до 1200 уравнений. В статье, помещенной в журнале*

* Math. Tables and Other Aids Computation, 1953, 7, № 43.

«Математические таблицы и другие средства вычислений» говорится, что на этой машине решались методом итераций две системы уравнений: одна с 73, а вторая с 793 неизвестными. На каждую итерацию потребовалось соответственно 3 и 20 минут. Для получения неизвестных с точностью в 1% потребовалось 15 итераций.

Для хранения коэффициентов уравнений и адресов неизвестных используется многострочная магнитная лента, движущаяся со скоростью 38 *см/сек*, а коэффициенты считываются со скоростью 20 чисел в секунду. Число содержит 25 двоичных цифр.

Для хранения неизвестных используется магнитный барабан, вращающийся со скоростью 59 *об/сек*, минимальное время выбора одного числа 17 миллисекунд. На магнитном барабане можно хранить значения до 1200 неизвестных.

Применение электронных вычислительных машин для разработки логических задач

На электронных вычислительных машинах, кроме технических вычислений, можно решать некоторые логические задачи. Изучением теории машин и их применения для разработки логических задач занимается новое направление в науке, называемое *кибернетикой*. Кибернетика происходит от греческого слова «кибернос», что в переводе означает рулевой. Термин этот был предложен около ста лет назад французским физиком Ампером (1775—1836), который в данной им классификации наук оставил место для науки будущего, названной им кибернетикой. Кибернетика расположена на стыке различных наук. Это чрезвычайно интересная область знаний, которая быстрыми темпами исследуется и развивается. Ее современное состояние подготовлено работами ученых разных стран и как новое научное направление изложено в книге профессора математики Колумбийского университета Н. Винера «Кибернетика, или управление и связи в животном и машине», изданной в 1948 г. В этой книге проф. Винер ссылается на известные труды советских ученых И. П. Павлова, А. Н. Крылова, А. Н. Колмогорова и др. Советские ученые С. Л. Соболев, А. И. Китов, А. А. Ляпунов, А. А. Марков (сын), Э. Кольман и др. в своих работах показали то особое значение, которое имеет кибернетика в сложной «Теории автоматических быстродействующих электронных счетных машин, как теории самоорганизующихся логических процессов, подобных процессам человеческого мышления»*. Кибернетика объединяет теорию информации, теорию самоорганизующихся процессов в счетных машинах и теорию управления и регулирования. Теория информации понимается в широком смысле слова, как сведения о ранее неизвестных результатах событий. Математической основой теории информации является теория вероятностей и математическая логика.

Информация выбирается из определенного числа различных вариантов сообщений и измеряется в виде совокупности элементарных сообщений «да» или «нет». Машина выполняет непрерывную цепь выборов, иногда весьма длинную, давая каждый раз одно из двух значений: «да» или «нет», в соответствии с двумя устойчивыми состояниями электронного реле. Другими словами, в соответствии с программой, введенной в машину, запрашивают: если то или другое условие налицо, или оно справедливо (или действует), то каково должно быть последующее дей-

* Вопросы философии, М., АН СССР 1955, № 4, стр. 136.

ствие — включено (правильно) или выключено (неправильно), что соответствует логическому принципу высказываний и их отрицаний.

Примерами решения логических задач при помощи электронных вычислительных машин могут быть: перевод с одного языка на другой; регулирование производственных процессов; выполнение некоторых статистических расчетов и др. При решении математических задач машина сама может выбирать ход дальнейшего вычислительного процесса в зависимости от получающихся результатов предыдущих вычислений, если в нее введены соответствующие операции перехода.

Электронные вычислительные машины чрезвычайно облегчают труд человека и в сотни раз, а иногда и в тысячи, повышают его производительность.

Помимо вычислений чрезвычайно важной областью применения электронных вычислительных машин является использование их в качестве управляющих устройств в различных системах автоматического управления.

Так же, как и в области использования ядерной энергии, человечество в настоящее время вступает в век громадного культурно-технического переворота — *в век механизации и автоматизации различных видов умственного труда*. Вместе с этим необходимо заметить, что никакая машина не может выполнять познавательные функции, машина способна лишь помочь человеку, но не способна заменить его.

Глава VIII

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ

§ 86. Общие замечания о решении систем нормальных уравнений

В различных областях науки и техники приходится решать системы линейных алгебраических уравнений, в том числе системы нормальных уравнений вида

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n + l_i = 0 \qquad (119)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $a_{ik} = a_{ki}$, а коэффициенты a_{ii} всегда положительны*.

В геодезической практике приходится решать системы как с малым числом неизвестных, так и с числом неизвестных, доходящих до нескольких сот.

Решение нормальных уравнений является наиболее утомительной частью геодезических вычислений.

Методы решения систем нормальных уравнений делят на две группы — *прямые и итеративные* (непрямые). Прямые методы заключаются в применении однократного процесса решения и могут дать любую желаемую точность значений неизвестных при условии, что в процессе вычислений удерживается достаточное количество знаков. Наиболее распространен из этой группы метод последовательного исключения неизвестных, построенный на алгорифме, предложенном немецким математиком К. Ф. Гауссом.

Время, необходимое на решение системы, можно определить по формуле

$$T_{\text{дн}} = \frac{N}{N_0}, \qquad (120)$$

где N — количество арифметических действий, необходимых для решения системы, а N_0 — норма выполнения арифметических действий в один день.

Если вычисления вести по методу накапливания сумм произведений, то числитель выражения (120) для случая, когда в системе отсутствуют нулевые коэффициенты, можно определить по формуле

$$N = \frac{n}{6}(n^2 + 12n - 1). \qquad (121)$$

* Дополнительные признаки нормальной системы указаны в § 87.

Полагая $N_0 = 700$ произведений при $n < 70$ и $N_0 = 1000$ при $n > 70$, как это предусмотрено «Едиными нормами выработки на геодезические и топографические работы» (изд. 1954 г.), легко подсчитать время, требуемое на решение системы нормальных уравнений с n неизвестными при помощи арифмометра. Так, при числе неизвестных n, равном 10; 20; 30; 40; 50; 100; 200, время $T_{дн}$, необходимое на решение системы, соответственно будет 0,5; 3; 9; 20; 37; 187; 1413.

Таким образом, одному вычислителю на решение системы с 10 неизвестными (при работе на арифмометре) понадобится около 0,5 дня рабочего времени, со 100 неизвестными — около 7 месяцев, а с 200 неизвестными — более 5 лет. С увеличением числа n время, потребное на решение системы методом последовательного исключения неизвестных, возрастает (приближенно)*, как $t^{2,5} = t^2 \sqrt{t}$, где $t = n : n_0$. Например, при $n = 1200$ и $n_0 = 200$ оно будет $\left(\frac{1200}{200}\right)^{2,5} \cdot 5 = 440$ лет, если вычислять на арифмометре.

Если даже производительность работы на арифмометре вследствие применения рациональных приемов увеличится в два—три раза, то все равно для решения систем с большим числом неизвестных необходимо чрезвычайно много времени. Поэтому для решения систем нормальных уравнений предлагаются различные машины, схемы, многогрупповые способы и приемы, упрощающие и ускоряющие этот весьма трудоемкий вычислительный процесс.

При итеративных методах, когда значения неизвестных получаются посредством последовательных приближений, для одного приближения требуется $n(n+1)$ произведений, при этом количество времени возрастает примерно пропорционально t^2.

Метод итераций для отдельных систем может сходиться настолько медленно, что применять его становится невыгодным. Если процесс итераций сходится достаточно быстро, то количество знаков, удерживаемых при вычислениях, можно увеличивать постепенно с увеличением номера итерации, при этом сделанная ошибка только замедляет сходимость к точному решению, которое получается как предел последовательных приближений.

Прямые методы всегда дают определенное решение, и точность решения зависит от расположения уравнений в схеме (см. § 89) и от числа знаков, которые были удержаны в коэффициентах в начальной стадии вычислений; здесь ошибки полностью отражаются на значении неизвестных и могут обесценить всю работу. Поэтому при применении прямых методов необходимо правильно расположить уравнения в схеме, рассчитать число знаков в компонентах и особо тщательно организовать контроль в процессе вычислений.

Большим преимуществом итеративных методов является однообразие вычислительных операций, дающее возможность наиболее полно механизировать весь процесс вычислений.

При решении нормальных уравнений применяются малые вычислительные машины, счетно-аналитические машины и быстродействующие вычислительные электронные машины. Для решения систем с небольшим числом неизвестных (при $n < 70$), как правило, применяются малые вычислительные машины, с большим — счетно-аналитические или элек-

* В книге В. Э. Милн «Численное решение дифференциальных уравнений» (М., ИЛ., 1955, стр. 182) это возрастание представлено как t^3.

тронные. Однако при геодезических вычислениях ни счетно-аналитические, ни электронные машины еще не нашли надлежащего применения и в большинстве случаев системы с большим числом неизвестных также решаются на малых вычислительных машинах одновременно несколькими вычислителями.

§ 87. Решение систем нормальных уравнений по компактной схеме методом последовательного исключения неизвестных с определением весовых коэффициентов

Для решения систем нормальных уравнений методом последовательного исключения неизвестных предложено много различных схем и приемов. Хорошо составленная схема способствует механизации вычислений и повышает производительность вычислительного труда.

Поставленные нами исследования показывают, что при работе на малых вычислительных машинах очень выгодна компактная схема, представленная для небольшого числа уравнений в табл. 38. Рисунок компактной схемы проще рисунка сокращенной схемы Гаусса; он дает возможность сразу находить нужные множители и делители и тем самым делает вычислительную работу менее утомительной. Коэффициенты преобразованных уравнений и неизвестные, а также коэффициенты, служащие для контроля их, вычисляются по методу накапливания. При решении систем нормальных уравнений по компактной схеме одним вычислителем число всех записей (необходимых для определения коэффициентов преобразованных и элиминационных уравнений, неизвестных и величин, требуемых для контроля их) определяется по формуле

$$S = n^2 + 6n + 2. \tag{122}$$

Уменьшение количества записей значительно повышает производительность труда, так как при работе на малых автоматических вычислительных машинах (на которых в настоящее время и решают, главным образом, системы нормальных уравнений) на запись результатов требуется времени примерно столько же, сколько на само вычисление. Кроме того, частое списывание чисел со счетчиков машин порождает дополнительные ошибки.

При применении компактной схемы возможно на одной странице вычислительного листа решать до восьми нормальных уравнений с определением весовых коэффициентов и средних квадратических ошибок всех неизвестных. Так, например, при $n = 8$ в схеме будет 10 столбцов и 32 строки.

При решении на малых вычислительных машинах систем с большим числом неизвестных следует применять схему, расположенную на трех листах и каждый лист делить на части, с тем, чтобы решение системы можно было выполнять одновременно несколькими вычислителями (см. § 88).

Для простоты рассуждений допустим, что дана система уравнений с четырьмя неизвестными. Тогда, полагая в выражении (119) для удобства дальнейших выкладок $l_i = a_{in+1}$, можно написать

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15} = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25} = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + a_{35} = 0 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 + a_{45} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{123}$$

Применяя метод последовательного исключения неизвестных (алгорифм Гаусса), легко получить формулы для вычисления коэффициентов преобразованных (124) и элиминационных (125) уравнений.

$$\left.\begin{aligned} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + c_{14}x_4 + c_{15} &= 0 \\ c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + c_{24}x_4 + c_{25} &= 0 \\ c_{33}x_3 + c_{34}x_4 + c_{35} &= 0 \\ c_{44}x_4 + c_{45} &= 0 \end{aligned}\right\}; \qquad (124)$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -b_{12}x_2 - b_{13}x_3 - b_{14}x_4 - b_{15} \\ x_2 &= -b_{23}x_3 - b_{24}x_4 - b_{25} \\ x_3 &= -b_{34}x_4 - b_{35} \\ x_4 &= -b_{45} \end{aligned}\right\}. \qquad (125)$$

Очевидно, в первом из уравнений (124) $c_{1j} = a_{1j}$, т. е. коэффициенты первого преобразованного уравнения равны коэффициентам первого нормального уравнения. Формулы для вычисления коэффициентов преобразованных и элиминационных уравнений в общем случае будут

$$c_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} c_{kj} b_{ki}, \qquad (126)$$

$$b_{ij} = \frac{c_{ij}}{c_{ii}}. \qquad (127)$$

Коэффициенты c_{ij} и b_{ij} вычисляют в следующем порядке. Переписывают коэффициенты c_{1j}, которые равны соответствующим коэффициентам a_{1j}, и вычисляют по формулам (127) коэффициенты

$$b_{1j} = \frac{c_{1j}}{c_{11}},$$

которые в схему записывают с обратным знаком. Затем по формуле (126) вычисляют коэффициенты c_{2j} и по формуле (127) — коэффициенты b_{2j} и т. д. (см. табл. 38 и табл. 39)*. Так, например, коэффициент

$$c_{34} = a_{34} - c_{14}b_{13} - c_{24}b_{23} =$$

$$= -0{,}0427 + 0{,}12520 \cdot 0{,}08176 - 0{,}15147 \cdot 0{,}13706 = -0{,}05322.$$

При вычислении коэффициентов b_{ij} лучше пользоваться величинами $1 : c_{ii}$, которые записаны в строке 13 таблиц 38 и 39.

Каждый столбец и строку контролируют по формулам:

$$\sum_{j=1}^{n+1} c_{1j} = c_{1n+2};$$

$$1 + \sum_{j=2}^{n+1} b_{1j} = b_{1n+2};$$

* В табл. 39 решена система нормальных уравнений, взятая из книги проф. Н. И. Идельсона «Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений», 1947, стр. 145—150.

Таблица 38

Компактная схема решения нормальных уравнений с определением весовых коэффициентов и средних квадратических ошибок неизвестных

Номера строк	1	2	3	4	5	6
1	a_{11}					
2	a_{12}	a_{22}				
3	a_{13}	a_{23}	a_{33}			
4	a_{14}	a_{24}	a_{34}	a_{44}		
5	a_{15}	a_{25}	a_{35}	a_{45}	a_{55}	← свободные члены
6	a_{16}	a_{26}	a_{36}	a_{46}		← суммы ↓
7	$\boxed{c_{11}}\ -1$	$-b_{12}$	$-b_{13}$	$-b_{14}$	$-b_{15}$	$-b_{16}$
8	c_{12}	$\boxed{c_{22}}\ -1$	$-b_{23}$	$-b_{24}$	$-b_{25}$	$-b_{26}$
9	c_{13}	c_{23}	$\boxed{c_{33}}\ -1$	$-b_{34}$	$-b_{35}$	$-b_{36}$
10	c_{14}	c_{24}	c_{34}	$\boxed{c_{44}}\ -1$	$-b_{45}$	$-b_{46}$
11	c_{15}	c_{25}	c_{35}	c_{45}	c_{55}	
12	c_{16}	c_{26}	c_{36}	c_{46}		
13	$1 : c_{11}$	$1 : c_{22}$	$1 : c_{33}$	$1 : c_{44}$		
14	x_1	x_2	x_3	x_4		$\Sigma x_i a_{i5} \approx$
20	m_1	m_2	m_3	m_4		$\approx \Sigma c_{in+1} b_{in+1}$
19	Q_{11}	Q_{22}	Q_{33}	Q_{44}		μ
15	1	d_{12}	d_{13}	d_{14}		
16		1	d_{23}	d_{24}		
17			1	d_{34}		
18				1		

Таблица 39

Компактная схема решения нормальных уравнений
(численный пример)

№ строк	1	2	3	4	5	6
1	+ 0,6299					
2	+ 0,1493	+ 0,7102				
3	+ 0,0515	+ 0,1047	+ 0,3376			
4	— 0,1252	+ 0,1218	— 0,0427	+ 0,1030		←
5	— 0,4201	— 0,3285	— 0,3372	+ 0,1120	+ 0,62287	своб. член
6	+ 0,2854	+ 0,7575	+ 0,1139	+ 0,1689		
7	+ 0,62990	— 0,23702	— 0,08175	+ 0,19876	+ 0,66693	— 0,45309
8	+ 0,14930	+ 0,67481	— 0,13706	— 0,22446	+ 0,33925	— 1,02229
9	+ 0,05150	+ 0,09249	+ 0,32071	+ 0,16596	+ 0,84649	+ 0,01243
10	— 0,12520	+ 0,15147	— 0,05322	$+0,03528_4$	— 0,98719	— 1,98730
11	— 0,42010	— 0,22893	— 0,27148	$+0,03483_2$	+ 0,00084	
12	+ 0,28540	+ 0,68985	— 0,00398	+ 0,07012		
13	+ 1,58576	+ 1,48190	+ 3,11805	28,3415	$= 1 : c_{ii}$	
14	+ 0,3041	+ 0,4673	+ 0,6827	— 0,9872	$= x_i$	— 0,62203
20	± 0,027	± 0,026	± 0,029	± 0,077	$= m_i$	— 0,62210
19	+ 3,37	+ 3,28	+ 3,90	+28,34	$= Q_{ii}$	$\pm 0,01451 = \mu$
15	+ 1,000	— 0,237	— 0,049	+ 0,224		
16		+ 1,000	— 0,137	— 0,247		
17			+ 1,000	+ 0,166		
18				+ 1,000		

$$\sum_{j=2}^{n+1} c_{2j} = c_{2n+2};$$

$$1 + \sum_{j=3}^{n+1} b_{2j} = b_{2n+2}$$

и т. д., где n — число неизвестных. Так, например,

$$c_{83} + c_{84} + c_{85} + c_{86} = -0{,}00398.$$

Искомые неизвестные определяют по формулам [см. формулы (125)]

$$x_i = -b_{i\,n+1} - \sum_{k=i+1}^{n} b_{ik} x_k, \qquad (128)$$

учитывая, что в схеме знаки для удобства вычислений изменены на обратные. Таким образом, по формулам (126) и (128) величины c_{ij} и x_i получают на арифмометре или другой какой-нибудь машине без промежуточных записей методом накапливания алгебраических сумм произведений на счетчике результатов, считая a_{ij} или $b_{i\,n+1}$, как произведение этих величин на единицу.

Вычисленные неизвестные x_i контролируют по формуле

$$\sum_{i=1}^{n} x_i a_{in+1} = \sum_{i=1}^{n} c_{in+1}(-b_{in+1}), \tag{129}$$

т. е. сумма произведений значений неизвестных на свободные члены нормальной системы должна равняться сумме произведений свободных членов преобразованной системы на свободные члены элиминационной системы с обратным знаком. В нашем примере (табл. 39) имеем

$$x_1 a_{15} + x_2 a_{25} + x_3 a_{35} + x_4 a_{45} = -0{,}62203$$

и

$$c_{15}(-b_{15}) + c_{25}(-b_{25}) + c_{35}(-b_{35}) + c_{45}(-b_{45}) = -0{,}62210.$$

Для удобства вычисления выражения $\sum_{i=1}^{n} x_i a_{in+1}$ рекомендуется вычислительный лист перегнуть над строкой неизвестных x_i и местом перегиба приложить к строке, где записаны свободные члены a_{in+1} нормальной системы. Численные значения левой и правой частей равенства (129) находят также без промежуточных записей путем накапливания. Найденные по формуле (129) значения используются для определения величины

$$[vv] = a_{n+1,\, n+1} - \sum_{i=1}^{n} c_{in+1} b_{in+1} = c_{n+1,\, n+1}. \tag{130}$$

В обозначениях Гаусса коэффициент

$$a_{n+1,\, n+1} = [ll],$$

а коэффициент

$$c_{n+1,\, n+1} = [ll \cdot n].$$

Средняя квадратическая ошибка единицы веса определится по общеизвестной формуле

$$\mu = \sqrt{\frac{[vv]}{t-n}} = \sqrt{\frac{0{,}00084}{8-4}} = \pm 0{,}0145, \tag{131}$$

где t — число уравнений погрешностей, а n — число неизвестных. Пользуясь выражением (127), представим равенство (129) в следующем виде:

$$-\sum_{i=1}^{n} x_i a_{in+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{c^2_{in+1}}{c_{ii}}. \tag{a}$$

Выражение, стоящее в правой части равенства (а), называется квадратичной формой нормальной системы уравнений; в данном случае квадратичная форма приведена к каноническому (нормальному) виду.

К указанным ранее свойствам нормальной системы (§ 86) необходимо добавить, что для нормальной системы уравнений квадратичная форма (в любом виде) должна быть положительно определенной. Как видно из канонического вида квадратичной формы это будет в том случае, когда все коэффициенты c_{ii} положительны. Таким образом, коэффициенты, стоящие по главной диагонали преобразованной системы, должны быть всегда положительны.

Воспользуемся равенством (а) для вычисления весовых коэффициентов. Для этого положим свободные члены нормальной системы уравнений равными соответственно — 1, 0, 0, ..., 0 и обозначим свободные члены преобразованной системы $-d_{11}$, $-d_{12}, \ldots$, $-d_{1n}$, а первое неизвестное Q_{11}, тогда на основании равенства (а) получим

$$Q_{11} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d^2_{1i}}{c_{ii}}.$$

Точно так же, если примем свободные члены нормальной системы равными соответственно 0, —1,0, ..., 0 и обозначим свободные члены преобразованной системы $-d_{21}$, $-d_{22}, \ldots$, $-d_{2n}$, а второе неизвестное Q_{22}, на основании того же равенства будем иметь

$$Q_{22} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d^2_{2i}}{c_{ii}}.$$

Аналогично можно получить выражения для Q_{33}, $Q_{44}, \ldots, Q_{nn}$.

Величины Q_{11}, $Q_{22}, \ldots, Q_{nn}$ называются весовыми коэффициентами. Общая формула для определения весового коэффициента будет иметь вид

$$Q_{kk} = \sum_{i=k}^{i=n} \frac{d^2_{ki}}{c_{ii}}, \tag{132}$$

где значения величин d_{ij} предварительно вычисляются по формуле

$$d_{ij} = \sum_{k=i}^{k=n-1} d_{ik} b_{kj}. \tag{133}$$

Так, применительно к нашему примеру (табл. 38 и 39), будем иметь

$$d_{14} = d_{11}b_{14} + d_{12}b_{24} + d_{13}b_{34} = +0{,}224; \quad d_{24} = d_{22}b_{24} + d_{23}b_{34} = -0{,}247.$$

В формуле (133) все d_{ii} равны единице, т. е.

$$d_{11} = d_{22} = \cdots = d_{nn} = 1.$$

Зная величины d_{ij}, по формуле (132) легко вычислить весовой коэффициент (величину, обратную весу) любого неизвестного. Так,

$$Q_{22} = \frac{1^2}{c_{22}} + \frac{d^2_{23}}{c_{33}} + \frac{d^2_{24}}{c_{44}} = \frac{1{,}000}{0{,}6748} + \frac{0{,}137^2}{0{,}3207} + \frac{0{,}247^2}{0{,}0353} = 3{,}28.$$

Величины Q_{kk} следует вычислять по методу накапливания суммы частных.

В случае, если необходимо определить все весовые коэффициенты, требуемые для нахождения веса функции уравновешенных величин, вторую часть схемы (табл. 38) представляют в следующем виде (табл. 40).

Таблица 40

Схема вычисления весовых коэффициентов

Номера строк	1	2	3	4	5	6
15	1	d_{12}	d_{13}	d_{14}		
19	q_{11}	q_{12}	q_{13}	q_{14}		
16		1	d_{23}	d_{24}		
20		q_{22}	q_{23}	q_{24}		
17			1	d_{34}		
21			q_{33}	q_{34}		
18				1		
22				q_{44}		
23	Q_{11}	Q_{12}	Q_{13}	Q_{14}	ΣQ_{1j}	$a_{16}-a_{15}$
24		Q_{22}	Q_{23}	Q_{24}	ΣQ_{2j}	$a_{26}-a_{25}$
25			Q_{33}	Q_{34}	ΣQ_{3j}	$a_{36}-a_{35}$
				Q_{44}	ΣQ_{4j}	$a_{46}-a_{45}$

Величины q_{ij} и Q_{ii} вычисляют по формулам

$$q_{ij}=\frac{d_{ij}}{c_{jj}}=d_{ij}\,(1:c_{jj}); \tag{134}$$

$$Q_{ii}=\sum_{j=i}^{j=n} d_{ij}\,q_{ij}. \tag{135}$$

Например,

$$Q_{22}=1\cdot q_{22}+d_{23}\cdot q_{23}+d_{24}\cdot q_{24}=1{,}000\cdot 1{,}482+0{,}137\cdot 0{,}428+$$
$$+\,0{,}247\cdot 7{,}026=3{,}28.$$

Значения величины Q_{ij} получают как сумму произведений элементов q_{ij} (стоящих в строке 19) на элементы строк 15, 17 и 18, считая незаполненные места в строках нулями. Так,

$$Q_{13}=q_{13}\cdot 1{,}000+q_{14}\cdot d_{34}=-\,0{,}154+6{,}926\cdot 0{,}166=+\,1{,}00.$$

Значения величин Q_{2j} равны сумме произведений соответствующих элементов строки 20 на элементы строк 17 и 18 и т. д.

Правильность вычисления весовых коэффициентов проверяют по формуле

$$\sum_{i=1}^{j=n} Q_{ij}\,(a_{in+2}-a_{in+1})=n^{*}, \tag{136}$$

* П. И. Шилов. Способ наименьших квадратов, Геодезиздат, М., 1941, стр. 172.

где n — число уравнений (или число неизвестных).

Так как $Q_{ik} = Q_{ki}$, то, например,

$$\sum Q_{2j} = Q_{12} + Q_{22} + Q_{23} + Q_{24} = -7{,}38.$$

Сумма произведений, найденная по формуле (136), в нашем примере (табл. 41), отличается от числа уравнений, равного 4, на величину 0,02, что объясняется влиянием ошибок округлений.

Таблица 41

Схема вычисления весовых коэффициентов (численный пример)

Номера строк	1	2	3	4	5	6
15 19	+ 1,000 + 1,588	— 0,237 — 0,351	— 0,049 — 0,154	+ 0,244 + 6,926		
16 20		+ 1,000 + 1,482	— 0,137 — 0,428	— 0,247 — 7,026		
17 21			+ 1,000 + 3,118	+ 0,166 + 4,722		
18 22				+ 1,000 +28,341		
23 24 25 26	+ 3,37	— 2,04 + 3,28	+ 1,00 — 1,59 + 3,90	+ 6,93 — 7,03 + 4,72 +28,34	+ 9,26 — 7,38 + 8,03 +32,96	+ 0,705 + 1,086 + 0,451 + 0,057
				Контроль:	4,02	

§ 88. Решение систем нормальных уравнений с большим числом неизвестных

При решении систем нормальных уравнений с большим числом неизвестных можно рекомендовать записывать коэффициенты нормальных, преобразованных и элиминационных уравнений на трех отдельных листах (см. табл. 42, 43 и 44). Это дает возможность располагать рядом нужные сомножители как при определении коэффициентов преобразованных уравнений, так и при вычислении неизвестных методом накапливания.

