А.А.КАУФМАН, А.М.КАГАНСКИЙ

ИНДУКЦИОННЫЙ МЕТОД ИЗУЧЕНИЯ ПОПЕРЕЧНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В СКВАЖИНАХ

1972

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ИНСТИТУТ ГЕОЛОГИИ И ГЕОФИЗИКИ

А. А. КАУФМАН, А. М. КАГАНСКИЙ

ИНДУКЦИОННЫЙ МЕТОД ИЗУЧЕНИЯ ПОПЕРЕЧНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В СКВАЖИНАХ

ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА“ — СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

НОВОСИБИРСК, 1972

Ответственный редактор
член-корреспондент Академии наук СССР
М.М. ЛАВРЕНТЬЕВ

В В Е Д Е Н И Е

В последние годы научные и производственные организации, занимающиеся развитием электромагнитных методов в нефтяных и газовых скважинах, стали разрабатывать новые модификации индукционного каротажа, в которых объектом измерения являются магнитные поля, создаваемые как вертикальными, так и горизонтальными магнитными диполями.

Эти разработки предпринимаются для повышения глубинности исследования (И.М.Заслонов), более детального расчленения тонкослоистого разреза и изучения анизотропии пластов (И.Е.Эйдман, С.М.Аксельрод). В настоящее время накоплен значительный экспериментальный материал, но дальнейшее усовершенствование этих методов связано с развитием теории, позволяющей получить представление об основных особенностях электромагнитного поля горизонтального диполя в средах с цилиндрическими и горизонтальными поверхностями раздела. При создании теории индукционного каротажа, предложенного Г.Г.Доллем, значительную роль сыграло камерное моделирование. В данном случае возможности этого вида моделирования весьма ограничены, так как электрическое поле пересекает поверхности раздела, и для обеспечения контакта между растворами, имеющими различное удельное сопротивление, необходима разработка неискажающих перегородок. Как известно, эти достаточно тонкие слои должны не оказывать сопротивления току в направлении, перпендикулярном слою, и обладать бесконечно большим продольным сопротивлением, поэтому реализация таких перегородок связана с серьёзными техническими трудностями.

Предлагаемая вниманию читателей монография посвящена теории индукционного каротажа с поперечным магнитным диполем и состоит из трех глав.

В первой главе подробно рассматривается поле горизонтального магнитного диполя в изотропных средах с одной и двумя цилиндрическими поверхностями раздела и исследуются возможности исключения влияния скважины и зоны проникновения. Во второй главе дан анализ электромагнитного поля в изотропных пластах ограниченной мощности. Последняя глава посвящена изучению электромагнитного поля в однородной анизотропной среде и в анизотропных средах с двумя горизонтальными поверхностями раздела.

Авторы считают своим приятным долгом выразить глубокую благодарность член-корр. АН СССР М.М.Лаврентьеву, любезно согласившемуся быть научным редактором этой монографии.

Глава I

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ В СРЕДЕ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ РАЗДЕЛА

§ I. Электромагнитное поле магнитного диполя в однородной изотропной среде

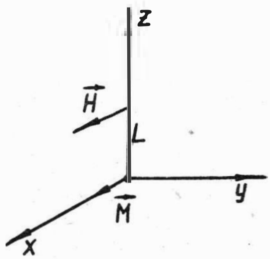


Рис. I.

Анализ электромагнитного поля начнем с наиболее простого случая однородной изотропной среды. Как известно, выражения комплексных амплитуд поля диполя, момент которого направлен вдоль оси X (рис.I), имеют вид

$$E_\varphi = \frac{i\omega\mu M}{4\pi R^2} e^{ikR}(1-ikR)\sin\theta$$

$$H_R = \frac{2M}{4\pi R^3} e^{ikR}(1-ikR)\cos\theta \qquad (I.I)$$

$$H_\theta = \frac{M}{4\pi R^3} e^{ikR}(1-ikR-k^2R^2)\sin\theta ,$$

где $M = J n S$ - момент диполя, γ - удельная проводимость, μ - магнитная проницаемость, равная $4\pi \cdot 10^{-7}$ гн/м, ω -круговая частота, k - волновое число среды, $k = \frac{1+i}{\delta}$, здесь δ - толщина скин-слоя.

Источником вторичного поля являются вихревые токи, распределение которых определяется частотой и электропроводностью среды. Токовые линии представляют собою окружности, лежащие в вертикальных плоскостях, перпендикулярных оси OX. При разработке теории индукционного каротажа основное внимание было уделено вертикальной компоненте магнитного поля. При возбуждении поля горизонтальным магнитным диполем ось скважины лежит в экваториальной плоскости, где отлична от нуля только горизонтальная компонента H_ϑ, которая ранее подробно не рассматривалась. Итак, на оси z ($\vartheta = \frac{\pi}{2}$) имеем

$$H_x = -\frac{M}{4\pi L^3} e^{ikL}(1 - ikL - k^2L^2), \qquad (I.2)$$

где L - длина зонда (расстояние между диполем и точкой измерения).

$$H_x^0 = -\frac{M}{4\pi L^3} \qquad (I.3)$$

- поле магнитного диполя в воздухе, направленное в сторону, противоположную моменту диполя. Введем величину h_x, равную

$$h_x = \frac{H_x}{H_x^0} = (1 - ikL - k^2L^2)e^{ikL}. \qquad (I.4)$$

Подставив в (I.4) значение $k = \frac{1+i}{\delta}$, представим поле в виде суммы двух компонент - реактивной, синфазной с током в генераторной катушке, и активной, сдвинутой по фазе на 90° относительно этого тока.

$$\begin{aligned} h_x^{реакт} &= \operatorname{Re} h_x = \left[(1+p)\cos p + p(1+2p)\sin p\right] e^{-p} \\ h_x^{акт} &= \operatorname{Im} h_x = \left[(1+p)\sin p - p(1+2p)\cos p\right] e^{-p}. \end{aligned} \qquad (I.5)$$

где p - параметр, определяющий поле h_x и равный расстоянию от точки измерения до диполя, выраженному в единицах толщины скин-слоя: $p = \frac{L}{\delta}$.
Согласно (I.5) для амплитуды и фазы поля имеем

$$A = e^{-p}\sqrt{(1+p)^2 + p^2(1+2p)^2}\,, \qquad \varphi = p - \operatorname{arctg}\frac{p(1+2p)}{1+p}\,. \tag{I.6}$$

Вначале рассмотрим поле в ближней зоне, когда параметр p мал. Разлагая экспоненту e^{ikL} в ряд и подставляя в (I.4), после элементарных преобразований получаем

$$h_x = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ikL)^{n+2}(n+1)}{n!\,(n+2)}\,. \tag{I.7}$$

Ограничиваясь первыми двумя членами, имеем

$$h_x^{\text{реакт}} = 1 + \frac{4}{3}p^3 \qquad h_x^{\text{акт}} = -p^2 + \frac{4}{3}p^3\,. \tag{I.8}$$

Таким образом, в области малого параметра, когда отсутствует взаимодействие между токами, преобладает активная составляющая горизонтальной компоненты, которая прямо пропорциональна частоте, удельной проводимости, и численно равна активной составляющей вертикальной компоненты, измеренной на таком же расстоянии вдоль оси диполя.

В волновой зоне на расстояниях, значительно превышающих толщину скин-слоя, преобладает компонента $H_\vartheta(\vartheta \neq 0)$ и в экваториальной плоскости

$$H_x = \frac{M}{4\pi L}k^2 e^{ikL} \qquad |kL| > 1\,. \tag{I.9}$$

Согласно (I.I) в волновой зоне отношение электрического поля к магнитному не зависит от расстояния и равно импедансу в однородной среде

Таблица I

P	$h_z^{акт}$	$h_x^{акт}$	$h_z^{реакт}$	$h_x^{реакт}$	A_z	A_x	φ_z	φ_x
0.0I	0.9933 IO^{-4}	-0.9867 IO^{-4}	0.66I6 IO^{-6}	0.I3I8 IO^{-5}	0.9933 IO^{-4}	0.9867 IO^{-4}	0.I564 IO^{I}	-0.I557 IO^{I}
	I403 IO^{-3}	I392 IO^{-3}	IIII IO	22I2	I403 IO^{-3}	I392 IO^{-3}	I562	I555
	I98I	I962	I865	37II	I98I	I963	I56I	I552
	2796	2765	3I3I	6223 IO^{-5}	2796	2766	I559	I548
0.02	3946	3893	5253	I043 IO^{-4}	3947	3895	I557	I544
	5567	5477	88I0 IO^{-5}	I746	5567	5480	I554	I539
	7849 IO^{-3}	7698 IO^{-3}	I476 IO^{-4}	2924	7850 IO^{-3}	7704 IO^{-3}	I55I	I533
	II06 IO^{-2}	I08I IO^{-2}	2743	4884	II06 IO^{-2}	I082 IO^{-2}	I548	I526
0.04	I557	I5I5	4I40	8I55 IO^{-4}	I557	I5I7	I544	I5I7
	2I9I	2II9	6922 IO^{-4}	I360 IO^{-3}	2I92	2I24	I539	I507
	3079	2959	II56 IO^{-3}	2263	308I	2967	I533	I494
	4322	4I20	I929	3759	4327	4I37	I526	I480
0.08	6059	57I9	52I2	6230 IO^{-3}	6067	5753	I5I7	I462
	8477 IO^{-2}	7907 IO^{-2}	534I	I029 IO^{-2}	8494 IO^{-2}	7973 IO^{-2}	I507	I44I
	II83 IO^{-I}	I088 IO^{-I}	8859 IO^{-3}	I695	II87 IO^{-I}	II0I IO^{-I}	I496	I4I6
	I648	I488	I456 IO^{-2}	2779	I654	I5I3	I482	I386
0.I6	2288	20I9	24I6	4534	230I	2069	I465	I350
	3I64	27I4	3970	735I IO^{-2}	3I89	28I2	I445	I306
	4354	3603	649I IO^{-2}	II83 IO^{-I}	4402	3792	I422	I253
	5958	4708	I055 IO^{-I}	I886	605I	5072	I395	II90

Продолжение таблицы I

P	$h_z^{акт}$	$h_x^{акт}$	$h_z^{реакт}$	$h_x^{реакт}$	A_z	A_x	φ_z	φ_x
0.32	8094 IO^{-I}	6022	I704	2973	8272 IO^{-I}	67I6	I363	III2
	0.I089	748I	2730	4622	0.II23	8794 IO^{-I}	I325	0.IOI7 IO^{I}
	I45I	89I8	435I	7059 IO^{-I}	I5I4	0.II37	I280	0.90I2
	I905	9987 IO^{-I}	6788 IO^{-I}	0.I054	2022	I452	I228	7582
0.64	2457	-0.I007	I048	I53I	267I	I833	II67	58I8
	3099	-0.8I90 IO^{-I}	I590	2I42	3484	2293	I096	3652
	3799	-0.2935 IO^{-I}	236I	285I	4473	2866	IOI4 IO^{I}	-0.I026
	4488	+0.7408 IO^{-I}	34I2	3539	5638	36I6	0.9207	+0.2063
I.28	5052	+0.2440	4772	3955	6950	4648	8I38	5528
	5336	4845	64I4	3687	8344	6088	6939	0.9203
	5I69	0.77I2	82I2	+0.2204	9704	0.802I	66I7	0.I293 IO^{I}
	4434	0.I035 IO^{I}	9923	-0.9288 IO^{-I}	I086 IO^{I}	0.I039 IO^{I}	4202	I660
2.56	3I65	II63	II2I IO^{I}	-0.5646	II65	I293	275I	2023
	I630	0.I042 IO^{I}	II77	I092 IO^{I}	II88	I509	I373	2380
	+0.2903 IO^{-I}	0.65I9	II54	I476	II54	I6I5	0.25I4 IO^{-I}	2726
	- 4275	+0.I553	I08I	I54I	I082	I549	-0.3950 IO^{-I}	304I
5.I2	- 4570	-0.I699	IOI3 IO^{I}	I30I	IOI4 IO^{I}	I3I2	4506	327I
	-0.I665 IO^{-I}	-0.I8I7	9868	IOI9	0.9870	I035	-0.I687 IO^{-I}	33I8
	+0.I843 IO^{-2}	-0.4I4I IO^{-I}	0.9923	-0.9309	0.9923	93I8	+0.I857 IO^{-2}	3I86

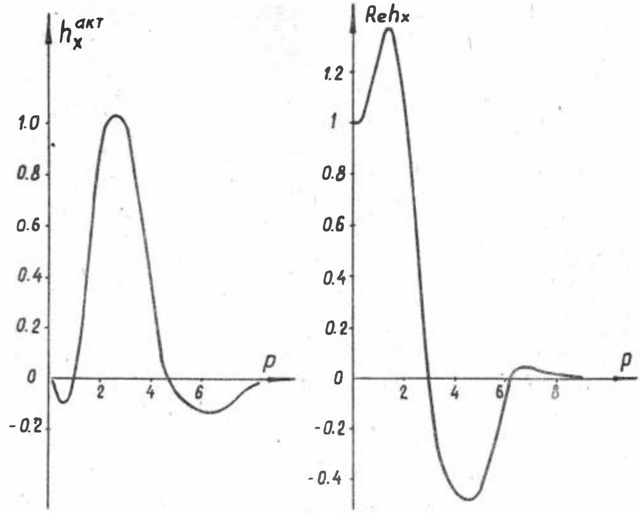


Рис. 2. Активная и реактивная компоненты поля.

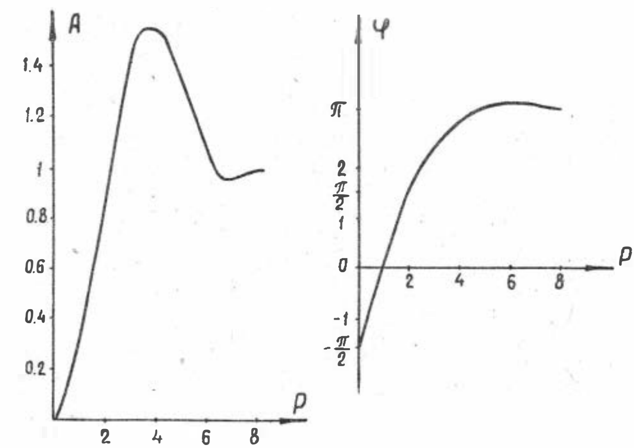


Рис. 3. Амплитуда и фаза вторичного поля.

$$\frac{E_y}{H_x} = \frac{\omega\mu}{k} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\gamma}}\, e^{-i\frac{\pi}{4}} . \tag{I.10}$$

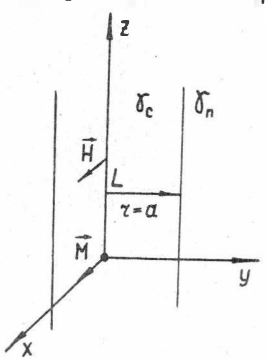
В табл.I приведены значения амплитуды, фазы и компонент поля как функции параметра p. Для сравнения здесь же даны значения h_z для вертикального диполя.

Очевидно $\frac{H_x^{Г}}{H_z^{В}} = \frac{1}{2}\frac{h_x}{h_z}$.

На рис. 2 представлены графики компонент поля h_x, а на рис.3 амплитуда вторичного поля $|h_x - 1|$ и его фаза.

§ 2. Горизонтальная компонента магнитного поля на оси скважины (вывод формул)

Предположим, что горизонтальный магнитный диполь расположен на оси скважины радиуса a, скважина заполнена средой с удельной проводимостью γ_1, удельная проводимость пласта- γ_2.



Р и с. 4.

Магнитные проницаемости сред совпадают с магнитной проницаемостью воздуха $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ гн/м. Введем цилиндрическую систему координат, в начале которой помещен магнитный диполь с моментом $M = M_0 \cdot e^{-i\omega t}$, направленным вдоль оси X (рис.4).

Система уравнений Максвелла для квазистационарного поля имеет вид

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} \vec{E} = i\omega\mu\vec{H} \qquad &\operatorname{div} \vec{E} = 0 \\ &\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma\vec{E} \qquad &\operatorname{div} \vec{H} = 0 . \end{aligned} \tag{I.11}$$

При возбуждении поля горизонтальным диполем первичное вихревое электрическое поле, в отличие от поля вертикального диполя, пересекает поверхность раздела сред с разной удельной проводимостью. Поэтому на стенках скважины появляются поверхностные заряды, плотность которых синхронно изменяется с электрическим полем в данной точке, зависит от удельной проводимости обеих сред и является функцией координат точек поверхности.

Таким образом, в рассматриваемой задаче источниками поля являются токи и заряды и, соответственно, не удается выразить компоненты электромагнитного поля только через одну составляющую вектор-потенциала магнитного типа. Решение задачи с помощью всех трех компонент потенциала $\vec{\Pi}^*(\Pi_r^*, \Pi_\varphi^*, \Pi_z^*)$ приводит к системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Поэтому представим решение в виде суммы двух типов полей и введем два потенциала магнитного и электрического типа

$$\vec{E}=\vec{E}^{(1)}+\vec{E}^{(2)}, \qquad \vec{H}=\vec{H}^{(1)}+\vec{H}^{(2)}$$
$$\vec{E}^{(1)}=i\omega\mu \operatorname{rot}\vec{\Pi}^*, \qquad \vec{H}=\operatorname{rot}\vec{\Pi}. \tag{I.I2}$$

Тогда из уравнений (I.II) следует, что

$$\vec{H}^{(1)}=k^2\vec{\Pi}^*-\operatorname{grad}U^*, \qquad \vec{E}^{(2)}=i\omega\mu\vec{\Pi}-\operatorname{grad}U, \tag{I.I3}$$

где $k^2=i\gamma\mu\omega$. При выполнении условий калибровки

$$U^*=-\operatorname{div}\vec{\Pi}^*, \qquad \gamma U=-\operatorname{div}\vec{\Pi} \tag{I.I4}$$

потенциалы удовлетворяют волновому уравнению

$$\nabla^2\vec{\Pi}+k^2\vec{\Pi}=0 \quad \text{и} \quad \nabla^2\vec{\Pi}^*+k^2\vec{\Pi}^*=0. \tag{I.I5}$$

Покажем, что решение данной задачи можно представить только через вертикальные компоненты потенциалов /6/:

$$\vec{\Pi}^*=(0,0,\Pi^*) \qquad \vec{\Pi}=(0,0,\Pi) \tag{I.I6}$$

(ось z совпадает с осью скважины).

Тогда согласно (I.I2), в колебаниях магнитного и электрического типа соответственно отсутствует вертикальная компонента электрического и магнитного полей

$$E_z^{(1)} = 0 \qquad H_z^{(2)} = 0. \tag{I.I7}$$

Очевидно, при возбуждении поля в однородной изотропной среде магнитным диполем существуют только колебания магнитного типа, а при возбуждении электрическим диполем - электрического типа. Согласно (I.I3) колебания магнитного типа выражаются только через потенциал $\vec{\Pi}^*$

$$\begin{aligned} E_r &= i\omega\mu \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi^*}{\partial \varphi} & H_r &= \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial r \partial z} \\ E_\varphi &= -i\omega\mu \frac{\partial \Pi^*}{\partial r} & H_\varphi &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial \varphi \partial z} \\ E_z &= 0 & H_z &= k^2\Pi^* + \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial z^2}, \end{aligned} \tag{I.I8}$$

который удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial z^2} + k^2\Pi^* = 0. \tag{I.I9}$$

Аналогично для колебаний электрического типа имеем

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{1}{\gamma}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r \partial z} & H_r &= \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} \\ E_\varphi &= \frac{1}{\gamma r}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi \partial z} & H_\varphi &= -\frac{\partial \Pi}{\partial r} \\ E_z &= \frac{1}{\gamma}\left(k^2\Pi + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}\right) & H_z &= 0 \end{aligned} \tag{I.20}$$

и

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Pi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + k^2\Pi = 0. \tag{I.2I}$$

Нетрудно видеть, что в отличие от задач дифракции электромагнитных волн на сфере, в данном случае не удается обеспечить непрерывность тангенциальных компонент поля одного типа колебаний с помощью только магнитного или электрического потенциалов. Иными словами, не представляется возможным отдельно решить краевую задачу для каждого типа колебаний. Это обстоятельство существенно осложняет вывод формул для компонент электромагнитного поля в среде с несколькими цилиндрическими поверхностями раздела.

Таким образом, равенство тангенциальных компонент поля, состоящего из колебаний электрического и магнитного типа, на поверхности скважины ($r = a$) приводит к следующей системе граничных условий для потенциалов Π и Π^*.

$$\frac{1}{\gamma_1}\left[k_1^2 \Pi_1 + \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial z^2}\right] = \frac{1}{\gamma_2}\left[k_2^2 \Pi_2 + \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial z^2}\right]$$

$$\frac{1}{\gamma_1}\left[\frac{1}{a}\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \varphi \partial z} - k_1^2 \frac{\partial \Pi_1^*}{\partial r}\right] = \frac{1}{\gamma_2}\left[\frac{1}{a}\frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial \varphi \partial z} - k_2^2 \frac{\partial \Pi_2^*}{\partial r}\right] \qquad \text{(I.22)}$$

$$k_1^2 \Pi_1^* + \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial z^2} = k_2^2 \Pi_2^* + \frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial z^2}$$

$$-\frac{\partial \Pi_1}{\partial r} + \frac{1}{a}\frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial \varphi \partial z} = -\frac{\partial \Pi_2}{\partial r} + \frac{1}{a}\frac{\partial^2 \Pi_2^*}{\partial \varphi \partial z},$$

здесь k_1, Π_1, Π_1^* и k_2, Π_2, Π_2^* - волновые числа и потенциалы в скважине и пласте.

Итак, компоненты вектор-потенциалов удовлетворяют волновому уравнению (I.I9, I.2I), решение которого известно, и условиям сопряжения (I.22).

Теперь для решения задачи, зная поведение поля вблизи источника, найдем выражения для потенциалов Π_0 и Π_0^* в однородной среде с удельной проводимостью γ_1, которые позволяют сформулировать условия возбуждения для Π_1 и Π_1^*. Как уже было отмечено выше, поле диполя в однородной изотропной среде описывается с помощью одной компоненты потенциала магнитного типа $\vec{\Pi}^* = (\Pi_x, 0, 0)$

$$\Pi_x^* = \frac{M}{4\pi}\frac{e^{ik_1 R}}{R} = \frac{M}{2\pi^2}\int_0^\infty K_0(\lambda, r)\cos\lambda z \, d\lambda, \qquad \text{(I.23)}$$

где $\lambda_1 = \sqrt{\lambda^2 - k_1^2}$ и

$$\vec{E} = i\omega\mu \operatorname{rot} \vec{\Pi}^* \qquad \vec{H} = k^2 \vec{\Pi}^* + \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Pi}^* \qquad (I.24)$$

Отсюда, для вертикальных компонент поля получаем

$$E_z^0 = i\omega\mu \frac{M}{2\pi^2} \sin\varphi \int_0^\infty \lambda_1 K_1(\lambda_1 r) \cos\lambda z \, d\lambda$$

$$H_z^0 = \frac{M}{2\pi^2} \cos\varphi \int_0^\infty \lambda \lambda_1 K_1(\lambda_1 r) \sin\lambda z \, d\lambda , \qquad (I.25)$$

где $\cos\varphi = \frac{x}{r}$ $\quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

С другой стороны, из (I.18) и (I.20) имеем

$$E_z = \frac{1}{\gamma_1}\left(k_1^2 \Pi_1 + \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial z^2}\right) \quad H_z = k_1^2 \Pi_1^* + \frac{\partial^2 \Pi_1^*}{\partial z^2} . \qquad (I.26)$$

Нетрудно теперь видеть, что полю в однородной среде (I.25) соответствуют

$$\Pi_0 = -k_1^2 \frac{M}{2\pi^2} \sin\varphi \int_0^\infty \frac{1}{\lambda_1} K_1(\lambda_1 r) \cos\lambda z \, d\lambda$$

$$\Pi_0^* = -\frac{M}{2\pi^2} \cos\varphi \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda_1} K_1(\lambda_1 r) \sin\lambda z \, d\lambda . \qquad (I.27)$$

Формально выражения (I.27) представляют поле в виде суммы колебаний электрического и магнитного типов, хотя, как отмечалось выше, в однородной среде присутствует только один тип колебаний. Но, вместе с тем, очевидно, что между потенциалами Π_0 и Π_0^* существует связь $\frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial\varphi \partial z} = -k_1^2 \Pi_0^*$, которая объясняет кажущееся противоречие.

Таким образом, по мере приближения к источнику поля потенциалы Π_1 и Π_1^* стремятся к Π_0 и Π_0^*. Учитывая поведение поля вблизи источника и на бесконечно большом удалении от него, представим потенциалы в виде

$$\Pi_1 = \Pi_0 + k_1^2 \frac{M}{2\pi^2} \sin\varphi \int_0^\infty \frac{1}{\lambda_1} C\, I_1(\lambda_1 r) \cos\lambda z \, d\lambda$$

$$\Pi_1^* = \Pi_0^* + \frac{M}{2\pi^2}\cos\varphi \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda_1} D I_1(\lambda_1 r)\sin\lambda z\, d\lambda$$

$$\Pi_2 = -k_2^2 \frac{M}{2\pi^2}\sin\varphi \int_0^\infty \frac{1}{\lambda_2} E K_1(\lambda_2 r)\cos\lambda z\, d\lambda \qquad (I.28)$$

$$\Pi_2^* = -\frac{M}{2\pi^2}\cos\varphi \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda_2} G K_1(\lambda_2 r)\sin\lambda z\, d\lambda .$$

Из граничных условий (I.22) получаем систему уравнений для коэффициентов C, D, E и G

$$K_1(\lambda_1 a) - I_1(\lambda_1 a) C = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} K_1(\lambda_2 a) E$$

$$\frac{1}{\lambda_1 a}\left\{K_1(\lambda_1 a) - I_1(\lambda_1 a) C\right\} + \left\{K_1'(\lambda_1 a) - I_1'(\lambda_1 a) D\right\} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_2 a} K_1(\lambda_2 a) E + K_1'(\lambda_2 a) G \qquad (I.29)$$

$$K_1(\lambda_1 a) - I_1(\lambda_1 a) D = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} K_1(\lambda_2 a) G$$

$$k_1^2\left\{K_1'(\lambda_1 a) - I_1'(\lambda_1 a) C\right\} + \frac{\lambda^2}{\lambda_1 a}\left\{K_1(\lambda_1 a) - I_1(\lambda_1 a) D\right\} =$$

$$= k_2^2 K_1'(\lambda_1 a) E + \frac{\lambda^2}{\lambda_2 a} K_1(\lambda_2 a) G .$$

Решая систему, находим

$$C = \frac{\Delta_C}{\Delta} \qquad D = \frac{\Delta_D}{\Delta} \qquad E = \frac{m_1}{m_2}\,\frac{K_1(m_1) - I_1(m_1) C}{K_1(m_2)}$$

$$G = \frac{m_1}{m_2}\,\frac{K_1(m_1) - I_1(m_1) D}{K_1(m_2)}$$

$$\Delta_C = I_0(m_1)K_0(m_1) + I_1(m_1)K_1(m_1)P_1 - I_1(m_1)K_0(m_1)P_2 - S\frac{K_0(m_2)}{m_2 K_1(m_2)}$$

$$\Delta_D = I_0(m_1)K_0(m_1) + I_1(m_1)K_1(m_1)P_1 - I_1(m_1)K_0(m_1)P_2 - \frac{K_0(m_2)}{m_2 K_1(m_2)} \qquad (I.30)$$

$$\Delta = -I_0^2(m_1) + I_1^2(m_1)P_1 + I_0(m_1)I_1(m_1)P_2 ,$$

где

$$P_1 = \frac{2m^2 - m_2^2}{m_2^3}(1-S)\frac{K_0(m_2)}{K_1(m_2)} - \frac{m_1^2}{m_2^2} S \frac{K_0^2(m_2)}{K_1^2(m_2)} \qquad (I.31)$$

$$P_2 = \frac{2m^2 - m_1^2}{m_1 m_2^2}(1-S) - \frac{m_1}{m_2}(1+S)\frac{K_0(m_2)}{K_1(m_2)},$$

здесь $m = \lambda a$, $m_1 = \lambda_1 a$, $m_2 = \lambda_2 a$ и $S = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$.

Магнитное поле на оси скважины имеет только компоненту H_x, параллельную моменту диполя. Используя (I.18) и (I.20), получаем

$$H_x = H_x^{(0)} + \frac{M}{2\pi^2}\frac{1}{a^3}\int_0^\infty \left\{\frac{m^2}{2}D + \frac{k_1^2 a^2}{2}C\right\}\cos\frac{L}{a} m\,dm, \qquad (I.32)$$

где $H_x^0 = -\frac{M}{4\pi L^3}(1 - ik_1 L - k_1^2 L^2)e^{ikL}$ – поле в однородной среде.

L – длина зонда.

Представим поле H_x на оси скважины в единицах поля в воздухе $\left(-\frac{M}{4\pi L^3}\right)$. Тогда

$$h_x = \frac{H_x}{H_x^0} = (1 - ik_1 L - k_1^2 L^2)e^{ikL} - \frac{\alpha^3}{\pi}\int_0^\infty (m^2 D + k_1^2 a^2 C)\cos\alpha m\,dm. \qquad (I.33)$$

здесь $\alpha = \frac{L}{a}$.

В табл.2 приведены параметры среды, для которых выполнены расчёты активной и реактивной компонент поля h_x, его амплитуды и фазы, а также величины $\frac{\gamma_K}{\gamma_1} = \frac{A}{A_0}$ (A и A_0 – соответственно амплитуды вторичного поля на оси скважины и в однородной среде с удельной проводимостью γ_1). Результаты расчета представлены в виде частотных характеристик поля.

Таблица 2

α	I, 2, 3 . . . . 29, 30
S	0, $\frac{1}{128}$, $\frac{1}{64}$, $\frac{1}{32}$, ... $\frac{1}{2}$, 2, 8, 32, I28
$\frac{a}{\delta_1}$	$\frac{1}{80}$, $\frac{1}{80}\sqrt{2}$, . . . $\frac{6,4}{\sqrt{2}}$, 6,4

§ 3. Магнитное поле H_x на оси скважины в ближней зоне (область малого параметра)

Вначале рассмотрим магнитное поле H_x в ближней зоне, когда длина зонда значительно меньше толщины скин-слоя в скважине и пласте. В области малого параметра $p=\frac{L}{\delta}$ образование поля можно представить следующим образом. Изменение магнитного поля, созданного только током в диполе, возбуждает вихревое электрическое поле, силовые линии которого лежат в вертикальных плоскостях, перпендикулярных моменту диполя. Под действием этого первичного поля, прямо пропорционального частоте, возникает ток и, в отличие от поля вертикального диполя, токовые линии пересекают поверхность раздела сред с разной проводимостью. Поэтому на стенках скважины появляются электрические заряды, которые, так же как плотность тока, пропорциональны квадрату волнового числа $k^2=i\gamma\mu\omega$, поскольку взаимодействие между токами предполагается бесконечно малым и не учитывается. В области малого параметра взаимное влияние зарядов в соответствии с законом Кулона изменяет величину и направление вектора плотности тока $\vec{j}$, но при этом фаза остается постоянной и равной $\frac{\pi}{2}$ относительно тока в диполе. Таким образом, магнитное поле токов, возникающих под действием первичного вихревого электрического поля и вторичного поля зарядов, пропорционально k^2. Вторичное вихревое электрическое поле возникает в результате взаимодействия токов и поэтому значительно меньше поля зарядов и, соответственно, не учитывается в приближенной теории малого параметра.

Вновь возвращаясь к магнитному полю, представим его в виде суммы двух слагаемых: магнитного поля вихревых токов в среде, заполняющей скважину и пласт, и магнитного поля токов, возникающих под действием электрического поля зарядов. Эта часть магнитного поля совпадает с полем постоянного тока при заданном распределении поверхностных зарядов, поскольку здесь не учитывается индукционный эффект. Для получения асимптотического выражения магнитного поля представим подынтегральную функцию (I.33) в виде ряда по степеням k^2a^2, и, ограничиваясь первым членом, получаем

$$h = h^{(0)} - \frac{2\alpha^3}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha m}{\Delta(0)}\left\{\frac{k_1^2 a^2}{2}\Delta_c(0) - \frac{m}{4}k_1^2 a^2 \frac{\partial \Delta_D(0)}{\partial m_1} - \frac{m}{4}k_2^2 a^2 \frac{\partial \Delta_D(0)}{\partial m_2}\right\} dm, \quad (I.34)$$

где

$$\Delta_c(0) = (1-S)\frac{K_0(m)}{m K_1(m)}$$

$$\Delta(0) = -\frac{1}{m K_1(m)}\left\{I_0(m) + S I_1(m)\frac{K_0(m)}{K_1(m)} - (1-S)\frac{I_1(m)}{m}\right\}$$

$$\frac{\partial \Delta_D(0)}{\partial m_1} = (1-S)\left\{I_1(m)K_0(m)\left(1+\frac{2}{m^2}\right) + \frac{I_0(m)K_0(m)}{m} + \frac{I_1(m)K_1(m)}{m} + \right.$$

$$\left. + \frac{I_0(m)K_0^2(m)}{K_1(m)} - \frac{K_0(m)}{m^2 K_1(m)}\right\} - \frac{1}{m} + S\frac{K_0^2(m)}{m K_1^2(m)} \quad (I.35)$$

$$\frac{\partial \Delta_D(0)}{\partial m_2} = (1-S)\left\{-\frac{2}{m^2} + \frac{K_0(m)}{m K_1(m)} - 1 + \frac{K_0^2(m)}{K_1^2(m)}\right\} I_1(m) K_0(m) -$$

$$- (1-S)\frac{I_1(m)K_1(m)}{m} + \frac{1}{m} - \frac{K_0^2(m)}{m K_1^2(m)}$$

$$h^{(0)} = -\frac{k_1^2 L^2}{2} .$$

Таким образом, для активной компоненты поля имеем

$$\mathrm{Im}\, h_x = -\left(\frac{L}{\delta_1}\right)^2 Q_c(\alpha, S) - \left(\frac{L}{\delta_2}\right)^2 Q_n(\alpha, S) . \quad (I.36)$$

здесь $\delta_1 = \sqrt{\frac{2}{\gamma_1 \mu\omega}}$, $\delta_2 = \sqrt{\frac{2}{\gamma_2 \mu\omega}}$; γ_1 , γ_2 - удельные проводимости среды, заполняющей скважину и пласт.

$$Q_c(\alpha, S) = 1 + \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\infty \left\{\Delta_c(0) - \frac{m}{2}\frac{\partial \Delta_D(0)}{\partial m_1}\right\}\frac{\cos\alpha m}{\Delta(0)} dm \quad (I.37)$$

$$Q_n(\alpha, S) = -\frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{m}{2}\,\frac{\partial \Delta_D(0)}{\partial m_2}\,\frac{\cos \alpha m}{\Delta(0)}\,dm\,.$$

Согласно (I.35) только в однородной среде

$$Q_c(\alpha, 1) + Q_n(\alpha, 1) = 1\,.$$

Как известно /3/, можно получить более полное представление для низкочастотной части спектра. Так, например, учитывая два члена разложения, имеем

$$\begin{aligned} Re\, h_x &= \frac{4}{3}\left(\frac{L}{\delta_2}\right)^3 \\ Jm\, h_x &= -a_1\left(\frac{L}{\delta_1}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{L}{\delta_2}\right)^3, \end{aligned} \tag{I.39}$$

где коэффициент a_1 определяется из выражения (I.34). Следовательно, в области больших длин волн, так же как и при возбуждении поля вертикальным магнитным диполем, реактивная компонента вторичного поля и равная ему часть активной компоненты поля, соответствующая второму слагаемому в (I.39), не зависят от электропроводности бурового раствора скважины. Учитывая известную связь между низкочастотной частью спектра и поздней стадией становления, можно утверждать, что поля, измеренные на достаточно больших временах после выключения тока в источнике, также являются функцией только удельного сопротивления пласта.

Рассмотрим поведение функций Q_c и Q_n, определяющих поведение поля в области малого параметра L/δ, в зависимости от α. Если длина зонда уменьшается ($\alpha \to 0$), то $Q_n(\alpha, S) \to 0$, $Q_c(\alpha, S) \to 1$, и поле становится таким же как в однородной среде с удельной проводимостью γ_1. При больших значениях параметра α, благодаря быстро осциллирующей функции $\cos m\alpha$, значение интеграла в (I.37) определяется характером подынтегральной функции вблизи $m \simeq 0$. Для малых m имеем

$$\Delta(0) = -\frac{1+S}{2} \qquad \Delta_c(0) = (1-S)\,K_0(m)$$

$$\frac{\partial \Delta_D(0)}{\partial m_1} = -\frac{\partial \Delta_D(0)}{\partial m_2} = (1-S)\frac{K_0(m)}{m} . \qquad (I.40)$$

Используя асимптотическое представление интеграла Зоммерфельда

$$\int_0^\infty K_0(m)\cos\alpha m\, dm = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \xrightarrow[\alpha \gg 1]{} \frac{\pi}{2\alpha} ,$$

получаем

$$Q_c(\alpha, S) = 1 - \frac{1-S}{1+S} = \frac{2S}{1+S} = \frac{\gamma_2}{\gamma_{cp}}$$

$$Q_n(\alpha, S) = -\frac{1-S}{1+S} = \frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_2+\gamma_1} = -K_{12} \qquad (\alpha \gg 1) \qquad (I.41)$$

где γ_{cp} - среднее значение удельной проводимости, K_{12} - коэффициент контрастности, характеризующей плотность поверхностных зарядов.

Соответственно, для активной компоненты поля имеем

$$\operatorname{Im} h_x = -\left(\frac{L}{\delta_2}\right)^2 \qquad (\alpha \gg 1) . \qquad (I.42)$$

Таким образом, в низкочастотной части спектра с увеличением длины зонда поле на оси скважины стремится к полю в однородной среде с удельной проводимостью пласта. В общем случае Q_c и Q_n, независимо от длины зонда, являются функциями удельного сопротивления среды. Введем функции $Q_c^*(\alpha, S)$ и $Q_n^*(\alpha, S)$, которые аналогично геометрическим факторам в индукционном каротаже, стремятся, соответственно, к 0 и I при $\alpha \to \infty$

$$Q_c^*(\alpha, S) = Q_c(\alpha, S) - \frac{2S}{1+S}$$

$$Q_n^*(\alpha, S) = Q_n(\alpha, S) + \frac{2}{1+S} \qquad (I.43)$$

$$\operatorname{Im} h_x = -\left(\frac{L}{\delta_1}\right)^2 \left[Q_c^*(\alpha, S) + S Q_n^*(\alpha, S)\right] . \qquad (I.44)$$

Установим асимптотическое поведение функции $Q_c^*(\alpha, S)$ при $\alpha \to \infty$.

