

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ ГЕОФИЗИКИ

В.В. Кормильцев
А.Н. Ратушняк

Моделирование
геофизических полей
при помощи объемных
векторных
интегральных
уравнений

ЕКАТЕРИНБУРГ 1999

УДК 550.3+550.83

В.В. Кормильцев, А.Н. Ратушняк. Моделирование геофизических полей при помощи объемных векторных интегральных уравнений. Екатеринбург: УрО РАН, 1999. ISBN 5-7691-0896-7.

Рассмотрены объемные векторные интегральные уравнения для градиентов электрического потенциала, давления, температуры, концентрации, для напряженности магнитного поля магнетиков в случае нескольких внутренне неоднородных по физическим свойствам трехмерных тел, находящихся в однородном полупространстве. Получены также интегральные уравнения для перекрестных и смешанных эффектов, таких как электрические потенциалы течения и диффузии, электроосмотическое давление, перенос тепла в фильтрующей среде. Для сложно построенных геологических сред приведены многочисленные примеры расчета электрического и магнитного поля токов, магнитного поля сильно намагничивающихся тел, поля скоростей при течении Дарси включая случай нестационарной фильтрации сжимаемого флюида, электрического и магнитного поля при течении Дарси, температур и тепловых потоков при наличии дополнительного конвективного переноса.

Изложенные материалы предназначены для лиц, изучающих и применяющих геофизику и геофизические методы разведки.

Ил. 22. Библиогр. 33 назв.

Ответственный редактор

доктор физико-математических наук Ю.В.Хачай

Рецензенты

доктор физико-математических наук профессор А.Н.Мезенцев

кандидат физико-математических наук Н.В.Федорова

ISBN 5-7691-0896-7

© Кормильцев В.В., Ратушняк А.Н. 1999

© УрО РАН, 1999

К $\frac{164(98)}{8\pi 6(03)1998}$ БО

ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена расчетам потенциальных полей и включает элементы теории, алгоритмическую и программную реализацию, а также анализ пространственных и временных закономерностей полей в однородной среде, содержащей трехмерные неоднородности и сторонние источники. В стационарном случае такие задачи приводят к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода. В нестационарном случае эти уравнения могут быть записаны для Лапласовых изображений. Принадлежность исходных дифференциальных уравнений к эллиптическому типу позволила разработать единый алгоритм расчета. Алгоритмы реализованы на языке FORTRAN-77. Основная программа для расчета какого-либо поля поддержана программами для визуализации входной и выходной информации и объединена с ними в пакет.

Математическое моделирование потенциальных полей является частью геофизических методик, развивая представления об изучаемых объектах и возможностях их исследования. Под потенциалом здесь понимают электрический потенциал, потенциал магнитного поля магнетиков, температуру, давление флюида и концентрацию растворенного в нем вещества. Будут рассмотрены такие задачи как перераспределение постоянного электрического тока электропроводными объектами и связанное с этим аномальное магнитное поле токов, вызванная поляризация, намагничивание неоднородного магнетика земным магнитным полем и его вариациями, стационарное и нестационарное распределение температур при кондуктивном переносе тепла, течение сжимаемого и несжимаемого флюида в порах горной породы (течение Дарси), изменение концентрации растворенных газов или электролитов при их диффузии. В качестве модели среды использовано однородное полупространство, часть которого занимает одна или несколько неоднородных областей с зависящими от координат свойствами: электропроводностью, коэффициентом вызванной поляризации (поляризуемостью), магнитной или гидравлической проницаемостями, теплопроводностью, пористостью, коэффициентом потенциала течения. Каждая из этих задач приводит к векторному интегральному уравнению относительно градиента соответствующего потенциала.

Рассмотрены также смешанные и перекрестные эффекты в горных породах, такие как электрическое поле течения Дарси, электрическое поле, возникающее при диффузии электролита, течение Дарси, возникающее при наложении электрического поля (электроосмос), распределение тепла при наличии дополнительного конвективного

переноса за счет течения флюида. В этих задачах градиенты потенциала одного поля участвуют при определении градиентов потенциала другого поля в качестве его источников, а в самосогласованных задачах образуются парные векторные интегральные уравнения. Однако самосогласованные задачи здесь не рассмотрены, поскольку некоторое уточнение результата обычно не оправдывается громоздкостью такой постановки.

Аномальный потенциал U_a поляризованного объема V , ограниченного поверхностью S , может быть представлен в точке (x, y, z) как сумма потенциалов диполей, расположенных в точках (ξ, η, ζ) , в виде

$$U_a = \int_V \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dV, \quad \mathbf{E}_a = -\mathbf{grad} U_a = -\mathbf{grad} \int_V \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dV,$$

$$\mathbf{r} = (x - \xi)\mathbf{i} + (y - \eta)\mathbf{j} + (z - \zeta)\mathbf{k}, \quad dV = d\xi d\eta d\zeta,$$

где \mathbf{F} – вектор поляризации единичного объёма.

Для получения суммарного поля \mathbf{E} необходимо добавить нормальное поле $\mathbf{E}_0 = -\mathbf{grad} U_0$ в отсутствие неоднородностей, которое является первопричиной поляризации. Однако поле, воздействующее на каждый элемент объема dV и вызывающее его поляризацию, не равно нормальному (первичному). Аналогичное физическое действие на процесс поляризации оказывают аномальные (вторичные) поля соседних элементарных объёмов. Поляризация выделенного элемента объема пропорциональна векторной сумме всех влияний, т.е. самому искомому полю. Поэтому в изотропном неоднородном объеме среды возникает интегральное соотношение

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \mathbf{grad} \int_V \frac{N \mathbf{E} \cdot \mathbf{r}}{r^3} dV,$$

где N – коэффициент, определяемый физической сущностью процесса поляризации и в общем случае зависящий от координат ξ, η, ζ .

Это интегральное соотношение, где искомое поле фигурирует дважды, причем один раз под знаком интеграла, для внутренних точек объема V переходит в объемное векторное интегральное уравнение. Под объемным векторным интегральным уравнением будем понимать компактную запись системы из трех скалярных уравнений Фредгольма 2-го рода относительно компонентов вектора напряженности, приведенную выше.

Заметим, что для однородно поляризованных тел, когда $\text{div} \mathbf{F} = 0$, справедливо выражение

$$U_a = \int_S \frac{F_n}{r} dS. \quad \text{Здесь } F_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \text{ – внешняя нормаль}$$

к элементу поверхности dS . Поскольку F_n связана с плотностью поверхностных источников (зарядов), на этой основе возможно построить поверхностное интегральное уравнение для простого слоя, а за-

тем вычислить потенциал. Этот способ является традиционным для однородных по свойствам объектов. При дискретизации скалярного интегрального уравнения размерность получаемой системы линейных алгебраических уравнений в три раза меньше и ее решение менее громоздко.

Однако здесь будут рассмотрены именно объемные векторные интегральные уравнения. Для этого есть две причины. Во-первых, для решения ряда методических вопросов геофизических исследований, использующих потенциальные поля, полезно рассмотреть неоднородные объекты. Во-вторых, часть работы будет посвящена анализу сопряженных полей. В этом случае для определения одного поля необходимо знать напряженность или градиент потенциала другого. Поэтому интегральные формулы и уравнения для каждого из полей удобнее записать относительно градиента потенциала.

Векторные интегральные уравнения для электрического поля токов и магнитного поля магнетиков рассмотрены, например, в работах [1, 2]. Здесь целесообразно привести вывод подобных уравнений таким способом, который в явном виде учитывает внутреннюю неоднородность свойств локального объема. В качестве основной рассмотрена задача определения электрического поля объемно распределенных сторонних токов. Вывод интегрального уравнения выполнен с использованием формулы Грина. Интегральные уравнения для других полей записаны на основе аналогии [3].

1. ОБЪЕМНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ГРАДИЕНТА ПОТЕНЦИАЛА СТАЦИОНАРНЫХ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

1.1. Определение градиента электрического потенциала, создаваемого объемно распределенными сторонними токами в неоднородной среде.

Рассмотрим основную задачу, приводящую к интегральному уравнению относительно напряженности электрического поля. Пусть в безграничном пространстве с постоянной электропроводностью σ_1 расположен локальный объем V_2 с переменной электропроводностью $\sigma_2 = (\xi, \eta, \zeta)$. Остальную часть пространства обозначим как V_1 . В среде протекают сторонние электрическому полю процессы, приводящие к перемещению зарядов силами неэлектрической природы (механическими, осмотическими и т.д.), разделению и накоплению разноименных зарядов в отдельных областях среды и возникновению электрического поля. Меру этих процессов, выраженную в электрических единицах, назовем плотностью стороннего тока i_c . В однородном стационарном плоском случае, когда электрические заряды, создающие электрическое поле, накопились в удаленных по оси Ox источниках и стоках стороннего тока, единственная составляющая плотности электрического тока i_x равна и противоположно направлена плотности стороннего тока $i_x + i_{xc} = 0$. В общем случае полный ток, являющийся векторной суммой стороннего и электрического, удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\operatorname{div}(\mathbf{i} + \mathbf{i}_c) = \operatorname{div}(-\sigma \operatorname{grad} U + \mathbf{i}_c) = 0.$$

Иногда \mathbf{i} называют током миграции, а \mathbf{i}_c – током конвекции, диффузии, переноса и т.п., в зависимости от происхождения.

Из уравнения неразрывности для электрического потенциала U имеем вне (индекс 1) и внутри (индекс 2) локального объема уравнения Пуассона вида

$$\Delta U_1 = \frac{\operatorname{div} \mathbf{i}_{c1}}{\sigma_1}, \quad \Delta U_2 = -\frac{\operatorname{grad} \sigma_2}{\sigma_2} \operatorname{grad} U_2 + \frac{\operatorname{div} \mathbf{i}_{c2}}{\sigma_2}. \quad (1)$$

Источником зарядов помимо неоднородности сторонних токов является неоднородность электропроводности внутри объема.

На границе S локального объема и среды должны быть выполнены условия непрерывности электрического потенциала и нормальной составляющей плотности полного тока

$$U_1 = U_2, \quad -\sigma_1 \frac{\partial U_1}{\partial n} + i_{c1n} = -\sigma_2 \frac{\partial U_2}{\partial n} + i_{c2n}. \quad (2)$$

Из последнего соотношения

$$\frac{\partial U_2}{\partial n} - \frac{\partial U_1}{\partial n} = \left[1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right] \frac{\partial U_2}{\partial n} + \frac{i_{c2n} - i_{c1n}}{\sigma_1}. \quad (3)$$

Для вывода уравнения воспользуемся формулой Грина

$$\int_{V_2} (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) dV = \int_S (\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}) dS,$$

где ψ и φ – произвольные дважды дифференцируемые функции. Нормаль направлена наружу по отношению к объему V_2 . Для остальной части безграничного пространства V_1 внешняя нормаль направлена противоположно внешней нормали V_2 , поэтому

$$\int_{V_1} (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) dV = - \int_S (\psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}) dS.$$

Пусть $\varphi = U$, $\psi = 1/r$, $\Delta \psi = 0$, $r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$, $dV = d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta$. Определим электрический потенциал для внутренней точки. Подставляя ψ и φ в формулу Грина и выделяя полюс [4], получаем

$$4\pi U_2 = \int_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_2}{\partial n} - U_2 \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS - \int_{V_2} \Delta U_2 \frac{dV}{r},$$

$$0 = - \int_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial n} - U_1 \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right) dS - \int_{V_1} \Delta U_1 \frac{dV}{r}.$$

Складывая объемы V_1 и V_2 , и используя уравнения (1) для замены ΔU_2 и ΔU_1 , имеем

$$4\pi U_2 = \int_S \left[\left(\frac{\partial U_2}{\partial n} - \frac{\partial U_1}{\partial n} \right) \frac{1}{r} - (U_2 - U_1) \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} \right] dS -$$

$$- \int_{V_2} \frac{\text{div } \mathbf{i}_{c2}}{\sigma_2} \frac{dV}{r} + \int_{V_2} \frac{\mathbf{grad} \sigma_2 \mathbf{grad} U_2}{\sigma_2} \frac{dV}{r} - \int_{V_1} \frac{\text{div } \mathbf{i}_{c1}}{\sigma_1} \frac{dV}{r} \quad (4)$$

Подставим в поверхностный интеграл граничные условия (2), (3). Выразим его через объемный по формуле Гаусса–Остроградского и возьмем дивергенцию от частного, тогда

$$\int_S [\dots] dS = \int_S \left[\left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \frac{\partial U_2}{\partial n} + \frac{i_{c2n} - i_{c1n}}{\sigma_1} \right] \frac{dV}{r} =$$

$$= \int_{V_2} \text{div} \left\{ \left[\left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \mathbf{grad} U_2 + \frac{\mathbf{i}_{c2} - \mathbf{i}_{c1}}{\sigma_1} \right] \frac{1}{r} \right\} dV =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{V_2} \operatorname{div} \left[\left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \mathbf{grad} U_2 + \frac{\mathbf{i}_{c2} - \mathbf{i}_{c1}}{\sigma_1} \right] \frac{dV}{r} + \\
&+ \int_{V_2} \left[\left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \mathbf{grad} U_2 + \frac{\mathbf{i}_{c2} - \mathbf{i}_{c1}}{\sigma_1} \right] \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV, \tag{5}
\end{aligned}$$

поскольку $\operatorname{div} \frac{\mathbf{a}}{r} = \frac{1}{r} \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{grad} \frac{1}{r}$, $\mathbf{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$.

В первом интеграле выражения (5) еще раз возьмем дивергенцию, учитывая, что $\sigma_2 = f(\xi, \eta, \zeta)$, выразим еще раз ΔU_2 через правую часть уравнения Пуассона (1), приведем подобные члены и получим

$$\begin{aligned}
\int_{V_2} \operatorname{div} [\dots] \frac{dV}{r} &= \int_{V_2} \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \Delta U_2 \frac{dV}{r} - \int_{V_2} \frac{\mathbf{grad} \sigma_2 \mathbf{grad} U_2}{\sigma_1} \frac{dV}{r} + \\
&+ \int_{V_2} \frac{\operatorname{div} \mathbf{i}_{c2}}{\sigma_1} \frac{dV}{r} - \int_{V_2} \frac{\operatorname{div} \mathbf{i}_{c1}}{\sigma_1} \frac{dV}{r} = \\
&= - \int_{V_2} \frac{\mathbf{grad} \sigma_2 \mathbf{grad} U_2}{\sigma_2} \frac{dV}{r} + \int_{V_2} \frac{\operatorname{div} \mathbf{i}_{c2}}{\sigma_2} \frac{dV}{r} - \int_{V_2} \frac{\operatorname{div} \mathbf{i}_{c1}}{\sigma_1} \frac{dV}{r} \tag{6}
\end{aligned}$$

Подставив (6) в (5), а затем в (4) и приведя подобные, получим

$$U_2 = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_1+V_2} \frac{\operatorname{div} \mathbf{i}_{c1}}{\sigma_1} \frac{dV}{r} + \frac{1}{4\pi} \int_{V_2} \left[\left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right) \mathbf{grad} U_2 + \frac{\mathbf{i}_{c2} - \mathbf{i}_{c1}}{\sigma_1} \right] \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV.$$

Первое слагаемое, в котором интегрирование распространено на весь объем среды, представляет собой потенциал в однородном пространстве в отсутствие неоднородного объема V_2 . Это нормальный потенциал, который обозначим как U_0 . Для потенциала U_1 точки, находящейся вне объема V_2 , получим выражение с той же правой частью. Тогда, опуская индекс 2, запишем вне и внутри неоднородного объема

$$U = U_0 + \frac{1}{4\pi} \int_V \left[\left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_1} \right) \mathbf{grad} U + \frac{\mathbf{i}_c - \mathbf{i}_{c1}}{\sigma_1} \right] \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV. \tag{7}$$

И, наконец, обозначив $\mathbf{E} = -\mathbf{grad} U$, имеем векторное интегральное уравнение [5]

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad} \int_V \left[\left(\frac{\sigma}{\sigma_1} - 1 \right) \mathbf{E} + \frac{\mathbf{i}_c - \mathbf{i}_{c1}}{\sigma_1} \right] \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV, \tag{8}$$

которое представляет собой для внутренних точек объема V компактную запись системы трех объемных интегральных уравнений, для внешних – формулу для вычисления напряженности электрического поля. Пусть для внутренних точек определены значения $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\xi, \eta, \zeta)$ в результате решения интегрального уравнения (8). Тогда, согласно (7),

$$U = U_0 + \frac{1}{4\pi} \int_V \left[\left(\frac{\sigma}{\sigma_1} - 1 \right) \mathbf{E} + \frac{\mathbf{i}_c - \mathbf{i}_{c1}}{\sigma_1} \right] \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV . \quad (9)$$

По формуле (9) можно рассчитать значения электрического потенциала во всем пространстве, не вычисляя внешних значений напряженности.

Уравнение (8) непосредственно обобщается на случай нескольких неоднородных объемов, граничащих или не граничащих друг с другом. В частном случае σ может не зависеть от координат ($\sigma_1 \neq \sigma = \text{const}$). Уравнение (8) имеет несколько вариантов в зависимости от природы сторонних токов. Если же объемно распределенные сторонние токи отсутствуют, а электрическое поле создается точечным источником постоянного тока I , то

$$\mathbf{E} = \frac{I}{4\pi\sigma_1} \frac{\mathbf{R}}{R^3} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad} \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} - 1 \right) \mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV , \quad (10)$$

где $R^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$, x_0, y_0, z_0 – координаты источника.

Если верхнее полупространство ($z > 0$) непроводящее, то для проводящего нижнего полупространства ($z \leq 0$), используя метод изображений запишем

$$\mathbf{E} = \frac{I}{4\pi\sigma_1} \left(\frac{\mathbf{R}}{R^3} + \frac{\mathbf{R}_1}{R_1^3} \right) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad} \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} - 1 \right) \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{E}_1 \cdot \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} \right) dV , \quad (11)$$

$$U = \frac{I}{4\pi\sigma_1} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) + \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} - 1 \right) \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{E}_1 \cdot \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} \right) dV , \quad (12)$$

где $R_1^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z+z_0)^2$; $r_1^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2$;
 $\mathbf{E} = E_\xi \mathbf{i} + E_\eta \mathbf{j} + E_\zeta \mathbf{k}$; $\mathbf{E}_1 = E_\xi \mathbf{i} + E_\eta \mathbf{j} - E_\zeta \mathbf{k}$.

При этом на дневной поверхности при $z=0$ значения E_x и E_y удваиваются по сравнению с полным пространством, а E_z обращается в нуль.

1.2. Определение магнитного поля полного тока.

Этот вопрос непосредственно не связан с интегральными уравнениями. Однако он важен, поскольку некоторые электрические явления в земной коре удобнее изучать по магнитному полю, создаваемому полным током.

Определим аномальное магнитное поле H_a полного тока через значения внутреннего поля и избыточные значения плотности полного тока $\mathbf{i}_{па} = (\sigma - \sigma_1) \mathbf{E} + \mathbf{i}_c - \mathbf{i}_{c1}$, которые получены в результате решения уравнения (8).

Введем вектор-потенциал $\mathbf{\Pi}$ электрического типа, удовлетворяющий соотношениям

$$\mathbf{H}_a = \mathbf{rot} \mathbf{\Pi}, \quad \mathbf{div} \mathbf{\Pi} = -\sigma_1(U + U_{c1}),$$

$$\Delta \mathbf{\Pi} = -\mathbf{i}_{па} = (\sigma - \sigma_1) \mathbf{grad} U - \mathbf{i}_{c2} + \mathbf{i}_{c1}.$$

Здесь U_{c1} – формально введенный сторонний потенциал так, что $\mathbf{i}_{c1} = -\sigma_1 \mathbf{grad} U_{c1}$. Электропроводность локальной области пространства $\sigma \neq \sigma_1$ в этих выражениях может являться функцией координат. Уравнение Пуассона для вектора $\mathbf{\Pi}$ имеет известное решение [6]

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{i}_{па}}{r} dV = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{(\sigma - \sigma_1) \mathbf{E} + \mathbf{i}_c - \mathbf{i}_{c1}}{r} dV.$$

Отсюда

$$\mathbf{H}_a = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{[(\sigma - \sigma_1) \mathbf{E} + \mathbf{i}_c - \mathbf{i}_{c1}] \times \mathbf{r}}{r^3} dV. \quad (13)$$

Хотя по смыслу V – это весь объем, интегрирование фактически ведут по объему неоднородности, где $\sigma \neq \sigma_1$ и $\mathbf{i}_{c2} \neq \mathbf{i}_{c1}$.

Величина \mathbf{E}_0 и соответствующие ей электрические токи не создают магнитного поля, поскольку вместе со сторонними токами они образуют в безграничной среде плотность полного тока, всюду тождественно равную нулю. Это относится ко всем рассмотренным здесь задачам.

Выражение (13) показывает, что влияние неоднородности электрических свойств эквивалентно изменению плотности стороннего тока. По форме оно напоминает закон Био–Савара, но по существу им не является. На самом деле рассмотрим однородную по электропроводности среду $\sigma = \sigma_1$, тогда

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{i}_c - \mathbf{i}_{c1}}{r} dV.$$

Таким образом для определения магнитного поля токов в безграничной однородной среде достаточно выполнить интегрирование аномального стороннего тока в объеме неоднородности вместо интегрирования полного тока во всем пространстве по закону Био–Савара. Это требует пояснений.

Действительно, например в [6, с.312], показано, что приравнивая сторонние токи к току в кабеле, соединяющем два заземления, получают магнитное поле, у которого вне точек, занятых кабелем, $\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{i}$, где \mathbf{i} – плотность электрического тока, создаваемого заземлениями в безграничной однородной среде. А.А.Петровский [6, с.315] непосредственным интегрированием показал, что магнитное поле электрических токов, растекающихся в безграничной однородной среде, тождественно равно нулю. Это справедливо и для суммы дипольных источников, каждый из которых включает два сближенных точечных зазем-

ления, что позволяет представить аномальное магнитное поле в форме (13).

Однако в случае полупространства магнитное поле токов, растекающихся с точечного заземления, уже не равно нулю и как-будто бы следует вернуться к закону Био–Савара. Однако, как показал Стефанеску [6, с.315–317], для точечного источника постоянного тока, интегрирование электрических токов по всему объему нижнего полупространства можно заменить изменением конструкции сторонних токов, добавив к ним полубесконечный кабель, направленный перпендикулярно границе раздела в сторону от нее. При определении магнитного поля в воздухе кабель начинается в месте заземления, а при определении в земле – в месте изображения заземления в границе раздела. Если ось OZ направлена вверх и заземление является источником тока, а не стоком, то ток в каждом из кабелей следует направить вниз. Этот фиктивный ток является как бы продолжением тока в диполе. Подробно метод изображений при вычислении магнитного поля токов рассмотрен в [7, с.74–77]. Применительно к векторному потенциалу это означает появление дополнительного слагаемого в составляющей Π_z . Поскольку каждый дипольный источник представляет собой два сближенных точечных заземления, соображения Стефанеску можно применить к нашему случаю.

Обозначим момент диполя \mathbf{M} , а момент отраженного диполя \mathbf{M}_1 . Они различаются тем, что $M_z = -M_{1z}$. Добавка в Π_z составляет при $z \leq 0$

$$4\pi\Pi_{z1} = \frac{M_z}{r_1 - (z + \zeta)} + \frac{\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{r}_1}{r_1 [r_1 - (z + \zeta)]},$$

что вместе с прежним значением векторного потенциала диполя дает новое значение [8]

$$4\pi\Pi = \frac{\mathbf{M}}{r} \operatorname{m} \frac{\mathbf{k}(M_z r_1 + \mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{r}_1)}{r_1 [r_1 - (z + \zeta)]},$$

причем

$$U = -\frac{\operatorname{div} \Pi}{\sigma_1} = \frac{1}{4\pi\sigma_1} \left[\frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \pm \frac{\mathbf{M}_1 \cdot \mathbf{r}_1}{r_1^3} \right],$$

что доказывает правильность выкладок. Двойной знак в формулах позволяет учесть свойства верхнего полупространства. Применительно к электрическому и магнитному полю тока верхний знак соответствует изолятору (воздуху), нижний – идеальному проводнику. Выражение для Π_{z1} проще всего получить путем предельного перехода от наклонного заземленного прямолинейного кабеля к диполю. С учетом этих результатов для нижнего полупространства и дневной поверхности при $z \leq 0$, приравняв \mathbf{M} к $\mathbf{i}_{па}$, получим

$$\mathbf{H}_a = \text{rot}\Pi = \frac{1}{4\pi} \text{rot} \int_V \left\{ \frac{\mathbf{i}_{\text{па}}}{r} m \frac{\mathbf{k}(i_{\text{па}z} l_1 + \mathbf{i}_{\text{па}l} \cdot \mathbf{r}_1)}{r_1 [r_1 - (z + \zeta)]} \right\} dV. \quad (14)$$

Конкретный вид $\mathbf{i}_{\text{па}}$ и определяющих его сторонних токов \mathbf{i}_c зависит от сущности процесса. Далее будут рассмотрены два явления в горной породе, содержащей в своих порах раствор электролита, электронейтральность которого нарушена, а подвижности ионов изменены за счет адсорбции ионов одного знака минеральным скелетом. Это сторонние токи течения Дарси и диффузии. Будет рассмотрен и самый общий случай, когда в отношении стороннего тока делают единственное предположение, а именно, что он вызван предшествующим протеканием электрического тока и пропорционален его плотности $\mathbf{i}_c = -\eta \mathbf{i}$. Коэффициент пропорциональности называют поляризуемостью, а само явление – вызванной поляризацией.

Однако прежде чем обратиться к электрическим явлениям, рассмотрим другие поля, описываемые аналогичными интегральными уравнениями.

1.3. Аналогичные интегральные уравнения.

Имеется шесть физических задач, приводящих к уравнениям эллиптического типа. Кроме уже рассмотренной задачи о растекании постоянного электрического тока к уравнениям Лапласа и Пуассона приводят задачи электростатики, магнитостатики, стационарные задачи теплопроводности, диффузии и течения Дарси. Их решения аналогичны, аналогичны и условия сопряжения на границах разрыва физических свойств. Следующая схема, позаимствованная из [3], иллюстрирует подобие перечисленных полей:

Электрический потенциал U	Удельная электропроводность σ	Плотность электрического тока $\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \text{grad} U$
Электростатический потенциал U	Диэлектрическая проницаемость ε	Электрическая индукция $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E} = -\varepsilon_0 \varepsilon \text{grad} U$
Магнитный потенциал U	Магнитная проницаемость μ	Магнитная индукция $\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H} = -\mu_0 \mu \text{grad} U$
Давление P	Отношение гидравлической проницаемости к динамической вязкости	Скорость течения Дарси $\mathbf{v} = -c/\mu \text{grad} P$

	флюида c/μ	
Температура T	Коэффициент теплопроводности λ	Плотность теплового потока $\mathbf{q} = -\lambda \mathbf{grad} T$
Концентрация C	Коэффициент диффузии D	Плотность потока вещества $\mathbf{q} = -D \mathbf{grad} C$

По аналогии между напряженностью электрического поля токов и магнитного поля магнетиков запишем для напряженности магнитного поля \mathbf{H} неоднородного магнетика в немагнитной среде ($\mu_1=1$, $\mathbf{I}_{c1}=0$) [5]

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad} \int_V [(\mu-1)\mathbf{H} + \mathbf{I}_c] \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV \quad (15)$$

где \mathbf{H}_0 – напряженность внешнего магнитного поля, например земного; μ – магнитная проницаемость неоднородного магнетика; \mathbf{I}_c – его неоднородная остаточная намагниченность. Для слабомагнитных объектов и в слабых полях $\mu-1=\kappa$, где κ – магнитная восприимчивость; для ферромагнетиков в сильных полях значения μ можно уточнять на каждом шаге итерации, пользуясь вычисленной напряженностью внутреннего поля и кривой намагничивания.

Для течения Дарси [5,8]

$$\mathbf{grad} P = \mathbf{grad} P_0 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad} \int_V \left[\frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \pm \frac{\mathbf{K}_1 \cdot \mathbf{r}_1}{r_1^3} \right] dV, \quad (16)$$

$$\mathbf{K} = \left(\frac{c}{c_1} - 1 \right) \left(\frac{\partial P}{\partial \xi} \mathbf{i} + \frac{\partial P}{\partial \eta} \mathbf{j} + \frac{\partial P}{\partial \zeta} \mathbf{k} \right),$$

$$\mathbf{K}_1 = \left(\frac{c}{c_1} - 1 \right) \left(\frac{\partial P}{\partial \xi} \mathbf{i} + \frac{\partial P}{\partial \eta} \mathbf{j} - \frac{\partial P}{\partial \zeta} \mathbf{k} \right),$$

где P_0 – давление, развиваемое источниками флюида в однородном по гидравлической проницаемости пористом полупространстве, c и c_1 – проницаемости неоднородности и полупространства. Верхний знак в уравнении для случая, когда нижнее полупространство гидравлически изолировано от верхнего и $\partial P / \partial z = 0$ при $z=0$, нижний – для случая, когда дневная поверхность является поверхностью высачивания и $P=0$ при $z=0$.

По аналогии между плотностью постоянного электрического тока и плотностью стационарного потока тепла запишем интегральное уравнение для градиента температуры в нижнем полупространстве,

если на его поверхности поддерживается постоянная температура, в виде [5,9]

$$\mathbf{grad}T = \mathbf{grad}T_0 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad} \int_V \left[\frac{\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{r}_1}{r_1^3} \right] dV, \quad (17)$$

$$\mathbf{G} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} - 1 \right) \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial \eta} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial \zeta} \mathbf{k} \right),$$

$$\mathbf{G}_1 = \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} - 1 \right) \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial \eta} \mathbf{j} - \frac{\partial T}{\partial \zeta} \mathbf{k} \right),$$

где T – температура; $\mathbf{q} = -\lambda_1 \mathbf{grad}T_0 = -\lambda_1 \partial T_0 / \partial z$ – плотность теплового потока, идущего снизу к дневной поверхности; λ_1, λ – коэффициенты теплопроводности полупространства и неоднородности.