В табл. 42 а, 43 а и 44 а ради краткости решена система, состоящая только из шести нормальных уравнений*.

На листе I записаны коэффициенты нормальных уравнений и найденные неизвестные; на листе II — коэффициенты преобразованной системы и на листе III — коэффициенты элиминационных уравнений.

Решение системы удобно выполнять по формулам (126) и (127) в следующем порядке.

1. В строку 1 листа II (табл. 43 а) записывают коэффициенты первого нормального уравнения и в строке 2 находят величину $1 : c_{11}$, результаты умножения которой на все коэффициенты первого уравнения записывают в строку 1 листа III (табл. 44 а). При работе на арифмометре или полуавтоматической машине коэффициенты b_{1j} (и вообще коэффициенты b_{ij}) лучше всего получать по методу доумножения.

Найденные значения коэффициентов b_{1j} для контроля необходимо суммировать, что можно делать одновременно с умножением, если вычисления производить на машине, имеющей накапливающий счетчик.

2. По формуле (126) вычисляют коэффициенты c_{2j}, записывают их на листе II в строку 2 (табл. 43 а). Правильность вычислений проверяют при помощи суммы найденных коэффициентов, которую легко получить попутно с вычислением коэффициентов c_{2j}, если работу выполнять на машине, имеющей три счетчика.

* Пример взят из книги «Городская полигонометрия, руководство по вычислительным работам», М., Госстройиздат, 1952, стр. 111.

Таблица 42

Лист I

Коэффициенты нормальных уравнений и найденные из них значения неизвестных (в буквенных обозначениях)

Номер уравнения	Номера неизвестных						Свободные члены	Σ
	1	2	3	4	5	6		
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}
2		a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}
3			a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	a_{37}	a_{38}
4				a_{44}	a_{45}	a_{46}	a_{47}	a_{48}
5					a_{55}	a_{56}	a_{57}	a_{58}
6						a_{66}	a_{67}	a_{68}
$x_i =$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6		

Таблица 42а

Коэффициенты нормальных уравнений и найденные из них значения неизвестных (в числовом выражении)

1	+10,37	− 1,42	+ 3,24	+ 1,65	0	0	−15,40	− 1,56
2		+10,23	+ 1,65	+ 5,40	0	0	− 7,00	+ 8,86
3			+15,88	− 0,61	+ 2,83	− 0,34	− 3,70	+18,95
4				+10,44	− 0,34	+ 1,64	−13,20	+ 4,98
5					+ 6,98	+ 2,10	−13,60	− 2,03
6						+ 7,62	+14,20	+25,22
$x_i =$	+1,4969	+0,2316	−0,6820	+1,4596	+3,2273	−3,0975		

$$\sum_{i=1}^{6} x_i a_{i7} = -129,29.$$

После этого вычисляют величину $1 : c_{22}$ (лист II) и затем коэффициенты b_{2j} (лист III) и т. д.

3. Лист III перегибают в соответствующем месте и прикладывают к столбцу с коэффициентами c_{ij}. Так, например, для вычисления коэффициентов c_{44} лист III надо сложить по линии между столбцами 4 и 5 и, приложив к столбцу 4 листа II, вычислить значение c_{44}, затем, приложив к столбцу 5, вычислить значение c_{45} и т. д. Например, коэффициент c_{44} найдется как сумма четырех произведений из выражения

$$c_{44} = 1 \cdot a_{44} - b_{14}c_{14} - b_{24} \cdot c_{24} - b_{34}c_{34} = 6,657.$$

Взятые для вычисления c_{ij} коэффициенты a_{ij} на листе I следует отмечать каким-нибудь значком.

Таблица 43

Лист II

Коэффициенты преобразованной системы нормальных уравнений (в буквенном обозначении)

№ уравнения	Номера неизвестных						Свободные члены	Σ	Контроль
	1	2	3	4	4	5			
1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	c_{16}	c_{17}	c_{18}	
2	$1:c_{11}$	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}	c_{26}	c_{27}	c_{28}	
3		$1:c_{22}$	c_{33}	c_{34}	c_{35}	c_{36}	c_{37}	c_{38}	
4			$1:c_{33}$	c_{44}	c_{45}	c_{46}	c_{47}	c_{48}	
5				$1:c_{44}$	c_{55}	c_{56}	c_{57}	c_{58}	
6					$1:c_{55}$	c_{66}	c_{67}	c_{68}	
						$1:c_{66}$			

Таблица 43а

Коэффициенты преобразованной системы нормальных уравнений (в числовом выражении)

1	+10,370 0,096432	− 1,420	+ 3,240	+ 1,650	0	0	−15,400	− 1,560	− 1,560
2		+10,036 0,099642	+ 2,094	+ 5,626	0	0	− 9,108	+ 8,646	+ 8,648
3			+14,433 0,069286	− 2,300	+ 2,830	− 0,340	+ 3,012	+17,633	+17,635
4				+ 6,657 0,150218	+ 0,111	+ 1,586	− 5,164	+ 3,192	+ 3,190
5					+ 6,423 0,155666	+ 2,140	−14,104	− 5,541	− 5,541
6						+ 6,621 0,153351	+20,199	+26,722	+26,721

$$\sum_{i=1}^{6} b_{i7} c_{i7} = -129{,}30.$$

4. Значения неизвестных записывают на листе I, на котором помещены коэффициенты нормальных уравнений. По линии над строкой, в которой записываются неизвестные, лист I перегибают и прикладывают к соответствующим строкам листа III, вычисляя каждое неизвестное по методу накапливания.

5. Найденные неизвестные контролируют по формуле (129). В нашем примере

$$\sum_{i=1}^{6} x_i a_{i7} = -129{,}29; \quad \sum_{i=1}^{6} c_{i7} b_{i7} = -129{,}30.$$

В рассмотренной компактной схеме все основные и контрольные коэффициенты получают как суммы произведений или суммы частных по методу накапливания.

После приобретения некоторого навыка и при использовании всех трех счетчиков малых вычислительных машин можно этим приемом значительно увеличить производительность труда. При решении систем с большим числом неизвестных можно уравнения делить на части, что дает возможность выполнять работу одновременно несколькими вычислителями*. На одном развороте вычислительного листа легко поместить коэффициенты 10—15 уравнений, и поэтому контроль при помощи вычисления сумм коэффициентов может осуществляться по каждому отдельному листу.

Если, кроме неизвестных, требуется определить из нормальных уравнений и их весовые квадратичные коэффициенты, то необходимые для этого величины d_{ik} лучше всего вычислять по формуле (133) на отдельном листе, а сами коэффициенты Q_{kk} вычислять по методу накапливания по формуле (132) и записывать на листе I рядом с неизвестными x_i.

Таблица 44

Лист III

Коэффициенты элиминационных уравнений (в буквенном обозначении)

Номер уравнения	Номера неизвестных 1	2	3	4	5	6	Свободные члены	Σ	Контроль
1	-1	$-b_{12}$	$-b_{13}$	$-b_{14}$	$-b_{15}$	$-b_{16}$	$-b_{17}$	$-b_{18}$	
2		-1	$-b_{23}$	$-b_{24}$	$-b_{25}$	$-b_{26}$	$-b_{27}$	$-b_{28}$	
3			-1	$-b_{34}$	$-b_{35}$	$-b_{36}$	$-b_{37}$	$-b_{38}$	
4				-1	$-b_{45}$	$-b_{46}$	$-b_{47}$	$-b_{48}$	
5					-1	$-b_{56}$	$-b_{57}$	$-b_{58}$	
6						-1	$-b_{67}$	$-b_{68}$	

Таблица 44а

Коэффициенты элиминационных уравнений (в числовом выражении)

1	— 1	+0,1369	—0,3124	—0,1591	0	0	+1,4851	+0,1504	+0,1505
2		— 1	—0,2087	—0,5606	0	0	+0,9075	—0,8615	—0,8613
3			— 1	+0,1594	—0,1961	+0,0236	—0,2087	—1,2217	—1,2218
4				— 1	—0,0167	—0,2382	+0,7757	—0,4795	—0,4792
5					— 1	—0,3331	+2,1955	+0,8625	+0,8624
6						— 1	—3,0975	—4,0978	—4,0975

* И. В. Москвин. Решение больших систем нормальных уравнений одновременно несколькими вычислителями. Сб. статей ГУГК, вып. XXIV, М., Геодезиздат, 1949.

§ 89. Потеря точности при решении систем нормальных уравнений методом последовательного исключения неизвестных

На точность определения неизвестных, получаемых из решения систем нормальных уравнений методом последовательного исключения, влияют: ошибки коэффициентов и свободных членов нормальных уравнений; исчезновение значащих цифр слева в коэффициентах преобразованной системы в процессе вычитания двух близких между собой чисел; ошибки округлений при вычислении коэффициентов преобразованной и элиминационной систем, а также ошибки округлений самих неизвестных.

Влияние ошибок коэффициентов и свободных членов нормальных уравнений на точность нахождения неизвестных окончательно не установлено. Формулы М. М. Лаврентьева, Л. Коллатца и других мало пригодны для оценки неизвестных, так как по этим формулам оценка оказывается преувеличенной в десятки и даже сотни раз. Кроме того, вычисления по этим формулам слишком трудоемки и могут быть выполнены только после решения системы. Предельную ошибку $(\Delta x_n)_{пр}$ последнего неизвестного, найденного из решения системы, вызванную влиянием ошибок коэффициентов нормальных уравнений, можно определить по следующей приближенной формуле:

$$(\Delta x_n)_{пр} \approx \frac{\varepsilon}{a} \sqrt{n},$$

где ε — абсолютная, предельная ошибка, одинаковая для всех коэффициентов нормальной системы; a — среднее арифметическое из абсолютных значений коэффициентов нормальных уравнений; n — число неизвестных. Считая $\varepsilon = 1$ (единице последнего знака), $a = 1$, $n = 4$, видим, что $(\Delta x_n)_{пр} \approx 2$ единицам последнего знака, т. е. если коэффициенты нормальных уравнений даны до 0,01, то $(\Delta x_n)_{пр} \approx 0{,}02$. При тех же значениях ε и a, но при $n = 50, (\Delta x_n)_{пр} \approx 7$ единицам последнего знака, т. е. в этом случае от влияния ошибок исходных данных может быть потеря точности на одну значащую цифру, что следует учитывать при составлении и решении нормальных уравнений. Запасные цифры, взятые при решении системы, не спасают положения; они необходимы для того, чтобы в процессе решения не вносить дополнительных ошибок.

Исчезновение значащих цифр в коэффициентах преобразованной системы происходит тогда, когда величины a_{ij} и $\sum_{k=1}^{i-1} c_{kj} b_{ki}$ в формуле (126) имеют один и тот же знак и близки между собой по абсолютному значению. Такое обстоятельство особенно опасно при вычислении квадратичных коэффициентов преобразованной системы. Так, например, значение коэффициента c_{44} получилось равным 0,03528 (табл. 39), тогда как значение $a_{44} = 0{,}1030$, т. е. в данном случае в c_{44} исчезла одна значащая цифра слева. Поэтому $b_{45} = x_4 = -0{,}9872$ содержит не более четырех верных значащих цифр, если даже условно считать, что коэффициенты a_{ij} — точные величины.

Исчезновение большого количества значащих цифр в квадратичных коэффициентах преобразованной системы может обесценить всю вычислительную работу по решению системы, так как неизвестные будут иметь значащих цифр не больше, чем их имеется в квадратичном коэффициенте с наименьшим количеством значащих цифр. Так, например, если $a_{ii} = +4{,}305$, $\sum_{k=1}^{i-1} c_{kj} b_{ki} = +4{,}2983$, а значит $c_{ii} = +0{,}0067$, то найденные неизвестные будут иметь не больше двух верных значащих цифр, если даже a_{ii} считать точной величиной. Ввиду особой важности этого вопроса (особенно при решении систем с большим числом неизвестных) остановимся на нем более подробно. Проанализируем формулу*

$$(\Delta x_n)^\circ_{\text{пр}} = \frac{1 + |x_n|}{p_{x_n}} (\Delta c_{nn})_{\text{пр}}, \qquad \text{(a)}$$

где $(\Delta x_n)^\circ_{\text{пр}}$ — предельная ошибка последнего неизвестного; $|x_n|$ — абсолютная величина последнего неизвестного; $p_{x_n} = c_{nn}$ — вес последнего неизвестного; $(\Delta c_{nn})_{\text{пр}} = \Delta p_{x_n}$ — предельная абсолютная ошибка коэффициента c_{nn} преобразованной системы. Из формулы (а) видно, что чем больше вес p_{x_n}, тем меньше ошибка последнего неизвестного, и наоборот, чем меньше вес p_{x_n}, или что все равно, чем больше исчезло значащих цифр коэффициента c_{nn}, тем больше ошибка последнего неизвестного, а значит тем грубее будут найдены все остальные неизвестные, точность вычисления которых зависит от точности последнего неизвестного [см. формулу (128)]. Таким образом, из формулы (а) следует, что при решении системы по способу последовательного исключения неизвестных надо располагать ее в схеме так, чтобы последним было неизвестное с наибольшим весом, что, вообще говоря, можно приближенно установить до решения системы. Это важно потому, что точность решения системы этим методом зависит от числа знаков, удерживаемых в коэффициентах в начальной стадии вычислений. Если число знаков в коэффициентах преобразованной системы в начале решения будет взято небольшим, а вес последнего неизвестного окажется маленьким (произойдет исчезновение значащих цифр слева), то эти обстоятельства могут привести к необходимости повторного вычисления всех коэффициентов преобразованной и элиминационной систем с бо́льшим количеством десятичных знаков.

Нормальные уравнения при решении по схеме Гаусса можно расположить без нарушения симметричности коэффициентов по-разному. Наиболее точное решение получится при таком расположении нормальных уравнений, при котором квадратичные коэффициенты преобразованной системы окажутся наибольшими и будут расположены в возрастающем порядке. В этом случае влияние ошибок округлений на точность неизвестных будет наименьшим. Однако отыскивание такого наиболее благоприятного расположения нормальных уравнений относится к трудной задаче уже потому, что число возможных расположений уравнений при большом n очень велико и равно факториалу $n! = 1.2.3 \cdots n$.
где n — число уравнений (неизвестных).

Практически приемлемый вариант расположения уравнений можно выбрать, если каким-нибудь путем, хотя бы сугубо приближенно, определить значения весов неизвестных до решения системы и расположить уравнения в схеме в порядке увеличения весов неизвестных так, чтобы последним неизвестным было то, вес которого окажется наибольшим. Например, располагая так систему, решение которой приведено в табл. 39, мы избавимся от исчезновения значащей цифры в значении коэффициента c_{44}, так как при новом расположении неизвестных, значение квадра-

---

* А. В. Гордеев и Е. Г. Ларченко. О потере точности при решении систем нормальных уравнений методом последовательного исключения неизвестных. Сб. статей по геодезии, вып. 9, М., Геодезиздат, 1955, стр. 114.

тичного коэффициента в последнем уравнении преобразованной системы будет равно 0,29736, т .е. будет иметь пять значащих цифр (табл. 45). Как видно из сравнения таблиц 39 и 45 при расположении уравнений системы в порядке увеличения весов неизвестных (или все равно в порядке уменьшения значений величин Q_{ii}) лучше сходятся все контроли.

Таблица 45

Номера строк	1	2	3	4	5	6	Контроль
1	+0,1030						
2	−0,0427	+0,3376					
3	+0,1218	+0,1047	+0,7102				
4	−0,1252	+0,0515	+0,1493	+0,6299			
5	+0,1120	−0,3372	−0,3285	−0,4201			
6	+0,1689	+0,1139	+0,7575	+0,2854			
7	+0,10300	+0,41456	−1,18252	+1,21553	−1,08737	−1,63980	−1,63979
8	−0,04270	+0,31990	−0,48512	+0,00125	+0,90894	−0,57493	−0,57493
9	+0,12180	+0,15519	+0,49088	−0,60614	+0,65165	−0,95451	−0,95449
10	−0,12520	−0,00040	+0,29754	+0,29736	+0,30411	−0,69589	−0,69589
11	+0,11200	−0,29077	−0,31988	−0,09043			
12	+0,16890	+0,18392	+0,46855	+0,20693			
13	−0,9873	+0,6826	+0,4673	+0,3041 = x_i			

Если в данном примере нормальные уравнения расположить в порядке возрастания квадратичных коэффициентов так, чтобы

$$a_{ii} = 0{,}1030;\ 0{,}3376;\ 0{,}6299;\ 0{,}7102,$$

то значения квадратичных коэффициентов преобразованной системы соответственно будут

$$c_{ii} = 0{,}10300;\ 0{,}31990;\ 0{,}47772;\ 0{,}30555.$$

Отметим, что вообще при расположении нормальных уравнений в порядке возрастания квадратичных коэффициентов, получается достаточно удовлетворительное решение системы.

Решение систем нормальных уравнений и вообще всякое вычисление, необходимо вести так, чтобы в процессе их выполнения не вносить дополнительных погрешностей в результаты вычислений.

Однако бывают случаи, когда промежуточные данные округляют неверно, вследствие чего получают искомые величины со значительными ошибками. Так, например, в книге проф. Н. И. Идельсона «Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений» на стр. 147 приведено решение системы нормальных уравнений, где последнее неизвестное (в наших обозначениях) найдено из выражения

$$x_4 = -b_{45} = -\frac{c_{45}}{c_{44}} = -\frac{0{,}0348}{0{,}0352} = -0{,}9886.$$

Нетрудно видеть, что предельная относительная ошибка будет

$$\left(\frac{\Delta x_4}{x_4}\right)_{\text{пр}} = \frac{0,5}{348} + \frac{0,5}{352} \approx \frac{1}{350}$$

и

$$(\Delta x_4)_{\text{пр}} = \frac{0,99}{350} = 0,0028.$$

т. е. при таком вычислении x_4 будет иметь только две верные значащие цифры. Действительно, при вычислении c_{45} и c_{44} с большим числом десятичных знаков последнее неизвестное получилось, как уже указывалось выше, равным $x_4 = -0,9872$.

В практике принято коэффициенты элиминационных уравнений вычислять с одним—двумя дополнительными десятичными знаками по сравнению с коэффициентами преобразованной системы. Между тем точность искомых величин зависит не только от числа десятичных знаков в компонентах, а и от числа верных значащих цифр в них.

Например, в «Инструкции по вычислениям триангуляций и нивелировок» (ч. II, М., Геодезиздат, 1951, стр. 94) приведено решение нормальных уравнений, где вследствие неверных промежуточных округлений получились неверными последние цифры неизвестных. В табл. 46 приведены неизвестные, взятые из названной инструкции и вычисленные с дополнительным числом знаков в коэффициентах преобразованной и элиминационной систем.

Таблица 46

Неизвестные	x_1	x_2	x_3	x_4
Значения, взятые из инструкции .	$-6,180$	$+5,067$	$+5,334$	$-8,362$
Значения, вычисленные вновь . .	$-6,184$	$+5,063$	$+5,329$	$-8,366$

Ошибка в коэффициентах c_{ij} преобразованных уравнений будет тем больше, чем больше коэффициенты b_{ij} элиминационных уравнений и, следовательно, при больших b_{ij} величины c_{ij} следует вычислять с бо́льшим количеством десятичных знаков, при малых b_{ij} — с меньшим. Другими словами, ошибка Δc_{ij} зависит от соотношения неквадратичных и квадратичных коэффициентов одного и того же преобразованного уравнения. Ошибка будет особенно большой, когда неквадратичные коэффициенты больше квадратичных.

Доказано*, что коэффициенты b_{ij} элиминационных уравнений надо вычислять со стольким числом дополнительных десятичных знаков по сравнению с числом десятичных знаков в c_{ij}, сколько цифр в целой части наибольшего из неквадратичных коэффициентов, по которым непосредственно вычисляются b_{ij}. Например, если $(c_{ij})_{\max} = 35,481$, то b_{ij} надо вычислять с пятью десятичными знаками; если $(c_{ij})_{\max} = 0,806$, то b_{ij} надо вычислять с тремя десятичными знаками и т. д.

* А. В. Гордеев, Е. Г. Ларченко. О потере точности при решении систем нормальных уравнений методом последовательного исключения неизвестных. Сб. статей по геодезии, вып. 9, М., Геодезиздат, 1955.

Чтобы не вносить дополнительных ошибок при решении нормальных уравнений в искомые неизвестные, кроме соблюдения изложенных выше положений, нельзя нарушать общие правила округления промежуточных чисел. Одновременно с этим необходимо иметь в виду, что при решении уравнений, как и при всяких вычислениях с приближенными числами, получить результат более точный, чем исходные данные, вообще говоря, невозможно.

§ 90. Решение нормальных уравнений по методу итерации

Сущность решения системы методом итерации заключается в получении пределов последовательностей значений неизвестных, сходящихся к искомым значениям.

Рассмотрим кратко ход решения системы по методу итерации.

Для простоты рассуждений приведем систему, в которой $n = 3$. Тогда система (119) будет иметь вид

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + l_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + l_2 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + l_3 = 0 \end{array}\right\}. \tag{137}$$

Разделив каждое из уравнений (137) на квадратичный коэффициент a_{ii}, получим систему

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + v_1 = 0 \\ b_{21}x_1 + x_2 + b_{23}x_3 + v_2 = 0 \\ b_{31}x_1 + b_{32}x_2 + x_3 + v_3 = 0 \end{array}\right\}, \tag{138}$$

в которой приняты обозначения

$$b_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_{ii}}; \quad v_i = \frac{l_i}{a_{ii}} \tag{139}$$

Систему (138) представим в виде

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -0 - b_{12}x_2 - b_{13}x_3 - v_1 \\ x_2 = -b_{21}x_1 - 0 - b_{23}x_3 - v_2 \\ x_3 = -b_{31}x_1 - b_{32}x_2 - 0 - v_3 \end{array}\right\}. \tag{140}$$

Примем вначале значения неизвестных равными

$$x^0_1 = -v_1; \quad x^0_2 = -v_2; \quad x^0_3 = -v_3, \tag{141}$$

которые будем называть нулевыми приближениями. Первые приближения неизвестных получим, если в правые части уравнений (140) подставим нулевые приближения:

$$\left.\begin{array}{l} x^{(1)}_1 = -0 - b_{12}x^{(0)}_2 - b_{13}x^{(0)}_3 - v_1 \\ x^{(1)}_2 = -b_{21}x_1^{(0)} - 0 - b_{23}x^{(0)}_3 - v_2 \\ x^{(1)}_3 = -b_{31}x_1^{(0)} - b_{32}x_2^{(0)} - 0 - v_3 \end{array}\right\}. \tag{142}$$

Вторые приближения неизвестных получим, если в правые части уравнений (140) подставим первые приближения

$$\left.\begin{array}{l} x^{(2)}_1 = -0 - b_{12}x^{(1)}_2 - b_{13}x^{(1)}_3 - v_1 \\ x^{(2)}_2 = -b_{21}x^{(1)}_1 - 0 - b_{23}x^{(1)}_3 - v_2 \\ x^{(2)}_3 = -b_{31}x^{(1)}_1 - b_{32}x^{(1)}_2 - 0 - v_3 \end{array}\right\}. \tag{143}$$

Очевидно, в общем виде можно написать

$$x^{(k)}_i = -\sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^{(k-1)} - v_i. \qquad (144)$$

Таким образом, для каждого неизвестного x_i получим последовательность

$$x_i^{(0)},\ x_i^{(1)},\ x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(k)},$$

которая обычно оказывается сходящейся к искомому значению неизвестного

$$x_i = \lim_{k \to \infty} x_i^{(k)}.$$

Описанный процесс называют методом *простой итерации* или *способом Якоби**, который описан им еще в 1845 г.

Решение уравнений по этому способу на любой вычислительной машине удобно вести на двух листах (табл. 47 и 47а), получая алгебраические суммы произведений на счетчике результатов, при этом для передачи чисел v_i на счетчик следует умножать их на единицу.

Таблица 47

Лист I

Неизвестные и свободные члены	Номера уравнений		
	1	2	3
x_1	0	$-\frac{a_{21}}{a_{22}} = -b_{21}$	$-\frac{a_{31}}{a_{33}} = -b_{31}$
x_2	$-\frac{a_{12}}{a_{11}} = -b_{12}$	0	$-\frac{a_{32}}{a_{33}} = -b_{32}$
x_3	$-\frac{a_{13}}{a_{11}} = -b_{13}$	$-\frac{a_{23}}{a_{22}} = -b_{23}$	0
v_i	$-\frac{l_1}{a_{11}} = -v_1$	$-\frac{l_2}{a_{22}} = -v_2$	$-\frac{l_3}{a_{33}} = -v_3$
$-S_i : a_{ii}$	$-S_1 : a_{11}$	$-S_2 : a_{22}$	$-S_3 : a_{33}$

Таблица 47а

Лист II

Номера неизвестных	Приближения				
	$x_i^{(0)}$	$x_i^{(1)}$	$x_i^{(2)}$	...	$x_i^{(k)}$
1	$x_1^{(0)} = -v_1$	$x_1^{(1)}$	$x_1^{(2)}$	...	$x_1^{(k)}$
2	$x_2^{(0)} = -v_2$	$x_2^{(1)}$	$x_2^{(2)}$	...	$x_2^{(k)}$
3	$x_3^{(0)} = -v_3$	$x_3^{(1)}$	$x_3^{(2)}$	...	$x_3^{(k)}$

Для контроля правильности получения коэффициентов b_{ij} и свободных членов v_i составим алгебраические суммы

$$S_i = \Sigma a_{ij} + l_i, \qquad (145)$$

* П. И. Шилов. Способ наименьших квадратов, М., Геодезиздат, 1941, стр. 154.

которые также разделим на квадратичные коэффициенты и запишем на лист I (табл. 47) в последнюю горизонтальную строку. Нетрудно видеть, что при отсутствии ошибок в арифметических действиях при получении величин, записываемых на лист I, должно удовлетворяться условие

$$\sum_{j=1}^{n}(b_{ij}) + v_i - 1 = -\frac{S_i}{a_{ii}}. \tag{146}$$

Контроль по формуле (146) всегда следует выполнять, иначе ошибки в коэффициентах b_{ij} и в свободных членах будут выявлены только после решения системы путем подстановки найденных неизвестных в нормальные уравнения.