Предварительно удобно выделить особенность в подынтегральной функции (I.37) при малых m , для этого представим $Q_c^*(\alpha, S)$ в виде

$$Q_c^*(\alpha, s) = \frac{1-S}{1+S} + \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\Delta(0)}\left[\Delta_c(0) - \frac{m}{2}\frac{\partial \Delta_D(0)}{\partial m_1}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1-S}{1+S} K_0(m)\right\} \cos\alpha m\, dm - \frac{2\alpha}{\pi}\frac{1-S}{1+S}\int_0^\infty K_0(m)\cos\alpha m\, dm = \qquad (I.45)$$

$$= \frac{1-S}{1+S}\left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}\right) + \frac{2\alpha}{\pi}\int_0^\infty \Phi(m)\cos\alpha m\, dm .$$

где

$$\Phi(m) = \frac{1}{\Delta(0)}\left[\Delta_c(0) - \frac{m}{2}\frac{\partial \Delta_D(0)}{\partial m_1}\right] + \frac{1-S}{1+S} K_0(m) .$$

Интегрируя (I.45) по частям, имеем

$$\int_0^\infty \Phi(m)\cos\alpha m\, dm = -\frac{1}{\alpha^2}\Phi'(0) - \frac{1}{\alpha^2}\int_0^\infty \Phi''(m)\cos\alpha m\, dm,$$

так как функция $\Phi(m)$ и её производные стремятся к нулю при $m \to \infty$. Используя известные разложения

$$K_0(m) = -\left(1 + \frac{m^2}{4}\right)\ln\frac{m}{2} - C + \frac{m^2}{4}(1-C)$$

$$K_1(m) = \frac{1}{m} + \frac{m}{2}\ln\frac{m}{2} - \frac{m}{4}(1-2C)$$

$$I_0(m) = 1 + \frac{m^2}{4}$$

$$I_1(m) = \frac{m}{2}\left(1 + \frac{m^2}{8}\right),$$

получаем

$$\Phi(m) = \frac{2S}{(1+S)^2} m^2 \ln^2 m - \left[\frac{3+3S+2S^2}{2(1+S)^2} + \frac{8S}{(1+S)^2}(\ln 2 - c)\right]\frac{m^2}{2}\ln m + const$$

$$\Phi'(0) = 0$$

$$\Phi''(m)=\frac{4S}{(1+S)^2}\ln^2 m-\left[\frac{3-21S+2S^2}{2(1+S)^2}+\frac{8S}{(1+S)^2}(\ln 2-C)\right]\ln m .$$

Поскольку поле на больших расстояниях от диполя определяется низкочастотными пространственными гармониками, в верхнем пределе интеграла (I.45) можно поставить любое конечное число. Тогда

$$\int_0^\infty \Phi(m)\cos\alpha m\,dm \simeq -\frac{1}{\alpha^2}\left\{\frac{4S}{(1+S)^2}\int_0^1 \ln^2 m\cos\alpha m\,dm -\right.$$

$$\left.-\left[\frac{3-21S+2S^2}{2(1+S)^2}+\frac{8S}{(1+S)^2}(\ln 2-C)\right]\int_0^1 \ln m\cos\alpha m\,dm .\right.$$

Так как

$$\int_0^1 \ln^2 m\cos\alpha m\,dm \simeq +\frac{1}{\alpha}\ln^2 m\sin\alpha m\Big|_0^1-\frac{2}{\alpha}\int_0^1\frac{\ln m}{m}\sin\alpha m\,dm=$$

$$=\frac{\pi}{\alpha}(\ln\alpha+C),$$

то

$$\int_0^\infty \Phi(m)\cos\alpha m\,dm=-\frac{\pi}{\alpha^3}\left\{\frac{4S}{(1+S)^2}\ln 2\alpha+\frac{3-21S+2S^2}{4(1+S)^2}\right\}.$$

Отсюда

$$Q_c^*(\alpha,S)=-\frac{1}{\alpha^2}\left\{8S\ln 2\alpha+\frac{2-21S+3S^2}{2}\right\}\frac{1}{(1+S)^2} . \qquad (\text{I.46})$$

$$(\alpha\gg 1)$$

Аналогичные вычисления приводят к следующему выражению для Q_n^*

$$Q_n^*(\alpha,S)=1+\frac{1}{2\alpha^2}\left\{1+5S-22S^2+16S^2\ln 2\alpha\right\}\frac{1}{(1+S)^2} . \qquad (\text{I.47})$$

Если удельное сопротивление пласта значительно больше удельного сопротивления бурового раствора, то вместо (I.46-I.47) имеем

Таблица 3

S	I/I28			I/64		
α	Q_c^*	Q_n^*	$Q_c^* + S Q_n^*$	Q_c^*	Q_n^*	$Q_c^* + S Q_n^*$
2	-0.I350	0.I204 IO^{I}	-0.I256	-0.I357	0.I204 IO^{I}	-0.II69
4	-0.700I IO^{-I}	I037	-0.6I9I IO^{-I}	-0.7I63 IO^{-I}	I038	-0.5540 IO^{-I}
6	3020	IOI4	-0.2228 IO^{-I}	3I62	IOI4	-0.I577 IO^{-I}
8	I672	I007	-0.885I IO^{-2}	I778	I008	-0.2039 IO^{-2}
IO	-0.I074 IO^{-I}	I005	-0.2896 IO^{-2}	-0.II56 IO^{-I}	I005	+0.4I44 IO^{-2}
I2	-0.7528 IO^{-2}	I003	+0.3I04 IO^{-3}	-0.8I69 IO^{-2}	I003	0.75II IO^{-2}
I6	43I0	I002	0.35I8 IO^{-2}	4739	I002	0.I092 IO^{-I}
20	2798	I00I	5024	3I76	I00I	I254
S	I/32			I/I6		
α	Q_c^*	Q_n^*	$Q_c^* + S Q_n^*$	Q_c^*	Q_n^*	$Q_c^* + S Q_n^*$
2	-0.I370	0.I204 IO^{I}	-0.9942 IO^{-I}	-0.I395	0.I203 IO^{I}	-0.6433 IO^{-I}
4	-0.7469 IO^{-I}	I040	-0.4220 IO^{-I}	-0.8024 IO^{-I}	I043	-0.I504 IO^{-I}
6	3432	IOI5	-0.2600 IO^{-2}	3924	IOI7	+0.243I IO^{-I}
8	I982	I008	+0.II69 IO^{-I}	2354	I009	3954
IO	-0.I3II IO^{-I}	I005	I830	I596	I006	4692
I2	-0.9394 IO^{-2}	I004	2I97	-0.II64 IO^{-I}	I004	5II2
I6	5559	I002	2576	-0.7062 IO^{-2}	I002	5559
20	3699	I00I	2759	478I	I002	5782

Продолжение таблицы 3

S	I/8			I/4		
α	Q_c^*	Q_n^*	$Q_c^* + SQ_n^*$	Q_c^*	Q_n^*	$Q_c^* + SQ_n^*$
2	-0.I440	0.I20I IO^{I}	+0.6I55 IO^{-2}	-0.I5I6	0.II98 IO^{I}	+0.I479
4	-0.8936 IO^{-I}	I049	4I85 IO^{-I}	-0.I0I9	I063	I637
6	4746	I02I	80I3	-0.59I0 IO^{-I}	I030	I983
8	2979	I0I2	0.9669 IO^{-I}	3874	I0I8	2I57
I0	2076	I008	0.I052	2764	I0I2	2254
I2	-0.I542 IO^{-I}	I006	II03	2085	I009	23I3
I6	-0.959I IO^{-2}	I003	II58	-0.I322 IO^{-I}	I005	238I
20	6600	I002	II87	-0.9202 IO^{-2}	I004	24I7

S	I/2			2		
α	Q_c^*	Q_n^*	$Q_c^* + SQ_n^*$	Q_c^*	Q_n^*	$Q_c^* + SQ_n^*$
2	-0.I630	0.II90 IO^{I}	+0.4322	-0.I944	0.II62 IO^{I}	0.2I29 IO^{I}
4	-0.II44	I086	4285	-0.II77	II60	2203
6	-0.7II9 IO^{-I}	I048	4526	-0.7506 IO^{-I}	III5	2I55
8	4820	I03I	4672	5I33	I083	2II5
I0	3495	I022	4759	3723	I062	2087
I2	2660	I0I6	48I5	2827	I048	2068
I6	I704	I0I0	4880	I799	I03I	2044
20	II94	I007	49I6	I252	I022	2032

Окончание таблицы 3

S	8			I6		
α	Q_c^*	Q_n^*	$Q_c^* + SQ_n^*$	Q_c^*	Q_n^*	$Q_c^* + SQ_n^*$
2	-0.2I94	0.II34 IO^{I}	0.8855 IO^{I}	-0.2259	0.II27 IO^{I}	0.I780 IO^{2}
4	-0.I020	I220	9656	-0.9664 IO^{-I}	I235	I966
6	-0.5858 IO^{-I}	II76	9350	5267	II92	I902
8	3758	II33	9026	3256	II46	I83I
IO	2606	II02	8787	2I97	III2	I778
I2	I9I4	I080	86I9	-0.I579 IO^{-I}	I088	I740
I6	-0.II63 IO^{-I}	I052	8409	-0.9305 IO^{-2}	I058	I693
20	-0.7854 IO^{-2}	I037	829I	6I56	I04I	I666

$$Q_c^*(\alpha, S) \simeq -\frac{1}{\alpha^2} - \frac{S}{\alpha^2}(8\ln 2\alpha - 12.5)$$

$$Q_n^*(\alpha, S) \simeq 1 + \frac{1}{2\alpha^2} \qquad (I.48)$$

$$\alpha \gg 1, \quad \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \ll 1.$$

Поэтому

$$Im\, h_x = \left(\frac{L}{\delta_1}\right)^2 \left[\frac{1}{\alpha^2} - S\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}(8\ln 2\alpha - 13)\right)\right]. \qquad (I.49)$$

В табл. 3 приведены значения функций $Q_c^*(\alpha, S)$, $Q_n^*(\alpha, S)$ и $Q_c^*(\alpha, S) + S Q_n^*(\alpha, S)$ в зависимости от параметров α и S . Если пласт обладает более высоким удельным сопротивлением, чем среда, заполняющая скважину ($S <$ I), то с увеличением длины зонда функция $Q_c^*(\alpha, S) + S Q_n^*(\alpha, S)$ и вместе с ней активная компонента поля изменяет знак. Это связано с тем, что возникающие на поверхности скважины заряды создают электрическое поле, которое направлено навстречу первичному индукционному полю. Такая особенность в поведении функции $Q_c^*(\alpha, S) + S Q_n^*(\alpha, S)$ приводит к тому, что при определенных значениях α и S активная компонента обращается в нуль, а в окрестности этих значений условия малого параметра выполняются только при очень низких частотах, позволяющих в разложении низкочастотной части спектра ограничиться первым членом, пропорциональным k^2 .

В табл. 4 указаны интервалы, внутри которых активная компонента обращается в нуль.

Таблица 4

S	I/128	I/64	I/32	I/16	I/8
α	I-2 II-I2	I-2 8-9	I-2 6-7	I-2 4-5	I-3

Если пласт более проводящий, то функция $Q_c^* + S Q_n^*$ остается знакопостоянной. Запишем выражение для активной компоненты в виде

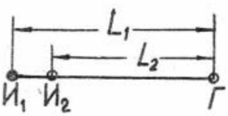
$$\Im m\, h_x = -\left(\frac{L}{\delta_1}\right)^2 \left[Q_c^*(\alpha,S) + S Q_n^*(\alpha,S)\right] + \frac{4}{3}\left(\frac{L}{\delta_2}\right)^3 . \qquad (I.50)$$

В частности, если $S \ll$ I и $\alpha \gg$ I, то

$$\Im m\, h_x = \left(\frac{L}{\delta_1}\right)^2 \frac{1}{\alpha^2} - \left(\frac{L}{\delta_2}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{L}{\delta_2}\right)^3 . \qquad (I.50a)$$

Как видно из табл. 3, для малых S найдутся такие значения α, при которых слагаемое в (I.50), пропорциональное частоте, будет положительной величиной. Поэтому с увеличением частоты, по мере выхода из области малого параметра, поле начинает расти быстрее чем частота.

При возбуждении поля вертикальным магнитным диполем эта закономерность не наблюдается. Согласно (I.48), при определенных условиях ($S \ll$ I, $\alpha \gg$ I) функции Q_c^* и Q_n^* практически не зависят от удельного сопротивления среды и по существу являются геометрическими факторами. Это позволяет воспользоваться результатами, полученными в теории индукционного каротажа, и применить фокусирующие зонды, значительно уменьшающие влияние скважины. Здесь наиболее естественной фокусирующей системой является трехкатушечный зонд, обеспечивающий компенсацию первичного поля (рис.5). Очевидно, для э.д.с., наведенной в измерительной цепи трехкатушечного зонда, получаем



Р и с. 5.

$$\mathcal{E} = \frac{\omega\mu}{2}\left\{\gamma_1\left[\mathcal{E}_{np}^{(1)} L_1^2 Q_c^*(\alpha_1,S) - \mathcal{E}_{np}^{(2)} L_2^2 Q_c^*(\alpha_2,S)\right] + \right.$$

$$\left. + \gamma_2\left[\mathcal{E}_{np}^{(1)} L_1^2 Q_n^*(\alpha_1,S) - \mathcal{E}_{np}^{(2)} L_2^2 Q_n^*(\alpha_2,S)\right]\right\}, \qquad (I.5I)$$

где L_1, $\mathcal{E}_{np}^{(1)}$, L_2 и $\mathcal{E}_{np}^{(2)}$ - соответственно длина зонда и э.д.с. прямого поля для двухкатушечных зондов, входящих в состав трехкатушечного зонда ($L_1 > L_2$).

Если моменты измерительных (генераторных) катушек M_1 и M_2 подобраны так, что первичное поле равно нулю: $\mathcal{E}^{(1)}_{np} = \mathcal{E}^{(2)}_{np}$ и при этом $\alpha \gg 1$ и $S \ll 1$, то (согласно (I.48)) э.д.с. в измерительной цепи трехкатушечного зонда является функцией только электропроводности пласта. В табл. 5 приведены результаты расчета величины $Jm\,h_x(L_1) - Jm\,h_x(L_2)$, пропорциональной э.д.с. в трехкатушечном зонде, по приближенной и точной формулам (I.49) и (I.33).

Из табл. 5 видно, что э.д.с. в измерительном устройстве не зависит от удельного сопротивления скважины не только в области малого параметра, но и за её пределами. Это означает, что, так же как и при возбуждении поля вертикальным магнитным диполем, существуют условия, при которых токи в скважине и поверхностные заряды не влияют на характер скин-эффекта в пласте. Поэтому вместо (I.50а) имеем следующее выражение для активной компоненты, справедливое в более широком диапазоне изменения параметра $\frac{L}{\delta}$

$$Jm\,h_x = \left(\frac{L}{\delta_1}\right)^2 \frac{1}{\alpha^2} + Jm\,h_x^{\text{одн}}\left(\frac{L}{\delta_2}\right) \quad S \ll 1,\ \alpha \gg 1. \qquad (I.52)$$

Выражение (I.52) для активной компоненты h_x можно получить из следующих соображений. Представим поле состоящим из двух частей, а именно, магнитного поля в однородной среде с удельной проводимостью пласта (это поле вихревых токов) и поля, созданного токами в скважине и поверхностными зарядами.

Если взаимодействие между токами становится заметным на больших расстояниях от диполя, то скин-эффект проявляется так же как в однородной среде, соответствующей пласту. Поэтому для активной компоненты поля h_x имеем

$$Jm\,h_x = -\left(\frac{L}{\delta_1}\right)^2 Q_c^{*}(\alpha,S) - \left(\frac{L}{\delta_2}\right)^2 Q_n^{**}(\alpha,S) + Jm\,h_x^{\text{одн}}\left(\frac{L}{\delta_2}\right), \qquad (I.53)$$

где $\quad Q_n^{**}(\alpha,S) = Q_n^{*}(\alpha,S) - 1.$

Это выражение для h_x справедливо при произвольных значениях α и S. В табл. 6 приведены максимальные значения параметра $\frac{a}{\delta_1}$, при которых результаты расчета по точной и приближен-

Таблица 5

$L_1/a = 10$; $L_2/a = 8$						
	S	1/32	1/16	1/8	1/4	1/2
ρ_2 = 2.5 омм	a/δ_1	0.1	$0.7 \cdot 10^{-1}$	$0.5 \cdot 10^{-1}$	$0.35 \cdot 10^{-1}$	$0.25 \cdot 10^{-1}$
$\Delta h^{приб} \simeq$	$(h_{x1}^{акт} - h_{x2}^{акт}) \cdot 10^2$	-	-0.73	-0.73	-0.74	-0.75
$= -0.88 \cdot 10^{-2}$	$(A_1 - A_2) \cdot 10^2$	0.76	0.77	0.77	0.79	0.80
ρ_2 = 5 омм	a/δ_1	$0.7 \cdot 10^{-1}$	$0.5 \cdot 10^{-1}$	$0.35 \cdot 10^{-1}$	$0.25 \cdot 10^{-1}$	$0.18 \cdot 10^{-1}$
$\Delta h^{приб} \simeq$	$(h_{x1}^{акт} - h_{x2}^{акт}) \cdot 10^2$	-0.41	-0.41	-0.41	-0.42	-0.43
$\simeq -0.44 \cdot 10^{-2}$	$(A_1 - A_2) \cdot 10^2$	0.42	0.43	0.43	0.43	0.44
ρ_2 = 10 омм	a/δ_1	$0.5 \cdot 10^{-1}$	$0.35 \cdot 10^{-1}$	$0.25 \cdot 10^{-1}$	$0.18 \cdot 10^{-1}$	$0.12 \cdot 10^{-1}$
$\Delta h^{приб} \simeq$	$(h_{x1}^{акт} - h_{x2}^{акт}) \cdot 10^2$	-0.22	-0.22	-0.22	-0.23	-0.23
$\simeq -0.22 \cdot 10^{-2}$	$(A_1 - A_2) \cdot 10^2$	0.23	0.23	0.23	0.23	0.24
ρ_2 = 20 омм	a/δ_1	$0.35 \cdot 10^{-1}$	$0.25 \cdot 10^{-1}$	$0.18 \cdot 10^{-1}$	$0.12 \cdot 10^{-1}$	$0.88 \cdot 10^{-2}$
$\Delta h^{приб} \simeq$	$(h_{x1}^{акт} - h_{x2}^{акт}) \cdot 10^2$	-0.12	-0.12	-0.12	-0.12	-0.12
$\simeq -0.12 \cdot 10^{-2}$	$(A_1 - A_2) \cdot 10^2$	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12

ной формуле (I.53) не отличаются больше, чем на 5%.

Таблица 6

S		$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	8
$\alpha = 4$	$\frac{a}{\delta_1}$	0.6	0.7	0.8	0.9	0.2	0.2	0.I
$\alpha = 8$	$\frac{a}{\delta_1}$	0.I5	0.2	0.2	0.2	0.I3	0.I3	0.05

§ 4. Электромагнитное поле на оси скважины в дальней зоне

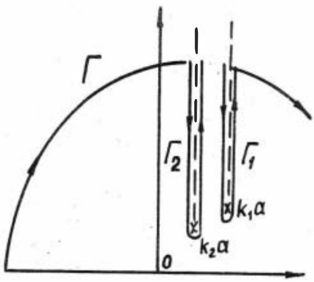
Следуя работам / I /, / 5 /, получим асимптотическую формулу для поля в дальней зоне ($\alpha \gg 1$). При выводе используется деформация контура интегрирования в формуле (I.33) на плоскости комплексного переменного m. Однако такая процедура требует доказательства отсутствия полюсов у подынтегральной функции, либо оценки их вклада в значение интеграла. Задача об определении полюсов является чрезвычайно трудной из-за сложности подынтегрального выражения, и здесь это исследование не проведено. Удовлетворительное согласие расчетов по асимптотической и точной формулам дает основание считать, что, если в верхней полуплоскости имеются полюса, то вклад их в рассматриваемую часть спектра поля достаточно мал.

Запишем интеграл (I.33) в виде

$$\frac{\alpha^3}{\pi}\int\limits_0^\infty\left\{m^2 D + k_1^2 a^2 C\right\}\cos\alpha m\,dm = \frac{\alpha^3}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{m^2 D + k_1^2 a^2 C\right\} e^{i\alpha m}\,dm. \quad (I.54)$$

Предположим, что в верхней полуплоскости комплексной переменной m нет особых точек, кроме точек ветвления $m = k_1 a$ и $m = k_2 a$. При выборе разрезов вдоль линий $Re\,m_1 = 0$ и $Re\,m_2 = 0$ вещественная часть радикалов $\sqrt{m^2 - k_1^2 a^2}$ и $\sqrt{m^2 - k_2^2 a^2}$ положительна во всей комплексной плоскости m. Такие разрезы используются в работах / 4 /, / 5 / при расчете поля вертикального магнитного диполя.

Как это следует из асимптотического поведения функций Бесселя, подынтегральное выражение в (I.54) при $|m| \to \infty$ может расти, по крайней мере, не быстрее, чем $e^{2|m|}$. Поэтому сходимость интеграла (I.54) в верхней полуплоскости при $\alpha > 2$ обеспечивается множителем $e^{i\alpha m}$ независимо от знаков вещественной части радикалов m_1 и m_2. Проведем разрезы от точек ветвления k_1a и k_2a параллельно мнимой оси (рис. 6) и деформируем контур интегрирования в Γ. Интеграл по бесконечным дугам, благодаря присутствию в подынтегральной функции множителя $e^{i\alpha m}$, обращается в нуль ($\mathrm{Im}\, m > 0$, $\alpha > 2$). Поэтому интеграл по действительной оси (I.54) равен сумме интегралов по берегам разрезов Γ_2 и Γ_1. Вначале определим интеграл вдоль разреза Γ_1. При переходе с левого берега разреза на правый величина m_1 изменяет знак. Таким образом, интеграл вдоль разреза Γ_1 равен:



Р и с. 6.

$$\frac{\alpha^3}{2\pi}\int_{\Gamma_1^+}\left\{m^2\left[D(m_1)-D(-m_1)\right]+k_1^2a^2\left[C(m_1)-C(-m_1)\right]\right\}e^{i\alpha m}\,dm\,. \qquad (I.55)$$

Используя свойства функций Бесселя:

$$\begin{aligned} I_0(-z) &= I_0(z) \\ I_1(-z) &= -I_1(z) \\ K_0(-z) &= K_0(z)+i\pi I_0(z) \\ K_1(-z) &= -K_1(z)+i\pi I_1(z) \end{aligned} \qquad (I.56)$$

нетрудно показать, что для функций D и C справедливы соотношения:

$$D(-m_1)=D(m_1)-i\pi \qquad C(-m_1)=C(m_1)-i\pi\,. \qquad (I.57)$$

Таким образом, интеграл (I.55) принимает вид:

$$\frac{\alpha^3}{2} i \int_{\Gamma_1^+} (m^2+k_1^2a^2) e^{i\alpha m} dm \,. \tag{I.58}$$

Положив $m = it + k_1 a$, получаем:

$$e^{ik_1L} \cdot \frac{\alpha^3}{2} \int_0^\infty (t^2 - 2itk_1a - 2k_1^2a^2) e^{-\alpha t} dt =$$

$$= (1 - ik_1L - k_1^2L^2) e^{ik_1L} = h^{одн}\left(\frac{L}{\delta_1}\right),$$

где $h^{одн}\left(\frac{L}{\delta_1}\right)$ - поле диполя в однородной среде с параметрами скважины. Поэтому, согласно (I.33), магнитное поле на оси скважины выражается, так же как и при возбуждении вертикальным диполем, только через интеграл по разрезу Γ_2 :

$$h_x = -\frac{\alpha^3}{2\pi} \int_{\Gamma_2} \{m^2 D + k_1^2 a^2 C\} e^{i\alpha m} dm \,. \tag{I.59}$$

Для преобразования подынтегральной функции в формуле (I.59) воспользуемся следствиями, вытекающими из соотношений (I.56):

$$\frac{K_0(z)}{K_1(z)} + \frac{K_0(-z)}{K_1(-z)} = \frac{i\pi}{zK_1(z)K_1(-z)},$$

$$\frac{K_0^2(z)}{K_1^2(z)} - \frac{K_0^2(-z)}{K_1^2(-z)} = \frac{i\pi}{zK_1(z)K_1(-z)}\left[\frac{K_0(z)}{K_1(z)} - \frac{K_0(-z)}{K_1(-z)}\right],$$

$$\frac{K_0^2(z)K_0(-z)}{K_1^2(z)K_1(-z)} + \frac{K_0^2(-z)K_0(z)}{K_1^2(-z)K_1(z)} = \frac{i\pi}{zK_1(z)K_1(-z)} \; \frac{K_0(z)K_0(-z)}{K_1(z)K_1(-z)}.$$

Для скачка величины C при переходе с одного берега разреза на другой после несложных преобразований имеем:

$$C(m_2)-C(-m_2)=\frac{i\pi}{m_2^2\,K_1(m_2)K_1(-m_2)\Delta(m_2)\Delta(-m_2)}\times$$

$$\times\left\{\frac{I_1^2(m_1)}{m_1^2}(1-S)^2\frac{m^2+k_1^2a^2}{m_2^2}\,\frac{m^2+k_2^2a^2}{m_2^2}+S\,I_0^2(m_1)-\right.$$

$$-I_0(m_1)\frac{I_1(m_1)}{m_1}(1-S)\left[S\frac{m^2+k_1^2a^2}{m_2^2}+\frac{m^2+k_2^2a^2}{m_2^2}\right]-$$

$$-Sm_1^2\left[\frac{m^2+k_1^2a^2}{m_2^2}\,\frac{I_1^2(m_1)}{m_1^2}(1-S)-I_0(m_1)\frac{I_1(m_1)}{m_1}\right]\left(\frac{K_0(m_2)}{m_2K_1(m_2)}-\right. \tag{I.60}$$

$$\left.\left.-\frac{K_0(-m_2)}{m_2K_1(-m_2)}\right)+S(1+2S)I_1^2(m_1)m_1^2\frac{K_0(m_2)K_0(-m_2)}{m_2^2K_1(m_2)K_1(-m_2)}\right\},$$

здесь

$$\Delta(\pm m_2)=-I_0^2(m_1)+I_1^2(m_1)\left[\frac{m^2+k_2^2a^2}{m_2^2}(1-S)\frac{K_0(\pm m_2)}{\pm m_2K_1(\pm m_2)}-\right.$$

$$\left.-Sm_1^2\,\frac{K_0^2(\pm m_2)}{m_2^2K_1^2(\pm m_2)}\right]+I_0(m_1)\frac{I_1(m_1)}{m_1}\left[\frac{m^2+k_1^2a^2}{m_2^2}(1-S)-(1+S)m_1^2\frac{K_0(\pm m_2)}{\pm m_2K_1(\pm m_2)}\right].$$

Поскольку функция $\mathcal{D}$ может быть представлена в виде

$$\mathcal{D}=C+(S-1)\frac{K_0(m_2)}{m_2K_1(m_2)\Delta(m_2)},$$

то для скачка функции $\mathcal{D}$ получаем:

$$\mathcal{D}(m_2)-\mathcal{D}(-m_2)=C(m_2)-C(-m_2)+A(m_2),$$

где

$$A(m_2)=\frac{i\pi\,(S-1)}{m_2^2\,K_1(m_2)K_1(-m_2)\Delta(m_2)\Delta(-m_2)}\times\left\{I_0(m_1)\frac{I_1(m_1)}{m_1}\times\right. \tag{I.61}$$

$$\left.\times\frac{m^2+k_1^2a^2}{m_2^2}(1-S)-I_0^2(m_1)-Sm_1^2I_1^2(m_1)\frac{K_0(m_2)K_0(-m_2)}{m_2^2K_1(m_2)K_1(-m_2)}\right\}.$$

Таким образом, вместо (I.59), имеем:

$$h_x = -\frac{\alpha^3}{2\pi} \int\limits_{k_2 a}^{i\infty + k_2 a} \left\{ (m^2 + k_1^2 a^2) \left[C(m_2) - C(-m_2) \right] + m^2 A(m_2) \right\} e^{i\alpha m} dm \, . \tag{I.62}$$

Введем новую переменную интегрирования, положив $m = it + k_2 a$. Вдоль разреза переменная t изменяется от 0 до ∞ и

$$m_1 = \sqrt{-t^2 + 2ik_2 at + (k_2^2 - k_1^2) a^2} \qquad m_2 = \sqrt{-t^2 + 2ik_2 at} \, .$$

Соответственно, выражение для магнитного поля принимает вид:

$$h_x = -e^{ik_2 L} \frac{i\alpha^3}{2\pi} \int\limits_0^\infty \left\{ (m^2 + k_1^2 a^2) \left[C(m_2) - C(-m_2) \right] + m^2 A(m_2) \right\} e^{-\alpha t} dt \, . \tag{I.63}$$

Несмотря на громоздкий характер подынтегральной функции, представление (I.63) оказывается весьма полезным при расчете величины поля для длинных зондов ($\alpha \gg$ I), поскольку интеграл (I.63) не содержит быстро осциллирующей функции $\cos \alpha m$, в отличие от (I.33). Кроме того, в волновой зоне ($k_2 L >$ I) величина поля экспоненциально мала, и в формуле (I.63) множитель $e^{ik_2 L}$ стоит перед знаком интеграла, т.е. интеграл относительно большая величина. Главной же трудностью при численной реализации формулы (I.33) (для очень больших α , вообще неустранимой из-за недостаточной точности машинного счета) является получение экспоненциально малого результата при интегрировании функции, значение которой на основном участке на много порядков больше интеграла.

Теперь, исходя из (I.63), получим асимптотическую формулу, описывающую поле в дальней зоне ($\alpha \gg$ I). В этом случае значение интеграла определяется областью $t \lesssim \frac{1}{\alpha} \ll$ I. Подынтегральная функция в (I.63) зависит в общем случае довольно сложным образом от m_1 , но, если выполняется условие $\frac{1}{\alpha^2} \ll |k_1^2 a^2|$, т.е. $|k_1 L| >$ I, и кроме того, $S <$ I, то можно приближенно положить $m_1 \simeq \sqrt{k_2^2 a^2 - k_1^2 a^2}$ и считать величину m_1 и функции от m_1 , не зависящими от переменной интегрирования t .
Для m_2 имеем:

$$m_2 \sim \sqrt{-\frac{1}{\alpha^2} + 2i\,\frac{k_2 a}{\alpha}}\ ,$$

т.е. $|m_2| \ll 1$.

Поэтому выражение (I.60) можно приближенно переписать, сохраняя члены порядка $\frac{S}{m_2^4}$, $\frac{S^2}{m_2^4}$, $\frac{1}{m_2^2}$, $S\frac{\ln m_2}{m_2^2}$ и опуская члены $\frac{S}{m_2^2}$, I ....., в следующем виде:

$$C(m_2) - C(-m_2) = \frac{i\pi}{m_2^2 K_1(m_2) K_1(-m_2)\Delta(m_2)\Delta(-m_2)} \times \tag{I.64}$$

$$\times\left\{\frac{I_1^2(m_1)}{m_1^2}(1-2S)\frac{m^2+k_1^2a^2}{m_2^2}\,\frac{m^2+k_2^2a^2}{m_2^2} - 2S I_1^2(m_1)\frac{m^2+k_1^2a^2}{m_2^2}K_0(m_2)\right\}.$$

Аналогично

$$m_2^2 K_1(m_2)K_1(-m_2)\Delta(m_2)\Delta(-m_2) \simeq -\left\{I_0(m_1)\frac{I_1(m_1)}{m_1}\,\frac{m^2+k_1^2a^2}{m_2^2} + \right. \tag{I.65}$$

$$\left. + K_0(m_2)\left[I_1^2(m_1)\frac{m^2+k_2^2a^2}{m_2^2}(1-S) - I_0(m_1)\frac{I_1(m_1)}{m_1}\,\frac{3m^2-k_1^2a^2}{2}\right]\right\}^2.$$

Последнее слагаемое в формуле (I.65) не содержит в знаменателе m_2^2, вместе с тем можно показать, что при $S = 0$ это слагаемое имеет такой же порядок как и остальные удерживаемые члены.

Подставляя (I.65) в (I.64), после простых преобразований получаем:

$$C(m_2) - C(-m_2) \simeq -\frac{i\pi}{I_0^2(m_1)}\,\frac{1}{m^2+k_1^2a^2}\left\{m^2+k_2^2a^2 - \right.$$

$$- 2S\left(m_1^2 + 2m_1\frac{I_1(m_1)}{I_0(m_1)}\right)m_2^2K_0(m_2) - 2m_1\frac{I_1(m_1)}{I_0(m_1)}\times$$

$$\left.\times\left[\frac{m_2^2-2Sm^2}{m^2+k_1^2a^2} - m_2^2\frac{I_0(m_1)}{I_1(m_1)m_1}\,\frac{3m^2-k_1^2a^2}{2(m^2+k_1^2a^2)}\right](m^2+k_2^2a^2)K_0(m_2)\right\}. \tag{I.66}$$

Для величины $A(m_2)$ имеем:

$$A(m_2) \simeq \frac{i\pi(S-1)}{m_2^2 K_1(m_2)K_1(-m_2)\Delta(m_2)\Delta(-m_2)} I_0(m_1)\frac{I_1(m_1)}{m_1}\frac{m^2+k_1^2a^2}{m_2^2} \simeq$$

$$\simeq -i\pi(S-1)\frac{m_1}{I_0(m_1)I_1(m_1)}\frac{m_2^2}{m^2+k_1^2a^2}\left\{1-2m_1\frac{I_1(m_1)}{I_0(m_1)}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{m^2+k_2^2a^2}{m_2^2}-\frac{I_0(m_1)}{m_1 I_1(m_1)}\frac{3m^2-k_1^2a^2}{2}\right]\frac{m_2^2K_0(m_2)}{m^2+k_1^2a^2}\right\}. \tag{I.67}$$

Подставляя (I.66) и (I.67) в формулу (I.63) и, отбрасывая члены, дающие при интегрировании величины $\sim \frac{1}{\alpha^4}$, получаем:

$$h_x \simeq -\frac{e^{ik_2L}}{I_0^2(m_1)}\frac{\alpha^3}{2}\left\{\int_0^\infty (m^2+k_2^2a^2)e^{-\alpha t}dt\right.$$

$$\left.-2S\left(m_1^2+2m_1\frac{I_1(m_1)}{I_0(m_1)}\right)\int_0^\infty m_2^2K_0(m_2)e^{-\alpha t}dt\right\}, \tag{I.68}$$

где

$$m^2=-t^2+2ik_2at+k_2^2a^2,$$

$$m_2=\sqrt{-t^2+2ik_2at},$$

$$m_1=\sqrt{k_2^2a^2-k_1^2a^2}.$$

Первый интеграл выражается через элементарные функции:

$$\int_0^\infty (m^2+k_2^2a^2)e^{-\alpha t}dt=-\frac{2}{\alpha^3}(1-ik_2L-k_2^2L^2).$$

Представим второй интеграл в виде

$$\int_0^\infty m_2^2K_0(m_2)e^{-\alpha t}dt \simeq -\int_0^\infty m_2^2\ln m_2\, e^{-\alpha t}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + 2ik_2 a\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\int_0^\infty \ln(-t^2 + 2ik_2 a t)\, e^{-\alpha t} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + 2ik_2 a\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\int_0^\infty \left[\ln(-t) + \ln(t - 2ik_2 a)\right] e^{-\alpha t} dt \,. \qquad (I.69)$$

Очевидно

$$\int_0^\infty \ln(-t)\, e^{-\alpha t} dt = -\frac{1}{\alpha}(\ln\alpha + C) + \frac{i\pi}{\alpha} \simeq -\frac{\ln\alpha}{\alpha} \,.$$

Второй интеграл в (I.69) выражается через интегральную показательную функцию

$$\int_0^\infty \ln(t - 2ik_2 a)\, e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}\left[\ln(-2ik_2 a) - e^{-2ik_2 L} E_i(2ik_2 L)\right] .$$

Поэтому для магнитного поля имеем:

$$h_x = \frac{1}{I_0^2(m_1)} h^{одн}\left(\frac{L}{\delta_2}\right) + \frac{e^{ik_2 L}}{I_0^2(m_1)} 2S\left(m_1^2 + 2m_1\frac{I_1(m_1)}{I_0(m_1)}\right) P(k_2 a, \alpha), \qquad (I.70)$$

где $h^{одн}\left(\frac{L}{\delta_2}\right)$ - поле в однородной среде с параметрами пласта,

$$P(k_2 a, \alpha) = \frac{\alpha^3}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + 2ik_2 a\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\left[-\frac{\ln\alpha}{\alpha} + \frac{\ln(-2ik_2 a)}{\alpha} - \right.$$

$$\left. - \frac{e^{-2ik_2 L}}{\alpha} E_i(2ik_2 L)\right] .$$

Если $|k_2 L| \ll 1$, то $E_i(2ik_2 L) \simeq \ln(-2ik_2 L) = \ln\alpha + \ln(-2ik_2 a)$ и $P(k_2 a, \alpha) \simeq -\ln\alpha$.

Формула (I.70) принимает вид:

$$h_x = \frac{1}{I_0^2(m_1)}\left(1 - \left(\frac{L}{\delta_2}\right)^2\right) - \frac{2S\ln\alpha}{I_0^2(m_1)}\left(m_1^2 + 2m_1\frac{I_1(m_1)}{I_0(m_1)}\right) . \qquad (I.71)$$

Если толщина скин-слоя в скважине значительно больше её радиуса, то функции Бесселя $I_0(m_1)$ и $I_1(m_1)$ могут быть разложены в ряд, и вместо (I.7I) получаем:

$$h_x = 1 - \frac{m_1^2}{2} - \left(\frac{L}{\delta_2}\right)^2 - 4 S m_1^2 \ln\alpha \,.$$

Поскольку $m_1^2 \simeq - \frac{k_2^2 L^2}{\alpha^2}$, то для активной компоненты поля имеем:

$$h_x^{акт} = \frac{1}{\alpha^2}\left(\frac{L}{\delta_1}\right)^2 - \left(\frac{L}{\delta^2}\right)^2\left(1 - \frac{8\ln\alpha}{\alpha^2}\right)$$

- выражение, которое с точностью до членов $\frac{S}{\alpha^2}$ совпадает с формулой (I.49), полученной для области малого параметра. В волновой зоне, когда $|k_2 L| \gg$ I, воспользовавшись асимптотическим значением интегральной показательной функции

$$E_i(2ik_2L) \simeq \frac{e^{2ik_2L}}{2ik_2L} \,,$$

получаем

$$P(k_2 a, \alpha) \simeq \frac{\alpha^3}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + 2ik_2 a \frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\left[-\frac{\ln\alpha}{\alpha} + \frac{\ln(-2ik_2 a)}{\alpha}\right]$$

$$\simeq \frac{ik_2L}{2}\left\{\cdot\ln\alpha - \ln|k_2 a|\right\} \cdot$$

В табл. 7 приведены данные расчета амплитуды поля $A = |h_x|$ по точной и асимптотической формулам (I.33) и (I.70), иллюстрирующие условия применения формулы (I.70). Естественно, на амплитудных частотных характеристиках поля (рис. 7-II) выделить три области: область малого параметра, промежуточную область и волновую зону. Из таблицы видно, что поле удовлетворительно описывается асимптотической формулой в широком спектре частот. Однако, если значение параметра $\frac{a}{\delta_1}$ превышает единицу, то точность резко уменьшается, что, по-видимому, связано с игнорированием полюсов при выводе формулы для дальней зоны.