Рассмотрим искажения стационарного потока диффундирующего растворенного вещества или электролита, вызванные неоднородностью пористой среды. Плотность потока \mathbf{q} удовлетворяет закону Фика $\mathbf{q} = -mD \mathbf{grad}C$, где m – коэффициент пористости, D – коэффициент диффузии, C – концентрация растворенного вещества, например, газа или электролита. В случае растворенного электролита на движение ионов влияет не только осмотическое давление, но и электрическое поле. В пористой среде электронейтральность раствора нарушена, что изменяет подвижности аниона и катиона, а также коэффициент диффузии электролита [10]. Коэффициент диффузии D в порах зависит от формы и размера пор, не связан линейно с коэффициентом пористости m и в общем случае является функцией координат, независимой от распределения пористости. В связи с этим необходимы пояснения относительно уравнения неразрывности и условий сопряжения на границах сред. Поток вещества неразрывен, но концентрация электролита в порах испытывает скачок на границе двух пористых сред, поддерживаемый скачком мембранного потенциала. Поэтому

$$\text{div}(mD \mathbf{grad}C) = 0, \quad C_1 \neq C_2, \quad m_1 D_1 \frac{\partial C_1}{\partial n} = m_2 D_2 \frac{\partial C_2}{\partial n}.$$

Однако отношения C/C_0 и D/D_0 , где C_0 – концентрация электролита в свободном растворе, равновесном с пористой средой, и D_0 – коэффициент диффузии в растворителе, мало отличаются от единицы за исключением случая ультра- и микропор, просвет которых соизмерим с толщиной двойного слоя [11]. Поэтому будем считать коэффициент диффузии всюду постоянным, а концентрацию непрерывной. Тогда

$$\text{div}(m \mathbf{grad}C) = 0, \quad C_1 = C_2, \quad m_1 \frac{\partial C_1}{\partial n} = m_2 \frac{\partial C_2}{\partial n}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial C_2}{\partial n} - \frac{\partial C_1}{\partial n} = \left(1 - \frac{m_2}{m_1}\right) \frac{\partial C_2}{\partial n},$$

и по аналогии с (8) приходим к интегральному уравнению для градиента концентрации в безграничной пористой среде с неоднородным включением:

$$\mathbf{grad} C = \mathbf{grad} C_0 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad} \int_V \left(\frac{m}{m_1} - 1\right) \mathbf{grad} C \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV, \quad (19)$$

где $\mathbf{grad} C_0$ – градиент концентрации диффундирующего вещества в отсутствие неоднородности.

1.4. Родственные интегральные уравнения

Выпишем интегральные уравнения, родственные уравнению (8) для электрического поля, порождаемого объемно распределенными сторонними токами. Рассмотрим проводящее нижнее полупространство, в котором после пропускания постоянного тока установилась стационарная вызванная поляризация. Положим в (2), что $i_{c1n} = \sigma_1 \eta_1 \frac{\partial U_1}{\partial n}$

и $i_{c2n} = \sigma_2 \eta_2 \frac{\partial U_2}{\partial n}$, где η_1 и η_2 – установившиеся значения поляризуемости полупространства и неоднородности. Тогда вместо (3) имеем

$$\frac{\partial U_2}{\partial n} - \frac{\partial U_1}{\partial n} = \left(1 - \frac{\sigma_2(1-\eta_2)}{\sigma_1(1-\eta_1)}\right) \frac{\partial U_2}{\partial n}.$$

Повторяя рассуждения и выкладки, приводящие к выражению (11), получаем для суммарного поля, опустив индекс 2 для неоднородности

$$\mathbf{E} = \frac{I}{4\pi\sigma_1(1-\eta_1)} \left(\frac{\mathbf{R}}{R^3} + \frac{\mathbf{R}_1}{R_1^3}\right) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad} \int_V \left(\frac{\sigma(1-\eta)}{\sigma_1(1-\eta_1)} - 1\right) \left(\frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}}{r^3} + \frac{\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{r}_1}{r_1^3}\right) dV. \quad (20)$$

Определяя напряженность поля вызванной поляризации, необходимо решить это интегральное уравнение еще раз, положив $\eta_1 = \eta = 0$, и найти разность.

Пусть в проводящем нижнем полупространстве в результате течения раствора электролита в порах горной породы возникают потенциалы течения (фильтрационные) и электрическая напряженность течения Дарси \mathbf{E} .

Согласно [6, с.239–240], положим $\mathbf{i}_c = \sigma L \mathbf{grad} P$, где P – давление, L – коэффициент потенциала течения. Тогда вместо (3) получим, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_2}{\partial n} - \frac{\partial U_1}{\partial n} &= \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \frac{\partial U_2}{\partial n} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} L_2 \frac{\partial P_2}{\partial n} - L_1 \frac{\partial P_1}{\partial n} = \\ &= \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \frac{\partial U_2}{\partial n} + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1} L_2 - \frac{c_2}{c_1} L_1\right) \frac{\partial P_2}{\partial n}\end{aligned}\quad (21)$$

Последнее равенство получается после учета условия непрерывности нормальной к поверхности S составляющей скорости течения Дарси

$$v_{1n} = -\frac{c_1}{\mu} \frac{\partial P_1}{\partial n} = -\frac{c_2}{\mu} \frac{\partial P_2}{\partial n} = v_{2n},$$

где c_1 и c_2 – проницаемости неоднородного объема и среды, μ – динамическая вязкость флюида. Используя (21), получаем на основании выкладок, приводящих к уравнениям (8), (11), что

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad} \int_V \left[\frac{\mathbf{W} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \pm \frac{\mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{r}_1}{r_1^3} \right] dV, \quad \mathbf{E}_0 = -L_1 \cdot \mathbf{grad} P_0, \quad (22)$$

$$\mathbf{W} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} - 1 \right) (E_\xi \mathbf{i} + E_\eta \mathbf{j} + E_\zeta \mathbf{k}) + \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} L - L_1 \frac{c}{c_1} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial \xi} \mathbf{i} + \frac{\partial P}{\partial \eta} \mathbf{j} + \frac{\partial P}{\partial \zeta} \mathbf{k} \right),$$

$$\mathbf{W}_1 = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} - 1 \right) (E_\xi \mathbf{i} + E_\eta \mathbf{j} - E_\zeta \mathbf{k}) + \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} L - L_1 \frac{c}{c_1} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial \xi} \mathbf{i} + \frac{\partial P}{\partial \eta} \mathbf{j} - \frac{\partial P}{\partial \zeta} \mathbf{k} \right).$$

Верхний знак “плюс” в выражении (22) соответствует случаю, когда нижнее полупространство изолировано от верхнего тонким слоем непроницаемых пород ($\partial P / \partial z = 0$ и $E_z = 0$ при $z = 0$). Знак минус соответствует случаю, когда дневная поверхность является поверхностью высачивания ($P = 0$). При этом она одновременно является поверхностью равного потенциала ($E_x = E_y = 0$ при $z = 0$).

Для расчетов напряженности электрического поля течения Дарси, согласно (22), необходимо предварительно рассчитать фильтрационную задачу (16) при совпадающих внешних границах неоднородного объема V . В этом случае матрица внутренних значений $\mathbf{grad} P$, полученная в результате решения уравнения (16), без каких-либо изменений целиком используется в уравнении (22).

Рассмотрим напряженность электрического поля диффузии электролита, положив $\mathbf{i}_c = m\beta \mathbf{grad} C$, где $\beta = RT(v_a - v_k)$, R – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура, v_a и v_k – скорости движения аниона и катиона в единичном электрическом поле [12]. Изменения β в пространстве вызваны изменением величины просвета между заряженными стенками пор. В данном случае изменениями β нельзя пренебречь, как пренебрегли ранее изменениями коэффициента диффузии, поскольку это существенная сторона рассматриваемого явления. Подставляя значение \mathbf{i}_c в (3) и учитывая (18), имеем

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_2}{\partial n} - \frac{\partial U_1}{\partial n} &= \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \frac{\partial U_2}{\partial n} + \frac{m_2 \beta_2}{\sigma_1} \frac{\partial C_2}{\partial n} - \frac{m_1 \beta_1}{\sigma_1} \frac{\partial C_1}{\partial n} = \\ &= \left(1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) \frac{\partial U_2}{\partial n} + \frac{m_2}{\sigma_1} (\beta_2 - \beta_1) \frac{\partial C_2}{\partial n}.\end{aligned}$$

Тогда интегральное уравнение для электрического поля диффузии электролита в пористой среде может быть записано в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad} \int_V \left[\left(\frac{\sigma}{\sigma_1} - 1 \right) \mathbf{E} + \frac{m}{\sigma_1} (\beta - \beta_1) \cdot \mathbf{grad} C \right] \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV, \quad (23)$$

где $\mathbf{E}_0 = -\frac{m_1 \beta_1}{\sigma_1} \mathbf{grad} C_0$ – напряженность первичного поля диффузии в отсутствие неоднородности, $\mathbf{grad} C_0$ – внутренние значения градиента концентрации, полученные при решении уравнения (19).

Выпишем интегральное уравнение для электроосмоса, родственное уравнению (16). При наложении электрического поля \mathbf{E} в пористой среде возникает электроосмотическое течение, скорость и градиент давления которого равны $\mathbf{v} = -L\mathbf{i} = -\sigma L \mathbf{E}$, $\mathbf{grad} P = \sigma L \mu \mathbf{E} / c$, где c – проницаемость, μ – динамическая вязкость флюида. Согласно соотношениям Онсагера, коэффициент, связывающий плотность электрического тока со скоростью электроосмотического течения, совпадает с коэффициентом потенциала течения L [11]. Используя аналогию между течением несжимаемой жидкости в пористой среде и электрическим током, между давлением и потенциалом, вместо (2) и (3) записываем

$$\begin{aligned}-\frac{c_1}{\mu} \frac{\partial P_1}{\partial n} - \sigma_1 L_1 E_{n1} &= -\frac{c_2}{\mu} \frac{\partial P_2}{\partial n} - \sigma_2 L_2 E_{n2}, \\ \frac{\partial P_2}{\partial n} - \frac{\partial P_1}{\partial n} &= \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) \frac{\partial P_2}{\partial n} + \frac{\mu(L_1 - L_2)\sigma_2 E_{n2}}{c_1}\end{aligned}$$

с учетом того, что $\sigma_1 E_{n1} = \sigma_2 E_{n2}$. Тогда для градиента давления при электроосмосе

$$\begin{aligned}\mathbf{grad} P &= \mathbf{grad} P_0 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad} \int_V \left[\frac{\mathbf{G} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \pm \frac{\mathbf{G}_1 \cdot \mathbf{r}_1}{r_1^3} \right] dV, \\ \mathbf{G} &= \left(\frac{c}{c_1} - 1 \right) \left(\frac{\partial P}{\partial \xi} \mathbf{i} + \frac{\partial P}{\partial \eta} \mathbf{j} + \frac{\partial P}{\partial \zeta} \mathbf{k} \right) + (L - L_1) \frac{\mu \sigma}{c_1} \mathbf{E}, \\ \mathbf{G}_1 &= \left(\frac{c}{c_1} - 1 \right) \left(\frac{\partial P}{\partial \xi} \mathbf{i} + \frac{\partial P}{\partial \eta} \mathbf{j} - \frac{\partial P}{\partial \zeta} \mathbf{k} \right) + (L - L_1) \frac{\mu \sigma}{c_1} \mathbf{E}_1,\end{aligned} \quad (24)$$

$$\mathbf{grad}P_0 = \frac{\sigma_1 L_1 \mu}{c_1} \mathbf{E}_0.$$

Верхний знак в уравнении (24) – для случая, когда нижнее полупространство гидравлически изолировано от верхнего и $\partial P / \partial z = 0$ при $z=0$, нижний – для случая, когда дневная поверхность является поверхностью высачивания и $P=0$ при $z=0$. Там, где разность $\mathbf{grad}P - \mathbf{grad}P_0 \neq 0$, возникают локальные области напряжения или разгрузки. Наиболее вероятная причина интенсивного электроосмоса – электротеллурическая напряженность $\mathbf{E}_0 = E_{0x}\mathbf{i} + E_{0y}\mathbf{j}$, связанная с магнитными пульсациями во время общей геомагнитной бури. Если объем V отличается по электропроводности от вмещающих пород, предварительно необходимо решить уравнение

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad} \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} - 1 \right) \left(\mathbf{E} \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{E}_1 \frac{\mathbf{r}_1}{r_1^3} \right) dV \quad (25)$$

и использовать полученную матрицу значений внутреннего поля E_ξ, E_η, E_ζ в уравнении (24).

1.5. Интегральные уравнения для градиентов температуры и концентрации в фильтрующей среде.

Рассмотрим векторное интегральное уравнение для градиента температуры в случае комбинированного переноса тепла кондуктивным и конвективным способами [13]. Конвективный перенос осуществляется за счет фильтрации флюида в проницаемой влагонасыщенной среде по закону Дарси со скоростью $\mathbf{v} = -c/\mu \mathbf{grad}P$, причем эта скорость невелика, так что температура флюида и минерального скелета в каждой точке успевает стать одинаковой. Среда представляет собой однородное пространство или полупространство с постоянными коэффициентами гидравлической проницаемости c_1 и теплопроводности λ_1 .

Для случая стационарной температуры при столь медленной фильтрации, что температура T твердой и жидкой фаз одинакова, из закона сохранения энергии [14] имеем для дивергенции полного потока тепла, что

$$\operatorname{div} \left[\lambda \cdot \mathbf{grad} T - (\rho_f c_f) \mathbf{v} T \right] + H = 0. \quad (26)$$

Здесь λ – коэффициент теплопроводности, Вт/м⁰К; ρ_f – плотность флюида, кг/м³; c_f – удельная массовая теплоемкость флюида, Дж/кг/°К; H – тепловыделение в единице объема, Вт/м³, которое может иметь радиогенное, химическое или биохимическое происхождение; $\mathbf{v} = -c/\mu \mathbf{grad}P$ – скорость течения Дарси, м/с; c – гидравлическая

проницаемость, м²; μ – динамическая вязкость флюида, Па·с; P – давление в порах, Па. Отсюда в случае несжимаемой жидкости

$$\Delta T = -\frac{\mathbf{grad}\lambda}{\lambda} \mathbf{grad}T + \frac{\mathbf{v}}{\chi} \mathbf{grad}T - \frac{H}{\lambda}, \quad (27)$$

поскольку $\text{div}(\rho_f \mathbf{v})=0$. Здесь $\chi=\lambda/\rho_f c_f$ – коэффициент, подобный температуропроводности, м²/с.

Сначала рассмотрим безграничную среду, в которой находится одно включение объема V , имея в виду, что впоследствии интегральное уравнение может быть обобщено на случай нескольких объемов непосредственно. Напомним, что в среде $\mathbf{grad}\lambda_1=0$ и во включении $\mathbf{grad}\lambda \neq 0$. Представим температуру в виде $T=T_1+T_a$, где T_1 – температура в среде без включения, удовлетворяющая уравнению

$$\Delta T_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\chi_1} \mathbf{grad}T_1 - \frac{H_1}{\lambda_1}. \quad (28)$$

Это уравнение подобно уравнению Пуассона, где в правой части стоит объемная концентрация источников тепла. Решением его является интеграл Пуассона

$$T_1 = -\frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{\mathbf{v}_1}{\chi_1} \mathbf{grad}T_1 - \frac{H_1}{\lambda_1} \right) \frac{dV}{r},$$

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2, \quad dV = d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta.$$

Интегрирование ведется по всему безграничному пространству. Интеграл Пуассона является интегро-дифференциальным уравнением относительно температуры. Дифференцируя его по координатам точки наблюдения, получаем интегральное уравнение относительно градиента температуры. Решение уравнения (28) может быть получено также методом разделения переменных или еще какими-либо способами. Образцы таких решений будут приведены ниже. Во всяком случае, температуру T_1 полагают всюду заданной.

Приведем здесь несколько иную процедуру вывода выражения для аномальной температуры, нежели в разделе 1.1, имея в виду, что конечные формулы тождественны. Используя аналогию между температурой и электрическим потенциалом, запишем, что [4]

$$T = T_1 + \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho}{\lambda_1 r} dV + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\sigma}{\lambda_1 r} dS, \quad (29)$$

где $\rho = -\text{div}\mathbf{F}$ – избыточная концентрация объемных источников тепла во включении, Вт/м³; $\sigma = F_n$ – концентрация поверхностных источников тепла, Вт/м²; S – поверхность включения, м²; \mathbf{F} , F_n – вектор поляризации и его нормальная составляющая, Вт/м².

Второе и третье слагаемые соответствуют аномальной температуре T_a , вызванной включением. Избыточная концентрация объ-

емных источников тепла равна разности правых частей уравнений (27) и (28):

$$\frac{\rho}{\lambda_1} = \frac{\mathbf{grad}\lambda}{\lambda} \mathbf{grad}T - \frac{\mathbf{v}}{\chi} \mathbf{grad}T + \frac{\mathbf{v}_1}{\chi_1} \mathbf{grad}T_1 - \frac{H}{\lambda} + \frac{H_1}{\lambda_1}. \quad (30)$$

Плотность поверхностных источников пропорциональна скачку нормальной составляющей градиента температуры между внутренней и внешней сторонами граничной поверхности

$$\frac{\sigma}{\lambda_1} = \frac{\partial T^{(+)}}{\partial n} - \frac{\partial T^{(-)}}{\partial n}.$$

Здесь под $T^{(+)}$ и $T^{(-)}$ можно понимать как суммарные T , так и аномальные T_a температуры. Граничными условиями являются непрерывность температуры $T^{(+)}=T^{(-)}$ и нормальной составляющей полного потока тепла. Согласно (26),

$$\lambda_1 \frac{\partial T^{(-)}}{\partial n} - \rho_f c_f \mathbf{v}_n^{(-)} T^{(-)} = \lambda \frac{\partial T^{(+)}}{\partial n} - \rho_f c_f \mathbf{v}_n^{(+)} T^{(+)}. \quad (31)$$

Очевидно, что движение флюида не создает поверхностных источников тепла, поскольку фильтрационную задачу решают при граничном условии $\mathbf{v}_n^{(+)}=\mathbf{v}_n^{(-)}$. Поэтому

$$\frac{\partial T^{(+)}}{\partial n} - \frac{\partial T^{(-)}}{\partial n} = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \frac{\partial T^{(+)}}{\partial n}.$$

Это выражение является нормальной составляющей F_n вектора поляризации \mathbf{F} единицы объема включения

$$\mathbf{F} = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \mathbf{grad}T \quad (31)$$

Подставляя (30) и (31) в (29) и заменяя в полученном выражении поверхностный интеграл на объемный по формуле Гаусса

$$\int_S \frac{F_n dS}{r} = \int_V \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{F}}{r} \right) dV,$$

имеем после выполнения операции дивергенции над функцией \mathbf{F}/r , замены ΔT на правую часть выражения (27) и приведения подобных членов, что

$$T = T_1 + \frac{1}{4\pi} \int_V \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \mathbf{grad}T \mathbf{grad}_M \left(\frac{1}{r}\right) dV - \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{\mathbf{v} \mathbf{grad}T - \mathbf{v}_1 \mathbf{grad}T_1}{\chi_1} - \frac{H - H_1}{\lambda_1} \right) \frac{dV}{r}. \quad (32)$$

Здесь индекс M означает дифференцирование по координатам ξ, η, ζ . Второе слагаемое представляет собой дипольно поляризованную, а третье – источниковую часть поля аномальных температур. Совер-

шенно такое же выражение (32) получается, если полностью следовать процедуре вывода, основанной на формуле Грина и формулах (4–7). Выражение (32) можно получить также, решая неоднородное линейное уравнение (27) методом функции Грина (функции влияния). Все три способа дают идентичный результат.

При наличии границы земля – воздух при $z=0$ необходимо в подынтегральных выражениях заменить $1/r$ на $(1/r+K/r_1)$, где $K=(\lambda_1-\lambda_0)/(\lambda_1+\lambda_0)$ и λ_0 – теплопроводность верхнего полупространства, $r_1^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2$, $z\leq 0$. Для решения задачи при изотермическом режиме на дневной поверхности необходимо положить $K=-1$. Разумеется, что и нормальная (без включения) температура T_1 также должна быть теперь определена с учетом отражающей границы. Возьмем градиент по координатам x, y, z точки наблюдения A и получим интегральное уравнение для градиента температуры, а именно

$$\mathbf{grad}_A T = \mathbf{grad}_A T_1 + \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad}_A \int_V \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \mathbf{grad}_M T \mathbf{grad}_M \left(\frac{1}{r} + \frac{K}{r_1}\right) dV - \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{\mathbf{v} \mathbf{grad}_M T - \mathbf{v}_1 \mathbf{grad}_M T_1}{\chi_1} - \frac{H - H_1}{\lambda_1}\right) \mathbf{grad}_A \left(\frac{1}{r} + \frac{K}{r_1}\right) dV. \quad (33)$$

По аналогии с температурой имеем для градиента давления (см. также (16))

$$\mathbf{grad}_A P = \mathbf{grad}_A P_1 + \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad}_A \int_V \left(1 - \frac{c}{c_1}\right) \mathbf{grad}_M P \mathbf{grad}_M \left(\frac{1}{r} + \frac{k}{r_1}\right) dV \quad (34)$$

Здесь P_1 – давление, развиваемое источниками флюида в однородном полупространстве с гидравлической проницаемостью c_1 ; c – проницаемость неоднородного включения, $k=\pm 1$, причем знак минус соответствует высачиванию флюида ($P=0$ при $z=0$), а знак плюс соответствует напорному режиму вблизи дневной поверхности ($\partial P/\partial z=0$ при $z=0$).

В качестве нормального поля для градиента давления (скоростей фильтрации) рассмотрим поле точечного источника вещества объемной производительностью Q ($\text{м}^3/\text{с}$) либо плоский поток. В случае точечного источника, координаты которого x_0, y_0, z_0 ,

$$P_1 = \frac{\mu}{c_1} \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{R} + \frac{k}{R_1}\right), \quad \mathbf{grad}_A P_1 = \frac{\mu}{c_1} \frac{Q}{4\pi} \mathbf{grad}_A \left(\frac{1}{R} + \frac{k}{R_1}\right),$$

В случае плоского потока, направленного вдоль оси z , градиент давления должен быть задан в виде $\mathbf{grad} P_1 = \mathbf{k} \partial P_1 / \partial z$ ($\partial P_1 / \partial z = \text{const}$, Па/м), а в случае горизонтального потока $\mathbf{grad} P_1 = \mathbf{i} \partial P_1 / \partial x$ ($\partial P_1 / \partial x = \text{const}$). Первое из этих специфических движений реализуемо, когда дневная поверхность является поверхностью высачивания, а второе, когда она

непроницаема для жидкости. Поэтому в формуле (34) в первом случае нужно принять $k=-1$, а во втором $k=1$.

При наличии точечного источника тепла и флюида температура во всем безграничном пространстве (за исключением места расположения источника) удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{grad} T_1 + \frac{c_1}{\mu\chi_1} \mathbf{grad} P_1 T_1\right) = 0,$$

где T_1 и P_1 обладают сферической симметрией относительно источника. Таким решением является выражение

$$T_1 = \frac{M}{\rho_f c_f Q} \left(1 - \exp\left(-\frac{Q}{4\pi\chi_1 R}\right)\right),$$

здесь M – тепловая мощность источника, Вт. При наличии границы раздела земля–воздух имеем выражение

$$T_1 = \frac{M}{\rho_f c_f Q} \left\{1 - \exp\left(-\frac{Q}{4\pi\chi_1 R}\right) + K \left(1 - \exp\left(-\frac{Q}{4\pi\chi_1 R_1}\right)\right)\right\},$$

которое при отсутствии фильтрации ($Q=0$) переходит в

$$T_1 = \frac{M}{4\pi\lambda_1} \left\{\frac{1}{R} + \frac{K}{R_1}\right\}.$$

В случае изотермической поверхности следует принять $K=-1$.

В плоском случае вертикальной фильтрации необходимо решить уравнение

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} - \rho_f c_f v_1 T_1 \right) = -H_1(z),$$

где v_1 – скорость вертикальной фильтрации, или

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} - \frac{v_1}{\chi_1} \frac{\partial T_1}{\partial z} = -\frac{H_1(z)}{\lambda_1}$$

Это линейное уравнение первого порядка относительно $\partial T_1/\partial z$, имеющее известное решение [15]

$$T_1 = A_1 + A_2 \exp\left(\frac{v_1 z}{\chi_1}\right) + \frac{\chi_1}{v_1 \lambda_1} \int_{z_0}^z H_1(t) \left[1 - \exp\left(\frac{v_1(z-t)}{\chi_1}\right)\right] dt.$$

Рассмотрим распределение температуры при наличии постоянного вертикального потока тепла q_0 , связанного с геотермическим градиентом, и радиогенных источников в слое $0 \geq z \geq -h$ с тепловыделением $H_1(z)$. Тогда (T_0 – температура при $z=-h/2$)

$$T_1 = T_0 + \frac{q_0 \chi_1}{v_1 \lambda_1} \left(1 - \exp\left(\frac{v_1}{\chi} \left(z + \frac{h}{2}\right)\right)\right) + \frac{\chi_1}{v_1 \lambda_1} \int_{-h/2}^z H_1(t) \left[1 - \exp\left(\frac{v_1(z-t)}{\chi_1}\right)\right] dt,$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial z} = -\frac{q_0}{\lambda_1} \exp\left(\frac{v_1}{\chi_1} \left(z + \frac{h}{2}\right)\right) - \frac{1}{\lambda_1} \int_{-h/2}^z H(t) \exp\left(\frac{v_1(z-t)}{\chi_1}\right) dt.$$

При отсутствии других источников тепла, кроме равномерно распределенных в слое, т.е. при $q_0=0$, $v_1=0$, $H_1(z)=H_0$

$$\frac{\partial T_1}{\partial z} = -\frac{H_0}{\lambda_1} \left(z + \frac{h}{2}\right),$$

что делает на верхней и нижней гранях пласта плотность теплового потока равной $q=\pm H_0 h/2$ в полном соответствии с физическими представлениями. В отсутствие источников тепла $H_1(z)$ в слое $0 > z > -h$ удобнее пользоваться выражением

$$T_1 = T_0 + \frac{q_0 \chi_1}{v_1 \lambda_1} \left(1 - \exp\left(\frac{v_1}{\chi_1} (z + h)\right)\right), \quad (35)$$

где T_0 – температура при $z=-h$. При горизонтальной фильтрации и вертикальном градиенте температуры движение жидкости не влияет на первичное распределение температуры. Поэтому в отсутствие источников в слое

$$T_1 = T_0 - \frac{q_0}{\lambda_1} (z + h), \quad \frac{\partial T_1}{\partial z} = -\frac{q_0}{\lambda_1}. \quad (36)$$

Из основных уравнений (33), (34) и выражений для нормального поля можно получить ряд расчетных формул для разнообразных ситуаций. Выпишем их для случая первичного плоского вертикального потока тепла q_0 без источников тепла в рассматриваемой области и в предположении, что границы неоднородностей теплопроводности и проницаемости одни и те же. Комбинируя (32) и (34), получаем

$$T = T_1 + \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{c \mathbf{grad}_M P}{\mu \chi_1} \mathbf{grad}_M T - \frac{c_1 \mathbf{grad}_M P_1}{\mu \chi_1} \mathbf{grad}_M T_1 \right) \left(\frac{1}{r} + \frac{K}{r_1} \right) dV + \frac{1}{4\pi} \int_V \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} \right) \mathbf{grad}_M T \mathbf{grad}_M \left(\frac{1}{r} + \frac{K}{r_1} \right) dV, \quad (37)$$

$$\mathbf{grad}_A T = \mathbf{grad}_A T_1 + \frac{1}{4\pi} \int_V \left(\frac{c \mathbf{grad}_M P}{\mu \chi_1} \mathbf{grad}_M T - \frac{c_1 \mathbf{grad}_M P_1}{\mu \chi_1} \mathbf{grad}_M T_1 \right) \mathbf{grad}_A \left(\frac{1}{r} + \frac{K}{r_1} \right) + \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad}_A \int_V \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} \right) \mathbf{grad}_M T \mathbf{grad}_M \left(\frac{1}{r} + \frac{K}{r_1} \right) dV, \quad (38)$$

причем $\mathbf{grad}_M P$ определяют из (34).

При этом для вертикальной фильтрации, согласно (35),

$$T_1 = T_0 - \frac{q_0 \chi_1 \mu}{\lambda_1 c_1 (\partial P_1 / \partial z)} \left[1 - \exp \left(- \frac{c_1 (\partial P_1 / \partial z) (z + h)}{\chi_1 \mu} \right) \right],$$

$$\mathbf{grad} T_1 = \frac{\partial T_1}{\partial z} \cdot \mathbf{k} = -\mathbf{k} \frac{q_0}{\lambda_1} \exp \left(- \frac{c_1 (\partial P_1 / \partial z) (z + h)}{\chi_1 \mu} \right), \quad \mathbf{grad} P_1 = \frac{\partial P_1}{\partial z} \mathbf{k},$$

$$\mathbf{grad} P_1 \cdot \mathbf{grad} T_1 \neq 0, \quad K = -1.$$

Для горизонтальной фильтрации, согласно (36),

$$T_1 = T_0 - \frac{q_0}{\lambda_1} (z + h), \quad \mathbf{grad} T_1 = -\frac{q_0}{\lambda_1} \mathbf{k}, \quad \mathbf{grad} P_1 \cdot \mathbf{grad} T_1 \equiv 0,$$

$$\mathbf{grad} P_1 = \frac{\partial P}{\partial x} \mathbf{i}, \quad K = +1.$$

Необходимо решить систему (38) векторных объемных интегральных уравнений для компонентов $\mathbf{grad}_M T$ внутри неоднородностей, а затем по этой же формуле рассчитать внешние градиенты температуры и тепловые потоки либо вычислить температуру по формуле (37).

При $v_1=0$ уравнения (37) и (38) редуцируются к виду

$$T = T_1 + \frac{1}{4\pi} \int_V \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} \right) \mathbf{grad}_M T \cdot \mathbf{grad}_M \left(\frac{1}{r} + \frac{K}{r_1} \right) dV, \quad (39)$$

$$\mathbf{grad}_A T = \mathbf{grad}_A T_1 + \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad}_A \int_V \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} \right) \mathbf{grad}_M T \cdot \mathbf{grad}_M \left(\frac{1}{r} + \frac{K}{r_1} \right) dV \quad (40)$$

рассмотренному выше (см. (17)).

При наличии конвекции диффундирующего вещества вместо уравнения диффузии необходимо использовать уравнение неразрывности при конвективной диффузии [16, стр.339] в пористой среде $div(-mD\mathbf{grad}C + \mathbf{v}C) = 0$, где \mathbf{v} – скорость течения Дарси для несжимаемой жидкости ($div\mathbf{v} = 0$). Тогда по аналогии с выражением (33) для градиентов концентрации в безграничной среде имеем

$$\mathbf{grad}_A C = \mathbf{grad}_A C_1 + \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad}_A \int_V \left(1 - \frac{m}{m_1} \right) \mathbf{grad}_M C \cdot \mathbf{grad}_M \left(\frac{1}{r} \right) dV -$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}_M C - \mathbf{v} \cdot \mathbf{grad}_M C_1}{D} \mathbf{grad}_A \left(\frac{1}{r} \right) dV, \quad (41)$$

где $\mathbf{grad}_A C_1$ и \mathbf{v}_1 – значения, не возмущенные неоднородностью. Для определения \mathbf{v} предварительно необходимо решить уравнение (34) при $k=0$.

2. ОБЪЕМНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ДИФФУЗИИ, ФИЛЬТРАЦИИ СЖИМАЕМОГО ФЛЮИДА

2.1. Определение градиента давления и скорости фильтрации сжимаемого флюида

Рассмотрим нестационарное давление P при течении сжимаемой жидкости в однородном пространстве или полупространстве, включающем ограниченную область с иной гидравлической проницаемостью c . Соответствующее ему электрическое поле течения Дарси квазистатическим образом будет следовать за медленным изменением во времени градиента давления и не может быть в математическом смысле отнесено к нестационарному. Для него попрежнему справедливо стационарное интегральное уравнение (22), но с нестационарными источниками давления, в котором время выступает в качестве параметра, а не переменной дифференцирования или интегрирования.