Разберем описанный способ решения на конкретном примере. Пусть требуется решить систему нормальных уравнений*

$$\begin{aligned} &+12x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 6 = 0, \\ &-2x_1 + 16x_2 - 1x_3 - 3 = 0, \\ &+3x_1 - 1x_2 + 15x_3 + 4 = 0. \end{aligned}$$

По формуле (145) получим S_i; для нашей системы $S_1 = +19$; $S_2 = +10$; $S_3 = +21$.

Таблица 48

Лист I

Неизвестные и свободные члены	Номера уравнений		
	1	2	3
x_1	0	+ 0,125	— 0,200
x_2	+ 0,167	0	+ 0,067
x_3	— 0,250	+ 0,062	0
v_i	— 0,500	+ 0,188	— 0,267
$-(S_i : a_{ii})$	— 1,583	— 0,625	— 1,400

Вычислим неизвестные по формуле (144) и результаты приближений запишем в табл. 49.

Таблица 49

Лист II

Номера неизвестных	Приближения						
	$x_i^{(0)} = v_i$	$x_i^{(1)}$	$x_i^{(2)}$	$x_i^{(3)}$	$x_i^{(4)}$	$x_i^{(5)}$	$x_i^{(6)}$
1	— 0,50	— 0,40	— 0,44	—0,434	—0,437	—0,436	—0,437
2	+ 0,19	+ 0,11	+ 0,13	+0,122	+0,123	+0,123	+0,123
3	— 0,27	— 0,15	— 0,18	—0,170	—0,172	—0,171	—0,171

Вычисления необходимо продолжать до тех пор, пока значения неизвестных в двух последних приближениях совпадут или будут отличаться на единицу последнего знака. Сходимость будет тем быстрее, чем меньше неквадратичные коэффициенты по сравнению с квадратичными.

* А. М. Вировец и М. Н. Кутузов. Геодезия, М., Геодезиздат, 1948, стр. 143.

Так как процесс итерации является «самоисправляющимся», то для простоты вычислений первые приближения можно определять с меньшим числом знаков (табл. 49).

Иногда находят не сами неизвестные, а поправки к ним, которые по мере увеличения приближений уменьшаются и на некотором шаге итерации становятся равными нулю. В этом случае вычисления ведут по формуле

$$x_i^{(\nu)} = x_i^{(0)} + \sum_{\nu=1}^{k} \delta x_i^{(\nu)}, \tag{147}$$

где

$$\delta x_i^{(\nu)} = -\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\, \delta x_j^{(\nu-1)}.$$

При вычислении по формуле (147) в результате накапливаются ошибки округлений, поэтому вычисления следует вести с одним или даже двумя запасными знаками.

§ 91. Метод Гаусса — Зейделя

Итеративный метод Гаусса — Зейделя отличается от метода простой итерации тем, что в нем каждое новое значение для какого-нибудь неизвестного сразу после его получения используется для отыскания следующих значений других неизвестных. По этому методу вычисление последовательных приближений неизвестных ведется по формуле

$$x_i^{(k)} = -\sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} b_{ij} x_j^{(k-1)} - v_i, \tag{148}$$

где коэффициенты b_{ij} находятся в соответствии с равенствами (139).

Применительно к системе с тремя неизвестными, например, нулевые приближения получают по формулам [см. равенства (140) и (141)]

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(0)} = -v_1; \quad x_2^{(0)} &= -b_{21} x_1^{(0)} - v_2 \\ x_3^{(0)} = -b_{31} x_1^{(0)} - b_{32} x_2^{(0)} &- v_3 \end{aligned}\right\}. \tag{149}$$

Так же, как и по методу простой итерации, решение нормальных уравнений по методу Гаусса — Зейделя удобно вести на двух листах. Решим по этому методу систему из трех уравнений, приведенную в § 90. Лист I заготовляется точно так же, как и при методе простой итерации (см. табл. 48). На лист II (табл. 50) записывают последовательные приближения, используя сразу предыдущие значения найденных неизвестных.

Таблица 50

Лист II

Номера неизвестных	Приближения			
	$x_i^{(0)}$	$x_i^{(1)}$	$x_i^{(2)}$	$x_i^{(3)}$
1	− 0,50	− 0,44	− 0,437	− 0,437
2	+ 0,12	+ 0,12	+ 0,123	+ 0,123
3	− 0,16	− 0,17	− 0,171	− 0,171

Метод Гаусса — Зейделя, вообще говоря, значительно быстрее приводит к цели, нежели метод простой итерации, что, в частности, видно из сопоставления таблиц 49 и 50.

Горизонтальные графы (лист I и лист II) должны быть одинаковой ширины. Для удобства вычислений лист I перегибают по правому краю какого-нибудь столбца и по линии перегиба прикладывают к левому краю соответствующего столбца листа II так, чтобы совпали горизонтальные графы одинакового наименования. Приближенные значения неизвестных получают по методу накапливания.

Как и по методу простой итерации, по методу Гаусса — Зейделя можно находить не значения неизвестных, а поправки к нулевым значениям, пользуясь, применительно к системе с тремя неизвестными, для нахождения, например вторых поправок, формулами

$$\left.\begin{aligned} \delta x_1^{(2)} &= 0 - b_{12}\,\delta x_2^{(1)} - b_{13}\,\delta x_3^{(1)} \\ \delta x_2^{(2)} &= - b_{21}\,\delta x_1^{(2)} - 0 - b_{23}\,\delta x_3^{(1)} \\ \delta x_3^{(2)} &= - b_{31}\,\delta x_1^{(2)} - b_{32}\,\delta x_2^{(2)} - 0 \end{aligned}\right\}.$$

В табл. 51 показано решение системы нормальных уравнений, приведенной в § 90. Решение приведено только на листе II, так как лист I остается без изменений (табл. 48).

Таблица 51

Лист II

Номера неизвестных	$x_i^{(0)}$	$\delta x_i^{(1)}$	$\delta x_i^{(2)}$	$\delta x_i^{(3)}$	$x_i = \Sigma$	Контроль значения неизвестных
1	− 0,500	+ 0,061	+ 0,003	0,000	− 0,436	− 0,436
2	+ 0,126	− 0,002	0,000	0,000	+ 0,124	+ 0,123
3	− 0,159	− 0,012	− 0,001	0,000	− 0,172	− 0,171

При заполнении табл. 51 вычисление начинают с определения нулевых приближений по формуле (149). Затем вычисляют поправки до тех пор, пока они станут равными нулю или практически пренебрегаемыми. После этого получают алгебраические суммы нулевых приближений и поправок к ним по строкам ($x_i = \Sigma$). Для контроля следует вычислять окончательные значения неизвестных (табл. 51) по формуле (148).

Описанный метод решения нормальных уравнений в литературе обычно называют методом Зейделя, хотя в действительности идея его принадлежит К. Ф. Гауссу, который писал о методе последовательных приближений еще в 1843 г. Предложения Зейделя опубликованы в 1874 г., и поэтому будет более справедливым описанный метод называть методом Гаусса — Зейделя.

§ 92. Сходимость процесса итерации

В математике доказывается, что процесс итерации является сходящимся для линейных алгебраических уравнений, в том числе и для нормальных уравнений. при условии, что все корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристического многочлена, вычисленного по данной системе, будут по модулю меньше единицы*.

* В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры, 1950, стр. 18, 19.

Известно, что *характеристическим полиномом, связанным с коэффициентами* a_{ij} *нормальных уравнений, называется многочлен n-ой степени относительно* λ:

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda\ldots a_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1} & a_{n2}\quad a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = A_0\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \cdots + A_{n-1}\lambda + A_n,$$

где

$$A_0 = (-1)^n,\ A_1 = (-1)^{n-1}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}),$$

$$A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_{n1} & a_{n2}\quad a_{nn} \end{vmatrix},$$

а остальные коэффициенты являются некоторыми другими функциями коэффициентов уравнений нормальной системы (119).

Как видно из приведенных выражений, это условие трудно проверить, и о сходимости итеративного процесса судят по другим признакам. Например, достаточным условием сходимости метода простой итерации является*

$$\sum_{j=1}^{n}{}' \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1 \text{ или } \sum_{j=1}^{n}{}' |a_{ij}| < |a_{ii}|, \tag{150}$$

где знак штрих у суммы условно показывает, что при суммировании не берется значение, когда $i = j$. Неравенство (150) словами можно выразить так. *Процесс итерации будет сходящимся, если сумма абсолютных значений неквадратичных коэффициентов в каждом уравнении меньше абсолютного значения квадратичного коэффициента.* Чем больше разница между квадратичным коэффициентом и указанной суммой, тем быстрее будет сходиться процесс итерации. Для системы, приведенной в § 90, имеем

$$|-2| + |+3| < 12,$$
$$|-1| + |-2| < 16,$$
$$|+3| + |-1| < 15,$$

т. е. процесс итерации при решении данной системы должен сходиться достаточно быстро, что и было при решении этой системы. Приведенное требование является слишком жестким, и при решении систем нормальных уравнений оно может не выполняться, а процесс итерации все же будет сходящимся.

Доказано**, что для систем с симметричными коэффициентами и положительно определенной квадратичной формой, к которым относятся нормальные уравнения, процесс итерации Гаусса—Зейделя всегда будет сходиться.

---

* В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры, 1950, стр. 130.

** Д. Ю. Панов. Решение систем нормальных уравнений. Дополнение 1, помещенное в книге Дж. Скарборо «Численные методы математического анализа» М., 1934, стр. 397.

Чтобы процесс итерации сходился быстрее, при составлении нормальных уравнений величины $\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ должны располагаться в порядке возрастания, т. е. в первом уравнении эта сумма должна быть наименьшей, а в последнем — наибольшей.

Быстрота сходимости во многом зависит от способа подготовки системы уравнений к итерации. В геодезии применяют обычно преобразование такое, когда на месте диагональных (квадратичных) коэффициентов стоят нули (см. § 90 и 91).

Часто для решения систем по методу итерации их преобразовывают следующим образом. К обеим частям каждого уравнения данной системы прибавляют или вычитают по неизвестному, стоящему при квадратичном коэффициенте, и преобразованную систему записывают в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + l_1 \\ x_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + l_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + l_n \end{aligned}\right\} \qquad (151)$$

Пусть, например, дана система*

$$\left.\begin{aligned} 0{,}78\,x_1 - 0{,}02\,x_2 - 0{,}12\,x_3 - 0{,}14\,x_4 - 0{,}76 &= 0 \\ -0{,}02\,x_1 + 0{,}86\,x_2 - 0{,}04\,x_3 + 0{,}06\,x_4 - 0{,}08 &= 0 \\ -0{,}12\,x_1 - 0{,}04\,x_2 + 0{,}72\,x_3 - 0{,}08\,x_4 - 1{,}12 &= 0 \\ -0{,}14\,x_1 + 0{,}06\,x_2 - 0{,}08\,x_3 + 0{,}74\,x_4 - 0{,}68 &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad (152)$$

которую, применяя указанный выше способ, преобразуем в следующую:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0{,}22\,x_1 + 0{,}02\,x_2 + 0{,}12\,x_3 + 0{,}14\,x_4 + 0{,}76 \\ x_2 &= 0{,}02\,x_1 + 0{,}14\,x_2 + 0{,}04\,x_3 - 0{,}06\,x_4 + 0{,}08 \\ x_3 &= 0{,}12\,x_1 + 0{,}04\,x_2 + 0{,}28\,x_3 + 0{,}08\,x_4 + 1{,}12 \\ x_4 &= 0{,}14\,x_1 - 0{,}06\,x_2 + 0{,}08\,x_3 + 0{,}26\,x_4 + 0{,}68 \end{aligned}\right\}. \qquad (153)$$

Затем ту же систему (152) преобразуем обычным способом и представим в виде

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0 + 0{,}0256\,x_2 + 0{,}1538\,x_3 + 0{,}1795\,x_4 + 0{,}9744 \\ x_2 &= 0{,}0233\,x_1 + 0 + 0{,}0465\,x_3 - 0{,}0698\,x_4 + 0{,}0930 \\ x_3 &= 0{,}1667\,x_1 + 0{,}0556\,x_2 + 0 + 0{,}1111\,x_4 + 1{,}5556 \\ x_4 &= 0{,}1892\,x_1 - 0{,}0811\,x_2 + 0{,}1081\,x_3 + 0 + 0{,}9189 \end{aligned}\right\}. \qquad (154)$$

Системы (153) и (154) были решены по методу Гаусса—Зейделя, при этом для получения неизвестных с четырьмя десятичными знаками в первом случае пришлось сделать 12 итераций, а во втором — только 5. Таким образом, при обычной подготовке системы она была решена в два раза быстрее, чем при необычной подготовке.

---

* В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры, М., Гостехиздат, 1950, стр. 125.

Итерации Гаусса—Зейделя сходятся не при всяких способах подготовки нормальных уравнений. Возьмем, например, систему нормальных уравнений*

$$\left.\begin{aligned} 3{,}75\,x_1 + 3{,}00\,x_2 + 0 = 0 \\ 3{,}00\,x_1 + 3{,}61\,x_2 - 1 = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{155}$$

Преобразуем систему (155) к виду

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= -\,2{,}00\,x_1 - 3{,}61\,x_2 + 1{,}00 \\ x_2 &= +\,1{,}00\,x_1 + 1{,}80\,x_2 \end{aligned}\right\} \tag{156}$$

и решим по методу простой итерации (табл. 52) и по методу Гаусса—Зейделя (табл. 53).

Таблица 52

Номера неизвестных	Приближения				
	$x_i^{(0)}$	$x_i^{(1)}$	$x_i^{(2)}$	$x_i^{(3)}$	$x_i^{(4)}$
1	+ 1,00	− 1,00	− 0,61	− 0,67	− 0,66
2	0,00	+ 1,00	+ 0,80	+ 0,83	+ 0,82

Таблица 53

Номера неизвестных	Приближения			
	$x_i^{(0)}$	$x_i^{(1)}$	$x_i^{(2)}$	$x_i^{(3)}$
1	+ 1,00	− 4,61	+ 20,36	+ 95,17
2	+ 1,00	− 2,82	+ 15,30	+122,71

Из сравнения табл. 52 и 53 видим, что при решении системы (156) простая итерация сходится, а итерация Гаусса—Зейделя расходится.

Согласно теореме Е. Райха** при обычном преобразовании системы с положительно определенной квадратичной формой итерации Гаусса—Зейделя сходятся всегда. Практически в большинстве случаев условием сходимости итерации является монотонное убывание поправок $\delta x_i^{(\nu)}$ при возрастании номера итерации ν (табл. 51 и 55).

§ 93. Улучшение сходимости процесса итерации

Существуют различные приемы ускорения сходимости итерационного процесса при решении систем нормальных уравнений. Однако многие из них приводят к громоздким вычислениям и поэтому на практике применяются редко. Рассмотрим простой способ улучшения сходимости итерационного процесса, предложенный членом-корреспондентом Академии наук СССР проф. Л. А. Люстерником. Он показал***, что с точно-

* Ю. М. Гаврилов. О сходимости итерационных процессов и критериях знакоопределенности квадратичных форм. Известия АН СССР, Серия математическая, 1954, том 18, № 1.

** В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры, М., Гостехиздат, 1950.

*** Тр. математического института им. Стеклова, вып. 20, 1947.

стью до величины порядка λ_2^k в качестве решения линейной системы применимо выражение

$$(x_i)_{ул} \approx x_i^{(k)} + \frac{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}}{1 - \lambda_1}, \tag{157}$$

где λ_1 — первый корень характеристического многочлена, связанного с коэффициентами нормальной системы. При достаточно большом k величину λ_1 находят приближенно из отношения двух смежных поправок $\delta x_i^{(k+1)}$ и $\delta x_i^{(k)}$, т. е.

$$\lambda_1 \approx \frac{\delta x_i^{(k+1)}}{\delta x_i^{(k)}} \tag{158}$$

Рассмотрим этот прием улучшения сходимости итерации на примере. Пусть дана система из пяти нормальных уравнений*

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & +38x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 6x_4 - 10x_5 - 65 = 0 \\ 2. & -5x_1 + 23x_2 - 7x_3 + 0 - 11x_5 - 41 = 0 \\ 3. & -6x_1 - 7x_2 + 32x_3 - 7x_4 + 0 + 49 = 0 \\ 4. & -6x_1 + 0 - 7x_3 + 23x_4 + 0 + 29 = 0 \\ 5. & -10x_1 - 11x_2 + 0 + 0 + 33x_5 + 66 = 0 \end{array}\right\}, \tag{159}$$

которую обычным способом приведем к виду, удобному для итерации, и преобразованные уравнения запишем в табл. 54.

Таблица 54

Лист I

Неизвестные и свободные члены	Номера уравнений				
	1	2	3	4	5
x_1	0	+ 0,2174	+ 0,1875	+ 0,2609	+ 0,3030
x_2	+ 0,1316	0	+ 0,2188	0	+ 0,3333
x_3	+ 0,1579	+ 0,3043	0	+ 0,3043	0
x_4	+ 0,1579	0	+ 0,2188	0	0
x_5	+ 0,2632	+ 0,4783	0	0	0
v_i	+ 1,7105	+ 1,7826	− 1,5312	− 1,2609	− 2,0000
$-S_i : a_{ii}$	+ 1,4211	+ 1,7826	− 1,9062	− 1,6957	− 2,3636

Таблица 55

Лист II

Номера неизвестных	Приближения							
	$x_i^{(0)}$	$\delta x_i^{(1)}$	$\delta x_i^{(2)}$	$\delta x_i^{(3)}$	$\delta x_i^{(4)}$	$\delta x_i^{(5)}$	$\delta x_i^{(6)}$	λ_1
1	+1,7105	−0,1983	−0,2459	−0,1279	−0,0672	−0,0354	−0,0187	0,528
2	+2,1545	−0,6332	−0,3058	−0,1582	−0,0835	−0,0440	−0,0232	0,527
3	−0,7391	−0,4032	−0,1512	−0,0827	−0,0437	−0,0230	−0,0121	0,526
4	−1,0395	−0,1744	−0,1102	−0,0585	−0,0308	−0,0162	−0,0086	0,531
5	−1,2378	−0,2711	−0,1764	−0,0915	−0,0482	−0,0254	−0,0134	0,527
						0,1444	0,0760	

* Городская полигонометрия. Руководство по вычислительным работам, М., Госстройиздат, 1952, стр. 154.

В табл. 55 приведено шесть итераций (не считая нулевой), полученных при решении данной системы по методу Гаусса—Зейделя, и значения λ_1, вычисленные по формуле

$$\lambda_1 = \frac{\delta x_i^{(6)}}{\delta x_i^{(5)}}.$$

Из табл. 55 видно, что значения λ_1 достаточно устойчивы; за окончательное значение λ_1 примем 0,53.

В табл. 56 приведены:

1) приближенные значения неизвестных, вычисленные по формуле

$$(x_i)_{\text{пр}} \approx x_i^{(0)} + \Sigma\, \delta x_i^{(\nu)}; \quad (\nu = 1,\ 2\ .\ .\ .\ 5);$$

2) поправки к приближенным значениям

$$\frac{\delta x_i^{(6)}}{1-\lambda_1} = \frac{\delta x_i^{(6)}}{0{,}47} = 2{,}13 \cdot \delta x_i^{(6)};$$

3) улучшенные значения неизвестных $(x_i)_{\text{ул}}$, найденные по формуле (157);

4) контрольные значения неизвестных, вычисленные по формуле (148).

Таблица 56

Лист II (продолжение)

Номер неизвестных	Поправки			
	$(x_i)_{\text{пр}}$	$\frac{\delta x_i^6}{1-\lambda_1}$	$(x_i)_{\text{ул}}$	$x_i^{(7)}$
1	+ 1,0358	— 0,0398	+ 0,9960	+ 0,9961
2	+ 0,9298	— 0,0494	+ 0,8804	+ 0,8804
3	— 1,4429	— 0,0257	— 1,4686	— 1,4686
4	— 1,4296	— 0,0183	— 1,4479	— 1,4479
5	— 1,3762	— 0,0285	— 1,4047	— 1,4047

Система (159), кроме этого, была так же решена без улучшения. При этом для получения неизвестных с четырьмя десятичными знаками понадобилось 15 итераций.

Таким образом, введение одного улучшения сокращает число итераций примерно в два раза. Описанным способом нами решено много систем. Сходимость итераций при решении отдельных систем улучшали по два раза и всегда при этом затрачивали меньше времени в полтора—два раза, чем на решение системы без улучшения.

Можно рекомендовать не вычислять n значений λ_1, так как быстрее получить о д н о с р е д н е е его значение по формуле

$$\lambda_1^{\text{ср}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} |\delta x_i^{(\nu+1)}|}{\sum\limits_{i=1}^{n} |\delta x_i^{(\nu)}|}. \tag{160}$$

Для нашего примера (табл. 55) имеем

$$\lambda_1^{\text{ср}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{5} |\delta x_i^{(6)}|}{\sum\limits_{i=1}^{5} |\delta x_i^{(5)}|} = \frac{0{,}0760}{0{,}1444} = 0{,}526.$$

Можно также не вычислять отдельно поправки $\frac{\delta x_i^{(\nu)}}{1-\lambda_1}$ к приближенным значениям $(x_i)_{\text{пр}}$, а сразу в один прием вычислять на любой малой вычислительной машине улучшенные значения по формуле

$$(x_i)_{\text{ул}} = (x_i)_{\text{пр}} + \frac{1}{1-\lambda_1}\delta x_i^{(\nu)}, \tag{161}$$

вычислив предварительно постоянный коэффициент $\frac{1}{1-\lambda_1}$.

При вычислении итераций по формуле (148) улучшенное значение можно вычислять без промежуточных записей по формуле

$$(x_i)_{\text{ул}} = x_i^{(\nu)} + \frac{1}{1-\lambda_1}\left(x_i^{(\nu+1)} - x_i^{(\nu)}\right).$$

Применение формул (160) и (161) ускоряет процесс нахождения улучшенных значений неизвестных и дает возможность на листе II опустить столбец с надписью „λ_1" (табл. 55) и столбец с надписью „$\frac{\delta x_i^{(6)}}{1-\lambda_1}$" (табл. 56).

Отметим, что по методу итераций иногда определяют неизвестные не путем решения нормальной системы, а из уравнений погрешностей под условием минимума сумм квадратов погрешностей. В этом случае также выгодно применять приемы, ускоряющие сходимость процесса итераций. Рассмотрим кратко этот метод.

Пусть дана система уравнений погрешностей

$$\begin{aligned} \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1n} x_n + \omega_1 &= v_1, \\ \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \ldots + \alpha_{2n} x_n + \omega_2 &= v_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1} x_1 + \alpha_{m2} x_2 + \ldots + \alpha_{mn} x_n + \omega_m &= v_m, \end{aligned}$$

где $m > n$.

Задаваясь некоторыми нулевыми значениями неизвестных $x_j^{(0)}$, определяют из уравнений погрешностей поправки $v_i^{(1)}$, пользуясь которыми, вычисляют поправки $\delta x_j^{(1)}$ по формуле

$$\delta x_j^{(k)} = -\frac{\sum\limits_{i=1}^{m} v_i^{(k)} \alpha_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha^2_{ij}}.$$

Первые приближения неизвестных получают так

$$x_j^{(1)} = x_j^{(0)} + \delta x_j^{(1)}.$$

Подставляя первые приближения неизвестных в уравнения погрешностей, вычисляют $v_i^{(2)}$, находят $\delta x_j^{(2)}$ и вычисляют вторые приближения неизвестных и т. д.

Для уменьшения работы рекомендуется в уравнения погрешностей подставлять не приближения неизвестных, а поправки к ним, и значения $v_i^{(k)}$ вычислять по формуле:

$v_i^{(k)} = v_i^{(k-1)} + \sum_{j=1}^{n} \delta x_j^{(k-1)} \alpha_{ij}$ — для простой итерации и $v_i^{(k)} = v_i^{(k-1)} + \sum_{j=1}^{i-1} \delta x_j^{(k)} \alpha_{ij} +$

$$+ \sum_{j=i}^{n} \delta x_j^{(k-1)} \alpha_{ij} \text{ — для итерации Гаусса—Зейделя.}$$

Процесс итерации надо продолжать до тех пор, пока значения δx_j станут пренебрегаемо малы. Значения неизвестных, как и ранее, вычисляют по формуле

$$x_j = x_j^{(0)} + \Sigma\, \delta x_j^{(\nu)}.$$

Для улучшения сходимости процесса итерации здесь, как и при решении систем нормальных уравнений, удобно применять метод профессора Люстерника.

Вычисление значений v_i и δx_j легко производить на малых вычислительных машинах по методу накапливания без промежуточных записей.

Глава IX

РЕШЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПРИ ПОМОЩИ НОМОГРАММ

§ 94. Общие соображения о решении вычислительных задач при помощи номограмм

Номограмма представляет собой чертеж, на котором изображается функциональная зависимость между переменными, входящими в данную математическую формулу. Номограмма дает возможность определять, *без каких-либо вычислений,* численное значение одной переменной по известному численному значению других переменных, входящих в данную формулу.

Номограммы являются средством, облегчающим вычислительную работу; их можно рассматривать как особые счетные приспособления. Каждая номограмма служит для вычислений по какой-нибудь одной определенной формуле, поэтому номограммы имеют особое значение при массовых вычислениях по одной и той же формуле.

Для одной и той же формулы можно составить номограммы различного вида. Лучшей считается номограмма, обеспечивающая при небольших размерах наибольшую точность. Помимо точности, качество номограммы определяется удобством практического использования.

Для повышения точности можно составить несколько номограмм для разных пределов изменения переменных, входящих в данное уравнение. По хорошо составленной номограмме, даже небольшого размера, можно получить две — три верных значащих цифры, поэтому при определении различных поправок, ошибок и других величин с двумя — тремя значащими цифрами номограмма является средством, позволяющим получить искомый результат с достаточной точностью и с наибольшей быстротой. Многие номограммы могут быть целесообразно использованы для приближенного контроля результатов точных вычислений.

Номография как отрасль математики начала существовать с 1890 г., когда на Международном математическом контрессе в Париже она получила свое наименование. В разработке этой науки принимали участие как русские, так и иностранные ученые. Наибольшее распространение и развитие номография получила у нас после Октябрьской социалистической революции. Своим современным состоянием номография обязана советским ученым А. К. Власову, Н. М. Герсеванову, Н. А. Глаголеву и другим. Работы советских ученых-геодезистов Н. Г. Келля, В. В. Каврайского, В. В. Попова и Н. А. Урмаева положили начало внедрению номографии в геодезическое производство.

Первыми значительными работами по номографированию геодезических формул являются работы В. Н. Высоцкого, Н. И. Модринского, Г. А. Гинзбурга и других ученых, а также практиков советского геодезического производства.