Одним из следствий полученных результатов является возможность

Таблица 7

$\frac{a}{\delta_1}$	S	$\frac{1}{64}$		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{4}$	
	α	$A_{точ.}$	$A_{ас.}$	$A_{точ.}$	$A_{ас.}$	$A_{точ.}$	$A_{ас.}$
0.I	4	I.00	I.00	I.00	I.00	I	I
	I0	I.00	I.00	I.02	I.0I	I.09	I.08
	I2	I.00	I.00	I.03	I.02	I.I3	I.I2
	20	I.0I	I.0I	I.09	I.09	I.32	I.3I
	24	I.03	I.03	I.I2	I.I3	I.39	I.38
	30	I.06	I.05	I.2I	I.2I	I.44	I.44
0.2	4	I.00	I.00	I.00	I.00	I.05	I.03
	I0	I.0I	I.0I	I.09	I.08	I.3I	I.28
	I2	I.03	I.02	I.I3	I.I2	I.38	I.36
	20	I.09	I.09	I.32	I.3I	I.39	I.39
	24	I.I4	I.I3	I.39	I.38	I.28	I.28
	30	I.2I	I.2I	I.44	I.44	I.05	I.05
0.4	4	I.00	I.00	I.05	I.02	I.2I	I.I2
	I0	I.09	I.07	I.30	I.27	I.34	I.34
	I2	I.I3	I.I2	I.36	I.34	I.23	I.24
	20	I.3I	I.30	I.37	I.38	0.62	0.65
	24	I.38	I.37	I.26	I.27	0.39	0.4I
	30	I.43	I.43	I.03	I.04	0.I8	0.I9
0.8	4	0.99	0.97	I.I3	I.05	I.25	I.I7
	I0	I.23	I.2I	I.22	I.26	0.5I	0.6I
	I2	I.29	I.28	I.II	I.I8	0.32	0.39
	20	I.30	I.3I	0.56	0.60	$0.33\cdot I0^{-I}$	$0.43\cdot I0^{-I}$
	24	I.2I	I.22	0.35	0.38	$0.94\cdot I0^{-2}$	$0.I2\cdot I0^{-I}$
	30	0.9I	I	0.I6	0.I8	$0.I3\cdot I0^{-2}$	$0.I7\cdot I0^{-2}$

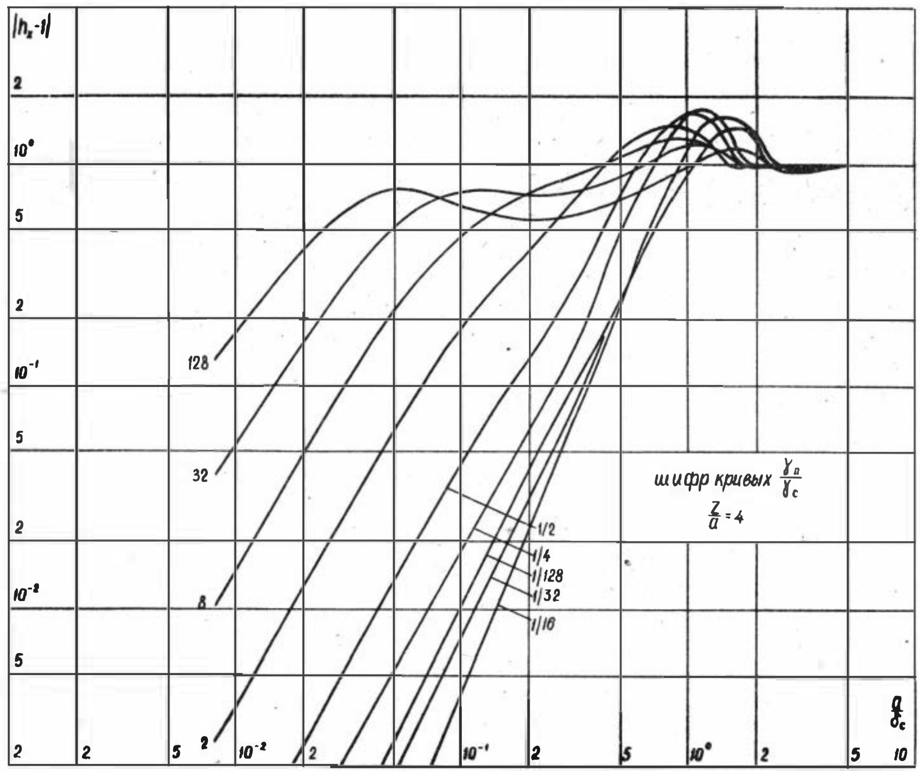
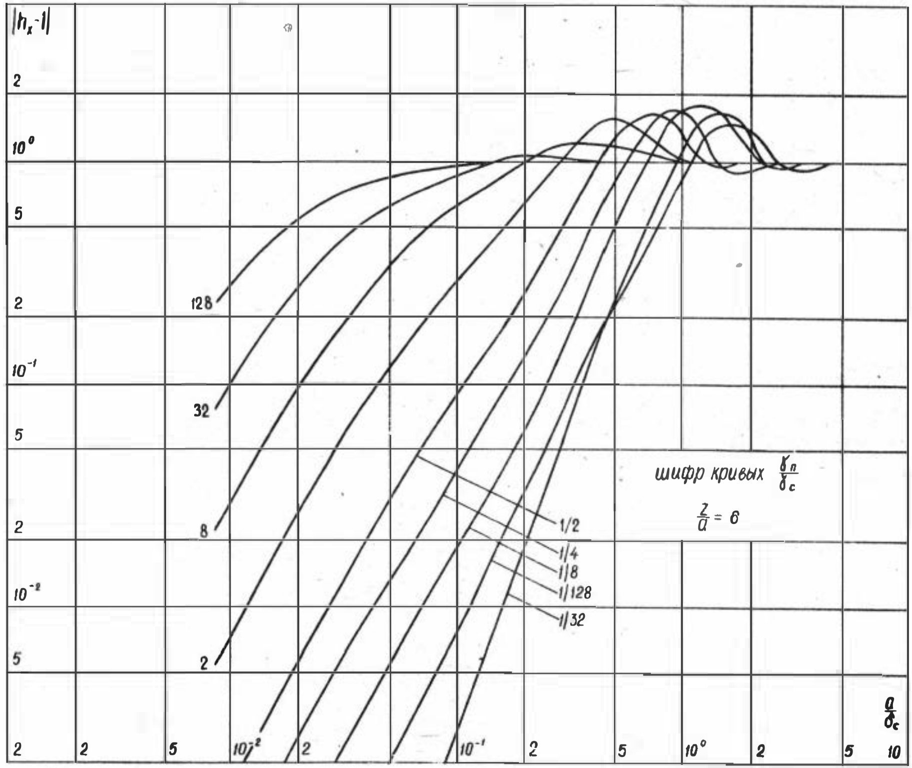
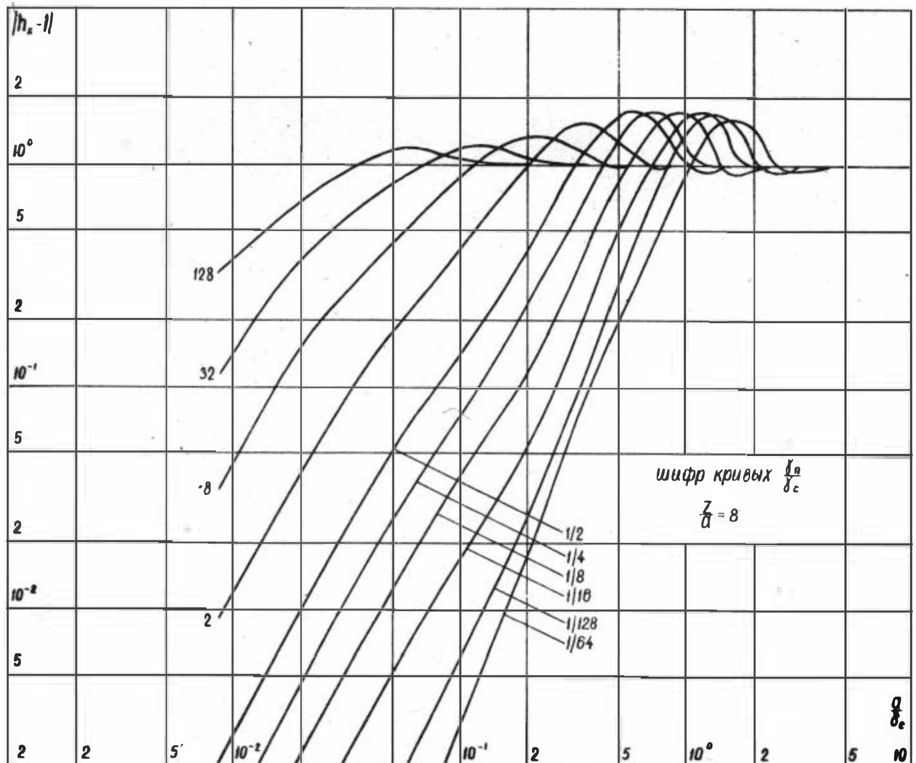

$|h_z - 1|$
2
10^0
5
2
10^{-1}
5
2
10^{-2}
5
2
2
5
2
10^{-2}
2
10^{-1}
2
5
10^0
2
5
10
$\frac{a}{\delta_c}$
128
32
8
2
шифр кривых $\frac{\gamma_n}{\gamma_c}$
$\frac{z}{a} = 4$
1/2
1/4
1/128
1/32
1/16

Рис. 7а



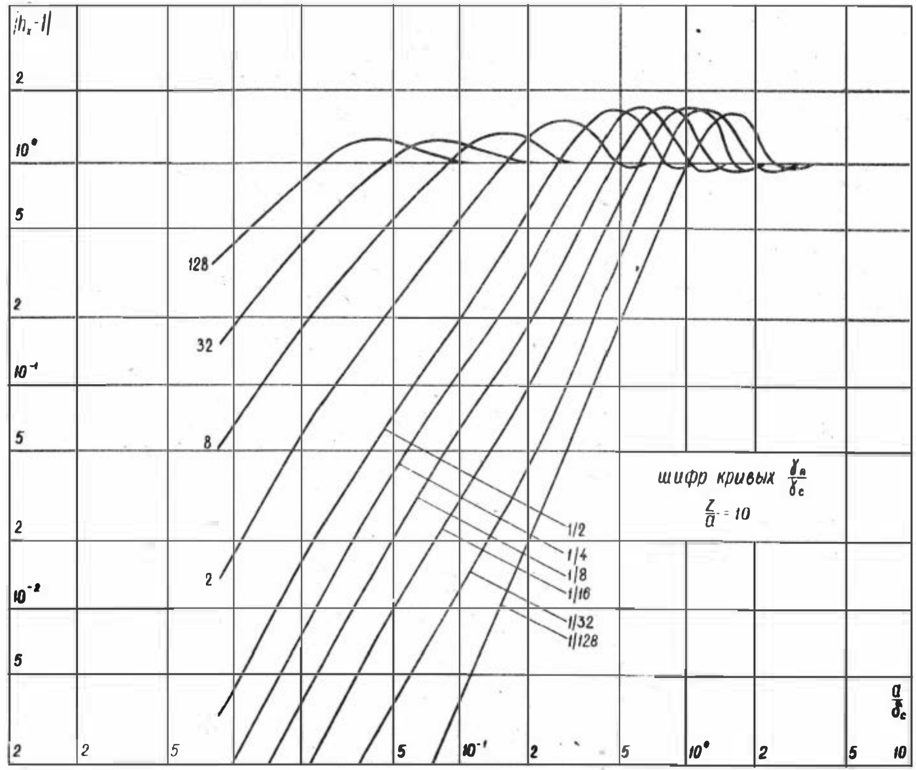
$|h_x - 1|$
2
10^0
5
2
10^{-1}
5
2
10^{-2}
5
2
2
5
10^{-2}
2
10^{-1}
2
5
10^0
2
5
10
$\frac{a}{\delta_c}$
128
32
8
2
1/2
1/4
1/8
1/128
1/32
шифр кривых $\frac{\gamma_n}{\gamma_c}$
$\frac{z}{a} = 6$

Рис. 7б



$|h_z - 1|$
2
10^0
5
2
10^{-1}
5
2
10^{-2}
5
2
2
5
10^{-2}
10^{-1}
2
5
10^0
2
5
10
$\frac{a}{\delta_c}$
128
32
8
2
1/2
1/4
1/8
1/16
1/128
1/64
шифр кривых $\frac{\gamma_n}{\delta_c}$
$\frac{z}{a} = 8$

Рис. 7в



|h_x - 1|
2
10°
5
2
10⁻¹
5
2
10⁻²
5
2
2
5
5
10⁻¹
2
5
10°
2
5
10
a/δ_c
128
32
8
2
1/2
1/4
1/8
1/16
1/32
1/128
шифр кривых γ_a/γ_c
Z/a = 10

Рис. 7г

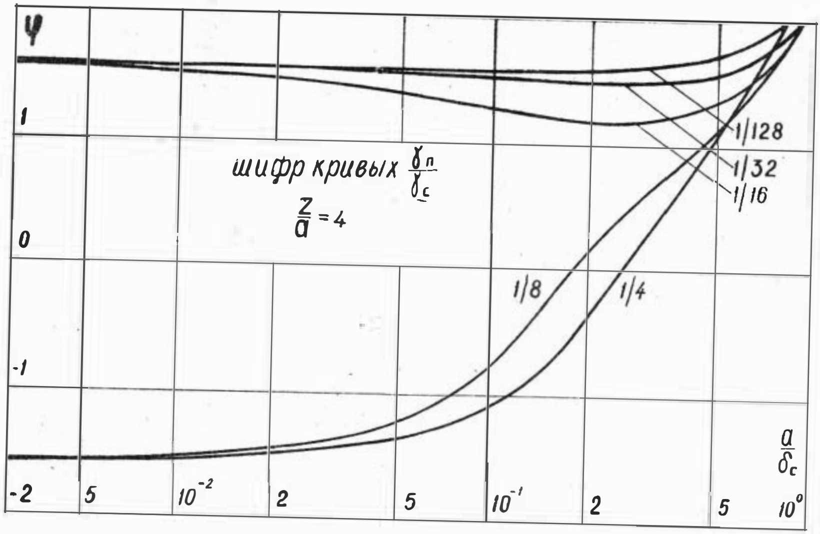

φ
1
0
-1
шифр кривых $\frac{\gamma_п}{\gamma_c}$
$\frac{z}{a}=4$
1/128
1/32
1/16
1/8
1/4
$\frac{a}{\delta_c}$
-2
5
10^{-2}
2
5
10^{-1}
2
5
10^{0}

Рис. 8а

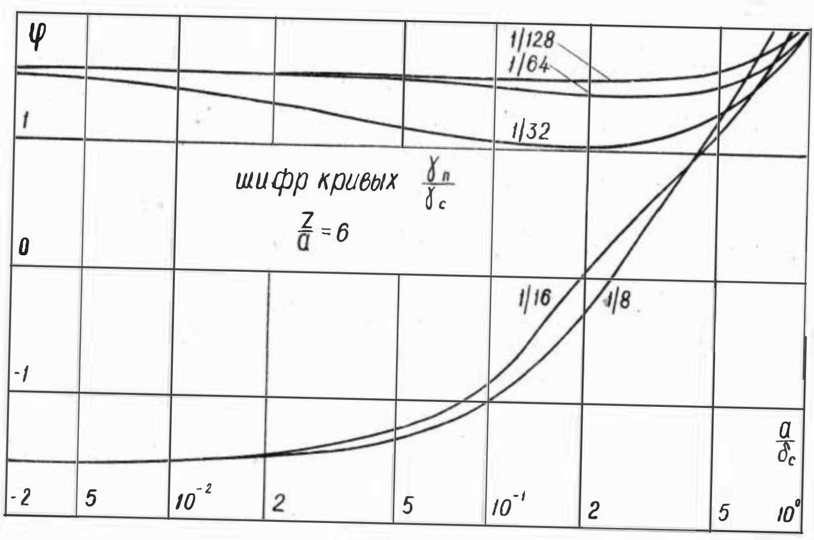

φ
1
0
-1
1/128
1/64
1/32
шифр кривых $\frac{\gamma_п}{\gamma_c}$
$\frac{z}{a}=6$
1/16
1/8
$\frac{a}{\delta_c}$
-2
5
10^{-2}
2
5
10^{-1}
2
5
10^{0}

Рис. 8б

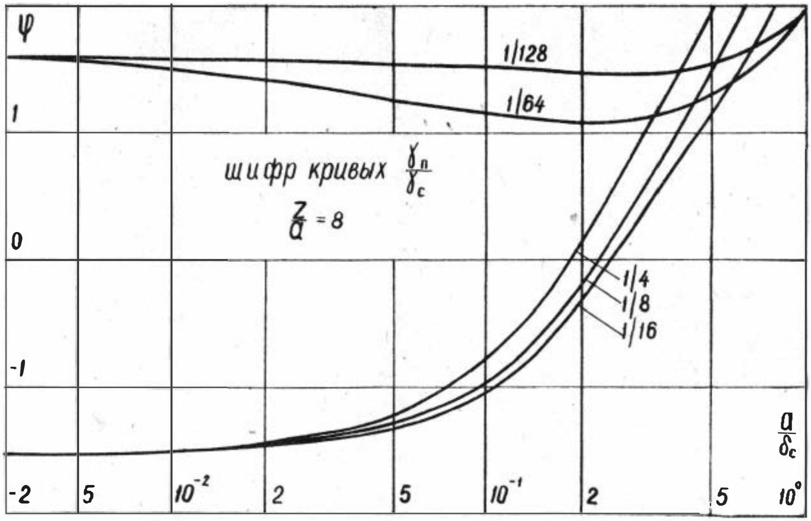

ψ
1
0
-1
-2
шифр кривых $\frac{\gamma_п}{\gamma_c}$
$\frac{z}{a}=8$
1/128
1/64
1/4
1/8
1/16
$\frac{a}{\delta_c}$
5
10^{-2}
2
5
10^{-1}
2
5
10^{0}

Рис. 8в

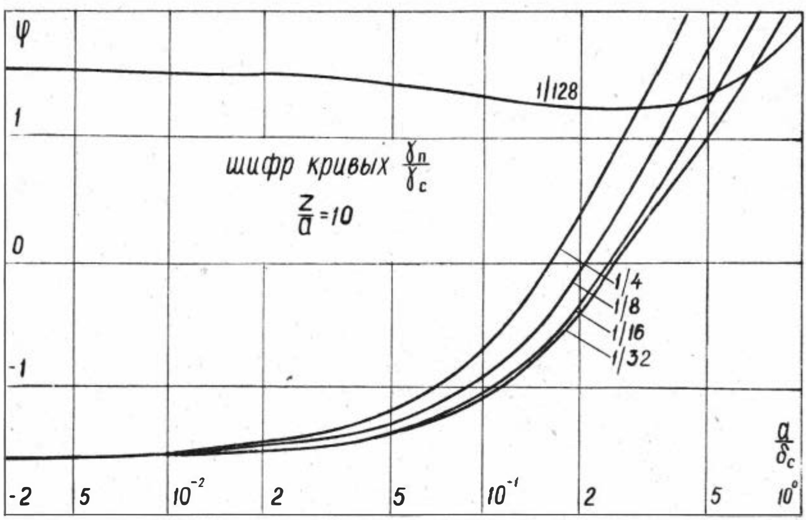

ψ
1
0
-1
-2
шифр кривых $\frac{\gamma_п}{\gamma_c}$
$\frac{z}{a}=10$
1/128
1/4
1/8
1/16
1/32
$\frac{a}{\delta_c}$
5
10^{-2}
2
5
10^{-1}
2
5
10^{0}

Рис. 8г

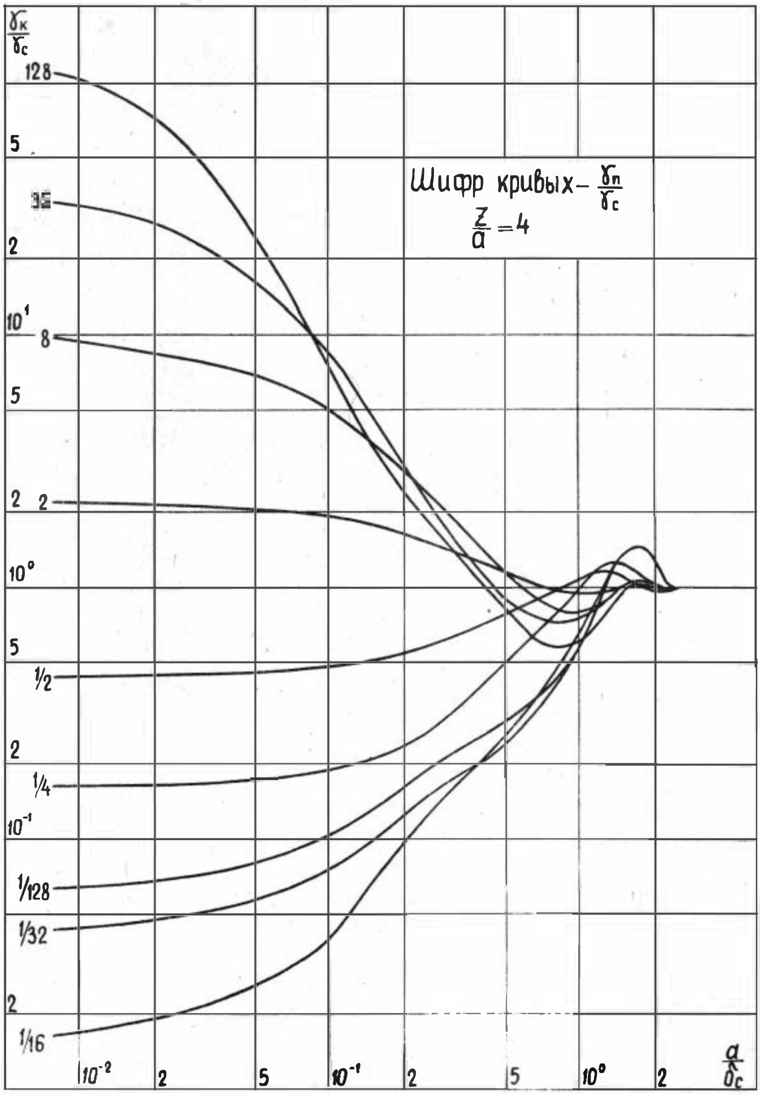
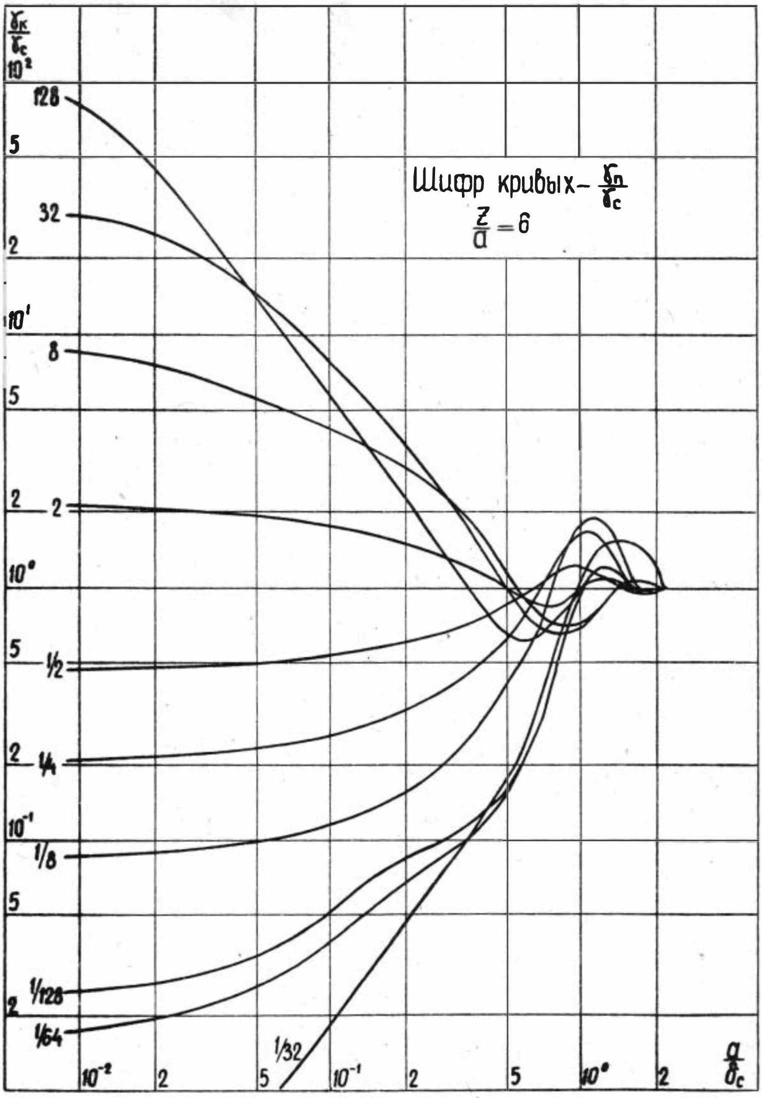
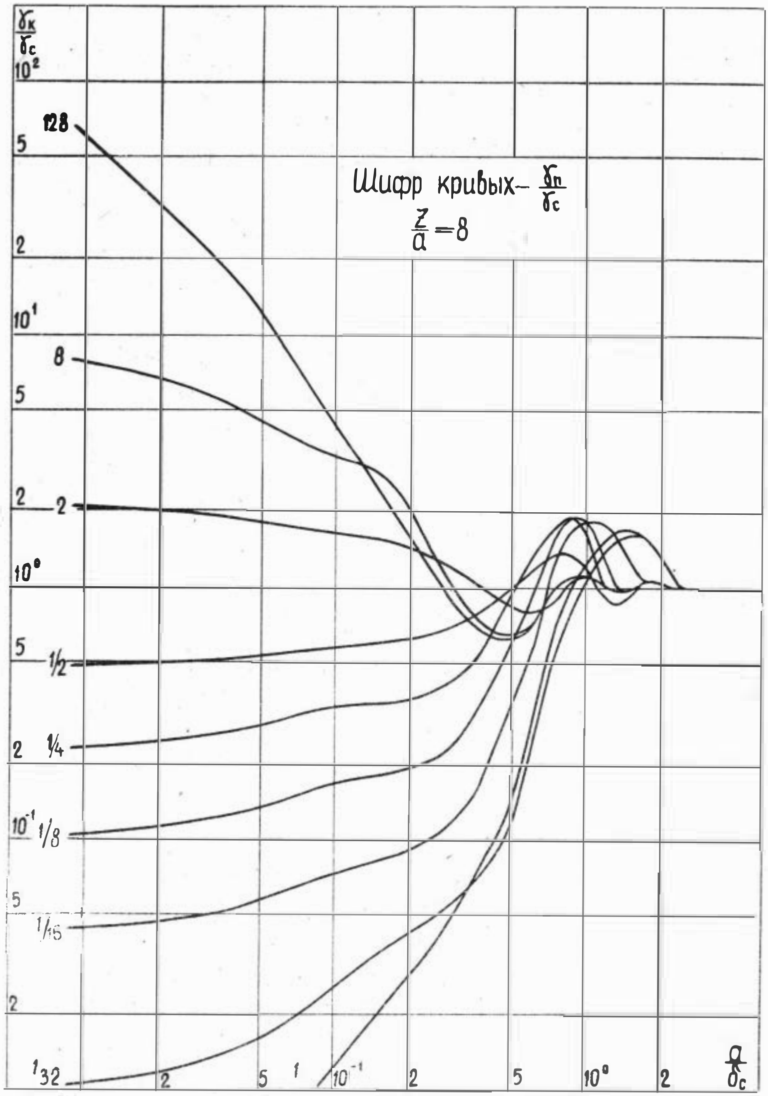

$\frac{\gamma_к}{\gamma_с}$
128
32
8
2
1/2
1/4
1/128
1/32
1/16
10^1
10^0
10^-1
Шифр кривых – $\frac{\gamma_п}{\gamma_с}$
$\frac{Z}{a} = 4$
10^-2
10^-1
10^0
$\frac{a}{\delta_c}$

Рис. 9



$\frac{\gamma_к}{\gamma_с}$
10^2
128
5
32
2
10^1
8
5
2
2
10^0
5
1/2
2
1/4
10^{-1}
1/8
5
1/128
2
1/64
1/32
Шифр кривых – $\frac{\gamma_п}{\gamma_с}$
$\frac{z}{a} = 6$
10^{-2}
2
5
10^{-1}
2
5
10^0
2
$\frac{a}{\delta_c}$

Рис. 10



$\frac{\gamma_к}{\gamma_с}$
Шифр кривых – $\frac{\gamma_п}{\gamma_с}$
$\frac{z}{a} = 8$
128
8
2
1/2
1/4
1/8
1/16
1/32
1
$\frac{a}{\delta_c}$

Рис. 11

исключения влияния скважины при измерении отношения амплитуд поля или разности фаз с двумя зондами. Действительно, при $\alpha \to \infty$ формула (I.70) принимает вид

$$h_x \simeq \frac{1}{I_0^2(m_1)} h^{одн}\left(\frac{L}{\delta_2}\right).$$

Поэтому отношение амплитуд поля и разность фаз, измеренные при двух значениях L, не зависят от радиуса и электропроводности скважины и определяются удельным сопротивлением пласта.

§ 5. Кривые кажущейся проводимости в среде с двумя цилиндрическими поверхностями раздела

Рассмотрим более сложную задачу, когда поперечный магнитный диполь расположен в среде с двумя цилиндрическими поверхностями раздела. Анализ этой задачи позволяет получить представление о влиянии удельного сопротивления и диаметра зоны проникновения на глубинность исследования с установками, состоящими из горизонтальных датчиков. Согласно результатам, полученным в § 2, для электромагнитных потенциалов имеем:

$$\Pi_1 = \Pi_0 + k_1^2 \frac{M}{2\pi^2} \sin\varphi \int_0^\infty \frac{1}{\lambda_1} C_1 I_1(\lambda_1 r) \cos\lambda z \, d\lambda$$

$$\Pi_1^* = \Pi_0^* + \frac{M}{2\pi^2} \cos\varphi \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda_1} D_1 I_1(\lambda_1 r) \sin\lambda z \, d\lambda$$

$$\Pi_2 = k_2^2 + \frac{M}{2\pi^2} \sin\varphi \int_0^\infty \frac{1}{\lambda_2} \left\{-C_2 K_1(\lambda_2 r) + C_3 I_1(\lambda_2 r)\right\} \cos\lambda z \, d\lambda$$

$$\Pi_2^* = \frac{M}{2\pi^2} \cos\varphi \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda_2} \left\{-D_2 K_1(\lambda_2 r) + D_3 I_1(\lambda_2 r)\right\} \sin\lambda z \, d\lambda \qquad \text{(I.72)}$$

$$\Pi_3 = -k_3^2 \frac{M}{2\pi^2} \sin\varphi \int_0^\infty \frac{1}{\lambda_3} C_4 K_1(\lambda_3 r) \cos\lambda z \, d\lambda$$

$$\Pi_3^* = -\frac{M}{2\pi^2} \cos\varphi \int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda_3} D_4 K_1(\lambda_3 r) \sin\lambda z \, d\lambda .$$

Условие непрерывности касательных компонент полей $\vec{E}$ и $\vec{H}$ при $r=a$ и $r=b$ приводит к системе уравнений для коэффициентов $C_1 \div C_4$, $D_1 \div D_4$, которая после некоторых упрощений записывается в виде

$$\lambda_1\left[K_1(\lambda_1 a)-C_1 I_1(\lambda_1 a)\right]=\lambda_2\left[C_2 K_1(\lambda_2 a)-C_3 I_1(\lambda_2 a)\right];$$

$$\frac{1}{\lambda_1 a}\left[K_1(\lambda_1 a)-C_1 I_1(\lambda_1 a)\right]+K_1'(\lambda_1 a)-D_1 I_1'(\lambda_1 a)=$$

$$=\frac{1}{\lambda_2 a}\left[C_2 K_1(\lambda_2 a)-C_3 I_1(\lambda_2 a)\right]+D_2 K_1'(\lambda_2 a)-D_3 I_1'(\lambda_2 a);$$

$$\lambda_1\left[K_1(\lambda_1 a)-D_1 I_1(\lambda_1 a)\right]=\lambda_2\left[D_2 K_1(\lambda_2 a)-D_3 I_1(\lambda_2 a)\right];$$

$$k_1^2\left[K_1'(\lambda_1 a)-C_1 I_1'(\lambda_1 a)\right]+\frac{\lambda^2}{\lambda_1 a}\left[K_1(\lambda_1 a)-D_1 I_1(\lambda_1 a)\right]=$$

$$=k_2^2\left[C_2 K_1'(\lambda_2 a)-C_3 I_1'(\lambda_2 a)\right]+\frac{\lambda^2}{\lambda_2 a}\left[D_2 K_1(\lambda_2 a)-D_3 I_1(\lambda_2 a)\right]; \qquad (I.73)$$

$$\lambda_2\left[C_2 K_1(\lambda_2 b)-C_3 I_1(\lambda_2 b)\right]=\lambda_3 C_4 K_1(\lambda_3 b);$$

$$\frac{1}{\lambda_2 b}\left[C_2 K_1(\lambda_2 b)-C_3 I_1(\lambda_2 b)\right]+D_2 K_1'(\lambda_2 b)-D_3 I_1'(\lambda_2 b)=$$

$$=\frac{1}{\lambda_3 b} C_4 K_1(\lambda_3 b)+D_4 K_1'(\lambda_3 b);$$

$$\lambda_2\left[D_2 K_1(\lambda_2 b)-D_3 I_1(\lambda_2 b)\right]=\lambda_3 D_4 K_1(\lambda_3 b);$$

$$k_2^2\left[C_2 K_1'(\lambda_2 b)-C_3 I_1'(\lambda_2 b)\right]+\frac{\lambda^2}{\lambda_2 b}\left[D_2 K_1(\lambda_2 b)-D_3 I_1(\lambda_2 b)\right]=$$

$$=k_3^2 C_4 K_1'(\lambda_3 b)+\frac{\lambda^2}{\lambda_3 b} D_4 K_1(\lambda_3 b).$$

Решение системы (I.73) не представляет труда, но выражение для коэффициентов C_i, D_i имеют довольно громоздкий вид. Поэтому при практической реализации система (I.73) решается численно и результаты расчета подставляются в интеграл, определяющий магнитное поле на оси скважины:

$$h_x = h_x^{одн} - \frac{\alpha^3}{\pi}\int_0^\infty (D_1 m_1^2 + C_1 K_1^2 a^2)\cos\alpha m\,dm \ . \qquad (I.74)$$

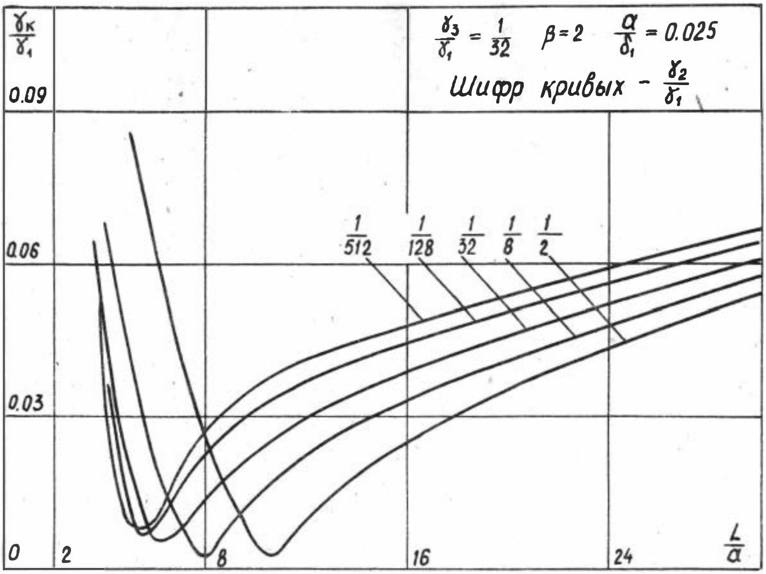
На рис. I2-20 приведены кривые кажущейся проводимости γ_K, связанные с полем соотношением: $\frac{\gamma_K}{\gamma_1} = \frac{|h_x - 1|}{|h_x^{одн} - 1|}$. В низкочастотной части спектра с увеличением длины зонда поле асимптотически стремится к полю в однородной среде с параметрами пласта. Минимум на кривых γ_K/γ_1 связан с обращением активной компоненты в нуль. Для небольших зон проникновения ($\beta \approx 2$) при $\alpha \geqslant 16$ влияние параметров зоны проникновения на величину сигнала в двухкатушечном зонде не превышает 25%.

Глубинность исследования можно значительно увеличить, применяя трехкатушечный фокусирующий зонд. При этом минимальная длина двухкатушечного зонда, входящего в фокусирующую систему, должна соответствовать восходящей ветви кривых γ_K/γ_1. В качестве примера в табл. 8 приведены значения разности амплитуд вторичного поля в области малого параметра, вычисленные для трехкатушечного зонда.

Таблица 8

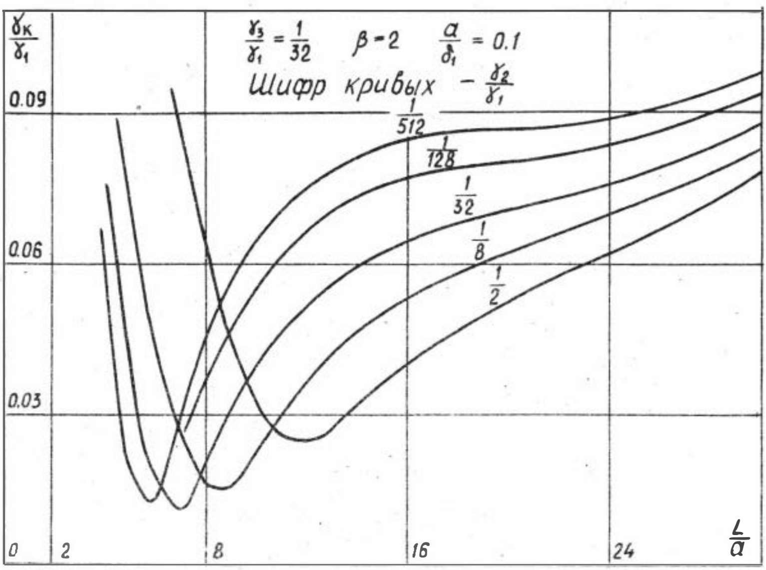
$\frac{\gamma_3}{\gamma_1} = \frac{1}{32}$ $\beta = 4$ $\frac{a}{\delta_1} = 0.025$ $\frac{L_1}{a} = 14$ $\frac{L_2}{a} = 12$				
$\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{8}$
$A_1 - A_2$	$0.12\cdot10^{-2}$	$0.11\cdot10^{-2}$	$0.9\cdot10^{-3}$	$0.7\cdot10^{-3}$

Как видно из таблицы, и повышающее и понижающее проникновение приводит к изменению разности амплитуд не более чем на 30% по сравнению с двухслойной средой, в то время как для двухкатушечного зонда влияние зоны проникновения значительно больше.



