

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В. Ломоносова**

**ГЕОЛОГИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**Кафедра геофизических методов исследования земной коры**

**А.А. Булычев, И.В. Лыгин, В.Р. Мелихов**

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ  
ГРАВИ- И МАГНИТОРАЗВЕДКИ  
(конспект лекций)**

**Допущено УМС по геологии УМО классических  
университетов в качестве учебного пособия для студентов и  
магистрантов специализации «Геофизика».**

**Геологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова**

**2010**

**УДК 550.831**  
**ББК 26.21**

**Булычев А.А., Лыгин И.В., Мелихов В.Р.**

Численные методы решения прямых задач грави- и магниторазведки (конспект лекций).

Учебное пособие для студентов и магистрантов специализации “Геофизика” – М. 2010. 164 с.

Рецензент – доктор геолого-минералогических наук,  
профессор В.К. Хмелевской.

В пособии изложены некоторые теоретические и практические вопросы решения прямых задач гравиразведки и магниторазведки.

Для студентов геофизических специальностей.

**УДК 550.831**  
**ББК 26.21**

**Печатается по решению**  
**Ученого совета**  
**геологического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова**  
**от 22 апреля 2010 г.**

© А.А. Булычев, И.В. Лыгин,  
В.Р. Мелихов, 2010  
© Геологический факультет МГУ  
имени М.В. Ломоносова, 2010

## Оглавление

Лекция 1.	<i>Введение. Понятие прямой задачи.</i>	4
Лекция 2.	<i>Основные интегральные соотношения и поля элементарных источников (поле силы тяжести).</i>	7
Лекция 3.	<i>Основные интегральные соотношения и поля элементарных источников (магнитное поле).</i>	23
Лекция 4.	<i>Преобразование систем координат, формула Остроградского-Гаусса, формулы Грина.</i>	34
Лекция 5.	<i>Прямая задача гравиметрии и магнитометрии для произвольных однородных многогранников.</i>	48
Лекция 6.	<i>Применение теории функции комплексной переменной при решении прямых двумерных задач гравиразведки и магниторазведки.</i>	71
Лекция 7.	<i>Представление элементов аномального гравитационного и магнитного полей рядами. Моменты.</i>	94
Лекция 8.	<i>Спектральное представление гравитационных и магнитных аномальных полей.</i>	105
Лекция 9.	<i>Численные методы расчета гравитационных и магнитных аномальных полей.</i>	123
Лекция 10.	<i>Решение прямой задачи магниторазведки для тел с высокой магнитной восприимчивостью.</i>	145

## ***Лекция 1. Введение. Понятие прямой задачи.***

1. В интерпретации гравитационных и магнитных данных исключительную роль, как и во всех геофизических методах, играет прямая задача. Это связано с тем, что, только на основе решения прямой задачи, возможно:

- осуществить морфологический анализ полей, т.е. изучить закономерности связи полей и их источников;
- осуществить аналитическое исследование полей и их связь с источниками, создающими эти поля (вопросы единственности и эквивалентности решений, особых точек поля и т.д.);
- создание вычислительных алгоритмов и программ для учета влияния известных геологических тел (геологическое редуцирование) и проверки геологических гипотез;
- создание алгоритмов и программ по решению интерпретационных задач на основе формального и неформального моделирования.

2. Обычно под прямой задачей гравиразведки и магниторазведки понимают определение параметров гравитационного и магнитного полей по заданному распределению плотности или намагниченности. К числу таких параметров относятся те поля, которые непосредственно наблюдаются: аномальное поле силы тяжести (первая вертикальная производная гравитационного потенциала), вторые горизонтальные и вертикальные производные потенциала силы притяжения, вертикальная и горизонтальные компоненты магнитного поля, его склонение, наклонение, модуль.

3. Однако такое понимание прямой задачи не отражает всего многообразия этого вопроса. Дело в том, что под решением прямой задачи можно также понимать нахождение различных трансформант поля и функционалов по заданному закону распределения масс и намагниченности, определение среднего значения аномального поля, его дисперсии, спектральных, авто- и взаимокорреляционных функций и т.д.

Кроме того, понятие прямой задачи должно включать в себя понятие множества, на котором определяются элементы аномальных полей или функционалов. В частности, это может быть область пространства внешняя по отношению к источникам (внешняя прямая задача) или область, расположенная внутри источников поля (внутренняя прямая задача). Это множество может представлять собой горизонтальную плоскость или дискретный набор точек пространства, а может представлять собой частотную область в случае определения спектральных характеристик полей.

Помимо этого в понятие прямой задачи должен входить метод решения: численно или аналитически определяются искомые элементы. При этом под понятием аналитического решения обычно понимают вывод

формулы, описывающей конкретный элемент поля от заданного распределения источников. Численное решение – нахождение конкретного значения поля или его элемента в заданной области. Это решение может быть основано как на расчете поля по точным аналитическим функциям, описывающим эти поля, так и на численных методах, позволяющих в ряде случаев упростить решение прямой задачи от заданной модели. Такая ситуация возникает для моделей, аналитическое решение для которых не получено.

Таким образом, понятие прямой задачи должно включать в себя ответы на три вопроса: «Что найти?», «Где найти?», «Как найти?».

4. Аналитическое решение прямой задачи можно определить следующим образом:

- задано распределение масс или намагниченностей ( $\rho$ );
- определяются элементы искомого поля ( $u$ );
- задано множество точек ( $M$ ) на котором определяются искомые элементы полей;
- задан класс аналитических выражений ( $K_f$ ) с помощью которых будет записано решение прямой задачи.

Обычно под классом  $K_f$  понимают любые алгебраические и элементарные тригонометрические функции, но в то же время этот класс может быть и более широким и включать в себя комплексные величины и функции, ряды, специальные функции.

5. Численное решение прямой задачи. На основе аналитических выражений прямую задачу можно решить численно, т.е. получить конкретное значение искомого элемента поля в заданной точке пространства. Теоретически, полученный результат должен соответствовать искомому точному значению. Однако, поскольку любые вычисления происходят с конечным числом значащих цифр, то существуют ошибки округления. Поэтому, результат, полученный даже по точной аналитической формуле, будет содержать некоторые ошибки, т.е. будет приближенным. В некоторых случаях ошибки могут достигать значительных величин и тем самым приводить к неверным результатам. Для того, чтобы избежать этого необходим анализ ошибок округления и анализ используемой численной схемы.

Таким образом, при численном решении прямой задачи всегда будут получаться приближенные значения. Такое решение задачи будет определяться совокупностью следующих условий:

- задано распределение масс или намагниченностей ( $\rho$ );
- определяются элементы искомого поля ( $u$ );
- задано множество точек ( $M$ ) на котором определяются искомые элементы полей;
- вычисляется множество значений  $u_{\varepsilon}(x)$  искомого элемента  $u$  при всех  $x$ , принадлежащих множеству  $M$ ;

- в заданной метрике  $d$  происходит сравнение элементов  $u(x)$  и  $u_\varepsilon(x)$ . Метрику  $d$  можно, например, определить следующим образом:

$$d(u, u_\varepsilon) = \max |u(x) - u_\varepsilon(x)|;$$

- величина  $u_\varepsilon(x)$  будет решением прямой задачи, если удовлетворяется условие  $d(u, u_\varepsilon) < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – заданная точность вычисления значений искомым элементов полей.

6. Необходимо также отметить, что под распределением намагничённости или гравитирующих масс  $\rho$  понимают пару объектов  $N_\rho$  и  $\delta$ , где  $N_\rho$  – области носителей источников полей, т.е. множество точек в которых располагаются источники поля,  $\delta$  – закон распределения источников в областях  $N_\rho$ .

7. Обычно при решении прямой задачи от сложной геологической среды происходит замена истинного распределения источников  $\rho$  на некоторое модельное (аппроксимационное)  $\rho_a$ . В результате такой замены появляются ошибки, связанные с модельным представлением реальной геологической среды. Поскольку всякое решение прямой задачи делается в рамках модельных представлений, то чем точнее модель отражает реальность, тем меньшую роль оказывает в решении ошибка, связанная с аппроксимацией среды. В то же время, чрезмерная детализация разреза может привести, с одной стороны, к неоправданным вычислительным затратам, а с другой – к усилению влияния вычислительных ошибок. Поэтому аппроксимационная модель, отражая физико-геологическую ситуацию, не должна содержать излишних деталей.

8. Совокупность всех этих условий определяет вопрос о выборе модели и способе, алгоритме, решения прямой задачи.

Таким образом, данный цикл лекций посвящен различным вопросам решения прямой задачи гравиразведки и магниторазведки, начиная от вывода аналитических выражений элементов полей элементарных моделей, с помощью которых можно представлять реальные геологические объекты, до некоторых вопросов, связанных с организацией вычислительных схем.

### ***Основная литература.***

1. Блох Ю.И. Решение прямых задач гравиразведки и магниторазведки.: Учеб. пособие. – М: МГГА. 1993. 79 с. ([www.sigma3d.com](http://www.sigma3d.com))
2. Блох Ю.И. Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий.: Учеб. пособие. 2009. 232 с. ([www.sigma3d.com](http://www.sigma3d.com))

3. Вычислительная математика и техника в разведочной геофизике. Справочник геофизика. – М.: Недра. 1990. 498 с.
4. Гравиразведка. Справочник геофизика. – М.: Недра. 1990. 607 с.
5. *Логачев А.Г., Захаров В.П.* Магниторазведка, - Л.: Недра, 1978. 352 с.
6. Магниторазведка. Справочник геофизика. – М.: Недра. 1990. 470 с.
7. *Миронов В.С.* Курс гравиразведки. – Л.: Недра. 1980. 543 с.
8. *Серкеров С.А.* Гравиразведка и магниторазведка.: Учеб. для вузов. – М.: ОАО «Издательство «Недра». 1999. 437 с.

## ***Лекция 2. Основные интегральные соотношения и поля элементарных источников (поле силы тяжести).***

При решении прямых задач, как гравиразведки, так и магниторазведки представляет интерес получить явные аналитические выражения для элементов полей от элементарных источников. К числу таких полей в первую очередь необходимо отнести потенциал силы гравитационного притяжения и его частные производные.

### **Гравитационное поле.**

1. Как известно, потенциал силы гравитационного притяжения  $V$  в точке  $M_0$  точечного источника массой  $m$ , расположенного в точке  $M$ , определяется следующим образом:

$$V(M_0) = G \frac{m}{r_{MM_0}},$$

где  $G$  – гравитационная постоянная,  $r_{MM_0}$  – расстояние между этими точками.

Если в пространстве задана система точечных масс  $m_i$ , расположенных в точках  $M_i$ , то потенциал такой системы будет определяться суммой потенциалов всех точечных источников в точке наблюдения  $M_0$ :

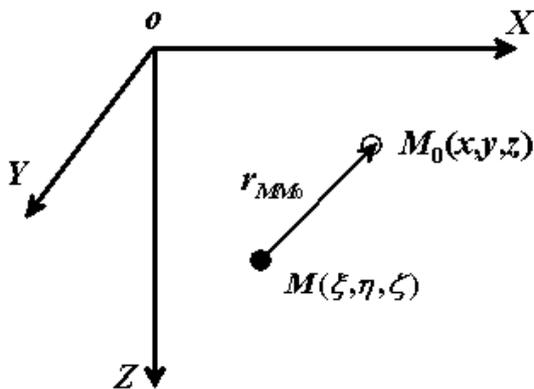
$$V(M_0) = G \sum_i \frac{m}{r_{M_i M_0}}.$$

Если в пространстве задана некоторая область  $D$  с плотностью источников  $\delta(M)$ , где  $M$  – координата точки внутри этой области, то потенциал притяжения, создаваемый таким объектом будет иметь вид:

$$V(M_0) = G \int_D \frac{\delta(M) dv}{r_{MM_0}}.$$

Представленное уравнение для точек расположенных вне области удовлетворяет уравнению Лапласа  $\Delta V = 0$ , а для внутренних точек – уравнению Пуассона  $\Delta V = -4\pi G\delta$ . Зная потенциал притяжения, можно определить поле силы притяжения, вычислив градиент этой функции:  $\vec{g}(M) = \nabla V(M) = \text{grad}V(M)$ .

Здесь стоит сделать следующее замечание. При определении напряженности электрического или магнитного поля через их скалярные потенциалы перед градиентом ставится знак минус (например, для напряженности электрического поля можно записать  $\vec{E} = -\text{grad}U$ , где  $U$  – электрический потенциал). Это связано с тем, что положительные заряды являются источниками поля. В гравитационном поле наблюдается обратная ситуация, силовые линии поля направлены к положительным массам. Этим и объясняется отсутствие знака “-” в приведенном выражении.



2. Введем декартову систему координат с осями, образующими правую тройку. В этой системе положение точки наблюдения  $M_0$  будет определяться координатами  $(x, y, z)$ , а точки  $M$  – координатами  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Тогда, расстояние между точкой  $M$  и точкой  $M_0$ , будет равно

$$r_{MM_0} = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

и для полученных ранее выражений для потенциала можем записать:  
– потенциал точечного источника:

$$V(x, y, z) = G \frac{m}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}};$$

– потенциал объемного источника:

$$V(x, y, z) = G \int_D \frac{\delta(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}}.$$

Уравнение Лапласа в этой системе координат будет иметь вид:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

а напряженность гравитационного поля будет определяться через первые частные производные потенциала:

$$\vec{g} = \nabla V = \mathbf{grad}V = \frac{\partial V}{\partial x} \vec{1}_x + \frac{\partial V}{\partial y} \vec{1}_y + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{1}_z.$$

Отметим, что частные производные потенциала силы притяжения в гравиметрии принято обозначать следующим образом:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = V_x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = V_y, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = V_z, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = V_{xx}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = V_{xy}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = V_{xz}, \text{ и}$$

т.д.

Продифференцировав выражение для потенциала точечного источника, получим выражения для  $V_x, V_y, V_z$ :

$$V_x(M_0) = V_x(x, y, z) = \frac{\partial V}{\partial x} = Gm \frac{(\xi - x)}{\left[ (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = Gm \frac{(\xi - x)}{r_{MM_0}^3}$$

$$V_y(M_0) = Gm \frac{(\eta - y)}{r_{MM_0}^3}, \quad V_z(M_0) = Gm \frac{(\zeta - z)}{r_{MM_0}^3}.$$

Соответственно, для объемного источника –

$$V_x(M_0) = G \int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) \frac{(\xi - x)}{r_{MM_0}^3} d\xi d\eta d\zeta,$$

$$V_y(M_0) = G \int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) \frac{(\eta - y)}{r_{MM_0}^3} d\xi d\eta d\zeta,$$

$$V_z(M_0) = G \int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) \frac{(z - \zeta)}{r_{MM_0}^3} d\xi d\eta d\zeta.$$

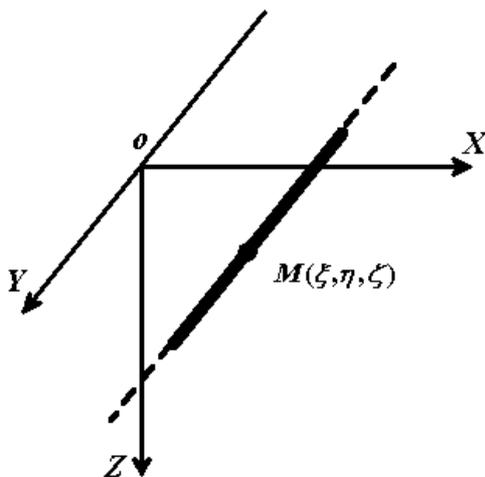
Произведя дальнейшее дифференцирование можно получить выражения для вторых частных производных  $V_{xx}, V_{yy}, V_{zz}, V_{xy}, V_{xz}, V_{yz}$ . Проанализировав полученные выражения, можно, в частности, убедиться в том, что

$$V_{xy} = V_{yx}, \quad V_{xz} = V_{zx}, \quad V_{zy} = V_{yz}.$$

3. В практике гравиразведки особое значение имеет возможность вычисления производной  $V_z$ , поскольку при направлении координатной

оси  $oZ$  вниз по направлению вектора силы тяжести, эта производная характеризует аномальное поле  $\Delta g$ , создаваемое изучаемым объектом. Здесь мы уже приходим к понятию модельности, а именно, мы считаем, что в пределах исследуемой области, вектор силы тяжести направлен вертикально вниз и не меняет своего направления. В то же время, при решении региональных задач, когда исследуемая площадь такова, что необходимо учитывать кривизну Земли, аномальное поле, создаваемое объектом, следует рассчитывать как проекцию на внутреннюю нормаль к референс-эллипсоиду (эллипсоиду, аппроксимирующему фигуру Земли). Здесь также возможно упрощение, которое состоит в том, что фигуру Земли можно представить в виде сферы, и рассчитывать проекцию силы притяжения, создаваемой объектом, на радиус Земли, считая, что вектор силы тяжести направлен по нему.

4. Еще одно упрощение модели – переход от трехмерных объектов к двумерным. Понятие двумерности предполагает, что объект вытянут вдоль одной из осей на бесконечность, и его свойства вдоль этой оси не меняются. Хотя в природе таких объектов и не существует, тем не менее, такая модель оказывается очень удобной при рассмотрении вытянутых объектов, поперечные размеры которых в несколько раз меньше их продольных.



Получим выражение компонент аномального поля притяжения бесконечной материальной линии, вытянутой вдоль оси  $oY$ . Это выражение можно получить путем интегрирования поля точечного источника массой  $dm$ . Предполагая, что материальная линия имеет постоянную линейную плотность  $\delta_l$ , элемент массы этой линии можно представить в виде  $dm = \delta_l d\eta$ . Тогда для точки  $M$  с координатами  $(x, y, z)$  можем записать

$$V_z(x, y, z) = G\delta_l \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta - z}{\left[ (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\eta =$$

$$= G\delta_l (\zeta - z) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left[ (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d(\eta - y).$$

Возьмем этот интеграл с помощью замены переменных. Для этого введем обозначения:  $a^2 = (\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2$ ,  $\eta - y = a \operatorname{tg} \varphi$ . При такой замене

пределы интегрирования будут изменяться от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $\frac{\pi}{2}$ , и

$$d(\eta - y) = a \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi :$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2 + (\eta - y)^2)^{\frac{3}{2}}} d(\eta - y) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(a^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} a \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^3 (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} a \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2 \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} \right)^{\frac{3}{2}}} \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{a^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = \frac{1}{a^2} (\sin \varphi) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{a^2} = \frac{2}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} . \end{aligned}$$

Обратим внимание, что полученное выражение не зависит от значения  $y$ . С учетом этого окончательно для  $V_z$  можем записать:

$$V_z(x, z) = 2G\delta_l \frac{\zeta - z}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} .$$

Для компоненты  $V_x$  справедлива следующая запись:

$$V_x(x, z) = 2G\delta_l \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} .$$

Полученные выражения являются первыми частными производными от функции

$$V(x, z) = -G\delta_l \ln [(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2] = -2G\sigma_l \ln r_{MM_0} ,$$

где  $r_{MM_0} = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2}$  – расстояние между координатой точки  $M(\xi, \zeta)$ , в которой расположена бесконечная материальная линия, и точкой наблюдения  $M_0(x, z)$ . Полученная функция – потенциал бесконечной материальной линии, и она носит название логарифмического потенциала. В отличие от потенциала точечного источника, потенциал бесконечной линии при удалении от нее возрастает. Такая ситуация физически не возможна, но и бесконечной материальной линии в природе также не существует, это – математическая модель.

Можно записать выражения для потенциала и компонент поля силы притяжения, создаваемой двухмерной областью  $D$ :

$$V(M_0) = -2G \int_D \delta(M) \ln r_{MM_0} dS = -G \int_D \delta(\xi, \zeta) \ln [(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2] d\xi d\zeta,$$

$$V_x(x, z) = 2G \int_D \delta(\xi, \zeta) \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi d\zeta,$$

$$V_z(x, z) = 2G \int_D \delta(\xi, \zeta) \frac{\zeta - z}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi d\zeta.$$

В этих выражения  $\delta$  – объемная плотность источников, зависящая только от двух координат.

Как и в случае трехмерной задачи, можно показать, что вторые частные производные удовлетворяют условию  $V_{xz} = V_{zx}$ . Кроме того, поскольку потенциал и его производные не зависят от координаты  $y$ , то уравнение Лапласа для таких моделей будет следующим:

$$V_{xx} + V_{zz} = 0.$$

Следовательно, в области, свободной от источников, для двухмерной модели  $V_{xx} = -V_{zz}$ .

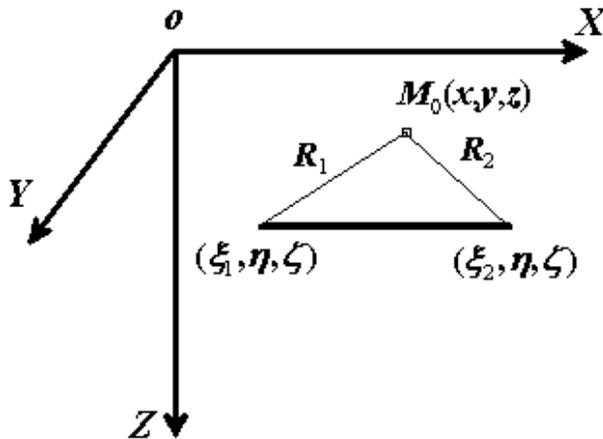
5. В практике гравirazведки и магниторазведки иногда используют понятие 2,5–мерных моделей. Такие модели предполагают, что они вытянуты вдоль оси  $OY$  на одинаковое расстояние от начало координат, и их свойства зависят только от координат  $x$  и  $z$ . По сути дела такие модели являются частным случаем трехмерных моделей, и по этой причине в дальнейшем мы их рассматривать не будем.

6. Рассмотрим самые элементарные модели, используемые при аппроксимации реальных геологических объектов, и поля создаваемые ими. В ряде случаев для нас будет представлять интерес не только выражения для компонент поля силы притяжения, создаваемые такими телами, но и выражения для потенциала, поскольку, получив его аналитическое выражение всегда можно вычислить его частные производные.

– Сфера радиусом  $R$  с постоянной плотностью  $\delta$ . В общем курсе гравirazведки показывалось, что поле такой сферы совпадает с полем точечного источника, расположенного в центре этой сферы, и с массой  $m$ , равной ее массе:

$$V(M_0) = V(x, y, z) = G \frac{m}{r_{MM_0}} = G \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \delta \right) \frac{1}{\left[ (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}.$$

Первые частные производные потенциала такой модели также совпадают с частными производными потенциала точечного источника.



– Материальный стержень (материальная линия) с постоянной линейной плотностью  $\delta_l$ . Достаточно просто получить выражение потенциала для линии, расположенной вдоль одной из осей. Так, например, если стержень располагается по оси  $OX$ , и координаты его начала и конца –  $\xi_1$  и  $\xi_2$  соответственно, то выражение для потенциала будет получено

путем решения следующего интеграла:

$$V(M_0) = G \delta_l \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{\left[ (\xi - x)^2 + y^2 + z^2 \right]^{\frac{1}{2}}} d\xi = G \delta_l \ln \left[ (\xi - x) + \sqrt{(\xi - x)^2 + y^2 + z^2} \right]_{\xi_1}^{\xi_2}$$

Таким образом, для стержня, расположенного вдоль оси  $OX$ , можно записать:

$$V(M_0) = G \delta_l \ln \frac{(\xi_2 - x) + R_2}{(\xi_1 - x) + R_1},$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – расстояния от начала и конца отрезка до точки наблюдения  $M_0$ . Выражения для компонент силы тяжести легко получить, продифференцировав выражение для потенциала.

– Бесконечно тонкая многоугольная пластина с постоянной поверхностной плотностью  $\delta_n$ . Такая модель широко используется при аппроксимации трехмерных тел, и выражения для компонент силы тяжести, создаваемой такой пластиной основываются на решении следующих поверхностных интегралов:

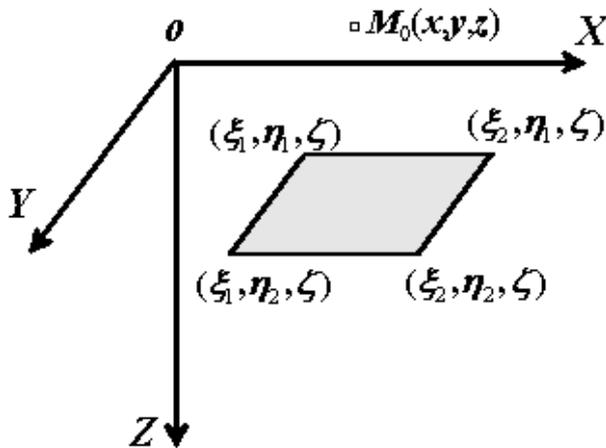
$$V(M_0) = G\delta_n \int_S \frac{1}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}} dS,$$

$$V_x(M_0) = G\delta_n \int_S \frac{(\xi - x)}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}} dS,$$

$$V_y(M_0) = G\delta_n \int_S \frac{(\eta - y)}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}} dS,$$

$$V_z(M_0) = G\delta_n \int_S \frac{(\zeta - z)}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}} dS,$$

где  $S$  – поверхность пластины.



Как и для случая материальной линии, достаточно просто получить аналитические выражения компонент силы притяжения для частного случая – прямоугольной пластины, расположенной параллельно одной из координатных поверхностей.

Получим эти выражения для горизонтальной прямоугольной пластины. Пусть  $\xi_1, \xi_2$  – координаты этой пластины по оси

$OX, \eta_1, \eta_2$  – координаты по оси  $OY, \zeta$  – глубина ее залегания. Тогда, для компоненты  $V_z$ :

$$V_z(M_0) = G\delta_n (\zeta - z) \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta.$$

Интеграл  $\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{1}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}} d\eta$  нами уже брался при выводе

выражения поля бесконечной материальной линии, правда, в бесконечных пределах. Не повторяя выкладок, запишем

$$\int \frac{1}{(a^2 + (\eta - y)^2)^{\frac{3}{2}}} d(\eta - y) = \frac{1}{a^2} (\sin \varphi) + C,$$

$C$  – некоторая константа. С учетом того, что  $a^2 = (\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2$ ,  $\eta - y = a \operatorname{tg} \varphi$ , преобразуем полученный результат:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} (\sin \varphi) &= \frac{1}{a^2} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{a^2} \frac{\frac{(\eta - y)}{a}}{\sqrt{1 + \frac{(\eta - y)^2}{a^2}}} = \frac{1}{a^2} \frac{(\eta - y)}{\sqrt{a^2 + (\eta - y)^2}} = \\ &= \frac{1}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} \frac{(\eta - y)}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, выражение для  $V_z$  приобретет вид:

$$V_z(M_0) = G \delta_n (\zeta - z) \left[ (\eta - y) \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} \cdot \frac{1}{r_{MM_0}} d\xi \right]_{\eta_1}^{\eta_2}.$$

Для того чтобы получить окончательное выражение для функции  $V_z$ , рассмотрим следующий интеграл:

$$\int \frac{1}{X^2 + A^2} \frac{1}{\sqrt{X^2 + A^2 + B^2}} dX,$$

где  $A$  и  $B$  – постоянные величины. Введя обозначение  $A^2 + B^2 = C^2$ , последний интеграл можно представить в виде:

$$\int \frac{1}{X^2 + C^2 - B^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{X^2 + C^2}} dX.$$

Вновь воспользуемся подстановкой  $X = C \operatorname{tg} \varphi$ . Тогда  $dX = C \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi$ , и можно осуществить следующие преобразования:

$$\int \frac{1}{C^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + C^2 - B^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{C^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + C^2}} \cdot \frac{C}{\cos^2 \varphi} d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{\cos^2 \varphi}{C^2 - B^2 \cos^2 \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{C} \cdot \frac{C}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \int \frac{\cos \varphi d\varphi}{C^2 - B^2 \cos^2 \varphi} = \\
&= \int \frac{d \sin \varphi}{C^2 - B^2 (1 - \sin^2 \varphi)} = \int \frac{d \sin \varphi}{(A^2 + B^2) - B^2 + B^2 \sin^2 \varphi} = \int \frac{d \sin \varphi}{A^2 + B^2 \sin^2 \varphi} = \\
&= \frac{1}{A^2} \int \frac{d \sin \varphi}{1 + \left(\frac{B}{A} \sin \varphi\right)^2} = \frac{1}{A^2} \frac{A}{B} \int \frac{d\left(\frac{B}{A} \sin \varphi\right)}{1 + \left(\frac{B}{A} \sin \varphi\right)^2} = \frac{1}{AB} \operatorname{arctg} \left(\frac{B}{A} \sin \varphi\right) = \\
&= \frac{1}{AB} \operatorname{arctg} \left(\frac{B}{A} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}\right) = \frac{1}{AB} \operatorname{arctg} \frac{B}{A} \frac{\frac{X}{C}}{\sqrt{1 + \frac{X^2}{C^2}}} = \frac{1}{AB} \operatorname{arctg} \frac{B}{A} \frac{X}{\sqrt{X^2 + C^2}}.
\end{aligned}$$

Положив в этой формуле  $A = \zeta - z$ ,  $B = \eta - y$ , окончательно получим:

$$\begin{aligned}
V_z(M_0) &= G\delta_n(\zeta - z) \left[ (\eta - y) \left\{ \frac{1}{(\zeta - z)(\eta - y)} \operatorname{arctg} \frac{(\eta - y)(\xi - x)}{(\zeta - z) r_{MM_0}} \right\} \right]_{\xi_1, \eta_1}^{\xi_2, \eta_2} = \\
&= G\sigma_n \left[ \operatorname{arctg} \frac{(\xi - x)(\eta - y)}{(\zeta - z) \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}} \right]_{\xi_1, \eta_1}^{\xi_2, \eta_2}.
\end{aligned}$$

Выведем теперь выражение для горизонтальной компоненты поля, например, для  $V_x$ . Эта компонента будет определяться следующим интегралом:

$$V_x(M_0) = G\delta_n \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{(\xi - x)}{\left[ (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} d\xi d\eta.$$

Взяв интеграл по переменной  $\eta$ , получим

$$V_x(M_0) = G\delta_n \left[ (\eta - y) \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{(\xi - x)}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}} d\xi \right]_{\eta_1}^{\eta_2}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int \frac{X}{X^2 + A^2} \frac{1}{\sqrt{X^2 + A^2 + B^2}} dX$$

и вновь воспользуемся подстановкой  $A^2 + B^2 = C^2$ ,  $X = C \operatorname{tg} \varphi$ . Тогда этот интеграл можно представить, а затем и преобразовать следующим образом:

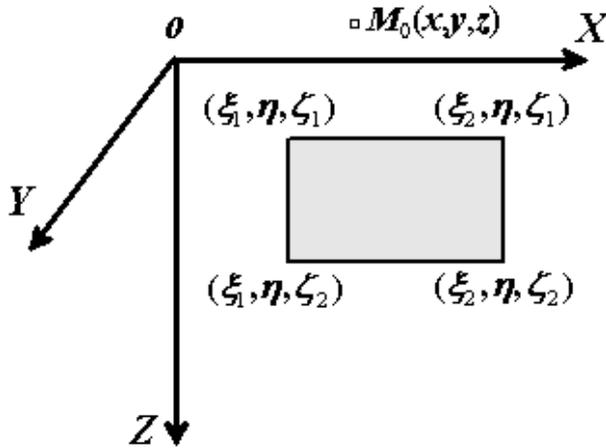
$$\begin{aligned} & \int \frac{X}{X^2 + C^2 - B^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{X^2 + C^2}} dX = \\ & = \int \frac{C \operatorname{tg} \varphi}{C^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + C^2 - B^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{C^2 \operatorname{tg}^2 \varphi + C^2}} \cdot \frac{C}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \\ & = \int \frac{C \operatorname{tg} \varphi \cos^2 \varphi}{C^2 - B^2 \cos^2 \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{C} \cdot \frac{C}{\cos^2 \varphi} d\varphi = \int \frac{C \sin \varphi d\varphi}{C^2 - B^2 \cos^2 \varphi} = \\ & = -C \int \frac{d \cos \varphi}{C^2 - B^2 \cos^2 \varphi} = -\frac{C}{B^2} \int \frac{d \cos \varphi}{\left(\frac{C}{B}\right)^2 - \cos^2 \varphi} = -\frac{C}{B^2} \cdot \frac{1}{2\left(\frac{C}{B}\right)} \ln \left| \frac{\frac{C}{B} + \cos \varphi}{\frac{C}{B} - \cos \varphi} \right| = \\ & = -\frac{1}{2B} \ln \left| \frac{C + B \cos \varphi}{C - B \cos \varphi} \right| = -\frac{1}{2B} \ln \left| \frac{C + B \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}}{C - B \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}} \right| = -\frac{1}{2B} \ln \left| \frac{C \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} + B}{C \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} - B} \right| = \\ & = -\frac{1}{2B} \ln \left| \frac{C \sqrt{1 + \left(\frac{X}{C}\right)^2} + B}{C \sqrt{1 + \left(\frac{X}{C}\right)^2} - B} \right| = -\frac{1}{2B} \ln \left| \frac{\sqrt{X^2 + C^2} + B}{\sqrt{X^2 + C^2} - B} \right| = \frac{1}{2B} \ln \left| \frac{\sqrt{X^2 + C^2} - B}{\sqrt{X^2 + C^2} + B} \right| = \\ & = \frac{1}{2(\eta - y)} \ln \left| \frac{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2} - (\eta - y)}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2} + (\eta - y)} \right| \end{aligned}$$

Окончательно:

$$V_x(M_0) = G\delta_n \left[ (\eta - y) \frac{1}{2(\eta - y)} \ln \left| \frac{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2} - (\eta - y)}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2} + (\eta - y)} \right| \right]_{\xi_1, \eta_1}^{\xi_2, \eta_2} =$$

$$= G\delta_n \left[ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{r - (\eta - y)}{r + (\eta - y)} \right| \right]_{\xi_1, \eta_1}^{\xi_2, \eta_2},$$

где  $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$ . Компонента  $V_y$  может быть получена из последней формулы заменой переменных  $\xi$  и  $x$  на переменные  $\eta$  и  $y$ , а переменных  $\eta, y$  – на  $\xi$  и  $x$ .



– Вертикальная прямоугольная пластина, расположенная параллельно координатной плоскости  $OXZ$ . Для этого случая нет необходимости выводить заново выражения для компонент поля силы притяжения, поскольку они могут быть получены из выражений, полученных ранее для горизонтальной пластины. Так для вертикальной составляющей можем записать:

$$V_z(M_0) = V_z(x, y, z) = G\delta_n \left[ \frac{1}{2} \ln \left| \frac{r - (\xi - x)}{r + (\xi - x)} \right| \right]_{\xi_1, \zeta_1}^{\xi_2, \zeta_2}.$$

Тем не менее, выведем выражение для этой компоненты путем интегрирования и сравним полученные результаты. Для этого сначала получим выражение для  $V_z$  от вертикального стержня. Как уже отмечалось его можно получить путем дифференцирования выражения для потенциала такого стержня, которое в данном случае будет иметь вид:

$$V(M_0) = G\delta_n \ln[(\zeta - z) + r]_{\zeta_1}^{\zeta_2}.$$

Соответственно для вертикальной производной получим:

$$V_z(M_0) = G\delta_n \left( -\frac{1}{r} \right)_{\zeta_1}^{\zeta_2}.$$

Для того чтобы получить выражение для прямоугольной пластины проинтегрируем это выражение, при этом учтем, что  $\delta_n = \delta_n d\xi$ :

$$\begin{aligned} V_z(M_0) &= G\delta_n \left[ \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left( -\frac{1}{r} \right) d\xi \right]_{\zeta_1}^{\zeta_2} = -G\delta_n \left[ \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left( \frac{1}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}} \right) d\xi \right]_{\zeta_1}^{\zeta_2} = \\ &= -G\delta_n \ln \left[ (\xi-x) + \sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2} \right]_{\xi_1, \zeta_1}^{\xi_2, \zeta_2} = -G\delta_n \ln \left[ (\xi-x) + r \right]_{\xi_1, \zeta_1}^{\xi_2, \zeta_2} \end{aligned}$$

Из полученных результатов следует любопытный вывод. Оказывается одно и то же поле может быть аналитически выражено различным образом.

– Прямоугольная призма с постоянной плотностью  $\delta$ . Выражение компонент поля для этой модели можно получить из решения следующих объемных интегралов:

$$\begin{aligned} V(M_0) &= G\delta \int_D \frac{1}{\left[ (\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} dv, \\ V_x(M_0) &= G\delta \int_D \frac{(\xi-x)}{\left[ (\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} dv, \\ V_y(M_0) &= G\delta \int_D \frac{(\eta-y)}{\left[ (\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} dv, \\ V_z(M_0) &= G\delta \int_D \frac{(\zeta-z)}{\left[ (\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} dv, \end{aligned}$$

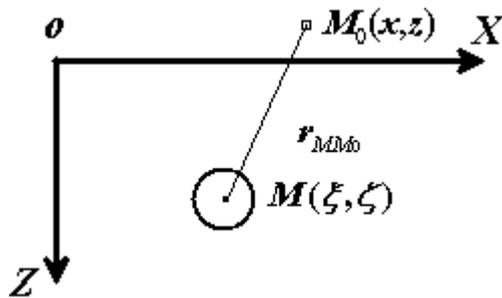
где  $D$  – объем призмы.

Как и для прямоугольной пластины, такие интегралы достаточно просто взять в случае, когда грани призмы параллельны координатным плоскостям. Так, выражение для компоненты  $V_z$ , создаваемой такой призмой, можно получить с помощью выражения для вертикальной прямоугольной пластины, проинтегрировав его по соответствующей переменной. Если пластина параллельна плоскости  $oXZ$ , то:

$$V_z(M_0) = -G\delta \left( \int_{\eta_1}^{\eta_2} \ln \left[ (\xi - x) + \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2} \right] d\eta \right)_{\xi_1, \zeta_1}^{\xi_2, \zeta_2}$$

Такой интеграл берется по частям, однако, вывод этих формул приводить здесь не будем, поскольку, что означают слова “достаточно просто” было наглядно продемонстрировано в предыдущих моделях. Отметим, выражение для  $V_z$  для прямоугольной призмы приведено в учебниках по гравразведке и в справочниках геофизика.

7. Перейдем к рассмотрению двумерных моделей.



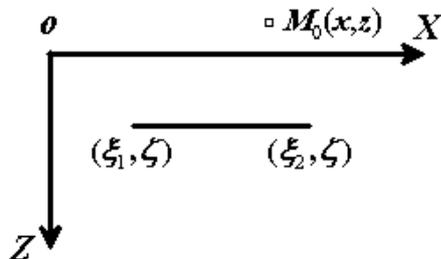
– Бесконечный круговой горизонтальный цилиндр. Как и в случае сферы можно показать, что поле такой модели совпадает с полем бесконечного прямолинейного горизонтального стержня, проходящего по центру цилиндра, с линейной плотностью  $\delta_n = \delta(\pi R^2)$ , где  $\delta$  – объемная плотность цилиндра,  $R$  – его радиус.

Выражение для потенциала будет иметь вид:

$$V(M_0) = V(x, z) = -G\delta_n \ln [(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2] = -2G\delta(\pi R^2) \ln r_{MM_0},$$

при этом центр цилиндра находится в точке  $M$  с координатами  $(\xi, \zeta)$ . Компоненты поля находятся как частные производные от потенциала.

– Бесконечная материальная полоса с постоянной поверхностной плотностью  $\delta_n$ . Здесь также не составляет труда получить аналитические выражения, как для потенциала, так и для его частных производных, в случае, когда эта полоса лежит горизонтально или вертикально.



Рассмотрим случай горизонтальной полосы. Координаты, определяющие ее положение в декартовой системе координат  $(\xi_1, \xi_2, \zeta)$ . Вначале получим выражение для потенциала силы притяжения:

$$V(M_0) = V(x, z) = -G\delta_n \int_{\xi_1}^{\xi_2} \ln [(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2] d\xi =$$

$$= -G\delta_n \int_{\xi_1}^{\xi_2} \ln [(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2] d(\xi - x).$$

Введем обозначения  $X^2 = (\xi - x)^2$ ,  $A^2 = (\zeta - z)^2$ , и возьмем следующий интеграл:

$$\begin{aligned}
 \int \ln(X^2 + A^2) dX &= X \ln(X^2 + A^2) - \int X d \ln(X^2 + A^2) = \\
 &= X \ln(X^2 + A^2) - \int X \frac{1}{X^2 + A^2} 2X dX = X \ln(X^2 + A^2) - 2 \int \frac{X^2}{X^2 + A^2} dX = \\
 &= X \ln(X^2 + A^2) - 2 \int \frac{X^2 + A^2 - A^2}{X^2 + A^2} dX = \\
 &= X \ln(X^2 + A^2) - 2 \int dX + 2 \int \frac{A^2}{X^2 + A^2} dX = \\
 &= X \ln(X^2 + A^2) - 2X + 2 \frac{A^2}{A} \operatorname{arctg} \frac{X}{A}.
 \end{aligned}$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, запишем выражение для потенциала:

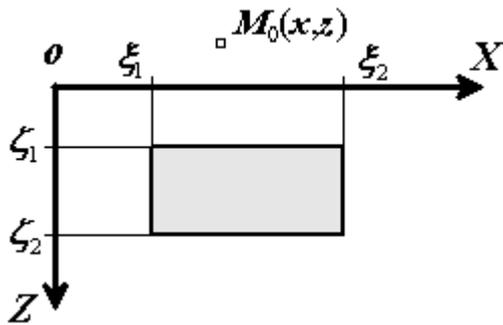
$$V(M_0) = -G\delta_n \left[ (\xi - x) \ln((\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2) - 2(\xi - x) + 2(\zeta - z) \operatorname{arctg} \frac{(\xi - x)}{(\zeta - z)} \right]_{\xi_1}^{\xi_2}$$

Получим теперь, также с помощью интегрирования, выражения для горизонтальной и вертикальной компонент поля.

$$\begin{aligned}
 V_x(M_0) &= V_x(x, z) = 2G\delta_n \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{(\xi - x)}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi = \\
 &= 2G\delta_n \frac{1}{2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d(\xi - x)^2}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} = G\delta_n \ln((\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2) \Big|_{\xi_1}^{\xi_2}, \\
 V_z(M_0) &= V_z(x, z) = 2G\delta_n \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{(\zeta - z)}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi = \\
 &= 2G\delta_n (\zeta - z) \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{d(\xi - x)}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} = 2G\delta_n (\zeta - z) \frac{1}{(\zeta - z)} \operatorname{arctg} \frac{(\xi - x)}{(\zeta - z)} \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} = \\
 &= 2G\delta_n \operatorname{arctg} \frac{(\xi - x)}{(\zeta - z)} \Big|_{\xi_1}^{\xi_2}.
 \end{aligned}$$

Для случая вертикального положения полосы, заново выводить уравнения нет смысла, поскольку они могут быть получены путем замены

в выражениях переменных по оси  $oX$  на переменные по оси  $oZ$ , а переменные по оси  $oZ$  – на переменные по оси  $oX$ .



– Прямоугольный параллелепипед с бесконечным простираем по оси  $oY$ . Получим выражение только для вертикальной составляющей поля путем интегрирования эффекта поля, создаваемого пластиной. Например, если рассмотреть вертикальную пластину, то:

$$\begin{aligned}
 V_z(x, z) &= 2G\delta \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \arctg \frac{(\xi - x)}{(\zeta - z)} d\zeta \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} = \\
 &= 2G\delta \left( (\zeta - z) \arctg \frac{(\xi - x)}{(\zeta - z)} \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} - \int_{\xi_1}^{\xi_2} (\zeta - z) d \arctg \frac{(\xi - x)}{(\zeta - z)} \right) \Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2} = \\
 &= 2G\delta \left( (\zeta - z) \arctg \frac{(\xi - x)}{(\zeta - z)} \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} - \int_{\xi_1}^{\xi_2} (\zeta - z) \frac{1}{1 + \left( \frac{(\xi - x)}{(\zeta - z)} \right)^2} \frac{-(\xi - x)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right) \Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2} = \\
 &= 2G\delta \left( (\zeta - z) \arctg \frac{(\xi - x)}{(\zeta - z)} \Big|_{\xi_1}^{\xi_2} - \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{-(\zeta - z)(\xi - x)}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\zeta \right) \Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2} = \\
 &= 2G\delta \left( (\zeta - z) \arctg \frac{(\xi - x)}{(\zeta - z)} + \frac{1}{2} (\xi - x) \ln \left( (\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2 \right) \right) \Big|_{\xi_1 \zeta_1}^{\xi_2 \zeta_2}.
 \end{aligned}$$

8. Подведем некоторый итог проведенным выкладкам. Во-первых, взять интеграл – не всегда простая задача. Это становится еще более сложно, если объект имеет неправильную форму и функциональный закон изменения плотности. В учебниках по гравirazведке и справочниках геофизика можно найти явные выражения для компонент поля силы тяжести от более сложных моделей, чем были нами рассмотрены. Формулы, приведенные в этих книгах, громоздки и сложны. Во-вторых, оказывается, что одно и то же поле может быть представлено различными аналитическими выражениями, как это было в случае четырехугольной пластины. От того, какое выражение использовать при решении прямой задачи, во многом будет определяться успех ее решения.

В то же время современные требования к гравиразведке таковы, что они требуют рассмотрения все более сложных моделей. К числу таких моделей могут относиться тела сложной формы и с заданным законом распределения плотности.

Конечно, при решении интегралов следует пользоваться таблицами интегралов, в которых рассмотрено множество различных подынтегральных выражений, в число которых входят и выражения, описывающие гравитационный потенциал тел. Кроме того, в настоящее время существуют мощные математические вычислительные системы, такие, как MATCAD или MATLAB, которые позволяют аналитически взять интеграл практически от любой функции, не задумываясь над тем как это делается. Однако, как уже отмечалось, получаемые частные выражения таких интегралов не всегда могут оказаться оптимальными с вычислительной точки зрения. Этот вопрос будет рассмотрен нами в дальнейшем.

### ***Литература.***

1. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука. 1981. 720 с.
2. *Голыздра Г.Я.* Основные методы решения прямой задачи гравиразведки на ЭВМ. – Обзор ОНТИ ВИЭМС. Сер. Регион., развед. и промысл. геофиз. М. 1977. 99с.
3. Гравиразведка. Справочник геофизика. – М.: Недра. 1990. 607 с.
4. *Маловичко А.К., Костицын В.И.* Гравиразведка. – М.: Недра. 1992. 357 с.
5. *Миронов В.С.* Курс гравиразведки. – Л.: Недра. 1980. 543 с.
6. *Старостенко В.И.* Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. – К. Наукова думка. 1978. 288 с.

---

### ***Лекция 3. Основные интегральные соотношения и поля элементарных источников (магнитное поле).***

Аналогично тому, как в предыдущей лекции нами были рассмотрены основные соотношения, которым удовлетворяет гравитационное поле, рассмотрим с этих же позиций и магнитное поле, создаваемое элементарными моделями.

#### **Магнитное поле.**

1. Вспомним основные соотношения, которым удовлетворяет магнитное поле. Но перед этим надо договориться о системе единиц, которая будут использоваться. В настоящее время такой системой является система СИ. Этой системой мы и будем пользоваться.

Как известно магнитное поле может быть охарактеризовано вектором напряженности  $\vec{H}$  и вектором индукции  $\vec{B}$ . В системе СИ связь между этими параметрами в веществе следующая –

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{I},$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная проницаемость вакуума,  $\vec{I}$  – намагниченность вещества. Для воздуха, где и происходят измерения магнитного поля, это соотношение можно переписать в виде

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H},$$

поскольку намагниченность воздуха практически равна нулю. Поле  $\vec{B}$  имеет размерность Тесла (Т), поле  $\vec{H}$  – Ампер/метр (А/м). Такую же размерность, как и напряженность, имеет намагниченность  $\vec{I}$  – (А/м).

Основной характеристикой магнитного поля является индукция, для которой справедливо

$$\text{div} \vec{B} = 0.$$

Это уравнение характеризует тот факт, что поле  $\vec{B}$  не имеет источников. Действительно, в природе не обнаружено магнитных зарядов, а само магнитное поле возникает и существует за счет движения электрических зарядов (если детально не рассматривать магнитные свойства атомов и элементарных частиц).

Напряженность магнитного поля удовлетворяет уравнению

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

где  $\vec{j}$  – плотность электрического тока,  $\vec{D}$  – вектор электрической индукции. Поскольку измерения магнитного поля всегда происходят в воздухе, в котором отсутствуют электрические токи, и нами рассматривается стационарное магнитное поле, то это уравнение приобретает вид:

$$\text{rot} \vec{H} = 0.$$

С учетом соотношения  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , как для поля  $\vec{B}$ , так и для поля  $\vec{H}$  можно записать:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad \left. \begin{aligned} \operatorname{div} \vec{H} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

Полученные соотношения говорят о том, что магнитное поле, как и гравитационное, вне источников удовлетворяет уравнению Лапласа, и оно может быть представлено как градиент некоторой скалярной функции  $U$  или как ротор векторной функции  $\vec{A}$ , например:

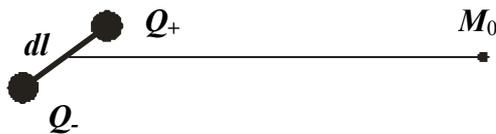
$$\vec{H} = -\operatorname{grad} U, \quad \vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}.$$

Функция  $U$  носит название скалярного потенциала магнитного поля,  $\vec{A}$  – векторного потенциала магнитного поля.