§ 95. Функциональная шкала

Основным понятием в номографии является понятие о *функциональной шкале*. С функциональными шкалами мы уже познакомились в главе V в связи с изучением логарифмической счетной линейки, которая является *номограммой с подвижными шкалами*. Значение переменных изображается, обычно, на шкалах точками (штрихами). Точку, соответствующую значению переменного, называют *помеченной*, а значение этого переменного — *пометкой. Шкалой называют геометрическое место помеченных точек, изображающих отдельные значения переменных.*

Пусть дана некоторая непрерывная однозначная и монотонная функция

$$u = f(x).$$

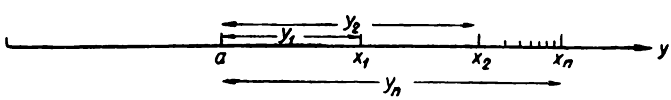
Полагая *масштаб* шкалы равным m, можем написать уравнение функциональной шкалы

$$y = m\,[f(x) - f(a)].$$

Давая x значения $a, x_1, x_2, \ldots, x_n$, вычислим соответствующие значения функции

$$y_a = m\,[f(a) - f(a)] = 0;$$
$$y_1 = m\,[f(x_1) - f(a)];$$
$$y_2 = m\,[f(x_2) - f(a)];$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_n = m\,[f(x_n) - f(a)].$$

Наметим на некоторой оси y точку a. От этой точки отложим вправо и влево, в зависимости от знака, отрезки, соответствующие значениям функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$, и подпишем значения их аргументов (фиг. 96).



Фиг. 96. Схема функциональной шкалы, построенной по уравнению $y = m\,[f(x) - f(a)]$

Значения аргумента выбирают обычно так, чтобы они изменялись на некоторую постоянную величину.

Расстояние между двумя смежными штрихами (длину деления шкалы) называют *графическим интервалом*. Разность пометок начала и конца графического интервала называют *ценой одного деления*. Если цена одного деления шкалы постоянна и графический интервал на всем протяжении шкалы одинаков, то такая шкала называется *равномерной*; если при одинаковой цене графический интервал различен, то шкала называется *неравномерной*. Как правило, номограммы строятся с неравномерными шкалами. Для удобства отсчета на шкалах графический интервал обычно принимают не менее 1 *мм* и не более 10 *мм*.

При оформлении шкалы подписывают только те пометки, которые соответствуют круглым значениям переменного; штрихи без подписей называются *немыми*. Началом и концом шкалы являются крайние точки (штрихи) шкалы, соответствующие данным пределам изменения переменного.

Если заданы крайние значения a и b аргумента, то, зная масштаб шкалы, можно определить длину шкалы по формуле

$$l = m\,[f(b) - f(a)]. \tag{162}$$

Наоборот, по заданной длине шкалы и известным крайним значениям аргумента можно по той же формуле определить масштаб шкалы.

Пример 63. Определить масштаб функциональной шкалы для функции $u = \lg x$, если длина шкалы $l = 200$ *мм*, а крайние значения аргумента $x_1 = 0{,}1$ и $x_n = 10$.

На основании уравнения (162) имеем

$$200 = m\,(\lg 10 - \lg 0{,}1).$$

Откуда

$$m = \frac{200}{\lg 10 - \lg 0{,}1} = \frac{200}{1 - (-1)} = 100 \text{ мм}.$$

§ 96. Номограммы из сдвоенных шкал

Простейшую номограмму для уравнений с двумя переменными легко построить из пары сдвоенных функциональных шкал. Сдвоенная шкала для уравнения $\varphi\,(u,\ v) = 0$ состоит из двух шкал: шкалы переменного u с одной стороны оси и из шкалы переменного v с другой стороны этой оси.

Составим номограмму из сдвоенных шкал для формулы

$$\Delta h = \sqrt{400L + 4L^2} \text{ мм},$$

в которой Δh — предельная невязка в сумме превышений, полученных из нивелирования IV класса, L — длина хода в километрах*.

Для получения уравнений шкал умножим левую и правую части данной формулы на масштаб m. Получим

$$y_{\Delta h} = m\,\Delta h,$$

$$y_L = m\sqrt{400L + 4L^2}.$$

При $L \leqslant 4$ *км* членом $4L^2$ можно пренебречь и уравнение шкалы для L записать в таком виде

$$y_L = m\,20\sqrt{L}.$$

Положим $(y_L)_{max} = 80$ *мм*, тогда масштаб шкалы получим из выражения

$$m = \frac{80}{20\sqrt{L}} = \frac{80}{20\sqrt{4}} = 2 \text{ мм}.$$

В табл. 57 приведены данные для построения номограммы, показанной слева на фиг. 97.

---

* В настоящее время для нивелирования IV класса принята формула

$$\Delta h = 20\sqrt{L}.$$

Таблица 57

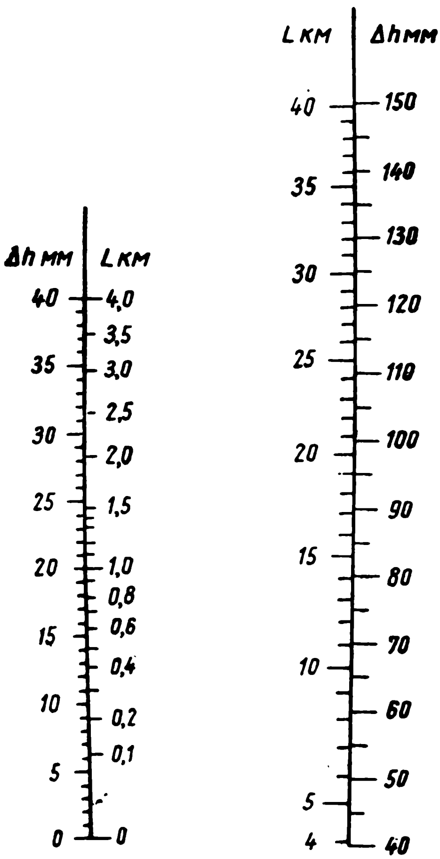
Δh	$m\,\Delta h$	L	$\sqrt{L}$	$m\,20\sqrt{L}$
0	0,0	0	0	0
5	10,0	0,1	0,316	12,6
10	20,0	0,2	0,447	17,9
15	30,0	0,4	0,632	25,3
20	40,0	0,6	0,775	31,0
25	50,0	0,8	0,894	35,8
30	60,0	1,0	1,000	40,0
35	70,0	1,5	1,225	49,0
40	80,0	2,0	1,414	56,6
		2,5	1,581	63,2
		3,0	1,732	69,3
		3,5	1,871	74,8
		4,0	2,000	80,0

Справа на фиг. 97 построена номограмма для той же формулы при условии

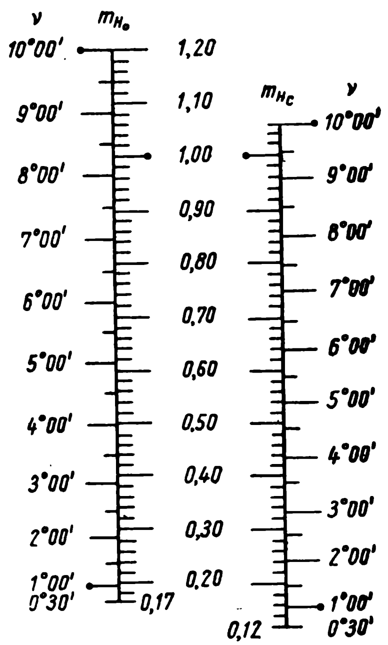
$$4\ км \leqslant L \leqslant 40\ км.$$

Уравнения шкал в этом случае будут

$$y_{\Delta h} = m\,(\Delta h - \Delta h_0),$$



Фиг. 97. Номограмма уравнения $\Delta h = \sqrt{400\,L + 4L^2}$



Фиг. 98. Номограмма для определения средних квадратических ошибок горизонталей по высоте

$$y_L = m\,(\sqrt{400L + 4L^2} - \sqrt{400\,L_0 + 4L_0^2}),$$

где $L_0 = 4$ *км*, $\Delta h_0 = 40{,}75$ *мм*.

При построении номограммы масштаб шкал был взят $m = 1$ *мм*.

На фиг. 98 приведены номограммы, составленные для формул

$$m_{H_0} = \sqrt{0{,}025 + 45{,}9 \operatorname{tg}^2 \nu} \ \textit{м};$$

$$m_{H_c} = \sqrt{0{,}013 + 35{,}8 \operatorname{tg}^2 \nu} \ \textit{м},$$

где m_{H_0} и m_{H_c} — средние квадратические ошибки горизонталей — первая по высоте относительно пункта геодезической опорной сети, вторая относительно станции; ν — угол наклона ската местности*.

В геодезическом производстве номограммы из сдвоенных шкал имеют определенное практическое значение. По сравнению с таблицами номограммы из сдвоенных шкал имеют то преимущество, что при пользовании ими производить интерполирование значительно проще.

По типу номограммы, приведенной на фиг. 98, можно построить номограммы для следующих геодезических формул:

$$f_\beta = 1',5 \sqrt{n},$$

$$\Delta S = \frac{\Delta l}{20} \cdot S,$$

$$m - 1 = \frac{y^2}{2R^2},$$

а также для других формул, выражающих зависимость между двумя переменными.

§ 97. Сетчатые номограммы с помеченными линиями

При разборе функциональных шкал мы изображали значения переменных точками, т. е. для каждого значения переменного ставили на некоторой оси определенную точку (штрих). Однако значения переменных можно изображать не только точками, но и линиями; линию, которой приписано определенное значение переменного, называют *помеченной линией*, а соответствующее ей значение этого переменного — *пометкой*. Линии, соответствующие значениям одного и того же переменного, образуют семейство линий с одним параметром. Номограммы из помеченных линий называют *сетчатыми номограммами*, так как эти линии образуют собой некоторую сетку.

Сетчатые номограммы можно строить для уравнений с тремя переменными. Такие номограммы для зависимости между тремя переменными состоят из трех семейств прямых или кривых линий.

Пусть дана функция трех переменных:

$$F(u, v, w) = 0. \qquad \text{(а)}$$

Простейший способ построения номограммы (в декартовых прямоугольных координатах) для уравнения (а) будет следующий.

Дадим одной из переменных (например, w) ряд значений: w_1, $w_2, \ldots, w_n$, и получим такие зависимости

$$\left.\begin{array}{l} F(u, v, w_1) = 0 \\ F(u, v, w_2) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ F(u, v, w_n) = 0 \end{array}\right\}. \qquad \text{(б)}$$

* В формулах для m_{H_0} и m_{H_c} числовые коэффициенты соответствуют рельефу местности определенного типа.

За семейство линий переменного u примем линии, параллельные оси ординат, т. е. положим, что

$$x = u.$$

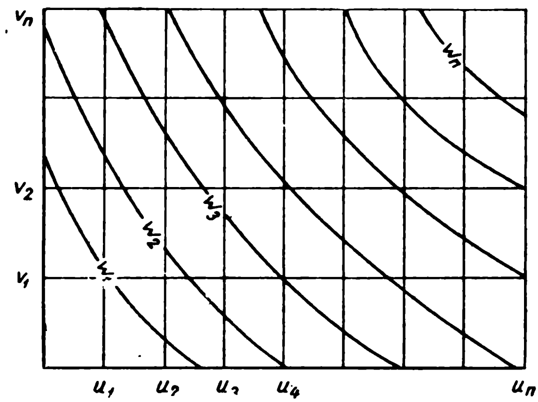
За семейство линий переменного v примем линии, параллельные оси абсцисс, т. е. положим, что

$$y = v.$$

Семейство линии переменного w начертим, исходя из равенства (б). На фиг. 99 показана схема номограммы для уравнения (а) из помеченных линий.

Для примера построим номограмму простейшего уравнения

$$w = u \cdot v.$$



Фиг. 99. Схема номограммы из помеченных линий

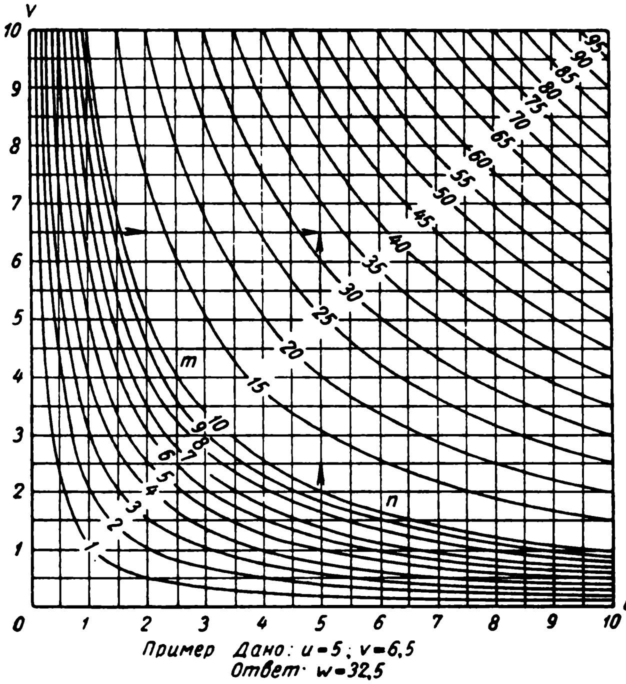
Дадим переменному w значения

$$w = 1,\ 2,\ 3, \ldots, 10,\ 20,\ 30, \ldots, 100.$$

Тогда будем иметь

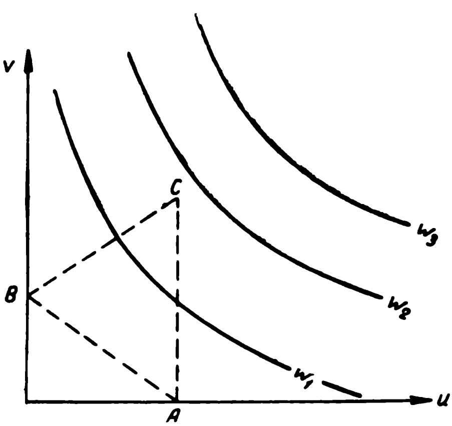
$$\left.\begin{array}{l} 1 = u \cdot v, \text{ или } u = \dfrac{1}{v} \\ 2 = u \cdot v, \text{ или } u = \dfrac{2}{v} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 10 = u \cdot v, \text{ или } u = \dfrac{10}{v} \\ 20 = u \cdot v, \text{ или } u = \dfrac{20}{v} \\ \ldots\ldots\ldots \\ 100 = u \cdot v, \text{ или } u = \dfrac{100}{v} \end{array}\right\}. \qquad \text{(в)}$$

Выражения (в) представляют собой уравнения равносторонних гипербол, асимптоты которых приняты за оси координат u и v. Давая различные значения одному из переменных, например v, будем находить значения переменной u и на основании этих значений строить кривые — гиперболы (фиг. 100), соответствующие значениям параметра w, равным 1, 2, 3, ... 10, 20, 30, ... 100.



Фиг. 100. Сетчатая номограмма уравнения $w = u \cdot v$

Таким образом, можно построить сетчатые номограммы для уравнений с тремя переменными типа (а), если рассматривать два переменных как координаты точек на плоскости, а третье переменное считать параметром.

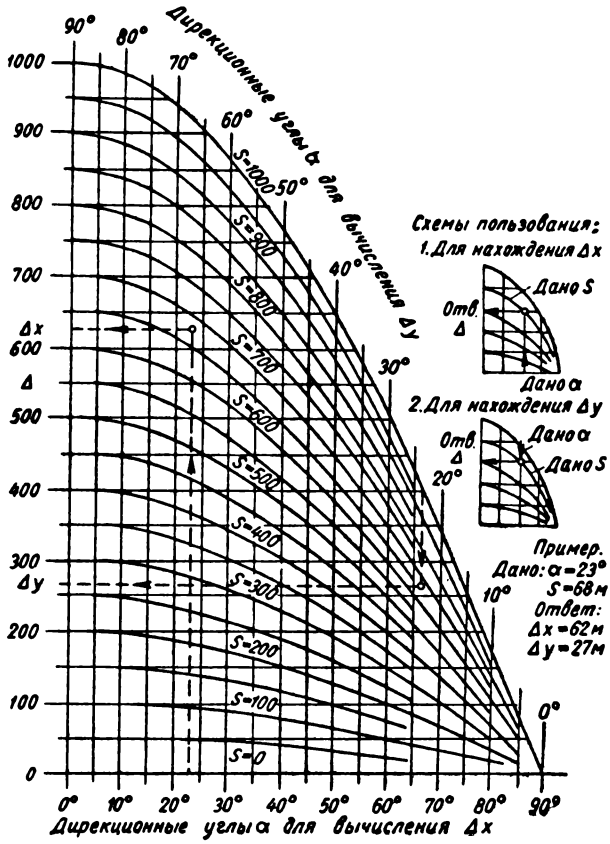


Фиг. 101. Схема расположения номограммы при определении площади треугольника ABC

На каждой сетчатой номограмме три линии, соответствующие значениям трех переменных, удовлетворяющих данному уравнению, должны проходить через одну точку. Отсюда вытекает простое правило нахождения на номограмме по данным значениям двух переменных соответствующего им третьего переменного (см. фиг. 100).

В заключение отметим, что номограмму, показанную на фиг. 100, можно использовать *для вычисления площадей прямоугольников и треугольников, имеющихся на плане.* Равенства (в) показывают, что произведение координат для любой точки одной и той же гиперболы есть величина постоянная. Поэтому площади прямоугольников, стороны которых совпадают с осями, а одна из вершин находится на одной и той же гиперболе, одинаковы. Например, прямоугольники, вершины которых m и n (фиг. 100) лежат на одной и той же гиперболе *10*, имеют одинаковую площадь, равную $u_m v_m = u_n v_n = 10$.

Если значения пометок переменного уменьшить в два раза, то мы получим номограмму для нахождения площадей треугольников (фиг. 101). Для определения площади треугольника ABC нужно наложить на него



Фиг. 102. Сетчатая номограмма для контроля приращений координат

номограмму, построенную на прозрачном материале, так, чтобы одна сторона была параллельна какой-нибудь оси координат, а две вершины находились на осях, тогда отсчет по номограмме против третьей вершины C даст площадь треугольника. Такая номограмма, служащая для определения площадей, называется *гиперболической палеткой.*

§ 98. Примеры построения сетчатых номограмм геодезических формул

Сетчатую номограмму можно построить для любой формулы, связывающей три переменных. Вид и форма сетчатой номограммы зависят от выбора уравнений семейств линий номограммы, поэтому для одной и той же формулы можно построить различные сетчатые номограммы.

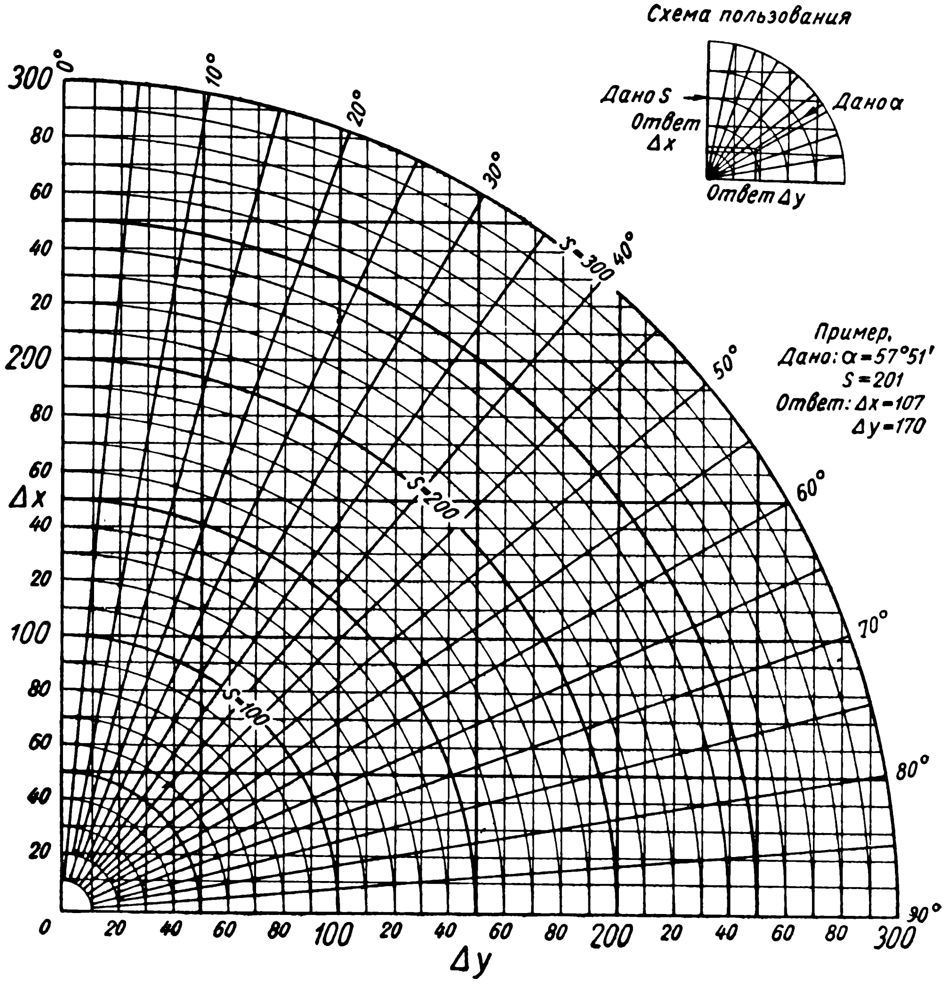
На фиг. 102 показана номограмма для вычисления приращений координат по формулам:

$$\begin{aligned}\Delta x &= S \cdot \cos\alpha,\\ \Delta y &= S \cdot \sin\alpha,\end{aligned} \tag{a}$$

Номограмма состоит из трех семейств линий следующих уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha \\ y &= \Delta x \\ y &= S \cdot \cos\alpha \end{aligned}\right\}, \tag{163}$$

из которых видно, что семейство линий дирекционных углов α — это



Фиг. 103. Сетчатая номограмма для контроля приращений координат

вертикальные прямые, параллельные оси y; семейство линий для приращений Δx — горизонтальные прямые, параллельные оси x, семейство линий для расстояний — косинусоиды с параметром S.

Эта же номограмма служит для определения приращений Δy, но в этом случае последнее из равенств (163) заменяется равенством

$$y = S \cdot \sin \alpha = S \cdot \cos (90^\circ - \alpha).$$

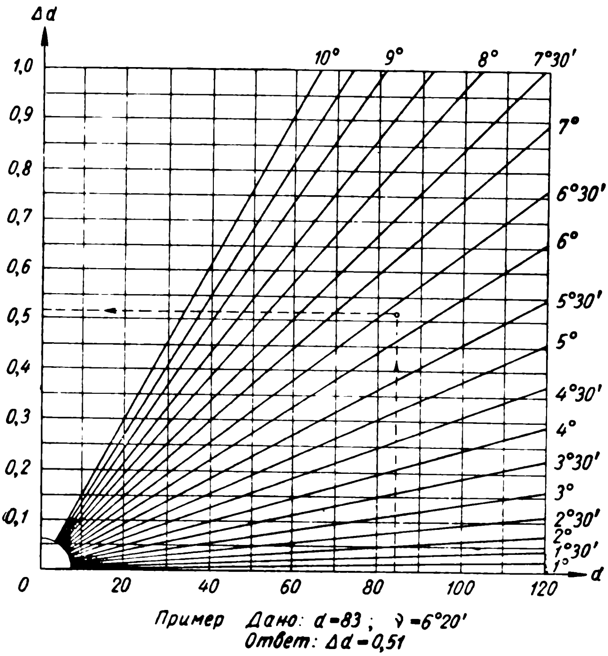
На номограмме значения дирекционных углов для определения Δy подписаны в обратном направлении (справа налево).

Более удобную номограмму для вычисления приращений (фиг. 103) можно составить, если равенства (а) принять за параметрические уравнения окружности радиуса S с центром в начале координат. Для каждой точки окружности дирекционный угол α будет иметь свое значение. Из равенства (а) легко получить уравнение окружности в декартовой системе координат, а именно

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 = S^2.$$

На номограмме (фиг. 103) в качестве линий, соответствующих переменному S, взято семейство концентрических окружностей с центром в начале координат; за линии переменного α взят пучок прямых, проходящих через начало координат; за семейство линий переменного Δx — прямые, параллельные оси x, и за семейство линий переменного Δy — прямые, параллельные оси y.

Применение сетчатых номограмм с кривыми линиями затрудняется сложностью их построения, поэтому такие сетчатые номограммы заменяют, если это возможно, номограммами с прямыми линиями.



Фиг. 104. Номограмма формулы $\Delta d = 2d \cdot \sin^2 \frac{\nu}{2}$

В геодезической практике часто применяются сетчатые номограммы (фиг. 104), называемые *радиантными;* построение их основано на уравнении прямой

$$y = kx.$$

В качестве примера построим радиантную номограмму формулы для определения поправок за наклон линии к горизонту

$$\Delta d = 2d \sin^2 \frac{\nu}{2}. \tag{б}$$

Шкалу расстояний d будем строить на оси абсцисс по уравнению

$$x = m_1 d, \tag{в}$$

а шкалу поправок Δd по уравнению

$$y = m_2 \Delta d. \tag{г}$$

Подставим в уравнение (б) вместо Δd и d их значения из (в) и (г), будем иметь

$$y = 2 \frac{m_2}{m_1} x \sin^2 \frac{\nu}{2}. \tag{164}$$

Равенство (164) можно рассматривать как уравнение пучка прямых, угловые коэффициенты которых зависят от угла ν.

Номограмма формулы (б) изображена на фиг. 104, для которой масштаб $m_1 = 0{,}5$ *мм*, а масштаб $m_2 = 100$ *мм*.

Радиантные номограммы легко построить для следующих употребительных геодезических формул

$$h = S \operatorname{tg} \nu,$$

$$h = \frac{1}{2}(kl + c) \sin 2\nu.$$

$$\Delta S = (kl + c) \sin^2 \nu,$$

$$\Delta x = S \cos \alpha,$$

$$\Delta y = S \sin \alpha,$$

а также и для других аналогичных формул, связывающих три переменных.

§ 99. Выпрямление кривой

На построение кривых по точкам требуется значительно больше времени, чем на построение прямых, так как положение каждой кривой определяется многими точками, а положение прямой только двумя. По этой причине, а также для повышения точности, кривые в сетчатых номограммах стараются заменить прямыми.