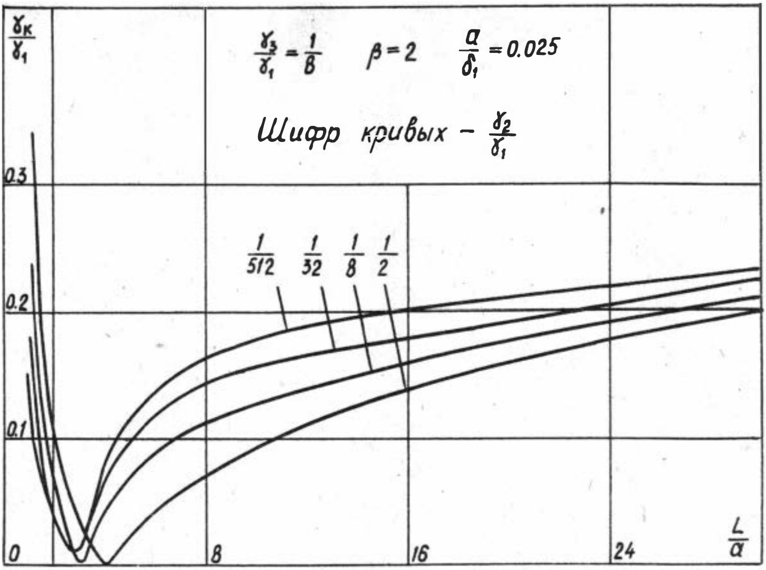
$\frac{\gamma_K}{\gamma_1}$
$\frac{\gamma_3}{\gamma_1} = \frac{1}{32}$ $\beta = 2$ $\frac{a}{\delta_1} = 0.025$
Шифр кривых - $\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$
0.09
0.06
0.03
0
$\frac{1}{512}$ $\frac{1}{128}$ $\frac{1}{32}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$
2
8
16
24
$\frac{L}{a}$

Рис. 12



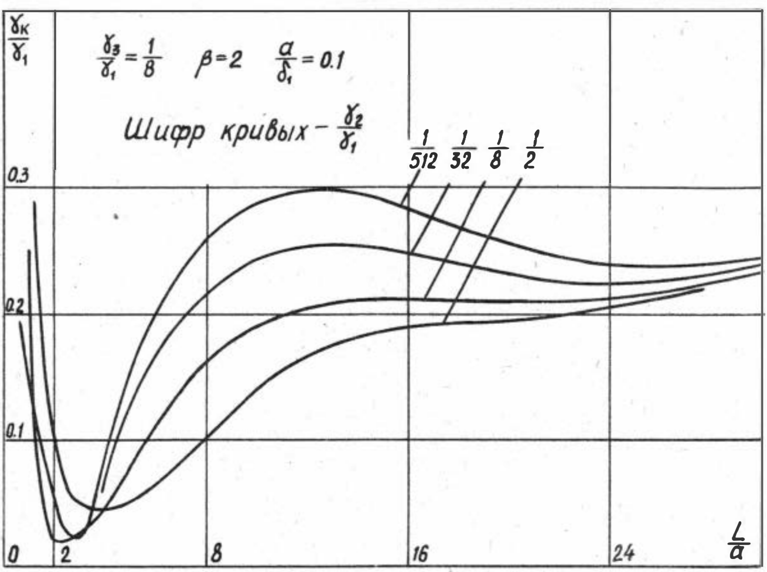
$\frac{\gamma_K}{\gamma_1}$
$\frac{\gamma_3}{\gamma_1} = \frac{1}{32}$ $\beta = 2$ $\frac{a}{\delta_1} = 0.1$
Шифр кривых - $\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$
0.09
$\frac{1}{512}$
$\frac{1}{128}$
$\frac{1}{32}$
0.06
$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{2}$
0.03
0
2
8
16
24
$\frac{L}{a}$

Рис. 13



$\frac{\gamma_K}{\gamma_1}$
$\frac{\gamma_3}{\gamma_1}=\frac{1}{8}$ $\beta=2$ $\frac{a}{\delta_1}=0.025$
Шифр кривых – $\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$
$\frac{1}{512}$ $\frac{1}{32}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$
0.3
0.2
0.1
0
8
16
24
$\frac{L}{a}$

Рис. I4



$\frac{\gamma_K}{\gamma_1}$
$\frac{\gamma_3}{\gamma_1}=\frac{1}{8}$ $\beta=2$ $\frac{a}{\delta_1}=0.1$
Шифр кривых – $\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$
$\frac{1}{512}$ $\frac{1}{32}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$
0.3
0.2
0.1
0
2
8
16
24
$\frac{L}{a}$

Рис. 15

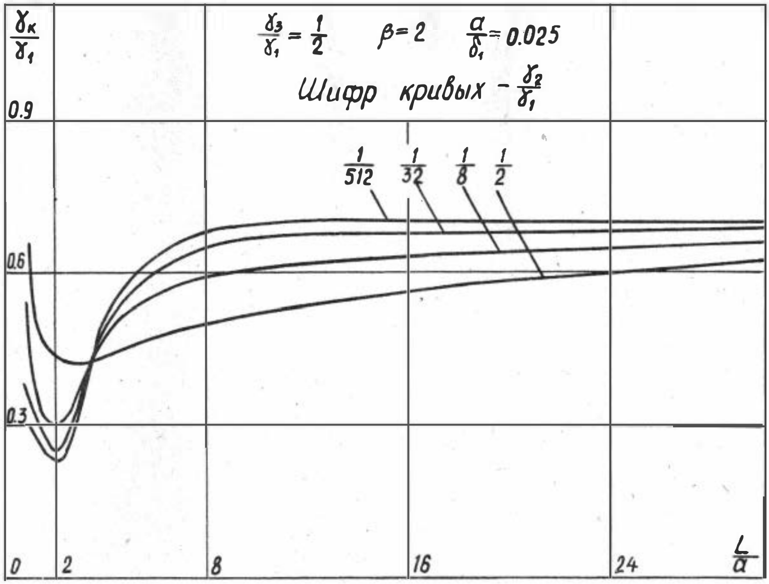

$\frac{\gamma_K}{\gamma_1}$
$\frac{\gamma_3}{\gamma_1}=\frac{1}{2}$ $\beta=2$ $\frac{a}{\delta_1}=0.025$
Шифр кривых - $\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$
0.9
$\frac{1}{512}$ $\frac{1}{32}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$
0.6
0.3
0
2
8
16
24
$\frac{L}{a}$

Рис. I6

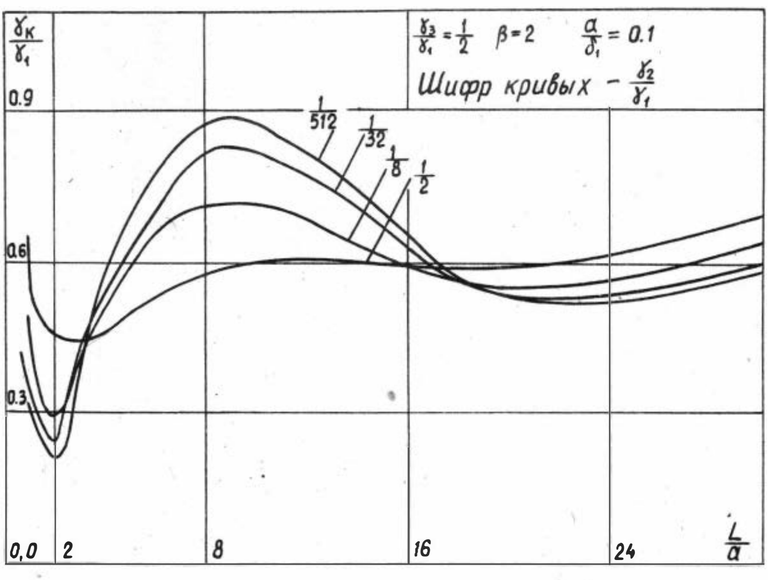

$\frac{\gamma_K}{\gamma_1}$
$\frac{\gamma_3}{\gamma_1}=\frac{1}{2}$ $\beta=2$ $\frac{a}{\delta_1}=0.1$
Шифр кривых - $\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$
0.9
$\frac{1}{512}$ $\frac{1}{32}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$
0.6
0.3
0,0
2
8
16
24
$\frac{L}{a}$

Рис. I7

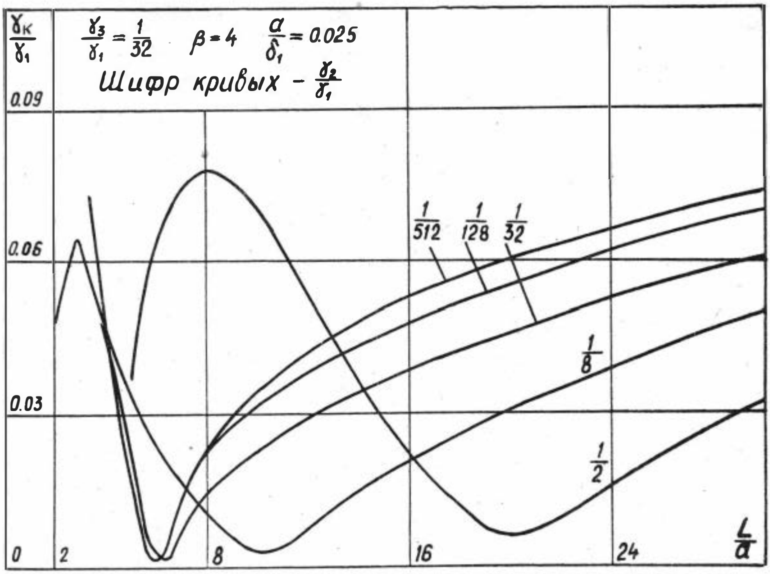

$\frac{\gamma_к}{\gamma_1}$
$\frac{\gamma_3}{\gamma_1}=\frac{1}{32}$ $\beta=4$ $\frac{a}{\delta_1}=0.025$
Шифр кривых - $\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$
0.09
0.06
0.03
0
2
8
16
24
$\frac{L}{a}$
$\frac{1}{512}$ $\frac{1}{128}$ $\frac{1}{32}$
$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{2}$

Рис. I8

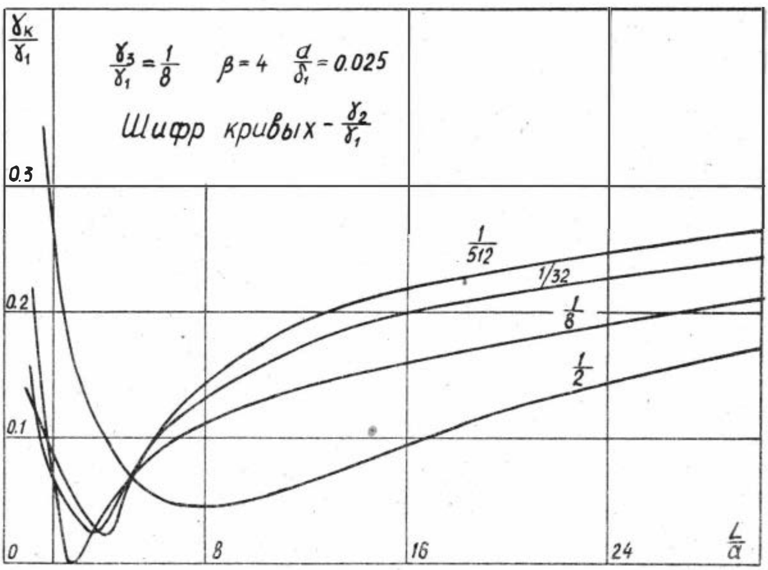

$\frac{\gamma_к}{\gamma_1}$
$\frac{\gamma_3}{\gamma_1}=\frac{1}{8}$ $\beta=4$ $\frac{a}{\delta_1}=0.025$
Шифр кривых - $\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$
0.3
0.2
0.1
0
8
16
24
$\frac{L}{a}$
$\frac{1}{512}$
1/32
$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{2}$

Рис. I9

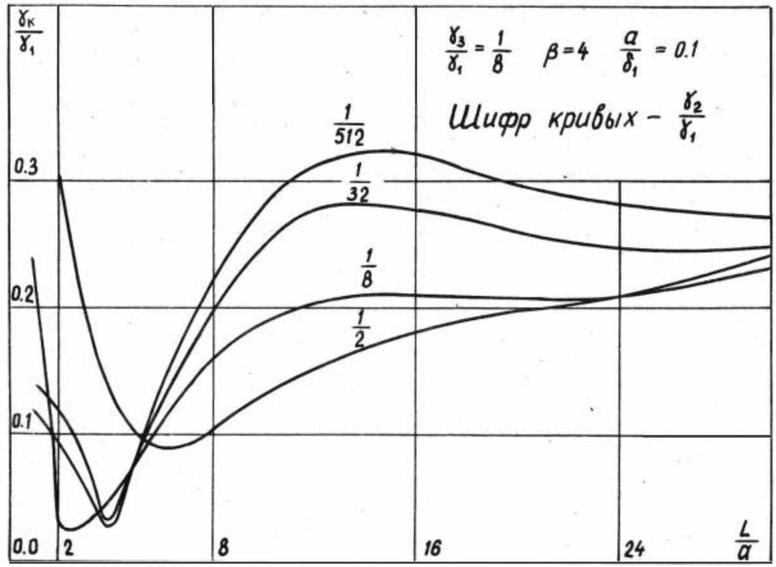

$\frac{\gamma_K}{\gamma_1}$
0.3
0.2
0.1
0.0
2
8
16
24
$\frac{L}{a}$
$\frac{\gamma_3}{\gamma_1} = \frac{1}{8}$ $\beta = 4$ $\frac{a}{\delta_1} = 0.1$
Шифр кривых – $\frac{\gamma_2}{\gamma_1}$
$\frac{1}{512}$
$\frac{1}{32}$
$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{2}$

Рис. 20

§ 6. Цилиндрическая поверхность с поперечным сопротивлением

Предположим, что при проникновении фильтрата бурового раствора в пласт образуется промежуточная зона небольшой толщины с относительно высоким сопротивлением. В этом случае для поля может быть получено довольно простое выражение и хорошее согласие данных расчета по полученным формулам и вычислительной схеме для трехслойной среды является контролем последней. Будем считать, что удельные проводимости скважины и пласта равны, обобщение на случай различных проводимостей не представляет особого труда.

Задача ставится следующим образом. В однородной среде с проводимостью γ_1 находится тонкий цилиндрический слой радиуса a и толщины h с удельной проводимостью γ_Δ, причем $\frac{h}{a} \ll 1$, $\frac{\gamma_1}{\gamma_\Delta} \gg 1$. Электрические свойства слоя характеризуются поперечным сопротивлением $T = \frac{h}{\gamma_\Delta}$. При переходе через поверхность тангенциальные компоненты магнитного поля непрерывны:

$$H_{1z} = H_{2z} \;;\quad H_{1\varphi} = H_{2\varphi}\,, \tag{I.75}$$

где $\vec{H}_1$ и $\vec{H}_2$ – поле, соответственно, в скважине и пласте. Тангенциальные компоненты электрического поля из-за наличия двойного слоя терпят разрыв

$$\begin{aligned} E_{2z} &= E_{1z} + T\gamma_1 \frac{\partial E_{1r}}{\partial z} \\ E_{2\varphi} &= E_{1\varphi} + T\frac{\gamma_1}{a}\frac{\partial E_{1r}}{\partial \varphi}\,. \end{aligned} \tag{I.76}$$

Подставляя в уравнения (I.75), (I.76) выражения для компонент поля через потенциалы в двухслойной среде (I.28), получаем систему уравнений:

$$K_1(m_1) - I_1(m_1)D = K_1(m_1)G\,,$$

$$a^2k_1^2\left(K_1'(m_1)-I_1'(m_1)C\right)+\frac{m^2}{m_1}\left(K_1(m_1)-I_1(m_1)\mathcal{D}\right)=$$

$$=a^2k_1^2K_1'(m_1)E+\frac{m^2}{m_1}K_1(m_1)G\quad;$$

$$K_1(m_1)-I_1(m_1)C-\tau\left[\frac{m^2}{m_1^2}I_1(m_1)\mathcal{D}+\frac{m^2}{m_1}K_0(m_1)+\frac{m^2}{m_1}I_1'(m_1)C\right]=$$

$$=K_1(m_1)E\quad; \tag{I.77}$$

$$-K_0(m_1)-\frac{I_1(m_1)}{m_1}C-I_1'(m_1)\mathcal{D}-\tau\left[\frac{I_1(m_1)}{m_1}\mathcal{D}+K_0(m_1)+I_1'(m_1)C\right]=$$

$$=\frac{K_1(m_1)}{m_1}E+K_1'(m_1)G\quad,$$

где $m_1=\sqrt{m^2-a^2k_1^2}$; $\tau=T\cdot\frac{\gamma_1}{a}=\frac{T}{T_0}$.

Величину T_0 по аналогии можно назвать поперечным сопротивлением скважины. Решая систему (I.77), получаем

$$C=\frac{\tau m^2K_0(m_1)K_1'(m_1)}{1-\tau\left[\frac{a^2k_1^2}{m_1^2}I_1(m_1)K_1(m_1)+m^2I_1'(m_1)K_1'(m_1)\right]}$$

$$\mathcal{D}=\frac{\tau\frac{a^2k_1^2}{m_1}K_0(m_1)K_1(m_1)}{1-\tau\left[\frac{a^2k_1^2}{m_1^2}I_1(m_1)K_1(m_1)+m^2I_1'(m_1)K_1'(m_1)\right]}\ . \tag{I.78}$$

Для магнитного поля на оси z имеем:

$$h_x=h_x^{одн}+\tau a^2k_1^2\frac{\alpha^3}{\pi}\int_0^\infty\frac{m^2K_0^2(m_1)\cos\alpha m\,dm}{1-\tau\left[\frac{a^2k_1^2}{m_1^2}I_1(m_1)K_1(m_1)+m^2I_1'(m_1)K_1'(m_1)\right]}\ . \tag{I.79}$$

При $\tau\to 0$ $h_x\to h_x^{одн}$, в противоположном случае, когда $\tau\to\infty$, получаем

$$h_x = h_x^{одн} - a^2 k_1^2 \frac{\alpha^3}{\pi} \int_0^\infty \frac{m^2 K_0^2(m_1) \cos \alpha m \, dm}{\frac{a^2 k_1^2}{m_1^2} I_1(m_1) K_1(m_1) + m^2 I_1'(m_1) K_1'(m_1)} \qquad (I.80)$$

Расчеты показывают, что асимптотическая формула (I.80) справедлива при $\tau > 10$. На рис. 2I представлены кривые амплитуды вторичного поля как функции α. Шифром кривых служит параметр a/δ_1.

В области малого параметра для активной компоненты поля имеем

$$\operatorname{Im} h_x = -\left(\frac{L}{\delta_1}\right)^2 (1 + Q_\tau) ,$$

где

$$Q_\tau = -\frac{2\tau}{\alpha^2} \frac{\alpha^3}{\pi} \int_0^\infty \frac{m^2 K_0^2(m) \cos \alpha m \, dm}{1 - \tau m^2 I_1'(m) K_1'(m)} .$$

Если длина зонда во много раз больше радиуса скважины ($\alpha \gg 1$), то, следуя методике подробно описанной в § 3, получаем

$$Q_\tau \simeq -\frac{2\tau}{1+\frac{\tau}{2}} \frac{\alpha}{\pi} \int_0^\infty m^2 K_0^2(m) \cos \alpha m \, dm \simeq \frac{4\tau}{1+\frac{\tau}{2}} \frac{\ln \alpha}{\alpha^2} .$$

Таким образом,

$$\operatorname{Im} h_x = -\left(\frac{L}{\delta_1}\right)^2 \left(1 + \frac{4\tau}{1+\frac{\tau}{2}} \frac{\ln \alpha}{\alpha^2}\right)$$

и для $\tau \gg 1$

$$\operatorname{Im} h_x = -\left(\frac{L}{\delta_1}\right)^2 \left(1 + 8 \frac{\ln \alpha}{\alpha^2}\right) . \qquad (I.8I)$$

Получим теперь асимптотическое выражение для поля в дальней зоне ($\alpha \gg 1$), не предполагая малость параметра L/δ_1. Для простоты будем считать, что $\tau \gg 1$. Подынтегральная функция в (I.80) имеет точку ветвления в комплексной плоскости переменной интегрирования m при $m = ak_1$.

Проведя разрез от точки $m = ak_1$ вдоль мнимой оси и дефор-

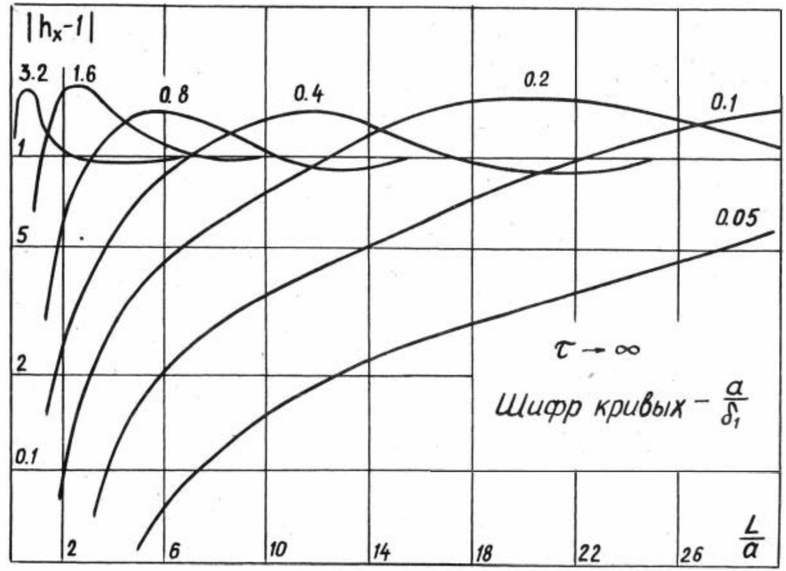

|hx-1|
3.2
1.6
0.8
0.4
0.2
0.1
0.05
1
5
2
0.1
2
6
10
14
18
22
26
L/a
τ → ∞
Шифр кривых – a/δ1

Рис.21

мируя контур интегрирования по разрезу, получаем (разлагая подынтегральную функцию по степеням m_1):

$$h_x = h_x^{одн} + a^2 k_1^2 \frac{\alpha^3}{\pi} \int_{ak_1}^{i\infty + ak_1} m^2 \left[K_0^2(m_1) - K_0^2(-m_1)\right] e^{i\alpha m} dm .$$

Поскольку

$$K_0^2(m_1) - K_0^2(-m_1) = -2i\pi K_0(m_1) I_0(m_1) + \pi^2 I_0^2(m_1)$$

$$\approx -2i\pi K_0(m_1)$$

(для $|m_1| \ll$ I), то

$$h_x = h_x^{одн} - 2ia^2 k_1^2 \alpha^3 \int_{ak_1}^{i\infty + ak_1} m^2 K_0(m_1) e^{i\alpha m} dm .$$

Положив $m = it + ak_1$, $0 \le t < \infty$, имеем

$$h_x = h_x^{одн} + 2a^2 k_1^2 e^{iLk_1} \alpha^3 \int_0^\infty (it + ak_1)^2 K_0(m_1) e^{-\alpha t} dt , \tag{I.82}$$

где $m_1 = \sqrt{-t^2 + 2itak_1}$.

Интеграл типа (I.82) выражается при $\alpha \gg$ I через интегральную показательную функцию:

$$\int_0^\infty (it + ak_1)^2 K_0(m_1) e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2iak_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} - a^2 k_1^2\right) \times$$

$$\times \int_0^\infty \left[\ln(-t) + \ln(t - 2iak_1)\right] e^{-\alpha t} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2iak_1 \frac{\partial}{\partial \alpha} - a^2 k_1^2\right)\left[-\frac{\ln \alpha}{\alpha} + \frac{\ln(-2iak_1)}{\alpha} - \frac{e^{-2ik_1 L}}{\alpha} Ei(2ik_1 L)\right]. \tag{I.83}$$

Если $|k_1 L| \ll$ I, то $Ei(2ik_1 L) \simeq \ln(-2ik_1 L)$ и выражение (I.83) принимает вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2iak_1\frac{\partial}{\partial\alpha}-a^2k_1^2\right)\left(-\frac{\ln\alpha}{\alpha}\right)\simeq-\frac{2\ln\alpha}{\alpha^3}\,.$$

Поэтому для магнитного поля имеем

$$h_x=h_x^{\text{одн}}-4a^2k_1^2e^{ik_1L}\ln\alpha=-\frac{k_1^2L^2}{2}\left(1+8\frac{\ln\alpha}{\alpha^2}\right)$$

– выражение, совпадающее с формулой (I.8I), справедливой в области малого параметра. В противоположном случае $|k_1L|\gg$ I можно записать $Ei\,(2ik_1L)\simeq\dfrac{e^{2ik_1L}}{2ik_1L}$ и вместо (I.83) получаем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+2ik_1a\frac{\partial}{\partial\alpha}-k_1^2a^2\right)\left[-\frac{\ln\alpha}{\alpha}+\frac{\ln(-2iak_1)}{\alpha}\right]=$$

$$=\frac{k_1^2L^2}{2}\,\frac{\ln\alpha-\ln|k_1a|}{\alpha^3}\,.$$

Отсюда

$$h_x=h_x^{\text{одн}}+k_1^2a^2\cdot k_1^2L^2e^{ik_1L}\left(\ln\alpha-\ln|k_1a|\right).\qquad\text{(I.84)}$$

Поскольку в области $|k_1L|\gg$ I $h_x^{\text{одн}}\simeq-k_1^2L^2e^{ik_1L}$,
то формулу (I.84) представим в виде

$$h_x=h_x^{\text{одн}}\left(1-k_1^2L^2\frac{\ln\alpha-\ln|k_1a|}{\alpha^2}\right).$$

Глава II

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ В СРЕДАХ С ГОРИЗОНТАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ РАЗДЕЛА

Эта глава посвящена изучению поля горизонтального магнитного диполя в изотропной среде с одной и двумя горизонтальными поверхностями раздела в экваториальной плоскости источника, на оси, перпендикулярной напластованию, что, в известной мере, соответствует условиям измерения в скважинах.

§ I. Магнитное поле в среде с одной горизонтальной поверхностью раздела

Поместим диполь в начале координат и направим момент диполя вдоль оси X :

$$\vec{M} = M_0 e^{-i\omega t} \vec{x}_0 . \tag{2.1}$$

Здесь $M_0 = J n S$ (J - сила тока, n и S - число витков и площадь). Уравнения поля принимают вид:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = i\omega\mu \vec{H} \qquad \operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E}$$
$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0 . \tag{2.2}$$

Положим $\vec{E} = i\omega\mu \operatorname{rot} \vec{\Pi}$ (2.3)

и, подставляя (2.3) в (2.2), имеем

$$\vec{H} = k^2 \vec{\Pi} - \operatorname{grad} U .$$

Принимая $U = -\operatorname{div} \vec{\Pi}$, получаем для потенциала уравнение

$$\nabla^2 \vec{\Pi} + k^2 \vec{\Pi} = 0 , \tag{2.4}$$

где $k^2 = i\omega\mu\gamma .$

Связь между потенциалами и полем определяется соотношениями:

$$\vec{E} = i\omega\mu \,\mathrm{rot}\,\vec{\Pi} \qquad \vec{H} = k^2\vec{\Pi} + \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{\Pi}. \tag{2.5}$$

Будем искать решение для поля, полагая компоненту $\Pi_y = 0$. Согласно (2.5)

$$E_x = i\omega\mu \frac{\partial \Pi_z}{\partial y} \qquad E_y = i\omega\mu\left(\frac{\partial \Pi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_z}{\partial x}\right) \qquad E_z = -i\omega\mu \frac{\partial \Pi_x}{\partial y}$$

и

(2.6)

$$H_x = k^2\Pi_x + \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{div}\,\vec{\Pi} \qquad H_y = \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{div}\,\vec{\Pi} \qquad H_z = k^2\Pi_z + \frac{\partial}{\partial z}\mathrm{div}\,\vec{\Pi}.$$

Для непрерывности тангенциальных компонент поля на поверхности раздела $z = h$ достаточно обеспечить непрерывность величин Π_z, $\frac{\partial \Pi_x}{\partial z}$, $k^2\Pi_x$ и $\mathrm{div}\,\vec{\Pi}$. Таким образом, для компонент вектор-потенциала получаем две группы условий:

$$k_1^2\Pi_{1x} = k_2^2\Pi_{2x} \qquad \frac{\partial \Pi_{1x}}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_{2x}}{\partial z} \tag{2.7}$$

и

$$\Pi_{1z} = \Pi_{2z} \qquad \mathrm{div}\,\vec{\Pi}_1 = \mathrm{div}\,\vec{\Pi}_2 \quad . \tag{2.8}$$

Первичное поле диполя в однородной среде имеет только одну компоненту

$$\Pi_{1x}^{(0)} = \frac{M}{4\pi}\,\frac{e^{ik_1R}}{R}$$

или

$$\Pi_{1x}^{(0)} = \frac{M}{4\pi}\int_0^\infty \frac{m}{m_1} e^{-m_1|z|} J_0(mr)\,dm, \qquad \text{где } m_1 = \sqrt{m^2 - k_1^2}.$$

Поэтому компоненту Π_x представим в виде:

$$\begin{aligned} \Pi_{1x} &= \frac{M}{4\pi}\int_0^\infty \left\{\frac{m}{m_1} e^{-m_1|z|} + A_m e^{m_1 z}\right\} J_0(mr)\,dm \\ \Pi_{2x} &= \frac{M}{4\pi}\int_0^\infty B_m e^{-m_2 z} J_0(mr)\,dm, \end{aligned} \tag{2.9}$$

здесь $m_2 = \sqrt{m^2 - k_2^2}$.

Из граничных условий при $z=h$ имеем

$$\frac{m}{m_1} e^{-m_1 h} + A_m e^{m_1 h} = S B_m e^{-m_2 h}$$

$$-m e^{-m_1 h} + m_1 A_m e^{m_1 h} = -m_2 B_m e^{-m_2 h} .$$

Отсюда

$$A_m = \frac{m}{m_1} \frac{S m_1 - m_2}{S m_1 + m_2} e^{-2 m_1 h}$$

$$B_m = \frac{2m}{S m_1 + m_2} e^{-(m_1 - m_2)}, \tag{2.10}$$

где $S = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ и

$$\Pi_{1x} = \Pi_{1x}^{(0)} + \frac{M}{4\pi} \int_0^\infty \frac{m}{m_1} \frac{S m_1 - m_2}{S m_1 + m_2} e^{-2 m_1 h + m_1 z} J_0(m r) dm \tag{2.11}$$

$$\Pi_{2x} = \frac{M}{4\pi} \int_0^\infty \frac{2m}{S m_1 + m_2} e^{-(m_1 - m_2) h - m_2 z} J_0(m r) dm .$$

Из непрерывности $div \vec{\Pi}$ следует, что

$$\frac{\partial}{\partial x} (\Pi_{1x} - \Pi_{2x}) = \frac{\partial}{\partial z} (\Pi_{2z} - \Pi_{1z}) .$$

Так как

$$\frac{\partial \Pi_x}{\partial x} = \frac{\partial \Pi_x}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi \int_0^\infty F(m) e^{\pm m_i z} J_1(m r) dm ,$$

то для выполнения условия непрерывности $div \vec{\Pi}$ решение для Π_z представим в виде

$$\Pi_{1z} = \frac{M}{4\pi} \cos\varphi \int_0^\infty C_m e^{m_1 z} J_1(m r) dm$$

$$\Pi_{2z} = \frac{M}{4\pi} \cos\varphi \int_0^\infty D_m e^{-m_2 z} J_1(m r) dm .$$

Согласно (2.8) имеем

$$C_m e^{m_1 h} = \mathcal{D}_m e^{-m_2 h}$$
$$(s-1) m B_m e^{-m_2 h} = m_2 \mathcal{D}_m e^{-m_2 h} + m_1 C_m e^{m_1 h}, \tag{2.12}$$

и, решая эту систему, находим

$$C_m = \frac{(s-1) m B_m}{m_1 + m_2} e^{-(m_1+m_2)h}$$
$$\mathcal{D}_m = \frac{(s-1) m B_m}{m_1 + m_2} . \tag{2.13}$$

Итак,

$$\Pi_{1z} = \frac{M}{4\pi} \cos\varphi \int_0^\infty \frac{(s-1) m B_m}{m_1 + m_2} e^{-(m_1+m_2)h + m_1 z} J_1(mr)\, dm$$
$$\Pi_{2z} = \frac{M}{4\pi} \cos\varphi \int_0^\infty \frac{(s-1) m B_m}{m_1 + m_2} e^{-m_2 z} J_1(mr)\, dm . \tag{2.14}$$

Магнитное поле на оси z имеет только компоненту H_x, для которой, согласно (2.6) и (2.14) получаем

$$h_{1x} = h_0 - L \int_0^\infty \Phi_1(m) e^{m_1 L}\, dm$$
$$h_{2x} = - L \int_0^\infty \Phi_2(m) e^{-m_2 L}\, dm , \tag{2.15}$$

h_x - магнитное поле, выраженное в единицах поля в воздухе: $h_x = \frac{H_x}{H_0}$, где $H_0 = -\frac{M}{4\pi L^3}$, L - длина зонда.

$$h_0 = e^{ik_1 L}(1 - ik_1 L - k_1^2 L^2)$$

$$\Phi_1 = \left(k_1^2 L^2 - \frac{m^2 L^2}{2}\right) \frac{m}{m_1} \frac{s m_1 - m_2}{s m_1 + m_2} e^{-2m_1 h} + m^2 L^2 \frac{m^3 (s-1) e^{-2m_1 h}}{m_1 (s m_1 + m_2)(m_1 + m_2)}$$

$$\Phi_2 = \left(k_2^2 L^2 - \frac{m^2 L^2}{2}\frac{m_1 + S m_2}{m_1 + m_2}\right)\frac{2m}{S m_1 + m_2}\, e^{-(m_1 - m_2)h} .$$

Рассмотрим поведение поля в низкочастотной части спектра, когда длина волны в обеих средах превышает расстояние от диполя до границы и длину зонда. При получении асимптотических формул воспользуемся методикой, изложенной в работе / 3 /. На интервале интегрирования выделим два участка: внутренний ($0 < mL < m_0 L \ll 1$) и внешний ($m \gg m_0$). На внешнем участке радикалы m_1 и m_2 могут быть разложены в ряд по степеням $\frac{k_1^2}{m^2}$ и $\frac{k_2^2}{m^2}$. Поэтому интеграл на внешнем участке представляется в виде ряда только с четными степенями k. На внутреннем участке экспоненты разлагаются в ряды ($mL \ll 1$), и интеграл на этом интервале может быть сведен к сумме табличных интегралов, представление которых в виде ряда по степеням k не вызывает трудностей. В отличие от интеграла на внешнем участке эти ряды содержат нечетные степени k и логарифмические слагаемые. Так, например, в среде, где расположен диполь, для низкочастотной части спектра h_x имеем:

$$\begin{aligned} Re\, h_{1x} &= 1 + a_1 \left(\frac{L}{\delta_1}\right)^3 \\ Im\, h_{1x} &= b_1 \left(\frac{L}{\delta_1}\right)^2 + a_1 \left(\frac{L}{\delta_1}\right)^3 , \end{aligned} \qquad (2.17)$$

здесь

$$a_1 = \frac{2}{S^2-1}\left\{\frac{4}{3} S\sqrt{S}(\sqrt{S}-1) - \frac{1}{5} S(S\sqrt{S}-1) + \frac{2}{15}(S^3\sqrt{S}-1) + \right.$$

$$\left. + \frac{S^2}{2\sqrt{S+1}} \ln\left(\frac{\sqrt{S+1}-1}{\sqrt{S+1}+1} \cdot \frac{\sqrt{S+1}+\sqrt{S}}{\sqrt{S+1}-\sqrt{S}}\right)\right\} .$$

$$b_1 = -1 - \frac{1}{4}\,\frac{(S+5)(S-1)}{(S+1)}\,\frac{L}{2h-L}$$

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{2}{\gamma_1 \mu\omega}} , \quad \delta_2 = \sqrt{\frac{2}{\gamma_2 \mu\omega}} , \quad \frac{L}{\delta_1} \ll 1 , \quad S = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} .$$

Если поверхность раздела находится достаточно далеко от источника и точки измерения поля ($L/h \ll I$), то коэффициент b_1 принимает значение, соответствующее полю в однородной среде: $b_1 = -I$. Коэффициент a_1 не зависит от положения зонда относительно границы и является функцией удельного сопротивления обеих сред. Вторые слагаемые в (2.I7) определяют ту часть поля, которая создана токами, и глубинность исследования при измерении этих величин такая же как и в поздней стадии становления. Очевидно, что при $S \to I$ коэффициенты принимают значения, соответствующие однородной среде: $a_1 = 4/3$; $b_1 = -I$.

Теперь обратимся к высокочастотной части спектра и для получения асимптотических формул воспользуемся следующим соотношением:

$$I_n = \int_0^\infty \lambda^n e^{-\sqrt{\lambda^2 + k_1^2 L^2}} d\lambda \simeq a_n (k_1 L)^{\frac{n+1}{2}} e^{-k_1 L} \tag{2.I9}$$

при $k_1 L \gg I$.

Здесь a_n - функция от n, которая для первых трех значений n равна I, $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ и 2.

Отметим, что интегралы типа (2.I9) при нечетных n сводятся к элементарным функциям, а для четных значений n выражаются через модифицированные функции Бесселя $K_n(k_1 L)$.

После элементарных преобразований, которые позволяют выражение для поля свести к интегралам вида I_n, получаем:

$$h_1 \simeq h_0 - k_1^2 L^2 \frac{\sqrt{S}-1}{\sqrt{S}+1} \frac{e^{ik_1 L(2\alpha-1)}}{2\alpha-1} \approx h_0$$

$$\left(\alpha = \frac{h}{L} > 1 \ , \ |k_1 L| \gg 1\right). \tag{2.20}$$

Как и следовало ожидать, в результате скин-эффекта поле становится таким же как в однородной среде с удельной проводимостью γ_1. Но, если диполь или точка измерения находятся на поверхности раздела, то, независимо от частоты, поле является функцией электропроводности обеих сред. Согласно (2.20)

$$h_1 = -k_1^2 L^2 \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{S}+1} e^{ik_1 L} . \qquad (2.21)$$

В заключение этого параграфа отметим одну интересную особенность в распределении токов, когда удельная проводимость среды, в которой расположен диполь, равна нулю ($S \to \infty$). В этом случае, как видно из формулы (2.II), компонента вектор-потенциала Π_{2x} обращается в нуль. Поэтому в проводящей среде электрическое поле и индуцированные токи не имеют вертикальной компоненты, при этом распределение тока симметрично относительно плоскости yoz, которую токовые линии не пересекают.