Итак, пусть скорость течения флюида \mathbf{v} в горной породе подчиняется закону Дарси $\rho \mathbf{v} = -c/v \cdot \mathbf{grad} P$, где ρ – плотность флюида, v – кинематическая вязкость, P – давление. При этом плотность флюида подчиняется уравнению состояния

$$\rho = \rho_c + \rho_c \beta (P - P_c), \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho_c \beta \frac{\partial P}{\partial t},$$

где β – сжимаемость флюида, ρ_c – стандартная плотность при некотором давлении P_c . Тогда из уравнения неразрывности для флюида (\mathbf{q} – плотность стороннего потока, m – коэффициент пористости) [16]

$$m \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} + \mathbf{q}) = 0,$$

подставив $\partial \rho / \partial t$ из уравнения состояния и $\rho \mathbf{v}$ из уравнения Дарси, получим

$$\operatorname{div}(c \cdot \mathbf{grad} P) = m \mu \beta \frac{\partial P}{\partial t} + v \operatorname{div} \mathbf{q},$$

где $\mu = \rho_c v$ – динамическая вязкость флюида при плотности ρ_c . Пусть внутри поверхности S в объеме V_2 проницаемость c_2 есть функция координат, а вне V_2 во всем остальном безграничном пространстве $c_1 = \text{const}$. Тогда

$$\Delta P_1 = \frac{m_1 \mu \beta}{c_1} \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{v \operatorname{div} \mathbf{q}_1}{c_1},$$

$$\Delta P_2 = -\frac{\mathbf{grad} c_2 \cdot \mathbf{grad} P_2}{c_2} + \frac{m_2 \mu \beta}{c_2} \frac{\partial P_2}{\partial t} + \frac{v \operatorname{div} \mathbf{q}_2}{c_2}.$$

Переходя к Лапласовым изображениям, для задач с нулевыми начальными условиями имеем

$$\begin{aligned} \Delta P_1 &= k_1^2 P_1 + \frac{v \operatorname{div} \mathbf{q}_1}{c_1} \\ \Delta P_2 &= -\frac{\mathbf{grad} c_2 \cdot \mathbf{grad} P_2}{c_2} + k_2^2 P_2 + \frac{v \operatorname{div} \mathbf{q}_2}{c_2} \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь $k_{1,2}^2 = m_{1,2} \mu \beta s / c_{1,2}$, s – параметр преобразования Лапласа.

При выводе уравнения воспользуемся формулой Грина для внутренней точки [4]

$$\oint_S \left[\psi \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varphi_2 \frac{\partial \psi}{\partial n} \right] dS = \int_{V_2} [\psi \Delta \varphi_2 - \varphi_2 \Delta \psi] dV,$$

где φ и ψ – две произвольные дважды дифференцируемые внутри объема и непрерывные вместе с производными скалярные функции, $\partial/\partial n$ – их нормальные производные. Нормаль направлена наружу по отношению к локальному объему V_2 . Остальную часть безграничного пространства обозначим V_1 . Для объема V_1 внешняя нормаль направлена противоположно внешней нормали объема V_2 , поэтому

$$-\oint_S \left[\psi \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varphi_1 \frac{\partial \psi}{\partial n} \right] dS = \int_{V_1} [\psi \Delta \varphi_1 - \varphi_1 \Delta \psi] dV.$$

Пусть далее $\varphi = P$, $\psi(r, s) = \frac{e^{-k_1 r}}{r}$, $\Delta \psi = k_1^2 \frac{e^{-k_1 r}}{r}$, $dV = d\xi \cdot d\eta \cdot d\zeta$,

$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$. Выделяя полюс внутри объема V_2 и складывая, получаем

$$\begin{aligned} 4\pi P &= \oint_S \left[\frac{e^{-k_1 r}}{r} \left(\frac{\partial P_2}{\partial n} - \frac{\partial P_1}{\partial n} \right) - (P_2 - P_1) \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-k_1 r}}{r} \right] dS - \\ &- \int_{V_2} (\Delta P_2 - k_1^2 P_2) \frac{e^{-k_1 r}}{r} dV - \int_{V_1} (\Delta P_1 - k_1^2 P_1) \frac{e^{-k_1 r}}{r} dV \end{aligned} \quad (43)$$

Выделяя полюс в объеме V_1 и снова складывая, получим для внешней точки то же уравнение (43), поэтому слева у величины P индекс опущен. Используем граничные условия на поверхности S :

$$P_1 = P_2, \quad -\frac{c_1}{v} \frac{\partial P_1}{\partial n} + q_{n1} = -\frac{c_2}{v} \frac{\partial P_2}{\partial n} + q_{n2},$$

откуда

$$\frac{\partial P_2}{\partial n} - \frac{\partial P_1}{\partial n} = \left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) \frac{\partial P_2}{\partial n} + \frac{v}{c_1} (q_{n2} - q_{n1}).$$

Подставив эти условия в (43), заменив поверхностный интеграл на объемный по формуле Гаусса, взяв дивергенцию от произведения двух функций и выразив ΔP_1 и ΔP_2 с помощью исходных дифференциальных уравнений (42), после приведения подобных членов и группировки слагаемых получим

$$\begin{aligned} 4\pi P(s) = & - \int_{V_1+V_2} \frac{v}{c_1} \operatorname{div} \mathbf{q}_1 \frac{e^{-k_1 r}}{r} dV + \\ & + \int_{V_2} \left[\left(1 - \frac{c_2}{c_1}\right) \mathbf{grad}_M P_2(s) + \frac{v}{c_1} (\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) \right] \cdot \mathbf{grad}_M \frac{e^{-k_1 r}}{r} dV + \\ & + \int_{V_2} \left(k_1^2 - \frac{c_2}{c_1} k_2^2 \right) \cdot P_2(s) \frac{e^{-k_1 r}}{r} dV \end{aligned} \quad (44)$$

Поскольку r можно дифференцировать как по координатам точки наблюдения, так и по координатам объема, условимся, что индекс M означает дифференцирование по ξ, η, ζ . В такой записи нет смысла удерживать индекс 2 у объема и давления, опустим его также и у других параметров объема V_2 . Приравнявая параметры объема V к параметрам среды V_1 , убеждаемся, что первое слагаемое в (44) представляет собой давление P_0 в однородном пространстве. Для нашего исследования аномальные сторонние потоки внутри объема можно опустить, приравняв $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}_2$. Тогда для Лапласова изображения давления имеем следующее интегро-дифференциальное уравнение [17]:

$$\begin{aligned} 4\pi P(s) = & 4\pi P_0(s) + \int_V \left(1 - \frac{c}{c_1}\right) \mathbf{grad} P(s) \mathbf{grad}_M \frac{e^{-k_1 r}}{r} dV + \\ & + \int_V \frac{\mu\beta}{c_1} (m_1 - m) s \cdot P(s) \frac{e^{-k_1 r}}{r} dV, \end{aligned} \quad (45)$$

справедливое для неоднородного объема, помещенного в безграничное пространство. Перейдем к градиенту давления и кусочно-неоднородной среде, положив c и m постоянными внутри объема. При наличии границы раздела земля–воздух при $z=0$ используем дополнительную функцию Грина для отраженного источника

$$\psi(r_1, s) = \frac{e^{-k_1 r_1}}{r_1}, \quad r_1^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2,$$

с помощью которой, применив метод изображений, можно получить решения двух типов, учитывающие гидравлический режим вблизи дневной поверхности. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbf{grad}_A P(s) = \mathbf{grad}_A P_0(s) - \\
-\frac{1}{4\pi} \left(\frac{c}{c_1} - 1 \right) \cdot \mathbf{grad}_A \int_V \mathbf{grad}_M P(s) \mathbf{grad}_M \left(\frac{e^{-k_1 r}}{r} \pm \frac{e^{-k_1 r_1}}{r_1} \right) dV + \\
+\frac{1}{4\pi} \frac{c}{c_1} \left(\frac{m_1}{m} - 1 \right) \int_V \operatorname{div} \mathbf{grad}_M P(s) \mathbf{grad}_A \left(\frac{e^{-k_1 r}}{r} \pm \frac{e^{-k_1 r_1}}{r_1} \right) dV. \quad (46)
\end{aligned}$$

Индекс A означает дифференцирование r по координатам точки наблюдения x, y, z .

Для анализа основных закономерностей нестационарного процесса можно положить $m_1 = m$. Поскольку проницаемость породы с цилиндрическими круговыми порами равна $c \approx (ma^2)/8$, где a – радиус пор, неравенство $c \neq c_1$ при равенстве $m_1 = m$ означает, что изменение c связано с изменением структуры пор. В природе нередки ситуации, когда пористость меняется на несколько процентов, а проницаемость – на несколько порядков (например, глина и песок). Поэтому в предположении $m_1 = m$, $c \neq c_1$ нет ничего необычного. Но это предположение превращает уравнение (46) из интегро-дифференциального в интегральное относительно $\mathbf{grad}P$.

При $z=0$ в (46) с верхним знаком $\partial P/\partial x \neq 0$, $\partial P/\partial y \neq 0$, $\partial P/\partial z = 0$, а с нижним $\partial P/\partial x = \partial P/\partial y = 0$, $\partial P/\partial z \neq 0$. Верхний знак – для случая, когда верхнее полупространство гидравлически изолировано от нижнего, нижний – когда дневная поверхность является поверхностью высачивания. Конструкция источника должна быть совместима с граничными условиями на дневной поверхности. Например, плоское горизонтальное течение совместимо только с верхним знаком в формуле (46), а плоское вертикальное – с нижним. Для точечного источника флюида с координатами $(x_0, y_0, z_0 < 0)$ и объемной производительностью Q в Лапласовых изображениях [18]

$$P_0(s) = \frac{\mu Q}{4\pi c_1 s} \left(\frac{e^{-k_1 R}}{R} \pm \frac{e^{-k_1 R_1}}{R_1} \right)$$

$$R^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2, \quad R_1^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z + z_0)^2$$

и во временной области ($Q=0$ при $t < 0$, $Q = \text{const}$ при $t \geq 0$)

$$P_0(t) = \frac{\mu Q}{4\pi c_1} \left[\frac{\operatorname{erfc} \left\{ \left(\frac{m_1 \mu \beta R^2}{4c_1 t} \right)^{1/2} \right\}}{R} \pm \frac{\operatorname{erfc} \left\{ \left(\frac{m_1 \mu \beta R_1^2}{4c_1 t} \right)^{1/2} \right\}}{R_1} \right]$$

Для численного расчета временного режима удобнее перейти от обратного преобразования Лапласа к обратному экспоненциальному преобразованию Фурье. Для этого заменим в выражении для k_1 и формуле (46) параметр преобразования Лапласа s на $j\omega$, где j – мнимая единица. Тогда

$$\mathbf{grad} P(t) = \frac{1}{\pi_0} \int_0^{\infty} \text{Re}[\mathbf{grad} P(j\omega) \exp(j\omega t)] d\omega \quad (47)$$

Значения $\mathbf{grad}P$, вычисленные по формуле (47), следует использовать для определения нестационарного электрического и магнитного полей течения так же, как это сделано для стационарного поля. Сначала необходимо решить векторное интегральное уравнение (22) для внутренних точек локальных неоднородностей. При этом $\partial P/\partial \xi$, $\partial P/\partial \eta$, $\partial P/\partial \zeta$ – компоненты градиента давления внутри неоднородности в некоторый заданный момент, полученные из выражений (46) и (47). Далее по формуле (22) можно вычислить значение \mathbf{E} во всех точках. Если нас интересует электрический потенциал U , тогда при $z \leq 0$

$$U = L_1 P_0 + \frac{1}{4\pi} \int_V \left[\frac{\mathbf{W} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \pm \frac{\mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{r}_1}{r_1^3} \right] dV,$$

причем \mathbf{W} и \mathbf{W}_1 имеют тот же смысл, что и в формуле (22). Положим $\mathbf{i}_{\text{па}} = \sigma_1 \mathbf{W}$ и $\mathbf{i}_{\text{па1}} = \sigma_1 \mathbf{W}_1$ и тогда, согласно (14), при $z \leq 0$

$$\mathbf{H} = \frac{\sigma_1}{4\pi} \mathbf{rot} \int_V \left(\frac{\mathbf{W}}{r} m \frac{\mathbf{k}(W_\zeta \cdot \mathbf{r}_1 + \mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{r}_1)}{r_1 [r_1 - (z + \zeta)]} \right) dV, \quad (48)$$

$$W_\zeta = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} - 1 \right) E_\zeta + \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} L - L_1 \frac{c}{c_1} \right) \frac{\partial P}{\partial \zeta}.$$

2.2. Нестационарная диффузия в среде с переменной пористостью

Пусть в некотором объеме пористой среды существует избыточная концентрация электролита. Выравнивание ее осуществляется путем диффузии за довольно продолжительное время. В течение этого времени в окружающем пространстве существует электрическое поле диффузии. Если подвижности аниона и катиона неравны, диффузионный ток \mathbf{q} удовлетворяет уравнениям Фика и неразрывности [19]

$$\mathbf{q} = -mD \cdot \mathbf{grad} C, \quad m \frac{\partial C}{\partial t} + \text{div} \mathbf{q} = 0, \quad \text{где } D = \frac{2D_a D_k}{D_a + D_k} \text{ – коэффициент}$$

диффузии электролита, D_a и D_k – коэффициенты диффузии аниона и катиона, C – концентрация электролита в порах горной породы. Отсюда следует уравнение нестационарной диффузии

$$m \frac{\partial C}{\partial t} + \operatorname{div}(-mD \cdot \mathbf{grad} C) = 0,$$

которое для кусочно-однородных сред приобретет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{grad} C = \frac{1}{D} \frac{\partial C}{\partial t}$$

или в Лапласовых изображениях (s – параметр преобразования)

$$\Delta C(s) = \frac{s}{D} C(s).$$

На поверхности S локального объема равны концентрации и нормальные составляющие вектора $m\mathbf{q}$

$$C_1 = C_2, \quad m_1 D_1 \frac{\partial C_1}{\partial n} = m_2 D_2 \frac{\partial C_2}{\partial n},$$

откуда
$$\frac{\partial C_2}{\partial n} - \frac{\partial C_1}{\partial n} = \left[1 - \frac{m_2 D_2}{m_1 D_1} \right] \frac{\partial C_2}{\partial n}.$$

Сравнивая структуру уравнений и граничных условий для нестационарной диффузии и нестационарной фильтрации (см. предыдущий раздел), приходим к выводу, что решением проблемы нестационарной диффузии в кусочно-однородной среде является уравнение (46), в котором необходимо заменить P на C , c на mD и $1/D$ на $m\mu\beta/c$. Тогда в нижнем полупространстве $z \leq 0$ при наличии неоднородности

$$\mathbf{grad} C(s) = \mathbf{grad} C_0(s) -$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{4\pi} \left[\frac{mD}{m_1 D_1} - 1 \right] \mathbf{grad}_A \int_V \mathbf{grad} C(s) \mathbf{grad}_M \left(\frac{e^{-k_1 r}}{r} + \frac{e^{-k_1 \eta}}{r_1} \right) dV + \\ & + \frac{1}{4\pi} \frac{D}{D_1} \left(1 - \frac{m}{m_1} \right) \int_V \operatorname{div} \mathbf{grad} C(s) \mathbf{grad}_A \left(\frac{e^{-k_1 r}}{r} + \frac{e^{-k_1 \eta}}{r_1} \right) dV \end{aligned} \quad (49)$$

Выбран верхний знак в формуле (46), поскольку дневная поверхность непроницаема для диффундирующего электролита и $\partial C(s)/\partial z = 0$ при $z = 0$. Равенство коэффициентов диффузии $D_1 = D$ не приводит к упрощению уравнения (49). Для его превращения в интегральное необходимо приравнять коэффициенты пористости $m = m_1$. Однако, если для течения Дарси это имело смысл, то для диффузии равенство $m = m_1$ физически не интересно.

Для изучения зависимости концентрации от времени следует воспользоваться численным обращением преобразования Лапласа или родственным ему обратным экспоненциальным преобразованием Фурье, заменив s на $j\omega$, а именно:

$$\mathbf{grad} C(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}(\mathbf{grad} C(j\omega) e^{j\omega t}) d\omega. \quad (50)$$

Поясним, что необходимо иметь ввиду под величиной C_0 . Например, рассмотрим в качестве источника объем самой неоднородности, в котором в моменты $t \leq 0$ существовала постоянная избыточная концентрация C_a . Тогда в однородном полупространстве с коэффициентом диффузии D_1 , согласно [16, с.501-502], при $z \leq 0$

$$C_0(t) = \frac{C_a}{(4\pi D_1 t)^{3/2}} \int_{z_1}^{z_2} d\zeta \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left[\exp\left(-\frac{r^2}{4D_1 t}\right) + \exp\left(-\frac{r_1^2}{4D_1 t}\right) \right] d\xi d\eta,$$

где $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$ – координаты граней неоднородности в виде параллелепипеда ($z_1 < 0, z_2 < 0$), или в Лапласовых изображениях

$$C_0(S) = \frac{C_a}{4\pi D_1} \int_{z_1}^{z_2} d\zeta \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \left(\frac{e^{-k_1 r}}{r} + \frac{e^{-k_1 r_1}}{r_1} \right) d\xi d\eta.$$

Поскольку диффузия очень медленный процесс, можно пренебречь токами смещения и индукцией при изучении зависимости электрического поля диффузии от времени и считать, что электрическое поле следует за концентрацией квазистатическим образом. Мы будем подставлять в выражение для стороннего тока диффузии значения градиента концентрации для каждого момента, полученные в результате решения уравнений (49), (50), и считать, что электрическое поле диффузии в тот же момент может быть найдено из соответствующих уравнений, например (23) для напряженности электрического поля в безграничном пространстве с включением. Соответственно для полупространства

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad}_A \int_V \left[\left(\frac{\sigma}{\sigma_1} - 1 \right) \mathbf{E} + \frac{m}{\sigma_1} (\beta - \beta_1) \mathbf{grad}_M C \right] \mathbf{grad}_M \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) dV, \quad (51)$$

$$U = U_0 + \frac{1}{4\pi} \int_V \left[\left(\frac{\sigma}{\sigma_1} - 1 \right) \mathbf{E} + \frac{m}{\sigma_1} (\beta - \beta_1) \mathbf{grad}_M C \right] \mathbf{grad}_M \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) dV, \quad (52)$$

где новым обозначением по сравнению с выражением (23) является величина $U_0 = m_1 \beta_1 C_0 / \sigma_1$.

2.3. Нестационарная температура в фильтрующей среде

На основе баланса теплоты [14] имеем уравнение

$$\operatorname{div} \left[\lambda \mathbf{grad} T - \rho_f c_f \mathbf{V} T \right] + H = \rho c_{\Pi} \frac{\partial T}{\partial t},$$

в котором новыми по сравнению с (26) являются обозначения ρ – плотность породы, c_{Π} – удельная массовая теплоемкость породы.

Отсюда в случае несжимаемой жидкости

$$\Delta T = -\frac{\mathbf{grad} \lambda}{\lambda} \mathbf{grad} T + \frac{\mathbf{v}}{\chi} \mathbf{grad} T - \frac{H}{\lambda} + \frac{1}{\chi_{\Pi}} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (53)$$

где $\chi_{\Pi} = \lambda / \rho c_{\Pi}$ – температуропроводность горной породы.

Скорость течения Дарси \mathbf{v} может параметрически зависеть от времени, если производительность источника флюида меняется по какому-либо закону, например, $\mathbf{v}=0$ при $t < 0$ и $\mathbf{v}=\mathbf{v}(x, y, z)$ при $t \geq 0$. Другой причиной нестационарности является изменение тепловыделения H или остывание нагретого тела, представляющего собой первичный источник тепла. Преобразуя (53) по Лапласу, имеем, что

$$\Delta T(s) = -\frac{\mathbf{grad} \lambda}{\lambda} \mathbf{grad} T(s) + \frac{\mathbf{v}(s)}{\chi} \mathbf{grad} T(s) - \frac{H(s)}{\lambda} + \frac{s}{\chi_{\Pi}} T(s).$$

Выделяя в однородном пространстве (индекс 1) неоднородный объем (индекс 2) имеем

$$\Delta T_1(s) = \frac{\mathbf{v}_1(s)}{\chi_1} \mathbf{grad} T_1(s) - \frac{H_1(s)}{\lambda_1} + \frac{s}{\chi_{\Pi 1}} T_1(s),$$

$$\Delta T_2(s) = -\frac{\mathbf{grad} \lambda_2}{\lambda_2} \mathbf{grad} T_2(s) + \frac{\mathbf{v}_2(s)}{\chi_2} \mathbf{grad} T_2(s) - \frac{H_2(s)}{\lambda_2} + \frac{s}{\chi_{\Pi 2}} T_2(s).$$

Повторив выкладки, приводящие к уравнениям (43) и (44), получим уравнение, подобное уравнению (32), но для Лапласовых изображений и с новой функцией Грина

$$T(s) = T_1(s) + \frac{1}{4\pi_V} \int \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1} \right) \mathbf{grad} T(s) \mathbf{grad}_M \frac{e^{-k_1 r}}{r} dV - \int_V \left(\frac{\mathbf{v}(s) \mathbf{grad} T(s) - \mathbf{v}_1(s) \mathbf{grad} T_1(s)}{\chi_1} - \frac{H_2(s) - H_1(s)}{\lambda_1} \right) \frac{e^{-k_1 r}}{r} dV \quad (54)$$

где $k_1^2 = s / \chi_1$, T_1 – решение дифференциального уравнения (53) для однородного пространства. Уравнение (54) проще, чем уравнение (45), поскольку тепло распространяется не только в порах, но и по минеральному скелету. Возможно, более точный учет композитной теплопроводности приведет к появлению коэффициента пористости в уравнении (54), однако в случае малой пористости уравнение является достаточным. Анализ зависимости температуры от времени удобнее выполнить, заменив обратное преобразование Лапласа обратным экспоненциальным преобразованием Фурье подобно тому, как это было сделано для нестационарного давления в выражении (47).

3. СПОСОБЫ ОТЫСКАНИЯ РЕШЕНИЙ И ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ

3.1. Основные алгоритмы решения системы интегральных уравнений

Несмотря на различную физическую сущность процессов, изучаемых в том или ином случае, полученные решения в виде векторного объемного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода позволили разработать и опробовать для каждой физической задачи два основных алгоритма численной реализации. Этими алгоритмами являются метод итераций и метод исключения Гаусса для системы линейных алгебраических уравнений, к которой сведена система интегральных уравнений. Численные эксперименты и сравнение результатов решения системы интегральных уравнений двумя методами позволили выбрать наилучший для каждой конкретной задачи. При этом основным требованием в каждом случае было достижение требуемой точности расчетов за минимальное время с минимальными ресурсами ЭВМ класса IBM PC AT-486.

Покажем основные алгоритмы решения системы интегральных уравнений на примере уравнения (11) для напряженности электрического поля источника постоянного тока и трехмерного неоднородного объекта. Особенности в реализации других систем уравнений будем отмечать отдельно.

Запишем систему векторных объемных интегральных уравнений в матричном виде для точек $\mathbf{r}(x, y, z)$ и $\mathbf{r}'(\xi, \eta, \zeta)$

$$K_m(\mathbf{r}) = K_m^0(\mathbf{r}) + \int_V S(\mathbf{r}') G_{mn}(\mathbf{r}/\mathbf{r}') K_n(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (55)$$

где $K_m(\mathbf{r})$ – составляющие градиента потенциала по осям в декартовой прямоугольной системе координат в точке \mathbf{r} , $K_m^0(\mathbf{r})$ – составляющие градиента потенциала стороннего источника поля в однородной среде в отсутствие неоднородности, $S(\mathbf{r}')$ – относительный избыточный физический параметр, характеризующий неоднородный локальный объект в точке \mathbf{r}' (например, для намагничивающихся объектов в немагнитной среде $S(\mathbf{r}') = \mu(\mathbf{r}') - 1$; для проводящих объектов $S(\mathbf{r}') = [\sigma(\mathbf{r}') - \sigma_0]/\sigma_0$ и т.п.), $G_{mn}(\mathbf{r}/\mathbf{r}')$ – компоненты тензорной функции Грина, отражающей взаимное влияние точек \mathbf{r} и \mathbf{r}' и имеющей для безграничной среды вид

$$G_{mn} = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial r_m \partial r'_n} \frac{1}{R}, \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}.$$

Преобразуем уравнение (55), используя метод моментов [20]. Разобьем объем V на N элементов ($N \rightarrow \infty$), в пределах которых величины $K_n(r_j)$ и $S(r_j)$ будем считать постоянными для точек r_j , $j=1,2,\dots,N$. Для текущей точки r_i имеем

$$K_m(r_i) = K_m^0(r_i) + \sum_{j=1}^N S(r_j) \sum_{n=1}^3 \int_{V_j} G_{mn}(r_i/r_j) dr_j K_n(r_j), \quad (56)$$

где раскрыто произведение $G_{mn}(r_i/r_j)K_n(r_j)$ и интегрирование по объему текущего элемента V_j перенесено на функцию Грина.

Если $r_i \notin V$, то (56) есть интегральная формула для расчета составляющих градиента потенциала по известным значениям $K_m(r_j)$. В случае $r_i \in V (i=1,2,\dots,N)$ имеем дискретизированную систему интегральных уравнений. Для определения величин градиента потенциала в интегральном уравнении необходимо в явном виде выделить особенность для точек $r_i = r_j$. Определяя главное значение интеграла от функции Грина как

$$\mathbf{P} \int_{V_j} G_{mn}(r_i/r_j) dr_j = W_{mn}(r_i/r_j), \quad (57)$$

возьмем интеграл от функции Грина по сторонам текущего элемента с длинами d_1, d_2, d_3 по осям и обозначим его как двумерный скаляр $t(m, r_i)$:

$$t(m, r_i) = -\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{V(r_i)}{D(r_i)d_m^2(r_i)},$$

где: $V(r_i) = d_1(r_i)d_2(r_i)d_3(r_i)$; $D(r_i) = \sqrt{d_1^2(r_i) + d_2^2(r_i) + d_3^2(r_i)}$; $V(r_i)$ – объем текущего элемента r_i ; $D(r_i)$ – длина его главной диагонали; $d_m(r_i)$ – длина элемента r_i по оси m .

В частности, при $d_1=d_2=d_3$ для кубического элемента скаляр $t(m, r_i) = -1/3$. Вынеся выделенную особенность за знак интеграла, запишем уравнение в виде

$$K_m(r_i) = K_m^0(r_i) + \sum_{j=1}^N S(r_j) \sum_{n=1}^3 W_{mn}(r_i/r_j) K_n(r_j) - S(r_i)t(m, r_i)K_m(r_i). \quad (58)$$

Перегруппировав члены и введя новые обозначения для коэффициентов, получим дискретизированную и регуляризованную систему интегральных уравнений для компонентов градиента потенциала

$$K_m(r_i)q(m, r_i) = K_m^0(r_i) + \sum_{j=1}^N S(r_j) \sum_{n=1}^3 W_{mn}(r_i/r_j) K_n(r_j) \quad (59)$$

где $q(m, r_i) = 1 + S(r_i)t(m, r_i)$.

Систему интегральных уравнений (59) можно решать методом итераций, принимая в качестве нулевого приближения величину гра-

диента потенциала в однородной среде K_m^0 и регулируя сходимость решения введением регуляризатора [21].

Итерационный метод решения системы (59) удобен для решения систем уравнений с величинами S , не превышающими единицу. При больших значениях S , особенно для большой размерности системы уравнений ($N > 1000$), итерационный процесс становится медленно сходящимся и требует значительного расчетного времени. В этом случае следует привести уравнение (59) к матричной системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) [22].

В интегральном уравнении (59) перегруппируем слагаемые и, используя соотношение

$$\int \delta(r_i - r_j) \delta_{mn} K_n(r_j) q(n, r_j) dr_j = K_m(r_i) q(m, r_i)$$

где δ_{mn} – символ Кронеккера, $\delta(r_i - r_j)$ – функция Дирака, введем $K_m(r_j) q(m, r_i)$ под знак суммы. Тогда

$$\sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^3 \left\{ \delta_{mn} \delta_{ij} q(n, j) - S(j) W_{mn}(i/j) \right\} K_n(j) = K_m^0(i), \quad (60)$$

здесь индексы r_i и r_j заменены на i и j .

Рассматривая $A_{mn}(i, j) = \delta_{mn} \delta_{ij} q(n, j) - S(j) W_{mn}(i/j)$ как элемент матрицы A размером $N \times N$, а K_m^0 и K_n как N -мерные векторы, где индексы m и $n = 1, 2, 3$, получим матричное представление уравнения (59)

$$\begin{Bmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{Bmatrix} * \begin{Bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_x^0 \\ K_y^0 \\ K_z^0 \end{Bmatrix} \quad (61)$$

т.е. СЛАУ $[A] \times [K] = [K^0]$, где A – матрица размером $3N \times 3N$, K и K^0 – матрицы размером $3N$. Диагональные элементы $i=j$ равны $q(j)$ при $m=n$ или нулю при $m \neq n$. Недиagonальные элементы $i \neq j$ равны при этом $-S(j)W(i/j)$, т.е. A непрерывна во всем объеме V или на всем множестве элементов N .

В общем случае интеграл необходимо взять по объему элемента аналитически по сторонам m, n, k элемента r_j с длинами ребер d_m, d_n, d_k и координатами центра ξ, η, ζ относительно точки r_i с координатами x, y, z . Выполнив соответствующие преобразования, имеем для безграничного пространства

$$W_{mm}(r_i / r_j) = \frac{1}{4\pi} \sum_{q_2=1}^2 \sum_{h_2=1}^2 \sum_{q_2=1}^2 e_{12} \arctg \frac{x_1 x_2 x_3}{Dx_m^2}, \quad (62)$$

$$W_{mn}(r_i / r_j) = \frac{1}{4\pi} \sum_{q_2=1}^2 \sum_{h_2=1}^2 \sum_{q_2=1}^2 e_{12} \ln |x_k + D|,$$

где $x_1 = x - \xi + a_{12}d_1/2$; $x_2 = y - \eta + b_{12}d_2/2$; $x_3 = z - \zeta + c_{12}d_3/2$; $D = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$; $a_{12} = \pm 1$; $b_{12} = \pm 1$; $c_{12} = \pm 1$; $e_{12} = a_{12} \cdot b_{12} \cdot c_{12}$.