Выпрямление кривой, как и вообще преобразование одной линии в другую путем изменения шкал на осях, называется *анаморфозой*. Выпрямление кривых может быть сделано графически или аналитически. Разберем на частном примере аналитический способ. Пусть имеем уравнение

$$u^2 = v. \tag{а}$$

Если на осях координат построить равномерные шкалы

$$x = mu,$$

$$y = \mu v,$$

то, определив из этих уравнений значения u и v и подставив их в уравнение (а), будем иметь

$$y = \frac{\mu}{m^2} x^2, \tag{б}$$

т. е. мы получим уравнение параболы с вершиной в начале координат.

Если теперь на осях координат построить функциональные шкалы по уравнениям

$$x = mu^2,$$
$$y = \mu v,$$

то равенство (а) примет вид

$$y = \frac{\mu}{m} x, \tag{165}$$

т. е. путем изменения шкал мы преобразовали параболу (б) в прямую (165).

Выпрямить кривую можно также путем логарифмирования формулы. Так, логарифмируя обе части равенства (а), будем иметь

$$2 \lg u = \lg v. \qquad \text{(в)}$$

Если на осях координат построить шкалы по уравнениям

$$x = 2m \lg u,$$
$$y = \mu \lg v,$$

то равенство (в), после подстановки в него значений $\lg u$ и $\lg v$, примет вид

$$y = \frac{\mu}{m} x, \tag{166}$$

т. е. путем логарифмирования кривую можно преобразовать в прямую. Такое преобразование называют *логарифмической анаморфозой*. Нетрудно видеть, что в системе координат с логарифмическими шкалами по осям уравнение

$$v = nu^k + d \qquad \text{(г)}$$

также можно изобразить прямой линией при помощи логарифмической анаморфозы. Действительно, перенеся d в левую часть и затем логарифмируя полученное равенство будем иметь:

$$\lg (v - d) = k \lg u + \lg n. \qquad \text{(д)}$$

Теперь построим на оси x шкалу u по уравнению

$$x = m \lg u, \qquad \text{(е)}$$

и на оси y — шкалу $(v - d)$ по уравнению

$$y = \mu \lg (v - d). \qquad \text{(ж)}$$

Выразив $\lg u$ и $\lg (v - d)$ из равенств (е) и (ж) через x и y и подставив полученные выражения в равенство (д), будем иметь

$$y = k \frac{\mu}{m} x + \mu \lg n. \qquad \text{(з)}$$

Равенство (з) представляет собой уже уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Можно доказать*, что не только отдельные кривые, но и семейства кривых, соответствующих некоторым видам уравнений с тремя переменными, можно преобразовать в семейства прямых.

* См. Д. Л. Гавр. Основы номографии, Машгиз, 1949, стр. 89—90.

§ 100. Анаморфоза сетчатых номограмм

Возьмем уравнение

$$w = u \cdot v, \tag{а}$$

для которого номограмма дана на фиг. 100. Значениям переменной w соответствуют на номограмме гиперболы.

Логарифмируя обе части уравнения (а), будем иметь

$$\lg w = \lg u + \lg v, \tag{б}$$

Построим на осях координат логарифмические шкалы по уравнениям

$$\begin{aligned} x &= m \lg u, \\ y &= m \lg v. \end{aligned} \tag{в}$$

Из равенств (в) определим $\lg u$ и $\lg v$ и подставим их значения в равенство (б). Будем иметь

$$m \lg w = x + y,$$

или

$$\frac{x}{m \lg w} + \frac{y}{m \lg w} = 1. \tag{г}$$

Выражение (г) представляет собой уравнение прямой в отрезках

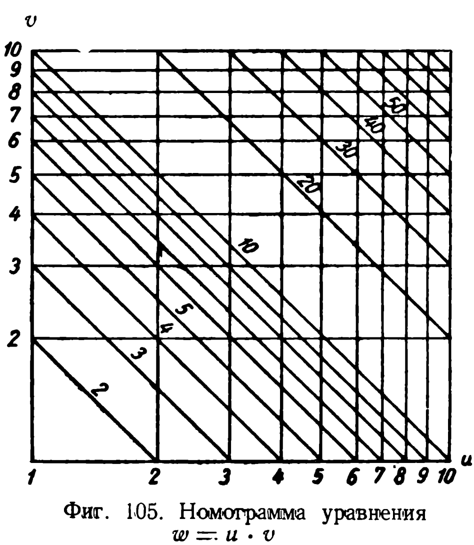
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

если

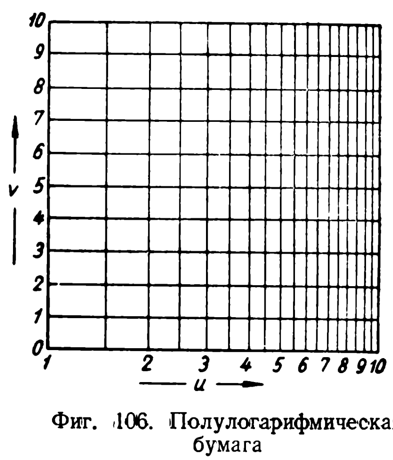
$$a = b = m \lg w,$$

где m — масштаб шкал.

Придавая переменной w различные значения (в заданных пределах),



Фиг. 105. Номограмма уравнения $w = u \cdot v$



Фиг. 106. Полулогарифмическая бумага

получим на основании уравнения (г) систему помеченных параллельных прямых, отсекающих на осях координат отрезки $m \lg w$.

На фиг. 105 изображена анаморфированная номограмма уравнения

$$w = u \cdot v,$$

на которой все гиперболы фиг. 100 превращены путем анаморфозы в прямые линии. Семейства горизонтальных и вертикальных линий фиг. 105, помеченные значениями u и v, получили некоторые сдвиги относительно первоначального положения, показанного на фиг. 100.

Бумагу, на которой нанесена сетка горизонтальных и вертикальных линий, уравнения которых имеют вид (в), называют *логарифмической бумагой*. На логарифмической бумаге легко строить номограммы уравнений типа

$$v = au^b w^c,$$

где a, b и c — некоторые постоянные величины.

При построении сетчатых номограмм употребляется также бумага, на которой нанесены семейства прямых, соответствующих уравнениям

$$\begin{aligned} x &= m \lg u, \\ y &= v, \end{aligned} \tag{д}$$

Такая бумага, (фиг. 106) называется *полулогарифмической*. На полулогарифмической бумаге легко построить сетчатую номограмму уравнений вида:

$$u = aw^{b+cv}, \tag{е}$$

состоящую из прямых линий (a, b и c — постоянные, w, u и v — переменные величины).

Логарифмируя обе части уравнения (е), будем иметь

$$\lg u = \lg a + (b + cv) \lg w. \tag{ж}$$

Учитывая (д), можно уравнение (ж) представить в следующем виде

$$x = m [\lg a + (b + cy) \lg w]. \tag{167}$$

Это выражение представляет собой уравнение пучка прямых с переменным параметром w.

Кроме логарифмической и полулогарифмической, употребляются сетки, на которых выпрямляются специальные кривые (тангенсоиды, кривые распределения вероятности и т. п.).

В качестве примера преобразования кривых в прямые возьмем формулу, по которой вычисляются превышения

$$h = S \operatorname{tg} \nu.$$

Логарифмируя ее, получим

$$\lg h = \lg S + \lg \operatorname{tg} \nu. \tag{з}$$

Если начальные значения превышения, горизонтального проложения и угла наклона будут соответственно h_0, S_0 и ν_0, то

$$\lg h_0 = \lg S_0 + \lg \operatorname{tg} \nu_0. \tag{и}$$

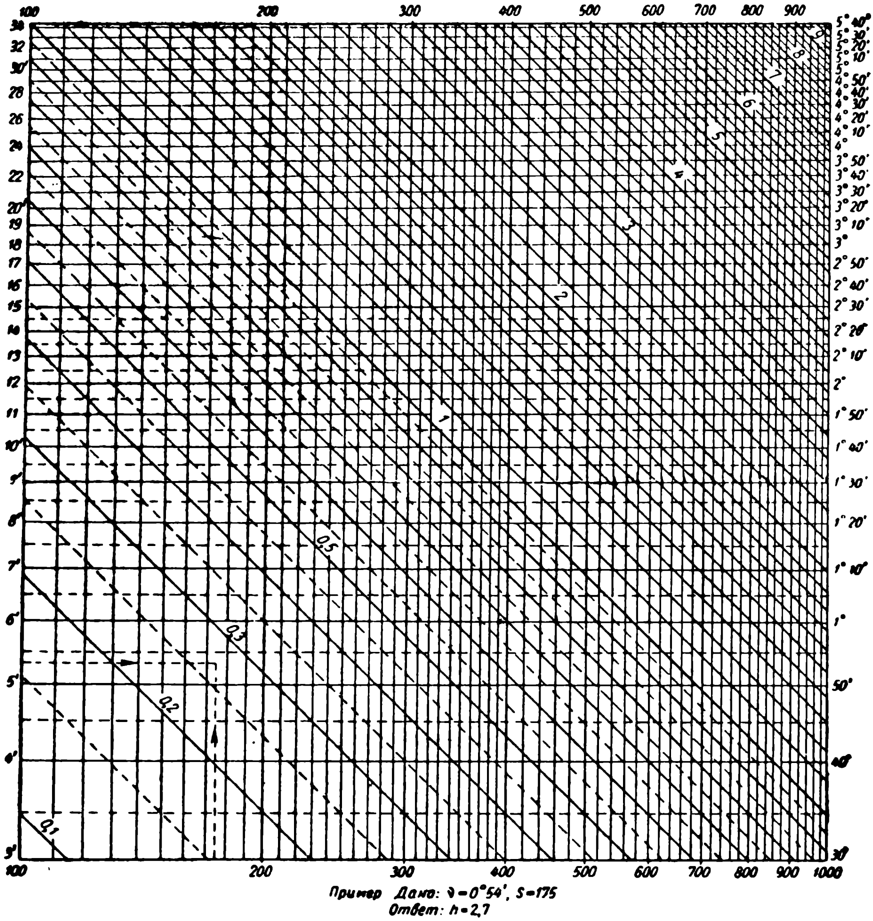
Вычитая из равенства (з) равенство (и), будем иметь

$$\lg h - \lg h_0 = (\lg S - \lg S_0) + (\lg \operatorname{tg} \nu - \lg \operatorname{tg} \nu_0). \tag{к}$$

Построим на осях координат логарифмические шкалы по уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} x &= m (\lg S - \lg S_0) \\ y &= m (\lg \operatorname{tg} \nu - \lg \operatorname{tg} \nu_0) \end{aligned}\right\}. \tag{л}$$

Из уравнений (к) и (л) легко получить уравнение семейства парал-



Фиг. 107. Номограмма формулы $h = S \operatorname{tg} \nu$

лельных прямых с параметром h:

$$\frac{x}{m(\lg h - \lg h_0)} + \frac{y}{m(\lg h - \lg h_0)} = 1.$$

На фиг. 107 приведена номограмма формулы:

$$h = S \operatorname{tg} \nu,$$

известная в геодезической литературе под названием номограммы Бурченкова.

§ 101. Номограмма из выравненных точек с тремя параллельными равноотстоящими шкалами

На основании свойства средней линии трапеции (фиг. 108) при любом положении линии AB будем иметь

$$2y_3 = y_1 + y_2, \tag{а}$$

где отрезки y_1 и y_2 — стороны, а отрезок y_3 — средняя линия трапеции. Выражение (а) представляет собой уравнение геометрической связи, которым пользуются при построении номограмм формул, приводимых к этому выражению.

Если, например, дано уравнение

$$f_3(w) = f_1(u) + f_2(v), \qquad (б)$$

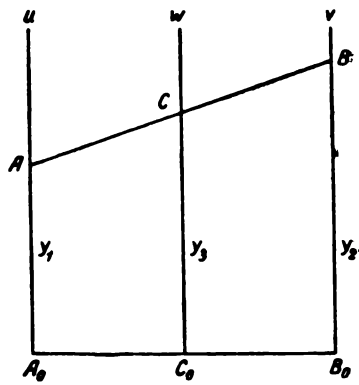
то в соответствии с (а) строим в выбранном масштабе:

на линии A_0A шкалу $y_1 = mf_1(u)$,

» » B_0B » $y_2 = mf_2(v)$,

» » C_0C » $y_3 = \frac{m}{2} f_3(w)$

и подписываем эти шкалы соответствующими значениями переменных u, v и w.



Фиг. 108. Схема номограммы с тремя параллельными равноотстоящими шкалами

Предположим, что эта номограмма построена (фиг. 108). Тогда три каких-нибудь числа u_n, v_n, w_n, удовлетворяющие уравнению (б), должны на номограмме находиться на одной прямой.

Таким образом, употребление номограмм такого типа основано на том геометрическом факте, что точки A, C, B, соответствующие значениям переменных, всегда расположены на одной прямой, которую называют *разрешающей*. Такие номограммы называются *номограммами из выравненных точек.*

Очевидно, что пользование номограммами из выравненных точек заключается в проведении разрешающих прямых и прочтении пометок точек пересечения этих прямых со шкалой третьего переменного. Точки на шкалах, соответствующие данным значениям переменных, называют *данными*, а точки, дающие ответ, называют *ответными*.

Пример 64. Построить номограмму с параллельными шкалами для формулы

$$f_p = \sqrt{f_x^2 + f_y^2},$$

где f_x — невязка в сумме приращений по оси абсцисс, а f_y — невязка по оси ординат, причем f_x и f_y изменяются в пределах от 0 до 8 *м*.

Приводим данное уравнение к виду

$$f_p^2 = f_x^2 + f_y^2.$$

Умножив каждый член этого равенства на масштаб m и сравнив его с равенством (а), напишем уравнения шкал в следующем виде:

$$y_1 = mf_x^2,$$
$$y_2 = mf_y^2,$$
$$y_3 = \frac{m}{2} f_p^2.$$

Максимальное значение f_p найдем из выражения

$$f_p = \sqrt{8^2 + 8^2} = 11{,}6.$$

Положим расстояние между крайними шкалами равным 9 *см*, а длина шкал пусть будет 9,6 *см*. Тогда масштаб шкал найдется из выражения

$$m = \frac{y_{\max}}{f_x^2{}_{(\max)}} = \frac{96\ мм}{64} = 1{,}5\ мм.$$

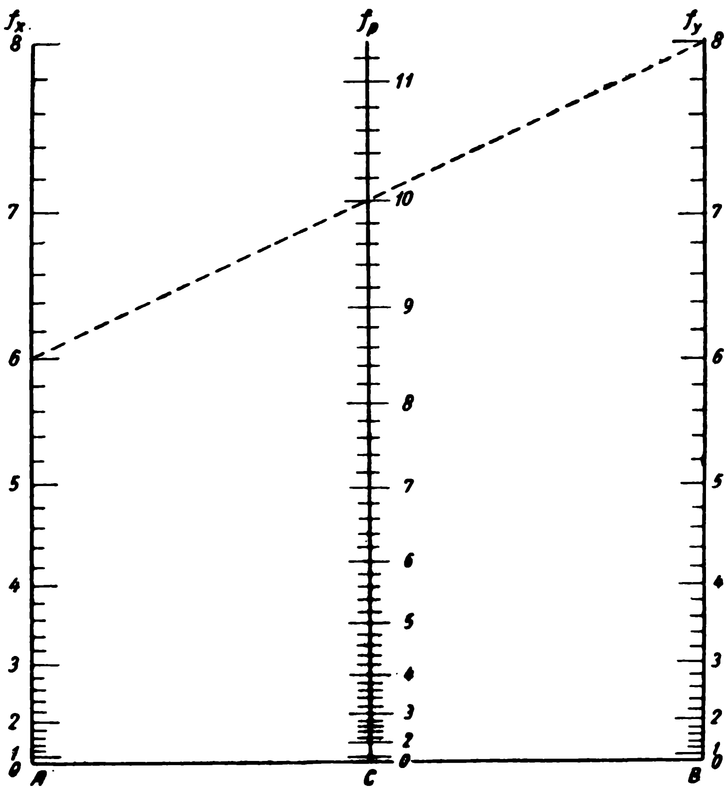
Задаваясь различными значениями f_x, f_y, f_p (в заданных пределах), находим согласно уравнениям шкал значения отрезков y_1, y_2, y_3, которые откладываем на выбранных линиях и подписываем значениями переменных f_x, f_y и f_p (фиг. 109).

Если дано уравнение вида

$$f_3(w) = f_1(u) \cdot f_2(v), \qquad \text{(в)}$$

то его можно привести к виду уравнения (а) путем логарифмирования

$$\lg f_3(w) = \lg f_1(u) + \lg f_2(v). \qquad \text{(г)}$$



Фиг. 109. Номограмма формулы $f_p = \sqrt{f_x^2 + f_y^2}$

Сравнивая уравнение (г) с уравнением (а), можно написать следующие уравнения шкал:

$$y_1 = m \lg f_1(u),$$
$$y_2 = m \lg f_2(v),$$
$$y_3 = \frac{m}{2} \lg f_3(w),$$

которые аналогичны уравнениям шкал логарифмической линейки. Из рассмотрения этих уравнений видно, что если значение какой-нибудь функции, стоящей под знаком логарифма, будет нуль, то для такой функции построить шкалу нельзя, поэтому подбирают такие начальные значения аргументов, чтобы значения функции не были равны нулю, и записывают уравнения шкал в виде

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= m\,[\lg f_1(u) - \lg f_1(u_0)] \\ y_2 &= m\,[\lg f_2(v) - \lg f_2(v_0)] \\ y_3 &= \frac{m}{2}\,[\lg f_3(w) - \lg f_3(w_0)] \end{aligned}\right\}. \tag{168}$$

Величинам u_0, v_0 и w_0 можно давать любые значения, удовлетворяющие уравнению (в).

§ 102. Приспособляемая номограмма с тремя параллельными шкалами

В предыдущем параграфе мы рассмотрели простейший частный случай номограммы из выравненных точек с тремя параллельными равноотстоящими шкалами, при этом для установления геометрической связи между шкалами было использовано свойство средней линии трапеции. Недостаток номограмм с тремя параллельными шкалами, расположенными на одинаковом расстоянии, состоит в том, что масштаб средней шкалы должен быть всегда в два раза меньше масштаба крайних шкал, а масштабы последних должны быть одинаковы.

Рассмотрим номограмму из трех параллельных шкал, расстояния между которыми m_1 и m_2 неодинаковы (фиг. 110). Проведем секущую $P_1P_2P_3$. Длины отрезков AP_1, BP_2, CP_3 обозначим соответственно через y_1, y_2 и y_3. Из точки P_1 проведем линию $P_1C_1B_1$, параллельную прямой ACB. Тогда из подобия получившихся треугольников можем написать

$$\frac{y_3 - y_1}{m_1} = \frac{y_2 - y_1}{m_1 + m_2}. \tag{а}$$

Из равенства (а), представляющего собой условие расположения трех точек на одной прямой, следует

$$y_3(m_1 + m_2) = y_1 m_2 + y_2 m_1.$$

Разделив это равенство на произведение $m_1 m_2$, получим

$$y_3\,\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} = \frac{y_1}{m_1} + \frac{y_2}{m_2},$$

или

$$\frac{y_3}{\dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} = \frac{y_1}{m_1} + \frac{y_2}{m_2}. \tag{169}$$

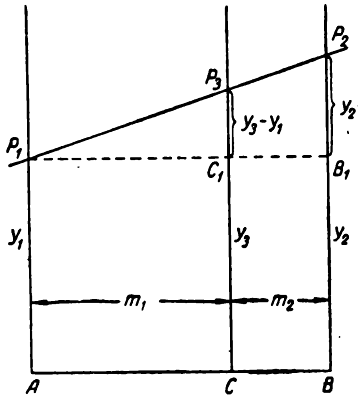
Номограммы с параллельными шкалами служат для решения уравнений вида

$$f_3(w) = f_1(u) + f_2(v). \tag{б}$$

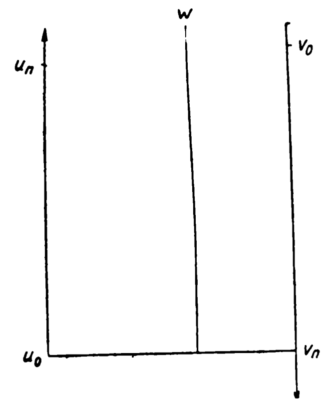
Приравнивая соответствующие члены равенств (б) и (169), получим уравнения для построения шкал:

$$y_1 = m_1 f_1(u),$$
$$y_2 = m_2 f_2(v),$$
$$y_3 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, f_3(w).$$

В номограммах такого типа имеется значительная свобода выбора масштабов шкал. При построении номограммы сначала выбирают масштабы шкал, а потом расстояние между ними, имея в виду, что номограмму можно изменять как в направлении оси абсцисс, так и в направлении оси ординат, не нарушая правильности определения по ней искомых величин.



Фиг. 110. Схема приспособляемой номограммы из выравненных точек с тремя параллельными шкалами



Фиг. 111. Положение пометок на шкалах, когда функции $f_1(u)$ и $f_2(v)$ имеют противоположные знаки

мых величин. В частности, мы можем изменять расстояние между шкалами, но так, чтобы сохранялась пропорция

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{h_1}{h_2}, \tag{в}$$

где m_1 и m_2 — масштабы крайних шкал, а h_1 и h_2 — расстояния между шкалами.

Если значения функций $f_1(u)$ и $f_2(v)$ положительны, то соответствующие им отрезки y_1 и y_2 откладывают в одну и ту же сторону, если же значения этих функций имеют противоположные знаки, то против начальной пометки u_0 одной шкалы необходимо располагать конечную пометку v_n другой, и наоборот (фиг. 111).

Пример 65. Поправка за наклон к горизонту линии, измеренной по дальномеру, определяется по формуле

$$\Delta S = kl \sin^2 \nu.$$

Построить номограмму этого уравнения при условии, что

$$20 < kl < 150; \quad 2° < \nu < 15°.$$

Логарифмируя данное равенство, получим

$$\lg \Delta S = \lg kl + 2 \lg \sin \nu.$$

Каждую из крайних шкал возьмем длиной в 90 *мм*, тогда будем иметь

$$90 = m_1 (\lg 150 - \lg 20)$$

$$90 = m_2 (2 \lg \sin 15° - 2 \lg \sin 2°),$$

откуда приближенно

$$m_1 = 103 \textit{ мм}; \quad m_2 = 52 \textit{ мм}.$$

Для удобства вычислений округлим масштабы шкал, положив

$$m_1 = 100 \text{ мм}; \quad m_2 = 50 \text{ мм}.$$

Масштаб средней шкалы найдем по формуле

$$m_3 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = 33{,}33 \text{ мм}.$$

Найдем теперь крайние значения поправки ΔS, соответствующие крайним значениям расстояния kl и угла наклона ν. Имеем:

$$\Delta S_0 = 20 \cdot \sin^2 2^\circ = 0{,}0244 \text{ м},$$
$$\Delta S_n = 150 \cdot \sin^2 15^\circ = 10{,}0 \text{ м}.$$

Уравнения шкал будут

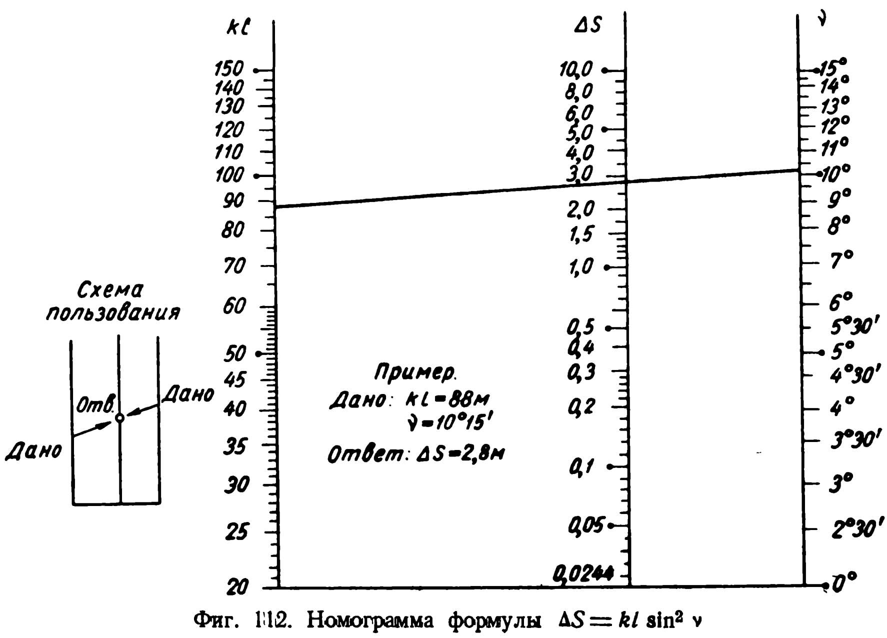
$$y_1 = 100{,}00 (\lg kl - \lg 20{,}00),$$
$$y_2 = 100{,}00 (\lg \sin \nu - \lg \sin 2^\circ 00'),$$
$$y_3 = 33{,}33 (\lg \Delta S - \lg 0{,}0244).$$

Расстояние h_1 между шкалой расстояний и шкалой поправок возьмем равным 60 *мм*, тогда по формуле (в) будем иметь

$$\frac{100}{50} = \frac{60}{h_2},$$

откуда расстояние между средней шкалой и шкалой углов наклона $h_2 = 30$ *мм*.

Номограмма, построенная согласно этим уравнениям, показана на фиг. 112*.



Фиг. 112. Номограмма формулы $\Delta S = kl \sin^2 \nu$

* Размеры номограммы, приведенной на фиг. 112, уменьшены при фотографировании.

В табл. 58 приведены данные для построения шкалы функции углов наклона.

Таблица 58

Шкала ν			
ν	lg sin ν	lg sin ν — lg sin 2°	$y_2 = 100$ (lg sin ν — lg sin 2°)
2°00′	8.543	0.000	0,0
2 30	8.640	0.097	9,7
3 00	8.719	0.176	17,6
3 30	8.786	0.243	24,3
4 00	8.843	0.300	30,0
4 30	8.895	0.352	35,2
5 00	8.940	0.397	39,7
5 30	8.981	0.438	43,8
6 00	9.019	0.476	47,6
6 30	9.054	0.511	51,1
7 00	9.086	0.543	54,3
7 30	9.116	0.573	57,3
8 00	9.144	0.601	60,1
8 30	9.170	0.627	62,7
9 00	9.193	0.650	65,0
9 30	9.218	0.675	67,5
10 00	9.240	0.697	69,7
10 30	9.260	0.717	71,7
11 00	9.281	0.738	73,8
11 30	9.300	0.757	75,7
12 00	9.318	0.775	77,5
12 30	9.335	0.792	79,2
13 00	9.352	0.809	80,9
13 30	9.368	0.825	82,5
14 00	9.384	0.841	84,1
14 30	9.399	0.856	85,6
15 00	9.413	0.870	87,0

§ 103. Номограммы из выравненных точек с параллельными шкалами для многих переменных

Пользуясь изложенными в § 101 и 102 положениями, можно строить номограммы для уравнений с четырьмя и более параллельными шкалами. Номограммы такого типа можно строить для уравнений вида

$$f_1(u) + f_2(v) - f_3(w) = f_4(t) \tag{170}$$

и для уравнений, которые приводятся к этому виду.