§ 2. Магнитное поле горизонтального диполя в пластах ограниченной мощности

Поместим магнитный диполь внутри пласта. Тогда, согласно результатам, полученным в § I, выражения для компонент потенциала имеют вид:

$$\Pi_{1x} = \frac{M}{4\pi} \int_0^\infty \mathcal{D}_1 e^{m_1 z} J_0(mr)\, dm$$

$$\Pi_{1z} = \frac{M}{4\pi} \frac{x}{r} \int_0^\infty F_1 e^{m_1 z} J_1(mr)\, dm \qquad (z < -h_2)$$

$$\Pi_{2x} = \frac{M}{4\pi} \int_0^\infty \left[\frac{m}{m_2} e^{-m_2 |z|} + \mathcal{D}_2 e^{m_2 z} + \mathcal{D}_3 e^{-m_2 z} \right] J_0(mr)\, dm$$

$$\Pi_{2z} = \frac{M}{4\pi} \frac{x}{r} \int_0^\infty \left[F_2 e^{m_2 z} + F_3 e^{-m_2 z} \right] J_1(mr)\, dm \qquad (-h_2 < z < h_1)$$

$$\Pi_{3x} = \frac{M}{4\pi} \int_0^\infty \mathcal{D}_4 e^{-m_1 z} J_0(mr)\, dm \qquad (2.22)$$

$$\Pi_{3z} = \frac{M}{4\pi} \frac{x}{r} \int_0^\infty F_4 e^{-m_1 z} J_1(mr)\, dm \qquad (z > h_1) .$$

Из системы граничных условий при $z=h_1$ и $z=-h_2$ находим коэффициенты $\mathcal{D}_1-\mathcal{D}_4$, F_1-F_4 и для горизонтальной компоненты магнитного поля на оси z, когда двухкатушечный зонд расположен симметрично относительно границ пласта, получаем:

$$h_x = h_{0x}^{(2)} - \int_0^\infty \Big\{ \Big(\frac{m^2}{2} - k_n^2 z^2\Big) \cdot 2q_{12}\left(1 - q_{12}\, ch\, m_2\, e^{-\alpha m_2}\right) + \frac{(1-S)(1-q_{12})m^2 m_2}{(m_1+m_2)\,d_2}\Big[1-(q_{12}-K_{12})ch\, m_2\, e^{-\alpha m_2} - \tag{2.23}$$

$$- K_{12} q_{12} e^{-2\alpha m_2}\Big]\Big\} \frac{m}{m_2 d_1} e^{-\alpha m_2} dm \quad ; \qquad \alpha = \frac{H}{L} \geqslant 1$$

где

$$d_1 = 1 - q_{12}^2 e^{-2m_2} \quad ; \qquad d_2 = 1 - K_{12}^2 e^{-2m_2} \quad ;$$

$$q_{12} = \frac{S m_1 - m_2}{S m_1 + m_2} \quad ; \qquad K_{12} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \quad ,$$

$S = \frac{\gamma_n}{\gamma_b}$; γ_n и γ_b - проводимости пласта и вмещающей среды, H - мощность пласта, L - длина зонда.

Аналогично выводится формула для поля, когда длина зонда больше мощности пласта, и генераторная и приемная катушки зонда расположены по обе стороны от границ пласта.

$$h_x = \int_0^\infty \Big\{ \frac{m^2}{2} S - k_2^2 L^2 + \frac{m^2 m_1^2}{2(m_1+m_2)^2} \frac{(S-1)^2}{d_2}\left(1-e^{-2\alpha m_2}\right)\Big\} \times \tag{2.24}$$

$$\times \frac{4 m m_2}{(S m_1 + m_2)^2 d_1} e^{-(\alpha m_2 + (1-\alpha) m_1)} dm \quad ; \qquad \alpha \leqslant 1 \, .$$

Поскольку в выражениях для поля (2.23 - 2.24) отсутствуют быстро осциллирующие множители, то численное интегрирование не вызывает серьезных трудностей.

При симметричном положении датчиков зонда относительно границ пласта поле определяется тремя параметрами: $\rho = \frac{L}{\delta_n}$,

$S = \frac{\gamma_n}{\gamma_e}$ и $\alpha = \frac{H}{L}$. Здесь δ_n - толщина скин-слоя в пласте. Расчеты поля h_x были выполнены для следующих значений параметров:

$$\alpha = \frac{1}{16},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \sqrt{\frac{1}{2}},\ 1,\ \sqrt{2},\ 2, \dots,\ 16$$

$$S = \frac{1}{128},\ \frac{1}{64},\ \frac{1}{32},\ \dots\dots,\ 64,\ 128$$

$$\delta_n = 0{,}15\ 10^{-2},\ 0{,}15\ 10^{-2}\sqrt{2}, \dots\dots,\ 2 \dots\dots,\ 6{,}4.$$

и результаты представлены в виде амплитудных и фазовых частотных характеристик поля. Кроме того, были расчитаны функции γ_k, где

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_n} = \frac{A}{A_0} \tag{2.25}$$

(А и A_0 - соответственно амплитуды вторичного поля в пласте и однородной среде с удельной проводимостью γ_n).

Вначале рассмотрим поведение поля в низкочастотной части спектра, когда параметр $p = \frac{L}{\delta_n} \to 0$, и зонд расположен внутри пласта. Для получения низкочастотной асимптотики воспользуемся методикой, описанной в § I. Выражения для активной и реактивной компонент вторичного поля имеют вид:

$$\begin{aligned} Re\, h_x &= \frac{4}{3}\left(\frac{L}{\delta_e}\right)^3 \\ Im\, h_x &= -\left(\frac{L}{\delta_n}\right)^2 \left\{ 1 - 2\,\frac{S-1}{S+1} \int_0^\infty \frac{1 - \frac{S-1}{S+1} e^{-\alpha m} \operatorname{ch} \alpha m}{1 - \left(\frac{S-1}{S+1}\right)^2 e^{-2\alpha m}}\, dm + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-S}{2\alpha S} \right\} + \frac{4}{3}\left(\frac{L}{\delta_e}\right)^3, \qquad \alpha \geqslant 1 . \end{aligned} \tag{2.26}$$

Существенно, что реактивная компонента поля в низкочастотной части спектра совпадает с реактивной компонентой поля в однородной среде с удельной проводимостью γ_e . Аналогичный результат получается и при возбуждении поля вертикальным магнитным диполем. Это означает, что поверхностные заряды, возникающие на границе между пластом и вмещающей средой, в области достаточно низких частот влияют только на активную компоненту поля. Поэтому в поздней стадии становления, так же как в средах с цилиндрическими границами, поле не зависит от ориентации магнитного диполя.

Представим активную компоненту $Im\, h_x$ в виде суммы двух слагаемых:

$$Im\, h_x = h_x^{(1)} + h_x^{(2)} ,$$

где

$$h_x^{(1)} = -\left(\frac{L}{\delta_n}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right) - \left(\frac{L}{\delta_b}\right)^2 \frac{1}{2\alpha}$$

и

$$h_x^{(2)} = \left(\frac{L}{\delta_n}\right)^2 2F(\beta, \alpha) . \qquad (2.27)$$

Здесь

$$F(\beta,\alpha) = \beta \int_0^\infty \frac{1-\beta e^{-\alpha m} ch\, m}{1-\beta^2 e^{-2\alpha m}} e^{-\alpha m} dm$$

и

$$\beta = \frac{s-1}{s+1} , \qquad -1 < \beta < 1 . \qquad (2.28)$$

С точностью до знака поле $h_x^{(1)}$ совпадает с вертикальной компонентой h_z вертикального магнитного диполя в области малого параметра и состоит из двух частот, каждая из которых зависит только от удельной проводимости одной среды. Поэтому здесь можно ввести понятие геометрических факторов. Согласно (2.27), положим:

$$Q_n(\alpha) = 1 - \frac{1}{2\alpha} ; \quad Q_b(\alpha) = \frac{1}{2\alpha} ; \quad Q_n(\alpha) + Q_b(\alpha) = 1$$

и

$$h_x^{(1)} = -\frac{\mu \omega L^2}{2} \left[\gamma_n Q_n(\alpha) + \gamma_b Q_b(\alpha)\right] . \qquad (2.29)$$

Выражение для геометрических факторов такое же как и при возбуждении поля вертикальным магнитным диполем.

Во второе слагаемое $h_x^{(2)}$ входит функция $F(\beta,\alpha)$, которая зависит от отношения проводимостей сред, точнее от параметра β. Появление этой части поля можно объяснить следующим образом. Под действием первичного электрического поля диполя в воздухе в среде возникают токи и поверхностные заряды, плотность которых

$$\sigma(a)=\frac{1}{2\pi}\,\frac{S-1}{S+1}\,E_n^{cp}(a)\,, \tag{2.30}$$

где $E_n^{cp}(a)$ - значение нормальной компоненты поля, созданной вихревым полем токов и полем всех индуцированных зарядов за исключением заряда в точке a. В рассматриваемом приближении поле электрических зарядов, так же как первичное поле, прямо пропорционально частоте. Представим (2.26) в виде

$$\Im m\, h_x=-\frac{\mu\omega L^2}{2}\left[\gamma_n Q_n^*(\alpha,S)+\gamma_b Q_b(\alpha)\right]. \tag{2.31}$$

где $$Q_n^*(\alpha,S)=1-\frac{1}{2\alpha}-2F(\beta,\alpha)\,.$$

Если удельное сопротивление пласта больше удельного сопротивления вмещающей среды ($S<1$), то заряды увеличивают электрическое поле внутри пласта, и функция Q_n^* возрастает.
В более проводящем пласте электрическое поле зарядов ослабляет первичное поле, и при определенных условиях функция Q_n^* обращается в нуль и изменяет знак. В табл. 9 приведены значения функций $Q_n^*+\frac{1}{S}Q_b$ и $F(\beta,\alpha)$. Функция $F(\beta,\alpha)$ выражается через гипергеометрический ряд ${}_2F_1(a,b,c;z)$:

$$F(\beta,\alpha)=\frac{\beta}{2}\left\{\frac{1}{\beta\alpha}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}-\frac{\beta}{2\alpha+1}\,{}_2F_1\left(1,1+\frac{1}{2\alpha},2+\frac{1}{2\alpha};\beta^2\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\beta}{2\alpha-1}\,{}_2F_1\left(1,1-\frac{1}{2\alpha},2-\frac{1}{2\alpha};\beta^2\right)\right\}. \tag{2.32}$$

Таблица 9

S \ α	2		4		8		I6	
	$Q_n^* + \frac{Q_в}{S}$	$F(\beta,\alpha)$	$Q_n^* + \frac{Q_в}{S}$	$F(\beta,\alpha)$	$Q_n^* + \frac{Q_в}{S}$	$F(\beta,\alpha)$	$Q_n^* + \frac{Q_в}{S}$	$F(\beta,\alpha)$
$\frac{I}{I28}$	-0.203 IO^{1}	0.368 IO^{2}	-0.103 IO^{I}	0.189 IO^{2}	-0.520	0.998 IO^{1}	-0.260	0.549 IO^{I}
$\frac{I}{32}$	-0.I42 IO^{I}	0.II6 IO^{2}	-0.703	0.628 IO^{I}	-0.35I	0.364 IO^{I}	-0.I75	0.232 IO^{I}
$\frac{I}{8}$	-0.763	0.428 IO^{I}	-0.377	0.263 IO^{I}	-0.I88	0.I8I IO^{I}	-0.940 IO^{-I}	0.I4I IO^{I}
$\frac{I}{2}$	-0.205	0.I66 IO^{I}	-0.I02	0.I33 IO^{I}	-0.507 IO^{-I}	0.II6 IO^{I}	-0.253 IO^{-I}	0.I08 IO^{I}
2	0.I42	0.59I	0.7I7 IO^{-I}	0.794	0.359 IO^{-I}	0.897	0.I80 IO^{-I}	0.948
8	0.277	0.288	0.I42	0.606	0.7I8 IO^{-I}	0.802	0.359 IO^{-I}	0.90I
32	0.3I4	0.I29	0.I64	0.552	0.825 IO^{-I}	0.774	0.4I4 IO^{-I}	0.887
I28	0.324	0.I05	0.I69	0.538	0.854 IO^{-I}	0.767	0.428 IO^{-I}	0.883

В частном случае, когда длина зонда равна мощности пласта (α = I), $F(\beta,\alpha)$ выражается через элементарные функции

$$F(\beta,\alpha)=\frac{1}{2}-\frac{1}{S^2-1}\ln S\,, \tag{2.33}$$

и для активной компоненты поля имеем:

$$\Im m\, h_x=-\left(\frac{L}{\delta_n}\right)^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{2}{S^2-1}\ln S\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{L}{\delta_\text{в}}\right)^2. \tag{2.34}$$

При больших значениях α функция $F(\beta,\alpha)$ убывает обратно пропорционально α :

$$F(\beta,\alpha)\simeq\frac{1}{\alpha}\ln\frac{2S}{S+1}\,, \tag{2.35}$$

и величина $Q_n^*(\alpha,S)$ остается положительной при всех S . Нетрудно показать, что при $S\to 0$ (удельное сопротивление пласта возрастает), поле $h_x^{(2)}$ стремится к нулю.

Асимптотическое выражение для поля, когда пласт расположен внутри зонда, выводится аналогично:

$$\begin{aligned} Re\, h_x&=\frac{4}{3}\left(\frac{L}{\delta_\text{в}}\right)^3 \\ \Im m\, h_x&=-\left(\frac{L}{\delta_n}\right)^2\left\{\frac{4}{(S+1)^2}\int\limits_0^\infty\frac{e^{-m}\,dm}{1-\left(\frac{S-1}{S+1}\right)^2e^{-2\alpha m}}-\frac{\alpha}{2}\right\}-\frac{\alpha}{2}\left(\frac{L}{\delta_\text{в}}\right)^2. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Здесь интеграл также выражается через гипергеометрическую функцию.

На рис. 22 приведены графики, иллюстрирующие вертикальные характеристики двухкатушечного зонда в области малого параметра, когда $\alpha\geqslant 2$. Естественно, влияние вмещающей среды возрастает с увеличением её электропроводности и уменьшением мощности пласта. Для сравнения на рис. 23 даны графики кажущейся проводимости при возбуждении поля вертикальным диполем, при

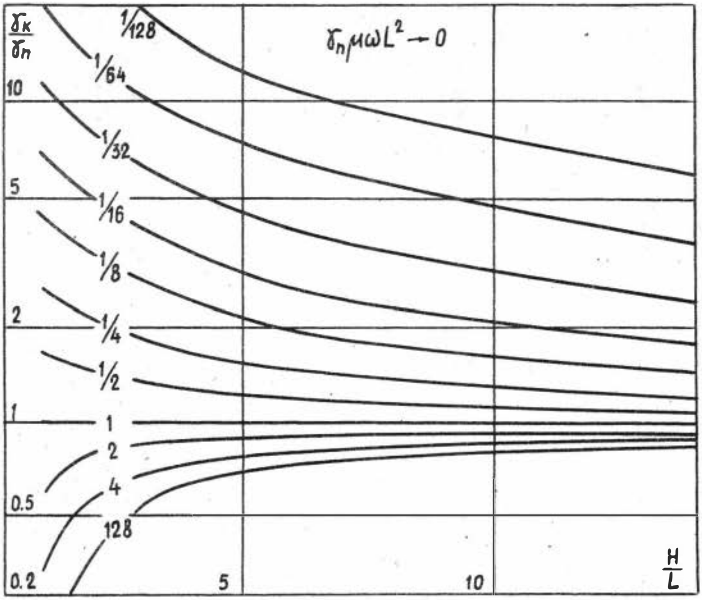

$\gamma_к / \gamma_п$
$\gamma_п / \mu\omega L^2 \to 0$
1/128
1/64
1/32
1/16
1/8
1/4
1/2
1
2
4
128
10
5
2
1
0.5
0.2
5
10
H / L

Рис. 22

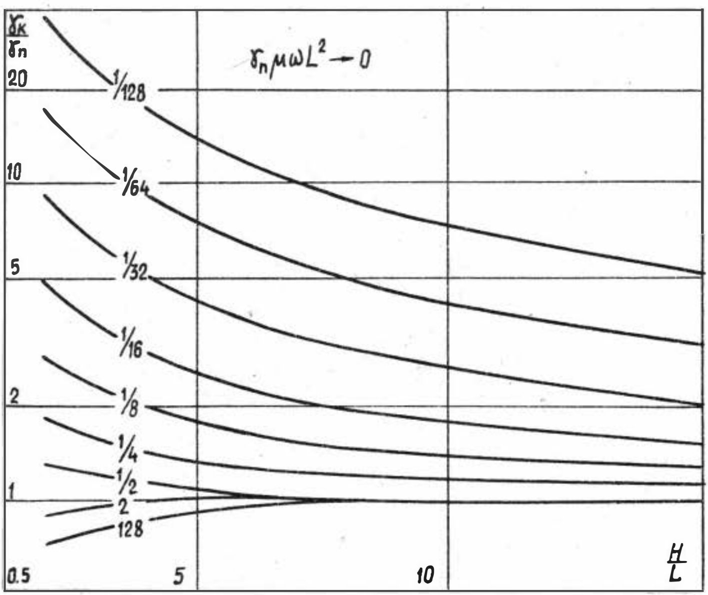
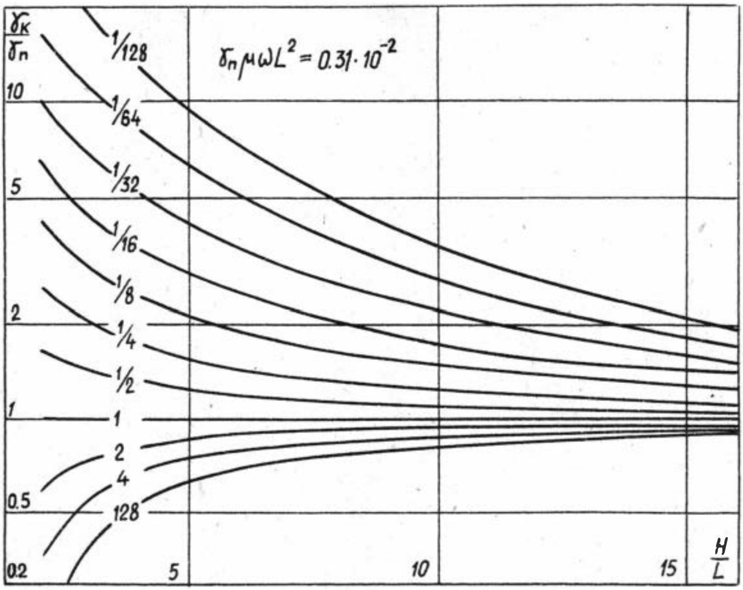
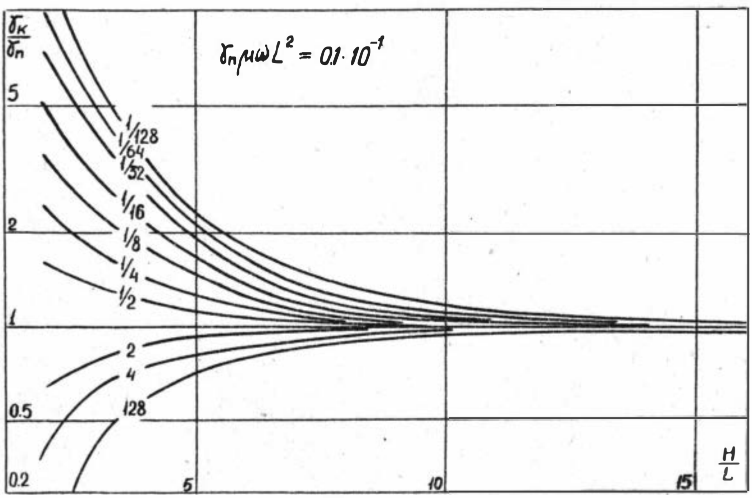

$\gamma_к / \gamma_п$
$\gamma_п / \mu\omega L^2 \to 0$
1/128
1/64
1/32
1/16
1/8
1/4
1/2
2
128
20
10
5
2
1
0.5
5
10
H / L

Рис. 23



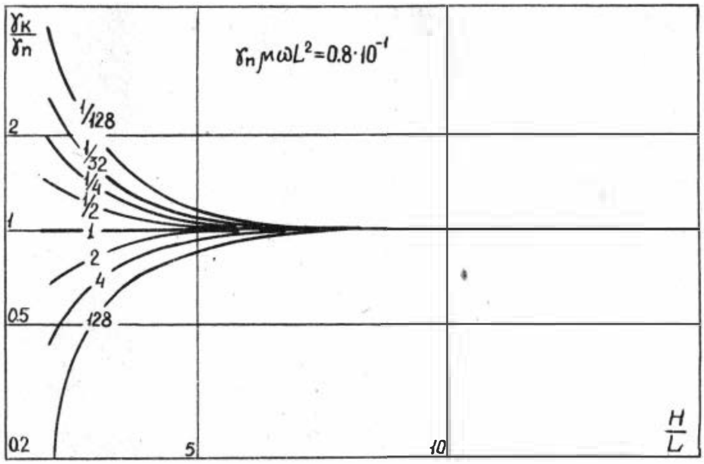
$\frac{\gamma_к}{\gamma_п}$
$\gamma_п \mu \omega L^2 = 0.31 \cdot 10^{-2}$
10
5
2
1
0.5
0.2
1/128
1/64
1/32
1/16
1/8
1/4
1/2
1
2
4
128
5
10
15
$\frac{H}{L}$

Рис. 24



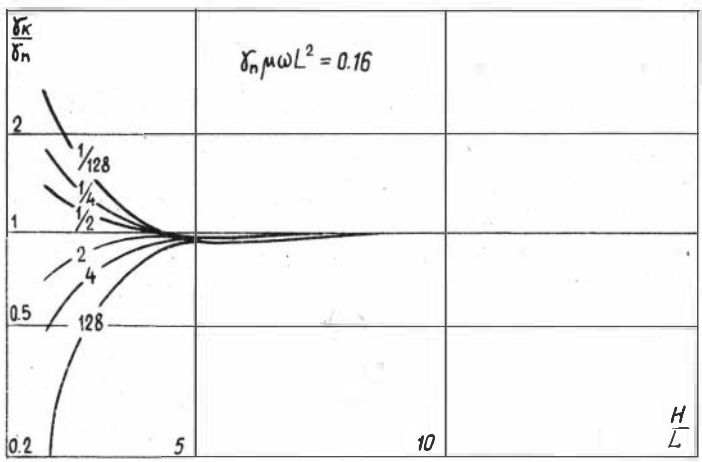
$\frac{\gamma_к}{\gamma_п}$
$\gamma_п \mu \omega L^2 = 0.1 \cdot 10^{-1}$
5
2
1
0.5
0.2
1/128
1/64
1/32
1/16
1/8
1/4
1/2
2
4
128
5
10
15
$\frac{H}{L}$

Рис. 25



$\frac{\gamma_к}{\gamma_п}$
$\gamma_п \mu \omega L^2 = 0.8 \cdot 10^{-1}$
2
1
0.5
0.2
1/128
1/32
1/4
1/2
1
2
4
128
5
10
$\frac{H}{L}$

Рис. 26



$\frac{\gamma_к}{\gamma_п}$
$\gamma_п \mu \omega L^2 = 0.16$
2
1
0.5
0.2
1/128
1/4
1/2
2
4
128
5
10
$\frac{H}{L}$

Рис. 27

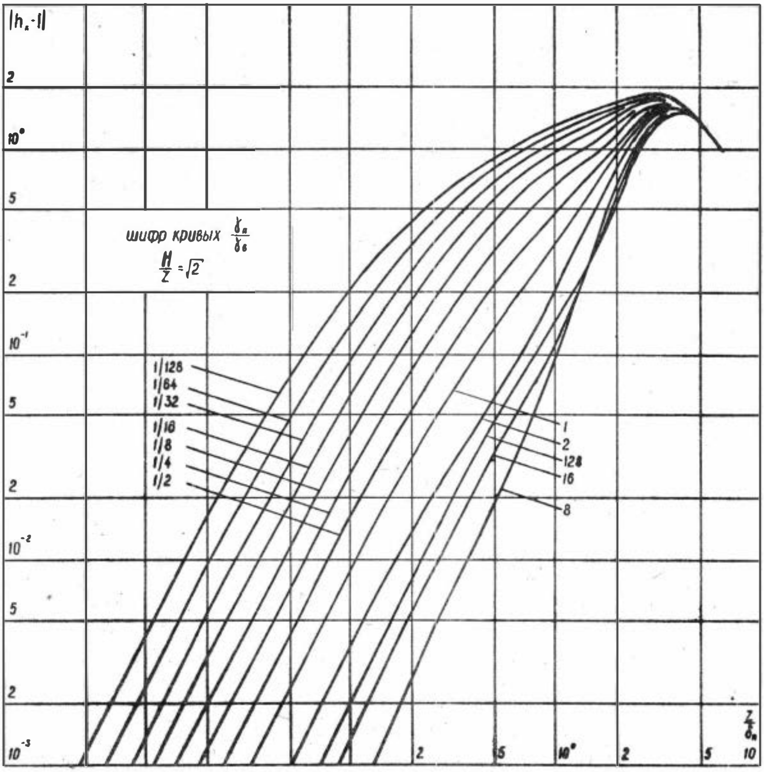
этом $\frac{\gamma_к}{\gamma_н} = \frac{Im\, h_z}{Im\, h_z^0}$, где $Im\, h_z$ - активная компонента вертикальной составляющей поля. Отсюда видно, что влияние более проводящих вмещающих пород при измерении поля с вертикальными и горизонтальными диполями практически одинаковое.

Если пласт заполнен средой, обладающей меньшим удельным сопротивлением, то вертикальная характеристика двухкатушечного зонда с горизонтальными датчиками значительно хуже, что в основном связано с влиянием поля электрических зарядов.

С увеличением частоты, благодаря скин-эффекту, заметно уменьшается влияние вмещающей среды, и это происходит тем раньше, чем больше мощность пласта и удельная электропроводность вмещающих пород (рис. 24-27).

Остановимся кратко на частотных характеристиках поля, примеры которых приведены на рис. 28-30. Интересна зависимость амплитуды и фазы поля в низкочастотной части спектра от электропроводности вмещающей среды при $\alpha < 2$. Если считать удельное сопротивление пласта постоянным, то с увеличением удельного сопротивления вмещающих пород поле вначале убывает, достигает минимума, когда пласт более проводящий, а затем вновь начинает расти, стремясь к асимптотическому значению, соответствующему непроводящей вмещающей среде. Эта особенность в поведении поля находится в полном согласии с формулой (2.35), из которой следует, что при определенных значениях параметра S активная компонента поля изменяет знак. Поэтому левой асимптотой фазовых кривых соответственно является $-\frac{\pi}{2}$, 0 и $\frac{\pi}{2}$ (рис. 28б). По мере удаления поверхностных зарядов от зонда влияние их уменьшается, и амплитудные и фазовые кривые ведут себя так же как и при возбуждении поля вертикальным магнитным диполем. В заключение этой части параграфа на рис. 31-33 приведены кривые кажущейся проводимости, иллюстрирующие влияние удельного сопротивления вмещающей среды.

Теперь рассмотрим влияние относительно тонких пластов ($\alpha < 1$). В низкочастотной части спектра представим поле в виде суммы двух слагаемых: поля в однородной среде с удельной проводимостью вмещающей среды и той части поля, которая учитывает влияние пласта:



|h_к - 1|
шифр кривых γ_п/γ_в
H/Z = √2
1/128
1/64
1/32
1/16
1/8
1/4
1/2
1
2
128
16
8
Z/δ_п

Рис. 23а

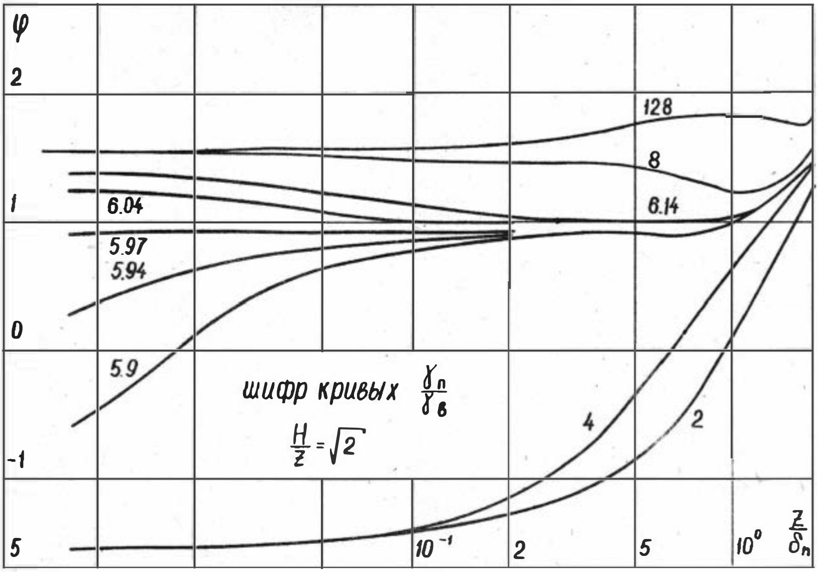


Рис. 28[б]

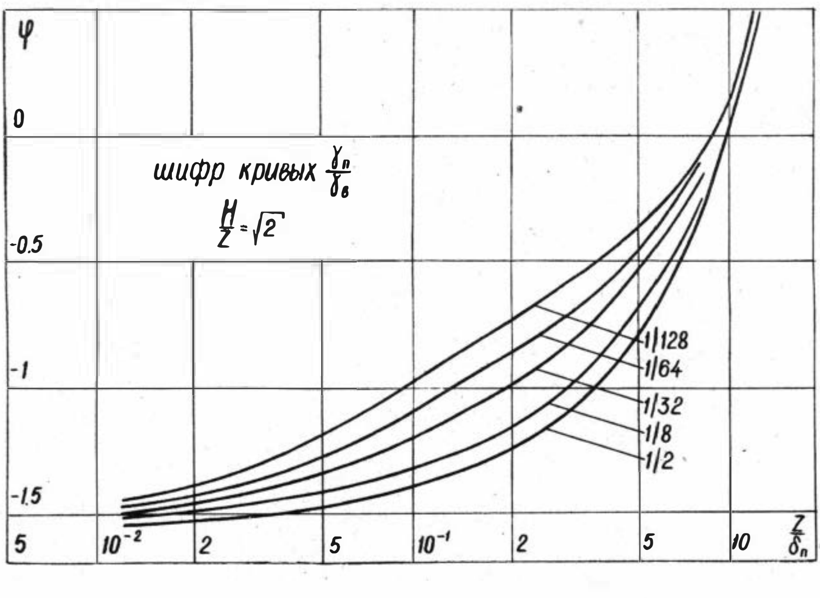
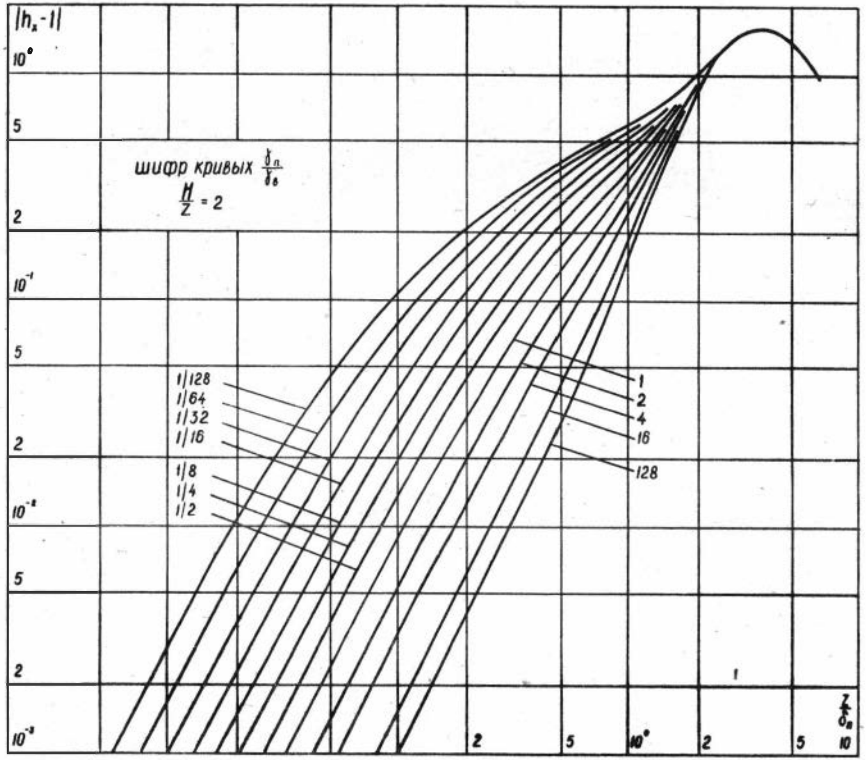
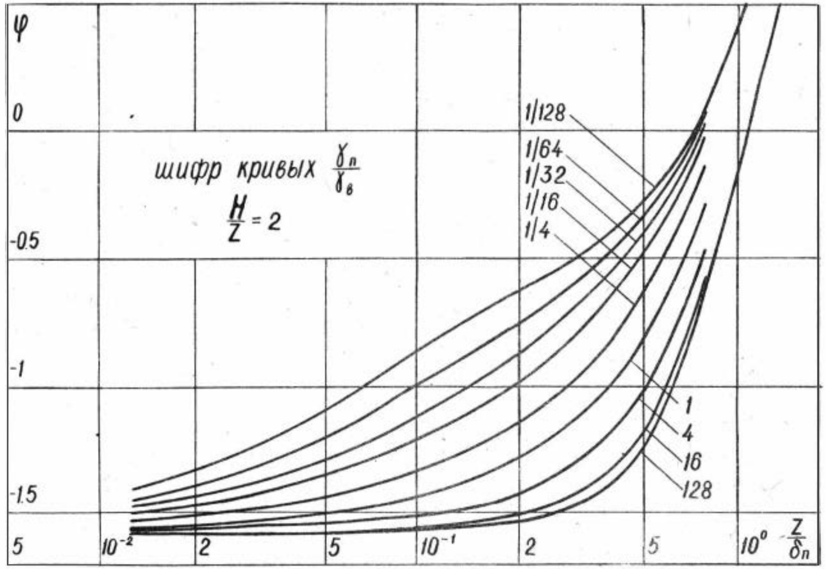


Рис. 28[в]



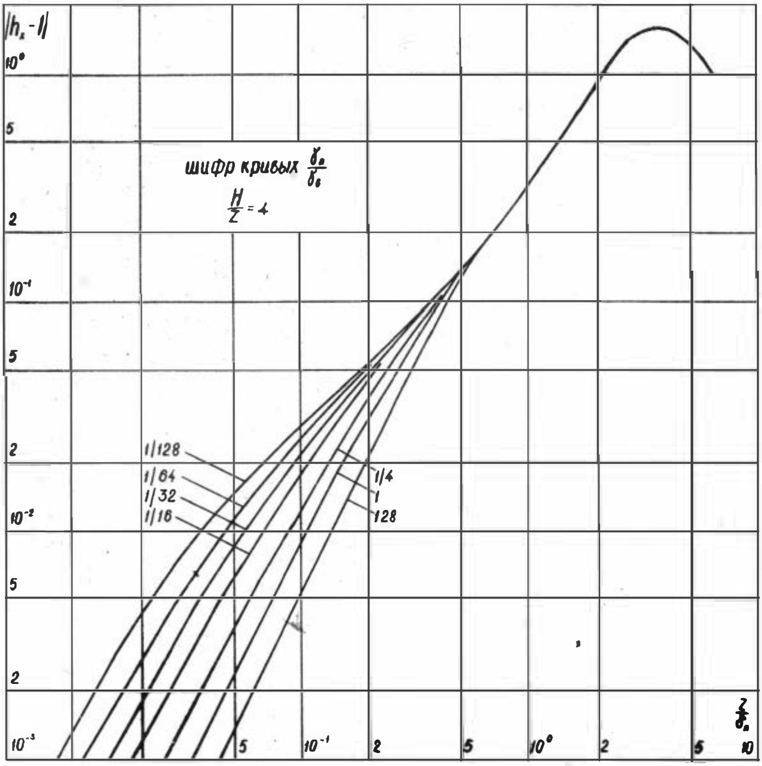
|h_x - 1|
10^0
5
2
10^-1
5
2
10^-2
5
2
10^-3
шифр кривых γ_п/γ_в
H/Z = 2
1/128
1/64
1/32
1/16
1/8
1/4
1/2
1
2
4
16
128
2
5
10^0
2
5
10
Z/δ_в

Рис. 29а



φ
0
-0.5
-1
-1.5
5
шифр кривых γп/γв
H/Z = 2
1/128
1/64
1/32
1/16
1/4
1
4
16
128
10⁻²
2
5
10⁻¹
2
5
10⁰
Z/δп

Рис. 29б



$|h_x - 1|$
шифр кривых $\frac{\gamma_0}{\gamma_e}$
$\frac{H}{Z} = 4$
1/128
1/64
1/32
1/16
1/4
1
128
$\frac{Z}{\delta_n}$

Рис. 30[a]