2. Как уже отмечалось, в природе не существует магнитных зарядов, но, тем не менее, атомы всех веществ обладают магнитными свойствами, в частности, магнитным моментом  $\vec{m}$ . Источник поля, обладающий магнитным моментом, может быть представлен в виде диполя, т.е. в виде двух одинаковых по величине, но различных по знаку, зарядов  $Q$ , расположенных на очень близком расстоянии друг к другу  $d\vec{l}$ . Элемент  $d\vec{l}$  имеет направление от отрицательного заряда к положительному. Тогда магнитный момент определяется соотношением:

$$\vec{m} = Q \cdot d\vec{l}.$$

Такая интерпретация магнитного момента позволяет говорить о фиктивных магнитных зарядах, создающих магнитное поле.



Получим выражение для скалярного потенциала диполя  $U$  в точке  $M_0$ . Это выражение можно получить, если этот потенциал представить как сумму потенциалов двух точечных зарядов  $u^+(M_0)$  и  $u^-(M_0)$  полагая, что эти заряды располагаются в точках  $M_+$  (положительный заряд) и  $M_-$  (отрицательный заряд):

$$U(M_0) = u^+(M_0) + u^-(M_0) = \frac{Q}{4\pi} \left( \frac{1}{r_{M_+M_0}} - \frac{1}{r_{M_-M_0}} \right).$$

С учетом того, что для дифференциала скалярной функции  $U$  справедливо соотношение  $dU = \frac{\partial U}{\partial l} dl$ , можем записать:

$$\begin{aligned}
U(M_0) &= \frac{Q}{4\pi} \frac{\partial^M}{\partial l} \left( \frac{1}{r_{MM_0}} \right) dl = \frac{Q}{4\pi} \mathit{grad}^M \frac{1}{r_{MM_0}} \cdot d\vec{l} = \\
&= -\frac{Q}{4\pi} \mathit{grad}^{M_0} \frac{1}{r_{MM_0}} \cdot d\vec{l} = -\frac{\vec{m}}{4\pi} \cdot \mathit{grad}^{M_0} \frac{1}{r_{MM_0}},
\end{aligned}$$

где  $M$  – координата положения центра диполя.

Можно показать, что векторный потенциал для напряженности магнитного поля, создаваемого диполем, будет иметь вид:

$$\vec{A} = -\frac{1}{4\pi} \vec{m} \times \mathit{grad}^{M_0} \frac{1}{r_{MM_0}}.$$

Однако при решении прямых задач применение скалярного потенциала оказывается более удобным по сравнению с векторным потенциалом. Поэтому в дальнейшем при выводе аналитических выражений для элементов магнитного поля нами будет использоваться скалярный потенциал.

3. Основываясь на выражении потенциала дипольного источника, можно записать выражение для потенциала объемного источника с намагниченностью  $\vec{I}$ :

$$U(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_D \vec{I}(M) \cdot \mathit{grad}^{M_0} \frac{1}{r_{MM_0}} dv = \frac{1}{4\pi} \int_D \vec{I}(M) \cdot \mathit{grad}^M \frac{1}{r_{MM_0}} dv,$$

где  $D$  – область пространства с заданной намагниченностью,  $M$  – точка, принадлежащая этой области.

4. Рассмотрим одно важное соотношение, которое активно используется при выводе аналитических выражений для элементов магнитного поля. Это соотношение носит название соотношения Пуассона и устанавливает связь между потенциалами полей дипольного и точечного источников:

$$U(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \vec{m} \cdot \mathit{grad} \frac{1}{r_{MM_0}} = -\frac{m}{4\pi} \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{r_{MM_0}} \right) = -\frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{4\pi} \frac{m}{r_{MM_0}} \right) = -\frac{\partial}{\partial l} U^T(M_0)$$

Если рассмотреть область  $D$  и предположить, что в этой области намагниченность постоянна как по величине, так и по направлению, и что

в этой же области распределены массы с плотностью  $\delta$ , то для скалярного магнитного и гравитационного потенциалов можно записать:

$$U(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_D \vec{I} \cdot \text{grad}^{M_0} \frac{1}{r_{MM_0}} dv, \quad V(M_0) = G\delta \int_D \frac{1}{r_{MM_0}} dv,$$

и произвести следующие преобразования:

$$\begin{aligned} U(M_0) &= -\frac{1}{4\pi} \int_D \vec{I} \cdot \text{grad}^{M_0} \frac{1}{r_{MM_0}} dv = -\frac{\vec{I}}{4\pi} \cdot \text{grad}^{M_0} \int_D \frac{1}{r_{MM_0}} dv = \\ &= -\frac{1}{4\pi G\delta} (\vec{I} \cdot \text{grad} V(M_0)). \end{aligned}$$

Полученное соотношение носит название соотношения Пуассона о связи гравитационного и магнитного потенциалов. Отметим еще раз, что оно получено в предположении, что область  $D$  имеет постоянную намагниченность и плотность.

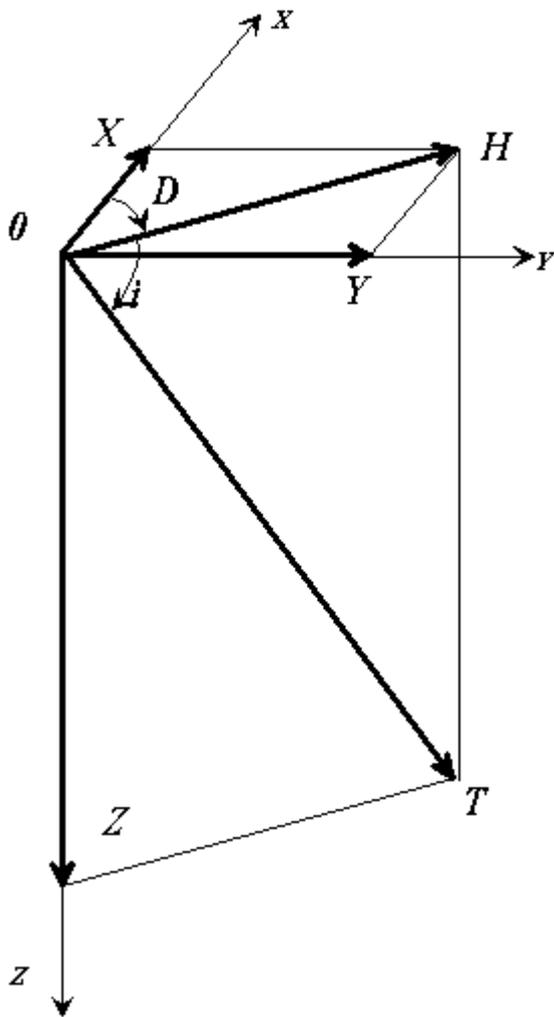
На основе этого соотношения можно записать выражение для напряженности магнитного поля области с постоянной намагниченностью:

$$\vec{H}(M_0) = -\text{grad}U(M_0) = \frac{1}{4\pi} (\vec{I} \cdot \text{grad}) \text{grad}^{M_0} \int_D \frac{1}{r_{MM_0}} dv.$$

В общем случае, когда намагниченность в заданной области не является постоянной, поле  $\vec{H}$  будет определяться следующим соотношением:

$$\vec{H}(M_0) = -\text{grad}U(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_D (\vec{I}(M) \cdot \text{grad}^{M_0}) \text{grad}^{M_0} \frac{1}{r_{MM_0}} dv.$$

4. Введем декартову систему координат. В магниторазведке принято ось  $OX$  этой системы направлять на географический север, ось  $OY$  – на восток, ось  $OZ$  – вертикально вниз. Тогда направление вектора магнитного поля будет определяться его склонением  $D$  и наклонением  $i$ . Вектор магнитного поля обычно обозначают  $\vec{T}$ , при этом под его величиной могут понимать как напряженность магнитного поля, так и его индукцию. Поскольку основной характеристикой магнитного поля является индукция, то в дальнейшем, говоря о магнитном поле, мы также будем говорить о нем, как о поле индукции.



Вектор  $\vec{T}$  можно разложить на составляющие по координатным осям, которые будут иметь обозначения –  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  соответственно. Горизонтальная компонента имеет обозначение  $H$ . В дальнейшем мы не будем специально рассматривать горизонтальную компоненту аномального магнитного поля, поэтому и различия в обозначениях не должно возникнуть.

Аналогично тому, как направление вектора магнитного поля может быть определено с помощью его склонения и наклонения, так и направление вектора намагниченности  $\vec{I}$  также может быть определено через склонение и наклонение.

5. Остановимся на вопросе, какие параметры магнитного поля измеряются. Соответственно, умение вычислять эти параметры и будут представлять интерес для нас интерес в первую очередь.

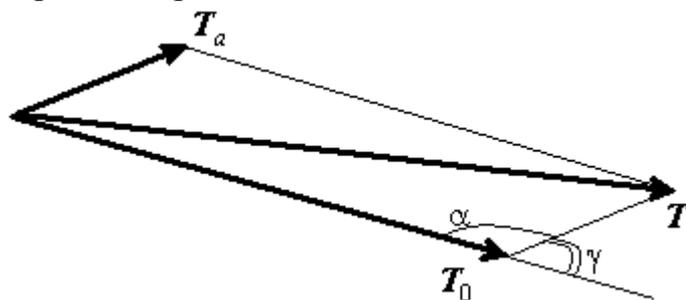
Прежде всего, надо заметить, что в отличие от гравиразведки, где основная измеряемая величина – вертикальная составляющая гравитационного поля, в магнитометрии умеют измерять все элементы магнитного поля. Кроме того, в настоящее время при проведении магнитных съемок используются магнитометры, измеряющие абсолютное значение магнитного поля. По результатам измерений с такими магнитометрами вычисляется поле  $\Delta T$ , которое определяется как разность абсолютных значений наблюдаемого магнитного поля  $T$  и нормального магнитного поля  $T_0$ :

$$\Delta T = |\vec{T}| - |\vec{T}_0|.$$

Поле  $T$  является суммой векторов нормального магнитного поля  $T_0$  и аномального магнитного поля  $T_a$ . Таким образом, поле  $T$  будет иметь величину

$$T = \sqrt{(T_{0x} + X)^2 + (T_{0y} + Y)^2 + (T_{0z} + Z)^2},$$

где  $X, Y, Z$  – компоненты аномального магнитного поля. Параметры нормального магнитного поля обычно вычисляются по первым 8 – 12 коэффициентам представления магнитного поля Земли по сферическим гармоникам. Модель, описывающая такое поле, носит название международного геомагнитного поля (International Geomagnetic Reference Field – IGRF), и все необходимые данные и программы для расчета элементов этого поля находятся в свободном доступе и их можно получить через Интернет.



Функция  $\Delta T$  не удовлетворяет уравнению Лапласа, т.е. она – не аналитическая, и имеет свои специфические свойства. Однако, тем не менее, эта функция успешно используется в

магнитометрии, и связано это с тем, что при небольших допущениях, ее можно аппроксимировать аналитической функцией. Покажем, каким образом это можно сделать. Для этого рассмотрим расположение векторов полного вектора магнитного поля  $\vec{T}$ , вектора нормального поля  $\vec{T}_0$  и вектора аномального магнитного поля  $\vec{T}_a$ . Из теоремы косинусов следует, что

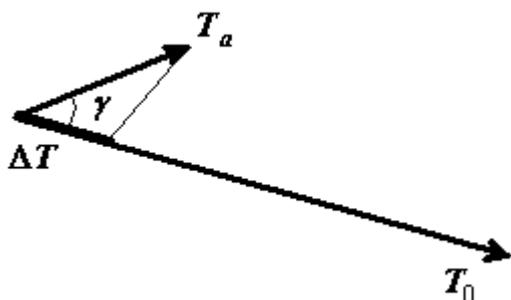
$$T^2 = T_0^2 + T_a^2 - 2T_0T_a \cos \alpha = T_0^2 + T_a^2 + 2T_0T_a \cos \gamma,$$

где  $\gamma$  - угол между векторами нормального и аномального магнитных полей. Далее можем сделать следующие преобразования:

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{T_0^2 + T_a^2 + 2T_0T_a \cos \gamma} = \sqrt{T_0^2 \left(1 + \frac{T_a^2}{T_0^2} + 2\frac{T_a}{T_0} \cos \gamma\right)} = \\ &= T_0 \sqrt{1 + \frac{T_a^2}{T_0^2} + 2\frac{T_a}{T_0} \cos \gamma}. \end{aligned}$$

С учетом того, что значение нормального поля  $T_0$  много больше значения  $T_a$ , то  $\frac{T_a}{T_0}$  много меньше единицы. Тогда, разложив радикал в ряд и пренебрегая членами высокого порядка, получим:

$$T = T_0 \left(1 + \frac{1}{2} \left(2\frac{T_a}{T_0} \cos \gamma + \frac{T_a^2}{T_0^2}\right) - \dots\right) \approx T_0 + T_a \cos \gamma.$$



В то же время  $T=T_0+\Delta T$ , и, соответственно,  $\Delta T = T_a \cos \gamma$ . Таким образом, для слабых аномальных полей величину  $\Delta T$  можно считать проекцией аномального поля на направление нормального поля:

$$\Delta T = \vec{T}_a \cdot \vec{1t}_0 = -\text{grad}U \cdot \vec{1t}_0 = -\frac{\partial U}{\partial \alpha_0}.$$

где орт  $\vec{1t}_0$  характеризует направление нормального поля  $T_0$ ,  $U$  – потенциал аномального магнитного поля.

Такое представление поля активно используется при создании алгоритмов трансформаций и решения обратных задач магниторазведки. В то же время не надо забывать о том, что, представляя поле  $\Delta T$  как проекцию вектора  $\vec{T}_a$  на вектор нормального поля, нами допускается ошибка. И эта ошибка будет тем больше, чем выше значение аномального поля.

6. Как и в гравиразведке, в магниторазведке широко используются двумерные модели. При рассмотрении двумерных тел вводится система координат, у которой ось  $oX$  направлена вкостростириания тела и совпадает с направлением расчетного профиля, ось  $oZ$  – вниз. В этой системе координат аномальное магнитное поле не будет зависеть от координаты  $y$ , и, следовательно, компонента аномального поля  $X$  будет совпадать с горизонтальной составляющей аномального магнитного поля.

Для вычисления поля  $\Delta T$  в этом случае, необходимо компоненту поля  $X$  разложить на северную и восточную составляющие. Для вычисления этих компонент следует задаться азимутом профиля  $A$ , т.е. задать угол между направлением на географический север и направлением расчетного профиля.

Таким образом, если при рассмотрении поля силы тяжести пространственное положение профиля не имеет значения, то при рассмотрении аномальных магнитных полей их вид будет зависеть от азимута профиля.

7. Как уже отмечалось, при интерпретации как гравитационных, так и магнитных аномальных полей используется принцип модельности. Этот принцип заключается в том, что реальное геологическое тело может быть представлено в виде суммы простых (элементарных) тел. Еще одно допущение состоит в том, что намагниченность тела имеет постоянную величину, т.е. постоянное значение и направление. В этом случае для решения прямой задачи магниторазведки возможно воспользоваться

соотношением Пуассона о связи гравитационного и магнитного потенциала. С учетом того, что под магнитным полем мы понимаем индукцию, это выражение приобретет вид:

$$U(M_0) = -\mu_0 \frac{1}{4\pi G\delta} (\vec{I} \cdot \text{grad}V(M_0)).$$

Для того, чтобы в дальнейшем при выводе формул не писать коэффициент Пуассона  $\frac{1}{4\pi G\delta}$  представим потенциал  $V$  в виде:

$$V(M_0) = \int_D \frac{1}{r_{MM_0}} dv.$$

Это выражение с точностью до коэффициента  $G\delta$  совпадает с выражением для гравитационного потенциала. В этом случае соотношение Пуассона приобретет вид:

$$U(M_0) = -\frac{\mu_0}{4\pi} (\vec{I} \cdot \text{grad}V(M_0)).$$

Компонентная запись этого выражения будет выглядеть следующим образом:

$$U(M_0) = -\frac{\mu_0}{4\pi} (I_x V_x + I_y V_y + I_z V_z),$$

где под  $V_x, V_y, V_z$ , как и в случае гравитационного потенциала, понимаются первые частные производные потенциальной функции  $V$ . Поскольку аномальное магнитное поле  $T_a$  определяется через градиент потенциала

$$\vec{T}_a(M_0) = -\text{grad}U(M_0) = X1\vec{x} + Y1\vec{y} + Z1\vec{z},$$

то, для компонент магнитного поля, создаваемого изолированным объектом, можем записать:

$$X = \frac{\mu_0}{4\pi} (I_x V_{xx} + I_y V_{yx} + I_z V_{zx}),$$

$$Y = \frac{\mu_0}{4\pi} (I_x V_{yx} + I_y V_{yy} + I_z V_{zy}),$$

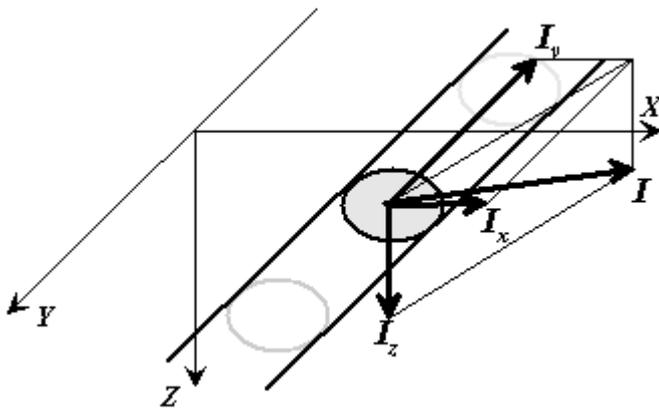
$$Z = \frac{\mu_0}{4\pi} (I_x V_{zx} + I_y V_{zy} + I_z V_{zz}).$$

Полученные соотношения удобно представить в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{bmatrix} I_x & I_y & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{yx} & V_{zx} \\ V_{xy} & V_{yy} & V_{zy} \\ V_{xz} & V_{yz} & V_{zz} \end{bmatrix} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \end{bmatrix} = \frac{\mu_0}{4\pi} \Gamma \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \end{bmatrix}$$

Отметим еще раз, что  $V_{xy}=V_{yx}$ ,  $V_{xz}=V_{zx}$ ,  $V_{yz}=V_{zy}$ . Таким образом, матрица  $\Gamma$  представляет собой симметричный тензор.

Из полученных соотношений следует, что решение прямой задачи магниторазведки тесно связано с решением прямой задачи гравиразведки, а именно, компоненты аномального магнитного поля выражаются через вторые производные гравитационного потенциала создаваемого тем же объектом, при условии, что этот объект имеет постоянную намагниченность.



8. Рассмотрим, как будут выглядеть полученные соотношения в случае двухмерной задачи. В этом случае, предполагая, что тело с заданной постоянной намагниченностью вытянуто вдоль оси  $oY$ , получим:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{bmatrix} V_{xx} & 0 & V_{xz} \\ 0 & 0 & 0 \\ V_{zx} & 0 & V_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \end{bmatrix}.$$

Такая запись отражает тот факт, что поле вдоль оси  $oY$  не меняется, и все частные производные функции  $V$  по переменной  $y$  будут равны нулю. Таким образом, для двухмерной задачи мы можем записать:

$$\begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xz} \\ V_{zx} & V_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_z \end{bmatrix},$$

или, с учетом того, что вне источника для двухмерных моделей  $V_{xx}=-V_{zz}$ ,

$$\begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{bmatrix} -V_{zz} & V_{xz} \\ V_{zx} & V_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_z \end{bmatrix}.$$

Из полученного результата вытекает следующий вывод. Двухмерное тело может быть намагниченным, но если эта намагниченность имеет направление вдоль него, то такой объект не создает магнитного поля. Интенсивность магнитного поля будут определяться компонентами намагниченности  $I_x$  и  $I_z$  в этой системе координат. Соответственно можно говорить об эффективной намагниченности  $I_{\varphi}$  объекта и об угле наклона этой намагниченности:

$$I_{\varphi} = \sqrt{I_x^2 + I_z^2}, \quad i' = \arctg \frac{I_z}{I_x}.$$

9. В качестве примера рассмотрим только одну модель – модель однородно намагниченной сферы радиусом  $R$ . Компоненты гравитационного поля такой модели имеют вид:

$$V_x(x, y, z) = Gm \frac{(\xi - x)}{r_{MM_0}^3}, \quad V_y(M_0) = Gm \frac{(\eta - y)}{r_{MM_0}^3}, \quad V_z(M_0) = Gm \frac{(\zeta - z)}{r_{MM_0}^3},$$

где  $m$  – масса сферы:  $m = \frac{4}{3} \pi R^3 \delta$ . Для этой модели можно ввести понятие магнитного момента сферы  $\vec{M}$ :

$$\vec{M} = \vec{I} \frac{4}{3} \pi R^3$$

Для вторых частных производных гравитационного потенциала (без учета коэффициента  $Gm$ ) можно получить:

$$V_{xx}(M_0) = \frac{3(\xi - x)^2 - r_{MM_0}^2}{r_{MM_0}^5}, \quad V_{yy}(M_0) = \frac{3(\eta - y)^2 - r_{MM_0}^2}{r_{MM_0}^5},$$

$$V_{zz}(M_0) = \frac{3(\zeta - z)^2 - r_{MM_0}^2}{r_{MM_0}^5},$$

$$V_{xz}(M_0) = \frac{3(\xi - x)(\zeta - z)}{r_{MM_0}^5}, \quad V_{yz}(M_0) = \frac{3(\eta - y)(\zeta - z)}{r_{MM_0}^5},$$

$$V_{xy}(M_0) = \frac{3(\xi - x)(\eta - y)}{r_{MM_0}^5}.$$

Соответственно для вычисления компонент аномального поля надо воспользоваться матричным соотношением:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}.$$

Совершенно ясно, что нет смысла выписывать окончательные формулы для каждой из компонент отдельно, поскольку они будут иметь громоздкий вид.

Точно также можно получить выражения для компонент аномального магнитного поля и для других моделей, рассмотренных в предыдущей лекции, в том числе и для двухмерных.

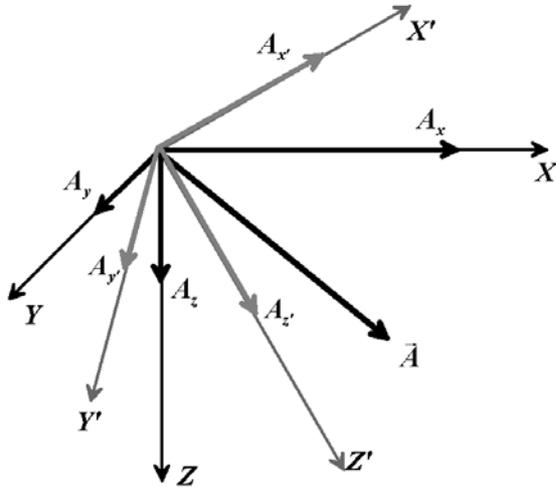
### ***Литература.***

1. *Блох Ю.И.* Решение прямых задач гравиразведки и магниторазведки.: Учеб. пособие. – М: МГГА. 1993. 79 с. ([www.sigma3d.com](http://www.sigma3d.com)).
2. *Блох Ю.И.* Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий.: Учеб. пособие. 2009. 232 с. ([www.sigma3d.com](http://www.sigma3d.com)).
3. *Логачев А.Г., Захаров В.П.* Магниторазведка, – Л.: Недра, 1978. 352 с.
4. Магниторазведка. Справочник геофизика. – М.: Недра. 1990. 470 с.
5. *Серкерев С.А.* Теория гравитационного и магнитного потенциалов. – М.: Недра. 1991. 303 с.
6. *Паркинсон У.* Введение в геомагнетизм. – М., Мир, 1986. 528 с.
7. *Яновский Б. М.* Земной магнетизм. Учебное пособие. Изд. 4-е, перераб. и дополн. Под ред. В. В. Металловой. – Л., Изд-во Ленингр. ун-та. 1978. 592 с.

### ***Лекция 4. Преобразование систем координат, формула Остроградского-Гаусса, формулы Грина.***

В предыдущих лекциях нами были получены выражения для компонент гравитационного поля, создаваемого элементарными моделями, а также было показано, как можно вычислять компоненты аномального магнитного поля на основе соотношения Пуассона. Рассмотренные модели характеризовались тем, что их форма и положение имели частный случай. Так материальный стержень располагался вдоль одной из координатных осей, стороны прямоугольной пластины и призмы также совпадали с направлением координатных осей. В тоже время в практике решения прямых задач возникает необходимость рассчитать эффекты от тех же моделей, например, от прямоугольной призмы, но при этом ребра этой призмы не должны быть параллельны осям координат. Кроме того,

желательно получить аналитические выражения элементов гравитационного и магнитного поля от более сложных моделей, чем были рассмотрены в предыдущих лекциях. Решение таких задач основано на следующих приемах – переход от одной системы координат к другой и понижение кратности интегралов.



1. Введем декартову систему координат, и пусть в этой системе координат задан вектор  $\vec{A}$ . Тогда в этой системе вектор можно разложить по базису, и компоненты вектора будут равны  $A_x, A_y, A_z$ . Введем новую систему координат, оси которой будут повернуты на некоторые углы относительно исходной системы. В этой новой системе вектор также может быть разложен на свои компоненты  $A_{x'}, A_{y'}, A_{z'}$ . Связь между

компонентами вектора в новом и старом базисе осуществляется на основе соотношений:

$$\begin{bmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x', x) & \cos(x', y) & \cos(x', z) \\ \cos(y', x) & \cos(y', y) & \cos(y', z) \\ \cos(z', x) & \cos(z', y) & \cos(z', z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x, x') & \cos(x, y') & \cos(x, z') \\ \cos(y, x') & \cos(y, y') & \cos(y, z') \\ \cos(z, x') & \cos(z, y') & \cos(z, z') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{bmatrix} = \Gamma^{-1} \begin{bmatrix} A_{x'} \\ A_{y'} \\ A_{z'} \end{bmatrix}.$$

Отметим, что матрица обратного перехода  $\Gamma^{-1}$  совпадает с транспонированной матрицей  $\Gamma$ :  $\Gamma^{-1} = \Gamma^T$ . Кроме того, необходимо также отметить, что модуль вектора при переходе от одной системы координат к другой не меняет своего значения, это – инвариант.

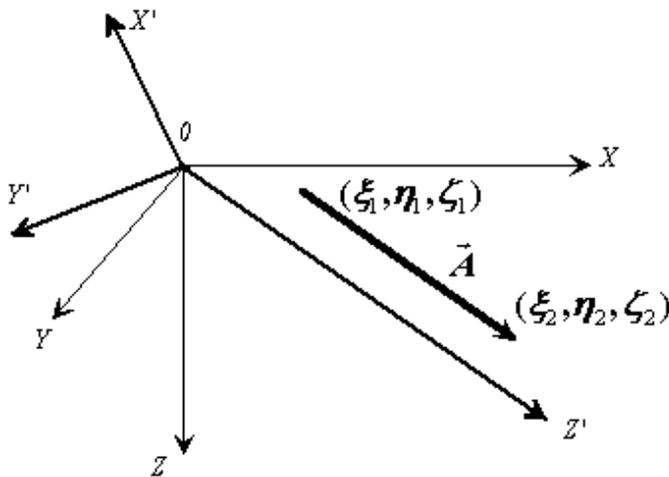
2. Рассмотрим в качестве примера, как можно воспользоваться этими соотношениями для того, чтобы получить компоненты гравитационного и магнитного поля от стержня. Нами были получены выражения для компонент силы притяжения для случая, когда этот стержень располагался вдоль одной из координатных осей. Так, если стержень располагается вдоль оси  $oZ$ , эти соотношения будут иметь вид ( $\xi, \eta$  – координаты положения стержня в плоскости  $oXY$ ,  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  – координаты верхнего и нижнего концов стержня):

$$V(M_0) = G\sigma_n \ln \frac{(\zeta_2 - z) + [x^2 + y^2 + (\zeta_2 - z)^2]^{1/2}}{(\zeta_1 - z) + [x^2 + y^2 + (\zeta_1 - z)^2]^{1/2}} = G\sigma_n \ln \frac{(\zeta_2 - z) + R_2}{(\zeta_1 - z) + R_1},$$

$$V_z(M_0) = G\sigma_n \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right),$$

$$V_x(M_0) = G\sigma_n \frac{(\xi - x)}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \left( \frac{\zeta_1 - z}{R_1} - \frac{\zeta_2 - z}{R_2} \right),$$

$$V_y(M_0) = G\sigma_n \frac{(\eta - y)}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2} \left( \frac{\zeta_1 - z}{R_1} - \frac{\zeta_2 - z}{R_2} \right).$$



Пусть  $(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$  и  $(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$  – координаты концов стержня. Для того, чтобы воспользоваться приведенными соотношениями, следует ввести новую систему координат, у которой, например, ось  $oZ'$  будет направлена вдоль стержня.

Для этого удобно воспользоваться векторной алгеброй. Образует вектор  $\vec{A}$ , начало которого будет совпадать с началом нашего стержня, а конец – с его окончанием. Будем предполагать, что его направление совпадает с новой осью  $oZ'$ . Тогда компоненты единичного вектора  $1\vec{z}'$  будут равны:

$$\cos(z', x) = \frac{\xi_2 - \xi_1}{A}, \quad \cos(z', y) = \frac{\eta_2 - \eta_1}{A}, \quad \cos(z', z) = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{A}.$$

Чтобы определить направление других осей, векторно перемножим вектор  $\vec{A}$  с любым другим ортом, например, с ортом  $1\vec{x}$ . В результате такого перемножения будет образован новый вектор  $\vec{B}$ , ортогональный орту  $1\vec{z}'$ :

$$\vec{B} = \vec{A} \times 1\vec{x},$$

который мы можем сопоставить с осью  $oX'$ . Опять же, можно определить компоненты разложения орта  $1\vec{x}'$  в основном базисе, аналогично тому, как это было сделано относительно орта  $1\vec{z}'$ . Эти компоненты будут равны

$$\cos(x', x) = \frac{B_x}{B}, \quad \cos(x', y) = \frac{B_y}{B}, \quad \cos(x', z) = \frac{B_z}{B}.$$

Далее вновь векторно перемножим орты  $1\bar{x}'$  и  $1\bar{z}'$ . В результате такого перемножения появится новый орт, который должен по своему направлению совпадать с ортом  $1\bar{y}'$ . Поскольку результат векторного умножения будет определяться порядком следования перемножаемых векторов, то их следует расположить так, чтобы была образована правая тройка:

$$1\bar{y}' = 1\bar{z}' \times 1\bar{x}'.$$

Так как компоненты разложения ортов новой системы координат по осям исходной системы равны своим проекциям на координатные оси исходной системы, то тем самым определена матрица прямого перехода  $\Gamma$ .

Следующий этап будет заключаться в том, что нам нужно будет пересчитать координаты концов отрезка и координату точки наблюдения  $M_0$ , заданных в исходной системе, в координаты новой системы:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x', x) & \cos(x', y) & \cos(x', z) \\ \cos(y', x) & \cos(y', y) & \cos(y', z) \\ \cos(z', x) & \cos(z', y) & \cos(z', z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \xi_1' \\ \eta_1' \\ \zeta_1' \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta_1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \xi_2' \\ \eta_2' \\ \zeta_2' \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \eta_2 \\ \zeta_2 \end{bmatrix}.$$

Если все направляющие косинусы были вычислены верно, то в новой системе должны выполняться следующие равенства:  $\xi_1' = \xi_2'$ ,  $\eta_1' = \eta_2'$ . Если это так, то теперь можно воспользоваться приведенными выше формулами для вычисления компонент силы тяжести в новой системе координат. Получив значения компонент поля силы притяжения  $V_{x'}$ ,  $V_{y'}$ ,  $V_{z'}$  в расчетной точке  $M_0$ , можно вычислить компоненты этого поля в исходной системе с помощью матрицы обратного перехода:

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \Gamma^{-1} \begin{bmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \\ V_{z'} \end{bmatrix}.$$

Отметим также, что значение потенциала в точке наблюдения  $M_0$  не зависит от системы координат.

3. Аналогичным образом можно вычислить и компоненты аномального магнитного поля создаваемого такой моделью. В этом случае в новой системе координат необходимо будет рассчитать матрицу вторых производных  $[V_{i'j'}]$ , где  $i'$  и  $j'$  принимают значения  $x', y', z'$ , а также компоненты вектора линейной намагниченности  $\vec{m}_n$  в новой системе координат. Вектор  $\vec{m}_n$  может быть определен аналогично тому, как было определено понятие линейной плотности,  $-\vec{m}_n = \vec{J} \cdot \vec{S}$ , где  $\vec{S}$  – площадь поперечного сечения стержня.

Далее, воспользовавшись матричным соотношением Пуассона, вычисляются компоненты аномального магнитного поля в новой системе, а затем осуществляется обратный переход к компонентам поля в исходной системе координат.

4. Рассмотрим изложенный алгоритм на примере расчета компонент аномального магнитного поля от двухмерной однородно намагниченной пластины (тонкого пласта). Введем понятие поверхностной намагниченности, которую определим следующим образом  $\vec{m}_n = \vec{J}d$ , где  $d$  – толщина пласта. В исходной системе координат компоненты вектора намагниченности будут определяться его склонением  $D$ , наклонением  $i$  и азимутом профиля  $A$ :

$$J_x = J \cos i \cos(A - D), J_y = J \cos i \sin(A - D), J_z = J \sin i,$$

соответственно будут определены и компоненты вектора  $\vec{m}_n$ .

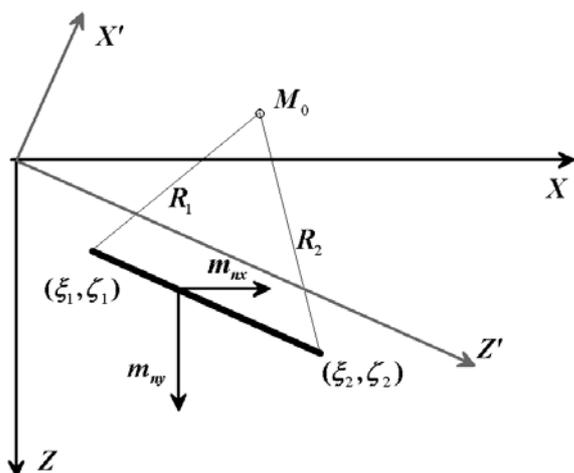
Для случая вертикального пласта можно получить выражения для вторых производных функции  $V$ :

$$\begin{aligned} V_z(x, z) &= 2 \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{\zeta - z}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\zeta = 2 \frac{1}{2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \frac{d(\zeta - z)^2}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} = \\ &= \ln [(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2] \Big|_{\zeta_1}^{\zeta_2} = \ln \left[ \frac{(\xi - x)^2 + (\zeta_2 - z)^2}{(\xi - x)^2 + (\zeta_1 - z)^2} \right], \end{aligned}$$

$$V_{zz}(x, z) = \left[ \frac{\zeta_1 - z}{(\xi - x)^2 + (\zeta_1 - z)^2} \right] - \left[ \frac{\zeta_2 - z}{(\xi - x)^2 + (\zeta_2 - z)^2} \right] = \frac{\zeta_1 - z}{R_1^2} - \frac{\zeta_2 - z}{R_2^2},$$

$$V_{xz}(x, z) = \frac{\xi - x}{[(\xi - x)^2 + (\zeta_1 - z)^2]} - \frac{\xi - x}{[(\xi - x)^2 + (\zeta_2 - z)^2]} = (\xi - x) \left( \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right),$$

где  $(\xi, \zeta_1, \zeta_2)$  – координаты, задающие положение пласта,  $R_1$  и  $R_2$  – расстояния от верхней и нижней кромок пласта до расчетной точки  $(x, z)$ .



Если положение пласта определяется координатами  $(\xi_1, \zeta_1)$  и  $(\xi_2, \zeta_2)$ , то можно ввести новую систему координат, у которой направление оси  $oZ'$  будет направлено по падению пласта. В этом случае компоненты орта  $1\vec{z}'$  будут определены из соотношений:

$$\cos(z', x) = \frac{\xi_2 - \xi_1}{L},$$

$$\cos(z', z) = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{L},$$

где  $L$  – длина пласта,  $L = \sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2}$ . Для того, чтобы получить компоненты разложения орта  $1\vec{x}'$ , можно опять воспользоваться векторным умножением:

$$1\vec{x}' = 1\vec{y} \times 1\vec{z}'.$$

В результате получим:

$$\cos(x', x) = \cos(z', z) = \frac{\zeta_2 - \zeta_1}{L}, \quad \cos(x', z) = -\cos(z', x) = -\frac{\xi_2 - \xi_1}{L}.$$

Далее составляем матрицу преобразований координат:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \cos(x', x) & \cos(x', z) \\ \cos(z', x) & \cos(z', z) \end{bmatrix},$$

и с ее помощью рассчитываем положение пласта и расчетной точки  $M_0$  в новой системе координат. Кроме того, с помощью этой же матрицы рассчитываются и компоненты вектора намагниченности  $\vec{m}'_n$  в новой системе координат:

$$\begin{bmatrix} x' \\ z' \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \xi' \\ \zeta' \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} \xi \\ \zeta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} m'_{nx} \\ m'_{nz} \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} m_{nx} \\ m_{nz} \end{bmatrix}.$$

Затем определяются компоненты вектора аномального магнитного поля

$$\begin{bmatrix} X' \\ Z' \end{bmatrix} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{bmatrix} -V_{zz} & V_{xz} \\ V_{xz} & V_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m'_{nx} \\ m'_{nz} \end{bmatrix},$$

где

$$V_{zz}(x', z') = \frac{\zeta'_1 - z'}{R_1^2} - \frac{\zeta'_2 - z'}{R_2^2}, \quad V_{xz}(x', z') = (\xi' - x') \left( \frac{1}{R_1^2} - \frac{1}{R_2^2} \right),$$

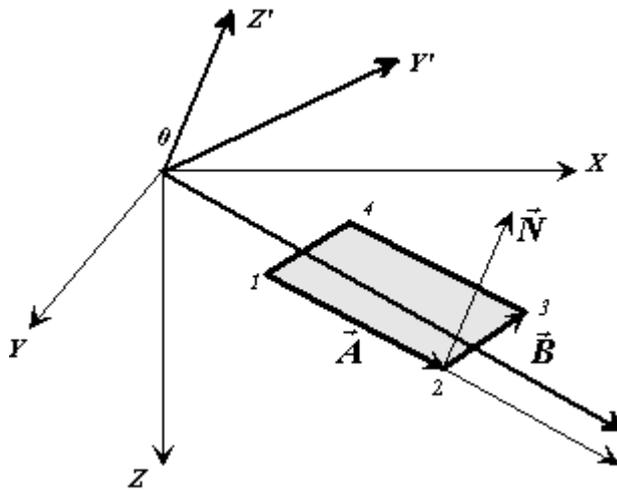
и на заключительном этапе осуществляется вычисление компонент вектора аномального магнитного поля в исходной системе координат

$$\begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} = \Gamma^T \begin{bmatrix} X' \\ Z' \end{bmatrix}.$$

В учебниках и справочниках по магниторазведке приводятся формулы для компонент аномального поля для случая наклонного пласта с глубоко залегающей нижней кромкой. Стоит проделать приведенные выкладки на бумаге и сравнить результат с тем, который дается в учебниках.

5. Теперь рассмотрим случай прямоугольной плоской пластины, произвольно расположенной относительно системы координат. Расчет гравитационного или магнитного поля от такой модели будет основан на том, что вновь будет введена новая система координат, и в этой системе плоскость пластины будет параллельна одной из координатных плоскостей, например плоскости  $oX'Y'$ . Тогда направление нормали к этой пластине будет совпадать с осью  $oZ'$  новой системы.

Здесь следует сделать следующие замечания. Во-первых, как известно плоскость можно провести только через три точки в пространстве, если они не лежат на одной прямой. Если же пластина имеет большее число вершин, то следует проверить, лежат ли все эти вершины в одной плоскости. Поэтому основной формой пластин, с помощью которых можно аппроксимировать поверхность любого тела, будут треугольники. Во-вторых, направление нормали будет зависеть от направления обхода пластины. Если пластина представляет собой многоугольник, то – от направления обхода вершин многоугольника. При этом направление нормали определяется согласно правилу буравчика.



Таким образом, задавшись направлением обхода, тем самым выбирается направление нормали к этой пластине. Для того, чтобы вычислить вектор нормали достаточно образовать два вектора  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ , совпадающих со сторонами пластины и следующих друг за другом. Векторное умножение первого из них на второй даст новый вектор  $\vec{N}$ , который будет

им ортогонален, т.е. и будет являться вектором нормали к этой пластине и определять направление оси  $oZ'$ . Положив одну из сторон такой пластины совпадающей с осью  $oX'$  и, приняв, что направление этой оси совпадает с направлением обхода, определяем направляющие косинусы этой оси. Далее, вновь воспользуемся векторным умножением для определения направляющих косинусов оси  $oY'$ . Дальнейшие вычисления будут аналогичны тем, которые были рассмотрены нами ранее.

6. Как видим, введение новой системы координат оказывается действенным способом по упрощению моделей. При этом нет необходимости выписывать окончательные аналитические формулы для расчетов элементов полей.

7. Рассмотрим следующую возможность, с помощью которой можно упростить вывод аналитических формул для тел со сложной конфигурацией. Ясно, что основная проблема при выводе аналитических формул от тел такой конфигурации состоит в необходимости взятия тройных интегралов (в трехмерных задачах) или двойных интегралов (для двумерных задач). Один из подходов, который позволяет в какой-то степени избежать такой процедуры, состоит в понижении кратности интегралов, т.е. к переходу от объемных, тройных, интегралов к поверхностным, двойным, интегралам, от площадных, двукратных, интегралов – к контурным, однократным. Такое понижение кратности интегралов основано на формулах Остроградского–Гаусса, Грина, Стокса.

8. Теорема Гаусса – Остроградского. Пусть функции  $P, Q, R$  и их частные производные  $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$  непрерывны внутри области  $D$  и на замкнутой поверхности  $S$ , ограничивающей этот объем. Тогда справедливо

$$\int_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \oint_S (PdS_x + QdS_y + RdS_z).$$

Векторные формулировки этой теоремы имеют вид:

$$\begin{aligned}\int_D \operatorname{grad} a \, dv &= \oint_S a d\vec{S}, \\ \int_D \operatorname{div} \vec{A} \, dv &= \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}, \\ \int_D \operatorname{rot} \vec{A} \, dv &= \oint_S d\vec{S} \times \vec{A}.\end{aligned}$$

Теорема Стокса. Пусть функции  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  и их частные производные  $\frac{\partial P}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial P}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial z}$  непрерывны на поверхности  $S$  и на замкнутом контуре  $L$ , ограничивающем эту поверхность. Тогда справедливо

$$\int_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dS_x + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dS_y + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dS_z = \oint_L P dl_x + Q dl_y + R dl_z.$$

Векторные формулировки:

$$\begin{aligned}\int_S d\vec{S} \times \operatorname{grad} a &= \oint_L a d\vec{l}, \\ \int_S \operatorname{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} &= \oint_L \vec{A} \cdot d\vec{l}.\end{aligned}$$

Формулы Грина легко получаются из формул Остроградского–Гаусса. 1-я формула имеет вид

$$\int_D (a \Delta b + \operatorname{grad} a \cdot \operatorname{grad} b) dv = \oint_S a \frac{\partial b}{\partial n} dS,$$

2-я формула –

$$\int_D (a \Delta b - b \Delta a) dv = \oint_S \left( a \frac{\partial b}{\partial n} - b \frac{\partial a}{\partial n} \right) dS.$$

9. Формулы Остроградского–Гаусса, Стокса и Грина справедливы и для двухмерных случаев, если функции  $P$  и  $Q$  зависят только от двух координат:

$$\int_S \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dS = \oint_L (P dl_y - Q dl_x), \quad \int_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dS_z = \oint_L P dl_x + Q dl_y.$$

Так, например, для функций  $a(x,y)$  и  $\vec{A}(x,y)$  справедливы следующие соотношения:

$$\int_S \text{grad} a dS = \oint_L a \vec{n} dl, \quad \int_S \text{div} \vec{A} dS = \oint_L \vec{A} \cdot \vec{n} dl,$$

где орт внешней нормали  $\vec{n}$  лежит в плоскости пластины и ортогонален контуру, ограничивающему поверхность  $S$ . Аналогичные соотношения можно записать и для формул Грина.

10. Применим формулу О.–Г. к магнитному потенциалу, создаваемому объемом  $D$  с намагниченностью  $\vec{I}$ . Потенциал такого источника определяется следующим образом

$$U(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_D \vec{I}(M) \cdot \text{grad}^{M_0} \frac{1}{r_{MM_0}} dv,$$

где  $M_0$  – положение точки, в которой определяется поле,  $M$  – точка интегрирования.

Так как в интегральных теоремах предполагается, что дифференцирование должно осуществляться по точке интегрирования, то перейдем от дифференцирования по переменной  $M_0$  к переменной  $M$ . Кроме того, воспользуемся следующим соотношением

$$\text{div}(a\vec{A}) = \vec{A} \cdot \text{grad} a + a \text{div} \vec{A}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} U(M_0) &= -\frac{1}{4\pi} \int_D \vec{I}(M) \cdot \text{grad}^{M_0} \frac{1}{r_{MM_0}} dv = \frac{1}{4\pi} \int_D \vec{I}(M) \cdot \text{grad}^M \frac{1}{r_{MM_0}} dv = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_D \text{div} \left( \vec{I} \frac{1}{r_{MM_0}} \right) dv - \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{1}{r_{MM_0}} \text{div} \vec{I} dv = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\vec{I} \cdot \vec{n}}{r_{MM_0}} dS + \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{-\text{div} \vec{I}}{r_{MM_0}} dv. \end{aligned}$$

Поскольку произведение  $\vec{I} \cdot \vec{n}$  определяет плотность поверхностных источников  $\delta_s$ , а  $\text{div} \vec{I}$  – плотность объемных источников  $\delta_v$ , то полученное выражение можно записать следующим образом:

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\delta_s(M)}{r_{MM_0}} dS + \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\delta_v(M)}{r_{MM_0}} dv.$$

Из этого соотношения следует, что магнитное поле объемного источника можно представить в виде суммы полей, создаваемых поверхностными “магнитными зарядами” и “магнитными зарядами”, распределенными в объеме и создающими поле вектора намагниченности.

С практической точки зрения важен частный случай этой формулы, когда предполагается, что вектор намагниченности постоянен. Тогда  $\text{div} \vec{I} = 0$ , и выражение для потенциала приобретает вид:

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\delta_s(M)}{r_{MM_0}} dS = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\vec{I} \cdot 1\vec{n}}{r_{MM_0}} dS,$$

т.е. магнитное поле будет определяться только наличием поверхностных “магнитных зарядов”.

11. Тем самым получен второй подход к расчету аномального магнитного поля от тела с постоянной намагниченностью. В отличие от рассмотренного ранее подхода, основанного на соотношении Пуассона, здесь вычисляется плотность “магнитных зарядов”, сосредоточенных на поверхности заданного тела, и уже от них рассчитывается магнитное поле. Ясно, что выражения силы магнитного притяжения, создаваемого такими зарядами, с точностью до постоянного коэффициента будут совпадать с выражениями силы гравитационного притяжения, создаваемого теми же поверхностями, с распределенными по ним поверхностными массами.

12. Для иллюстрации этого результата рассмотрим вертикальную двухмерную призму с вертикальной намагниченностью  $I$ .  $Z$ -компонента поля, создаваемая такой призмой, может быть получена путем прямого интегрирования  $Z$ -компоненты поля дипольной линии, и она окажется равной:

$$\begin{aligned} Z(M_0) &= \frac{\mu_0}{4\pi} 2I \left[ \left( \arctg \frac{\xi_2 - x}{\zeta_1 - z} - \arctg \frac{\xi_1 - x}{\zeta_1 - z} \right) - \left( \arctg \frac{\xi_2 - x}{\zeta_2 - z} - \arctg \frac{\xi_1 - x}{\zeta_2 - z} \right) \right] = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} 2I (\varphi_1 - \varphi_2), \end{aligned}$$

где  $\xi_1, \xi_2$  – координаты боковых граней призмы,  $\zeta_1, \zeta_2$  – координаты верхней и нижней кромок,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – углы видимости из точки  $M_0$  верхней и нижней кромок призмы.

Теперь получим выражение для той же компоненты поля через поверхностные заряды. Плотность поверхностных зарядов на верхней

границы призмы будет равна  $\delta_s^{(1)} = \vec{I} \cdot 1\vec{n} = \vec{I} \cdot (-1\vec{z}) = -I$ , поскольку нормаль этой грани противоположена по направлению оси  $oZ$ . На нижней грани направление нормали совпадает с направлением оси  $oZ$ , и плотность зарядов этой грани окажется равной  $\delta_s^{(2)} = \vec{I} \cdot 1\vec{n} = \vec{I} \cdot 1\vec{z} = I$ . Плотность зарядов на боковых гранях будет равна нулю, поскольку нормали этих граней ортогональны к вектору намагниченности.

При рассмотрении модели тонкого горизонтального пласта с постоянной поверхностной плотностью  $\delta_n$  нами были получено выражение для компоненты  $V_z$  его поля силы тяжести:

$$V_z(M_0) = 2G\delta_n \operatorname{arctg} \frac{(\xi - x)}{(\zeta - z)} \Big|_{\xi_1}^{\xi_2},$$

где  $\xi_1, \xi_2$  – координаты концов пласта,  $\zeta$  – глубина его залегания. Заменяя  $\delta_n$  на  $\delta_s^{(1)}$  и  $\delta_s^{(2)}$ ,  $G$  – на  $\frac{\mu_0}{4\pi}$ , и подставив соответствующие глубины  $\zeta_1, \zeta_2$  получим эффекты от верхней и нижней кромок. Суммарный эффект будет определяться суммой эффектов, создаваемых этими пластами. При этом необходимо учесть и тот факт, что в отличие от гравитационного поля, положительные “магнитные заряды” являются источниками поля, а отрицательные – стоками. Это означает, что эффекты этих пластов должны быть умножены на  $(-1)$ . В результате получим:

$$\begin{aligned} Z(M_0) &= \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} 2 \left[ \delta_s^{(1)} \left( \operatorname{arctg} \frac{\xi_2 - x}{\zeta_1 - z} - \operatorname{arctg} \frac{\xi_1 - x}{\zeta_1 - z} \right) + \delta_s^{(2)} \left( \operatorname{arctg} \frac{\xi_2 - x}{\zeta_2 - z} - \operatorname{arctg} \frac{\xi_1 - x}{\zeta_1 - z} \right) \right] = \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} 2 [-I\varphi_1 + I\varphi_2] = \frac{\mu_0}{4\pi} 2I(\varphi_1 - \varphi_2). \end{aligned}$$

Полученный результат совпадает с выражением, полученным ранее.