Уравнение (170) перепишем так:

$$f_4(t) = x - f_3(w), \tag{171}$$

где

$$x = f_1(u) + f_2(v). \tag{172}$$

Выражения (171) и (172) представляют уравнения с тремя переменными; для них можно построить номограммы с параллельными шкалами по правилам, изложенным в § 101 и 102. Номограммы для уравнений (171) и (172) строят так, чтобы шкалы для переменной x совпали, т. е. чтобы они имели одинаковый масштаб и одно начало. На шкале для переменной x можно не делать никаких пометок, так как нас не интересуют численные значения переменной x. Шкалу без делений называют *немой*. На фиг. 113 показана схема номограммы с немой шкалой для уравнения (170).

Члены уравнения (170) можно расположить в другой последовательности, тогда по-иному расположится и немая шкала.

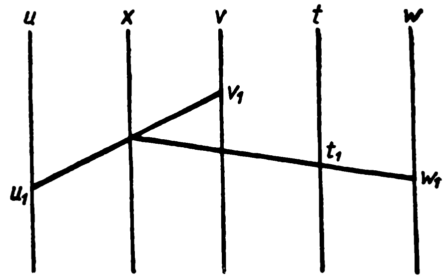
К уравнению вида (170) можно путем логарифмирования привести уравнение

$$t = Q \cdot u^{\alpha} \cdot v^{\beta} \ldots w^{\gamma},$$

где $Q, \alpha, \beta, \ldots, \gamma$ — постоянные, а $t, u, v, \ldots, w$ — переменные величины. На фиг. 114 показана схема номограммы из параллельных логарифмических шкал, составленная инженерами В. А. Поповым и Ю. А. Аладжаловым* для уравнений

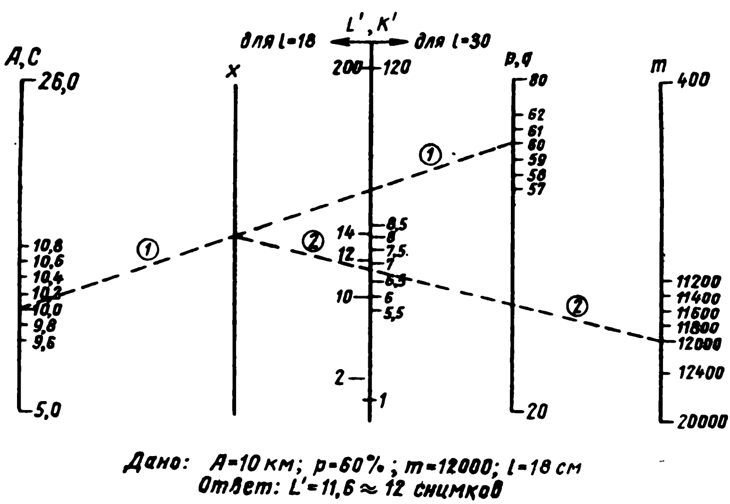
$$L' = \frac{10^7 \cdot A}{l(100 - p) \cdot m}, \qquad \text{(а)}$$

$$K' = \frac{10^7 \cdot C}{l(100 - q) \cdot m}, \qquad \text{(б)}$$



Фиг. 113. Схема номограммы с немой шкалой для уравнения $f_1(u) + f_2(v) - f_3(w) = f_4(t)$

где A — длина, а C — ширина съемочного участка в километрах, изменяющиеся в пределах от 5 до 26 *км*; l — длина стороны аэроснимка в сантиметрах, равная 18 или 30 *см*; p и q—заданные проценты продольного и поперечного перекрытия, изменяющиеся в пределах от 20 до 80%; m—знаменатель фактического численного масштаба аэросъемки, находящийся в пределах $4000 \leqslant m \leqslant 20\,000$.



Фиг. 114. Схема номограммы для определения числа аэроснимков на съемочный участок

* Основные технические требования к аэросъемке для создания топографических планов в масштабах 1 : 25 000 — 1 : 2000, М., Геодезиздат, 1951, стр. 36.

§ 104. Пропорциональные номограммы

Пропорциональные номограммы дают возможность изображать уравнения с четырьмя переменными без немых шкал. Принцип построения пропорциональных номограмм основан на пропорциональности линий в подобных фигурах. Пусть дано уравнение

$$f_4(t) = \frac{f_2(v) \cdot f_3(w)}{f_1(u)},$$

которое представим в виде пропорции

$$\frac{f_1(u)}{f_2(v)} = \frac{f_3(w)}{f_4(t)}. \qquad (173)$$

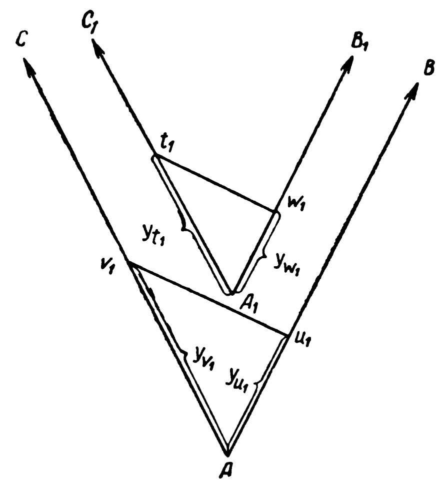
Уравнения шкал для пропорции (173) напишем в следующем виде

$$\left.\begin{aligned} y_u &= m_1 \cdot f_1(u) \\ y_v &= m_2 \cdot f_2(v) \\ y_w &= m_3 \cdot f_3(w) \\ y_t &= m_4 \cdot f_4(t) \end{aligned}\right\}. \qquad (a)$$

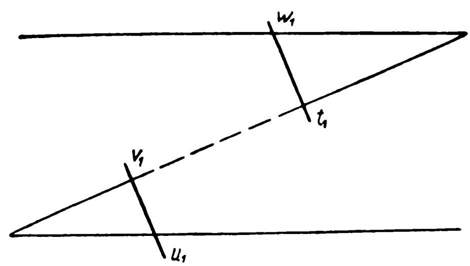
Согласно уравнениям (а) построим шкалы на параллельных линиях AC и A_1C_1, AB и A_1B_1 (фиг. 115).

Из подобных треугольников Au_1v_1 и $A_1w_1t_1$ можно написать

$$\frac{y_{u_1}}{y_{v_1}} = \frac{y_{w_1}}{y_{t_1}},$$



Фиг. 115. Соотношение между величинами в пропорциональной номограмме



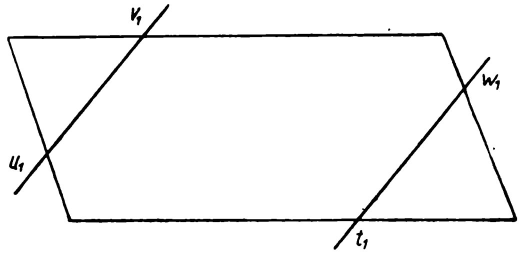
Фиг. 116. Расположение шкал в пропорциональной номограмме (первый вариант)

или, учитывая равенства (а), будем иметь

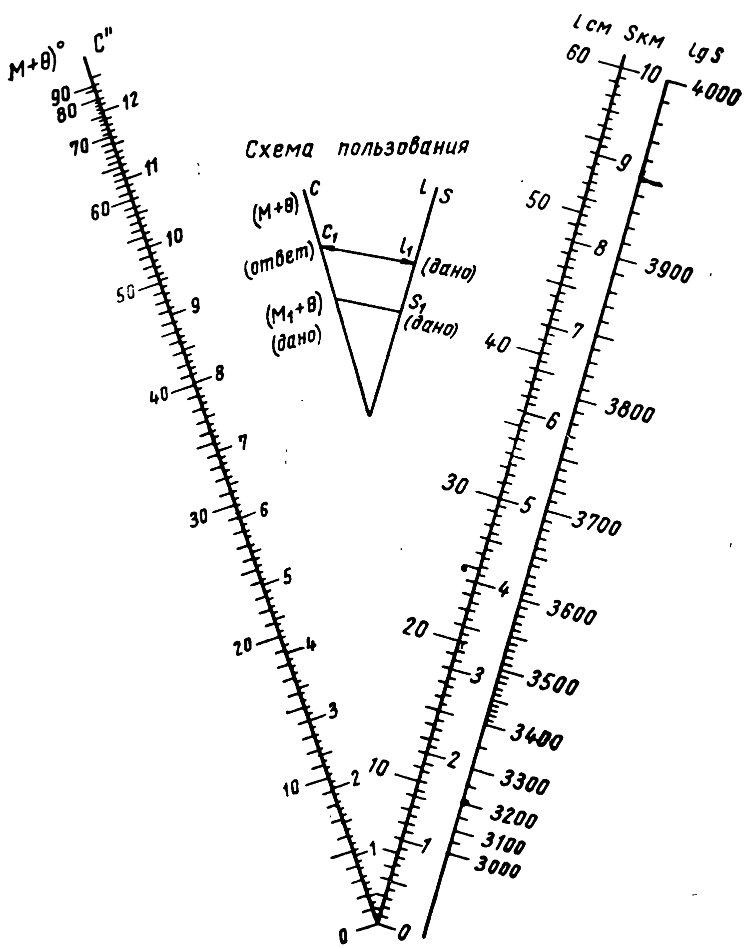
$$\frac{m_1 \cdot f_1(u_1)}{m_2 \cdot f_2(v_1)} = \frac{m_3 f_3(w_1)}{m_4 f_4(t_1)}. \qquad (б)$$

Если в уравнении (б) подобрать масштабы так, чтобы сохранялось соотношение

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{m_3}{m_4},$$



Фиг. 117. Расположение шкал в пропорциональной номограмме (второй вариант)



Фиг. 118. Пропорциональная номограмма для определения поправок за центрировку и редукцию

то уравнение (б) можно представить в виде

$$\frac{f_1(u_1)}{f_2(v_1)}=\frac{f_3(w_1)}{f_4(t_1)},$$

которое соответствует данному уравнению (173). Из изложенного следует достаточно простое использование пропорциональной номограммы, заключающееся в следующем. Возьмем чертежный треугольник (лучше прозрачный) и один из катетов его приложим к точкам, соответствующим данным значениям переменных u_1 и v_1. Приложив к данному катету линейку, передвигаем треугольник вдоль линейки до тех пор, пока первый катет коснется точки, соответствующей значению переменной w_1. Тогда на четвертой шкале по этому катету прочтем искомое значение t_1.

Приведенное на фиг. 115 расположение шкал не является единственным. Можно, например, на линии AC с одной стороны построить шкалу для переменной v, с другой — для переменной t; а на линии AB с одной стороны — шкалу для u, с другой — для w, т. е. на линиях AC и AB построить сдвоенные шкалы. Можно расположить шкалы так, как показано на фиг. 116 и 117.

На фиг. 118 представлена пропорциональная номограмма для определения поправок за центрировку и редукцию по формуле

$$\frac{c''}{e\rho''}=\frac{\sin(M+\Theta)}{S},$$

при условии

$$0\leqslant e\leqslant 60\ \text{см},$$
$$0^\circ\leqslant M+\Theta\leqslant 90^\circ,$$
$$0\leqslant S\leqslant 10\ \text{км}.$$

На номограмме (фиг. 118) построена вспомогательная шкала $\lg S$, которая может быть использована, если не даны длины сторон, а известны их логарифмы.

§ 105. Номограммы с бинарными полями и шкалами

Номограммы с бинарными полями и шкалами можно составить для уравнений с четырьмя, пятью или шестью переменными.

Введем понятие о бинарном поле. Известно, что в прямоугольной системе координат положение точки определяется пересечением двух прямых, параллельных осям координат. Допустим, что координаты прямоугольной системы связаны с переменными u и v уравнениями

$$\left.\begin{aligned}x&=\varphi(u,v)\\ y&=\psi(u,v)\end{aligned}\right\}. \qquad (174)$$

Исключив из уравнения (174) переменное v, получим

$$f(x,y,u)=0. \qquad (a)$$

Давая u значения u_1, u_2, u_3, ..., u_n, получим уравнения

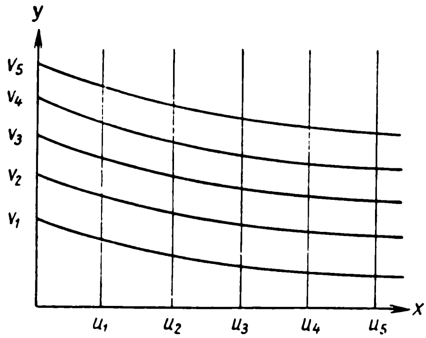
$$\left.\begin{aligned}f(x,y,u_1)&=0\\ f(x,y,u_2)&=0\\ f(x,y,u_3)&=0\\ &\cdots\\ f(x,y,u_n)&=0\end{aligned}\right\}, \qquad (175)$$

согласно которым построим семейство кривых или прямых для переменной u.

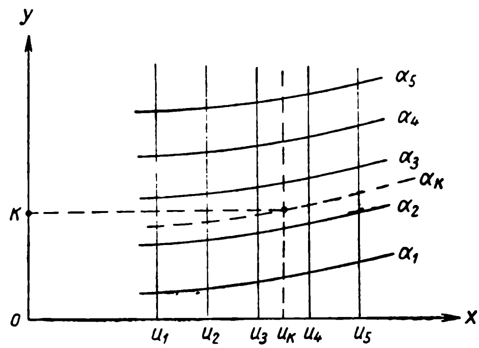
Аналогично в уравнении (174) исключив u и положив $v = v_1$, $v_2, \ldots, v_n$, получим

$$\left.\begin{array}{l} F(x, y, v_1) = 0 \\ F(x, y, v_2) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ F(x, y, v_n) = 0 \end{array}\right\}, \qquad (176)$$

согласно которым построим семейства кривых или прямых для переменной v (фиг. 119). Очевидно, положение каждой точки на плоскости



Фиг. 119. Бинарное поле



Фиг. 120. Бинарная шкала

может быть определено пересечением двух, вообще говоря, кривых. Плоскость, на которой изображена система помеченных линий двух переменных u и v, называют бинарным полем (двойным полем). Иначе говоря, *бинарным полем называют совокупность двух семейств кривых или прямых, каждое из которых зависит от одного параметра.* Равенства (174) называют уравнениями бинарного поля.

Если одно из уравнений (174) имеет только одну переменную, например

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(u) \\ y = \psi(u, v) \end{array}\right\}, \qquad (177)$$

то равенство $x = \varphi(u)$ будет уравнением семейства прямых, параллельных оси ординат.

Пусть дано уравнение с шестью переменными

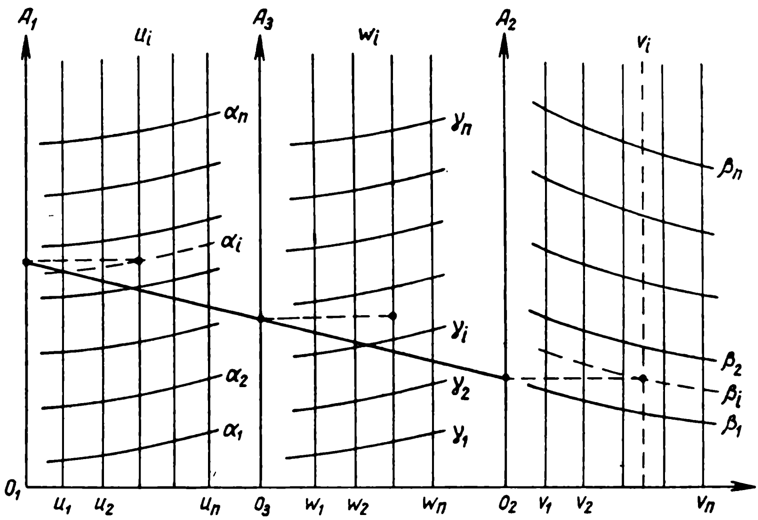
$$f_1(u, \alpha) + f_2(v, \beta) = f_3(w, \gamma). \qquad (178)$$

Для равенства (178) уравнения шкал будут иметь вид

$$\left.\begin{array}{l} y_{f_1} = mf_1(u, \alpha) \\ y_{f_2} = mf_2(v, \beta) \\ y_{f_3} = mf_3(w, \gamma) \end{array}\right\}. \qquad (в)$$

Уравнения (в) называют *уравнениями бинарных шкал.* Для пользования бинарной шкалой к ней пристраивают бинарное поле. Для определения некоторой точки k бинарной шкалы (фиг. 120), соответствующей $u = u_k$ и $\alpha = \alpha_k$, находят соответствующую точку на бинарном поле и затем ортогонально проектируют ее на ось ординат.

Из уравнений (в) видно, что отрезки y_f на бинарной шкале являются функцией двух переменных и для одного определенного значения y_f может быть множество значений этих переменных. Поэтому пометки на бинарной шкале сделать невозможно, она всегда остается немой шкалой.



Фиг. 121. Схема номограммы с тремя бинарными параллельными шкалами

На фиг. 121 изображена схема номограммы с тремя бинарными параллельными шкалами. Правило пользования изображенной на фиг. 121 номограммой уравнения (178) с шестью переменными заключается в следующем. По данным значениям u_i и α_i определяют точку на левом бинарном поле и проектируют ее на шкалу O_1A_1. По данным значениям v_i и β_i определяют точку на правом бинарном поле и проектируют ее на шкалу O_2A_2. Соединяют прямой найденные точки и находят точку пересечения этой прямой с третьей бинарной шкалой O_3A_3. Из полученной точки проводят линию, параллельную оси абсцисс до точки пересечения с линией, соответствующей заданному значению w_i. Ответ читают по линии γ_i, проходящей через последнюю точку.

Номограммы с бинарными шкалами относятся к типу номограмм из выравненных точек. Только в этом случае совокупность точек на шкале одной переменной, заменяется совокупностью точек на бинарном поле, соответствующих двум переменным.

Для уравнений с четырьмя переменными номограмма будет состоять из одного бинарного поля и двух обычных шкал; для уравнений с пятью переменными — с двумя бинарными полями и одной шкалы; для уравнений с шестью переменными — с тремя бинарными полями.

Пример. Допустимая невязка в сумме площадей контуров, вычисленных планиметром по плану в масштабе 1 : 10 000, определяется по формуле

$$\Delta p = 0{,}7\,\mu\sqrt{n} + 0{,}03\sqrt{p}*,$$

* А. В. Маслов. Способы и точность определения площадей, М., Геодезиздат, 1955.

где μ — цена одного деления планиметра, n — количество контуров угодий, p — сумма площадей контуров.

Построим номограмму для этой формулы при условии:

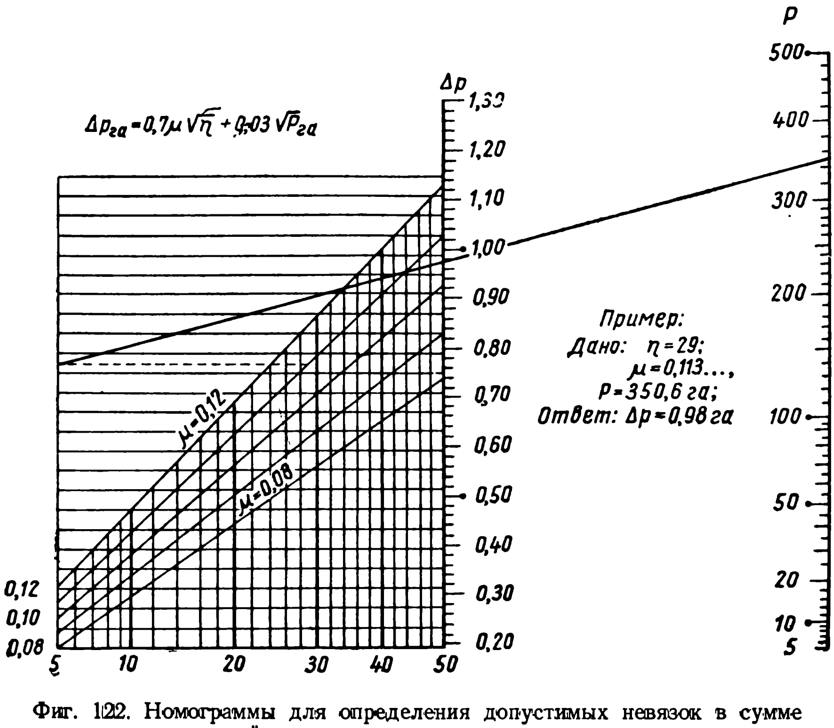
$$0{,}08\ га \leqslant \mu \leqslant 0{,}12\ га; \quad 5 \leqslant n \leqslant 50; \quad 5\ га \leqslant p \leqslant 500\ га;$$
$$0{,}19\ га \leqslant \Delta p \leqslant 1{,}26\ га.$$

В соответствии с уравнением (178) положим

$$f_1(u, \alpha) = f_1(\mu \cdot n) = 0{,}7\,\mu\sqrt{n},$$
$$f_2(v, \beta) = f_2(p) = 0{,}03\sqrt{p},$$
$$f_3(w, \gamma) = f_3(\Delta p) = \Delta p.$$

Из этих уравнений видим, что для данной формулы только одна первая шкала будет бинарной. Уравнения бинарного поля напишем в следующем виде

$$x = m_2(\sqrt{n} - \sqrt{n_0}), \tag{г}$$
$$y = m_1(0{,}7\,\mu\sqrt{n} - 0{,}7\,\mu\sqrt{n_0}). \tag{д}$$



Фиг. 122. Номограммы для определения допустимых невязок в сумме площадей контуров, вычисленных планиметром

Из (г) определим $\sqrt{n} = \frac{x + m_2\sqrt{n_0}}{m_2}$ и подставим найденное значение в (д). Будем иметь

$$y = m_1\left(0{,}7\,\mu\,\frac{x + m_2\sqrt{n_0}}{m_2} - 0{,}7\mu\sqrt{n_0}\right). \tag{е}$$

При заданном значении μ уравнение (е) выражает прямую, отсекающую некоторый отрезок на оси y.

Полагая $m_2 = 20$ *мм*, а $m_1 = 250$ *мм* по уравнениям (г) и (д) построим бинарное поле, которое будет состоять из семейства прямых линий (фиг. 122).

После этого строим номограмму из выравненных точек для формулы

$$\Delta p = z + 0{,}03\sqrt{p}, \qquad (ж)$$

где

$$z = 0{,}7\,\mu\sqrt{n}.$$

Длину шкал L полагаем равной 150 *мм*, и из уравнения

$$y_p = 150 = m_3(0{,}03\sqrt{p} - 0{,}03\sqrt{p_0})$$

определяем масштаб шкалы

$$m_3 = \frac{150\ мм}{0{,}03\,(22{,}36 - 2{,}24)} \approx 250\ мм.$$

Масштаб ответной шкалы будет

$$m = \frac{m_1 m_3}{m_1 + m_3} = \frac{250 \cdot 250}{500} = 125{,}0\ мм.$$

Расстояние между шкалами определяем из соотношения

$$\frac{m_1}{m_3} = \frac{h_1}{h_3},$$

в нашем случае

$$\frac{250}{250} = \frac{96{,}7}{h_3},$$

откуда

$$h_3 = 96{,}7\ мм.$$

Уравнения шкал будут

$$y_p = m_3(0{,}03\sqrt{p} - 0{,}03\sqrt{p_0}) = 7{,}5(\sqrt{p} - \sqrt{p_0}),$$

$$y_{\Delta p} = \frac{m_1 m_3}{m_1 + m_3}(\Delta p - \Delta p_0) = 125\,(\Delta p - \Delta p_0),$$

согласно которым строим шкалы для переменных p и Δp.

§ 106. О точности вычислений по номограммам

Основное требование, предъявляемое к каждой номограмме, состоит в том, чтобы получаемый по ней результат имел минимальную ошибку.

Ответ, получаемый по номограмме, содержит ошибку, зависящую от следующих факторов:

а) точности построения и вычерчивания номограммы;

б) точности определения положения на номограмме точек, соответствующих значениям переменных;

в) точности проведения через найденные точки разрешающих прямых;

г) взаимного расположения шкал;

д) величины угла пересечения разрешающей прямой с осями шкал;

е) точности прочтения пометок ответных точек.

Ошибки в ответе, вызываемые неточностью построения и вычерчивания номограммы, по сравнению с другими ошибками, пренебрегаемо малы, если номограмма построена и вычерчена в соответствии с установленными правилами построения и оформления номограмм.

К номограммам, состоящим из шкал, предъявляют следующие основные требования:

а) ответная шкала должна находиться по возможности между шкалами данных величин;

б) угол пересечения разрешающей прямой с осью ответной шкалы не должен быть меньше 20°.

Приближенно считают, что ошибка в положении ответной точки выражается формулой

$$\Delta_1 = \frac{\Delta}{\sin \alpha},$$

где α — угол между разрешающей прямой и осью ответной шкалы, а Δ — ошибка в положении ответной точки при пересечении разрешающей прямой оси ответной шкалы под углом $\alpha = 90°$. Нетрудно видеть, что при $\alpha = 20°$, ошибка увеличивается примерно в три раза.

Номограммы рекомендуется строить на хорошей чертежной бумаге; профильную (миллиметровую) бумагу, из-за неравномерности ее деформации, употреблять для этой цели не следует.

Для удобства быстрого интерполирования необходимо, чтобы размер делений на шкалах был в среднем около 2 *мм*. Если переменные даны в десятичной системе мер, следует для удобства интерполирования на глаз разбивать крупные деления на 2, 5, 10 частей. Толщина штрихов должна быть одинаковой и равной 0,1—0,15 *мм*. Примером оформления шкал могут служить шкалы логарифмической линейки.

Ошибка в определении положения точек на шкалах зависит от разрешающей способности глаза, от ошибок интерполирования при отсчете и от способа пользования номограммой. Разрешающая способность глаза принимается равной в среднем 1′, поэтому на расстоянии 250 *мм* (расстояние наилучшего зрения) ошибка определения положения точки на шкале, зависящая от резрешающей способности глаза, примерно равна:

$$\frac{250 \cdot 60''}{206\ 000''} = 0{,}073 \text{ мм} \approx 0{,}1 \text{ мм}.$$

Основываясь на этом, считают, что глаз человека не может различать точек, находящихся друг от друга на расстоянии, меньшем 0,1 *мм*.