Решив СЛАУ и определив тем самым внутренние значения градиентов потенциала в центрах элементов объема, рассчитаем значения потенциала U и его градиентов во внешних точках $r_i \notin V$ по формулам

$$\begin{aligned} K_m(r_i) &= K_m^0(r_i) + \sum_{j=1}^N S(r_j) \sum_{n=1}^3 W_{mn}(r_i / r_j) K_n(r_j), \\ U(r_i) &= U^0(r_i) + \sum_{j=1}^N S(r_j) \sum_{n=1}^3 V_n(r_i / r_j) K_n(r_j), \end{aligned} \quad (63)$$

где для безграничного пространства функция V имеет вид

$$\begin{aligned} V_n(r_i / r_j) &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_j} \frac{\partial}{\partial r'_n} \frac{1}{R} dr_j = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{q_2=1}^2 \sum_{h_2=1}^2 \sum_{q_2=1}^2 \left\{ e_{12} \left[x_m \ln|x_k + D| + x_k \ln|x_m + D| - x_n \arctg \frac{x_m x_k}{x_n D} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Функция Грина для безграничного пространства используется в интегральных уравнениях (15), (19), (23). В других уравнениях она имеет более сложный вид, отражающий влияние границы раздела и свойств верхнего полупространства. В системе декартовых координат с началом на границе раздела двух сред и осью OZ , направленной по нормали от границы в сторону от трехмерного объекта, функция Грина записывается в виде

$$G_{mn}(r_i / r_j) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial r_m \partial r'_n} \left(\frac{1}{R} \pm \frac{K}{R} \right)$$

где знак \pm зависит от отражающих свойств границы раздела сред, а коэффициент отражения K – от различий физических свойств двух полупространств, $\bar{R} = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2}$. Таким образом, компоненты тензорной функции (62) получают дополнительные слагаемые вида

$$\bar{W}_{mn}(r_i / r_j) = \pm \frac{K}{4\pi} \sum_{q_2=1}^2 \sum_{h_2=1}^2 \sum_{q_2=1}^2 e_{12} \arctg \frac{x_1 x_2 \bar{x}_3}{\bar{D} x_m^2}, \quad (64)$$

для элементов $mn=23,13$

$$\bar{W}_{mn}(r_i / r_j) = m \frac{K}{4\pi} \sum_{q_2=1}^2 \sum_{h_2=1}^2 \sum_{q_2=1}^2 e_{12} \ln|x_k + \bar{D}|,$$

для остальных элементов

$$\overline{W}_{mn}(r_i / r_j) = \pm \frac{K}{4\pi} \sum_{q_{12}=1}^2 \sum_{b_{12}=1}^2 \sum_{c_{12}=1}^2 e_{12} \ln|x_k + \overline{D}|$$

где $x_3 = z + \zeta + c_{12} d_3 / 2$, $\overline{D} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \overline{x}_3^2}$.

Покажем отличительные особенности в алгоритмах расчетов различных интегральных уравнений. Уравнения (11), (16), (17) однотипны и реализующие их программы идентичны. При расчетах характеристик электрического поля поляризуемого объекта (20) необходимо, подобно уравнению (11), решить уравнение (20) дважды для фактических значений поляризуемости и при их нулевых значениях.

В интегральном уравнении (15) присутствует вектор остаточной намагниченности $\mathbf{I}(\mathbf{r}')$, который задается в исходных данных. Уравнение (15) разбивается на два и рассчитывается интеграл по объему от вектора \mathbf{I} , который вместе с величиной намагничивающего земного поля \mathbf{H}^0 образует правую часть K^0 системы линейных алгебраических уравнений (61) или величину свободного члена K_m^0 в системе интегральных уравнений (59).

Для расчета электрического поля, возникающего при течении Дарси (22), необходимо предварительно решить интегральное уравнение для градиентов давления (16). Рассчитав объемный интеграл от полученных значений градиента давления и переопределив вместе с \mathbf{E}_0 новое значение свободного члена K_m^0 , необходимо снова решить систему уравнений для напряженности электрического поля (11). Аналогично проводится расчет электрического поля диффузии электролита в пористой среде (23) с предварительным решением интегрального уравнения для градиента концентрации (19), а также расчет градиентов давления при электроосмосе (24) с предварительным решением уравнения для градиентов потенциала (11).

Рассмотрим алгоритм решения интегрального уравнения для градиентов температуры в фильтрующей среде (33). Решив интегральное уравнение (34) для градиентов давления и определив тем самым значения составляющих скорости фильтрации внутри локального объема, запишем уравнение (33) в дискретизированном виде

$$F_m(r_i) = F_m^1(r_i) + F_m^2(r_i) + \int_V S(r_j) G_{mn}(r_i / r_j) F_n(r_j) dr_j + \int_V \beta(r_j) U_m(r_i / r_j) K_n(r_j) F_n(r_j) dr_j, \quad (65)$$

где символом F_m обозначены составляющие градиентов давления, причем составляющие F_m^2 рассчитаны по известным значениям градиентов температуры $F_m^1 = \mathbf{grad}_m T_1$ и давления $K_m^1 = \mathbf{grad}_m P_1$ в однородном полупространстве

$$F_m^2(r_i) = -\frac{c_1}{4\pi\mu\chi_1 V} \int G_{mn}(r_i / r_j) K_n^1(r_j) F_n^1(r_j) dr_j.$$

Здесь $S(r_i) = (\lambda(r_i) - \lambda_1) / \lambda_1$, $\beta(r_i) = c(r_i) / \mu_0 \chi_1$.

Уравнение (65) приводится к СЛАУ следующего вида

$$\sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^3 \left\{ \delta_{mn} \delta_{ij} q(m, j) - S(j) W_{mn}(i / j) - \beta(j) V_m(i / j) K_n(j) \right\} F_n(j) = F_m^1(i) + F_m^2(i), \quad (66)$$

где $q(m, j) = 1 + \frac{\lambda(j) - \lambda_1}{\lambda_1} \cdot \frac{2}{\pi} \arctg \frac{V(j)}{D(j) d_m^2(j)}$;

компоненты тензорных функций $W_{mn}(i/j)$ определены в (62) и $V_{mn}(i/j)$ в (63), а индексы r_i и r_j заменены для сокращения на i и j . Определив внутренние значения ($i \in N$) составляющих градиентов температуры $F_m(i) = \mathbf{grad}_m T_1(i)$ можно рассчитать внешние градиенты температуры и тепловые потоки либо вычислить температуру по формуле (38). По аналогичному алгоритму рассчитывается диффузия вещества при наличии конвективных потоков жидкости (41).

Расчет скорости фильтрации сжимаемого флюида (46) осуществляется подобно случаю несжимаемой жидкости (16) для спектра 40 частот, необходимых для численного перехода к временному режиму на основе обратного синус–преобразования Фурье по формуле (47) с интерполяцией промежуточных значений с помощью кубического сплайна. Получаемые значения внутренних градиентов давления используются для расчета напряженностей электромагнитного поля и потенциала во внешних точках наблюдений по формулам (22) и (48). По подобному алгоритму осуществляется расчет нестационарной диффузии вещества в средах с переменной пористостью (49) – (52).

3.2. Внутренние и внешние оценки точности результатов

Определим основные источники погрешностей, влияющие на точность результата, не затрагивая вопросов, связанных с соответствием вычислительных формул и уравнений реальным физическим процессам. Поскольку расчет компонентов тензора Грина выполнен аналитически, то остаются два основных источника погрешности. Во-первых, это погрешность, связанная с представлением модели в виде конечного числа элементарных однородных объёмов, т.е. со степенью дискретизации. Во-вторых – погрешность решения СЛАУ, к которой сводится векторное интегральное уравнение после дискретизации.

Сначала остановимся на второй погрешности, поскольку решение СЛАУ выполняли известными методами и пользовались стандартными оценками достоверности результата. При решении системы

уравнений (59) итерационным методом (ряд Неймана) оценка невязки осуществляется на k -ом шаге:

$$\varepsilon = \frac{\sum_{j=1}^N |K_m^k(r_j) - K_m^{k-1}(r_j)|}{\sum_{j=1}^N |K_m^k(r_j)|} < \delta, \quad (67)$$

где δ – наперед заданная величина требуемой относительной погрешности решения системы уравнений. Кроме итерационного метода при решении СЛАУ были реализованы метод исключения Гаусса, метод исключения Гаусса с выбором ведущего элемента, а также проекционный метод LSQR Пейджа–Саундерса [24].

Как показал опыт моделирования задач кондуктивной электро-разведки, магнитометрии, течения Дарси, переноса тепла, а также комбинированных задач, в результате дискретизации интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода обычно получалась хорошо обусловленная СЛАУ, удовлетворительно разрешимая даже при размерности 500. В этом находит свое частное выражение принцип единственности прямой задачи. При контрастности свойств локального объекта и вмещающей среды не более 10, когда итерационный процесс завершается при малом числе шагов, есть возможность широкого сопоставления метода итераций и метода Гаусса. Относительные различия в значениях внешнего и внутреннего поля моделей при этом всегда были близки к величине относительной погрешности δ для метода итераций.

Остается показать влияние степени дискретизации трехмерной модели на точность получаемого результата. Достоверность расчетов можно оценить, сравнивая куб с аналитическим решением для шара. На удалении от центра куба, вдвое превышающем длину ребра, аномалия от него должна быть близка к аномалии от шара такого же объема. Это ясно из физических соображений и это же следует из уравнения (59). Действительно, если не делить куб на элементарные объемы, то из (59) для градиента электрического потенциала в случае кубического объема имеем

$$E_m(r_i) \frac{\sigma_v + 2\sigma_0}{3\sigma_0} = E_m^0(r_i), \quad (68)$$

соответствующее внутреннему полю однородного проводящего шара во внешнем однородном электрическом поле [6]. Точно также для напряженности магнитного поля намагничивающегося стержня с площадью поперечного сечения S имеем при намагничивании вдоль длинной оси l

$$H_1(r_i) \left\{ 1 + [\mu_v - 1] \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{S}{l^2} \right\} = H_1^0(r_i), \text{ т.е. } H_1 \approx H_1^0, \quad (69)$$

при намагничивании поперек длинной оси

$$H_m(r_i) \left\{ 1 + [\mu_v - 1] \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} 1 \right\} = H_m^0(r_i), \text{ т.е. } H_m^0 \approx H_m \left\{ \frac{\mu_v + 1}{2} \right\}, \quad (70)$$

что соответствует теоретическим значениям коэффициента размагничивания 0 или 1/2 для кругового цилиндра [23].

Поскольку согласно (68) эквивалентность внутреннего поля куба полю шара следует аналитически, естественно ожидать численного совпадения внешнего поля куба с полем шара при разбиении ребра куба на несколько частей. Это выполняется при расчетах на удалении от куба с достаточной точностью (0.5%). Для сохранения этой точности необходимо увеличивать число разбиений при приближении точки наблюдений к объему неоднородности. При этом, как показывает опыт моделирования, следует руководствоваться двумя правилами. Первое обязательное правило состоит в том, что диагональ элементарного объема не должна превышать расстояния от точки наблюдения до его центра. В противном случае будет проявляться мозаичность поля, вызванная тем, что внешнее поле каждого элементарного объема, эквивалентное полю диполя, проявится индивидуально. Эта мозаичность указывает на снижение точности расчетов ниже допустимого уровня. Второе правило носит рекомендательный характер. Лучше делить каждое из ребер параллелепипеда одинаково, чтобы получаемые элементарные объемы были подобны исходному. Тогда стабилизация результата происходит при меньшем числе разбиений. В заключение приведем результаты расчета аномального поля электропроводного куба ($\sigma/\sigma_1=10$) помещенного в однородное поле E_{0x} в начало координат на расстоянии до его центра, равном длине ребра l , в зависимости от числа разбиений n и отношения r/d :

$n(3n^2)$	1(3)	2(24)	3(81)	шар	4(192)	5(375)	6(648)
$\frac{-E_{ax}(0,0,l)}{E_{0x}}$	0.152	0.162	0.175	0.179	0.181	0.184	0.186
r/d	0.58	0.91	1.15	—	1.47	1.73	2.04

Здесь d – диагональ элементарного объема, r – расстояние от точки вычисления поля до ближайшего элементарного объема. В этот же ряд помещен и шар эквивалентного объема. Однако на таком близком расстоянии до центра внешние поля куба и шара уже не равны. Поле шара может служить только ориентиром при исследовании сходимости. В данном примере стабилизация результата наступает при $n=4$ и $r/d=1,47$. Дальнейшее увеличение числа разбиений приводит к утроению размерности СЛАУ, давая изменение оценки менее, чем на 3%.

3.3. Краткое описание пакетов программ

Для проведения математического моделирования по рассмотренным задачам были созданы специализированные программы, реализующие решение интегрального уравнения (или сопряженных уравнений) по наилучшему из выбранных алгоритмов. Для ввода данных и визуального контроля геометрии 3D объектов, положения источника, профилей и точек наблюдений, а также графического представления получаемых результатов расчетов созданы вспомогательные программы, объединенные вместе с основной программой в единый пакет.

Основными из разработанных пакетов являются:

- CON_V – потенциал и напряженность электромагнитного поля точечных источников тока и 3D объектов;
- WP – характеристики вызванной поляризации 3D объектов, поляризуемых токами точечных источников;
- MAGNIT – составляющие напряженностей и модуль магнитного поля Земли и намагничивающихся 3D объектов;
- TERMO – температура, тепловой поток и градиенты температуры теплового потока Земли и 3D объектов;
- T&P – температура, тепловой поток и градиенты температуры теплового потока Земли в присутствии плоского течения несжимаемого флюида и 3D объектов, неоднородных по тепловым и фильтрационным свойствам;
- DAWL – давление, скорости фильтрации и градиенты давления при фильтрации несжимаемого флюида в присутствии точечного источника флюида либо плоского потока и 3D объектов;
- DAWL_N – потенциал и напряженности электрического и магнитного поля токов течения несжимаемого флюида в присутствии точечного источника либо плоского потока и 3D объектов;
- DAWL_S – то же, для сжимаемого флюида.

На примере пакета CON_V, реализующего решение электромагнитной 3D задачи (11), покажем содержание, назначение и порядок работы пакета программ.

CON_V представляет собой пакет программ, предназначенный для расчета потенциала и составляющих напряженностей электрического и магнитного поля, создаваемых точечными источниками тока и совокупностью локальных трехмерных неоднородных по электропроводности объектов, находящихся в однородном проводящем полупространстве.

Состав пакета:

- CON_V.bat – командный batch-файл для запуска пакета программ;

- DATA.EXE – программа ввода данных и визуализации геометрии модели;
- CON_V.EXE – основная программа расчета электромагнитного поля;
- OBR.EXE – программа обработки результатов расчетов;
- GRAF.EXE – программа графического представления результатов.

Программа DATA.EXE предназначена для ввода данных и визуализации геометрии модели. Входными данными являются координаты источника и сила тока; данные о регулярной сети наблюдений; а именно координаты начальной точки, шаг по профилю, расстояние между профилями, количество пикетов и профилей, свойства среды, данные о локальных 3D объектах, в частности, число прямоугольных параллелепипедов, последовательно для каждого из них данные о координатах центра, размеры по осям, число элементов по осям и свойства (электропроводность) каждого элемента. В результате работы создается файл входных данных и выводится на монитор план и разрез введенной модели. По требованию оператора ЭВМ вводимые данные могут быть изменены. Графическое представление введенной модели печатается на принтере.

Программа CON_V.EXE по входным данным осуществляет решение системы интегральных уравнений, расчет электромагнитного поля в точках наблюдений и создает протокол расчетов и файл временного хранения рассчитанных результатов.

Программа OBR.EXE предназначена для обработки результатов расчетов электромагнитного поля, содержащихся в файле временного хранения, и для создания файлов, необходимых для графического представления натуральных значений суммарного и аномального электрического потенциала, составляющих напряженностей электрического и магнитного поля, а также их приведенных, нормированных и трансформированных значений.

Программа GRAF.EXE предназначена для графического представления и печати полученных данных.

В пакете программ DAWL_S, в отличие от описанного выше, основная программа расчетов состоит из трех отдельных, рассчитывающих значения внутреннего поля градиентов давления на спектре из 40 частот, синус-преобразования Фурье спектра каждой составляющей градиента для изучаемого момента времени, со сплайн – интерполяцией промежуточных значений, а также программы расчета электрического потенциала и составляющих напряженностей электромагнитного поля в точках наблюдений.

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

4.1. Расчеты электрического и магнитного поля источников постоянного тока

Способ расчета напряженности электрического поля, электрического потенциала и магнитной индукции электрического тока, основанный на объемном векторном интегральном уравнении (11) и формулах (12), (14), может быть использован для исследования разрешающей способности и других методических вопросов электроразведки на постоянном токе включая методы сопротивления (ВЭЗ, электропрофилирование, профилирование с измерением магнитного поля, так называемое MMR) и метод заряда с измерением электрического и магнитного поля. Магнитные измерения, в которых используются индукционные датчики, фактически осуществляют не на постоянном, а на переменном токе низкой частоты. Для них в первом приближении может быть рассчитана синфазная возбуждающему току часть магнитного поля или его модуль в фазовой плоскости, которые мало отличаются от магнитного поля постоянного тока, если $\omega\mu_0\sigma l^2 \leq 0,1$. Здесь ω – круговая частота, l – характерный геометрический размер, например разнос или полуширина исследуемой области. Примеры использования предлагаемого способа приведены в работах [25,26] для обоснования компенсационных технологий и исследования круга задач, решаемых методом мелкомасштабного заряда.

В первом примере рассмотрен метод заряда при изучении рудной зоны, состоящей из двух кулисно-ярусно расположенных проводников (рис.1). Такое залегание рудных тел характерно для некоторых рудных полей медноколчеданных месторождений Урала. Третье промежуточное тело моделирует зону метасоматически измененных пород, через которую осуществляется электрическая связь между двумя рудными телами. При расчетах удельная электропроводность зоны будет изменяться от электропроводности окружающей среды до электропроводности рудных тел.

На рис.2 представлены планы изолиний электрического потенциала на дневной поверхности. В случае рис.2, А, удельная электропроводность зоны метасоматитов приравнена к электропроводности нижнего полупространства, что означает отсутствие какой-либо электрической связи между телами. Эпицентр потенциала расположен над центром заряженного тела. Второе рудное тело проявляется как незаряженный проводник в виде области разрежения изолиний потенциала.

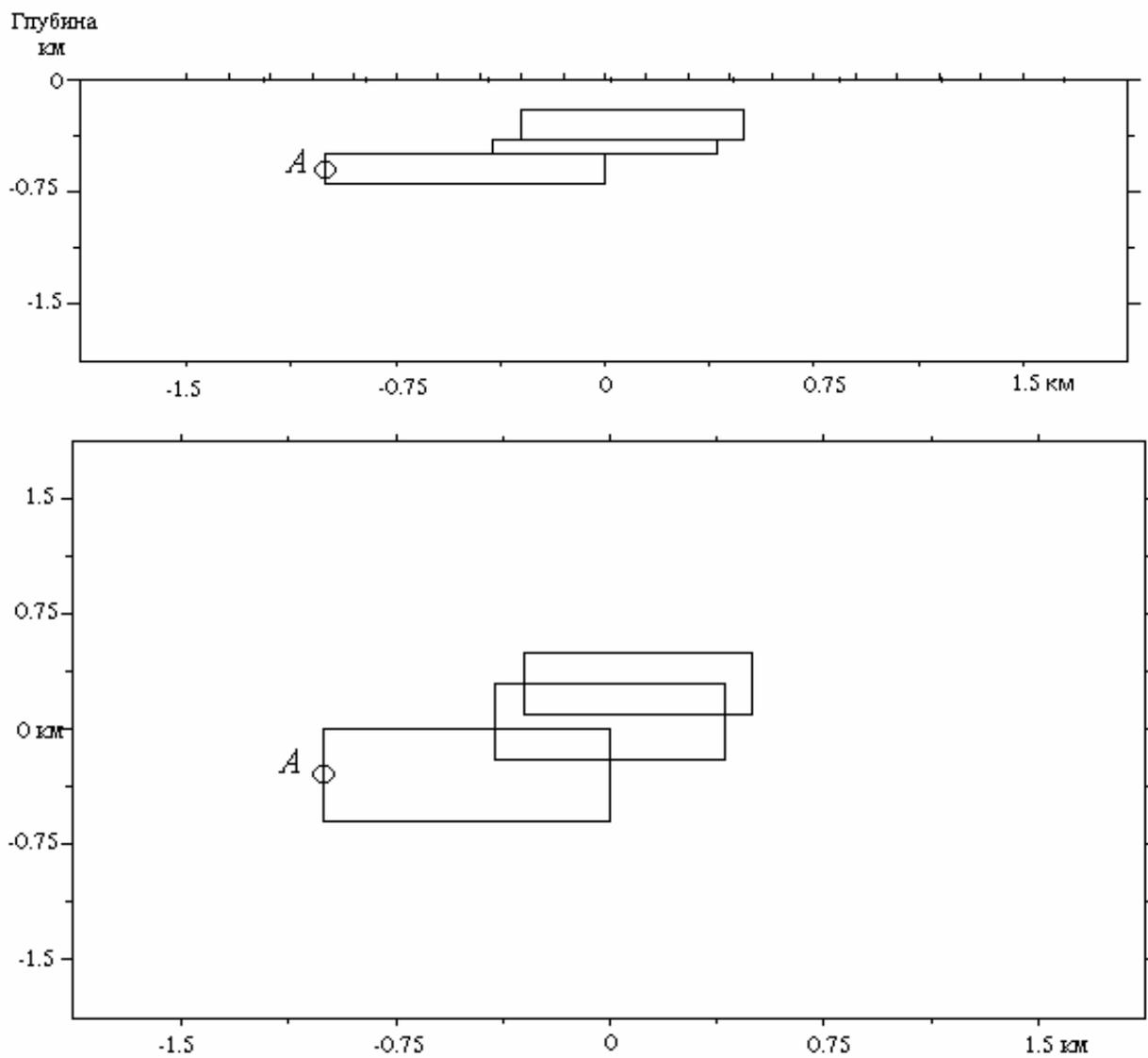


Рисунок 1. Разрез (вверху) и план (внизу) модели рудной зоны, состоящей из двух рудных тел и соединяющей их зоны метасоматитов. Показано положение питающего заземления

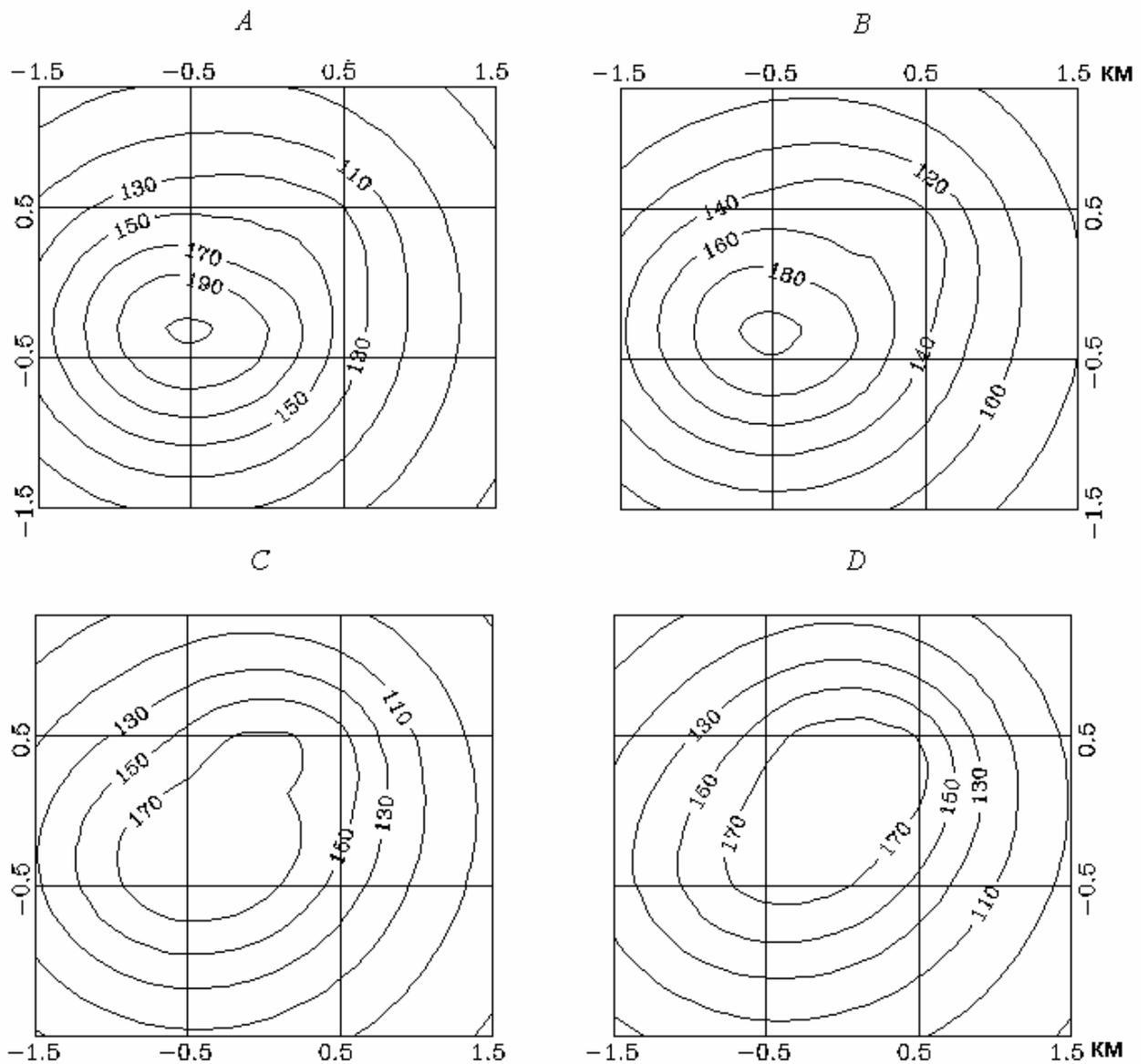


Рисунок 2. План изолиний электрического потенциала (мВ/А) для электропроводности, $\text{Om}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$: вмещающей среды – 0,001 (А, В, С, D); для рудных тел – 0,1 (А, В, С) и 0,5 (D); для зоны метасоматитов – 0,001 (А); 0,01 (В); 0,1 (С) и 0,5 (D)

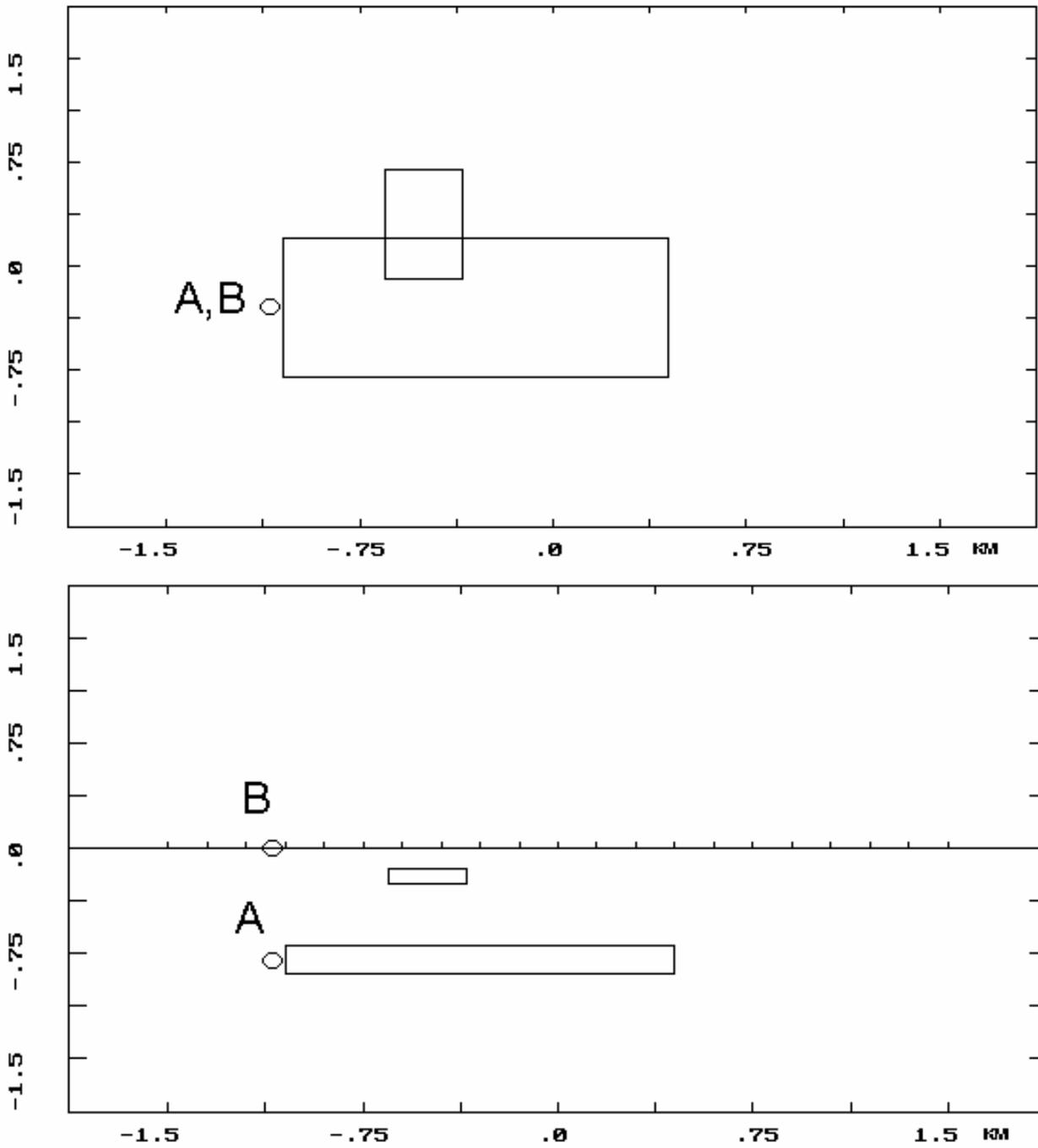


Рисунок 3. План (вверху) и фронтальная проекция (внизу) системы двух проводящих тел и питающей установки АВ в виде вертикального кабеля

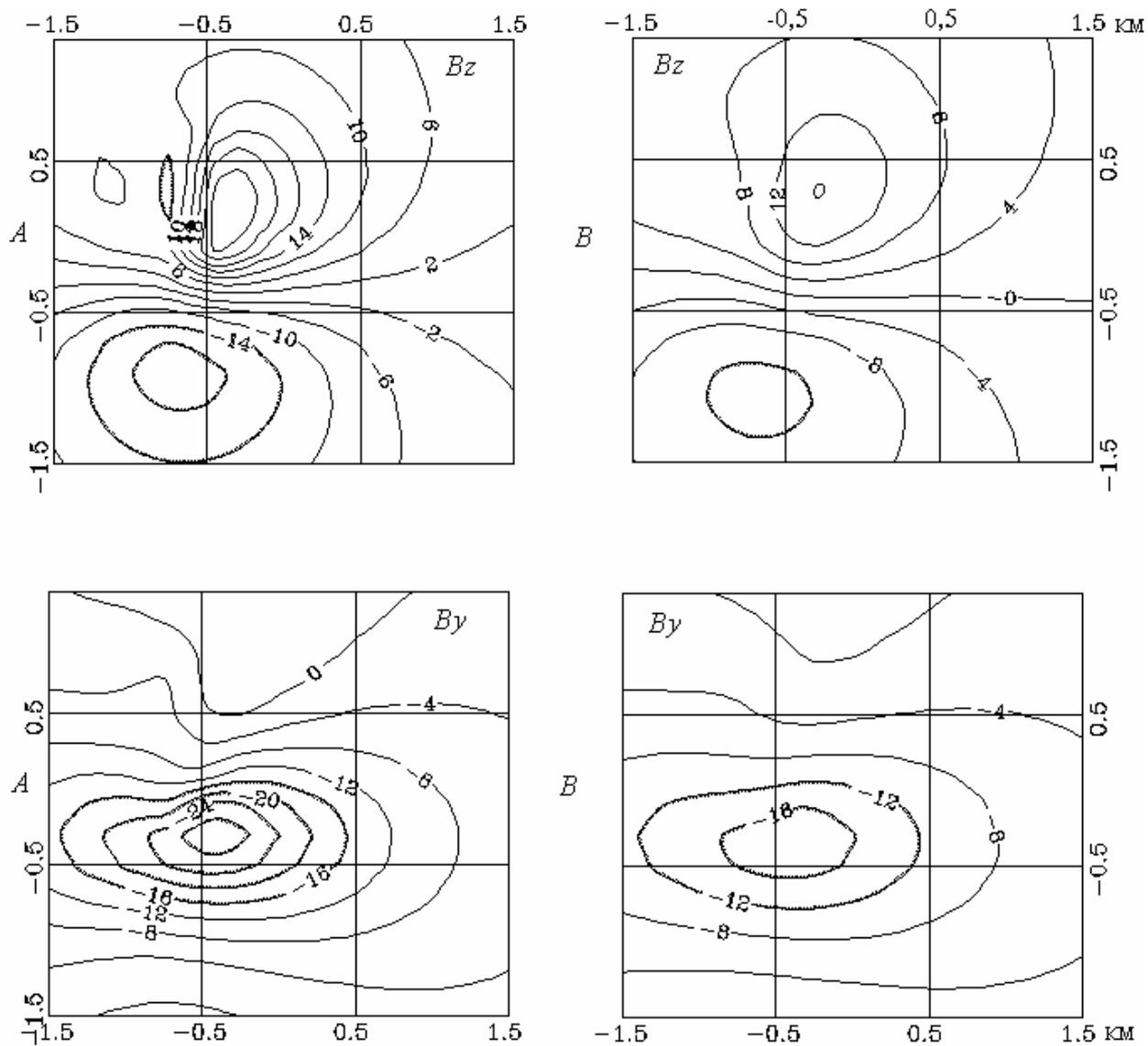


Рисунок 4. Планы изолиний составляющих магнитной индукции B_z и B_y (пТл/А) для случая, изображенного на рис.1; А – измерения выполнены на дневной поверхности, В – в воздухе на высоте 200 м

На рис.2, *B*, электропроводность метасоматитов является промежуточной между вмещающей средой и рудными телами. Однако существующей электрической связи недостаточно для того, чтобы систему тел можно было считать единым эквипотенциальным проводником. Поэтому второе рудное тело проявляется как незаряженное, но аномалия над ним усиливается. В случае рис.2, *C*, электропроводность метасоматитов приравнена к электропроводности рудных тел. Форма изолиний потенциала приближается к той, которая характерна для эквипотенциального объекта, однако эпицентр потенциала все еще тяготеет к центру нижнего тела, а не к центру системы тел. Это объясняется недостаточной контрастностью удельных электропроводностей системы тел и вмещающей среды. Значение контрастности 100, по видимому, недостаточно для столь вытянутого проводника, чтобы считать систему тел эквипотенциальной. И только при контрастности 500 (рис.2, *D*) эпицентр потенциала занимает привычное положение над наиболее приближенной к поверхности части системы тел.