13. Применение формул понижения кратности интегралов позволяет получить достаточно простые выражения для компонент аномального гравитационного или магнитного поля от тел с более сложной конфигурацией. Так при расчете гравитационного поля, создаваемого двухмерными объектами одной из аппроксимационных фигур является многоугольник постоянной плотности  $\delta$  с  $N$  вершинами.

Для такой фигуры потенциал силы тяжести представляется следующим образом:

$$V(M_0) = -G\delta \int_S \ln[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2] dS.$$

Поле силы притяжения определяется как градиент этого потенциала:

$$\begin{aligned} \vec{g}(M_0) &= \text{grad}V = -G\delta \text{grad}^{M_0} \int_S \ln[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2] dS = \\ &= -G\delta \int_S \text{grad}^{M_0} \ln[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2] dS. \end{aligned}$$

Перейдем от дифференцирования по точке  $M_0$  к дифференцированию по точке  $M$  и воспользуемся формулой О.-Г.:

$$\begin{aligned} \vec{g}(M_0) &= G\delta \int_S \text{grad}^M \ln[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2] dS = \\ &= G\delta \oint_L \ln[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2] 1\vec{n} dl = G\delta \sum_{\nu=1}^N \int_{L_\nu} \ln[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2] 1\vec{n}_\nu dl. \end{aligned}$$

С учетом того, что для  $\nu$ -ой стороны вектор нормали не меняет своего направления, последнее выражение можно переписать в виде:

$$\vec{g}(M_0) = G\delta \sum_{\nu=1}^N 1\vec{n}_\nu \int_{L_\nu} \ln[(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2] dl = G\delta \sum_{\nu=1}^N 1\vec{n}_\nu \int_{L_\nu} \ln(r^2) dl$$

Интеграл  $\left( -G \int_{L_\nu} \ln(r^2) dl \right)$  представляет собой потенциал  $\nu$ -ой материальной пластины с единичной поверхностной плотностью  $V^\nu(M_0)$ . Следовательно

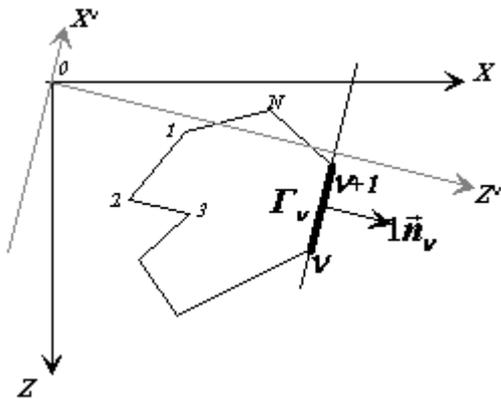
$$\vec{g}(M_0) = -\delta \sum_{\nu=1}^N 1\vec{n}_\nu V^\nu(M_0).$$

В частности, для вертикальной компоненты гравитационного поля можно записать:

$$g_z(M_0) = V_z(M_0) = -\delta \sum_{\nu=1}^N \cos(1\vec{n}_\nu, 1\vec{z}) V^\nu(M_0).$$

Выражение потенциала для горизонтальной пластины было получено во 2-й лекции:

$$V(M_0) = -G\delta_n \left[ (\xi - x) \ln((\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2) - 2(\xi - x) + 2(\zeta - z) \operatorname{arctg} \frac{(\xi - x)}{(\zeta - z)} \right]_{\xi_1}^{\xi_2}$$



Вычислительная схема, основанная на реализации этого алгоритма, будет включать в себя операцию ввода новой координатной системы, связанной со сторонами многоугольника, т.е. для каждой  $v$ -ой стороны многоугольника вводится своя прямоугольная система координат, с осью  $oZ^v$ , совпадающей по направлению с осью нормали к этой стороне. Далее

определяются координаты точки  $M_0$  в этой системе, координаты положения пластины, совпадающей с этой стороной, и вычисляется ее потенциал при  $\delta_n=1$ . Значение полученного потенциала умножаются на косинус угла между вектором нормали к этой стороне и осью  $oZ$  исходной координатной системы. Домножив полученный результат на значение  $\delta$ , определяется вклад  $v$ -ой стороны многоугольника в значение аномального поля, создаваемого всем многоугольником.

14. Однако получить выражения для элементов гравитационного или магнитного поля с более сложной конфигурацией и более сложным распределением плотности или намагниченности оказывается затруднительным. Эффективные способы получения аналитических выражений элементов полей от таких двумерных объектов основаны на применении теории функций комплексных переменных. Этому будет посвящена специальная лекция.

### Литература.

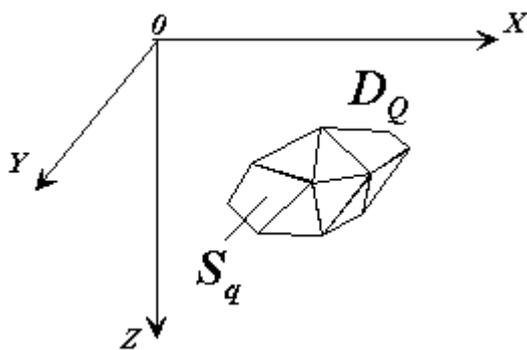
1. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. – М.: Наука. 1981. 720 с.
2. Буллах Е.Г., Шуман В.Н. Основы векторного анализа и теория поля. Учебное пособие. – Киев. Наукова думка. 1998. 360 с.
3. Вычислительная математика и техника в разведочной геофизике. Справочник геофизика. – М.: Недра. 1990. 498 с.
4. Страхов В.Н., Лапина М.И. Прямые задачи гравиметрии и магнитометрии для произвольных однородных многогранников. // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1982. № 4. с. 45-67.
5. Страхов В.Н., Лапина М.И. Прямая и обратная задача гравиметрии и магнитометрии для произвольных однородных многогранников. // Теория и практика интерпретации гравитационных и магнитных полей

### **Лекция 5. Прямая задача гравиметрии и магнитометрии для произвольных однородных многогранников.**

В предыдущей лекции были рассмотрены способы, позволяющие упростить общие выражения для решения прямых задач гравиметрии и магнитометрии. К этим способам относятся два основных подхода – переход к новой системе координат и понижение кратности интегралов, описывающих прямой эффект от заданного объемного распределения плотности или намагниченности.

В этой лекции рассмотрим, каким образом применение этих подходов может позволить получить аналитические выражения элементов гравитационного и магнитного полей от объемных (трехмерных) тел. Этот вопрос нами будет рассмотрен на примере однородного как по плотности, так и по намагниченности многогранника, ограниченного плоскими гранями. Эта модель – одна из наиболее распространенных моделей, с помощью которой аппроксимируются реальные геологические тела. Частный случай такой модели – прямоугольный параллелепипед.

Поскольку решение прямой задачи магнитометрии при наших предположениях о постоянной намагниченности тела тесно связано с решением прямой задачи гравиметрии, то рассмотрение этой задачи начнем с определения элементов гравитационного поля.



1. Введем декартову систему координат (правую). В этой системе координат определим положение многогранника произвольной формы. Объем, занятый этим многогранником, будем обозначать как  $D_Q$ , где  $Q$  – число граней  $S_q$  этого многогранника. Грань  $S_q$  имеет  $N_q$  вершин и, соответственно столько же ребер.

При рассмотрении гравитационного поля для нас, как уже отмечалось, будут представлять интерес выражения для гравитационного потенциала, создаваемого этим многогранником, и его первые и вторые производные. Потенциал силы тяжести для нас имеет не только теоретическое значение, поскольку путем дифференцирования мы можем определить его частные производные, но и практическое. Это связано с тем, что с появлением спутниковой альтиметрии, в настоящее время с высокой точностью измерено превышение невозмущенной поверхности морей и океанов относительно эллипсоида относимости. Как известно, это превышение  $\Delta N$  связано со значением аномального потенциала силы

тяжести  $\Delta V$ , создаваемого плотностными неоднородностями внутри Земли, и с большой степенью точности эти превышения описываются соотношением Брунса:

$$\Delta N \approx \frac{\Delta V}{g},$$

где  $g$  – значение силы тяжести. Таким образом, превышения поверхности океана – новый вид информации о гравитационном поле, который также может интерпретироваться, как и поле силы тяжести.

2. В общем виде потенциал многогранника с постоянной плотностью  $\delta$  будет описываться соотношением:

$$V(M_0) = G\delta \int_{D_Q} \frac{1}{r_{MM_0}} dv,$$

где  $M_0(x,y,z)$  – координата точки наблюдения,  $M(\xi,\eta,\zeta)$  – координата точки интегрирования,  $r_{MM_0}$  – расстояние между этими точками,  $D_Q$  – область, занятая многогранником с  $Q$  гранями. Для того чтобы понизить кратность интеграла, следует воспользоваться формулами Остроградского–Гаусса или формулами Грина. Напомним выражение этих формул в векторной формулировке:

$$\int_D \text{grad} a \, dv = \oint_S a d\vec{S}, \quad \int_D \text{div} \vec{A} \, dv = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}, \quad \int_D \text{rot} \vec{A} \, dv = \oint_S d\vec{S} \times \vec{A};$$

$$\int_D (a\Delta b + \text{grad} a \cdot \text{grad} b) dv = \oint_S a \frac{\partial b}{\partial n} dS \quad - \text{1-ая формула Грина},$$

$$\int_D (a\Delta b - b\Delta a) dv = \oint_S \left( a \frac{\partial b}{\partial n} - b \frac{\partial a}{\partial n} \right) dS \quad - \text{2-я формула Грина}.$$

Таким образом, поскольку под знаком интеграла стоит скалярная функция  $\frac{1}{r_{MM_0}}$ , то ее следует представить или как дивергенцию некоторого вектора, или как лапласиан скалярной функции.

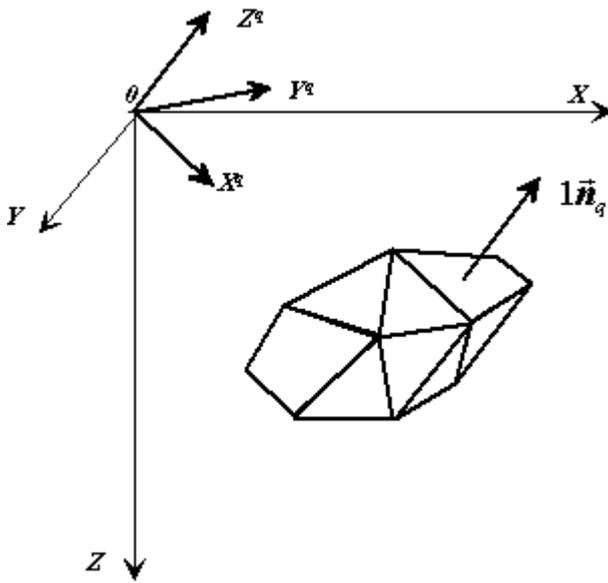
Можно показать, что

$$\frac{1}{r_{MM_0}} = \frac{1}{2} \Delta_M r_{MM_0},$$

где знак  $\Delta_M$  показывает, что дифференцирование ведется по координатам точки интегрирования  $M$ , т.е. по координатам  $(\xi, \eta, \zeta)$ . Справедливость этого тождества стоит проверить самостоятельно.

Воспользовавшись любой из формул Грина и положив в ней  $a=1$ , получим:

$$V(M_0) = G\delta \int_{D_0} \frac{1}{r_{MM_0}} dv = G\delta \frac{1}{2} \int_{D_0} \Delta r_{MM_0} dv = G \frac{\delta}{2} \oint_{\partial D_0} \frac{\partial r_{MM_0}}{\partial n} dS = G \frac{\delta}{2} \sum_{q=1}^Q \int_{S_q} \frac{\partial r_{MM_0}}{\partial n_q} dS$$



В результате преобразований нами получено подинтегральное выражение  $\frac{\partial r_{MM_0}}{\partial n_q}$ , которое означает, что следует вычислить производную от расстояния  $r_{MM_0}$  по направлению вектора нормали  $q$ -ой грани. Напомним, что вектор нормали направлен из объема, занятого многогранником, наружу.

Для того чтобы вычислить такую производную следует ввести новую систему координат, у

которой ось  $oZ^q$  будет совпадать с направлением нормали к  $q$ -ой грани. Естественно, что для каждой грани многогранника эта система будет своя. Поскольку расстояние  $r_{MM_0}$  не зависит от системы координат, т.е.

$$r_{MM_0} = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2} = \sqrt{(\xi^q - x^q)^2 + (\eta^q - y^q)^2 + (\zeta^q - z^q)^2}$$

и в этой новой системе координат производная по нормали будет соответствовать производная по переменной  $\zeta^q$ , то

$$\int_{S_q} \frac{\partial r_{MM_0}}{\partial n_q} dS = \int_{S_q} \frac{\partial r_{MM_0}}{\partial \zeta^q} dS.$$

Вычислим производную  $\frac{\partial r_{MM_0}}{\partial \zeta^q}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_{MM_0}}{\partial \zeta^q} &= \frac{\partial}{\partial \zeta^q} \sqrt{(\xi^q - x^q)^2 + (\eta^q - y^q)^2 + (\zeta^q - z^q)^2} = \\ &= \frac{\zeta^q - z^q}{\sqrt{(\xi^q - x^q)^2 + (\eta^q - y^q)^2 + (\zeta^q - z^q)^2}} = \frac{\zeta^q - z^q}{r_{MM_0}}. \end{aligned}$$

На основании проведенных выкладок и с учетом того, что в новой системе координат, связанной с  $q$ -ой гранью, величина  $(\zeta^q - z^q)$  является величиной постоянной, для потенциала силы притяжения получим следующее представление:

$$V(M_0) = G \frac{\delta}{2} \sum_{q=1}^q \int_{S_q} \frac{\zeta^q - z^q}{r_{MM_0}} dS = G \frac{\delta}{2} \sum_{q=1}^q (\zeta^q - z^q) \int_{S_q} \frac{1}{r_{MM_0}} dS.$$

Введем понятие потенциала силы притяжения  $q$ -ой пластины с единичной поверхностной плотностью:

$$V_q(M_0) = G \int_{S_q} \frac{1}{r_{MM_0}} dS.$$

Тогда для потенциала многогранника можем записать:

$$V(M_0) = \frac{\delta}{2} \sum_{q=1}^q (\zeta^q - z^q) V_q(M_0).$$

Таким образом, потенциал многогранника определяется через потенциалы его граней.

2. Из полученного соотношения для потенциала силы притяжения легко получить выражения для его производных. Для этого необходимо вспомнить, что при переходе из одной системы в другую, координаты преобразуются согласно следующему соотношению:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x', x) & \cos(x', y) & \cos(x', z) \\ \cos(y', x) & \cos(y', y) & \cos(y', z) \\ \cos(z', x) & \cos(z', y) & \cos(z', z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \Gamma \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Так значение  $z'$  связано с координатами исходной системы следующим образом:

$$z' = \cos(z', x)x + \cos(z', y)y + \cos(z', z)z = \cos(z', r_i)r_i = \gamma_{z'i}r_i.$$

Здесь при окончательной записи использовано соглашение о суммировании,  $r_i$  может принимать значения  $x, y, z$ ;  $\gamma_{z'i} = \cos(z', r_i)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(M_0)}{\partial r_i} &= \frac{\delta}{2} \sum_{q=1}^q \frac{\partial}{\partial r_i} ((\zeta^q - z^q)V_q(M_0)) = \\ &= \frac{\delta}{2} \left( \sum_{q=1}^q -\gamma_{z'qi} V_q(M_0) + \sum_{q=1}^q (\zeta^q - z^q) \frac{\partial V_q(M_0)}{\partial r_i} \right). \end{aligned}$$

В частности, для вертикальной составляющей поля это выражение будет иметь вид:

$$\frac{\partial V(M_0)}{\partial z} = \frac{\delta}{2} \left( \sum_{q=1}^q -\cos(z^q, z)V_q(M_0) + \sum_{q=1}^q (\zeta^q - z^q) \frac{\partial V_q(M_0)}{\partial z} \right).$$

Отметим, что величина  $h^q = (\zeta^q - z^q)$  равна высоте точки наблюдения  $M_0$  над плоскостью  $q$ -ой грани. В зависимости от того, выше или ниже этой плоскости расположена точка  $M_0$ , будет определяться и ее знак.

3. Еще более простое соотношение для поля силы тяжести  $\vec{g}$  можно получить на основе теоремы О.-Г. Проведем соответствующие выкладки:

$$\begin{aligned} \vec{g}(M_0) = \text{grad}V(M_0) &= \text{grad} \left( G\delta \int_{D_0} \frac{1}{r_{MM_0}} dv \right) = G\delta \int_{D_0} \text{grad}^{M_0} \frac{1}{r_{MM_0}} dv = \\ &= -G\delta \int_{D_0} \text{grad}^M \frac{1}{r_{MM_0}} dv = -G\delta \oint_{\partial D_0} \frac{1}{r_{MM_0}} d\vec{S} = -G\delta \sum_{q=1}^q \int_{S_q} \frac{1\vec{n}_q}{r_{MM_0}} dS. \end{aligned}$$

Поскольку для  $q$ -ой грани направление вектора нормали величина постоянная, то выражение для поля силы тяжести приобретает вид:

$$\vec{g}(M_0) = -G\delta \sum_{q=1}^q 1\vec{n}_q \int_{S_q} \frac{1}{r_{MM_0}} dS = -\delta \sum_{q=1}^q 1\vec{n}_q V_q(M_0),$$

где  $V_q$  – потенциал  $q$ -ой грани с единичной поверхностной плотностью.

Выпишем вертикальную компоненту поля:

$$g_z(M_0) = \frac{\partial V(M_0)}{\partial z} = -\delta \sum_{q=1}^{\varrho} \cos(z^q, z) V_q(M_0).$$

Очевидно, что полученное нами выражение компонент гравитационного поля на основе формулы О.–Г. имеет более простой вид по сравнению с формулой полученной на основе дифференцирования потенциала силы притяжения. Помимо всего прочего, можно отметить и такой факт

$$\sum_{q=1}^{\varrho} -\cos(z^q, z) V_q(M_0) = \sum_{q=1}^{\varrho} (\zeta^q - z^q) \frac{\partial V_q(M_0)}{\partial z},$$

что само по себе совсем не очевидно.

4. Вторые производные потенциала могут быть представлены следующими соотношениями:

$$\frac{\partial^2 V(M_0)}{\partial r_i \partial r_j} = \frac{\delta}{2} \left( \sum_{q=1}^{\varrho} -\gamma_{z^q, i} \frac{\partial V_q(M_0)}{\partial r_j} + \sum_{q=1}^{\varrho} -\gamma_{z^q, j} \frac{\partial V_q(M_0)}{\partial r_i} + \sum_{q=1}^{\varrho} (\zeta^q - z^q) \frac{\partial^2 V_q(M_0)}{\partial r_i \partial r_j} \right)$$

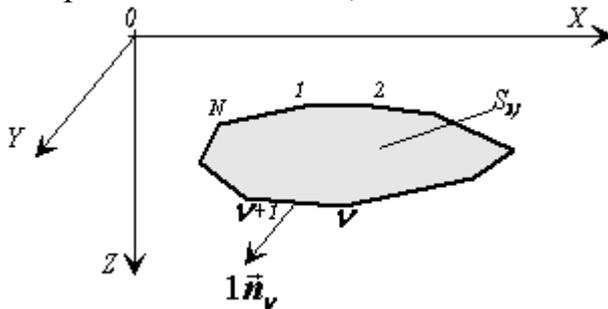
или, что более просто,

$$\frac{\partial^2 V(M_0)}{\partial r_i \partial r_j} = -\delta \sum_{q=1}^{\varrho} \gamma_{z^q, i} \frac{\partial V_q(M_0)}{\partial r_j} = -\delta \sum_{q=1}^{\varrho} \cos(z^q, r_i) \frac{\partial V_q(M_0)}{\partial r_j}.$$

5. Таким образом, как для вычисления гравитационного потенциала многогранника, так и его частных производных необходимо уметь вычислять потенциал и поле силы притяжения многоугольной пластины. Следует отметить, что сама по себе многоугольная пластина является популярной аппроксимационной фигурой. Одним из первых, кто ее использовал при расчете гравитационного эффекта, был итальянский геофизик Тальвани. Перед ним стояла задача оценить гравитационный эффект подводной горы. Для того чтобы создать модель этой горы он использовал карту изолиний глубин. Поскольку каждая из изолиний соответствует определенной глубине, он оцифровал эти изолинии и представил модель горы в виде многоугольных пластин, расположенных на определенных глубинах. Далее, по полученной им формуле были рассчитаны их эффекты. В дальнейшем формулы силы тяжести от горизонтальной многоугольной пластины были получены разными исследователями, и с ними можно познакомиться в Справчнике геофизика, том Гравиразведка и другой литературе. Однако выражение для гравитационного потенциала пластины видимо впервые было получено

В.Н. Страховым. Им же были получены новые выражения для поля силы тяжести и его производных создаваемых такой моделью.

6. Рассмотрим модель горизонтальной пластины  $S_N$  с  $N$  сторонами. Для этого введем декартову систему координат, и будем предполагать, что пластина параллельна плоскости  $oXY$  и лежит на глубине  $\zeta$ . Поскольку мы вновь будем использовать прием, связанный с понижением кратности интеграла, то необходимо задать направление обхода пластины. Обход пластины задает нам направление нормали, которое определяется по правилу буравчика. Если направление нормали будет совпадать с направлением оси  $oZ$ , то такой обход будем считать положительным.



Потенциал пластины определяется следующим образом:

$$V_q(M_0) = G\delta_n \int_{S_N} \frac{1}{r_{MM_0}} dS,$$

где  $\delta_n$  – поверхностная плотность пластины. Для нас представляет интерес получить выражения как для самого потенциала, поскольку через него выражаются элементы полей многогранника, так и для его производных, поскольку

$$\vec{g}(M_0) = \text{grad}V_q(M_0).$$

7. Для того, чтобы получить эти выражения воспользуемся подходом, предложенным В.Н. Страховым. Им были сконструированы следующие конструкции:

$$\frac{1}{r_{MM_0}} = \Delta_{\xi,\eta} (r_{MM_0} - |\zeta - z| \ln(r_{MM_0} + |\zeta - z|)),$$

$$\frac{(\zeta - z)^2}{r_{MM_0}^3} = |\zeta - z| \Delta_{\xi,\eta} \ln(r_{MM_0} + |\zeta - z|).$$

8. Рассмотрим вначале, каким образом можно представить компоненты поля притяжения. Здесь надо рассмотреть два случая: 1-й – как будут представляться горизонтальные компоненты поля в нашей системе координат, и 2-й – представление вертикальной компоненты поля.

Поскольку  $(\zeta - z)$  для нашей модели величина постоянная, то для горизонтальных компонент поля притяжения можно записать:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_x 1\bar{x} + \mathbf{g}_y 1\bar{y} &= \mathbf{grad}_{x,y} V_q(M_0) = \mathbf{grad}_{x,y} \left( G\delta_n \int_{S_N} \frac{1}{r_{MM_0}} dS \right) = \\ &= -G\delta_n \int_{S_N} \mathbf{grad}_{\xi,\eta} \frac{1}{r_{MM_0}} dS = -G\delta_n \oint_{\partial S_N} \frac{1}{r_{MM_0}} 1\bar{\mathbf{n}} dl = -G\delta_n \sum_{\nu=1}^N \int_{L_\nu} \frac{1}{r_{MM_0}} 1\bar{\mathbf{n}}_\nu dl, \end{aligned}$$

где  $1\bar{\mathbf{n}}_\nu$  – орт нормали к  $\nu$ -ой стороне и лежащей в плоскости пластины. Поскольку для каждой из сторон он имеет свое направление, то орт  $1\bar{\mathbf{n}}_\nu$  можно записать перед знаком интеграла. Кроме того, выражение  $G \int_{L_\nu} \frac{1}{r_{MM_0}} dl$  представляет собой потенциал материальной линии с единичной линейной плотностью:

$$V_\nu(M_0) = G \int_{L_\nu} \frac{1}{r_{MM_0}} dl.$$

В результате для горизонтальных компонент поля получим:

$$\mathbf{g}_x 1\bar{x} + \mathbf{g}_y 1\bar{y} = -G\delta_n \sum_{\nu=1}^N 1\bar{\mathbf{n}}_\nu \int_{L_\nu} \frac{1}{r_{MM_0}} dl = -\delta_n \sum_{\nu=1}^N 1\bar{\mathbf{n}}_\nu V_\nu(M_0).$$

Покомпонентная запись будет иметь вид:

$$\mathbf{g}_x(M_0) = \frac{\partial V_q(M_0)}{\partial x} = -\delta_n \sum_{\nu=1}^N \cos(1\bar{\mathbf{n}}_\nu, 1\bar{x}) V_\nu(M_0),$$

$$\mathbf{g}_z(M_0) = \frac{\partial V_q(M_0)}{\partial z} = -\delta_n \sum_{\nu=1}^N \cos(1\bar{\mathbf{n}}_\nu, 1\bar{z}) V_\nu(M_0).$$

Стоит обратить внимание на схожесть этих формул с формулой для поля силы тяжести многогранника, выражаемой через потенциалы его граней:

$$\bar{\mathbf{g}}(M_0) = -G\delta \sum_{q=1}^Q 1\bar{\mathbf{n}}_q \int_{S_q} \frac{1}{r_{MM_0}} dS = -\delta \sum_{q=1}^Q 1\bar{\mathbf{n}}_q V_q(M_0).$$

9. Рассмотрим, каким образом можно представить выражение для вертикальной составляющей поля силы притяжения нашей модели. Выпишем это выражение:

$$\mathbf{g}_z(M_0) = \frac{\partial V_q(M_0)}{\partial z} = G\delta_n \int_{S_N} \frac{\zeta - z}{r_{MM_0}^3} dS,$$

и воспользуемся предложенной В.Н. Страховым подстановкой

$$\frac{(\zeta - z)^2}{r_{MM_0}^3} = |\zeta - z| \Delta_{\xi,\eta} \ln(r_{MM_0} + |\zeta - z|).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_z(M_0) &= G\delta_n \frac{1}{\zeta - z} \int_{S_N} \frac{(\zeta - z)^2}{r_{MM_0}^3} dS = G\delta_n \frac{1}{\zeta - z} \int_{S_N} |\zeta - z| \Delta_{\xi,\eta} \ln(r_{MM_0} + |\zeta - z|) dS = \\ &= G\delta_n \frac{|\zeta - z|}{\zeta - z} \int_{S_N} \Delta_{\xi,\eta} \ln(r_{MM_0} + |\zeta - z|) dS = G\delta_n \frac{|\zeta - z|}{\zeta - z} \oint_{\partial S_N} \frac{\partial \ln(r_{MM_0} + |\zeta - z|)}{\partial n} dl, \end{aligned}$$

где вектор нормали  $\vec{n}$ , как и в предыдущем случае, лежит в плоскости пластины.

10. Теперь вновь вернемся к потенциалу пластины и воспользуемся подстановкой

$$\frac{1}{r_{MM_0}} = \Delta_{\xi,\eta} (r_{MM_0} - |\zeta - z| \ln(r_{MM_0} + |\zeta - z|)).$$

С учетом этой подстановки потенциал пластины можно представить в виде:

$$\begin{aligned} V_q(M_0) &= G\delta_n \int_{S_N} \frac{1}{r_{MM_0}} dS = G\delta_n \int_{S_N} \Delta_{\xi,\eta} (r_{MM_0} - |\zeta - z| \ln(r_{MM_0} + |\zeta - z|)) dS = \\ &= G\delta_n \oint_{\partial S_N} \frac{\partial r_{MM_0}}{\partial n} dl - G\delta_n |\zeta - z| \oint_{\partial S_N} \frac{\partial \ln(r_{MM_0} + |\zeta - z|)}{\partial n} dl. \end{aligned}$$

Сравним второе слагаемое полученного выражения с выражением для вертикальной компоненты поля, создаваемой рассматриваемой моделью пластины:

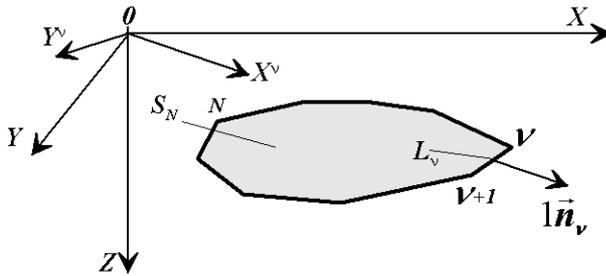
$$\mathbf{g}_z(M_0) = G\delta_n \frac{|\zeta - z|}{\zeta - z} \oint_{\partial S_N} \frac{\partial \ln(r_{MM_0} + |\zeta - z|)}{\partial n} dl.$$

Видно, что второе слагаемое можно выразить через компоненту  $g_z$  поля притяжения пластины с единичной поверхностной плотностью:

$$G\delta_n|\zeta - z| \oint_{\partial S_N} \frac{\partial \ln(r_{MM_0} + |\zeta - z|)}{\partial n} dl = \delta_n(\zeta - z)g_z(M_0) = \delta_n(\zeta - z) \frac{\partial V_q(M_0)}{\partial z}.$$

Рассмотрим первое слагаемое в выражении для потенциала пластины, и представим его в виде суммы интегралов по сторонам многоугольника:

$$G\delta_n \oint_{\partial S_N} \frac{\partial r_{MM_0}}{\partial n} dl = G\delta_n \sum_{v=1}^N \int_{L_v} \frac{\partial r_{MM_0}}{\partial n_v} dl.$$



Для того, чтобы вычислить производную по нормали к  $\nu$ -ой стороне воспользуемся уже опробованным приемом – введем новую систему координат, связанную со сторонами многоугольника. В этой системе

координат ось  $OZ$  сохранит свое направление, ось  $OX^v$  будет совпадать с  $\nu$ -ой нормалью, ось  $OY^v$  – совпадать с  $\nu$ -ой стороной. Во введенной таким образом системе координат расстояние  $r_{MM_0}$  будет определяться следующим образом:

$$r_{MM_0} = \sqrt{(\xi^v - x^v)^2 + (\eta^v - y^v)^2 + (\zeta - z)^2},$$

производная  $\frac{\partial}{\partial n_v} = \frac{\partial}{\partial \xi^v}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{L_v} \frac{\partial r_{MM_0}}{\partial n_v} dl &= \int_{L_v} \frac{\partial r_{MM_0}}{\partial \xi^v} dl = \int_{\eta_1^v}^{\eta_2^v} \frac{(\xi^v - x^v)}{r_{MM_0}} d\eta^v = \\ &= (\xi^v - x^v) \int_{\eta_1^v}^{\eta_2^v} \frac{1}{r_{MM_0}} d\eta^v = (\xi^v - x^v) V_n^v(M_0), \end{aligned}$$

где  $V_n^v(M_0)$  – потенциал материального отрезка с единичной линейной плотностью и совпадающего с  $\nu$ -ой стороной многоугольника.

В результате всех проведенных преобразований для потенциала горизонтальной многоугольной пластины можем записать:

$$V_q(M_0) = \delta_n \sum_{\nu=1}^N (\xi^\nu - x^\nu) V_n^\nu(M_0) - \delta_n (\zeta - z) \frac{\partial V_q(M_0)}{\partial z}.$$

Таким образом, потенциал горизонтальной многоугольной пластины определяется через потенциалы материальных отрезков, совпадающих с сторонами многоугольника и через вертикальную компоненту силы притяжения этой пластины.

11. Вновь вернемся к потенциалу притяжения  $V_n(M_0)$  материального отрезка. Ранее уже было получено его выражение для частного случая, а именно, для случая, когда отрезок совпадает по направлению с одной из координатных осей. Так для стержня, расположенного вдоль оси  $oX$  это выражение имеет вид:

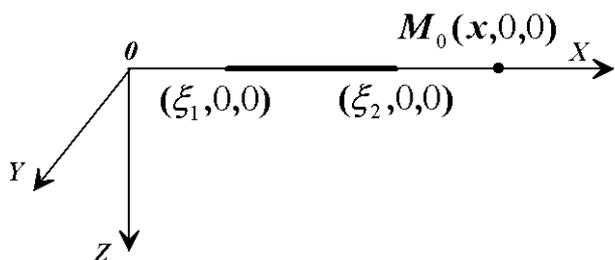
$$V_n(M_0) = G\sigma_n \ln \frac{(\xi_2 - x) + R_2}{(\xi_1 - x) + R_1},$$

где  $\xi_1$  и  $\xi_2$  – координаты положения концов отрезка по оси  $oX$ ,  $R_1$  и  $R_2$  – расстояния от начала и конца отрезка до точки наблюдения  $M_0$ .

Затем нами было показано, как с помощью введения новой координатной системы, связанной с этим отрезком, можно получить выражения и осуществить вычисления элементов поля, создаваемого отрезком при его произвольном расположении относительно основной системы координат.

Не составляет особого труда ввести систему координат, связанную с этим отрезком, провести в ней вычисления, и вернуться к исходной системе. Таким образом, приведенная формула для потенциала вполне удобна, но тем не менее, она не совсем хороша с вычислительной точки зрения. Для примера рассмотрим случай, когда отрезок лежит на оси  $oX$ . В этом случае расстояния  $R_1$  и  $R_2$  будут равны:

$$R_1 = \sqrt{(\xi_1 - x)^2 + y^2 + z^2}, \quad R_2 = \sqrt{(\xi_2 - x)^2 + y^2 + z^2}.$$



Пусть точка наблюдения  $M_0$  расположена на оси  $oX$ , в точке с координатами  $(x, 0, 0)$ , при этом  $x > \xi_2$ . Рассмотрим, чему будет равен числитель дроби, стоящий под знаком логарифма:

$$(\xi_2 - x) + R_2 = (\xi_2 - x) + \sqrt{(\xi_2 - x)^2} = (\xi_2 - x) + |\xi_2 - x| = 0,$$

поскольку  $(\xi_2 - x) < 0$ . Соответственно сама дробь оказывается равной нулю, и логарифм от такой дроби оказывается неопределенным (логарифм нуля – бесконечно большая отрицательная величина). В то же время потенциал в этой точке имеет вполне конкретное значение, и с удалением от отрезка его значения стремятся к нулю. Конечно, эту особенность можно легко устранить, однако это создает дополнительные трудности, связанными с необходимостью проверки положения расчетной точки  $M_0$ .

С этой точки зрения стоит получить такое выражение, которое не зависело бы от выбранной системы координат и позволяло бы вычислять значение потенциала во всех точках пространства. В.Н. Страховым такая формула была предложена:

$$V_{,n}(M_0) = G\delta_{,n} \ln \frac{R_1 + R_2 + L}{R_1 + R_2 - L},$$

где  $R_1$  и  $R_2$  – расстояния от концов отрезка до точки наблюдения  $M_0$ ,  $L$  – длина отрезка.

Для того чтобы показать справедливость этой формулы повторим предложенные им выкладки, при этом будем предполагать, что отрезок располагается вдоль оси  $OX$ . Тогда,

$$\xi_2 - \xi_1 = L \quad \text{– длина отрезка;}$$

$$(\xi_2 - x) - (\xi_1 - x) = L;$$

$$\begin{aligned} R_2^2 - R_1^2 &= ((\xi_2 - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2) - ((\xi_1 - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2) = \\ &= (\xi_2 - x)^2 - (\xi_1 - x)^2 = L((\xi_2 - x) + (\xi_1 - x)); \end{aligned}$$

$$((\xi_2 - x) + (\xi_1 - x)) = \frac{R_2^2 - R_1^2}{L}; \quad ((\xi_2 - x) - (\xi_1 - x)) = L;$$

$$\xi_2 - x = \frac{1}{2} \left( \frac{R_2^2 - R_1^2}{L} + L \right), \quad \xi_1 - x = \frac{1}{2} \left( \frac{R_2^2 - R_1^2}{L} - L \right);$$

$$\begin{aligned}
V_n(M_0) &= G\sigma_n \ln \frac{\frac{1}{2} \left( \frac{R_2^2 - R_1^2}{L} + L \right) + R_2}{\frac{1}{2} \left( \frac{R_2^2 - R_1^2}{L} - L \right) + R_1} = G\sigma_n \ln \frac{R_2^2 + 2R_2L + L^2 - R_1^2}{R_2^2 - L^2 + 2R_1L - R_1^2} = \\
&= G\sigma_n \ln \frac{(R_2 + L)^2 - R_1^2}{R_2^2 - (R_1 - L)^2} = G\sigma_n \ln \frac{(R_2 + L - R_1)(R_2 + L + R_1)}{(R_2 - R_1 + L)(R_2 + R_1 - L)} = \\
&= G\sigma_n \ln \frac{(R_2 + R_1 + L)}{(R_2 + R_1 - L)}.
\end{aligned}$$

12. Получим теперь выражение для вертикальной составляющей поля притяжения горизонтальной многоугольной пластины. Как уже отмечалось, обход пластины должен быть выбран таким образом, что нормаль к пластине совпадает по направлению с осью  $\mathbf{oZ}$ . Для этого случая нами было получено следующее представление для вертикальной компоненты поля  $\mathbf{g}_z$ :

$$\mathbf{g}_z(M_0) = G\delta_n \frac{|\zeta - z|}{\zeta - z} \oint_{\partial S_N} \frac{\partial \ln(r_{MM_0} + |\zeta - z|)}{\partial n} dl.$$

Представим интеграл по замкнутому контуру суммой интегралов по отрезкам, образующим стороны многоугольника, и вновь для каждой  $\nu$ -ой стороны введем свою систему координат, так, что ось  $\mathbf{oX}^\nu$  будет направлена по нормали к этой стороне, ось  $\mathbf{oY}^\nu$  будет совпадать с  $\nu$ -ой стороной, а ось  $\mathbf{oZ}$  останется без изменений. Тогда, как мы это уже делали ранее, можем осуществить следующие преобразования:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_z(M_0) &= G\delta_n \frac{|\zeta - z|}{\zeta - z} \sum_{\nu=1}^N \int_{L_\nu} \frac{\partial \ln(r_{MM_0} + |\zeta - z|)}{\partial n_\nu} dl = \\
&= G\delta_n \frac{|\zeta - z|}{\zeta - z} \sum_{\nu=1}^N \int_{L_\nu} \frac{\partial \ln(r_{MM_0} + |\zeta - z|)}{\partial \xi^\nu} dl = G\delta_n \frac{|\zeta - z|}{\zeta - z} \sum_{\nu=1}^N \int_{\eta_1^\nu}^{\eta_2^\nu} \frac{(\xi^\nu - x^\nu)}{(r_{MM_0} + |\zeta - z|)r_{MM_0}} d\eta^\nu = \\
&= G\delta_n \frac{1}{\zeta - z} \sum_{\nu=1}^N (\xi^\nu - x^\nu) \int_{\eta_1^\nu}^{\eta_2^\nu} \frac{|\zeta - z|}{(r_{MM_0} + |\zeta - z|)r_{MM_0}} d\eta^\nu =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= G\delta_n \frac{1}{\zeta - z} \sum_{\nu=1}^N (\xi^\nu - x^\nu) \left( \int_{\eta_1^\nu}^{\eta_2^\nu} \frac{1}{r_{MM_0}} d\eta^\nu - \int_{\eta_1^\nu}^{\eta_2^\nu} \frac{1}{r_{MM_0} + |\zeta - z|} d\eta^\nu \right) = \\
&= G\delta_n \frac{1}{\zeta - z} \sum_{\nu=1}^N (\xi^\nu - x^\nu) (I_1 - I_2).
\end{aligned}$$

Первый интеграл этой суммы нами уже рассматривался:

$$I_1 = \int_{\eta_1^\nu}^{\eta_2^\nu} \frac{1}{r_{MM_0}} d\eta^\nu = \ln \frac{(\eta_2^\nu - y^\nu) + R_2}{(\eta_1^\nu - y^\nu) + R_1},$$

где, как и раньше,  $R_1$  и  $R_2$  – расстояния от концов отрезка до точки наблюдения  $M_0$ .

Рассмотрим 2-ой интеграл:

$$I_2 = \int_{\eta_1^\nu}^{\eta_2^\nu} \frac{1}{r_{MM_0} + |\zeta - z|} d\eta^\nu = \int_{\eta_1^\nu}^{\eta_2^\nu} \frac{1}{|\zeta - z| + \sqrt{(\xi^\nu - x^\nu)^2 + (\eta^\nu - y^\nu)^2 + (\zeta - z)^2}} d\eta^\nu,$$

и введем обозначения:

$$|\zeta - z| = p, \quad (\xi^\nu - x^\nu)^2 + (\zeta - z)^2 = q^2, \quad (\eta^\nu - y^\nu) = u.$$

Тогда этот интеграл приобретет вид:

$$\int_{\eta_1^\nu - y^\nu}^{\eta_2^\nu - y^\nu} \frac{du}{p + \sqrt{u^2 + q^2}}.$$

Такой интеграл можно взять с помощью подстановки Эйлера:  $w = u + \sqrt{u^2 + q^2}$ . Используя эту подстановку, получим:

$$u = w - \sqrt{u^2 + q^2}, \quad u^2 = w^2 - 2w\sqrt{u^2 + q^2} + u^2 + q^2, \quad \sqrt{u^2 + q^2} = \frac{w^2 + q^2}{2w},$$

$$u = w - \frac{w^2 + q^2}{2w} = \frac{w^2 - q^2}{2w}, \quad du = \frac{2w \cdot 2w - 2(w^2 - q^2)}{4w^2} dw = \frac{w^2 + q^2}{2w^2} dw.$$

Поскольку теперь интегрирование происходит по переменной  $w$ , то изменятся и пределы интегрирования: нижний предел  $-(\eta_1^v - y^v) + R_1$ , верхний  $-(\eta_2^v - y^v) + R_2$ .

Дальнейшие преобразования будут следующими:

$$\begin{aligned} \int_{\eta_1^v - y^v}^{\eta_2^v - y^v} \frac{du}{p + \sqrt{u^2 + q^2}} &= \int_{(\eta_1^v - y^v) + R_1}^{(\eta_2^v - y^v) + R_2} \frac{w^2 + q^2}{p + \frac{w^2 + q^2}{2w}} dw = \int_{(\eta_1^v - y^v) + R_1}^{(\eta_2^v - y^v) + R_2} \frac{2w(w^2 + q^2)}{2w^2(w^2 + 2pw + q^2)} dw = \\ &= \int_{(\eta_1^v - y^v) + R_1}^{(\eta_2^v - y^v) + R_2} \frac{w^2 + 2pw + q^2 - 2pw}{w(w^2 + 2pw + q^2)} dw = \int_{(\eta_1^v - y^v) + R_1}^{(\eta_2^v - y^v) + R_2} \left( \frac{1}{w} - \frac{2p}{w^2 + 2pw + q^2} \right) dw = \\ &= \int_{(\eta_1^v - y^v) + R_1}^{(\eta_2^v - y^v) + R_2} \frac{1}{w} dw - 2p \int_{(\eta_1^v - y^v) + R_1}^{(\eta_2^v - y^v) + R_2} \frac{1}{w^2 + 2pw + q^2} dw = I_{21} - 2pI_{22}. \end{aligned}$$

Первый интеграл легко берется

$$I_{21} = \int_{(\eta_1^v - y^v) + R_1}^{(\eta_2^v - y^v) + R_2} \frac{1}{w} dw = \ln \frac{(\eta_2^v - y^v) + R_2}{(\eta_1^v - y^v) + R_1}.$$

Рассмотрим второй интеграл:

$$I_{22} = \int_{(\eta_1^v - y^v) + R_1}^{(\eta_2^v - y^v) + R_2} \frac{1}{w^2 + 2pw + q^2} dw.$$

Для того, чтобы его взять введем следующую подстановку  $z = w + p$ . Тогда

$$w^2 + 2pw + q^2 = (z - p)^2 + 2p(z - p) + q^2 = z^2 - p^2 + q^2.$$

С учетом того, что  $|\zeta - z| = p$ ,  $(\xi^v - x^v)^2 + (\zeta - z)^2 = q^2$ , последнее выражение приобретет вид:

$$w^2 + 2pw + q^2 = z^2 - p^2 + q^2 = z^2 + (\xi^v - x^v)^2,$$

и, соответственно,

$$\int_{(\eta_1^v - y^v) + R_1}^{(\eta_2^v - y^v) + R_2} \frac{1}{w^2 + 2pw + q^2} dw = \int_{(\eta_1^v - y^v) + R_1 + p}^{(\eta_2^v - y^v) + R_2 + p} \frac{dz}{z^2 + (\xi^v - x^v)^2}.$$

Сделаем еще одну подстановку:  $v = \frac{z}{(\xi^v - x^v)}$ , тогда

$$\int_{(\eta_1^v - y^v) + R_1 + p}^{(\eta_2^v - y^v) + R_2 + p} \frac{dz}{z^2 + (\xi^v - x^v)^2} = \frac{1}{\xi^v - x^v} \int_{\frac{\xi^v - x^v}{(\eta_1^v - y^v) + R_1 + p}}^{\frac{\xi^v - x^v}{(\eta_2^v - y^v) + R_2 + p}} \frac{dv}{1 + v^2}.$$

Полученный интеграл представляет собой разность арктангенсов, и, в принципе, на этом можно было бы остановиться. Однако мы продолжим преобразования. Это связано с тем, значения арктангенсов зависят от расстояний  $R_1$  и  $R_2$ . При их больших величинах значения арктангенсов будут близки к  $(\pi/2)$ , в то же время значения самого интеграла с увеличением  $R_1$  и  $R_2$  должно убывать. Это означает, что мы можем потерять точность при вычислении значений поля по этой формуле. Поэтому преобразуем полученный интеграл, введя очередную подстановку:

$$v = \frac{1}{v'}, \quad dv = -\frac{1}{(v')^2} dv', \quad \frac{-\frac{1}{(v')^2} dv'}{1 + \left(\frac{1}{v'}\right)^2} = \left(-\frac{1}{(v')^2}\right) \frac{(v')^2}{1 + (v')^2} dv' = -\frac{dv'}{1 + (v')^2};$$

$$\frac{1}{\xi^v - x^v} \int_{\frac{\xi^v - x^v}{(\eta_1^v - y^v) + R_1 + p}}^{\frac{\xi^v - x^v}{(\eta_2^v - y^v) + R_2 + p}} \frac{dv}{1 + v^2} = \frac{1}{\xi^v - x^v} \int_{\frac{\xi^v - x^v}{(\eta_2^v - y^v) + R_2 + p}}^{\frac{\xi^v - x^v}{(\eta_1^v - y^v) + R_1 + p}} \frac{dv'}{1 + (v')^2} =$$

$$= \frac{1}{\xi^v - x^v} \left( \operatorname{arctg} \frac{\xi^v - x^v}{(\eta_1^v - y^v) + R_1 + p} - \operatorname{arctg} \frac{\xi^v - x^v}{(\eta_2^v - y^v) + R_2 + p} \right).$$

Введя обозначения:

$$w_1^v = (\eta_1^v - y^v) + R_1 + p, \quad w_2^v = (\eta_2^v - y^v) + R_2 + p, \quad \text{где } p = |\zeta - z|,$$

и записав разность арктангенсов в виде одного арктангенса, последнее выражение можно представить в виде:

$$\frac{1}{\xi^v - x^v} \left( \operatorname{arctg} \frac{\xi^v - x^v}{(\eta_1^v - y^v) + R_1 + p} - \operatorname{arctg} \frac{\xi^v - x^v}{(\eta_2^v - y^v) + R_2 + p} \right) =$$

$$= \frac{1}{\xi^v - x^v} \operatorname{arctg} \frac{(\xi^v - x^v)(w_2^v - w_1^v)}{w_2^v w_1^v + (\xi^v - x^v)^2}.$$

При этом мы воспользовались соотношением

$$\operatorname{arctg} X - \operatorname{arctg} Y = \operatorname{arctg} \frac{X - Y}{1 + XY}, \text{ при условии, что } XY > -1.$$

Это справедливо для нашего случая, поскольку выражения  $\frac{\xi^v - x^v}{(\eta_1^v - y^v) + R_1 + p}$  и  $\frac{\xi^v - x^v}{(\eta_2^v - y^v) + R_2 + p}$  всегда по абсолютной величине меньше 1.