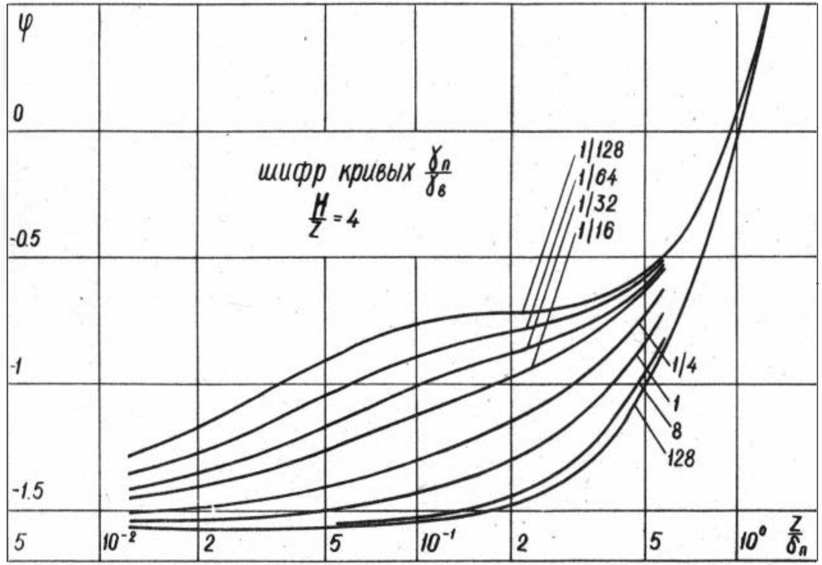
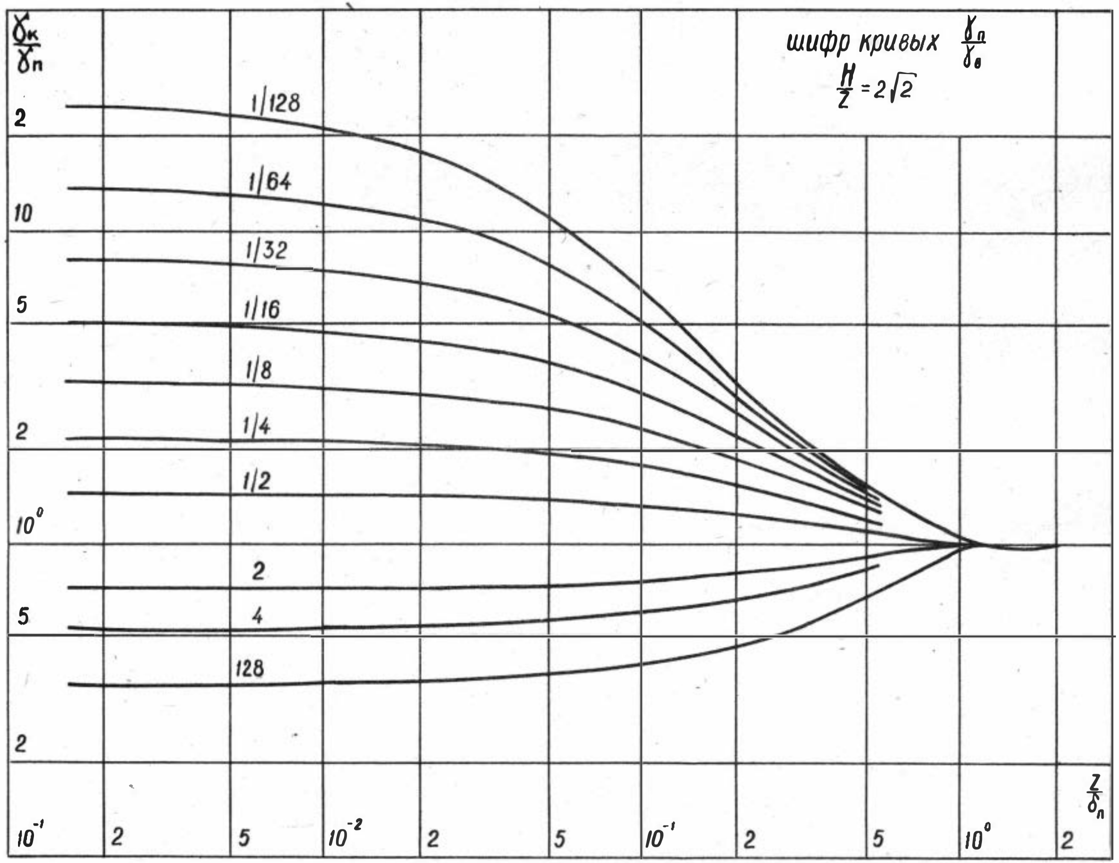
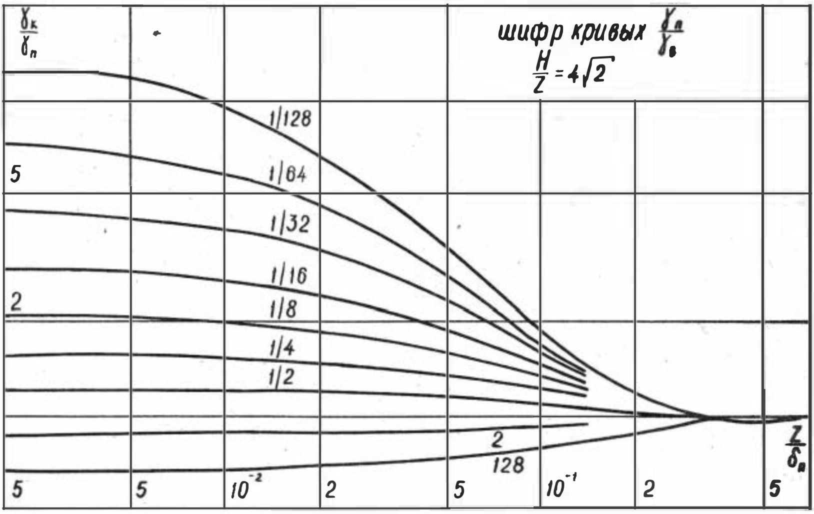

φ
0
-0.5
-1
-1.5
5
шифр кривых $\frac{\gamma_п}{\gamma_в}$
$\frac{H}{Z} = 4$
1/128
1/64
1/32
1/16
1/4
1
8
128
10^{-2}
2
5
10^{-1}
2
5
10^{0}
$\frac{Z}{\delta_п}$

Рис. 30б



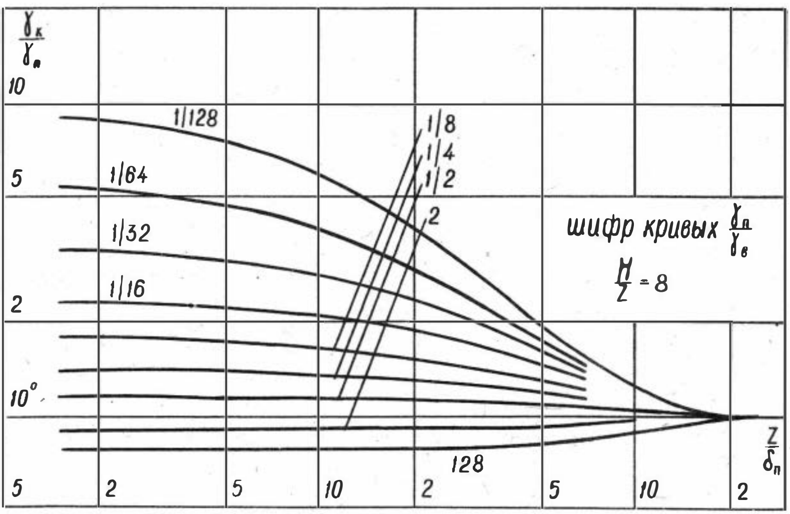
$\frac{\gamma_к}{\gamma_п}$
шифр кривых $\frac{\gamma_п}{\gamma_в}$
$\frac{H}{Z} = 2\sqrt{2}$
1/128
1/64
1/32
1/16
1/8
1/4
1/2
2
4
128
2
10
5
2
10^0
5
2
10^{-1}
2
5
10^{-2}
2
5
10^{-1}
2
5
10^0
2
$\frac{Z}{\delta_п}$

Рис. 31



$\frac{\gamma_к}{\gamma_п}$
шифр кривых $\frac{\gamma_п}{\gamma_в}$
$\frac{H}{Z} = 4\sqrt{2}$
1/128
1/64
1/32
1/16
1/8
1/4
1/2
2
128
5
2
5
5
10^{-2}
2
5
10^{-1}
2
5
$\frac{Z}{\delta_п}$

Рис. 32



$\frac{\gamma_к}{\gamma_п}$
10
1/128
1/64
1/32
1/16
1/8
1/4
1/2
2
5
2
10^0
шифр кривых $\frac{\gamma_п}{\gamma_в}$
$\frac{H}{Z} = 8$
128
5
2
5
10
2
5
10
2
$\frac{Z}{\delta_п}$

Рис. 33

$$\mathrm{Im}\, h_x = \mathrm{Im}\, h_x^{одн}\left(\frac{L}{\delta_в}\right) + \left(\frac{L}{\delta_в}\right)^2 Q_n\,(\alpha, S)\,. \qquad (2.36)$$

где

$$Q_n\,(\alpha, S) = -\frac{4S}{(1+S)^2}\int_0^\infty \frac{e^{-m}}{1-\left(\frac{S-1}{S+1}\right)^2 e^{-2\alpha m}}\,dm + \frac{\alpha(S-1)}{2} + 1\,.$$

Формула (2.36) совпадает с (2.35) в области малого параметра ($\frac{L}{\delta_в} \ll$ I), и при определенных соотношениях между значениями α и S справедлива в более широкой области изменения параметра $L/\delta_в$. В табл. IO приведены максимальные значения $\frac{L}{\delta_в}$, при которых различие в активных компонентах поля, полученных из расчета по точной и приближенной формуле (2.36), не превышают 5%.

Таблица IO

α \ S		$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	2	8	I6	32	64
$\frac{1}{16}$	$\frac{L}{\delta_в}$	0.05	0.I	0.I5	0.3	0.4	0.6	0.8	0.3	0.2	0.2	0.I5
$\frac{1}{8}$		0.03	0.07	0.I	0.2	0.4	0.6	0.6	0.2	0.I	0.I	0.07

Как видно из табл. IO, с уменьшением параметра α максимальные значения $L/\delta_в$ возрастают. Если тонкий пласт обладает относительно высоким удельным сопротивлением или большой электропроводностью, то область применения формулы (2.36) ограничивается весьма малыми значениями параметра $L/\delta_в$. По мере приближения S к единице максимальные значения $L/\delta_в$ увеличиваются. Эта связь между параметрами среды и граничными значениями параметра, характеризующего скин-эффект, относительно просто может быть изучена в низкочастотной части спектра, когда мощность пласта достаточно мала ($\alpha \ll$ I).

Разлагая знаменатель в подынтегральной функции (2.36) по степеням α , получаем:

$$\operatorname{Im} h_x = -\left(\frac{L}{\delta_n}\right)^2 \frac{4}{(S+1)^2} \int_0^\infty \frac{e^{-m}\,dm}{1-\left(\frac{S-1}{S+1}\right)^2(1-2\alpha m)} + \left(\frac{L}{\delta_e}\right)^2 \frac{\alpha(S-1)}{2} =$$

$$= \left(\frac{L}{\delta_e}\right)^2 \left\{ t e^t E_i(-t) + \frac{\alpha(S-1)}{2} \right\}, \qquad (2.37)$$

где $t = \frac{2S}{\alpha(S-1)^2}$; $E_i(-t) = -e^{-t} \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x+t}\,dx$ -

- интегральная показательная функция. Как известно, при $t \to 0$ $E_i(-t) \to \ln t$ и $t \to \infty$ $E_i(-t) = -e^{-t}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right)$.

Рассмотрим два крайних случая $S \gg 1$ и $S \ll 1$, соответствующих либо хорошо проводящему, либо высокоомному пропластку.

Первый случай.

Если параметр $S \gg 1$, то $t \simeq \frac{2}{\alpha S}$ и при условии, что $S \gg \frac{2}{\alpha}$, воспользовавшись асимптотическим значением функции $E_i(-t)$ для $t \ll 1$, вместо (2.37) получаем:

$$\operatorname{Im} h_x = \left(\frac{L}{\delta_e}\right)^2 \left(\frac{\alpha S}{2} - \frac{\alpha}{2} + \frac{2}{\alpha S} \ln \frac{2}{\alpha S}\right) \simeq \frac{\alpha}{2} \left(\frac{L}{\delta_n}\right)^2 \qquad (2.38)$$

$$\left(\frac{\alpha S}{2} \gg 1\right).$$

Но, если, $1 \ll S \ll \frac{2}{\alpha}$, то

$$\operatorname{Im} h_x = -\left(\frac{L}{\delta_e}\right)^2 \left(1 - \alpha S + \frac{\alpha}{2}\right) = -\left(\frac{L}{\delta_e}\right)^2 + \alpha \left(\frac{L}{\delta_n}\right)^2 \qquad (2.39)$$

$$\left(\frac{\alpha S}{2} \ll 1\right).$$

Очевидно, что в последнем случае поле можно представить в виде суммы магнитного поля в однородной среде с удельной проводимостью γ_e, и поля, обязанного влиянию проводящего тонкого пласта:

$$\operatorname{Im} h_x = \operatorname{Im} h_x^{\text{одн}}\left(\frac{L}{\delta_e}\right) + \alpha\left(\frac{L}{\delta_n}\right)^2 . \tag{2.40}$$

<u>Второй случай</u> (тонкий высокоомный экран).

Для параметра t имеем: $t = \frac{2S}{\alpha}$. Если $S \ll \frac{\alpha}{2}$, то $t \ll 1$ и получаем:

$$\operatorname{Im} h_x = \left(\frac{L}{\delta_e}\right)^2 \left(\frac{2S}{\alpha} \ln \frac{2S}{\alpha} + \frac{S\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) \approx \left(\frac{L}{\delta_e}\right)^2 \left(\frac{2S}{\alpha} - \frac{\alpha}{2}\right) \tag{2.41}$$

$$\left(\frac{2S}{\alpha} \ll 1\right).$$

При обратном соотношении S и α ($S \gg \frac{\alpha}{2}$) имеем

$$\operatorname{Im} h_x = -\left(\frac{L}{\delta_e}\right)^2 \left(1 - \frac{\alpha}{2S} + \frac{\alpha}{S} - \frac{\alpha S}{2}\right) \simeq -\left(\frac{L}{\delta_e}\right)^2 + \frac{\alpha}{2S}\left(\frac{L}{\delta_e}\right)^2 , \tag{2.42}$$

и, обобщая это выражение применительно к более высоким частотам, получаем:

$$\operatorname{Im} h_x = \operatorname{Im} h_x^{\text{одн}}\left(\frac{L}{\delta_e}\right) + \frac{\alpha}{2S}\left(\frac{L}{\delta_e}\right)^2 . \tag{2.43}$$

Таким образом, чем меньше параметры αS и $\frac{\alpha}{S}$ соответственно для проводящих и высокоомных тонких пластов, тем при более высоких частотах справедлива формула (2.36).

В табл. II приведены значения функции $Q_n(\alpha, S)$, которые совместно с данными о поле в однородной среде позволяют оценить влияние тонких пластов в длинноволновой части спектра.

На рис. 34 представлены кривые кажущейся проводимости $\frac{\gamma_\kappa}{\gamma_e}$ в области малого параметра ($\gamma_e \mu \omega L^3 \to 0$). Шифр кривых $S = \frac{\gamma_n}{\gamma_e}$.

§ 3. Кривые профилирования с двухкатушечным зондом в средах с двумя горизонтальными границами

При анализе кривых профилирования естественно выделить четыре характерных положения зонда относительно границ пласта.

Таблица II

α \ S	$\frac{I}{128}$	$\frac{I}{64}$	$\frac{I}{32}$	$\frac{I}{16}$	$\frac{I}{8}$	$\frac{I}{4}$	$\frac{I}{2}$
$\frac{I}{16}$	0.623	0.49I	0.348	0.2I4	0.I05	0.329 IO^{-I}	-0.207 IO^{-2}
$\frac{I}{8}$	0.695	0.582	0.443	0.294	0.I55	0.485 IO^{-I}	-0.724 IO^{-2}
$\frac{I}{4}$	0.7II	0.62I	0.499	0.350	0.I92	0.540 IO^{-I}	-0.232 IO^{-I}
0.8	0.5I8	0.462	0.376	0.254	0.989 IO^{-I}	-0.556 IO^{-I}	-0.I30

α \ S	2	4	8	I6	32	64	I28
$\frac{I}{16}$	0.448 IO^{-I}	0.I50	0.35I	0.7I2	0.I35 IO^{I}	0.249 IO^{I}	0.462 IO^{I}
$\frac{I}{8}$	0.865 IO^{-I}	0.283	0.647	0.I29 IO^{I}	0.244 IO^{I}	0.458 IO^{I}	0.869 IO^{I}
$\frac{I}{4}$	0.I64	0.523	0.II8 IO^{I}	0.234 IO^{I}	0.449 IO^{I}	0.862 IO^{I}	0.I67 IO^{2}
0.8	0.470	0.I44 IO^{I}	0.325 IO^{I}	0.663 IO^{I}	0.I32 IO^{2}	0.260 IO^{2}	0.5I7 IO^{2}

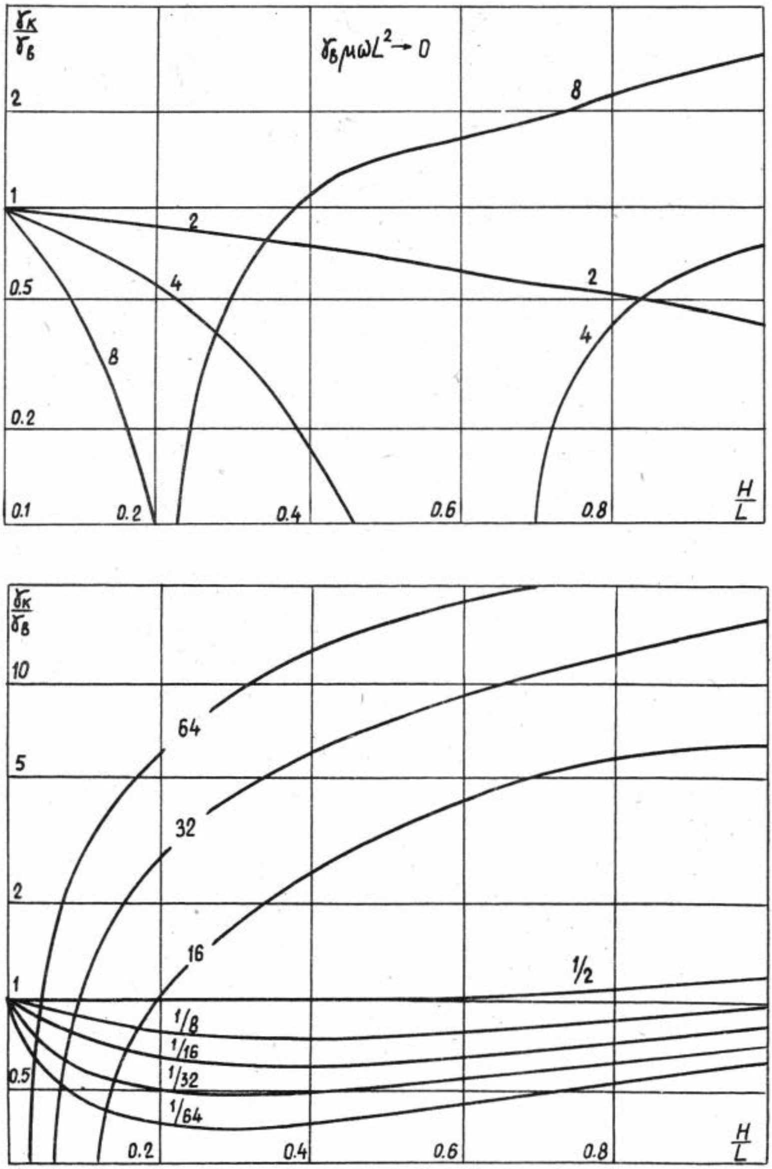


Рис. 34. Кривые кажущейся проводимости для маломощных пластов в области малого параметра.

I. Зонд находится вне пласта (рис. $35^{а}$).

Согласно результатам, полученным в § 2, для поля имеем:

$$h_x = h_x^{одн}\left(\frac{L}{\delta_в}\right) - \int_0^\infty \left\{\left(k_1^2 L^2 - \frac{m^2}{2}\right)D_1 e^{m_1} + \frac{m m_1}{2} F_1 e^{m_1}\right\} dm$$

$$D_1 = \frac{m}{m_1}\,\frac{q_{12}}{d_1}\left(1 - e^{-2\alpha m_2}\right) e^{-2\beta m_1}$$

$$F_1 = -F\left(1 - e^{-2\alpha m_2}\right)\left(1 - q_{12}\cdot K_{12} e^{-2\alpha m_2}\right) e^{-2\beta m_1} \qquad (2.44)$$

$$F = \frac{2(1-S)\,m^2}{(m_1+m_2)(Sm_1+m_2)\,d_1 d_2}$$

$$K_{12} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\ ; \qquad q_{12} = \frac{Sm_1 - m_2}{Sm_1 + m_2}$$

$$d_1 = 1 - q_{12}^2 e^{-2\alpha m_2}\ ; \qquad d_2 = 1 - K_{12}^2 e^{-2\alpha m_2}$$

$$\alpha = \frac{H}{L}\ ; \quad 0 \le \alpha < \infty\ ; \quad \beta = \frac{h_z}{L}\ ; \quad \beta \ge 1\,.$$

2. Датчики зонда расположены по разные стороны одной границы пласта (рис. $35^{б}$). В этом случае:

$$h_x = -\int_0^\infty \left\{\left(k_1^2 L^2 - \frac{m^2}{2}\right)D_4 - \frac{m m_1}{2} F_4\right\} e^{-m_1} dm$$

$$D_4 = S\frac{m}{m_2} e^{(\alpha-\beta)(m_1-m_2)} \frac{(1-q_{12})}{d_1}\left(1 - q_{12} e^{-2\beta m_2}\right)$$

$$F_4 = F e^{(\alpha-\beta)(m_1-m_2)}\left\{(K_{12} - q_{12}) e^{-2\beta m_2}\left(1 - e^{-2(\alpha-\beta)m_2}\right) + \left(1 - K_{12} q_{12} e^{-2\alpha m_2}\right)\left(1 - e^{-2\beta m_2}\right)\right\} \qquad (2.45)$$

$0 \leqslant \alpha < \infty$, $\quad 0 \leqslant \beta \leqslant \alpha$ $\quad$ если $\alpha \leqslant 1$

и $\quad \alpha - 1 \leqslant \beta \leqslant \alpha$ $\quad$ если $\alpha \geqslant 1$.

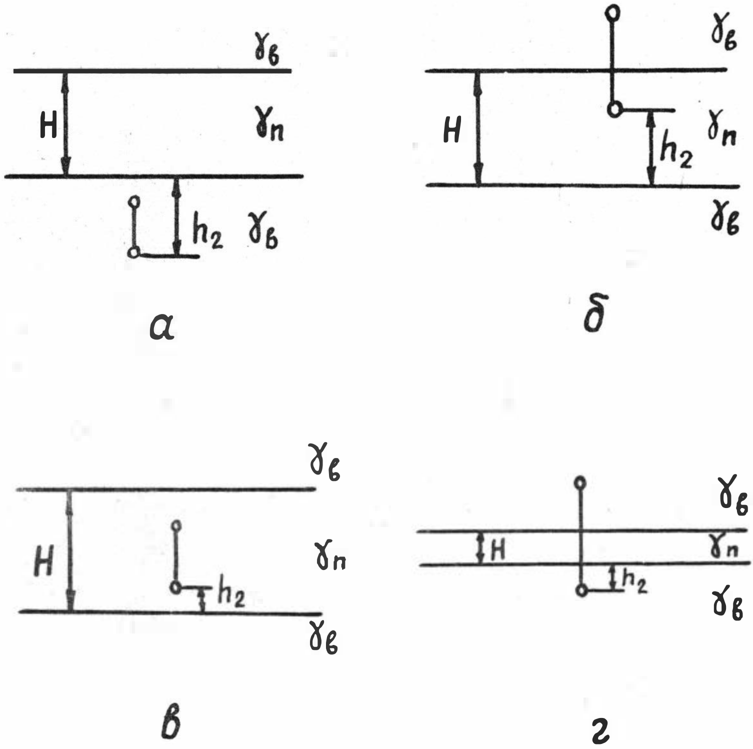


Рис. 35

3. Зонд находится внутри пласта (рис. $35^{в}$). Тогда

$$h_x = h_x^{одн}\left(\frac{L}{\delta_n}\right) - \int_0^\infty \left\{\left(k_2^2 L^2 - \frac{m^2}{2}\right)\left(\mathcal{D}_2 e^{m_2} + \mathcal{D}_3 e^{-m_2}\right) + \frac{m m_2}{2}\left(F_2 e^{m_2} - F_3 e^{-m_2}\right)\right\} dm$$

$$\mathcal{D}_2 = -\frac{m}{m_2}\,\frac{q_{12}}{d_1}\, e^{-2(\alpha-\beta)m_2}\left(1 - q_{12} e^{-2\beta m_2}\right)$$

$$\mathcal{D}_3 = -\frac{m}{m_2}\,\frac{q_{12}}{d_1}\, e^{-2\beta m_2}\left(1 - q_{12} e^{-2(\alpha-\beta)m_2}\right) \qquad (2.46)$$

$$F_2 = F \cdot e^{-2(\alpha-\beta)m_2}\left\{(k_{12} - q_{12}) e^{-2\beta m_2} + 1 - k_{12} q_{12} e^{-2\alpha m_2}\right\}$$

$$F_3 = -F \cdot e^{-2\beta m_2}\left\{(k_{12} - q_{12}) e^{-2(\alpha-\beta)m_2} + 1 - k_{12} q_{12} e^{-2\alpha m_2}\right\}$$

$$1 \leq \alpha < \infty \;; \qquad 0 \leq \beta \leq \alpha - 1 .$$

При симметричном положении зонда относительно границ пласта $\beta = \frac{\alpha - 1}{2}$ и формула (2.46) переходит в (2.23).

4. Пласт расположен между датчиками зонда (рис. $35^{г}$).

$$h_x = -\int_0^\infty \left\{\left(k_1^2 L^2 - \frac{m^2}{2}\right)\mathcal{D}_4 e^{-m_1} - \frac{m m_1}{2} F_4\, e^{-m_1}\right\} dm \,, \qquad (2.47)$$

где

$$\mathcal{D}_4 = \frac{4 S m m_2}{(S m_1 + m_2)^2}\;\frac{e^{\alpha(m_1 - m_2)}}{d_1}$$

$$F_4 = 2F(1-S)\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)(S m_1 + m_2)} e^{\alpha(m_1 - m_2)}\left(1 - e^{-2\alpha m_2}\right).$$

В этом случае поле не зависит от положения пласта между катушками. С помощью формул (2.44-2.47) были рассчитаны поля и построены кривые профилирования для величины кажущейся проводимости, определяемой соотношением

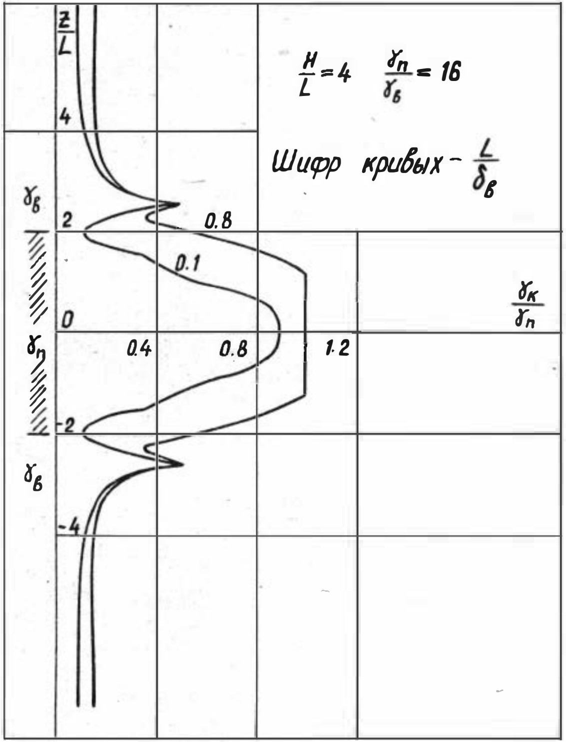
$$\frac{\gamma_\kappa}{\gamma_n} = \frac{|h_x - 1|}{\left|h_x^{одн}\left(\frac{L}{\delta_n}\right) - 1\right|} .$$

Очевидно, что поле в каждой точке зависит от положения зонда относительно пласта и параметров $\frac{L}{\delta_в}$, $\alpha = \frac{H}{L}$ и $S = \frac{\gamma_n}{\gamma_в}$.

Кривые профилирования представлены на рис. 36-4I. Шифром семейства кривых являются параметры S и α. Для каждого случая построены кривые, соответствующие определенному значению $\frac{L}{\delta_в}$. На графиках по горизонтальной оси отложена величина $\frac{\gamma_\kappa}{\gamma_n}$, по вертикальной оси - расстояние от центра пласта до точки измерения (середина зонда), выраженное в единицах мощности пласта. Рассматривая влияние среды, удобно выделить четыре случая.

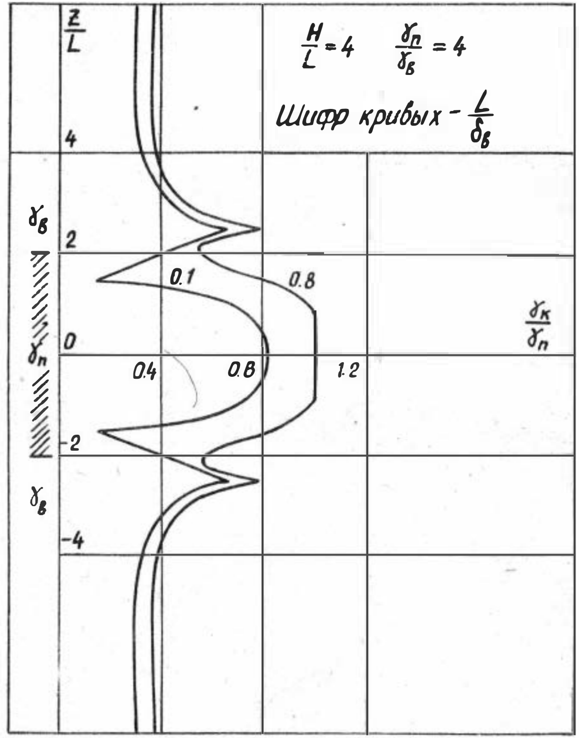
<u>I случай</u>. Удельная проводимость пласта больше удельной проводимости вмещающей среды, и мощность пласта больше длины зонда ($\gamma_n > \gamma_в$, $H \geq L$) (рис. 36, 37).
Участки кривой, соответствующей положению зонда в пласте, имеют весьма сложный осциллирующий характер. При приближении измерительной либо генераторной катушек к границе пласта происходит быстрое изменение поля (влияние поверхностных зарядов), которое на графиках проявляется в резком изломе и "всплеске" кривой $\frac{\gamma_\kappa}{\gamma_n}$. При выходе зонда во вмещающую среду на расстояние, несколько превышающее мощность пласта, величина $\frac{\gamma_\kappa}{\gamma_n}$ принимает свое асимптотическое значение $\frac{\gamma_\kappa}{\gamma_n} = \frac{\left|h_x^{одн}\left(\frac{L}{\delta_в}\right) - 1\right|}{\left|h_x^{одн}\left(\frac{L}{\delta_n}\right) - 1\right|}$, которое в области малого параметра $\frac{L}{\delta} \ll$ I переходит в выражение $\frac{\gamma_\kappa}{\gamma_n} = \frac{\gamma_в}{\gamma_n}$.
Расстояние d между крайними "всплесками" на кривой связано с мощностью пласта равенством $d = H + L$.

<u>2 случай</u>. Удельная проводимость пласта меньше удельной проводимости вмещающей среды, и мощность пласта больше длины зонда ($\gamma_n < \gamma_в$, $H \geq L$) (рис. 38).
Кривые имеют такой же сложный характер, как и в первом случае. С ростом параметра $\frac{L}{\delta}$ крайние минимумы становятся несколько меньше и ближе друг к другу. При этом также уменьшается величина отношения $\frac{\gamma_\kappa}{\gamma_n}$ в центре пласта и во вмещающей среде.



Z/L
H/L = 4   γп/γв = 16
Шифр кривых - L/δв
4
γв
2
0.8
0.1
γк/γп
0
γп
0.4
0.8
1.2
-2
γв
-4

Рис. 36



Z/L
H/L = 4   γп/γв = 4
Шифр кривых - L/δв
4
γв
2
0.1
0.8
γк/γп
0
γп
0.4
0.8
1.2
-2
γв
-4

Рис. 37

<u>3 случай</u>. Тонкий относительно проводящий пласт ($\gamma_n > \gamma_в$, $H \le L$) (рис. 39). Тонкий проводящий пласт оказывает значительное влияние на поле и четко проявляется на кривых кажущейся проводимости. Расстояние d между "всплесками" на кривых $\frac{\gamma_к}{\gamma_n}$ связано с мощностью пласта соотношением $d = 2L + H$, а расстояние между ближайшими точками излома кривых равно мощности пласта.

<u>4 случай</u>. Мощность пласта меньше длины зонда, а его удельное сопротивление больше удельного сопротивления вмещающей среды ($\gamma_n < \gamma_в$, $H < L$) (рис. 40, 4I).

При относительно невысоком удельном сопротивлении пласта его влияние мало и практически сводится только к появлению на кривых двух небольших "всплесков", расстояние между которыми равно $2H + L$. С уменьшением электропроводности пласта величина отношения $\frac{\gamma_к}{\gamma_n}$ в центре пласта и вмещающей среде с увеличением параметра $\frac{L}{\delta_в}$ начинает заметно отличаться от единицы. В области малого параметра влияние тонкого высокоомного пласта незначительно.

Очевидно, что присутствие скважины приводит к тому, что кривые кажущейся проводимости становятся более сглаженными.

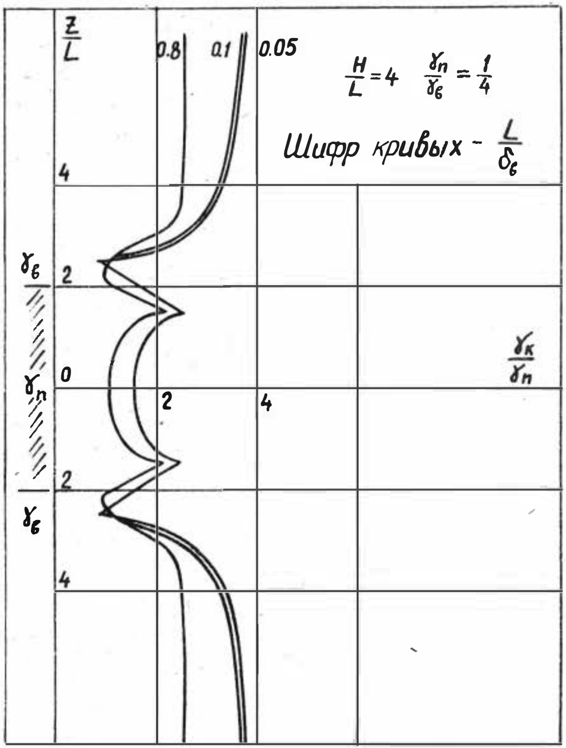
В заключение отметим, что в области малого параметра нетрудно величину излома на кривых профилирования (угол между касательными) связать с параметрами среды. Действительно, для скачка производной $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\gamma_к(z)}{\gamma_n}$ можно записать:

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\gamma_к^{(1)}}{\gamma_n} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\gamma_к^{(2)}}{\gamma_n} \simeq \pm \frac{1}{h_{одн}^{(2)} - 1}\left(\frac{\partial h_x^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial h_x^{(2)}}{\partial z}\right).$$

С другой стороны, из уравнений Максвелла имеем:

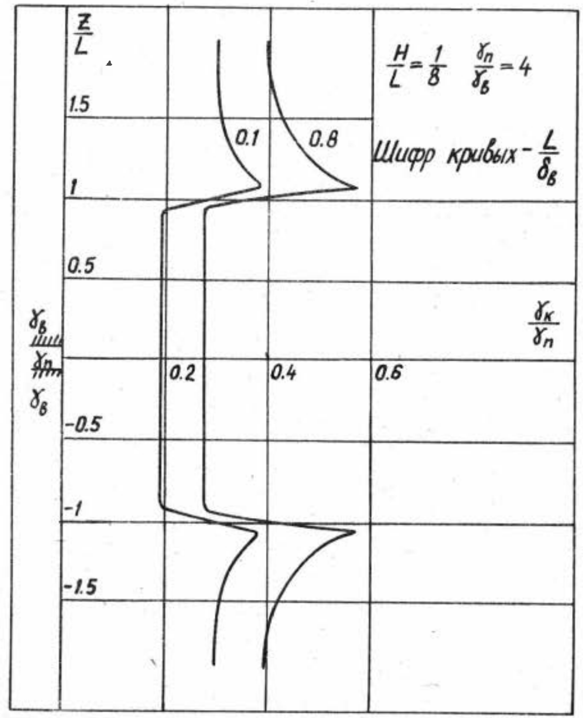
$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \gamma E_y .$$

Поскольку величины E_y и $\frac{\partial H_z}{\partial x}$ непрерывны на поверхности раздела сред, то для скачка величины $\frac{\partial H_x}{\partial z}$ получаем:



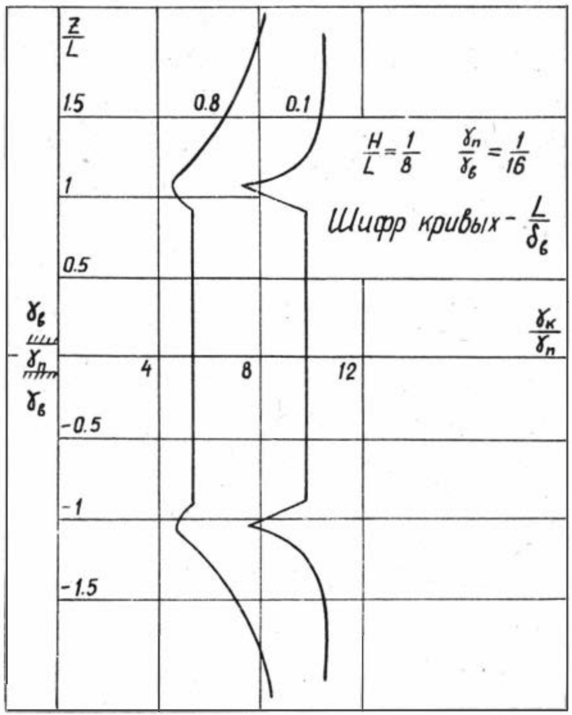
Z/L
0.8
0.1
0.05
H/L = 4   γп/γв = 1/4
Шифр кривых - L/δв
4
γв
2
0
γп
2
4
2
γв
4
γк/γп

Рис. 38



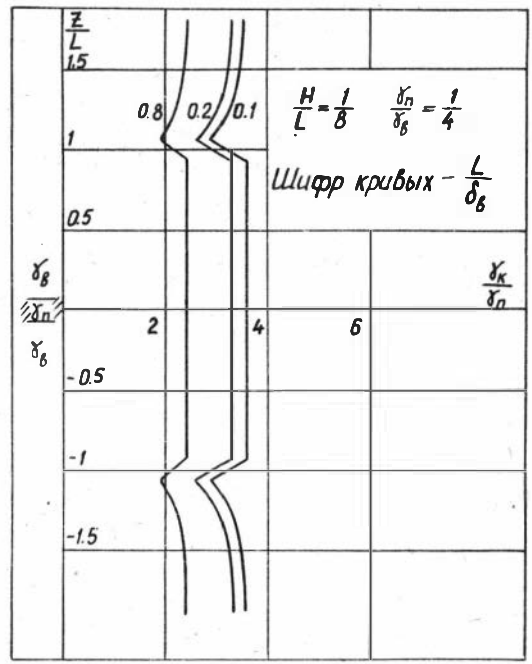
Z/L
H/L = 1/8   γп/γв = 4
1.5
0.1
0.8
Шифр кривых - L/δв
1
0.5
γв
γп
γв
γк/γп
0.2
0.4
0.6
-0.5
-1
-1.5

Рис. 39



$\frac{Z}{L}$
1.5
0.8
0.1
$\frac{H}{L}=\frac{1}{8}$ $\frac{\gamma_п}{\gamma_в}=\frac{1}{16}$
1
Шифр кривых - $\frac{L}{\delta_в}$
0.5
$\gamma_в$
$\gamma_п$
$\gamma_в$
$\frac{\gamma_к}{\gamma_п}$
4
8
12
-0.5
-1
-1.5

Рис. 40



$\frac{Z}{L}$
1.5
0.8
0.2
0.1
$\frac{H}{L}=\frac{1}{8}$ $\frac{\gamma_п}{\gamma_в}=\frac{1}{4}$
1
Шифр кривых - $\frac{L}{\delta_в}$
0.5
$\gamma_в$
$\gamma_п$
$\gamma_в$
$\frac{\gamma_к}{\gamma_п}$
2
4
6
-0.5
-1
-1.5

Рис. 4I

$$\frac{\partial H_x^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial H_x^{(2)}}{\partial z} = (\gamma_в - \gamma_н) E_y .$$

Итак, окончательно:

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\gamma_к^{(1)}}{\gamma_н} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\gamma_к^{(2)}}{\gamma_н} = \pm(\gamma_в - \gamma_н)\frac{e_y}{\left|h_x^{одн}\left(\frac{L}{\delta_н}\right) - 1\right|},$$

где $e_y = \dfrac{E_y}{\left(-\dfrac{M}{4\pi L^3}\right)}$.