Опыт показывает что можно интерполировать на глаз с точностью до одной — двух десятых долей наименьшего деления шкалы, если величина этих делений лежит в пределах 1—3 *мм*, и шкалу в этих пределах можно считать равномерной.

Точность вычисления по номограммам в значительной степени зависит также от приемов пользования ими. При пользовании номограммами из выравненных точек удобно применять прозрачную целлулоидную линейку с прочерченной на ней чертой. Во избежание параллакса, надо накладывать такую линейку на номограмму так, чтобы к номограмме была обращена та поверхность линейки, на которой проведена черта. Удобно также пользоваться измерительным циркулем и линейкой со скошенным краем. В этом случае острие одной ножки циркуля ставят на точку шкалы, пометка которой дана; изменяя раствор циркуля, ставят острие второй ножки на точку второй шкалы; к обеим ножкам циркуля придвигают скошенный край линейки; одну из ножек циркуля ставят на пересечение скошенного края линейки с ответной шкалой и, отняв линейку, делают отсчет по ответной шкале.

Номограммы, размером от 20 до 40 *см*, построенные для многих геодезических формул, дают возможность определять по ним неизвестные с тремя, а иногда и с четырьмя верными значащими цифрами, что во многих случаях обеспечивает требуемую точность. При более точных геодезических вычислениях, номограммы целесообразно использовать для приближенного контроля результатов вычислений, полученных при помощи других вычислительных средств.

Упражнения

1. Построить номограмму из сдвоенных шкал для формулы $f_\beta = 1',5\sqrt{n}$, считая, что n изменяется в пределах от 5 до 18.

2. Для шкалы квадратов взят масштаб в 9 *мм*. Какой масштаб нужно взять для шкалы кубов, чтобы точки с пометкой 3 находились на одинаковых расстояниях от начала обеих шкал?

3. Доказать, что отрезок логарифмической шкалы, заключенный между точками с пометками 2 и 7, равен отрезку ее, заключенному между точками с пометками 1 и 3,5.

4. Построить шкалу функции $f(x) = \frac{x}{x+1}$ при $m = 100$ *мм* и при изменении x в пределах от 0 до 7.

5. Построить сетчатую номограмму формулы $\Delta S = kl' \sin^2 \nu$ для kl' от 0 до 100 *м* и ν от 0 до 10°.

6. Построить номограмму с тремя параллельными шкалами формулы $h = S \operatorname{tg} \nu$ при условии, что $20 < S < 120$; $2' < \nu < 2°$.

7. Построить номограмму из выравненных точек для формулы $\Delta S = \frac{h^2}{2S}$ при условии, что $10 < S < 100$; $0 < h < 3$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Некоторые постоянные числа и их десятичные логарифмы

Числа	Логарифмы	Числа	Логарифмы
$\pi = 3{,}141\ 59$	0.497 15	$\frac{1}{100}$ квадранта $= 0^{\circ}{,}900\ 00$	$9.954\ 24_{-10}$
$2\pi = 6{,}283\ 19$	0.798 18	$\frac{1}{10\ 000}$ » $= 0^{c}{,}540\ 00$	$9.732\ 39_{-10}$
$\frac{\pi}{4} = 0{,}785\ 40$	$9.895\ 09_{-10}$	$\frac{1}{1\ 000\ 000}$ » $= 0^{cc}{,}324\ 00$	$9.510\ 55_{-10}$
$\frac{\pi}{180} = 0{,}017\ 453$	$8.241\ 88_{-10}$	$1^{\circ} = 1^{g}{,}111\ 11$	0.045 76
$\frac{\pi}{180\cdot 60} = 29{,}089\cdot 10^{-5}$	$6.463\ 73_{-10}$	$1' = 1^{c}{,}851\ 85$	0.267 61
$\frac{\pi}{180\cdot 60\cdot 60} = 48{,}481\cdot 10^{-7}$	$4.685\ 57_{-10}$	$1'' = 3^{cc}{,}086\ 42$	0.489 45
$\frac{180^{\circ}}{\pi} = 57^{\circ}{,}296$	1.758 12	$e = 2{,}718\ 28$	0.434 29
$\frac{180\cdot 60'}{\pi} = 3437'{,}7$	3.536 27	$M = \lg e = 0{,}434\ 29$	$9.637\ 78_{-10}$
$\frac{180\cdot 60\cdot 60''}{\pi} = 206\ 265''$	5.314 43	$\frac{1}{M} = \ln 10 = 2{,}302\ 58$	0.362 22
$\frac{1}{\pi} = 0{,}318\ 31$	$9.502\ 85_{-10}$	Температурный коэффициент стали $k = 0{,}000\ 012$	5.079_{-10}
$\frac{1}{2\pi} = 0{,}159\ 15$	$9.201\ 82_{-10}$	Ускорение силы тяжести на уровне моря (на широте 50°) $g = 9{,}81$ *м/сек*^{2}	0.992
$\frac{4}{\pi} = 1{,}273\ 24$	0.104 91		

Таблица для определения квадратных корней с пятью верными значащими цифрами

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ срд.
1,0	1,0000	0050	0100	0149	0198	0247	0296	0344	0392	0440	49
1,1	0488	0536	0583	0630	0677	0724	0770	0817	0863	0909	47
1,2	0954	1000	1045	1091	1136	1180	1225	1269	1314	1358	45
1,3	1402	1446	1489	1533	1576	1619	1662	1705	1747	1790	43
1,4	1832	1874	1916	1958	2000	2042	2083	2124	2166	2207	42
1,5	2247	2288	2329	2369	2410	2450	2490	2530	2570	2610	40
1,6	2649	2689	2728	2767	2806	2845	2884	2923	2961	3000	39
1,7	3038	3077	3115	3153	3191	3229	3266	3304	3342	3379	38
1,8	3416	3454	3491	3528	3565	3601	3638	3675	3711	3748	37
1,9	3784	3820	3856	3892	3928	3964	4000	4036	4071	4107	36
2,0	4142	4177	4213	4248	4283	4318	4353	4387	4422	4457	35
2,1	4491	4526	4560	4595	4629	4663	4697	4731	4765	4799	34
2,2	4832	4866	4900	4933	4966	5000	5033	5067	5100	5133	33
2,3	5166	5199	5232	5264	5297	5330	5362	5395	5427	5460	33
2,4	5492	5524	5556	5588	5620	5652	5684	5716	5748	5780	32
2,5	5811	5843	5875	5906	5937	5969	6000	6031	6062	6093	31
2,6	6125	6155	6186	6217	6248	6279	6310	6340	6371	6401	31
2,7	6432	6462	6492	6523	6553	6583	6613	6643	6673	6703	30
2,8	6733	6763	6793	6823	6852	6882	6912	6941	6971	7000	30
2,9	7029	7059	7088	7117	7146	7176	7205	7234	7263	7292	29
3,0	7321	7349	7378	7407	7436	7464	7493	7521	7550	7578	29
3,1	7607	7635	7664	7692	7720	7748	7776	7804	7833	7861	28
3,2	7889	7916	7944	7972	8000	8028	8055	8083	8111	8138	28
3,3	8166	8193	8221	8248	8276	8303	8330	8358	8385	8412	27
3,4	8439	8466	8493	8520	8547	8574	8601	8628	8655	8682	27
3,5	8708	8735	8762	8788	8815	8841	8868	8894	8921	8947	27
3,6	8974	9000	9026	9053	9079	9105	9131	9157	9183	9209	26
3,7	9235	9261	9287	9313	9339	9365	9391	9416	9442	9468	26
3,8	9494	9519	9545	9570	9596	9621	9647	9672	9698	9723	25
3,9	9748	9774	9799	9824	9849	9875	9900	9925	9950	9975	25
4,0	2,0000	0025	0050	0075	0100	0125	0149	0174	0199	0224	25
4,1	0248	0273	0298	0322	0347	0372	0396	0421	0445	0469	25
4,2	0494	0518	0543	0567	0591	0616	0640	0664	0688	0712	24
4,3	0736	0761	0785	0809	0833	0857	0881	0905	0928	0952	24
4,4	0976	1000	1024	1048	1071	1095	1119	1142	1166	1190	24
4,5	1213	1237	1260	1284	1307	1331	1354	1378	1401	1424	23
4,6	1448	1471	1494	1517	1541	1564	1587	1610	1633	1656	23
4,7	1679	1703	1726	1749	1772	1794	1817	1840	1863	1886	23
4,8	1909	1932	1954	1977	2000	2023	2045	2068	2091	2113	23
4,9	2136	2159	2181	2204	2226	2249	2271	2293	2316	2338	22
5,0	2361	2383	2405	2428	2450	2472	2494	2517	2539	2561	22
5,1	2583	2605	2627	2650	2672	2694	2716	2738	2760	2782	22
5,2	2804	2825	2847	2869	2891	2913	2935	2956	2978	3000	22
5,3	3022	3043	3065	3087	3108	3130	3152	3173	3195	3216	22
5,4	3238	3259	3281	3302	3324	3345	3367	3388	3409	3431	22

N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Δ срд.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ срд.
5,5	2,3452	3473	3495	3516	3537	3558	3580	3601	3622	3643	21
5,6	3664	3685	3707	3728	3749	3770	3791	3812	3833	3854	21
5,7	3875	3896	3917	3937	3958	3979	4000	4021	4042	4062	21
5,8	4083	4104	4125	4145	4166	4187	4207	4228	4249	4269	21
5,9	4290	4310	4331	4352	4372	4393	4413	4434	4454	4474	20
6,0	4495	4515	4536	4556	4576	4597	4617	4637	4658	4678	20
6,1	4698	4718	4739	4759	4779	4799	4819	4839	4860	4880	20
6,2	4900	4920	4940	4960	4980	5000	5020	5040	5060	5080	20
6,3	5100	5120	5140	5159	5179	5199	5219	5239	5259	5278	20
6,4	5298	5318	5338	5357	5377	5397	5417	5436	5456	5475	20
6,5	5495	5515	5534	5554	5573	5593	5612	5632	5652	5671	20
6,6	5690	5710	5729	5749	5768	5788	5807	5826	5846	5865	19
6,7	5884	5904	5923	5942	5962	5981	6000	6019	6038	6058	19
6,8	6077	6096	6115	6134	6153	6173	6192	6211	6230	6249	19
6,9	6268	6287	6306	6325	6344	6363	6382	6401	6420	6439	19
7,0	6458	6476	6495	6514	6533	6552	6571	6589	6608	6627	19
7,1	6646	6665	6683	6702	6721	6739	6758	6777	6796	6814	19
7,2	6833	6851	6870	6889	6907	6926	6944	6963	6981	7000	19
7,3	7019	7037	7055	7074	7092	7111	7129	7148	7166	7185	18
7,4	7203	7221	7240	7258	7276	7295	7313	7331	7350	7368	18
7,5	7386	7404	7423	7441	7459	7477	7495	7514	7532	7550	18
7,6	7568	7586	7604	7622	7641	7659	7677	7695	7713	7731	18
7,7	7749	7767	7785	7803	7821	7839	7857	7875	7893	7911	18
7,8	7928	7946	7964	7982	8000	8018	8036	8054	8071	8089	18
7,9	8107	8125	8142	8160	8178	8196	8213	8231	8249	8267	18
8,0	8284	8302	8320	8337	8355	8373	8390	8408	8425	8443	18
8,1	8460	8478	8496	8513	8531	8548	8566	8583	8601	8618	18
8,2	8636	8653	8671	8688	8705	8723	8740	8758	8775	8792	17
8,3	8810	8827	8844	8862	8879	8896	8914	8931	8948	8965	17
8,4	8983	9000	9017	9034	9052	9069	9086	9103	9120	9138	17
8,5	9155	9172	9189	9206	9223	9240	9257	9275	9292	9309	17
8,6	9326	9343	9360	9377	9394	9411	9428	9445	9462	9479	17
8,7	9496	9513	9530	9547	9563	9580	9597	9614	9631	9648	17
8,8	9665	9682	9698	9715	9732	9749	9766	9783	9799	9816	17
8,9	9833	9850	9866	9883	9900	9917	9933	9950	9967	9983	17
9,0	3,0000	0017	0033	0050	0067	0083	0100	0116	0133	0150	17
9,1	0166	0183	0199	0216	0232	0249	0265	0282	0299	0315	17
9,2	0332	0348	0364	0381	0397	0414	0430	0447	0463	0480	16
9,3	0496	0512	0529	0545	0561	0578	0594	0610	0627	0643	16
9,4	0659	0676	0692	0708	0725	0741	0757	0773	0790	0806	16
9,5	0822	0838	0854	0871	0887	0903	0919	0935	0952	0968	16
9,6	0984	1000	1016	1032	1048	1064	1081	1097	1113	1129	16
9,7	1145	1161	1177	1193	1209	1225	1241	1257	1273	1289	16
9,8	1305	1321	1337	1353	1369	1385	1401	1417	1432	1448	16
9,9	1464	1480	1496	1512	1528	1544	1559	1575	1591	1607	16
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ срд.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ срд.
10,	3,1623	1780	1937	2094	2249	2404	2558	2711	2863	3015	155
11,	3166	3317	3466	3615	3764	3912	4059	4205	4351	4496	148
12,	4641	4785	4928	5071	5214	5355	5496	5637	5777	5917	142
13,	6056	6194	6332	6469	6606	6742	6878	7014	7148	7283	136
14,	7417	7550	7683	7815	7947	8079	8210	8341	8471	8601	132
15,	8730	8859	8987	9115	9243	9370	9497	9623	9749	9875	127
16,	4,0000	0125	0249	0373	0497	0620	0743	0866	0988	1110	123
17,	1231	1352	1473	1593	1713	1833	1952	2071	2190	2308	120
18,	2426	2544	2661	2778	2895	3012	3128	3243	3359	3474	116
19,	3589	3704	3818	3932	4045	4159	4272	4385	4497	4609	113
20,	4721	4833	4944	5056	5166	5277	5387	5497	5607	5717	111
21,	5826	5935	6043	6152	6260	6368	6476	6583	6690	6797	108
22,	6904	7011	7117	7223	7329	7434	7539	7645	7749	7854	106
23,	7958	8062	8166	8270	8374	8477	8580	8683	8785	8888	103
24,	8990	9092	9193	9295	9396	9497	9598	9699	9800	9900	101
25,	5,0000	0100	0200	0299	0398	0498	0596	0695	0794	0892	99
26,	0990	1088	1186	1284	1381	1478	1575	1672	1769	1865	97
27,	1962	2058	2154	2249	2345	2440	2536	2631	2726	2820	95
28,	2915	3009	3104	3198	3292	3385	3479	3572	3666	3759	94
29,	3852	3944	4037	4129	4222	4314	4406	4498	4589	4681	92
30,	4772	4863	4955	5045	5136	5227	5317	5408	5498	5588	91
31,	5678	5767	5857	5946	6036	6125	6214	6303	6391	6480	89
32,	6569	6657	6745	6833	6921	7009	7096	7184	7271	7359	88
33,	7446	7533	7619	7706	7793	7879	7966	8052	8138	8224	86
34,	8310	8395	8481	8566	8652	8737	8822	8907	8992	9076	85
35,	9161	9245	9330	9414	9498	9582	9666	9749	9833	9917	84
36,	6,0000	0083	0166	0249	0332	0415	0498	0581	0663	0745	83
37,	0828	0910	0992	1074	1156	1237	1319	1400	1482	1563	82
38,	1644	1725	1806	1887	1968	2048	2129	2209	2290	2370	81
39,	2450	2530	2610	2690	2769	2849	2929	3008	3087	3166	80
40,	3246	3325	3403	3482	3561	3640	3718	3797	3875	3953	79
41,	4031	4109	4187	4265	4343	4420	4498	4576	4653	4730	78
42,	4807	4885	4962	5038	5115	5192	5269	5345	5422	5498	77
43,	5574	5651	5727	5803	5879	5955	6030	6106	6182	6257	76
44,	6332	6408	6483	6558	6633	6708	6783	6858	6933	7007	75
45,	7082	7157	7231	7305	7380	7454	7528	7602	7676	7750	74
46,	7823	7897	7971	8044	8118	8191	8264	8337	8411	8484	73
47,	8557	8629	8702	8775	8848	8920	8993	9065	9138	9210	73
48,	9282	9354	9426	9498	9570	9642	9714	9785	9857	9929	72
49,	7,0000	0071	0143	0214	0285	0356	0427	0498	0569	0640	71
50,	0711	0781	0852	0922	0993	1063	1134	1204	1274	1344	70
51,	1414	1484	1554	1624	1694	1764	1833	1903	1972	2042	70
52,	2111	2180	2250	2319	2388	2457	2526	2595	2664	2732	69
53,	2801	2870	2938	3007	3075	3144	3212	3280	3348	3417	68
54,	3485	3553	3621	3689	3756	3824	3892	3959	4027	4095	68
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ срд.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ срд.
55,	7,4162	4229	4297	4364	4431	4498	4565	4632	4699	4766	67
56,	4833	4900	4967	5033	5100	5166	5233	5299	5366	5432	67
57,	5498	5565	5631	5697	5763	5829	5895	5961	6026	6092	66
58,	6158	6223	6289	6354	6420	6485	6551	6616	6681	6746	65
59,	6811	6877	6942	7006	7071	7136	7201	7266	7330	7395	65
60,	7460	7524	7589	7653	7717	7782	7846	7910	7974	8038	64
61,	8102	8166	8230	8294	8358	8422	8486	8549	8613	8677	64
62,	8740	8804	8867	8930	8994	9057	9120	9183	9246	9310	63
63,	9373	9436	9498	9561	9624	9687	9750	9812	9875	9937	63
64,	8,0000	0062	0125	0187	0250	0312	0374	0436	0498	0561	62
65,	0623	0685	0747	0808	0870	0932	0994	1056	1117	1179	62
66,	1240	1302	1363	1425	1486	1548	1609	1670	1731	1792	61
67,	1854	1915	1976	2037	2098	2158	2219	2280	2341	2401	61
68,	2462	2523	2583	2644	2704	2765	2825	2885	2946	3006	60
69,	3066	3126	3187	3247	3307	3367	3427	3487	3546	3606	60
70,	3666	3726	3785	3845	3905	3964	4024	4083	4143	4202	60
71,	4261	4321	4380	4439	4499	4558	4617	4676	4735	4794	59
72,	4853	4912	4971	5029	5088	5147	5206	5264	5323	5381	59
73,	5440	5499	5557	5615	5674	5732	5790	5849	5907	5965	58
74,	6023	6081	6139	6197	6255	6313	6371	6429	6487	6545	58
75,	6603	6660	6718	6776	6833	6891	6948	7006	7063	7121	58
76,	7178	7235	7293	7350	7407	7464	7521	7579	7636	7693	57
77,	7750	7807	7864	7920	7977	8034	8091	8148	8204	8261	57
78,	8318	8374	8431	8487	8544	8600	8657	8713	8769	8826	56
79,	8882	8938	8994	9051	9107	9163	9219	9275	9331	9387	56
80,	9443	9499	9554	9610	9666	9722	9778	9833	9889	9944	56
81,	9,0000	0056	0111	0167	0222	0277	0333	0388	0443	0499	55
82,	0554	0609	0664	0719	0774	0830	0885	0940	0995	1049	55
83,	1104	1159	1214	1269	1324	1378	1433	1488	1542	1597	55
84,	1652	1706	1761	1815	1869	1924	1978	2033	2087	2141	54
85,	2195	2250	2304	2358	2412	2466	2520	2574	2628	2682	54
86,	2736	2790	2844	2898	2952	3005	3059	3113	3167	3220	54
87,	3274	3327	3381	3434	3488	3541	3595	3648	3702	3755	53
88,	3808	3862	3915	3968	4021	4074	4128	4181	4234	4287	53
89,	4340	4393	4446	4499	4552	4604	4657	4710	4763	4816	53
90,	4868	4921	4974	5026	5079	5131	5184	5237	5289	5341	53
91,	5394	5446	5499	5551	5603	5656	5708	5760	5812	5864	52
92,	5917	5969	6021	6073	6125	6177	6229	6281	6333	6385	52
93,	6437	6488	6540	6592	6644	6695	6747	6799	6850	6902	52
94,	6954	7005	7057	7108	7160	7211	7263	7314	7365	7417	51
95,	7468	7519	7570	7622	7673	7724	7775	7826	7877	7929	51
96,	7980	8031	8082	8133	8184	8234	8285	8336	8387	8438	51
97,	8489	8539	8590	8641	8691	8742	8793	8843	8894	8944	51
98,	8995	9045	9096	9146	9197	9247	9298	9348	9398	9448	50
99,	9499	9549	9599	9649	9700	9750	9800	9850	9900	9950	50
100,	10,0000	0050	0100	0150	0200	0250	0300	0349	0399	0449	50
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Δ срд.

Пример. Найти $\sqrt{0,086\,836}$.

На стр. 289 находим: $\sqrt{8,68} = 2,9462$; разность $= 17$.

Поправка на 36...6,1 $(0,36 \cdot 17 = 6,1)$.

Следовательно, $\sqrt{0,086\,836} = 0,29468$.

Таблица значений коэффициентов для интерполяционной формулы Ньютона третьего порядка

$$y = y_0 + t\,\Delta y'_0 + \frac{t\,(t-1)}{2}\,\Delta'' y_0 + \frac{t\,(t-1)\,(t-2)}{6}\,\Delta''' y_0.$$

Значения коэффициентов:

$$A = \frac{t\,(t-1)}{2}; \quad B = \frac{t\,(t-1)\,(t-2)}{6}.$$

t	A	B	t	A	B
0,00	— 0,00000	+ 0,0000	0,50	— 0,12500	+ 0,0625
01	00495	0033	51	12495	0621
02	00980	0065	52	12480	0616
03	01455	0095	53	12455	0610
04	01920	0125	54	12420	0604
0,05	— 0,02375	+ 0,0154	0,55	— 0,12375	+ 0,0598
06	02820	0182	56	12320	0591
07	03255	0209	57	12255	0584
08	03680	0235	58	12180	0576
09	04095	0261	59	12095	0568
0,10	— 0,04500	+ 0,0285	0,60	— 0,12000	+ 0,0560
11	04895	0308	61	11895	0551
12	05280	0331	62	11780	0542
13	05655	0352	63	11655	0532
14	06020	0373	64	11520	0522
0,15	— 0,06375	+ 0,0393	0,65	— 0,11375	+ 0,0512
16	06720	0412	66	11220	0501
17	07055	0430	67	11055	0490
18	07380	0448	68	10880	0479
19	07695	0464	69	10695	0467
0,20	— 0,08000	+ 0,0480	0,70	— 0,10500	+ 0,0455
21	08295	0495	71	10295	0443
22	08580	0509	72	10080	0430
23	08855	0522	73	09855	0417
24	09120	0535	74	09620	0404
0,25	— 0,09375	+ 0,0547	0,75	— 0,09375	+ 0,0391
26	09620	0558	76	09120	0377
27	09855	0568	77	08855	0363
28	10080	0578	78	08580	0349
29	10295	0587	79	08295	0335
0,30	— 0,10500	+ 0,0595	0,80	— 0,08000	+ 0,0320
31	10695	0602	81	07695	0305
32	10808	0609	82	07380	0290
33	11055	0615	83	07055	0275
34	11220	0621	84	06720	0260
0,35	— 0,11375	+ 0,0626	0,85	— 0,06375	+ 0,0244
36	11520	0630	86	06020	0229
37	11655	0633	87	05655	0213
38	11780	0636	88	05280	0197
39	11895	0638	89	04895	0181
0,40	— 0,12000	+ 0,0640	0,90	— 0,04500	+ 0,0165
41	12095	0641	91	04095	0149
42	12180	0641	92	03680	0132
43	12255	0641	93	03255	0116
44	12320	0641	94	02820	0100
0,45	— 0,12375	+ 0,0639	0,95	— 0,02375	+ 0,0083
46	12420	0638	96	01920	0067
47	12455	0635	97	01455	0050
48	12480	0632	98	00980	0033
49	12495	0629	99	00495	0017
			1,00	0,00000	0,0000

ЛИТЕРАТУРА

Акушский И. Я. Краткий очерк счетно-аналитических машин, Изв. АН СССР, Отделение техническое, № 8, 1946.

Александров Н. Н. О точности горизонталей по высоте на планшетах мензульной съемки масштаба 1 : 10 000. Тр. Моск. ин-та инженеров землеустройства, вып. 1, М., Геодезиздат, 1954.

Андреев П. П. и Беленький Н. С. Курс хозяйственных вычислений, М., Госстатиздат, 1948.

Андреев П. П., Глаголева А. А. и Глаголев А. А. Основы номографии, М.—Л., ОНТИ, 1936

Базилевич Ю. Я. Универсальная вычислительная машина для инженерных исследований, журн. «Приборостроение», № 4, М., Машгиз, 1956.

Баранов А. Н., Егунов К. И., Зельцер Е. И., Лебедев Н. Н., Слободчиков Д. А., Черемисин М. С. Геодезия в тоннелестроении, ч. I, Геодезические работы на дневной поверхности, под общей ред. А. Н. Баранова, М., Геодезиздат, 1952.

Баринов В. А. Измерение длины и проблема перехода на новый эталон длины — длину световой волны. Тр. третьей сессии АН Казахской ССР, 1949.

Безикович Я. С. Приближенные вычисления, М., Гостехиздат, 1949.

Беленький Н. С. Хозяйственные вычисления, М., Углетехиздат, 1952.

Боев Г. П. Теория вероятностей, М.—Л., Гостехиздат, 1950.

Брадис В. М. Теория и практика вычислений, М., Учпедгиз, 1937.

Он же. Средства и способы элементарных вычислений, М., Учпедгиз, 1954.

Брук И. С. Об управляющих машинах, журн. «Природа» № 5, 1955.

Буланов А. И. Рецензия на книгу Е. Г. Ларченко «Техника вычислений», Сб. статей по геодезии, вып. 6, М., Геодезиздат, 1954.

Буткевич А. В. Рецензия на книгу Е. Г. Ларченко «Техника вычислений», Сб. статей по геодезии, вып. 7, М., Геодезиздат, 1954.

Бызов Т. А. и Светлова Е. Ф. Инструкция по работе на вычислительных машинах, М., Госстатиздат, 1950.

Они же. Инструкция по работе на вычислительных машинах моделей 21, 37, 38, 37МС, 38МС, М., Госстатиздат, 1950.

Быстродействующие вычислительные машины, пер. с англ., под ред. Д. Ю. Панова, М., ИЛ, 1952.