Следующий пример касается магнитного поля токов, измеряемых в методе заряда. Для возбуждения применяется двухэлектродная питающая установка вертикального кабеля, не создающая на поверхности земли и в воздухе первичного магнитного поля [7]. На рис.3 показаны план и разрез двух проводящих тел, удельная электропроводность которых на два порядка выше, чем у вмещающей среды. Там же показано положение питающих электродов *A* и *B*. Малое тело, приближенное к поверхности, создает аномалию – помеху для изучения глубокозалегающего заряженного проводника. На рис.4 представлены планы изолиний аномальных составляющих магнитной индукции B_z и B_y (пикатесла на ампер) или, что то же самое, аномальной напряженности магнитного поля H_z и H_y (миллигамм на ампер) на двух высотах, а именно, на дневной поверхности (*A*) и на высоте 200 м (*B*). Наблюдения в воздухе можно выполнить, разместив измерительную аппаратуру на вертолете [27]. Поскольку относительное увеличение расстояния до приповерхностной неоднородности больше, чем до глубинной, аномалия от нее убывает сильнее (ср. фрагменты *A* и *B* на рис.4). Таким образом, при переносе наблюдений на борт вертолета помимо выигрыша в производительности измерений достигается уменьшение влияния приповерхностных проводников нерудной природы.

В последнем примере рассмотрена неоднородная поляризующая модель с размерами 300×600×400 м и глубиной до верхней кромки 100 м. Центр модели совмещен с центром установки срединного градиента (СГ-ВП), разнос питающих электродов $AB=2000$ м. Каждое ребро модели разделено на 3 части. Вмещающая среда обладает пониженной электропроводностью ($\sigma=0,001 \text{ Ом}^{-1}\cdot\text{м}^{-1}$) и не поляризуется

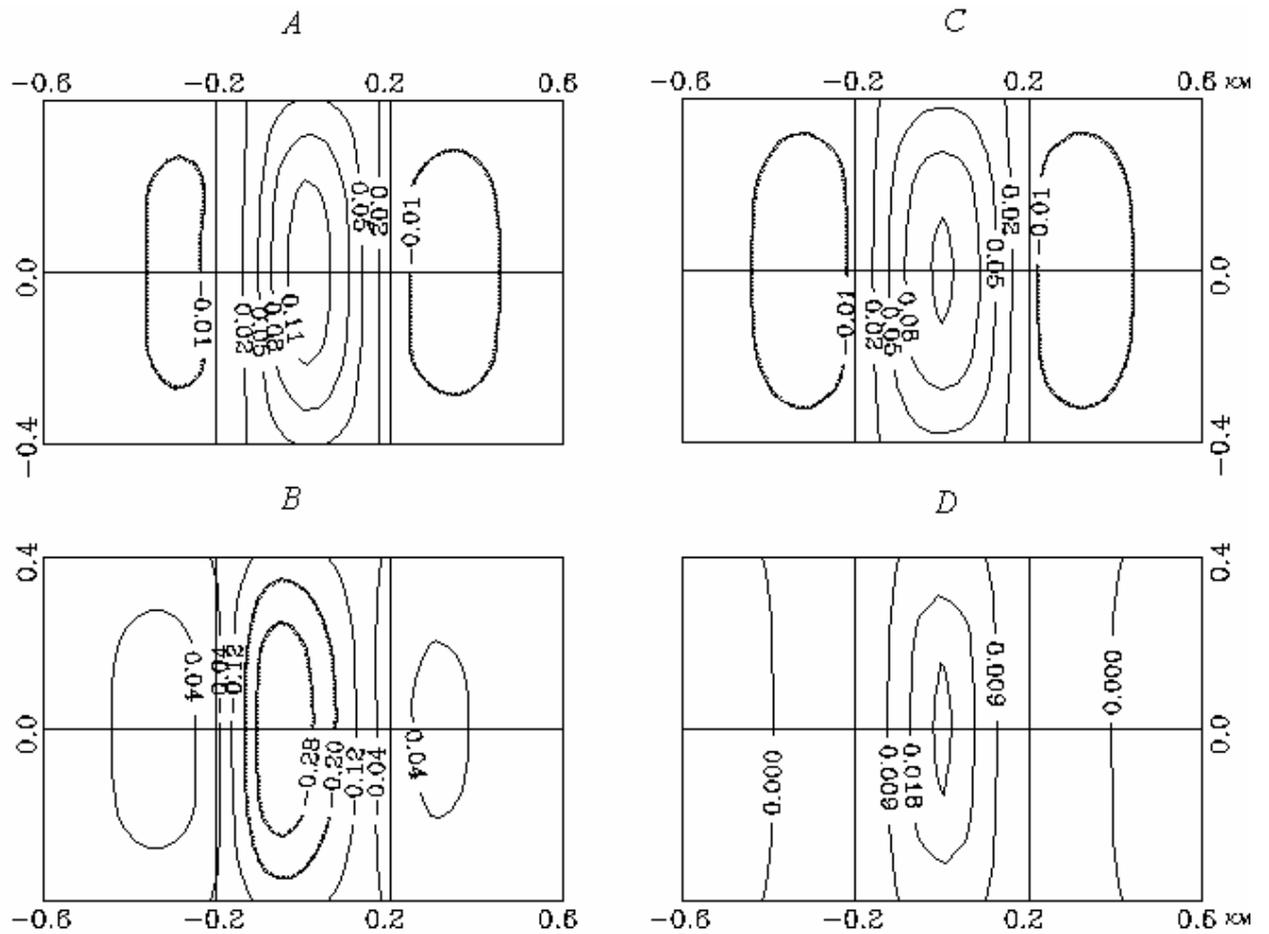


Рисунок 5. Планы изолиний кажущейся поляризуемости (A, C, D) и относительной аномалии сопротивления (B) над прямоугольным неоднородным параллелепипедом (300×600×400 м) с координатами центра (0,0,-300). Установка срединного градиента СГ-ВП. Фрагменты A и B – для случая, когда левая вертикальная треть объема проводящая и неполяризуемая, C – нижняя горизонтальная треть и D – верхняя горизонтальная треть проводящие и неполяризуемые

($\eta=0$), 1/3 объема модели занимает электропроводная руда ($\sigma=0,02 \text{ Ом}^{-1}\cdot\text{м}^{-1}$). Ее также будем считать не обладающей объемной вызванной поляризацией, т.е. неполяризуемой. Остальные 2/3 объема заняты метасоматически измененными породами, содержащими рассеянную вкрапленность рудного минерала. В соответствии с данными петрофизики будем полагать, что это высоко поляризующиеся образования ($\eta=0,3$), обладающие несколько повышенной электропроводностью ($\sigma=0,002 \text{ Ом}^{-1}\cdot\text{м}^{-1}$) по сравнению с вмещающей средой. Рассмотрим три случая, когда руда залегает вертикально, занимая левую треть, и когда она залегает горизонтально, занимая либо верхнюю, либо нижнюю треть объема. Первый случай типичен для колчеданных месторождений Среднего Урала, второй – для некоторых колчеданных месторождений Южного Урала, а третий – для медноникелевых руд печенгского типа (Печенга, Норильск, Талнах), когда массивные руды располагаются в донной части интрузии.

Для расчетов используем интегральное уравнение (20). Обозначим поле, полученное в результате решения уравнения (20) как E , запишем решение уравнения (20) еще раз, положив всюду $\eta=0$. Это решение обозначим как $E(0)$, а первичное поле питающих электродов как E_0 . Тогда для кажущихся поляризуемости η_k и электрического сопротивления ρ_k имеем по определению

$$\eta_k = \frac{E - E(0)}{E}, \quad \rho_k = \frac{E}{E_0}.$$

Здесь $\rho_1=1/\sigma_1$ – удельное электрическое сопротивление вмещающей среды. Введем также относительную аномалию сопротивления $A=\rho_k/\rho_1-1$. На рис.5, A , C , D представлены планы изолиний η_k и относительной аномалии сопротивления A (рис.5, B). Фрагменты A и B рисунка соответствуют вертикальному положению рудного пласта. Планы изолиний асимметричны, аномалия поляризуемости составляет $\eta_k \approx 12\%$, аномалия сопротивления около 30% по абсолютной величине. На рис.5, C , руда залегает горизонтально и занимает нижнюю часть объема. Аномалия η_k сохраняет свою величину, аномалия сопротивления уменьшается (на рис.5 не показана). На рис.5, D , руда занимает верхнюю треть объема, что приводит к экранированию аномалии поляризуемости, которая уменьшается примерно в 6 раз. Аномалия сопротивления в этом случае наибольшая. Такое геологическое строение рудной зоны не вполне благоприятно для возбуждения и регистрации эффекта вызванной поляризации.

4.2. Намагничивание неоднородного магнетика земным магнитным полем и его вариацией

Вычисление магнитного поля магнетиков основано на интегральном уравнении (15). Будем считать, что земное магнитное поле \mathbf{H}_0 и его малая вариация во времени $\delta\mathbf{H}_0$ однородны в объеме намагниченного объекта, что допустимо, если объем невелик по размерам. Для регионального объекта от этого предположения следует отказаться, что возможно, поскольку уравнение (15) справедливо как для однородного, так и для неоднородного первичных полей. Итак $\mathbf{H}_0 = H_{0x}\mathbf{i} + H_{0y}\mathbf{j} + H_{0z}\mathbf{k}$, где H_{0x} , H_{0y} , H_{0z} – константы для каждой геомагнитной широты и долготы. Вариацию также будем считать однородной в пределах модели $\delta\mathbf{H}_0 = \delta H_{0x}\mathbf{i} + \delta H_{0y}\mathbf{j} + \delta H_{0z}\mathbf{k}$.

Поскольку намагниченность прямо пропорциональна напряженности, то аномальное магнитное поле магнетика или системы магнетиков, вызываемое земным полем (\mathbf{H}_a) или его вариацией ($\delta\mathbf{H}_a$), суть независимые величины:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_a, \quad \delta\mathbf{H} = \delta\mathbf{H}_0 + \delta\mathbf{H}_a, \quad \mathbf{H} + \delta\mathbf{H} = (\mathbf{H}_0 + \delta\mathbf{H}_0) + (\mathbf{H}_a + \delta\mathbf{H}_a).$$

Каждое из полей можно рассчитать независимо от другого, как если бы второго поля не существовало. Поэтому

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad} \int_V [(\mu - 1)\mathbf{H} + \mathbf{I}_{oc}] \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV, \\ \delta\mathbf{H} = \delta\mathbf{H}_0 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{grad} \int_V [(\mu - 1)\delta\mathbf{H} + \delta\mathbf{I}_{oc}] \frac{\mathbf{r}}{r^3} dV.$$

Под $\delta\mathbf{I}_{oc}$ следует понимать вязкое изменение остаточной намагниченности, если $\delta\mathbf{H}_0$ накопилось за длительный период времени в результате вековой вариации. Для короткопериодных пульсаций, общей геомагнитной бури, полярной суббури и солнечно-суточной вариации $\delta\mathbf{I}_{oc} = 0$. Влияние вязкой остаточной намагниченности рассмотрено, например, в работе [28]. Далее мы будем рассматривать примеры, когда $\delta\mathbf{I}_{oc} = 0$.

Поскольку измерения выполняют абсолютными магнитометрами, то аномалия полной магнитной силы равна

$$T_a = T - T_0 = \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2} - \sqrt{H_{ox}^2 + H_{oy}^2 + H_{oz}^2} \approx \\ \approx \frac{H_{ox}}{T_0} H_{ax} + \frac{H_{oy}}{T_0} H_{ay} + \frac{H_{oz}}{T_0} H_{az},$$

где $\mathbf{H}_a = \mathbf{H} - \mathbf{H}_0$. Приближенное выражение следует использовать, когда аномалия мала по сравнению с земным полем, т.е. при $|H_a^{\max}| / |H_0| < 0,05$.

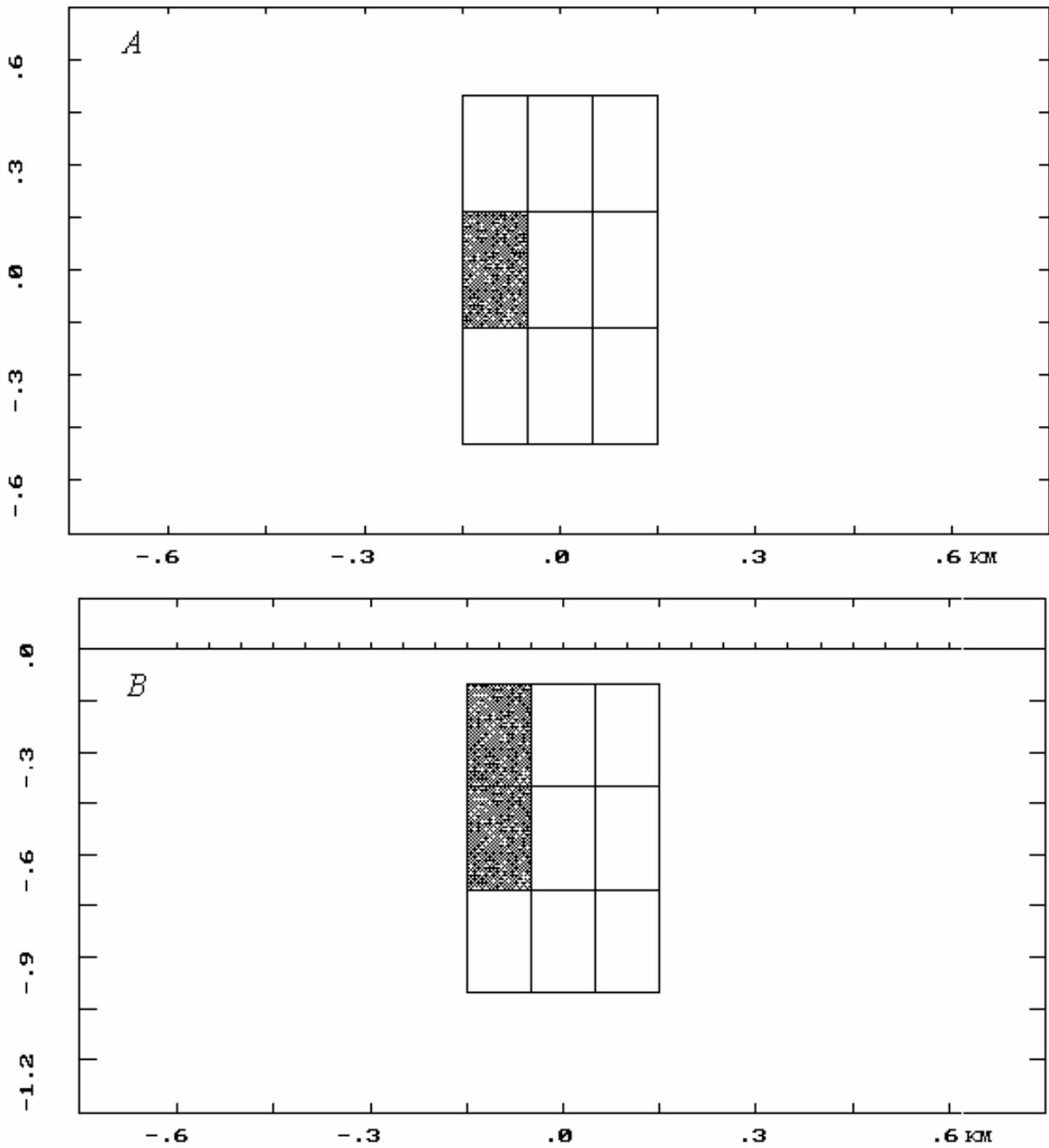


Рисунок 6. План (А) и разрез (В) модели неоднородного магнетита. Крапом помечены элементы объема, обладающие повышенной намагниченностью

Пусть в пунктах 1 и 2 измерена величина T в моменты t_1 и t_2 , причем при t_1 первичное поле было равно \mathbf{H}_0 , а за время t_1-t_2 произошло его приращение на малую величину $\delta\mathbf{H}_0$. Условимся назвать величиной δT_a разность $\delta T_a = T_2(t_2) - T_1(t_2) - [T_2(t_2) - T_1(t_2)]$. Эта разность может быть экспериментально определена при синхронных наблюдениях двумя магнитометрами. Соответствующий вектор $\delta\mathbf{T}_a$, который, к сожалению, нельзя экспериментально определить протонными магнитометрами, равен $\delta\mathbf{T}_a = \delta\mathbf{H}_2 - \delta\mathbf{H}_1$ и обращается в нуль, если эффект подмагничивания отсутствует в каждом из пунктов. Если один из пунктов находится в нормальном поле, то в другом пункте

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{T}_a &= \delta\mathbf{H}_a, \\ \delta T_a &= T(t_2) - T_0(t_2) - [T(t_1) - T_0(t_1)] = T(t_2) - T(t_1) - \delta H_0, \\ \delta H_0 &= \frac{H_{ox}}{T_0} \delta H_{0x} + \frac{H_{oy}}{T_0} \delta H_{0y} + \frac{H_{oz}}{T_0} \delta H_{0z}. \end{aligned}$$

Эти выражения удобны для теоретических расчетов и построения плана изолиний δT_a . Найдя на плане изолиний разность значений между двумя пунктами в аномальной области, получаем возможность сравнить экспериментальные и модельные данные в целях подбора модели. Значения δT_a в отличие от $\delta\mathbf{T}_a$ в общем случае не равны нулю при отсутствии индуктивной намагниченности, когда аномалия вызвана остаточной намагниченностью. Однако в большинстве практических случаев, когда для вычисления основной аномалии пригодна приближенная формула, такая же приближенная формула справедлива для расчета эффекта подмагничивания

$$\delta T_a \approx \frac{H_{ox}}{T_0} \delta H_{ax} + \frac{H_{oy}}{T_0} \delta H_{ay} + \frac{H_{oz}}{T_0} \delta H_{az}.$$

Таким образом, для аномалий интенсивностью менее 25 мЭ, значения δT_a появляются только при наличии индуктивной намагниченности у источника основной аномалии T_a .

Рассмотрим численные примеры для неоднородного магнетика, изображенного на рис.6, поместив его в точке с координатами 55° с.ш. и 60° в.д. и вытянув вдоль географического меридиана. Рассчитаем два случая. В первом примере магнетик неоднороден по магнитной проницаемости. В 25 элементах $\mu=1,4$, а в оставшихся двух $\mu=6$, причем I_{oc} всюду отсутствует. Во втором случае магнетик однороден по магнитной проницаемости, поскольку во всех 27 элементах $\mu=1,4$, но неоднороден по остаточной намагниченности. В двух элементах, где в первом случае $\mu=6$, введена остаточная намагниченность с таким расчетом, чтобы аномалия T_a сохранила свою интенсивность (рис.7, сравнить A и B). Здесь же рассчитан также эффект подмагничивания δT_a

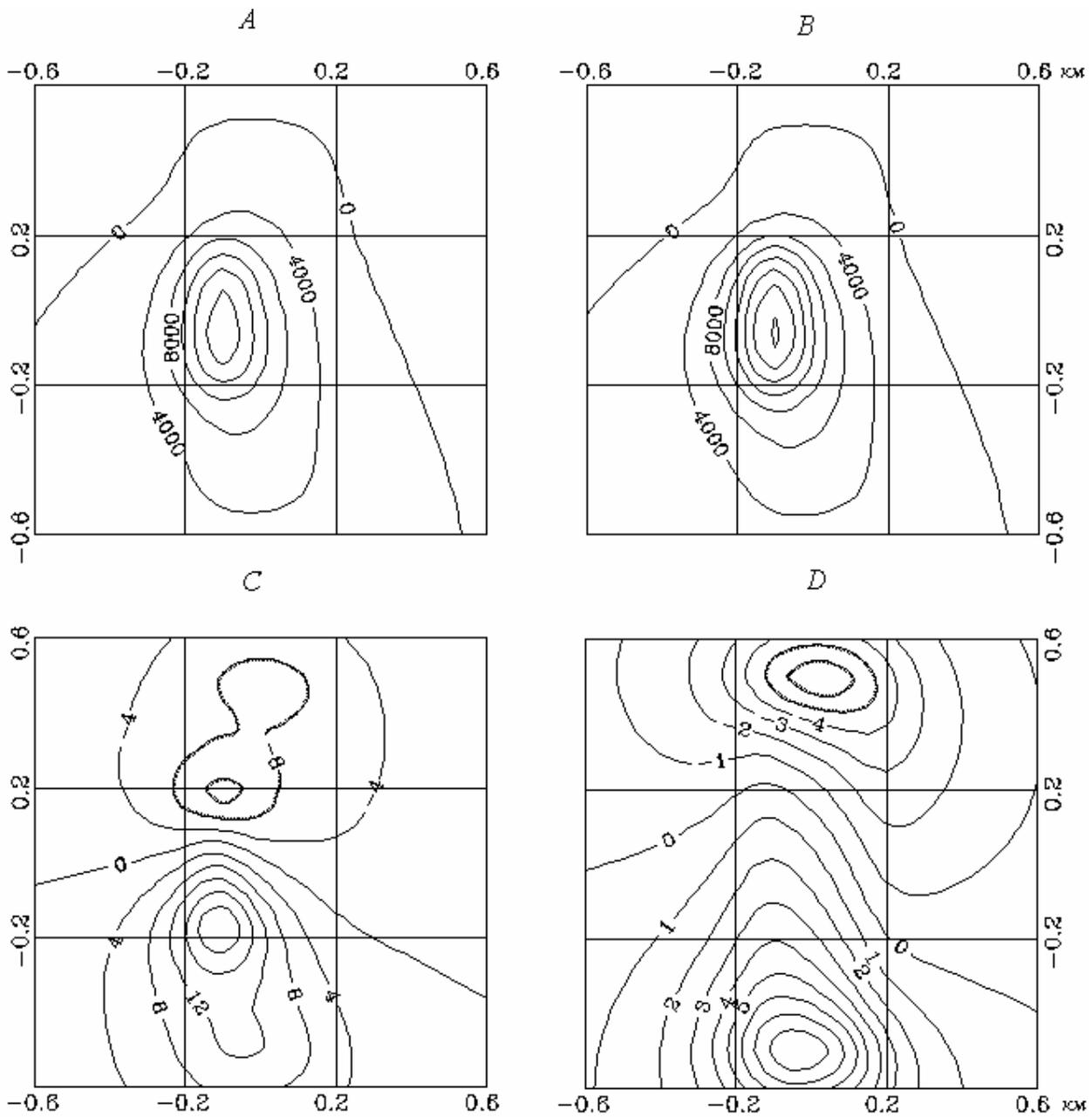


Рисунок 7. Изолинии T_a (A, B) и δT_a (C, D) в нТл для неоднородного магнетика в земном магнитном поле. A и C – случаи, когда $\mu=1,4$, за исключением двух элементов, помеченных крапом на рис.6, где $\mu=6$, причем $I_{oc}=0$ во всех 27 элементах. B и D – случаи, когда $\mu=1,4$ во всех 27 элементах, $I_{oc}=0$ во всех элементах за исключением двух, где $I_{oc}=13i+50j-170k$, A/м

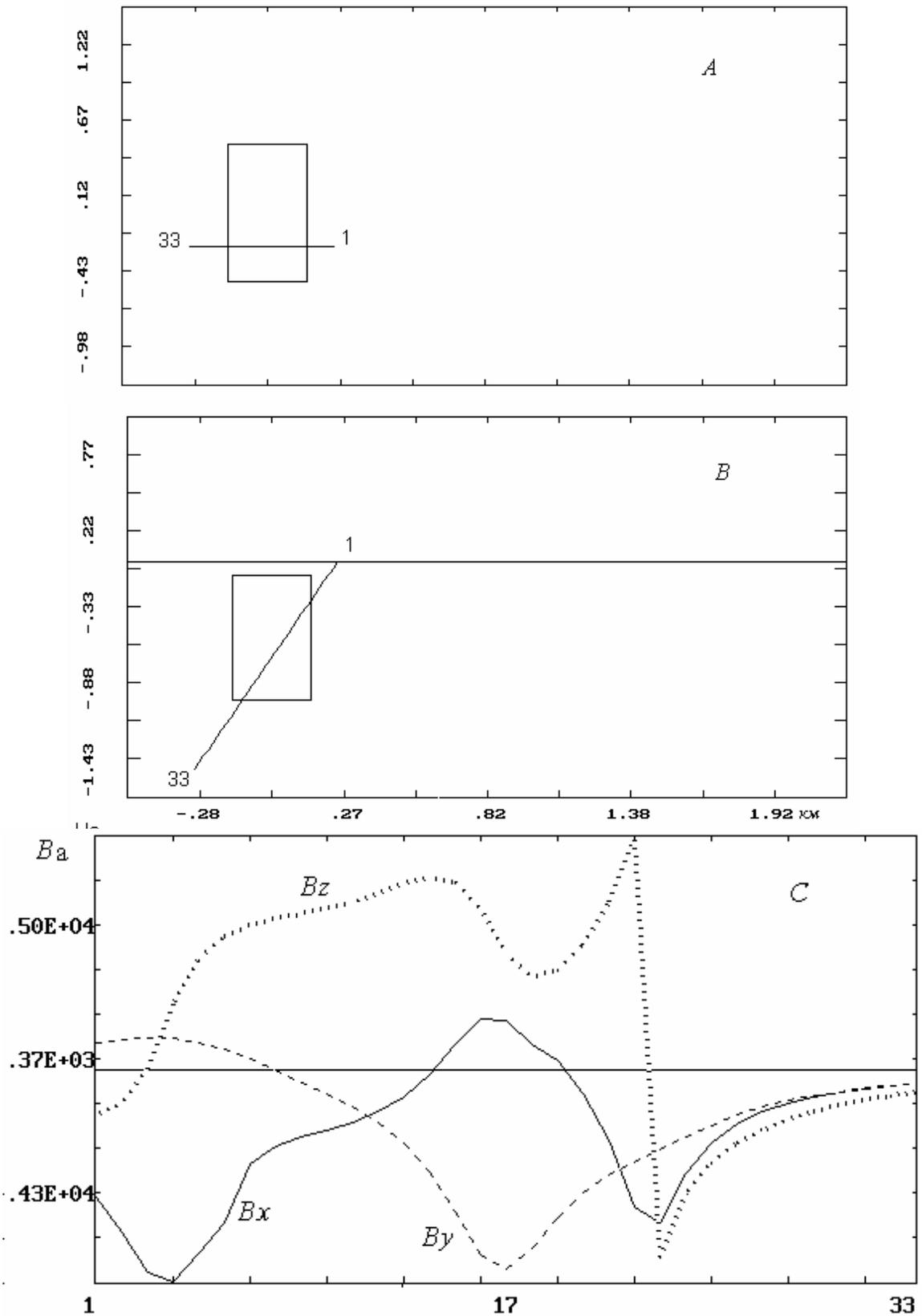


Рисунок 8. Графики аномальных значений B_{xa} , B_{ya} , B_{za} в нТл (C) по скважине (начиная с устья) для неоднородного магнетика, изображенного на рис.6. Положение скважины приведено в плане (A) и в разрезе (B)

небольшой субгоризонтальной вариацией $\delta\mathbf{H}_0=0,25\mathbf{i}+1,25\mathbf{j}-0,25\mathbf{k}$, мЭ. Заметим, что в отличие от магнитной системы координат, применена координатная система, когда ось OZ направлена вверх, ось OX – на восток, а ось OY – на север. В первом случае (рис.7, C) в результате подмагничивания возникают два разноименных полюса δT_a , отстоящих друг от друга на размер наиболее намагниченного элемента тела (~ 300 м). Кромки тела в целом отмечены дополнительной парой полюсов, отстоящих на размер тела по меридиану (~ 900 м), причем дополнительный максимум δT_a сливается с основным. Во втором случае (рис.7, D) проявляется все тело в целом, поскольку интенсивная аномалия в центре рис.7, B создана не индуктивной, а остаточной намагниченностью и не изменяется при изменении намагничивающего поля. Магнитная восприимчивость тела $\kappa=\mu-1=0,4$ и его наиболее намагниченной части $\kappa=0,5$ различаются в 12,5 раз, однако эффекты подмагничивания различаются менее чем в 4 раза. Это вызвано интенсивным размагничиванием объема с $\kappa=5$. Характеристики размагничивания тел в форме параллелепипеда, полученные с помощью уравнения (15), описаны в работе [29]. Для этого решали уравнение (15), вычисляли внешнее магнитное поле, а затем приравнивали под знаком интеграла намагничивающее поле к земному $\mathbf{H}=\mathbf{H}_0$ и снова вычисляли интеграл (15). При $\mu=10$ ошибка составила до 600%, т.е. магнитное поле тела с соотношением сторон $3\times 3\times 1$, намагниченного поля вдоль малого ребра, вычисленное без учета размагничивания в шесть раз превышает истинное поле. Даже при $\mu=1,03$ ошибка равна 2%.