Напомним, с чего начинались наши преобразования. Мы представили вертикальную составляющую поля силы притяжения горизонтальной пластины в следующем виде:

$$g_z(M_0) = G\delta_n \frac{1}{\zeta - z} \sum_{v=1}^N (\xi^v - x^v) (I_1 - I_2).$$

Первый интеграл, как мы уже отмечали, равен

$$\int_{\eta_1^v}^{\eta_2^v} \frac{1}{r_{MM_0}} d\eta^v = \ln \frac{(\eta_2^v - y^v) + R_2}{(\eta_1^v - y^v) + R_1}.$$

Второй интеграл после преобразований оказался равен разности двух интегралов:

$$I_2 = I_{21} - 2pI_{22},$$

первый из которых равен

$$I_{21} = \ln \frac{(\eta_2^v - y^v) + R_2}{(\eta_1^v - y^v) + R_1},$$

а второй –

$$I_{22} = \frac{1}{\xi^{\nu} - x^{\nu}} \operatorname{arctg} \frac{(\xi^{\nu} - x^{\nu})(w_2^{\nu} - w_1^{\nu})}{w_2^{\nu} w_1^{\nu} + (\xi^{\nu} - x^{\nu})^2}.$$

Поскольку интегралы  $I_1$  и  $I_{21}$  равны ( $I_1 = I_{21}$ ), то выражение для вертикальной составляющей приобретает вид:

$$\begin{aligned} g_z(M_0) &= G\delta_n \frac{1}{\zeta - z} \sum_{\nu=1}^N (\xi^{\nu} - x^{\nu}) 2pI_{22} = \\ &= G\delta_n \frac{1}{\zeta - z} \sum_{\nu=1}^N (\xi^{\nu} - x^{\nu}) \left( 2|\zeta - z| \frac{1}{\xi^{\nu} - x^{\nu}} \operatorname{arctg} \frac{(\xi^{\nu} - x^{\nu})(w_2^{\nu} - w_1^{\nu})}{w_2^{\nu} w_1^{\nu} + (\xi^{\nu} - x^{\nu})^2} \right) = \\ &= 2G\delta_n \operatorname{sign}(\zeta - z) \sum_{\nu=1}^N \operatorname{arctg} \frac{(\xi^{\nu} - x^{\nu})(w_2^{\nu} - w_1^{\nu})}{w_2^{\nu} w_1^{\nu} + (\xi^{\nu} - x^{\nu})^2}. \end{aligned}$$

13. Теперь можно снова вернуться к выражению для потенциала пластины. Как мы уже отмечали, это выражение может быть представлено в следующем виде:

$$V_q(M_0) = \delta_n \sum_{\nu=1}^N (\xi^{\nu} - x^{\nu}) V_{\nu}^{\nu}(M_0) - \delta_n (\zeta - z) \frac{\partial V_q(M_0)}{\partial z},$$

где

$$V_{\nu}^{\nu}(M_0) = G \ln \frac{R_1^{\nu} + R_2^{\nu} + L^{\nu}}{R_1^{\nu} + R_2^{\nu} - L^{\nu}}$$

– потенциал отрезка, совпадающего с  $\nu$ -ой стороной пластины, с единичной линейной плотностью,  $R_1^{\nu}$  и  $R_2^{\nu}$  – расстояния от концов отрезка до точки наблюдения,  $L^{\nu}$  – его длина;

$$\frac{\partial V_q(M_0)}{\partial z} = 2G \operatorname{sign}(\zeta - z) \sum_{\nu=1}^N \operatorname{arctg} \frac{(\xi^{\nu} - x^{\nu})(w_2^{\nu} - w_1^{\nu})}{w_2^{\nu} w_1^{\nu} + (\xi^{\nu} - x^{\nu})^2}$$

– вертикальная составляющая притяжения пластины с единичной поверхностной плотностью;

$$w_1^{\nu} = (\eta_1^{\nu} - y^{\nu}) + R_1^{\nu} + |\zeta - z|, \quad w_2^{\nu} = (\eta_2^{\nu} - y^{\nu}) + R_2^{\nu} + |\zeta - z|.$$

Значения  $(x^\nu, y^\nu, z)$  соответствуют координатам расчетной точки  $M_0$ , а значения  $(\xi^\nu, \eta_1^\nu, \zeta)$  и  $(\xi^\nu, \eta_2^\nu, \zeta)$  – координатам  $\nu$ -ой стороны многоугольника в системе координат, связанной с этой стороной, при этом ось  $oX^\nu$  направлена ортогонально  $\nu$ -ой стороне и лежит в плоскости пластины, а ось  $oY^\nu$  параллельна этой стороне. Система координат  $oX^\nu Y^\nu Z$  образует правую тройку.

14. Подведем некоторый итог. Нами были получены выражения для потенциала силы притяжения и его производных для однородного многогранника:

$$V(M_0) = \frac{\delta}{2} \sum_{q=1}^Q (\zeta^q - z^q) V_q(M_0);$$

$$\bar{g}(M_0) = -\delta \sum_{q=1}^Q l \bar{n}_q V_q(M_0).$$

Как видно из этих выражений, поле силы притяжения такого многогранника определяется через потенциалы его граней, в предположении, что эти грани представляют собой многоугольные пластины с постоянной единичной плотностью.

В свою очередь потенциал пластины определяется через потенциалы материальных отрезков совпадающих с ребрами пластины и компоненту поля силы тяжести ортогональную к плоскости пластины:

$$V_q(M_0) = \delta_n \sum_{\nu=1}^N (\xi^{q\nu} - x^{q\nu}) V_{\nu}^q(M_0) - \delta_n (\zeta^q - z^q) \frac{\partial V_q(M_0)}{\partial z^q}.$$

Таким образом, алгоритм расчета поля от многогранника будет следующим. Для каждой  $q$ -ой грани многоугольника вводятся новые системы координат так, что ось  $oZ^q$  совпадает с внешней нормалью к этой стороне, а оси  $oX^{q\nu}$  и  $oY^{q\nu}$  определяются сторонами грани. Вопрос о том, как вводится такая система координат, мы рассматривали в предыдущей лекции. В этой новой системе координат рассчитываются координаты расчетной точки  $M_0(x^{q\nu}, y^{q\nu}, z^q)$  и координаты начала  $(\xi^{q\nu}, \eta_1^{q\nu}, \zeta^q)$  и конца  $(\xi^{q\nu}, \eta_2^{q\nu}, \zeta^q)$   $\nu$ -ой стороны этой многоугольной пластины. Далее вычисляются значения потенциалов отрезков, совпадающих со сторонами пластины, и вертикальная составляющая притяжения самой пластины в этой системе координат, после чего определяется потенциал самой пластины в точке  $M_0$ . Зная направление нормали  $\bar{n}_q$  к  $q$ -ой грани, определяются компоненты поля силы притяжения, связанные с  $q$ -ой гранью многогранника, уже в исходной, основной, системе координат

**oXYZ.** Для того чтобы получить эффект от всего многогранника необходимо будет рассчитать эффекты от всех граней и их просуммировать.

15. Перейдем к вопросу вычисления аномального магнитного поля многогранника с постоянной намагниченностью  $\vec{I}$ . Как нами ранее было показано, решение этой задачи может быть основано на двух подходах. В основе одного из них лежит соотношение Пуассона о связи потенциалов гравитационного и магнитного полей, второй – на представлении поля в виде эффектов поверхностных фиктивных “магнитных зарядов”.

Так, соотношение Пуассона для компонент аномального магнитного поля имеет вид:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \frac{\mu_0}{4\pi} \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \end{bmatrix},$$

где  $I_x, I_y, I_z$  – компоненты вектора намагниченности,  $V_{ij}$  – вторые производные потенциала  $V$ , определяемого следующим образом:

$$V(M_0) = \int_D \frac{1}{r_{MM_0}} dv.$$

С учетом того, что компоненты аномального гравитационного поля, создаваемого многогранником, выражаются через потенциалы его граней  $V_q$ :

$$\frac{\partial V(M_0)}{\partial r_i} = -\sum_{q=1}^Q \cos(z^q, r_i) V_q(M_0),$$

то вторые производные будут представляться через компоненты поля, создаваемого пластинами, совпадающими с гранями многогранника и имеющими единичную поверхностную плотность:

$$\frac{\partial^2 V(M_0)}{\partial r_i \partial r_j} = -\sum_{q=1}^Q \cos(z^q, r_i) \frac{\partial V_q(M_0)}{\partial r_j}.$$

В этих формулах  $r_i$  и  $r_j$  могут принимать значения  $x, y, z$ ;  $Q$  – число граней в многограннике, направление оси  $z^q$  совпадает с направлением внешней нормали к  $q$ -ой грани многогранника.

16. Вторым подход основан на том, что магнитное поле однородно намагниченного объема можно представить как поле некоторых фиктивных “магнитных зарядов”, сосредоточенных на поверхности этого объема. В частности для скалярного магнитного потенциала нами было ранее получено следующее соотношение:

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\delta_s(M)}{r_{MM_0}} dS = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\vec{I} \cdot 1\vec{n}}{r_{MM_0}} dS.$$

Применительно к многограннику это соотношение приобретет вид:

$$U(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\vec{I} \cdot 1\vec{n}}{r_{MM_0}} dS = \frac{1}{4\pi} \sum_{q=1}^Q \int_{S_q} \frac{\vec{I} \cdot 1\vec{n}_q}{r_{MM_0}} dS = \frac{1}{4\pi} \sum_{q=1}^Q \int_{S_q} \frac{\delta_q}{r_{MM_0}} dS = \frac{1}{4\pi} \sum_{q=1}^Q \delta_q V_q(M_0)$$

где  $\delta_q = \vec{I} \cdot 1\vec{n}_q$  – поверхностная плотность “магнитных зарядов”  $q$ -ой грани,  $V_q$  – потенциал притяжения  $q$ -ой грани.

Напряженность аномального магнитного поля определяется через градиент скалярного потенциала:

$$\vec{H}(M_0) = -\text{grad}U(M_0).$$

Для компонент поля создаваемого многогранником, и с учетом того, что нас интересует не значения напряженности, а значения индукции, получим:

$$X(M_0) = -\mu_0 \frac{\partial U(M_0)}{\partial x} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{q=1}^Q \delta_q \frac{\partial V_q(M_0)}{\partial x},$$

$$Y(M_0) = -\mu_0 \frac{\partial U(M_0)}{\partial y} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{q=1}^Q \delta_q \frac{\partial V_q(M_0)}{\partial y},$$

$$Z(M_0) = -\mu_0 \frac{\partial U(M_0)}{\partial z} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{q=1}^Q \delta_q \frac{\partial V_q(M_0)}{\partial z}.$$

17. Таким образом, как при вычислении компонент аномального магнитного поля на основе соотношения Пуассона, так и при вычислении поля через фиктивные “магнитные заряды”, алгоритм будет один и тот же. Вводится новая система координат, связанная с  $q$ -ой гранью многогранника. Ось  $oZ_q$  этой системы будет совпадать по направлению с внешней нормалью к этой грани. Далее, на основании полученных ранее

соотношений для элементов притяжения горизонтальной многоугольной пластины, рассчитываются компоненты ее силы притяжения. Если расчет ведется через фиктивные “магнитные заряды”, то вычисляется и их поверхностная плотность на каждой грани. После чего вычисляется эффект этой грани в исходной системе координат. Общий эффект будет определяться как сумма эффектов от каждой грани в отдельности.

18. Сделаем еще одно замечание. Казалось бы, что расчет поля через фиктивные “магнитные заряды” представляется менее трудоемкой операцией по сравнению с расчетом поля на основе соотношения Пуассона. Тем не менее, по трудоемкости эти вычисления совпадают. Для того чтобы это показать представим поверхностную плотность зарядов  $q$ -ой грани следующим образом:

$$\delta_q = \vec{I} \cdot 1\vec{n}_q = I_x \cos(x, \vec{n}_q) + I_y \cos(y, \vec{n}_q) + I_z \cos(z, \vec{n}_q).$$

Вторые производные потенциала притяжения многогранника выражаются следующим образом:

$$\frac{\partial^2 V(M_0)}{\partial r_i \partial r_j} = - \sum_{q=1}^{\rho} \cos(z^q, r_i) \frac{\partial V_q(M_0)}{\partial r_j}.$$

С учетом того, что  $\frac{\partial^2 V(M_0)}{\partial r_i \partial r_j} = \frac{\partial^2 V(M_0)}{\partial r_j \partial r_i}$ , выражение для  $\frac{\partial^2 V(M_0)}{\partial r_i \partial r_j}$  можно представить в виде:

$$\frac{\partial^2 V(M_0)}{\partial r_i \partial r_j} = - \sum_{q=1}^{\rho} \cos(z^q, r_j) \frac{\partial V_q(M_0)}{\partial r_i}.$$

Выпишем для примера  $X$  компоненту аномального магнитного поля, получаемую из соотношения Пуассона:

$$\begin{aligned} X &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( I_x \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + I_y \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + I_z \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} \right) = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left( - I_x \sum_{q=1}^{\rho} \cos(z^q, x) \frac{\partial V_q}{\partial x} - I_y \sum_{q=1}^{\rho} \cos(z^q, y) \frac{\partial V_q}{\partial x} - I_z \sum_{q=1}^{\rho} \cos(z^q, z) \frac{\partial V_q}{\partial x} \right) = \\ &= - \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \sum_{q=1}^{\rho} I_x \cos(z^q, x) \frac{\partial V_q}{\partial x} + \sum_{q=1}^{\rho} I_y \cos(z^q, y) \frac{\partial V_q}{\partial x} + \sum_{q=1}^{\rho} I_z \cos(z^q, z) \frac{\partial V_q}{\partial x} \right) = \end{aligned}$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi} \left( \sum_{q=1}^Q (I_x \cos(z^q, x) + I_y \cos(z^q, y) + I_z \cos(z^q, z)) \frac{\partial V_q}{\partial x} \right).$$

Поскольку ось  $\mathbf{oZ}_q$  совпадает по направлению с внешней нормалью  $\vec{n}_q$ , то выражение, стоящее под знаком суммы в круглых скобках будет равно поверхностной плотности зарядов  $q$ -ой грани:

$$I_x \cos(z^q, x) + I_y \cos(z^q, y) + I_z \cos(z^q, z) = \delta_q.$$

Таким образом, для компоненты  $X$  получаем:

$$X = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left( \sum_{q=1}^Q \delta_q \frac{\partial V_q}{\partial x} \right),$$

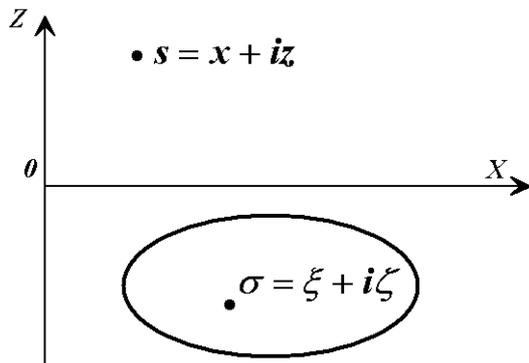
что совпадает с полученным ранее выражением при вычислении поля через поверхностные заряды.

#### **Литература.**

1. Блох Ю.И. Решение прямых задач гравиразведки и магниторазведки.: Учеб. пособие. – М: МГГА. 1993. 79 с. ([www.sigma3d.com](http://www.sigma3d.com)).
2. Блох Ю.И. Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий.: Учеб. пособие. 2009. 232 с. ([www.sigma3d.com](http://www.sigma3d.com)).
3. Кравцов Г.Г. Поле притяжения многогранников переменной плотности // Записки ЛГУ. 1978. т. 76. с. 8-17.
4. Кравцов Г.Г. Аналогии в аналитическом описании поля притяжения прямолинейного материального отрезка, многоугольной материальной пластинки и объемных масс многогранника // Записки ЛГУ. 1987. т. 113. с. 97-107.
5. Страхов В.Н., Лапина М.И. Прямые задачи гравиметрии и магнитометрии для произвольных однородных многогранников. // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1982. № 4. с. 45-67.
6. Страхов В.Н., Лапина М.И. Прямая и обратная задача гравиметрии и магнитометрии для произвольных однородных многогранников. // Теория и практика интерпретации гравитационных и магнитных полей в СССР. Мат-лы III всесоюзной школы-семинара. Киев. Наукова думка. 1983. С. 3 – 87.
7. Talwani M., Ewing M. Rapid computation of gravitational attraction of three dimensional bodies of arbitrary shape. // Geophys. 1960. V.25. N1. P. 203 – 225.

**Лекция 6. Применение теории функции комплексной переменной при решении прямых двумерных задач гравиразведки и магниторазведки.**

Прежде всего отметим, что значительные успехи в развитии математической теории интерпретации как гравитационных, так и магнитных аномалий был достигнут благодаря применению теории функции комплексной переменной (ТФКП). Большой вклад в изучение таких вопросов как трансформации полей, решение прямых задач, анализ единственности и эквивалентности решений внесли В.Н.Страхов, В.И. Цирульский, М.С.Жданов и ряд других исследователей.



1. Введем систему координат с осью  $oX$ , направленной вправо, и осью  $oY$  – вверх, так, как это принято в теории функции комплексной переменной. В то же время в практике гравиразведки и магниторазведки принято ось, определяющую положение глубины источника обозначать как ось  $oZ$ . С тем, чтобы

сохранить принятые обозначения, переобозначим ось  $oY$  как ось  $oZ$ , и сохраним ее направление вверх. Этим эта система будет отличаться от той, которая обычно используется в геофизике (ось  $oX$  – вправо, ось  $oZ$  – вниз).

В этой системе координат точку  $M_0$ , в которой будем определять значения поля, с координатами  $(x, z)$  обозначим комплексным числом  $s = x + iz$ ,  $i$  – мнимая единица. Соответственно точку с координатами  $(\xi, \zeta)$  в которой будет располагаться источник поля (точка интегрирования), обозначим через  $\sigma = \xi + i\zeta$ .

2. Так как в области свободной от источников гравитационные и магнитные поля удовлетворяют уравнению Лапласа, то для них справедливы следующие соотношения:

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{g} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{g} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_z}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial g_z}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial z} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\partial g_x}{\partial x} = -\frac{\partial g_z}{\partial z} \\ \frac{\partial g_z}{\partial x} = \frac{\partial g_x}{\partial z} \end{array} \right\};$$

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} \vec{H} = 0 \\ \operatorname{rot} \vec{H} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\partial H_x}{\partial x} = -\frac{\partial H_z}{\partial z} \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{\partial H_x}{\partial z} \end{array} \right\}.$$

Здесь под вектором  $\vec{g} = g_x 1\vec{x} + g_z 1\vec{z}$  понимается вектор напряженности гравитационного поля с компонентами  $g_x$  и  $g_z$  (сила притяжения), а под вектором  $\vec{H} = H_x 1\vec{x} + H_z 1\vec{z} = X 1\vec{x} + Z 1\vec{z}$  – вектор напряженности магнитного поля.

Полученные соотношения являются условиями Коши–Римана для следующих комплексных функций:

$$G(s) = g_z(x, z) + i g_x(x, z); \quad H(s) = Z(x, z) + i X(x, z).$$

Так как эти функции удовлетворяют условиям Коши–Римана, то они являются аналитическими, и соответственно носят названия комплексной напряженности гравитационного поля и комплексной напряженности магнитного поля.

Здесь надо сделать следующее замечание. Функции следующего вида

$$G(s) = -g_x + i g_z, \quad H(s) = -X + i Z$$

так же удовлетворяют условиям Коши–Римана, и, следовательно, с их помощью могут быть определены комплексные напряженности гравитационного и магнитного полей. Возможны и другие представления комплексных напряженностей. Однако в дальнейшем мы будем использовать первое определение, которое применяется в работах В.Н. Страхова.

4. Введем понятие комплексного гравитационного и магнитного потенциалов следующими соотношениями:

$$\Pi_g(s) = \Phi_g(x, z) + i V_g(x, z), \quad \Pi_m(s) = \Phi_m(x, z) + i U_m(x, z),$$

где  $V_g$  – скалярный гравитационный, а  $U_m$  – скалярный магнитный потенциалы,  $\Phi_g$  и  $\Phi_m$  – сопряженные к ним гармонические функции. Напомним, что компоненты гравитационного и магнитного полей определяются соотношениями:

$$g_x = \frac{\partial V_g}{\partial x}, \quad g_z = \frac{\partial V_g}{\partial z}, \quad X = -\frac{\partial U_m}{\partial x}, \quad Z = -\frac{\partial U_m}{\partial z}.$$

Напряженности гравитационного и магнитного полей будут определяться через свои потенциалы следующим образом:

$$G(s) = \frac{d\Pi_g(s)}{ds}, \quad H(s) = -\frac{d\Pi_m(s)}{ds}.$$

Для того, чтобы показать, что это действительно так, нужно вспомнить, как выражается дифференцирование по комплексной переменной  $s$  через действительные переменные  $x$  и  $z$ :

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{d\Pi_g(s)}{ds} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Pi_g}{\partial x} - i \frac{\partial \Pi_g}{\partial z} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi_g}{\partial x} + i \frac{\partial V_g}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi_g}{\partial z} + \frac{\partial V_g}{\partial z} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial V_g}{\partial z} + 2i \frac{\partial V_g}{\partial x} \right) = g_z + i g_x; \\ H(s) &= -\frac{d\Pi_m(s)}{ds} = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Pi_m}{\partial x} - i \frac{\partial \Pi_m}{\partial z} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi_m}{\partial x} + i \frac{\partial U_m}{\partial x} - i \frac{\partial \Phi_m}{\partial z} + \frac{\partial U_m}{\partial z} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left( 2 \frac{\partial U_m}{\partial z} + 2i \frac{\partial U_m}{\partial x} \right) = Z + iX. \end{aligned}$$

Отметим, что в общем случае комплексная функция может быть функцией как от переменной  $s$ , так и от переменной  $\bar{s}$ , где  $\bar{s}$  – комплексно–сопряженная переменная к  $s$  ( $\bar{s} = x - iz$ ). Производная по переменной  $\bar{s}$  через действительные переменные выражается следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial \bar{s}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

Расписав это выражение для комплексной функции, можно увидеть, что в случае, если функция является аналитической, и для нее удовлетворяются условия Коши–Римана, то эта производная будет равна нулю.

4. Получим выражение для комплексной напряженности гравитационного поля от бесконечной материальной линии, имеющей координаты  $(\xi, \zeta)$  и линейную плотность  $\delta_l$ . Для этого вспомним

выражения для горизонтальной и вертикальной составляющих гравитационного поля, создаваемых такой линией:

$$g_x(x, z) = 2G\delta_l \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2}; \quad g_z(x, z) = 2G\delta_l \frac{\zeta - z}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2},$$

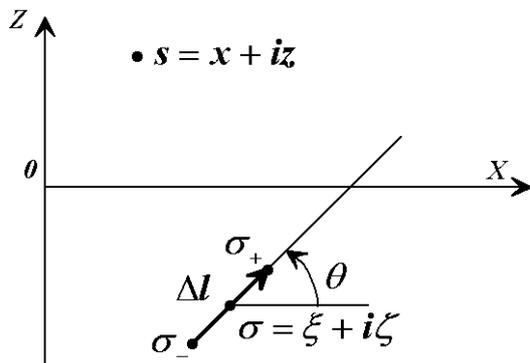
где  $G$  – гравитационная постоянная. Тогда для комплексной напряженности гравитационного поля можно записать:

$$\begin{aligned} G(s) &= 2G\delta_l \left[ \frac{\zeta - z}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} + i \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} \right] = \\ &= 2G\delta_l \frac{\zeta + i\xi - z - ix}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} = \\ &= 2G\delta_l \frac{i(\xi - i\zeta) - i(x - iz)}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} = 2iG\delta_l \frac{\bar{\sigma} - \bar{s}}{(\sigma - s)(\bar{\sigma} - \bar{s})} = 2iG\delta_l \frac{1}{\sigma - s}. \end{aligned}$$

Здесь надчеркивание символов означает их комплексное сопряжение.

Стоит обратить внимание, на сколько простое и элегантное выражение приобрела запись напряженности гравитационного поля от линии по сравнению с покомпонентной записью. Но справедливости ради отметим, что использование векторной алгебры также позволило бы выразить напряженность поля достаточно компактной записью –

$$\vec{g}(M_0) = 2G\delta_l \frac{\vec{r}_{MM_0}}{r_{MM_0}^2}.$$



5. Получим теперь выражения для комплексной напряженности магнитного поля, создаваемого бесконечной дипольной линией. Для этого в точку  $\sigma_+$  поместим линию с положительными зарядами  $m_l$ , а в точку  $\sigma_-$  – с отрицательными зарядами  $-m_l$ . Расстояние между этими точками обозначим через  $\Delta l$ , а точку на

середине этого расстояния –  $\sigma$ . Тогда, используя только что полученное выражение для комплексной напряженности поля, создаваемой линией нагруженной зарядами, и применяя экспоненциальную запись комплексного числа, запишем:

$$\begin{aligned}
H(s) &= -\frac{1}{4\pi} \left( 2im_n \frac{1}{\sigma_+ - s} - 2im_n \frac{1}{\sigma_- - s} \right) = \\
&= -\frac{1}{4\pi} 2im_n \left( \frac{1}{\sigma + \frac{\Delta l}{2} e^{i\theta} - s} - \frac{1}{\sigma - \frac{\Delta l}{2} e^{i\theta} - s} \right) = \\
&= -\frac{1}{4\pi} \frac{-2im_n \Delta l e^{i\theta}}{\left( \sigma + \frac{\Delta l}{2} e^{i\theta} - s \right) \left( \sigma - \frac{\Delta l}{2} e^{i\theta} - s \right)}.
\end{aligned}$$

Знак “-” перед выражением появляется из-за того, что в отличие от гравитационного поля, “положительные магнитные заряды” являются источниками поля, а отрицательные – областями стока.

Теперь устремим  $\Delta l$  к нулю. Тогда  $\lim_{\Delta l \rightarrow 0} m_n \cdot \Delta l = |M|$ , причем это число конечно. Тогда  $M = |M| e^{i\theta} = M_x + iM_z$  – комплексный момент дипольной линии. В результате для комплексной напряженности магнитного поля можно записать

$$H(s) = \frac{1}{4\pi} \frac{2iM}{(\sigma - s)^2},$$

или в системе CGSM –

$$H(s) = \frac{2iM}{(\sigma - s)^2}.$$

В дальнейшем в этой лекции мы будем пользоваться системой CGSM и, соответственно, использовать последнюю запись при дальнейших выводах.

Стоит еще раз обратить внимание на то, что собой представляет величина  $M$ . Эта величина образована из компонент вектора магнитного момента  $\vec{M}$ . Так, если направление компоненты  $M_x$  совпадает с направлением оси  $oX$ , то ее значение будет положительным. Если компонента  $M_z$  направлена вниз, то ее значение будет отрицательным, поскольку в нашей системе координат ось  $oZ$  имеет направление вверх, и компонента  $M_z$  будет иметь противоположенное этой оси направление. Это же замечание касается и значений функций  $G(s)$  и  $H(s)$ . Поскольку ось  $oZ$  направлена вверх, то вертикальная составляющая полей, направленная вниз, в этой системе координат будет иметь отрицательное значение. Т.е. для того, чтобы получить значения вертикальной составляющей полей в привычной системе координат (ось  $oX$  – вправо, ось  $oZ$  – вниз) необходимо

значения действительной части функции  $G(s)$  или  $H(s)$  поменять на противоположенное (умножить на  $-1$ ).

6. Комплексные потенциалы гравитационного и магнитного полей будет иметь вид:

$$\Pi_g(s) = -2iG\delta_n \ln(\sigma - s); \quad \Pi_m(s) = \frac{2iM}{\sigma - s},$$

что можно проверить простым дифференцированием, а высшие производные будут определяться следующими выражениями:

$$G^{(n)}(s) = 2iG\delta_n \frac{n!}{(\sigma - s)^{n+1}}; \quad H^{(n)}(s) = 2iM \frac{(n+1)!}{(\sigma - s)^{n+2}}.$$

7. Решение прямой задачи от некоторой области  $D$  с заданной плотностью  $\delta$  или намагниченностью  $\vec{I}$  сводится к вычислению следующих площадных интегралов:

$$G(s) = 2iG \int_D \frac{\delta(\xi, \zeta)}{\sigma - s} dS; \quad H(s) = 2i \int_D \frac{I(\xi, \zeta)}{(\sigma - s)^2} dS,$$

где  $I = I_x + iI_z$  – комплексная намагниченность области  $D$ .

8. Теорема Пуассона о связи гравитационного и магнитного полей в комплексной форме будет формулироваться следующим образом.

Пусть в некоторой области  $D$  намагниченность и плотность связаны соотношением  $J(\xi, \zeta) = k \cdot \delta(\xi, \zeta)$ , где  $k = k_x + ik_z$ . Тогда, если  $k$  – величина постоянная, то можно записать

$$H(s) = \frac{k}{G} \frac{dG(s)}{ds}.$$

Полученное соотношение выражает теорему Пуассона в комплексной области. Покомпонентная запись этой теоремы будет иметь вид:

$$Z = \frac{1}{G} (k_x V_{xz} + k_z V_{zz}); \quad X = \frac{1}{G} (k_z V_{xz} - k_x V_{zz}).$$

9. Как уже отмечалось, решение прямой задачи от области  $D$  с заданной намагниченностью или плотностью сводится к вычислению площадных интегралов

$$G(s) = 2iG \int_D \frac{\delta(\xi, \zeta)}{\sigma - s} dS; \quad H(s) = 2i \int_D \frac{I(\xi, \zeta)}{(\sigma - s)^2} dS,$$

где  $I = I_x + iI_z$  – комплексная намагниченность области  $D$ .

Для того чтобы взять аналитически представленные выше площадные интегралы необходимо входящие в них выражения плотности и намагниченности представить в виде функций комплексных переменных. Это осуществляется путем следующих подстановок:

$$\xi = \frac{\sigma + \bar{\sigma}}{2}, \quad \zeta = \frac{\sigma - \bar{\sigma}}{2i}.$$

Результатом этого получаются функции от двух комплексных переменных  $(\sigma, \bar{\sigma})$ , причем эти переменные можно рассматривать как независимые друг от друга, точно так же, как действительную функцию  $f(x, y)$  можно рассматривать как функцию двух независимых переменных  $x$  и  $y$ .

Дальнейшие вычисления удобно осуществлять путем перехода от площадных к контурным интегралам с помощью аналогов формулы Остроградского–Гаусса для комплексной функции. Таких формул две:

$$\int_D \frac{\partial F(\sigma, \bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} dS = \frac{1}{2i} \oint_{\partial D} F(\sigma, \bar{\sigma}) d\sigma \quad - 1\text{-ая формула О.-Г.}$$

$$\int_D \frac{\partial F(\sigma, \bar{\sigma})}{\partial \sigma} dS = -\frac{1}{2i} \oint_{\partial D} F(\sigma, \bar{\sigma}) d\bar{\sigma} \quad - 2\text{-ая формула О.-Г.}$$

при этом обход интеграла осуществляется против часовой стрелки, т.е. в положительном направлении.

Для того чтобы убедиться в справедливости этих соотношений, запишем формулы О.-Г. для действительных функций  $u(x, z)$  и  $v(x, z)$ :

$$\int_D \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) dS = \oint_{\partial D} (u dl_z - v dl_x), \quad \int_D \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) dS = \oint_{\partial D} (u dl_x + v dl_z).$$

С учетом того, что в декартовой системе координат  $dl_x = dx$ ,  $dl_z = dz$ ,  $dS = dx dz$ , последние соотношения можно представить в следующем виде:

$$\int_D \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) d\xi d\zeta = \oint_{\partial D} (u d\zeta - v d\xi),$$

$$\int_D \left( \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) d\xi d\zeta = \oint_{\partial D} (u d\xi + v d\zeta).$$

Умножим второе из этих уравнений на  $i$ , вычтем его из первого и осуществим ряд преобразований:

$$\int_D \left( \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \zeta} - i \frac{\partial v}{\partial \xi} + i \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) d\xi d\zeta = \oint_{\partial D} (u d\zeta - v d\xi - i u d\xi - i v d\zeta),$$

$$\int_D \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + i \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) u - i \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + i \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) v \right] d\xi d\zeta = \oint_{\partial D} [-i u (d\xi + i d\zeta) - v (d\xi + i d\zeta)],$$

$$\int_D \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + i \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) (u - i v) \right] d\xi d\zeta = -i \oint_{\partial D} [u (d\xi + i d\zeta) - i v (d\xi + i d\zeta)]$$

С учетом того, что  $\frac{\partial}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + i \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)$ ,  $d\sigma = d\xi + i d\zeta$ , и обозначив  $F = u - i v$ , окончательно получим:

$$\int_D \frac{\partial F(\sigma, \bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} dS = \frac{1}{2i} \oint_{\partial D} F(\sigma, \bar{\sigma}) d\sigma.$$

Аналогично можно доказать справедливость 2-го уравнения О.-Г.

11. На основании комплексных формул О.-Г. напряженность гравитационного и магнитного полей можно выразить через контурные интегралы. Так для случая постоянной плотности ( $\delta = \text{const}$ ) получим

$$G(s) = 2iG\delta \int_D \frac{1}{\sigma - s} dS = 2iG\delta \frac{1}{2i} \oint_{\partial D} \frac{\bar{\sigma} + A(\sigma)}{\sigma - s} d\sigma = G\delta \oint_{\partial D} \frac{\bar{\sigma} + A(\sigma)}{\sigma - s} d\sigma,$$

где  $A(\sigma)$  – любая аналитическая в области  $D$  и непрерывная на границе этой области функция.

Если плотность  $\delta$  или намагниченность  $I$ , заданные в области  $D$ , являются функциями от  $(\xi, \zeta)$ , то, путем замены переменных  $\xi = \frac{\sigma + \bar{\sigma}}{2}$ ,  $\zeta = \frac{\sigma - \bar{\sigma}}{2i}$ , получим функции распределения этих величин в комплексных координатах:

$$\delta(\xi, \zeta) = \delta \left( \frac{\sigma + \bar{\sigma}}{2}, \frac{\sigma - \bar{\sigma}}{2i} \right) = \hat{\delta}(\sigma, \bar{\sigma}), \quad I(\xi, \zeta) = \hat{I}(\sigma, \bar{\sigma}).$$

Далее, используя первую формулу О.-Г., для комплексных напряженностей гравитационного и магнитного полей получим:

$$G(s) = 2iG \int_D \frac{\hat{\delta}(\sigma, \bar{\sigma})}{\sigma - s} dS = G \oint_{\partial D} \frac{\Phi(\sigma, \bar{\sigma}) + A(\sigma)}{\sigma - s} d\sigma, \quad \Phi(\sigma, \bar{\sigma}) = \int \hat{\delta}(\sigma, \bar{\sigma}) d\bar{\sigma};$$

$$H(s) = 2i \int_D \frac{\hat{I}(\sigma, \bar{\sigma})}{(\sigma - s)^2} dS = \oint_{\partial D} \frac{\Psi(\sigma, \bar{\sigma}) + A(\sigma)}{(\sigma - s)^2} d\sigma, \quad \Psi(\sigma, \bar{\sigma}) = \int \hat{I}(\sigma, \bar{\sigma}) d\bar{\sigma}.$$

В частном случае, при расчете поля вне источников, функцию  $A(\sigma)$  можно положить равной нулю ( $A(\sigma) = 0$ ).

12. Если намагниченность можно представить в виде функции только от одной комплексно-сопряженной переменной  $\hat{I}(\sigma, \bar{\sigma}) = \hat{I}(\bar{\sigma})$ , то на основании 2-ой формулы О.-Г. можем получить

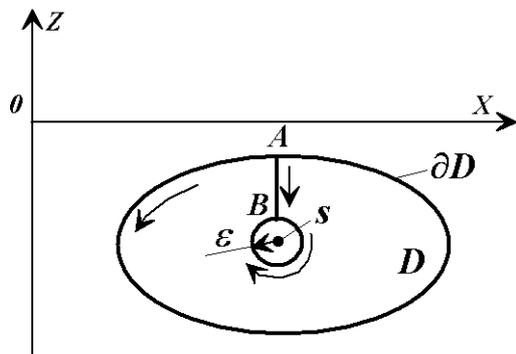
$$H(s) = 2i \int_D \frac{\hat{I}(\bar{\sigma})}{(\sigma - s)^2} dS = -\frac{2i}{2i} \oint_{\partial D} \frac{-\hat{I}(\bar{\sigma})}{\sigma - s} d\bar{\sigma} = \oint_{\partial D} \frac{\hat{I}(\bar{\sigma})}{\sigma - s} d\bar{\sigma}.$$

В частности, при  $I = const$ :

$$H(s) = I \oint_{\partial D} \frac{d\bar{\sigma}}{\sigma - s}.$$

13. Соответствующие представления контурными интегралами можно получить и для потенциалов, и для их высших производных.

14. Полученные выражения описывают поля вне источников (внешняя прямая задача). В то же время может возникнуть необходимость, например при скважинных исследованиях, рассчитать поле внутри области, заполненной массами (внутренняя прямая задача). Получим выражение для вычисления гравитационного поля внутри масс.



Пусть поле создается областью  $D$ , ограниченной кусочно-гладкими (жордановыми) кривыми, с распределенной в ней плотностью  $\delta(\xi, \zeta)$ , и пусть расчетная точка  $s$  находится внутри этой области. Тогда, вырезав вокруг точки  $s$  круг радиуса  $\varepsilon$ , сделав разрез по линии  $AB$  от внешней стороны

к стороне круга и положив  $A(\sigma) = 0$ , получим для точки  $s$ , как внешней к области  $D$  без круга:

$$G(s) = G \int_{\partial D} \frac{\Phi(\sigma, \bar{\sigma})}{\sigma - s} d\sigma + G \int_{AB} \frac{\Phi(\sigma, \bar{\sigma})}{\sigma - s} d\sigma + G \int_{\partial \varepsilon} \frac{\Phi(\sigma, \bar{\sigma})}{\sigma - s} d\sigma + G \int_{BA} \frac{\Phi(\sigma, \bar{\sigma})}{\sigma - s} d\sigma,$$

где  $\Phi(\sigma, \bar{\sigma}) = \int \hat{\delta}(\sigma, \bar{\sigma}) d\bar{\sigma}$ .

Поскольку интегралы по линии  $AB$  и  $BA$  равны по значению, но имеют противоположенные знаки, и поскольку обход круга совершается в данном случае по часовой стрелке, то полученное выражение можно переписать в виде:

$$G(s) = G \int_{\partial D} \frac{\Phi(\sigma, \bar{\sigma})}{\sigma - s} d\sigma - G \int_{\partial \varepsilon} \frac{\Phi(\sigma, \bar{\sigma})}{\sigma - s} d\sigma,$$

где обход по контуру  $\partial \varepsilon$  будет уже совершаться в положительном направлении.

Рассмотрим следующий предел:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G \oint_{\partial \varepsilon} \frac{\Phi(\sigma, \bar{\sigma})}{\sigma - s} d\sigma.$$

С учетом того, что на контуре  $\partial \varepsilon$  значения  $\sigma = s + \varepsilon e^{i\theta}$ , где  $\theta$  меняется в пределах от 0 до  $2\pi$ , и  $d\sigma = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta$ , этот предел может быть представлен в виде:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G \int_0^{2\pi} i\Phi(s + \varepsilon e^{i\theta}, \bar{s} + \varepsilon e^{-i\theta}) d\theta = G \int_0^{2\pi} i\Phi(s, \bar{s}) d\theta = 2\pi i G \Phi(s, \bar{s}).$$

Таким образом, напряженность гравитационного поля для внутренних точек будет определяться соотношением:

$$G(s) = -2\pi i G \Phi(s, \bar{s}) + G \int_{\partial D} \frac{\Phi(\sigma, \bar{\sigma})}{\sigma - s} d\sigma.$$

Для того чтобы получить выражение для  $G(s)$ , описывающее поле, как во внешней, так и во внутренней области, необходимо вспомнить интегральную формулу Каша, которая применительно к аналитической функции  $f(\sigma)$  имеет вид:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\sigma)}{\sigma - s} d\sigma = f(s), \text{ для точек, принадлежащих } D (s \in D),$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\sigma)}{\sigma - s} d\sigma = 0, \text{ для точек, не принадлежащих } D \text{ и контуру,}$$

ограничивающему эту область ( $s \notin \bar{D}$ ).

Положив  $f(\sigma)$  равной единице ( $f(\sigma) = 1$ ), получим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{1}{\sigma - s} d\sigma = 1, \text{ для точек } s \in D,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{1}{\sigma - s} d\sigma = 0, \text{ для точек } s \notin \bar{D}.$$

С учетом этого поле  $G(s)$  можно представить в виде:

$$G(s) = G \oint_{\partial D} \frac{\Phi(\sigma, \bar{\sigma}) - \Phi(s, \bar{s})}{\sigma - s} d\sigma.$$

Таким образом, эта формула будет описывать гравитационное поле как вне, так и внутри его источников.

15. Остановимся еще на одном вопросе. Нами было получено выражение для комплексной напряженности поля в виде

$$G(s) = G \oint_{\partial D} \frac{\Phi(\sigma, \bar{\sigma})}{\sigma - s} d\sigma.$$

В то же время, согласно интегральной формуле Коши для точек вне области источников

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\sigma)}{\sigma - s} d\sigma = 0.$$

Как видно, эти формулы очень похожи, но почему-то первый интеграл описывает поле, которое заведомо не равно нулю вне области  $D$ , а второй интеграл равен нулю. Это связано с тем, что в интегральной формуле Коши функция  $f(\sigma)$  является аналитической в области  $D$ . В то же время функция  $\Phi(\sigma, \bar{\sigma})$  аналитической не является, поскольку она получена путем интегрирования функции  $\hat{\delta}(\sigma, \bar{\sigma})$  по переменной  $\bar{\sigma}$ . Следовательно, производная

$$\frac{\partial \Phi(\sigma, \bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} \neq 0,$$

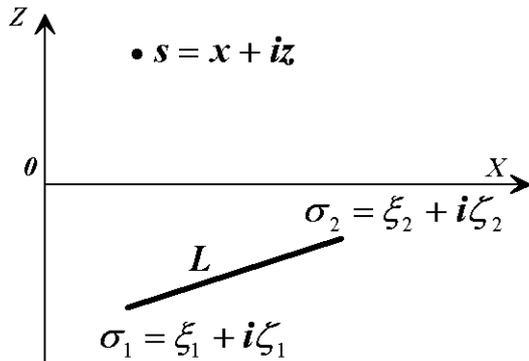
т.е. эта функция не удовлетворяет условиям Каши–Римана, и соответственно интеграл  $\oint \frac{\Phi(\sigma, \bar{\sigma})}{\sigma - s} d\sigma$  будет отличен от нуля.

16. Перейдем теперь к вопросам получения аналитических выражений полей от источников различной конфигурации и различного распределения источников плотности.

– Круговой горизонтальный цилиндр с постоянной плотностью  $\delta$  и комплексной намагниченностью  $I$ . Поле такого источника совпадает с полем бесконечной линии с плотностью  $\delta_n = \pi R^2 \delta$  и намагниченностью  $m = \pi R^2 I$ :

$$G(s) = 2iG\delta_n \frac{1}{\sigma - s}, \quad H(s) = 2im \frac{1}{(\sigma - s)^2}.$$

– Материальная плоскость с постоянной плотностью  $\delta_n$  и намагниченностью  $m_n$ . Положение плоскости определяется координатами  $\sigma_1 = \xi_1 + i\zeta_1$  и  $\sigma_2 = \xi_2 + i\zeta_2$ . Для того чтобы получить поле от такой модели, необходимо вычислить следующие интегралы:



$$G(s) = 2iG\delta_n \int_L \frac{1}{\sigma - s} dl,$$

$$H(s) = 2im_n \int_L \frac{1}{(\sigma - s)^2} dl.$$

Поскольку интегралы берутся по линии  $L$ , то следует задать уравнение этой линии. Уравнение линии можно задать в параметрическом виде  $\sigma(t) = \xi(t) + i\zeta(t)$ , где  $0 \leq t \leq 1$ , или выразить в явном виде  $\bar{\sigma} = f(\sigma)$ . Воспользуемся представлением прямой в параметрическом виде. Тогда

$$\xi(t) = b_x + a_x t, \quad \zeta(t) = b_z + a_z t,$$

$$\sigma(t) = \xi(t) + i\zeta(t) = (b_x + ib_z) + (a_x + ia_z)t = b + at.$$

Приращение расстояния  $\Delta l$  при изменении параметра  $t$  на величину  $\Delta t$  будет равно:

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta z)^2} = \sqrt{(a_x \Delta t)^2 + (a_z \Delta t)^2} = \sqrt{a_x^2 + a_z^2} \Delta t = |a| \Delta t,$$

соответственно,  $dl = |a| dt$ . Коэффициенты уравнения прямой можно определить исходя из следующих условий:

$$\begin{aligned} t = 0, & \quad \sigma(0) = b = \sigma_1 = \xi_1 + i\zeta_1; & \quad b = \sigma_1; \\ t = 1, & \quad \sigma(1) = b + a = \sigma_2 = \xi_2 + i\zeta_2; & \quad a = \sigma_2 - b = \sigma_2 - \sigma_1. \end{aligned}$$

Получим теперь выражение для функций  $G(s)$  и  $H(s)$  от этой модели:

$$\begin{aligned} G(s) &= 2iG\delta_n \int_L \frac{1}{\sigma - s} dl = 2iG\delta_n \int_0^1 \frac{1}{\sigma(t) - s} dl = 2iG\delta_n \int_0^1 \frac{1}{(at + b) - s} |a| dt = \\ &= 2iG\delta_n \frac{|a|}{a} \int_0^1 \frac{d(at + b - s)}{(at + b) - s} = 2iG\delta_n \frac{|a|}{a} \ln(at + b - s) \Big|_0^1 = 2iG\delta_n \frac{|a|}{a} \ln \frac{\sigma_2 - s}{\sigma_1 - s}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H(s) &= 2im_n \int_L \frac{1}{(\sigma - s)^2} dl = 2im_n \int_0^1 \frac{1}{(\sigma(t) - s)^2} dl = 2im_n \int_0^1 \frac{1}{((at + b) - s)^2} |a| dt = \\ &= 2im_n \frac{|a|}{a} \int_0^1 \frac{d(at + b - s)}{(at + b - s)^2} = 2im_n \frac{|a|}{a} \left( -\frac{1}{at + b - s} \right) \Big|_0^1 = 2im_n \frac{|a|}{a} \left( \frac{1}{\sigma_1 - s} - \frac{1}{\sigma_2 - s} \right). \end{aligned}$$

Отметим также, что выражение для  $H(s)$  можно было бы легко получить из выражения для  $G(s)$  на основании соотношения Пуассона

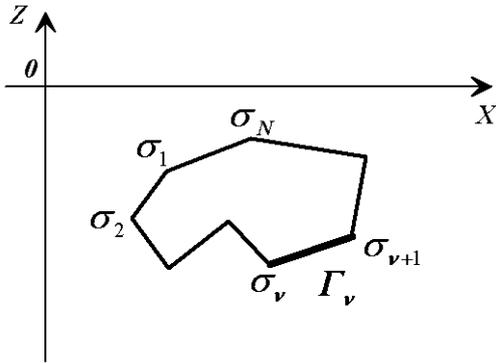
$$H(s) = \frac{k}{G} \frac{dG(s)}{ds}.$$

– Многоугольник с  $N$  вершинами, ограниченный отрезками прямых линий, с постоянной плотностью  $\delta$  и намагниченностью  $I$ . Рассмотрим вначале гравитационное поле  $G(s)$ . Тогда, воспользовавшись 1-ой формулой О.–Г., запишем:

$$G(s) = 2iG\delta \int_D \frac{1}{\sigma - s} dS = 2iG\delta \frac{1}{2i} \oint_{\partial D} \frac{\bar{\sigma} + A(\sigma)}{\sigma - s} d\sigma = G\delta \oint_{\partial D} \frac{\bar{\sigma} - \bar{s}}{\sigma - s} d\sigma.$$

В таком представлении, когда  $A(\sigma) = -\bar{s}$ , функция  $G(s)$  будет описывать гравитационное поле во всем пространстве, т.е. как в области задания масс, так и вне их. Далее можно записать:

$$G(s) = G\delta \sum_{v=1}^N \int_{\Gamma_v} \frac{\bar{\sigma} - \bar{s}}{\sigma - s} d\sigma.$$



Поскольку интеграл по контуру  $\partial D$  представляется суммой интегралов по сторонам многоугольника  $\Gamma_v$ , то надо задать уравнение каждой из сторон. Для этого можно воспользоваться параметрическим представлением уравнений, однако в данном примере используем явное представление для задания уравнения отрезка.

Уравнение прямой в действительной системе координат может быть представлено в виде  $z = ax + b$ . Используя замену переменных, запишем

$$\frac{\sigma - \bar{\sigma}}{2i} = a \frac{\sigma + \bar{\sigma}}{2} + b.$$

Из этого уравнения можно получить уравнение прямой в явном виде как функции комплексной переменной  $\sigma$ :  $\bar{\sigma} = \alpha\sigma + \beta$ .

Таким образом для каждой  $\nu$ -ой стороны можно записать  $\bar{\sigma} = \alpha_\nu \sigma + \beta_\nu$ . Параметры  $\alpha_\nu$  и  $\beta_\nu$  можно определить следующим образом. Поскольку начало  $\nu$ -ой стороны имеет координату  $\sigma_\nu$ , а ее конец —  $\sigma_{\nu+1}$ , то подставляя эти условия в уравнение прямой, получим:

$$\bar{\sigma}_\nu = \alpha_\nu \sigma_\nu + \beta_\nu, \quad \bar{\sigma}_{\nu+1} = \alpha_\nu \sigma_{\nu+1} + \beta_\nu.$$

Вычтя из второго уравнения первое, определим значение  $\alpha_\nu$ :

$$\alpha_\nu = \frac{\bar{\sigma}_{\nu+1} - \bar{\sigma}_\nu}{\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu}.$$

Определив  $\alpha_\nu$ , определим значение  $\beta_\nu$ :  $\beta_\nu = \bar{\sigma}_\nu - \alpha_\nu \sigma_\nu$ .