Глава Ш

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ МАГНИТНОГО ДИПОЛЯ В АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

В этой главе рассмотрено электромагнитное поле магнитного диполя в анизотропной однородной среде и в неоднородной среде с двумя горизонтальными поверхностями раздела.

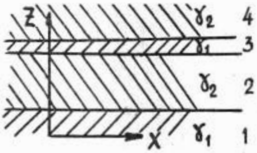
§ I. Анизотропия слоистой среды

Предположим, что среда представляет собою чередование изотропных слоев двух типов: с удельной проводимостью γ_1 , γ_2 и диэлектрической проницаемостью ε_1 , ε_2 (рис. 42). Пусть в произвольном слое, который обозначим индексом (I), задано однородное электрическое поле $\vec{E}_1 = \vec{E} e^{-i\omega t}$, лежащее в плоскости xz . Ток в этом слое:

$$\vec{j}_1 = \gamma_1 \vec{E}_1 . \qquad (3.I)$$

Толщина скин-слоя δ_1 , δ_2 предполагается достаточно большой, и на интервале $z=\delta$ ($\delta = min(\delta_1 . \delta_2)$), во много раз превышающем мощность одного слоя, можно пренебречь скин-эффектом. Выразим поле $\vec{E}$ и ток $\vec{j}$ в каждом слое через ток $\vec{j}_1$.

Уравнения Максвелла приводят к следующим условиям на границе первого и второго слоя:



Р и с. 42.

$$E_{2x} = E_{1x}$$
$$\varepsilon_2 E_{2z} - \varepsilon_1 E_{1z} = \sigma , \qquad (3.2)$$

здесь σ - поверхностная плотность зарядов.
Из поверхностного аналога уравнения непрерывности тока имеем:

$$j_{2z} - j_{1z} = i\omega\sigma . \qquad (3.3)$$

Исключая из (3.2-3.3) величину σ , и, воспользовавшись законом Ома $j = \gamma E$, получаем для тока и поля в слое (2)

$$j_{2x} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} j_x \qquad j_{2z} = \frac{1 - i\omega\varepsilon_1/\gamma_1}{1 - i\omega\varepsilon_2/\gamma_2} j_z \qquad (3.4)$$

$$E_{2x} = \frac{j_{2x}}{\gamma_2} = \frac{j_x}{\gamma_1} \qquad E_{2z} = \frac{j_{2z}}{\gamma_2} = \frac{1 - i\omega\varepsilon_1/\gamma_1}{1 - i\omega\varepsilon_2/\gamma_2} \frac{j_z}{\gamma_2} .$$

Аналогично из условий на поверхности раздела между вторым и третьим слоем имеем

$$j_{3x} = \frac{\gamma_3}{\gamma_2} j_{2x} \qquad j_{3z} = \frac{1 - i\omega\varepsilon_2/\gamma_2}{1 - i\omega\varepsilon_3/\gamma_3} j_{2z} . \qquad (3.5)$$

Поскольку $\gamma_3 = \gamma_1$, $\varepsilon_3 = \varepsilon_1$, то вместо (3.5) получаем

$$\vec{j}_3 = \vec{j}_1 \qquad \vec{E}_3 = \vec{E}_1 . \qquad (3.6)$$

Таким образом, в пласте, состоящем из чередования тонких слоёв двух типов, поле и ток также принимают два значения: $\vec{E}_1$, $\vec{j}_1$ и $\vec{E}_2$, $\vec{j}_2$, соответствующие первому и второму слою.

Возьмем произвольный пласт толщиной D ($D < \delta$), в котором относительная доля слоёв с удельной проводимостью γ_2 равна n . Тогда для средних значений тока и поля имеем:

$$\langle j_x\rangle=\left(1-n+n\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)j_x\ ;\ \langle j_z\rangle=\left(1-n+n\,\frac{1-i\omega\varepsilon_1/\gamma_1}{1-i\omega\varepsilon_2/\gamma_2}\right)j_z$$

(3.7)

$$\langle E_x\rangle=\frac{j_x}{\gamma_1}\ ;\quad \langle E_z\rangle=\left(1-n+n\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\frac{1-i\omega\varepsilon_1/\gamma_1}{1-i\omega\varepsilon_2/\gamma_2}\right)\frac{j_z}{\gamma_1}\ .$$

Определяя продольную и поперечную проводимости из соотношений:

$$\gamma_t=\frac{\langle j_x\rangle}{\langle E_x\rangle}\ ;\qquad \gamma_n=\frac{\langle j_z\rangle}{\langle E_z\rangle}\ ,$$

получаем

$$\gamma_t=\gamma_1\left(1-n+n\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)$$

(3.8)

$$\gamma_n=\gamma_1\ \frac{1-n\left(1-P(\omega)\right)}{1-n\left(1-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}P(\omega)\right)}\ ,$$

где

$$P(\omega)=\frac{1-i\omega\varepsilon_1/\gamma_1}{1-i\omega\varepsilon_2/\gamma_2}\ .$$

Таким образом, в квазистационарном поле для данной модели среды отсутствует зависимость электропроводности от частоты, и соответственно выражения для поперечной удельной проводимости и коэффициента анизотропии имеют вид:

$$\gamma_n=\frac{\gamma_1}{1-n+n\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}\ . \tag{3.10}$$

$$\lambda=\sqrt{\left(1-n+n\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)\left(1-n+n\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)}\ . \tag{3.11}$$

На рис. 43 приведены графики, иллюстрирующие связь коэффициента анизотропии с параметрами γ_2/γ_1 и n.
В общем случае, когда влияют токи смещения, появляется зависимость поперечного сопротивления от частоты. Это объясняется тем, что поверхностные заряды являются функцией диэлектрической проницаемости и частоты.

По-видимому, если электрическое поле неоднородно и изменяется вдоль слоя, то продольная удельная проводимость также зависит от частоты. Кривые на рис. 44 характеризуют влияние токов смещения на коэффициент анизотропии.

Если величина n остается постоянной (в масштабе $\mathcal{D}$) и размеры измерительной установки (зонда) значительно больше толщины слоёв, то эту часть пространства можно рассматривать как однородный анизотропный пласт с коэффициентом анизотропии λ.

§ 2. Электромагнитное поле диполя в однородной анизотропной среде

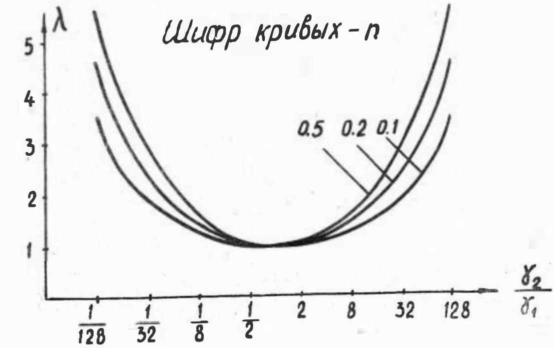
Рассмотрим однородную анизотропную среду с тензором проводимости γ_{ik}:

$$\gamma_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma_t & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_t & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_n \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Произвольно ориентированный магнитный диполь представим в виде суммы двух диполей: вертикального и горизонтального.

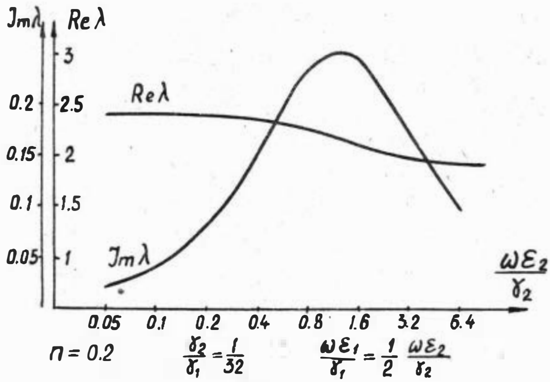
При возбуждении поля вертикальным магнитным диполем индукционные токи лежат в горизонтальных плоскостях и не зависят от величины поперечной удельной проводимости γ_n. Особенности поля вертикального диполя изучены в работе /2/.

Обратимся к случаю, когда момент диполя расположен в горизонтальной плоскости. При таком способе возбуждения в среде появляются объёмные заряды. Действительно, представив уравнение непрерывности тока квазистационарного поля $div \vec{j} = 0$ в виде



λ
Шифр кривых - n
5
4
3
2
1
0.5
0.2
0.1
1/128
1/32
1/8
1/2
2
8
32
128
γ2/γ1

Рис. 43



Im λ
Re λ
3
0.2
2.5
0.15
2
0.1
1.5
0.05
1
Re λ
Im λ
ωε2/γ2
0.05
0.1
0.2
0.4
0.8
1.6
3.2
6.4
n = 0.2
γ2/γ1 = 1/32
ωε1/γ1 = 1/2 ωε2/γ2

Рис. 44

$$\gamma_t \operatorname{div} \vec{E} + (\gamma_n - \gamma_t) \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

и воспользовавшись уравнением $\operatorname{div} \vec{E} = \delta$, получаем выражение для объёмной плотности заряда в произвольной точке среды

$$\delta = \left(1 - \frac{\gamma_n}{\gamma_t}\right) \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

или (3.13)

$$\delta = \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right) \frac{\partial E_z}{\partial z} .$$

Запишем систему уравнений Максвелла в виде

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} \vec{E} = i\omega\mu \vec{H} \qquad && \operatorname{div} \vec{E} = \delta \\ &\operatorname{rot}_x \vec{H} = \gamma_t E_x && \operatorname{div} \vec{H} = 0. \\ &\operatorname{rot}_y \vec{H} = \gamma_t E_y && \\ &\operatorname{rot}_z \vec{H} = \gamma_n E_z && \end{aligned} \qquad (3.14)$$

Поскольку объёмная плотность δ отлична от нуля, то нельзя ввести вектор-потенциал магнитного типа $\vec{E} = \operatorname{rot} \vec{A}^*$. Поэтому положим

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}. \qquad (3.15)$$

Тогда из (3.14) следует, что

$$\vec{E} = i\omega\mu \vec{A} - \operatorname{grad} U . \qquad (3.16)$$

Таким образом, для потенциала $\vec{A}$ получаем уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 A_x = \gamma_t \left(i\omega\mu A_x - \frac{\partial U}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \vec{A} - \nabla^2 A_y = \gamma_t \left(i\omega\mu A_y - \frac{\partial U}{\partial y}\right)$$

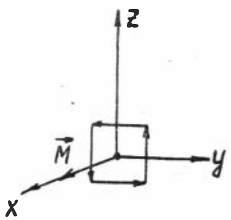
$$\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{div}\vec{A}-\nabla^2 A_z=\gamma_n\left(i\omega\mu A_z-\frac{\partial U}{\partial z}\right).$$

Принимая калибровку потенциалов в виде $\operatorname{div}\vec{A}=-\gamma_t U$, имеем:

$$\begin{aligned}
&\nabla^2 A_x+k_t^2 A_x=0\\
&\nabla^2 A_y+k_t^2 A_y=0\\
&\nabla^2 A_z+k_n^2 A_z=\left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{div}\vec{A},
\end{aligned}\tag{3.17}$$

здесь $k_t^2=i\gamma_t\mu\omega \quad k_n^2=i\gamma_n\mu\omega \quad \lambda^2=\dfrac{\gamma_t}{\gamma_n}$.

Так как поведение вектор-потенциала электрического типа $\vec{A}$ вблизи магнитного диполя заранее неизвестно, то необходимо представить магнитный диполь в виде суммы четырех вертикальных и горизонтальных электрических диполей (рис. 45) и найти для каждого из них решение.



Р и с. 45.

Вектор-потенциал вертикального электрического диполя будем искать в виде одной компоненты A_z^B , так как благодаря осевой симметрии, магнитное поле имеет только составляющую H_φ . Уравнение для компоненты A_z^B , согласно (3.17) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 A_z^B}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z^B}{\partial y^2}+\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 A_z^B}{\partial z^2}+k_n^2 A_z^B=0. \tag{3.18}$$

После замены переменной z на $z_1=\lambda z$ (3.18) переходит в уравнение, соответствующее однородной изотропной среде и поэтому

$$A_z^B = C\,\frac{e^{ik_n\bar{R}}}{\bar{R}}\,, \tag{3.19}$$

где $$\bar{R} = \sqrt{x^2+y^2+\lambda^2 z^2}\,.$$

Для определения постоянной C воспользуемся известным выражением для потенциала поля постоянного тока электрода в однородной анизотропной среде.

$$\varphi = \frac{J}{4\pi\sqrt{\gamma_t\gamma_n}}\,\frac{1}{\bar{R}}\,. \tag{3.20}$$

Полагая размеры электрода достаточно малыми и дифференцируя (3.20) по z, получаем выражение для потенциала вертикального электрического диполя, у которого расстояние между электродами равно a

$$U = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\Delta z = \frac{Ja}{4\pi\sqrt{\gamma_t\gamma_n}}\,\frac{\lambda^2 z}{\bar{R}^3}\,. \tag{3.21}$$

С другой стороны, из условия калибровки

$$U = -\frac{1}{\gamma_t}\,\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

имеем:

$$A_z = \frac{C}{\gamma_t}\,\frac{\lambda^2 z}{\bar{R}^3}\,. \tag{3.22}$$

Сравнивая (3.21) и (3.22), для постоянной C находим

$$C = \frac{Ja}{4\pi}\sqrt{\frac{\gamma_t}{\gamma_n}} = \frac{Ja}{4\pi}\,\lambda\,.$$

Таким образом

$$A_z^B = \frac{Ja}{4\pi}\,\lambda\,\frac{e^{ik_n\bar{R}}}{\bar{R}}\,. \tag{3.23}$$

Теперь рассмотрим поле горизонтального электрического диполя. Направим электрический диполь по оси y . Будем искать решение системы (3.I7), полагая A_x^{Γ} = 0. Тогда для компонент A_y^{Γ} и A_z^{Γ} имеем:

$$\nabla^2 A_y^{\Gamma} + k_t^2 A_y^{\Gamma} = 0$$

$$\frac{\partial^2 A_z^{\Gamma}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z^{\Gamma}}{\partial y^2} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 A_z^{\Gamma}}{\partial z^2} + k_n^2 A_z^{\Gamma} = \left(1 - \frac{1}{\lambda^2}\right)\frac{\partial^2 A_y^{\Gamma}}{\partial y \partial z}. \qquad (3.24)$$

Положим

$$A_y^{\Gamma} = C_1 \frac{e^{ik_t R}}{R} = C_1 \int_0^{\infty} \frac{m}{m_t} e^{-m_t|z|} J_0(mr)\,dm, \qquad (3.25)$$

здесь $m_t = \sqrt{m^2 - k_t^2}$.

Представим компоненту A_z^{Γ} в виде:

$$A_z^{\Gamma} = \frac{y}{r}\int_0^{\infty} F_m(z) J_1(mr)\,dm = -\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{\infty}\frac{F_m(z)}{m} J_0(mr)\,dm. \qquad (3.26)$$

Выбор выражения для A_z^{Γ} определяется условием возбуждения и соотношением, связывающим скалярный и векторный потенциалы. Подставляя (3.25) и (3.26) в (3.24), получаем уравнение для функции $F_m(z)$:

$$\frac{d^2 F_m}{dz^2} - \lambda^2 m_n^2 F_m = \operatorname{sign}(z) C_1 (\lambda^2 - 1) m^2 e^{-m_t|z|}, \qquad (3.27)$$

здесь $m_n = \sqrt{m^2 - k_n^2}$.

Решение уравнения (3.27) имеет вид:

$$F_m = \operatorname{sign}(z) C_1 \left(e^{-\lambda m_n |z|} - e^{-m_t|z|}\right). \qquad (3.28)$$

Таким образом,

$$A_z^{\Gamma} = C_1 \, sign(z) \frac{y}{r} \int\limits_0^{\infty} \left[e^{-\lambda m_n |z|} - e^{-m_t |z|} \right] J_1(mr) \, dm \tag{3.29}$$

или в элементарных функциях

$$A_z^{\Gamma} = C_1 \frac{y}{r^2} \left\{ \frac{z}{R} e^{ik_t R} - \frac{\lambda z}{\bar{R}} e^{ik_n \bar{R}} \right\}. \tag{3.30}$$

Постоянная C_1 находится, как и ранее, из условия калибровки и предельным переходом к постоянному току:

$$C_1 = \frac{Ja}{4\pi} .$$

Итак, для горизонтального электрического диполя имеем:

$$\vec{A}^{\Gamma} = \left(0, A_y^{\Gamma}, A_z^{\Gamma}\right)$$

$$A_y^{\Gamma} = \frac{Ja}{4\pi} \frac{e^{ik_t R}}{R} \tag{3.31}$$

$$A_z^{\Gamma} = \frac{Ja}{4\pi} \frac{y}{r^2} \left\{ \frac{z}{R} e^{ik_t R} - \frac{\lambda z}{\bar{R}} e^{ik_n \bar{R}} \right\}.$$

Теперь можно найти выражения для компонент A_y и A_z магнитного диполя, которые складываются из соответствующих компонент электрических диполей:

$$A_y = \lim_{\substack{a \to 0 \\ Ja^2 \to M}} \left(A_y^{(1)} + A_y^{(2)} + A_y^{(3)} + A_y^{(4)} \right) = -\frac{M}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{ik_t R}}{R}$$

$$A_z = \lim_{\substack{a \to 0 \\ Ja^2 \to M}} \left(A_z^{(1)} + A_z^{(2)} + A_z^{(3)} + A_z^{(4)} \right) = \frac{M}{4\pi} \lambda \frac{\partial}{\partial y} \frac{e^{ik_n \bar{R}}}{\bar{R}} - \tag{3.32}$$

$$- \frac{M}{4\pi} sign(z) \frac{\partial}{\partial z} \frac{y}{r^2} \left\{ \frac{z}{R} e^{ik_t R} - \frac{\lambda z}{\bar{R}} e^{ik_n \bar{R}} \right\}.$$

$$H_y = H_z = 0$$

$$h_x = \frac{H_x}{H_{0x}} = \left(1 - ik_tL - k_t^2L^2\frac{1+\lambda^2}{2\lambda^2}\right)e^{ik_tL}, \tag{3.33}$$

где $H_{0x} = -\dfrac{M}{4\pi L^3}$.

В ближней зоне, когда $|kL| \ll$ I, для поля имеем:

$$h_x = 1 - \frac{k_n^2L^2}{2} + \left(\frac{1}{2\lambda^2} + \frac{1}{6}\right)k_t^3L^3$$

и

$$h_x^{реакт} = 1 + \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{L}{\delta_t}\right)^3$$

$$h_x^{акт} = -\left(\frac{L}{\delta_n}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{L}{\delta_t}\right)^3, \tag{3.34}$$

где $\delta_t = \sqrt{\dfrac{2}{\gamma_t\mu\omega}}$, $\delta_n = \sqrt{\dfrac{2}{\gamma_n\mu\omega}}$. Таким образом, в области малого параметра L/δ, активная компонента поля прямо пропорциональна поперечной удельной проводимости γ_n.

Поэтому измерение отношения активных компонент поля вертикального и горизонтального диполей в низкочастотной части спектра непосредственно позволяет определить коэффициент анизотропии:

$$\frac{\operatorname{Im} h_z^{в}}{\operatorname{Im} h_x^{г}} \simeq \lambda^2 \quad (\omega \to 0). \tag{3.35}$$

Так как всегда $\lambda \geqslant$ I, то реактивная компонента в анизотропной среде, согласно (3.34), меньше чем в изотропной среде с удельной проводимостью γ_t ($L/\delta_t \ll$ I).

При больших значениях коэффициента анизотропии ($\gamma_n \to 0$) обе компоненты поля в области малого параметра становятся одинаковыми:

$$h_x^{акт} = h_x^{реакт} = \frac{1}{3}\left(\frac{L}{\delta_t}\right)^3 \quad (\lambda \gg 1) . \tag{3.36}$$

В волновой зоне, когда $|kL| \gg 1$ имеем

$$h_x \simeq - \frac{k_t^2 L^2}{2}\left(1 + \frac{1}{\lambda^2}\right) e^{ik_t L} . \tag{3.37}$$

Поэтому с увеличением λ влияние анизотропии уменьшается. В табл. I2 приведены значения $h_x^{акт}$, $h_x^{реакт}$ и $|h_x - 1|$ в зависимости от L/δ_t и λ, соответствующие графики представлены на рис. 46.

Применяя преобразование Фурье к (3.33), находим выражение для компоненты h_x, описывающей магнитное поле после выключения тока в магнитном диполе:

$$h_x = \Phi(u) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1 + \frac{1+\lambda^2}{2\lambda^2} u^2\right) u\, e^{-\frac{u^2}{2}} , \tag{3.38}$$

где

$\Phi(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^u e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - интеграл вероятности, $u = \sqrt{\frac{\mu \gamma_t}{2t}}\, L$.

В табл. I3 даны значения h_x как функции λ и $\frac{1}{u}$. В предельных случаях: $t \to 0$ и $t \to \infty$ соответственно получаем:

$$\begin{aligned} h_x &\simeq - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\lambda^2}\right) u^3 e^{-\frac{u^2}{2}} \\ &\qquad (u \to \infty,\ t \to 0) \\ h_x &\simeq - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{2\lambda^2}\right) u^3 \\ &\qquad (u \to 0,\ t \to \infty). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Поэтому в поздней стадии становления при относительно небольших значениях коэффициента анизотропии поле обратно пропорционально λ^2.

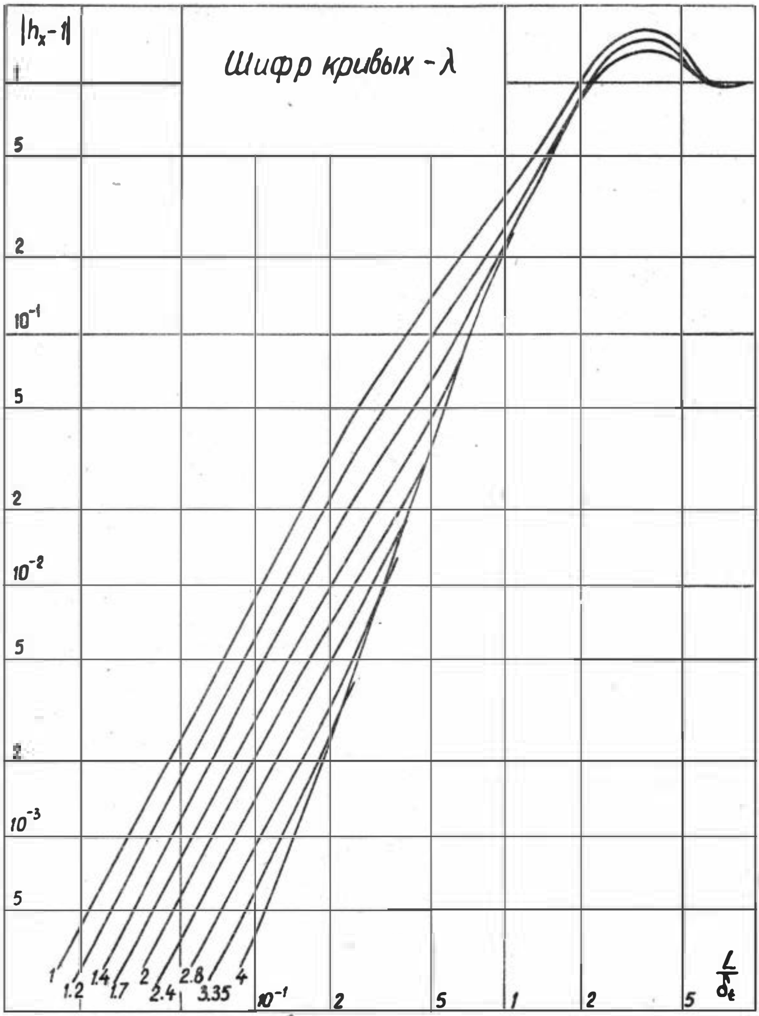
Таблица I2

$\bar{\Lambda}$	P	Reh - 1	Imh	A	φ
	0.I	0.5II2 IO^{-3}	-0.I9I9 IO^{-2}	0.I986 IO^{-2}	-0.I3I0 IO^{I}
		I366 IO^{-2}	3365	363I	II85
	0.2	3557	54I5	6478	-0.9896
		8908	7240	II48 IO^{-I}	6825
	0.4	2099 IO^{-I}	4994	2I57	2336
2		4472	+0.I360 IO^{-I}	4674	+0.2952
	0.8	7922	793I	0.II2I	7860
		899I	0.2473	2632	I222 IO^{I}
	I.6	-0.4664 IO^{-I}	5530	5550	I654
		-0.5225	8366	9864	2I29
	3.2	I209 IO^{I}	64II	I368 IO^{I}	2654
		I33I	I826 IO^{-2}	I332	3I40
	6.4	-0.9766	-0.9362 IO^{-I}	0.98II	-0.3046 IO^{I}
	0.I	0.34I8 IO^{-3}	-0.23I2 IO^{-3}	0.4I27 IO^{-3}	-0.5948
		9070	I420	9I80	I552
	0.2	2337 IO^{-2}	+0.6034 IO^{-3}	24I4 IO^{-2}	+0.2527
		5753	36I5 IO^{-2}	6795	56II
	0.4	I3I6 IO^{-I}	I353 IO^{-I}	I887 IO^{-I}	7992
4		2645	4237	4995	I0I3 IO^{I}
	0.8	4054	0.II69	0.I237	I237
		I984	2803	28I0	I500
	I.6	-0.I435	5502	5686	I826
		5994	7729	978I	2230
	3.2	I204 IO^{I}	5630	I329 IO^{I}	2704
		I29I	-0.590I IO^{-2}	I29I	-0.3I37 IO^{I}
	6.4	-0.978I	8095 IO^{-I}	0.98I5	3059
	0.I	0.3I04 IO^{-3}	0.8I35 IO^{-4}	0.3209 IO^{-3}	0.2563
		8220	4548 IO^{-3}	9395	5054
	0.2	2III IO^{-2}	I7I7 IO^{-2}	2722 IO^{-2}	683I
		5I69	5626	7640	8277
	0.4	II7I IO^{-I}	I696 IO^{-I}	206I IO^{-I}	9665
6		2307	4770	5298	II20 IO^{I}
	0.8	3337	0.I238	0.I282	0.I307
		6866 IO^{-2}	2864	2865	I547

Продолжение таблицы I2

λ	P	$Reh-1$	$\mathcal{J}mh$	A	φ
	I.6	-0.I6I4	5496	5729	0 I856
		6I37	76II	9777	2249
	3.2	I203 I0^{I}	5485	I323 I0^{I}	27I4
		I283	-0.7332 I0^{-2}	I283	-0.3I36 I0^{I}
	6.4	-0.9784	7860 I0^{-I}	0.98I5	306I
8	0.I	0.2994 I0^{-3}	0.I908 I0^{-3}	0.3550 I0^{-3}	0.5672
		7923	6638	I033 I0^{-2}	6973
	0.2	2032 I0^{-2}	2I08 I0^{-2}	2928	8037
		4964	6329	8044	9057
	0.4	II20 I0^{-I}	I8I6 I0^{-I}	2I33 I0^{-I}	I0I8 I0^{I}
		2I88	4956	54I8	II55
	0.8	3087	0.I263	0.I300	I33I
		2324	2886	2886	I563
	I.6	-0.I677	5495	5745	I867
		6I86	7569	9776	2256
	3.2	I203 I0^{I}	5434	I320 I0^{I}	27I7
		I28I	-0.7833 I0^{-2}	I280	-0.3I35 I0^{I}
	6.4	-0.9785	7778 I0^{-I}	0.98I5	3062
I0	0.I	0.2944 I0^{-3}	0.24I4 I0^{-3}	3807 I0^{-3}	0.6869
		7786	7604	I088 I0^{-2}	7736
	0.2	I995 I0^{-2}	2288 I0^{-2}	3036	8537
		4870	6655	8246	939I
	0.4	I096 I0^{-I}	I97I I0^{-I}	2I69 I0^{-I}	I04I I0
		2I33	5042	5475	II70
	0.8	297I	0.I274	0.I308	0.I34I
		2224 I0^{-3}	2895	2895	I570
	I.6	-0.I706	5494	5752	I872
		6209	7550	9775	2259
	3.2	I203 I0^{I}	54I0	I3I9 I0^{I}	27I9
		I279	-0.8065 I0^{-2}	I279	-0.3I35 I0^{I}
	6.4	-0.9785	7740 I0^{-I}	0.98I5	3062

Примечание: ρ изменяется с шагом $\sqrt{2}$.



|h_x - 1|
Шифр кривых - λ
1
5
2
10^-1
5
2
10^-2
5
2
10^-3
5
1
1.2
1.4
1.7
2
2.4
2.8
3.35
4
10^-1
2
5
1
2
5
L/δ_t

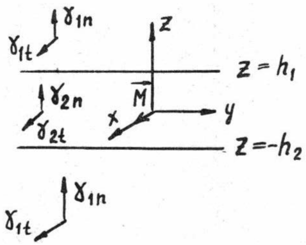
Рис.46

Таблица I3

μ^{-1} \ λ	I	I.2	I.4	I.6	I.8	2
0.I	-I.0000	-I.0000	-I.0000	-I.0000	-I.0000	-I.0000
	-I.0000	-I.0000	-I.0000	-I.0000	-I.0000	-I.0000
0.2	-0.9996	-0.9997	-0.9997	-0.9997	-0.9997	-0.9998
	-0.9265	-0.9369	-0.9432	-0.9472	-0.9500	-0.9520
0.4	-0.3642	-0.4479	-0.4983	-0.53II	-0.5535	-0.5696
	+0.2320	+0.9083 $\mathrm{IO}^{-\mathrm{I}}$	+0.57I8 IO^{-2}	-0.4952 $\mathrm{IO}^{-\mathrm{I}}$	-0.8739 $\mathrm{IO}^{-\mathrm{I}}$	-0.II45
0.8	+0.2472	+0.I382 $\mathrm{IO}^{-\mathrm{I}}$	+0.7247 $\mathrm{IO}^{-\mathrm{I}}$	+0.298I $\mathrm{IO}^{-\mathrm{I}}$	+0.5627 IO^{-3}	-0.2036 $\mathrm{IO}^{-\mathrm{I}}$
	+0.6I29 $\mathrm{IO}^{-\mathrm{I}}$	+0.4334 IO^{-2}	-0.300I $\mathrm{IO}^{-\mathrm{I}}$	-0.5230 $\mathrm{IO}^{-\mathrm{I}}$	-0.6758 $\mathrm{IO}^{-\mathrm{I}}$	785I
I.6	-0.5280 $\mathrm{IO}^{-\mathrm{I}}$	-0.7728 $\mathrm{IO}^{-\mathrm{I}}$	-0.9204 $\mathrm{IO}^{-\mathrm{I}}$	-0.I0I6	-0.I082	-0.II29
	8575	9530	-0.I0I0	-0.I048	-0.I073	I092
3.2	8082	8436	-0.8650 $\mathrm{IO}^{-\mathrm{I}}$	8789 $\mathrm{IO}^{-\mathrm{I}}$	-0.8884 $\mathrm{IO}^{-\mathrm{I}}$	-0.8952 $\mathrm{IO}^{-\mathrm{I}}$
	6488	66I6	6694	-0.6744 $\mathrm{IO}^{-\mathrm{I}}$	6779	6803
6.4	4872	49I8	4946	4964	4976	4985
	3547	3564	3574	3580	3585	3588

§ 3. Магнитное поле в анизтропной среде с двумя горизонтальными поверхностями раздела (пласты ограниченной мощности)

Воспользуемся результатами, полученными в предыдущем параграфе, и определим магнитное поле в пластах ограниченной мощности, когда среды анизотропны. Главные оси тензоров проводимости во всех трех средах совпадают с координатными осями. Уравнение поверхностей раздела $z=h_1$ и $z=-h_2$ (рис.47).



Р и с. 47.