На рис.8 представлены декартовы составляющие магнитного поля по скважине, пересекающей то же тело (см.рис.6), но тело ориентировано вдоль магнитного меридиана так, что намагничивающее земное поле равно $\mathbf{H}_0=13,8\mathbf{j}-41,38\mathbf{k}$ (А/м, ось OZ – вверх, ось OY – по магнитному меридиану). При вхождении профиля в тело ни на одной составляющей не отмечен скачок поля, поскольку на боковых гранях, параллельных вектору магнитного поля, не возникает магнитных полюсов. При выходе профиля из тела H_{xa} и H_{ya} остаются непрерывными, а H_{za} испытывает скачок в 30% от H_0 , что примерно соответствует максимальному скачку на шаре при $\mu=1,4$. Однако в отличие от шара внутреннее поле H_{za} не постоянно, а имеет экстремум вблизи кромки, в чем проявляется различие формы шара и параллелепипеда. Внутреннее поле H_{za} положительно, что приводит к экранированию отрицательного внешнего поля, т.е. к его уменьшению по абсолютной величине внутри магнетика. Блок сильно магнитных пород с $\mu=6$ проявляется в виде дополнительного экстремума H_{za} .

В работах [28] и [29] приведены другие примеры использования в методических целях расчетов по предложенному здесь алгоритму.

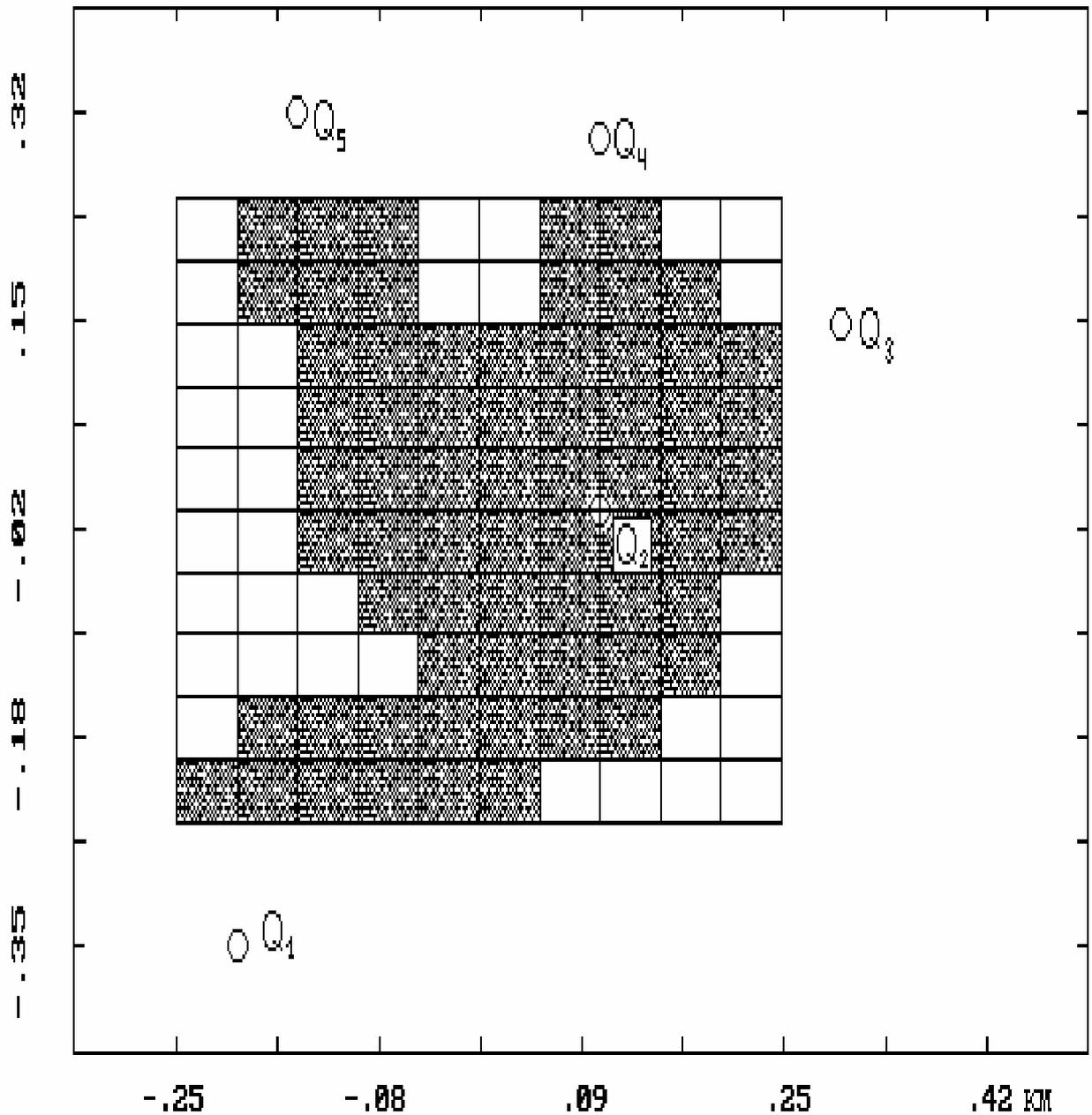


Рисунок 9. План неоднородного по проницаемости пласта с указанием положения нагнетательных и добывающей (Q_2) скважин. Крапом отмечены нефтеносные наиболее проницаемые элементы пласта

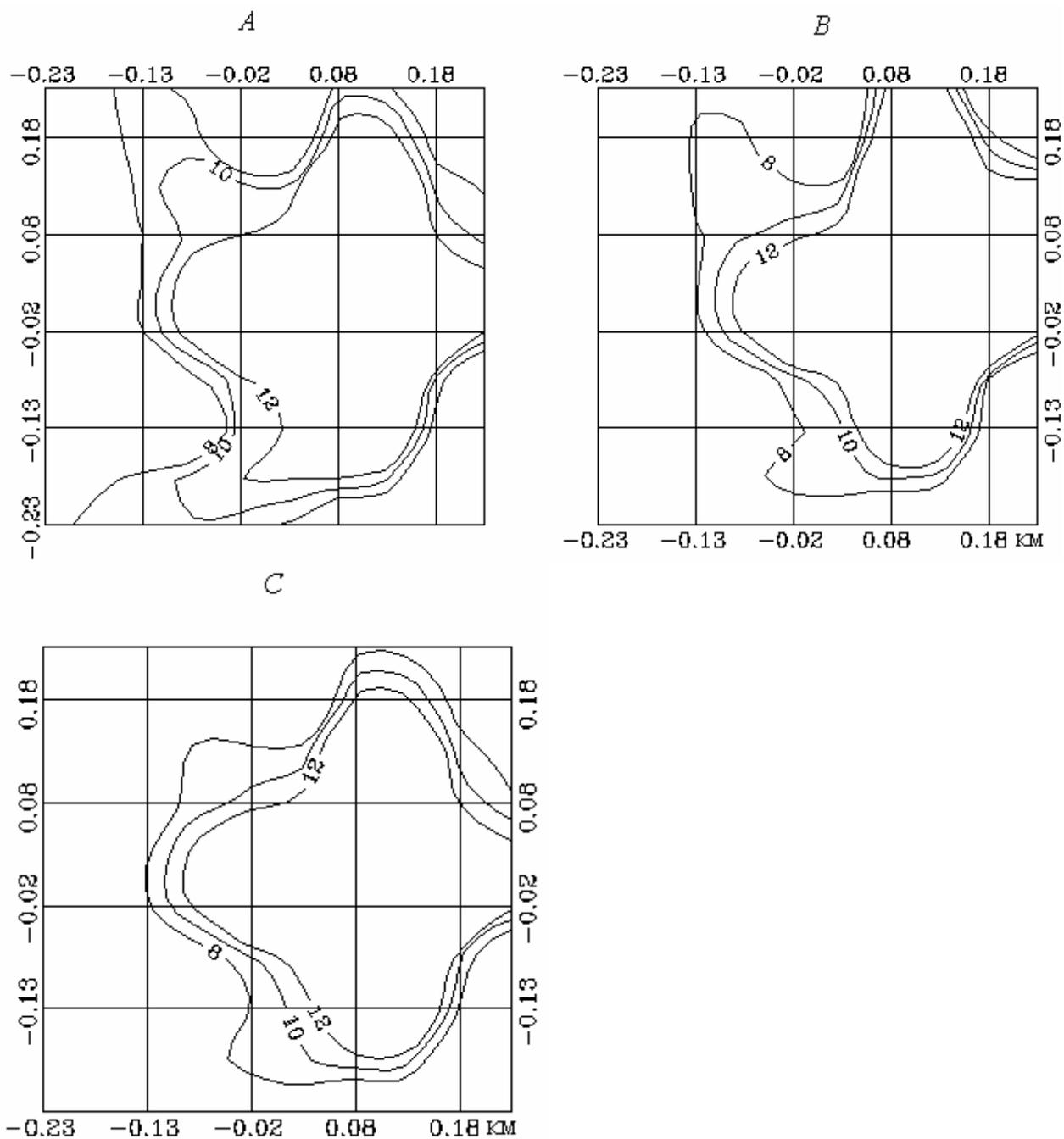


Рисунок 10. Планы изолиний модуля горизонтальной скорости течения Дарси (м/год) в неоднородном по проницаемости пласте. Дебиты нагнетательных скважин: *A* – неравные, *B* – равные, *C* – равные нулю

4.3. Моделирование фильтрации несжимаемого флюида

Для расчета градиента давления при течении Дарси используют интегральное уравнение (16). Многочисленные расчеты выполнены в разделах 4.4 и 4.5 со вспомогательной целью для того, чтобы потом подставить полученные значения $\text{grad}P$ в уравнение (22) для электрического поля течения Дарси в качестве источников этого поля. В указанных примерах $\text{grad}P$ – ненаблюдаемая величина и поэтому результаты его расчетов не иллюстрируются, а наблюдаемыми величинами являются электрическое и главным образом магнитное поле токов течения.

В этом разделе рассмотрим лишь один пример, связанный с контурным обводнением при добыче нефти, когда расчет скорости течения внутри пласта является главной целью. Поэтому вторая часть задачи, а именно расчет $\text{grad}P$ во внешней среде по той же формуле (16), опущена. Вычисления ограничены решением интегрального уравнения (16) для внутренних значений $\text{grad}P$ в элементарных объемах, на которые разделен пласт, и умножением на гидравлическую проницаемость каждого объема, чтобы определить скорость течения Дарси $v = -c/\mu \text{grad}P$. Особенностью задачи является наличие многих точечных источников и стоков флюида внутри пласта и у его кромок, при помощи которых моделируют нагнетательные и добывающие скважины. Тогда первичное поле градиента давления в нижнем полупространстве с гидравлической проницаемостью c_1 и водоупором вблизи дневной поверхности примет вид

$$\text{grad}P_0 = \sum_i \frac{\mu Q_i}{4\pi c_1} \left(\frac{\mathbf{R}_i}{R_i^3} + \frac{\mathbf{R}_{1i}}{R_{1i}^3} \right),$$

$$R_i^2 = (x-x_{0i})^2 + (y-y_{0i})^2 + (z-z_{0i})^2, \quad R_{1i}^2 = (x-x_{0i})^2 + (y-y_{0i})^2 + (z+z_{0i})^2.$$

В нагнетательных скважинах $Q > 0$, в добывающих $Q < 0$, при этом алгебраическая сумма частных дебитов равна нулю $\sum Q_i = 0$.

В качестве модели выбран неоднородный по проницаемости пласт $500 \times 500 \times 5$ м (рис.9), в среде с проницаемостью $c_1 = 10^{-13} \text{ м}^2$. Внутри пласта у проницаемости две градации 10^{-12} м^2 и 10^{-11} м^2 , граница между ними имеет сложную форму. Сделаем предположение, что контур нефтеносности близок к контуру наиболее проницаемой части. Расположение одной добывающей и четырех нагнетательных скважин также показано на рис.9. На рис.10 приведены планы трех изолиний модуля горизонтальной скорости течения Дарси внутри пласта $v_h = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, близких по конфигурации к контуру нефтеносности. По ним можно судить, по каким направлениям и с какой скоростью будет сокращаться

контур нефтеносности в начале эксплуатации нефтяного пласта. Дебит добывающей скважины всегда составляет $Q_2=3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$ ($\sim 250 \text{ м}^3/\text{сут}$). На рис.10, *A*, дебиты нагнетательных скважин имеют значения $Q_1=1,6 \cdot 10^{-3}$, $Q_3=0,2 \cdot 10^{-3}$, $Q_4=0,2 \cdot 10^{-3}$ и $Q_5=1,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$. Такое распределение дебитов позволяет извлечь нефть из наиболее удаленных частей контура нефтеносности. На рис.10, *B*, дебиты нагнетательных скважин приняты равными $Q_1=Q_3=Q_4=Q_5=0,75 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$. Такое распределение не является оптимальным. Вверху и слева скорость слишком велика. Может произойти прорыв воды к добывающей скважине, а из удаленных частей нефть не будет извлечена полностью. На рис.10, *C*, дебиты нагнетательных скважин равны нулю. Законтурное обводнение отсутствует, и ситуация с извлечением нефти из удаленных частей залежи осложнена еще сильнее.

Пример расчета градиента давления для плоского течения Дарси, параллельного дневной поверхности, приведен в [5]. Он использован для расчета естественного электрического поля при фильтрации на горном склоне.

4.4. Моделирование электрического и магнитного поля при течении несжимаемого флюида

Математическое моделирование выполнено для случая стационарного источника несжимаемого флюида в недеформируемом пористом однородном полупространстве, содержащем несколько локальных неоднородностей фильтрационных и электрических свойств. В этом разделе мы не рассматриваем физические процессы, происходящие в источнике и приводящие к выдавливанию флюида в окружающую среду, а источник считаем точечным. Однако масштабы рассматриваемых примеров и объемная производительность источников таковы, что они могут быть связаны с неупругими деформациями вследствие тектонической деятельности. Таким образом, электрическое и, в особенности, магнитное поле становится индикатором неупругих деформаций тектонического происхождения, а локальные неоднородности представляют собой индикационные зоны, располагающиеся либо вблизи очага деформаций (точечного источника), либо поодаль. Аномалии электрического и магнитного поля течения над индикационными зонами позволяют определить взаимное положение очага и зоны и тем самым обнаружить местонахождение очага.

Принципиальная схема решения задачи включает определение градиента давления, вычисление плотности конвективного тока, определение электрической напряженности, вызванной объемным конвективным током, вычисление магнитного поля полного тока. Считается, что фильтрация флюида удовлетворяет закону Дарси $\mathbf{v} = -c/\mu \text{grad}P$.

Плотность конвективного тока \mathbf{i}_c связана со скоростью фильтрации \mathbf{v} и градиентом давления P линейными соотношениями $\mathbf{i}_c = -\alpha \mathbf{v} = \sigma L \mathbf{grad}P$, $\alpha = \sigma L \mu / c$, здесь α – электрокинетический коэффициент, Кл/м³, L – коэффициент потенциала течения, В/Па, P – сверхгидростатическое давление, Па, σ – удельная электропроводность, Ом⁻¹·м⁻¹, c – проницаемость, м², μ – динамическая вязкость флюида, Па·с.

Значения градиента давления внутри неоднородности найдем из интегрального уравнения (16), приняв для первичного поля, развиваемого точечным источником давления с координатами (x_0, y_0, z_0) и объемной производительностью Q (м³/с), что

$$\mathbf{grad}P_0 = \frac{\mu Q}{4\pi c_1} \left(\frac{R}{R^3} \pm \frac{R_1}{R_1^3} \right)$$

Внутренние значения напряженности электрического поля течения Дарси определим из уравнения (22), подставив в него матрицу внутренних значений $\mathbf{grad}P$, найденную из уравнения (16). Затем в соответствии с формулой (9) найдем внешние значения потенциала течения, преобразовав ее к виду

$$U = U_0 + \frac{1}{4\pi} \int_V \left[\frac{\mathbf{W} \cdot \mathbf{r}}{r^3} \pm \frac{\mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{r}_1}{r_1^3} \right] dV, \quad (71)$$

$$U_0 = L_1 \frac{\mu Q}{4\pi c_1} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right),$$

$$\mathbf{W} = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} - 1 \right) (E_\xi \mathbf{i} + E_\eta \mathbf{j} + E_\zeta \mathbf{k}) + \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} L - L_1 \frac{c}{c_1} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial \xi} \mathbf{i} + \frac{\partial P}{\partial \eta} \mathbf{j} + \frac{\partial P}{\partial \zeta} \mathbf{k} \right),$$

$$\mathbf{W}_1 = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} - 1 \right) (E_\xi \mathbf{i} + E_\eta \mathbf{j} - E_\zeta \mathbf{k}) + \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} L - L_1 \frac{c}{c_1} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial \xi} \mathbf{i} + \frac{\partial P}{\partial \eta} \mathbf{j} - \frac{\partial P}{\partial \zeta} \mathbf{k} \right),$$

где $\frac{\partial P}{\partial \xi}$, $\frac{\partial P}{\partial \eta}$, $\frac{\partial P}{\partial \zeta}$ определены из уравнения (16), а E_ξ , E_η , E_ζ – из уравнения (22). Аномальное магнитное поле токов течения при $z \leq 0$ найдем из выражения (14), придав ему вид

$$\mathbf{H} = \frac{\sigma_1}{4\pi} \mathbf{rot} \int_V \left[\frac{\mathbf{W}}{r} - \mathbf{m} \frac{\mathbf{k}(W_\zeta \cdot r + \mathbf{W}_1 \cdot \mathbf{r}_1)}{r_1[r_1 - (z + \zeta)]} \right] dV \quad (72)$$

$$W_\zeta = \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} - 1 \right) E_\zeta + \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} L - L_1 \frac{c}{c_1} \right) \frac{\partial P}{\partial \zeta}$$

Рассмотрим течение слабоминерализованной воды при глубине источника и размерах неоднородностей несколько километров. Предположим, что локальные объекты более проницаемы и электропро-

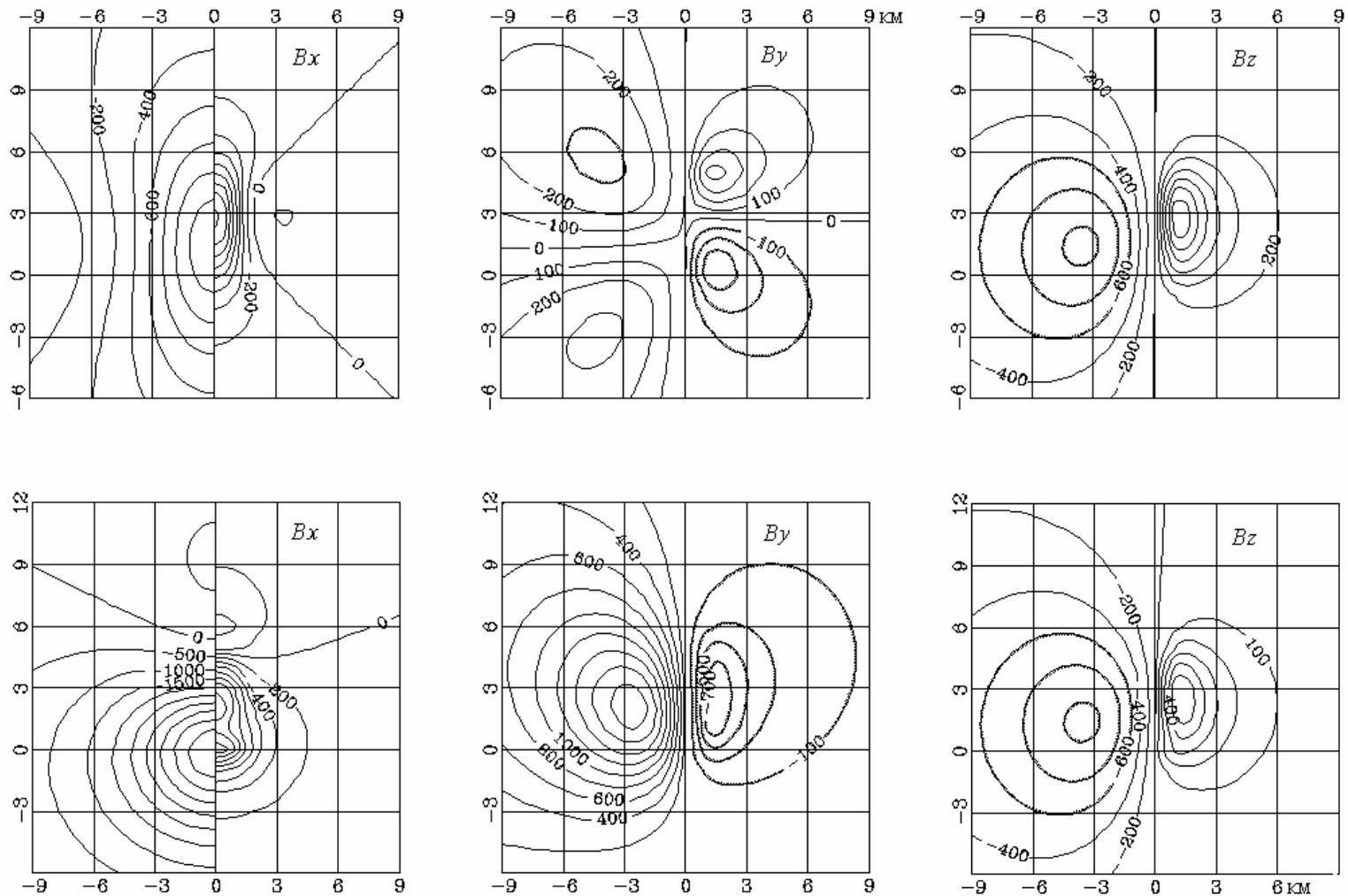


Рисунок 12. Планы изолиний B_x , B_y , B_z (нТл). Верхний ряд – для напорного режима фильтрации вблизи дневной поверхности, нижний – для безнапорного. Левая сторона фрагмента – для глубинной неоднородности, правая – для приповерхностной

водны, чем вмещающая среда. Примем $Q=1 \text{ м}^3/\text{с}$, $z_0=-5 \text{ км}$, для нижнего полупространства $c_1=10^{-14} \text{ м}^2$, $\sigma_1=10^{-2} \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$, $L_1=10^{-7} \text{ В/Па}$, для неоднородностей $c_1=10^{-13} \text{ м}^2$, $\sigma_1=3 \cdot 10^{-2} \text{ Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$, $L_1=3 \cdot 10^6 \text{ В/Па}$.

Рассмотрим две модели неоднородности. Первая – вертикальный пласт размерами $1 \times 3 \times 3 \text{ км}$ с центром в точке $(0; 1,5; -4 \text{ км})$. Источник касается пласта вблизи короткого нижнего ребра (см.рис.11). Вторая – горизонтальный пласт $2 \times 5 \times 1 \text{ км}$ с центром в точке $(0; 2,5; -1 \text{ км})$. Этот пласт моделирует индикационную зону, удаленную от источника давления (см. также [30, 31]). Вычисления выполнены для двух режимов фильтрации вблизи поверхности полупространства. Для напорного режима $v_z=0$, $P \neq 0$, $U \neq 0$ при $z=0$, для безнапорного режима $P=0$, $v_z=0$, $E_z \neq 0$ при $z=0$.

В случае напорного режима нормальное поле U_0 есть интенсивное поле монополя, поскольку среда характеризуется сравнительно большим значением потенциала течения L_1 (см.рис.11). Аномальное поле неоднородности эквивалентно полю диполя. Аномальный потенциал глубинной неоднородности преобладает над нормальным в области удаленной от источника части неоднородности, что вызывает появление отрицательных значений потенциала. Максимум потенциала сдвинут в сторону от проекций источника и неоднородности вследствие сложения полей диполя и монополя. В случае приповерхностной неоднородности аномалия менее интенсивна. Однако индикационная зона характеризуется резкими горизонтальными градиентами и уверенно отмечается. Более резкая локализация приповерхностной неоднородности имеет место также на планах изолиний E_z в случае безнапорного режима. Изучение потенциала, а тем более E_z , представляет определенные трудности на такой значительной площади. Режимные измерения магнитного поля токов течения осуществляются значительно проще.

Магнитное поле является полностью аномальным. Оно подобно магнитному полю погруженного горизонтального диполя. Особенно это сходство заметно на планах изолиний вертикального компонента магнитной индукции B_z (рис.12). Пластина вблизи поверхности создает аномалию тока той же интенсивности, что и глубокая, но более градиентную. Вид изолиний B_z почти не зависит от гидравлического режима вблизи поверхности. Компоненты B_x и B_y существенно зависят от гидравлического режима. В случае напорного режима изолинии B_x направлены вдоль длинных боковых граней пластины. В безнапорном случае они развернуты на 90° , а величина аномалии становится втрое больше. Анализ рис.12 свидетельствует, что вблизи дневной поверхности могут располагаться индикационные зоны, не связанные с источником, но указывающие на его существование.

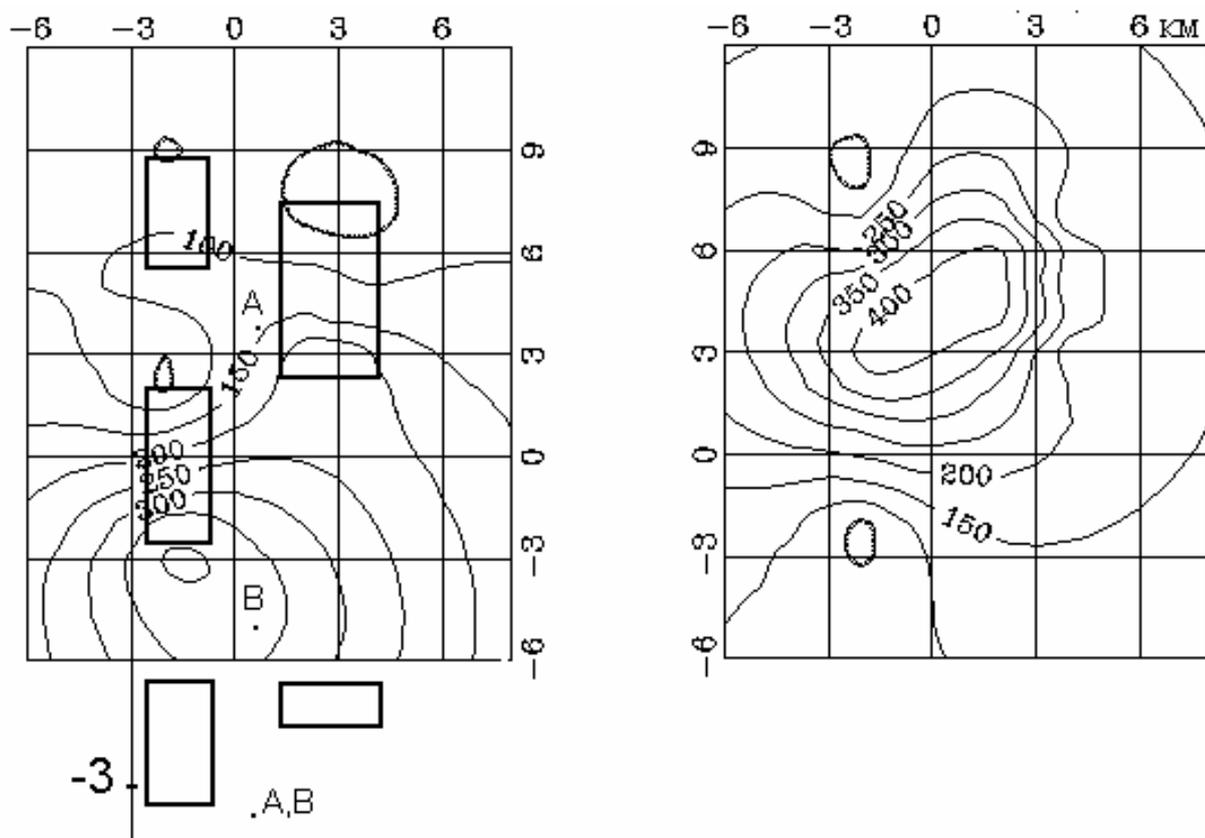


Рисунок 13. Планы изолиний U (мВ) для трех индикационных зон. Слева – для положения источника флюида в точке B , справа – для источника A . Левый фрагмент совмещен с планом неоднородностей, ниже – фронтальная проекция

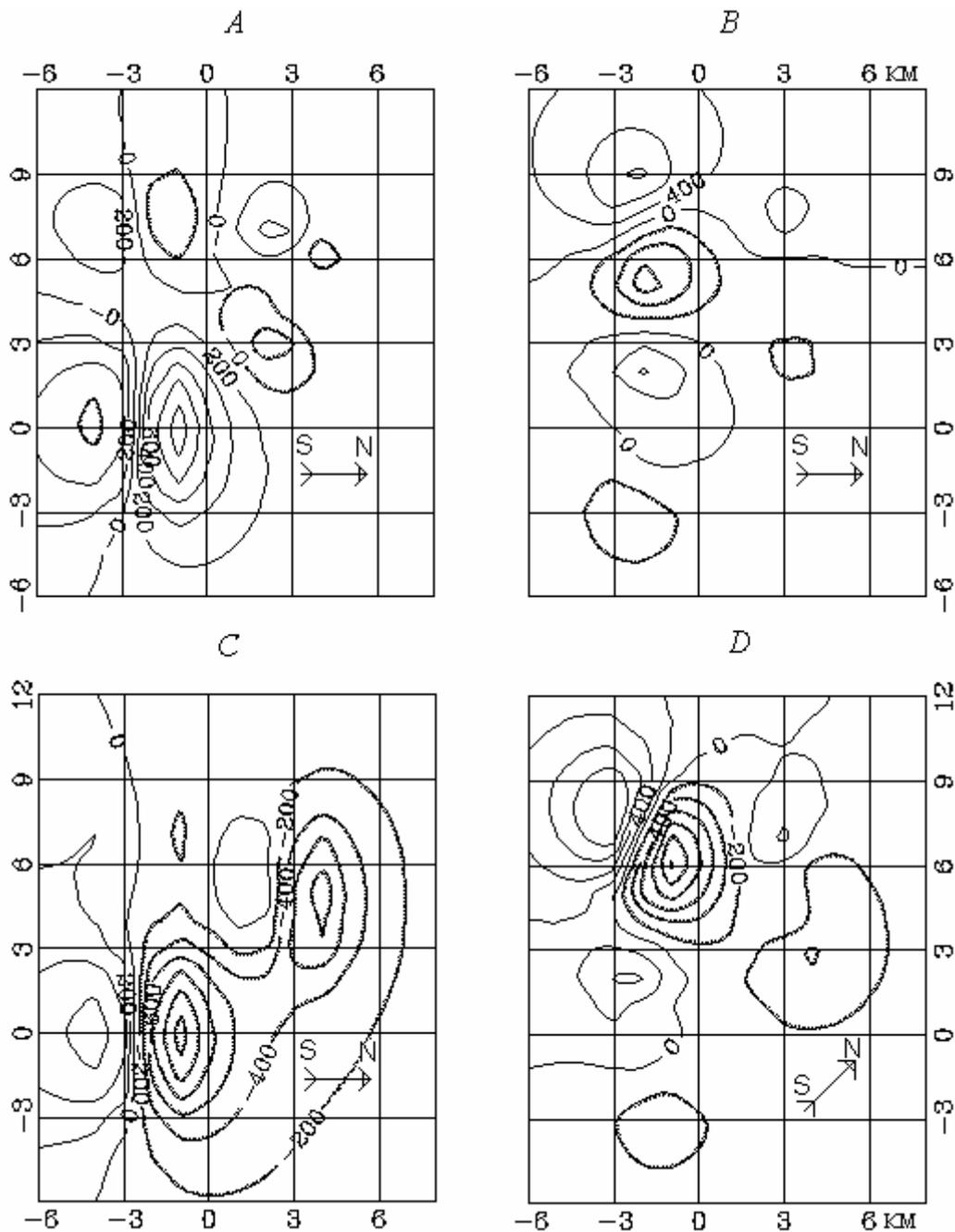


Рисунок 14. Планы изолиний ΔT (нТл) для трех индикационных зон (см.рис.13). Левый верхний фрагмент – географические координаты района 40° с.ш. и 45° в.д., источник А, напорный режим; внизу – то же, источник В. Правый верхний фрагмент – 35° с.ш. и 135° в.д., источник А, безнапорный режим, внизу – 38° с.ш. и 120° з.д., источник А, безнапорный режим

Поскольку современные измерения выполняют протонными магнитометрами, определим приращение вектора земного магнитного поля, вызванное течением флюида:

$$\Delta T = \frac{x}{T} B_x + \frac{y}{T} B_y + \frac{z}{T} B_z$$

Здесь T – вектор земного магнитного поля, x, y, z – проекции вектора на координатные оси системы, использованной при расчетах, B_x, B_y, B_z – компоненты аномального вектора магнитной индукции в указанной системе при течении флюида. На рис.13 приведены план и разрез трех неоднородностей и планы изолиний электрического потенциала при напорном режиме вблизи дневной поверхности.

Проекция вектора T на координатные оси системы расчетов выбрана с учетом географических координат, простираения геологических структур и тектонических нарушений для районов Спитака, Кобе и Сан–Андреаса. Стрелкой показано направление на север (рис.14). Расчеты иллюстрируют мозаичный характер поля при наличии нескольких индикационных проницаемых зон. По-видимому, локация источника флюида невозможна на основе мониторинга ΔT , если априори неизвестно положение зон.

Эта информация должна быть получена на основе геологических и гидрогеологических данных и предшествующего опыта наблюдений в данном районе. Имеется вероятность того, что источник флюида исчезает после тектонического события и возникает в месте подготовки нового. Это должно вызвать скачкообразное изменение плана изолиний ΔT после значительного тектонического события [32]. При частой повторяемости событий периоды подготовки могут накладываться друг на друга, что является негативным фактором для прогноза. Стабильность индикационных зон на площади геомагнитного мониторинга могла бы служить подтверждением этой гипотезы и стать позитивным фактором при локализации источников, расположенных внутри и вне полигона.

4.5. Расчеты зависимости электрического и магнитного поля от времени при течении сжимаемого флюида

Как и в предыдущем разделе, моделью среды служит пористое нижнее полупространство ($z \leq 0$) с однородными гидравлической проницаемостью, электропроводностью и коэффициентом потенциала течения, в котором помещена локальная область с аномальными значениями этих параметров. Модель источника представляет собой сферически симметричную область, из которой при $t \geq 0$ по радиальным направлениям начинает вытесняться поровый флюид. Заменяем ее точечным источником флюида с постоянной объемной производи-

тельностью. Для обратного перехода к конечной области произвольной формы полученные решения следует проинтегрировать по координатам этой области, однако для целей нашего исследования это не принципиально.

Вытеснение флюида из области источника с постоянной скоростью может происходить под действием неупругого сжатия, приводящего к постоянному уменьшению пористости, либо под действием локального разогрева, поскольку коэффициенты теплового расширения жидкостей на порядок больше, чем твердых тел. Возможны и техногенные причины, такие как закачка жидкости или газа, подземное горение или взрыв и т.п.

Если производительность источника составляет $1 \text{ м}^3/\text{с}$, а объем области сжатия $3,3 \cdot 10^{10} \text{ м}^3$, то за время действия источника 6 мес. ($1,55 \cdot 10^7 \text{ с}$) относительное сжатие составит $5 \cdot 10^{-4}$. Скорость течения флюида на поверхности области источника составит $0,6 \text{ м/год}$, а градиент давления (во вмещающих породах с проницаемостью 10^{-14} м^2) порядка 2000 Н/м^3 . При этом вещество в области источника должно быть пористым, с твердым скелетом, легко поддающимся деформациям, т.е. иметь характер зоны дробления.

По-видимому, такие свойства вещества при соответствующих объемах, градиентах давления, неупругих деформациях могут встретиться нечасто, лишь в так называемых шовных зонах при относительном тангенциальном перемещении их неровных краев. Альтернативой является нагревание указанного объема за указанный срок на $1\text{--}2^\circ\text{C}$ в области магматической деятельности.

Остальную среду, за исключением области источника, будем считать недеформируемой, т.е. полагать в ней столь малые деформации, что они не изменяют скорость Дарси. В такой постановке основной причиной нестационарного режима течения флюида и сопровождающих его электрических явлений остается сжимаемость флюида, что позволяет теоретически оценить ее влияние на рассчитываемые эффекты.

В предыдущем разделе и работах [30, 31] выполнены вычисления для стационарного течения несжимаемого флюида и показано, что наряду с глубинными индикационными зонами могут существовать приповерхностные, не граничащие с источником флюида и позволяющие локализовать область избыточного давления по магнитному и электрическому полю течения. При этом не учтено время диффузии возмущения от источника давления до дневной поверхности вследствие сжимаемости флюида. В данном разделе выполнены расчеты, показывающие, насколько поразному приходит к стационарному состоянию аномальное поле от локальных неоднородностей, расположенных на различном удалении от источника давления. Несмотря на малую

сжимаемость флюида, стационарное состояние для приповерхностных неоднородностей достигается на несколько месяцев позже, чем глубинных, соседствующих с источником.

Область неоднородности делили на элементарные объемы, в пределах каждого из них параметры среды считали постоянными, векторные интегральные уравнения (46) при $m_1=m$ и (22) сводили к системе линейных алгебраических уравнений относительно компонентов внутреннего градиента давления или напряженности. При этом для каждой модели векторное уравнение (46) решали 40 раз для соответствующего количества частот в диапазоне, обеспечивающем удовлетворительную точность обратного экспоненциального преобразования Фурье (47). Компоненты градиента давления для интересующего нас времени подставляли в уравнение (22) и определяли внутренние компоненты напряженности электрического поля, которые использовали далее для вычисления внешнего электрического потенциала и магнитного поля токов течения по формулам (71) и (72). При $x_0=y_0=0$ на глубине $z_0=-5$ км поместили источник флюида с объемной производительностью $Q=1$ м³/с, начинающий действовать с момента $t=0$. Так же, как и в предыдущем разделе, в качестве глубинной неоднородности рассмотрен вертикальный пласт $1 \times 3 \times 3$ км с центром в точке (0; 1,5; -4 км). Источник касается пласта вблизи короткого нижнего ребра. Вторая модель – приближенный к поверхности горизонтальный пласт $2 \times 5 \times 1$ км с центром в точке (0; 2,5; -1 км).

Предположим, что локальные объекты более проницаемы и электропроводны, чем окружающая среда. Однако их высокая электропроводность вызывает уменьшение эффекта, поскольку аномальные электрические токи целиком текут внутри объекта и аномальный полный ток становится близок к нулю. Поэтому рассматривали слабо дифференцированную среду, когда $1 < \sigma/\sigma_1 \leq 3$ и $1 < c/c_1 \leq 10$.

Скорость течения флюида \mathbf{v} зависит от расхода Q в источнике и не зависит от параметров однородного полупространства, причем $\mathbf{E} \sim L \mu \mathbf{v}/c$ и $\mathbf{H} \sim \sigma L \mu \mathbf{v}/c$. Поскольку экспериментальные значения L малы, гидравлическая проницаемость c также должна быть мала. Малым c соответствуют малые σ , что приводит к малым \mathbf{H} . Чтобы использовать высокие значения σ , необходимо предположить высокую минерализацию флюида. Но при этом поверхностные явления подавляются и L уменьшается. Эти обстоятельства приводят к тому, что заметный эффект может быть получен в узком диапазоне значений параметров σ , L , c , при максимально допустимых величинах L и σ/c . Электрокинетический потенциал имеет ограниченный верхний предел и относительно

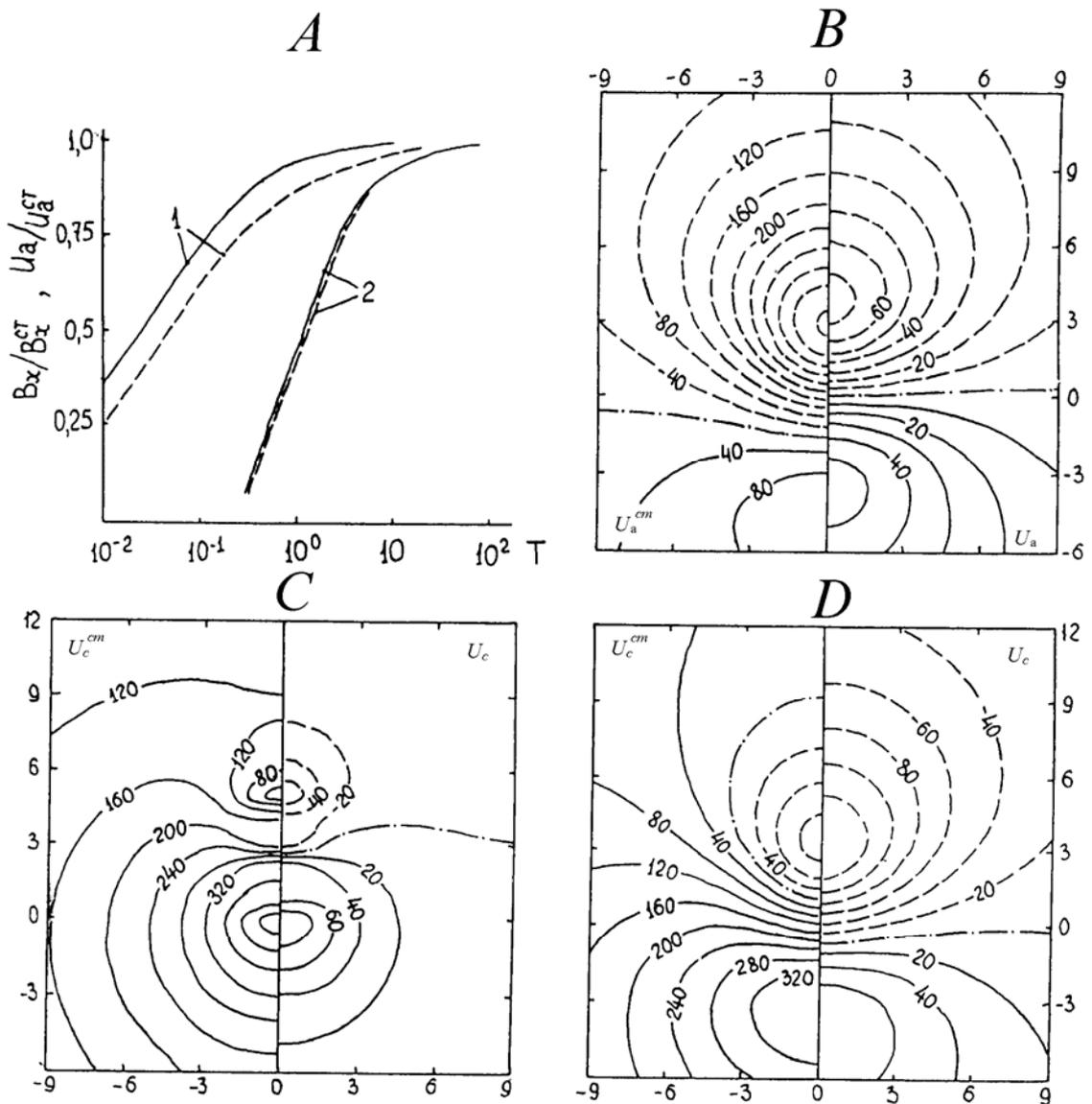


Рисунок 15. Изменения амплитудных значений со временем (A) и планы изолиний (B, C, D) аномального и суммарного потенциалов фильтрации в мВ. На фрагменте A за единицу приняты стационарные значения U_a^{cm} и B_a^{cm} . Фрагмент B для глубинного объекта, U_a при $T=0,01$; фрагмент D – U_c при $T=0,032$; фрагмент C – для приповерхностного объекта, U_c при $T=0,96$

небольшой диапазон значений для основных породообразующих минералов. Поэтому коэффициент потенциала течения редко превышает $L \leq 3 \cdot 10^{-6}$ В/Па, а его среднее фоновое значение составляет обычно $L_1 = 10^{-7} - 10^{-8}$ В/Па для слабо проницаемых пород $c < 10^{-12} - 10^{-14}$ м² [10]. Для пород с проницаемостью $c_1 < 10^{-13} - 10^{-14}$ м² значение относительной электропроводности обычно составляет $\sigma_{\text{фл}} / \sigma \approx 40 - 120$. При электропроводности флюида, равной электропроводности морской воды $\sigma_{\text{фл}} \approx 1,2$ Ом⁻¹·м⁻¹, это приводит к значениям $\sigma \approx 3 \cdot 10^{-2} - 10^{-2}$ Ом⁻¹·м⁻¹.

Итак, примем для источника $Q = 1$ м³/с, $z_0 = -5$ км, для нижнего полупространства $c_1 = 10^{-14}$ м², $\sigma_1 = 10^{-2}$ Ом⁻¹·м⁻¹, $L_1 = 10^{-7}$ В/Па, для неоднородностей $c = 10^{-13}$ м², $\sigma = 3,3 \cdot 10^{-2}$ Ом⁻¹·м⁻¹, $L = 3 \cdot 10^{-6}$ В/Па. На расстоянии от источника, соизмеримом с его глубиной, скорость течения флюида составляет малую величину $v \approx 10$ см/год, а модуль градиента давления имеет порядок 320 Па/м $\approx 3,2$ бар/км.

Оценка градиента давления может быть снижена, если увеличить проницаемость среды, однако это приведет к уменьшению электрического и магнитного полей. Все вычисления выполнены для напорного режима фильтрации вблизи дневной поверхности полупространства $v_z = 0$, $P \neq 0$, $U \neq 0$ при $z = 0$, что соответствует верхнему знаку в формулах (46), (22), (71), (72).

В качестве абсциссы переходного процесса использовали безразмерное время T , связанное с текущим временем t соотношением $T = 4c_1 t / m_1 \mu \beta z_0^2$.

Неудобства, связанные с решением интегро-дифференциального уравнения (46), заставили искать пути для его упрощения. Предположение $m_1 = m$ сразу сводит уравнение (46) к интегральному, Однако оказалось, что и при $0,1 \leq m_1/m \leq 10$ возможно пренебречь вторым интегральным членом в (45) и (46), получив при этом достаточно хорошее приближение. Для этого решали векторное уравнение (45) без второго интегрального члена, а затем скалярное уравнение (45) относительно P без первого интегрального члена и численно дифференцировали давление по координатам. Даже при десятикратных отличиях m и m_1 значения $\text{grad}P$, полученные из (45), на три порядка меньше, чем полученные из редуцированного уравнения (46). На этом основании в уравнении (46) при дальнейших расчетах был исключен второй интегральный член.

На рис.15 представлены расчеты электрического потенциала для напорного режима вблизи дневной поверхности. Рассмотрим правый верхний и нижний фрагменты рисунка. Стационарное аномальное поле U_a^{CT} дипольного характера, складываясь с достаточно большим нормальным полем $L_1 P_0$ монополярного характера, образует стационарное

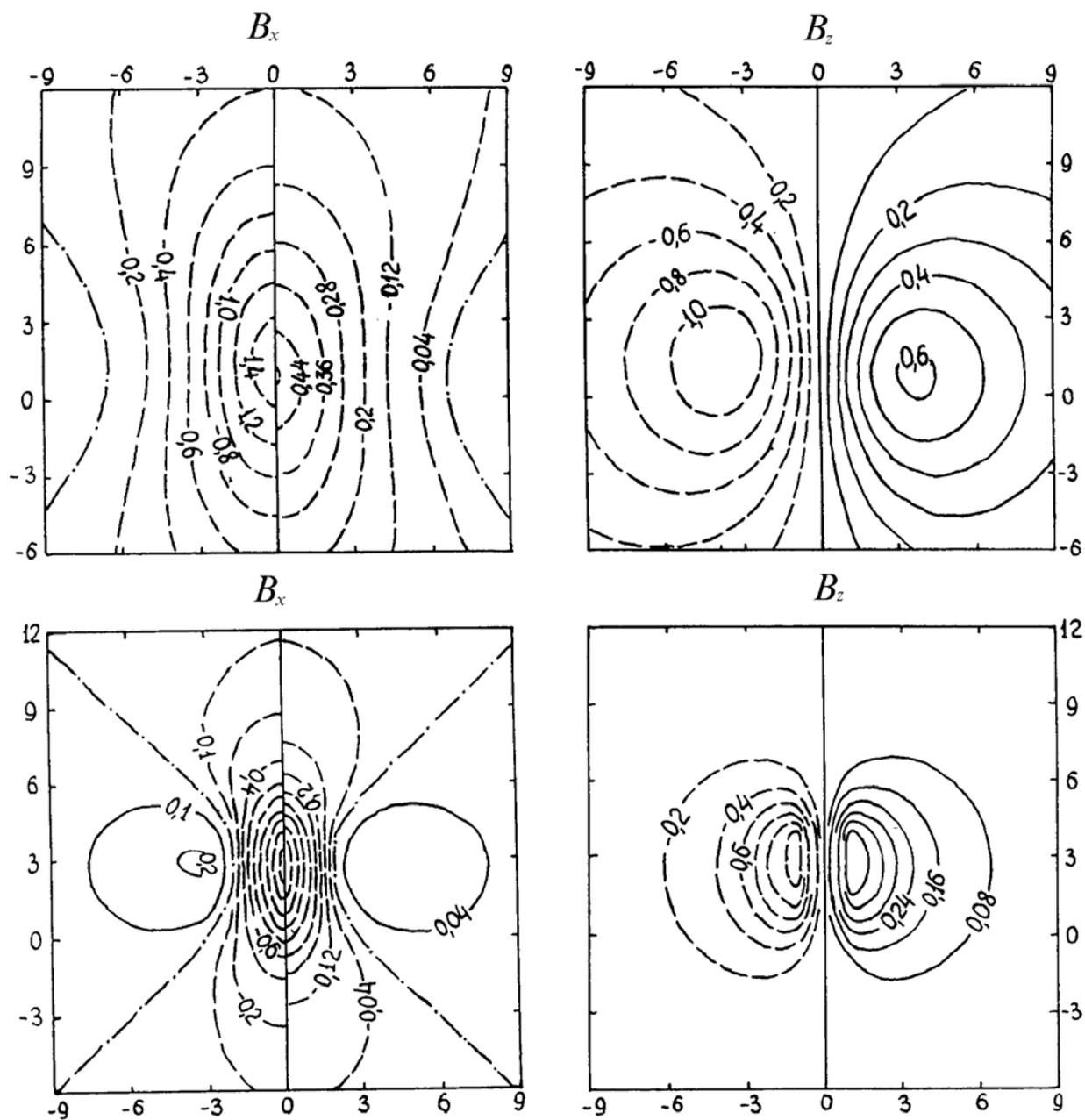


Рисунок 16. Изолинии аномальных значений магнитной индукции (нТл) для глубинного (вверху) и поверхностного (внизу) объектов. Правая часть фрагмента – стационарные течения, левая – нестационарные при $T=0,01$ – вверху слева; $T=0,032$ – вверху справа; $T=0,96$ – внизу

суммарное поле $U_c^{CT} = L_1 P_0 + U_a^{CT}$. В случае глубинной неоднородности уже при $T \approx 10^{-2}$ нестационарные значения U_a недалеко от стационарных: $U_a^{\max} - U_a^{\min} \approx 0,25(U_a^{CT\max} - U_a^{CT\min})$.

По-видимому, этого времени достаточно, чтобы область возмущений захватила существенную часть объема неоднородности, контактирующей с источником флюида (верхний правый фрагмент). В то же время при $T = 3 \cdot 10^{-2}$ значения U_c^{CT} далеко не достигнуты в основном из-за того, что отсутствует первичное поле (нижний правый фрагмент), поскольку возмущения не достигли дневной поверхности.

Размеры и положение неоднородностей подобраны таким образом, что экстремальные значения U_c^{CT} были примерно одинаковы (сравните нижние фрагменты рис.15). Однако для достижения значений U_c , соизмеримых с U_c^{CT} необходимо различное время: $T \approx 1$ для приповерхностной неоднородности и $T \approx 0,03$ для глубинной, контактирующей с источником. При $c_1 = 10^{-14}$ м², $\mu = 10^{-3}$ Па·с, сжимаемости флюида $\beta = 5 \cdot 10^{-10}$ Па⁻¹ и пористости $m_1 = 0,025 - 0,05$ безразмерному времени $T = 1$ соответствуют времена $t = 3 - 6$ мес. Таким образом, приповерхностная индикационная зона реагирует на появление источника флюида на 3–6 месяцев позднее, чем зона, контактирующая с источником.

На рис.16 представлены стационарные и нестационарные значения компонентов магнитной индукции B_x и B_z в напорном режиме. Временной ход их таков, что форма изолиний остается подобной, меняются только амплитудные значения. Можно заметить лишь незначительные смещения эпицентров нестационарных значений к проекции источника, особенно заметные для глубинной неоднородности и объясняемые тем, что первоначально возмущение возникает в области контакта источника и неоднородности. Согласно рис.15 (левый верхний фрагмент), это приводит также к растягиванию процесса установления стационарных значений электрического потенциала и магнитной индукции во времени по сравнению с приповерхностной неоднородностью, когда возмущение достигает всех ее элементов одновременно.

Итак, проведенные расчеты показали, что для сжимаемого флюида стационарное течение устанавливается тем позднее, чем больше расстояние до источника, причем запаздывание может составить несколько месяцев при глубине источника в несколько километров. Если время существования глубинного источника меньше этого срока, он просто не будет замечен по гидравлическим явлениям вблизи поверхности, даже если бы они не маскировались метеорологическими факторами. Рассмотренные здесь течения флюида можно связывать, в частности, с неупругим сжатием пористой влагонасыщенной среды с объемом в несколько кубических километров. Уменьшение

этой области или увеличение времени ее существования за пределы
нескольких

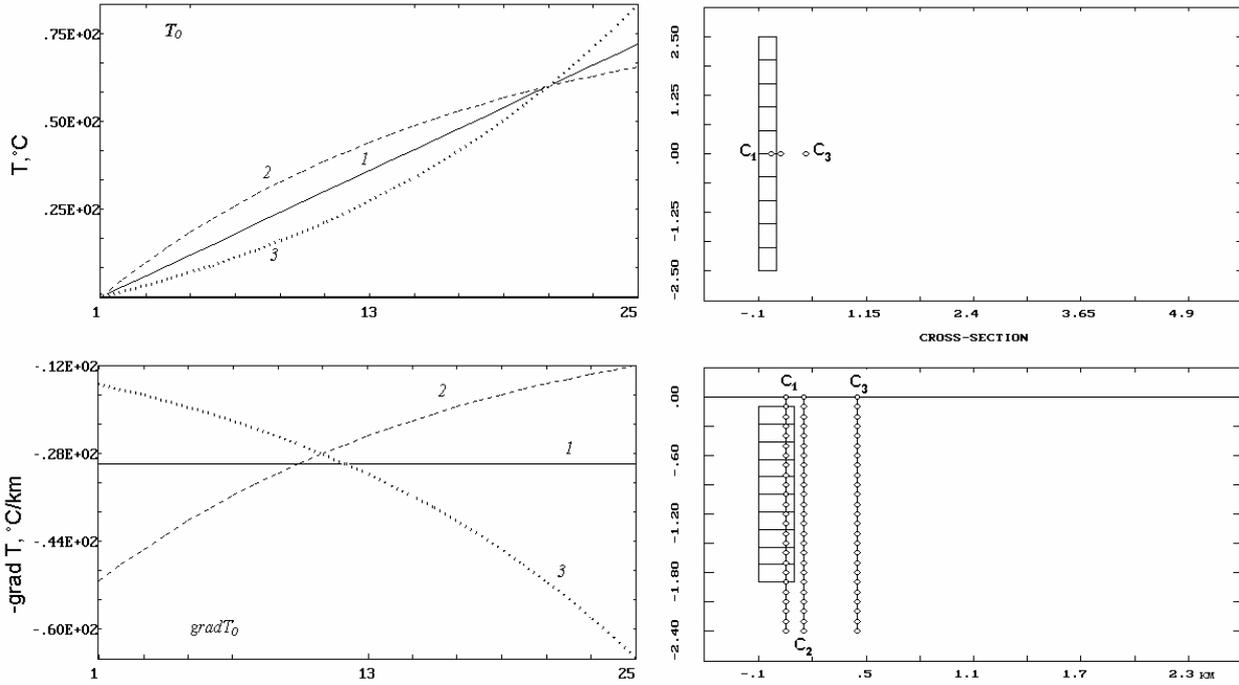


Рисунок 17. Нормальное поле (слева) и модель (справа) с проекциями трех скважин C_1 , C_2 и C_3 глубиной 2,5 км. Графики T и $\text{grad } T$ для трех значений вертикальной скорости фильтрации v , см/год: 1 – 0, 2 – 1, 3 – (-1)

месяцев требует слишком большой объемной деформации для обеспечения необходимого дебита источника.

Целесообразно вместо гидравлических явлений наблюдать связанные с ними электрокинетические явления, а именно, электрическое и магнитное поле токов течения. При наличии вблизи источника флюида или в самом источнике неоднородности фильтрационных и электрических свойств информация о возникновении источника может быть выявлена на дневной поверхности, например в магнитном поле на временах, в 10–30 раз меньших, чем в поле скоростей течения. Это обстоятельство должно привлечь внимание к вариациям среднесуточных и среднемесячных значений магнитного поля на прогностических полигонах в тектонически активных зонах [32], как к индикатору изменения направления и скорости неупругих деформаций. Однако неясно, как связаны неупругие деформации с процессом подготовки землетрясений и, в частности, можно ли определенно считать, что замедление неупругой деформации есть фаза подготовки землетрясения. Эта неопределенность ограничивает прогностическую ценность измерений магнитного поля токов течения.

4.6. Моделирование стационарной температуры и теплового потока в фильтрующей среде

Пусть в нижнем полупространстве существует вертикальное движение флюида, при этом дневная поверхность является поверхностью высачивания ($P=0$ при $z=0$), что соответствует знаку “минус” в формуле (16). Гидравлическая проницаемость полупространства c_1 и вертикальный градиент давления $\partial P/\partial z$ находятся в такой комбинации, что скорость вертикальной фильтрации

$$v_1 = -\frac{c_1}{\mu} \frac{\partial P_1}{\partial z}$$

принимает значения $v_1=0$ либо $v_1=\pm 3 \cdot 10^{-10}$ м/с $\approx \pm 1$ см/год. При уплотнении и литификации пород осадочного бассейна в масштабе геологического времени скорость вертикальной фильтрации заметно меньше указанной величины, поэтому влияние конвективного переноса будет выступать при расчетах в несколько преувеличенном и подчеркнутым виде. В нижнем однородном полупространстве находится модель неоднородности в виде пласта размерами $0,2 \times 5,0 \times 1,8$ км, нижняя кромка которого расположена на глубине 2 км (рис.17, справа). Пласт обладает проницаемостью, вдвое превышающей проницаемость вмещающих пород, и моделирует ослабленную зону, не выходящую на поверхность. Вследствие втягивания потока флюида скорость движения внутри пласта возрастает почти вдвое, а в окружающем пространстве

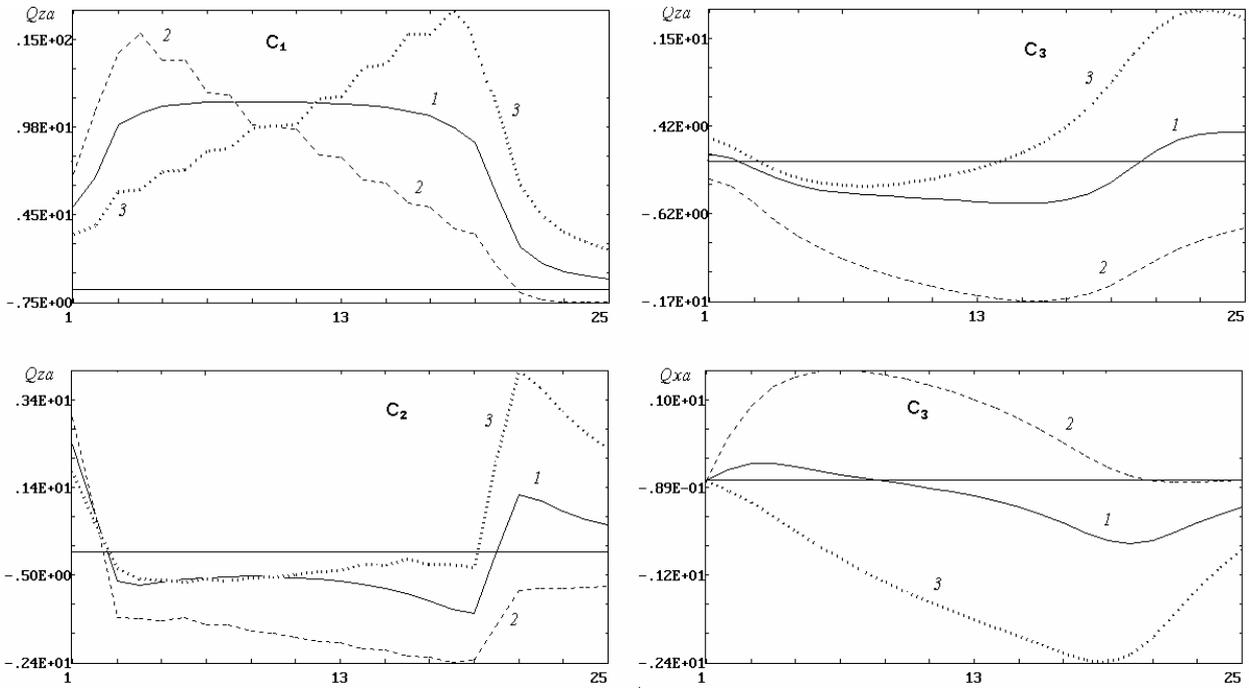


Рисунок 18. Кривые декартовых составляющих вектора плотности аномального теплового потока Q_{za} и Q_{xa} по скважинам C_1 , C_2 и C_3 (см. рис. 17). На осях ординат – значения Q_a (мВт/м/м), на осях абсцисс – координата z (гектометры) для трех значений скорости v , см/год: 1 – 0, 2 – 1, 3 – (– 1)

несколько уменьшается. Теплопроводность пласта на 20% превышает теплопроводность вмещающих пород. Зададим при $v_1=0$ нормальный геотермический градиент $\partial T_1/\partial z = -0,03$ град/м, что при коэффициенте теплопроводности $\lambda_1=2$ Вт/град/м приводит к постоянному значению плотности кондуктивного теплового потока $q_0=60$ мВт/м². При этом на глубине $z=-2000$ м и на поверхности температура различается на 60°C (рис.17, слева). При наличии конвективного переноса, как на это указал Ю.П.Булашевич [33], нормальные значения q_1 и $\partial T_1/\partial z$ не остаются постоянными, а кривая температуры принимает выпуклый вид (при разогревающим проникновении $v_1>0$) или вогнутый (при охлаждающем проникновении $v_1<0$). Сохраним разницу температур в 60°C между поверхностью и уровнем $z=-2000$ м, тогда геотермические градиенты примут вид, показанный на рис.17 (кривые 2, 3). При этих расчетах принимали $\chi=5 \cdot 10^{-7}$ м²/с. Кривые 2 и 3 зеркально отражены в плоскости $z=-1000$ м. При этом кондуктивная составляющая, выражающаяся через градиент температуры $q_1 = -\lambda_1 \cdot \partial T_1/\partial z$, при $v_1=1$ см/год имеет значения $q_0=31$ мВт/ м² на глубине 2 км и $q_0=103$ мВт/ м² на поверхности, и наоборот при $v_1=-1$ см/год. Поскольку суммарный тепловой поток в стационарном случае остается постоянным на любой глубине, проникновение высокотемпературного флюида в вышележащие слои из нижележащих понижает значение кондуктивной составляющей. Затем доля конвективного переноса падает в связи с общим понижением температуры флюида по мере приближения к дневной поверхности и кондуктивная составляющая потока возрастает. Аналогично q_1 ведет себя температурный градиент $\partial T_1/\partial z$, отличающийся на постоянный масштабный коэффициент. При охлаждающем проникновении флюида сверху вниз общий поток тепла и его конвективная составляющая меняют направление на противоположное по сравнению с разогревающим проникновением, а кондуктивная составляющая сохраняет свой знак. Теперь для поддержания постоянства общего потока тепла значения q_1 должны возрасти с глубиной.