Дальнейшие преобразования будут иметь вид:

$$\begin{aligned}
G(s) &= G\delta \sum_{v=1}^N \int_{\sigma_v}^{\bar{\sigma}_v} \frac{\bar{\sigma}_v - \bar{s}}{\sigma - s} d\sigma = G\delta \sum_{v=1}^N \int_{\sigma_v}^{\sigma_{v+1}} \frac{\alpha_v \sigma + \beta_v - \bar{s}}{\sigma - s} d\sigma = \\
&= G\delta \sum_{v=1}^N \int_{\sigma_v}^{\sigma_{v+1}} \frac{\alpha_v (\sigma - s) + \alpha_v s + \beta_v - \bar{s}}{\sigma - s} d\sigma = \\
&= G\delta \sum_{v=1}^N \left( \int_{\sigma_v}^{\sigma_{v+1}} \alpha_v d\sigma + \int_{\sigma_v}^{\sigma_{v+1}} \frac{\alpha_v s + \beta_v - \bar{s}}{\sigma - s} d\sigma \right) = \\
&= G\delta \sum_{v=1}^N \left( \alpha_v (\sigma_{v+1} - \sigma_v) + (\alpha_v s + \beta_v - \bar{s}) \ln \frac{\sigma_{v+1} - s}{\sigma_v - s} \right) = \\
&= G\delta \sum_{v=1}^N \left( \alpha_v (\sigma_{v+1} - \sigma_v) + (\alpha_v s + \beta_v - \bar{s}) \ln \frac{\sigma_{v+1} - s}{\sigma_v - s} \right).
\end{aligned}$$

Рассмотрим, чему будет равна сумма  $\sum_{v=1}^N \alpha_v (\sigma_{v+1} - \sigma_v)$ . С учетом того, что

$$\alpha_v = \frac{\bar{\sigma}_{v+1} - \bar{\sigma}_v}{\sigma_{v+1} - \sigma_v},$$

и окончание  $N$ -ой стороны совпадает с началом 1-ой стороны, т.е.  $\sigma_{N+1} = \sigma_1$ , получим:

$$\sum_{v=1}^N \frac{\bar{\sigma}_{v+1} - \bar{\sigma}_v}{\sigma_{v+1} - \sigma_v} (\sigma_{v+1} - \sigma_v) = (\bar{\sigma}_2 - \bar{\sigma}_1) + (\bar{\sigma}_3 - \bar{\sigma}_2) + \dots + (\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_N) = 0.$$

Окончательное выражение функции  $G(s)$  для многоугольника с постоянной плотностью, будет иметь вид:

$$G(s) = G\delta \sum_{v=1}^N (\alpha_v s + \beta_v - \bar{s}) \ln \frac{\sigma_{v+1} - s}{\sigma_v - s}.$$

Получим теперь выражение для комплексной напряженности магнитного поля, создаваемого этой же моделью с постоянной намагниченностью  $I$ . Напомним, что под величиной  $I$  понимается комплексная величина, образованная из компонент вектора намагниченности:  $I = I_x + iI_z$ . При выводе выражения для поля  $H(s)$  воспользуемся 2-ой формулой О.-Г. и явным заданием уравнений сторон многоугольника:

$$\begin{aligned}
H(s) &= 2iI \int_D \frac{1}{(\sigma - s)^2} dS = I \oint_{\partial D} \frac{1}{\sigma - s} d\bar{\sigma} = I \sum_{v=1}^N \int_{\Gamma_v} \frac{d\bar{\sigma}}{\sigma - s} = I \sum_{v=1}^N \int_{\sigma_v}^{\sigma_{v+1}} \frac{d(\alpha_v \sigma + \beta_v)}{\sigma - s} = \\
&= I \sum_{v=1}^N \alpha_v \int_{\sigma_v}^{\sigma_{v+1}} \frac{d\sigma}{\sigma - s} = I \sum_{v=1}^N \alpha_v \ln(\sigma - s) \Big|_{\sigma_v}^{\sigma_{v+1}}.
\end{aligned}$$

Окончательно

$$H(s) = I \sum_{v=1}^N \alpha_v \ln \frac{\sigma_{v+1} - s}{\sigma_v - s}.$$

17. Теперь перейдем к рассмотрению более сложных моделей. Одна из таких моделей будет представлять собой многоугольник с криволинейными сторонами. Для получения аналитических выражений полей необходимо задать уравнение дуг, описывающих стороны многоугольника. Одной из форм представления таких кривых может быть полином  $n$ -ой степени:

$$\sigma^v(t) = a_n^v t^n + a_{n-1}^v t^{n-1} + \dots + a_0^v,$$

где  $a_j^v$  – заданные коэффициенты,  $0 \leq t \leq 1$ .

18. Получим выражение для поля  $G(s)$  от такого многоугольника с постоянной плотностью  $\delta$ . Для простоты будем решать только внешнюю задачу. В этом случае мы можем записать:

$$\begin{aligned}
G(s) &= 2iG\delta \int_D \frac{1}{\sigma - s} dS = G\delta \oint_{\partial D} \frac{\bar{\sigma}}{\sigma - s} d\sigma = G\delta \oint_{\partial D} \bar{\sigma} d \ln(\sigma - s) = \\
&= G\delta \sum_{v=1}^N \int_{\Gamma_v} \bar{\sigma} d \ln(\sigma - s) = G\delta \sum_{v=1}^N \int_0^1 \overline{\sigma^v(t)} d \ln(\sigma^v(t) - s).
\end{aligned}$$

Выражение  $\sigma^v(t) - s$  для случая задания  $\sigma^v(t)$  в виде полинома  $n$ -ой степени от  $t$  можно представить в виде:

$$\sigma^v(t) - s = a_n^v (t - t_{1,v}(s))(t - t_{2,v}(s)) \dots (t - t_{n,v}(s)) = a_n^v \prod_{j=1}^n (t - t_{j,v}(s)),$$

где  $t_{j,v}(s)$  – корни уравнения  $\sigma^v(t) - s = 0$ . В результате такого представления можно записать:

$$d \ln(\sigma^{\nu}(t) - s) = d \ln \left( a_n^{\nu} \prod_{j=1}^n (t - t_{j,\nu}(s)) \right) = \sum_{j=1}^n \frac{dt}{t - t_{j,\nu}(s)}.$$

В результате

$$G(S) = G\delta \sum_{\nu=1}^N \int_0^1 \overline{\sigma^{\nu}(t)} d \ln(\sigma^{\nu}(t) - s) = G\delta \sum_{\nu=1}^N \left( \sum_{j=1}^n \int_0^1 \frac{\overline{\sigma^{\nu}(t)}}{t - t_{j,\nu}(s)} dt \right).$$

19. Для поля  $H(s)$ , создаваемого такой же моделью с постоянной комплексной намагниченностью  $I$ , можно, сделав следующие преобразования, получить:

$$\begin{aligned} H(s) &= 2iI \int_D \frac{1}{(\sigma - s)^2} dS = I \oint_{\partial D} \frac{d\bar{\sigma}}{\sigma - s} = I \sum_{\nu=1}^N \int_{\Gamma_{\nu}} \frac{d \ln(\sigma - s)}{d\sigma} d\bar{\sigma} = \\ &= I \sum_{\nu=1}^N \int_{\sigma_{\nu}}^{\sigma_{\nu+1}} \frac{d\bar{\sigma}}{d\sigma} d \ln(\sigma - s) = I \sum_{\nu=1}^N \int_0^1 \frac{\overline{d\sigma^{\nu}(t)}}{d\sigma^{\nu}(t)} d \ln(\sigma^{\nu}(t) - s) = \\ &= I \sum_{\nu=1}^N \left( \sum_{j=1}^n \int_0^1 \frac{\overline{d\sigma^{\nu}(t)}}{d\sigma^{\nu}(t)} \cdot \frac{dt}{t - t_{j,\nu}(s)} \right). \end{aligned}$$

20. В качестве примера получим выражение для  $H(s)$  от многоугольника с постоянной намагниченностью. В этом случае уравнение  $\nu$ -ой стороны будет представляться в параметрическом виде следующим образом:

$$\sigma^{\nu}(t) = a_{\nu}t + b_{\nu}.$$

Уравнение  $\sigma^{\nu}(t) - s = 0$  имеет единственный корень  $t_{1,\nu}(s) = \frac{s - b_{\nu}}{a_{\nu}}$ . Тогда

$$\begin{aligned} H(s) &= I \oint_{\partial D} \frac{d\bar{\sigma}}{\sigma - s} = I \oint_{\partial D} \frac{d\bar{\sigma}}{d\sigma} d \ln(\sigma - s) = I \sum_{\nu=1}^N \int_{\sigma_{\nu}}^{\sigma_{\nu+1}} \frac{d\bar{\sigma}}{d\sigma} d \ln(\sigma - s) = \\ &= I \sum_{\nu=1}^N \int_0^1 \frac{d(\bar{a}_{\nu}t + \bar{b}_{\nu})}{d(a_{\nu}t + b_{\nu})} d \ln(a_{\nu}t + b_{\nu} - s) = I \sum_{\nu=1}^N \frac{\bar{a}_{\nu}}{a_{\nu}} \int_0^1 \frac{dt}{t - t_{1,\nu}(s)} = \end{aligned}$$

$$= I \sum_{v=1}^N \frac{\bar{a}_v}{a_v} \ln(t - t_{1,v}(s)) \Big|_0^1 = I \sum_{v=1}^N \frac{\bar{a}_v}{a_v} \ln \frac{1 - t_{1,v}(s)}{-t_{1,v}(s)} = I \sum_{v=1}^N \frac{\bar{a}_v}{a_v} \ln \frac{(a_v + b_v) - s}{b_v - s}.$$

Если заданы координаты вершин многоугольника, то коэффициенты  $a_v$  и  $b_v$  определяются из следующих условий:

$$\sigma^v(0) = b_v = \sigma_v, \quad \sigma^v(1) = a_v + b_v = \sigma_{v+1}, \quad a_v = \sigma_{v+1} - \sigma_v.$$

Окончательно для поля  $H(s)$  можно записать

$$H(s) = I \sum_{v=1}^N \frac{\bar{a}_v}{a_v} \ln \frac{\sigma_{v+1} - s}{\sigma_v - s},$$

что совпадает с выражением, полученным нами ранее.

21. Поучим выражение для поля  $G(s)$  от параболического многоугольника, т.е. от многоугольника ограниченного дугами общим числом  $N$ , и каждая из которых представлена полиномом второго порядка

$$\sigma^v(t) = a_v t^2 + b_v t + c_v, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Уравнение  $\sigma^v(t) - s = 0$  имеет два корня:

$$t_{1,v}(s) = \frac{-b_v + \sqrt{b_v^2 - 4a_v(c_v - s)}}{2a_v}, \quad t_{2,v}(s) = \frac{-b_v - \sqrt{b_v^2 - 4a_v(c_v - s)}}{2a_v}.$$

Тогда

$$G(s) = G\delta \sum_{v=1}^N \sum_{j=1}^2 \int_0^1 \frac{\overline{\sigma^v(t)}}{t - t_{j,v}(s)} dt.$$

Для того чтобы аналитически взять этот интеграл, преобразуем выражение для  $\overline{\sigma^v(t)}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma^v(t)} &= \bar{a}_v t^2 + \bar{b}_v t + \bar{c}_v = \bar{a}_v (t - t_{j,v}(s))^2 + \bar{b}_v (t - t_{j,v}(s)) + \bar{c}_v + \\ &+ 2\bar{a}_v t \cdot t_{j,v}(s) + \bar{b}_v t_{j,v}(s) - \bar{a}_v t_{j,v}^2(s) = \\ &= \bar{a}_v (t - t_{j,v}(s))^2 + (\bar{b}_v + 2\bar{a}_v t_{j,v}(s))(t - t_{j,v}(s)) + \bar{a}_v t_{j,v}^2(s) + \bar{b}_v t_{j,v}(s) + \bar{c}_v. \end{aligned}$$

Теперь для  $G(s)$  можно записать:

$$\begin{aligned}
G(s) &= G\delta \sum_{v=1}^N \sum_{j=1}^2 \int_0^1 \frac{\overline{\sigma^v(t)}}{t - t_{j,v}(s)} dt = G\delta \sum_{v=1}^N \sum_{j=1}^2 \left\{ \bar{a}_v \int_0^1 (t - t_{j,v}(s)) dt + \right. \\
&\quad \left. + (\bar{b}_v + 2\bar{a}_v t_{j,v}(s)) \int_0^1 dt + (\bar{a}_v t_{j,v}^2(s) + \bar{b}_v t_{j,v}(s) + \bar{c}_v) \int_0^1 \frac{dt}{t - t_{j,v}(s)} \right\} = \\
&= G\delta \sum_{v=1}^N \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{\bar{a}_v}{2} + \bar{b}_v + \bar{a}_v t_{j,v}(s) + (\bar{a}_v t_{j,v}^2(s) + \bar{b}_v t_{j,v}(s) + \bar{c}_v) \ln \left( 1 - \frac{1}{t_{j,v}(s)} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

22. Следующая модель – многоугольник с полиномиальным распределением плотности  $\delta(\xi, \zeta) = P_n(\xi, \zeta)$ ,  $n$  – степень полинома:

$$\delta(\xi, \zeta) = P_n(\xi, \zeta) = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m A_{m,k} \xi^k \zeta^{m-k}.$$

Используя подстановку  $\xi = \frac{\sigma + \bar{\sigma}}{2}$ ,  $\zeta = \frac{\sigma - \bar{\sigma}}{2i}$  получим выражение для плотности как функции переменных  $\sigma$  и  $\bar{\sigma}$ :

$$\hat{\delta}(\sigma, \bar{\sigma}) = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m \frac{A_{m,k}}{2^m i^{m-k}} (\sigma + \bar{\sigma})^k (\sigma - \bar{\sigma})^{m-k} = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m a_{m,k} \sigma^k \bar{\sigma}^{m-k} = \hat{P}_n(\sigma, \bar{\sigma}).$$

При переходе от площадного интеграла к контурному по 1–ой формуле О.–Г. в комплексной форме вычисляется формальный интеграл

$$\Phi(\sigma, \bar{\sigma}) = \int P_n(\sigma, \bar{\sigma}) d\bar{\sigma} = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m a_{m,k} \sigma^k \frac{\bar{\sigma}^{m-k+1}}{m-k+1}.$$

Получим выражение поля для всех точек пространства, т.е. как вне, так и внутри области  $D$ . В этом случае выражение для  $G(s)$  будет иметь вид:

$$G(s) = G \oint_{\partial D} \frac{\Phi(\sigma, \bar{\sigma}) - \Phi(s, \bar{s})}{\sigma - s} d\sigma = G \sum_{v=1}^N \int_{\sigma_v}^{\sigma_{v+1}} \frac{\Phi(\sigma, \bar{\sigma}) - \Phi(s, \bar{s})}{\sigma - s} d\sigma.$$

При дальнейших преобразованиях будем использовать представление уравнения прямой в явном виде  $\bar{\sigma} = \alpha_v \sigma + \beta_v$ . Вопрос о

том, как найти коэффициенты этого уравнения нами уже обсуждался ранее. Используя это представление, получим:

$$\Phi(\sigma, \bar{\sigma}) = \Phi(\sigma, \alpha_\nu \sigma + \beta_\nu) = P_{n+1, \nu}(\sigma).$$

Таким образом для каждой  $\nu$ -ой стороны функция  $\Phi(\sigma, \bar{\sigma})$  будет представляться в виде нового полинома от переменной  $\sigma$  степени  $(n+1)$ . Далее можно осуществить следующие преобразования:

$$\begin{aligned} G(s) &= G \sum_{\nu=1}^N \int_{\sigma_\nu}^{\sigma_{\nu+1}} \frac{P_{n+1, \nu}(\sigma) - P_{n+1, \nu}(s) + P_{n+1, \nu}(s) - \Phi(s, \bar{s})}{\sigma - s} d\sigma = \\ &= G \sum_{\nu=1}^N \left\{ \int_{\sigma_\nu}^{\sigma_{\nu+1}} \frac{P_{n+1, \nu}(\sigma) - P_{n+1, \nu}(s)}{\sigma - s} d\sigma + (P_{n+1, \nu}(s) - \Phi(s, \bar{s})) \int_{\sigma_\nu}^{\sigma_{\nu+1}} \frac{d\sigma}{\sigma - s} \right\}. \end{aligned}$$

Числитель первого интеграла может быть представлен как некоторый полином степени  $(n+1)$  от разности  $(\sigma - s) - \hat{P}_{n+1, \nu}(\sigma - s)$ . В результате подынтегральное выражение будет представлять собой полином  $n$ -ой степени от  $(\sigma - s)$ . Первообразная от такого полинома вновь будет полиномом степени  $(n+1)$ , и в результате:

$$\int_{\sigma_\nu}^{\sigma_{\nu+1}} \frac{P_{n+1, \nu}(\sigma) - P_{n+1, \nu}(s)}{\sigma - s} d\sigma = \int_{\sigma_\nu}^{\sigma_{\nu+1}} \frac{\hat{P}_{n+1, \nu}(\sigma - s)}{\sigma - s} d\sigma = Q_{n+1, \nu}(s).$$

Окончательно:

$$G(s) = G \sum_{\nu=1}^N \left\{ Q_{n+1, \nu}(s) + (P_{n+1, \nu}(s) - \Phi(s, \bar{s})) \ln \frac{\sigma_{\nu+1} - s}{\sigma_\nu - s} \right\}.$$

23. Получим выражение для гравитационного поля для многоугольника с линейно изменяющейся плотностью  $\delta(x, z) = a_x x + a_z z + a_0$ . Для упрощения выкладок будем решать только внешнюю задачу.

На первом шаге выразим закон изменения плотности через комплексные координаты  $\sigma$  и  $\bar{\sigma}$ :

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(\sigma, \bar{\sigma}) &= a_x \frac{\sigma + \bar{\sigma}}{2} + a_z \frac{\sigma - \bar{\sigma}}{2i} + a_0 = \frac{a_x \sigma}{2} + \frac{a_x \bar{\sigma}}{2} - i \frac{a_z \sigma}{2} + i \frac{a_z \bar{\sigma}}{2} + a_0 = \\ &= \frac{a_x - i a_z}{2} \sigma + \frac{a_x + i a_z}{2} \bar{\sigma} + a_0 = c \sigma + \bar{c} \bar{\sigma} + a_0. \end{aligned}$$

На втором шаге получим выражение для функции  $\Phi(\sigma, \bar{\sigma})$ :

$$\Phi(\sigma, \bar{\sigma}) = \int (c\sigma + \bar{c}\bar{\sigma} + a_0)d\bar{\sigma} = c\sigma\bar{\sigma} + \bar{c}\frac{\bar{\sigma}^2}{2} + a_0\bar{\sigma}.$$

На следующем шаге для каждой  $\nu$ -ой стороны получим:

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma, \bar{\sigma}) &= \Phi(\sigma, \alpha_\nu\sigma + \beta_\nu) = P_{2,\nu}(\sigma) = (c\sigma + a_0)(\alpha_\nu\sigma + \beta_\nu) + \bar{c}\frac{(\alpha_\nu\sigma + \beta_\nu)^2}{2} = \\ &= c\alpha_\nu\sigma^2 + c\beta_\nu\sigma + a_0\alpha_\nu\sigma + a_0\beta_\nu + \bar{c}\frac{\alpha_\nu^2}{2}\sigma^2 + \bar{c}\alpha_\nu\beta_\nu\sigma + \bar{c}\frac{\beta_\nu^2}{2} = \\ &= (c\alpha_\nu + \bar{c}\frac{\alpha_\nu^2}{2})\sigma^2 + (c\beta_\nu + a_0\alpha_\nu + \bar{c}\alpha_\nu\beta_\nu)\sigma + a_0\beta_\nu + \bar{c}\frac{\beta_\nu^2}{2} = \\ &= K_{2,\nu}\sigma^2 + K_{1,\nu}\sigma + K_{0,\nu}. \end{aligned}$$

Далее преобразуем это выражение:

$$\begin{aligned} \hat{P}_{2,\nu}(\sigma - s) &= K_{2,\nu}(\sigma - s)^2 + 2K_{2,\nu}\sigma s - K_{2,\nu}s^2 + K_{1,\nu}\sigma + K_{0,\nu} = \\ &= K_{2,\nu}(\sigma - s)^2 + (2K_{2,\nu}s + K_{1,\nu})(\sigma - s) + (2K_{2,\nu}s + K_{1,\nu})s - K_{2,\nu}s^2 + K_{0,\nu} = \\ &= K_{2,\nu}(\sigma - s)^2 + (2K_{2,\nu}s + K_{1,\nu})(\sigma - s) + (K_{2,\nu}s^2 + K_{1,\nu}s + K_{0,\nu}). \end{aligned}$$

Теперь можем записать окончательное выражение для  $G(s)$ :

$$\begin{aligned} G(s) &= G \sum_{\nu=1}^N \left\{ \frac{K_{2,\nu}}{2}(\sigma_{\nu+1}^2 - \sigma_\nu^2) + (K_{2,\nu}s + K_{1,\nu})(\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu) + \right. \\ &\quad \left. + (K_{2,\nu}s^2 + K_{1,\nu}s + K_{0,\nu}) \ln \left( \frac{\sigma_{\nu+1} - s}{\sigma_\nu - s} \right) \right\}. \end{aligned}$$

24. Следующая модель – криволинейный многоугольник со сторонами, представляемыми в виде полинома степени  $p_\nu$  от параметра  $t$ , и с плотностью  $\delta$ , описываемой полиномом степени  $n$ . Осуществим следующие преобразования.

– Представим закон изменения плотности как функцию двух переменных  $\sigma$  и  $\bar{\sigma}$ :

$$\delta(\xi, \zeta) = P_n(\xi, \zeta) = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m A_{m,k} \xi^k \zeta^{m-k},$$

$$\hat{\delta}(\sigma, \bar{\sigma}) = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m \frac{A_{m,k}}{2^m i^{m-k}} (\sigma + \bar{\sigma})^k (\sigma - \bar{\sigma})^{m-k} = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m a_{m,k} \sigma^k \bar{\sigma}^{m-k} = \hat{P}_n(\sigma, \bar{\sigma});$$

– Определим следующий интеграл

$$\Phi(\sigma, \bar{\sigma}) = \int P_n(\sigma, \bar{\sigma}) d\bar{\sigma} = \sum_{m=0}^n \sum_{k=0}^m a_{m,k} \sigma^k \frac{\bar{\sigma}^{m-k+1}}{m-k+1};$$

– Выпишем выражение для функции  $G(s)$  во внешнем пространстве:

$$\begin{aligned} G(s) &= G \oint_{\partial D} \frac{\Phi(\sigma, \bar{\sigma})}{\sigma - s} d\sigma = G \sum_{\nu=1}^N \int_{\Gamma_\nu} \frac{\Phi(\sigma, \bar{\sigma})}{\sigma - s} d\sigma = \\ &= G \sum_{\nu=1}^N \int_0^1 \Phi(\sigma^\nu(t), \overline{\sigma^\nu(t)}) d \ln(\sigma^\nu(t) - s). \end{aligned}$$

Поскольку уравнение  $\nu$ -ой стороны представляется полиномом степени  $p_\nu$  ( $\sigma^\nu(t) = \sum_{l=0}^{p_\nu} b_l^\nu t^l$ ), то функция  $\Phi(\sigma^\nu(t), \overline{\sigma^\nu(t)})$  будет представлять собой полином степени  $q_\nu = n + p_\nu + 1$ , т.е.

$$\Phi(\sigma^\nu(t), \overline{\sigma^\nu(t)}) = \sum_{j=0}^{q_\nu} c_j^\nu t^j = P_{q_\nu}(t).$$

Представив  $\sigma^\nu(t) - s = \alpha_{p_\nu}^\nu \prod_{k=1}^{p_\nu} (t - t_{k,\nu}(s))$ , можем записать выражение для  $G(s)$ :

$$G(s) = G \sum_{\nu=1}^N \sum_{k=1}^{p_\nu} \int_0^1 \frac{P_{q_\nu}(t)}{t - t_{k,\nu}(s)} dt.$$

Дальнейшие действия по вычислению таких интегралов нами уже рассматривались.

25. Подведем некоторый итог проделанной работе. Нами были получены выражения для гравитационного и магнитного поля от тел достаточно простой формы и от более сложных конфигураций источников. В

частности, нами были рассмотрены тела, стороны которых описывались полиномом некоторой степени. В общем случае мы не выводили явных выражений полей, создаваемых такими моделями, а определили ход получения решений. По сути дела нами описан алгоритм вычисления полей от таких объектов.

С этой точки зрения рассмотрим еще раз задачу определения поля  $G(s)$  от криволинейного многоугольника с  $N$  вершинами и с постоянной плотностью  $\delta$ . Если дуга задана уравнением

$$\sigma^v(t) = a_n^v t^n + a_{n-1}^v t^{n-1} + \dots + a_0^v = \sum_{k=0}^n a_k^v t^k,$$

то корни уравнения  $\sigma^v(t) - s = 0$  могут быть найдены численно с помощью итеративных процедур (метод Ньютона и т.п.). После того как корни найдены, степенной ряд  $\sigma^v(t) = \sum_{k=0}^n a_k^v t^k$  преобразуется к виду:

$$\sum_{k=0}^n \overline{a_k^v} t^k = \sum_{k=0}^n A_k^v(t_{j,v}(s)) \cdot (t - t_{j,v}(s))^k.$$

Процедура преобразований коэффициентов полинома  $a_k^v$  в коэффициенты  $A_k^v(t_{j,v}(s))$  может быть запрограммирована. В результате:

$$\begin{aligned} G(s) &= G\delta \sum_{v=1}^N \sum_{j=1}^n \int_0^1 \frac{\overline{\sigma^v(t)}}{t - t_{j,v}(s)} dt = G\delta \sum_{v=1}^N \sum_{j=1}^n \int_0^1 \frac{\sum_{k=0}^n \overline{a_k^v} t^k}{t - t_{j,v}(s)} dt = \\ &= G\delta \sum_{v=1}^N \left( \sum_{j=1}^n \int_0^1 \sum_{k=0}^n A_k^v(t_{j,v}(s)) \cdot (t - t_{j,v}(s))^{k-1} dt \right). \end{aligned}$$

Вычисление определенных интегралов от степенных функций также легко программируемая операция, поскольку

$$\int_0^1 (t - t_{j,v}(s))^p dt = \frac{(t - t_{j,v}(s))^{p+1}}{p+1} \Big|_0^1 = \frac{(1 - t_{j,v}(s))^{p+1}}{p+1} - \frac{(-t_{j,v}(s))^{p+1}}{p+1},$$

и при  $k = 0$

$$\int_0^1 \frac{dt}{t - t_{j,v}(s)} = \ln \left( 1 - \frac{1}{t_{j,v}(s)} \right).$$

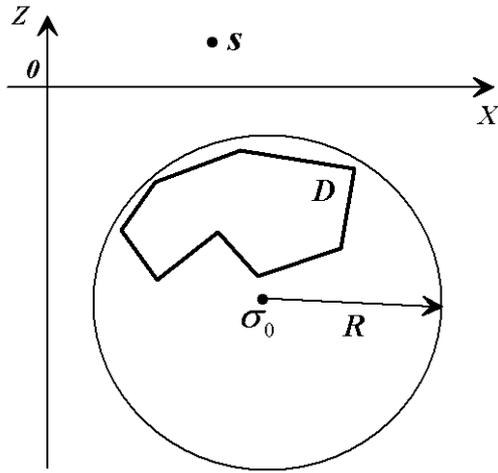
Таким образом, для вычисления аномальных полей от таких тел нет необходимости получать формулы в окончательном виде. По сути дела вся вычислительная процедура сводится к преобразованию полиномов.

### ***Литература.***

1. Дополнительные главы курса гравиразведки и магниторазведки. – Новосибирск. Изд-во НГУ. 1966. 560 с.
  2. Гордин В.М., Розе Е.Н., Углов Б.Д. Морская магнитометрия. – М.: Недра. 1986. 232 с.
  3. Жданов М.С. Аналоги интеграла типа Коши в теории геофизических полей. – М.: Наука. 1984. 327 с.
  4. Страхов В.Н. Методы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. – Пермь.: ПГУ. 1984. 71 с.
  5. Цирульский А.В. Вопросы теории и методы интерпретации потенциальных геофизических полей. Учебное пособие. – Л.: Ленинградский горный ин-т. 1989. 96 с.
  6. Цирульский А.В. Функции комплексного переменного в теории и методах потенциальных геофизических полей. – Свердловск: Наука, 1990. 136 с.
- 

### ***Лекция 7. Представление элементов аномального гравитационного и магнитного полей рядами. Моменты.***

Как мы уже говорили, аналитическое решение прямой задачи предполагает получение явного аналитического выражения, описывающего элементы гравитационного или магнитного полей, создаваемого заданным распределением источников. Такие выражения нами были получены для тел простой формы. Выражения, описывающие поля от этих моделей, включают в себя помимо простых арифметических выражений логарифмические и тригонометрические функции. При рассмотрении более сложных двухмерных моделей класс функций, с помощью которых представляются поля, создаваемые источниками, был расширен до функций комплексных переменных. Класс таких функций может быть расширен и далее. В этой лекции будет рассмотрено, как можно использовать для решения прямой задачи представление полей рядами. Здесь надо сделать следующее замечание. Формально любую алгебраическую или тригонометрическую функцию при определенных условиях можно разложить в ряд Тейлора, и записать любое полученное ранее аналитическое выражение для элементов полей в виде ряда. Собственно, эта идея и реализуется при вычислении трансцендентных функций в ЭВМ. Однако в этой лекции мы рассмотрим более общий подход к представлению полей в виде ряда. И рассмотрение этого вопроса начнем с двухмерных моделей.



1. Введем комплексную систему координат, так, как это было сделано нами ранее при представлении гравитационного и магнитного полей в виде комплексных напряженностей, — ось абсцисс ( $oX$ ) направлена вправо, ось ординат (в наших обозначениях —  $oZ$ ) — вверх. Пусть в этой плоскости задана некоторая конечная область  $D$ , по которой распределена плотность  $\delta(\xi, \zeta)$  или намагниченность  $I(\xi, \zeta)$ . Возьмем в

этой плоскости произвольную точку  $\sigma_0$  и проведем окружность вокруг этой точки радиусом  $R$ , такую, что область  $D$  будет лежать в круге  $K(R, \sigma_0)$ , образованном этой окружностью. Пусть точка  $\sigma$  находится в области  $D$ , и, следовательно, в области  $K(R, \sigma_0)$ , а точка  $s$  — вне этого круга. Тогда для функции  $\frac{1}{\sigma - s}$  можно сделать следующие преобразования:

$$\frac{1}{\sigma - s} = \frac{1}{(\sigma - \sigma_0) - (s - \sigma_0)} = \frac{1}{-(s - \sigma_0) \left( 1 - \frac{\sigma - \sigma_0}{s - \sigma_0} \right)}.$$

Поскольку точка  $\sigma$  находится внутри круга  $K(R, \sigma_0)$ , а точка  $s$  — снаружи, то дробь  $\frac{\sigma - \sigma_0}{s - \sigma_0}$  меньше единицы ( $\frac{\sigma - \sigma_0}{s - \sigma_0} < 1$ ). В этом случае величина

$\frac{1}{\left( 1 - \frac{\sigma - \sigma_0}{s - \sigma_0} \right)}$  представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{\left( 1 - \frac{\sigma - \sigma_0}{s - \sigma_0} \right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\sigma - \sigma_0}{s - \sigma_0} \right)^n.$$

Таким образом, функцию  $\frac{1}{\sigma - s}$  можно представить в виде ряда:

$$\frac{1}{\sigma - s} = -\frac{1}{(s - \sigma_0)} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\sigma - \sigma_0}{s - \sigma_0} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma - \sigma_0)^n}{(s - \sigma_0)^{n+1}}.$$

Выражение для функции  $\frac{1}{(\sigma - s)^2}$  в виде ряда может быть получено путем дифференцирования полученного выражения по переменной  $s$ :

$$\frac{1}{(\sigma - s)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma - \sigma_0)^n (n+1)}{(s - \sigma_0)^{n+2}}.$$

Представив распределение плотности  $\delta(\xi, \zeta)$  в виде функции, зависящей от комплексных переменных  $\hat{\delta}(\sigma, \bar{\sigma})$  и с учетом полученных выражений, комплексную напряженность гравитационного поля  $G(s)$ , создаваемую областью  $D$ , можно записать в виде:

$$\begin{aligned} G(s) &= 2iG \int_D \frac{\hat{\delta}(\sigma, \bar{\sigma})}{\sigma - s} dS = 2iG \int_D \hat{\delta}(\sigma, \bar{\sigma}) \left( -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma - \sigma_0)^n}{(s - \sigma_0)^{n+1}} \right) dS = \\ &= -2iG \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_D \hat{\delta}(\sigma, \bar{\sigma}) (\sigma - \sigma_0)^n dS}{(s - \sigma_0)^{n+1}} = -2iG \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n(\sigma_0)}{(s - \sigma_0)^{n+1}}. \end{aligned}$$

В полученном выражении  $m_n(\sigma_0) = \int_D \hat{\delta}(\sigma, \bar{\sigma}) (\sigma - \sigma_0)^n dS$  – комплексный момент масс относительно точки  $\sigma_0$ .

Аналогично, представив намагниченность как функцию комплексных переменных  $\hat{I}(\sigma, \bar{\sigma})$ , для комплексной напряженности магнитного поля, создаваемой областью  $D$ , получим:

$$\begin{aligned} H(s) &= 2i \int_D \frac{\hat{I}(\sigma, \bar{\sigma})}{(\sigma - s)^2} dS = 2i \int_D \hat{I}(\sigma, \bar{\sigma}) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma - \sigma_0)^n (n+1)}{(s - \sigma_0)^{n+2}} \right) dS = \\ &= 2i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) \int_D \hat{I}(\sigma, \bar{\sigma}) (\sigma - \sigma_0)^n dS}{(s - \sigma_0)^{n+2}} = 2i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) M_n(\sigma_0)}{(s - \sigma_0)^{n+2}}, \end{aligned}$$

где  $M_n(\sigma_0) = \int_D \hat{I}(\sigma, \bar{\sigma}) (\sigma - \sigma_0)^n dS$  – комплексный момент намагниченных масс.

2. Высшие производные комплексных напряженностей  $G(s)$  и  $H(s)$  с помощью комплексных моментов представляются следующими рядами:

$$\frac{dG(s)}{ds} = -2iG \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(n+1)m_n(\sigma_0)}{(s-\sigma_0)^{n+1}}, \quad \frac{d^2G(s)}{ds^2} = -2iG \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)m_n(\sigma_0)}{(s-\sigma_0)^{n+2}}, \dots,$$

$$\frac{d^p G(s)}{ds^p} = -2iG \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (n+p+1)(n+p)\cdots(n+1)}{(s-\sigma_0)^{n+p+1}} m_n(\sigma_0);$$

$$\frac{dH(s)}{ds} = 2i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(n+1)(n+2)M_n(\sigma_0)}{(s-\sigma_0)^{n+2}},$$

$$\frac{d^2 H(s)}{ds^2} = 2i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+2+1)M_n(\sigma_0)}{(s-\sigma_0)^{n+2+2}}, \dots,$$

$$\frac{d^p H(s)}{ds^p} = 2i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^p (n+p+1)(n+p)\cdots(n+1)M_n(\sigma_0)}{(s-\sigma_0)^{n+2+p}}.$$

3. В теории функции комплексной переменной показывается, что если функция  $f(s)$  – однозначная и аналитическая в кольце  $r < |s - s_0| < R$ , не исключая случая, когда  $r = 0$  и  $R = +\infty$ , то она разлагается в этом кольце в ряд Лорана:

$$f(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (s - s_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (s - s_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (s - s_0)^n,$$

где ряд  $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (s - s_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(s - s_0)^n}$  называется главной частью ряда

Лорана, а ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (s - s_0)^n$  – правильной частью ряда Лорана.

4. Таким образом, нами получено представление комплексных напряженностей гравитационного и магнитного полей в виде рядов Лорана. Эти ряды сходятся абсолютно и равномерно во внешности круга  $K(R, \sigma_0)$ , причем область  $D$ , создающая эти поля находится внутри этого круга. Коэффициенты разложения в ряд Лорана комплексных характеристик полей однозначно связаны с комплексными моментами тяготеющих и намагниченных масс. Отсюда в частности следует, что величины  $m_n(\sigma_0)$  и  $M_n(\sigma_0)$  при любом выборе точки  $\sigma_0$  однозначно определяются по полю, и поле по ним также определяется однозначно.

5. На основании комплексных формул Остроградского–Гаусса

$$\int_D \frac{\partial F(\sigma, \bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} dS = \frac{1}{2i} \oint_{\partial D} F(\sigma, \bar{\sigma}) d\sigma \quad - 1\text{-ая формула О.-Г.}$$

$$\int_D \frac{\partial F(\sigma, \bar{\sigma})}{\partial \sigma} dS = -\frac{1}{2i} \oint_{\partial D} F(\sigma, \bar{\sigma}) d\bar{\sigma} \quad - 2\text{-ая формула О.-Г.}$$

определение комплексных моментов может быть сведено к вычислению контурных интегралов. Так, с использованием 1-ой формулы О. –Г. для комплексных моментов можно записать:

$$m_n(\sigma_0) = \int_D \delta(\xi, \zeta) (\sigma - \sigma_0)^n dS = \frac{1}{2i} \oint_{\partial D} \Phi(\sigma, \bar{\sigma}) (\sigma - \sigma_0)^n d\sigma,$$

$$M_n(\sigma_0) = \int_D I(\xi, \zeta) (\sigma - \sigma_0)^n dS = \frac{1}{2i} \oint_{\partial D} \Psi(\sigma, \bar{\sigma}) (\sigma - \sigma_0)^n d\sigma,$$

где  $\Phi(\sigma, \bar{\sigma}) = \int \hat{\delta}(\sigma, \bar{\sigma}) d\bar{\sigma}$ ,  $\Psi(\sigma, \bar{\sigma}) = \int \hat{I}(\sigma, \bar{\sigma}) d\bar{\sigma}$ .

Нахождение комплексных моментов тяготеющих и намагниченных масс уже является прямой задачей, при этом для комплексных моментов аналитические выражения получаются в широком классе функций, описывающих распределение источников.

6. В качестве примера получим выражение для моментов от области с постоянной плотностью или намагниченностью и с границей, состоящей из  $N$  дуг с параметрическим представлением в виде степенной функции. При этом воспользуемся второй формулировкой теоремы О.-Г.:

$$m_n(\sigma_0) = \int_D \delta (\sigma - \sigma_0)^n dS = -\frac{\delta}{2i(n+1)} \oint_{\partial D} (\sigma - \sigma_0)^{n+1} d\bar{\sigma},$$

$$M_n(\sigma_0) = \int_D I (\sigma - \sigma_0)^n dS = -\frac{I}{2i(n+1)} \oint_{\partial D} (\sigma - \sigma_0)^{n+1} d\bar{\sigma}.$$

Для случая тяготеющих масс получим:

$$m_n(\sigma_0) = -\frac{\delta}{2i(n+1)} \oint_{\partial D} (\sigma - \sigma_0)^{n+1} d\bar{\sigma} = \frac{i\delta}{2(n+1)} \sum_{\nu=1}^N \int_{\Gamma_\nu} (\sigma - \sigma_0)^{n+1} d\bar{\sigma} =$$

$$= \frac{i\delta}{2(n+1)} \sum_{\nu=1}^N \int_0^1 (\sigma^\nu(t) - \sigma_0)^{n+1} \bar{\sigma}'(t) dt.$$

Если область  $D$  представляет собой многоугольник, то уравнения сторон имеют вид  $\sigma^\nu(t) = a_\nu t + b_\nu$ , и, соответственно,

$$\begin{aligned} m_n(\sigma_0) &= \frac{i\delta}{2(n+1)} \sum_{\nu=1}^N \int_0^1 (a_\nu t + b_\nu - \sigma_0)^{n+1} \bar{a}_\nu dt = \\ &= \frac{i\delta}{2(n+1)} \sum_{\nu=1}^N \int_0^1 (a_\nu t + b_\nu - \sigma_0)^{n+1} \frac{\bar{a}_\nu}{a_\nu} d(a_\nu t + b_\nu - \sigma_0) = \\ &= \frac{i\delta}{2(n+1)} \sum_{\nu=1}^N \left[ \frac{\bar{a}_\nu}{a_\nu(n+2)} (a_\nu t + b_\nu - \sigma_0)^{n+2} \right]_0^1 = \\ &= \frac{i\delta}{2(n+1)(n+2)} \sum_{\nu=1}^N \frac{\bar{a}_\nu}{a_\nu} [(a_\nu + b_\nu - \sigma_0)^{n+2} - (b_\nu - \sigma_0)^{n+2}]. \end{aligned}$$

Для случая многоугольника с полиномиальным распределением плотности можем записать:

$$m_n(\sigma_0) = \frac{1}{2i} \oint_{\partial D} \Phi(\sigma, \bar{\sigma}) (\sigma - \sigma_0)^n d\sigma = \frac{1}{2i} \sum_{\nu=1}^N \int_{\sigma_\nu}^{\sigma_{\nu+1}} P_{n+1,\nu}(\sigma) (\sigma - \sigma_0)^n d\sigma.$$

Решение такого рода интегралов, как нами было показано ранее, легко может быть запрограммировано на ЭВМ.

Следует также отметить, что существуют возможности численного нахождения определенных интегралов с помощью различных кубатурных формул. В частности, если подинтегральная функция представляется полиномом, то применение квадратурных формул Гаусса позволяет точно вычислить определенный интеграл.

7. Остановимся на вопросе: сколько членов ряда необходимо удержать, чтобы при вычислении значений напряженности поля получить заданную точность? Этот вопрос рассмотрим на примере поля  $G(s)$ , для чего оценим значение верхней грани следующей разницы  $|G(s) - G_p(s)|$ , где  $p$  – число удерживаемых членов ряда. Тогда,

$$\sup_{|s| \geq R} |G(s) - G_p(s)| = \sup \left| -2iG \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{m_k(\sigma_0)}{(s - \sigma_0)^{k+1}} \right| \leq 2G \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{|m_k(\sigma_0)|}{R^{k+1}}.$$

Оценим величину  $|m_k(\sigma_0)|$ :

$$|m_k(\sigma_0)| \leq \left| \int_D \delta(\xi, \zeta) (\sigma - \sigma_0)^k dS \right| \leq \int_D |\delta(\xi, \zeta)| |\sigma - \sigma_0|^k dS \leq r^k C(\delta, D),$$

где  $C(\delta, D) = \int_D |\delta(\xi, \zeta)| dS$ ,  $r$  – расстояние от центра разложения  $\sigma_0$  до наиболее удаленной точки  $\sigma$ , принадлежащей области  $D$ . В результате, для оценки величины суммы остаточных членов ряда получим:

$$\sup_{|s| \geq R} |G(s) - G_p(s)| \leq 2GC(\delta, D) \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{r^k}{R^{k+1}} \leq 2GC(\delta, D) \frac{r^{p+1}}{R^{p+2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k.$$

Поскольку отношение  $\frac{r}{R} < 1$ , то  $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k$  – сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии. Окончательно получим

$$\sup_{|s| \geq R} |G(s) - G_p(s)| \leq 2GC(\delta, D) \frac{r^{p+1}}{R^{p+2}} \frac{1}{1 - \frac{r}{R}},$$

причем полученная оценка является очень грубой.

8. Рассмотрим содержательный смысл комплексных моментов. Моменты нулевого порядка:

$$m_0(\sigma_0) = \int_D \delta(\xi, \zeta) (\sigma - \sigma_0)^0 dS = \int_D \delta(\xi, \zeta) dS \quad - \text{ суммарная масса,}$$

сосредоточенная в области  $D$ ;

$$M_0(\sigma_0) = \int_D I(\xi, \zeta) dS \quad - \text{ суммарный магнитный момент области } D.$$

Оба эти момента не зависят от положения точки  $\sigma_0$ .

На основании теоремы о среднем для момента 1-го порядка  $m_1(\sigma_0)$  можем записать:

$$\begin{aligned} m_1(\sigma_0) &= \int_D \delta(\xi, \zeta) (\sigma - \sigma_0)^1 dS = \int_D \delta(\xi, \zeta) \sigma dS - \sigma_0 \int_D \delta(\xi, \zeta) dS = \\ &= \sigma_c \int_D \delta(\xi, \zeta) dS - \sigma_0 \int_D \delta(\xi, \zeta) dS = m_0(\sigma_0) (\sigma_c - \sigma_0). \end{aligned}$$

Здесь  $\sigma_c$  – комплексная координата центра масс. Аналогичное соотношение можем записать и для магнитного момента  $M_1(\sigma_0)$ .

Определим следующую величину:

$$\Delta = \frac{1}{(m_0(\sigma_0))^2} \begin{vmatrix} m_0(\sigma_0) & m_1(\sigma_0) \\ m_1(\sigma_0) & m_0(\sigma_0) \end{vmatrix}.$$

При постоянной плотности  $\delta$ , величина  $\gamma = \sqrt{|\Delta|}$  характеризует степень вытянутости области  $D$  вдоль своей длинной оси, а величина  $\theta = \arg \sqrt{\Delta} = \frac{1}{2} \arg \Delta$  – угол между этой осью и осью  $OX$ .

Инварианты из моментов более высокого порядка определяются следующим образом:

$$\Delta_n = \frac{1}{(m_0(\sigma_0))^{n+1}} \begin{vmatrix} m_0(\sigma_0) & m_1(\sigma_0) & \cdots & m_n(\sigma_0) \\ m_1(\sigma_0) & m_2(\sigma_0) & \cdots & m_{n+1}(\sigma_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_n(\sigma_0) & m_{n+1}(\sigma_0) & \cdots & m_{2n}(\sigma_0) \end{vmatrix}.$$

Величина  $\Delta_n$  не зависит от выбора точки  $\sigma_0$ , а величина  $\gamma = \sqrt[n+1]{|\Delta_n|}$  при  $n \geq 2$  характеризует асимметрию в распределении масс относительно длинной оси однородного двухмерного тела.

Аналогично определяются инварианты и в случае магнитного поля.

9. Перейдем к представлению гравитационных и магнитных полей, создаваемых трехмерными телами, в виде рядов, аналогичных рассмотренным для двухмерного случая.

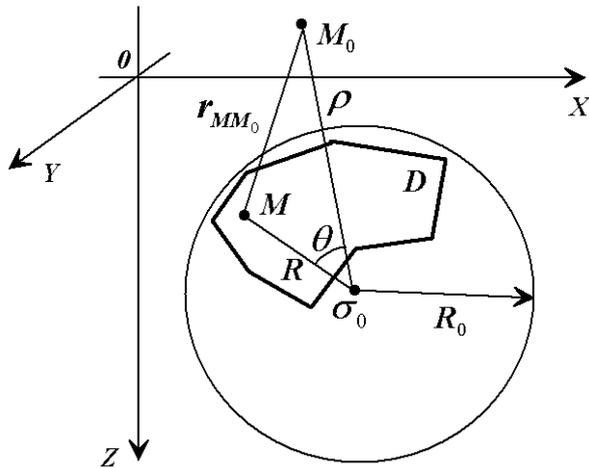
Введем прямоугольную декартову систему координат и пусть в этой системе задана область  $D$ , в которой распределены массы с плотностью  $\delta(\xi, \eta, \zeta)$ .

Потенциал силы притяжения создаваемый этой областью в точке  $M_0$  будет определяться следующим соотношением:

$$V(M_0) = G \int_D \delta(M) \frac{1}{r_{MM_0}} dv,$$

где  $r_{MM_0}$  – расстояние между точкой интегрирования  $M(\xi, \eta, \zeta)$  и точкой  $M_0(x, y, z)$ .

Возьмем некоторую фиксированную точку  $\sigma_0(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$  и из этой точки проведем сферу радиуса  $R_0$  таким образом, что область  $D$  будет находиться внутри этой сферы, а точка  $M_0$  будет находиться вне этой сферы. Обозначим через  $R$  расстояние между точками  $M$  и  $\sigma_0$ , а через  $\rho$  –



расстояние от точки  $\sigma_0$  до точки  $M_0$ . Угол между векторами  $R$  и  $\rho$  –  $\theta$ . Тогда для расстояния  $r_{MM_0}$  согласно теореме косинусов можно записать:

$$r_{MM_0}^2 = \rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \theta.$$

Исходя из этого соотношения, осуществим следующие

преобразования для величины  $\frac{1}{r_{MM_0}}$ :

$$\frac{1}{r_{MM_0}} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + R^2 - 2\rho R \cos \theta}} = \frac{1}{\rho} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{\rho^2} - 2\frac{R}{\rho} \cos \theta}}.$$

Функцию вида  $(1 \pm x)^{-1/2}$  при  $|x| \leq 1$  и  $(1+x) \neq 0$  можно представить в виде ряда:

$$(1 \pm x)^{-1/2} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}x^2 \mp \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6}x^3 + \dots$$

Поскольку величина  $\rho$  больше  $R$  ( $\rho > R$ ), то отношение  $\frac{R}{\rho}$  меньше 1 ( $\frac{R}{\rho} < 1$ ).

В этом случае выражение для величины  $\frac{1}{r_{MM_0}}$  можно представить в виде

ряда по отношениям  $\frac{R}{\rho}$ :

$$\frac{1}{r_{MM_0}} = \frac{1}{\rho} \left[ 1 + \frac{R}{\rho} \cos \theta + \frac{1}{2} \left( \frac{R}{\rho} \right)^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \dots \right].$$

Коэффициенты при различных степенях  $\frac{R}{\rho}$  представляют собой

сферические функции первого рода с аргументом  $\theta$ , которые определяются полиномами Лежандра. С их помощью это выражение может быть представлено в виде:

$$\frac{1}{r_{MM_0}} = \frac{1}{\rho} \left[ P_0(\cos \theta) + \frac{R}{\rho} P_1(\cos \theta) + \left( \frac{R}{\rho} \right)^2 P_2(\cos \theta) + \dots \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \theta).$$

Здесь  $P_n(\cos \theta)$  – полиномы Лежандра степени  $n$ :

$$P_0(\cos \theta) = 1,$$

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta,$$

$$P_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1),$$

$$P_3(\cos \theta) = \frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta).$$

Последующие полиномы могут быть получены из следующего рекуррентного соотношения:

$$P_{n+1}(\cos \theta) = \frac{2n+1}{n+1} \cos \theta P_n(\cos \theta) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(\cos \theta).$$

10. Подставим полученное выражение для  $\frac{1}{r_{MM_0}}$  в формулу для потенциала силы тяжести:

$$\begin{aligned} V(M_0) &= G \int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) \frac{1}{r_{MM_0}} dv = G \int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{R^n}{\rho^{n+1}} P_n(\cos \theta) dv = \\ &= G \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) R^n P_n(\cos \theta) dv}{\rho^{n+1}} = G \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{\rho^{n+1}}, \end{aligned}$$

где  $m_n = \int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) R^n P_n(\cos \theta) dv$  – моменты масс.