Все величины, относящиеся к пласту и вмещающей среде, определяются соответственно индексом (2) и (I). Будем предполагать, что $\gamma_{ik}^{(1)}=\gamma_{ik}^{(3)}$. В среде (2) в начале координат расположен магнитный диполь, направленный вдоль оси X. Согласно (3.32) вблизи источника электромагнитное поле может быть описано с помощью вектор-потенциала электрического типа $\vec{A}^{(0)}$, имеющего две компоненты - $A_y^{(0)}$ и $A_z^{(0)}$:

$$\vec{A}=\left(0,\, A_y^{(0)},\, A_z^{(0)}\right),$$

где

$$A_y^{(0)}=-\frac{M}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\frac{e^{ik_{2t}R}}{R}=-\frac{M}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_0^\infty\frac{m}{m_{2t}}e^{-m_{2t}|z|}J_0(mr)\,dm$$

$$A_z^{(0)}=\frac{M}{4\pi}\lambda_2\frac{\partial}{\partial y}\frac{e^{ik_{2n}\bar{R}}}{\bar{R}}-\frac{M}{4\pi}\frac{y}{r^2}\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{z}{R}e^{ik_{2t}R}-\frac{\lambda_2 z}{\bar{R}}e^{ik_{2n}\bar{R}}\right\}=$$

$$=-\frac{M}{4\pi}\frac{y}{r}\int_0^\infty\left\{\frac{k_{2t}k_{2n}}{m_{2n}}e^{-m_{2n}\lambda_2|z|}+m_{2t}e^{-m_{2t}|z|}\right\}J_1(mr)\,dm\,. \tag{3.40}$$

здесь

$$k_{2t}^2=i\omega\mu\gamma_{2t}\qquad k_{2n}^2=i\omega\mu\gamma_{2n}\qquad m_{2t,n}=\sqrt{m^2-k_{2t,n}^2}$$

$$\lambda_2^2 = \frac{\gamma_{2t}}{\gamma_{2n}} \qquad \bar{R}^2 = x^2 + y^2 + \lambda_2^2 z^2 .$$

Потенциалы $A_y^{(0)}$ и $A_z^{(0)}$ удовлетворяют уравнениям:

$$(\nabla^2 + k_{2t}^2) A_y^{(0)} = 0$$

$$(\bar{\nabla}^2 + k_{2n}^2) A_z^{(0)} = \left(1 - \frac{1}{\lambda_2^2}\right) \frac{\partial^2 A_y^{(0)}}{\partial z \partial y} , \tag{3.4I}$$

где

$$\bar{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} .$$

Поэтому потенциалы в слоистой среде можно представить в виде:

$$A_{1y} = \frac{M}{4\pi} \int_0^\infty D_1 J_0(mr) e^{m_{1t} z} dm$$

$$A_{2y} = A_y^{(0)} + \frac{M}{4\pi} \int_0^\infty (D_2 e^{m_{2t} z} + D_3 e^{-m_{2t} z}) J_0(mr) dm \tag{3.42}$$

$$A_{3y} = \frac{M}{4\pi} \int_0^\infty D_4 e^{-m_{1t} z} J_0(mr) dm ,$$

при этом $(\nabla^2 + k_{it}^2) A_{iy} = 0$, $i = 1,2,3$ и

$$A_{1z} = \frac{y}{r} \frac{M}{4\pi} \int_0^\infty F_1(z) J_1(mr) dm$$

$$A_{2z} = A_z^{(0)} + \frac{y}{r} \frac{M}{4\pi} \int_0^\infty F_2(z) J_1(mr) dm \tag{3.43}$$

$$A_{3z} = \frac{M}{4\pi} \frac{y}{r} \int_0^\infty F_3(z) J_1(mr) dm .$$

Используя выражение (3.4I-3.43), получаем уравнения для определения функций $F_i(z)$

$$\frac{d^2F_1(z)}{dz^2}-\lambda_1^2 m_{1n}^2 F_1(z)=-mm_{1t}(\lambda_1^2-1)\mathcal{D}_1 e^{m_{1t}z}$$

$$\frac{d^2F_2(z)}{dz^2}-\lambda_2^2 m_{2n}^2 F_2(z)=-mm_{2t}(\lambda_2^2-1)\left(\mathcal{D}_2 e^{m_{2t}z}-\mathcal{D}_3 e^{-m_{2t}z}\right) \tag{3.44}$$

$$\frac{d^2F_3(z)}{dz^2}-\lambda_1^2 m_{1n}^2 F_3(z)=mm_{1t}(\lambda_1^2-1)\mathcal{D}_4 e^{-m_{1t}z}.$$

Решения уравнений (3.44) с учетом условий на бесконечности имеют вид:

$$F_1(z)=A_1 e^{\lambda_1 m_{1n}z}+\frac{m_{1t}}{m}\mathcal{D}_1 e^{m_{1t}z}$$

$$F_2(z)=A_2 e^{\lambda_2 m_{2n}z}+B_2 e^{-\lambda_2 m_{2n}z}+\frac{m_{2t}}{m}\left(\mathcal{D}_2 e^{m_{2t}z}-\mathcal{D}_3 e^{-m_{2t}z}\right) \tag{3.45}$$

$$F_3(z)=B_3 e^{-\lambda_2 m_{1n}z}-\frac{m_{1t}}{m}\mathcal{D}_4 e^{-m_{1t}z}.$$

Подставляя (3.45) в (3.43), имеем:

$$A_{1z}=\frac{M}{4\pi}\frac{y}{r}\int_0^\infty\left\{A_1 e^{\lambda_1 m_{1n}z}+\frac{m_{1t}}{m}\mathcal{D}_1 e^{m_{1t}z}\right\}J_1(mr)\,dm$$

$$A_{2z}=A_2^{(0)}+\frac{M}{4\pi}\frac{y}{r}\int_0^\infty\left\{A_2 e^{\lambda_2 m_{2n}z}+B_2 e^{-\lambda_2 m_{2n}z}+\right.$$

$$\left.+\frac{m_{2t}}{m}\left(\mathcal{D}_2 e^{m_{2t}z}-\mathcal{D}_3 e^{-m_{2t}z}\right)\right\}J_1(mr)\,dm \tag{3.46}$$

$$A_{3z}=\frac{M}{4\pi}\frac{y}{r}\int_0^\infty\left\{B_3 e^{-\lambda_1 m_{1n}z}-\frac{m_{1t}}{m}\mathcal{D}_4 e^{-m_{1t}z}\right\}J_1(mr)\,dm.$$

Для определения неизвестных коэффициентов D_1, D_2, D_3, D_4, A_1, A_2, B_2 и B_3 воспользуемся граничными условиями при $z=h_1$ и $z=-h_2$. Непрерывность касательных компонент электрического и магнитного полей приводит к соотношениям для A_y:

$$A_{1y}=A_{2y} \qquad A_{2y}=A_{3y}$$

$$\frac{\partial A_{1y}}{\partial z}=\frac{\partial A_{2y}}{\partial z} \quad (z=-h_2) \qquad \frac{\partial A_{2y}}{\partial z}=\frac{\partial A_{3y}}{\partial z} \quad (z=h_1) \tag{3.47}$$

и более сложным условиям сопряжения для A_z:

$$A_{1z}=A_{2z} \qquad A_{2z}=A_{3z}$$

$$\frac{1}{\gamma_{1t}}\operatorname{div}\vec{A}_1=\frac{1}{\gamma_{2t}}\operatorname{div}\vec{A}_2 \quad (z=-h_2) \qquad \frac{1}{\gamma_{2t}}\operatorname{div}\vec{A}_2=\frac{1}{\gamma_{3t}}\operatorname{div}\vec{A}_3 . \tag{3.48}$$

Подставляя (3.42) в (3.47), получаем систему уравнений для коэффициентов D_i:

$$\begin{aligned}
&D_1 e^{-m_{1t}h_2}=-me^{-m_{2t}h_2}+D_2e^{-m_{2t}h_2}+D_3e^{m_{2t}h_2}\\
&m_{1t}D_1 e^{-m_{1t}h_2}=-mm_{2t}e^{-m_{2t}h_2}+m_{2t}D_2e^{-m_{2t}h_2}-m_{2t}D_3e^{m_{2t}h_2}\\
&D_4 e^{-m_{1t}h_1}=me^{-m_{2t}h_1}+D_2e^{m_{2t}h_1}+D_3e^{-m_{2t}h_1}\\
&-m_{1t}D_4 e^{-m_{1t}h_1}=-mm_{2t}e^{-m_{2t}h_1}+m_{2t}D_2e^{m_{2t}h_1}-m_{2t}D_3e^{-m_{2t}h_1} .
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Решая систему, находим:

$$\begin{aligned}
&D_2=-m\ell_{12}e^{-2m_{2t}h_1}\frac{1+\ell_{12}e^{-2m_{2t}h_2}}{1-\ell_{12}^2e^{-2m_{2t}H}}\\
&D_3=m\ell_{12}e^{-2m_{2t}h_2}\frac{1+\ell_{12}e^{-2m_{2t}h_1}}{1-\ell_{12}^2e^{-2m_{2t}H}} ,
\end{aligned} \tag{3.50}$$

где

$$\ell_{12}=\frac{m_{1t}-m_{2t}}{m_{1t}+m_{2t}}\quad .$$

Теперь обратимся к определению коэффициентов A_i и B_i . Поскольку при $z=-h_2$ непрерывна компонента A_y и, соответственно, $\frac{\partial A_{1y}}{\partial y}=\frac{\partial A_{2y}}{\partial y}$, то условие (3.48) перепишем в виде:

$$A_{1z}=A_{2z}$$

$$S_t\,\frac{\partial A_{1z}}{\partial z}-\frac{\partial A_{2z}}{\partial z}=(1-S_t)\,\frac{\partial A_{2y}}{\partial y}\quad (z=-h_2), \tag{3.48а}$$

где

$$S_t=\frac{\gamma_{2t}}{\gamma_{1t}}\quad .$$

Аналогично, при $z=h_1$ имеем:

$$A_{2z}=A_{3z}$$

$$S_t\,\frac{\partial A_{3z}}{\partial z}-\frac{\partial A_{2z}}{\partial z}=(1-S_t)\,\frac{\partial A_{2y}}{\partial y}\quad . \tag{3.48б}$$

Подставляя (3.46) в (3.48а), (3.48б), получаем систему уравнений для коэффициентов A_1 , A_2 , B_2 и B_3 :

$$A_1e^{-\lambda_1 m_{1n}h_2}+\frac{m_{1t}}{m}D_1e^{-m_{1t}h_2}=-\frac{k_{2t}k_{2n}}{m_{2n}}e^{-\lambda_2 m_{2n}h_2}-m_{2t}e^{-m_{2t}h_2}+\quad .$$

$$+A_2e^{-\lambda_2 m_{2n}h_2}+B_2e^{\lambda_2 m_{2n}h_2}+\frac{m_{2t}}{m}\left(D_2e^{-m_{2t}h_2}-D_3e^{m_{2t}h_2}\right);$$

$$S_t\left\{\lambda_1 m_{1n}A_1e^{-\lambda_1 m_{1n}h_2}+\frac{m_{1t}^2}{m}D_1e^{-m_{1t}h_2}\right\}+k_{2t}^2e^{-m_{2n}\lambda_2 h_2}+$$

$$+m_{2t}^2e^{-m_{2t}h_2}-\lambda_2 m_{2n}A_2e^{-\lambda_2 m_{2n}h_2}+\lambda_2 m_{2n}B_2e^{\lambda_2 m_{2n}h_2}-$$

$$-\frac{m_{2t}^2}{m}\left(\mathcal{D}_2 e^{-m_{2t}h_2}+\mathcal{D}_3 e^{m_{2t}h_2}\right)=-m(1-S_t)\mathcal{D}_1 e^{-m_{1t}h_2};$$

$$B_3 e^{-\lambda_1 m_{1n}h_1}-\frac{m_{1t}}{m}\mathcal{D}_4 e^{-m_{1t}h_1}=\frac{k_{2t}k_{2n}}{m_{2n}}e^{-\lambda_2 m_{2n}h_1}-m_{2t}e^{-m_{2t}h_1}+$$

$$+A_2 e^{\lambda_2 m_{2n}h_1}+B_2 e^{-\lambda_2 m_{2n}h_1}+\frac{m_{2t}}{m}\left(\mathcal{D}_2 e^{m_{2t}h_1}-\mathcal{D}_3 e^{-m_{2t}h_1}\right);$$

$$S_t\left\{-\lambda_1 m_{1n}B_3 e^{-\lambda_1 m_{1n}h_1}+\frac{m_{1t}^2}{m}\mathcal{D}_4 e^{-m_{1t}h_1}\right\}-k_{2t}^2 e^{-\lambda_2 m_{2n}h_1}-$$

$$-m_{2t}^2 e^{-m_{2t}h_1}-\lambda_2 m_{2n}A_2 e^{\lambda_2 m_{2n}h_1}+\lambda_2 m_{2n}B_2 e^{-\lambda_2 m_{2n}h_1}-$$

$$-\frac{m_{2t}^2}{m}\left(\mathcal{D}_2 e^{m_{2t}h_1}+\mathcal{D}_3 e^{-m_{2t}h_1}\right)= \tag{3.51}$$

$$=-m(1-S_t)\mathcal{D}_4 e^{-m_{1t}h_1}.$$

Воспользовавшись соотношениями (3.49), связывающими коэффициенты $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ и $\mathcal{D}_4$, нетрудно свести систему (3.51) к виду:

$$e^{-\lambda_1 m_{1n}h_2}A_1-e^{-\lambda_2 m_{2n}h_2}A_2-e^{\lambda_2 m_{2n}h_2}B_2=\frac{k_{2t}k_{2n}}{m_{2n}}e^{-\lambda_2 m_{2n}h_2}$$

$$S_t\lambda_1\frac{m_{1n}}{m}e^{-\lambda_1 m_{1n}h_2}A_1-\lambda_2\frac{m_{2n}}{m}e^{-\lambda_2 m_{2n}h_2}A_2+\lambda_2\frac{m_{2n}}{m}e^{\lambda_2 m_{2n}h_2}B_2=$$

$$=-\frac{k_{2t}^2}{m}e^{-m_{2n}\lambda_2 h_2}$$

$$e^{-\lambda_1 m_{1n}h_1}B_3-e^{\lambda_2 m_{2n}h_1}A_2-e^{-\lambda_2 m_{2n}h_1}B_2=-\frac{k_{2t}k_{2n}}{m_{2n}}e^{-\lambda_2 m_{2n}h_1} \tag{3.52}$$

$$S_t \lambda_1 \frac{m_{1n}}{m} e^{-\lambda_1 m_{1n} h_1} B_3 + \lambda_2 \frac{m_{2n}}{m} e^{\lambda_2 m_{2n} h_1} A_2 -$$

$$- \lambda_2 \frac{m_{2n}}{m} e^{-\lambda_2 m_{2n} h_1} B_2 = - \frac{k_{2t}^2}{m} e^{-\lambda_2 m_{2n} h_1} .$$

Решая систему, находим:

$$A_2 = \frac{k_{2t} k_{2n}}{m_{2n}} \bar{\ell} \frac{e^{-2\lambda_2 m_{2n} h_1}}{1-\bar{\ell}^2 e^{-2\lambda_2 m_{2n} H}} \left\{ 1 - \bar{\ell} e^{-2\lambda_2 m_{2n} h_2} \right\} \qquad (3.53)$$

$$B_2 = \frac{k_{2t} k_{2n}}{m_{2n}} \bar{\ell} \frac{e^{-2\lambda_2 m_{2n} h_2}}{1-\bar{\ell}^2 e^{-2\lambda_2 m_{2n} H}} \left\{ 1 - \bar{\ell} e^{-2\lambda_2 m_{2n} h_1} \right\} ,$$

здесь

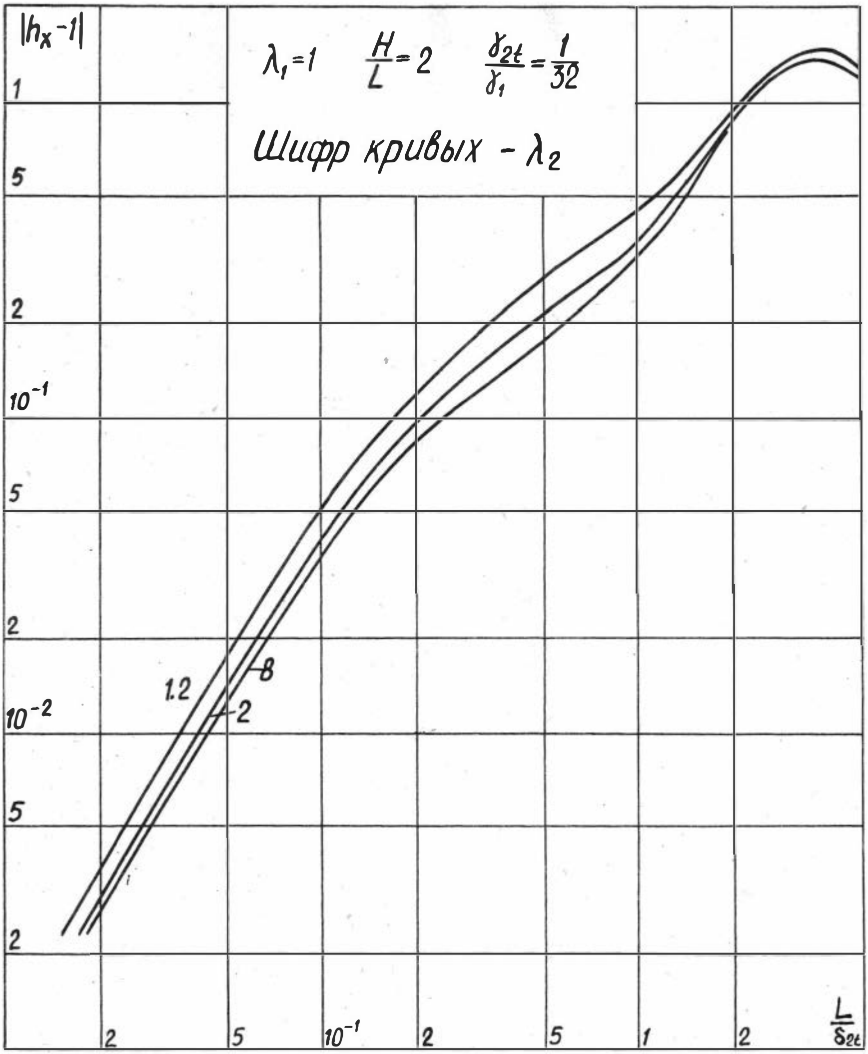
$$\bar{\ell} = \frac{S_t \lambda_1 m_{1n} - \lambda_2 m_{2n}}{S_t \lambda_1 m_{1n} + \lambda_2 m_{2n}} .$$

Выражение для горизонтальной компоненты магнитного поля H_x на оси z внутри пласта имеет вид:

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = H_x^{одн} + \frac{M}{4\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{m_{2t}}{2} \left(D_2 e^{m_{2t} z} - \right. \right. \qquad (3.54)$$

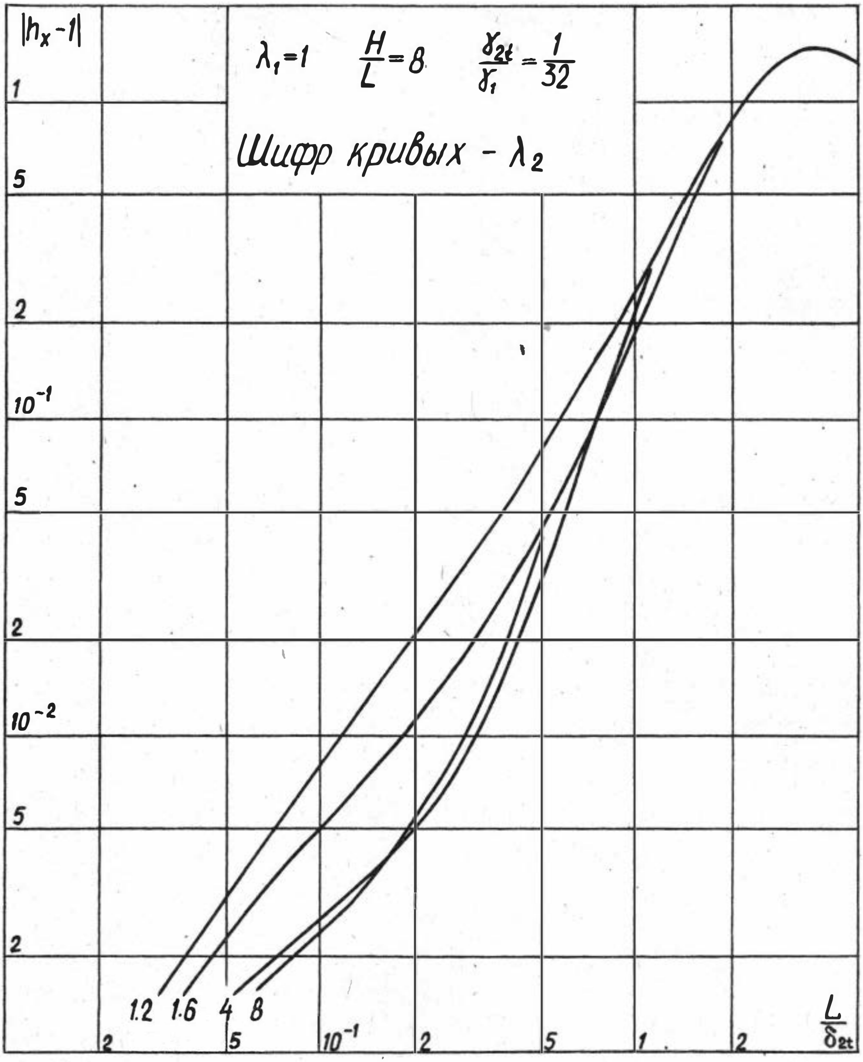
$$\left. \left. - D_3 e^{-m_{2t} z} \right) - \frac{m}{2} \left(A_2 e^{\lambda_2 m_{2n} z} + B_2 e^{-\lambda_2 m_{2n} z} \right) \right\} dm .$$

По формуле (3.54) были выполнены расчеты частотных характеристик поля для различных значений коэффициентов анизотропии λ_1 и λ_2 и параметров $S = \frac{\gamma_{2t}}{\gamma_{1t}}$, $\alpha = \frac{H}{L}$ при симметричном расположении зонда относительно границ пласта. Рассмотрим более подробно поле в случае, когда вмещающая среда изотропна (λ_1=I). Предварительно вновь обратимся к амплитудным кривым вторичного поля в однородной изотропной среде (рис. 46). Как видно из кри-



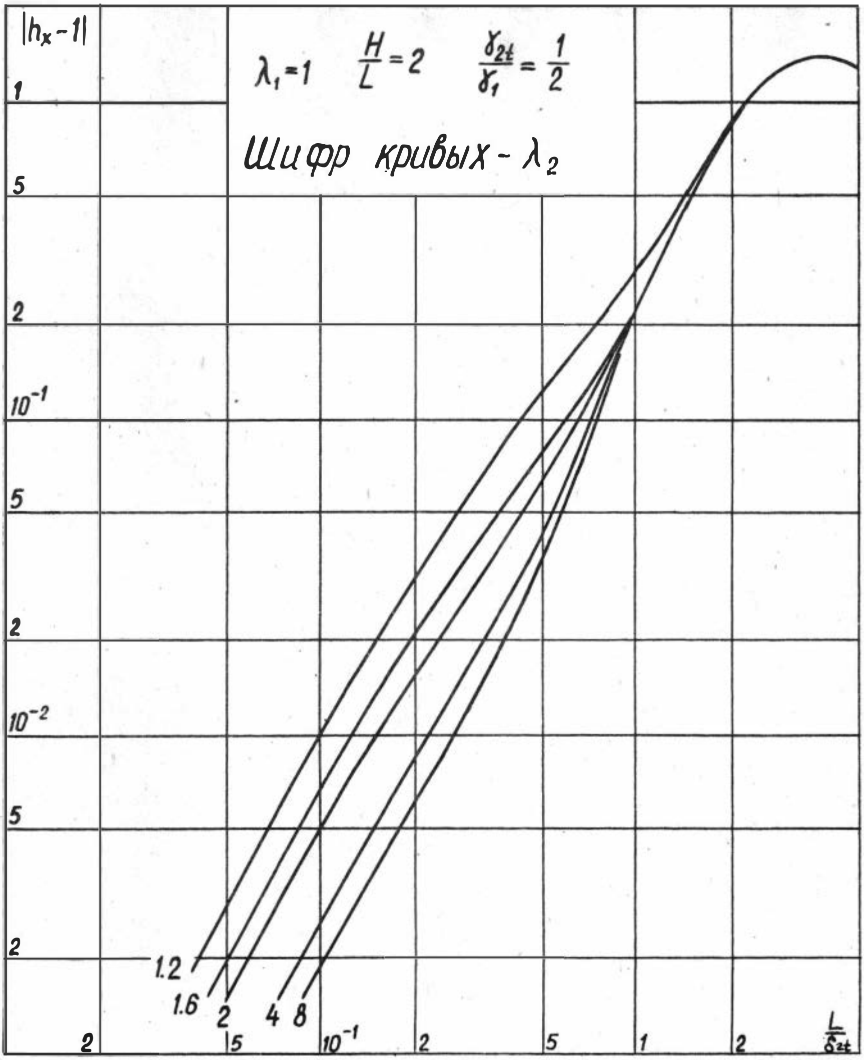
$|h_x - 1|$
$\lambda_1 = 1$ $\frac{H}{L} = 2$ $\frac{\gamma_{2t}}{\gamma_1} = \frac{1}{32}$
Шифр кривых - λ_2
1
5
2
10^{-1}
5
2
10^{-2}
5
2
1.2
8
2
2
5
10^{-1}
2
5
1
2
$\frac{L}{\delta_{2t}}$

Рис. 48



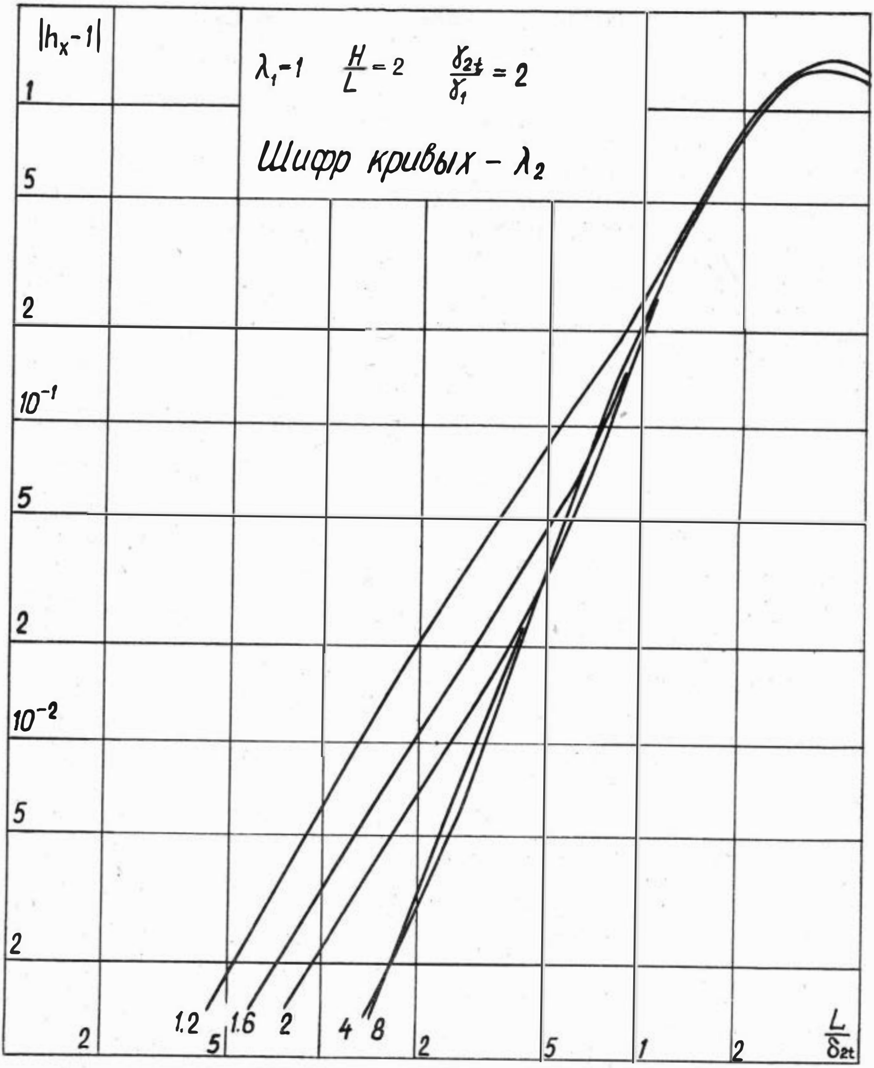
$|h_x - 1|$
$\lambda_1 = 1$ $\frac{H}{L} = 8$ $\frac{\gamma_{2t}}{\gamma_1} = \frac{1}{32}$
Шифр кривых - λ_2
1
5
2
10^{-1}
5
2
10^{-2}
5
2
1.2 1.6 4 8
2
5
10^{-1}
2
5
1
2
$\frac{L}{\delta_{2t}}$

Рис. 49



$|h_x - 1|$
$\lambda_1 = 1 \quad \frac{H}{L} = 2 \quad \frac{\gamma_{2t}}{\gamma_1} = \frac{1}{2}$
Шифр кривых - λ_2
1.2
1.6
2
4
8
10^{-1}
10^{-2}
$\frac{L}{\delta_{2t}}$

Рис. 50



|hx-1|
λ1=1 H/L=2 γ2t/γ1=2
Шифр кривых - λ2
1
5
2
10^-1
5
2
10^-2
5
2
1.2
1.6
2
4
8
2
5
2
5
1
2
L/δ2t

Рис. 5I

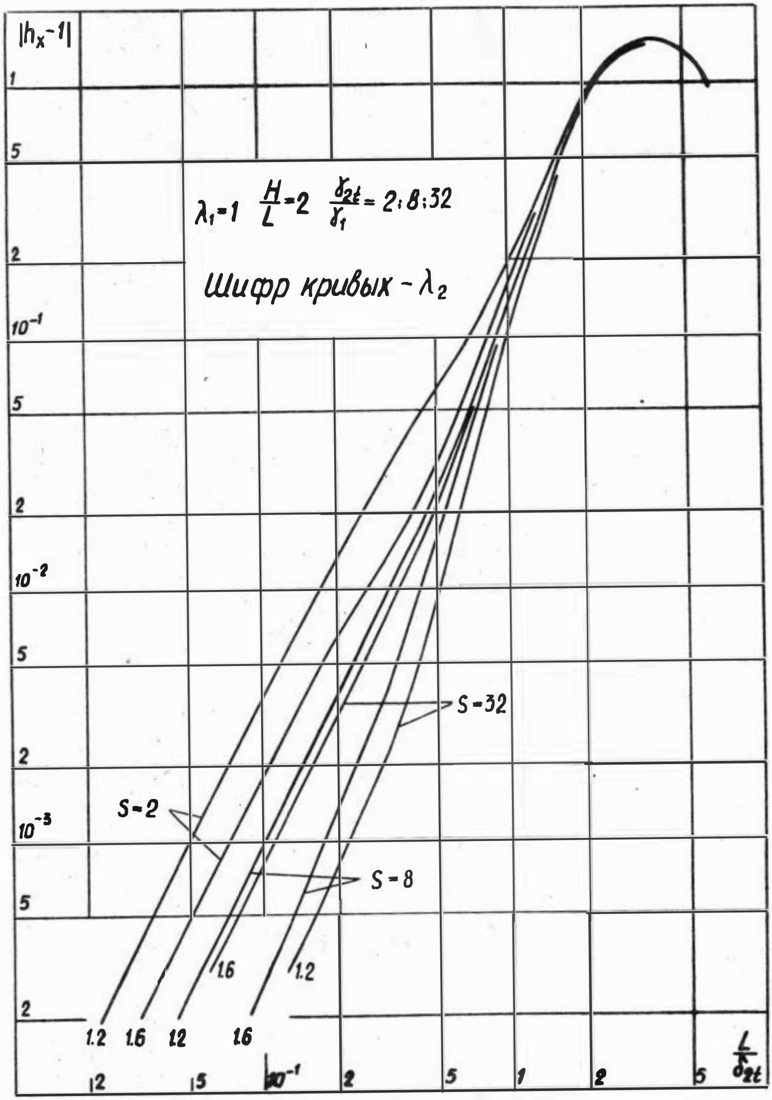
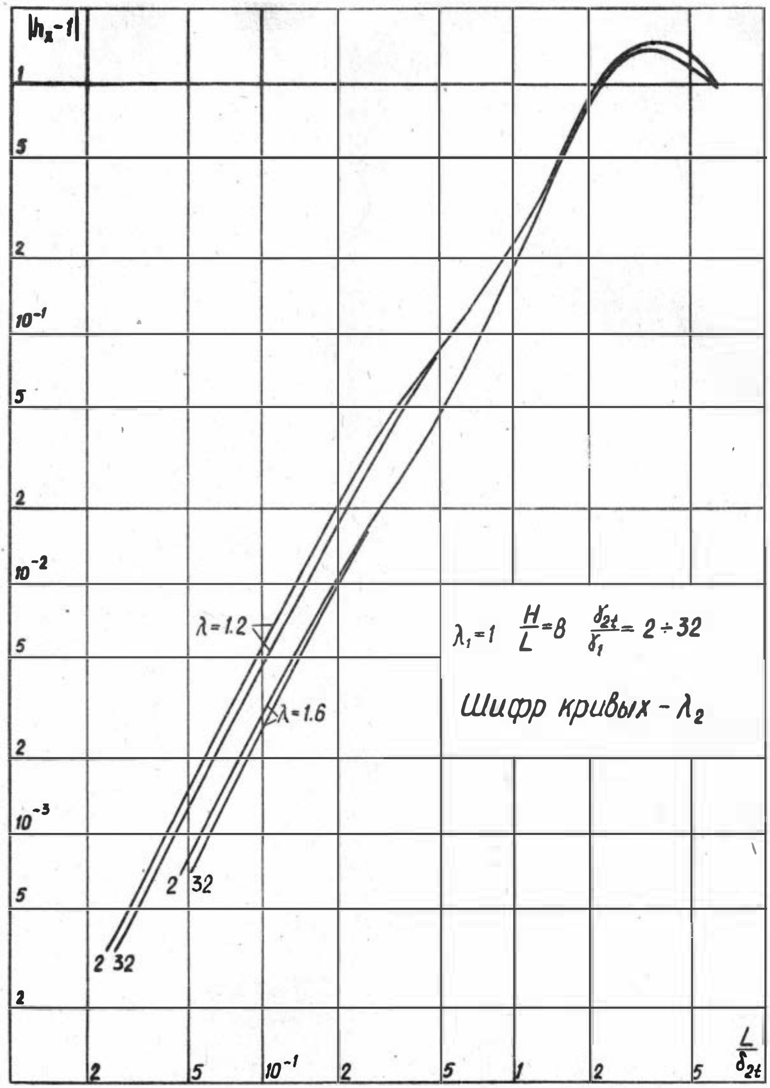
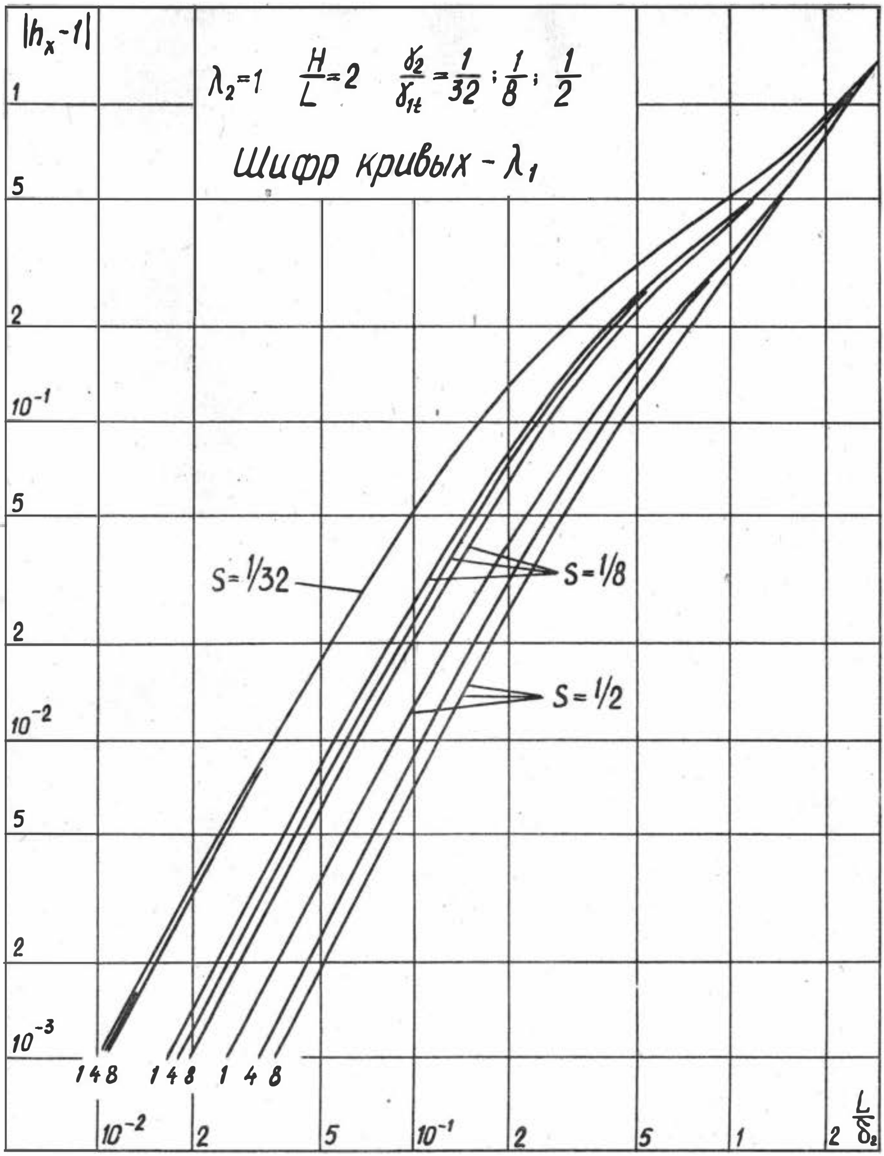

$|h_x - 1|$
1
5
2
10^{-1}
5
2
10^{-2}
5
2
10^{-3}
5
2
$\lambda_1 = 1$ $\frac{H}{L} = 2$ $\frac{\gamma_{2t}}{\gamma_1} = 2;8;32$
Шифр кривых $- \lambda_2$
S = 32
S = 2
S = 8
1.6
1.2
1.2
1.6
12
1.6
2
5
10^{-1}
2
5
1
2
5
$\frac{L}{\delta_{2t}}$

Рис. 52



|hx-1|
1
5
2
10^-1
5
2
10^-2
5
2
10^-3
5
2
λ=1.2
λ=1.6
2
32
2 32
λ1=1 H/L=8 γ2t/γ1= 2÷32
Шифр кривых - λ2
2
5
10^-1
2
5
1
2
5
L/δ2t

Рис. 53



$|h_x - 1|$
$\lambda_2 = 1$ $\frac{H}{L} = 2$ $\frac{\gamma_2}{\gamma_{1t}} = \frac{1}{32}; \frac{1}{8}; \frac{1}{2}$
Шифр кривых - λ_1
S=1/32
S=1/8
S=1/2
1
5
2
10^{-1}
5
2
10^{-2}
5
2
10^{-3}
1 4 8 1 4 8 1 4 8
10^{-2}
2
5
10^{-1}
2
5
1
2
$\frac{L}{\delta_2}$

Рис. 54

вых, влияние коэффициента анизотропии на амплитуду поля значительно в области относительно низких частот ($L/\delta_t < 0.5$), когда параметр λ не превышает двух. Выражение для активной компоненты (3.34) позволяет установить приближенное соотношение между максимальными значениями L/δ_t и λ, при которых еще возможна дифференциация кривых по λ :

$$\frac{1}{\lambda^2} \gtrsim \frac{1}{3}\frac{L}{\delta_t} \quad \text{или} \quad \frac{L}{\delta_t} \lesssim \frac{3}{\lambda^2} .$$

Вначале опишем поведение поля, когда пласт более высокоомный, чем вмещающая среда (рис. 48-51). При измерении поля в относительно высокоомном пласте небольшой мощности влияние изменения удельной проводимости вмещающей среды значительно превышает влияние изменения коэффициента анизотропии пласта. Естественно, что с увеличением мощности пласта дифференциация кривых по параметру λ_2 возрастает, особенно это заметно в промежуточной области частотной характеристики, нижняя граница которой соответствует частоте, когда, в результате скин-эффекта, влияние вмещающей среды мало. Очевидно, что при измерении коэффициента анизотропии в пластах небольшой мощности, значительное повышение частоты, соответствующее высокочастотной части спектра амплитудной характеристики в однородной среде, целесообразно при относительно слабой анизотропии ($\lambda_2 < 1.4$). С увеличением удельного сопротивления вмещающей среды относительно возрастает влияние анизотропии и становится возможным измерение параметра λ_2 в пластах небольшой мощности (рис.52-53). В заключение на рис. 54 приведены амплитудные кривые поля, иллюстрирующие влияние анизотропии вмещающей среды.

Л и т е р а т у р а

I. Гельфанд И.С. Переменное поле горизонтальной рамки в слоистой среде УФ АН СССР. Геофизический сборник, № 2, 1957.

2. Кауфман А.А. Теория индукционного каротажа. Изд."Наука", СО АН СССР, 1965.

3. Кауфман А.А., Морозова Г.М. Теоретические основы метода зондирований становлением поля в ближней зоне. Изд."Наука", СО АН СССР, 1970.

4. Кауфман А.А., Соколов В.П. Нестационарное поле вертикального магнитного диполя на оси скважины. Сб."Электромагнитное поле на оси скважины". Препринт ИГиГ СО АН СССР, 1971.

5. Соколов В.П., Табаровский Л.А. О расчете полей в скважине методом деформации путей в комплексной плоскости переменной интегрирования. Сб."Электромагнитное поле на оси скважины". Препринт ИГиГ СО АН СССР, 1971.

6. Стрэттон Дж.А. "Теория электромагнетизма". ОГИЗ, 1948.

7. Четаев Д.Н. О поле низкочастотного электрического диполя, лежащего на поверхности однородного анизотропного проводящего полупространства. ЖТФ, XXXII, № II, 1962.

О Г Л А В Л Е Н И Е

стр.

В В Е Д Е Н И Е 3

Г л а в а I. Электромагнитное поле горизонтального магнитного диполя в среде с цилиндрическими поверхностями раздела 5

§ I. Электромагнитное поле магнитного диполя в однородной изотропной среде 5

§ 2. Горизонтальная компонента магнитного поля на оси скважины (вывод формул) II

§ 3. Магнитное поле H_x на оси скважины в ближней зоне (область малого параметра) I8

§ 4. Электромагнитное поле на оси скважины в дальней зоне 3I

§ 5. Кривые кажущейся проводимости в среде с двумя цилиндрическими поверхностями раздела 50

§ 6. Цилиндрическая поверхность с поперечным сопротивлением 58

Г л а в а П. Электромагнитное поле горизонтального магмагнитного диполя в средах с горизонтальными поверхностями раздела 64

§ I. Магнитное поле в среде с одной горизонтальной поверхностью раздела 64

§ 2. Магнитное поле горизонтального диполя в пластах ограниченной мощности 70

§ 3. Кривые профилирования с двухкатушечным зондом в средах с двумя горизонтальными границами. . 9I стр.

Г л а в а Ш. Электромагнитное поле магнитного диполя в анизотропной среде 102

§ I. Анизотропия слоистой среды 102

§ 2. Электромагнитное поле диполя в однородной анизотропной среде 105

§ 3. Магнитное поле в анизотропной среде с двумя горизонтальными поверхностями раздела (пласты ограниченной мощности) 118

Л И Т Е Р А Т У Р А 133

МН 01044. Подписано к печати 28/УШ-1972 г. Формат бумаги 60x84 1/16. Печ.л. 8,5. Уч.-изд.л. 8,1. Тираж 200. Заказ 776.
Цена 41 коп.

Новосибирск, СНИИГГИМС, Красный проспект, 67