На рис. 18 представлены кривые распределения плотности аномального теплового потока по вертикальным профилям (скважинам) в окрестности неоднородности в изотермическом режиме ($K=1$). Вертикальная составляющая q_{za} внутри пласта плавно без разрывов на

кромках возрастает, совпадая по знаку с нормальным тепловым потоком. При наличии фильтрации кондуктивная составляющая q_{za} деформируется таким образом, что при восходящей фильтрации образуется экстремум вблизи верхней кромки, а при нисходящей – вблизи нижней. Вне пласта q_{za} меняет знак напротив пласта в полном соответствии с физикой явления, поскольку там изменяется на противополож-

ное на-

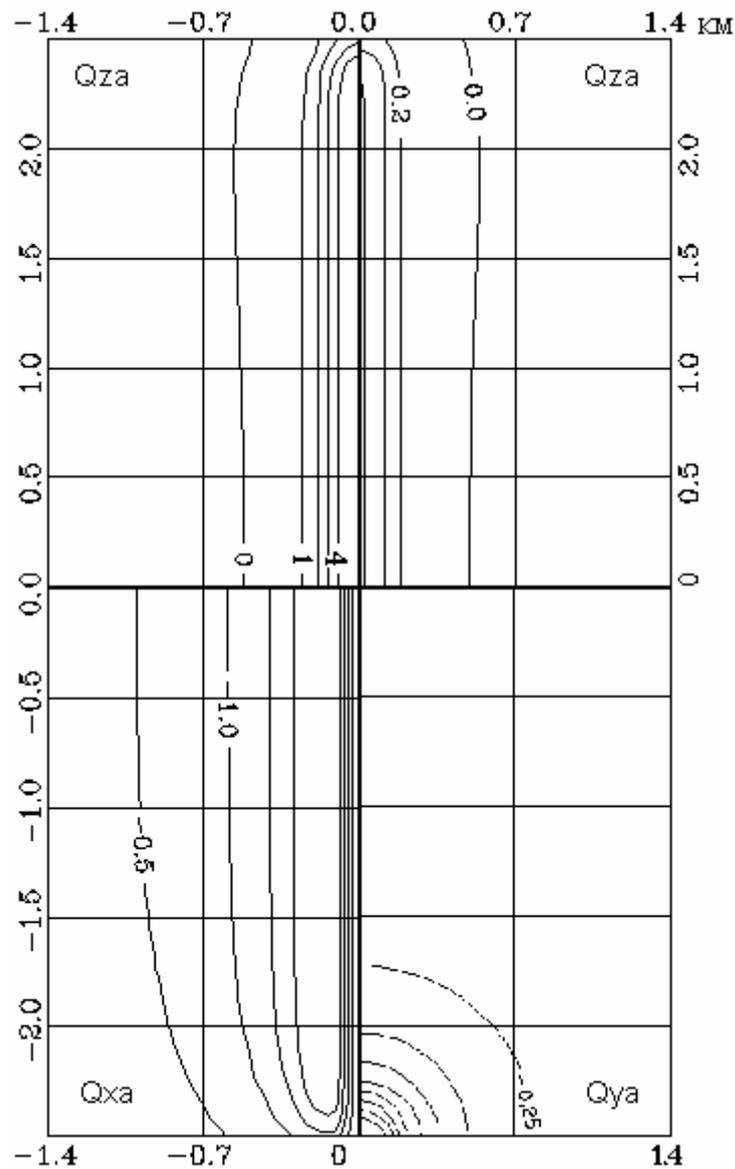


Рисунок 19. Планы изолиний Q_{xa} , Q_{ya} , Q_{za} на дневной поверхности для случая $v=0$. Цифры на изолиниях – значения Q_{za} (мВт/м/м). Цифры на обрамлении – расстояние (км). Фрагмент Q_{za} вверху слева – для изотермического режима, остальные – для неизотермического

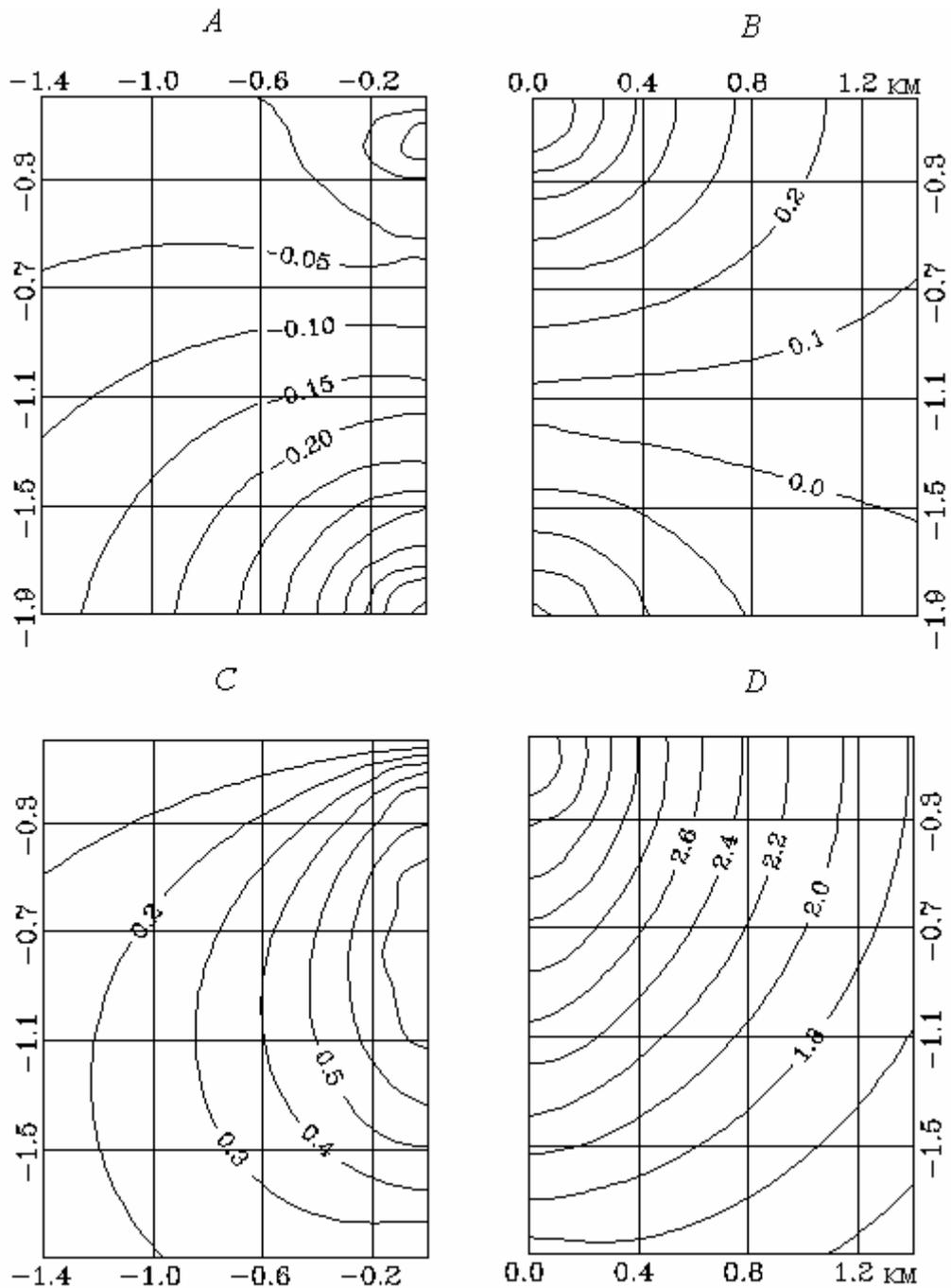


Рисунок 20. Планы изолиний T_a (град) на вертикальной плоскости, секущей модель (рис.17) симметрично вкост простираия. Цифры на обрамлении – расстояние, км. Верху (A, B) $v=0$, внизу (C, D) $v=1$ см/год. Слева (A, C) – изотермический режим, справа (B, D) – неизотермический

правление аномальной конвекции и аномального кондуктивного теплопереноса.

В дальней зоне (скв.3) кривые q_{za} ведут себя аналогично при общем уменьшении теплового потока, особенно вблизи поверхности. Величина q_{xa} обращается в нуль на поверхности, q_{ya} отсутствует ввиду симметрии.

На рис. 19 приведены планы изолиний декартовых компонентов плотности аномального теплового потока в приповерхностном слое при $v_1=0$. В изотермическом случае существует только вертикальная составляющая q_{za} , ее значение для выбранной модели превышает 3 мВт/м², или 5% от нормального значения. В неизотермическом режиме значения q_{za} убывают на порядок, но появляются составляющие q_{xa} и q_{ya} , свидетельствующие о растекании тепла в стороны от проекции тела. С возникновением горизонтальных градиентов температуры связано появление температурной аномалии. При расчетах неизотермического режима значение теплопроводности воздуха было принято равным $\lambda_0=0,025$ Вт/м/град.

На рис.20 приведены изолинии аномальной температуры в вертикальной плоскости, проходящей через центр модели перпендикулярно ее простиранию. В отсутствие фильтрации аномальная температура T_a имеет дипольный характер, связанный с появлением стоков и истоков тепла на верхней и нижней гранях тела (аномалия поляризованного типа). В изотермическом режиме изолинии верхнего полюса выполаживаются вблизи дневной поверхности, а в неизотермическом режиме, напротив, квазинормальны к ней. При наличии фильтрации план изолиний T_a совершенно изменяется. Как следует из граничного условия, движение флюида не создает на поверхности включения дополнительных источников тепла. Поэтому аномалия имеет источник-вый тип, связанный с увеличением теплоты внутри фильтрующего тела при восходящей фильтрации и уменьшением теплоты при нисходящей. Вследствие высокой теплоемкости и значительной скорости фильтрации аномалия источник-ового типа превосходит аномалию поляризованного типа, слабую вследствие малой контрастности по теплопроводности, и вклад второй в суммарную аномалию температуры почти незаметен.

При неизотермическом режиме на дневной поверхности существуют трудности концептуального плана, касающиеся самой постановки задачи. Режим высачивания флюида и изотермический режим на поверхности полностью совместимы и не приводят к каким-либо физическим противоречиям при анализе численных результатов. Этого нельзя сказать о неизотермическом режиме. Само существование положительной температурной аномалии при восходящей филь-

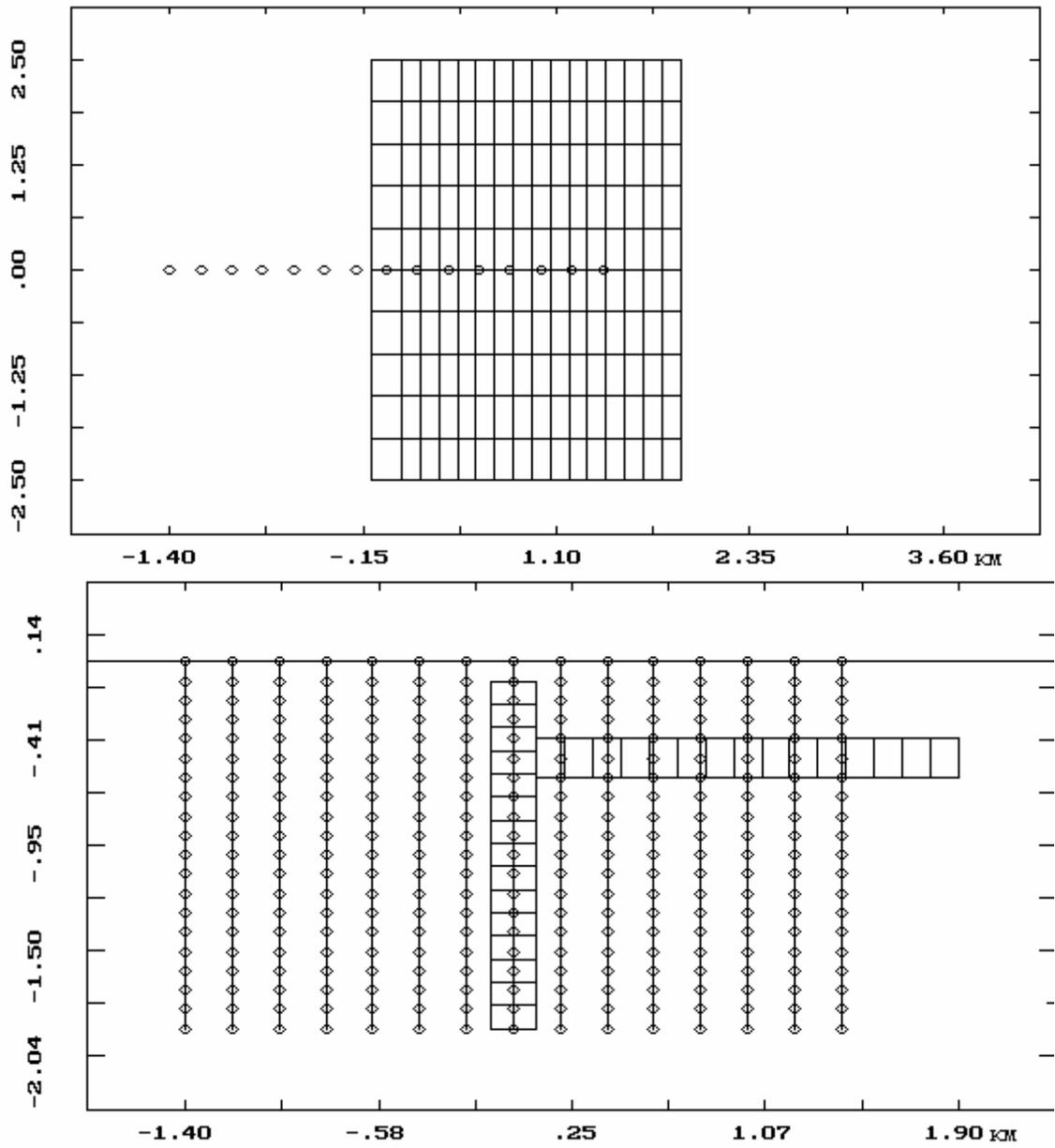


Рисунок 21. План и разрез модели двух тел

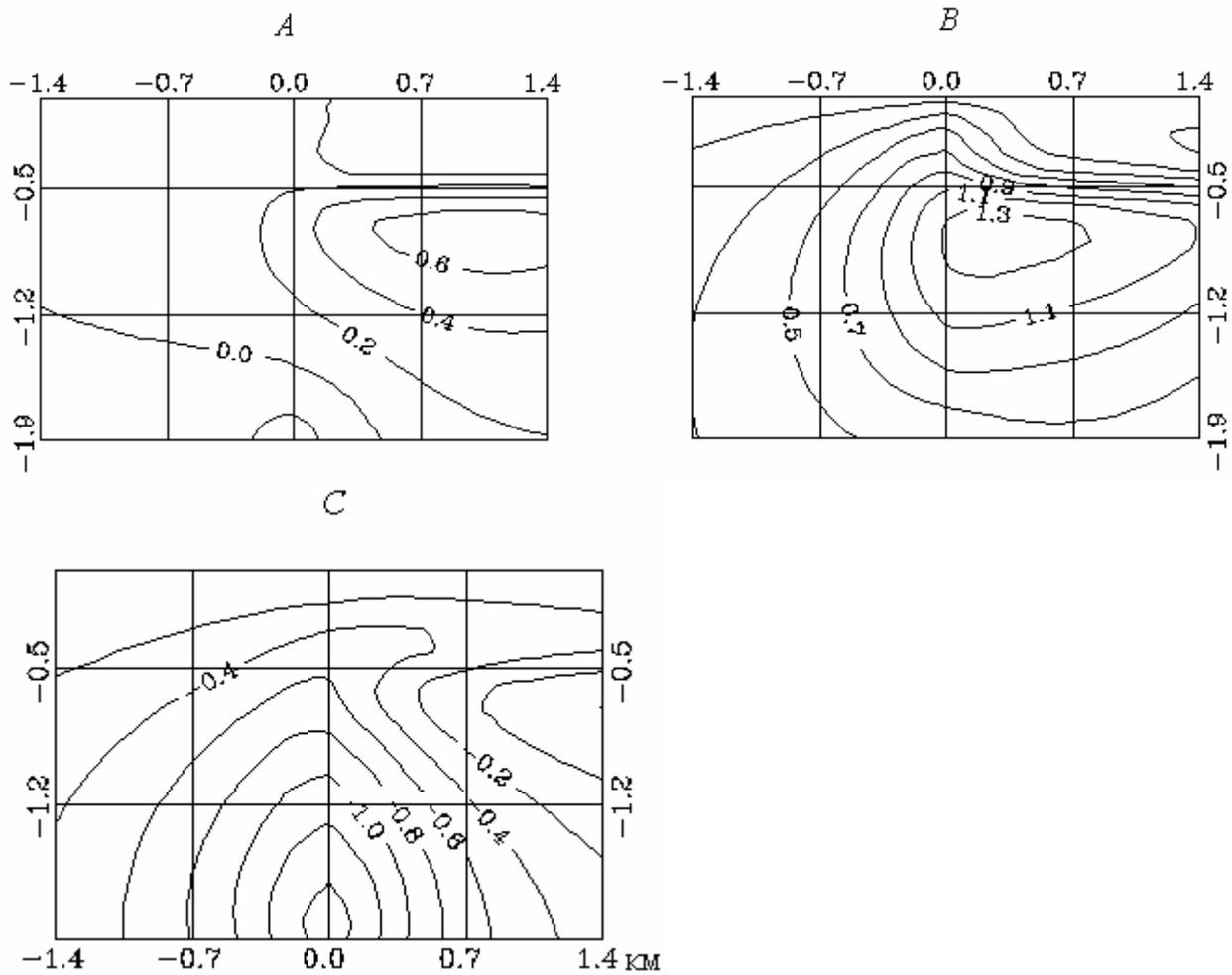


Рисунок 22. Изолинии T_a (град) для поперечного сечения модели (рис.21) при изотермическом режиме на дневной поверхности и трех значениях скорости фильтрации v , см/год: А – 0, В – 1, С – (-1)

трации плохо согласуется с бесконечно большой скоростью растекания избыточных объемов высочившихся термальных вод вдоль дневной поверхности в стороны от локальной неоднородности. Указанное противоречие, вероятно, можно устранить введением на поверхности тонкого слоя (S – плоскости) с конечной продольной проницаемостью, преобразующего вертикальное движение флюида в горизонтальное. Ввиду этих обстоятельств расчеты при неизотермическом режиме на поверхности при наличии вертикальной фильтрации следует рассматривать на качественном уровне как оценочные.

На рис.21 представлена более сложная модель неоднородности. К первому вертикальному телу примыкает встык под прямым углом второе горизонтальное тело. Для каждого из тел показаны элементарные объемы, которые использованы при вычислениях. Первое вертикальное тело вдвое более проницаемо, чем вмещающая среда, и на 20% более теплопроводно. Оно моделирует ослабленную зону. Второе горизонтальное тело вдвое менее проницаемо, чем вмещающая среда, и на 20% менее теплопроводно. Указанные два тела моделируют фрагмент сложно построенной среды, состоящей из нарушенных и стабильных блоков.

На рис.22 показано распределение температур в поперечном сечении этой модели при отсутствии фильтрации и при нисходящей фильтрации в изотермическом режиме на дневной поверхности. Горизонтальное изолирующее тело препятствует разогреву вышележащих пород при восходящей фильтрации и охлаждению нижележащих – при нисходящей.

Дополнительные примеры по расчетам переноса тепла в фильтрующей среде имеются в [13].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные примеры иллюстрируют возможности алгоритмов и программ, основанных на решении объемных векторных интегральных уравнений. Эти возможности будут расширяться по мере усовершенствования методов решения систем линейных алгебраических уравнений большой размерности и развития вычислительной техники.

Авторы благодарны д.ф.-м.н. Ю.В.Хачаю за исчерпывающие консультации, д.ф.-м.н. О.В.Хачай за ценные советы, д.ф.-м.н. П.С.Мартышко и к.г.-м.н. Д.С.Вагшалю за обсуждение проблем математики и геофизики, затронутых в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Hohmann G.W.* Three-dimensional induced polarization and electromagnetic modeling. *Geophysics*, 1975, v.40. P.309–324.
2. Низкочастотная индуктивная электроразведка при поисках и разведке магнетитовых руд//*Ю.И.Блох, Е.М.Гаранский, И.А.Доброхотова* и др. – М.: Недра, 1986. С.57–65.
3. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. М.: Наука, 1972. 688 с.
4. *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. 5-е изд. М.:Гостеортехиздат, 1954. С.64–68.
5. *Кормильцев В.В., Ратушняк А.Н.* Векторные интегральные уравнения для градиента потенциала геофизических полей// *Рос. геофиз. журн.*, 1995. № 5-6. С.4–10.
6. *Краев А.П.* Основы геоэлектрики. Ч.1. М.;Л.: Гостеортехиздат, 1951. С.289–291.
7. *Кормильцев В.В., Семенов В.Д.* Электроразведка методом заряда. М.: Недра, 1987. 218 с.
8. *Кормильцев В.В., Ратушняк А.Н.* Электрическое и магнитное поле при течении жидкости в пористой среде с локальными неоднородностями фильтрационных и электрических свойств. Деп. в ВИНТИ: 1994. №2708-В 94. 18 с.
9. *Кормильцев В.В., Ратушняк А.Н.* Объемные векторные интегральные уравнения для потенциальных геофизических полей. Деп. в ВИНТИ: 1995. № 712-В 95. 15 с.
10. *Кормильцев В.В.* Электрокинетические явления в пористых горных породах. Деп в ВИНТИ: 1995. № 192 - В 95. 48 с.
11. *Фридрихсберг Д.А.* Курс коллоидной химии. Л.: Химия, 1974. 352 с.
12. *Скорчеллетти В.В.* Теоретическая электрохимия. Л.: Химия, 1974. С.84–87.
13. *Кормильцев В.В., Ратушняк А.Н.* Объемные векторные интегральные уравнения для стационарного переноса тепла в фильтрующей среде. Деп.в ВИНТИ: 1996. № 1849 - В 96. 21 с.
14. *Теркот Д., Шуберт Дж.* Геодинамика. Т.1. М.: Мир, 1985. 374 с.
15. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1965. С.419.
16. *Аравин В.И., Нумеров С.Н.* Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: Гостеортехиздат, 1953. С.39–46.
17. *Кормильцев В.В., Ратушняк А.Н.* Интегро-дифференциальное и интегральное уравнения, описывающие неустановившееся течение

- сжимаемого флюида в пористой среде с включением. Деп. в ВИНТИ: 1995. № 1274 - В 95. 7 с.
18. *Кормильцев В.В., Мезенцев А.Н., Медведева М.А.* Неустановившееся электрическое поле электрокинетической природы, создаваемое точечным источником давления//Физика Земли, 1996. №1. С.41–44.
 19. *Кормильцев В.В., Ратушняк А.Н.* Определение электрического поля диффузии раствора электролита в пористой среде при помощи интегральных уравнений. Деп. в ВИНТИ: 1995. № 2190 - В 95. 13 с.
 20. *Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И.* Начала теории вычислительных методов. Интегральные уравнения, некорректные задачи и улучшение сходимости. Минск: Наука и техника, 1984.
 21. *Канторович Л.В., Крылов В.И.* Приближенные методы высшего анализа. М.;Л.: Физматгиз, 1962. 708 с.
 22. *Livesay D.E, Chen K.M.* Electromagnetic Field Induced Arbitrarily Shaped Biological Bodies//IEEE Trans. MTT: 1974, №22, V.12.P.1273.
 23. Магниторазведка. Справочник геофизика. М.: Недра, 1990. 470 с.
 24. Сейсмическая томография. Под ред. *Г.Нолета*. М.: Наука, 1990. 416 с.
 25. *Семенов В.Д., Кормильцев В.В., Ратушняк А.Н., Полянин Д.А.* Математическое моделирование для метода мелкомасштабного заряда. Деп. в ВИНТИ: 1995. №1619-В95.15с.
 26. *Семенов В.Д., Ратушняк А.Н., Человечков А.И., Мурзаев А.А.* О компенсации аномалий от приповерхностных неоднородностей в методе заряда. Деп. в ВИНТИ: 1995. № 1617-В95. 9с.
 27. (СССР) / 1277773 / *В.В.Кормильцев, А.И.Человечков, Ф.М.Каменецкий* и др. Способ электроразведки. 1985. G01V3/18.
 28. *Кормильцев В.В., Костров Н.П., Ратушняк А.Н.* и др. Динамика магнитного поля на объекте, подобном Манчажской магнитной аномалии на Западном Урале. Деп. в ВИНТИ: 1995. №2193–В95. 14 с.
 29. *Кормильцев В.В., Костров Н.П., Ратушняк А.Н.* Трехмерное моделирование региональных аномалий сложного внутреннего строения. Деп. в ВИНТИ: 1997. № 1474-В97. 9 с.
 30. *Кормильцев В.В., Ратушняк А.Н.* Математическое моделирование электромагнитного поля при течении жидкости в пористой среде с локальными неоднородностями. Деп в ВИНТИ: 1995. № 561-В95. 18 с.
 31. *Кормильцев В.В., Ратушняк А.Н.* Электрическое и магнитное поле при течении жидкости в пористой среде с локальными неоднородностями фильтрационных и электрических свойств//Физика Земли. 1997. №8. С.81–87.

32. Shapiro V.A., Muminov M.Yu., Khadzhyev T.Kh., Abdullabekov K.N. Magnetic Field Variation of Crustal Origin Measured in the Fergana Valley of Uzbekistan, Reflecting Seismotectonic Dynamics. Electromagnetic Phenomena Related to Earthquake Prediction. TERRAPUB, Tokyo, 1994. P.43–49.
33. Булашевич Ю.П. Тепловой поток в условиях вертикальной фильтрации//ДАН СССР. 1980. Т.255, №6. С.1447–1449.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ _____ Ошибка! Закладка не определена.

1. ОБЪЕМНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ГРАДИЕНТА ПОТЕНЦИАЛА СТАЦИОНАРНЫХ ГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ _____ Ошибка! Закладка не определена.

1.1. Определение градиента электрического потенциала, создаваемого объемно распределенными сторонними токами в неоднородной среде. _____ Ошибка! Закладка не определена.

1.2. Определение магнитного поля полного тока. Ошибка! Закладка не определена.

1.3. Аналогичные интегральные уравнения. Ошибка! Закладка не определена.

1.4. Родственные интегральные уравнения. Ошибка! Закладка не определена.

1.5. Интегральные уравнения для градиентов температуры и концентрации в фильтрующей среде. Ошибка! Закладка не определена.

2. ОБЪЕМНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ДИФФУЗИИ, ФИЛЬТРАЦИИ СЖИМАЕМОГО ФЛЮИДА Ошибка! Закладка не определена.

2.1. Определение градиента давления и скорости фильтрации сжимаемого флюида _____ Ошибка! Закладка не определена.

2.2. Нестационарная диффузия в среде с переменной пористостью _____ Ошибка! Закладка не определена.

2.3. Нестационарная температура в фильтрующей среде. Ошибка! Закладка не определена.

3. СПОСОБЫ ОТЫСКАНИЯ РЕШЕНИЙ И ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ Ошибка! Закладка не определена.

3.1. Основные алгоритмы решения системы интегральных уравнений _____ Ошибка! Закладка не определена.

3.2. Внутренние и внешние оценки точности результатов. Ошибка! Закладка не определена.

3.3. Краткое описание пакетов программ **Ошибка! Закладка не определена.**

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ _____ **Ошибка! Закладка не определена.**

4.1. Расчеты электрического и магнитного поля источников постоянного тока _____ **Ошибка! Закладка не определена.**

4.2. Намагничивание неоднородного магнетика земным магнитным полем и его вариацией **Ошибка! Закладка не определена.**

4.3. Моделирование фильтрации несжимаемого флюида **Ошибка! Закладка не определена.**

4.4. Моделирование электрического и магнитного поля при течении несжимаемого флюида _ **Ошибка! Закладка не определена.**

4.5. Расчеты зависимости электрического и магнитного поля от времени при течении сжимаемого флюида **Ошибка! Закладка не определена.**

4.6. Моделирование стационарной температуры и теплового потока в фильтрующей среде ____ **Ошибка! Закладка не определена.**

ЗАКЛЮЧЕНИЕ _____ **Ошибка! Закладка не определена.**

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ _____ **84**

Научное издание

Валерий Викторович Кормильцев
Александр Николаевич Ратушняк

Моделирование геофизических полей при помощи объемных
векторных интегральных уравнений

Рекомендовано к изданию Ученым Советом Института
геофизики и НИСО УрО РАН