Компоненты гравитационного поля, создаваемого областью  $D$ , будут определяться как соответствующие частные производные потенциала. Так для вертикальной составляющей поля силы тяжести можно записать:

$$V_z(M) = \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} = G \sum_{n=0}^{\infty} m_n \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\rho^{n+1}} \right).$$

Таким образом, как и для двумерных полей, потенциал гравитационного поля представляется в виде бесконечного сходящегося ряда.

11. Рассмотрим физический смысл моментов. Для упрощения дальнейших выкладок перенесем начало координат в точку  $\sigma_0$ . Тогда положение точки интегрирования  $M(\xi, \eta, \zeta)$  будет определяться радиус-вектором  $\vec{R} = \xi 1\vec{x} + \eta 1\vec{y} + \zeta 1\vec{z}$ , а положение точки  $M_0(x, y, z)$  – радиус-вектором  $\vec{\rho} = x 1\vec{x} + y 1\vec{y} + z 1\vec{z}$ .

Нулевой момент области  $D$  с распределенной в ней плотностью  $\delta(\xi, \eta, \zeta)$  будет следующим:

$$m_0 = \int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) R^0 P_0(\cos \theta) dv = \int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) dv,$$

т.е. характеризует массу области.

Первый момент:

$$\begin{aligned} m_1 &= \int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) R^1 P_1(\cos \theta) dv = \int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) R \cos \theta dv = \\ &= \int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) R \frac{\xi x + \eta y + \zeta z}{\rho R} dv = \\ &= \frac{x}{\rho_D} \int_D \xi \delta(\xi, \eta, \zeta) dv + \frac{y}{\rho_D} \int_D \eta \delta(\xi, \eta, \zeta) dv + \frac{z}{\rho_D} \int_D \zeta \delta(\xi, \eta, \zeta) dv. \end{aligned}$$

Интегралами типа  $\int_D \xi \delta(\xi, \eta, \zeta) dv$  определяются координаты центра тяжести тела:

$$\xi_0 = \frac{\int_D \xi \delta(\xi, \eta, \zeta) dv}{\int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) dv}, \quad \eta_0 = \frac{\int_D \eta \delta(\xi, \eta, \zeta) dv}{\int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) dv}, \quad \zeta_0 = \frac{\int_D \zeta \delta(\xi, \eta, \zeta) dv}{\int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) dv}.$$

Для вторых моментов можно записать:

$$\begin{aligned} m_2 &= \int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) R^2 P_2(\cos \theta) dv = \int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) R^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) dv = \\ &= \int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) R^2 \frac{1}{2} \left( 3 \frac{(\xi x + \eta y + \zeta z)^2}{(\rho R)^2} - 1 \right) dv = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) \left( \frac{3(\xi x + \eta y + \zeta z)^2}{2\rho^2} - R^2 \right) dv.$$

При раскрытии скобки  $(\xi x + \eta y + \zeta z)^2$  появляются интегралы вида:

$$2 \int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) \xi x \eta y dv, \quad 2 \int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) \xi x \zeta z dv, \quad 2 \int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) \eta y \zeta z dv,$$

которые в механике называются произведениями инерции. Дальнейшие преобразования приводят к появлению интегралов:

$$\int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) (\xi^2 + \eta^2) dv, \quad \int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) (\eta^2 + \zeta^2) dv, \quad \int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) (\xi^2 + \zeta^2) dv,$$

которые носят название главных моментов инерции.

12. Аналогичным образом, определяются моменты и для магнитного поля. Однако следует отметить, что теория решения прямых задач на этой основе до сих пор еще недостаточно разработана и не нашла активного применения.

### *Литература.*

1. Гравиразведка. Справочник геофизика. – М.: Недра. 1990. 607 с.
2. Страхов В.Н. Методы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. – Пермь.: ПГУ. 1984. 71 с.

## ***Лекция 8. Спектральное представление гравитационных и магнитных аномальных полей.***

Представление элементов гравитационных и магнитных полей с помощью интегралов Фурье (спектральных функций полей) имеет большое значение при анализе задач трансформаций, вопросов единственности и эквивалентности, при решении ряда обратных задач. Определение спектральных характеристик полей по заданному распределению источников также относится к прямым задачам.

1. Прежде всего определим понятие спектрального преобразования для функций, зависящих от одной переменной. Пусть функция  $f(x)$  в любом конечном интервале подчиняется условиям Дирихле (1. Область задания функции  $f(x)$  можно разбить на конечное число интервалов, в которых  $f(x)$  непрерывна и монотонна; 2. Если точка  $x_0$  является точкой разрыва функции  $f(x)$ , то существуют  $f(x_0+0)$  и  $f(x_0-0)$ .) и является абсолютно интегрируемой, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < +\infty,$$

то для этой функции справедлива следующая пара преобразований:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x} d\omega,$$

где  $\omega$  – параметр преобразования, обычно называемой частотой. Первый из этих интегралов описывает переход от функции  $f(x)$  к функции  $\hat{f}(\omega)$  носит название преобразования Фурье, а сама функция  $\hat{f}(\omega)$  – трансформантой Фурье или спектром функции  $f(x)$ . Вторым интегралом описывается обратное преобразование Фурье, когда по спектральной функции  $\hat{f}(\omega)$  определяется функция  $f(x)$ .

Как видно из определения преобразования Фурье,  $\hat{f}(\omega)$  – в общем случае комплексная функция:

$$\hat{f}(\omega) = \text{Re}(\hat{f}(\omega)) + i \text{Im}(\hat{f}(\omega)).$$

Исходная функция  $f(x)$  также может быть комплексной, зависящей от действительного аргумента  $x$ .

Если функция  $f(x)$  действительна и является четной, то мнимая часть спектральной функции  $\text{Im}(\hat{f}(\omega))$  будет равна нулю ( $\text{Im}(\hat{f}(\omega)) = 0$ ), а действительная часть будет функцией четной, т.е.  $\text{Re}(\hat{f}(-\omega)) = \text{Re}(\hat{f}(\omega))$ . В случае, если  $f(x)$  является нечетной функцией, то действительная часть спектра такой функции будет равна нулю ( $\text{Re}(\hat{f}(\omega)) = 0$ ), а мнимая часть будет также представлять собой нечетную функцию ( $\text{Im}(\hat{f}(-\omega)) = -\text{Im}(\hat{f}(\omega))$ ). Поскольку любую действительную функцию  $f(x)$  в общем случае можно представить как сумму четной  $g(x)$  и нечетной  $h(x)$  функций:

$$f(x) = g(x) + h(x),$$

где

$$g(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)), \quad h(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

то отсюда следует, что  $\hat{f}(\omega) = \hat{g}(\omega) + \hat{h}(\omega)$ , где  $\hat{g}(\omega)$  и  $\hat{h}(\omega)$  – спектры функций  $g(x)$  и  $h(x)$ . Поскольку  $\hat{g}(\omega)$  имеет только действительную часть, и она является четной, а  $\hat{h}(\omega)$  – только мнимую часть, и она является нечетной, то для действительной и мнимой частей функции  $\hat{f}(\omega)$  выполняются следующие условия:

$$\operatorname{Re}(\hat{f}(-\omega)) = \operatorname{Re}(\hat{f}(\omega)), \quad \operatorname{Im}(\hat{f}(-\omega)) = -\operatorname{Im}(\hat{f}(\omega)).$$

2. Отметим основные свойства преобразования Фурье.

– *Линейность*. Если функции  $g(x)$  и  $h(x)$  имеют спектры  $\hat{g}(\omega)$  и  $\hat{h}(\omega)$ ,  $a$  и  $b$  – постоянные числа, то спектр функции  $ag(x) \pm bh(x)$  будет равен  $a\hat{g}(\omega) \pm b\hat{h}(\omega)$ .

– *Подобие*. Сжатие (растяжение) сигнала приводит к растяжению (сжатию) спектра, т.е. если  $a$  – постоянное число, и функции  $f(x)$  соответствует спектр  $\hat{f}(\omega)$ , то функции  $f(ax)$  будет соответствовать спектр  $\frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$ :

$$f(x) \leftrightarrow \hat{f}(\omega), \quad f(ax) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

– *Запаздывание*. Если функция  $f(x)$  имеет спектр  $\hat{f}(\omega)$ , то функции  $f(x \pm \xi)$  будет соответствовать спектр  $\hat{f}(\omega)e^{\pm i\omega\xi}$ :

$$f(x) \leftrightarrow \hat{f}(\omega), \quad f(x \pm \xi) \leftrightarrow \hat{f}(\omega)e^{\pm i\omega\xi}.$$

– *Дифференцирование*. Если функции  $f(x)$  соответствует спектр  $\hat{f}(\omega)$ , то спектр производной  $f'(x)$  будет равен  $i\omega\hat{f}(\omega)$ :

$$f(x) \leftrightarrow \hat{f}(\omega), \quad f'(x) \leftrightarrow i\omega\hat{f}(\omega).$$

– *Свертка двух функций*. Сверткой двух функций (сигналов) называется выражение:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(x - \xi)d\xi = g(x) * h(x).$$

Спектр свертки функций равен произведению их спектров, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(x - \xi)d\xi \leftrightarrow \hat{g}(\omega)\hat{h}(\omega).$$

3. Введем декартову систему координат с осью  $oX$ , направленной вправо, и осью  $oZ$  – вверх. Пусть в точке с координатами  $(\xi=0, \zeta=-h)$  располагается бесконечная горизонтальная материальная линия с плотностью  $\delta_l$ . Тогда гравитационное поле  $\vec{g}$ , создаваемой такой линией на оси  $oX$ , будет описываться следующими выражениями:

$$g_z(x) = V_z(x) = 2G\delta_l \frac{\zeta - z}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} = 2G\delta_l \frac{-h}{x^2 + h^2},$$

$$g_x(x) = V_x(x) = 2G\delta_l \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} = 2G\delta_l \frac{-x}{x^2 + h^2}.$$

Получим выражения для их спектральных функций. Так для функции  $g_z(x)$  можем записать:

$$\hat{g}_z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} 2G\delta_l \frac{-h}{x^2 + h^2} e^{-i\omega x} dx = -2G\delta_l h \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + h^2} e^{-i\omega x} dx.$$

Для вычисления этого интеграла воспользуемся теоремой о вычетах. Напомним, что если аналитическая функция  $f(s)$  в точке  $s=a$  имеет изолированную особую точку, то коэффициент  $c_{-1}$  при степени  $(s-a)^{-1}$  в ряде Лорана функции  $f(s)$  называют вычетом  $\mathbf{Res}_a f(s)$  аналитической функции  $f(s)$  относительно точки  $a$ . При  $a \neq \infty$

$$\mathbf{Res}_a f(s) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\sigma) d\sigma = c_{-1},$$

где  $C$  – любая замкнутая гладкая кривая Жордана, охватывающая точку  $s=a$ , и которая обходится против часовой стрелки (положительное направление обхода). Если в точке  $s = a \neq \infty$  функция  $f(s)$  имеет полюсы  $m$ -го порядка, то вычет можно вычислить следующим образом:

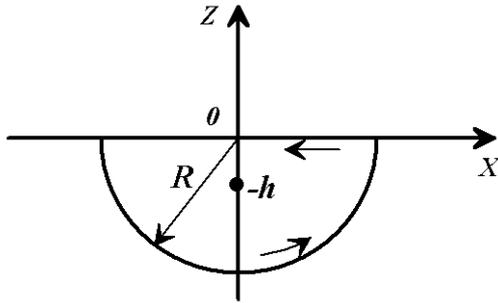
$$c_{-1} = \mathbf{Res}_a f(s) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{s \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}} [(s-a)^m f(s)].$$

Если  $f(s)$  – аналитическая функция в области  $D$ , за исключением конечного числа точек  $a_1, a_2, \dots, a_k$  и  $C$  – замкнутая кусочно гладкая кривая, охватывающая особые точки  $a_i$  ( $i=1, \dots, k$ ) и лежащая целиком в области  $D$ , то

$$\oint_C f(\sigma) d\sigma = 2\pi i \sum_{i=1}^k \operatorname{Res}_{a_i} f(s).$$

Для того чтобы вычислить интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + h^2} e^{-i\omega x} dx$  рассмотрим

функцию  $f(s) = \frac{e^{-i\omega s}}{s^2 + h^2}$ .



Эта функция – аналитическая во всей нижней полуплоскости за исключением точки  $s = -ih$ , где она имеет простой полюс ( $m = 1$ ). Из начала координат проведем полуокружность радиуса  $R \rightarrow \infty$ . В этом случае точка  $s$  окажется внутри этой полуокружности. Тогда обход области, содержащей точку  $s$ , будет проходить по линии

полуокружности и по оси абсцисс, причем интегрирование по параметру  $x$  будет осуществляться в пределах от  $+\infty$  до  $-\infty$ . Тогда

$$\operatorname{Res}_{-ih} f(s) = \lim_{s \rightarrow -ih} \left[ (s + ih) \frac{e^{-i\omega s}}{s^2 + h^2} \right] = \lim_{s \rightarrow -ih} \frac{e^{-i\omega s}}{s - ih} = -\frac{e^{-\omega h}}{2ih}.$$

Согласно теореме о вычетах  $\oint_C f(\sigma) d\sigma = 2\pi i \operatorname{Res}_{-ih} f(s)$ . В то же время,

поскольку функция  $f(s) = \frac{e^{-i\omega s}}{s^2 + h^2}$  при  $s \rightarrow \infty$  стремится к нулю, то интеграл по полуокружности будет равен нулю. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + h^2} e^{-i\omega x} dx = 2\pi i \left( -\frac{e^{-\omega h}}{2ih} \right) = -\pi \frac{e^{-\omega h}}{h}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + h^2} e^{-i\omega x} dx = +\pi \frac{e^{-\omega h}}{h},$$

и соответственно:

$$\hat{g}_z(\omega) = -2G\delta_n h \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + h^2} e^{-i\omega x} dx = -2G\delta_n h \left( +\pi \frac{e^{-\omega h}}{h} \right) = -2\pi G\delta_n e^{-\omega h}.$$

Полученная функция будет иметь смысл при положительных значениях параметра  $\omega$  ( $\omega > 0$ ). Но, поскольку параметр  $\omega$  может принимать и отрицательные значения, а сама функция  $g_z(x)$  является четной, то окончательное выражение для  $\hat{g}_z(\omega)$  будет иметь вид:

$$\hat{g}_z(\omega) = -2\pi G \delta_{,l} e^{-|\omega|h}.$$

Аналогично, для спектра функции  $g_x(x)$  можем записать:

$$\hat{g}_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} 2G \delta_{,l} \frac{-x}{x^2 + h^2} e^{-i\omega x} dx = -2G \delta_{,l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + h^2} e^{-i\omega x} dx.$$

Рассмотрим функцию  $f(s) = \frac{se^{-i\omega s}}{s^2 + h^2}$ . Она также является аналитической во всей нижней полуплоскости за исключением точки  $s = -ih$ . Тогда

$$\text{Res}_{-ih} f(s) = \lim_{s \rightarrow -ih} \left[ (s + ih) \frac{se^{-i\omega s}}{s^2 + h^2} \right] = \lim_{s \rightarrow -ih} \frac{se^{-i\omega s}}{s - ih} = \frac{(-ih)e^{-\omega h}}{-2ih} = \frac{e^{-\omega h}}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + h^2} e^{-i\omega x} dx = 2\pi i \left( \frac{e^{-\omega h}}{2} \right) = i\pi e^{-\omega h}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + h^2} e^{-i\omega x} dx = -i\pi e^{-\omega h},$$

$$\hat{g}_x(\omega) = -2G \delta_{,l} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + h^2} e^{-i\omega x} dx = -2G \delta_{,l} (-i\pi e^{-\omega h}) = 2\pi i G \delta_{,l} e^{-\omega h}.$$

Эта функция также имеет смысл при  $\omega > 0$ . С учетом того, что функция  $g_x(x)$  нечетная, выражение  $\hat{g}_x(\omega)$  для отрицательных значений параметра  $\omega$  будет следующим:

$$\hat{g}_x(\omega) = -2\pi i G \delta_{,l} e^{-|\omega|h},$$

или в общем случае

$$\hat{g}_x(\omega) = \text{sign}(\omega) \cdot 2\pi i G \delta_{,l} e^{-|\omega|h}.$$

4. Если положение материальной линии определяется координатами  $(\xi, \zeta)$  и при этом  $\zeta < 0$ , выражения для спектральных характеристик приобретут вид:

$$\hat{g}_z(\omega) = -2\pi G \delta_{,l} e^{|\omega|\zeta} e^{-i\omega\xi}, \quad \hat{g}_x(\omega) = \text{sign}(\omega) \cdot 2\pi i G \delta_{,l} e^{|\omega|\zeta} e^{-i\omega\xi}.$$

Для спектральных функций горизонтальных производных от функций  $g_z(x)$  и  $g_x(x)$  получим:

$$\hat{V}_{xz}(\omega) = (i\omega)\hat{g}_z(\omega), \quad \hat{V}_{xx}(\omega) = (i\omega)\hat{g}_x(\omega).$$

Спектр функции компонент поля притяжения на постоянном уровне  $z$  будет определяться следующим образом:

$$\hat{g}_z(\omega) = -2\pi G \delta_{,l} e^{|\omega|(\zeta-z)} e^{-i\omega\xi}, \quad \hat{g}_x(\omega) = \text{sign}(\omega) \cdot 2\pi i G \delta_{,l} e^{|\omega|(\zeta-z)} e^{-i\omega\xi},$$

При этом необходимо, чтобы выполнялось условие  $(\zeta - z) > 0$ . Из этого в частности следует, что спектр поля на высоте  $z$  связан со спектром поля на нулевом уровне через экспоненту  $e^{-|\omega|z}$ . Если вспомнить о том, что пересчет поля в верхнее полупространство осуществляется с помощью интеграла Пуассона:

$$g(x, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi, 0) \frac{z}{(\xi - x)^2 + z^2} d\xi,$$

то становится ясным, что функция  $e^{-|\omega|z}$  является спектральной функцией ядра этого преобразования:

$$\frac{1}{\pi} \frac{z}{x^2 + z^2} \leftrightarrow e^{-|\omega|z}.$$

Здесь под полем  $g$  можно понимать любую потенциальную функцию, в том числе и любые компоненты гравитационного поля.

Таким образом, поле на уровне  $z$  можно представить через спектральную функцию того же поля на нулевом уровне:

$$g(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) e^{-|\omega|z} d\omega.$$

Для вертикальной производной можно записать:

$$\frac{\partial g(x, z)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(\omega) e^{-|\omega|z} d\omega \right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (-|\omega|) \hat{g}(\omega) e^{-|\omega|z} d\omega.$$

Полученный результат показывает, что вычисление вертикальной производной компонент поля в пространственной области соответствует умножению их спектральных функций на  $(-|\omega|)$  в частотной:

$$g(x, z)_{z=\text{const}} \leftrightarrow \hat{g}(\omega), \quad \left. \frac{\partial g(x, z)}{\partial z} \right|_{z=\text{const}} \leftrightarrow -|\omega| \hat{g}(\omega).$$

В общем случае высшие производные через спектральные функции выражаются следующим образом:

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial z^m} \leftrightarrow (i\omega)^n (-|\omega|)^m.$$

5. В качестве примера рассмотрим, чему будут равны спектральные функции производных  $\frac{dg_z(x)}{dx} = V_{zx}(x)$  и  $\frac{dg_x(x)}{dz} = V_{xz}(x)$ :

$$\hat{V}_{zx}(\omega) = (i\omega)\hat{g}_z(\omega) = -(i\omega)2\pi G\delta_n e^{|\omega|(\zeta-z)} e^{-i\omega\xi} = -2\pi i G\delta_n \omega e^{|\omega|(\zeta-z)} e^{-i\omega\xi},$$

$$\begin{aligned} \hat{V}_{xz}(\omega) &= (-|\omega|)\hat{g}_x(\omega) = (-|\omega|)\text{sign}(\omega) \cdot 2\pi i G\delta_n e^{|\omega|(\zeta-z)} e^{-i\omega\xi} = \\ &= -2\pi i G\delta_n \omega e^{|\omega|(\zeta-z)} e^{-i\omega\xi}. \end{aligned}$$

Полученные выражения, как и следовало ожидать, совпадают.

6. Рассмотрим комплексную напряженность гравитационного поля, создаваемого бесконечной горизонтальной материальной линией

$$G(x) = g_z(x) + ig_x(x) = V_z(x) + iV_x(x).$$

Спектр такой комплексной функции будет равен сумме спектров функций  $g_z(x)$  и  $g_x(x)$ :

$$\hat{G}(\omega) = \hat{g}_z(\omega) + i\hat{g}_x(\omega).$$

Подставив в это выражение полученные спектральные представления для компонент гравитационного поля, для положительных значений  $\omega$  ( $\omega > 0$ ) получим:

$$\hat{G}(\omega) = \hat{g}_z(\omega) + i\hat{g}_x(\omega) = -2\pi G\delta_n e^{-\omega h} + i(2\pi i G\delta_n e^{-\omega h}) = -4\pi G\delta_n e^{-\omega h}.$$

При отрицательных значениях  $\omega$  ( $\omega < 0$ ):

$$\hat{G}(\omega) = \hat{g}_z(\omega) + i\hat{g}_x(\omega) = -2\pi G\delta_n e^{-\omega h} + i(-2\pi i G\delta_n e^{-\omega h}) = 0.$$

Если рассматриваемая нами материальная линия сдвинута относительно начала координат на величину  $\xi$ , то для того, чтобы получить выражение для комплексного спектра поля, создаваемого таким

источником достаточно умножить полученное выражение для  $\hat{G}(\omega)$  на экспоненту  $e^{-i\omega\xi}$ .

Таким образом, окончательно для спектра комплексной напряженности гравитационного поля, создаваемого бесконечной горизонтальной материальной линией, можем записать:

$$\hat{G}(\omega) = \begin{cases} -4\pi G \delta_{,n} e^{-\omega h} e^{-i\omega\xi}, & \omega \geq 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}.$$

В общем случае, если координата положения этой линии  $(\xi, \zeta)$ , то выражение для спектра при  $\omega \geq 0$  будет следующим:

$$\hat{G}(\omega) = -4\pi G \delta_{,n} e^{\omega\zeta} e^{-i\omega\xi} = -4\pi G \delta_{,n} e^{-i\omega(\xi+i\zeta)} = -4\pi G \delta_{,n} e^{-i\omega\sigma},$$

при этом положение точки  $\sigma = \xi + i\zeta$  должно быть ниже оси абсцисс ( $\zeta < 0$ ).

В случае, когда массы сосредоточены в замкнутой области  $D$  с переменной плотностью  $\delta$ , выражение для спектра при  $\omega > 0$  приобретет вид:

$$\hat{G}(\omega) = -4\pi G \int_D \delta(\xi, \zeta) e^{-i\omega\sigma} dS.$$

Спектральные характеристики полей  $g_z(x)$  и  $g_x(x)$  могут быть представлены следующими выражениями:

$$\hat{g}_z(\omega) = -2\pi G \int_D \delta(\xi, \zeta) e^{-i\omega\xi} e^{|\omega|\zeta} dS,$$

$$\hat{g}_x(\omega) = \text{sign}(\omega) 2\pi i G \int_D \delta(\xi, \zeta) e^{-i\omega\xi} e^{|\omega|\zeta} dS,$$

при этом должно выполняться условие  $\zeta < 0$ .

7. До сих пор нами рассматривался случай, когда поле было задано на оси  $oX$ . Можно рассмотреть более общий случай и определить преобразование Фурье комплексной функции  $G(s)$ , где  $s = x + iz$ . В основе этого преобразования лежит следующая формула:

$$\frac{1}{\sigma - s} = i \int_0^{\infty} e^{-i\omega(\sigma - s)} d\omega,$$

которая может быть получена из соотношения

$$\int_0^{\infty} e^{-px} dx = -\frac{1}{p} [e^{-px}]_0^{\infty} = \frac{1}{p}.$$

Этот результат справедлив при  $\text{Re}(p) > 0$ . Следовательно, необходимое условие сходимости интеграла  $\int_0^{\infty} e^{-i\omega(\sigma-s)} d\omega$  следующее –  $\text{Re}(i\omega(\sigma-s)) > 0$ . Оно выполняется, если координата  $z$  точки  $s$  будет больше координаты  $\zeta$  точки  $\sigma$ , т.е. при  $z > \zeta$  (напомним, что ось  $oZ$  направлена вверх):

$$\begin{aligned} \text{Re}(i\omega(\sigma-s)) &= \text{Re}(i\omega(\xi+i\zeta-x-iz)) = \\ &= \text{Re}(\omega(z-\zeta) + i\omega(\xi-x)) = \omega(z-\zeta) > 0. \end{aligned}$$

Представим выражение для функции  $G(s)$ , создаваемой замкнутой областью  $D$  с плотностью источников  $\delta$ , следующим образом:

$$G(s) = 2iG \int_D \frac{\delta(\xi, \zeta)}{\sigma-s} dS = 2iG \int_D \delta(\xi, \zeta) \left[ i \int_0^{\infty} e^{-i\omega(\sigma-s)} d\omega \right] dS = \frac{1}{2\pi} \int_D \hat{G}(\omega) e^{i\omega s} d\omega,$$

где

$$\hat{G}(\omega) = -4\pi G \int_D \delta(\xi, \zeta) e^{-i\omega\sigma} dS.$$

Полученное выражение для спектра комплексной напряженности гравитационного поля совпадает с выражением для спектра, полученного нами ранее.

8. Отметим общую закономерность поведения функции  $\hat{G}(\omega)$ . Для этого осуществим следующую оценку, которая будет справедлива при  $\zeta < 0$ :

$$\begin{aligned} |\hat{G}(\omega)| &\leq 4\pi G \int_D |\delta(\xi, \zeta)| \cdot |e^{-i\omega\sigma}| dS \leq 4\pi G \int_D |\delta(\xi, \zeta)| e^{\omega\zeta} dS \leq \\ &\leq 4\pi G e^{-\omega|\zeta|_{\min}} \int_D |\delta(\xi, \zeta)| dS, \end{aligned}$$

где  $|\zeta|_{\min} = \min_{\zeta \in D} |\zeta|$ . Таким образом, данная спектральная функция убывает по модулю как некоторая экспонента.

9. Функция  $\hat{G}(\omega)$  связана с комплексными моментами масс области  $D$  относительно произвольной точки  $\sigma_0$ . Это соотношение можно получить, разложив экспоненту  $e^{-i\omega\sigma}$  в ряд:

$$\begin{aligned}\hat{G}(\omega) &= -4\pi G \int_D \delta(\xi, \zeta) e^{-i\omega\sigma} dS = -4\pi G \int_D \delta(\xi, \zeta) e^{-i\omega(\sigma-\sigma_0)} e^{-i\omega\sigma_0} dS = \\ &= -4\pi G e^{-i\omega\sigma_0} \int_D \delta(\xi, \zeta) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[-i\omega(\sigma-\sigma_0)]^n}{n!} \right) dS = \\ &= -4\pi G e^{-i\omega\sigma_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n \omega^n \int_D \delta(\xi, \zeta) (\sigma-\sigma_0)^n dS}{n!} = \\ &= -4\pi G e^{-i\omega\sigma_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n \omega^n m_n(\sigma_0)}{n!}.\end{aligned}$$

10. В случае магнитной задачи все выводы проводятся аналогично:

$$\frac{1}{(\sigma-s)^2} = -\int_0^{\infty} \omega e^{-i\omega(\sigma-s)} d\omega, \text{ при } \operatorname{Re}(i\omega(\sigma-s)) > 0,$$

$$\begin{aligned}H(s) &= 2i \int_D I(\xi, \zeta) \frac{1}{(\sigma-s)^2} dS = 2i \int_D I(\xi, \zeta) \left[ -\int_0^{\infty} \omega e^{-i\omega(\sigma-s)} d\omega \right] dS = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \hat{H}(\omega) e^{i\omega s} d\omega,\end{aligned}$$

где  $\hat{H}(\omega) = -4\pi i \omega \int_D I(\xi, \zeta) e^{-i\omega\sigma} dS$  – спектральная функция напряженности магнитного поля, создаваемого областью  $D$ .

Убывание спектральной функции дается оценкой:

$$|\hat{H}(\omega)| \leq 4\pi \omega e^{-\omega|\zeta|_{\min}} \int_D I(\xi, \zeta) dS.$$

Связь спектра с комплексными магнитными моментами имеет вид:

$$\hat{H}(\omega) = -4\pi i \omega e^{-i\omega\sigma_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n \omega^n M_n(\sigma_0)}{n!}.$$

11. Производные комплексной напряженности гравитационного поля через спектральную функцию будут выражаться следующим образом:

$$\mathbf{G}^{(1)}(s) = \frac{d\mathbf{G}(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \hat{\mathbf{G}}(\omega) e^{i\omega s} d\omega \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty i\omega \hat{\mathbf{G}}(\omega) e^{i\omega s} d\omega,$$

$$\mathbf{G}^{(n)}(s) = \frac{d^n \mathbf{G}(s)}{ds^n} = \frac{d}{ds^n} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \hat{\mathbf{G}}(\omega) e^{i\omega s} d\omega \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty (i\omega)^n \hat{\mathbf{G}}(\omega) e^{i\omega s} d\omega.$$

Из полученного результата следует, что спектральная функция производной комплексной напряженности гравитационного поля связана с его спектром соотношением:

$$\hat{\mathbf{G}}^{(n)}(\omega) = (i\omega)^n \hat{\mathbf{G}}(\omega).$$

Напомним, что первая производная функции  $\mathbf{G}(s)$  связана со вторыми производными потенциала силы притяжения следующим образом:

$$\mathbf{G}^{(1)}(s) = \frac{d\mathbf{G}(s)}{ds} = V_{xz} + iV_{xx} = V_{xz} - iV_{zz},$$

и этой функции соответствует спектральная функция  $\hat{\mathbf{G}}^{(1)}(\omega)$ .

Аналогичные соотношения получаются и для производных спектральных функций комплексной напряженности магнитного поля:

$$\hat{\mathbf{H}}^{(n)}(\omega) = (i\omega)^n \hat{\mathbf{H}}(\omega).$$

Теорема Пуассона о связи гравитационного и магнитного полей, создаваемых областью  $\mathbf{D}$  с постоянной плотностью  $\delta$  и намагниченностью  $\mathbf{I}$  для спектральных функций имеет вид:

$$\hat{\mathbf{H}}(\omega) = \frac{(i\omega)\mathbf{k}}{G} \hat{\mathbf{G}}(\omega),$$

где  $\mathbf{k}$  – комплексный коэффициент Пуассона ( $\mathbf{I} = I_x + iI_z$ ,  $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{I}}{\delta}$ ).

12. Вычисление спектральных функций от заданного распределения масс, как уже отмечалось, является прямой спектральной задачей. На основании комплексных формул О.–Г. Можно записать:

$$\hat{\mathbf{G}}(\omega) = -4\pi G \int_D \delta(\xi, \zeta) e^{-i\omega\sigma} dS = -\frac{4\pi G}{2i} \int_{\partial D} \Phi(\sigma, \bar{\sigma}) e^{-i\omega\sigma} d\sigma =$$

$$= 2\pi i G \int_{\partial D} \Phi(\sigma, \bar{\sigma}) e^{-i\omega\sigma} d\sigma,$$

где  $\Phi(\sigma, \bar{\sigma}) = \int \hat{\delta}(\sigma, \bar{\sigma}) d\bar{\sigma}$ . При постоянной плотности  $\delta$ , спектральную функцию  $\hat{G}(\omega)$  можно представить в виде:

$$\hat{G}(\omega) = -4\pi G \int_D \delta e^{-i\omega\sigma} dS = \frac{-4\pi G \delta}{(-2i)(-i\omega)} \int_{\partial D} e^{-i\omega\sigma} d\bar{\sigma} = \frac{2\pi G \delta}{\omega} \int_{\partial D} e^{-i\omega\sigma} d\bar{\sigma}.$$

Так, для многоугольника с постоянной плотностью:

$$\begin{aligned} \hat{G}(\omega) &= \frac{2\pi G \delta}{\omega} \int_{\partial D} e^{-i\omega\sigma} d\bar{\sigma} = \frac{2\pi G \delta}{\omega} \sum_{v=1}^N \int_{\Gamma_v} e^{-i\omega\sigma} d\bar{\sigma} = \\ &= \frac{2\pi G \delta}{\omega} \sum_{v=1}^N \int_{\sigma_v}^{\sigma_{v+1}} e^{-i\omega\sigma} d\bar{\sigma} = \frac{2\pi G \delta}{\omega} \sum_{v=1}^N \int_{\sigma_v}^{\sigma_{v+1}} \alpha_v e^{-i\omega\sigma} d\sigma = \\ &= \frac{2\pi G \delta}{\omega(-i\omega)} \sum_{v=1}^N \alpha_v (e^{-i\omega\sigma_{v+1}} - e^{-i\omega\sigma_v}) = -\frac{2\pi i G \delta}{\omega^2} \sum_{v=1}^N (\alpha_v - \alpha_{v-1}) e^{-i\omega\sigma_v}. \end{aligned}$$

При выводе выражения нами использовалось представление уравнения сторон многоугольника в явном виде  $\bar{\sigma} = \alpha_v \sigma + \beta_v$ .

Для случая многоугольника с полиномиальным изменением плотности  $\delta(\xi, \zeta) = P_n(\sigma, \bar{\sigma})$  можно записать:

$$\Phi(\sigma, \bar{\sigma}) = \int P_n(\sigma, \bar{\sigma}) d\bar{\sigma},$$

$$\begin{aligned} \hat{G}(\omega) &= 2\pi i G \int_{\partial D} \Phi(\sigma, \bar{\sigma}) e^{-i\omega\sigma} d\sigma = 2\pi i G \sum_{v=1}^N \int_{\Gamma_v} \Phi(\sigma, \bar{\sigma}) e^{-i\omega\sigma} d\sigma = \\ &= 2\pi i G \sum_{v=1}^N \int_{\sigma_v}^{\sigma_{v+1}} \Phi(\sigma, \alpha_v \sigma + \beta_v) e^{-i\omega\sigma} d\sigma = 2\pi i G \sum_{v=1}^N \int_{\sigma_v}^{\sigma_{v+1}} Q_{n+1}^{(v)}(\sigma) e^{-i\omega\sigma} d\sigma. \end{aligned}$$

Полученные интегралы легко берутся по частям, т.е. путем понижения степени полинома.

Аналогично можно получить аналитические выражения для спектральных функций  $\hat{g}_z(\omega)$ ,  $\hat{g}_x(\omega)$  а также для элементов магнитного поля.

13. Спектральную функцию можно ввести и для функции, зависящей от двух параметров, –  $f(x, y)$ . Если для нее выполняются условия Дирихле, и она абсолютно интегрируема:

$$\int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} |f(x, y)| dx dy < +\infty,$$

то для такой функции можно определить следующую пару преобразований:

$$\hat{f}(u, v) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-iux} e^{-ivy} dx dy, \quad f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \hat{f}(u, v) e^{iux} e^{ivy} dudv.$$

Первый интеграл описывает двумерное преобразование Фурье, и функция  $\hat{f}(u, v)$  – двумерный спектр функции  $f(x, y)$ . Вторым интегралом описывается обратное преобразование Фурье. Как и для одномерного случая, функция  $\hat{f}(u, v)$  в общем случае является комплексной. Сама исходная функция  $f(x, y)$  также может быть комплексной, зависящей от двух действительных аргументов.

Не сложно показать, что для действительных и мнимых частей спектра действительной функции  $f(x, y)$  выполняются следующие условия:

$$\operatorname{Re}(\hat{f}(-u, -v)) = \operatorname{Re}(\hat{f}(u, v)), \quad \operatorname{Im}(\hat{f}(-u, -v)) = -\operatorname{Im}(\hat{f}(u, v)),$$

$$\operatorname{Re}(\hat{f}(-u, v)) = \operatorname{Re}(\hat{f}(u, -v)), \quad \operatorname{Im}(\hat{f}(-u, v)) = -\operatorname{Im}(\hat{f}(u, -v)).$$

14. Для двумерного преобразования Фурье справедливы все те же свойства – линейности, подобия, запаздывания, дифференцирования и свертки двух функций.

В частности свойство запаздывания будет выражаться следующим образом:

$$f(x, y) \leftrightarrow \hat{f}(u, v), \quad f(x \pm \xi, y \pm \eta) \leftrightarrow \hat{f}(u, v) e^{\pm iux} e^{\pm ivy};$$

свойство дифференцирования:

$$f(x, y) \leftrightarrow \hat{f}(u, v), \quad \frac{d^{n+m}}{dx^n dy^m} f(x, y) \leftrightarrow (iu)^n (iv)^m \hat{f}(u, v);$$

свойство свертки:

$$g(x, y) * h(x, y) = \int_{-\infty-\infty}^{\infty} \int_{-\infty-\infty}^{\infty} g(x, y) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta \leftrightarrow \hat{g}(\omega) \hat{h}(\omega).$$

15. Введем декартову систему координат, с осью  $oZ$  направленной вверх, и пусть в точке  $M(0,0,-h)$  располагается точечная масса  $m$ . Элементы гравитационного поля, создаваемого этой массой на плоскости  $oXY$ , будут представлены соотношениями:

$$\begin{aligned} g_z(x, y) = V_z(x, y) &= Gm \frac{-h}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}, \\ g_x(x, y) = V_x(x, y) &= Gm \frac{-x}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}, \\ g_y(x, y) = V_y(x, y) &= Gm \frac{-y}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Аналогично тому, как были получены выражения для спектральных функций гравитационного поля в случае одномерного преобразования Фурье, для двумерных спектров можно получить следующие выражения:

$$\hat{g}_z(u, v) = -2\pi G m e^{-|\omega|h}, \quad \hat{g}_x(u, v) = 2\pi G \frac{i u}{|\omega|} m e^{-|\omega|h}, \quad \hat{g}_y(u, v) = 2\pi G \frac{i v}{|\omega|} m e^{-|\omega|h},$$

где  $\omega = \sqrt{u^2 + v^2}$ .

В случае если масса  $m$  смещена относительно начала координат, т.е. находится в точке  $M(\xi, \eta, \zeta)$ , и при этом  $\zeta < 0$ , то спектральные характеристики приобретают вид:

$$\begin{aligned} \hat{g}_z(u, v) &= -2\pi G m e^{|\omega|\zeta} e^{-iu\xi} e^{-iv\eta}, \\ \hat{g}_x(u, v) &= 2\pi G \frac{i u}{|\omega|} m e^{|\omega|\zeta} e^{-iu\xi} e^{-iv\eta}, \quad \hat{g}_y(u, v) = 2\pi G \frac{i v}{|\omega|} m e^{|\omega|\zeta} e^{-iu\xi} e^{-iv\eta}. \end{aligned}$$

Вычисление высших производных будет определяться следующим образом:

$$\frac{d^{n+m+k}}{dx^n dy^m dz^k} = (iu)^n (iv)^m (-|\omega|)^k.$$

Если в каком-то замкнутом объеме  $D$ , находящемся ниже плоскости  $oXY$  распределены массы с плотностью  $\delta$ , то для спектральных функций гравитационного поля можно записать:

$$\hat{g}_z(u, v) = -2\pi G \int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) e^{|\omega|\zeta} e^{-iu\xi} e^{-iv\eta} dV,$$

$$\hat{g}_x(u, v) = 2\pi G \frac{i u}{|\omega|} \int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) e^{|\omega|\zeta} e^{-iu\xi} e^{-iv\eta} dV,$$

$$\hat{g}_y(u, v) = 2\pi G \frac{i v}{|\omega|} \int_D \delta(\xi, \eta, \zeta) e^{|\omega|\zeta} e^{-iu\xi} e^{-iv\eta} dV.$$

16. Аналогичным образом могут быть получены выражения для спектральных характеристик аномального магнитного поля. Для частного случая, когда намагниченность  $I$  области  $D$  постоянна, эти соотношения могут быть получены на основе теоремы Пуассона. Так аномальный магнитный потенциал связан с гравитационным потенциалом соотношением:

$$\begin{aligned} U &= -\frac{1}{4\pi G \delta} (\vec{I} \cdot \text{grad} V) = \\ &= -\frac{1}{4\pi G \delta} (I_x V_x + I_y V_y + I_z V_z) = -\frac{I}{4\pi G \delta} (\gamma_x V_x + \gamma_y V_y + \gamma_z V_z), \end{aligned}$$

где  $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$  – направляющие косинусы вектора намагниченности. Исходя из полученных соотношений для спектральных компонент гравитационного поля, можем формально записать выражение для спектра гравитационного потенциала:

$$\hat{V}(u, v) = 2\pi G \delta \frac{1}{|\omega|} \int_D e^{|\omega|\zeta} e^{-iu\xi} e^{-iv\eta} dV.$$

Тогда спектр магнитного потенциала  $\hat{U}(u, v)$  будет следующим образом выражаться через функцию  $\hat{V}(u, v)$ :

$$\hat{U}(u, v) = -\frac{I}{4\pi G \delta} (\gamma_x(iu) + \gamma_y(iv) + \gamma_z(-|\omega|)) \hat{V}(u, v).$$

Спектральные характеристики компонент магнитного поля с учетом того, что

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial U}{\partial z},$$

будут следующими:

$$\begin{aligned}\hat{X}(u, v) &= \frac{1}{4\pi G \delta} (iu)(i\gamma_x u + i\gamma_y v - \gamma_z |\omega|) \hat{V}(u, v), \\ \hat{Y}(u, v) &= \frac{1}{4\pi G \delta} (iv)(i\gamma_x u + i\gamma_y v - \gamma_z |\omega|) \hat{V}(u, v), \\ \hat{Z}(u, v) &= \frac{1}{4\pi G \delta} (-|\omega|)(i\gamma_x u + i\gamma_y v - \gamma_z |\omega|) \hat{V}(u, v).\end{aligned}$$

Рассматривая поле  $\Delta T$  как проекцию аномального поля  $T_a$  на направление нормального поля, получим:

$$\Delta \hat{T}(u, v) = \frac{1}{4\pi G \delta} (i\lambda_x u + i\lambda_y v - \lambda_z |\omega|) (i\gamma_x u + i\gamma_y v - \gamma_z |\omega|) \hat{V}(u, v),$$

поскольку

$$\Delta T = -\mathit{grad}U \cdot \overline{1t_0} = -\left( \frac{\partial U}{\partial x} \lambda_x + \frac{\partial U}{\partial y} \lambda_y + \frac{\partial U}{\partial z} \lambda_z \right).$$

В этом выражении  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$  - направляющие косинусы вектора нормального магнитного поля.

17. Из полученных результатов видно, что выражения для спектральных функций гравитационных и магнитных полей имеют достаточно простую структуру. Это привело к появлению такого направления, как расчет элементов гравитационных и магнитных полей путем численного интегрирования соответствующих спектральных функций. Однако в большинстве случаев такой подход не дает ни выигрыша во времени, ни в точности вычисления полей. Это связано с тем, что, во-первых, спектральные функции определены по частотам до бесконечности, а при численном интегрировании этих функций приходится отбрасывать значения спектров, соответствующие частотам выше некоторой граничной частоты, что приводит к потере мощности сигнала и появлению эффекта Гиббса, и, во-вторых, сами спектры представляют собой осциллирующие функции из-за наличия в их выражениях множителя  $e^{-i\omega\sigma}$ . В силу этих причин необходимо с одной стороны при расчете спектральных характеристик уменьшать шаг по частоте, а с другой – увеличивать интервал интегрирования, т.е. увеличивать число участвующих в расчетах гармоник. Более подробно на этом вопросе мы остановимся в следующей лекции.

18. В то же время, как в гравиразведке, так и в магниторазведке существует очень важный класс прямых задач, которые описываются уравнением типа свертки:

$$g(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)h(x - \xi)d\xi - \text{для двумерных (профильных) задач,}$$

и

$$g(x, y) * h(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y)h(x - \xi, y - \eta)d\xi d\eta - \text{для трехмерных.}$$

К числу таких задач в частности относятся задачи вычисления компонент гравитационного и магнитного полей, создаваемых бесконечно тонким горизонтальным слоем, с распределенной по нему поверхностной плотностью или намагниченностью, и бесконечным горизонтальным пластом постоянной мощности с плотностью или намагниченностью, меняющейся только по латерали.

Так, например, прямая задача вычисления вертикальной составляющей гравитационного поля на уровне  $z$ , создаваемой тонким горизонтальным слоем, расположенным на глубине  $\zeta$  и с распределенной на нем поверхностной плотностью будет описана следующим выражением (двухмерная задача):

$$g_z(x, z) = 2G \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) \frac{(\zeta - z)}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi.$$

Отметим, что аналогичным образом описываются линейные трансформации потенциальных полей, основанные на интеграле Пуассона, такие как пересчет поля и вычисление высших производных на высоте.

Для случая горизонтального пласта с глубинами нижней и верхней кромок  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  (напомним, что ось  $oZ$  при наших предположениях направлена вверх) и с переменной плотностью уравнение для вертикальной компоненты приобретет вид:

$$\begin{aligned} g_z(x, z) &= 2G \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \delta(\xi) \frac{(\zeta - z)}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi d\zeta = \\ &= 2G \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) \ln \frac{(\xi - x)^2 + (\zeta_2 - z)^2}{(\xi - x)^2 + (\zeta_1 - z)^2} d\xi, \end{aligned}$$

т.е. также представляется интегралом типа свертки. Схожие выражения можно получить и для других компонент гравитационного поля, а также для элементов аномального магнитного поля.

В спектральном представлении вид этих уравнений приобретает простой вид. Так поле  $g_z$ , создаваемое тонким горизонтальным слоем с плотностью  $\delta_n(x)$ , будет представлено следующим образом:

$$\hat{g}_z(\omega, z) = 2\pi G \delta_n(\omega) e^{|\omega|(\zeta-z)},$$

где  $\hat{\delta}_n(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_n(x) e^{-i\omega x} dx$  – спектральная функция плотности.

Для спектра функции  $g_z$  горизонтального пласта на уровне  $z=0$  ( $|\omega| > 0$ ):

$$\hat{g}_z(\omega) = 2\pi G \hat{\delta}(\omega) \frac{e^{|\omega|\zeta_2} - e^{|\omega|\zeta_1}}{|\omega|}.$$

Для параметра  $\omega = 0$  следует рассмотреть соответствующий предел, который окажется равным:

$$\hat{g}_z(0) = 2\pi G \hat{\delta}(0) (\zeta_2 - \zeta_1).$$

В отличие от вычисления значений аномальных полей в дискретных точках пространства от изолированных объектов через спектральные функции полей, создаваемых этими телами, применение такого подхода к определению значений поля на горизонтальной плоскости позволяет создать исключительно эффективные алгоритмы.

### ***Литература.***

1. *Гладкий К.В.* Гравиразведка и магниторазведка. – М.: Недра. 1967. 319 с.
2. Гравиразведка. Справочник геофизика. – М.: Недра. 1990. 607 с.
3. *Мелихов В.Р., Булычев А.А., Састри Р.Г.* Особенности решения прямой задачи гравиразведки с использованием быстрого преобразования Фурье // Морские гравиметрические исследования. М., 1984. С. 73 – 80.
4. *Серкеров С.А.* Корреляционные методы анализа в гравиразведке и магниторазведке. – М.: Недра. 1986. 247 с.
5. *Серкеров С.А.* Спектральный анализ гравитационных и магнитных аномалий. – М.: Недра. 2002. 437 с.
6. *Страхов В.Н.* Методы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. – Пермь.: ПГУ. 1984. 71 с.

### ***Лекция 9. Численные методы расчета гравитационных и магнитных аномальных полей.***

В предыдущих лекциях были получены различные аналитические представления элементов гравитационного и магнитного поля,

создаваемые областями с заданным распределением источников. С практической точки зрения очень важен вопрос вычисления самих значений этих полей в заданных точках пространства. Вычисление этих значений предполагает создание алгоритма, реализующего такое вычисление. Эти расчеты могут производиться, как в “ручную”, так и быть запрограммированы на ЭВМ. При этом могут быть использованы полученные явные аналитические выражения или некоторые аппроксимационные конструкции. В любом случае, при вычислении значений поля мы переходим к численным методам расчета значений искомых полей. И на этом этапе могут возникать ошибки, источники которых могут иметь различную природу. При этом расчеты, проведенные даже по точным аналитическим формулам, могут дать ошибочные значения в конечном результате. Все это говорит о том, что необходим анализ вычислительных схем и анализ возможных ошибок. Конечно, получение значения с необходимой степенью точности является наиболее важным в вычислительном процессе, но помимо этого большую роль в организации вычислений играют временные затраты на их производство. Эти вопросы рассматриваются в специальном разделе математики, носящем название «численные методы», однако некоторые вопросы, связанные с организацией вычислительного процесса будут рассмотрены в этой лекции.

1. Сформулируем некоторые общие положения, связанные с созданием вычислительных алгоритмов.