Быховский М. Л. Основы электронных математических машин дискретного счета, журн. «Успехи математических наук», т. IV, вып. 3 (31), 1949.

Вейсман Л. С. Логарифмическая линейка в кораблевождении, Военно-морское издательство, 1953.

Вентцель М. К. Полевая астрономия, ч. II, М., Редбюро ГУГК, 1940.

Вентцель Д. А. и Вентцель Е. С. Элементы теории приближенных вычислений, ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 1949.

Виллерс Ф. А. Математические инструменты (пер. с нем.), ИЛ, 1949.

Виноградов А. Н. Механизация учета на железнодорожном транспорте, Трансжелдориздат, 1953.

Винокуров П. С. Эксплуатационные свойства счетно-аналитических машин, Госстатиздат, 1955.

Вировец А. М. и Кутузов М. Н. Геодезия, М., Геодезиздат, 1948.

Высоцкий В. Н. Номограммы к тахеометрическим формулам, М.—Л., ОНТИ, 1937.

Вычислительная математика и вычислительная техника, Сб. I, АН СССР, 1953.

Гавра Д. Л. Основы номографии с примерами из машиностроения, М., Машгиз, 1949.

Гаврилов Ю. М. О сходимости итерационных процессов и критериях знакоопределяемости квадратичных форм, Изв. АН СССР, Серия математическая т. 18, № 1, 1954.

Гайдаев П. А. Логарифмическая линейка ВТС и работа на ней, Ред.-изд. отдел ВТС, М., 1952.

Ганьшин В. Н. и Хренов Л. С. Анализ ошибок вычисления координат замкнутого многоугольника, изв. Воронежского гос. пед. ин-та, 1940.

Герасимов И. М. Практическое руководство по вычислению триангуляции II, III, IV классов, М., Геодезиздат, 1941.

Герсеванов Н. М. Теория и построение инженерных номограмм, М.—Л., ОНТИ, 1937.

Гильберт Д. И. и Аккерман В. Основы теоретической логики, М., ИЛ, 1947.

Гинзбург Г. А. Сборник номограмм по математической картографии, Тр. ЦНИИГАиК, вып. 57, М., Геодезиздат, 1949.

Он же. К рационализации вычислений сеток карт, Сб. научно-техн. и произв. статей, вып. XXXII, М., Геодезиздат, 1950.

Гинодман В. А. Механизация учета и вычислительных работ, М., Машгиз, 1950.

Гнеденко Б. В. и Хинчин А. Я. Элементарное введение в теорию вероятностей, М., Гостехиздат, 1950.

Гордеев А. В. и Ларченко Е. Г. О потере точности при решении систем нормальных уравнений методом последовательного исключения неизвестных. Сб. статей по геодезии, вып. 9, М., Геодезиздат, 1955.

Они же. О применении формулы М. М. Лаврентьева для оценки точности решения систем нормальных уравнений, Сб. статей по геодезии, вып. 10, М., Геодезиздат, 1955.

Гордеев А. В. и Шарупич С. Г. Уравнивание типовых фигур триангуляции, М., Геодезиздат, 1953.

Гричук Ю. П. Подсчет объема работ по составлению и решению нормальных уравнений, Сб. статей по геодезии, вып. 7, М., Геодезиздат, 1954.

Гутенмахер Л. И., Кузьминок Г. К., Клабукова Л. С. Метод решения линейных алгебраических уравнений на электронно-ламповом интеграторе, журн. «Вычислительная математика и вычислительная техника», сб. II, 1955.

Давыдов В. В. Технические вычисления, М., Изд-во Министерства речного флота СССР, 1948.

Делоне Б. Н. Краткий курс математических машин, М., Гостехиздат, 1952.

Данзин П. В. Геодезия, ч. II, М., Геодезиздат, 1944.

Он же. Геодезия, М., изд-во МГУ, 1953.

Длин А. М. Математическая статистика в технике, М., изд-во «Советская наука», 1951.

Дурнев А. И. Новые системы построения геодезических сетей, М., Геодезиздат, 1952.

Евстигнеев Г. П. и Дроздов Б. М. Организация механизированного учета, Госфиниздат, 1949.

Жемочкин Б. Н. О решении систем линейных уравнений, М., изд-во ВИА, 1947.

Закатов П. С. Курс высшей геодезии, М., Геодезиздат, 1952.

Зимовнов В. Н. Вопросы оценки точности результатов измерений, М., Геодезиздат, 1951.

Он же. Функция распределения вероятностей средней квадратической ошибки наблюдений, подчиненных закону Гаусса, и использование ее для оценки точности. Сб. научно-техн. и произв. статей, вып. XXX, М., Геодезиздат, 1950.

Идельсон Н. И. Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений, М., Геодезиздат, 1947.

Изотов А. А. О точности вычислений в триангуляции I класса, Сб. ГУГК, вып. VII, М., Геодезиздат, 1944.

Инструкция по вычислениям триангуляций и нивелировок, ч. II, Вычисление нивелировок, второе изд., М., Геодезиздат, 1951.

Исакович Е. А. Механизация учета в торговых предприятиях, Госторгиздат, 1954.

Калабугин А. Я., Мурашев С. И. Сельскохозяйственное водоснабжение и мелиорация, М., Сельхозгиз, 1955.

Китов А. И. Электронные цифровые машины, М., «Советское радио», 1956.

Кобринский Н. Е. Вычислительные машины, журн. «Наука и жизнь», № 2, 1956.

Он же. Математические машины непрерывного действия. Гос. изд-во техн.-теорет. лит., М., 1954.
Кобринский Н. Е. и Люстерник Л. А. Математическая техника, журн. «Успехи математических наук», т. 1, вып. 5—6 (15—16), 1946.
Кольман Э. Что такое кибернетика? Журн. «Вопросы философии», № 4, 1955.
Кончин В. В. Диагональная сеть (Автореферат диссертации), 1950.
Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях, М., Гостехиздат, 1954.
Кудрявцев Л. Д. О принципах производства арифметических операций на вычислительных машинах, журн. «Успехи математических наук», том V, вып. 1 (35), 1950.
Кузин Н. А. и Лебедев Н. Н. Практическое руководство по городской и инженерной полигонометрии, М., Геодезиздат, 1954.
Кузьмин Б. С. Основы теории ошибок измерений, М., 1946.
Лаврентьев М. М. О точности решения систем линейных уравнений, Матем. сб., т. 34, АН СССР, 1954.
Он же. К вопросу об улучшении точности решения систем линейных уравнений. Доклады АН СССР, т. XXII, № 5, 1953.
Ларченко Е. Г. О точности вычисления площадей и применения логарифмической линейки при их вычислении, Изд-во Бел. с.-х. ин-та, Горки, 1936.
Он же. Наставление по производству наземных съемок в масштабах 1 : 5000 и 1 : 2000, М., Геодезиздат, 1949.
Он же. Техника вычислений, М., Геодезиздат, 1952.
Он же. О средствах и приемах решения прямой и обратной геодезических задач на плоскости, журн. «Геодезия и картография», № 1, М., Геодезиздат, 1956.
Он же. О путях повышения производительности труда при работе на малых вычислительных машинах, Сб. статей по геодезии, вып. 10, М., Геодезиздат, 1955.
Он же. Об эффективности и точности таблиц натуральных значений тригонометрических функций, журн. «Геодезия и картография» № 3, М., Геодезиздат, 1956.
Ларченко Е. Г., Маслов А. В., Мурашов С. А. Составление сборных планов землепользований укрупненных колхозов, М., Геодезиздат, 1951.
Лебедев С. А. Быстродействующая электронная вычислительная машина Академии наук СССР, М., изд-во АН СССР, 1955.
Он же. Электронные вычислительные машины, М., изд-во АН СССР, 1956.
Лившиц Ф. Д. Счетная линейка для экономистов, М., Госстатиздат, 1954.
Лобанов А. Н. Теория трансформирования пары снимков и создание карты по трансформированным изображениям, М., Геодезиздат, 1954.
Люстерник Л. А. Замечания к численному решению краевых задач уравнения Лапласа и вычислению собственных значений методом сеток., Тр. матем. ин-та им. Стеклова, т. XX, 1947.
Он же. Некоторые проблемы вычислительной математики, Изв. АН СССР, № 8, отделение техническое, 1946.
Мазмишвили А. И. Уравновешивание результатов геодезических измерений в свете многомерной геометрии, 1950 (автореферат диссертации).
Майоров Ф. В. Электронные вычислительные машины, журн. «Природа», № 11, 1954.
Малые вычислительные машины, Ин-т точной механики и вычислительной техники АН СССР, М., 1952.
Марков А. А. Теория алгорифмов, М.—Л., изд-во АН СССР, 1954.
Маслов А. В. Способы и точности определения площадей,М.,Геодезиздат, 1955.
Он же. Геодезические работы при землеустроительном проектировании, М., Геодезиздат, 1941.
Математический практикум на счетно-вычислительных приборах и инструментах, М., изд-во «Советская наука», 1954.
Матусевич Н. Н. Методы и приемы математических вычислений в геодезических и астрономических работах. Приложение к т. IX «Геодезия» (Справочное руководство) под ред. Н. Н. Степанова, 1949.
Он же. Руководство по практической геодезии и астрономии, отд. 1, ч. 1, Л., Госкартогеодезия, 1932.
Мейер цур Капеллен В. Математические инструменты (пер. с нем.), ИЛ, 1950.
Механизация учета и вычислительных работ, Сб. статей, М., Госстатиздат, 1952.
Механизированные расчеты в судостроении, Л., 1953.
Милн В. Э. Численное решение дифференциальных уравнений, М., ИЛ, 1955.
Модринский Н. И. Номограммы для геодезических вычислений, М.—Л., ОНТИ, 1937.
Морозков С. Г., Извеков М. М., Павлов В. Ф., Пчелина А. А. Пособие по вычислению координат и высот опознаков, М., Геодезиздат, 1955.
Муррей Ф. Теория математических машин (пер. с англ.), М., ИЛ, 1949.

Нейшуллер Л. Я. и Акушинский И. Я. Как упростить вычисления, М.—Л., Гостехиздат, 1933.
Окунев Б. Н. Численные методы математического анализа, применяемые в баллистических расчетах, 1948.
Основные технические требования к аэросъемке для создания топографических планов в масштабах 1 : 25 000 — 1 : 2000, М., Геодезиздат, 1951.
Панов Д. Ю. Решение систем нормальных уравнений, дополнение I, помещенное в книге Дж. Скарборо «Численные методы математического анализа», М., 1934.
Он же. Счетная линейка, 1949.
Пентковский М. В. Номография, М., Гостехиздат, 1949.
Петренко А. И. Перспективно-конические координаты и проекции. Изв. АН БССР, № 4, 1953.
Попов В. В. Уравновешивание полигонов, М., Геодезиздат, 1954.
Рабинович Б. Н. Практикум по высшей геодезии, М., Геодезиздат, 1951.
Рытов А. В. Многогрупповое уравнивание углов триангуляции по способу условных измерений, Сб. статей по геодезии, вып. 7, М., Геодезиздат, 1954.
Рязанкин В. Н., Коноплев В. В., Добецкий Л. Ю. Советские счетно-аналитические машины, М., Госстатиздат, 1954.
Садовский Л. Е. Из истории машинной математики в России, журн. «Успехи математических наук», т. V, вып. 2 (36), 1950.
Селиханович В. Г. К вопросу о методах учета ошибок исходных данных при уравновешивании измеренных величин, Тр. МИИГАиК, вып. 9, М., Геодезиздат, 1951.
Семендяев К. А. Счетная линейка, 1942.
Синтез электронных вычислительных и управляемых схем, М., ИЛ, 1954.
Сироткин М. П. Задачи геодезии в связи со строительством крупных гидротехнических сооружений, Сб. статей по геодезии, М., Геодезиздат, 1954.
Соболев С. Л., Китов А. И., Ляпунов А. А. Основные черты кибернетики, журн. «Вопросы философии», № 4, 1955.
Соколов М. Н. О требованиях добывающей промышленности к крупномасштабным топографическим картам, Тр. ЦНИИГАиК, вып. 96, М., Геодезиздат, 1953.
Соловьев М. Д. Практическое пособие по математической картографии, М., Геодезиздат, 1952.
Тарский А. Введение в логику и методологию дедуктивных наук, М., ИЛ, 1948.
Тезисы докладов второй Ленинградской конференции по механизации учета и вычислительных работ, М.—Л., Машгиз, 1956.
Техническо-хронометражные работы для операторов. Нормирование труда по работам на счетных машинах, М., Госстатиздат, 1953.
Тюринг А. Ошибки округления в матричных процессах, журн. «Успехи математических наук», т. VI, вып. 1, 1951.
Удачин С. А. и другие. Землеустроительное проектирование, Сельхозгиз, 1951.
Уилкс М., Уилер Д., Гилл С. Составление программ для электронных счетных машин, М., ИЛ, 1953.
Уиттекер Э., Робинсон Г. Математическая обработка результатов наблюдений, М.—Л., Гостехиздат, 1933.
Уорсинг А. и Геффнер Дж. Методы обработки экспериментальных данных, М., ИЛ, 1953.
Урмаев Н. А. Руководство по обработке триангуляций, 1932.
Успенский А. К. Решение уравнений погрешностей по способу наименьшего предельного уклонения, Сб. статей по геодезии, вып. 4, М., Геодезиздат, 1953.
Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры, М.—Л., Гостехиздат, 1950.
Франк М. Л., Элементарные приближенные вычисления, М.—Л., Гостехиздат, 1933.
Фролов С. В. Приближенные вычисления, 1948.
Хоменко П. Г. Счетно-аналитические машины, М., Машгиз, 1955.
Хохлов А. И. Арифмометр для многозначных приближенных вычислений, сб. ГУГК, вып. XXVIII, М., Геодезиздат, 1950.
Хренов Л. С. Новые таблицы для барометрического нивелирования, Изв. Всес. геогр. общества, № 5, 1945.
Он же. Рецензия на книгу Е. Г. Ларченко «Техника вычислений», «Астрономический журнал», т. XXXI, вып. 5, 1954.
Хубларова С. Л. К вопросу о механизации решения больших систем нормальных уравнений, сб. рефератов, вып. 1, ЦНИИГАиК, М., 1954.
Чеботарев А. С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей, М.—Л., ОНТИ, 1936.
Он же. О математической обработке результатов измерений, Тр. МИИГАиК, вып. 9, М., Геодезиздат, 1951.

Он же. Математическая статистика, применение ее в геодезическом деле, Тр. МИИГАиК, вып. 8, М., Геодезиздат, 1950.

Он же. К вопросу о математической обработке результатов измерений, Тр. МИИГАиК, вып. 15, М., Геодезиздат, 1953.

Он же. Некоторые вопросы оценки точности измерений, Тр. ЦНИИГАиК, вып. 96, М., Геодезиздат, 1953.

Он же. Исследование в области теории погрешностей, Тр. Топографо-геодезической комиссии, вып. XX, 1906 и вып. XXI, 1907.

Чичигина В. В. Краткое руководство по вычислению рабочих координат опознаков, изд. второе, М., Геодезиздат, 1951.

Шапиро И. Л. Технические и эксплуатационные характеристики счетных машин, М., Госстатиздат, 1955.

Шарупич С. Г. Групповые преобразования при решении нормальных и условных уравнений, Сб. ГУГК, вып. XXX, М., Геодезиздат, 1950.

Шеин Д. С. Электрическая машина для уравновешивания геодезических измерений, журн. «Геодезист», № 6, М., Геодезиздат, 1940.

Он же. Городская полигонометрия, Руководство по вычислительным работам, М., Геодезиздат, 1952.

Шилов П. И. Способ наименьших квадратов, М., Геодезиздат, 1941.

Юршанский З. М. Уравновешивание и оценка точности опорных геодезических сетей способом последовательных приближений (автореферат), 1953.

Ющенко А. П. Рационализация геодезических вычислений, Л., 1933.

Яковлев К. П. Математическая обработка результатов измерений, М.—Л., Гостехиздат, 1953.

Янжул И. Н. Счетные автоматы и их применение к астрономическим вычислениям, журн. «Успехи математических наук», т. I, вып. 5—6 (15—16), 1940.

Albanig Franceso. Sulla risoluzione numerica del problema dell'intersezione inversa o problema di Snellius sul piano Gauss — Boaga. Geom. Ital., 1954, 9, № 1, 2—4.

Bartsch H. Abschützung für die kleinste charackterische Lake einer positiv—difinitiv hermetischen Matrix.

Collaz L. Zur Fehlerabschützung bei linearen Gleichungssystemen. Z. angew. Math. und Mech., 1953, 34, № 1—2.

Forsythe George E. Salning linear algebraic equations can be interesting. Bull. Amer. Math. Soc., 1953, 59, № 4.

Goussisnky E. Rechentechnisches aus dem Vermessungswesen. Österr. Z. Vermes sungswesen, 1954, 42, № 5, Mitteilungsblatt, 31—33.

Kervran L. Les grandes machines à calculer ne connaissent que deux chiffres: un et zèro. „Science et vie", 1954, № 84.

Schliephake G. Überbiick über Tachymetertafeln. Vermessungstechnik, 2 Jg., Heft. 10, Oktober, 1954.

Schliephake G. Überblick über Tachymeterrechenschieber. Vermessungstechnik, 2 Jg., Heft. November, 1954.

Walker Y. P. A special purpose digital computer. Math. Tables and other Aids Comput, 1953, № 43.

Witke Heinz. Die Rechenmaschine und ihre Rechentechnik; 1948.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3
Введение 5

Глава I. **Общие сведения о приближенных значениях величин и их точности**

§ 1. Источники происхождения приближенных чисел. Правила округления чисел 9
§ 2. Абсолютные и относительные ошибки приближенных чисел 10
§ 3. Различные способы оценки точности приближенных чисел 12
§ 4. Характеристика точности приближенных чисел количеством верных значащих цифр. Способы записи приближенных чисел 13
§ 5. Распределение ошибок округленных чисел 15
§ 6. Зависимость между предельной и средней квадратической ошибками округления 17

Глава II. **Оценка точности результатов вычислений с приближенными числами**

§ 7. Общие замечания о распределении ошибок (погрешностей) в результатах вычислений 20
§ 8. Распределение ошибок функций $q_i = \frac{a_i b_i}{c_i}$ 22
§ 9. Распределение ошибок функций $S_i = \sum_{j=1}^{\nu} a^2_{ij}$ 24
§ 10. Распределение ошибок функций $P_i = \sum_{j=1}^{\nu} a_{ij} b_{ij}$ 25
§ 11. Оценка точности алгебраической суммы 26
§ 12. Оценка точности произведения и частного 29
§ 13. Оценка точности степени и корня 33
§ 14. Оценка точности функции одного аргумента 35
§ 15. Оценка точности функции нескольких аргументов 36
§ 16. Установление допустимых размеров ошибок аргументов по заданному значению ошибки функции 38
§ 17. О потере точности при комбинированных вычислениях с приближенными числами 40

Глава III. **Общие сведения о способах и средствах вычислений**

§ 18. Краткий обзор способов и средств вычислений 43
§ 19. Выбор способов и средств вычислений 45
§ 20. Формула, алгорифм и схема вычислений. Проверка вычислений 46
§ 21. Выражение углов в радианной, градусной и градовой мерах 49
§ 22. Практические указания по производству вычислений 50

Глава IV. **Сокращенные способы непосредственных вычислений. Вычисления при помощи приближенных формул**

§ 23. Сокращенное сложение и вычитание 52
§ 24. Сокращенное умножение 53
§ 25. Определение положения запятой в произведении и частном 55
§ 26. Сокращенное деление 56
§ 27. Особые приемы устного умножения, возведения в квадрат и деления . . —
§ 28. Сокращенный способ извлечения квадратного корня 58
§ 29. Проверка вычислений при помощи числа 9 59
§ 30. О малых величинах различных порядков 60
§ 31. Вычисление при помощи приближенных формул 61
§ 32. Дифференциальные формулы 64

Глава V. Счетная логарифмическая линейка

§ 33. Общие замечания об устройстве и применении счетных логарифмических линеек . . . 70
§ 34. Понятие о функциональной шкале . . . 72
§ 35. Основные шкалы линейки. Отсчеты на шкалах . . . 73
§ 36. Умножение . . . 75
§ 37. Деление . . . 77
§ 38. Определение положения запятой в произведении и частном . . . 78
§ 39. Извлечение квадратного корня и возведение в квадрат . . . 80
§ 40. Извлечение кубического корня и возведение в куб . . . 82
§ 41. Обратная шкала . . . 83
§ 42. Комбинированные вычисления на разных шкалах . . . 85
§ 43. Тригонометрические шкалы . . . 89
§ 44. Вычисления при помощи тригонометрических шкал . . . 92
§ 45. Вычисления на основе пропорции . . . 93
§ 46. Логарифмирование и потенцирование . . . 95
§ 47. Особые значки на линейке . . . 96
§ 48. Точность шкал логарифмической линейки . . . 97
§ 49. Вычисление поправки за центрировку и редукцию . . . —
§ 50. Вычисление площадей . . . 98
§ 51. Вычисление на геодезической счетной линейке МГМ . . . 99
§ 52. Вычисление на геодезической счетной линейке ВТС . . . 105

Глава VI. Таблицы, их выбор, составление и использование при вычислениях

§ 53. Классификация таблиц . . . 111
§ 54. Общие замечания о выборе таблиц . . . 113
§ 55. Выбор таблиц логарифмов чисел с наименьшим, но достаточным числом знаков . . . 115
§ 56. Выбор таблиц логарифмов тригонометрических функций . . . 117
§ 57. Выбор таблиц натуральных значений тригонометрических функций . . . 118
§ 58. Составление и контроль таблиц при помощи конечных разностей . . . 120
§ 59. Вычисление натуральных значений тригонометрических функций малых углов . . . 124
§ 60. Вычисление логарифмов тригонометрических функций малых углов . . . 128
§ 61. Интерполяционные формулы . . . 130
§ 62. Предельные значения величин конечных разностей, подлежащие учету при вычислении с помощью таблиц . . . 135
§ 63. Краткий обзор важнейших таблиц, применяемых в геодезии и землеустройстве . . . 137

Глава VII. Счетные машины и их применение при вычислительных работах

§ 64. Исторические сведения о счетных машинах и приборах . . . 146
§ 65. Принципы устройства механизмов счетных машин . . . 149
§ 66. Общее описание арифмометра . . . 154
§ 67. Устройство арифмометра и принцип работы на нем . . . 155
§ 68. Поверка арифмометра . . . 160
§ 69. Извлечение квадратного корня на арифмометре . . . —
§ 70. Некоторые рациональные приемы вычислений на арифмометре . . . 163
§ 71. Вычисление приращений прямоугольных координат . . . 165
§ 72. Решение обратной геодезической задачи на плоскости . . . 169
§ 73. Сокращенный способ вычисления площади многоугольника по координатам его вершин . . . 173
§ 74. Вычисление прямоугольных координат пункта, определяемого прямой засечкой . . . 175
§ 75. Вычисление прямоугольных координат пункта, определяемого обратной засечкой . . . 176
§ 76. Перевычисление местных прямоугольных координат в одну систему . . . 178
§ 77. Усовершенствованные арифмометры . . . 180

Вычислительная машина ВК-1 . . . 181
Полуавтоматическая машина ВК-2 . . . —
Автоматическая машина ВК-3 . . . 183
Арифмометр для приближенных вычислений . . . 184
Двойной арифмометр . . . 187

§ 78. Полуавтоматические вычислительные машины КЕВ-IIС и КЕЛР-IIС . . . —
§ 79. Автоматические вычислительные машины САЛ-IIС и САСЛ-IIС . . . 191

§ 80. Автоматическая вычислительная машина с механизмом обратного переноса чисел из счетчика результатов в установочное устройство 194
§ 81. Автоматическая вычислительная машина с тремя счетчиками и с механизмом переноса чисел из счетчика результатов в умножающий механизм 197
§ 82. О путях повышения производительности труда при работе на малых вычислительных машинах 203
§ 83. Некоторые рациональные приемы вычислений на полуавтоматических и автоматических машинах 207
§ 84. Краткие сведения о счетно-аналитических машинах и их применении . . 209
§ 85. Краткие сведения об электронных вычислительных машинах и их применении 217

Глава VIII. **Решение систем нормальных уравнений на вычислительных машинах**

§ 86. Общие замечания о решении систем нормальных уравнений 227
§ 87. Решение систем нормальных уравнений по компактной схеме методом последовательного исключения неизвестных с определением весовых коэффициентов 229
§ 88. Решение систем нормальных уравнений с большим числом неизвестных . 236
§ 89. Потеря точности при решении систем нормальных уравнений методом последовательного исключения неизвестных 240
§ 90. Решение нормальных уравнений по методу итерации 244
§ 91. Метод Гаусса—Зейделя 247
§ 92. Сходимость процесса итерации 248
§ 93. Улучшение сходимости процесса итерации 251

Глава IX. **Решение вычислительных задач при помощи номограмм**

§ 94. Общие соображения о решении вычислительных задач при помощи номограмм 256
§ 95. Функциональная шкала 257
§ 96. Номограммы из сдвоенных шкал 258
§ 97. Сетчатые номограммы с помеченными линиями 260
§ 98. Примеры построения сетчатых номограмм геодезических формул . . . 264
§ 99. Выпрямление кривой 266
§ 100. Анаморфоза сетчатых номограмм 268
§ 101. Номограмма из выравненных точек с тремя параллельными равноотстоящими шкалами 270
§ 102. Приспособляемая номограмма с тремя параллельными шкалами . . . 273
§ 103. Номограммы из выравненных точек с параллельными шкалами для многих переменных 276
§ 104. Пропорциональные номограммы 278
§ 105. Номограммы с бинарными полями и шкалами 280
§ 106. О точности вычислений по номограммам 284

Приложения

Некоторые постоянные числа и их десятичные логарифмы 287
Таблица для определения квадратных корней с пятью верными значащими 288
Таблица значений коэффициентов для интерполяционной формулы Ньютона третьего порядка 292
Литература 293

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
5	4 снизу	$=45\ 141\ м^2$	$=45\ 136\ м^2$.
232	9 „	$+c_{86}=$	$=c_{86}=$
293	11 сверху	Базилевич Ю. Я.	Базилевский Ю. Я.
297	11 снизу	Goussisnky E.	Goussinsky E.
„	13 „	Salning	Solving
„	17 „	Lake	Zahl
„	18 „	piano Gauss—Boaga	piano di Gauss—Boaga
„	19 „	Albanig Franceso	Albani Francesco

Е. Г. Ларченко. Механизация вычислительных работ.