- вычислительные методы, построенные даже на точных аналитических выражениях, могут дать ошибочные результаты;
- один и тот же алгоритм не может быть использован для решения разного типа задач, зависящих от вида исходных данных;
- вычислительный алгоритм должен быть конечным, т.е. приводить к результату за конечное число шагов;

Если величины представляются численно, т.е. посредством конечной дроби, то они всегда реализуются лишь приблизительно, т.е. с некоторой погрешностью. Для проведения численного расчета необходимо знать какова точность исходных данных, с какой точностью должны быть получены выходные данные, какова возможная точность выполнения операций, а в этой связи, каков должен быть алгоритм решения данной задачи.

Принципиально возможно выделить три источника погрешностей:

- погрешность входных данных;
- погрешность метода;
- погрешность округления (машинная погрешность).

2. Погрешность входных данных влияет на окончательный результат, поскольку эти погрешности участвуют в расчетах. В нашем случае эта погрешность связана с точностью задания параметров источников поля. В

общем случае вычисление значений поля по заданному распределению источников (прямая задача) относится к устойчивым задачам. Это означает, что небольшие изменения во входных данных не должны привести к большим изменениям в расчетных значениях, если конечно не рассматривать особых случаев, таких, как расчет поля в непосредственной близости к особым точкам, т.е. к тем точкам, где нарушается аналитичность полей. Тем не менее, такой анализ влияния ошибок во входных данных может оказаться в ряде случаев необходимым, с тем, чтобы знать возможные пределы изменения входных данных, не приводящих к существенному изменению результата. И эта задача будет тесно связана с обратной задачей, когда по заданному полю определяются параметры источников, создающих это поле. Применительно к расчету поля от сложной геологической среды рассматриваемую погрешность можно связать с погрешностью за счет аппроксимации среды.

Погрешность метода связана с отклонением вычислительной модели от точной. В качестве примера здесь можно привести метод вычисления аномального поля с помощью палеток. Мы можем с большой детальностью изобразить сам объект, от которого хотим рассчитать поле, но само вычисленное поле будет определяться количеством ячеек палетки, которые для данной расчетной точки накроют наш объект.

Погрешность округления связана с машинной погрешностью, и на нее оказывает влияние число разрядов чисел, представимых в данной конкретной ЭВМ, метод округления чисел, принятый в машине, потеря значащих чисел при сложении или вычитании, потеря разрядов при превышении допустимой разрядности представления чисел. В качестве примера можно рассмотреть классическую задачу: вычислить значение  $x = 10 - \sqrt{99}$ , предполагая, что расчеты производятся с тремя значащими числами. Тогда, используя непосредственно приведенную формулу, получим:  $x = 10.0 - 09.9 = 00.1$ . Если же это выражение представить в эквивалентном виде  $x = 1/(10 + \sqrt{99})$ , то ответ окажется более точным:  $x = 1/(10 + 09.9) = 1/19.9 = 0.05$ . Потерю значащих цифр при вычитании и сложении можно проиллюстрировать следующими примерами. Вычитание:  $3.1415613 - 3.1415524 = 0.0000089$ , т.е. от восьми значащих цифр осталось только две. Сложение: пусть числа представлены тремя значащими числами, и складываются большое число с маленьким, например,  $100 + 0.01$ . Результат будет равен 100, т.е. вклад второго слагаемого будет потерян.

3. После сделанных замечаний рассмотрим некоторые вопросы, связанные с численной реализацией полученных аналитических формул, и возможные причины возникновения ошибок. Этот вопрос начнем с задачи вычисления комплексной напряженности гравитационного поля от многоугольника с постоянной плотностью. Нами было получено следующее аналитическое выражение для этой модели:

$$G(s) = G\delta \sum_{v=1}^N (\alpha_v s + \beta_v - \bar{s}) \ln \frac{\sigma_{v+1} - s}{\sigma_v - s}.$$

Это же выражение можно представить и в эквивалентном виде:

$$G(s) = G\delta \sum_{v=1}^N (\alpha_v - \alpha_{v-1})(\sigma_v - s) \ln(\sigma_v - s).$$

Зададимся вопросом, какая из этих формул более пригодна для численной реализации? Для этого предположим, что расчетная точка  $s$  находится на большом удалении от многоугольника. В этом случае значения поля  $G(s)$  будут близки к нулю, но отличны от него. Если мы рассмотрим вторую из приведенных формул, то увидим, что под знаком логарифма для такого примера будет стоять большая по абсолютному значению величина. Логарифм такой величины также будет иметь большое значение. Далее значение этого логарифма умножается на разность  $(\sigma_v - s)$ , абсолютное значение которой, как уже отмечалось, для удаленной расчетной точки  $s$  имеет большую величину. В результате для получения значения поля в расчетной точке происходит суммирование больших величин, значения которых представлены определенным количеством значащих цифр, с тем, чтобы получить величину, близкую к нулю. Ясно, что при таком подходе мы потеряем значащие цифры после запятой, и полученный результат может оказаться неверным. Если же мы рассмотрим первую формулу, то здесь ситуация будет несколько иной. Поскольку точка  $s$  находится на значительном удалении от многоугольника, то отношение  $\frac{\sigma_{v+1} - s}{\sigma_v - s}$  будет

близко к единице. Значение логарифма такой величины близко к нулю. Дальнейшее умножение этой величины на коэффициент  $(\alpha_v s + \beta_v - \bar{s})$  может и увеличить порядок числа, но не приведет к сильной потере значащих цифр после запятой. В результате, значение поля  $G(s)$  будет определяться суммой малых по величине чисел. С этой точки зрения применение первой формулы для расчета поля оказывается предпочтительным.

4. На этом же примере рассмотрим еще один вопрос, связанный с масштабированием расстояний. Обычно расстояния задаются в метрах или километрах. Если задавать расстояния в метрах, то для удаленных точек  $s$ , расстояния будут выражаться числами в  $10^3$  большими, чем в случае задания расстояний в километрах. Естественно, что это также может повлиять на точность расчетов.

5. Следующий пример связан с расчетом поля от многоугольника с плотностью, представляемой полиномом  $n$ -ой степени  $\delta(\xi, \zeta) = P_n(\xi, \zeta)$ . Как было показано для такой модели поле  $G(s)$  представляется в следующем виде:

$$G(s) = G \sum_{v=1}^N \left\{ Q_{n+1,v}(s) + (P_{n+1,v}(s) - \Phi(s, \bar{s})) \ln \frac{\sigma_{v+1} - s}{\sigma_v - s} \right\},$$

причем  $Q_{n+1,v}(s)$ ,  $P_{n+1,v}(s)$ ,  $\Phi(s, \bar{s})$  также представляют собой полиномы, зависящие от координаты расчетной точки  $s$ . Как видно, для удаленных точек здесь возникает ситуация аналогичной только что рассмотренной нами, а именно, для удаленных точек, где поле близко по значению к нулю, результат будет вычисляться как сумма чисел, больших по своему значению, что может привести к потере точности. Конечно, для небольших степеней полинома, это может и не проявиться, но, тем не менее, такой путь расчета может являться источником ошибок. Для того чтобы уменьшить их влияние, следует проводить вычисления с числами двойной точности. Кроме того, здесь стоит обратить внимание и на тот факт, что коэффициенты полинома, описывающие распределение плотности в многоугольнике, будут зависеть от расположения многоугольника относительно начала координат. С тем чтобы уменьшить значения этих коэффициентов стоит предусмотреть возможность введения новой координатной системы, сдвинутой относительно исходной, и проводить вычисления в этой координатной системе.

Для вычисления поля в удаленных точках от тел конечных размеров можно предложить комбинированный алгоритм – на небольших расстояниях от объекта поле вычислять по точной аналитической формуле, а для удаленных точек использовать представление поля в виде ряда.

6. Рассмотрим особенности вычисления поля с помощью рядов на примере расчета функции  $G(s)$ . Как было показано, это поле можно представить в виде ряда:

$$G(s) = -2iG \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n(\sigma_0)}{(s - \sigma_0)^{n+1}},$$

где  $m_n(\sigma_0) = \int_D \hat{\delta}(\sigma, \bar{\sigma})(\sigma - \sigma_0)^n dS$  – комплексный момент масс

относительно точки  $\sigma_0 = \xi_0 + i\zeta_0$ ,  $\hat{\delta}(\sigma, \bar{\sigma})$  – комплексное представление функции распределения плотности в области  $D$ , создающей гравитационное поле. Этот ряд сходится абсолютно и равномерно вне круга с центром в точке  $\sigma_0$  и целиком содержащим область  $D$ . Это определяет и выбор положения точки  $\sigma_0$ . В частности, если требуется

обеспечить представление функции  $G(s)$  в виде представленного ряда, сходящимся всюду в верхней полуплоскости, включая и ось  $oX$ , при условии, что область  $D$  находится в нижнем полупространстве, то оптимальное значение центра разложения  $\sigma_0$ ,  $\zeta_0 < 0$  можно найти из решения экстремальной задачи:

$$\frac{|\zeta_0|}{\max_{\sigma \in D} |\sigma - \sigma_0|} = \frac{|\zeta_0|}{\max_{(\xi, \zeta) \in D} \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\zeta - \zeta_0)^2}} = \max_{\sigma_0}.$$

Такой выбор положения точки  $\sigma_0$  предполагает включение в вычислительный блок специальной процедуры по ее поиску. В то же время для каждой расчетной точки  $s$  положение центра разложения  $\sigma_0$  может быть своим.

Таким образом, первый шаг в реализации такой программы – выбор положения центра разложения  $\sigma_0$ . Далее следует определиться с количеством членов ряда  $p$ , необходимых для вычисления поля с заданной точностью. Такая оценка нами была сделана:

$$\sup_{|s| \geq R} |G(s) - G_p(s)| \leq 2GC(\delta, D) \frac{r^{p+1}}{R^{p+2}} \frac{1}{1 - \frac{r}{R}}.$$

В этой формуле  $C(\delta, D) = \int_D |\delta(\xi, \zeta)| dS$ ,  $r$  – расстояние от центра разложения  $\sigma_0$  до наиболее удаленной точки  $\sigma$ , принадлежащей области  $D$ ,  $R$  – радиус круга, включающего в себя область  $D$ . Определив величину числа  $p$ , можно перейти к вычислению значений членов ряда  $\frac{m_n(\sigma_0)}{(s - \sigma_0)^{n+1}}$ , где  $0 \leq n \leq p$ .

Для того чтобы вычислить эти значения необходимо определить значения моментов  $m_n(\sigma_0)$ . Как можно аналитически представить моменты нами уже рассматривалось. Так для многоугольника с постоянной плотностью  $\delta$  это представление имеет вид:

$$m_n(\sigma_0) = \frac{i\delta}{2(n+1)(n+2)} \sum_{v=1}^N \alpha_v [(\sigma_{v+1} - \sigma_0)^{n+2} - (\sigma_v - \sigma_0)^{n+2}].$$

Для вычисления моментов такой модели можно предложить рекуррентную формулу:

$$m_n(\sigma_0) = \frac{i\delta}{2(n+1)(n+2)} \sum_{v=1}^N u_{vn},$$

$$u_{v,n+1} = u_{v,n}(\sigma_v - \sigma_0), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$u_{v,0} = (\alpha_v - \alpha_{v-1})(\sigma_v - \sigma_0)^2.$$

Как видно из приведенных формул, значение момента определяется расстояниями от вершин многоугольника  $\sigma_v$  до центра разложения  $\sigma_0$ , причем эти расстояния при вычислении моментов порядка  $n$  возводятся в степень  $(n+2)$ , затем суммируются или вычитаются. Как мы уже отмечали, такие действия могут привести к потере значащих цифр и, соответственно, к потере точности в вычисленных значениях  $m_n(\sigma_0)$ . Соответственно, следует таким образом организовать вычисление членов ряда, чтобы потери точности не происходило. Например, это можно осуществить следующим образом. Поскольку нас в данном случае больше интересуют не сами моменты, а значения членов ряда  $\frac{m_n(\sigma_0)}{(s - \sigma_0)^{n+1}}$ , то для их вычисления можно воспользоваться следующим представлением:

$$\frac{m_n(\sigma_0)}{(s - \sigma_0)^{n+1}} = \frac{1}{(s - \sigma_0)^{n+1}} \cdot \frac{i\delta}{2(n+1)(n+2)} \sum_{v=1}^N \alpha_v [(\sigma_{v+1} - \sigma_0)^{n+2} - (\sigma_v - \sigma_0)^{n+2}] =$$

$$= \frac{i\delta}{2(n+1)(n+2)} \sum_{v=1}^N \alpha_v \left[ \left( \frac{\sigma_{v+1} - \sigma_0}{s - \sigma_0} \right)^{n+1} (\sigma_{v+1} - \sigma_0) - \left( \frac{\sigma_v - \sigma_0}{s - \sigma_0} \right)^{n+1} (\sigma_v - \sigma_0) \right].$$

Вычисление по приведенной формуле может оказаться более предпочтительным, поскольку в данном случае возводятся в степень  $(n+1)$  числа меньше единицы. А такие действия не приводят к потере значащих цифр.

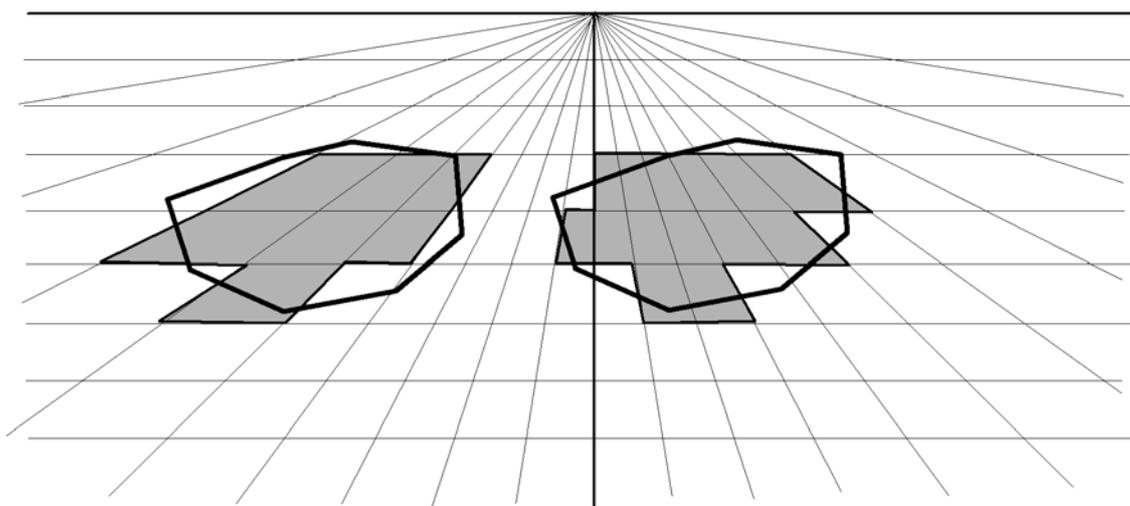
Рассчитав значения членов ряда, их необходимо просуммировать с тем, чтобы получить значение поля в расчетной точке  $s$ . Однако и на этом этапе могут возникнуть подводные камни. Это связано с тем, что первые члены ряда могут по своим абсолютным значениям во много раз превышать значения последующих членов. Если организовать суммирование от первых членов ряда к последующим, то вновь появляется возможность потери значащих цифр, что приведет к ошибочному результату. Для того чтобы этого избежать, члены ряда следует суммировать в обратном порядке: от конечного – к начальному.

7. Все сделанные замечания, связанные с возникающими вычислительными ошибками, справедливы и для трехмерных моделей. Можно вспомнить вывод аналитического выражения поля силы

притяжения горизонтальной пластины. При выводе этой формулы мы отмечали, что могли бы остановиться на одном из этапов, и при этом получили бы выражение, зависящее от разницы арктангенсов, т.е. от разницы некоторых углов. При этом, при достаточном удалении расчетной точки от пластины, эти углы были бы близки по своему значению к числу  $\pi$ . А так как поле будет определяться разницей таких углов, то неизбежно происходит потеря значащих цифр и возникает ошибка в окончательном результате (вспомним пример, приведенный в начале лекции:  $3.1415613 - 3.1415524 = 0.0000089$ ). Что бы избежать этого, мы продолжили путем специальных замен переменных вывод выражения для поля притяжения. В окончательном варианте было получено выражение, вновь зависящее от арктангенсов. Но в последнем случае значения этих арктангенсов для удаленных точек близки к нулю.

Все это говорит о том, что любая программа, в основе которой лежит точная аналитическая формула, должна пройти тестовый анализ с целью выяснения точности, получаемых с ее помощью результатов.

8. Остановимся теперь на “погрешностях метода”. Как мы уже говорили, эти погрешности возникают от способа организации вычислений. В качестве примера мы уже приводили “ручной” способ расчета аномальных значений полей силы тяжести или магнитного поля с помощью палеток (палетки Гамбурцева, Юнга и т.п.). Здесь ошибка метода возникает за счет того, что область, которая может быть нами представлена с достаточной детальностью и от которой рассчитывается аномальное поле, в процессе вычисления аппроксимируется набором ячеек палетки, накрывающих ее для каждой расчетной точки.



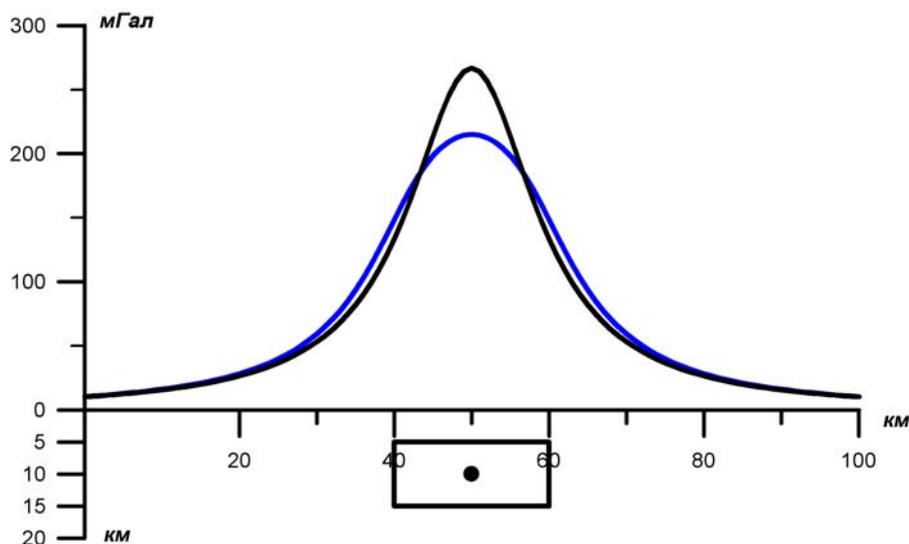
Такая же ситуация возникает и при аппроксимации заданных объектов при расчетах прямых задач на ЭВМ. Это связано с тем, что в зависимости от вида входных данных, от поставленных задач, исследуемый объект может аппроксимироваться разным набором элементарных тел – многогранниками, многоугольниками, системой

призм, пластинами, материальными линиями или точечными источниками. При этом в зависимости от задачи, эти тела могут иметь постоянную или переменную плотность или намагниченность. Попытка создать один алгоритм на все случаи, возникающие при практической работе, не увенчались успехом, даже для двумерных задач, для которых, как мы видели, аналитические решения получены для широкого круга моделей. Это тем более актуально при решении трехмерных задач, где количество вводимой информации на порядки больше информации, необходимой для двумерных задач. Поэтому при решении трехмерных задач большую роль играет способ представления исходной информации. Он должен быть удобен и достаточно прост для представления трехмерных моделей. Кроме того здесь возникают проблемы, связанные с временными затратами на вычисление прямого эффекта от модели. Слишком детальное представление модели может занять неоправданно длительное вычислительное время. С этой точки зрения, для ускорения время вычислений можно использовать расчеты не только по программам, реализующим точные аналитические формулы, но и использовать алгоритмы решения прямых задач, в основе которых лежат численные способы решения интегралов. Такие методы могут дать результат с необходимой точностью и потребовать меньшее вычислительное время. Стоит еще раз отметить, что для вычисления интегралов от полиномиальных функций, существуют кубатурные формулы, позволяющие получить их точное численное значение.

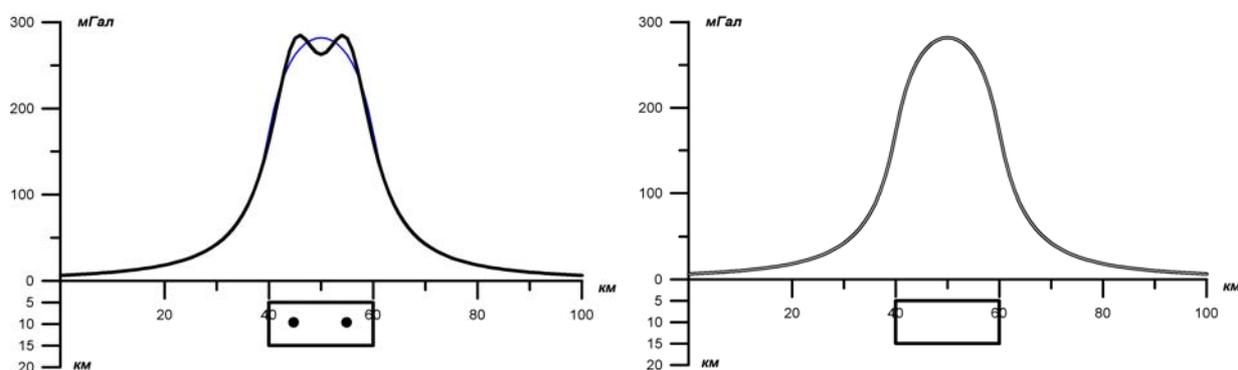
Кроме того, нами до сих пор рассматривались модели, занимающие ограниченное пространство, т.е. изолированные источники. Такие задачи принято называть рудными. В то же время в практике гравиразведки и магниторазведки большую роль играют так называемые структурные задачи, когда модель среды представлена набором субгоризонтальных пластов и границ. В этом случае, помимо способа представления модельной среды возникает вопрос о радиусе учета влияния источников поля. Это приводит к появлению ошибки, связанной с ограничением области “интегрирования”, поскольку не все массы исходной модели участвуют в расчетах. Выбор радиуса учета влияния масс при расчете таких моделей является очень важным, поскольку от этого зависит точность расчета аномальных значений.

8. Рассмотрим часть из этих вопросов на некоторых примерах. В начале рассмотрим вопрос, связанный с аппроксимацией исходной модели набором тел простой формы. В качестве примера рассмотрим двумерную прямоугольную призму. От этой модели по аналитической формуле можем рассчитать поле силы тяжести, которое будем считать “точным”. Поступим следующим образом: будем аппроксимировать эту модель набором горизонтальных цилиндров.

Для начала представим эту модель в виде одного горизонтального цилиндра с массой, равной массе прямоугольной призмы, и расположенной в ее центре.



Как видно из полученного результата, такая замена оказалась достаточно грубой. Но чем дальше расчетная точка располагается от модели, тем ближе оказываются значения, рассчитанные от точной и аппроксимационной модели. Теперь будем разбивать эту призму на 2, на 4 на 16 равных частей и т.д. так, чтобы сечение каждой такой ячейки было представлено квадратом, заменять каждую ячейку (призму) соответствующим горизонтальным цилиндром и рассчитывать от них эффект. Результаты показывают, что в данном случае уже при числе цилиндров, равном 16 точное поле и поле от модели практически совпадают.



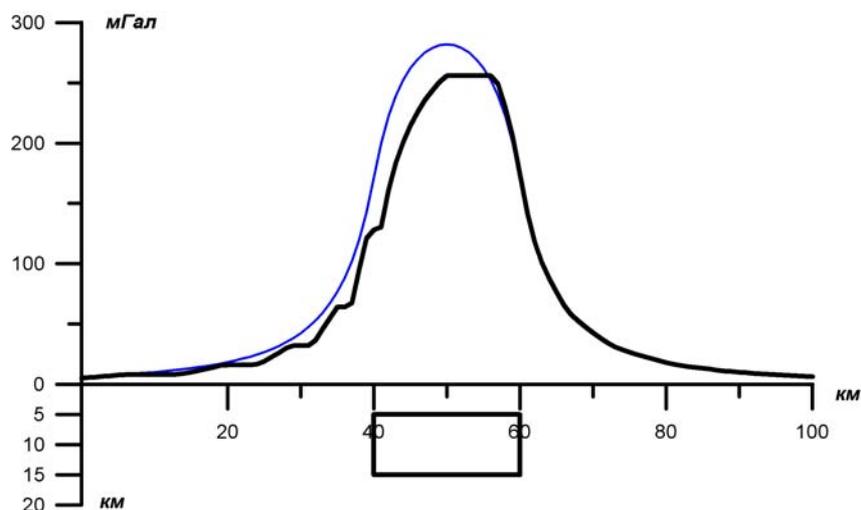
Здесь стоит отметить следующее. Выпишем интегральную формулу для вертикальной компоненты силы тяжести для прямоугольника и заменим ее приближенной интегральной суммой:

$$g_z(x, z) = G \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \delta(\xi, \zeta) \frac{\zeta - z}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi d\zeta \approx$$

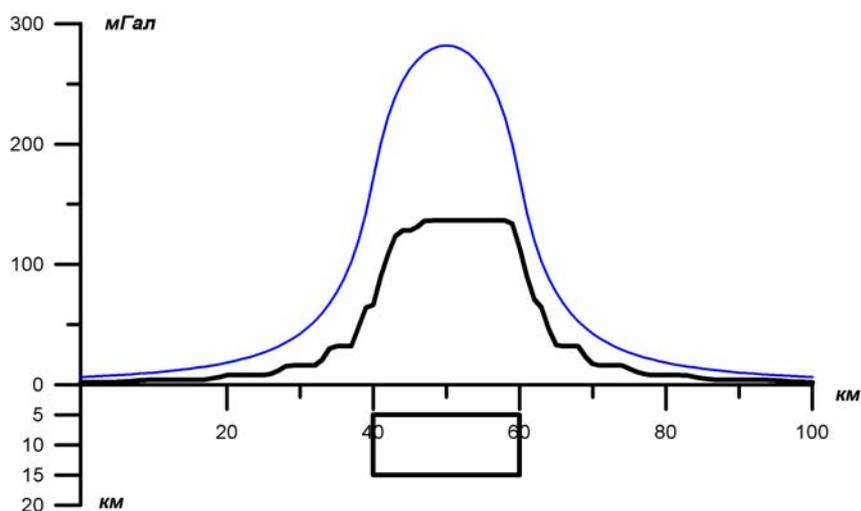
$$\approx G \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_z} \delta(\xi_i, \zeta_j) \frac{\zeta_j - z}{(\xi_i - x)^2 + (\zeta_j - z)^2} \Delta\xi \Delta\zeta,$$

где  $\Delta\xi$  и  $\Delta\zeta$  – размеры ячеек (призм), на которые поделена наша исходная призма,  $N_x$  и  $N_z$  – количество этих ячеек вдоль оси  $OX$  и  $OZ$ ,  $\xi_i$  и  $\zeta_j$  – координаты центров ячеек. Чем меньше значения  $\Delta\xi$  и  $\Delta\zeta$ , и, соответственно, чем больше значения  $N_x$  и  $N_z$  тем лучше эта сумма представляет исходный интеграл. Замена исходного интеграла такой суммой в численных методах носит название формулы прямоугольников для вычисления интегралов. В численных методах также показывается, какова точность вычисления интеграла по такой формуле. Для вычисления исходного интеграла можно было бы предложить и другие способы его численной оценки (формула трапеций, Симпсона и т.д.), но остановимся на той формуле, которую мы записали (формула прямоугольников). С физической точки зрения эта формула представляет собой эффект горизонтальных цилиндров линейная плотность которых равна  $\delta_{ii} = \delta \Delta\xi \Delta\zeta$ . Таким образом в данном случае интегрирование по методу прямоугольников совпадает с рассматриваемой аппроксимационной моделью в виде горизонтальных цилиндров.

9. Продолжим деление исходного многоугольника на большее число ячеек, которые будем представлять в виде горизонтальных цилиндров. Казалось бы, такое деление должно повысить точность вычисления значения поля. Однако, при числе ячеек  $N_x=8192$ ,  $N_z=4096$  результат оказывается совсем не похожим на ожидаемый.



При дальнейшем увеличении детальности ( $N_x = 16384$ ,  $N_z = 8192$ ) расхождения в решении становятся еще более значимыми.



Заметим, что расчеты проводились с 16 битными числами. Это соответствует типу переменной “float” в языке Си. Появившийся дребезг в решении связан с ошибками округления, которые, накапливаясь, вносят основной вклад в результат. Однако если те же самые расчеты произвести с 32 битными числами (“double”), то такие ошибки при данном разбиении не будут заметны. Отсюда следует вывод с одной стороны о том, что чрезмерно детальное представление модели может и не дать точного результата, а с другой – о том, что по возможности стоит использовать представление чисел с удвоенной точностью.

10. Рассмотрим теперь вопрос, связанный с временными затратами на вычисление прямой задачи. Будем рассматривать ту же модель прямоугольной призмы, которую представим в виде набора прямоугольных ячеек (призм) количеством  $N_x=1024$ ,  $N_z=512$ . Число расчетных точек на профиле будет равно 100.

Организуем вычислительный процесс следующим образом. Будем рассчитывать влияние каждой ячейки в расчетную точку по формуле, описывающей поле от прямоугольника в действительной области. Время, затраченное на такой расчет, оказалось равным 53,28 с. Теперь будем аппроксимировать каждую ячейку горизонтальным цилиндром. Формула вычисления поля от горизонтального цилиндра значительно проще по сравнению с формулой вычисления поля от прямоугольника, и она требует меньших временных затрат. Время, затраченное ЭВМ при таком подходе к решению прямой задачи, составило 4,39 с.

Ясно, что увеличение количества элементарных тел, с помощью которых аппроксимируется реальная геологическая среда может привести к неоправданным временным затратам. Это особенно становится актуальным при решении трехмерных задач.

Изменим алгоритм расчета. Для этого рассмотрим какой эффект будет создавать один горизонтальный ряд представленный прямоугольными ячейками одинакового размера, при этом каждая ячейка будет иметь свою постоянную плотность. Тогда для эффекта такого слоя можно записать:

$$\begin{aligned}
 g_z(x, z) &= G \int_{-\infty}^{\zeta_1} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \delta(\xi, \zeta) \frac{\zeta - z}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi d\zeta = \\
 &= G \sum_i \int_{\xi_i - \frac{\Delta\xi}{2}}^{\xi_i + \frac{\Delta\xi}{2}} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \delta(\xi_i) \frac{\zeta - z}{(\xi_i - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi d\zeta = \\
 &= \sum_i \delta(\xi_i) g^1(x - \xi_i, z) = \sum_i g^1(\xi_i, z) \delta(x - \xi_i),
 \end{aligned}$$

где  $g^1(\xi_i, z)$  – эффект призмы с единичной плотностью, горизонтальными координатами  $\left(\xi_i - \frac{\Delta\xi}{2}, \xi_i + \frac{\Delta\xi}{2}\right)$  и глубинами  $(\zeta_1, \zeta_2)$  в точку с координатами  $(0, z)$ , или, что тоже самое, это – эффект призмы с координатами  $\left(-\frac{\Delta\xi}{2}, \frac{\Delta\xi}{2}\right)$  в точку с координатами  $(\xi_i, z)$ . Если поле рассчитывается на постоянном уровне  $z = \text{const}$ , и шаг между расчетными точками  $\Delta x = \Delta\xi$ , то представленную формулу можно записать в следующем виде:

$$g_z(x_j) = \sum_k \delta(\xi_k) g^1(x_j - \xi_k, z) = \sum_k g^1(\xi_k, z) \delta(x_j - \xi_k),$$

т.е. в виде дискретной свертки двух функций –  $g^1(x_k)$ ,  $\delta(x_j)$ . Тем самым мы пришли к идее палеток. Нам достаточно рассчитать эффект одной призмы, расположенной в начале координат, в точки с координатами  $x_j$ , и далее для каждой расчетной точки умножить эти значения на соответствующие плотности и складывать их между собой. Такой подход значительно сокращает вычислительное время по сравнению с расчетом эффекта от каждой ячейки в расчетную точку. Однако здесь надо обратить внимание на то, что число коэффициентов такой палетки всегда будет ограничено, и результаты будут только там, где палетка полностью ложится на ячейки, которыми представляется модель нашего слоя.

Для того, чтобы рассчитать эффект от нашей модели призмы, заданной в виде ячеек как по горизонтали, так и по вертикали, необходимо нашу модель с краев дополнить пустыми ячейками, т.е. ячейками с

нулевой плотностью. При этом, поскольку модель призмы по горизонтали представлена числом  $N_x=1024$ , то число ячеек, которыми следует дополнить слои, должны также составлять 1024 как слева от модели, так и справа. Не смотря на то, что число ячеек при таком подходе возросло, тем не менее, выигрыш во времени оказывается значительным, поскольку нет необходимости рассчитывать эффект от каждой ячейки, аппроксимирующей исходную модель, в каждую расчетную точку на профиле, а достаточно рассчитать эффект от одной призмы каждого горизонтального слоя.

Выигрыш во времени может быть увеличен еще в большей степени, если для вычисления свертки использовать так называемый алгоритм “быстрой дискретной свертки”, который мы рассмотрим несколько позднее.

11. Рассмотрим некоторые особенности решения прямых задач на основе спектральных представлений элементов гравитационного и магнитного полей.

Напомним, что для абсолютно интегрируемой функции  $f(x)$ , удовлетворяющей условиям Дирихле, существует следующее преобразование, называемое прямым преобразованием Фурье:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x} dx.$$

Функция  $\hat{f}(\omega)$  носит название спектра функции  $f(x)$ , а параметр преобразования  $\omega$  обычно сопоставляют с частотой (временной или пространственной).

По спектральной функции  $\hat{f}(\omega)$  можно определить исходную функцию  $f(x)$  с помощью обратного преобразования Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x} d\omega,$$

которое в этом разделе и будет представлять для нас интерес.

Как уже отмечалось в предыдущей лекции, это связано с тем, что в разные годы были предприняты попытки создания алгоритмов решения прямых задач по расчету элементов аномального гравитационного и магнитного полей через их спектральные функции, аналитические представления которых могут быть легко получены для широкого класса объектов. Однако, большинство из предложенных алгоритмов не дали желаемого результата.

12. Отметим основные причины, которые не позволили создать эффективных алгоритмов по решению прямых задач при таком подходе. Для этого используем модель бесконечной горизонтальной материальной линии и, создаваемую ею, вертикальную компоненту поля силы притяжения:

$$g_z(x, z) = V_z(x, z) = 2G\delta_n \frac{\zeta - z}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2},$$

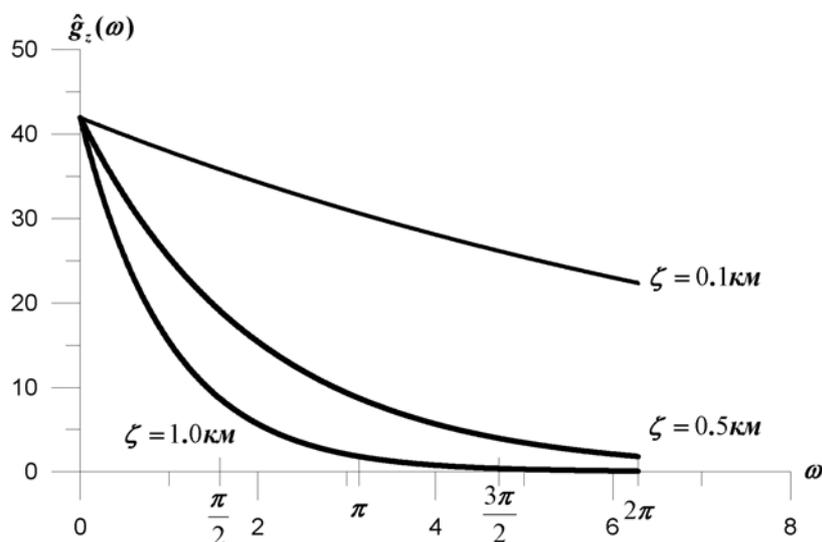
где  $(\xi, \zeta)$  – координаты положения материальной линии,  $(x, z)$  – координаты расчетной точки. Будем предполагать, что ось  $oZ$  направлена вниз, и поле будем рассчитывать на оси абсцисс ( $z=0$ ), тогда соответствующая спектральная функция будет иметь вид:

$$\hat{g}_z(\omega) = 2\pi G\delta_n e^{-|\omega|\zeta} e^{-i\omega\xi}.$$

13. Поместим нашу модель в точку с координатами  $(0, \zeta)$ . Выражение для спектра поля силы тяжести приобретет вид:

$$\hat{g}_z(\omega) = 2\pi G\delta_n e^{-|\omega|\zeta}.$$

Из этого выражения следует, что спектральная функция такой модели имеет только действительную часть, а ее мнимая часть равна нулю. Из этого же выражения видно, что абсолютные значения спектральной функции убывают по экспоненциальному закону с увеличением частоты, значения которой меняются в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Чем глубже расположен источник, тем быстрее происходит затухание спектральной функции.

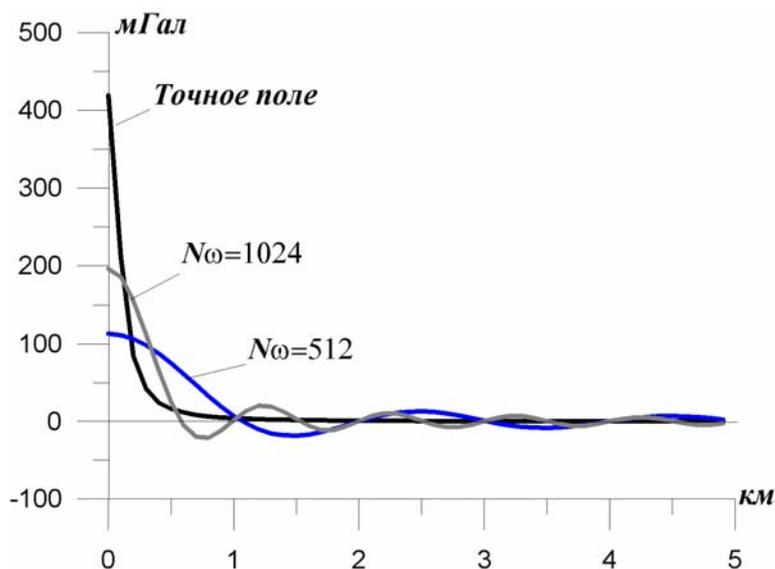


14. Рассчитаем по полученным спектральным характеристикам значения функции  $g_z(x)$  в точках, расположенных на оси  $OX$ , с шагом 0.1 км. Для того, чтобы по спектральной функции  $\hat{g}_z(\omega)$  вычислить значения функции  $g_z(x)$  необходимо от интегральной формулы обратного преобразования Фурье перейти к ее численному аналогу. Самый простой путь – вновь воспользоваться формулой прямоугольников:

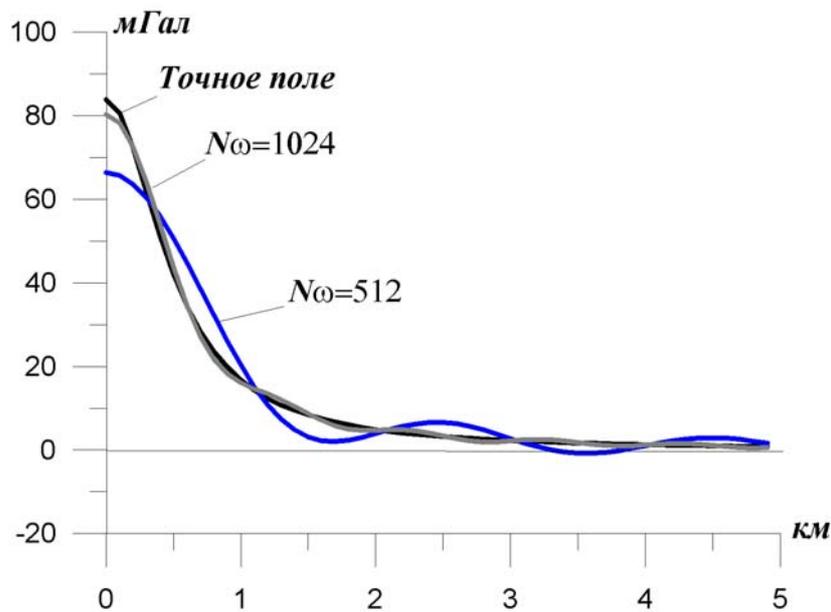
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-N_\omega}^{N_\omega} \hat{f}(\omega_j) e^{i\omega_j x} \Delta\omega,$$

где  $\omega_j = j\Delta\omega$ .

В качестве первой модели возьмем материальную линию, расположенную на глубине 0.1 км, и посмотрим на результат при разных ограничениях по частоте. Спектральную функцию рассчитаем с шагом по частоте  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{1024}$ . Сравним результаты для случаев, когда для расчета поля будем использовать значения спектра до частоты, равной  $\pi$  (число  $N_\omega = 512$ ), и до частоты  $2\pi$  ( $N_\omega = 1024$ ).



Полученный результат дает наглядное представление об эффекте Гиббса, т.е. ограничение числа суммируемых гармоник приводит к отклонению решения от точного. Этот эффект будет присутствовать всегда, но может проявляться в большей или меньшей степени. Так на следующем рисунке представлены результаты расчетов для модели, расположенной на глубине 0.5 км.

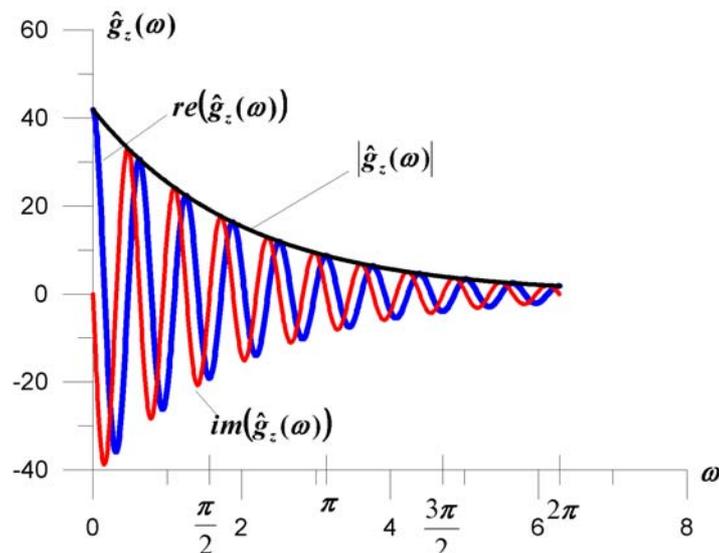


Как видно полученного результата совпадение полей с увеличением числа гармоник и глубины положения модели улучшается.

15. Пусть наш источник располагается в точке с координатами  $(\xi, \zeta)$ . В этом случае выражение для спектральной функции поля  $\mathbf{g}_z(\mathbf{x})$  приобретет вид:

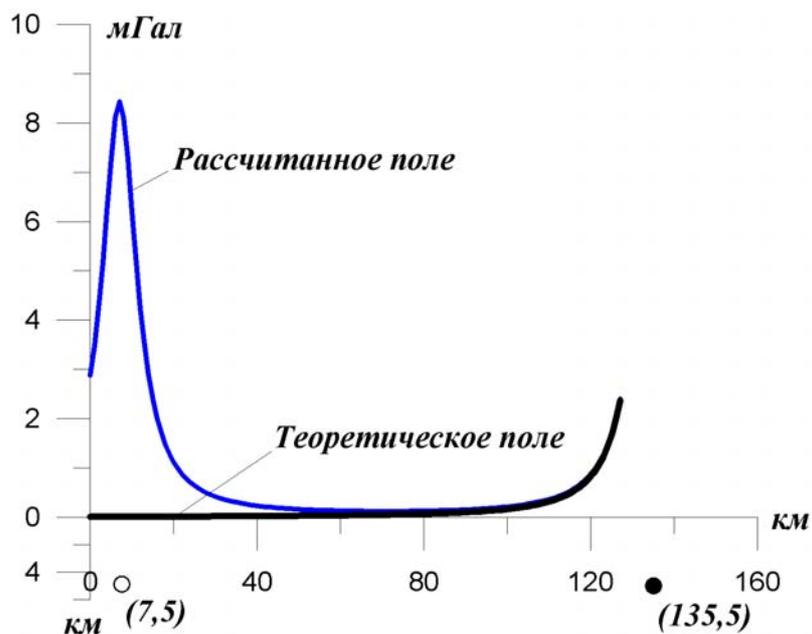
$$\hat{\mathbf{g}}_z(\omega) = 2\pi G \delta_{,i} e^{-|\omega|\zeta} e^{-i\omega\xi}.$$

Появление сомножителя  $e^{-i\omega\xi}$  приведет к тому, что спектральная функция  $\hat{\mathbf{g}}_z(\omega)$  будет иметь как действительную, так и мнимую части, которые будут представлять собой синусоиды, затухающие по амплитуде с увеличением частоты по экспоненциальному закону. На следующем рисунке представлен характер поведения элементов функции  $\hat{\mathbf{g}}_z(\omega)$  для случая расположения источника в точке с координатами  $(10., 0.5)$ .



Частота осцилляций будет тем выше, чем дальше будет располагаться источник от начала координат. В свою очередь это приведет к тому, что необходимо будет увеличивать дискретизацию представления спектральной функции по частоте с тем, чтобы правильно описать характер ее поведения.

16. К чему может привести неверное задание шага дискретизации по частоте, иллюстрирует следующий пример. Пусть шаг дискретизации по частоте равен  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{128}$ , и пусть расчетные точки располагаются на расстоянии  $\Delta x = 1$  друг от друга. Число точек на профиле будет равно 128. расположим наш источник в точке с координатами (135., 5.), т.е. за пределами профиля. Вычислим значения поля в расчетных точках по аналитической формуле и с помощью спектрального представления. Результат, на первый взгляд, оказывается неожиданным.



Как и следовало ожидать, теоретическое поле в начале профиля близко к нулевым значениям и возрастает к его окончанию. Поле, рассчитанное через спектральную функцию, имеет максимум при значении  $x = 7$  км, далее оно убывает и в конце профиля вновь возрастает, практически совпадая с теоретическим.

Для того чтобы понять, с чем связано появление “ложного” максимума в начале профиля, следует рассмотреть формулу численного обратного преобразования Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-N_{\omega}}^{N_{\omega}} \hat{f}(\omega_j) e^{i\omega_j x} \Delta\omega.$$

Определим шаг по частоте следующим образом:  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N\Delta x}$ , где  $N$  – число расчетных точек на профиле,  $\Delta x$  – расстояние между расчетными точками (в нашем примере  $N = 128$ ,  $\Delta x = 1$ ). Длина расчетного профиля –  $X_l = N\Delta x$ , значение частоты –  $\omega_j = j \frac{2\pi}{N\Delta x}$ . Вычислим значение функции  $f(x)$  за пределами профиля в точке  $x = X_l + x_k = N\Delta x + x_k$ . Тогда:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-N_{\omega}}^{N_{\omega}} \hat{f}(\omega_j) e^{i\omega_j x} \Delta\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-N_{\omega}}^{N_{\omega}} \hat{f}(\omega_j) e^{i\left(j \frac{2\pi}{N\Delta x}\right)x} \frac{2\pi}{N\Delta x} = \\ &= \frac{1}{N\Delta x} \sum_{j=-N_{\omega}}^{N_{\omega}} \hat{f}(\omega_j) e^{i\left(j \frac{2\pi}{N\Delta x}\right)(N\Delta x + x_k)} = \frac{1}{N\Delta x} \sum_{j=-N_{\omega}}^{N_{\omega}} \hat{f}(\omega_j) e^{i\left(j2\pi + j \frac{2\pi}{N\Delta x} x_k\right)} = \\ &= \frac{1}{N\Delta x} \sum_{j=-N_{\omega}}^{N_{\omega}} \hat{f}(\omega_j) e^{i\left(j \frac{2\pi}{N\Delta x} x_k\right)} = f(x_k). \end{aligned}$$

Из проведенных выкладок следует, что при таком задании расчетных параметров значение поля в точках  $x = x_k + mX_l$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) будут повторяться, т.е. рассчитанная таким образом функция будет периодической.

17. Приведенные примеры говорят о том, что вычисление аномальных значений поля силы тяжести или магнитного поля через их спектральные характеристики требует значительных как технических затрат, связанных с выбором шага дискретизации спектральных функций по частоте, выбором граничной частоты, выше которой значениями спектральной функции можно пренебречь, так и временными затратами, поскольку для каждой расчетной точки необходимо суммировать ряд Фурье, коэффициенты которого должны рассчитываться.

18. В то же время, как мы уже отмечали, существует ряд прямых задач, где применение спектральных преобразований позволяет создать эффективные алгоритмы по их решению. Эти задачи описываются интегралами типа свертки:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) h(x - \xi) d\xi = g(x) * h(x),$$

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta = g(x, y) * h(x, y).$$

К числу таких задач относится задача вычисления поля силы тяжести от горизонтальной плоскости, расположенной на глубине  $\zeta$  с заданной на ней распределением плотности  $\delta(x)$ :

$$g_z(x, z) = 2G \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) \frac{(\zeta - z)}{(\xi - x)^2 + (\zeta - z)^2} d\xi,$$

задача определения поля силы тяжести, создаваемого горизонтальным слоем с глубинами кромок  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  с известным в нем распределением плотности:

$$g_z(x, z) = 2G \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi) \ln \frac{(\xi - x)^2 + (\zeta_2 - z)^2}{(\xi - x)^2 + (\zeta_1 - z)^2} d\xi,$$

и ряд других.

Эффективность решения этих и аналогичных им задач основана на том, что если поле вычисляется также на горизонтальной плоскости ( $z = \text{const}$ ), то для его вычисления необходимо вычислить спектры функций плотности, ядра преобразования, их перемножить, и от полученного произведения вычислить обратное преобразование Фурье.

19. Рассмотрим этот алгоритм на примере решения прямой двумерной задачи гравиразведки от горизонтального слоя. Обычно распределение плотности в таком слое задается в виде дискретных величин с равномерным шагом вдоль профиля. Для того, чтобы рассчитать спектральную функцию плотности слоя применяют прямое преобразование Фурье в “дискретном” аналоге (ДПФ), которое имеет вид:

$$\hat{\delta}(\omega_j) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta(x_k) e^{-i\omega_j x_k} \Delta x, \quad j = 0, \dots, N-1.$$

В этой формуле предполагается, что  $x_k = k\Delta x$ ,  $k = 0, \dots, N-1$  ( $N$  – число точек на профиле), шаг по частоте –  $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N\Delta x}$ , частота –  $\omega_j = j \frac{2\pi}{N\Delta x}$ .

Для вычисления дискретного спектра функции можно положить  $\Delta x = 1$ , тогда формула прямого дискретного преобразования Фурье приобретет вид:

$$\hat{\delta}_j = \sum_{k=0}^{N-1} \delta_k e^{-i\left(\frac{2\pi}{N}jk\right)},$$

где  $\hat{\delta}_j = \hat{\delta}(\omega_j)$ ,  $\delta_k = \delta(x_k)$ . Соответственно, обратное дискретное преобразование Фурье определяется следующим образом:

$$\delta_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{\delta}_j e^{i\left(\frac{2\pi}{N}jk\right)}.$$

Для вычисления как прямого, так и обратного преобразований Фурье используется алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ), который позволит во много раз сократить вычислительное время по сравнению с вычислением этих преобразований непосредственно по представленным формулам. Особенно ощутимым этот выигрыш во времени становится при больших значениях  $N$ .

20. Таким образом, решение прямой задачи можно было бы организовать следующим образом: 1) рассчитать дискретный спектр от функции плотности; 2) вычислить спектр ядра преобразования по заданной аналитической формуле; 3) перемножить спектры; 4) осуществить обратное дискретное преобразование Фурье. В результате таких действий будут рассчитаны значения поля с равномерным шагом по профилю в  $N$  точках.

Однако такой подход может привести и к ошибочному результату, связанному с тем, что рассчитанная спектральная функция ядра преобразования может затухать медленно. В результате в решении проявится эффект Гиббса, о котором нами уже упоминалось.

С тем, чтобы избежать возникновения таких погрешностей, следует использовать алгоритм, основанный на дискретной свертке двух функций – дискретной функции плотности и ядра преобразования:

$$g_z(x_j) = \sum_k \delta(\xi_k) g^1(x_j - \xi_k, z) = \sum_k g^1(\xi_k, z) \delta(x_j - \xi_k).$$

Если рассматривать эту формулу применительно к модели горизонтального слоя, то  $\delta(x_k)$  соответствует значениям плотности, заданным с равным интервалом вдоль профиля,  $g^1(x_k)$  – поле силы тяжести, создаваемое прямоугольной призмой (ячейкой), на которые разбит слой, с постоянной единичной плотностью. Для быстрого вычисления такой свертки используется алгоритм “быстрой дискретной свертки”. Идея такой свертки состоит в том, что с помощью БПФ вычисляются дискретные спектры ядра преобразования и дискретной

функции плотности, которые перемножаются, и затем от полученного произведения осуществляется обратное преобразование Фурье. Такой алгоритм вычисления дискретной свертки помогает во много раз сократить вычислительное время по сравнению с ее прямым вычислением. Такая экономия времени особенно важна при решении трехмерных задач.

Кроме того, экономия во времени может быть достигнута также за счет того, что, создав комплексную функцию, действительная часть которой будет, например, соответствовать функции плотности, а мнимая – функции ядра преобразования, с помощью одного ДПФ можно вычислить дискретные спектры сразу двух функций одновременно. Для того чтобы выделить эти спектры из полученного спектра комплексной функции необходимо воспользоваться свойствами симметрии, которым удовлетворяют действительные и мнимые части спектральных функций.

Дальнейший выигрыш во времени может быть достигнут за счет того, что при расчете эффекта от системы горизонтальных слоев, нет необходимости для каждого отдельного слоя осуществлять обратное преобразование Фурье. Можно суммировать эффекты слоев в виде их спектральных представлений и только на последней стадии осуществить обратное ДПФ с целью вычисления пространственного распределения поля.

Такой подход к решению прямой задачи гравиразведки и магниторазведка оказывается особенно эффективным в случае расчета поля от трехмерного куба с заданным в нем распределением свойств (плотности или намагниченности) среды.

### ***Литература.***

1. *Алексидзе М.А.* Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиметрии. – М: Наука. 1987. 336 с.
2. *Булычев А.А., Кривошея К.В., Мелихов В.Р., Зальцман Р.В.* Вычисление аномального гравитационного потенциала и его производных на сфере. // Вестн. Моск. Ун-та. Сер.4. Геология. 1998. №2, С. 42 – 46.
3. Геофизические поля и строение дна океанских котловин. / Под ред. Непрочнова Ю.П. – М.: Наука. 1990. 220 с.
4. *Голизра Г.Я.* Основные методы решения прямой задачи гравиразведки на ЭВМ. – Обзор ОНТИ ВИЭМС. Сер. Регион., развед. и промысл. геофиз. М. 1977. 99с.
5. *Голизра Г.Я.* Вычисление магнитного поля масс переменного намагничения. // Геофиз. журнал. 1981. Т. 3. №5. С 98-104.
6. Гравиразведка. Справочник геофизика. – М.: Недра. 1990. 607 с.
7. *Каппелини В., Константинович А.Дж., Эмилиани П.* Цифровые фильтры и их применение. – М. 1983.
8. *Мелихов В.Р., Булычев А.А., Састри Р.Г.* Особенности решения прямой задачи гравиразведки с использованием быстрого

- преобразования Фурье // Морские гравиметрические исследования. М., 1984. С. 73 – 80.
9. *Старостенко В.И., Манукян А.Г., Заворотько А.Н.* Методы решения прямых задач гравиметрии и магнитометрии на шарообразных планетах. Киев.: Наукова думка. 1986. 112 с.
  10. *Страхов В.Н., Романюк Т.В., Фролова Н.К.* Методы решения прямых задач гравиметрии, используемые при моделировании глобальных и региональных гравитационных аномалий // Новые методы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. М: ИФЗ АН СССР. 1989. с. 118-235.
  11. *Parker R.L.* A new method for modeling marine gravity and magnetic anomalies. // Jour. of Geophys. Research. 1974. V 79. N 14. P. 2014–2016.
  12. *Talwani M., Ewing M.* Rapid computation of gravitational attraction of three dimensional bodies of arbitrary shape. // Geophys. 1960. V.25. N1. P. 203 – 225.
- 

### ***Лекция 10. Решение прямой задачи магниторазведки для тел с высокой магнитной восприимчивостью.***

В предыдущих лекциях нами рассматривались случаи решения прямой задачи от тел с заданной постоянной намагниченностью. Однако, если объект, создающий магнитное поле, обладает высокой магнитной восприимчивостью, то решение прямой задачи от такого объекта будет более сложным. Это связано с тем, что внутри намагниченного объекта возникает внутреннее поле, которое оказывает свое влияние на распределение намагниченности внутри этого тела. Кроме того, если тела, создающие магнитные поля, будут располагаться рядом, то эти поля будут оказывать свое влияние на распределении намагниченности внутри тел. Тема этой лекции и будет посвящена вопросам расчета намагниченности внутри таких объектов и расчетам поля, создаваемого этими объектами. Следует сразу же отметить, что этот вопрос очень тесно связан с аналогичными, возникающими при решении прямых электроразведочных задач, теория которых достаточно хорошо разработана.

1. Напомним основные соотношения, связывающие магнитную индукцию, напряженность магнитного поля и намагниченность.

Связь между индукцией и напряженностью магнитного поля в веществе описывается следующим образом:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{I}),$$

где  $\vec{I}$  – намагниченность вещества. Из этого соотношения в частности следует, что вектора  $\vec{B}, \vec{H}, \vec{I}$  в общем случае имеют различные направления.

Как уже отмечалось, намагниченность вещества сложным образом зависит от его магнитных свойств и от намагничивающего поля. Однако, в слабых магнитных полях, к числу которых относится и магнитное поле Земли, можно предположить, что намагниченность горных пород будет определяться двумя факторами – величиной внешнего магнитного поля, создающего индуцированную намагниченность

$$\vec{I}_{инд} = \alpha \vec{H},$$

и величиной остаточной намагниченности  $\vec{I}_n$ :

$$\vec{I} = \vec{I}_{инд} + \vec{I}_n = \alpha \vec{H} + \vec{I}_n.$$

Безразмерная величина  $\alpha$  носит название магнитной восприимчивости. Для парамагнитных пород она положительна, для диамагнитных – отрицательна. С учетом этих соотношений, получим выражение для индукции магнитного поля:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{I}) = \mu_0 (\vec{H} + \alpha \vec{H} + \vec{I}_n) = \mu_0 (\mu \vec{H} + \vec{I}_n),$$

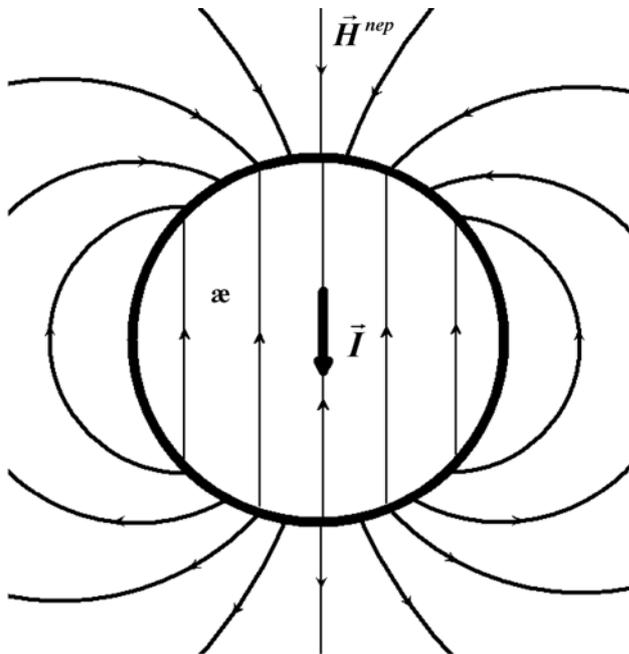
где  $\mu = 1 + \alpha$  – относительная магнитная проницаемость вещества.

Для случая постоянного магнитного поля его индукция и напряженность удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям:

$$div \vec{B} = 0, \quad rot \vec{H} = 0.$$

Первое уравнение говорит о том, что поле  $\vec{B}$  не имеет источников и создается вихрями, т.е. макроскопическими электрическими токами, протекающими в веществе. Поскольку поле  $\vec{B}$  не имеет источников, то на границе намагниченного тела это поле не терпит разрыва, т.е. его нормальная и тангенциальные компоненты непрерывны. Из второго уравнения следует, что возбудителями поля  $\vec{H}$  являются заряды, в данном случае “магнитные заряды”, находящиеся в веществе. Такое поле будет удовлетворять следующим граничным условиям: тангенциальные компоненты поля  $\vec{H}$  непрерывны, а нормальная компонента терпит разрыв, равный поверхностной плотности “магнитных зарядов” в данной точке поверхности  $\delta_{нов} = \vec{I} \cdot \vec{1n}$ , где вектор нормали направлен из объема, содержащего вещество с намагниченностью  $\vec{I}$ .

Рассмотрим два примера решения прямой задачи для простых моделей, основываясь на приведенных соотношениях.



положительных значениях  $\epsilon$ ). Напряженность поля такой сферы в сферической системе координат описывается следующими соотношениями:

$$\vec{H} = \begin{cases} \frac{2m \cos \theta}{4\pi r^3} \vec{1}_r + \frac{m \sin \theta}{4\pi r^3} \vec{1}_\theta; & r \geq R \\ -\frac{I}{3} \vec{1}_z; & r \leq R \end{cases}$$

при этом предполагается что в введенной системе координат ось  $oZ$  совпадает по направлению с внешним магнитным полем  $\vec{H}^{nep}$ ,  $\theta$  – угол между полярной осью (осью  $oZ$ ) и радиус-вектором  $\vec{r}$ , проведенным из центра сферы в точку наблюдения,  $m = \frac{4}{3} \pi R^3 I$  – магнитный момент сферы. В частности из этого выражения следует, что магнитное поле такой сферы вне нее совпадает с полем дипольного источника с магнитным моментом  $m$ .

Намагниченность  $\vec{I}$  образуется под влиянием как первичного, внешнего, поля  $\vec{H}^{nep}$ , так и вторичного внутреннего поля  $\vec{H}^{emp}$ , причем  $\vec{H}^{emp} = -\frac{I}{3}$ . Таким образом, для величины намагниченности можно записать следующее уравнение:

$$I = \epsilon(H^{nep} + H^{emp}) = \epsilon(H^{nep} - \frac{I}{3}) = \epsilon H^{nep} - \epsilon \frac{I}{3}.$$

2. Пример 1. Однородная сфера радиуса  $R$  и магнитной восприимчивостью  $\epsilon$  находится в немагнитной среде и на нее воздействует однородное магнитное поле, напряженность которого обозначим как первичное  $\vec{H}^{nep}$ . В курсе “Теория поля” показывается, что такая сфера, помещенная в однородное поле, приобретает постоянную намагниченность  $\vec{I}$ , направление которой совпадает с направлением исходного, первичного, поля (при

Разрешив это уравнение относительно намагниченности  $I$ , получим:

$$I = \frac{\alpha H^{nep}}{1 + \frac{1}{3}\alpha}$$

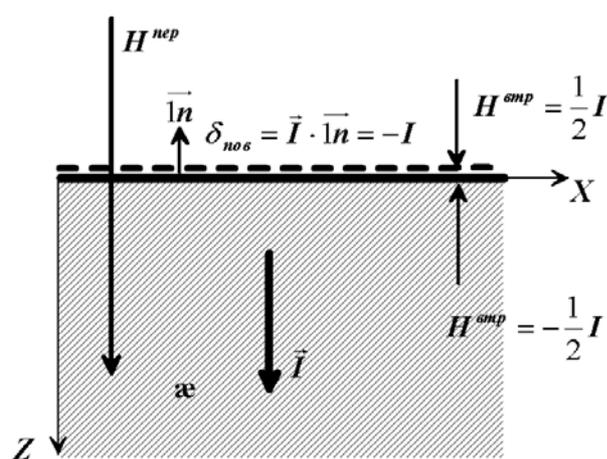
Если бы сфера имела остаточную намагниченность  $I_n$ , совпадающую по направлению с намагничивающим полем, то выражение для намагниченности приобрело бы вид:

$$I = \frac{\alpha H^{nep} + I_n}{1 + \frac{1}{3}\alpha}$$

Зная величину и направление намагниченности сферы, можно рассчитать магнитное поле создаваемое этой моделью.

2. Пример 2. На однородное полупространство с горизонтальной границей и с магнитной восприимчивостью  $\alpha$  воздействует вертикальное магнитное поле, напряженность которого –  $H^{nep}$ . Будем также предполагать, что это полупространство имеет вертикальную остаточную намагниченность  $I_n$ .

Под действием внешнего магнитного поля вещество полупространства приобретает индуцированную намагниченность  $\vec{I}_{инд}$ .



Эта намагниченность будет складываться с остаточной  $\vec{I}_n$ , в результате чего вещество приобретает намагниченность  $\vec{I}$  ( $\vec{I} = \vec{I}_{инд} + \vec{I}_n$ ).

Поскольку полупространство является однородным, то поле, создаваемое им, можно описать с помощью поверхностных “магнитных зарядов”  $\delta_{нов} = \vec{I} \cdot \vec{1n}$ . Вторичные поля, создаваемые этими зарядами,

вне и внутри полупространства будут равны по величине и противоположены по направлению. Если представить напряженность внешнего поля  $H_e$  как сумму напряженностей первичного поля  $H^{nep}$  и внешнего вторичного поля  $H_e^{emp}$  ( $H_e = H^{nep} + H_e^{emp}$ ), а напряженность внутреннего магнитного поля  $H_i$  суммой напряженностей первичного поля  $H^{nep}$  и внутреннего вторичного поля  $H_i^{emp}$  ( $H_i = H^{nep} + H_i^{emp}$ ), то на границе области должно выполняться условие:

$$H_e - H_i = \delta_{нов}.$$

Введем декартову систему координат с осью  $oZ$  направленной вертикально вниз по намагничивающему полю  $H^{nep}$ . Тогда

$$\delta_{нов} = \vec{I} \cdot \vec{1n} = -\vec{I} \cdot \vec{1z}.$$

Поверхностные заряды будут создавать вторичное магнитное поле, величина которого будет равна

$$H^{emp} = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi} 2\pi\delta_{нов} = -\frac{1}{2}\delta_{нов}, & z < 0 \\ \frac{1}{2}\delta_{нов}, & z > 0 \end{cases}.$$

Для того чтобы определить значение  $\delta_{нов}$  воспользуемся условием непрерывности нормальной компоненты индукции магнитного поля на границе среды. Это означает, что для рассматриваемой модели:

$$\mu_0(H^{nep} + H_e^{emp}) = \mu_0(\mu(H^{nep} + H_i^{emp}) + I_n),$$

$$H^{nep} - \frac{1}{2}\delta_{нов} = \mu\left(H^{nep} + \frac{1}{2}\delta_{нов}\right) + I_n.$$

Из этого соотношения следует, что

$$\delta_{нов} = \frac{(1 - \mu)H^{nep} - I_n}{0.5(1 + \mu)}.$$

Определив поверхностную плотность “магнитных зарядов” можно рассчитать поле создаваемое ими, и тем самым определить поле создаваемое намагниченным полупространством.

Можно определить и величину самой намагниченности  $I$ . Если магнитная восприимчивость  $\mu > 0$ , то индуцированная намагниченность  $\vec{I}_{инд}$  будет совпадать по направлению с первичным магнитным полем, и в данном случае для величины  $\delta_{нов}$  можно записать:

$$\delta_{нов} = (\vec{I}_{инд} + \vec{I}_n) \cdot \vec{1n} = -\vec{I} \cdot \vec{1z} = -I.$$

Тогда:

$$I = -\frac{(1-\mu)H^{nep} - I_n}{0.5(1+\mu)} = -\frac{(1-(1+\varkappa))H^{nep} - I_n}{0.5(1+(1+\varkappa))} = -\frac{-\varkappa H^{nep} - I_n}{1+0.5\varkappa},$$

$$I = \frac{\varkappa H^{nep} + I_n}{1+0.5\varkappa}.$$

В случае если величина  $\varkappa$  незначительна, то знаменатель в этом выражении близок к 1, и намагниченность будет вычисляться по формуле  $I = \varkappa H^{nep} + I_n$ . По такой же формуле вычислялась бы намагниченность бесконечного пространства, заполненного веществом с магнитной восприимчивостью  $\varkappa$ . Однако для случая полупространства намагниченность будет меньше в  $(1+0.5\varkappa)$  раз.

3. Решение данной задачи можно было бы получить, как и в предыдущем примере, представив намагниченность  $I$  в полупространстве как сумму индуцированной  $I_{ind}$  и остаточной  $I_n$  намагниченностей. Тогда:

$$I = I_{ind} + I_n = \varkappa(H^{nep} + H^{emp}) + I_n = \varkappa(H^{nep} - 0.5I) + I_n,$$

$$I = \frac{\varkappa H^{nep} + I_n}{1+0.5\varkappa}.$$

4. Приведенные примеры показывают два основных подхода к решению прямой задачи от тел с высокой магнитной восприимчивостью. Первый основан на том, что вначале определяется распределение намагниченности в объекте, а затем вычисляется поле им создаваемое. Этот подход не предполагает того, что магнитные свойства объекта остаются неизменными в пространстве. Второй подход предполагает однородность магнитных свойств объекта. Решение прямой задачи в этом случае можно осуществить, определив на первом этапе распределение поверхностных зарядов, создающих магнитное поле, а затем рассчитать и само поле.

5. В общем случае решение прямой задачи магниторазведки может быть построено на основе введения скалярного потенциала магнитного поля  $U$ . Тогда напряженность магнитного поля через скалярный потенциал определятся следующим образом:

$$\vec{H} = -\text{grad } U.$$

Поскольку  $\vec{B} = \mu_0(\mu\vec{H} + \vec{I}_n)$  и  $\text{div}\vec{B} = 0$ , получим:

$$\text{div}(-\mu \text{grad}U + \vec{I}_n) = 0; \quad \text{div}(\mu \text{grad}U) = \text{div}\vec{I}_n.$$

Если величины  $\mu$  и  $\vec{I}_n$  постоянны, то последнее уравнение приобретает вид:  $\text{div}\text{grad}U = \Delta U = 0$ , т.е. потенциал  $U$  удовлетворяет уравнению Лапласа.

На границе тела этот потенциал удовлетворяет двум граничным условиям:

– потенциал непрерывен, т.е.  $U_i = U_e$ , где  $U_i$  – потенциал внутри тела,  $U_e$

– потенциал вне тела, при этом как внутренний, так и внешний потенциалы складываются из потенциалов первичного магнитного поля и вторичного, появляющегося за счет намагничивания тела и вмещающей среды:  $U = U^{nep} + U^{emp}$ ;

– нормальная компонента вектора индукции на границе тела не имеет разрыва:

$$\mu_0 \left( \mu_1 \frac{\partial U_e}{\partial n} \right) = \mu_0 \left( \mu_2 \frac{\partial U_i}{\partial n} \right),$$

где  $\mu_1$  – относительная магнитная проницаемость вмещающей среды,  $\mu_2$  – относительная магнитная проницаемость тела.

Если удастся найти такой потенциал, который будет удовлетворять перечисленным условиям, то в дальнейшем по этому потенциалу возможно определить и параметры магнитного поля, т.е. решить прямую задачу магниторазведки. Решим эту задачу для однородной сферы.

6. Пример 3. Однородная сфера радиуса  $R$  и магнитной восприимчивостью  $\kappa$  находится в немагнитной среде и на нее воздействует однородное магнитное поле  $\vec{H}^{nep}$ . Введем декартову систему координат таким образом, что ось  $oZ$  будет направлена вдоль первичного поля, а начало координат будет расположено в центре сферы. Тогда потенциал первичного магнитного поля будет описываться следующим образом:

$$U^{nep} = -zH^{nep}.$$

Потенциалы внешнего и внутреннего полей должны удовлетворять условиям на границе тела. Составим эти условия. Для этого введем сферическую систему координат  $(r, \theta, \varphi)$ . Связь сферических координат с декартовыми определяется соотношениями:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

В сферической системе координат для первичного потенциала можем записать:

$$U^{nep} = -zH^{nep} = -H^{nep} r \cos \theta.$$

В результате того, что сфера приобретет намагниченность, появляется вторичный внутренний потенциал, который для однородного поля будет представлен в виде:

$$U_i^{emp} = azH^{nep} = aH^{nep} r \cos \theta,$$

где  $a$  – неопределенный коэффициент.

Внешний вторичный потенциал, создаваемой намагниченной сферой, будет представлен как потенциал дипольного источника:

$$U_e^{emp} = bH^{nep} \frac{\cos \theta}{r^2},$$

где  $b$  – также неопределенный коэффициент.

Из условия того, что внутренний и внешний потенциал на границе сферы должны быть равны (условие непрерывности потенциала на границе –  $U_i = U_e$ ), получим:

$$U_i^{nep} + U_i^{emp} = U_e^{nep} + U_e^{emp}.$$

Поскольку  $U_i^{nep} = U_e^{nep}$ , то условие непрерывности потенциала будет соответствовать условию непрерывности только вторичных потенциалов:

$$U_i^{emp} = U_e^{emp}.$$

При  $r = R$ , это условие приобретет вид:

$$aH^{nep} R \cos \theta = bH^{nep} \frac{\cos \theta}{R^2},$$

из которого следует, что  $b = aR^3$ .

Условие непрерывности индукции магнитного поля для данного примера будет иметь вид:

$$\left( \frac{\partial U_e}{\partial n} \right) = \left( \mu \frac{\partial U_i}{\partial n} \right), \quad \frac{\partial U^{nep}}{\partial n} + \frac{\partial U_e^{emp}}{\partial n} = \mu \left( \frac{\partial U^{nep}}{\partial n} + \frac{\partial U_i^{emp}}{\partial n} \right).$$

В данном случае дифференцирование по нормали может быть заменено дифференцированием по радиусу  $r$ :

$$\frac{\partial(-H^{nep} r \cos \theta)}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left( bH^{nep} \frac{\cos \theta}{r^2} \right) = \mu \left( \frac{\partial(-H^{nep} r \cos \theta)}{\partial r} + \frac{\partial(aH^{nep} r \cos \theta)}{\partial r} \right),$$

$$-H^{nep} \cos \theta - 2bH^{nep} \frac{\cos \theta}{r^3} = \mu \left( -H^{nep} \cos \theta + aH^{nep} \cos \theta \right).$$

Поскольку это условие должно выполняться на границе сферы, т.е. при  $r = R$ , то оно приобретет вид:

$$-H^{nep} \cos \theta - 2aR^3 H^{nep} \frac{\cos \theta}{R^3} = \mu \left( -H^{nep} \cos \theta + aH^{nep} \cos \theta \right).$$

В результате для коэффициента  $a$  получим:

$$a = \frac{\mu - 1}{\mu + 2},$$

и выражения для потенциалов приобретут вид:

$$U_i^{emp} = aH^{nep} r \cos \theta = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} H^{nep} r \cos \theta,$$

$$U_e^{emp} = bH^{nep} \frac{\cos \theta}{r^2} = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} R^3 H^{nep} \frac{\cos \theta}{r^2},$$

или в декартовой системе координат:

$$U_i^{emp} = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} H^{nep} z, \quad U_e^{emp} = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} R^3 H^{nep} \frac{z}{r^3}.$$

С учетом того, что  $\mu = 1 + \varepsilon$ , получим выражение для внешнего вторичного потенциала в виде:

$$U_e^{emp} = \frac{\varepsilon}{1 + \frac{1}{3}\varepsilon} \frac{1}{3} R^3 H^{nep} \frac{z}{r^3} = \frac{1}{4\pi} \frac{\varepsilon}{1 + \frac{1}{3}\varepsilon} \left( \frac{4\pi}{3} R^3 \right) H^{nep} \frac{z}{r^3}.$$

Таким образом, внешний потенциал сферы совпадает с потенциалом диполя, магнитный момент которого равен:

$$m = \frac{\varkappa}{1 + \frac{1}{3}\varkappa} \left( \frac{4\pi}{3} R^3 \right) H^{nep} = IV,$$

где намагниченность  $I = \frac{\varkappa}{1 + \frac{1}{3}\varkappa} H^{nep}$ , а объем сферы –  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ . Если бы сфера имела остаточную намагниченность  $I_n$ , совпадающую по направлению с намагничивающим полем, то выражение для намагниченности приобрело бы вид:

$$I = \frac{\varkappa H^{nep} + I_n}{1 + \frac{1}{3}\varkappa}.$$

Эта формула была получена нами ранее при рассмотрении первого примера.

7. Если сравнить полученное выражение для намагниченности сферы с намагниченностью, полученной для полупространства  $I = \frac{\varkappa H^{nep} + I_n}{1 + 0.5\varkappa}$ , то можно заметить, что структура этих формул одна и та же:

$$I = \frac{\varkappa H^{nep} + I_n}{1 + N\varkappa}.$$

Параметр  $N$  носит название коэффициента размагничивания, и в случае намагниченного полупространства он равен 0.5, а для намагниченной сферы – 1/3.

8. Из выражения для внутреннего потенциала следует, что возникающее вторичное поле внутри сферы будет определяться соотношением:

$$H_i^{emp} = -grad U_i^{emp} = -\frac{\mu - 1}{\mu + 2} H^{nep} = -\frac{\varkappa}{3 + \varkappa} H^{nep} = -\frac{1}{3} \frac{\varkappa}{1 + \frac{1}{3}\varkappa} H^{nep} = -NI,$$

т.е. оно будет направлено в сторону, противоположенную первичному. В силу этого, вторичное поле носит название размагничивающего, и его появление приводит к тому, что намагниченность сферы оказывается меньше, чем если бы она определялась по формуле  $I = \varkappa H^{nep}$ .

9. Если ввести систему координат таким образом, что напряженность поля будет определяться компонентами  $H_x, H_y, H_z$ , а вектор остаточной

намагниченности – компонентами  $I_{nx}, I_{ny}, I_{nz}$ , то для компонент вектора намагниченности можно записать:

$$I_x = \frac{\alpha H_x^{перв} + I_{nx}}{1 + N\alpha}, \quad I_y = \frac{\alpha H_y^{перв} + I_{ny}}{1 + N\alpha}, \quad I_z = \frac{\alpha H_z^{перв} + I_{nz}}{1 + N\alpha}.$$

10. Аналогично тому, как было получено выражение для намагниченности сферы, можно получить выражение для намагниченности бесконечного горизонтального цилиндра:

$$I_x = \frac{\alpha H_x^{перв} + I_{nx}}{1 + N\alpha}, \quad I_z = \frac{\alpha H_z^{перв} + I_{nz}}{1 + N\alpha}.$$

При этом коэффициент  $N$  будет равен 0.5, как и для полупространства.

11. Как видно из приведенных примеров, форма объекта оказывает свою роль на величину намагниченности. Это связано с тем, что каждый намагниченный элемент объекта создает собственное магнитное поле, которое, складываясь с исходным полем и полем других намагниченных элементов, образуют некоторое суммарное поле внутри самого объекта. Именно под действием этого суммарного магнитного поля и происходит намагничивание вещества. Таким образом, в общем случае величина намагниченности будет сложным образом зависеть от формы самого объекта.

12. Формулы, полученные нами ранее, описывают намагниченность идеальных тел в виде шара, горизонтального цилиндра, однородного полупространства. К числу тел, намагниченность которых может быть описана приведенными формулами, относятся трехосные эллипсоиды, при этом коэффициенты размагничивания  $N$  будут своими для каждой из его осей. Частными случаями таких эллипсоидов будут однородная сфера и бесконечный горизонтальный цилиндр.

Достаточно просто вычислить коэффициенты размагничивания для двухмерного эллиптического цилиндра. Если величины его полуосей обозначить через  $a$  и  $b$ , то при намагничивании этого цилиндра в поле, параллельном оси  $a$ , коэффициент размагничивания будет равен

$$N_a = \frac{b}{a + b},$$

а при намагничивании вдоль оси  $b$ :

$$N_b = \frac{a}{a+b}.$$

Выражения коэффициентов размагничивания для трехосных эллипсоидов не выражаются в элементарных формулах, но они удовлетворяют условию:

$$N_a + N_b + N_c = 1.$$

Значения этих коэффициентов для разных соотношений полуосей можно численно рассчитать или воспользоваться уже готовыми таблицами.

13. В общем случае решение прямой задачи от сильно магнитных тел не будет описываться такими простыми соотношениями. Как уже отмечалось, это связано с тем, что внутреннее магнитное поле не будет однородным, а будет зависеть как от формы тела, так и от распределения магнитной восприимчивости внутри него. Кроме того, необходимо будет учитывать влияние соседних тел, создающих свое магнитное поле, и которое будет также оказывать влияние на распределение намагниченности. Таким образом, для решения такого рода задачи необходимо учесть влияние всех этих факторов.

14. Получим общее уравнение для решения задачи определения намагниченности для изолированного тела с переменной магнитной восприимчивостью  $\alpha$ . Пусть это тело находится в неоднородном первичном магнитном поле  $\vec{H}^{nep}$ . Тогда намагниченность в точке  $M_0$ , находящейся внутри этого тела будет определяться следующим образом:

$$\vec{I}(M_0) = \alpha(M_0)\vec{H}(M_0) + \vec{I}_n(M_0) = \alpha(M_0)(\vec{H}^{nep}(M_0) + \vec{H}^{emp}(M_0)) + \vec{I}_n(M_0).$$

Выражение для поля  $\vec{H}^{emp}$  можно получить на основе потенциала, создаваемого намагниченным телом, занимающим объем  $D$ :

$$U^{emp}(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_D \vec{I}(M) \cdot \text{grad}^{M_0} \frac{1}{r_{MM_0}} dv,$$

$$\vec{H}^{emp}(M_0) = -\text{grad}^{M_0} U(M_0) = \frac{1}{4\pi} \text{grad}^{M_0} \int_D \vec{I}(M) \cdot \text{grad}^{M_0} \frac{1}{r_{MM_0}} dv.$$

Из этого соотношения можно получить выражение для намагниченности:

$$\vec{I}(M_0) = \alpha(M_0)(\vec{H}^{nep}(M_0) + \vec{H}^{emp}(M_0)) + \vec{I}_n(M_0) =$$

$$= \mathfrak{a}(M_0) \vec{H}^{nep}(M_0) + \mathfrak{a}(M_0) \frac{1}{4\pi} \mathit{grad}^{M_0} \int_D \vec{I}(M) \cdot \mathit{grad}^{M_0} \frac{1}{r_{MM_0}} dv + \vec{I}_n(M_0)$$

Введя в рассмотрение величину  $\vec{I}_0 = \mathfrak{a} \vec{H}^{nep} + \vec{I}_n$ , полученное уравнение можно переписать следующим образом:

$$\vec{I}(M_0) = \vec{I}_0(M_0) + \mathfrak{a}(M_0) \frac{1}{4\pi} \mathit{grad}^{M_0} \int_D \vec{I}(M) \cdot \mathit{grad}^{M_0} \frac{1}{r_{MM_0}} dv.$$

Таким образом, для нахождения распределения намагниченности внутри заданного объема необходимо решить полученные интегрально-дифференциальные уравнения. Однако необходимо отметить, что поскольку точка  $M$ , по которой происходит интегрирование, и точка  $M_0$  принадлежат заданной области, то при их совпадении  $r_{MM_0} = 0$ , что приводит к возникновению сингулярности. Это, в свою очередь, приводит к необходимости создания таких численных схем решения этих уравнений, которые позволили бы обойти этот вопрос.

15. Существуют разные способы решения таких уравнений. Один из них – следующий. Вырежем вокруг точки  $M_0$  небольшую сферу  $D_S$  и будем предполагать, что поле в этой сфере однородно. Тогда, например, последнее уравнение можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{I}(M_0) = \vec{I}_0(M_0) + \frac{\mathfrak{a}(M_0)}{4\pi} \mathit{grad}^{M_0} \int_{D_S} \vec{I}(M) \cdot \mathit{grad}^{M_0} \frac{1}{r_{MM_0}} dv + \\ + \frac{\mathfrak{a}(M_0)}{4\pi} \mathit{grad}^{M_0} \int_{D-D_S} \vec{I}(M) \cdot \mathit{grad}^{M_0} \frac{1}{r_{MM_0}} dv. \end{aligned}$$

Поскольку поле внутри сферы, как было показано ранее, определяется соотношением:

$$\vec{H}_i^{emp} = -N\vec{I} = -\frac{1}{3} \vec{I},$$

то второе слагаемое в этом выражении будет равно:

$$\frac{\mathfrak{a}(M_0)}{4\pi} \mathit{grad}^{M_0} \int_{D_S} \vec{I}(M) \cdot \mathit{grad}^{M_0} \frac{1}{r_{MM_0}} dv = -\frac{\mathfrak{a}(M_0)}{3} \vec{I}(M_0).$$

В результате для намагниченности в точке  $M_0$  получим:

$$\bar{I}(M_0) = \bar{I}_0(M_0) - \frac{\alpha(M_0)}{3} \bar{I}(M_0) + \frac{\alpha(M_0)}{4\pi} \text{grad}^{M_0} \int_{D-D_S} \bar{I}(M) \cdot \text{grad}^{M_0} \frac{1}{r_{MM_0}} dv,$$

$$\bar{I}(M_0) = \frac{1}{1 + \frac{\alpha(M_0)}{3}} \left( \bar{I}_0(M_0) + \frac{\alpha(M_0)}{4\pi} \text{grad}^{M_0} \int_{D-D_S} \bar{I}(M) \cdot \text{grad}^{M_0} \frac{1}{r_{MM_0}} dv \right).$$

Поскольку теперь расстояние  $r_{MM_0}$  не принимает нулевого значения, то окончательно можно записать:

$$\bar{I}(M_0) = \frac{3}{3 + \alpha(M_0)} \left( \bar{I}_0(M_0) + \frac{\alpha(M_0)}{4\pi} \int_{D-D_S} \text{grad}^{M_0} (\bar{I}(M) \cdot \text{grad}^{M_0} \frac{1}{r_{MM_0}}) dv \right).$$

Полученное уравнение является уравнением Фредгольма 2-го рода. Решение таких уравнений устойчиво.

16. Рассмотрим один из возможных путей численной реализации алгоритма. Для этого представим заданный объем в виде набора элементарных тел, одинаковых по размеру. Условия, которые следует наложить на форму и размеры этих тел, должны быть следующими:

- тела должны быть симметричными;
- размеры тел должны быть небольшими относительно всего объема;
- будем предполагать, что эти тела будут однородно намагничеными.

В качестве такого элементарного тела можно, например, предложить модель куба. Если число таких кубиков равно  $K$ , и расчетная точка  $M_i$  находится в центре  $i$ -го куба ( $i = \overline{1, K}$ ), то полученное уравнение для намагниченности можно переписать следующим образом:

$$\bar{I}(M_i) = \frac{3}{3 + \alpha(M_i)} \left( \bar{I}_0(M_i) + \alpha(M_i) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^K \bar{H}_k(M_i) \right),$$

где  $\bar{H}_k(M_i)$  – напряженность поля, создаваемая  $k$ -м кубиком в точке  $M_i$ . При этом величина  $\bar{H}_k(M_i)$  в свою очередь зависит от величины намагниченности в точке  $M_k$ . Напомним, что для однородно намагниченного тела связь между компонентами вектора намагниченности  $\bar{I}$  и напряженностью поля  $\bar{H}$ , создаваемого этим объектом, в матричной форме может быть представлена следующим образом:

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{xx} & V_{xy} & V_{xz} \\ V_{yx} & V_{yy} & V_{yz} \\ V_{zx} & V_{zy} & V_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \end{bmatrix},$$

где  $V_{ij}$  – вторые производные функции  $V(M_0) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{1}{r_{MM_0}} dv$ . В нашем случае точка  $M_0$  соответствует точке  $M_i$ , а точка  $M$  – точке  $M_k$ . Обозначив матрицу вторых производных как  $\Gamma$ , для вектора напряженности  $\vec{H}$  можно записать:  $\vec{H} = \Gamma \vec{I}$ . Поскольку элементы матрицы  $\Gamma$  зависят от взаимного расположения точек  $M_i$  и  $M_k$ , то представим соотношение между векторами  $\vec{H}$  и  $\vec{I}$  в следующем виде:

$$\vec{H}(M_i) = \Gamma_{ik} \vec{I}(M_k).$$

Соответственно предыдущее уравнение приобретает вид:

$$\vec{I}(M_i) = \frac{3}{3 + \alpha(M_i)} \left( \vec{I}_0(M_i) + \alpha(M_i) \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^K \Gamma_{ik} \vec{I}(M_k) \right)$$

Таким образом, для определения характера распределения вектора намагниченности сформирована система из  $K$  векторных или  $3K$  скалярных уравнений.

17. Решение полученной системы уравнений прямыми методами может оказаться не эффективным. Это связано с тем, что даже при достаточно грубой аппроксимации тела элементарными телами размерность системы может оказаться очень высокой. Так, при аппроксимации куба системой кубиков размерностью  $10 \cdot 10 \cdot 10$ , будет получена система из 1000 векторных или 3000 скалярных уравнений. При большем числе аппроксимационных элементов соответственно будет увеличиваться и размерность системы, что при ее решении прямыми методами приведет к значительным вычислительным затратам.

18. Более эффективными могут оказаться итерационные методы, которые в данном случае будут сходиться к решению, поскольку полученная система, как уже отмечалось, представлена интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода. Суть итерационных методов состоит в том, что, задавшись начальным, нулевым, приближением намагниченности, рассчитываются новые значения намагниченности. Затем, полученное приближение берется в качестве исходного, и вновь рассчитываются значения намагниченности. Этот процесс продолжается

до тех пор, пока расхождение между двумя последовательными приближениями не станет меньше заданного.

Несмотря на то, что итерационный алгоритм решения системы уравнений в большинстве случаев оказывается более эффективным по сравнению с прямыми методами, тем не менее, и он может оказаться достаточно трудоемким.

19. Рассмотрим подход к решению рассматриваемой задачи на основе представления аномального магнитного поля с помощью поверхностных интегралов. Для этого вспомним выражение для потенциала, создаваемого намагниченным объемом  $D$ :

$$U(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_D \vec{I}(M) \cdot \mathbf{grad}^{M_0} \frac{1}{r_{MM_0}} dv = \frac{1}{4\pi} \int_D \vec{I}(M) \cdot \mathbf{grad}^M \frac{1}{r_{MM_0}} dv.$$

Преобразуем это выражение, воспользовавшись соотношением

$$\vec{A} \cdot \mathbf{grad} a = \mathit{div} a \vec{A} - a \mathit{div} \vec{A},$$

и теоремой Остроградского–Гаусса  $\int_D \mathit{div} \vec{A} dv = \oint_{\partial D} \vec{A} \cdot d\vec{S}$ :

$$\begin{aligned} U(M_0) &= \frac{1}{4\pi} \int_D \mathit{div}^M \left( \vec{I}(M) \frac{1}{r_{MM_0}} \right) dv - \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{1}{r_{MM_0}} \mathit{div}^M \vec{I}(M) dv = \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial D} \frac{\vec{I}(M)}{r_{MM_0}} d\vec{S} - \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{1}{r_{MM_0}} \mathit{div}^M \vec{I}(M) dv = \\ &= \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial D} \frac{\delta_s}{r_{MM_0}} d\vec{S} + \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{\delta_v}{r_{MM_0}} dv. \end{aligned}$$

Ранее, в предыдущих лекциях посвященных решению прямых задач от однородно намагниченных тел, нами отмечалось, что для случая постоянной намагниченности ( $\vec{I} = \mathit{const}$ )  $\mathit{div} \vec{I} = 0$  и, соответственно,  $\delta_v = 0$ . Это означает, что аномальный магнитный потенциал от такого объекта может быть представлен с помощью поверхностных “магнитных зарядов”. Однако в нашем случае намагниченность  $\vec{I}$  не будет постоянной величиной, поскольку намагничивающее поле неоднородно.

20. Рассмотрим более внимательно ситуацию, возникающую в объекте с постоянной магнитной восприимчивостью  $\chi$ , помещенном в неоднородное магнитное поле, создаваемое внешними источниками. Тогда

$$\operatorname{div} \vec{I} = \operatorname{div}(\alpha \vec{H}) = \vec{H} \cdot \operatorname{grad} \alpha + \alpha \operatorname{div}(\vec{H}^{nep} + \vec{H}^{emp}).$$

Поскольку  $\alpha = \text{const}$ , то первое слагаемое равно нулю. Второе слагаемое также будет равно нулю, т.к. первичное поле создается внешними источниками ( $\operatorname{div} \vec{H}^{nep} = 0$ ). В результате того, что объект приобрел намагниченность, на его поверхности возникнут поверхностные заряды, которые образуют вторичное поле. Поскольку источники этого поля расположены на поверхности нашей области, то дивергенция вторичного поля вновь будет равна нулю в любой точке, находящейся внутри этой области ( $\operatorname{div} \vec{H}^{emp} = 0$ ). Таким образом, мы приходим к выводу, что поле объекта с однородной магнитной восприимчивостью может быть описано с помощью поверхностных “магнитных зарядов”. Следовательно, наша задача может быть сформулирована в виде: необходимо найти такое распределение поверхностных магнитных зарядов, которые удовлетворяли бы соответствующим определенным условиям.

21. Для того чтобы определить плотность поверхностных зарядов запишем выражение для потенциала напряженности магнитного поля, создаваемого как первичным магнитным полем, так и вторичными поверхностными зарядами:

$$U(M_0) = U^{nep}(M_0) + \int_{\partial D} \delta_n(M) \frac{1}{r_{MM_0}} dS,$$

где  $\delta_n(M)$  – интенсивность вторичных поверхностных зарядов в точке  $M$ , находящейся на границе области. Из этого соотношения следует выражение для напряженности магнитного поля:

$$\begin{aligned} \vec{H}(M_0) &= -\operatorname{grad} U(M_0) = \vec{H}^{nep}(M_0) + \operatorname{grad}^{M_0} \int_{\partial D} \delta_n(M) \frac{1}{r_{MM_0}} dS = \\ &= \vec{H}^{nep}(M_0) - \int_{\partial D} \delta_n(M) \operatorname{grad}^M \frac{1}{r_{MM_0}} dS. \end{aligned}$$

Рассмотрим малый элемент  $dS$  поверхности  $\partial D$ . Поверхностную плотность зарядов в пределах этого элемента можно считать постоянной, а сам элемент плоским. Тогда вблизи этого поверхностного элемента будут выполняться следующие условия:

$$H_{\text{нор}}^e = H_{\text{нор}}^{\text{внеш}} + \frac{\delta_n}{2}, \quad H_{\text{нор}}^i = H_{\text{нор}}^{\text{внеш}} - \frac{\delta_n}{2}.$$

Здесь  $H_{нор}^e, H_{нор}^i$  – нормальные компоненты напряженности магнитного поля вне и внутри неоднородности,  $H_{нор}^{внеш}$  – проекция на нормаль к элементу  $dS$  внешнего поля, которое представляет собой сумму первичного поля и поля вторичных (поверхностных) источников вне элемента  $dS$ . Для того, чтобы получить уравнение для поверхностных источников, воспользуемся условием непрерывности на границе раздела двух сред нормальной составляющей вектора индукции магнитного поля (будем предполагать, что остаточная намагниченность отсутствует):

$$\mu_0 \mu_1 \left( H_{нор}^{внеш} + \frac{\delta_n}{2} \right) = \mu_0 \mu_2 \left( H_{нор}^{внеш} - \frac{\delta_n}{2} \right),$$

где  $\mu_1$  – относительная магнитная проницаемость вмещающей среды,  $\mu_2$  – объема, находящегося в этой среде. Разрешив это уравнение относительно  $\delta_n$ , получим:

$$\begin{aligned} \delta_n(M_0) &= \frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{(\mu_1 + \mu_2)} H_{нор}^{внеш}(M_0) = \\ &= \frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{(\mu_1 + \mu_2)} \left( H_{нор}^{пер}(M_0) - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \delta_n(M) \frac{\partial^M}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{MM_0}} \right) dS \right). \end{aligned}$$

В этом выражении точки  $M$  и  $M_0$  находится на поверхности области  $D$ . Производная по направлению может быть представлена как скалярное произведение вектора внешней нормали к границе области и градиента функции  $\frac{1}{r_{MM_0}}$ :

$$\frac{\partial^M}{\partial n} \left( \frac{1}{r_{MM_0}} \right) = 1 \vec{n} \cdot \mathbf{grad} \left( \frac{1}{r_{MM_0}} \right).$$

22. Для численной реализации этого алгоритма поверхность  $\partial D$ , ограничивающий объем, представим в виде набора элементарных ячеек. В пределах каждой из ячеек поверхностная плотность вторичных источников  $\delta_n$  и первичное поле будем считать постоянными. Тогда дискретная аппроксимация полученного уравнения может быть представлена в виде:

$$\delta_n(M_i) + k \sum_{j=1}^N C_{ij} \delta_n(M_j) = -k H_{нор}^{пер}(M_i),$$

где  $N$  – число ячеек, на которые разбита поверхность;  $i, j$  – номера ячеек;

$$k = \frac{2(\mu_2 - \mu_1)}{(\mu_1 + \mu_2)}, \quad C_{ij} = \frac{1}{4\pi} \int_{S_j} \frac{\partial}{\partial n_j} \left( \frac{1}{r_{M_j M_i}} \right) dS_j, \quad M_j \in S_j.$$

Физический смысл коэффициентов  $C_{ij}$  – влияние  $j$ -х источников на источник, располагающийся в точке  $M_i$ . В зависимости от модели это влияние может быть рассчитано различным способом. Наиболее простой путь вычисления коэффициентов  $C_{ij}$  – в замене интеграла приближенным выражением:

$$C_{ij} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_j} \left( \frac{1}{r_{M_j M_i}} \right) \Delta S_j.$$

Таким образом, получена система линейных алгебраических уравнений относительно значений поверхностных зарядов. Решив эту систему, будет найдено распределение фиктивных “магнитных зарядов”, а по ним можно рассчитать и аномальное магнитное поле.

### *Литература.*

1. Блох Ю.И. Решение прямых задач гравиразведки и магниторазведки.: Учеб. пособие. – М: МГГА. 1993. 79 с. ([www.sigma3d.com](http://www.sigma3d.com)).
2. Блох Ю.И. Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий.: Учеб. пособие. 2009. 232 с. ([www.sigma3d.com](http://www.sigma3d.com)).
3. Электрическое зондирование геологической среды. Ч.1. Прямые задачи и методика работ. / Под ред. В.К. Хмелевского, В.А. Шевнина. – М.: Изд-во МГУ. 1988. 177 с.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Булычев Андрей Александрович  
Лыгин Иван Владимирович  
Мелихов Вячеслав Романович

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ ЗАДАЧ  
ГРАВИ- И МАГНИТОРАЗВЕДКИ  
(конспект лекций)**

Подписано в печать	12.05.2010
Формат	60x90 1/16
Тираж	100 экз.

Отпечатано в отделе оперативной печати  
Геологического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова