

$$\Pi = U - A = \int_V U_0 dV - \left[\int_V (Xu + Yv + Zw) dV + \int_S (X_n u + Y_n v + Z_n w) dS \right] \rightarrow \min$$

А. В. Жабко

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕХАНИКА

Научная монография

$$F_y - \frac{d}{dx} F_y = 0$$

Екатеринбург – 2016

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский государственный горный университет»



А. В. Жабко

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕХАНИКА

Научная монография

Екатеринбург – 2016

УДК 622.271.33/.451+622.(83+23.01)+624.121.(532+537)+625.033.38+627.43
Ж 12

Рецензенты: ведущий научный сотрудник лаборатории геодинамики и горного давления ИГД УрО РАН, доктор технических наук, профессор *О. В. Зотеев*; заведующий лабораторией устойчивости бортов карьеров и сдвижения горных пород института «Уралмеханобр», г. Екатеринбург, кандидат технических наук *П. В. Кольцов*.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
Уральского государственного горного университета.

Жабко А. В.

Ж 12 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕХАНИКА: научная монография / А. В. Жабко; Уральский государственный горный университет. – Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2016. – 224 с.
ISBN 978-5-8019-0384-2

В монографии приводится и предлагается к использованию принципиально новая теория расчета устойчивости откосов и оснований, разработанная автором и основанная на фундаментальных теоремах и принципах механики. Основой математического аппарата предлагаемой теории являются вариационное, дифференциальное и интегральное исчисления. На основе теории разработаны методики расчета устойчивости откосов практически для условий любой сложности. Получен и проанализирован аналитический критерий прочности (разрушения, пластичности) горных пород. Получены зависимости, определяющие начальное напряженное состояние нетронутого горного массива. Предлагается аналитический метод определения угловых параметров процесса сдвижения. Обоснован и исследован механизм формирования нагрузок на конструктивные элементы систем подземных разработок, в том числе в поле действия тектонических напряжений. На основе аппарата динамического программирования предлагается методика обоснования величины сцепления трещиноватого горного массива.

Монография предназначена для научных работников научно-исследовательских и проектных организаций, может быть полезна аспирантам, обучающимся по образовательной программе высшего образования – программе подготовки научно-педагогических кадров в аспирантуре по направлению подготовки 05.06.01 «Науки о Земле», и студентам высших учебных заведений.

Рис. 57. Библиогр. 103 назв.

УДК 622.271.33/.451+622.(83+23.01)+624.121.(532+537)+625.033.38+627.43

ISBN 978-5-8019-0384-2

© Жабко А. В., 2016

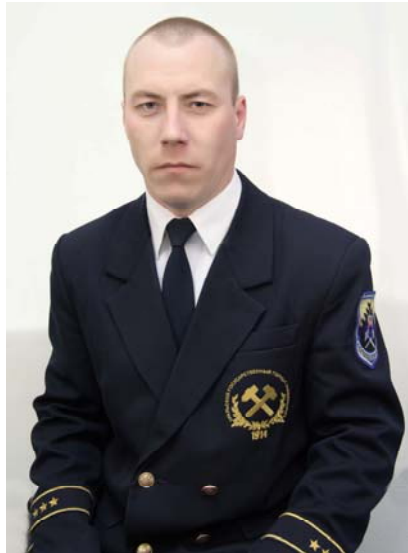
© Уральский государственный
горный университет, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБ АВТОРЕ	4
ВВЕДЕНИЕ	5
1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МЕХАНИКИ И МАТЕМАТИКИ	8
1.1. Основы вариационного исчисления	8
1.2. Фундаментальные законы и принципы механики	21
1.2.1. Вариационные принципы теоретической механики	21
1.2.2. Законы и принципы механики деформируемого твердого тела	34
1.2.3. Вариационные методы решения задач механики сплошной среды	42
Выводы по главе 1	47
Список литературы к главе 1	49
2. ТЕОРИЯ РАСЧЕТА УСТОЙЧИВОСТИ ОТКОСОВ	51
2.1. Анализ и характеристика существующих методов расчета устойчивости откосов	51
2.2. Предварительные исследования	71
2.3. Общая теория расчета устойчивости однородных откосов	78
2.4. Предельные параметры плоских однородных откосов	93
2.5. Расчет анизотропных и неоднородных откосов	99
2.6. Расчет подработанных и закарстованных откосов	110
2.7. Устойчивость отвалов	114
2.8. Расчет обводненных откосов	122
2.9. Об устойчивости вертикального откоса	125
2.10. Критерий разрушения твердых тел	127
2.11. Сравнительный анализ критериев прочности	134
2.12. Теория пластичности	137
2.13. Устойчивость откосов в поле действия тектонических и сейсмических напряжений	144
Выводы по главе 2	152
Список литературы к главе 2	154
3. ГЕОМЕХАНИКА ПОДЗЕМНЫХ РАЗРАБОТОК	158
3.1. Об исходном напряженном состоянии массива	158
3.2. Метод определения угловых параметров процесса сдвижения	161
3.3. Определение нагрузок на крепь горизонтальной горной выработки	169
3.4. Расчет элементов систем подземной разработки	176
3.5. Механизм формирования горного давления в поле действия тектонических напряжений	193
Выводы по главе 3	198
Список литературы к главе 3	199
4. РАСЧЕТНЫЕ ПРОЧНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГОРНЫХ МАССИВОВ	201
4.1. Общие сведения	201
4.2. Сцепление массива скальных трещиноватых горных пород	204
4.3. Нормативное значение коэффициента запаса устойчивости	209
Выводы по главе 4	219
Список литературы к главе 4	220
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	222

ОБ АВТОРЕ

Жабко Андрей Викторович кандидат технических наук: с 2009 г. – старший преподаватель кафедры маркшейдерского дела Уральского государственного горного университета (УГГУ), с 2010 г. – доцент. Член IV комиссии Международного общества по маркшейдерскому делу (International Society for Mine Surveying (ISM)). Награжден дипломом «Преподаватель года» Свердловской области по направлению «Технические науки», 2010. Автор и соавтор более 40 научных работ (статей), двух монографий. Руководитель и ответственный исполнитель ряда научно-исследовательских работ, выполняемых как на территории России, так и за рубежом (Монголия, Казахстан), связанных с обеспечением эффективной и безопасной эксплуатации гидротехнических сооружений (дамб хвостохранилищ), месторождений твердых полезных ископаемых (геомеханический мониторинг и



обеспечение устойчивости бортов карьеров и отвалов), а также нефтяных месторождений (предрасчет сдвижений земной поверхности вследствие падения пластового давления, геомеханический мониторинг).

Родился 26 сентября 1981 года в г. Гай Оренбургской области. С 1983 по 1998 гг. проживал и учился в Ковдорском районе Мурманской области (Кольский полуостров). В 1999 году окончил среднюю школу №16 в г. Дегтярске Свердловской области. В том же году поступил на очное отделение в Уральскую государственную горно-геологическую академию (ныне Уральский государственный горный университет) на специальность «Маркшейдерское дело». Губернаторский стипендиат 2003 – 2004 гг. В 2003 году получил диплом бакалавра с отличием и продолжил обучение в магистратуре. В 2005 году защитил магистерскую диссертацию на тему: «Выбор расчетных показателей при оценке устойчивости бортов карьеров» и получил степень магистра техники и технологий по направлению «Горное дело», диплом с отличием. В этом же году поступил в очную аспирантуру при кафедре маркшейдерского дела УГГУ. Научный руководитель – профессор, доктор технических наук, крупный специалист в области геомеханики открытых горных работ **Туринцев Юрий Иванович** (15.08.1931 – 09.09.2009). 15 октября 2009 года защитил кандидатскую диссертацию на тему: «Исследование закономерностей, определяющих геометрию поверхности скольжения в откосах и расчетные характеристики в изотропных горных массивах».

Основные научные интересы связаны с оценкой устойчивости откосов бортов карьеров, отвалов и дамб хвостохранилищ, сдвижением горных пород, теориями прочности горных пород и прочностными характеристиками трещиноватых горных массивов.

ВВЕДЕНИЕ

Отличительной особенностью геотехнических сооружений (карьеры, отвалы, дамбы, насыпи, шахты, тоннели и т. д.) являются их размеры (сотни метров в высоту и километры в плане), чрезвычайно высокая стоимость (миллионы долларов), высокая изменчивость физико-механических характеристик (сотни процентов) и, как следствие, высокая степень неопределенности при принятии решений о параметрах сооружения при их проектировании, а значит, потенциальная угроза разрушения при эксплуатации. При занижении предельных геометрических параметров сооружения резко возрастает стоимость его строительства. Ошибка при проектировании геотехнических сооружений может привести к гибели сотен людей, создать условия невозможности или нецелесообразности разработки месторождений полезных ископаемых. Помимо уже отмеченных трудностей, связанных со сложным статистическим распределением свойств горного массива, добавляется проблема слабой изученности закономерностей протекания геомеханических явлений, факторов, определяющих предельные геометрические параметры откосов, угловые параметры процесса сдвига горных пород при подземной разработке месторождений и т. д. Таким образом, актуальность рассматриваемой проблемы обосновывается безопасностью эксплуатации геотехнического сооружения и экономической эффективностью производства и эксплуатации, измеряемыми человеческими жизнями и миллионами долларов соответственно.

К сожалению, среди некоторых специалистов-геомехаников сформировалось мнение о том, что геомеханика занимает особое положение среди других наук, в силу сложности геомеханических процессов, и поэтому разрабатываемые расчетные схемы зачастую наделены допущениями, которые противоречат фундаментальным законам механики. Основопологающим критерием представительности модели, по их мнению, является сходство с наблюдаемыми в натуре явлениями (зачастую необъяснимое или случайное). Как результат таких воззрений, полученные уравнения и модели не удовлетворяют фундамен-

ным законам физики и механики. Примеров абсурдности результатов в геомеханике – хоть отбавляй. Вот некоторые из них. Поверхность скольжения для идеально сыпучих пород в предельном равновесии не совпадает с откосом, для некоторых углов откоса и внутреннего трения расчетная ширина призмы обрушения получается отрицательной, в однородных массивах поверхность скольжения имеет вогнутую, плоскую и даже выпуклую форму (см., например, Г. Л. Фисенко. Устойчивость бортов карьеров и отвалов, 1965 г.), однако современная наука не просто не обосновывает данное явление, но даже не ставит такую задачу в принципе. Существует полное и вполне очевидное соответствие явлений сдвигения горных пород при подземной разработке месторождений и оползневыми процессами в откосах бортов карьеров. Размер зоны сдвигения на земной поверхности определяется так называемыми углами разрывов, однако значения последних могут значительно превышать величину “максимально возможного” угла наклона поверхности скольжения, что не может быть объяснено с позиций существующей теории. На данные очевидные несоответствия вообще не обращается внимания, или “списывается” это на чрезвычайную сложность и невозможность достаточно полного изучения геомеханической среды – массива горных пород.

Таким образом, важнейшая фундаментальная проблема (прочность и устойчивость горного массива) подменяется частными прикладными задачами (расчет устойчивости откоса способом “алгебраического сложения сил” по круглоцилиндрической поверхности скольжения), решение которых, очевидно, не может быть дано с единых методологических позиций. Как следствие этого отсутствует возможность получения универсальных расчетных алгоритмов и возникает высокая погрешность прогнозирования предельных параметров, то есть утрачивается общность подхода к научной проблеме.

Новизна предлагаемого подхода к данной проблеме заключается в общности цели и решаемых для ее достижения задач. Основой данного подхода являются интегральное, дифференциальное и вариационное исчисления при стро-

гом выполнении фундаментальных законов физики, теоретической механики и механики деформируемого твердого тела.

В последнее время аналитические методы исследования геомеханических процессов стали вытесняться методами математического моделирования, прежде всего речь идет о реализации задач теорий упругости и пластичности методом конечных элементов. Однако заметим, что фундаментальное аналитическое решение является той базой, на которую необходимо опираться при разработке новых и совершенствовании существующих моделей, при определении границ их применимости.

В зависимости от решаемых геомеханических задач, способа разработки месторождений или же наблюдаемых явлений, горный массив рассматривается как совокупность абсолютно твердых тел (жесткопластическая модель массива, механика дискретных сред), упругой, пластической или вязкой сред (механика сплошных сред). Как известно, движение и равновесие абсолютно твердых тел изучает теоретическая механика, а деформации под действием приложенных сил и связей – механика деформируемого твердого тела. Поэтому в первой главе монографии излагаются сведения и примеры задач, необходимые для понимания дальнейших рассуждений, а также общей методологии построения расчетных схем механики в общем и геомеханики в частности. В этой связи первую главу нельзя считать сугубо справочной, ее общая идея состоит в доказательстве вариационной природы механических процессов и явлений. Последующие главы посвящены решению геомеханических задач открытой и подземной разработки месторождений, а также вопросам, связанным с прочностью трещиноватых горных массивов.

Автор не стремился рассмотреть все многообразие вопросов, возникающих в геомеханике, а лишь преследовал цель показать, как могут быть решены основные классические задачи геомеханики, не имеющие окончательного разрешения на сегодняшний день.

1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ МЕХАНИКИ И МАТЕМАТИКИ

1.1. Основы вариационного исчисления

Основные леммы вариационного исчисления

Лемма 1 (Лагранж). Пусть непрерывная функция $M(x)$ обладает тем свойством, что, какова бы ни была функция $\eta(x)$, имеющая непрерывную производную и обращающаяся в нуль в точках a и b , всегда

$$\int_a^b M(x)\eta(x)dx = 0.$$

При этих условиях $M(x) = 0$ при всех x ($a \leq x \leq b$).

Лемма 2 (Дюбуа-Реймон). Если для непрерывной функции $M(x)$ и любой непрерывной функции $\eta(x)$, обладающей непрерывной производной, для которой $\eta(a) = \eta(b) = 0$, интеграл

$$\int_a^b M(x)\eta'(x)dx = 0,$$

то $M(x)$ постоянна во всем интервале $[a, b]$.

Простейшая задача вариационного исчисления

Пусть функция $F(x, y, y')$ имеет непрерывные частные производные по всем аргументам до второго порядка включительно.

Среди всех функций $y(x)$, имеющих непрерывную производную и удовлетворяющих граничным условиям:

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \tag{1.1}$$

найти ту функцию, которая доставляет слабый экстремум функционалу

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')dx \rightarrow \text{extr}, \tag{1.2}$$

где J – функционал; a, b – пределы интегрирования; x – аргумент; y, y' – неизвестная функция и ее производная.

Другими словами, простейшая задача вариационного исчисления состоит в отыскании слабого экстремума функционала вида (1.2) на множестве всех гладких кривых, соединяющих две заданные точки: $P_1 = (a, A)$ и $P_2 = (b, B)$, то есть при выполнении условия (1.1).

Теорема 1. Для того чтобы функционал (1.2), определенный на множестве функций $y = y(x)$, имеющих непрерывную первую производную и удовлетворяющих граничным условиям (1.1), достигал на данной функции $y(x)$ экстремума, необходимо (это условие необходимо для слабого экстремума. Так как всякий сильный экстремум является в то же время и слабым, то любое условие, необходимое для слабого экстремума, необходимо и для сильного), чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \quad (1.3)$$

где F_y – частная производная подынтегрального выражения по y ; $F_{y'}$ – частная производная подынтегрального выражения по y' .

Пример. Задача о брахистохроне. Между точками, расположенными на различной высоте, нужно провести соединяющую их кривую таким образом, чтобы время падения тела, движущегося без трения вдоль кривой под действием силы тяжести, было минимальным.

Для случая, когда тело находится в момент начала падения в состоянии покоя, из закона сохранения энергии следует: $mgy = \frac{mv^2}{2}$, откуда для скорости

имеем $\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{2gy}$, и тем самым время падения t (с учетом $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$)

выражается интегралом:

$$t[y(x)] = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx.$$

Уравнение Эйлера для данного функционала имеет следующий вид:
 $2yy'' + y'^2 + 1 = 0$, а его решение в параметрической форме
 $x - C_2 = \frac{C_1}{2}(2\tau - \sin 2\tau)$, $y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2\tau)$. Данная система уравнений представляет собой семейство циклоид.

Обобщения простейшей задачи

1. Функционалы, зависящие от производных высших порядков.

Пусть имеем функционал

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx, \quad (1.4)$$

где F – функция, дифференцируемая $(n+2)$ раза по всем аргументам $y(x) \in C_n[x_0, x_1]$, а граничные условия имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \\ y(x_1) = y_1, \quad y'(x_1) = y'_1, \dots, y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Экстремальными функционала (1.4) при условиях (1.5) являются интегральные кривые уравнения Эйлера – Пуассона:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0. \quad (1.6)$$

2. Функционалы, зависящие от m функций.

Для функционала, зависящего от m функций $y_1(x), \dots, y_m(x)$:

$$J[y_1, y_2, \dots, y_m] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \dots, y_m, y'_1, y'_2, \dots, y'_m) dx \quad (1.7)$$

при граничных условиях вида

$$y_k(x_0) = y_k^0, \quad y_k(x_1) = y_k^{(1)} \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad (1.8)$$

экстремали находятся из следующей системы дифференциальных уравнений второго порядка:

$$F_{y_k} - \frac{d}{dx} F_{y'_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad (1.9)$$

называемых системой уравнений Эйлера.

3. *Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных.*

Рассмотрим функционал вида:

$$J[z(x, y)] = \iint_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy, \quad (1.10)$$

где F – трижды дифференцируемая функция своих аргументов, и предположим, что ищется функция $z = z(x, y)$, непрерывная вместе со своими производными до второго порядка включительно в области D , принимающая на границе Γ области D заданные значения и дающая экстремум функционалу (1.10).

Если на поверхности $z = z(x, y)$ реализуется экстремум функционала (1.10), то функция $z = z(x, y)$ удовлетворяет уравнению Эйлера – Остроградского:

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x}\{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y}\{F_q\} = 0, \quad (1.11)$$

где $\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\}$ и $\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\}$ – полные частные производные по x и по y соответственно:

$$\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\} = F_{px} + F_{pz} \frac{\partial z}{\partial x} + F_{pp} \frac{\partial p}{\partial x} + F_{pq} \frac{\partial q}{\partial x}; \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\{F_q\} = F_{qy} + F_{qz} \frac{\partial z}{\partial y} + F_{qp} \frac{\partial p}{\partial y} + F_{qq} \frac{\partial q}{\partial y}. \quad (1.13)$$

Здесь для краткости обозначено $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$.

Уравнение (1.11) представляет собой необходимое условие экстремума функционала (1.10). Оно является уравнением второго порядка в частных производных, причем ищется решение $z = z(x, y)$, принимающее на границе Γ заданные значения.

Вариационные задачи с подвижными границами

Простейшая задача с подвижными границами.

Пусть $F = F(x, y, y')$ – трижды дифференцируемая функция своих аргументов, и пусть в плоскости XOY заданы две кривые:

$$y = \varphi(x) \quad \text{и} \quad y = \psi(x) \quad (1.14)$$

где $\varphi(x) \in C_1[a, b]$ и $\psi(x) \in C_1[a, b]$.

Рассмотрим функционал

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx, \quad (1.15)$$

определенный на гладких кривых $y = y(x)$, концы которых $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$ лежат на заданных линиях (1.14), так что $y_0 = \varphi(x_0)$, $y_1 = \psi(x_1)$. Требуется найти экстремум функционала (1.15).

Теорема. Пусть кривая $y = y(x)$ дает экстремум функционалу

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

среди всех кривых класса C_1 , соединяющих две произвольные точки двух данных кривых $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$. Тогда кривая y является экстремалью, и в концах $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$ кривой y выполняются условия трансверсальности:

$$\left. \begin{aligned} [F + (\varphi' - y')F_{y'}] \Big|_{x=x_0} &= 0, \\ [F + (\psi' - y')F_{y'}] \Big|_{x=x_1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

Рассмотрим условия трансверсальности для более общего случая, когда уравнения кривых γ_1 и γ_2 заданы в неявной форме:

$$\varphi(x, y) = 0, \quad \psi(x, y) = 0.$$

Мы будем при этом предполагать, что функции φ и ψ имеют непрерывные частные производные и что $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 > 0$ и $\psi_x^2 + \psi_y^2 > 0$. В этом случае условия трансверсальности примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{F - y'F_{y'}}{\varphi_x} \right]_{x=x_0} &= \left[\frac{F_{y'}}{\varphi_y} \right]_{x=x_0} \\ \left[\frac{F - y'F_{y'}}{\psi_x} \right]_{x=x_1} &= \left[\frac{F_{y'}}{\psi_y} \right]_{x=x_1} \end{aligned} \right\}. \quad (1.17)$$

В частности, если кривые γ_1 и γ_2 суть прямые, параллельные оси y : $x = x_0$, $x = x_1$, то условия трансверсальности примут вид:

$$\left[F_{y'} \right]_{x=x_0} = 0, \quad \left[F_{y'} \right]_{x=x_1} = 0. \quad (1.18)$$

Разрывные задачи. Односторонние вариации

Разрывные задачи. Экстремаль $y = y(x)$ функционала

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad (1.19)$$

является дважды непрерывно дифференцируемой функцией, если производная $F_{y'y'}(x, y(x), y'(x))$ не обращается в нуль. Встречаются, однако, вариационные задачи, в которых экстремум достигается на кривой, являющейся лишь кусочно-гладкой.

Разрывные задачи первого рода. Рассмотрим задачу о нахождении экстремума функционала (1.19), считая, что допустимые кривые удовлетворяют граничным условиям:

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1 \quad (1.20)$$

и могут иметь излом в некоторой точке с абсциссой c ($x_0 < c < x_1$). Этот излом возможен лишь там, где $F_{y'y'} = 0$. В точке излома экстремаль должна удовлетворять условиям Вейерштрасса – Эрдмана:

$$\left. \begin{aligned} F_{y'} \Big|_{x=c-0} - F_{y'} \Big|_{x=c+0} &= 0, \\ (F - y' \cdot F_{y'}) \Big|_{x=c-0} - (F - y' \cdot F_{y'}) \Big|_{x=c+0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Вместе с условиями непрерывности искомой экстремали они позволяют определить координаты точки излома.

На каждом из двух отрезков $[x_0, c]$ и $[c, x_1]$ экстремаль должна удовлетворять уравнению Эйлера, т. е. дифференциальному уравнению второго порядка. При решении этих двух уравнений получаются четыре произвольные постоянные, которые, вообще говоря, находятся из граничных условий (1.20) и (1.21) в точке излома.

Разрывные задачи второго рода. Разрывными задачами второго рода называют задачи на отыскание экстремума функционала:

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx; \quad (1.22)$$

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2, \quad (1.23)$$

в котором подынтегральная функция разрывна.

Пусть, например, $F(x, y, y')$ терпит разрыв вдоль линии $y = \Phi(x)$ и пусть $F(x, y, y')$ равна $F_1(x, y, y')$ по одну сторону линии: $y = \Phi(x)$ и равна $F_2(x, y, y')$ – по другую.

В случае существования ломаной экстремали последняя состоит из кусков экстремалей $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, имеющих общую точку $(c, \Phi(c))$ на линии разрыва, где $c \in (x_1, x_2)$. Для определения ломаной экстремали получаем два дифференциальных уравнения Эйлера, общие решения которых содержат четыре произвольных постоянных – C_1, C_2, C_3, C_4 . Для нахождения этих постоянных, а также абсциссы c точки встречи экстремали с кривой $y = \Phi(x)$ имеем: 1) два граничных условия (1.23); 2) два условия, требующие, чтобы ординаты концов экстремалей в точке стыка были равны ординате кривой $y = \Phi(x)$ и, наконец, 3) условие на стыке:

$$F_1 + (\Phi' - y_1') F_{1,y_1'} \Big|_{x=c-0} = F_2 + (\Phi' - y_2') F_{2,y_2'} \Big|_{x=c+0}. \quad (1.24)$$

Этих условий, вообще говоря, достаточно для нахождения ломаной экстремали.

Пример. Задача о преломлении луча света в постановке принципа Ферма. В среде I свет распространяется с постоянной скоростью v_1 , в среде II – с постоянной скоростью v_2 . Среда I отделена от среды II кривой $y = \Phi(x)$.

Вывести закон преломления луча света, идущего из точки A среды I в точку B среды II, зная, что луч проходит этот путь в наименьший промежуток времени (принцип Ферма).

Решение. Задача сводится к нахождению минимума интеграла

$$J = \int_a^c \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_1} dx + \int_c^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_2} dx,$$

так как первый и второй интегралы дают время, нужное для перехода луча из точки A до линии раздела и от линии раздела до точки B .

Имеем разрывную задачу второго рода: здесь

$$F_1 = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_1}; \quad F_2 = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v_2}.$$

Нахождение кусков экстремалей сводится к разысканию экстремалей функционала:

$$\int \sqrt{1+y'^2} dx,$$

которые, как известно, есть прямые. Следовательно,

$$y_1 = mx + n, \quad y_2 = px + q.$$

Запишем условие (1.24):

$$F_1 - y_1' \frac{\partial F_1}{\partial y_1'} = \frac{\sqrt{1+y_1'^2}}{v_1} - \frac{y_1'^2}{v_1 \sqrt{1+y_1'^2}} = \frac{1}{v_1 \sqrt{1+y_1'^2}};$$

$$F_2 - y_2' \frac{\partial F_2}{\partial y_2'} = \frac{1}{v_2 \sqrt{1+y_2'^2}}.$$

Подставляя эти выражения в (1.24), найдем:

$$\frac{1 + \Phi' y_1'}{v_1 \sqrt{1 + y_1'^2}} = \frac{1 + \Phi' y_2'}{v_2 \sqrt{1 + y_2'^2}}.$$

Пусть γ – угол, образованный касательной к линии раздела в точке c с осью Ox , α – угол левого луча с осью Ox ; β – угол правого луча. Тогда $\Phi' = \operatorname{tg}\gamma$, $y_1' = \operatorname{tg}\alpha$, $y_2' = \operatorname{tg}\beta$ и полученное условие примет вид:

$$\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma}{v_1 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{1 + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma}{v_2 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta}}$$

или

$$\frac{\cos(\gamma - \alpha)}{v_1} = \frac{\cos(\gamma - \beta)}{v_2},$$

где $(\gamma - \alpha)$ и $(\gamma - \beta)$ – углы между лучами и касательной к линии раздела. Вводя вместо них углы φ и θ между нормалью к линии раздела и лучами, падающим и преломленным, получим:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \theta} = \frac{v_1}{v_2} = \operatorname{const},$$

т. е. известный закон преломления луча света.

Односторонние вариации. Ищется экстремум функционала:

$$J[y] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y') dx; \quad (1.25)$$

$$y(x_1) = y_1, \quad y(x_2) = y_2 \quad (1.26)$$

при условии:

$$y - \varphi(x) \geq 0 \quad \text{или} \quad (y - \varphi(x) \leq 0) \quad (1.27)$$

(ограничивающие условия могут быть и более сложного вида).

В этом случае искомая экстремаль может состоять из кусков экстремалей, лежащих в области (1.27), и кусков границы $y = \varphi(x)$ этой области. В точках стыка указанных кусков искомая экстремаль может быть гладкой, но может иметь и угловые точки.

Условие в точке стыка имеет вид:

$$\left[F(x, y, y') - F(x, y, \varphi') + (\varphi' - y') F_{y'}(x, y, y') \right] \Big|_{x=\bar{x}} = 0. \quad (1.28)$$

Если $F_{y'y'} \neq 0$, то в точке стыка $M(\bar{x}, \bar{y})$ экстремаль касается границы $y = \varphi(x)$ области.

Условный экстремум

Изопериметрические задачи.

Теорема Эйлера. Если кривая $y = y(x)$ дает экстремум интегралу

$$J = \int_a^b F(x, y, y') dx$$

при условиях

$$K = \int_a^b G(x, y, y') dx = l,$$

$$y(a) = a_1, \quad y(b) = b_1$$

и если $y = y(x)$ не является экстремалью интеграла K , то существует константа λ , такая, что кривая $y = y(x)$ есть экстремаль функционала

$$L = \int_a^b H(x, y, y') dx,$$

где $H = F + \lambda G$.

Приведенная выше теорема показывает, что изопериметрическая задача вариационного исчисления приводится к простейшей задаче для функции $H = F + \lambda G$. Заметив, что от умножения подынтегральной функции на константу семейство экстремалей для интеграла останется тем же самым, мы можем функцию H записать в симметричной форме:

$$H = \lambda_1 F + \lambda_2 G,$$

где λ_1 и λ_2 суть константы. Такое представление функции H нам показывает, что функции F и G в выражении H фигурируют симметрично. Если исключить случай $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 0$, то семейство экстремалей будет одно и то же, будем ли мы искать экстремум интеграла J при условии, что интеграл K сохраняет постоянное значение или будем искать экстремум интеграла K при усло-

вии, что интеграл J сохраняет постоянное значение. В этом заключается принцип взаимности в его простейшей форме.

Пример (Задача Дидоны). Среди всех замкнутых кривых длины $2l$ найти ту, которая ограничивает наибольшую площадь.

Задача сводится к разысканию экстремума функционала:

$$J = \int_{-a}^a y(x) dx, \quad y(-a) = y(a) = 0,$$

при дополнительном условии:

$$K = \int_{-a}^a \sqrt{1 + y'^2(x)} dx = l, \quad l > 2a.$$

Решением поставленной задачи является окружность. Заметим, что в силу принципа взаимности, окружность является линией минимальной длины среди всех кривых, ограничивающих заданную площадь.

Общая задача Лагранжа

Пусть требуется найти экстремум интеграла

$$J = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, z, y', z') dx,$$

когда за класс допустимых линий принимаются пространственные кривые класса C_1 , удовлетворяющие дифференциальному соотношению

$$\varphi(x, y, z, y', z') = 0 \tag{1.29}$$

и удовлетворяющие на концах (т. е. при $x = x_1$, $x = x_2$) некоторым добавочным условиям. Тогда имеет место теорема, которую мы приведем без доказательства.

Теорема. Если кривая γ_0 дает экстремум функционалу J при условии (1.29) и если вдоль γ_0 одна из производных, $\varphi_{y'}$ или $\varphi_{z'}$, не обращается в нуль, то существует функция переменной x , $\lambda(x)$, такая, что γ_0 будет интегральной кривой системы уравнений:

$$H_y - \frac{d}{dx} H_{y'} = 0; \quad H_z - \frac{d}{dx} H_{z'} = 0, \quad (1.30)$$

где $H = F + \lambda\varphi$.

Эта теорема дает метод для определения искомой кривой γ_0 . В самом деле, решая совместно уравнения (1.29) и (1.30), мы найдем неизвестные функции y, z, λ .

Пример. Геодезические линии. Геодезической линией называется линия наименьшей длины, лежащая на данной поверхности и соединяющая две точки данной поверхности. То есть рассматривается не евклидово пространство (кратчайшее расстояние между двумя точками – прямая), а n -мерное риманово пространство. Докажем, что в каждой точке любой геодезической линии на поверхности вращения произведение радиуса параллели на синус угла между геодезической и меридианом есть величина постоянная (теорема Клеро).

Уравнение поверхности вращения в цилиндрических координатах:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = f(\rho).$$

Дифференциал длины дуги на поверхности вращения:

$$dS = \sqrt{\rho^2 + (1 + f_\rho'^2)} \rho' d\varphi.$$

Геодезические линии на поверхности являются экстремальми функционала:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\rho^2 + (1 + f_\rho'^2)} \rho' d\varphi.$$

Подынтегральная функция не содержит явно φ , поэтому сразу получаем:

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{dS} = \rho \sin \omega = \text{const},$$

что и требовалось доказать.

Связь между изопериметрической задачей и задачей Лагранжа. Изопериметрическую задачу можно свести к задаче Лагранжа (задача же Лагранжа к изопериметрической задаче не сводится).

Пусть требуется найти экстремум от интеграла

$$J = \int_a^b F \left(x; y_1, y_1', y_1'', \dots, y_1^{(k_1)}; y_2, y_2', y_2'', \dots, y_2^{(k_2)}; y_n, y_n', \dots, y_n^{(k_n)} \right) dx$$

при соответственных условиях на границе и дополнительных условиях:

$$K_i = \int_a^b F_i(x; y_1, y_1', \dots; y_n, y_n', \dots) dx = l_i \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Обозначив дополнительные условия через

$$\Psi_i(t) = \int_a^t F_i dx \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

имеем:

$$\Psi_i'(x) = F_i(x; y_1, y_1', \dots; y_n, y_n', \dots), \quad (1.31)$$

причем

$$\Psi_i(a) = 0, \quad \Psi_i(b) = l_i \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (1.32)$$

Итак, наша изопериметрическая задача эквивалентна задаче Лагранжа: найти систему $(n + m)$ функций: $y_1, y_2, \dots, y_n; \Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m$, связанных соотношениями (1.31), удовлетворяющими соответственным условиям на границах для функций y_i и условиям (1.32) для функций Ψ_i , такую, чтобы она при заданных

условиях реализовала экстремум интеграла $\int_a^b F dx$.

В заключение отметим, что если целевое выражение представляет собой некую функцию функционалов, то вначале отыскивается условие экстремума самой функции по правилам обычного дифференциального исчисления. Например, если необходимо найти экстремум выражения:

$$\frac{\int_a^b F(x, y, y') dx}{\int_a^b \Phi(x, y, y') dx} \rightarrow \text{extr},$$

то оно эквивалентно выражению: $\delta \int_a^b \frac{[B \cdot F(x, y, y') - A \cdot \Phi(x, y, y')]}{B^2} dx = 0$, где A

и B – постоянные, равные значениям определенных интегралов; δ – знак вариации функционала.

1.2. Фундаментальные законы и принципы механики

1.2.1. Вариационные принципы теоретической механики

История механики и физики – это история попыток объяснить происходящее в окружающем мире при помощи небольшого числа универсальных законов и общих принципов. Наиболее удачные и плодотворные попытки связаны с идеей о том, что явления, которые мы наблюдаем, обладают некоторыми экстремальными свойствами и искомые общие принципы имеют вариационный характер, т. е. утверждают, что в реально осуществляющихся процессах некоторые величины достигают своего максимального или минимального значения.

Эта будоражащая воображение идея возникла давно. Еще Аристотель писал, что природа во всех своих проявлениях идет легчайшим путем, с наименьшими затратами (Аристотель, как отмечает Эйлер, по-видимому, почерпнул эту мысль у своих предшественников).

Первую четкую формулировку вариационного принципа применительно к физической проблеме удалось дать в 1662 г. французскому математику Пьеру Ферма. Ферма исследовал закон преломления света на границе двух сред с различными оптическими свойствами. До Ферма закон преломления света был рассмотрен Декартом. Декарт в своих рассуждениях использовал предположение, что в более плотной среде свет распространяется с большей скоростью (Лейбниц так оправдывал впоследствии гипотезу Декарта. Луч света в плотной среде (стекле) рассеивается меньше, чем в разреженной (воздухе), и, подобно реке в более узком русле, в плотной среде движется быстрее). Это предположение показалось Ферма неправдоподобным, и он решил пересмотреть вывод Декарта. В основу своих рассуждений Ферма положил постулат: “Природа действ-

вует наиболее легкими и доступными путями”. Исходя из этого он принял, что свет, распространяясь из точки A в точку B , выберет такой путь, чтобы время прохождения его оказалось минимальным.

В 1696 г. в лейпцигском журнале “Acta Eruditorum” Иоганн Бернулли поместил короткую заметку. Приведем ее полностью.

“В вертикальной плоскости даны две точки A и B . Определить путь AMB , спускаясь по которому под влиянием собственной тяжести тело M , начав двигаться из точки A , дойдет до другой точки B за кратчайшее время.

Для того чтобы вызвать интерес со стороны любителей подобных вопросов и побудить их охотнее предпринять попытку разрешения указанной задачи, довожу до их сведения, что эта задача не сводится к пустой умственной спекуляции, лишенной какого бы то ни было практического значения, как это может кому-либо показаться. В действительности она представляет очень большой практический интерес и кроме механики также и для других дисциплин, что может всем показаться неправдоподобным.

Между прочим (указываю это с целью предупредить возможное неправильное суждение), хотя прямая AB и является кратчайшей линией между крайними точками A и B , тем не менее тело проходит ее не в кратчайшее время и существует кривая AMB , хорошо известная геометрам. Я назову эту линию, если по истечении текущего года никто другой ее не назовет”.

Свой ответ Бернулли отправил Лейбницу с тем, чтобы тот через год опубликовал его.

Эта, по словам Лейбница, “столь прекрасная и до сих пор неслыханная задача”, которая “своей красотой влечет к себе, как яблоко влекло Еву”, взволновала многих ученых. Ее решением занимались, в частности, Якоб Бернулли и Ньютон. Искомой кривой оказалась циклоида (задача о брахистохроне).

В полученных решениях не удалось дать общих методов исследования подобных задач. Они были построены спустя пятьдесят лет учеником Иоганна Бернулли Леонардом Эйлером, заложившим основы современного вариационного исчисления.

После работ Ферма и Бернулли с новой остротой встал вопрос: “Не происходит ли движение тел так, что некоторая величина для реально осуществляющего движения достигает минимума?” или на языке XVIII века: “Тело, перемещаясь из одного положения в другое, платит, и движение таково, что эта плата должна быть наименьшей”.

Первая формулировка вариационного принципа в механике была дана в 1744 г. Пьером Мопертюи. Согласно принципу Мопертюи, в истинном движении тела произведение его массы на скорость и на путь минимально. Эту величину $I = mvs$ Мопертюи, следуя Лейбницу, назвал действием.

Мопертюи, ставший президентом Берлинской Академии наук, объявил принцип наименьшего действия общим законом природы и основным доказательством бытия божьего.

Математическое содержание в принцип Мопертюи внес Л. Эйлер. В частности, Эйлер понял, что выражение для действия, предложенное Мопертюи, пригодно только для малых участков пути ds , а для всего пути надо просуммировать все малые приращения действия.

Таким образом, для действия следует написать:

$$I = \int mv ds, \text{ или, так как } v = \frac{ds}{dt}, I = \int_{t_0}^{t_1} mv^2 dt.$$

Подынтегральное количество с точностью до множителя совпадает с кинетической энергией (Лейбниц называл его живой силой, в отличие от давления – “мертвой” силы).

В годы президентства Мопертюи в “Acta Eruditorum” Кенигом были опубликованы письма, якобы принадлежащие перу покойного Лейбница, из которых можно было заключить, что Лейбницу был известен принцип экстремальности действия, причем утверждалось, что действие может достигать не только минимального, но и максимального значения. Возник спор, к которому примешались вопросы приоритета, философские и моральные проблемы. В бурные дискуссии включились не только ученые, но также философы, короли, при-

дворные и писатели. Один из отголосков этих дискуссий дошел до нас в виде памфлета Ф. Вольтера “История доктора Акакия и уроженца Сен-Мало”.

В результате выкристаллизовалась точка зрения, согласно которой в некоторых движениях действие достигает минимального значения, а в других – максимального значения. На языке XVIII века это звучало так: “Природа является бережливой матерью, которая обходится наименьшим там, где это возможно, но там, где этого нельзя достичь, она платит честно и столько, сколько возможно, чтобы не прослыть скрягой” (письмо Г. В. Крафта к Л. Эйлеру от 28 августа 1753 г.).

Принципы теоретической механики можно разделить на вариационные и невариационные. К невариационным принципам относятся законы механики, например закон сохранения энергии, закон всемирного тяготения и т. п.

Вариационные принципы теоретической механики представляют собой выраженные языком математики условия, которые отличают истинное (действительное) движение системы от других кинематически возможных, то есть допускаемых связями движений. Вариационные принципы делятся на дифференциальные и интегральные. Первые дают критерий истинного движения для данного фиксированного момента времени, а вторые – на конечном интервале времени.

Перейдем к рассмотрению дифференциальных принципов. Исторически первым дифференциальным вариационным принципом является принцип возможных перемещений (Лагранж, 1788. Обобщение принципа на случай не удерживающих связей дано М. В. Остроградским в работах 1838-1842 гг.). В современной формулировке он звучит следующим образом: *для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю:*

$$\sum \delta A^a = \sum F_v \delta r_v = 0, \quad (1.33)$$

где F_v – вектор обобщенной силы; δr_v – вектор возможных перемещений.

Связи называются идеальными, если сумма элементарных работ их реакций на возможном перемещении равна нулю. Возможное (виртуальное) перемещение – это перемещение, допускаемое наложенными на систему связями.

Условие (1.33) означает ортогональность векторов обобщенной силы и возможных перемещений, этим действительное равновесное состояние отличается от множества возможных.

Дальнейший толчок развитию вариационных представлений в механике дал Даламбер, который сформулировал свой известный принцип, позволяющий рассматривать задачи динамики с позиций статики: *если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних и внутренних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система будет уравновешенной и к ней можно применять все уравнения статики.*

Применяя принцип возможных перемещений совместно с принципом Даламбера, получим так называемый принцип Даламбера-Лагранжа (1743 г.) или общее уравнение динамики: *истинное движение из всех кинематически возможных выделяется тем, что для него и только для него в данный момент времени сумма работ активных сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях равна нулю:*

$$\sum_{v=1}^N (F_v + R_v - m_v w_v) \delta r_v = 0, \quad (1.34)$$

где m_v – масса точки; w_v – ускорение точки в инерциальной системе отсчета; F_v, R_v – равнодействующие активных сил и реакций связей (если связи не являются идеальными), приложенных к точке; δr_v – возможное перемещение системы.

В 1903 году Журдену удалось преобразовать общее уравнение динамики для идеальных связей к виду:

$$\sum_{v=1}^N (F_v - m_v w_v) \delta v_v = 0, \quad (1.35)$$

где δv_v – возможные скорости.

Вариационные принципы Даламбера-Лагранжа и Журдена не связаны с понятием экстремальности, а называются вариационными потому, что в них входят вариации – виртуальные перемещения. Гаусс предложил замечательную модификацию принципа Даламбера-Лагранжа, которая вводит в этот принцип понятие минимальности некоторой величины. Рассмотрим принцип Гаусса более подробно.

В 1829 году в журнале “Крелле” (Crelle Journal für die reine Mathematik) был опубликован мемуар Гаусса под названием “Об одном новом общем принципе механики” (Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik).

Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) – крупнейший математик Германии первой половины XIX века. В его научной работе сочетались исключительно глубокие исследования в области чистой математики (алгебра, теория чисел, теория эллиптических функций, дифференциальная геометрия поверхностей, неевклидова геометрия и т. д.) с не менее глубокими исследованиями в области приложений математики к задачам астрономии, высшей геодезии, теории магнетизма и др. Высокие научные заслуги Гаусса получили всеобщее признание в ученом мире Европы. В частности, Гаусс – член-корреспондент Петербургской академии наук с 1802 по 1824 гг. и ее иностранный почетный член с 1824 года.

Упомянутый мемуар Гаусса состоял всего из четырех страниц текста. Это была его единственная работа по общей механике. В ней сформулирован новый принцип механики, который впоследствии стали называть принципом наименьшего принуждения или принципом Гаусса. Гаусс отмечал, что существенно новый принцип механики уже не может быть найден, но всегда интересно и поучительно исследовать законы природы с новой точки зрения, придем ли мы при этом к более простой трактовке того или иного частного вопроса или достигнем большей точности формулировок. Вот такая новая точка зрения и предложена в принципе наименьшего принуждения.

Этот принцип является наиболее общим принципом механики. Вместе с тем он наиболее прост при использовании. Область приложений принципа Гаусса весьма широка. Он применим в задачах механики, динамике сложных

управляемых систем, динамике живых организмов, квантовой физике, теории гравитации и т. д.

Из-за общности, красоты, простоты и наглядности принципа наименьшего принуждения его без преувеличения можно назвать жемчужиной теоретической механики. “Насколько я знаю, – писал выдающийся французский математик Ж. Бертран, – не существует ни одной общей теоремы динамики, которая казалась бы более способной вызвать восхищение тонкого ума, но еще мало искусственного в аналитических преобразованиях и породить у него желание изучить науку, которая позволила бы ему ясно воспринять ее доказательство”.

Для формулировки принципа Гаусса следует предварительно дать необходимые определения и понятия из теоретической механики.

Рассмотрим систему материальных точек P_ν , $\nu=1,2,\dots,N$, с массами m_ν , радиусы-векторы и прямоугольные декартовы координаты которых в неподвижной системе координат обозначим через r_ν и x_ν, y_ν, z_ν , через v_ν и w_ν обозначим скорость и ускорение точки P_ν . Очень часто при движении системы положения и скорости ее точек не могут быть произвольными. Ограничения, налагаемые на r_ν и v_ν , которые должны выполняться при любых действующих на систему силах, называются связями. Если на систему не наложены связи, то она называется свободной. Системы со связями называют несвободными.

В общем случае связь задается соотношением $f(r_1, \dots, r_n, v_1, \dots, v_n, t) \geq 0$. Если в нем реализуется только знак равенства, то связь называется удерживающей. Например, при движении точки P по сфере постоянного или переменного радиуса R с центром в начале координат имеем удерживающую связь $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$.

Если же в соотношении $f \geq 0$ реализуются как знак равенства, так и знак строгого неравенства, то связь называется неудерживающей. Пусть, например, две точки P_1 и P_2 связаны нерастяжимой нитью длины l . Здесь имеем неудерживающую связь, задаваемую соотношением

$l^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 \geq 0$, которое означает, что точки не могут находиться одна от другой на расстоянии, большем l .

Если соотношение, задающее связь, не содержит проекции скоростей точек системы (а содержит только координаты), то эта связь называется геометрической (или голономной), в противном случае связь называется дифференциальной. Иногда дифференциальную связь можно представить в виде зависимости между координатами точек системы и временем (как в случае геометрической связи). Тогда ее называют интегрируемой. Неинтегрируемую дифференциальную связь называют еще неголономной.

Точки несвободной системы не могут двигаться в пространстве совершенно произвольно. Их кинематически возможные (то есть допускаемые связями) координаты, скорости, ускорения и перемещения должны удовлетворять некоторым соотношениям, вытекающим из уравнений связей.

Принцип наименьшего принуждения дает признак, отличающий действительное движение от класса других движений, кинематически возможных при тех же условиях.

Гаусс дал следующую словесную формулировку своего принципа: “Движение системы материальных точек, связанных между собой произвольным образом и подверженных любым влияниям, в каждое мгновение происходит в наиболее совершенном, какое только возможно, согласии с тем движением, каким обладали бы эти точки, если бы все они стали свободными, то есть происходит с наименьшим возможным принуждением, если в качестве меры принуждения, примененного в течение бесконечно малого мгновения, принять сумму произведений масс каждой точки на квадрат величины ее отклонения от того положения, которое она заняла бы, если бы была свободной”.

Пусть P_v – положение v -й точки в момент времени t (рис. 1.1), а B_v – положение, которое заняла бы эта точка через промежуток времени dt , если бы в момент t система была освобождена от связей. Приведенный принцип утверждает, что положения A_v , которые займут точки системы в момент $(t + dt)$ в

действительном движении, выделяются между всеми положениями, допускаемыми связями, тем, что для них величина G , определяемая по формуле:

$$G = \sum_{v=1}^N m_v s_v^2, \quad (1.36)$$

где s_v – длина вектора $\overline{B_v A_v}$, имеет минимальное значение.

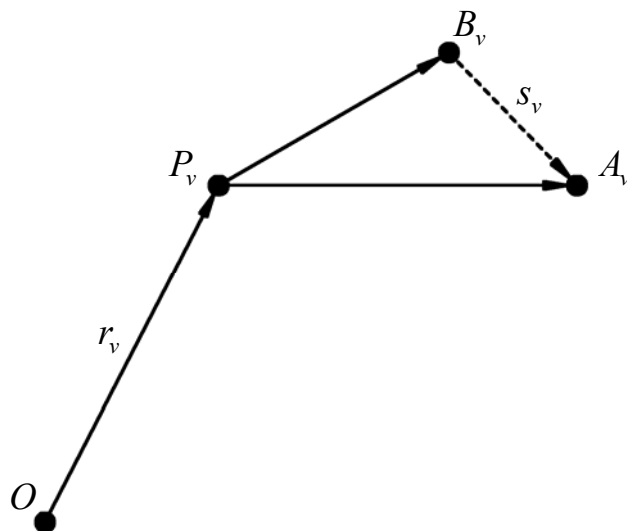


Рис. 1.1. Схема, поясняющая принцип Гаусса:

P_v – положение материальной точки в момент t ; A_v – положение точки несвободной системы в момент $(t + dt)$; B_v – положение точки системы, освобожденной от связей, в момент $(t + dt)$

Весьма интересно, что идея отклонения системы от свободного движения в форме (1.36) суммы величин, пропорциональных квадратам отклонений точек системы, заимствована Гауссом в им же построенной теории ошибок. Принцип наименьшего принуждения является механическим аналогом метода наименьших квадратов, лежащего в основе всех статистических исследований. Величина (1.36), будучи поделенной на массу всей системы, выразит квадрат среднего взвешенного из квадратов отклонений отдельных точек системы, причем множители m_v соответствуют “весовому” множителю в методе наименьших квадратов. Выявляя замечательную внутреннюю связь идеи принципа наименьшего принуждения с методом наименьших квадратов, Гаусс замечает, что “свободное движение, если оно при наличии имеющихся условий не может иметь места, модифицируется природой в точности таким образом, каким вычисляющий

математик, пользуясь методом наименьших квадратов, выравнивает результаты эксперимента, относящиеся к величинам, связанным некоторой зависимостью”:

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \left(w_v - \frac{F_v}{m_v} \right)^2. \quad (1.37)$$

Функция Z называется принуждением (по-немецки Zwang). От меры принуждения (1.36) она отличается несущественным для существования экстремума множителем $1/2(dt)^4$.

Отбрасывая этот множитель, получим следующую формулировку принципа Гаусса:

В каждый момент времени истинное движение системы, находящейся под действием активных сил и подверженной идеальным удерживающим связям, отличается от всех кинематически возможных движений, совершающихся из той же начальной конфигурации и с теми же начальными скоростями, тем свойством, что для истинного движения принуждение Z является минимальным.

Математически это выражается равенством $\delta Z = 0$, причем вариация берется при неизменяемых координатах и скоростях точек системы, то есть варьируются только ускорения. Такой способ синхронного варьирования называется варьированием по Гауссу.

В координатной форме принуждение записывается в виде:

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N m_v \left[\left(w_{vx} - \frac{F_{vx}}{m_v} \right)^2 + \left(w_{vy} - \frac{F_{vy}}{m_v} \right)^2 + \left(w_{vz} - \frac{F_{vz}}{m_v} \right)^2 \right]. \quad (1.38)$$

Функция (1.36), о минимальном значении которой идет речь в принципе Гаусса, может быть преобразована к виду:

$$G = \sum_{v=1}^N m_v s_v^2 = \sum_{v=1}^N m_v s_v \cdot s_v = \frac{1}{2} (dt)^2 \sum_{v=1}^N (m_v w_v - F_v) \cdot s_v.$$

Но, согласно второму закону Ньютона, выражение в круглых скобках можно заменить на равнодействующую R_v реакций связей, поэтому имеем

$$G = 1/2(dt)^2 A,$$

$$\text{где } A = \sum_{v=1}^N R_v \cdot s_v. \quad (1.39)$$

Величина (1.39) выражает работу реакций связей, которую вызывает в элемент времени dt отклонение несвободного движения от свободного.

Принципу наименьшего принуждения можно дать теперь такую формулировку:

Действительное движение среди кинематически возможных выделяется тем, что для него работа реакций связей на путях отклонения этого движения от свободного движения в каждый данный момент есть минимум.

Это энергетическое толкование принципа наименьшего принуждения предложено в несколько иных терминах И. И. Рахманиновым. Сформулированное утверждение он назвал началом наименьшей потерянной работы.

Физический смысл принципа Гаусса можно выразить в других терминах. Используя уравнение (1.37), принуждение можно переписать в виде:

$$Z = \frac{1}{2} \sum_{v=1}^N \frac{R_v^2}{m_v}. \quad (1.40)$$

Условие того, что величина Z минимальна для действительного движения, приводит к экстремальному свойству реакций связей: для действительного движения реакции связей минимальны (в смысле минимума величины (1.40)).

Принцип Гаусса может быть выражен теперь в следующей форме:

Действительное движение есть одно из движений, совместимых со связями, для которого в каждый момент времени сумма отношений квадратов реакций в каждой отдельной точке к соответствующей массе есть минимум.

На экстремальное свойство реакций связей впервые, по-видимому, обратил внимание М. В. Остроградский в 1836 году, через семь лет после опубликования знаменитого мемуара Гаусса.

Принцип Гаусса обладает большой эвристической ценностью, благодаря которой он послужил основанием для дальнейшего развития механики. Например, механика Г. Герца возникла главным образом на основании идей, содержащихся в этом принципе. Остановимся здесь на принципе наименьшей кривизны Герца (или принципе прямейшего пути, 1894 г.), который является обобщением первого закона Ньютона (аксиомы инерции). Этот принцип можно также трактовать как геометрическую интерпретацию принципа Гаусса.

Будем рассматривать системы, у которых нет активных сил, а связи идеальные, удерживающие и не зависят от времени. Для простоты возьмем сначала систему из одной материальной точки, движущейся по неподвижной поверхности. Так как активных сил нет,

$$\text{то } Z = \frac{1}{2}mw^2.$$

Но вектор ускорения точки разлагается на нормальную и тангенциальную составляющие: $w = w_n + w_\tau$. В нашем случае тангенциальное ускорение w_τ должно лежать в плоскости, касательной к поверхности. Но в силу отсутствия трения оно просто равно нулю. Величина же нормального ускорения $w_n : \frac{v^2}{\rho} = v^2k$, где ρ – радиус кривизны траектории точки; $k = \frac{1}{\rho}$ – ее кривизна.

Следовательно, $w^2 = w_n^2 = v^4k^2$ и принуждение принимает вид:

$$Z = \frac{1}{2}mv^4k^2.$$

Поскольку из закона сохранения энергии следует, что скорость точки постоянна, то минимальность принуждения означает минимальность кривизны траектории точки. Таким образом, точка движется по прямейшему пути с постоянной скоростью. В этом и состоит принцип прямейшего пути Герца.

Интегральные вариационные принципы представляют собой различные формулировки (в форме Гамильтона-Остроградского, Лагранжа, Якоби) собственно одного принципа – принципа наименьшего действия (Мопертюи-Эйлер), называемого теперь принципом стационарности (неизменности) действия.

В то время как на протяжении нескольких предшествующих столетий принцип наименьшего действия трактовался как свидетельство истинности соответствующей траектории движения системы, в XX столетии было осознано, что принципиальное значение имеет не минимум действия на истинной траектории движения, которая может оказаться такой, что действие на ней будет максимальным. Важным является то, что на истинных траекториях движения системы вариация действия равна нулю, то есть величина действия остается неизменной.

Рассмотрим пример. Пусть нам дана система n материальных точек. Обозначим соответственно через x_i, y_i, z_i, m_i координаты и массу i -й точки. Пусть на систему наложено m идеальных связей:

$$\Phi_i(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n, t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

И пусть на эту систему действуют силы, допускающие силовую функцию U , зависящие от координат и времени так, что на i -ю точку действует сила с компонентами:

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Предположим далее, что система перемещается из одного положения, соответствующего времени t_0 , в другое соответствующее времени t_1 , причем перемещения совместимы со связями.

Кинетическая энергия системы (живая сила) определится уравнением:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (x_{it}'^2 + y_{it}'^2 + z_{it}'^2).$$

Тогда будем иметь следующую теорему Гамильтона-Остроградского.

Для того чтобы движение

$$x_i = x_i(t), y_i = y_i(t), z_i = z_i(t) \quad (t_0 \leq t \leq t_1) \quad (1.41)$$

было действительным движением системы под действием потенциальных сил (силы, работа которых не зависит от траектории движения, а зависит только от координат начала и конца), необходимо и достаточно, чтобы для кривых (1.41) имело место равенство

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt = 0, \text{ или } \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt \rightarrow \text{extr}. \quad (1.42)$$

В самом деле, в силу теории условного экстремума, уравнение (1.42) эквивалентно системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} F_{x_i} - \frac{d}{dt} F_{x_i'} = 0, F_{y_i} - \frac{d}{dt} F_{y_i'} = 0; \\ F_{z_i} - \frac{d}{dt} F_{z_i'} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \end{aligned} \quad (1.43)$$

где $F = T + U + \sum \lambda_i(t) \varphi_i$; $\lambda_i(t)$ – множитель Лагранжа.

Уравнения (1.43) представляют собой известные из курса аналитической механики уравнения Лагранжа II рода и представляют собой по сути уравнения Эйлера. Данные уравнения применяются для изучения динамики систем с голономными связями. Для изучения движения систем с неголономными связями используются уравнения Аппеля [1]. Уравнения (1.43) можно аналогично представить через обобщенные координаты.

Помимо формы Гамильтона-Остроградского принцип стационарности действия может быть представлен в форме Лагранжа и Якоби.

1.2.2. Законы и принципы механики деформируемого твердого тела

Перейдем к рассмотрению вариационных принципов теории упругости. Для этого необходимо привести некоторые вспомогательные теоремы и формулы.

Формула Клапейрона:

$$\begin{aligned}
U &= \int_V U_0 dV = \frac{1}{2} \left[\int_V (Xu + Yv + Zw) dV + \int_S (X_n u + Y_n v + Z_n w) dS \right] = \\
&= \frac{1}{2} \int_V [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}] dV,
\end{aligned} \tag{1.44}$$

где U_0 – удельная потенциальная энергия деформации, или упругий потенциал; V, S – объем тела и поверхность (граница) тела; u, v, w – функции смещений точек тела; X, Y, Z – объемные силы; X_n, Y_n, Z_n – функции нагрузок на поверхности тела; $\sigma(\tau), \varepsilon(\gamma)$ – функции осевых и угловых напряжений и деформаций.

Из равенства (1.44) в частности следует, что для упругого тела работа внешних сил полностью расходуется на накопление упругой энергии телом.

Кроме того, справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_x}; \quad \sigma_y = \frac{\partial U_0}{\partial \varepsilon_y}; \quad \dots \tau_{xy} = \frac{\partial U_0}{\partial \gamma_{xy}} \quad (\text{формулы Лагранжа}); \\
\varepsilon_x &= \frac{\partial U_0}{\partial \sigma_x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial U_0}{\partial \sigma_y}; \quad \dots \gamma_{xy} = \frac{\partial U_0}{\partial \tau_{xy}} \quad (\text{формулы Кастильяно}).
\end{aligned} \tag{1.45}$$

Формулы Лагранжа справедливы и в случае пластических деформаций ($U_0 \equiv \Pi$), а формулы Кастильяно применимы только в упругой фазе.

Теорема единственности. Данная теорема утверждает, что *решение задачи теории упругости является единственным с точностью до перемещения твердого тела.* Помимо общего значения, теорему единственности широко используют при решении конкретных задач. Иногда удается частично угадать форму решения. Если при этом можно удовлетворить всем дифференциальным уравнениям и граничным условиям задачи, то, в силу единственности, будет найдено искомое решение задачи.

Принцип Лагранжа-Дирихле, или принцип минимума полной энергии системы (принцип минимума для смещений):

Из всех кинематически возможных систем перемещений, принимающих заданные значения на поверхности тела, только действительные перемещения сообщают минимум полной энергии системы:

$$\Pi = U - A = \int_V U_0 dV - \left[\int_V (Xu + Yv + Zw) dV + \int_S (X_n u + Y_n v + Z_n w) dS \right] \rightarrow \min, \quad (1.46)$$

где Π – полная энергия системы; A – работа внешних сил на создаваемых ими перемещениях.

В этом случае имеет место абсолютный минимум. Данное вариационное уравнение эквивалентно дифференциальным уравнениям равновесия и условиям равновесия на поверхности тела (граничным условиям в напряжениях). Уравнение (1.46) является следствием начала возможных перемещений.

Принцип (1.46) также справедлив и в теоретической механике, он устанавливает достаточное условие равновесия механической системы:

Если потенциальная энергия консервативной системы имеет в положении равновесия строгий минимум, то равновесие системы в этом положении является устойчивым. Однако даваемое теоремой условие является лишь достаточным и не позволяет судить о том, что будет, если в положении равновесия потенциальная энергия не имеет минимума.

Принцип Кастильяно (принцип минимума для напряжений):

Из всех систем напряжений, находящихся в равновесии с заданными объемными и поверхностными силами, только действительная система напряжений сообщает минимум дополнительной работе:

$$\int_V U_0 dV - \int_{S_u} (X_n u + Y_n v + Z_n w) dS \rightarrow \min, \quad (1.47)$$

где S_u – часть поверхности тела, на которой заданы смещения.

Поверхностный интеграл в выражении (1.47) берется по той части поверхности, на которой заданы смещения. Если граничные условия поставлены в напряжениях ($S_u = 0$) или на S_u смещения равны нулю (опоры), то реализуется минимум потенциальной энергии деформации:

$$U = \int_V U_0 dV \rightarrow \min. \quad (1.48)$$

Вариационное уравнение Кастильяно (1.47) эквивалентно условиям сплошности.

Теорема Кастильяно (1875). Если на тело действуют обобщенные сосредоточенные нагрузки Q_i ($i = 1, 2, 3, \dots$), а на S_u смещения равны нулю (опоры), то

$$\frac{\partial U}{\partial Q_i} = \Delta_i, \quad (1.49)$$

где Δ_i – обобщенные перемещения.

Таким образом, согласно выражению (1.49), перемещение точки приложения силы по направлению ее действия равно частной производной от потенциальной энергии по этой силе. Под обобщенными нагрузками и силами следует понимать сосредоточенные силы, моменты сил и т. д.

Теорема Кастильяно имеет очень широкое приложение в задачах механики. Одним из таких приложений является решение статически неопределимых задач. Если рассматривать балку на опорах, то перемещения точек приложения реакций равны нулю, таким образом:

$$\frac{\partial U}{\partial Q_1} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial Q_2} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial Q_3} = 0 \dots \quad (1.50)$$

Уравнения (1.50) являются необходимыми условиями экстремума (минимума) потенциальной энергии деформации. Таким образом, мы приходим к теореме Менабреа:

В статически неопределимых системах лишние неизвестные усилия принимают такие значения, при которых потенциальная энергия деформации имеет наименьшее значение.

Эта теорема известна также как теорема о наименьшей работе, так как вместо потенциальной энергии можно говорить о численно равной ей работе внешних сил. На основании теоремы Менабреа можно заключить, что при добавлении каких-либо связей потенциальная энергия уменьшается и никогда не может увеличиваться.

Интересно отметить, что определять лишние неизвестные исходя из минимума потенциальной энергии первым предложил именно Менабреа в 1857 г. А теорему Кастильяно в виде выражения (1.49) первым предложил Коттерилл в 1865 г., но не доказал ее. Кастильяно доказал свою теорему в дипломной рабо-

те, посвященной расчету ферм в 1873 г., и опубликовал полученный результат на итальянском языке в 1875 г.

Методы определения перемещений в стержневых системах основаны на принципе возможных перемещений, который был, вероятно впервые, распространен на деформируемые тела Пуассоном в 1833 г. В этом случае он формулируется следующим образом:

Из всех возможных состояний равновесия системы, подверженной воздействию внешних сил, соответствует то, при котором полная энергия системы принимает стационарное значение. Использование этого вариационного принципа позволяет вывести теорему Лагранжа, согласно которой для линейных систем частная производная от потенциальной энергии деформации по обобщенному перемещению равна соответствующей ему обобщенной силе:

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = Q_i. \quad (1.51)$$

В случае нелинейных систем теоремы Кастильяно и Лагранжа остаются в силе, но только в теореме Кастильяно производные следует брать не от потенциальной энергии деформации, а от другого функционала – так называемой дополнительной энергии. На это обстоятельство указал в 1889 г. Энгессер.

Так как по закону Гука напряжения можно выразить через деформации (а следовательно, через перемещения точек тела) и, наоборот, деформации можно выразить через напряжения, то в теории упругости одну и ту же задачу можно решать либо в перемещениях, либо в напряжениях, рассматривая соответствующую систему дифференциальных уравнений. Этим двум подходам отвечают и различные вариационные принципы (принцип Лагранжа-Дирихле и принцип Кастильяно). Заметим, что можно исходить из смешанной системы уравнений, но это не всегда удобно.

Давно было замечено, что одна и та же система уравнений может быть системой уравнений Эйлера для разных функционалов. Например, уравнения аналитической механики систем с конечным числом степеней свободы могут быть получены из двух различных вариационных принципов: принципа Га-

мильтона-Остроградского и принципа Гамильтона-Пуанкаре. В других разделах механики также предлагались различные вариационные принципы для одних и тех же систем уравнений: принцип Дирихле и принцип Томсона в механике идеальной несжимаемой жидкости и в электростатике, принцип Лагранжа-Дирихле, принцип Кастильяно и принцип Рейсснера в теории упругости, принцип максимума Понтрягина в вариационных задачах с ограничениями и т. д. В основе построения всех таких принципов лежит идея двойственности.

Перейдем к рассмотрению принципов теории пластичности. Во-первых, покажем, каким образом можно получить зависимости для приращений пластических деформаций. Приведем два принципа без выводов.

Принцип виртуальной работы:

$$\int_V (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dV - \int_V (X \delta u + Y \delta v + Z \delta w) dV - \int_{S_F} (X_n \delta u + Y_n \delta v + Z_n \delta w) dS = 0, \quad (1.52)$$

где S_F – часть поверхности тела, на которой заданы внешние силы (нагрузки).

Принцип дополнительной виртуальной работы:

$$\int_V (\varepsilon_x \delta \sigma_x + \varepsilon_y \delta \sigma_y + \varepsilon_z \delta \sigma_z + \gamma_{xy} \delta \tau_{xy} + \gamma_{yz} \delta \tau_{yz} + \gamma_{zx} \delta \tau_{zx}) dV - \int_{S_u} (u \delta X_n + v \delta Y_n + w \delta Z_n) dS = 0, \quad (1.53)$$

где S_u – часть поверхности тела, на которой заданы перемещения.

Принцип виртуальной работы и принцип дополнительной виртуальной работы при взаимозависимых напряжениях и деформациях справедливы в зоне пластичности.

Подставив в уравнении (1.53) вместо полных перемещений u, v, w и полных деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{xy}$ соответственно приращения пластических перемещений du^p, dv^p, dw^p и приращения пластических деформаций $d\varepsilon_x^p, d\varepsilon_y^p, \dots, d\gamma_{xy}^p$ и воспользовавшись теми же приемами, что и для вывода принципа дополни-

тельной виртуальной работы для систем, у которых в границах S_u пластические перемещения не возникают, можно получить следующее уравнение:

$$\int_V \left(d\varepsilon_x^p \delta\sigma_x + d\varepsilon_y^p \delta\sigma_y + d\varepsilon_z^p \delta\sigma_z + d\gamma_{yz}^p \delta\tau_{yz} + d\gamma_{zx}^p \delta\tau_{zx} + d\gamma_{xy}^p \delta\tau_{xy} \right) dV = 0. \quad (1.54)$$

Из этого уравнения видно, что приращения энергии пластических деформаций в противоположность изменениям напряжений при положительном решении приобретают стационарные значения. Условия текучести напряжений в зоне пластичности можно записать в виде:

$$f(\{\sigma\}, \kappa) = 0, \quad (1.55)$$

где $\{\sigma\}$ – вектор напряжений; κ – параметр упрочнения.

Выражение (1.55) можно рассматривать в качестве ограничивающих условий для напряжений $\sigma_z, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}$; при отыскании условий стационарности приращений энергии пластических деформаций можно получить зависимость между приращениями пластических деформаций и приращениями напряжений. Условия стационарности можно получить, воспользовавшись методом неопределенных множителей Лагранжа:

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_x^p &= \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_x}; & d\varepsilon_y^p &= \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_y}; & d\varepsilon_z^p &= \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_z}; \\ d\gamma_{yz}^p &= \lambda \frac{\partial g}{\partial \tau_{yz}}; & d\gamma_{zx}^p &= \lambda \frac{\partial g}{\partial \tau_{zx}}; & d\gamma_{xy}^p &= \lambda \frac{\partial g}{\partial \tau_{xy}}, \end{aligned} \right\} \quad (1.56)$$

где g – функция пластического потенциала или, в случае ассоциированного закона пластического течения, поверхность текучести; λ – множитель Лагранжа.

Установлено, что существует значение λ , удовлетворяющее этим уравнениям.

Уравнения (1.56) отражают зависимость между приращениями пластических деформаций и напряжениями, а также показывают, что в координатном пространстве напряжений различные составляющие вектора приращения пластических деформаций пропорциональны направляющим косинусам к криволинейной плоскости (поверхности) текучести. Данная закономерность называ-

ется принципом перпендикулярности или ассоциированным законом пластического течения.

Таким образом, упруго-пластические деформации определяются из матричного уравнения:

$$d\{\varepsilon\} = [D]^{-1} d\{\sigma\} + \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma},$$

где $[D]$ – матрица связи напряжений и деформаций в упругой зоне.

Минимальные принципы в теории упруго-пластических деформаций аналогичны принципу Лагранжа-Дирихле и принципу Кастильяно.

Принцип минимума полной энергии:

Действительные перемещения сообщают полной энергии тела минимальное значение:

$$\int_V \Pi dV - A \rightarrow \min, \quad (1.57)$$

где Π – потенциал работы деформации (рис. 1.2). На рис. 1.2 τ_i, γ_i – соответственно интенсивность напряжений и деформаций. Связь между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций устанавливается (гипотетично) из простейших испытаний (одноосных).

Работа внешних сил A определяется идентично упругому случаю. Если в теле имеются области различного состояния (упругого и пластического), минимальный принцип (1.57) сохраняется.

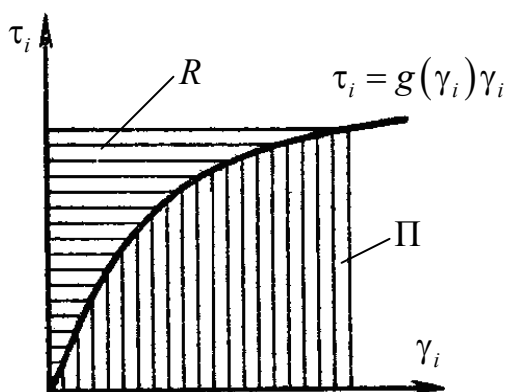


Рис. 1.2. Дополнительная работа R и работа деформаций Π

Принцип минимума дополнительной работы:

Действительное напряженное состояние отличается от всех статически возможных состояний тем, что оно сообщает минимум дополнительной работы тела:

$$\int_V R dV \rightarrow \min, \quad (1.58)$$

где R – дополнительная работа, численно равная заштрихованной горизонтальными линиями площади (см. рис. 1.2).

Для упругой среды, подчиняющейся закону Гука, $R = U_0$, принцип (1.58) переходит в принцип Кастильяно.

1.2.3. Вариационные методы решения задач механики сплошной среды

Строгое аналитическое решение задач механики сплошной среды представляет известные математические сложности, даже в случае линейной упругой среды. Существующие известные решения: задача Динника, Кирша, Фламана, Буссинеска и немногие другие являются тем пределом, которого, по сути, удалось достичь за время существования науки. Обобщение рассматриваемых задач приводит к разрывным решениям, которые представляют скорее математический интерес, нежели механический. Поэтому на сегодняшний день применяются различные приближенные методы решения задач механики сплошной среды, рассмотрим некоторые из них.

Метод Ритца

По сути метод Ритца относится к так называемым прямым методам решения вариационных задач. Например, если необходимо решить задачу теории упругости для некоторой нагруженной области, задаются некой функцией перемещений точек рассматриваемой области, таким образом, чтобы она удовлетворяла граничным условиям. Данная функция содержит неизвестные параметры a_1, a_2, \dots, a_n , которые необходимо определить в дальнейшем. Согласно прин-

ципу Лагранжа-Дирихле, составляется функционал для полной энергии системы (рассматриваемой области), производится его интегрирование по объему, то есть отыскивается полная энергия системы. Полная энергия системы должна стремиться к минимуму. Таким образом, имеем функцию полной энергии системы, аргументами которой являются неизвестные параметры. Таким образом, для определения неизвестных параметров составляется система уравнений, каждое из которой представляет собой необходимое условие экстремума функции полной энергии системы. То есть берется частная производная полной энергии по неизвестному параметру и приравнивается к нулю. Как правило, функция задается таким образом, чтобы полная энергия являлась некой квадратичной формой (функцией) неизвестных параметров. В этом случае система уравнений сведется к линейной. По известной функции смещений, при помощи соотношений Коши определяют деформации, а используя обобщенный закон Гука, – напряжения.

Метод Бубнова-Галеркина

Метод Бубнова-Галеркина имеет ту же основу, что и метод Ритца, однако определение неизвестных параметров искомой функции основано на свойстве ортогональности функций.

Метод конечных элементов

На сегодняшний день существует большое число формулировок и интерпретаций метода конечных элементов при решении задач механики сплошной среды и, прежде всего, задач теории упругости. Главная идея МКЭ заключается в замене дифференциальных уравнений теории сплошной среды системой линейных алгебраических уравнений. Это становится возможным в связи с переходом от системы с бесконечным числом степеней свободы (сплошное тело состоит из бесконечного числа точек, каждая из которых имеет три степени свободы) к системе, состоящей из конечного числа взаимодействующих материальных точек (узлов). Требуя выполнения условий равновесия или сплошности в узлах, определяют неизвестные перемещения и узловыи силы. Таким образом, отыскивается не приближенная функция смещений точек рассматриваемой об-

ласти, а смещения конкретных точек области. В этом состоит принципиальное отличие метода конечных элементов от методов, рассмотренных выше.

Основной процедурой МКЭ является представление сплошного тела в виде некой модели, состоящей из точек (узлов), соединенных условными линиями (стержнями) и ограничивающих объемы (конечные элементы). Таким образом, континуум (сооружение) анализируется по множеству конечных элементов. Далее для решения задачи обращаются к фундаментальным понятиям механики – перемещениям и силам. Конечно-элементная сетка разбивается таким образом, чтобы все известные силы и перемещения (граничные условия задаются либо в нагрузках (напряжениях), либо в перемещениях) были приурочены к ее узлам. Очевидно, что точность решения задачи возрастает с увеличением количества элементов. Однако в отличие от метода конечных разностей точностью МКЭ можно управлять, то есть сгущать сетку конечных элементов в тех частях тела, где необходимы более достоверные результаты. Таким образом, в начале расчета будем иметь узлы с известными и неизвестными узловыми силами и перемещениями. Так, например, если в узле отсутствует внешняя сила, то в уравнении необходимо положить ее нулевое значение, а неизвестными в этом узле будут компоненты перемещения. То есть перед началом расчета будем располагать одинаковым количеством известных и неизвестных узловых сил и перемещений.

Из вышесказанного очевидно, что решение задач при помощи МКЭ немислимо без применения матричного анализа и как следствие – ЭВМ. Основным уравнением метода является матричное уравнение, связывающее узловые силы и перемещения. Матрица связи компонентов называется матрицей жесткости системы. Неизвестные узловые перемещения и силы определяются через матрицу жесткости, которая выводится методами строительной механики стержневых систем (метод сил, метод перемещений) или, в более общей постановке, при помощи вариационных принципов (принцип минимума полной потенциальной энергии системы Лагранжа-Дирихле, принцип Кастильяно, принцип виртуальных работ). Когда узловые силы и перемещения определены, при

помощи конечно-разностного представления уравнений Коши или из геометрических соображений определяют компоненты средних деформаций в конечном элементе (деформации по всему объему элемента можно считать постоянными или же производить аппроксимацию смещений от узла к узлу с соответствующим пересчетом деформаций), по которым вычисляют напряжения, используя закон Гука.

Рассмотрим кратко основы метода конечных элементов для плоской задачи теории упругости.

Согласно теореме Клапейрона (1.44), потенциальная энергии деформации для одного конечного элемента

$$U = \frac{1}{2} \int_S [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}] dS.$$

Считая напряжения и деформации постоянными в пределах конечного элемента, его потенциальную энергию деформации можно определить формулой:

$$U = \frac{1}{2} [\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}] S, \quad (1.59)$$

где S – площадь конечного элемента.

Выражая в уравнении (1.59) при помощи обобщенного закона Гука напряжения через деформации, а последние – при помощи соотношений Коши (в конечных разностях), через перемещения узлов конечного элемента, получим функцию потенциальной энергии деформации, где в качестве аргументов будут выступать неизвестные смещения. Заметим, что, так как обобщенный закон Гука выражает линейную связь между напряжениями и деформациями, а соотношения Коши – линейную связь между смещениями узлов элемента и его деформацией, то функция потенциальной энергии деформации будет являться квадратичной в отношении перемещений узлов элемента. Работа внешних сил для одного элемента равна сумме произведений узловых сил на перемещения соответствующих узлов элемента и в общем случае является линейной функцией перемещений:

$$A = \sum_{i=1}^n (R_{1x}u_1 + R_{1y}v_1 + R_{2x}u_2 + R_{2y}v_2 + \dots R_{nx}u_n + R_{ny}v_n),$$

где A – работа внешних сил (включая объемные); n – число узлов в элементе; R, u, v – узловые силы и перемещения по осям координат.

Объемные силы учитывают как внешние, приурочивая их к конкретным узлам конечно-элементной модели.

Для определения полной энергии рассматриваемой области (системы) необходимо просуммировать полную энергию по всем элементам:

$$\Pi = \sum_{i=1}^k (U - A),$$

где k – количество конечных элементов в системе.

Таким образом, будем иметь полную энергию сплошного упругого тела как функцию перемещений узлов конечно-элементной модели, причем квадратичную функцию. Согласно принципу Лагранжа-Дирихле (1.46), только истинные смещения узлов обеспечивают минимум полной энергии системы. Таким образом, для нахождения истинных смещений узлов необходимо взять частные производные полной энергии системы по узловым перемещениям и приравнять их нулю. Но так как функция полной энергии есть полином второй степени, будем иметь систему линейных алгебраических уравнений, связывающих посредством матрицы жесткости узловые силы и перемещения. Определив узловые перемещения, при помощи конечно-разностных соотношений Коши определяют деформации в элементе, а по ним, с использованием обобщенного закона Гука, – напряжения.

Отметим, что для реализации метода конечных элементов можно было также воспользоваться принципом Кастильяно (1.47) – принципом минимума для напряжений.

Выводы по главе 1

В зависимости от решаемых геомеханических задач и протекающих процессов, неизбежно приходится наделять горный массив теми или иными свойствами, рассматривать его как сплошную (упругую, пластическую, вязкую) либо дискретную среду. Таким образом, в зависимости от принимаемой геомеханической модели массива используются те или иные законы, закономерности и зависимости теоретической механики, механики сплошной среды. В данной главе показано, что протекание механических процессов, независимо от того, рассматриваем мы движение абсолютно твердых тел или же деформирование сплошного тела, описывается вариационными принципами. То есть сама природа протекающих механических явлений и процессов является вариационной. Вариационные принципы придают задачам и их решениям определенную изящность, показывают путь решения.

Человечество пока не ответило на вопрос, почему при протекании каких-либо процессов конкретная величина должна быть экстремумом. Однако практически во всех случаях (исключениями являются принципы Ферма и Герца) эта величина является скалярной и характеризует энергетическое состояние тела. Причем очень важно отметить, что во всех вариационных принципах механики экстремума достигает величина, характеризующая потенциал всей системы или сплошного тела. Данный факт придает некую одушевленность, централизованность и иерархичность протеканию механических процессов. То есть в каждой точке процесс протекает таким образом чтобы это было выгодно всей системе в целом, а не локальной области. Нагруженное тело допускает пластичность и повышение температуры в одних областях, экономя и аккумулируя энергию в других, разрушение же наступает тогда, когда существование двух тел будет выгодно энергетически. Если экстраполировать данную мысль на процесс разрушения, то станет очевидным, что, например, угол наклона площадки среза в заданной точке определяется не напряженным состоянием в ее окрестности, но их распределением во всем теле.

Для понимания этого рассмотрим пример. Как следует из принципа Ферма, свет, распространяясь из точки в точку, подбирает такой путь, чтобы минимизировать время прохождения. Этот исторически первый вариационный принцип содержит в себе большую гносеологическую проблему (гносеология – теория познания). Очень ярко об этом пишет Р. Фейнман [2]. Поведение света трудно понять, если придерживаться дифференциального причинного подхода: свет движется из одной близлежащей точки в другую; в одной из таких точек с ним что-то происходит в результате причинного воздействия, и свет отклоняется. Но принцип Ферма интегральный, а не дифференциальный, и вместо причинной обусловленности, когда из одного нашего действия вытекает другое, этот принцип свидетельствует: в данной ситуации свет выбирает путь с наименьшим или экстремальным временем. Но как удастся свету выбрать свой путь? “Вынюхивает” он, что ли, соседние пути и сравнивает потом друг с другом? В некотором смысле так и происходит. Эту способность света нельзя понять в рамках геометрической оптики, поскольку она связана с понятием длины волны. Длина волны, грубо говоря, есть тот отрезок впереди лежащего пути, который свет может “почувствовать” и сравнить с соседними путями.

Именно сравнением возможных решений на предыдущем и последующем “шагах” и добиваются оптимальных решений на всем “пути” в методе динамического программирования.

Список литературы к главе 1

1. Аппель, П. Теоретическая механика. Том второй. Динамика системы. Аналитическая механика / перевод с шестого французского издания И. Г. Малкина. – М.: Гос. Изд-во физ.-мат. лит., 1960. – 487 с.
2. Цехмистро, Л. Н. Экстремальные принципы и принцип стационарности действия в механике / Л. Н. Цехмистро // Электронный ресурс. psylib.org.ua.
3. Краснов, М. Л. Вариационное исчисление / М.Л. Краснов, Г.И. Макаренко, А. И. Киселев. – М.: Наука, 1973. – 190 с.
4. Лаврентьев, М. А. Курс вариационного исчисления. – Изд. второе / М. А. Лаврентьев, Л. А. Люстерник. – М.: Гос. изд-во. техн.-теор. лит., 1950. – 296 с.
5. Цлаф, Л. Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения / Л. Я. Цлаф. – М.: Наука, 1970. – 191 с.
6. Эйлер, Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле / Л. Эйлер; перевод Н. С. Кошлякова. – М.: Гос. техн.-теор. изд-во, 1934. – 600 с.
7. Корн, Г. Справочник по математике: для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн; пер. со второго американского переработан. изд. А. И. Араманович, А. М. Березман, И. А. Вайнштейн и др. – М.: Наука, 1974. – 832 с.
8. Бердичевский, В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды / В. Л. Бердичевский. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 448 с.
9. Вариационные принципы механики: сб. ст. / под ред. Л. С. Полака. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. – 932 с.
10. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: учеб. для втузов. – 12 изд., стер. / С. М. Тарг. – М.: Высш. шк., 2002. – 416 с.

11. Ланцош, К. Вариационные принципы механики / К Ланцош. – М.: Мир, 1965. – 408 с.
12. Маркеев, А. П. О принципе наименьшего принуждения / А. П. Маркеев // Соросовский образовательный журнал. – 1998. - №1. – С. 113-121.
13. Маркеев, А. П. Теоретическая механика: учебник для университетов / А. П. Маркеев. – М.: ЧеРо, 1999. – 572 с.
14. Биргер, И. А. Прочность, устойчивость, колебания: справочник в 3-х т. Т.1 / И. А. Биргер, Я. Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 831 с.
15. Барбакадзе, В. Ш. Расчет и проектирование строительных конструкций и сооружений в деформируемых средах / В. Ш. Барбакадзе, С. Мураками. – М.: Стройиздат, 1989. – 472 с.
16. Васидзу, К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности: пер. с англ. / К. Васидзу.– М.: Мир, 1987. – 542 с.
17. Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко, В. А., Агарев, А. Л. Квитка и др. – Киев: Гос. изд. техн. лит., 1963. – 791 с.
18. Тимошенко, С. П. Сопротивление материалов. Том первый. Элементарная теория и задачи / С. П. Тимошенко; перевод с третьего американского издания В. Н. Федорова. – издание второе, стереотипное. – М.: Наука, 1965.
19. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности: учебник / под ред. Г. С. Варданяна. – М.: АСВ, 1995. – 568.

Никаким количеством экспериментов нельзя доказать теорию, но достаточно одного эксперимента, чтобы ее опровергнуть.

Альберт Эйнштейн

2. ТЕОРИЯ РАСЧЕТА УСТОЙЧИВОСТИ ОТКОСОВ

2.1. Анализ и характеристика существующих методов расчета устойчивости откосов

Проблема оценки устойчивости откосов является весьма актуальной при разработке месторождений полезных ископаемых открытым способом в гидротехническом, транспортном, промышленном и гражданском строительстве, а также в других отраслях деятельности человека.

Исторически первой работой по вопросу равновесия массива, ограниченного наклонной плоскостью (откосом), является работа У. Ренкина (1857). Первый способ расчета устойчивости откосов, основанный на принципе Кулона, был предложен в 1920 году Г. Франсе. К настоящему времени разработано более 100 способов, приемов и схем расчета устойчивости свободных откосов.

Попытки создания строгого способа расчета привели к появлению большого числа способов, приемов расчета и расчетных схем, их многообразие объясняется количеством допущений, используемых исследователями для обоснования расчетной схемы, и условиями устойчивости. Дело в том, что задача по определению параметров устойчивого откоса или несущей способности основания в любой постановке является статически не определимой. Поэтому для определения неизвестных параметров авторами выдвигаются дополнительные условия (допущения). Например, У. Ренкин предполагает, что в каждой точке призмы смещения выполняется условие предельного кулоновского равновесия, Д. Тейлор принимает симметричный синусоидальный закон распределения нормальных реакций вдоль поверхности скольжения, в большинстве способов пренебрегается действием межблоковых реакций, а поверхность скольжения принимается из условия получения более простых формул. Многообразие спо-

способов расчета вызвало необходимость классифицировать их по тем или иным признакам.

В работе [1] приводится классификация способов расчета устойчивости откосов, которая, на взгляд автора, достаточно полно отражает и упорядочивает их многообразие. В табл. 2.1 приведена данная классификация с незначительными дополнениями.

Таблица 2.1

Классификация методов расчета устойчивости откосов

Класс	Общий принцип определения параметров устойчивого откоса, характеризующий класс методов	Общий признак для группы способов	Основной способ группы	Расчетные способы и схемы, использующие основной метод
1	2	3	4	5
А	Построение контура откоса, являющегося внешней границей зоны, во всех точках которой удовлетворяется условие предельного напряженного состояния	Численный способ интегрирования дифференциальных уравнений напряженного состояния	Способ В. В. Соколовского	Таблицы И. С. Мухина и Л. И. Срагович Номограммы Н. К. Звонарева Способ А. И. Говядинова – С. В. Фальковича Способ А. М. Сенкова Расчетные схемы Ю. А. Соболевского Способ И. Д. Молюкова Способ Г. Л. Фисенко – В. Т. Сапожникова (выпуклый откос) Способ В. Т. Сапожникова – В. И. Пушкарева (откос криволинейный в плане) Способ Ю. Н. Малюшицкого (многослойный откос)

1	2	3		4	5
Б	Построение контура откоса, вдоль которого удовлетворяется равенство угла наклона касательной углу сопротивления сдвигу	Графический способ интегрирования дифференциальных уравнений предельного напряженного состояния Разбивка откоса на горизонтальные слои и определение устойчивого угла наклона каждого слоя с учетом веса вышележащих пород		Способ С. С. Голушкевича Способ F_p Н. Н. Маслова Способ М. Н. Троицкой	
В	Построение в массиве поверхности скольжения, вдоль которой удовлетворяется условие предельного равновесия	Плоская поверхность скольжения		Способ Г. Франсе Способ О. Винклера Способ Л. Н. Бернацкого Способ П. Н. Цимбаревича Способ О. Т. Токмурзина	
В		Круглоцилиндрическая поверхность	Условия равновесия всего откоса	Способ В. Феллениуса Способ Д. Тейлора (круг трения) Графоаналитический метод М. Н. Гольдштейна ("круг трения") Аналитический метод М. Н. Гольдштейна	Графики В. Н. Лобасова Графики Е. К. Алаторцева
				Способ М. М. Сокольского Способ А. И. Иванова Способ О. Фрелиха Способ А. Како Способ И. В. Федорова Способ М. Н. Гольдштейна (t-фактор)	Прием П. А. Ляпичева

Продолжение табл. 2.1

1	2	3		4		5
В		Круглоцилиндрическая	Условия равновесия отдельных вертикальных отсеков	Способ С. Хюльтина Способ Г. Крея – К. Терцаги Способ Р. Р. Чугаева – О. В. Вяземского Способ А. Бишопа Способ А. Л. Можевитинова Способ Г. М. Шахунянца (многоугольник сил)		Графики А. Бишопа – Н. Моргенштерна
В			Поверхность скольжения в виде логарифмической спирали	Способ Л. Рендулика Способ Н. П. Пузыревского – П. И. Кожевникова Способ Ю. С. Козлова – В. А. Будкова		
		Поверхность скольжения сложной криволинейной формы	Способ Г. Л. Фисенко Способ С. Н. Никитина Способ Л. В. Савкова			
			Вариационные способы	И. Копачи Ю. И. Соловьева А. Г. Дорфмана		
		Поверхность скольжения приломаной формы	Способ А. П. Ясюнас (прислоненного откоса) Способ Н. Н. Маслова (горизонтальных сил) Способ Р. Р. Чугаева (наклонных сил)			

1	2	3	4	5
Г	Построение в массиве поверхности скольжения, вдоль которой удовлетворяется условие специального предельного равновесия	Определение сдвигающих и удерживающих сил с учетом прочностных характеристик по поверхности ослабления откоса	Способ Г. Л. Фисенко Способ Н. Н. Куваева Способ П. Н. Панюкова	

К указанным в табл. 2.1 способам для различных поверхностей скольжения необходимо добавить способы Янбу, Моргенштерна и Прайса, Спенсера [2]. Эти методы достаточно похожи и дают близкие результаты. Их принципиальная разница заключается в количестве уравнений равновесия, составляемых для отдельных отсеков или для всей призмы смещения в целом.

Способы классов *A*, *B*, *B* в табл. 2.1 разработаны для однородных откосов, а класс *Г* – для анизотропных. Ни один из этих способов не является строгим, даже когда речь идет об идеально однородных и изотропных массивах. С другой стороны, очевидно, что теория расчета анизотропных откосов должна базироваться на теории изотропных откосов, поэтому способы класса *Г* исключим из анализа.

Способы класса *B* базируются на допущениях о том, что во всех точках угол откоса равен углу сопротивления сдвигу, а также на внешнем сходстве между уравнением сопротивления сыпучих пород сдвигу и уравнением, связывающим высоту откоса с его заложением. Способы данного класса не имеют должного теоретического обоснования и не могут являться расчетными.

Способы класса *A* используют одно, хотя и достаточно принципиальное допущение: в каждой точке призмы смещения выполняется условие предельного напряженного состояния (закон Кулона). Данные способы выделяют в отдельный метод – дифференциальный или предельного напряженного состояния.

Рассмотрим более подробно метод предельного напряженного состояния.

Родоначальником метода предельного напряженного состояния является Ш. О. Кулон (французский ученый (1736 – 1806)), сформулировавший в 1773 году основные положения предельного равновесия. У. Ренкин (Шотландский профессор (1820 – 1872)) в 1857 году рассмотрел предельное равновесие бесконечного массива, ограниченного наклоненной плоскостью, а также ввел понятие о поверхностях скольжения (рис. 2.1).

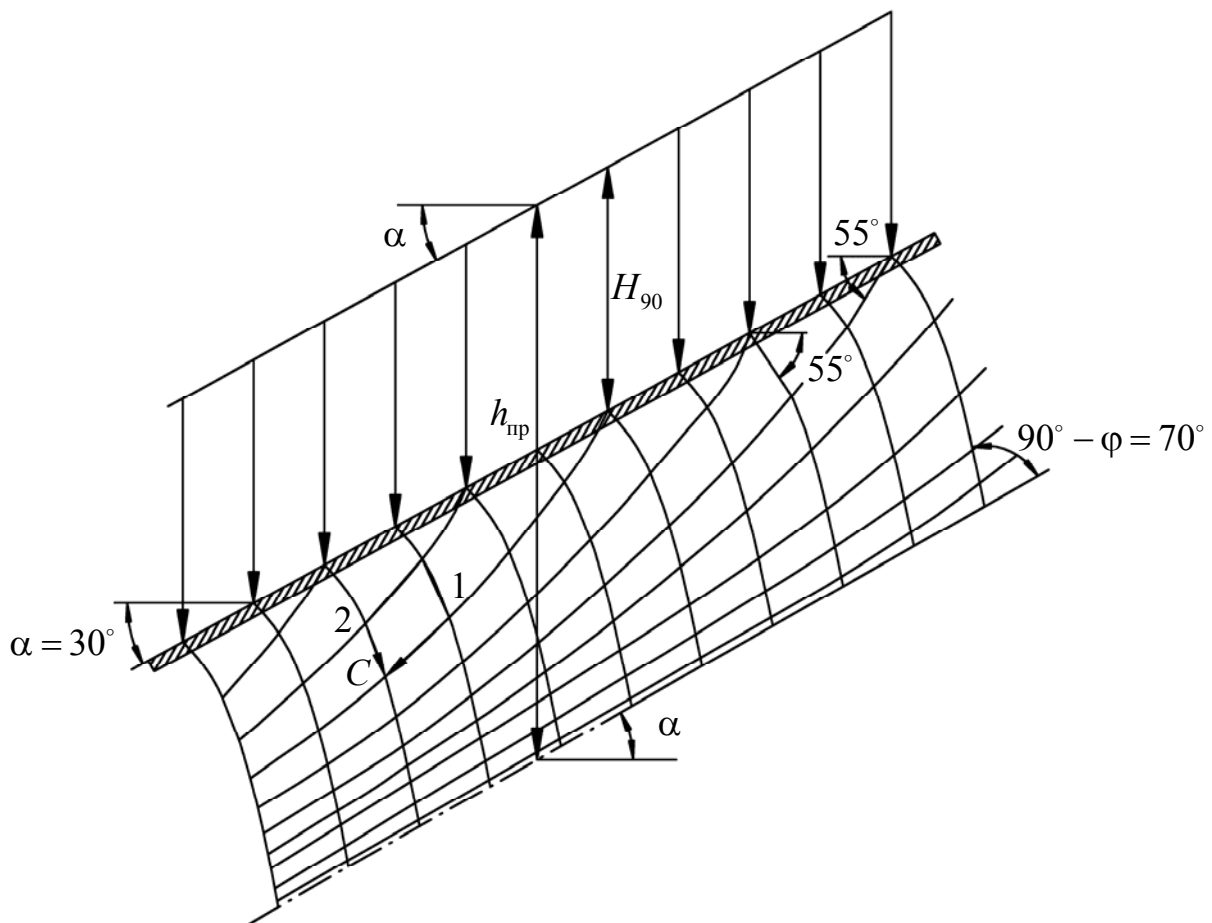


Рис. 2.1. Обобщенная задача Ренкина

Основой метода, подобно механике сплошных сред (теории упругости, пластичности и т. д.), являются дифференциальные уравнения плоского равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \gamma, \quad (2.1)$$

где γ – объемный вес горных пород; $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты тензора плоского напряжения.

К уравнениям равновесия Ф. Кеттер в 1903 году добавил условие предельного кулоновского равновесия, выраженное через компоненты плоского поля напряжений:

$$\frac{1}{4}(\sigma_x - \sigma_y)^2 + \tau_{xy}^2 = \frac{\sin^2 \varphi}{4}(\sigma_x + \sigma_y + 2C \operatorname{ctg} \varphi)^2, \quad (2.2)$$

где C, φ – сцепление и угол внутреннего трения горных пород.

Однако не было общего подхода при решении задач плоского предельного равновесия весомой сыпучей и связной сред. Лишь в 1939 г. В. В. Соколовский [3] разработал такой метод. Введя понятие о средней величине приведенного напряжения $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_3)/2 + C \operatorname{ctg} \varphi$ и выразив через нее компоненты тензора напряжений, подстановкой в уравнения равновесия В. В. Соколовский получил так называемую основную систему уравнений в симметричном виде:

$$\left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \mp 2\sigma \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \rho}{\partial x} \pm \gamma \operatorname{tg} \varphi \right] \cos(\rho \mp \varepsilon) + \left[\frac{\partial \sigma}{\partial y} \mp 2\sigma \operatorname{tg} \varphi \frac{\partial \rho}{\partial y} - \gamma \right] \sin(\rho \mp \varepsilon) = 0, \quad (2.3)$$

где ρ – угол между направлением наибольшего главного напряжения σ_1 и осью x ; $\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ – угол между направлением σ_1 и площадками скольжения.

Система уравнений (2.3) по классификации уравнений и систем в частных производных относится к гиперболической (имеет два действительных различных семейства характеристик). Ее решение В. В. Соколовский производит при помощи метода характеристик, известного из курса высшей математики. Не приводя достаточно сложных математических выкладок данного метода, укажем лишь на его основные положения. В плоскости решения системы уравнений x, y существуют некоторые линии, полностью заполняющие область решения системы – характеристики. Характеристики не являются произвольными линиями и определяются самой же системой уравнений. Их математический смысл заключается в том, что вдоль них существует возможность получить некоторые дифференциальные соотношения, связывающие неизвестные (определяемые) функции. Для определения характеристик и упомянутых соотношений

к уравнениям (2.3) добавляются зависимости для полных дифференциалов разыскиваемых функций:

$$d\sigma = \frac{\partial\sigma}{\partial x} dx + \frac{\partial\sigma}{\partial y} dy; \quad d\rho = \frac{\partial\rho}{\partial x} dx + \frac{\partial\rho}{\partial y} dy. \quad (2.4)$$

Приведя систему уравнений (2.3), (2.4) к стандартному виду (в левых частях уравнений – суммы произведений коэффициентов на частные производные неизвестных функций, в правой – все остальное), приравняем определитель матрицы системы нулю:

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\rho - \varepsilon) & -2\sigma \operatorname{tg}\varphi \cos(\rho - \varepsilon) & \sin(\rho - \varepsilon) & -2\sigma \operatorname{tg}\varphi \sin(\rho - \varepsilon) \\ \cos(\rho + \varepsilon) & 2\sigma \operatorname{tg}\varphi \cos(\rho + \varepsilon) & \sin(\rho + \varepsilon) & 2\sigma \operatorname{tg}\varphi \sin(\rho + \varepsilon) \\ dx & 0 & dy & 0 \\ 0 & dx & 0 & dy \end{pmatrix} = 0. \quad (2.5)$$

Получим уравнения характеристик системы (2.3):

$$dy = \operatorname{tg}(\rho \mp \varepsilon) dx. \quad (2.6)$$

Из уравнения (2.5) ясно, что характеристики наклонены к оси x под углом $\rho \mp \varepsilon$, то есть под теми же углами, что и линии скольжения. Отсюда непосредственно следует, что характеристики на плоскости xu являются поверхностями скольжения. Через каждую точку рассматриваемой области на плоскости xu проходят две характеристики, пересекающиеся под углом $2\varepsilon = \frac{\pi}{2} - \varphi$, то есть вся область (призма смещения) покрыта сеткой характеристик. Семейство характеристик, определяемое верхним знаком, называется первым (активным), нижним – вторым (пассивным).

Таким образом, из условия (2.5) (равенство нулю якобиана) ясно, что характеристики – это такие линии, вдоль которых разыскиваемые производные функций σ и ρ функционально зависимы между собой. А конкретные уравнения, определяющие эту функциональную связь, называются соотношениями на характеристиках.

Соотношения на характеристиках определим из условия равенства рангов матрицы системы и расширенной матрицы вдоль соответствующей характери-

стики, то есть требования совместности системы уравнений (система должна иметь хотя бы одно решение).

Согласно условию (2.5), определитель матрицы системы уравнений равен нулю, поэтому должен быть равен нулю определитель матрицы, составленный из произвольных четырех столбцов. Например:

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\rho - \varepsilon) & -2\sigma \operatorname{tg}\varphi \cos(\rho - \varepsilon) & \sin(\rho - \varepsilon) & \gamma(\sin(\rho - \varepsilon) - \operatorname{tg}\varphi \cos(\rho - \varepsilon)) \\ \cos(\rho + \varepsilon) & 2\sigma \operatorname{tg}\varphi \cos(\rho + \varepsilon) & \sin(\rho + \varepsilon) & \gamma(\sin(\rho + \varepsilon) + \operatorname{tg}\varphi \cos(\rho + \varepsilon)) \\ dx & 0 & dy & d\sigma \\ 0 & dx & 0 & d\rho \end{pmatrix} = 0. \quad (2.7)$$

Таким образом, из уравнения (2.7) вдоль характеристик (2.6) имеем следующие дифференциальные соотношения:

$$d\sigma \mp 2\sigma \operatorname{tg}\varphi d\rho = \gamma(dy \mp \operatorname{tg}\varphi dx). \quad (2.8)$$

Решение системы уравнений (2.6) и (2.8) затруднительно, поэтому для решения конкретных задач от дифференциалов переходят к конечным разностям, в итоге получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y - y_1 = (x - x_1) \operatorname{tg}(\rho_1 - \varepsilon); \\ \sigma - \sigma_1 = 2\sigma_1(\rho - \rho_1) \operatorname{tg}\varphi + \gamma(y - y_1) - \gamma(x - x_1) \operatorname{tg}\varphi; \\ y - y_2 = (x - x_2) \operatorname{tg}(\rho_2 + \varepsilon); \\ \sigma - \sigma_2 = -2\sigma_2(\rho - \rho_2) \operatorname{tg}\varphi + \gamma(y - y_2) + \gamma(x - x_2) \operatorname{tg}\varphi. \end{cases} \quad (2.9)$$

Пользуясь этими уравнениями, можно определить приближенные значения x, y, σ, ρ точки C пересечения двух линий скольжения (двух характеристик разных семейств), если эти величины известны в точках 1 и 2, лежащих на этих линиях. Очевидно, может быть решена и обратная задача. Все вычисления и построения осуществляются в безразмерных координатах, то есть при $C = 1, \gamma = 1$.

Параллельно В. В. Соколовскому, С. С. Голушкевич [4] независимо разработал графический способ интегрирования уравнений предельного напряженного состояния (статики сыпучих сред). Конечно, никакой графический способ

не может быть удобнее аналитического, особенно в настоящее время при стремительном развитии ЭВМ.

В строгом понимании способы В. В. Соколовского и С. С. Голушкевича правильнее назвать способами построения предельного очертания или определения предельной пригрузки откосов вогнутого профиля. Однако такой профиль откоса при открытой разработке ведет к значительному увеличению объемов вскрыши по сравнению с откосами выпуклого и плоского профилей. В этой связи В. Т. Сапожниковым [5] был разработан способ построения “равноустойчивого” откоса выпуклого профиля, основанный также на теории предельного напряженного состояния (рис. 2.2).

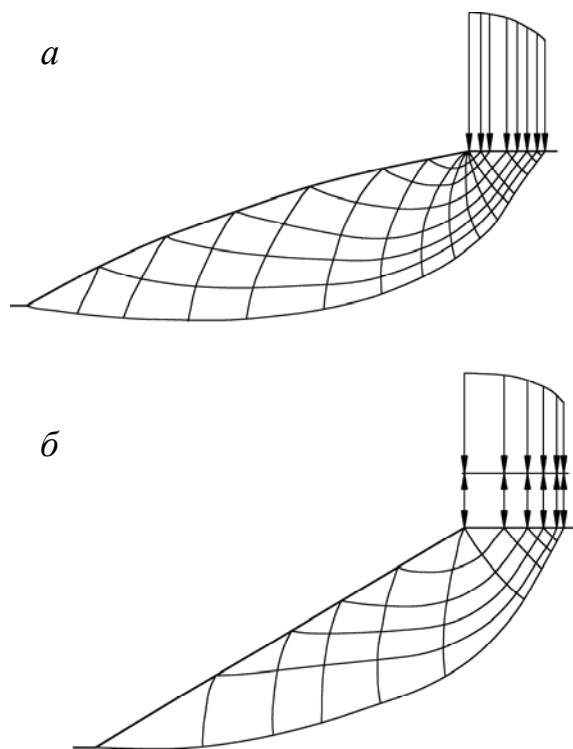


Рис. 2.2. Выпуклый (а) и плоский (б) откосы с расчетной весовой пригрузкой

Недостатки метода предельного напряженного состояния:

1) невозможность применения в случаях произвольной формы откоса и эпюры внешней нагрузки, что является следствием допущения о выполнении условия предельного напряженного состояния в каждой точке призмы смещения (см. рис. 2.2);

2) сложность или невозможность применения в случаях наличия в массиве поверхностей ослабления (контактов слоев, трещин и т. д.);

3) трудоемкость и непригодность при адаптации к сложным горно-геологическим условиям (сейсмичность, обводненность, объемная задача и т. д.).

С. С. Голушкевич отмечает: “Случай, когда сыпучая среда находится в предельном напряженном состоянии во всех точках, следует рассматривать как иногда возможный, частный и притом крайний случай состояния предельного равновесия. Поэтому состояние предельного равновесия массива сыпучей среды лучше определять как состояние, при котором его внутренняя граница является поверхностью скольжения”.

Способы класса *B* наиболее разнообразны. Их различие состоит в геометрии используемой поверхности скольжения (круглоцилиндрическая, логарифмическая спираль и др.), а также в том, каким образом судят об устойчивости призмы смещения: по равновесию отдельных отсеков (блоков) или условия равновесия составляются для всей призмы смещения.

На основании детального анализа, проведенного автором, были выделены четыре группы основных допущений, выдвигаемых исследователями для обоснования расчетной схемы, получения условий устойчивости (равновесия) призмы смещения и определения формы и положения наиболее слабой поверхности скольжения в откосах:

1) допущение о выполнении условия предельного напряженного состояния в каждой точке призмы смещения (метод предельного напряженного состояния – способы класса *A*);

2) допущения о распределении нормальных реакций вдоль поверхности скольжения (способы монолитного отсека обрушения, то есть когда рассматривают равновесие призмы смещения целиком);

3) допущения относительно соотношения касательных и нормальных реакций по боковым граням отсеков (реакция горизонтальна, наклонна или предельно отклонена);

4) допущения относительно формы и положения (геометрии) потенциальной (наиболее слабой) поверхности скольжения.

Допущение первой группы было рассмотрено выше.

В способах, рассматривающих равновесие призмы смещения как единого целого, существуют известные трудности при определении эпюры нормальных напряжений вдоль поверхности скольжения. Поэтому такие способы расчета используют допущения, зачастую малообоснованные. А если учесть, что поверхность скольжения не задана, то задача становится весьма неопределенной.

С другой стороны, если рассматривать призму смещения как единое целое

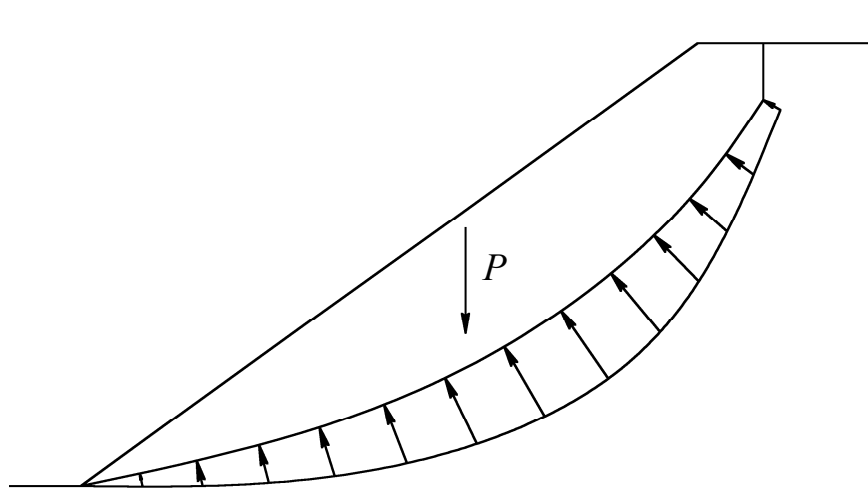


Рис. 2.3. Монолитный отсек обрушения

(монолитный отсек) (рис. 2.3), а также учтя, что для равновесия тела или системы тел необходимо и достаточно равенства нулю главного вектора внешних сил, то задача сведется лишь к определению их вдоль поверхности скольжения.

Однако даже при заданной поверхности скольжения для определения реакций необходимо прибегнуть к разбиению призмы смещения, то есть к необходимости учета межблоковых реакций. Последние же также определяют значения величин внешних сил в каждой точке поверхности скольжения.

Большинство способов расчета используют допущения третьей группы. Дело в том, что задача о равновесии отсека (рис. 2.4) является статически неопределимой. То есть для выполнения плоского равновесия отсека можно составить три условия статического равновесия, а неизвестных, которые необходимо определить, – четыре (см. рис. 2.4). Соответственно, для всей призмы смещения неизвестных будет столько, на сколько частей мы разобьем призму смещения. На практике часто считается, что точка приложения нормальной

межблоковой реакции не важна, так как опрокидывания отсеков не наблюдается, поэтому условие моментов для отсека отбрасывается вместе с неопределенным плечом приложения нормальной межблоковой реакции. Если рассматривать элементарные отсеки, то есть с бесконечно малой шириной, то задачу по преодолению статической неопределенности можно свести к определению закона распределения полного вектора межблоковой реакции или отношения нормальной и касательной составляющих.

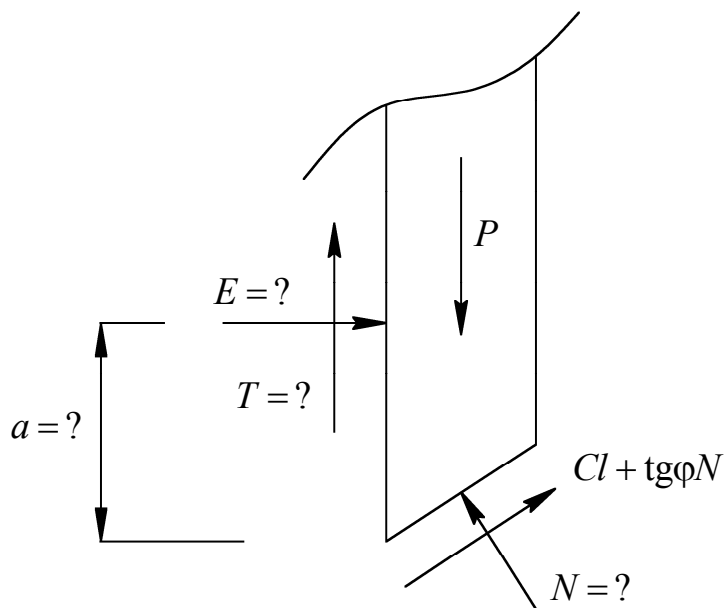


Рис. 2.4. Силы, действующие на отсек (блок)

Таким образом, выше дано объяснение многообразию способов расчета устойчивости откосов. То есть исследователи для обоснования недостающего условия (уравнения) выдвигают дополнительные и зачастую малообоснованные гипотезы о распределении межблоковых реакций, некоторые из них:

- 1) реакция между отсеками горизонтальна (Н. М. Герсеванов, Г. Крей, Р. Р. Чугаев – способ горизонтальных сил, Н. Янбу);
- 2) касательная реакция максимальна (Г. М. Шахунянц, ВНИМИ);
- 3) реакция отклонена от горизонта на величину половины угла сдвига (Р. Р. Чугаев – способ наклонных сил);
- 4) направление реакции параллельно основанию последующего отсека (Г. Л. Фисенко – алгебраическое сложение сил);

5) отношение касательной и нормальной составляющей – линейная функция аргумента (способ Моргенштерна и Прайса);

6) касательная реакция численно равна произведению сцепления на площадь боковой поверхности (Г. М. Шахунянц, 1969);

7) касательная реакция численно равна силе трения при предельном равновесии по боковой грани отсека (В. Т. Гузченко и др.);

8) касательная и нормальная реакции отсеков равны нулю (Ю. И. Соловьев, К. Терцаги, способ алгебраического сложения сил).

Заметим, что взаимодействие между отсеками присутствует в любом случае, иначе напряжения в теле призмы смещения были бы равны нулю, а это возможно лишь в ненагруженных и невесомых средах. Однако важно установить степень их влияния на устойчивость. Так как условие равновесия определяется лишь действием внешних сил (сил, действующих на призму смещения в целом), то внутренние силы (межблоковые реакции) в критерий устойчивости в явном виде входить не будут. То есть внутренние силы должны выражаться в виде функции внешних сил.

Допущения четвертой группы используют все способы класса *B*, кроме вариационных. Дело в том, что форма и положение поверхности скольжения в массиве определяют и сам критерий устойчивости. Например, при плоской поверхности скольжения нет необходимости рассматривать межблоковые реакции, задача становится статически определимой, а условием равновесия (критерием устойчивости) выступает сумма проекций внешних сил на плоскость поверхности скольжения (брусок на наклонной плоскости). Круглоцилиндрическая поверхность скольжения (Петерсон, 1916) позволяет достаточно просто оценить сумму моментов сил, действующих на призму смещения, а логарифмическая спираль (Рендулик, 1935) обладает тем свойством, что всякая нормаль к этой кривой образует постоянный угол с соответствующим радиус-вектором. Этим достигается простота расчетных схем и получаемых при этом результатов. То есть используемые в расчетах поверхности скольжения приняты для упрощения или просто для реализации расчетных схем и не имеют обоснования.

Существующие вариационные способы (см. табл. 2.1) для обоснования геометрии потенциальных поверхностей скольжения используют статически не

обоснованные критерии устойчивости (функционалы), то есть функционалы, полученные с использованием допущения о распределении межблоковых реакций, и поэтому определенная из данного критерия поверхность скольжения не будет являться истинной.

Таким образом, делаем вывод о том, что все из существующих методов (способов) в силу статической неопределенности задачи в любой ее постановке для получения условия равновесия призмы смещения используют те или иные допущения. В этом смысле ни один из рассмотренных способов не является строгим. О степени обоснованности каждого из допущений судить весьма сложно ввиду отсутствия эталонного способа расчета.

Часто в литературе можно встретить ошибочное мнение о том, что метод предельного напряженного состояния является строгим, а способы метода предельного равновесия являются инженерными (приближенными) и что необходимо производить их совершенствование и корректировку (например, многоугольник сил по ВНИМИ), используя метод предельного напряженного состояния. Однако, как показано выше, оба метода и включающие в себя способы несовершенны, кроме того, рассматриваемые два метода ни в коем случае нельзя сравнивать и уж тем более осуществлять их симбиоз.

В заключение отметим принципиальные различия между двумя основными методами расчета (оценки) устойчивости откосов и основные положения каждого из них.

В методе предельного напряженного состояния (класс *A*) условие предельного равновесия выполняется в каждой точке призмы смещения, в том числе на поверхности откоса и вдоль поверхности скольжения. Это в частности означает, что направление линии действия наибольшего главного напряжения отклонено от площадок скольжения каждого из семейств поверхностей скольжения на угол $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$. На площадках с такой ориентировкой действует максимальная разность сдвигающих и удерживающих сил, то есть они являются наиболее опасными в рассматриваемой точке.

В методе предельного равновесия и во всех его способах (класс *B*) условие предельного равновесия (условие пластичности, прочности) выполняется только вдоль поверхности скольжения, причем ориентировка площадок определяет-

ся из условия опасности (экстремальности) поверхности скольжения в целом, а не в каждой ее точке. То есть площадки среза (скольжения) не обязательно будут отклонены от направления первого главного напряжения на угол $\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$.

Рассмотрим пример. В точке выхода поверхности скольжения в откос линия действия первого главного напряжения совпадает с ним, так как по поверхности откоса отсутствуют касательные напряжения. Поэтому угол выхода поверхности скольжения в откос по методу предельного напряженного состояния составляет $\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$. Используя данный факт и проведя аналогию между рассматриваемыми методами, Г. Л. Фисенко установил граничные условия для круглоцилиндрической поверхности скольжения в методе предельного равновесия. Ошибочность такого подхода достаточно просто показать на примере сыпучих (не связных) горных пород. Как известно, наиболее опасная поверхность скольжения в откосе несвязных пород будет совпадать с ним. Поверхность же, построенная с использованием вышеуказанных граничных условий, будет всегда иметь некоторый запас устойчивости. Данный факт объясняется тем, что угол выхода поверхности скольжения в откос, равно как и форма (геометрия) поверхности скольжения в методе предельного равновесия, должны определяться не только углом внутреннего трения, но также и углом откоса. Это обстоятельство впервые доказано автором в диссертации [6], а во всех рассмотренных выше схемах и способах отражения не нашло. Рассмотрим теперь точку выхода предельно напряженной поверхности скольжения в откос. Если угол выхода поверхности скольжения отличен от $\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ и на этой площадке выполняется условие предельного равновесия, то оно тем более будет выполняться на площадке с углом выхода ε . По-видимому, в призме смещения откоса произвольной формы (то есть в таком откосе, который по форме и нагрузке не удовлетворяет уравнениям теории предельного напряженного состояния) существуют площадки, где удовлетворяется условие предельного равновесия, которые объединяются в небольшие по протяженности поверхности или же в пластические области. Такие области можно наблюдать при разрушении реальных откосов или моделей из эквивалентных материалов в виде трещин, напоминающих второе семейство поверхностей скольжения. Однако эти области

локальны и не заполняют всего пространства призмы смещения (разрывные решения), а зачатки таких поверхностей скольжения не формируют генеральную поверхность, по которой произойдет общее нарушение устойчивости откоса.

Еще одним достаточно показательным примером некорректного отождествления методов является то, что призма смещения в методе предельного равновесия должна разбиваться на отсеки линиями, подобными второму семейству поверхностей скольжения в методе предельного напряженного состояния (ВНИМИ). Однако заметим, что, во-первых, линии второго семейства в методе предельного напряженного состояния – это реально существующие предельно напряженные поверхности скольжения. При произвольной форме ненагруженного откоса они отсутствуют, так как не выполняются дифференциальные уравнения предельного напряженного состояния. Во-вторых, в откосах разбивку призмы смещения на отсеки можно производить любыми криволинейными или прямолинейными условными границами, но отбрасываемая часть должна быть заменена заведомо неизвестными реакциями (принцип освобожденности от действия связей), а именно неизвестными вектором сил и моментом сил. В этом случае законы механики не нарушаются. То есть, если призма смещения находится в предельном равновесии по некоторой поверхности скольжения, то расположение границ между отсеками не принципиально (в случае отсеков с элементарной длиной дуги поверхности скольжения). Это объясняется свойством внутренних сил – главный вектор внутренних сил равен нулю.

Таким образом, несмотря на некоторые сходства методов предельного напряженного состояния и предельного равновесия, их сравнение необходимо производить с осторожностью.

В принципе метод предельного напряженного состояния необходимо использовать для предупреждения обрушений, то есть изучения формы откосов и внешней нагрузки, при которых возможно обрушение, а метод предельного равновесия – для оползней.

Проведя анализ методов расчета, автор создал классификацию способов расчета устойчивости откосов по принципу используемых допущений (ошибочности) при выведении условий равновесия призмы смещения и обоснования геометрии наиболее слабой поверхности скольжения (табл. 2.2).

Таблица 2.2

Классификация методов (способов) расчета устойчивости откосов по типу используемого допущения

Методы и способы расчета	Поверхность скольжения	Допущения			
		1	2	3	4
		о выполнении условий предельного напряженного состояния в каждой точке призмы смещения	о форме и положении потенциальной поверхности скольжения	о распределении нормальных реакций вдоль поверхности скольжения (способы монолитного отсека обрушения)	о соотношении касательных и нормальных реакций по боковым граням отсеков (реакция горизонтальна, наклонна или предельно отклонена)
Метод предельного равновесия					
Способ Франсе, Винклера, Бернацкого	Плоская	–	+	–	–
Способ Цимбаревича		–	+	–	–
Способ Орнатского		–	+	–	–
Способ Хеннеса		–	+	–	–
Способ Токмурзина		–	+	–	–
Способ круглоцилиндрической поверхности скольжения (Терцаги, Крея, Гультина, Иванова-Тейлора)	Круглоцилиндрическая	–	+	–	+
Способ Феллениуса		–	+	–	+
Способ круга трения (прием Гольдштейна)		–	+	+	–
Способ Бишопа		–	+	–	+
Способ Фрелиха		–	+	+	–
Способ Како		–	+	+	–

Продолжение табл. 2.2

		1	2	3	4
Способ Чугаева-Вяземского		-	+	-	+
Способ Ломизе (нахождение потенциально опасной поверхности скольжения)		-	-/+	-	+
Графоаналитический способ Шахунянца		-	+	-	+
Способ Янбу		-	+	-	+
Способ Моргенштерна-Прайса		-	+	-	+
Способ Спенсера		-	+	-	+
Способ GLE		-	+	-	+
Способ Рендулика	Логарифмическая	-	+		
Способ Пузыревского-Кожевникова		-	+		
Способ Козлова		-	+		
Способ Никитина		-	+		
Способ Галустьяна		-	+		
Способ Гордеева (нахождение потенциально опасной поверхности скольжения)	Кубический сплайн	-	-/+	-	+
Способ Ясюнаса	Ломаная	-	+	-	+
Способ горизонтальных сил (Маслова-Берера)		-	+	-	+
Способ касательных сил (Шахунянца)		-	+	-	+
Способы Чугаева		-	+	-	+
Графостатический способ Перковского		-	+	-	+

		1	2	3	4
Способ блока и призм		–	+	–	+
Способ Копачи	Сложной формы (определяется методами вариационного исчисления)	–	–	–	+
Способ Соловьева		–	–	–	+
Способ Дорфмана		–	–	–	+
Способ Жабко		–	–	–	–
Метод предельного напряженного состояния					
Способ Соколовского	Определяется построением	+	–	–	–
Способ Голушкевича		+	–	–	–
Способ Гольдштейна (упрощение уравнения Кеттера-Массо)	Круглоцилиндрическая	+	+	–	–
Способ Бурмейстера (упрощение способа Соколовского)	Определяется форма поверхности равноустойчивого откоса	+	–	–	–
Способ Сенкова (упрощение способа Соколовского)		+	–	–	–
Способ Голованова (упрощение способа Соколовского)		+	–	–	–

Примечание.

1. Знак “+” означает, что допущение используется данным способом, а знак “–” – не используется.
2. Отсутствие знака в графе означает, что в способе данный вопрос не рассматривался, например, в способе Козлова обосновывалась только поверхность скольжения, без вывода условия равновесия.

2.2. Предварительные исследования

Как было показано выше, задача по определению предельных параметров однородных откосов произвольной, в частности плоской, формы является статически неопределимой. Большинство исследователей в качестве неизвестного параметра определяют касательную составляющую межблоковых сил (касательная реакция, действующая между вертикальными отсеками). Далее вводится ряд предположений о ее распределении, наиболее распространенными из которых являются (рис. 2.5).

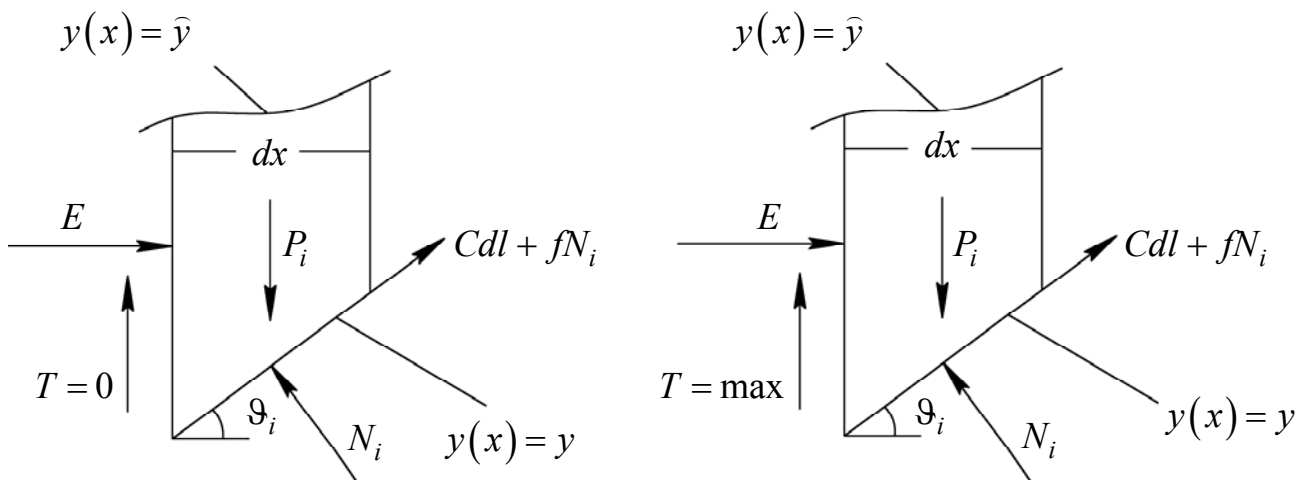


Рис. 2.5. Наиболее распространенные предположения о распределении межблоковых реакций

1. Касательная составляющая реакции равна нулю, то есть принимает минимальное значение ($T = 0$).

2. Касательная составляющая реакции максимальна, то есть по боковым граням отсеков выполняется условие предельного кулоновского равновесия ($T = \max$).

Для рассматриваемых предельных задач в работе [6] методами вариационного исчисления определены наиболее напряженные поверхности скольжения (для плоских однородных откосов). Для проверки их состоятельности произведено сравнение с круглоцилиндрическими поверхностями скольжения по степени опасности. На рис. 2.6, 2.7 приведены номограммы устойчивости, при помощи которых производится сравнение поверхностей скольжения (на рисунках:

пунктир – круглоцилиндрическая, сплошные – предлагаемые [6] поверхности скольжения; α, H – предельные угол и высота однородного откоса; γ – объемный вес горных пород; C, φ – сцепление и угол внутреннего трения горных пород откоса).

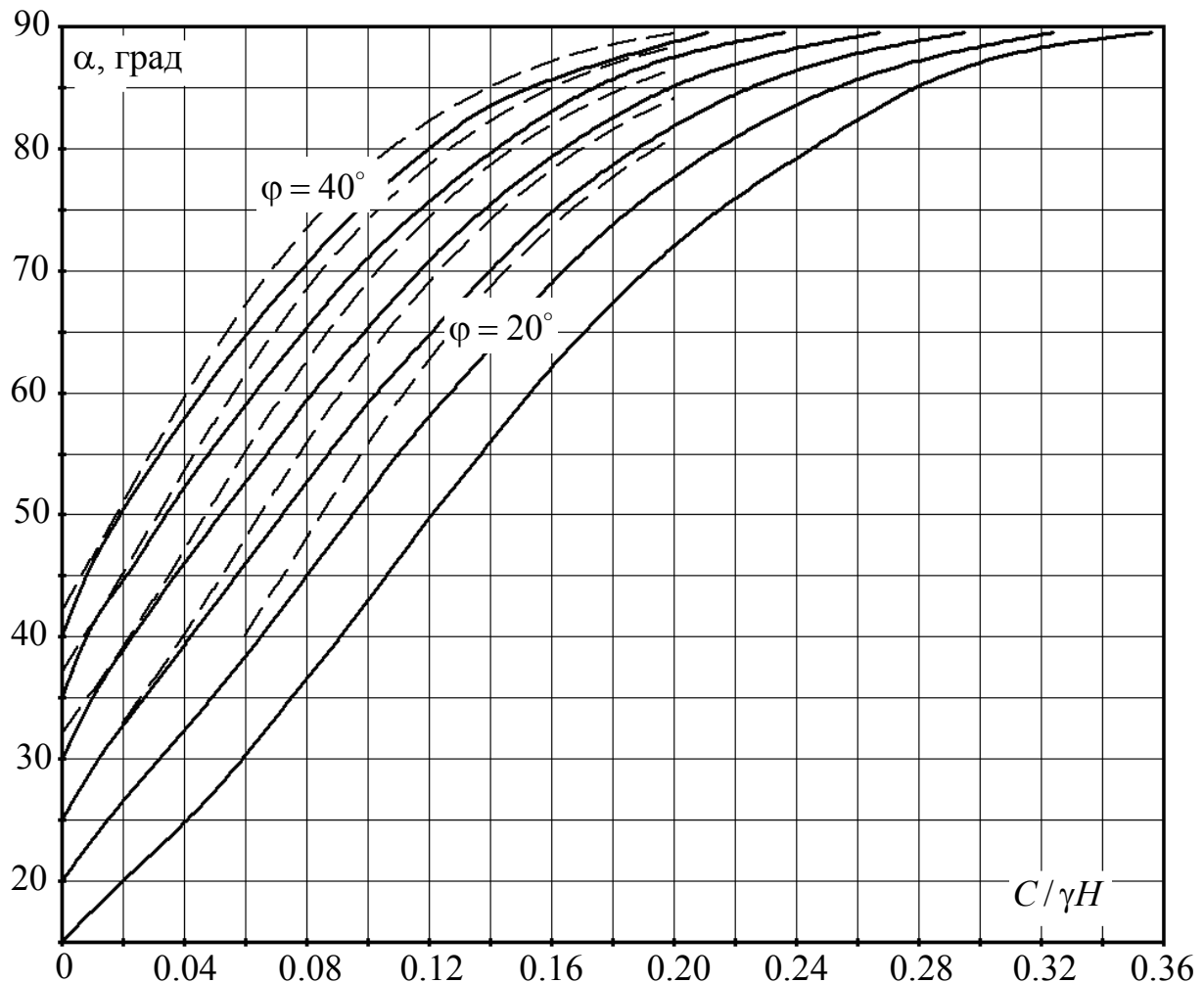


Рис. 2.6. Номограмма устойчивости $T = 0$

Анализируя номограммы устойчивости, сделаем ряд замечаний и выводов.

1. Круглоцилиндрическая поверхность скольжения может завышать углы устойчивых откосов до 5 – 7 градусов, то есть она для обоих используемых допущений оказалась наименее опасной, чем предлагаемые автором.

2. Отличительной особенностью предлагаемых поверхностей скольжения является то, что для сыпучих пород ($C = 0$) угол устойчивого откоса равен углу естественного откоса (см. рис. 2.6, 2.7), а поверхность скольжения вырождается в плоскость, совпадающую с откосом. Данный факт в аналитическом виде до-

казывается в работе [6]. По другим же поверхностям скольжения угол устойчивого откоса всегда будет несколько большим, в том числе и для сыпучих пород. Однако в литературе часто встречается неправомерная экстраполяция номограмм устойчивости. Вместе с тем интервалам экстраполирования соответствуют наиболее ответственные сооружения, например борта карьеров.

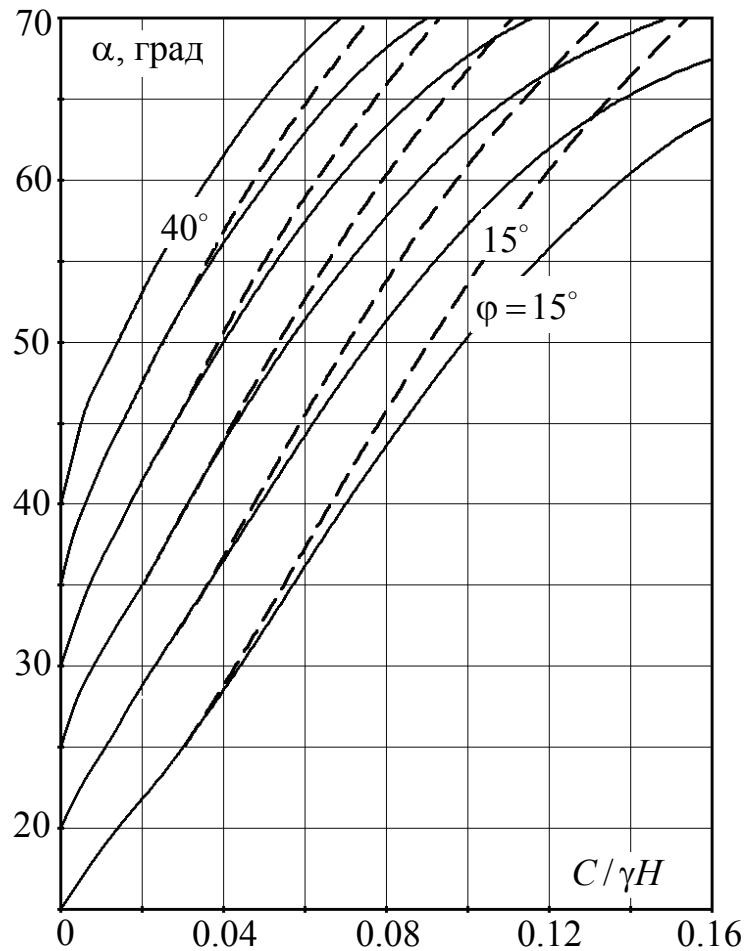


Рис. 2.7. Номограмма устойчивости $T = \max$

В действующем нормативном документе [7] номограммы устойчивости приводятся также не для всего интервала предельных углов откоса. Тем самым дается полная свобода действиям проектировщика, единственное, что необходимо соблюсти, – построить не менее трех поверхностей скольжения, близких к круглоцилиндрической, и произвести оценку устойчивости (способом алгебраического суммирования), выбрав из них наиболее напряженную (слабую).

Причинами завышения угла устойчивого откоса вообще и для сыпучих пород в частности является необоснованность как формы поверхности скольже-

ния (круглоцилиндрическая, логарифмическая спираль, плоскость, ломаная и т. д.), так и граничных условий для их построения.

Что касается формы поверхности скольжения, то здесь можно отметить, что она выбирается из условий простоты расчетов. Так, например, круглоцилиндрическая поверхность скольжения (Петерсон, 1916) позволяет достаточно просто оценить сумму моментов сил, действующих на призму смещения, а логарифмическая спираль (Рендулик, 1935) обладает тем свойством, что всякая нормаль к этой кривой образует постоянный угол с соответствующим радиус-вектором. Этим достигается простота расчетных схем и получаемых при этом результатов.

Практически во всех существующих расчетных схемах угол выхода поверхности скольжения в откос $\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ (угол между откосом и поверхностью скольжения в точке их пересечения) принимается по аналогии с теорией предельного напряженного состояния. Существующие модели круглоцилиндрической, логарифмической и других поверхностей скольжения инвариантны относительно угла откоса, это, в частности, означает, что призма смещения сохраняет свою форму для любых углов откоса (за исключением трещины отрыва). То есть при изменении угла откоса на некоторый угол поверхность скольжения развернется вместе с ним на тот же угол. Предлагаемые поверхности скольжения изменяют свою форму в зависимости от углов откоса и внутреннего трения, именно поэтому для сыпучих пород поверхность скольжения совпадает с откосом, чего нельзя сказать про существующие аналоги.

Для случая ($T = 0$) угол выхода поверхности скольжения в откос рассчитывается по формуле [6]:

$$\varepsilon = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} - \frac{\varphi}{2}. \quad (2.10)$$

Согласно формуле (2.10), минимальное значение угол выхода принимает при $\alpha = 0$, а его величина $\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$. То есть данное значение является асимптотически минимальным.

Для случая ($T = \max$) углы выхода представлены на рис. 2.8 (сплошные линии), там же приводится график зависимости $\varepsilon = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$ (пунктирная линия; $f = \operatorname{tg}\varphi$).

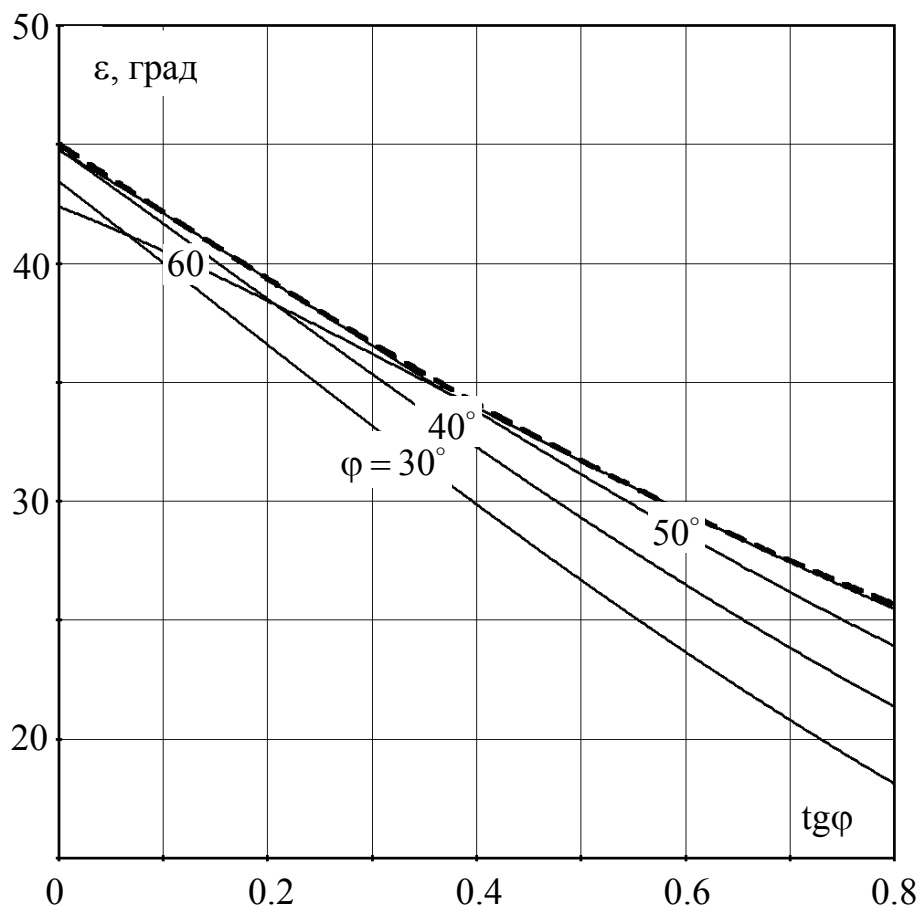


Рис. 2.8. Углы выхода поверхности скольжения в откос

Из теории расчета откосов известно, что пренебрежение касательной составляющей реакции (то есть $T = 0$) должно приводить к понижению запаса устойчивости откоса (то есть идет в запас устойчивости). Совместим номограммы устойчивости (для случаев: ($T = 0$) – сплошная линия и ($T = \max$) – пунктирная линия), полученные при использовании наиболее напряженных поверхностей (рис. 2.9).

Из рис. 2.9 заключаем:

1. Пренебрежение касательной составляющей межблоковой реакции может снизить угол устойчивого откоса до 8 градусов.

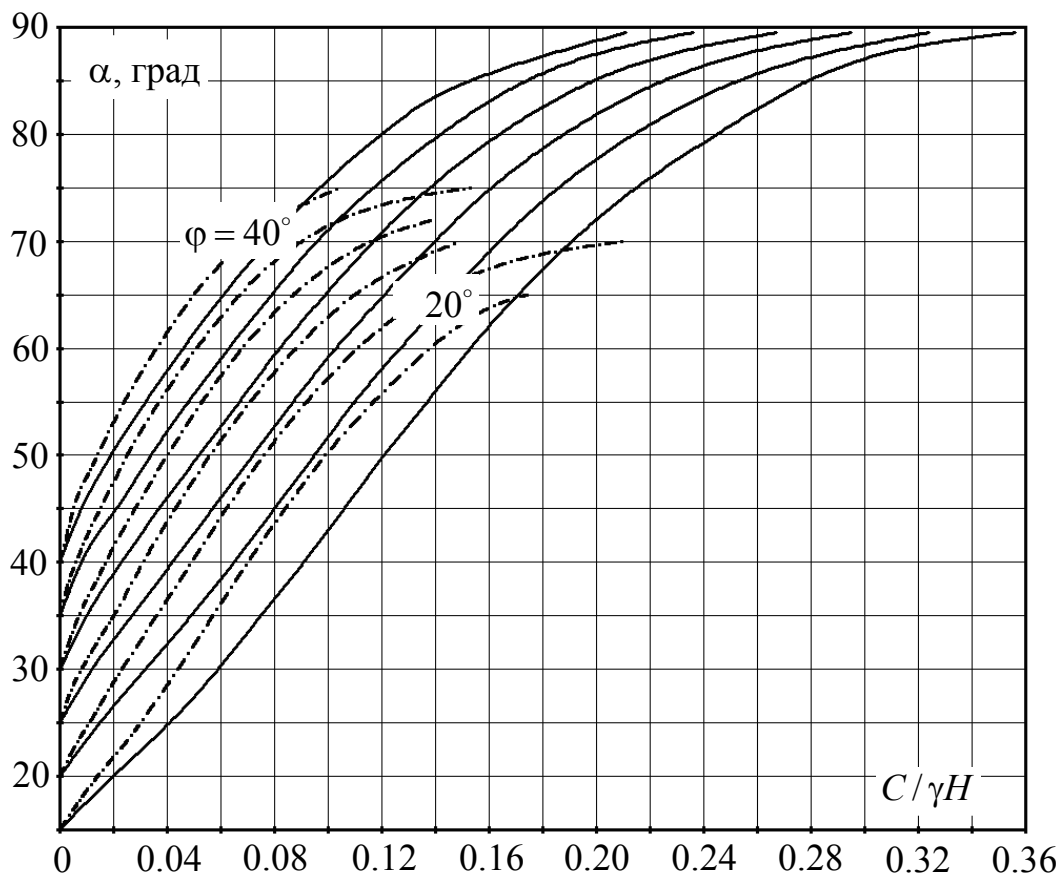


Рис. 2.9. Номограммы устойчивости при $T = 0$ и $T = \max$

2. Для сыпучих пород оба способа (поверхности скольжения) дают теоретически верные результаты.

3. Для представительных сооружений, например ботов карьеров, сложенных скальными породами с высокими значениями углов внутреннего трения, оба способа дают сопоставимые результаты.

4. Графики номограммы для двух способов (поверхностей скольжения) пересекаются, что невозможно ввиду пассивности сил трения и сцепления (они могут только повышать устойчивость). Данный факт, по-видимому, объясняется тем, что при увеличении угла откоса поверхность скольжения стремится к прямолинейной, силы межблокового взаимодействия практически не проявляются, а деформирование происходит в виде смещения “жесткого клина”. В этой связи учет сил взаимодействия между отсеками не всегда оправдан, и можно рекомендовать общую номограмму устойчивости плоских однородных откосов, являющуюся комбинацией двух способов расчета по соответствующим им наиболее опасным поверхностям скольжения (рис. 2.10).

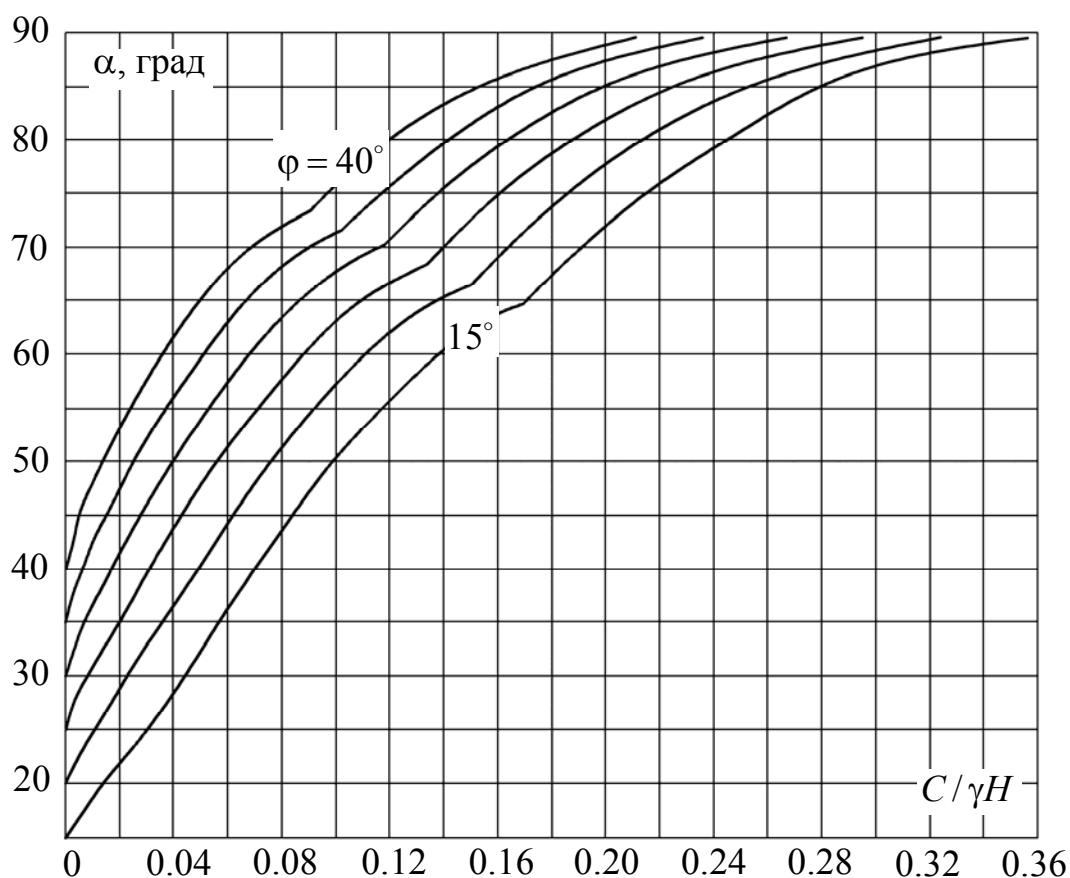


Рис. 2.10. Общая номограмма устойчивости плоских однородных откосов

В действительности оба рассматриваемых способа учета межблоковых реакций, как было показано выше, не являются правильными (строгими). Следовательно, и наиболее слабые поверхности, которые обосновали с использованием функционалов, не будут являться истинными, так как они заведомо несут в себе неизвестную погрешность. Однако даже при этом удалось для обоих способов впервые получить теоретически правильные результаты для сыпучих пород: предельный угол откоса равен углу внутреннего трения, а поверхность скольжения совпадает с откосом [6]. Кроме того, так как при обосновании геометрии поверхностей скольжения и определения предельных параметров откосов использовались крайние предельные значения касательных составляющих межблоковых реакций ($T = 0$ и $T = \max$), можно предположить, что истинное значение предельных параметров находится между ветвями графиков (см. рис. 2.9). Это особенно актуально для бортов карьеров, так как для таких крупных сооружений величина $C/\gamma H$ близка к нулю, а это свидетельствует о том, что

появляется возможность прогнозирования предельного угла борта карьера с абсолютной погрешностью не более 1 – 2 градуса.

2.3. Общая теория расчета устойчивости однородных откосов

Как известно, для равновесия плоской системы сил необходимо выполнение трех условий геометрической статики. С другой стороны, задачи статики весьма эффективно решаются при использовании общих принципов механики. Так, для равновесия механической системы с одной степенью свободы, согласно принципу возможных перемещений, необходимо и достаточно выполнение равенства [8]:

$$\sum \delta A_k^a + \sum \delta A_k^r = 0, \quad (2.11)$$

где $\sum \delta A_k^a$, $\sum \delta A_k^r$ – сумма элементарных работ всех действующих на систему активных сил и реакций связей, соответственно, при любом возможном перемещении системы.

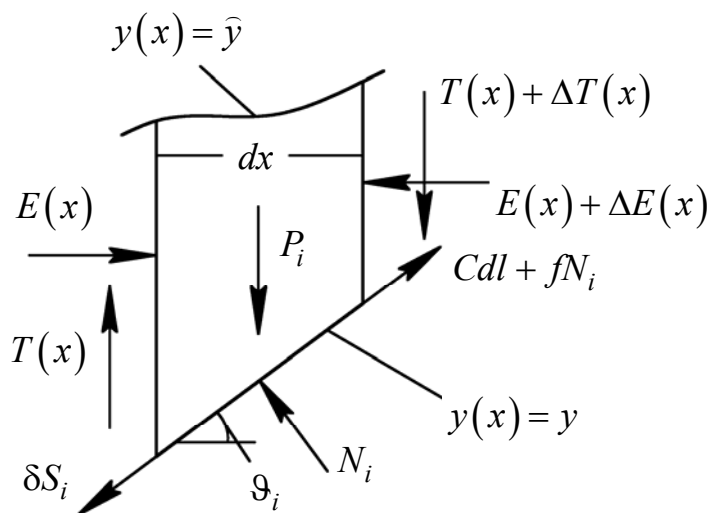


Рис. 2.11. Элементарный отсек и действующие на него силы

Необходимо указать на ошибку, допускаемую некоторыми исследователями. В литературе в качестве недостатка способа К. Терцаги упоминается то, что он удовлетворяет только одному условию статического равновесия – условию

моментов. К. Терцаги исходит из предположения о круглоцилиндрической поверхности скольжения, таким образом, возможным перемещением системы отсеков (призмы смещения) будет являться ее смещение по дуге окружности относительно некоторого центра. Пренебрегая внутренними силами (силами, действующими между отсеками, – межблоковыми реакциями) и используя выражение (2.11), получим необходимое и достаточное условие равновесия в виде разности внешних сдвигающих и удерживающих сил (моментов сил). Не составляет труда записать это условие через коэффициент устойчивости. Следовательно, условие равновесия по К. Терцаги является состоятельным, однако в способе не учтены межблоковые реакции, а поверхность скольжения принята гипотетично.

Введем систему координат (направление оси x – вправо, y – вверх) и рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы – призму смещения, состоящую из n материальных точек – центры масс элементарных отсеков (отсеки условно разделены вертикальными гранями). Выделим из призмы смещения произвольный отсек и рассмотрим его равновесие под действием приложенных активных сил и реакций связей (рис. 2.11). Условие равновесия для данного отсека представляется равенством:

$$-E(x)\cos\vartheta_i\delta S_i + (E(x) + \Delta E(x))\cos\vartheta_i\delta S_i - T(x)\sin\vartheta_i\delta S_i + (T(x) + \Delta T(x))\sin\vartheta_i\delta S_i + P_i\sin\vartheta_i\delta S_i - R_i\delta S_i = 0, \quad (2.12)$$

где ϑ_i – угол наклона поверхности скольжения в точке; $E(x)$, $T(x)$ – соответственно функции нормальной и касательной составляющих реакций по боковым граням отсека; Δ – приращение функции; δS_i – возможное (виртуальное) перемещение отсека; P_i – вес отсека; R_i – сила сопротивления по площадке скольжения.

Для откоса с предельными геометрическими параметрами на площадке скольжения выполняется условие предельного равновесия:

$$R_i = fN_i + Cdl = fN_i + C\frac{dx}{\cos\vartheta_i}, \quad (2.13)$$

где $f = \operatorname{tg}\varphi$ – коэффициент внутреннего трения (тангенс угла внутреннего трения); N_i – нормальная реакция площадки скольжения; C – сцепление массива горных пород; dl, dx – соответственно дифференциалы дуги и аргумента.

Составим условие равновесия по направлению нормали к площадке скольжения:

$$N_i - P_i \cos \vartheta_i - \Delta T(x) \cos \vartheta_i + \Delta E(x) \sin \vartheta_i = 0. \quad (2.14)$$

Используя выражения (2.12), (2.13) и (2.14), запишем условие равновесия отсека в общем виде:

$$[\Delta E(x)(1 + f \operatorname{tg}\vartheta_i) + \Delta T(x)(\operatorname{tg}\vartheta_i - f) + P_i(\operatorname{tg}\vartheta_i - f) - C(1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta_i) dx] \cos \vartheta_i \delta S_i = 0. \quad (2.15)$$

Преобразуем уравнение (2.15), используя соотношения:

$$dx \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta E(x) = dE(x) = dE, \Delta T(x) = dT, \Delta E(x) = \frac{\partial E}{\partial x} dx = E' dx, \Delta T(x) = T' dx.$$

$$[E'(1 + f \operatorname{tg}\vartheta_i) dx + T'(\operatorname{tg}\vartheta_i - f) dx + P_i(\operatorname{tg}\vartheta_i - f) - C(1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta_i) dx] \cos \vartheta_i \delta S_i = 0. \quad (2.16)$$

Запишем условие равновесия всей системы (призмы смещения), выразив возможное перемещение каждого отсека δS_i через возможное (горизонтальное) перемещение всей призмы δS_Γ :

$$\delta S_i \cos \vartheta_i = \delta S_\Gamma.$$

Кроме того, учтем следующие соотношения:

$$P_i = \gamma(\hat{y} - y) dx, \operatorname{tg}\vartheta_i = y',$$

где γ – объемный вес горных пород; \hat{y}, y – функции линий откоса и поверхности скольжения соответственно; y' – производная функции поверхности скольжения.

Таким образом, имеем условие равновесия призмы смещения в виде:

$$\int [\gamma(\hat{y} - y)(y' - f) - C(1 + y'^2) + E'(1 + fy') + T'(y' - f)] dx \delta S_\Gamma = 0. \quad (2.17)$$

Преобразуем условие равновесия (2.17) к виду:

$$\int [\gamma(\hat{y} - y)(y' - f) - C(1 + y'^2) + (T' + fE')y'] dx + (E_1 - E_0) - f(T_1 - T_0) = 0, \quad (2.18)$$

где T_0, E_0, T_1, E_1 – внешние касательные и нормальные реакции на вертикальных гранях призмы смещения соответственно слева и справа.

Потребуем в выражении (2.18) выполнения условий $\int T'y'dx = 0, \int fE'y'dx = 0$, тогда, согласно лемме Дюбуа-Реймона [9], при отсутствии внешних касательных и нормальных составляющих реакций, будем иметь $y' = \text{const}$.

Таким образом, для того чтобы межблоковые реакции на возможном перемещении всей призмы не совершали работу, то есть их можно было бы не учитывать при расчете (идеальные межблоковые связи, $\sum \delta A_k' = 0$), необходимо выполнение двух условий: 1) $T_0 = E_0 = T_1 = E_1 = 0$; 2) $y' = \text{const}$ (поверхность скольжения – плоскость). С другой стороны, при выполнении только второго условия межблоковые реакции работу совершать также не будут. Они выйдут из-под знака интеграла и будут считаться внешними, действующими на призму смещения (или ее часть) по вертикальным граням крайних отсеков.

Зададимся вопросом: как должны распределяться между собой приращенная касательной и нормальной составляющих межблоковых реакций (далее просто реакций), чтобы при перемещении отсека они совершали экстремальную работу? Таким образом, имеем задачу линейного программирования:

$$E'(1 + f \operatorname{tg} \vartheta_i) dx + T'(\operatorname{tg} \vartheta_i - f) dx \rightarrow \text{extr}.$$

Градиент (антиградиент) функции в этом случае имеет координаты $\overrightarrow{\text{grad}} = \{1 + f \operatorname{tg} \vartheta_i, \operatorname{tg} \vartheta_i - f\}$, поэтому экстремальную работу на перемещении реакция будет производить при следующем условии (рис. 2.12):

$$\frac{\partial T}{\partial E} = \frac{T'}{E'} = \frac{\operatorname{tg} \vartheta_i - f}{1 + f \operatorname{tg} \vartheta_i} = \operatorname{tg}(\vartheta_i - \varphi). \quad (2.19)$$

Докажем справедливость равенства (2.19). Доказательство можно дать на основе принципа наименьшего принуждения, открытого К. Ф. Гауссом в 1829 г. [10]. Принципу К. Ф. Гаусса, в частности, можно дать энергетическое толкование, которое И. И. Рахманинов назвал началом наименьшей потерянной работы [10]: действительное движение среди кинематически возможных выделяется тем, что для него работа реакций связей на путях отклонения этого движения от свободного движения в каждый данный момент есть минимум. Если мы мыс-

ленно уберем реакцию смежного отсека, то есть заменим несвободное движение свободным, то направление движения отсека не изменится.

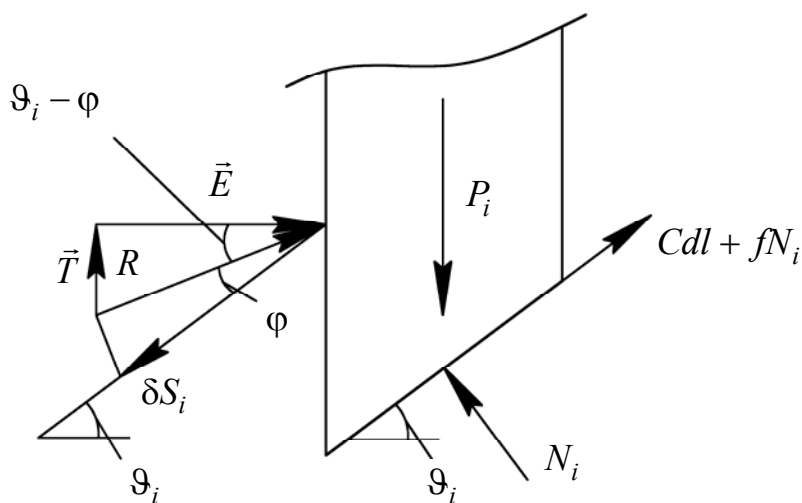


Рис. 2.12. Направление действия межблоковой реакции

Поэтому угол наклона вектора отклонения несвободного движения от свободного совпадает с углом наклона площадки скольжения. Работа реакции в этом случае определится зависимостью

$$A_R = R[f \sin(\xi - \vartheta_i) - \cos(\xi - \vartheta_i)]\Delta S_i,$$

где R – реакция смежного отсека; ξ – угол наклона реакции к горизонту; ΔS_i – перемещение отсека по площадке сдвига (вектор отклонения).

Учитывая, что величины R и ΔS_i произвольны и постоянны, для выполнения условия экстремума работы приравняем ее производную по ξ нулю. Отсюда

$$\xi = \vartheta_i - \varphi.$$

Из принципа К. Ф. Гаусса также следует, что для действительного движения системы реакции связей минимальны (Остроградский, 1836) [10]. Равновесие является одним из истинных состояний системы. Поэтому, формализуя задачу, необходимо найти такой угол ξ , чтобы удержать в равновесии отсек минимальной по величине силой R . Решение поставленной задачи приводит к тем же результатам.

Важно отметить, что, согласно уравнению (2.19), направление реакции не зависит от формы отсека, а зависит от угла наклона его основания.

Решаем совместно уравнения (2.16) и (2.19) относительно производных функций межблоковых реакций:

$$T' = -\frac{\gamma(\hat{y} - y)(y' - f) - C(1 + y'^2)}{(1 + f^2)(1 + y'^2)}(y' - f); \quad (2.20)$$

$$E' = -\frac{\gamma(\hat{y} - y)(y' - f) - C(1 + y'^2)}{(1 + f^2)(1 + y'^2)}(1 + fy'). \quad (2.21)$$

Подставляем полученные соотношения (2.20) и (2.21) в уравнение (2.18), и после преобразований необходимое и достаточное условие равновесия призмы смещения представляется в виде:

$$\int \left[\frac{\gamma(\hat{y} - y)(y' - f) - C(1 + y'^2)}{1 + y'^2} \right] dx + (E_1 - E_0) - f(T_1 - T_0) = 0. \quad (2.22)$$

Отметим, что касательная составляющая межблоковой реакции не может превышать величины кулоновского сопротивления сдвигу.

Выясним физический смысл функционала (2.22):

$$\sum (\gamma h \sin \vartheta_i \cos \vartheta_i - f \gamma h \cos^2 \vartheta_i - C) dl \cos \vartheta_i = \sum (\tau - f \sigma_n - C) dl \cos \vartheta_i.$$

Таким образом, необходимым и достаточным условием равновесия призмы смещения или ее части является нуль-вектор алгебраической суммы проекций внешних сил, действующих по площадкам скольжения (вдоль поверхности скольжения) каждого отсека на горизонтальную ось. Как и следовало ожидать, внутренние силы не входят в условие равновесия в явном виде, что не противоречит представлениям теоретической механики.

Пусть имеется ненагруженный откос несвязных пород. Кроме того, предположим, что поверхность скольжения пересекает линию откоса в начале и конце интервала, то есть на концах интервала выполняется условие $\hat{y} - y = 0$. В этом случае, согласно лемме Лагранжа [9], из уравнения (2.22) будем иметь $y' = f$ во всех точках. То есть поверхность скольжения будет совпадать с откосом, что теоретически правильно для несвязных пород.

Анализируя уравнение (2.16), замечаем, что при условии $0 \leq \vartheta_i \leq \varphi$ работа касательной составляющей межблоковой реакции меняет знак. По теореме Менабреа [11], согласно которой при добавлении каких-либо связей (межблоковой реакции) потенциальная энергия (работа) уменьшается и никогда не может увеличиваться, это невозможно. Поэтому на этом участке реакция горизонтальна (рис. 2.13).

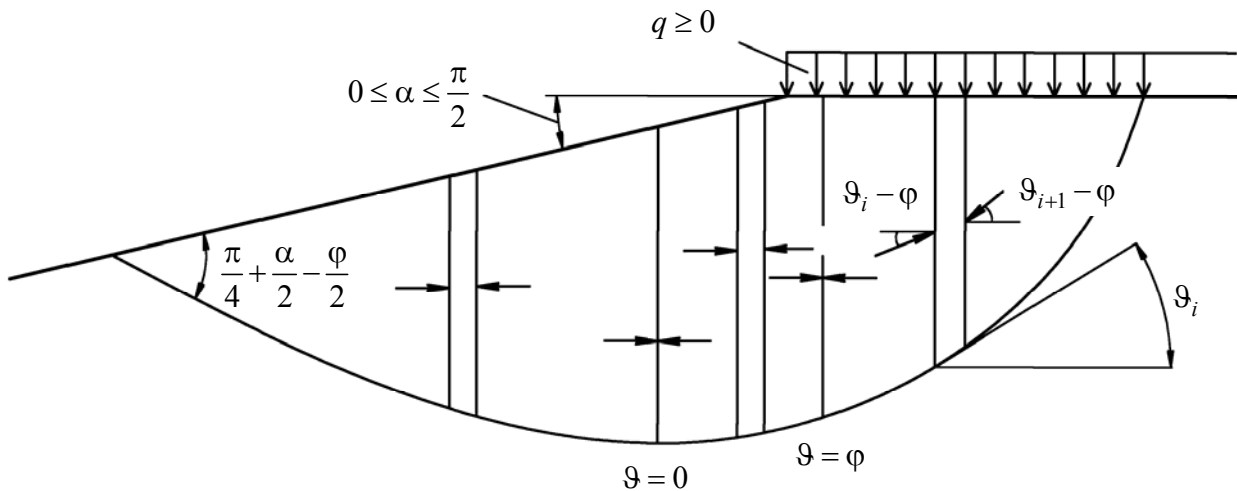


Рис. 2.13. Распределение реакций на различных участках поверхности скольжения

В этом случае производная межблоковой реакции определится формулой:

$$E' = -\frac{\gamma(\bar{y} - y)(y' - f) - C(1 + y'^2)}{(1 + fy')}$$

а условие равновесия призмы (или ее части) примет вид:

$$\int \left[\frac{\gamma(\bar{y} - y)(y' - f) - C(1 + y'^2)}{1 + fy'} \right] dx + (E_1 - E_0) - f(T_1 - T_0) = 0. \quad (2.23)$$

Функционал (2.23) достаточно подробно исследован автором в работе [6].

На участке ($\vartheta_i \leq 0$) касательная составляющая межблоковой реакции также отсутствует ввиду увеличения угла наклона поверхности скольжения по мере приближения к откосу. Таким образом, на пассивном участке ($\vartheta_i \leq \varphi$) межблоковая реакция всюду горизонтальна (см. рис. 2.13).

Таким образом, условие равновесия для всей призмы смещения свободного откоса имеет вид:

$$\int_{\vartheta \leq \varphi} \left[\frac{\gamma(\bar{y} - y_1)(y'_1 - f) - C(1 + y_1'^2)}{1 + fy'_1} \right] dx + \int_{\vartheta > \varphi} \left[\frac{\gamma(\bar{y} - y_2)(y'_2 - f) - C(1 + y_2'^2)}{1 + y_2'^2} \right] dx = 0. \quad (2.24)$$

Перейдем к рассмотрению решения задачи по нахождению потенциальной поверхности скольжения в однородных откосах частного вида (плоских). Заметим, что поверхность скольжения в этом случае будет проходить как под откосом, так и под горизонтальной площадкой (верхней бермой).

Условие равновесия призмы смещения (2.24) получено из предположения равновесия каждого отсека, то есть выполнения предельного равновесия в каждой точке поверхности скольжения. Условия равновесия (2.15, 2.16) будут выполняться при произвольной высоте отсека, однако вес (нагрузка) или прочность (сцепление) должны быть необходимыми и достаточными для выполнения условия предельного равновесия при заданной форме откоса и физико-механических характеристиках горных пород. Предположим, что найдется такой параметр $n > 0$, одинаковый для всех отсеков, разделив на который величину сцепления (или умножив объемный вес), условие предельного равновесия будет выполняться в каждой точке поверхности скольжения. Поместив начало системы координат в точку пересечения поверхности скольжения с откосом, получим следующую задачу вариационного исчисления для нахождения наиболее опасной поверхности скольжения свободного откоса:

$$\int_{\vartheta \leq \varphi} \left[\frac{(kx - y_1)(y'_1 - f) - \lambda(1 + y_1'^2)}{1 + fy'_1} \right] dx + \int_{\vartheta > \varphi} \left[\frac{(kx - y_2)(y'_2 - f) - \lambda(1 + y_2'^2)}{1 + y_2'^2} \right] dx + \int_{\vartheta > \varphi} \left[\frac{(H - y_3)(y'_3 - f) - \lambda(1 + y_3'^2)}{1 + y_3'^2} \right] dx \rightarrow \text{extr}, \quad (2.25)$$

где k – тангенс угла наклона откоса; H – высота откоса; $\lambda = \frac{C}{\gamma n} > 0$ – постоянная, зависящая от формы откоса, физико-механических свойств горных пород,

и определяет предельную высоту откоса; n – постоянная, обеспечивающая выполнение условия предельного равновесия в пределах каждого отсека.

Ввиду важнейшего свойства вариации функционалов (вариация суммы равна сумме вариаций), для решения поставленной задачи необходимо определить функции, доставляющие экстремум каждому из функционалов в отдельности. Рассмотрим первый функционал (2.25). Уравнение Л. Эйлера [9] для данного функционала представляет собой нелинейное относительно производных дифференциальное уравнение второго порядка. Поэтому для упрощения его решения необходимо произвести замену переменных в функционале, тем самым понизив порядок уравнения, и возвратиться к прежним переменным. Например, можно положить:

$$\begin{cases} kx - y_1 = y \\ x = x \end{cases}.$$

Граничным условием для определения произвольной постоянной в уравнении Л. Эйлера является условие трансверсальности [9], в принятой системе координат оно имеет вид:

$$y_1'(x=0) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha + \varphi}{2}\right).$$

Вторым условием для принятой системы координат является $y_1(0) = 0$.

Воспользовавшись условием трансверсальности, уравнение, определяющее опасную поверхность скольжения, в принятой системе координат имеет вид:

$$kx - y_1 = \lambda \frac{(kf - 1)y_1'^2 + 2(k + f)y_1' + 1 - kf}{fy_1'^2 - 2f^2y_1' + k - f + kf^2}. \quad (2.26)$$

Аналогично для второго функционала (2.25) имеем дифференциальное уравнение:

$$kx - y_2 = (\lambda + C_1) \frac{(1 + y_2'^2)^2}{2y_2'^3 - (k + 3f)y_2'^2 + 2kfy_2' + k - f}. \quad (2.27)$$

Произвольную постоянную C_1 определим из условия:

$$kx - y_1|_{y_1'=\operatorname{tg}\varphi} = kx - y_2|_{y_2'=\operatorname{tg}\varphi}.$$

Таким образом, окончательно будем иметь уравнение:

$$kx - y_2 = \lambda \frac{1 + kf}{1 + f^2} \frac{(1 + y_2'^2)^2}{2y_2'^3 - (k + 3f)y_2'^2 + 2kfy_2' + k - f}. \quad (2.28)$$

Перейдем к определению условия для поверхности скольжения в точке стыка участков откоса и горизонтальной площадки, то есть условия на прямой $x = H \operatorname{ctg} \alpha$. То есть рассматриваются два последних интеграла (2.25), что приводит к разрывной вариационной задаче второго рода [9]. Условие в точке стыка представляет собой равенство условий трансверсальности по обе стороны от прямой $x = H \operatorname{ctg} \alpha$. Таким образом, имеем уравнение:

$$F_2 y_2' \Big|_{x=H \operatorname{ctg} \alpha - 0} = F_3 y_3' \Big|_{x=H \operatorname{ctg} \alpha + 0}, \quad (2.29)$$

где $F_{y'}$ – частная производная подынтегрального выражения по производной функции.

Взяв производные от подынтегральных выражений, приравняв их, а также учтя, что ординаты концов экстремалей в точке стыка равны, получим выражение:

$$y_2' = y_3'.$$

Таким образом, производные в точке стыка равны, это свидетельствует о том, что поверхность скольжения не преломляется при переходе, например, с участка откоса уступа на участок площадки. Можно показать, что это утверждение справедливо для произвольной формы границы между смежными отсечками.

Положив в правой части уравнения (2.27) $k = 0$, получим уравнение, определяющее форму наиболее опасной поверхности скольжения для третьего функционала (2.25):

$$H - y_3 = (\lambda + C_1) \frac{(1 + y_3'^2)^2}{2y_3'^3 - 3fy_3'^2 - f}. \quad (2.30)$$

Для определения произвольной постоянной в этом уравнении приравняем нулю подынтегральное выражение третьего функционала (2.25), что является требованием выполнения условия предельного равновесия для крайнего отсека:

$$F_3 = \frac{\gamma(H - y_3)(y'_3 - f) - C(1 + y_3'^2)}{1 + y_3'^2} = 0.$$

Определяем из данного уравнения минимально возможную высоту крайнего отсека, в итоге получим следующее граничное условие:

$$y'_3(x_0) = f + \sqrt{1 + f^2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right), \quad H - y_3 = H_{90} = \frac{2C}{\gamma} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Далее определяем в уравнении (2.30) произвольную постоянную и окончательно уравнение, описывающее наиболее опасную поверхность скольжения под бермой, будет иметь вид:

$$H - y_3 = \frac{C}{\gamma} \frac{(1 + y_3'^2)^2}{2y_3'^3 - 3fy_3'^2 - f}. \quad (2.31)$$

Если призма смещения находится в равновесии, то каждый ее отсек также уравновешен. В частности, это означает, что на возможном перемещении всей призмы смещения работы внутренних и внешних сил, действующих на отсек, равны по модулю. Удельная обобщенная внутренняя сила равна подынтегральному выражению (2.22) с обратным знаком:

$$F^i(x) = -F^e(x) = -\frac{\gamma(\hat{y} - y)(y' - f) - C(1 + y'^2)}{1 + y'^2}, \quad (2.32)$$

где $F^i(x)$, $F^e(x)$ – обобщенная внутренняя и внешняя сила на возможном (горизонтальном) перемещении всей механической системы (призмы смещения) соответственно.

Заметим, что функция обобщенной внутренней силы (2.32) должна убывать, в противном случае работа межблоковых реакций на возможном перемещении системы станет положительной, что невозможно. Другими словами, межблоковые реакции станут отрицательно влиять на устойчивость. Действительно, когда межблоковые реакции постоянны (не зависят от x), то они не со-

вершают работу на возможном перемещении (это не означает, что отсутствует межблоковое взаимодействия и напряжения равны нулю), а производная функции межблоковых реакций равна нулю. Таким образом, нулевое значение работы межблоковых реакций является ее экстремальным значением (максимальным), превысить которое она не может. В общем случае, работа межблоковых реакций представляет собой сумму работ нормальных и касательных составляющих, которые независимы между собой и являются заведомо отрицательными. Поэтому равенство нулю работы внутренних сил на возможном перемещении системы означает: $E' = T' = 0$. Положим в уравнении (2.18) $E' = T' = 0$, получим следующее условие равновесия:

$$\int \left[\gamma(\hat{y} - y)(y' - f) - C(1 + y'^2) \right] dx + (E_1 - E_0) - f(T_1 - T_0) = 0. \quad (2.33)$$

Уравнения (2.22), (2.23), (2.33) позволяют оценить устойчивость призмы смещения по произвольной поверхности скольжения.

Определим условия применения второго и третьего функционалов (2.25). Для этого продифференцируем уравнение (2.32) по x и составим неравенство (индексы функции опущены):

$$\frac{dF^e}{dx} = \frac{\partial F}{\partial y'} \frac{dy'}{dx} + \frac{\partial F}{\partial(\hat{y} - y)} \frac{d(\hat{y} - y)}{dx} = \gamma \left[y''(\hat{y} - y) \frac{1 + 2fy' - y'^2}{(1 + y'^2)^2} + \frac{(\hat{y}' - y')(y' - f)}{1 + y'^2} \right] > 0, \quad (2.34)$$

где y'' – вторая производная функции поверхности скольжения по x .

В случае, когда поверхность скольжения зарождается под действием гравитационных сил, например, в однородных откосах, первое слагаемое в неравенстве (2.34) не может быть меньше нуля. Произведем предварительный анализ условия (2.34). Первое слагаемое положительно при вогнутой форме поверхности скольжения и угле ее наклона, не превышающем значения $\pi/4 + \varphi/2$, или же при выпуклой форме поверхности скольжения и углах ее наклона, больших $\pi/4 + \varphi/2$.

Продифференцируем уравнение (2.28) по x и подставим их совместно в выражение (2.34). Приравняем его нулю, откуда получим условие для опреде-

ления предельного значения производной поверхности скольжения под откосом:

$$(f+k)s^4 + 4(1-kf)s^3 + 2(kf^2 - 3f - 2k)s^2 + 4f(f+k)s + f - k - 2kf^2 = 0, \quad (2.35)$$

где s – предельное значение производной (тангенса угла наклона) наиболее опасной поверхности скольжения, описываемой уравнением (2.28).

Проделаем подобную операцию с уравнениями (2.30) или (2.31). Как показывают расчеты, выполнение условия (2.34) под бермой с поверхностью скольжения, описываемой уравнениями (2.30), (2.31), невозможно. Это свидетельствует о том, что данными уравнениями поверхность скольжения под верхней бермой не описывается.

В зависимости от углов откоса и внутреннего трения предельное значение производной (2.35) может получаться как больше, так и меньше величины $\pi/4 + \varphi/2$. При $\alpha = \pi/4 + \varphi/2$ предельный угол наклона поверхности скольжения также равен $\pi/4 + \varphi/2$. Однако условие трансверсальности для функционала (2.22) на произвольной вертикальной грани при произвольной форме откоса дает угол $\pi/4 + \varphi/2$. Это означает, что при любом угле откоса α , $s \leq \operatorname{tg}(\pi/4 + \varphi/2)$, то есть данный угол доставляет абсолютный экстремум вариационной задаче и приурочивается к границе участков откоса и бермы, то есть к линии $x = H \operatorname{ctg} \alpha$.

Для определения наиболее опасной части поверхности скольжения для функционала (2.33) необходимо решить следующую вариационную задачу:

$$\int \left[\gamma(\hat{y} - y)(y' - f) - C(1 + y'^2) \right] dx \rightarrow \max. \quad (2.36)$$

Необходимо отметить принципиальную разницу между функционалами (2.36) и (2.25). В функционале (2.36) отсутствует масштабный параметр λ , отвечающий за выполнение условия предельного равновесия. Дело в том, что функционал (2.36) предусматривает отсутствие влияния на устойчивость межблоковых реакций (внутренних сил), то есть равновесие обеспечивают только

внешние силы, в том числе и боковые. Поэтому априори полагается выполнение условия предельного равновесия в каждой точке поверхности скольжения.

Для участка откоса $\hat{y} = kx$ дифференциальное уравнение поверхности скольжения (уравнение Л. Эйлера) имеет вид:

$$(kx - y_4) = \frac{C_2 - \frac{C}{\gamma}(y_4'^2 - 2ky_4' - 1)}{k - f}, \quad (2.37)$$

где C_2 – произвольная постоянная.

Для определения произвольной постоянной в уравнении (2.37) воспользуемся вполне очевидным граничным условием:

$$y_4'(x_0) = f + \sqrt{1 + f^2} = \operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right), \quad kx - y_4 = H_{90} = \frac{2C}{\gamma} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right), \quad \Rightarrow C_2 = 0.$$

Таким образом, окончательно будем иметь:

$$(kx - y_4) = -\frac{C}{\gamma} \frac{(y_4'^2 - 2ky_4' - 1)}{k - f}. \quad (2.38)$$

Продифференцируем обе части выражения (2.38) по x , после несложных преобразований получим:

$$y_4'' = \frac{\gamma(k - f)}{2C}. \quad (2.39)$$

Таким образом, согласно уравнению (2.39), вторая производная поверхности скольжения на рассматриваемом участке постоянна и зависит от угла откоса и физических характеристик горного массива. При этом поверхность скольжения может быть выпуклой, плоской или вогнутой в зависимости от угла наклона откоса (верхней бермы). Данный результат весьма интересен и совпадает с результатами моделирования эквивалентными материалами (см. например, Г. Л. Фисенко) [12].

Положим в уравнении (2.38) $k = 0$, тогда уравнение поверхности скольжения под горизонтальной площадкой (верхней бермой) будет иметь вид:

$$(H - y_5) = \frac{C(y_5'^2 - 1)}{\gamma \operatorname{tg}\varphi}. \quad (2.40)$$

Проверка уравнения (2.38) условием (2.34) показывает, что оно выполняется (разумеется, с обратным знаком) для углов откосов, не превышающих величины $\pi/4 + \varphi/2$.

Таким образом, для плоских однородных откосов наиболее слабая поверхность скольжения состоит из трех участков (рис. 2.14), описываемых уравнениями (2.26), (2.28) и (2.40) соответственно.

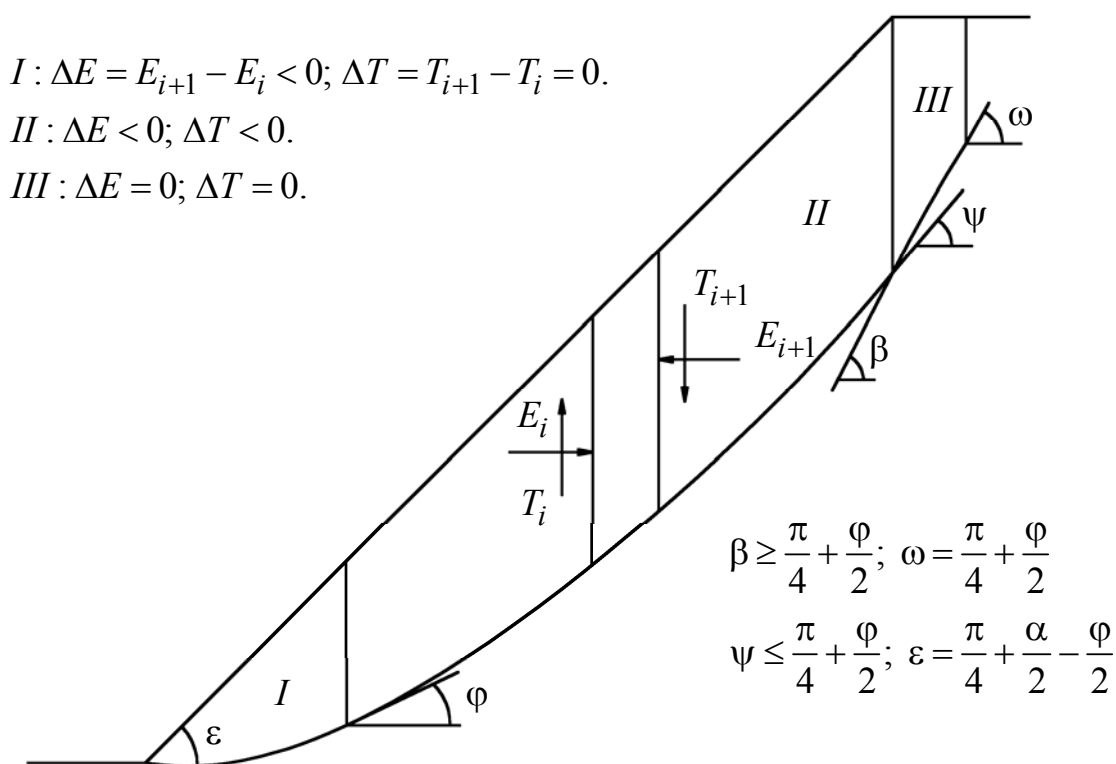


Рис. 2.14. Схема к построению поверхности скольжения и оценке устойчивости однородного откоса

Для построения поверхности скольжения необходимо также вычислить следующие угловые параметры (см. рис. 2.14):

$$\operatorname{tg} \psi = s, \operatorname{tg} \beta = t, \frac{C(t^2 - 1)}{\gamma \operatorname{tg} \varphi} = \lambda \frac{1 + kf}{1 + f^2} \frac{(1 + s^2)^2}{2s^3 - (k + 3f)s^2 + 2kfs + k - f}. \quad (2.41)$$

Функционал (2.36) впервые в качестве условия равновесия призмы смещения и целевого выражения был предложен Ю. И. Соловьевым [13]. Он бездоказательно считал этот функционал основным условием равновесия для произвольной поверхности скольжения и на различных ее участках. Кроме того, при нахождении потенциальной поверхности скольжения было сделано неверное предположение о том, что любая часть экстремальной поверхности также должна обладать экстремальным свойством (причем только по углу наклона). С другой стороны, Ю. И. Соловьеву необходимо отдать должное, так как именно

он впервые использовал принцип возможных перемещений для обоснования условия равновесия призмы смещения. Отметим также, что Ю. И. Соловьевым рассматривался гипотетический грунт, и поэтому о влиянии внешних сил на устойчивость призмы смещения (E_0, E_1, T_0, T_1) ничего не говорилось. Однако, как показано выше, условие устойчивости (2.33), включая внешние силы, является частным случаем общего условия устойчивости (2.18).

Дифференциальное уравнение (2.40) впервые было получено А. Г. Дорфманом [14] оптимизацией функционала Ю. И. Соловьева (2.36), однако при обосновании потенциальной поверхности скольжения для вертикального откоса и его предельной высоты не учитывалась высота вертикальной трещины отрыва, а граничное условие определялось в виде условия трансверсальности на поверхности горизонтальной площадки. Это привело к ошибочному завышению коэффициента устойчивости для откоса и как следствие к завышению предельной высоты откоса (для идеально связных пород $H = 4C/\gamma$) [14]. Эта же неточность послужила причиной ошибочной оценки давления грунта на подпорную стенку [15], вследствие неправильного обоснования пределов интегрирования. Кроме того, если составить условие трансверсальности для функционала (2.36) на пересечении с откосом, то выяснится, что они не пересекаются. Незнание границ применения функционала (2.36) приводило к абсурдным результатам и в конце концов заставило отказаться вышеупомянутых исследователей от его дальнейшего анализа.

2.4. Предельные параметры плоских однородных откосов

Представим уравнения, определяющие поверхность скольжения на различных участках, в символическом виде:

$$kx - y = \mu\eta(p),$$

где $p \equiv y'$ – параметр.

Тогда $d(kx - y) = \mu\eta'(p)dp$. Дифференцируя левую часть уравнения и принимая во внимание, что $dy = p dx$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} dx = \mu \frac{\eta'(p)}{k - p} dp, \\ dy = \mu \frac{\eta'(p)}{k - p} p dp. \end{cases} \quad (2.42)$$

Используя уравнения (2.35), (2.41), (2.42), а также учтя, что $H = k \left(\int_0^{x_0} dx_1 + \int_{x_0}^{H/k} dx_2 \right)$, получим систему двух уравнений, определяющую предельные параметры плоских однородных откосов:

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}^{\operatorname{tg}\varphi} \left[\frac{\lambda\gamma(p-f)}{1+f\rho} \eta_1(p) - C \frac{1+p^2}{1+f\rho} \right] \frac{\eta_1'(p)}{k-p} dp + \int_{\operatorname{tg}\varphi}^s \left[\frac{\lambda\gamma(p-f)}{1+p^2} \eta_2(p) - C \right] \frac{\eta_2'(p)}{k-p} dp + \\ & + \frac{2C^2}{\gamma f} \int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi+\varphi}{4}\right)}^t \left[\frac{(p^2-1)(p-f)}{f} - (1+p^2) \right] dp = 0; \\ & \int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}^{\operatorname{tg}\varphi} \frac{\eta_1'(p)}{k-p} dp + \int_{\operatorname{tg}\varphi}^s \frac{\eta_2'(p)}{k-p} dp = \frac{H}{\lambda k}. \end{aligned} \right. \quad (2.43)$$

Ширина призмы обрушения определится зависимостью:

$$a = \frac{2C}{\gamma f} \int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi+\varphi}{4}\right)}^t dp. \quad (2.44)$$

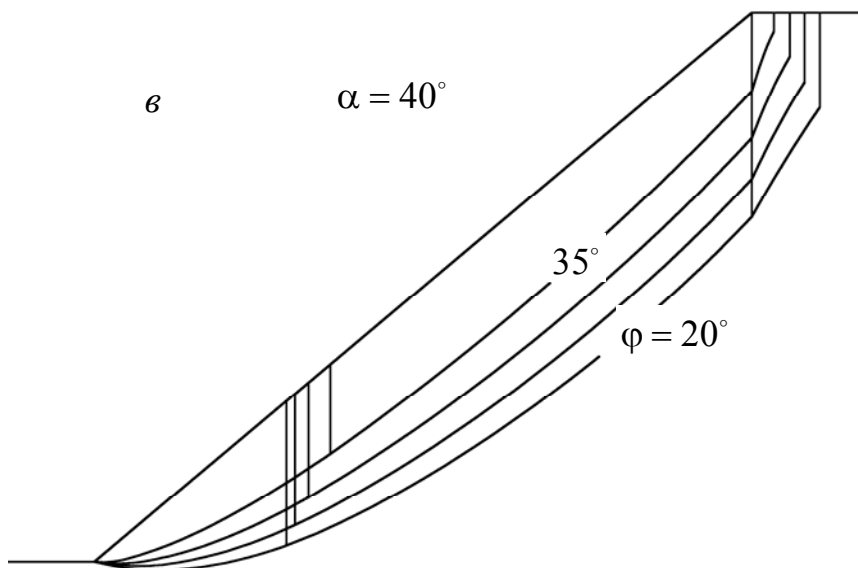
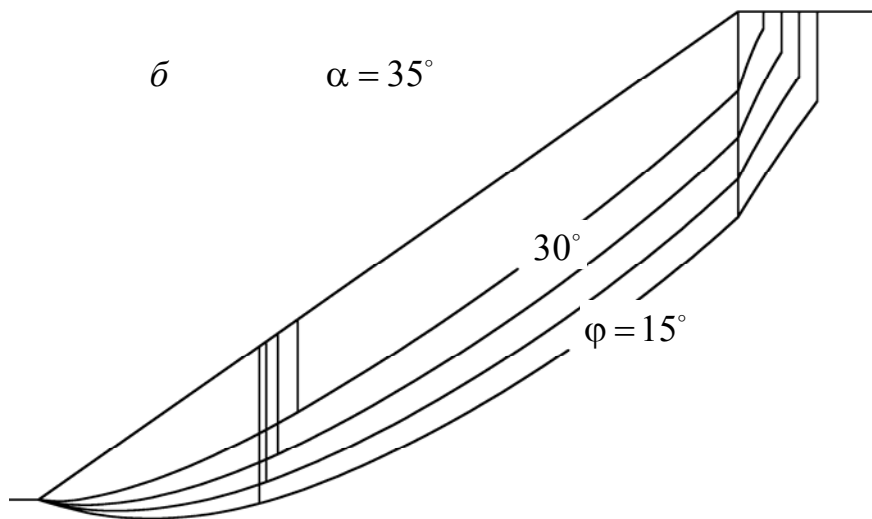
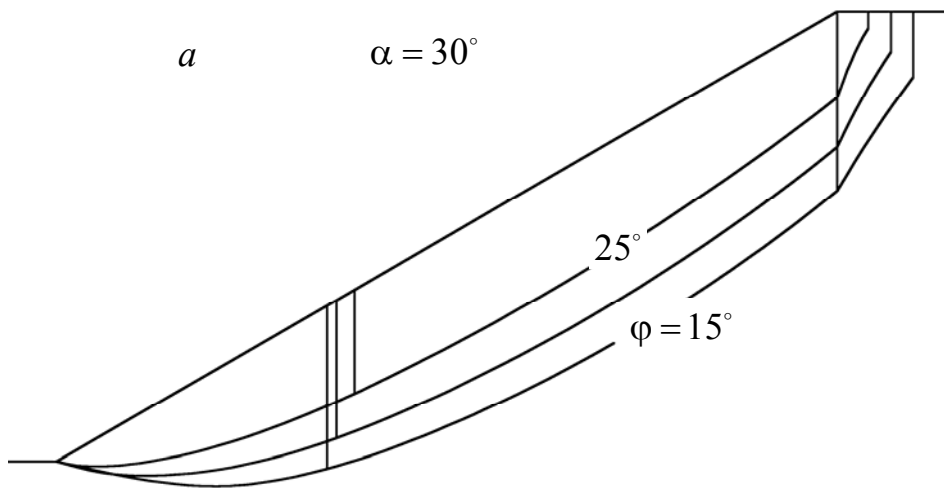
Для построения поверхности скольжения необходимо произвести интегрирование уравнений (2.42) при различных значениях верхнего предела. В результате будем последовательно получать координаты точек поверхности скольжения.

По результатам численного интегрирования были построены поверхности скольжения для некоторых значений углов откоса и внутреннего трения в предельном равновесии (рис. 2.15, *a, б, в, г, д, е*). Вертикальными линиями на рисунках отсечены точки поверхностей скольжения с углом наклона, равным углу внутреннего трения горных пород, а также границы участков откоса и горизонтальной площадки (бермы). Для построения поверхностей скольжения был принят пятиградусный интервал углов внутреннего трения.

В результате численного решения уравнений (2.43) определены предельные параметры плоских однородных откосов, а также вычислены отношения ширины призмы обрушения к высоте откоса a/H в предельном состоянии. Данные сведены в табл. 2.3.

Анализ предельных поверхностей скольжения показывает, что при увеличении угла внутреннего трения кривизна поверхности скольжения уменьшается и в пределе (при равенстве углов откоса и внутреннего трения) превращается в

плоскость. При увеличении угла откоса, поверхности скольжения, построенные для разных углов внутреннего трения, стягиваются воедино.



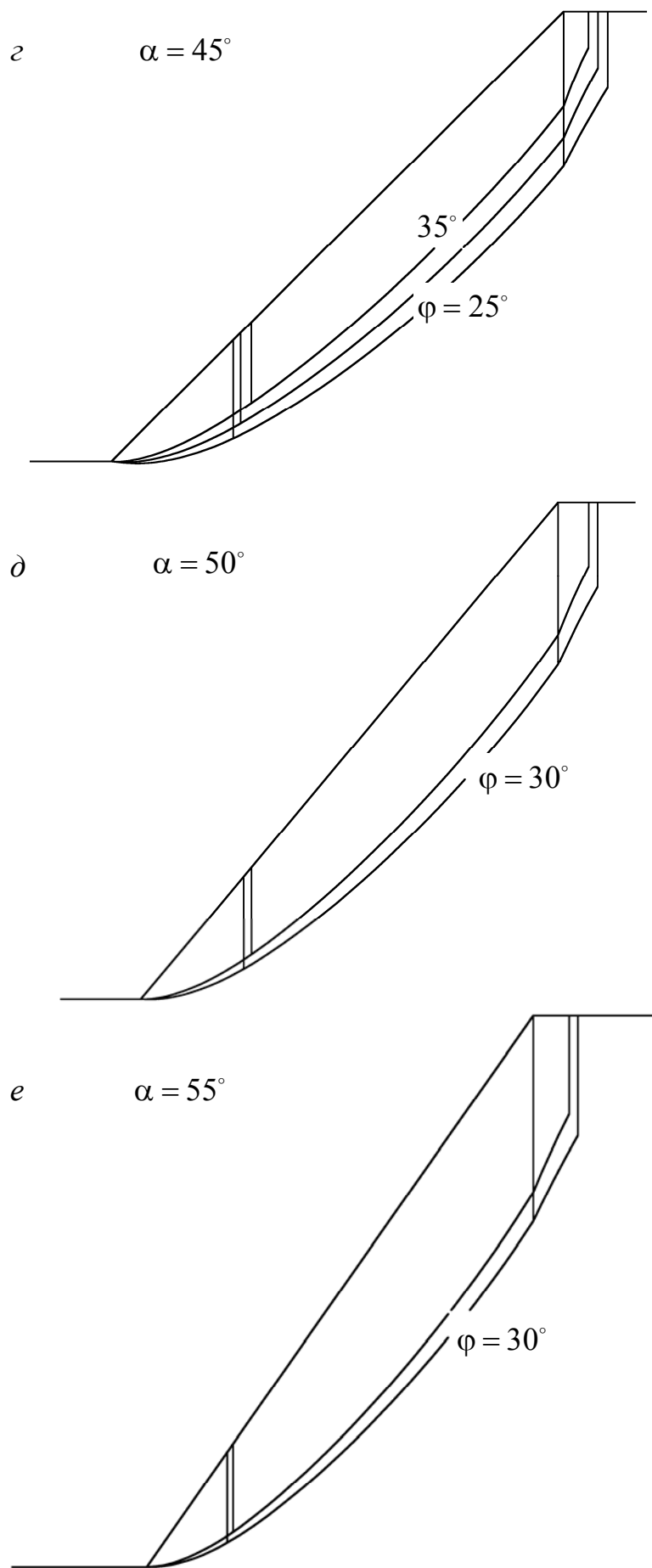


Рис. 2.15. Поверхности скольжения в однородном плоском откосе: для $\alpha = 30^\circ$ (*a*); $\alpha = 35^\circ$ (*b*); $\alpha = 40^\circ$ (*в*); $\alpha = 45^\circ$ (*z*); $\alpha = 50^\circ$ (*d*); $\alpha = 55^\circ$ (*e*)

Таблица 2.3

Значения отношений $C/\gamma H$ (сверху), a/H (по центру) и $\lambda\gamma/C$ (снизу)
для предельно устойчивых плоских однородных свободных откосов

Угол устойчивого откоса α , град	Угол внутреннего трения φ , град					
	15	20	25	30	35	40
20	<u>0,0191</u> <u>0,146</u> 1,833	<u>0</u> <u>0</u> $2C/\gamma$				
25	<u>0,0389</u> <u>0,170</u> 1,800	<u>0,0145</u> <u>0,096</u> 1,776	<u>0</u> <u>0</u> $2C/\gamma$			
30	<u>0,0558</u> <u>0,169</u> 1,743	<u>0,0312</u> <u>0,120</u> 1,734	<u>0,0118</u> <u>0,069</u> 1,716	<u>0</u> <u>0</u> $2C/\gamma$		
35	<u>0,0705</u> <u>0,162</u> 1,671	<u>0,0466</u> <u>0,125</u> 1,664	<u>0,0263</u> <u>0,089</u> 1,665	<u>0,0101</u> <u>0,052</u> 1,652	<u>0</u> <u>0</u> $2C/\gamma$	
40	<u>0,0838</u> <u>0,154</u> 1,586	<u>0,0607</u> <u>0,124</u> 1,576	<u>0,0404</u> <u>0,096</u> 1,582	<u>0,0231</u> <u>0,069</u> 1,595	<u>0,0090</u> <u>0,040</u> 1,585	<u>0</u> <u>0</u> $2C/\gamma$
45	<u>0,0964</u> <u>0,147</u> 1,486	<u>0,0740</u> <u>0,121</u> 1,473	<u>0,0540</u> <u>0,098</u> 1,477	<u>0,0363</u> <u>0,076</u> 1,495	<u>0,0210</u> <u>0,055</u> 1,519	<u>0,0083</u> <u>0,032</u> 1,513
50	<u>0,1088</u> <u>0,142</u> 1,371	<u>0,0869</u> <u>0,119</u> 1,353	<u>0,0672</u> <u>0,098</u> 1,354	<u>0,0494</u> <u>0,079</u> 1,371	<u>0,0335</u> <u>0,062</u> 1,402	<u>0,0196</u> <u>0,045</u> 1,437
55	<u>0,1232</u> <u>0,144</u> 1,255	<u>0,0999</u> <u>0,117</u> 1,215	<u>0,0805</u> <u>0,098</u> 1,212	<u>0,0627</u> <u>0,081</u> 1,226	<u>0,0465</u> <u>0,065</u> 1,257	<u>0,0318</u> <u>0,051</u> 1,301
60	<u>0,1409</u> <u>0,151</u> 1,146	<u>0,1174</u> <u>0,126</u> 1,093	<u>0,0960</u> <u>0,103</u> 1,065	<u>0,0764</u> <u>0,083</u> 1,061	<u>0,0600</u> <u>0,068</u> 1,088	<u>0,0448</u> <u>0,055</u> 1,132
65	<u>0,1607</u> <u>0,156</u> 1,027	<u>0,1368</u> <u>0,132</u> 0,962	<u>0,1149</u> <u>0,111</u> 0,924	<u>0,0947</u> <u>0,092</u> 0,907	<u>0,0761</u> <u>0,074</u> 0,911	<u>0,0589</u> <u>0,058</u> 0,936
70	<u>0,1832</u> <u>0,157</u> 0,893	<u>0,1589</u> <u>0,135</u> 0,821	<u>0,1365</u> <u>0,116</u> 0,774	<u>0,1157</u> <u>0,098</u> 0,749	<u>0,0963</u> <u>0,081</u> 0,741	<u>0,0781</u> <u>0,066</u> 0,751
75	<u>0,2097</u> <u>0,154</u> 0,740	<u>0,1849</u> <u>0,134</u> 0,663	<u>0,1618</u> <u>0,117</u> 0,613	<u>0,1402</u> <u>0,100</u> 0,582	<u>0,1200</u> <u>0,085</u> 0,568	<u>0,1008</u> <u>0,071</u> 0,567
80	<u>0,2425</u> <u>0,143</u> 0,555	<u>0,2167</u> <u>0,127</u> 0,482	<u>0,1927</u> <u>0,111</u> 0,435	<u>0,1701</u> <u>0,097</u> 0,405	<u>0,1488</u> <u>0,083</u> 0,388	<u>0,1285</u> <u>0,071</u> 0,382
85	<u>0,2864</u> <u>0,118</u> 0,319	<u>0,2590</u> <u>0,105</u> 0,265	<u>0,2334</u> <u>0,093</u> 0,232	<u>0,2093</u> <u>0,082</u> 0,211	<u>0,1864</u> <u>0,071</u> 0,198	<u>0,1645</u> <u>0,061</u> 0,192
90	<u>0,3837</u> <u>0</u> 0	<u>0,3501</u> <u>0</u> 0	<u>0,3185</u> <u>0</u> 0	<u>0,2887</u> <u>0</u> 0	<u>0,2603</u> <u>0</u> 0	<u>0,2332</u> <u>0</u> 0

По данным табл. 2.3 построена номограмма устойчивости плоских однородных откосов (рис. 2.16).

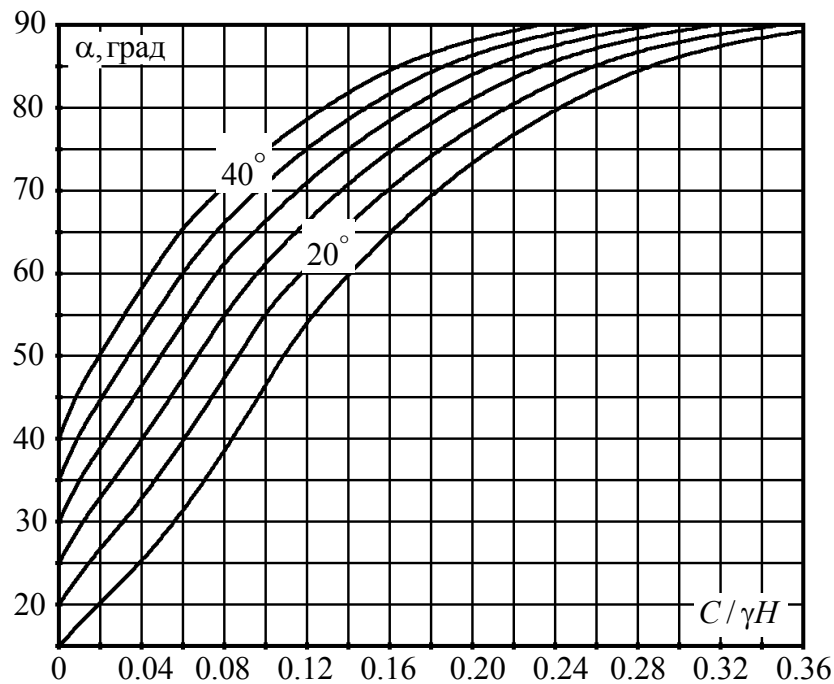


Рис. 2.16. Номограмма устойчивости плоских однородных откосов

Часто в практике открытых горных работ возникает вопрос определения ширины призмы обрушения. По данным табл. 2.3 построена номограмма для определения ее величины (рис. 2.17).

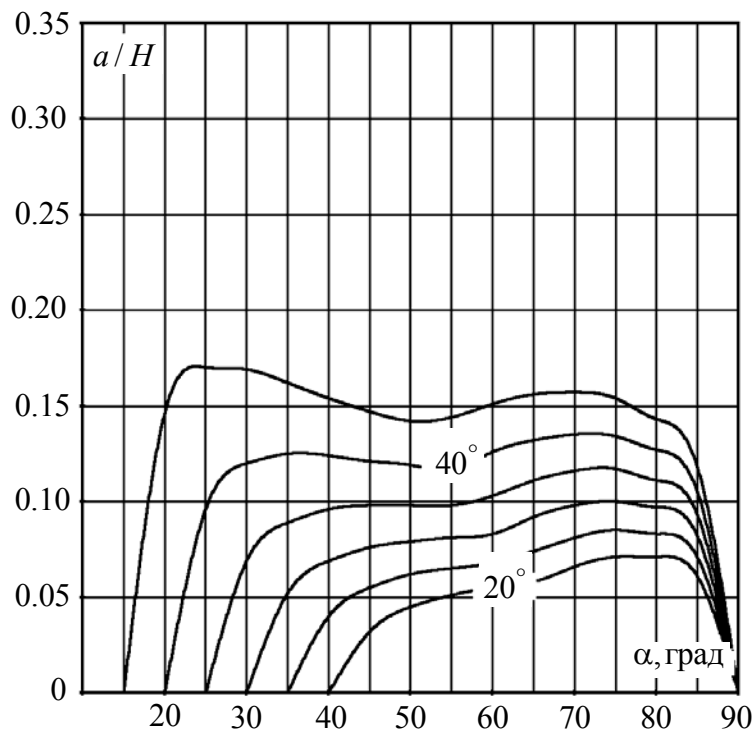


Рис. 2.17. Номограмма для определения ширины призмы обрушения

Таким образом, задачу по оценке устойчивости однородных откосов следует считать решенной в строгой постановке.

2.5. Расчет анизотропных и неоднородных откосов

До сих пор мы рассматривали откосы, сложенные однородными массивами или массивами, которые можно привести к таковым посредством статистического усреднения механических характеристик. Однако реальные массивы зачастую нельзя рассматривать как однородные и изотропные, и, прежде всего, речь идет об их механических свойствах. При построении расчетных схем мы предполагали, что характеристики паспорта прочности являются постоянными величинами во всей области. Пусть теперь сцепление C и коэффициент внутреннего трения f зависят от координат площадки скольжения и ее наклона. В этом случае функционал (2.22), очевидно, примет вид:

$$\int \left[\frac{\gamma(\bar{y} - y)(y' - f(x, y, y')) - C(x, y, y')(1 + y'^2)}{1 + y'^2} \right] dx.$$

Составив уравнение Л. Эйлера и решив его, получим функцию поверхности скольжения при произвольных законах распределения механических характеристик пород откоса. Однако на практике функции распределения значений механических характеристик неизвестны, причем чаще всего они изменяются дискретно при переходе от одного литологического слоя к другому, то есть функции терпят разрыв и являются кусочно-нелинейными.

На сегодняшний день существует, пожалуй, один концептуальный подход к оценке устойчивости анизотропных откосов, основанный на выполнении в точке излома поверхности скольжения, как обычного предельного равновесия, так и специального. Данный способ был предложен Г. Л. Фисенко в 1964 году [16] и сводится к определению углов излома для полого- и крутопадающей поверхностей ослабления по формулам:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi - \varphi'}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \left[\frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} (1 - \eta) \right]; \\ \theta' &= \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi - \varphi'}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \left[\frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} (1 - \eta) \right], \end{aligned} \quad (2.45)$$

где $\eta = \frac{C \operatorname{ctg} \varphi - C' \operatorname{ctg} \varphi'}{C \operatorname{ctg} \varphi + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)}$; C, C' – соответственно сцепление пород в крест

слоистости и по ней; φ, φ' – соответственно угол внутреннего трения пород и угол трения по контактам; σ_1, σ_3 – главные напряжения в точке излома.

Несмотря на то, что данное решение в те годы носило революционный характер, оно имеет ряд очевидных недостатков:

1) предположение о том, что в точке излома площадка скольжения отклонена от направления действия σ_1 на угол $\pi/4 - \varphi/2$ для произвольной формы откоса и нагрузки на него бездоказательно (данный постулат лежит в основе способа);

2) условие специального предельного равновесия возможно не для всех профилей откоса, в частности, оно не выполняется для вогнутых откосов;

3) для определения угла излома необходимо располагать значениями главных напряжений в точке излома (2.45), определить которые не представляется возможным без дополнительных предположений;

4) пренебрегая влиянием главных напряжений на угол излома, что и предлагал Г. Л. Фисенко, значение последнего становится инвариантным (независимым) относительно угла наклона поверхности ослабления.

Рассмотрим анизотропный откос. Под анизотропией, в общем случае, будем понимать систему поверхностей ослабления, с характеристиками паспорта прочности C' и $f' = \operatorname{tg} \varphi'$, как правило, меньшими показателей прочности массива C и φ . Рассмотрим вначале произвольный плоский откос, разрушение которого произойдет по поверхности скольжения, полностью совпадающей с плоской поверхностью ослабления (рис. 2.18). Очевидно, из постановки задачи имеем условие $\alpha > \beta$. Если $\beta < \varphi'$, то разрушение откоса произойти не может, поэтому будем исходить из неравенства $\beta > \varphi'$.

Поместим начало прямоугольной системы координат в точку выхода поверхности ослабления в откос и используем геометрические соотношения для высоты трещины отрыва и ширины призмы смещения:

$$h' = \frac{C'}{\gamma} \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}{\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \varphi'} = \frac{C'}{\gamma} \frac{\cos \varphi'}{\cos \beta \sin(\beta - \varphi')}, \quad a = \frac{H(1 - \operatorname{tg} \beta \operatorname{ctg} \alpha) - h'}{\operatorname{tg} \beta},$$

Условие равновесия призмы смещения будет иметь вид:

$$\int_0^{H \operatorname{ctg} \alpha} \left[\gamma(kx - \operatorname{tg} \beta x)(\operatorname{tg} \beta - f') - C'(1 + \operatorname{tg}^2 \beta) \right] dx + \int_{H \operatorname{ctg} \alpha}^{H \operatorname{ctg} \alpha + a} \left[\gamma(H - \operatorname{tg} \beta x)(\operatorname{tg} \beta - f') - C'(1 + \operatorname{tg}^2 \beta) \right] dx = 0.$$

Откуда предельная высота откоса выразится зависимостью:

$$H = h' \frac{\operatorname{tg} \alpha + \sqrt{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} = \frac{h'}{1 - \sqrt{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta}}. \quad (2.46)$$

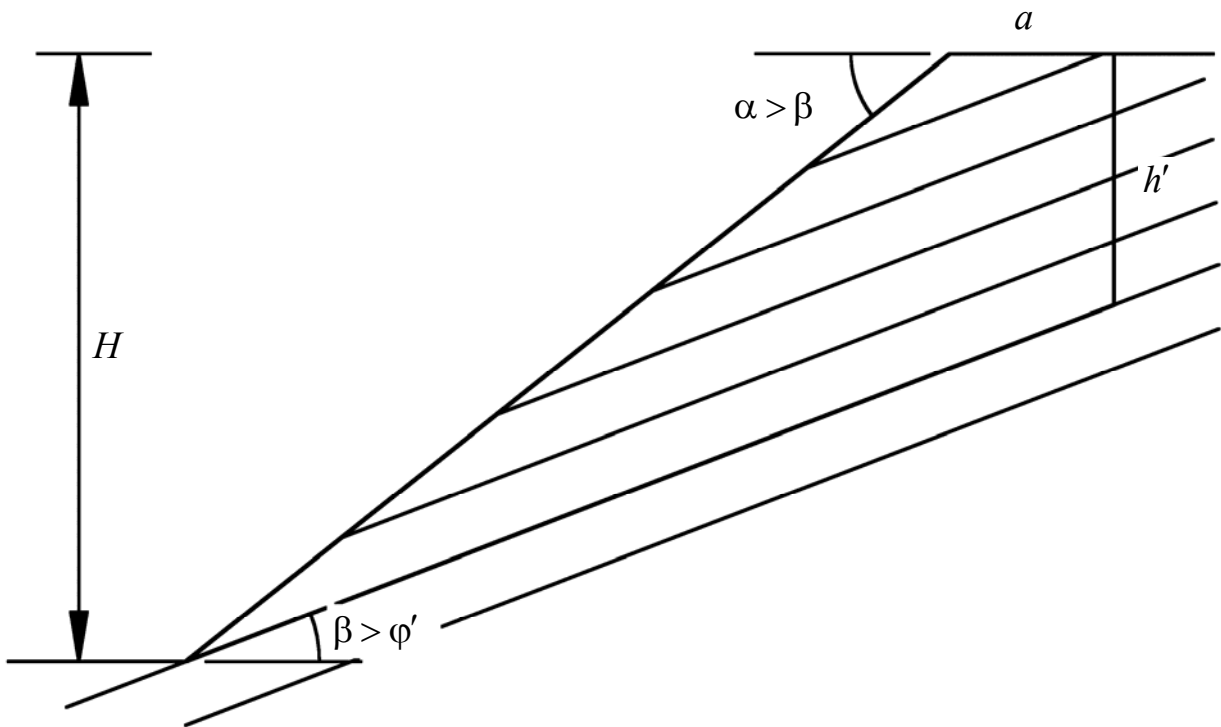


Рис. 2.18. Схема к расчету предельных параметров анизотропного откоса

Формула (2.46) рекомендуется Правилами обеспечения устойчивости откосов [7] и получена из условий геометрической статики. Однако как показано выше, она является следствием наиболее общего условия равновесия.

Рассмотрим теперь наиболее общий случай потери устойчивости анизотропным откосом и методику определения его предельных параметров (рис. 2.19). В этом случае поверхность скольжения может частично совпадать с поверхностями анизотропии и проходить в крест ее, подобно поверхности в однородном откосе. В этом случае условие равновесия, а также угол излома θ су-

щественно зависят от координат точек излома, угла падения поверхностей ослабления, а также от физико-механических свойств пород вдоль плоскостей анизотропии и в крест ее.

Ограничимся рассмотрением следующей расчетной схемы. Пусть в массиве имеются плоские поверхности ослабления, падающие в сторону выработанного пространства под углом β к оси x . В этом случае поверхность скольжения может частично совпадать с поверхностями ослабления.

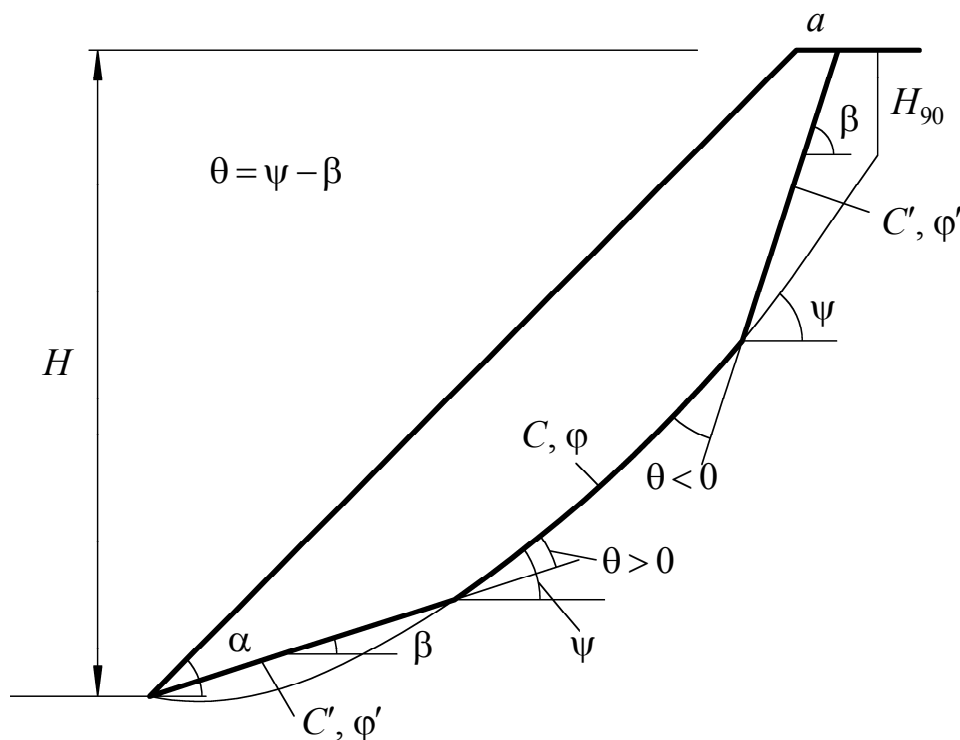


Рис. 2.19. Поверхность скольжения в анизотропном откосе

Необходимо определить условие в точке пересечения поверхности ослабления и поверхности скольжения при условии, что угол наклона поверхности скольжения в точке излома $\vartheta > \varphi$ (данное условие, вообще говоря, не принципиально, в противном случае изменится только условие в точке излома). В случае плоских поверхностей скольжения из уравнений (2.17), (2.18) условие равновесия, без учета внешних сил, будет иметь вид:

$$\int \left[\gamma (\hat{y} - \text{tg}\beta x - g) (\text{tg}\beta - f') - C' (1 + \text{tg}^2\beta) \right] dx = 0, \quad (2.47)$$

где g – постоянная.

Поместим начало системы координат в точку пересечения поверхности скольжения или поверхности ослабления с откосом и получим следующую задачу вариационного исчисления (объемный вес постоянный):

$$\int_{x_1}^{x_0} \frac{(\bar{y}-y)(y'-f)-\lambda(1+y'^2)}{1+y'^2} dx + \int_{x_0}^{x_2} \left[(\bar{y}-\text{tg}\beta x-g)(\text{tg}\beta-f') - \frac{C}{\gamma}(1+\text{tg}^2\beta) \right] dx \rightarrow \text{extr.} \quad (2.48)$$

Условие в точке излома поверхности скольжения имеет вид:

$$F_1 + (\Phi' - y'_1)F_{1y'_1} = F_2 + (\Phi' - y'_2)F_{2y'_2}, \quad (2.49)$$

где F_1, F_2 – подынтегральные выражения слагаемых (2.48); $F_{1y'_1}, F_{2y'_2}$ – частные производные подынтегральных выражений по производной функции поверхности скольжения; Φ' – производная функции, по которой перемещается точка разрыва (поверхность ослабления).

Условие (2.49) запишется в виде:

$$\frac{\text{tg}\psi - \text{tg}\varphi}{1 + \text{tg}^2\psi} - (\text{tg}\beta - \text{tg}\varphi') + (\text{tg}\beta - \text{tg}\psi) \frac{1 + 2\text{tg}\varphi\text{tg}\psi - \text{tg}^2\psi}{(1 + \text{tg}^2\psi)^2} = \frac{\lambda - \frac{C'}{\gamma}(1 + \text{tg}^2\beta)}{h}, \quad (2.50)$$

где ψ – угол наклона поверхности скольжения к оси x (к горизонту) в точке преломления; h – глубина точки излома (расстояние по вертикали от поверхности откоса или бермы до точки излома).

Рассмотрим задачу о преломлении поверхности скольжения вследствие ее перехода в литологический слой с иными механическими характеристиками. Аналогом поставленной задачи является задача о преломлении луча света на границе сред с разными оптическими плотностями в постановке принципа Ферма (1660 г.). Примем $\psi > \varphi$ (не является принципиальным условием и принимается только для конкретики) – угол наклона поверхности скольжения к оси x до преломления; β – угол наклона контакта литологических слоев к оси x ; $\omega > \varphi'$ – угол наклона поверхности скольжения к оси x после преломления (слой с параметром $\lambda' = C'/\gamma n = (C'/C)\lambda$); C', φ' – механические характеристики литологического слоя, в который переходит поверхность скольжения. Со-

ставляя выражения, подобные (2.48) и (2.49), с использованием функционала (2.22) (берется именно данный функционал, так как углы поверхностей в точке излома превышают соответствующие углы внутреннего трения) получим уравнение:

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\psi} - \frac{\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\varphi'}{1 + \operatorname{tg}^2\omega} + (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\psi) \frac{1 + 2\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}^2\psi}{(1 + \operatorname{tg}^2\psi)^2} - \\ & - (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\omega) \frac{1 + 2\operatorname{tg}\varphi'\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}^2\omega}{(1 + \operatorname{tg}^2\omega)^2} = \frac{\lambda - \lambda'}{h}. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Анализируя условие (2.51), замечаем, что в случае $C = C'$, $\varphi = \varphi'$ преломления поверхности скольжения не происходит, то есть $\psi = \omega$. Кроме того, очевидно, что поверхность скольжения не может после преломления вернуться в первоначальный литологический слой, то есть предельным значением угла ω является угол β . В этом случае скольжение произойдет по поверхности, совпадающей с контактом. Положив в уравнении (2.51) $\omega = \beta$, получим равенство левых частей (2.50) и (2.51).

Рассмотрим пример расчета неоднородного откоса. Определим предельную высоту откоса H , состоящего из двух горизонтально залегающих слоев ($\beta = 0^\circ$), верхний слой имеет мощность, равную $1/3H$, при следующих условиях (нумерация слоев снизу):

$$\alpha = 40^\circ; \gamma = \gamma_1 = 2,5 \text{ т/м}^3; C_1 = 5 \text{ т/м}^2; C = 10 \text{ т/м}^2; \varphi_1 = 28^\circ; \varphi = 33^\circ.$$

Предположим, что в точке излома поверхности скольжения выполняются условия $\psi > \varphi, \omega > \varphi_1$, а абсцисса точки излома x_0 находится под откосом. Тогда уравнения поверхности скольжения в нижнем слое имеют вид:

$$\begin{aligned} kx - y_1 &= \lambda \frac{(kf - 1)y_1'^2 + 2(k + f)y_1' + 1 - kf}{fy_1'^2 - 2f^2y_1' + k - f + kf^2} \equiv \lambda\eta_1(p), \quad -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha + \varphi}{2}\right) \leq y_1' \leq \operatorname{tg}\varphi; \\ kx - y_2 &= \lambda \frac{1 + kf}{1 + f^2} \frac{(1 + y_2'^2)^2}{2y_2'^3 - (k + 3f)y_2'^2 + 2kfy_2' + k - f} \equiv \lambda\eta_2(p), \quad y_2' > \operatorname{tg}\varphi, \end{aligned}$$

где $\eta(p)$ – некоторая функция параметра $p \equiv y'$.

Произвольная постоянная для первого уравнения получена из условия трансверсальности на пересечении поверхности скольжения с откосом, а для второго – из условия равенства производных в точке $y'_1 = y'_2 = \text{tg}\varphi$.

Уравнение поверхности скольжения под откосом после преломления имеет вид:

$$kx - y_3 = (\lambda_1 + d_1) \frac{(1 + y_3'^2)^2}{2y_3'^3 - (k + 3f_1)y_3'^2 + 2kf_1y_3' + k - f_1} \equiv (\lambda_1 + d_1)\eta_3(p).$$

Для определения углов поверхности скольжения по обе стороны от точки излома, абсциссы и глубины точки излома h , а также параметра $\lambda_1 + d_1$ составляем условия:

$$\frac{\text{tg}\psi - \text{tg}\varphi}{1 + \text{tg}^2\psi} - \frac{\text{tg}\omega - \text{tg}\varphi_1}{1 + \text{tg}^2\omega} + (\text{tg}\beta - \text{tg}\psi) \frac{1 + 2\text{tg}\varphi\text{tg}\psi - \text{tg}^2\psi}{(1 + \text{tg}^2\psi)^2} -$$

$$-(\text{tg}\beta - \text{tg}\omega) \frac{1 + 2\text{tg}\varphi_1\text{tg}\omega - \text{tg}^2\omega}{(1 + \text{tg}^2\omega)^2} = \frac{\lambda \left(1 - \frac{C_1}{C}\right)}{h};$$

$$h = (\lambda_1 + d_1) \frac{(1 + \text{tg}^2\omega)^2}{2\text{tg}^3\omega - (k + 3f_1)\text{tg}^2\omega + 2kf_1\text{tg}\omega + k - f_1};$$

$$h = \lambda \frac{1 + kf}{1 + f^2} \frac{(1 + \text{tg}^2\psi)^2}{2\text{tg}^3\psi - (k + 3f)\text{tg}^2\psi + 2kft\text{g}\psi + k - f};$$

$$x_0 = \frac{h + 2H/3}{k};$$

$$\int_{\text{tg}\left(\frac{\alpha+\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}^{\text{tg}\varphi} \frac{\lambda\eta'_1(p)}{k-p} dp + \int_{\text{tg}\varphi}^{\text{tg}\psi} \frac{\lambda\eta'_2(p)}{k-p} dp = x_0,$$

где $\eta'(p)$ – производная функции по параметру p .

Уравнение поверхности скольжения под бермой имеет вид:

$$(H - y_4) = \frac{C_1(y_4'^2 - 1)}{\gamma\text{tg}\varphi_1}.$$

Производную поверхности скольжения на границе участков откоса и бермы, со стороны откоса s определяем из условия:

$$(f_1 + k)s^4 + 4(1 - kf_1)s^3 + 2(kf_1^2 - 3f_1 - 2k)s^2 + 4f_1(f_1 + k)s + f_1 - k - 2kf_1^2 = 0.$$

А производную со стороны бермы t определим из условия равенства ординат в точке стыка участков поверхностей скольжения, т. е.

$$(\lambda_1 + d_1) \frac{(1 + s^2)^2}{2s^3 - (k + 3f_1)s^2 + 2kf_1s + k - f_1} = \frac{C_1(t^2 - 1)}{\mathcal{V}_1}.$$

И, наконец, система уравнений, требующая выполнения условия предельного равновесия и осуществляющая связь λ и H :

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}^{\operatorname{tg}\varphi} \left[\frac{\gamma(p-f)}{1+fp} \lambda \eta_1(p) - \frac{C(1+p^2)}{1+fp} \right] \frac{\lambda \eta_1'(p)}{k-p} dp + \int_{\operatorname{tg}\varphi}^{\operatorname{tg}\psi} \left[\frac{\gamma(p-f)}{1+p^2} \lambda \eta_2(p) - C \right] \frac{\lambda \eta_2'(p)}{k-p} dp + \\ & + \int_{\operatorname{tg}\omega}^s \left[\frac{\gamma(p-f_1)}{1+p^2} (\lambda_1 + d_1) \eta_3(p) - C_1 \right] \frac{(\lambda_1 + d_1) \eta_3'(p)}{k-p} dp + \frac{2C_1^2}{\mathcal{V}_1} \int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi+\varphi_1}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}^t \left[\frac{(p^2-1)(p-f_1)}{f_1} - (1+p^2) \right] dp = 0 \\ & \int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\varphi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}^{\operatorname{tg}\varphi} \frac{\lambda \eta_1'(p)}{k-p} dp + \int_{\operatorname{tg}\varphi}^{\operatorname{tg}\psi} \frac{\lambda \eta_2'(p)}{k-p} dp + \int_{\operatorname{tg}\omega}^s \frac{(\lambda_1 + d_1) \eta_3'(p)}{k-p} dp = \frac{H}{k} \end{aligned} \right.$$

Данных уравнений достаточно для определения всех неизвестных. Таким образом, после решения системы полученных уравнений определяют неизвестные, необходимые для построения предельной поверхности скольжения (рис. 2.20). По результатам численного решения системы приведенных уравнений определены параметры для построения наиболее слабой поверхности скольжения в неоднородном откосе и его предельная высота:

$$\{s \ t \ \lambda \ \lambda_1 + d_1 \ h \ x_0 \ \operatorname{tg}\psi \ \operatorname{tg}\omega \ H\}^T = \{1,64 \ 2,72 \ 4,99 \ 7,14 \ 39,49 \ 263,02 \ 1,09 \ 0,87 \ 271,81\}^T.$$

В процессе решения рассмотренных выше уравнений можно определить любой из параметров, например сцепление, необходимое для выполнения условия предельного равновесия, при заданной высоте и угле откоса.

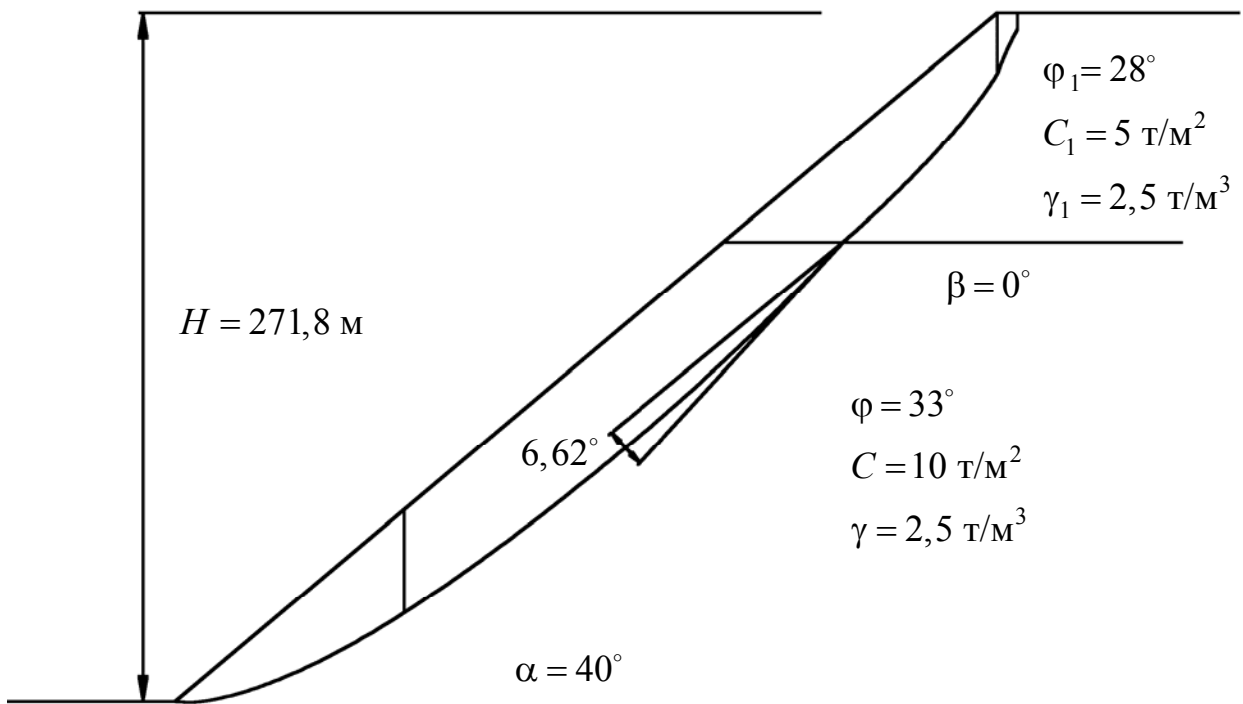


Рис. 2.20. Поверхность скольжения в неоднородном откосе

Рассмотрим пример расчета анизотропного откоса. Определить предельную высоту откоса H , имеющего поверхность ослабления, выходящую в его основание под углом $\beta = 20^\circ$. Физико-механические характеристики пород и поверхности ослабления: $\gamma = 2,5 \text{ т/м}^3$; $C' = 5 \text{ т/м}^2$; $C = 10 \text{ т/м}^2$; $\varphi' = 18^\circ$; $\varphi = 30^\circ$, угол откоса $\alpha = 40^\circ$.

Предположим, что угол наклона криволинейной части поверхности скольжения в точке преломления поверхности скольжения $\psi > \varphi$ и точка преломления находится под откосом, тогда ее форма описывается уравнениями:

$$kx - y_2 = d \frac{(1 + y_2'^2)^2}{2y_2'^3 - (k + 3f)y_2'^2 + 2kfy_2' + k - f} \equiv d\eta_2(p), \quad y_2' > \text{tg}\varphi, \text{ откос};$$

$$(H - y_3) = \frac{C(y_3'^2 - 1)}{\gamma \text{tg}\varphi}, \text{ берма.}$$

Тангенс угла наклона поверхности скольжения в точке стыка откоса и бермы со стороны откоса s определим из уравнения:

$$(f+k)s^4 + 4(1-ks)s^3 + 2(kf^2 - 3f - 2k)s^2 + 4f(f+k)s + f - k - 2kf^2 = 0.$$

Производную поверхности скольжения со стороны бермы, как и раньше, определяем из условия равенства ординат:

$$d \frac{(1+s^2)^2}{2s^3 - (k+3f)s^2 + 2kfs + k - f} = \frac{C(t^2 - 1)}{\gamma f}.$$

Условие в точке стыка имеет вид:

$$\frac{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\psi} + (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\psi) \frac{1 + 2\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}^2\psi}{(1 + \operatorname{tg}^2\psi)^2} - (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\varphi') = \frac{\lambda - \frac{C'}{\gamma}(1 + \operatorname{tg}^2\beta)}{h}.$$

Высота точки излома выражается уравнениями:

$$h = d \frac{(1 + \operatorname{tg}^2\psi)^2}{2\operatorname{tg}^3\psi - (k + 3f)\operatorname{tg}^2\psi + 2kft\operatorname{tg}\psi + k - f};$$

$$h = kx_0 - \operatorname{tg}\beta x_0.$$

Абсцисса точки излома:

$$\frac{H}{k} - \int_{\operatorname{tg}\psi}^s \frac{d\eta'_2(p)}{k-p} dp = x_0,$$

где $\eta'_2(p)$ – производная функции по параметру p .

Система уравнений для определения d и H :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^{x_0} [\gamma(kx - \operatorname{tg}\beta x)(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\varphi') - C'(1 + \operatorname{tg}^2\beta)] dx + \int_{\operatorname{tg}\psi}^s \left[\frac{p-f}{1+p^2} d\gamma\eta_2(p) - C \right] \frac{d\eta'_2(p)}{k-p} dp + \\ + \frac{2C^2}{\gamma f} \int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}^t \left[\frac{(p^2 - 1)(p - f)}{f} - (1 + p^2) \right] dp = 0, \\ \operatorname{tg}\beta x_0 + \int_{\operatorname{tg}\psi}^s \frac{d\eta'_2(p)}{k-p} p dp + \frac{2C}{\gamma f} \int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}^t p dp + \frac{2C}{\gamma} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = H. \end{array} \right.$$

Данных уравнений достаточно для определения всех неизвестных. По результатам численного решения системы уравнений получим следующие значения геометрических параметров откоса и поверхности скольжения:

$$\{\lambda, s, t, d, h, x_0, \operatorname{tg}\psi, H\}^T = \{7,74, 1,62, 2,23, 7,94, 33,47, 70,45, 1,41, 64,71\}^T.$$

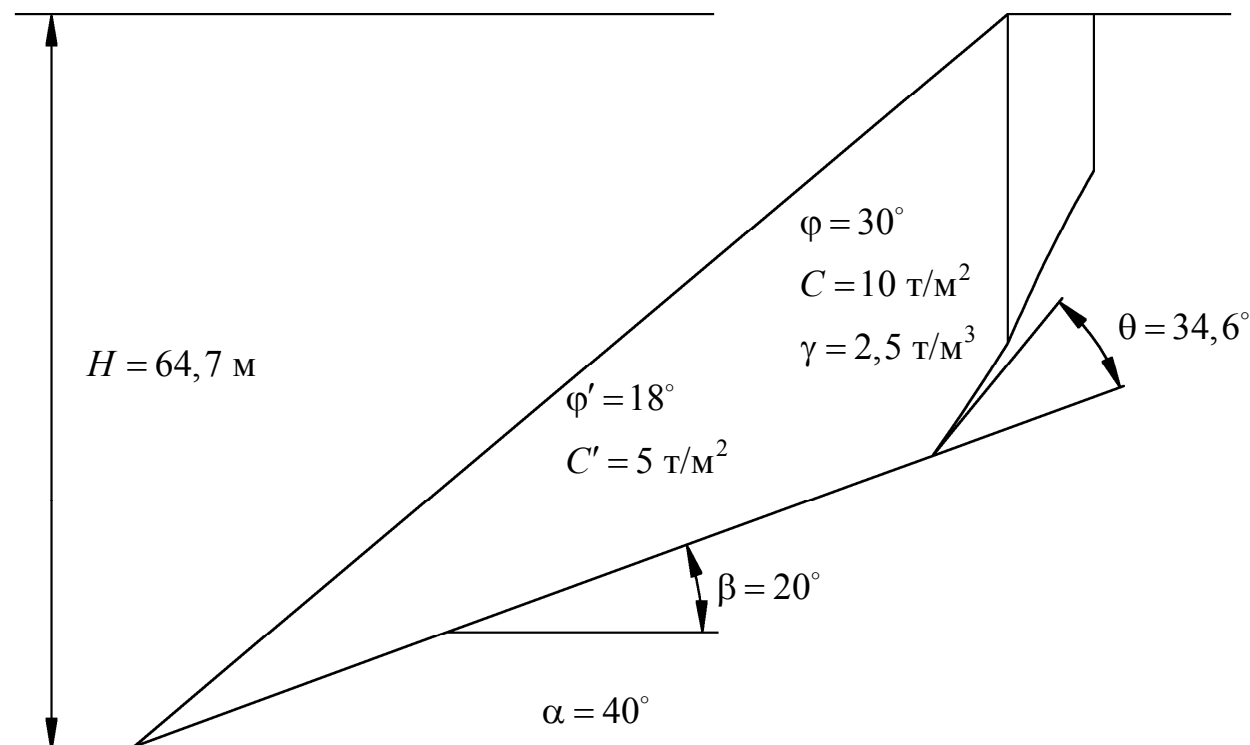


Рис. 2.21. Поверхность скольжения в анизотропном откосе

На рис. 2.21 показана поверхность скольжения и предельные параметры анизотропного откоса для рассмотренного примера.

В заключение отметим, что уравнениями (2.50), (2.51) не исчерпываются все условия в точках излома, которые могут иметь место при решении задач для неоднородных и анизотропных откосов.

Таким образом, необходимо решать задачи для анизотропного и неоднородного откосов в строгой теоретической постановке. В данных расчетах поверхность скольжения и граничные условия для ее построения обеспечивают максимум разности сдвигающих и удерживающих сил (обобщенной силе) на возможном перемещении призмы смещения.

2.6. Расчет подработанных и закарстованных откосов

Расчет устойчивости подработанных откосов или откосов при наличии в породах карста (с известным местоположением) ничем не отличается от расчета неоднородного откоса. И действительно, подработка бортов карьера влечет за собой снижение прочностных характеристик массива и, прежде всего, величины сцепления. То же можно сказать и про карст. Поэтому задача в этом случае сводится к определению условий преломления поверхности скольжения на карсте или ослабленном подземными горными работами участке массива горных пород.

Рассмотрим пример расчета откоса, подработанного подземными горными работами. Пусть требуется определить размер целика горизонтально залегающего тела полезного ископаемого, необходимого для обеспечения устойчивого состояния борта карьера (рис. 2.22).

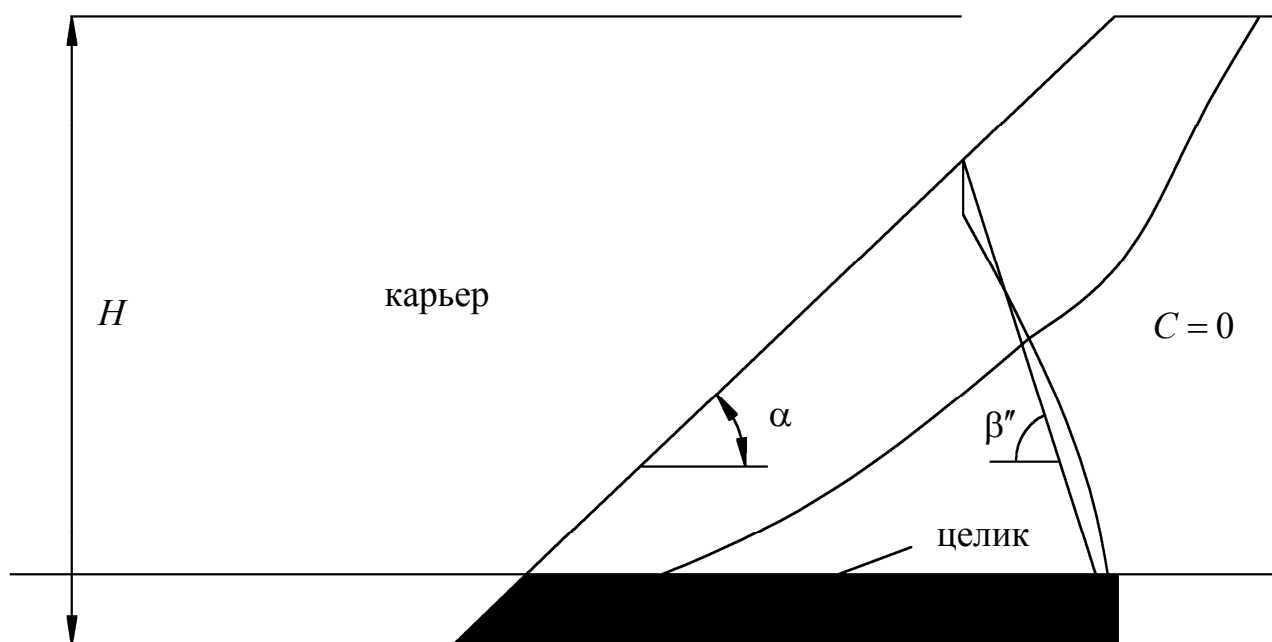


Рис. 2.22. Схема подработанного откоса

Заменим, с незначительной погрешностью, границу областей плавных сдвижений и сдвижений с разрывом сплошности прямой линией, проведенной

под углом разрыва β'' (см. рис. 2.22), и поместим начало координат в нижнюю точку откоса. Уравнение данной границы будет иметь вид:

$$y = -\operatorname{tg}\beta''(x - d), \quad (2.52)$$

где d – размер целика.

Будем предварительно считать, что поверхность скольжения преломится на границе областей под откосом, а углы ее наклона по обе стороны от границы будут превышать соответствующие углы внутреннего трения.

Пусть имеем борт карьера высотой $H = 200$ м, углом $\alpha = 40^\circ$, физико-механические характеристики целиковой части массива горных пород:

$\gamma = 2,5$ т/м³; $C = 10$ т/м²; $\varphi = 35^\circ$. Вследствие подработки части прибортового массива его механические характеристики снизились и имеют следующие значения: $\gamma_1 = 2,5$ т/м³; $C_1 = 0$ т/м²; $\varphi_1 = 30^\circ$. Угол разрыва $\beta'' = 70^\circ$.

Поверхность скольжения, как и в рассмотренном выше примере для неоднородного откоса, будет состоять из четырех участков. В целиковой части поверхность скольжения описывается, как и раньше, уравнениями:

$$kx - y_1 = \lambda \frac{(kf - 1)y_1'^2 + 2(k + f)y_1' + 1 - kf}{fy_1'^2 - 2f^2y_1' + k - f + kf^2} \equiv \lambda\eta_1(p), \quad -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha + \varphi}{2}\right) \leq y_1' \leq \operatorname{tg}\varphi;$$

$$kx - y_2 = \lambda \frac{1 + kf}{1 + f^2} \frac{(1 + y_2'^2)^2}{2y_2'^3 - (k + 3f)y_2'^2 + 2kfy_2' + k - f} \equiv \lambda\eta_2(p), \quad y_2' > \operatorname{tg}\varphi.$$

На границе областей с разными физико-механическими свойствами происходит излом поверхности скольжения, после излома поверхность скольжения под откосом описывается уравнением:

$$kx - y_3 = b \frac{(1 + y_3'^2)^2}{2y_3'^3 - (k + 3f_1)y_3'^2 + 2kf_1y_3' + k - f_1} \equiv b\eta_3(p),$$

где b – постоянная.

Так как породы в подработанной части массива не обладают сцеплением (связностью), наиболее опасная поверхность скольжения определяется не экс-

тремумом функционала, а экстремумом функции разности сдвигающих и удерживающих сил на площадке среза. Наибольшее главное напряжение совпадает с весом пород, а угол наклона критической площадки не зависит от величины сцепления, поэтому уравнение поверхности скольжения имеет вид:

$$y_4 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right)x + m, \quad (2.53)$$

где m – постоянная.

Сумма сил на участке бермы подсчитывается при помощи следующего интеграла:

$$\int [\gamma(H - y_4)(y_4' - f_1)] dx. \quad (2.54)$$

Условие в точке излома имеет вид:

$$\frac{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\psi} - \frac{\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}^2\omega} + (-\operatorname{tg}\beta'' - \operatorname{tg}\psi) \frac{1 + 2\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}^2\psi}{(1 + \operatorname{tg}^2\psi)^2} -$$

$$-(-\operatorname{tg}\beta'' - \operatorname{tg}\omega) \frac{1 + 2\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\omega - \operatorname{tg}^2\omega}{(1 + \operatorname{tg}^2\omega)^2} = \frac{\lambda\left(1 - \frac{C_1}{C}\right)}{h},$$

где ψ, ω – соответственно углы наклона поверхности скольжения до и после преломления на границе областей; h – глубина точки излома.

Глубина точки излома определяется условиями:

$$h = b \frac{(1 + \operatorname{tg}^2\omega)^2}{2\operatorname{tg}^3\omega - (k + 3f_1)\operatorname{tg}^2\omega + 2kf_1\operatorname{tg}\omega + k - f_1};$$

$$h = \lambda \frac{1 + kf}{1 + f^2} \frac{(1 + \operatorname{tg}^2\psi)^2}{2\operatorname{tg}^3\psi - (k + 3f)\operatorname{tg}^2\psi + 2kft\operatorname{tg}\psi + k - f}.$$

Абсцисса точки излома с учетом (2.52) определяется уравнениями:

$$kx_0 - h = -\operatorname{tg}\beta''(x_0 - d);$$

$$\int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}^{\operatorname{tg}\varphi} \frac{\lambda\eta'_1(p)}{k-p} dp + \int_{\operatorname{tg}\varphi}^{\operatorname{tg}\psi} \frac{\lambda\eta'_2(p)}{k-p} dp = x_0.$$

Тангенс угла наклона (производная) поверхности скольжения в точке стыка откоса и бермы, как и раньше, определяется из уравнения:

$$(f_1 + k)s^4 + 4(1 - kf_1)s^3 + 2(kf_1^2 - 3f_1 - 2k)s^2 + 4f_1(f_1 + k)s + f_1 - k - 2kf_1^2 = 0.$$

Постоянную m в уравнении поверхности скольжения под бермой (2.53) определим из условия равенства ординат в точке стыка участков поверхностей скольжения:

$$b \frac{(1 + s^2)^2}{2s^3 - (k + 3f_1)s^2 + 2kf_1s + k - f_1} = H - \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \frac{H}{k} + m \right).$$

Глубину поверхности скольжения в точке стыка участков откоса и бермы h_1 определим из условия:

$$h_1 = H - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \frac{H}{k} - m.$$

И, наконец, система уравнений, требующая выполнения условия предельного равновесия и осуществляющая связь λ , b и H :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha + \varphi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}^{\operatorname{tg} \varphi} \left[\frac{\gamma(p-f)}{1+fp} \lambda \eta_1(p) - \frac{C(1+p^2)}{1+fp} \right] \frac{\lambda \eta'_1(p)}{k-p} dp + \int_{\operatorname{tg} \varphi}^{\operatorname{tg} \psi} \left[\frac{\gamma(p-f)}{1+p^2} \lambda \eta_2(p) - C \right] \frac{\lambda \eta'_2(p)}{k-p} dp + \\ + \int_{\operatorname{tg} \omega}^s \left[\frac{\gamma(p-f_1)}{1+p^2} b \eta_3(p) - C_1 \right] \frac{b \eta'_3(p)}{k-p} dp + \int_{H/k}^{H/k+h_1/\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right)} \left[\gamma \left(H - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) x - m \right) \left(\sqrt{1+f_1^2} \right) \right] dx = 0; \\ \int_{\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha + \varphi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}^{\operatorname{tg} \varphi} \frac{\lambda \eta'_1(p)}{k-p} dp + \int_{\operatorname{tg} \varphi}^{\operatorname{tg} \psi} \frac{\lambda \eta'_2(p)}{k-p} dp + \int_{\operatorname{tg} \omega}^s \frac{b \eta'_3(p)}{k-p} dp = \frac{H}{k}. \end{array} \right.$$

Составленных выше условий достаточно для определения всех неизвестных. По результатам численного решения рассматриваемого примера получим параметры, определяющие наиболее опасную поверхность скольжения и размер охранного целика:

$$\{ \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \omega \ s \ \lambda \ b \ x_0 \ h \ h_1 \ m \ d \}^T = \{ 0,78 \ 0,91 \ 1,62 \ 3,80 \ 7,53 \ 163,57 \ 48,34 \ 27,57 \ -240,41 \ 195,93 \}^T.$$

На рис. 2.23 приведена поверхность скольжения и целик, соответствующие предельному равновесию откоса для рассматриваемого примера. В данном случае размер целика должен составлять не менее $d = 196$ м.

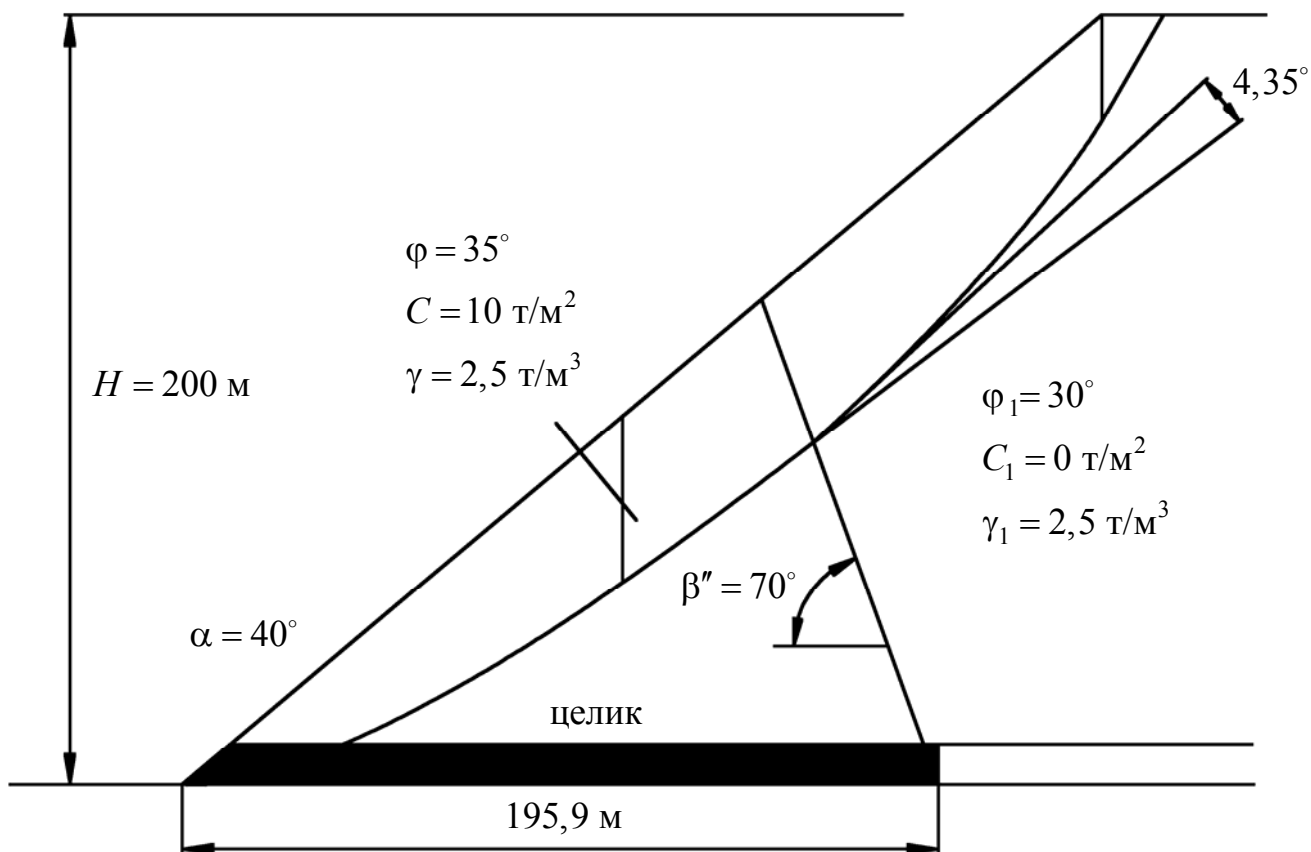


Рис. 2.23. Пример расчета подработанного откоса

Отметим, что из приведенных уравнений могут быть также определены и предельная высота борта, и угол устойчивого откоса.

2.7. Устойчивость отвалов

На рис. 2.24 показан отвал, расположенный на слабом наклонном основании. В зависимости от соотношений параметров, влияющих на его устойчивость, возможны три варианта его разрушения:

1) разрушение произойдет по поверхности скольжения, проходящей только в породах отвала;

2) поверхность скольжения частично будет совпадать с контактом отвал-основание;

3) поверхность скольжения преломляется на контакте отвал-основание, проходит по породам основания и выходит на некотором расстоянии от нижней бровки откоса.

В связи с вышесказанным, расчет отвала по первому варианту идентичен расчету однородного откоса, по второму – анизотропного, а по третьему – неоднородного откоса.

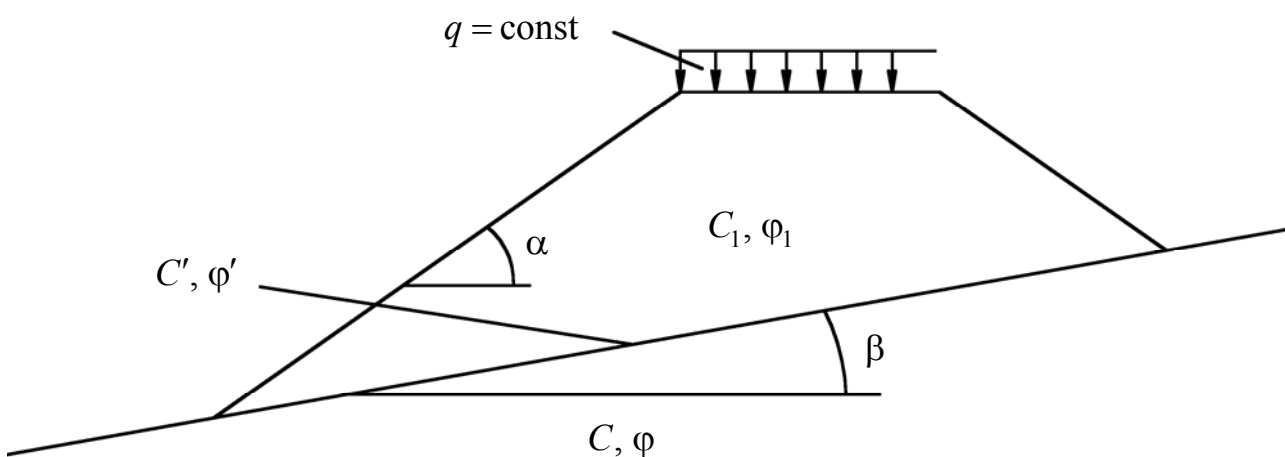


Рис. 2.24. Схема отвала на слабом наклонном основании

В частном случае, когда породы основания прочные (устойчивые), а отвальная масса является скальной и отсыпается в один ярус под углом естественного откоса, отвал будет устойчивым при любой его высоте.

Вместе с тем при расчете устойчивости отвалов имеются некоторые особенности, которые и будут рассмотрены ниже.

Не усложняя и без того непростую схему расчета устойчивости откосов, будем считать распределенную нагрузку q постоянной. Теоретически она может быть задана произвольной функцией, однако установить на практике ее распределение, как правило, не представляется возможным.

Рассмотрим пример расчета отвала на слабом наклонном основании. Пусть отвал скальных пород отсыпан под углом естественного откоса, то есть разрушение по первой схеме невозможно. Геометрические характеристики отвала,

нагрузка и физико-механические свойства следующие (см. рис. 2.24):
 $\alpha = \varphi_1 = 35^\circ$; $\gamma_1 = 2,5 \text{ т/м}^3$; $C_1 = 0 \text{ т/м}^2$; $q = 3 \text{ т/м}$. Характеристики контакта:
 $\beta = 15^\circ$; $C' = 5 \text{ т/м}^2$; $\varphi' = 15^\circ$.

Перейдем к расчету отвала по второй схеме. В принципе расчет такого отвала полностью идентичен примерам на анизотропный и подработанный откос, рассмотренным выше. Единственное дополнение заключается в пригрузке площадки отвала (см. рис. 2.24). Однако никаких принципиальных трудностей пригрузку не вызывает. Ее действие учитывается при суммировании сил под площадкой следующим образом:

$$\int_{H/k}^{H/k+h/\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi_1}{2}\right)} \left[\gamma_1 \left(H - \left(H - h + \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right) \left(x - \frac{H}{k} \right) \right) + \frac{q}{\gamma_1} \right) \left(\sqrt{1 + f_1^2} \right) \right] dx,$$

где h – глубина поверхности скольжения на стыке участков откоса и бермы.

По результатам численного решения примера определены геометрические параметры наиболее слабой поверхности скольжения и предельная высота отвала. Результаты представлены в виде вектора определяемых параметров: $\{\lambda s d h_1 h x_0 \text{tg}\psi H\}^T = \{0,88 1,53 1,38 21,17 7,36 48,97 1,07 53,76\}^T$, где d, h_1 – соответственно масштабный коэффициент и глубина поверхности скольжения в точке преломления, остальные обозначения см. выше. Поверхность скольжения приведена на рис. 2.25.

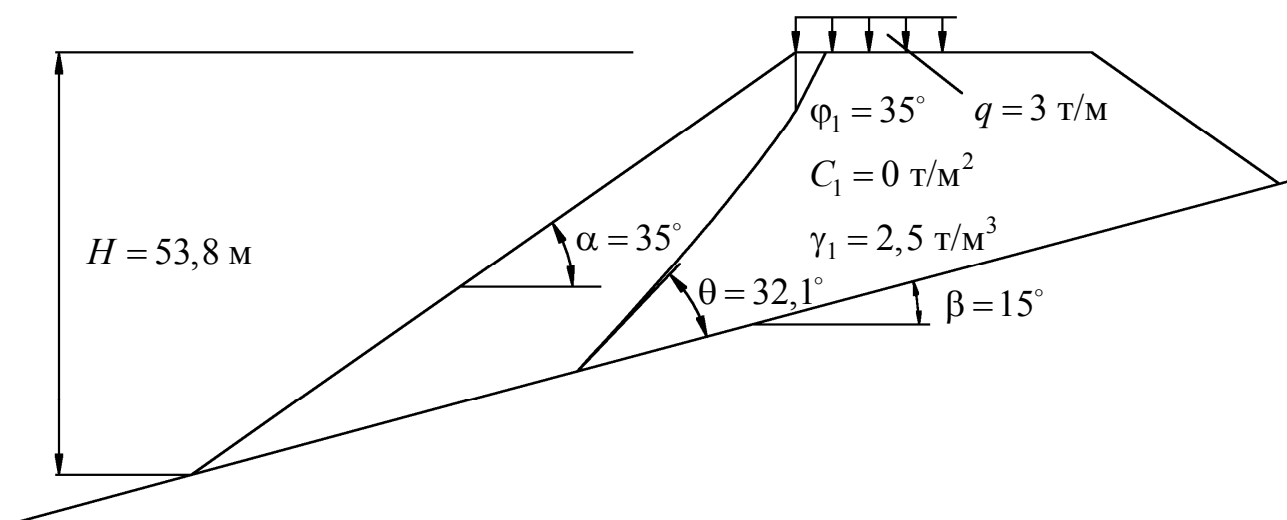


Рис. 2.25. Расчет отвала на наклонном основании

В заключение отметим, что если бы породы отвала обладали сцеплением, отыскание поверхности скольжения под бермой необходимо было бы производить при $n = 1$, т. е. $\lambda = C/\gamma$.

Рассмотрим пример расчета отвала по третьей схеме. Расчет по этой схеме является наиболее сложным и включает в себя практически все элементы и приемы расчета, рассмотренные выше. Дело в том, что поверхность скольжения будет проходить как под откосом отвала, так и под откосом основания, угол наклона которого в пределе может быть равен нулю. Выше нам приходилось рассматривать лишь откосы с углом, превышающим угол внутреннего трения пород. В этой связи возникают некоторые особенности расчета, которые рассмотрим по порядку.

Будем считать, что угол наклона откоса основания меньше угла внутреннего трения слагающих его пород, то есть $0 \leq \alpha_1 \leq \varphi$. В противном случае рассматриваемая задача будет сводиться к задаче по расчету неоднородного откоса, которая была рассмотрена выше. Кроме того, угол наклона откоса основания должен быть менее угла трения пород отвала по породам основания.

При построении поверхностей скольжения в однородных свободных откосах и определении их предельных параметров был введен некоторый коэффициент λ , обеспечивающий выполнение условия предельного равновесия и определяющий предельные параметры откосов. Когда рассматривается участок выпора пород с углом откоса, меньшим угла внутреннего трения пород основания, очевидно, условие предельного равновесия должно выполняться автоматически, т. е. $n = 1$ (см. выше), подобно тому, как и на участке под верхней бермой, мы принимали $n = 1$.

Итак, начиная с точки, находящейся на некотором удалении от нижней бровки отвала, до точки, соответствующей нижней бровке отвала при выполнении условия $\alpha_1 \leq \varphi$, поверхность скольжения описывается известным уравнением (так как $n = 1$, то в уравнении (2.26) λ заменяем на C/γ):

$$k_1 x - y_1 = \frac{C(k_1 f - 1)y_1'^2 + 2(k_1 + f)y_1' + 1 - k_1 f}{\gamma f y_1'^2 - 2f^2 y_1' + k_1 - f + k_1 f^2}, \quad -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_1 + \varphi}{2}\right) \leq y_1' \leq \varphi.$$

Построение поверхности скольжения на этом участке имеет некоторую особенность, связанную с тем, что $\alpha_1 \leq \varphi$. Дело в том, что определение координат точек поверхности скольжения осуществляется при помощи интегрирования некоторой функции (2.26), (2.42), имеющей разрыв в точке:

$$p = f - \sqrt{\frac{(f - k_1)(1 + f^2)}{f}},$$

где p – параметр интегрирования (по сути, производная функции поверхности скольжения).

В случае, когда $\alpha_1 > \varphi$, разрыва функции нет, то есть как в рассмотренных выше задачах, например на однородный откос.

Разрыв функции будет иметь место при выполнении условия: $0 < \alpha_1 < \varphi$. При этом точка разрыва (угол наклона поверхности скольжения), в зависимости от угла внутреннего трения и угла откоса, находится в интервале: $-\left[\pi/4 - \varphi/2\right] \leq \vartheta \leq \varphi$. Точка разрыва ϑ является максимальным значением угла поверхности скольжения на этом интервале, определяется глубиной расположения поверхности скольжения на стыке участков откосов отвала и откоса основания и не может превышать значения $\arctg p$.

Следующий участок поверхности скольжения (второй) находится под откосом отвала, а сама поверхность скольжения пока проходит по породам основания отвала. Так как в точке под нижней бровкой отвала $\vartheta < \varphi$, то поверхность скольжения на рассматриваемом участке описывается уравнением:

$$kx - y_2 = \frac{\left[\lambda(kf - 1) + Af^2\right]y_2'^2 + 2\left[\lambda(k + f) + Af\right]y_2' + \lambda(1 - kf) + A}{fy_2'^2 - 2f^2y_2' + k - f + kf^2}. \quad (2.55)$$

Если в уравнении (2.55) положить $A = 0$ или, что то же самое, воспользоваться условием трансверсальности на пересечении с откосом, то получим уравнение (2.26).

Условие на стыке участков откоса отвала и откоса основания получим при рассмотрении разрывной вариационной задачи второго рода при условии равенства ординат по обе стороны от стыка:

$$\frac{h_1(1+f^2) + \frac{C}{\gamma}(f - 2\operatorname{tg}\psi_1 - fg^2\psi_1)}{(1+fg\psi_1)^2} = \frac{h_1(1+f^2) + \lambda(f - 2\operatorname{tg}\psi_2 - fg^2\psi_2)}{(1+fg\psi_2)^2},$$

где h_1 – глубина точки излома; ψ_1, ψ_2 – углы наклона поверхности скольжения в точке преломления.

Заметим, что излом поверхности скольжения на стыке участков откоса отвала и откоса основания будет иметь место, если угол откоса отвала больше угла внутреннего трения пород отвала, а угол откоса основания меньше угла внутреннего трения пород основания. В противном случае излома поверхности не будет.

Далее, на участке $\vartheta > \varphi$ поверхность скольжения описывается уже известным уравнением:

$$kx - y_3 = (\lambda + B) \frac{(1 + y_3'^2)^2}{2y_3'^3 - (k + 3f)y_3'^2 + 2kfy_3' + k - f},$$

где B – постоянная интегрирования.

Этим уравнением описывается поверхность скольжения на третьем участке, который продолжается до контакта основание – отвал. Далее, как и было показано выше, поверхность скольжения преломляется, после чего начинается четвертый участок. В случае если угол наклона поверхности скольжения после преломления превышает угол внутреннего трения пород отвала (если это не так, то появится еще один участок, описываемый уравнением (2.55) с углом внутреннего трения, характеризующим породы отвала), поверхность скольжения опишется уже известным уравнением:

$$kx - y_4 = d \frac{(1 + y_4'^2)^2}{2y_4'^3 - (k + 3f_1)y_4'^2 + 2kf_1y_4' + k - f_1}.$$

где d – постоянная.

Условие в точке преломления поверхности скольжения на контакте основание – отвал, при условии равенства объемных весов пород основания и отвала, имеет вид:

$$\frac{\operatorname{tg}\psi_3 - \operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\psi_3} - \frac{\operatorname{tg}\psi_4 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}^2\psi_4} + (\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\psi_3) \frac{1 + 2\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi_3 - \operatorname{tg}^2\psi_3}{(1 + \operatorname{tg}^2\psi_3)^2} -$$

$$-(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\psi_4) \frac{1 + 2\operatorname{tg}\varphi_1\operatorname{tg}\psi_4 - \operatorname{tg}^2\psi_4}{(1 + \operatorname{tg}^2\psi_4)^2} = \frac{\lambda \left(1 - \frac{C_1}{C}\right)}{h_2},$$

где ψ_3, ψ_4 – соответственно угол наклона поверхности скольжения до преломления в основании отвала и после преломления в породах отвала; β – угол наклона контакта основание – отвал в точке преломления; h_2 – глубина точки излома; C_1, C – соответственно сцепление пород отвала и основания; φ_1, φ – соответственно углы внутреннего трения пород отвала и основания.

Заметим, что если сцепления пород отвала и основания оба равны нулю, то правая часть условия преломления поверхности скольжения также равна нулю.

Все остальные уравнения и параметры определяются подобно тому, как в задачах на неоднородный и подработанный откос, а также из примера отвала на наклонном основании.

Рассмотрим частный случай – горизонтальное основание под действием равномерно распределенной нагрузки q (рис. 2.26).

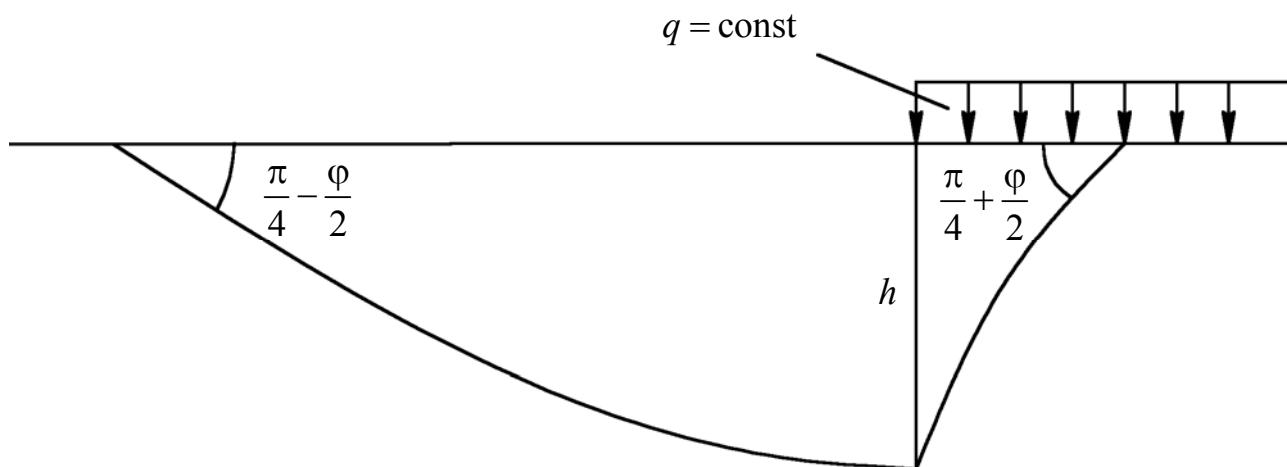


Рис. 2.26. Расчет устойчивости основания

Для откосов, угол наклона которых превышает угол внутреннего трения, поверхность скольжения состоит из трех участков (см. выше), на каждом из которых свое условие равновесия или устойчивости, описываемые уравнениями (2.22), (2.23), (2.33). Для оснований (угол откоса равен нулю) участок поверхности скольжения, описываемый условием равновесия (2.22), будет отсутствовать, так как не выполняется критерий (2.34). Таким образом, поверхность скольжения состоит из двух участков, причем для обоих участков необходимо принять $n = 1$. Нагруженный участок подобен вертикальному откосу – участок горизонтальной бермы, а ненагруженный участок – участку выпора. Глубина точки излома поверхности скольжения h является параметром, изменяя который, отыскивают поверхность скольжения с максимальной разницей сдвигающих и удерживающих призму смещения сил. Аналогично для наклонного основания глубину точки излома на стыке участков откоса отвала и откоса основания h_1 можно принять в качестве изменяемого параметра.

Рассмотрим пример расчета нагруженного отвала ($q = 1$ т/м) с геометрическими параметрами ($\alpha = 35^\circ$; $H = 35$ м) и физико-механическими свойствами ($\varphi_1 = 35^\circ$; $\gamma_1 = 2,5$ т/м³; $C_1 = 0$ т/м²), отсыпанного на слабое наклонное основание, обладающее физико-механическими характеристиками:

$$\varphi = 15^\circ; \gamma = 2,5 \text{ т/м}^3; C = 5 \text{ т/м}^2.$$

По результатам численного решения определены следующие геометрические параметры:

$$\{h_1 h_2 h_3 \psi_1 \psi_2 \psi_3 \psi_4 \psi_5 \lambda d AB\}^T = \\ = \{0,22 \ 13,05 \ 3,91 \ -29,6 \ -25,5 \ 34,0 \ 46,1 \ 56,8 \ 2,42 \ 0,74 \ 1,11 \ 1,37\}^T,$$

где h_3 – глубина поверхности скольжения на стыке участков откоса отвала и горизонтальной площадки; ψ_5 – угол наклона поверхности скольжения на стыке участков откоса отвала и горизонтальной площадки (со стороны откоса).

На рис. 2.27 представлен пример расчета устойчивости отвала с выпором основания. Отметим, что показанная на рис. 2.27 поверхность скольжения является предельной, но не является наиболее слабой, как отмечалось выше, критическую поверхность скольжения необходимо отыскивать перебором параметра, например h_1 .

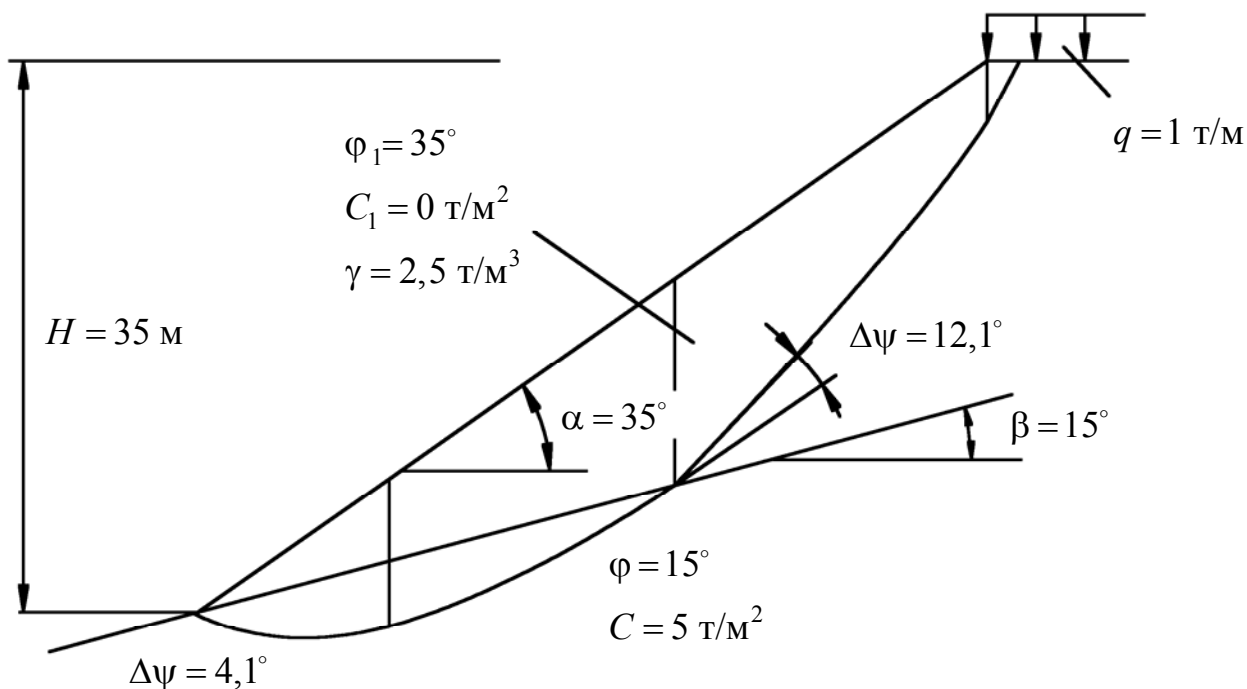


Рис. 2.27. Расчет отвала на слабом наклонном основании

Необходимо помнить, что поверхность скольжения выходит в основание отвала лишь при определенных (низких) механических характеристиках пород основания. Впрочем, условия выпора пород основания требуют дальнейшего уточнения.

2.8. Расчет обводненных откосов

Как известно, силы гидростатического взвешивания и гидродинамического давления эквивалентны некоторой силе, называемой силой гидростатического давления, действующей по площадке скольжения и перпендикулярной к ней. Ее численное значение определяется формулой [12]:

$$D = \gamma_B h_B l,$$

где γ_B – объемный вес воды; $h_B = (y_B - y)$ – высота столба воды; y_B – функция депрессионной кривой; y – функция поверхности скольжения; l – протяжен-

ность обводненной части отсека (для подтопленного отсека равна длине площадки скольжения отсека).

При расчете откосов с элементарным размером отсека

$$D = \frac{\gamma_B h_B dx}{\cos \vartheta}, \quad (2.56)$$

где ϑ – угол наклона основания отсека.

Как было показано выше, условие равновесия призмы смещения для однородного откоса описывается при помощи интегралов (сумм). В целях упрощения выводов и более яркого представления идеи учета силового воздействия подземных вод, будем рассматривать только один из них, являющийся наиболее общим и определяющий наиболее протяженную часть поверхности скольжения. Обобщенную силу для рассматриваемого участка поверхности скольжения с учетом гидрогеологии можно представить в виде:

$$\int_{\vartheta > \varphi} \left[\frac{\gamma(\hat{y} - y)(y' - f) - (C - f\gamma_B)(y_B - y)(1 + y'^2)}{1 + y'^2} \right] dx. \quad (2.57)$$

Из условия (2.57) вытекает силовое воздействие подземных вод. Оно может быть учтено снижением величины сцепления в каждой рассматриваемой точке поверхности скольжения (отсеке).

Выясним, каким образом обводненность откоса влияет на изменение положения наиболее вероятной поверхности скольжения по сравнению с сухим откосом. Для необводненных откосов положение потенциальной поверхности скольжения обосновано выше.

Запишем условие трансверсальности (условие в точке пересечения поверхности скольжения с депрессионной кривой) в общем виде:

$$F + (\psi' - y') F_{y'} \Big|_{x=x_0} = 0, \quad (2.58)$$

где $F, F_{y'}$ – подынтегральное выражение и частная производная подынтегрального выражения по y' ; ψ' – производная функции кривой, вдоль которой перемещается экстремаль (депрессионная кривая); x_0 – абсцисса точки пересечения

экстремали (поверхности скольжения) и кривой, вдоль которой перемещается экстремаль (депресссионная кривая).

Выясним, будет ли преломляться поверхность скольжения при переходе с сухого на обводненный участок массива и наоборот, а также в случае преломления депрессионной кривой (например, когда она выходит в откос). Для этого необходимо рассмотреть разрывную задачу вариационного исчисления второго рода. Рассмотрим два соседних отсека, разделенных вертикальной границей. При этом площадка скольжения одного из отсеков обводнена, а другого нет. Приравнявая условия трансверсальности (2.58) для функционала (2.57), а также учитывая, что на границе отсеков $h_b = 0$, будем иметь:

$$y'_{1b} = y'_1; y'_{2b} = y'_2 .$$

Этот же результат справедлив для произвольной границы между отсеками.

Таким образом, производные функции поверхности скольжения в точке стыка сухого и обводненного участков равны, то есть излом поверхности скольжения отсутствует. Другими словами, обводнение горных пород не влияет на форму поверхности скольжения в откосах, чего раньше никто не доказывал.

Как указывалось выше, силовое действие воды состоит в уменьшении величины сцепления в обводненных точках (отсеках) поверхности скольжения. А в силу того, что на форму поверхности скольжения вода влияния не оказывает, существует некоторое приведенное (среднее) значение сцепления, удовлетворяющее предельному равновесию обводненного откоса.

Таким образом, на обводненном среднем участке поверхности скольжения величина силы сцепления:

$$F_{BC} = \int_B [C - \text{tg}\varphi\gamma_B (y_B - y)] dx ,$$

а на сухом участке:

$$F_C = \int C dx .$$

Среднее или приведенное значение сцепления определится формулой:

$$C_B = \frac{\int_B [C - \text{tg}\varphi\gamma_B (y_B - y)] dx + \int C dx}{\int_B dx + \int dx} = C - \frac{\gamma_B S_B \text{tg}\varphi}{d} = C - \gamma_B h_B^{\text{cp}} \text{tg}\varphi, \quad (2.59)$$

где S_B – объем воды в пределах призмы смещения; d – горизонтальная проекция поверхности скольжения; h_B^{cp} – среднее значение высоты столба воды вдоль всей поверхности скольжения (используется вся поверхность скольжения, включая необводненную).

Таким образом, для приближенного определения предельных параметров обводненного однородного откоса необходимо вычислить по формуле (2.59) значение величины приведенного сцепления массива и воспользоваться номограммой устойчивости (см. рис. 2.16).

2.9. Об устойчивости вертикального откоса

Рассмотрим вертикальный однородный откос и определим распределение горизонтальной силы по его боковой поверхности при увеличении его высоты свыше предельной (если предел прочности на растяжение принять равным нулю, то предельная высота $H_{\text{пр}} = H_{90} = 2C \text{tg}(\pi/4 + \varphi/2) / \gamma$). Аналогом поставленной задачи является задача по расчету подпорной стенки (рис. 2.28).

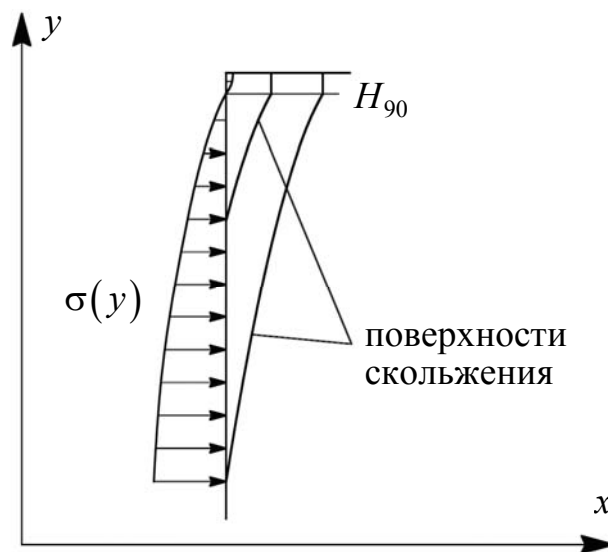


Рис. 2.28. Расчетная схема к определению эпюры горизонтальных напряжений с увеличением высоты вертикального откоса

Поверхность скольжения под горизонтальной площадкой описывается уравнением (2.40). И пусть $y' = p$ – параметр; $H - y = h$ – глубина точки. Тогда тангенс угла наклона поверхности скольжения в точке, согласно (2.40), равен $\sqrt{1 + \frac{f\gamma h}{C}}$. Для определения силового воздействия призмы смещения, подставим уравнение (2.40) с соответствующими заменами в условие равновесия (2.33), получим выражение:

$$E_0 = \frac{2C^2}{\gamma f^2} \int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi+\varphi}{4}\right)}^{\sqrt{1+\frac{f\gamma h}{C}}} (p^3 - 2fp^2 - p) dp. \quad (2.60)$$

Для определения закона распределения нормальных напряжений по боковой грани вертикального откоса проинтегрируем уравнение (2.60), возьмем производную по глубине h и заменим $\sigma_1 = \gamma h$:

$$\sigma_3 = \sigma_1 - 2C \sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg}\varphi \sigma_1}{C}}, \quad (2.61)$$

где σ_1, σ_3 – максимальное и минимальное значения главных напряжений соответственно.

Уравнение (2.61) определяет горизонтальную составляющую напряжений, необходимую для удержания призмы смещения в предельном равновесии (критерий прочности).

Теперь предположим, что рассматриваемый откос подсечен плоской поверхностью ослабления. Поместим начало системы координат в точку выхода поверхности скольжения в откос и используем уже известные формулы для высоты трещины отрыва и ширины призмы смещения:

$$h' = \frac{C'}{\gamma} \frac{1 + \operatorname{tg}^2\beta}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\varphi'} = \frac{C'}{\gamma} \frac{\cos\varphi'}{\cos\beta \sin(\beta - \varphi')}, \quad a = \frac{H(1 - \operatorname{tg}\beta \operatorname{ctg}\alpha) - h'}{\operatorname{tg}\beta},$$

учитывая, что $\alpha = 90^\circ$, получим:

$$a = \frac{H - h'}{\operatorname{tg}\beta},$$

где H – высота вертикального откоса.

$$E_0 = \frac{\gamma(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\varphi')(H - h')^2}{2\operatorname{tg}\beta}. \quad (2.62)$$

Взяв производную выражения (2.62) по H и приняв $\sigma_1 = \gamma H$, получим условие:

$$\sigma_3 = \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\varphi'}{\operatorname{tg}\beta} \sigma_1 - C' \frac{1 + \operatorname{tg}^2\beta}{\operatorname{tg}\beta}. \quad (2.63)$$

Если положить в уравнении (2.63) $\beta = \pi/4 + \varphi'/2$, то условие равновесия примет вид:

$$\sigma_1 = 2C' \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2}\right) + (1 + \sin\varphi')\sigma_3 = \sigma'_{\text{сж}} + (1 + \sin\varphi')\sigma_3. \quad (2.64)$$

Формула (2.63) выражает предельное условие в главных напряжениях при наличии уже сформированных поверхностей сдвига (ослабления).

2.10. Критерий разрушения твердых тел

Перейдем к анализу критерия (2.61). Его можно представить в следующем виде:

$$\sigma_3 = \sigma_1 - 2C \operatorname{tg}\psi, \quad (2.65)$$

где ψ – угол наклона наиболее опасной площадки скольжения к направлению действия главного напряжения σ_3 .

Если $\sigma_3 = 0$ (одноосное сжатие), то $\psi = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$, а $\sigma_1 = \sigma_{\text{сж}}$ ($\sigma_{\text{сж}}$ – предел прочности на одноосное сжатие). При увеличении σ_3 (сжимающие напряжения считаются положительными) угол наклона критической площадки также увеличивается. Если выполняется условие $\sigma_p < \sigma_3 < 0$ (σ_p – предел прочности на одноосное растяжение), то $\psi < \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$. В случае если материал имеет пластический характер разрушения, то есть $\varphi = 0$, угол наклона критической площадки среза является постоянной величиной, не зависящей от уровня напряжений: $\psi = 45^\circ$. А критерий (2.61), (2.65) принимает вид:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2C. \quad (2.66)$$

Выражение (2.66) есть ничто иное, как известный критерий разрушения Треска (Сен-Венана, 1868) [17].

Для идеально сыпучих материалов ($C = 0$), как отмечалось выше, поверхность скольжения является прямолинейной и наклонена к горизонту под углом $\pi/4 + \varphi/2$, поэтому на основе выражения (2.64) критерий будет иметь вид:

$$\sigma_1 = (1 + \sin \varphi) \sigma_3. \quad (2.67)$$

Формула (2.67) выражает линейную связь между главными напряжениями. Таким образом, как при отсутствии трения, так и сцепления критерий прочности имеет линейный вид. Как известно, идеальная жидкость не обладает внутренним трением (вязкостью) и прочностью на разрыв, а соответственно, и сцеплением. Если положить в уравнении (2.66) $C = 0$ или в уравнении (2.67) $\varphi = 0$, получим условие равновесия (прочности) в виде гидростатического закона распределения напряжений: $\sigma_1 = \sigma_3$.

Из выражения (2.61) также следует, что для высокого уровня напряжений предельные компоненты главных напряжений:

$$\lim_{\sigma_1 \rightarrow \infty} \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = 1.$$

Очевидно, что напряжение σ_1 в критерии (2.61) не может быть отрицательным, поэтому, положив $\sigma_1 = 0$, получим $\sigma_3 = -2C$. То есть предел прочности на растяжение по модулю не может превышать двойного сцепления ($|\sigma_p| < 2C$). То есть для несвязных материалов $|\sigma_p| = 0$.

Заметим, что при выводе условие равновесия (2.33) и определении геометрии наиболее опасной поверхности скольжения (2.40) использовался линейный критерий Кулона (1773) [17]:

$$\tau = \sigma \operatorname{tg} \varphi + C, \quad (2.68)$$

где τ, σ – предельные касательные и нормальные напряжения на площадке среза соответственно.

Уравнение (2.68) в литературе часто называют критерием Кулона – Мора, Мора – Кулона или просто Мора. В 1900 году Мор предложил общую форму критерия прочности, связывающую главные нормальные напряжения, причем конкретную функциональную зависимость он не предлагал. В дальнейшем было предложено построение паспорта прочности (2.68) в виде огибающей предельных кругов Мора. Отметим, что в случае криволинейной огибающей предельных кругов Мора угол наклона критической площадки среза к линиям действия главных напряжений будет меняться, что противоречит существующей теории.

Однако заметим очень важное различие между критериями Кулона и Мора. Критерий Кулона в форме (2.68) был получен чисто эмпирически, и в нем совершенно ничего не говорится о главных напряжениях. Критерий Мора выражает предельное соотношение только через главные напряжения, и в нем ничего не говорится о напряжениях на площадке среза. Паспорт прочности по Кулону может быть непосредственно получен по результатам испытаний на прямой срез. Для получения паспорта прочности в осях главных напряжений по Мору необходимо произвести трехосные (объемные) испытания.

Для получения отображения паспорта прочности в осях главных напряжений из системы напряжений на площадке среза (и наоборот), то есть связи критериев Кулона и Мора, необходимо располагать условиями передачи внешней нагрузки (главных напряжений) на площадку среза, что на современном этапе развития экспериментальной базы невозможно. Тем не менее критерий (2.68) в осях главных напряжений некоторые авторы, например [18], представляют в виде:

$$\sigma_1 = \sigma_{сж} + \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \sigma_3. \quad (2.69)$$

Между критериями (2.61) и (2.69) существуют два принципиальных отличия. Во-первых, в критерии разрушения (2.69) угол наклона наиболее опасной площадки скольжения к линии действия главного напряжения σ_3 является ве-

личной постоянной: $\psi = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$. Данный угол обеспечивает максимальную разницу между сдвигающими и удерживающими силами по площадке среза в окрестности конкретной точки при заданном уровне напряжений. В критерии (2.61) угол наклона критической площадки является величиной переменной, зависящей от уровня напряжений, это и придает критерию прочности кривизну. Кроме того, значение угла наклона критической площадки определяется из условия максимума разности сдвигающих и удерживающих сил (обобщенной силы) вдоль всей поверхности разрушения на возможном перемещении всей механической системы (призмы смещения). Во-вторых, минимальное главное напряжение σ_3 не совершает работу на площадке сдвига, то есть не реализует удерживающего эффекта в виде трения. И действительно, если подставить критерий разрушения (2.61) в систему уравнений (2.70), то получим критерий Кулона в виде уравнения (2.68):

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_1 \cos^2 \psi; \\ \tau &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\psi.\end{aligned}\tag{2.70}$$

Фактически критерий (2.61) получен моделированием разрушения твердого тела в изменяющемся поле главных напряжений, и в этой связи он имеет некоторое методологическое сходство с микродефектными теориями прочности.

Если линеаризовать уравнение (2.61) в окрестности точки $(\sigma_1 = \sigma_{сж}; \sigma_3 = 0)$, то критерий разрушения примет вид:

$$\sigma_1 = \sigma_{сж} + (1 + \sin\varphi)\sigma_3.\tag{2.71}$$

Линеаризация критерия (2.61) эквивалентна замене криволинейной поверхности скольжения на прямолинейную с углом падения площадки среза $\psi = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$, при тех же механических характеристиках. Анализируя выражения (2.69) и (2.71), констатируем их качественное сходство, а при $\varphi = 0$ они совпадают.

Известно, что пластическое деформирование у хрупких материалов ($\varphi \neq 0$) сопровождается увеличением их объема (дилатансией). Вопрос об увеличении объема при пластическом деформировании удобнее рассматривать в осях, совпадающих с направлением действия главных напряжений. Если принять ассоциированный закон пластического течения (принцип нормальности), то приращение пластических деформаций будет нормальным к поверхности текучести (пластического потенциала). На рис. 2.29 представлены критерии (2.61), (2.69) и (2.71), а также вектора приращений пластических деформаций в случае принятия ассоциированного закона пластического течения.

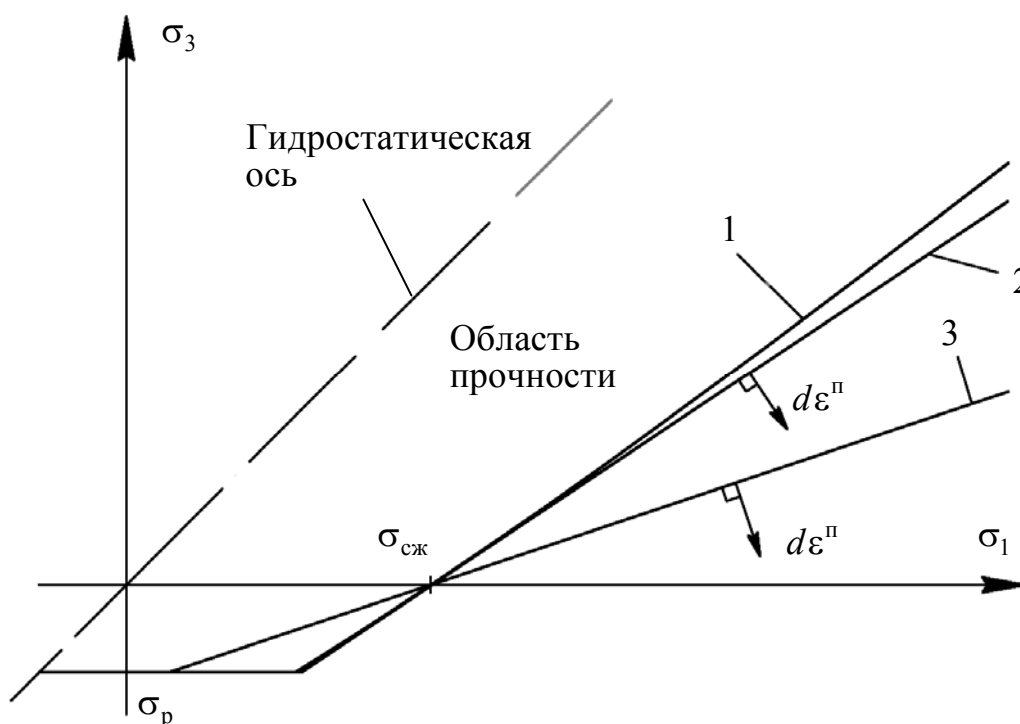


Рис. 2.29. Критерии прочности (пластичности):

$$1 - \sigma_3 = \sigma_1 - 2C \sqrt{1 + \frac{\operatorname{tg} \varphi \sigma_1}{C}}; \quad 2 - \sigma_1 = \sigma_{\text{сж}} + [1 + \sin \varphi] \sigma_3; \quad 3 - \sigma_1 = \sigma_{\text{сж}} + \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \sigma_3$$

Для оценки объемных изменений при пластическом деформировании используется так называемый коэффициент дилатансии, представляющий собой котангенс угла наклона паспорта прочности β (при ассоциированном законе пластического течения) к оси σ_1 (см. рис. 2.29). Значение коэффициента дилатансии определяется выражением [18]:

$$\operatorname{ctg}\beta = \left| \frac{d\varepsilon_3^{\text{II}}}{d\varepsilon_1^{\text{II}}} \right|, \quad (2.72)$$

где $\operatorname{ctg}\beta$ – коэффициент дилатансии; $d\varepsilon_1^{\text{II}}, d\varepsilon_3^{\text{II}}$ – приращения пластических деформаций по направлениям главных осей.

В случае, когда коэффициент дилатансии равен единице, пластическое течение называется эквиволлюмиальным (равнообъемным). Такое деформирование характерно для материалов пластического разрушения.

Приращения пластических деформаций определяются по формулам [17]:

$$d\varepsilon_1^{\text{II}} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_1}; \quad d\varepsilon_3^{\text{II}} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_3}, \quad (2.73)$$

где λ – постоянная; g – функция пластического потенциала (условие пластичности или прочности (2.61), (2.69), (2.71) с нулем в правой части).

Согласно уравнениям (2.72), (2.73), коэффициент дилатансии для поверхности текучести в виде (2.69):

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}. \quad (2.74)$$

Коэффициент дилатансии для линеаризованного критерия (2.71):

$$\operatorname{ctg}\beta = 1 + \sin \varphi. \quad (2.75)$$

Увеличение объема при пластическом деформировании, при использовании критерия (2.74), дает завышенную величину, что противоречит экспериментальным данным [19]. Для устранения данного несоответствия прибегают к искусственному уменьшению приращения объема пластических деформаций посредством необоснованной замены угла внутреннего трения в критерии (2.74), так называемым углом дилатансии i или его максимальным значением i_0 , при отсутствии нормального напряжения на площадке среза (при разрушении трещины i_0 будет стремиться к углу подъема неровностей контактирующих поверхностей). В общем случае величина дилатансии является производной $d\delta_n/d\delta_s$ (где δ_n, δ_s – величины нормального и касательного сдвига соответственно). Лейхтниц и Ербан получили максимальное значение угла дилатан-

сии на трещине в пределах $10 - 20^\circ$ [19]. Подобным образом переходят к неассоциированному закону пластического течения.

Для неассоциированного закона пластического течения в нашем случае, то есть для соответствия критериев (2.69) и (2.71), а также равенства коэффициентов дилатансии (2.74) и (2.75), при углах внутреннего трения $35, 30, 20^\circ$, углы дилатансии должны быть приняты равными $12.8, 11.5, 8.4^\circ$ соответственно.

Выше указывалось на отсутствие реализации механизма трения на площадке среза от действия минимального главного напряжения, что обосновано аналитически, однако физические предпосылки данного феномена объяснить достаточно сложно.

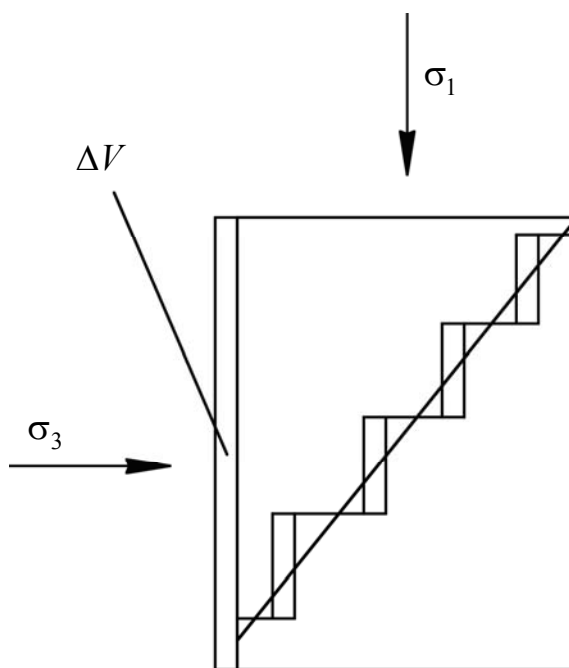


Рис. 2.30. Схема пластического деформирования и разрушения образца

Можно предположить, что его сущность заключается в принципиальном отличии упругого и пластического деформирования а именно в дилатансии. Как при упругом, так и при пластическом деформировании в направлении максимального главного сжимающего напряжения происходит уменьшение размера образца, а в направлении минимального – расширение. При упругом деформировании не происходит увеличения объема (явление дилатансии не наблюдается), и поэтому деформирование происходит в “естественной упаковке” с пол-

ным контактом между зернами образца. В случае пластического деформирования происходит разуплотнение зерен, и поэтому в направлении расширения (увеличения объема ΔV), по-видимому, теряется контакт (рис. 2.30), что и объясняет отсутствие проявления механизма трения в предельном равновесии от действия минимального главного напряжения.

Фактически, как показано выше, нулевая работа межблоковых реакций в поле главных напряжений означает пассивность наименьшего из главных напряжений (то есть отсутствие работы на площадке сдвига). А если учесть, что в каждой точке вертикального откоса на глубинах, превышающих предельную (свободного откоса), выполняется условие предельного равновесия, то можно заключить, что в пластических областях наименьшее из главных напряжений является пассивным.

2.11. Сравнительный анализ критериев прочности

Одной из основных проблем технических наук, а также инженерной практики является оценка прочности материалов. Окончательного разрешения данная проблема не получила до сих пор, а дискуссии по этому вопросу продолжают не одну сотню лет. Создание строгой теории прочности, объясняющей физическую картину разрушения и его причины, вряд ли представляется возможным, прежде всего, в связи со сложностью учета и описания неоднородности и анизотропии реального материала. Поэтому на практике часто используются так называемые технические критерии разрушения или прочности. Критерий прочности представляет собой развернутую запись предельного условия прочности в виде явно или неявно заданной зависимости напряженного состояния материала и его механических свойств. По способу получения критерии прочности можно разделить на две большие группы: аналитические и эмпирические. Известны аналитические критерии прочности – Треска (Сен-Венана), П. П. Баландина, Л. Я. Парчевского, А. Н. Шашенко и другие. К наиболее по-

пулярным эмпирическим относятся критерии О. Мора, З. Т. Бенявского, Хоека-Брауна и другие.

Рассмотрим один из широко распространенных эмпирических критериев прочности – критерий Хоека-Брауна, который для массива пород может быть представлен в виде [20]:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \sigma_{сж} \left(m_b \frac{\sigma_3}{\sigma_{сж}} + s \right)^a, \quad (2.76)$$

где σ_1, σ_3 – главные напряжения; m_b – константа Хоека-Брауна для породного массива; $\sigma_{сж}$ – предел прочности горных пород на одноосное сжатие; s, a – постоянные, учитывающие генезис и состояние (сплошность) породного массива.

Как известно, предел прочности на одноосное сжатие может быть выражен через сцепление и угол внутреннего трения зависимостью:

$$\sigma_{сж} = 2C \operatorname{tg} \omega = 2C \operatorname{tg} (\pi/4 + \varphi/2).$$

Таким образом, используя данное выражение для ненарушенного (нетрещиноватого) массива, критерий (2.76) можно записать в следующем виде [20]:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + 2C \operatorname{tg} \omega \sqrt{1 + \frac{m_1 \sigma_3}{2C \operatorname{tg} \omega}}, \quad (2.77)$$

где $4 \leq m_1 \leq 33$ – постоянная.

Рассмотрим аналитические критерии П. П. Баландина и Л. Я. Парчевского – А. Н. Шашенко [20]. В качестве механических характеристик в оба критерия входят пределы прочности на сжатие $\sigma_{сж}$ и растяжение σ_p , а эквивалентное напряжение выражается через их отношение $\psi = \sigma_p / \sigma_{сж}$. Для идеально хрупких материалов ($\psi = 0$) критерий П. П. Баландина можно представить в виде:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + 2C \operatorname{tg} \omega \sqrt{\frac{(\sigma_1 + 2\sigma_3)}{2C \operatorname{tg} \omega}}. \quad (2.78)$$

Аналогично критерий Л. Я. Парчевского – А. Н. Шашенко будет иметь вид:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + 2C \operatorname{tg} \omega \sqrt{\frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2C \operatorname{tg} \omega}}. \quad (2.79)$$

Для идеально пластичных материалов ($\psi = 1$) оба критерия совпадают и имеют вид:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{\text{сж}} = 2C \operatorname{tg} \omega. \quad (2.80)$$

На рис. 2.31 для наглядности представлены критерии прочности (2.61), (2.78), (2.79), (2.80).

Несмотря на то, что критерий (2.77) является эмпирическим, критерии (2.78), (2.79) получены при алгебраическом преобразовании энергии формоизменения, а критерий (2.61) получен моделированием разрушения однородного вертикального откоса, они имеют идентичную структуру. Их общую зависимость можно представить в виде:

$$\sigma_1 = \sigma_3 + 2C \sqrt{f(\sigma_1, \sigma_3)}, \quad (2.81)$$

где $f(\sigma_1, \sigma_3)$ – линейная функция главных напряжений.

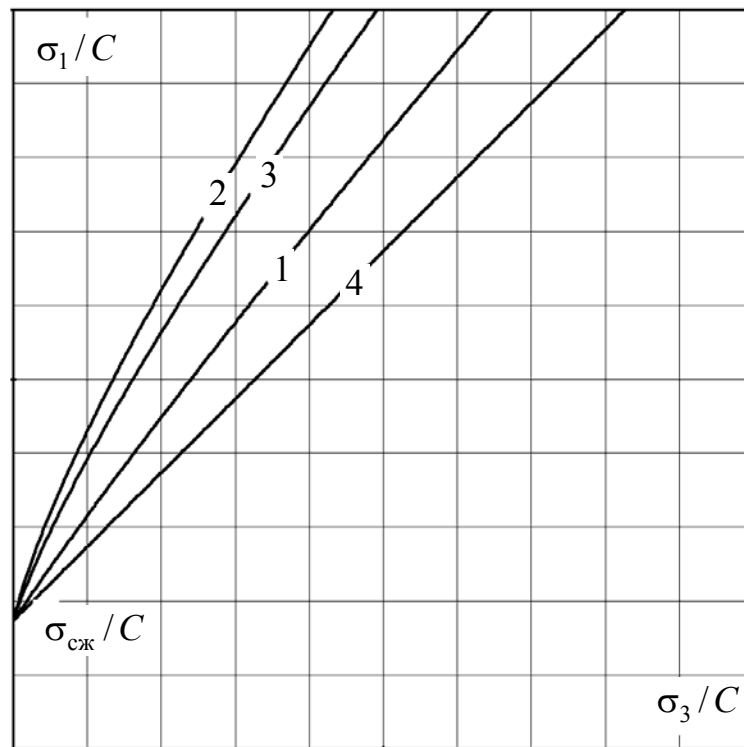


Рис. 2.31. Сравнение критериев прочности
 1 – критерий Жабко (2.61); 2 – критерий Баландина (2.78);
 3 – критерий Парчевского – Шашенко (2.79); 4 – критерий (2.80)

Заметим, что подкоренное выражение (2.81) представляет собой квадрат тангенса угла наклона критической площадки скольжения к направлению минимального напряжения σ_3 . Таким образом, угол наклона критической площадки скольжения не является постоянной величиной, а зависит от уровня напряженного состояния.

2.12. Теория пластичности

Формально выражение (2.61) является критерием прочности, так как при его выполнении соблюдается условие предельного равновесия по некоторым площадкам скольжения. Кроме того, заметим, что при его выводе использовался критерий Кулона. Если рассматривать деформационный процесс, то заметим, что пластическая деформация происходит путем возникновения сдвигов на площадках с некоторой критической величиной касательных напряжений (рассматривается только сдвиговая пластичность). Заметим, что процесс разрушения также происходит путем сдвига по некоторым площадкам с предельными значениями касательных напряжений. То есть и в первом, и во втором случаях выполняется условие Кулона в виде (2.68). В чем же тогда разница? Разница состоит в том, что критические площадки в моменты пластического деформирования и разрушения имеют разные наклоны к направлению действия главных напряжений. Таким образом, критерий (2.61) в деформационных процессах выражает не предел прочности, а предел упругости, то есть начало возникновения пластических деформаций – поверхность текучести. Согласно критерию (2.61), при пластических деформациях образуются площадки сдвига, превышающие угол $\pi/4 + \varphi/2$, к направлению действия минимального главного напряжения (в условиях объемного сжатия).

Исследуем вопрос идеальной пластичности. В геомеханике данный подход носит название метода предельного напряженного состояния или статики сыпучей среды. Данный метод подразумевает выполнение предельного условия (Кулона) в каждой точке рассматриваемой области.

Рассмотрим плоское напряженное состояние в окрестности некоторой точки напряженного тела (рис. 2.32).

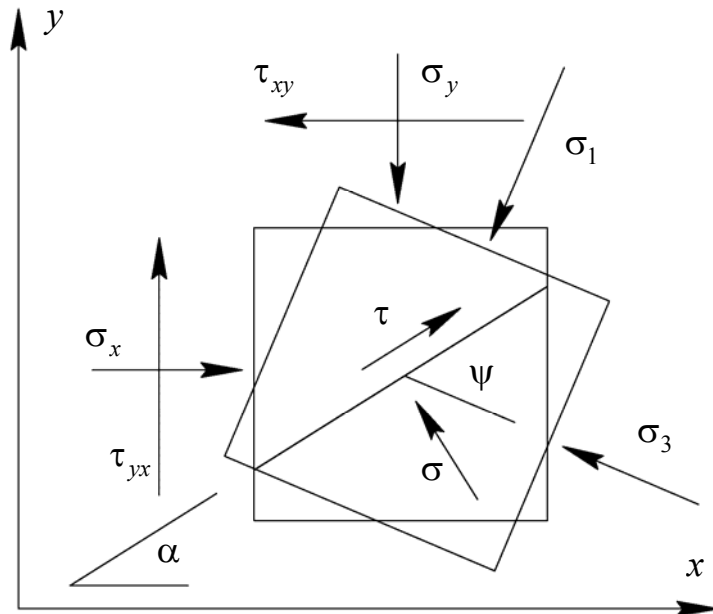


Рис. 2.32. Плоское напряженное состояние в окрестности точки

Определим напряжения на площадке, отклоненной от оси x на угол α :

$$\sigma = \frac{\sigma_x dy \sin \alpha}{dy / \sin \alpha} + \frac{\sigma_y dx \cos \alpha}{dx / \cos \alpha} - \frac{\tau_{yx} dy \cos \alpha}{dy / \sin \alpha} - \frac{\tau_{xy} dx \sin \alpha}{dx / \cos \alpha} = \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha;$$

$$\tau = \frac{\sigma_y dx \sin \alpha}{dx / \cos \alpha} - \frac{\sigma_x dy \cos \alpha}{dy / \sin \alpha} - \frac{\tau_{yx} dy \sin \alpha}{dy / \sin \alpha} + \frac{\tau_{xy} dx \cos \alpha}{dx / \cos \alpha} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha .$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_x \sin^2 \alpha + \sigma_y \cos^2 \alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha; \\ \tau &= \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (2.82)$$

Главные напряжения выражаются через компоненты плоского тензора следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} . \quad (2.83)$$

Используя выражения (2.83), выразим критерий (2.61) через компоненты плоского поля напряжений:

$$\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = C^2 \left(1 + \frac{\operatorname{tg}\varphi \sigma_1}{C}\right). \quad (2.84)$$

Далее удобнее перейти к безразмерным функциям, то есть функциям напряжений, уменьшенным в C раз.

Таким образом, полная система уравнений плоского предельного напряженного состояния (предельного равновесия), с учетом дифференциальных уравнений равновесия, примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \frac{\gamma}{C} \end{cases} \quad (2.85)$$

$$\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \operatorname{tg}\varphi + \sqrt{\operatorname{tg}^2\varphi + 4\left(1 + \operatorname{tg}\varphi \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)}.$$

Перейдем к рассмотрению вопросов пластического течения. Согласно теории пластического течения, при некотором сочетании напряжений материалы (горные породы) переходят в пластическое состояние. При усилении напряженного состояния пластические деформации возрастают вплоть до разрушения. Если в процессе накопления пластических деформаций уровень напряжений растет (или растет разность главных напряжений – девиатор, или увеличивается предел текучести), то говорят, что среда упрочняется. Если после превышения предела упругости сопротивление деформированию не меняется (напряжения не растут), такую среду называют идеальной упругопластической или средой Рейса-Прандтля. После достижения некоторого предела материал также может начать разупрочняться. В качестве параметра упрочнения обычно используется величина накопленных пластических деформаций (деформационное упрочнение) или энергия (работа) пластического деформирования (энергетическое упрочнение).

В упрочняющейся среде поверхность текучести не стационарна, она меняет свою форму и положение (расширяется, отклоняется) в зависимости от напряженно-деформированного состояния вплоть до совпадения с критической

поверхностью. При использовании неупрочняющихся моделей поверхность текучести стационарна и является единственной. В качестве поверхностей текучести часто используют предельные (критические) поверхности, хотя это и не совсем одно и то же. Если в процессе упрочнения положение поверхностей текучести (предельной) таково, что для них гидростатическая ось является центральной, то такое упрочнение называется изотропным. Если размер области текучести остается постоянным, а упрочнение осуществляется отклонением от гидростатической оси, то говорят о кинематическом упрочнении (более сложный процесс).

Для определения приращений пластических деформаций необходимо располагать также функцией пластического потенциала. В том случае, если функция пластического потенциала совпадает с функцией поверхности текучести, то говорят, что выполняется ассоциированный закон пластического течения или принцип нормальности (вектор приращения полной деформации в этом случае будет перпендикулярен поверхности текучести). В дальнейшем будем ассоциировать пластический потенциал с поверхностью текучести.

Таким образом, будем рассматривать линеаризованный критерий (2.71) в качестве первичной (начальной) поверхности текучести. Тогда в процессе накопления пластических деформаций поверхность текучести будут расширяться, а породы изотропно упрочняться (рис. 2.33). Например, для произвольной точки M поверхность текучести будет описываться уравнением

$$\sigma_3^p = \operatorname{tg}(\alpha - \Delta\alpha)(\sigma_1^p - \sigma_{сж}), \quad (2.86)$$

где σ_1^p, σ_3^p – действующие пластические напряжения; α – угол наклона к оси σ_1 начальной поверхности текучести; $\Delta\alpha$ – функция упрочнения.

Заметим, что при $\Delta\alpha = 0$ будем иметь идеальную упругопластическую модель (неупрочняющуюся).

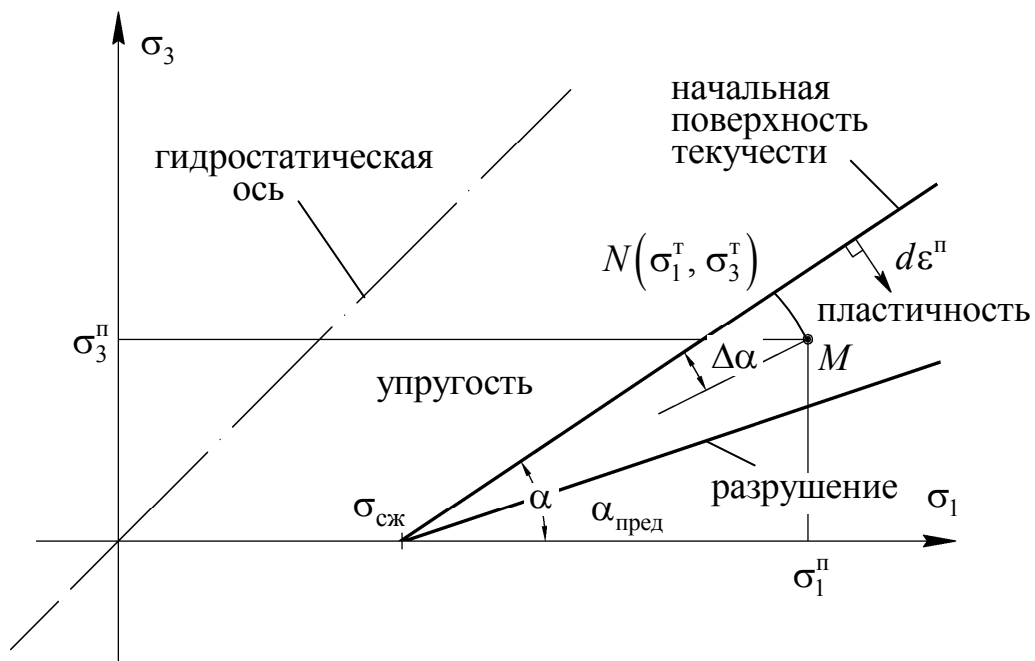


Рис. 2.33. Диаграмма пластического деформирования материалов

Угол наклона начальной поверхности текучести, согласно уравнению (2.71), определяется из выражения

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{1 + \sin \varphi}.$$

То есть при большем угле материал находится в упругой фазе, а при меньшем – в пластической (на поверхности текучести). Так как величина угла внутреннего трения определяется экспериментально, то угол α также может быть уточнен экспериментальным способом.

Предельной поверхности текучести соответствует угол

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{пред}} = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}.$$

Именно предельным углом определяется граница упрочнения материала, то есть дальше поверхность текучести расширяться не может. Таким образом,

$$\Delta \alpha \leq \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1}{1 + \sin \varphi} \right) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi} \right).$$

Так как каждая точка при изотропном упрочнении движется по дуге окружности, напряженное состояние при пластическом деформировании будет подчиняться закону:

$$\left(\sigma_1^{\text{п}} - \sigma_{\text{сж}}\right)^2 + \left(\sigma_3^{\text{п}}\right)^2 = \left(\sigma_1^{\text{т}} - \sigma_{\text{сж}}\right)^2 + \left(\sigma_3^{\text{т}}\right)^2, \quad (2.87)$$

где $\sigma_1^{\text{т}}, \sigma_3^{\text{т}}$ – напряжения, действовавшие на начальной поверхности текучести, то есть на границе перехода из упругой фазы в пластическую фазу.

Изменение напряжений при пластическом деформировании (движение по дуге окружности) влечет за собой увеличение $\Delta\alpha$ и увеличение пластических деформаций. Поэтому можно поставить в соответствие функцию упрочнения $\Delta\alpha$ и величину накопленной пластической деформации, например, в направлении максимального сжатия:

$$\Delta\alpha = k\varepsilon_1^{\text{п}},$$

где k – коэффициент пропорциональности, определяемый экспериментально; $\varepsilon_1^{\text{п}}$ – накопленная пластическая деформация в направлении наибольшего главного напряжения.

То есть параметром упрочнения является величина накопленной пластической деформации.

Таким образом, функция поверхности текучести и пластического потенциала, с учетом (2.86), принимает вид

$$F = g = \sigma_1^{\text{п}} - \text{ctg} \left[\text{arc tg} \left(\frac{1}{1 + \sin\varphi} \right) - k\varepsilon^{\text{п}} \right] \sigma_3^{\text{п}} - \sigma_{\text{сж}}. \quad (2.88)$$

Из выражения (2.88) следует, что при одноосном сжатии упрочнение материалов невозможно (рис. 2.34). И действительно, при одноосном напряженном состоянии функции начальной поверхности текучести и поверхность разрушения пересекаются (см. рис. 2.33). Конечно, здесь идет речь о теоретическом одноосном сжатии, которого достаточно трудно добиться при проведении эксперимента.

На рис. 2.34 приведены типовые диаграммы пластического деформирования, построенные с использованием зависимости (2.88).

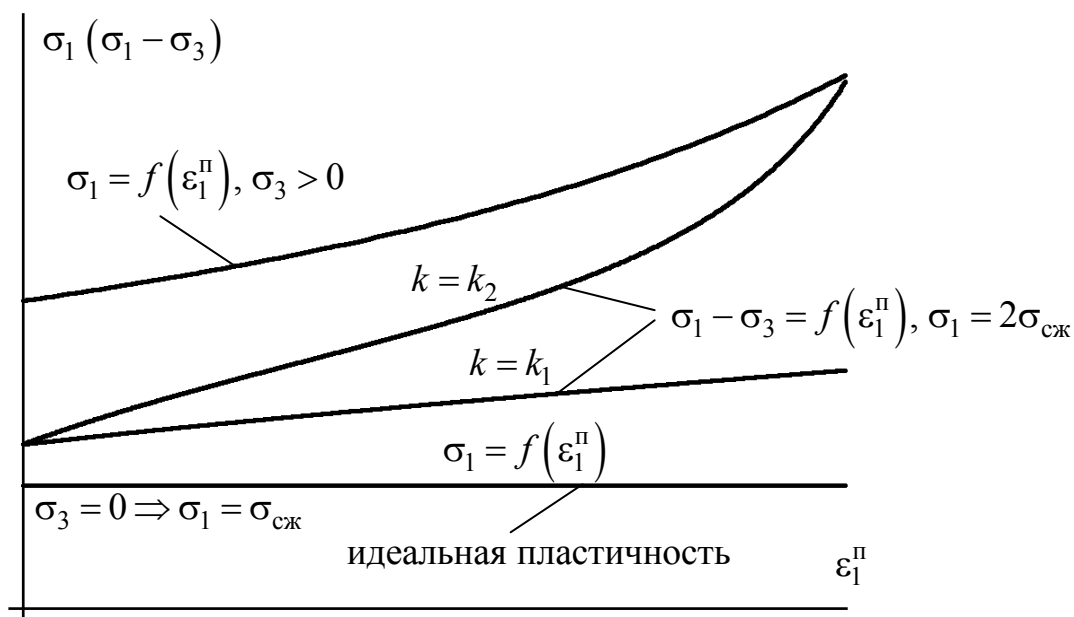


Рис. 2.34. Графики пластического деформирования с упрочнением

В заключение данного вопроса необходимо еще раз остановиться на протекании процесса пластического деформирования.

Важно отметить, что предельное условие Кулона выполняется на всех стадиях пластического деформирования вплоть до разрушения, однако на разноориентированных по отношению к главным напряжениям площадках, то есть в координатах τ, σ , прямая Кулона (2.68) остается неподвижной (не упрочняется) во время пластического деформирования.

Авторами [18], на основе большого количества экспериментов, выделяют три этапа деформирования пород. Первый этап упругого деформирования сопровождается увеличением деформаций в направлении максимального сжатия и уменьшением объема образца. Второй дилатансионный этап сопровождается развитием трещин в образце, разрыхлением, увеличением объема и сравнительно быстрым увеличением диаметра. Третий этап эквиволюмиального течения характеризуется постоянством объема, то есть приращения радиальных деформации равны половине приращения осевых деформаций.

Описанный механизм деформирования не противоречит предлагаемой концепции пластического деформирования, а лишь подтверждает ее.

2.13. Устойчивость откосов в поле действия тектонических и сейсмических напряжений

Рассмотренные выше задачи по оценке устойчивости откосов в различных условиях относятся к так называемому гравитационному типу оползневых явлений. То есть единственной активной силой, выводящей откос (призму смещения) из положения равновесия, является вес горных пород, обусловливаемый гравитацией. Вес горных пород формирует также напряженное состояние. Вертикальная компонента напряжений является активной, а горизонтальная – реактивной.

Однако в практике разработки месторождений часто встречаются случаи, когда горизонтальная компонента естественного поля напряжений является активной, кроме того, ее величина может превосходить вертикальную компоненту в разы. В этом случае говорят о действии в массиве тектонических полей напряжений, обусловленных тектоническими процессами (субдукция, рифтогенез, коллизия, орогенез и др.), которые достаточно подробно описаны в курсах геотектоники и геодинамики недр, например [21, 22]. Задача по определению конструктивных элементов бортов карьера в условиях тектонических полей напряжений была поставлена сравнительно недавно. Одним из первых этот вопрос поставил В. Г. Зотеев. В своей диссертационной работе он указал, что пренебрежение тектоническими напряжениями вполне оправданно при малых глубинах карьера, где тектонические напряжения практически полностью сняты процессами разгрузки и выветривания. Но это пренебрежение совершенно недопустимо для карьеров с глубиной вреза в скальные породы более 150 – 200 м. По мнению В. Г. Зотеева, напряженное состояние для таких глубин будет определяться, главным образом, региональным полем тектонических напряжений [23].

Необходимо отметить, что определение ориентировки главных осей напряжений в пространстве и значений главных напряжений является сложной научной задачей. Не рассматривая причин возникновения тектонических на-

пряжений и определения их ориентировки и значений, перейдем к исследованию вопроса их учета при оценке устойчивости откосов бортов карьеров.

В силу неоднозначности вопроса необходимо сделать ряд принципиальных замечаний.

1. Разрушение горных пород, как и любых других материалов, при срезе происходит по некоторой поверхности, которую, как и раньше, будем называть поверхностью скольжения (разрушения). Если речь идет об идеально однородных откосах или откосах, которые можно привести к таковым посредством статистического усреднения физико-механических свойств, то поверхность скольжения является плавной и криволинейной (см. выше, глава 2). Если в массиве присутствует ярко выраженная система трещин с падением в карьер или сплошные трещины (поверхности ослабления, включая тектонические нарушения) большого протяжения, то такой откос следует считать анизотропным, а поверхность скольжения будет иметь излом (см. выше, глава 2). Если массив разбит одиночными, разнонаклонными трещинами, соизмеримыми с размерами откоса, то поверхность скольжения будет ломаной, в большинстве своем совпадая с трещинами (об этом речь пойдет в главе 4). Какой бы из перечисленных случаев ни имел место, откос все равно разрушается по некоторой поверхности, называть которую будем, как и раньше, поверхностью скольжения. Однако для каждого типа поверхности скольжения и каждого ее участка необходимо обосновать условие устойчивости или равновесия.

2. Призма смещения, так же как и любое другое тело, может перемещаться в пространстве под действием активных сил и реакций связей. Поэтому, несмотря на то, что граничными условиями являются тектонические поля напряжений, условие устойчивости (частный случай движения) должно быть выражено через силы, а не напряжения.

3. Недопустимо оценивать устойчивость всей призмы смещения сравнением напряжений или сил в какой-либо точке поверхности скольжения. Другими словами, критерий устойчивости должен определяться суммами удерживаю-

щих и сдвигающих сил вдоль всей поверхности скольжения, разумеется, при выполнении условия сплошности (неразрывности) призмы смещения.

Цель данного раздела – установление условий устойчивости (разрушения) откосов, находящихся в условиях тектонического воздействия. Необходимо разработать методику расчета откосов при известном распределении напряжений в прибортовом массиве, т. е. получить аналитическое выражение, отвечающее условиям необходимости и достаточности равновесия призмы смещения, с помощью которого суммируются тектонические и гравитационные силы.

Таким образом, имеется плоский откос и известное поле распределения компонент напряжений (рис. 2.35). В случае, когда наиболее опасная поверхность скольжения определена, вдоль нее будут известны компоненты плоского поля напряжений. Кроме того, очевидно, что в предельном равновесии вдоль поверхности скольжения (как и в каждой отдельной точке поверхности скольжения) выполняется условие предельного кулоновского равновесия.

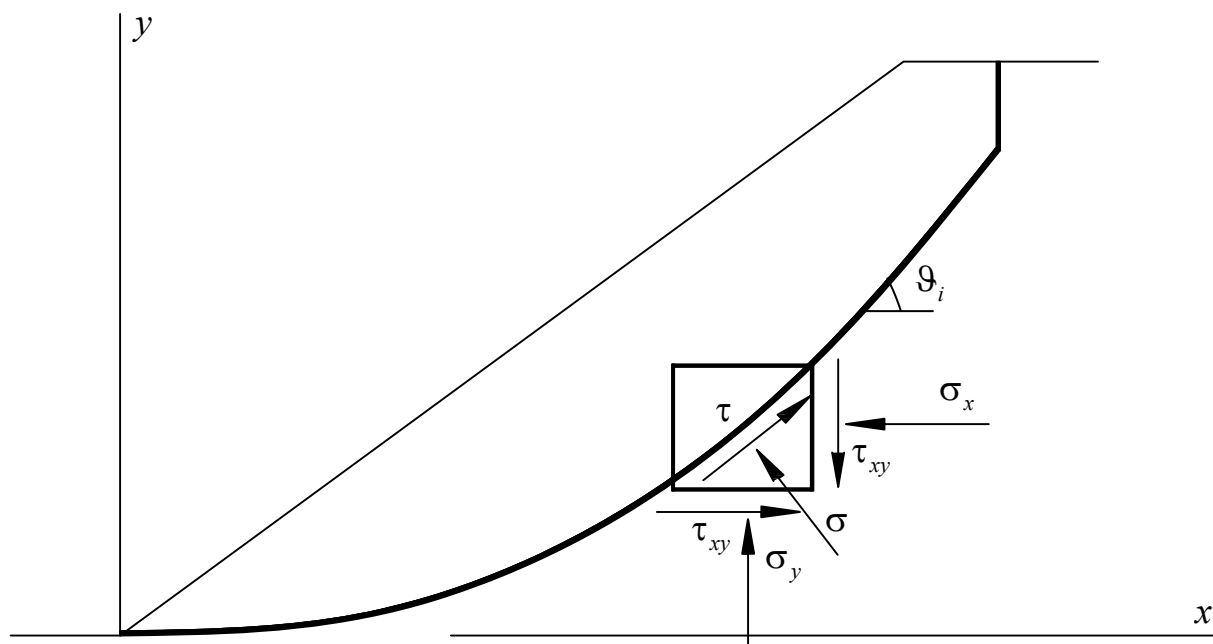


Рис. 2.35. Напряженное состояние горных пород в окрестности поверхности скольжения

С другой стороны, действие тектонических полей в точке эквивалентно некоторой горизонтальной силе, действующей на элементарный отсек:

$$F_T = k_k \sigma_T \operatorname{tg} \vartheta_i dx, \quad (2.89)$$

где k_k – коэффициент концентрации тектонических (горизонтальных) напряжений в рассматриваемой точке поверхности скольжения; σ_T – тектоническое (горизонтальное) нормальное напряжение в нетронутом массиве (в естественном залегании).

Таким образом, к расчетной схеме по установлению условия равновесия отсека (рис. 2.11) необходимо добавить горизонтальную сдвигающую тектоническую силу (2.89). В силу того, что тектоническая сила параллельна реакции ΔE , в условие равновесия отсека (2.15) и (2.16) она войдет с тем же множителем. Заметим, что появление тектонической силы не изменяет закона распределения межблоковых реакций, поэтому дальнейшие операции по выводу условий равновесия призмы смещения на различных участках будут идентичны случаю гравитационных сил.

Тектоническое напряжение часто представляют в виде:

$$\sigma_T = \lambda \gamma H, \quad (2.90)$$

где H – глубина точки от поверхности (до начала разработки); λ – коэффициент пропорциональности, численно равный отношению горизонтальной составляющей поля тектонических напряжений к вертикальной. Численное значение коэффициента λ некоторые авторы для тектонических регионов оценивают величиной 1 – 10 (если тектоники нет, то будем считать $\lambda = 0$).

Коэффициент концентрации тектонических напряжений k_k является весьма значимой характеристикой. Он показывает степень рассеяния тектонических напряжений в окрестности поверхности скольжения (открытой горной выработки) и определяется размерами карьера в плане, высотой и углом откоса, глубиной заложения поверхности скольжения. В первом приближении коэффициент концентрации может быть оценен по формуле

$$k_k = \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right),$$

где r_0 – радиус выработки (карьера) в плане (на рассматриваемой высоте); r – расстояние до рассматриваемой точки.

Так как k_k заведомо меньше единицы (при некоторых параметрах карьера может быть значительно меньше), то очевидно, что учет тектонической составляющей напряжений необходим при достаточно высоком значении λ .

Если проектируемый объект (дамба хвостохранилища, карьер и т. д.) находится в сейсмоактивном регионе, то их проектирование (расчет) необходимо производить с учетом возможного сейсмического воздействия.

Механизм воздействия сейсмике на откос представляется следующим образом. В момент сейсмического события из гипоцентра (точка в массиве, где произошло высвобождение энергии, эпицентр – это его проекция на земную поверхность) начинают распространяться упругие сейсмические волны (волны напряжений), которые принято подразделять на продольные (создают нормальные напряжения и линейные деформации в массиве) и поперечные (создают касательные напряжения и угловые деформации). Распространение волн приводит к упругим колебаниям среды (частиц горной породы) с некоторым ускорением. Согласно принципу Даламбера, ускорение порождает сейсмическую инерционную силу, направленную противоположно. Таким образом, на каждый отсек призмы смещения будет действовать сила, прямо пропорциональная его массе и ускорению частиц среды. Интенсивность сейсмического события (землетрясения) принято измерять в баллах. В нашей стране используется двенадцатибалльная система. Модуль сейсмической силы определяется по формуле

$$F_c = \frac{1}{1 - T_0^2} k_c P,$$

где T_0 – период собственных колебаний частиц породы (весь множитель носит название «динамический коэффициент» и в практических расчетах принимается равным единице); P – вес рассматриваемого объема (отсека, блока); $k_c = a/g$ – коэффициент сейсмичности, равный отношению ускорения сейсмической волны к ускорению свободного падения:

Расчетная сейсмичность в баллах	6	7	8	9	10
Коэффициент сейсмичности k_c	0,01	0,025	0,05	0,10	0,25

Направление действия сейсмической силы большинство исследователей принимают горизонтальным. С другой стороны, как было доказано выше, общая реакция со стороны соседних отсеков направлена под углом $\vartheta_i - \varphi$ к горизонту в сторону массива, при этом она совершит максимальную (минимальную) работу. Таким образом, направление, противоположное данному, будет являться самым уязвимым с точки зрения устойчивости. Поэтому примем это направление за направление действия сейсмической силы на каждый отсек. То есть направление сейсмической силы будет меняться от отсека к отсеку вдоль поверхности скольжения, что будет соответствовать максимально негативному влиянию сеймики на откос, а это всегда идет в запас устойчивости.

Таким образом, условие равновесия откоса (призмы смещения) в условиях обводненности, сейсмичности и тектонических напряжений примет вид (интегралы заменены на суммы):

$$\begin{aligned}
& \sum_{\vartheta \leq \varphi} \left[\frac{\gamma h (\operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{tg} \varphi + k_c / (\cos \vartheta \cos \varphi)) + k_k \sigma_T \operatorname{tg} \vartheta (1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \vartheta) - (C - \gamma_B h_B \operatorname{tg} \varphi) (1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta)}{1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \vartheta} \right] \Delta + \\
& + \sum_{\vartheta > \varphi} \left[\frac{\gamma h (\operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{tg} \varphi + k_c / (\cos \vartheta \cos \varphi)) + k_k \sigma_T \operatorname{tg} \vartheta (1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \vartheta) - (C - \gamma_B h_B \operatorname{tg} \varphi) (1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta)}{1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta} \right] \Delta + \\
& + \sum_{\text{берма}} \left[\gamma h (\operatorname{tg} \vartheta - \operatorname{tg} \varphi + k_c / (\cos \vartheta \cos \varphi)) + k_k \sigma_T \operatorname{tg} \vartheta (1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \vartheta) - (C - \gamma_B h_B \operatorname{tg} \varphi) (1 + \operatorname{tg}^2 \vartheta) \right] \Delta = 0,
\end{aligned} \tag{2.91}$$

где h – высота отсека; Δ – ширина отсека.

Разумеется, не представляет никакого труда записать условие равновесия призмы смещения (2.91) через коэффициент устойчивости. В случае, когда поверхность скольжения не формируется, а совпадает с уже существующими поверхностями ослабления массива, для расчета баланса сил нужно использовать последнее слагаемое (2.91).

Отметим, что предлагаемая методика учета тектонических напряжений при оценке устойчивости откосов не требует проведения математического моделирования для определения напряженного состояния в окрестности поверхности скольжения. В этой связи нет необходимости выдвигать гипотезы о модели среды (упругая, пластическая и т. д.) и обосновывать трудноопределимые показатели деформационных свойств массива, как правило, сложной структуры.

Для оценки влияния тектонических напряжений на устойчивость откосов введем показатель, который можно назвать коэффициентом вклада тектонических напряжений (в точке, то есть для одного отсека). Данный коэффициент численно равен отношению работы тектонических сил к работе гравитационных сил на возможном перемещении всей призмы. Таким образом, с учетом выражения (2.90), коэффициент вклада определится зависимостью

$$k_T = \frac{k_k \lambda \gamma H \operatorname{tg} \vartheta (1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \vartheta)}{\gamma h \operatorname{tg} \vartheta} = k_k \lambda (H/h) (1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \vartheta). \quad (2.92)$$

Как следует из выражения (2.92), тектонические силы могут вносить весьма существенный вклад в устойчивость откосов, соизмеримый и даже превышающий вклад гравитационных сил. Средний коэффициент влияния вдоль всей поверхности скольжения будет характеризовать общий вклад тектонических напряжений в устойчивость призмы смещения в сравнении с гравитационным.

В отличие от действия подземных вод, сейсмика и тектоническая нагрузка приводят к изменению формы поверхности скольжения (силы зависят от угла наклона поверхности скольжения, а значит, в функционал входит производная функции поверхности скольжения). Поверхность скольжения для случая тектонических напряжений находится аналогично случаю гравитационных сил, однако для этого необходимо располагать функцией коэффициента концентрации напряжений $k_k = k_k(x, y)$. Кроме того, решение данной задачи в аналитическом виде резко усложнится (в первом приближении коэффициент можно принять постоянным, средним). Несмотря на это, анализируя функционалы (2.91) и выражение (2.90), можно проследить некоторые закономерности поведения наи-

более опасной поверхности скольжения, в случае действия тектонических напряжений. Совершенно очевидно, что наиболее опасная поверхность скольжения под откосом свои наибольшие углы ϑ будет приурочивать к наибольшим значениям H . Это значит, что уже в нижних точках поверхность скольжения будет стремиться к своим максимальным углам наклона (предельным из условия неразрывности или сплошности призмы смещения). Но в силу того, что угол наклона поверхности скольжения под откосом возрастает, в однородных массивах поверхность скольжения, ее большая часть, будет близка к плоскости.

Таким образом, размер призмы смещения с увеличением тектонических напряжений будет уменьшаться. К этим же выводам приходит М. В. Рыльникова с соавторами [24]. И, в общем, данный факт объясним. Когда тектонические напряжения равны нулю, призма смещения увеличивается в размерах для увеличения размеров призмы активного давления, то есть чтобы сдвигающих сил было достаточно для нарушения устойчивости откоса. Когда же действуют тектонические напряжения, в этом нет необходимости, то есть сдвигающих активных сил достаточно для нарушения устойчивости откоса. Кроме того, уже и не нужна минимальная высота, необходимая для образования площадок среза H_{90} , или, по крайней мере, не требуется ее полных размеров.

В случае сильнотрещиноватых скальных массивов разрушение откоса будет происходить в виде отделения небольших участков (призм) по системам трещин и их перемещения вниз под действием собственного веса. Именно поэтому деформации скальных прибортовых массивов при действии тектонических полей напряжений не похожи на классические оползневые явления гравитационного типа, с захватом достаточно обширных прим смещения и с более или менее выдержанной формой криволинейной поверхности скольжения, а также трещиной отрыва. Деформации откосов в этом случае будут больше напоминать осыпи и обрушения.

Выводы по главе 2

Разработана принципиально новая теория расчета устойчивости откосов в однородных, неоднородных, анизотропных средах в условиях подработки откосов подземными горными работами или карста, а также при условии выпора основания откосов, обводненности горных пород и тектонических напряжений. Предложен критерий разрушения твердых тел и горных пород в частности.

Основные научные и практические результаты исследований данной главы состоят в следующем:

1. Произведен анализ существующих способов и подходов к оценке устойчивости откосов. Разработана классификация способов расчета. Установлены причины многообразия способов расчета устойчивости однородных откосов. Даны критические замечания по существующим способам метода предельного равновесия, а также по методу предельного напряженного состояния, включая условие специального предельного равновесия. Получено уравнение, позволяющее преодолеть статическую неопределенность задачи по оценке равновесия элементарного отсека. Изучены законы распределения межблоковых реакций вдоль поверхности скольжения, с соответствующим доказательством получаемых выводов.

2. Строгими математическими (аналитически) методами, в соответствии с фундаментальными принципами механики, определена геометрия наиболее слабой поверхности скольжения в однородном и изотропном откосе.

3. Получены условия устойчивости призмы смещения плоского однородного откоса, обеспечивающие необходимость и достаточность выполнения условия предельного равновесия, то есть всех условий статического равновесия.

4. Изучено влияние углов откоса, внутреннего трения, величины сцепления горных пород, объемного веса и высоты плоского откоса на форму и положение поверхности скольжения в идеально однородном и изотропном откосе.

5. Произведена оценка устойчивости и определены предельные геометрические параметры плоских однородных откосов. Получена номограмма устойчивости плоских однородных откосов.

6. Получены зависимости, определяющие углы излома поверхности скольжения на поверхности ослабления.

7. Исследовано влияние углов внутреннего трения горных пород и трения по контакту, угла падения поверхности ослабления, а также величин сцеплений горных пород и контакта на значение угла излома.

8. Получены зависимости, определяющие углы излома при переходе поверхности скольжения из одного литологического слоя в другой.

9. Исследовано влияние углов внутреннего трения литологических слоев, угла падения контакта слоев, а также величин сцеплений пород слоев на значение угла излома.

10. Разработаны методики расчета устойчивости неоднородных, анизотропных, подработанных откосов и откосов на слабом наклонном основании.

11. Исследованы закономерности формирования поверхности скольжения в сыпучих средах (породах отвала), факторов, определяющих возможность выхода поверхности скольжения в основание отвала.

12. Разработан способ учета обводненности горных пород при оценке устойчивости откосов.

13. Предложен критерий разрушения горных пород и проведен его анализ и сравнение с существующими аналогами.

14. Доказывается преимущество использования предлагаемого критерия в качестве функции пластического потенциала при ассоциированном законе пластического течения.

15. Для предлагаемого критерия разрушения выведена основная система уравнений предельного напряженного состояния.

Отличительной особенностью представленных результатов является то, что они получены в строгой механико-математической постановке, то есть без малейшего послабления расчетных схем. В основу разработанной теории положены фундаментальные принципы механики: принцип возможных перемещений, принцип наименьшего принуждения Гаусса, принцип минимума полной энергии системы. Математической основой метода является вариационное, дифференциальное и интегральное исчисление.

Список литературы к главе 2

1. Машанов, А. Ж. Устойчивость уступов и бортов карьеров бассейна Каратау / А. Ж. Машанов, М. Е. Певзнер, Ш. С. Бекбасаров. – Алма-Ата: Наука КазССР, 1981. – 120 с.
2. Хуан, Я. Х. Устойчивость земляных откосов / Я. Х. Хуан; перевод с англ. В. С. Забавина; под ред. В. Г. Мельника. – М.: Стройиздат, 1988. – 240 с.
3. Соколовский, В. В. Статика сыпучей среды / В. В. Соколовский. – М.: Наука, 1990. – 272 с.
4. Голушкевич, С. С. Статика предельных состояний грунтовых масс / С. С. Голушкевич. М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1957. – 288 с.
5. Сапожников, В. Т. Определение равноустойчивого откоса выпуклого профиля / В. Т. Сапожников // Сб. трудов ВНИМИ. – 1968. – Вып. 64. – С. 249 – 266.
6. Жабко, А. В. Исследование закономерностей, определяющих геометрию поверхности скольжения в откосах и расчетные характеристики, в изотропных горных массивах: дис. ... канд. техн. наук / А. В. Жабко; УГГУ. – Екатеринбург, 2009. – 152 с.
7. Правила обеспечения устойчивости откосов на угольных разрезах: утв. Госгортехнадзором РФ 16.03.98. – СПб.: ГосНИИ горной геомеханики и маркшейдерского дела, 1998. – 208 с.
8. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: учеб. для ВТУЗов. – 12-е изд., стер. / С. М. Тарг. – М.: Высш. шк., 2002. – 416 с. – ил.
9. Лаврентьев, М. А. Курс вариационного исчисления / М. А. Лаврентьев, Л. А. Люстерник. 2-е изд. – М.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1950. – 296 с.
10. Маркеев, А. П. О принципе наименьшего принуждения / А. П. Маркеев // Соросовский образовательный журнал. – 1998. – №1. – С. 113 – 121.
11. Писаренко, Г. С. Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко, В. А. Агарев, А. Л. Квитка и др. – Киев: Гос. изд-во техн. лит., 1963. – 791 с.
12. Фисенко, Г. Л. Устойчивость бортов карьеров и отвалов / Г. Л. Фисенко. – М.: Недра, 1965. – 378 с.

13. Соловьев, Ю. И. Устойчивость откосов из гипотетического грунта / Ю. И. Соловьев // Труды НИИЖТа. Вопросы инженерной геологии, оснований и фундаментов. – 1962. – Вып. 28. – С. 83-97.
14. Дорфман, А. Г. Вариационный метод исследования устойчивости откосов / А. Г. Дорфман // Сб. ДИИТ. Вопросы геотехники. – 1965. – Вып. 9. – С. 17-25.
15. Дорфман, А. Г. Расчет давления на подпорные стены при выпоре грунта по линии минимального сопротивления сдвигу / А. Г. Дорфман, И. Л. Дудинцева // Сб. ДИИТ. Вопросы геотехники. – 1972. – Вып. 20. – С. 68-75.
16. Мочалов, А. М. Расчет устойчивости слоистых откосов // Труды ВНИМИ, сб. 83. – Л.: Изд. ВНИМИ, 1971.
17. Фадеев, А. Б. Метод конечных элементов в геомеханике / А. Б. Фадеев. – М.: Недра, 1987. – 221 с.
18. Карташов, Ю. М. Прочность и деформируемость горных пород / Ю. М. Карташов, Б. В. Матвеев, Г. В. Михеев и др. – М.: Недра, 1979. – 269 с.
19. Кашников, Ю. А. Механика горных пород при разработке месторождений углеводородного сырья / Ю. А. Кашников, С. Г. Ашихмин. – М.: ООО «Недра-Бизнесцентр», 2007. – 467 с.: ил.
20. Шашенко, А. Н. Оценка устойчивости естественных и искусственных породных откосов / А. Н. Шашенко, А.С. Ковров // Геотехническая механика. – №91. – С. 43-54.
21. Хаин, В. Е. Геотектоника с основами геодинамики: учебник / В. Е. Хаин, М. Г. Ломизе. – М.: Изд-во МГУ, 1995. – 480 с.
22. Петухов, И. М. Геодинамика недр / И. М. Петухов, И. М. Батугина. – М.: Недра, 1996. – 217 с.
23. Яковлев, А. В. Устойчивость бортов рудных карьеров при действии тектонических напряжений в массиве / А. В. Яковлев, Н. И. Ермаков. – Екатеринбург: ИГД УрО РАН, 2006. – 231 с.
24. Рыльникова, М. В. Оценка устойчивости борта Учалинского карьера в условиях действия тектонических сил / М. В. Рыльникова и др. // Изв. вузов. Горный журнал. – 1991. – № 7. – С. 54-64.

25. Жабко, А. В. Расчет устойчивости однородных оснований и откосов / А. В. Жабко // Проблемы недропользования: материалы V Всерос. молод. науч.-практ. конф. (с участием иностранных ученых), 8 – 11 февраля 2011 г. – Екатеринбург: ИГД УрО РАН, 2011. – С. 397-407.
26. Жабко, А. В. Теория расчета устойчивости оснований и откосов / А. В. Жабко // Известия УГГУ. – 2011. – № 25 – 26. – С. 59-65.
27. Жабко, А. В. Расчет устойчивости откосов / А. В. Жабко // Маркшейдерия и недропользование. – 2012. – № 2. – С. 55-59.
28. Жабко, А. В. Предельные параметры плоских однородных откосов / А. В. Жабко // Изв. вузов. Горный журнал. – 2012. – № 6. – С. 22-25.
29. Жабко, А. В. Основы общей теории расчета устойчивости откосов / А. В. Жабко // Известия УГГУ. – 2013. – № 4(32). – С. 47-58.
30. Zhabko, A. V. Calculation theory of stability of foundations and slopes / A.V. Zhabko // Proceedings XV International ISM Congress 2013. 16 – 20 September 2013, Aachen, Germany. S. 85 – 97.
31. Жабко, А. В. Расчет устойчивости неоднородных и анизотропных откосов / А. В. Жабко // Известия вузов. Горный журнал. – 2014. – № 3. – С. 22 – 29.
32. Жабко, А. В. Учет гидростатического давления при расчете устойчивости откосов / А. В. Жабко // Маркшейдерия и недропользование. – 2013. – № 6 (68). – С. 29-31.
33. Жабко, А. В. Напряженное состояние земной коры / А. В. Жабко // Известия УГГУ. – 2014. – № 3(35). – С. 57-60.
34. Жабко, А. В. Условие прочности горных пород / А. В. Жабко // Известия Уральского государственного горного университета. – 2014. – № 4(36). – С. 24-28.
35. Жабко, А. В. Поверхности скольжения и предельные параметры неоднородных и анизотропных откосов / А. В. Жабко // Проблемы недропользования. – 2014. – № 1. – С. 24-31.
36. Жабко, А. В. Предельное напряженное состояние горных пород / А. В. Жабко // Известия вузов. Горный журнал. – 2015. – № 5. – С. 50 – 55.
37. Zhabko, A. V. Calculation of stability of inhomogeneous and anisotropic slopes / A. V. Zhabko, V. A. Gordeev // Mezinárodní konference Geodézie a Důlní

měřictví 2015 XXII. konference Společnosti důlních měřičů a geologů. Zasedání odborných komisí ISM. Praha 24. – 26. června 2015.

38. Жабко, А. В. Критерий разрушения твердых тел / А. В. Жабко // Сетевое периодическое научное издание «Проблемы недропользования». (<http://trud.igduran.ru>). Вып. 2 (5) – Екатеринбург: ИГД УрО РАН, 2015. – С. 46-51.

39. Жабко, А. В. Сравнительный анализ критериев прочности / А. В. Жабко, Ю. Х. Мусаллямова // Мат-лы XIII Междунар. науч.-практич. конф. «Уральская горная школа – регионам», в рамках УГПД. – Екатеринбург, 2015. – С. 300 – 301.

40. Гордеев, В. А. Расчет устойчивости карьерного откоса с плоской поверхностью ослабления / В. А. Гордеев // Изв. вузов. Горный журнал. – 2007. – №7. – С. 63-71.

41. Гордеев, В. А. Влияние инженерно-геологических условий на устойчивость карьерных откосов по методу предельного равновесия на плоской поверхности скольжения / В. А. Гордеев // Изв. вузов. Горный журнал. – 2007. – №8. – С. 43-51.

42. Гордеев, В. А. Расчетные способы метода предельного равновесия при оценке устойчивости карьерных откосов / В. А. Гордеев, М. Х. Бобаев // Изв. вузов. Горный журнал. – 2008. - №1. – С. 66-73.

43. Гордеев, В. А. Оценка устойчивости карьерных откосов по методу предельного равновесия / В. А. Гордеев // Изв. вузов. Горный журнал. – 2008. – № 2. – С. 54-64.

44. Туринцев, Ю. И. Методическое руководство по определению максимальных углов погашения бортов меднорудных карьеров / Ю. И. Туринцев, П. В. Кольцов, А. В. Жабко. – Екатеринбург: УГГУ, 2010. – 106 с.

45. Козырев, А. А. Об оценке устойчивости бортов глубоких карьеров в высоконапряженных скальных массивах / А. А. Козырев, В. В. Павлов, С. Н. Савченко // Комплексная разработка рудных месторождений глубокими карьерами: материалы междунар. совещ. (Апатиты, 23 – 26 июня 1993 г.). – Апатиты: КНЦ ГоИ КФ РАН, 1995. – С. 79-89.

3. ГЕОМЕХАНИКА ПОДЗЕМНЫХ РАЗРАБОТОК

3.1. Об исходном напряженном состоянии массива

Определение первоначального уровня естественных напряжений массива горных пород является одной из приоритетных и фундаментальных задач горного дела, геомеханики, геодинамики, геологии и физики земли. В геомеханике и горном деле знание распределения начальных полей напряжений необходимо, прежде всего, для расчета напряженно-деформированного состояния элементов систем разработки, определения их размеров, формы и расположения, обеспечения их устойчивости, а также определения нагрузок на крепь горных выработок. Вертикальная составляющая поля начальных напряжений с теоретической точки зрения определяется весом горных пород и глубиной ее расположения, что также подтверждается результатами экспериментальных исследований, в том числе в условиях тектонической активности. Поэтому дальнейшие рассуждения будут относиться к горизонтальной составляющей напряжений.

Первоначальное поле напряжений является суммой гравитационных и тектонических составляющих. В свою очередь гравитационная компонента поля начальных напряжений может быть представлена в виде суммы двух составляющих, которые условно можно назвать «упругая» и «пластическая». Под упругой составляющей поля начальных гравитационных напряжений следует понимать напряжение, вызванное невозможностью бокового (горизонтального) расширения пород под действием вертикальной компоненты (А. Н. Динник). Пластическая составляющая поля горизонтальных гравитационных напряжений создается под действием формирования в массиве призмы смещения, то есть возникновения поверхностей скольжения. Поверхности (площадки) скольжения возникают начиная с некоторой глубины, зависящей от прочностных свойств и объемного веса массива горных пород. Для определения пластической составляющей горизонтальных напряжений необходимо располагать условием равновесия призмы смещения и геометрией наиболее опасной поверхности скольжения в массиве. Таким образом, определение пластической (жесткопластиче-

ской) составляющей компоненты горизонтальных напряжений сводится к установлению закона распределения нормальных напряжений с глубиной, что было получено выше.

Как указывалось выше, горизонтальная компонента начальных гравитационных напряжений складывается из упругой и пластической (жесткопластической) составляющих, поэтому выражение для ее определения, с учетом (2.61), будет иметь вид:

$$\sigma_r = \lambda\gamma h + \gamma h - 2C\sqrt{1 + \frac{f\gamma h}{C}} = \frac{1}{1-\nu}\gamma h - 2C\sqrt{1 + \frac{f\gamma h}{C}}, \quad (3.1)$$

где ν – коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона); σ_r – горизонтальная компонента начальных гравитационных напряжений; $\lambda = \frac{\nu}{1-\nu}$ – коэффициент бокового распора.

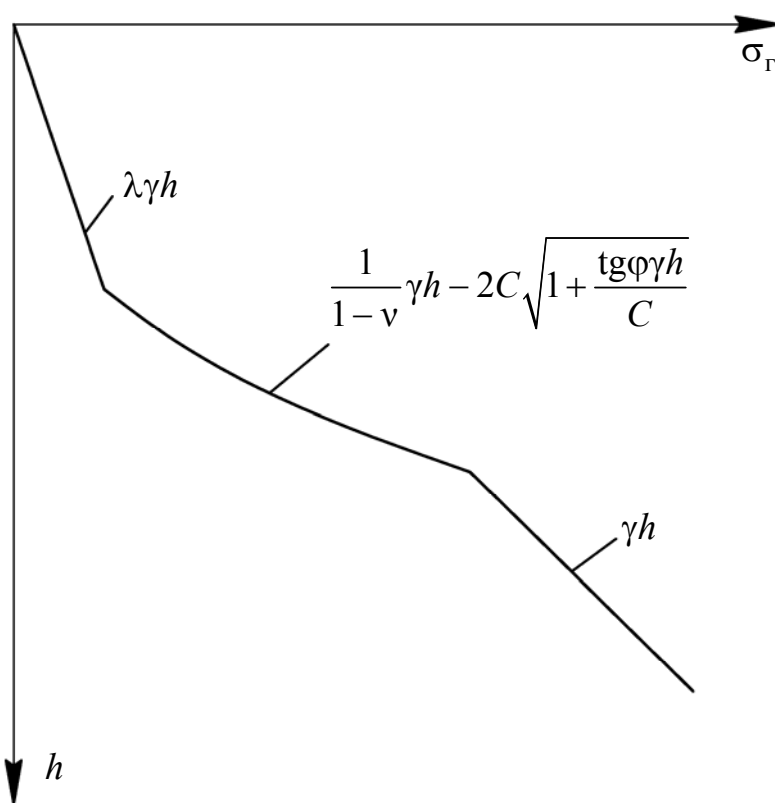


Рис. 3.1. Теоретическое распределение начального поля горизонтальных напряжений

Таким образом, до глубины H_{90} распределение гравитационной компоненты горизонтальных напряжений происходит согласно закону А. Н. Динника.

Ниже этой глубины на поле упругих напряжений накладывается поле пластических напряжений, а закон их общего распределения описывается уравнением (3.1). В силу пассивности как упругой, так и пластической компонент горизонтального поля гравитационных напряжений, обусловленных собственным весом пород γh , превысить значение последнего они не могут (без тектонической составляющей). Общая эпюра распределения горизонтальной компоненты гравитационного поля напряжений представлена на рис. 3.1.

Предлагаемый закон распределения естественного поля горизонтальных напряжений качественно подтверждается экспериментальными исследованиями [1, 2] (рис. 3.2).

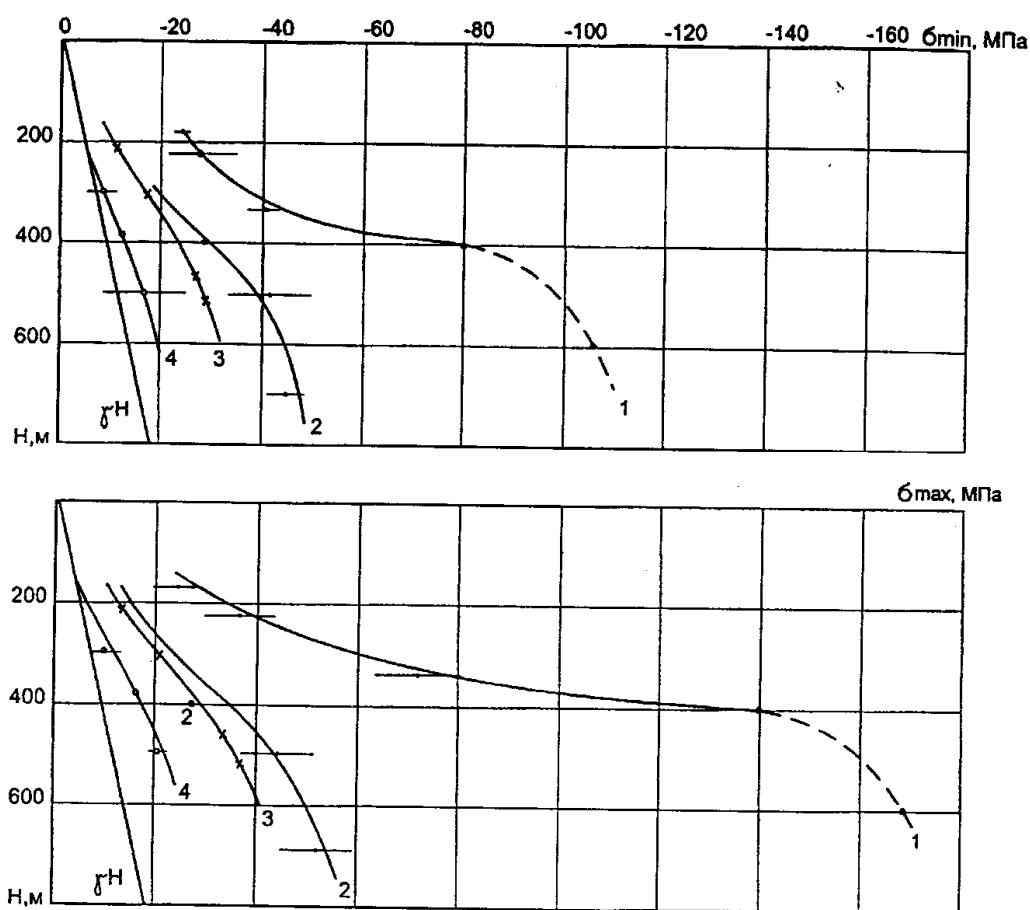


Рис. 3.2. Распределение гравитационно-тектонических напряжений с глубиной [2]

Отметим, что для учета тектонической компоненты горизонтальных напряжений к правой части уравнения (3.1) необходимо прибавить ее значение.

3.2. Метод определения угловых параметров процесса сдвижения

Еще более полвека назад С. Г. Авершин говорил, что теория сдвижения пород под влиянием горных разработок остается недостаточно развитой по сравнению с результатами экспериментальных исследований в этой области. Сложность же и важность задач, связанных с явлением сдвижения горных пород, требует не меньшей теоретической их разработки.

Основной проблемой в развитии теоретического направления науки, на взгляд автора, помимо многофакторности протекания самого процесса сдвижения является сугубо прикладной и эмпирический характер используемых параметров процесса сдвижения. Так, например, один из главных параметров процесса сдвижения – угол сдвижения, определяется без всякой физической привязки к геометрии и механике явления, а его значение устанавливается по величинам вертикальных и горизонтальных (критических) деформаций на дневной поверхности, опасных для инженерных сооружений. Таким образом, уже сама постановка задачи по определению параметров процесса сдвижения требует привлечения тех или иных средств измерений (инструментальные наблюдения и т. д.). Однако следует признать, что выбор параметров процесса сдвижения оправдан ввиду прикладного характера проблемы. Пожалуй, единственным параметром процесса сдвижения, имеющим вполне понятный физический смысл, является угол разрыва. Под углом разрыва понимается внешний относительно выработанного пространства угол, образованный на главных сечениях мульды сдвижения горизонтальной линией и линией, соединяющей границу выработанного пространства с наиболее удаленной от него видимой трещиной на дневной поверхности (рис. 3.3). Трещины на дневной поверхности появляются в результате действия растягивающих напряжений и являются следствием формирования в массиве призмы смещения. Из последнего утверждения очевидно, что многие разработки в области устойчивости откосов будут также справедливы для изучения процесса сдвижения.

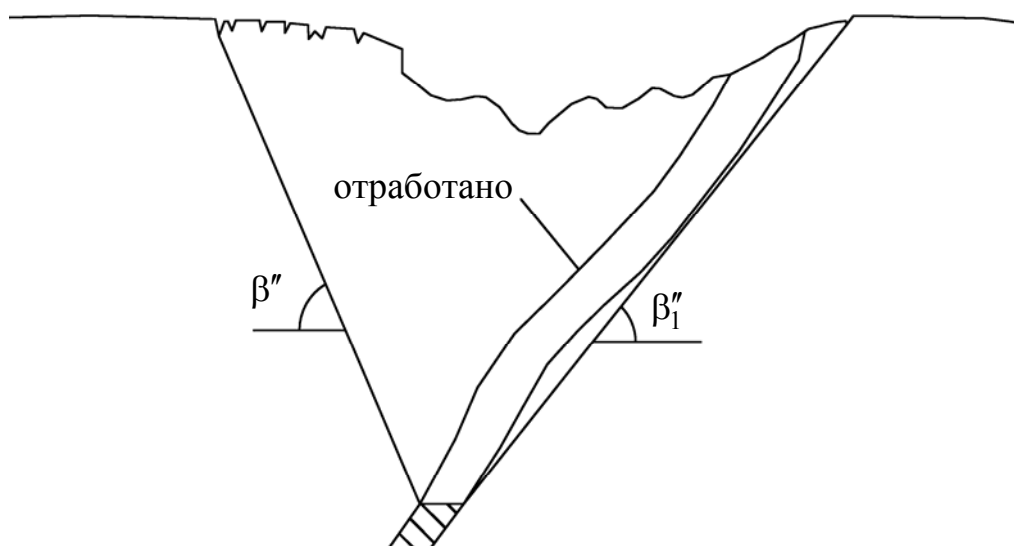


Рис. 3.3. Углы разрывов

При расчете устойчивости карьерных откосов в качестве механических характеристик используются показатели паспорта прочности Кулона. В условиях же подземной разработки зависимости параметров процесса сдвижения от прочностных характеристик пород исследованы недостаточно, поэтому пользуются преимущественно одним показателем – коэффициентом крепости по шкале М. М. Протоdjяконова. В отношении углов разрыва можно сказать следующее:

1) значения углов разрыва, как и углов сдвижения, достаточно стабильны с изменением глубины разработки, именно данный факт позволяет использовать их в качестве параметров процесса сдвижения;

2) по поводу влияния глубины разработки на значение углов разрыва имеется противоречивая информация: по одним сведениям углы разрыва с глубиной уменьшаются, по другим – увеличиваются;

3) на величины углов разрыва большое влияние оказывает слоистость и трещиноватость, в тех случаях, когда в массиве имеются системы трещин с падением в сторону выработанного пространства и угол падения превышает угол трения, значение углов разрыва стремится к значению угла падения системы трещин;

4) значения величин углов разрыва рекомендуется принимать на 5 – 10 градусов выше соответствующих углов сдвига в коренных породах и на 15 – 20 градусов граничных углов, данное обстоятельство связывается с тем, что углы разрыва, сдвига и граничные зависят от одних и тех же факторов;

5) при увеличении углов падения залежи и вмещающих пород значения углов разрыва (граничных, сдвига) снижаются, в случае угла β'' по линейному закону (считается, что угол δ'' не зависит от угла падения залежи);

6) численные значения углов разрыва колеблются в широких пределах – 40 – 90 градусов, для однородных и изотропных массивов они могут достигать 70 – 85 градусов.

Д. М. Казикаев [3] проводит аналогию между процессом сдвига и оползневыми явлениями на открытых горных работах, а главным связующим звеном считает криволинейную поверхность скольжения (рис. 3.4, [3]), отмечая, что ее аналитическое описание не представляется возможным.

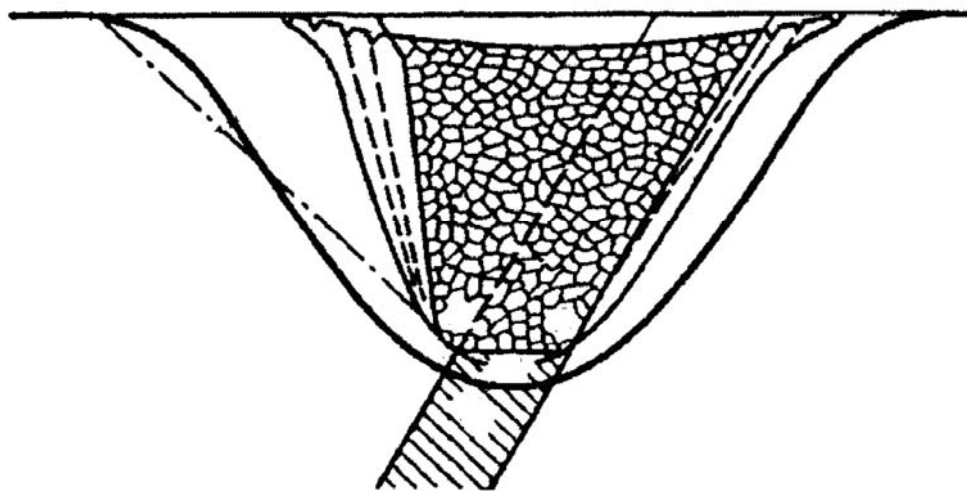


Рис. 3.4. Зоны и области процесса сдвига

Поверхность скольжения в массиве отделяет зоны обрушения и сдвига от зоны плавных сдвижений или деформаций без разрыва сплошности. Определение формы и положения этой границы (поверхности скольжения) является важнейшей фундаментальной задачей геомеханики, однако в литературе, за редким исключением, такая задача не ставится в принципе. Аналитическому

описанию геометрии поверхности скольжения в условиях сдвижения пород под влиянием подземной разработки препятствуют, по меньшей мере, две объективные проблемы:

1) отсутствие теоретического способа обоснования геометрии поверхности скольжения, впрочем, как и статически обоснованного критерия устойчивости, при расчете устойчивости карьерных откосов;

2) согласно теории предельных напряженных состояний, максимальный угол наклона поверхности скольжения не может превышать значения $\pi/4 + \varphi/2$ (φ – угол внутреннего трения), однако углы разрывов могут заметно превышать данную величину.

Дело в том, что при расчете устойчивости откосов большинство исследователей не считают целесообразным математически строго обосновывать геометрию поверхности скольжения, уповая на относительно небольшую погрешность при оценке коэффициента запаса устойчивости. В действительности же геометрия поверхности разрушения в массиве представляет не только прикладной, но и научный интерес.

Применим рассмотренную выше теорию для определения угловых параметров процесса сдвижения. Пусть имеется залежь полезного ископаемого с углом падения $\alpha = 60^\circ$. Физико-механические характеристики массива горных пород $\varphi = 30^\circ$; $C = 10 \text{ т/м}^2$; $\gamma = 2,5 \text{ т/м}^3$. Формализация приводит к задаче построения поверхностей скольжения для различных глубин разработки. Предельная высота свободного откоса для рассматриваемых условий $H = 52,4 \text{ м}$. То есть, начиная с этой глубины, для равновесия призмы смещения необходимы дополнительные внешние удерживающие силы. Их роль выполняют междуэтажные и междуканальные целики или обрушенные в выработанное пространство горные породы. Вследствие их податливости возникают деформации земной поверхности в виде уступов и раскрытых трещин. На рис. 3.5 представлены поверхности скольжения со стороны лежачего бока залежи для высоты

$H = 230,3$ м и $H = 639,1$ м, что соответствует нагрузкам на целики, равные 10000 т и 100000 т соответственно.

Углы разрывов, полученные для рассматриваемых поверхностей скольжения со стороны лежачего бока залежи, составили: $\beta_1'' = 54,8^\circ$ и $\beta_1'' = 55,9^\circ$ (см. рис. 3.5). Дальнейшее увеличение глубины не приводит к заметному увеличению угла разрыва, а причиной его незначительного увеличения с глубиной является наличие вертикальной трещины отрыва. Таким образом, аналитически продемонстрирована стабильность угла разрыва с увеличением глубины разработки.

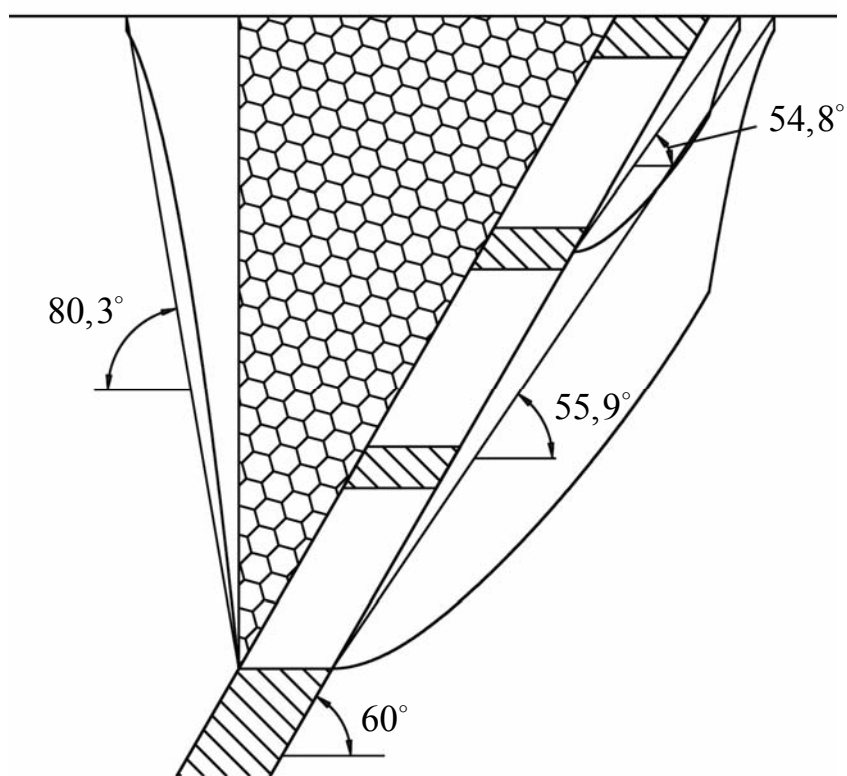


Рис. 3.5. Определение углов разрыва

Если нависающие над выработанным пространством породы со стороны висячего бока залежи будут отделяться от массива, образуя вертикальный откос (см. рис. 3.5), поверхность скольжения будет целиком выпуклой, а угол разрыва $\beta'' = 80,3^\circ$.

Породы, расположенные за пределами поверхности скольжения, находятся в зажатой среде и деформируются без разрыва сплошности. Их деформации могут быть изучены с использованием геомеханических моделей сплошных сред методом конечных элементов. Граничными условиями для определения углов сдвига и размеров мульды сдвига являются напряжения, действующие вдоль поверхности скольжения, которые без труда могут быть определены. На рис. 3.6 показаны граничные условия, а также типовое поле смещений узлов конечно-элементной модели и изолинии максимальных деформаций.

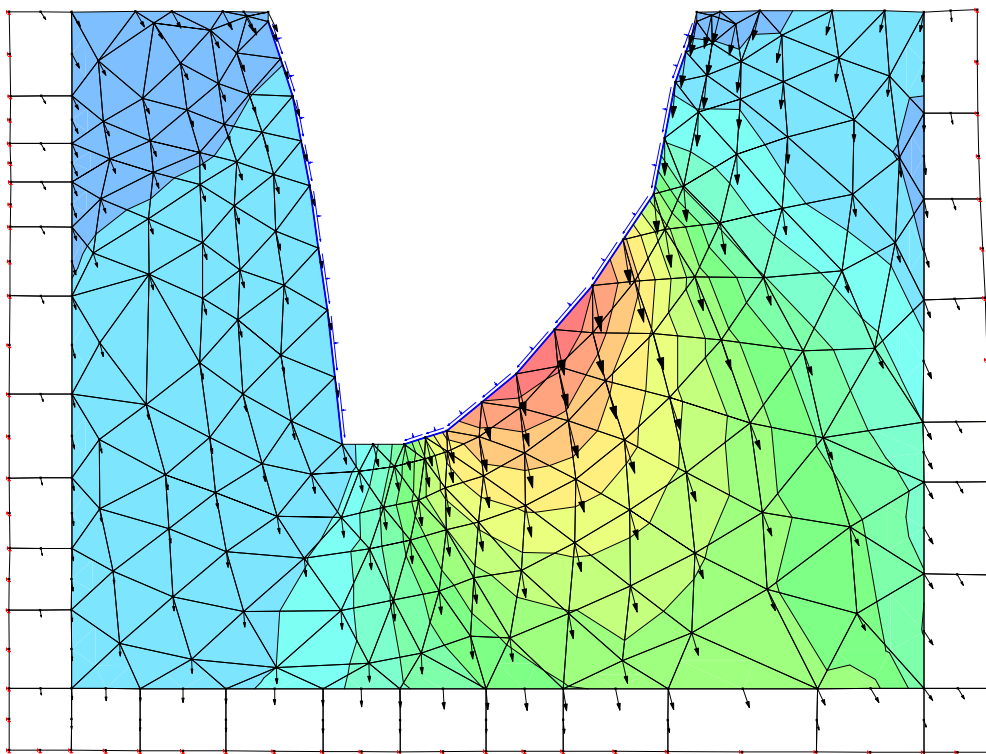


Рис. 3.6. Определение граничных углов и углов сдвига

Следует отметить, что нормальная составляющая реакции вдоль поверхности скольжения вычисляется по-разному для различных частей поверхности скольжения, в зависимости от используемых функционалов. Для достоверного определения деформаций массива и земной поверхности к полю смещений, полученному в результате формирования призмы смещения, необходимо прибавить поле, вызванное первичной разгрузкой массива, а также вычесть поле перемещений от действия начальных гравитационных напряжений.

Рассмотренный выше пример относится к однородным и изотропным массивам и в этом смысле является идеализированным. Однако для случая анизотропных и неоднородных массивов методика прогнозирования сдвижений и деформаций, а также определения параметров процесса сдвижения остается неизменной. Разница будет состоять в геометрии (форме и положении) наиболее опасной поверхности скольжения, теория определения которой для анизотропных и неоднородных массивов изложена выше.

В случае если на месторождении поставлены инструментальные наблюдения за сдвижением земной поверхности, появляется возможность определения прочностных и деформационных характеристик горного массива методом обратных расчетов. По значениям углов разрыва (ширины призмы обрушения) оцениваются параметры паспорта прочности, прежде всего, величина сцепления массива. А по деформациям в периферийных частях мульды сдвижения могут быть установлены деформационные параметры.

Для предельной высоты свободного откоса угол разрыва в лежащем боку залежи определяется формулой:

$$\beta_1'' = 90^\circ - \arctg(\operatorname{ctg}\alpha + a/H), \quad (3.2)$$

где α – угол падения залежи (откоса); a – ширина призмы обрушения; H – предельная высота свободного откоса.

Используя номограмму устойчивости плоских однородных откосов и график для определения ширины призмы обрушения, по формуле (3.2) вычислим значения угла разрыва и построим номограмму для его определения (рис. 3.7).

Для рассмотренного выше примера угол разрыва при высоте, равной предельной высоте свободного откоса ($H = 52,4$ м), составил $\beta_1'' = 56,6^\circ$. Таким образом, угол разрыва с глубиной сначала снизился, а потом несколько возрос.

Таким образом, если считать, что угол разрыва с глубиной не изменяется (что можно считать в первом приближении доказанным), то графики (см. рис. 3.7) справедливы для любой глубины. Анализ данных графиков позволяет сделать следующие выводы.

1. Зависимость между углом разрыва в лежащем боку залежи и углом ее падения на интервале углов падения залежи, превышающих предельный угол, очень близка к прямолинейной.

2. Зависимость между углом разрыва в лежащем боку залежи и углом внутреннего трения горных пород весьма слабая. Данный результат является достаточно неожиданным, однако в рамках рассмотренной выше теории он достаточно просто объясним. Выше было показано, что при увеличении угла откоса поверхности скольжения для различных углов внутреннего трения стягиваются в единую поверхность, поэтому и ширина призмы обрушения для одного угла падения залежи становится независимой относительно углов внутреннего трения.

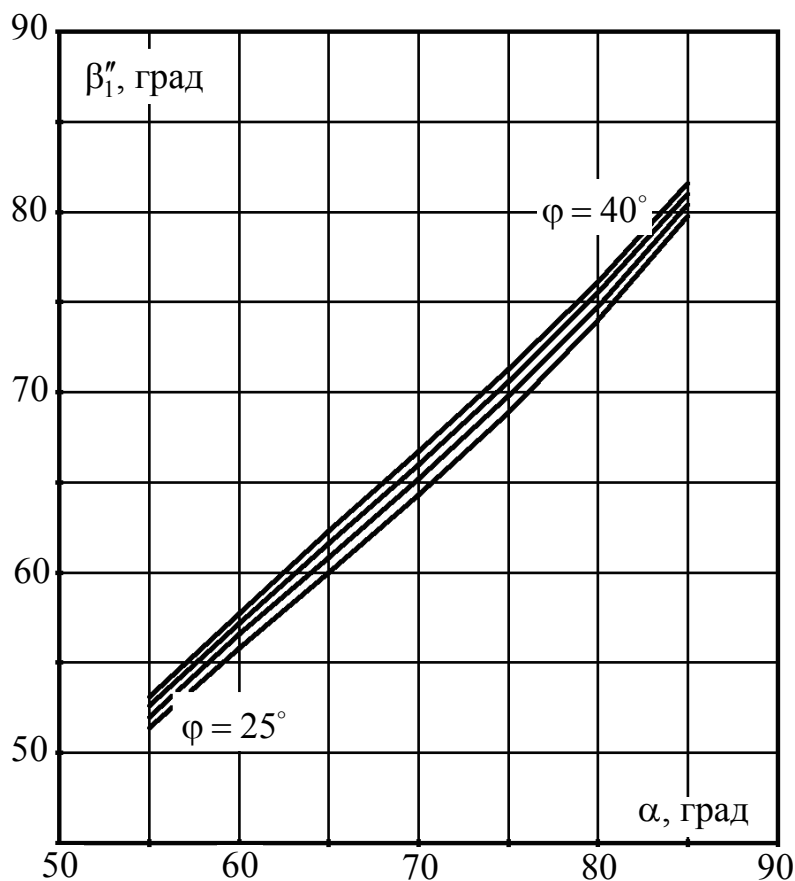


Рис. 3.7. Зависимость угла разрыва от угла падения залежи

В работе [4] приводится достаточно большое количество эмпирических зависимостей углов разрыва и сдвижения от угла падения залежи. Причем зависимости имеют линейный вид. В нашем случае зависимость угла разрыва в лежащем боку от угла откоса также можно описать линейной регрессией с коэф-

коэффициентом корреляции, равным 0,99, и средней квадратической ошибкой менее одного градуса.

3.3. Определение нагрузок на крепь горизонтальной горной выработки

Развитая выше теория расчета устойчивости откосов может использоваться для расчета нагрузок на крепь подземных горных выработок. Расчетная схема подразумевает жесткопластическую модель горного массива, давление на крепь выработки вызывается сползающим по некоторой поверхности скольжения объемом горных пород и весом столба вышерасположенного горного массива.

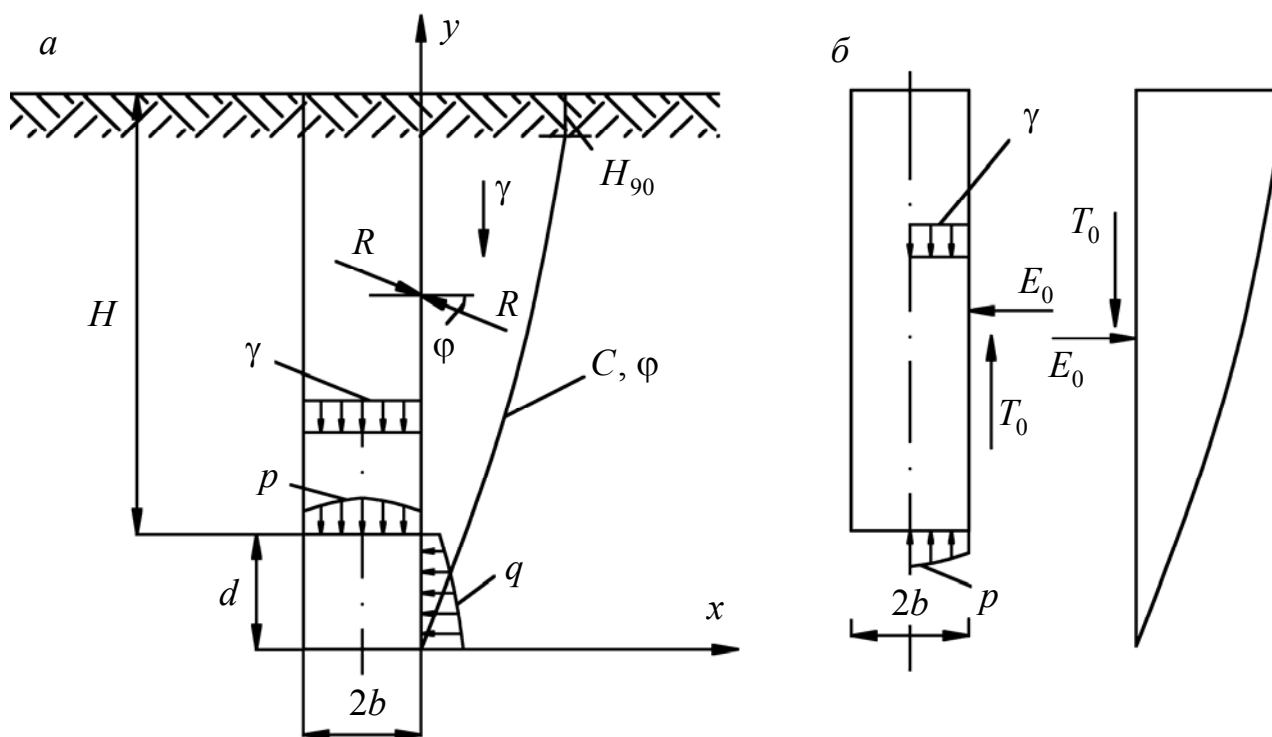


Рис. 3.8. Нагрузка на крепь горизонтальных выработок:
а – расчетная схема; *б* – действие сил и реакций связи

Механизм воздействия горных пород на крепь горизонтальной горной выработки в плоской постановке задачи представляется следующим образом. Столб горных пород, находящийся над горной выработкой, под действием собственного веса стремится ее заполнить (рис. 3.8, *а*). Если мысленно удалить

столб пород, заменив его действиями реакций связи (принцип освобожденности от действия связей), то по его краям будут образовываться две призмы смещения вертикальных откосов. Перемещению столба пород препятствуют касательные реакции T_0 призм смещения. В силу симметрии задачи будем рассматривать одну из них (рис. 3.8, б). Если мысленно убрать призмы смещения и освободить столб породы, расположенный над выработкой, от действия реакций связей, то направление его свободного движения будет совпадать с таковым же, но при действии реакций. Тогда согласно принципу Гаусса, равнодействующая \vec{R} будет совершать экстремальную работу на путях отклонения истинного движения от свободного при выполнении на противоположной вертикальной грани столба породы условия:

$$|T_0| = \operatorname{tg}\varphi E_0. \quad (3.3)$$

Рассмотрим сначала задачу по определению нагрузки на крепь выработки в сыпучей среде, то есть $C = 0$. Как отмечалось ранее, поверхность скольжения в этом случае будет представлять собой плоскость, наклоненную к горизонту на угол $\pi/4 + \varphi/2$. Условие равновесия призмы смещения будет иметь вид:

$$E_0 + fT_0 = \int_0^{h/\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \gamma \left(h - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)x \right) \sqrt{1+f^2} dx, \quad (3.4)$$

где $h = H + d$ – переменная.

Решаем совместно уравнения (3.3) и (3.4) относительно реакции T_0 :

$$T_0 = \frac{\gamma \sin \varphi}{2 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} (H + d)^2. \quad (3.5)$$

Из уравнения равновесия породного столба на ось y , при условии равномерного распределения нагрузки по ширине выработки b , ее интенсивность, согласно уравнению (3.5), определится формулой:

$$p = \gamma H - \frac{\gamma \sin \varphi}{2b \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} (H + d)^2. \quad (3.6)$$

Очевидно, что вертикальная нагрузка не может быть отрицательной, а также убывать с глубиной, с другой стороны, из формулы (3.6) следует: нагрузка описывается уравнением квадратной параболы, определим ее максимальное значение:

$$\frac{dp}{dH} = 0 \Rightarrow H_{p \rightarrow \max} = \frac{btg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{\sin \varphi} - d;$$

$$p_{\max} = \gamma \left(\frac{btg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - 2d \sin \varphi}{2 \sin \varphi} \right). \quad (3.7)$$

Нагрузка достаточно быстро с глубиной достигает своего максимального значения (3.7). Начиная с этой глубины нагрузка перестает зависеть от глубины расположения выработки и определяется только ее параметрами, для сыпучих пород – углом внутреннего трения и объемным весом.

Перейдем к определению нагрузки на крепь выработки в связных породах. На основе выражений (2.33), (2.60) условие равновесия призмы смещения будет иметь вид:

$$E_0 + fT_0 = \frac{2C^2}{\gamma f^2} \int_{tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}^{\sqrt{1 + \frac{f\gamma h}{C}}} (p^3 - 2fp^2 - p) dp, \quad (3.8)$$

Тогда, согласно (3.3), (3.8), нагрузка на крепь выработки будет определяться выражением:

$$p = \gamma H - \frac{2C^2}{b\gamma f(1 + f^2)} \int_{tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}^{\sqrt{1 + \frac{f\gamma(H+d)}{C}}} (p^3 - 2fp^2 - p) dp. \quad (3.9)$$

Аналогично для связных пород определяем максимальное значение нагрузки, для этого берем производную выражения (3.9) по глубине H . Не прибегая к интегрированию, можно воспользоваться правилом Лейбница:

$$\frac{d}{dH} \int_{u(H)}^{v(H)} F(p, H) dp = \int_{u(H)}^{v(H)} \frac{\partial}{\partial H} F(p, H) dp + F(v(H), H) \frac{dv}{dH} - F(u(H), H) \frac{du}{dH}.$$

Очевидно, первое и третье слагаемые в нашем случае будут равны нулю. Таким образом, производная выражения (3.9):

$$\begin{aligned} & \gamma - \frac{2C^2}{bf(1+f^2)} \left(\left(\sqrt{1 + \frac{f\gamma(H+d)}{C}} \right)^3 - 2f \left(1 + \frac{f\gamma(H+d)}{C} \right) - \sqrt{1 + \frac{f\gamma(H+d)}{C}} \right) \times \\ & \times \left(\frac{f\gamma}{2C} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f\gamma(H+d)}{C}}} \right) = \gamma - \frac{C}{b(1+f^2)} \left(\left(1 + \frac{f\gamma(H+d)}{C} \right) - 2f \sqrt{1 + \frac{f\gamma(H+d)}{C}} - 1 \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Решаем уравнение (3.10):

$$\sqrt{1 + \frac{f\gamma(H+d)}{C}} = \frac{\sin\varphi + \sqrt{1 + \frac{\gamma b}{C}}}{\cos\varphi} = r \quad (3.11)$$

или

$$H_{p \rightarrow \max} = \frac{4C}{\gamma} \frac{\sin^2\varphi + \sin\varphi \sqrt{1 + \frac{\gamma b}{C}} + \frac{\gamma b}{2C}}{\sin 2\varphi} - d. \quad (3.12)$$

Подставляем (3.11), (3.12) в уравнение (3.9). В итоге получим максимальную среднюю нагрузку на крепь горизонтальной горной выработки в связной среде в виде:

$$\begin{aligned} p_{\max} = & 4C \frac{\sin^2\varphi + \sin\varphi \sqrt{1 + \frac{\gamma b}{C}} + \frac{\gamma b}{2C}}{\sin 2\varphi} - \gamma d - \frac{2C^2 \cos^3\varphi}{\gamma b \sin\varphi} \times \\ & \times \left(\frac{r^4 - \operatorname{tg}^4\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{4} - \frac{2\operatorname{tg}\varphi \left(r^3 - \operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \right)}{3} - \frac{r^2 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{2} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Итак, при условии $H < H_{90}$ площадок скольжения не возникает, поэтому вертикальная нагрузка определяется полным весом столба вышележащих пород

$p = \gamma H$. На глубинах $H_{90} < H < H_{p \rightarrow \max}$ вертикальная нагрузка по-прежнему возрастает с глубиной и определяется из уравнения (3.9). Если глубина заложения выработки $H > H_{p \rightarrow \max}$, нагрузка постоянна, максимальна и определяется уравнением (3.13). Очевидно, что вертикальная нагрузка не может быть отрицательной, а также убывать с глубиной. Кроме того, заметим, что минимальное значение нагрузки на глубинах, превышающих H_{90} , не может быть менее γH_{90} .

Физическим смыслом точки максимума является равенство интенсивностей касательных нагрузок от действия собственного веса столба пород и реакции связи от действия призмы смещения. Таким образом, до глубины $H_{p \rightarrow \max}$ интенсивность касательной реакции τ меньше величины γb , что и обуславливает вертикальную нагрузку на крепь, то есть ее рост. После этой точки $\tau = \gamma b$, и превысить это значение τ не может ввиду своей реактивности (пассивности).

Согласно зависимости (3.13), с увеличением сцепления массива растет максимальная вертикальная нагрузка на крепь, что нельзя считать абсурдом. Действительно, в данной расчетной схеме сцепление является удерживающей призму смещения силой. Чем больше его величина, тем меньше реактивный отпор на столб пород и, следовательно, больше нагрузка на крепь.

Интересно сравнить полученные результаты с известными аналогами [5, 6].

Вертикальная средняя нагрузка:

По Bierbaumer:

$$p = \frac{\gamma b}{2 \operatorname{tg} \varphi},$$

по П. М. Цимбаревичу:

$$p = \frac{\gamma \left(b + d \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right)}{\operatorname{tg} \varphi},$$

гипотеза свода М. М. Протоdjаконова:

$$p = \frac{2\gamma b}{3f_1},$$

где f_1 – коэффициент крепости.

Модель опускающегося столба пород (Yanssen, 1895) и (Kötter, 1899):

$$p_{H \rightarrow \infty} = \frac{\gamma b - C}{\lambda \operatorname{tg} \varphi},$$

где $\lambda = \frac{\mu}{1 - \mu}$ – коэффициент бокового распора; μ – коэффициент поперечной деформации.

Необходимо сделать ряд критических замечаний. Первые три формулы получены исходя из гипотезы свода равновесия. Как отмечает А. А. Борисов [7]: “... гипотеза свода в большей своей части базируется на предположениях и допущениях, порой совершенно не обоснованных”. Ее применение ограничивается массивами, практически не сопротивляющимися отрыву. С этой точки зрения модель опускающегося столба пород более обоснованна, однако в ней принято допущение о предельном кулоновском равновесии по боковым граням столба. При таком допущении и отсутствии крепи выработка будет разрушена при любых ее размерах, что в действительности не наблюдается. Кроме того, для обоснования нормальных напряжений по боковым граням столба пород привлекается модель распределения напряжений А. Н. Динника. То есть отсутствует единый методологический подход при обосновании расчетной схемы. С одной стороны модель жесткопластическая, а с другой – упругая.

В силу того, что горный массив может разрушаться как в виде среза, так и в виде отрыва, В. Риттер в 1897 г. предложил расчетную схему для определения размеров свода равновесия, нагрузки на крепь выработки и предельного пролета камер. Составим уравнение равновесия пород ядра свода (свода обрушения) на ось y (рис. 3.9) и выразим силу, действующую со стороны крепи выработки:

$$P = \int_0^l \left[\gamma y - \sigma_p (1 + y'^2) \right] dx, \quad (3.14)$$

где y' – производная функции поверхности отрыва; σ_p – предел прочности массива на растяжение; l – пролет выработки.

Решая уравнение Эйлера для функционала (3.14), найдем функцию поверхности свода обрушения, отвечающую условию минимального сопротивления отрыву:

$$y = \frac{\gamma}{4\sigma_p} x(l-x). \quad (3.15)$$

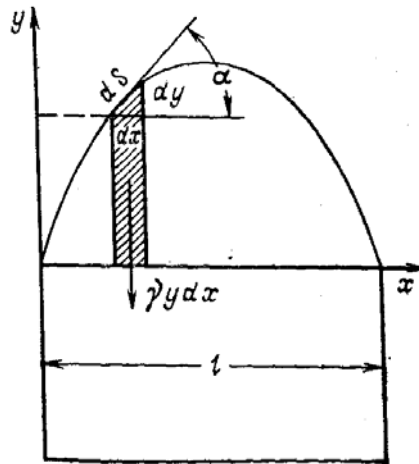


Рис. 3.9. Расчетная схема В. Риттера

Как и у М. М. Протодяконова, функцией свода равновесия является квадратная парабола. Однако заметим, что в отличие от расчетной схемы М. М. Протодяконова, у Риттера прослеживаются очевидные физические предпосылки образования свода обрушения и присутствует строгость постановки задачи.

Интегрируя (3.14) с учетом (3.15), определяем силу, действующую со стороны свода обрушения, а положив ее равной нулю (предельное равновесие), получим предельное значение пролета камеры (выработки):

$$l_{пр} = 7 \frac{\sigma_p}{\gamma}. \quad (3.16)$$

Отметим, что сдвиговый характер образования контура свода равновесия, по М. М. Протодяконову, мало обоснован, в отличие от схемы В. Риттера.

3.4. Расчет элементов систем подземной разработки

Основным методом расчета параметров целиков (камер) является метод предельных нагрузок. Данный метод заключается в расчете нагрузок, действующих на целик, и определении его несущей способности.

В простейшем случае по назначению целики можно разделить на предохранительные и опорные. Предохранительные целики оставляют для охраны (невозможности подработки и разрушения) каких-либо объектов на земной поверхности (здания, сооружения, природные объекты и т. д.) или под землей (тело полезного ископаемого, камеры специального назначения и т. д.). Опорные целики оставляются для поддержания всячего бока залежи и препятствуют обрушению горного массива в выработанное пространство. Данные целики применяются, как правило, при камерных системах разработки. К опорным целикам также относятся так называемые потолочины камер (междуэтажные целики).

В общем случае среднее значение сжимающего напряжения в целике можно представить в виде произведения первоначального нормального напряжения (напряжение нетронутого массива) и коэффициента концентрации напряжений. Так, например, если падение залежи близко к горизонтальному, то начальное поле вертикальных напряжений можно оценить как γH , а коэффициент концентрации равен отношению суммарной площади целиков и камер к площади целиков. В случае вертикального падения залежи, очевидно, необходимо использовать горизонтальную компоненту первоначального поля напряжений. При более детальном исследовании необходимо учитывать тот факт, что зачастую не вся вышележащая толща формирует нагрузку на целики. Это учитывается введением коэффициента нагрузки (коэффициент снижения нагрузки) на целики. Несущая способность целика определяется с учетом прочности на сжатие, коэффициента структурного ослабления, коэффициента формы, коэффициента запаса прочности и коэффициента длительной прочности.

Формирование нагрузки на целики при пологом и крутом залегании происходит по-разному. Если в первом случае нагрузка обуславливается весом

вышележащих пород и в пределе определяется его полным значением, то для крутого залегания нагрузка формируется в результате сползания пород в лежащем и висячем боку, подобно оползневым явлениям в карьерах, а также весом вышележащего массива. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать методики расчета нагрузок на крепь отдельно для пологопадающих и крутопадающих залежей.

Целики в выработанном пространстве оставляют через некоторый интервал, называемый предельным пролетом камеры. Превышение размеров данного пролета приведет к самообрушению кровли камеры. Для оценки устойчивости кровли камер различной конфигурации в плане используют принцип эквивалентного пролета. Данный принцип гласит: всякую камеру можно заменить эквивалентной выработкой бесконечной длины, кровля которой будет обладать той же устойчивостью, что и кровля камеры. Пролет такой выработки бесконечной длины называется эквивалентным и определяется выражением:

$$l_{\text{эkv}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

где a, b – пролеты камеры в двух направлениях (например, по простиранию и падению).

При расчете нагрузок на целики в случае пологого залегания выделяют два режима работы целиков (два подхода): режим заданной нагрузки от веса вышележащей толщи (целики работают в независимом режиме) и режим заданных вертикальных смещений (целики работают в совместном с кровлей режиме). Данные режимы и определяют генеральное допущение методики обоснования нагрузок на целики.

Считается, что режим заданной нагрузки реализуется на обширных залежах при больших пролетах подработки и небольшой глубине. Традиционно считается, что данное условие формализуется соотношением (условие полной подработки):

$$\frac{L}{H} \geq 1,$$

где L – пролет выработанного пространства; H – глубина разработки.

Принцип определения нагрузок на целики, исходя из полного веса вышележащих пород, предложен Турнером в 1884 г. В 1941 г. советский ученый-горняк, академик Л. Д. Шевяков его усовершенствовал. Сейчас данный принцип расчета целиков называется принципом Турнера-Шевякова.

Шевяков Л. Д. предложил следующее условие прочности:

$$SH\gamma_m + S_{\text{ц}}h\gamma_{\text{ц}} \leq S_{\text{ц}}\sigma_{\text{сж}}, \quad (3.17)$$

где S – площадь выработанного пространства, приходящаяся на один целик; H – глубина от кровли камеры до поверхности; γ_m – средний объемный вес пород вышележащего массива; $S_{\text{ц}}$ – площадь горизонтального сечения опорного целика; h – высота целика; $\gamma_{\text{ц}}$ – объемный вес пород целика; $\sigma_{\text{сж}}$ – прочность пород целика на одноосное сжатие с учетом структурного ослабления, коэффициента длительной прочности и коэффициента запаса прочности.

Если исходить из предположения однородности и изотропности пород целика, а также того, что не весь столб пород передает нагрузку на целики, то расчетные формулы для определения размеров целиков будут иметь вид:

– столбчатые целики:

$$S_{\text{ц}} = \frac{S}{\left(\sigma_{\text{сж}}^{\text{н}} / \sigma - 1\right)},$$

где $\sigma = K_{\text{к}}K_{\text{н}}\sigma_{\text{ос}}$ – величина средних напряжений, действующих в целике; $K_{\text{к}}$ – коэффициент концентрации напряжений (для горизонтального залегания

$K_{\text{к}} = \frac{S + S_{\text{ц}}}{S_{\text{ц}}}$); $K_{\text{н}} = \frac{\sum N}{(\gamma HS_{\text{пан}})} \leq 1$ – средний коэффициент нагрузки (понижения

нагрузки) для всех целиков в выемочной единице (панели, блоке); $\sum N$ – суммарная нагрузка на все целики в панели; $S_{\text{пан}}$ – площадь панели; $\sigma_{\text{ос}}$ – величина первоначальных нормальных осевых напряжений; $\sigma_{\text{сж}}^{\text{н}} = K_{\text{ф}}\sigma_{\text{сж}}$; $K_{\text{ф}}$ – коэффициент формы целика.

– ленточные целики:

$$b = \frac{a}{\left(\sigma_{\text{сж}}^{\text{II}} / \sigma - 1\right)},$$

где a, b – соответственно ширина камеры и ленточного целика.

Средний коэффициент нагрузки K_H исследователями института ВНИМИ на основе обобщения результатов наблюдений за деформациями целиков рекомендуется определять в зависимости от отношения ширины панели L (плоская задача) к глубине заложения камер H из табл. 3.1.

Таблица 3.1

Ориентировочные экспериментальные значения
коэффициента нагрузки (ВНИМИ)

L/H	K_H
0,8 – 1,0	1,0
0,5 – (0,8 – 1,0)	0,7
< 0,5	(0,4 – 0,7)

Во многих случаях вертикальная нагрузка на целики обусловлена массой лишь части налегающей толщи. В 1960 г. Гулевич Г. Е. предложил, а Борщ-Компониец В. И. теоретически обосновал и экспериментально подтвердил новый подход к управлению горным давлением при камерно-столбовой системе разработки [8]. Сущность метода состоит в том, что массивные опорные целики, располагаемые по определенной сетке, воспринимают на себя основную нагрузку и разгружают междукамерные целики. Данная разгрузка появляется вследствие того, что массивные целики являются более жесткими (об этом речь пойдет ниже) и, кроме того, имеют более выгодную форму. Помимо этого появляется возможность отнести массивные целики к местам с наиболее бедным содержанием полезного компонента в руде. Таким образом, при проведении геометризации свойств горного массива появляется возможность эффективного проектирования отработки запасов.

Считается, что на залежах с ограниченными пролетами L на большой глубине H (при $L/H < 1$) нагружение междукамерных целиков происходит в ре-

жиме заданных вертикальных смещений. В этом случае можно говорить об упругом и совместном деформировании кровли и целиков.

Рассматривая основную кровлю (основная кровля – первый мощный и прочный слой (порода-мост), который залегает над непосредственной кровлей и имеет шаг самопроизвольного обрушения в несколько раз больше шага обрушения непосредственной кровли (8 – 10 м)) в качестве балки (плиты), подпертой деформируемыми опорами (междукамерные целики) и нагруженной распределенной нагрузкой (весом пород выше основной кровли), методом сил (метод строительной механики, используемый для решения статически неопределимых задач), вычисляется нагрузка на каждый целик из условия совместных деформаций кровли и целиков. Данное решение впервые было предложено профессором Руппенейтом К. В. в 1961 году.

В силу того, что задача имеет упругую постановку, нагрузка на целики будет зависеть от упругих характеристик целиков. Поясним это на простом примере.

Используя закон Гука для одноосного напряженного состояния, вычислим нагрузку на целик:

$$N = \frac{\Delta ES_{\text{ц}}}{h}, \quad (3.18)$$

где Δ – абсолютное укорочение размеров целика в процессе деформирования (сближение или конвергенция кровли и почвы); E – модуль упругости пород целика.

Величину $\frac{ES_{\text{ц}}}{h}$ называют жесткостью целика. Тогда, согласно зависимости (3.18), нагрузка на целик пропорциональна его жесткости и величине сжатия. Это означает, что целики, отстоящие дальше от кромки массива, массивных или панельных целиков, несут большую нагрузку, причем чем жестче целик, тем он несет большую нагрузку.

Необходимо отметить, что расчет по схеме К. В. Руппенейта является достаточно громоздким, однако на сегодняшний день существуют компьютерные

программы для его реализации. Помимо этого расчет по методике К. В. Руппелайна возможен только при правильной геометрической форме выработанного пространства (прямоугольник – плита), при сложной форме залежи приходится вводить дополнительные допущения.

Так в работе [9] нагрузку на целик для сложных форм залежей рекомендуется определять по приближенной формуле:

$$N_i = \frac{G_i \sqrt[4]{1 - (x_i/x_0)^2} \sqrt[4]{1 - (y_i/y_0)^2}}{\sum \left(G_i \sqrt[4]{1 - (x_i/x_0)^2} \sqrt[4]{1 - (y_i/y_0)^2} \right)} \cdot \sum N, \quad (3.19)$$

где N_i – нагрузка на i -й междукамерный целик, имеющий жесткость G_i и координаты x_i, y_i ; x_0, y_0 – полупролеты выработанного пространства по длине и ширине.

Суммарную нагрузку на все целики в панели определяют через средний коэффициент нагрузки, который, в свою очередь, рекомендуют определять через комплексный показатель по формуле:

$$K_H = 0,44 \ln \left[l_{\text{экв}} G / (0,75d/h + 1) \right] - 2,17,$$

где G – среднее отношение площади поперечного сечения целика к высоте; d/h – среднее отношение диаметра целика к высоте.

Аналогично величине среднего коэффициента нагрузки вводится понятие коэффициента нагрузки на целик:

$$K_H^{\text{ц}} = \frac{N}{(\gamma H S_{\text{ц}})},$$

однако в отличие от среднего коэффициента нагрузки на панель, коэффициент нагрузки на целик может быть как больше, так и меньше единицы.

Анализируя вышесказанное, отметим, что граница применимости принципа Турнера-Шевякова, или выполнения так называемого условия полной подработки ($L/H = 1$), весьма условна и нуждается в уточнении. Кроме того, не обоснованы физические предпосылки явления снижения средней нагрузки на панель.

Будем рассматривать в качестве выемочной единицы панель, а в качестве ее основного параметра – ширину L . Поставим задачу по определению средней нагрузки на панель. Над панелью залегают породы, высота столба которых H . Если мысленно отбросить породы по боковым граням этого столба, то междукамерные целики будут воспринимать полный вес вышележащих пород, то есть средний коэффициент нагрузки будет равен единице ($K_n = 1$). Таким образом, явление снижения средней нагрузки относительно полного веса вышележащих пород может быть объяснено только воздействием удерживающих сил по боковым граням столба пород. Другими словами, формирующиеся в бортах столба призмы смещения создают дополнительные удерживающие усилия, которые и снижают нагрузку от полного веса столба пород на междукамерные целики. Таким образом, средняя нагрузка на панель формируется идентично нагрузке на горизонтальную горную выработку. Используя формулы (3.9), (3.12), (3.13), построим графики зависимости (рис. 3.10) среднего коэффициента нагрузки от параметров: $\gamma b/C$, $C/\gamma H$, φ (пустотелые точки – $\varphi = 35^\circ$; залитые – $\varphi = 30^\circ$), при этом пренебрегаем высотой выработки.

Как видно из графиков, угол внутреннего трения очень слабо влияет на средний коэффициент нагрузки (конечно, здесь рассматриваются скальные породы с достаточно высоким углом внутреннего трения). Асимптотическая сходимость коэффициента нагрузки к единице лишь при достаточно больших пролетах выработки (панели) была очевидна из постановки задачи (см. выше). Безусловно, сложнейшей проблемой является определение величины сцепления массива вдоль поверхности скольжения. Если для бортов карьеров величина $C/\gamma H$, как правило, не превышает 0,02, то о таковой же величине для зажатого массива с нераскрытыми трещинами судить весьма и весьма сложно. И, действительно, при понижении горных работ в карьере происходит разгрузка естественных полей напряжений и, соответственно, разуплотнение прибортового массива с закономерным снижением его сцепления. В рассматриваемом же нами случае призма смещения зажата и, соответственно, величина сцепления дос-

таточно велика, вплоть до значений прочности ненарушенного трещинами массива (сцепление образца).

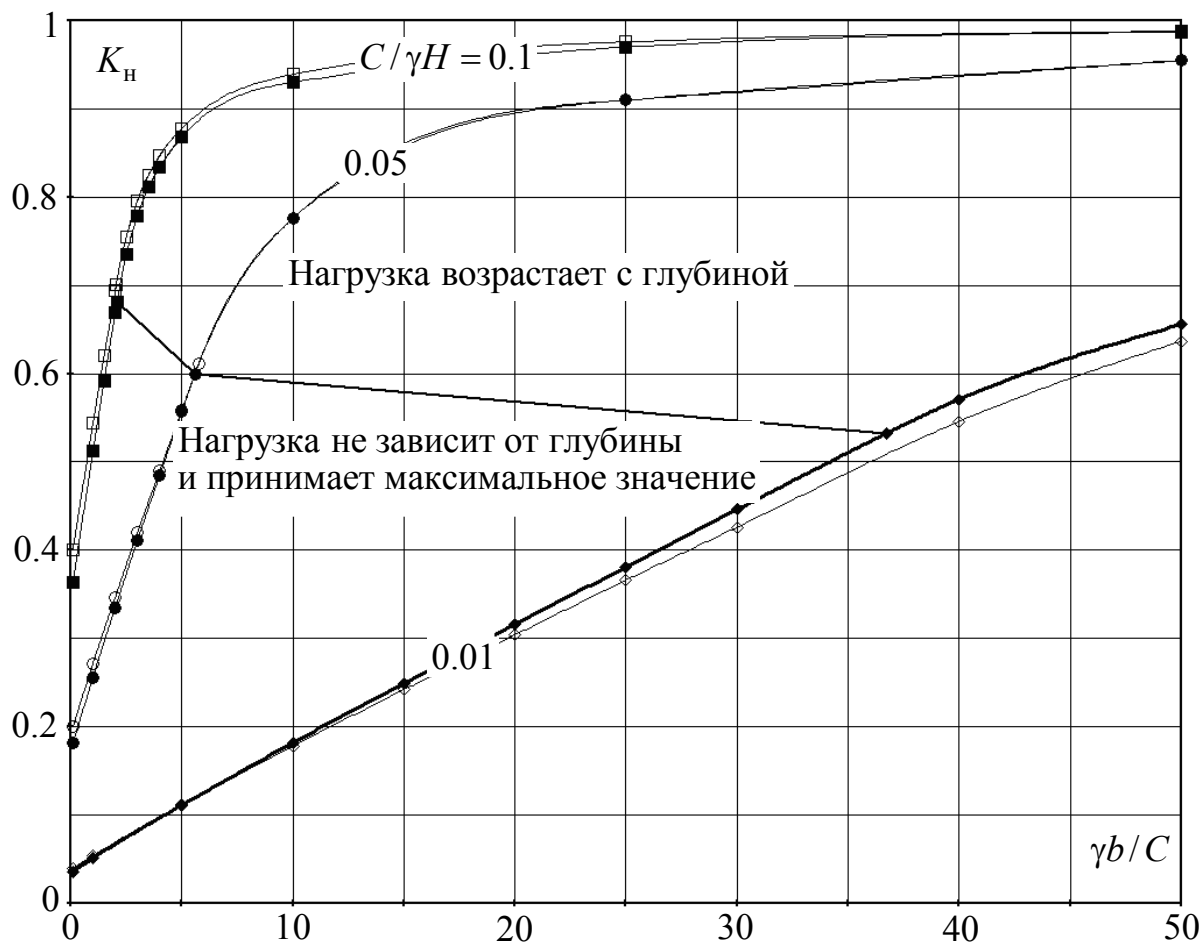


Рис. 3.10. Зависимость коэффициента нагрузки от физико-механических характеристик пород, глубины и размеров выработки

Используя графики (см. рис. 3.10), построим зависимости среднего коэффициента нагрузки от отношения $2b/H = L/H$ (рис. 3.11). На рисунке квадратики — $C/\gamma H = 0,1$, кружки — $C/\gamma H = 0,05$, ромбики — $C/\gamma H = 0,01$.

Интересно сравнить значения среднего коэффициента нагрузки, получаемые согласно графику (см. рис. 3.11), со значениями (см. табл. 3.1). Отметим, что имеется достаточно хорошая сходимость теоретических значений коэффициента нагрузки с экспериментальными, и это с учетом того, что в натуральных шахтных условиях измерялась косвенная величина — деформация целиков, с последующим пересчетом на коэффициент нагрузки через сложно определяемый показатель для массива — модуль упругости.

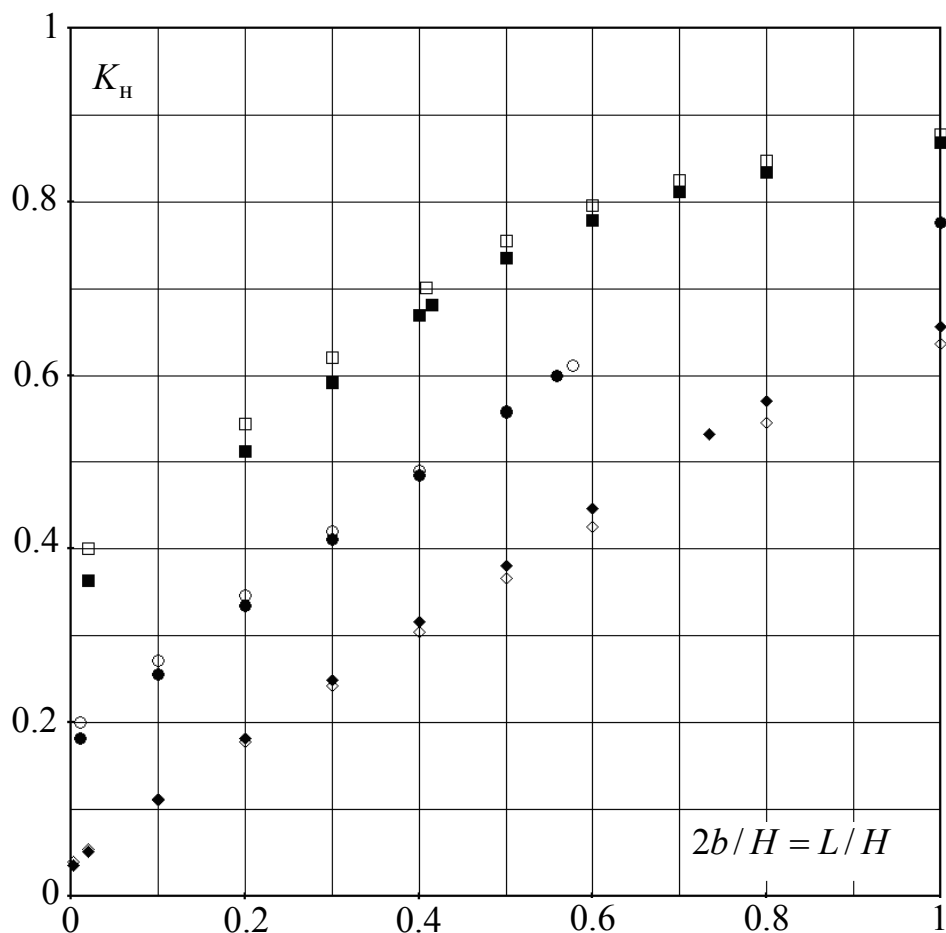


Рис. 3.11. Зависимость коэффициента нагрузки от отношения ширины панели к глубине разработки

Как отмечалось выше, в случае наклонных и крутопадающих залежей нагрузка на целики формируется в результате совместного воздействия вышележащего (над панелью) массива пород и сползающих пород висячего и, возможно, лежащего боков залежи.

Иливицкий А. А., используя идею Борисенко С. Г., предложил схему определения предельных размеров междукамерных целиков и потолочин для крутопадающих рудных залежей (рис. 3.12).

А. А. Иливицкий рассматривал два случая.

1. Угол падения рудного тела близок к 90° .
2. Угол падения отличается от 90° (однако, надо полагать, согласно расчетной схеме, угол падения превышает угол внутреннего трения).

В первом случае междукамерные целики находятся в состоянии двухосного сжатия, однако расчет рекомендуется вести только по вертикальной нагрузке согласно зависимости (для однородных пород):

$$\left(1 + \frac{l}{x}\right) \gamma H + \gamma h = \frac{\sigma}{n},$$

где n – коэффициент запаса; σ – допускаемое напряжение.

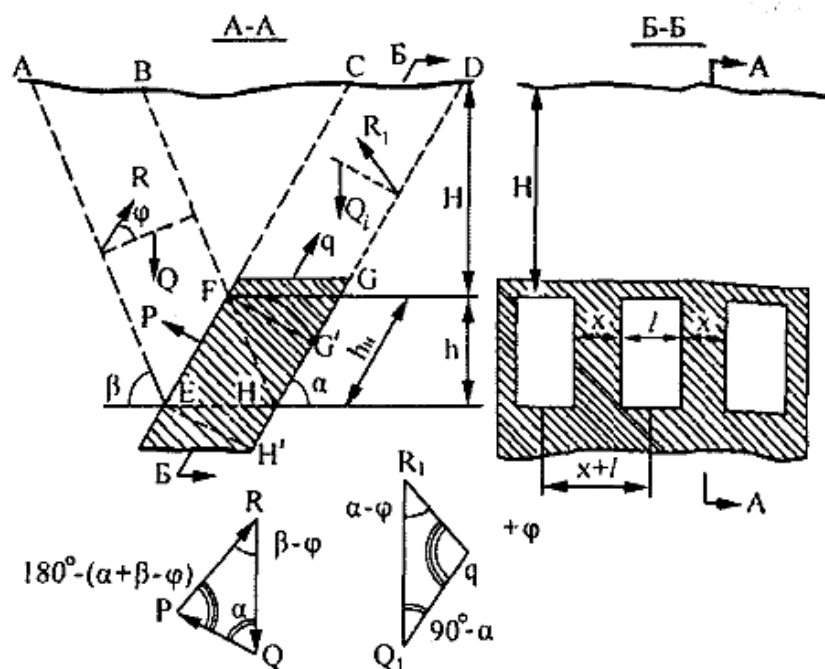


Рис. 3.12. Схема к расчету междукамерных целиков и потолочин по С. Г. Борисенко и А. А. Иливицкому

При залегании рудного тела, резко отличающегося от вертикали, расчет предлагается вести на вертикальное и горизонтальное давление по формулам:

$$P = \frac{\gamma h \left(H + \frac{1}{2} h \right) (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) \sin(\beta - \varphi)}{\sin(\alpha + \beta - \varphi)};$$

$$q = \frac{\gamma H m \sin(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha \cos \varphi},$$

где m – мощность рудного тела; β – угол сдвижения.

Величины действующих в целике напряжений выражаются соответствующими зависимостями:

$$\frac{P \sin \alpha}{h} \left(1 + \frac{l}{x} \right) = \frac{\sigma}{n};$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} \left[\frac{q}{m} \left(1 + \frac{l}{x} \right) + \gamma h \right] = \frac{\sigma}{n}.$$

Вместе с очевидными преимуществами метода имеется и ряд существенных недостатков. Наиболее значимые из них:

1. Считается, что целики находятся под давлением разрушенных пород и потерянной руды, заполнивших выработанное пространство, а также давлением, вызванным сдвижением вмещающих пород.

2. Напряжения по площади целика распределены равномерно.

3. Поверхность сдвижения (скольжения) призмы $ABFE$ принимается плоской.

4. Поверхность скольжения призмы $ABFE$ принимается наклоненной к горизонту под углом сдвижения, хотя правильнее было бы принять этот угол равным углу разрыва.

5. Необоснованна реакция между рассматриваемыми призмами смещения.

Рассмотрим наклонную залежь и в ее пределах одну из панелей (рис. 3.13). Пространство в пределах панели поддерживается междукамерными целиками. Как и в случае горизонтального залегания залежи (горизонтальной горной выработки), в бортах столба пород, расположенных над выработкой формируются призмы смещения (см. рис. 3.13). Однако, в отличие от горизонтального залегания, призмы смещения слева и справа имеют различные размеры, а, соответственно, с различными силами воздействуют на породный столб.

Определим среднюю нагрузку, действующую на всю панель. Под нагрузкой будем понимать нормальную и касательную (по отношению к пласту, рудному телу и т. д.) составляющие суммарного вектора.

Вертикальная и горизонтальная составляющие силовой нагрузки соответственно будут иметь вид (см. рис. 3.13):

$$\begin{aligned} P_{\text{верт}} &= 2b\gamma H - T_{\text{л}} - T_{\text{п}}; \\ P_{\text{гор}} &= E_{\text{л}} - E_{\text{п}}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

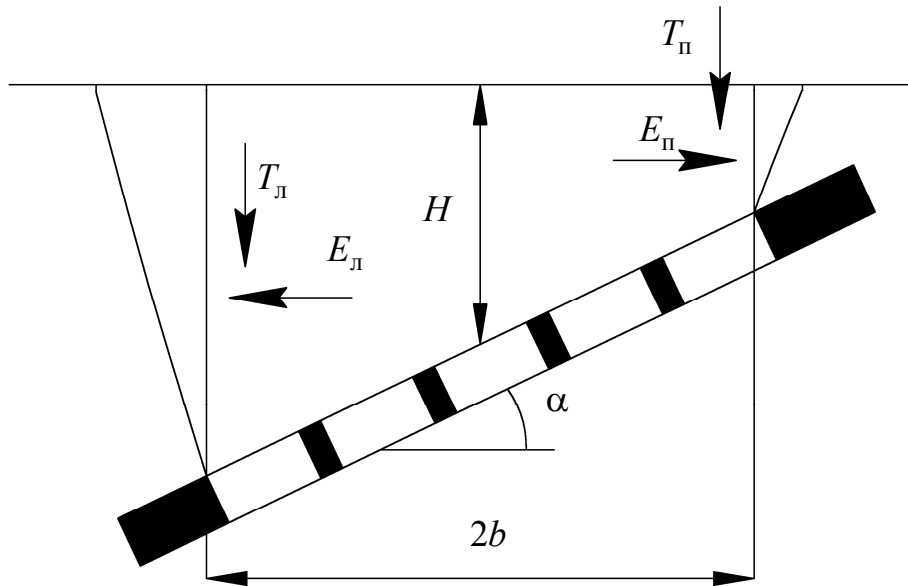


Рис. 3.13. Схема к расчету средней нагрузки на междукammerные целики для наклонных залежей

Таким образом, нормальная и касательная нагрузки определяются соответственно зависимостями:

$$\begin{aligned} \sum N' &= P_{\text{верт}} \cos \alpha + P_{\text{гор}} \sin \alpha; \\ \sum S' &= P_{\text{верт}} \sin \alpha - P_{\text{гор}} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Отметим, что из второго выражения (3.21) следует, что касательная составляющая нагрузки на междукammerные целики может быть направлена в различные стороны, например, при высоком уровне горизонтальных тектонических (измеренных) напряжений и относительно небольшом угле падения.

Предположим, что имеем условие полной подработки, а начальное горизонтальное напряжение в окрестности выработки равно $\lambda\gamma H$. Тогда условие смены знака касательных напряжений будет иметь вид:

$$2b\gamma H \sin \alpha - \frac{\lambda\gamma}{2} \left((H + b \operatorname{tg} \alpha)^2 - (H - b \operatorname{tg} \alpha)^2 \right) \cos \alpha = 0.$$

Решая данное уравнение, получим $\lambda = 1$. Таким образом, при $\lambda < 1$ для целика будет характерен сбросовой характер разрушения, а при $\lambda > 1$ – взбросовой. К идентичным выводам приходит Макаров А. Б. в монографии [10] (рис. 3.14).

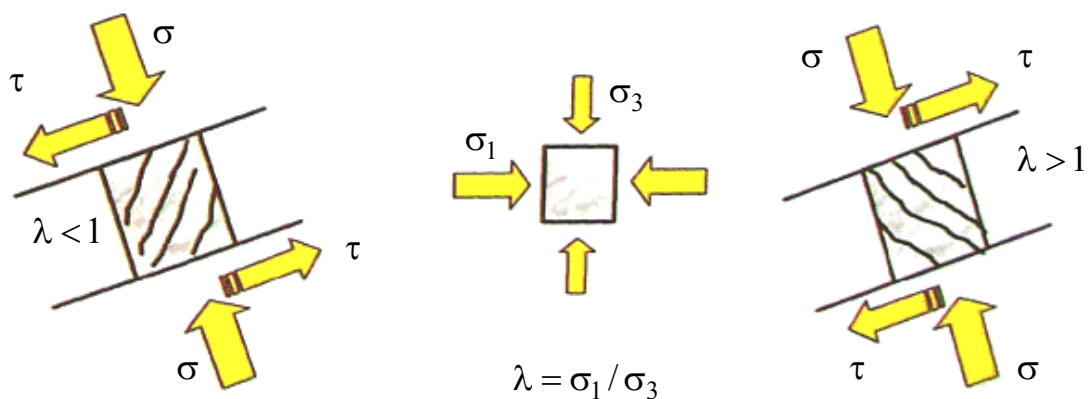


Рис. 3.14. Механизм разрушения целиков в зависимости от вида напряженного состояния

Важно отметить, что полученное условие не зависит от угла падения залежи. Заметим также, что взбросовый характер разрушения целиков должен являться индикатором повышенных тектонических напряжений в массиве.

Взбросовый характер разрушения приводит к тому, что целики, оформленные вертикально за счет структурных особенностей массива и сложного напряженного состояния, приобретают форму с боковыми поверхностями, наклоненными примерно по нормали к пласту. При этом целики теряют 30 – 40 % несущего сечения и переходят в категорию частично разрушенных (рис. 3.15) [10]. В этой связи очень важно правильно оформить целик. Оптимальный угол наклона оси целика к пласту (со стороны падения) рекомендуется определять по формуле [11]:

$$\beta = 90^\circ + \alpha - \text{arctg}(\lambda \text{tg} \alpha).$$

Вернемся к расчету нагрузок на целики в случае наклонного залегания залежи. Согласно выражениям (3.20), (3.21) и (3.3), нормальная нагрузка на целики, без учета мощности залежи, определяется по формуле:

$$\sum N' = 2b\gamma H \cos \alpha - (T_{\text{л}} + T_{\text{п}}) \cos \alpha + (T_{\text{л}} - T_{\text{п}}) \text{ctg} \varphi \sin \alpha. \quad (3.22)$$

Необходимо обратить внимание на то, что хоть в уравнении (3.22) величины касательных реакций можно вынести за скобки, делать этого не следует. Дело в том, что разность первых двух членов в правой части уравнения не

должна убывать с глубиной. То есть до определенной глубины она возрастает, а потом принимает постоянное значение, не зависящее от глубины.

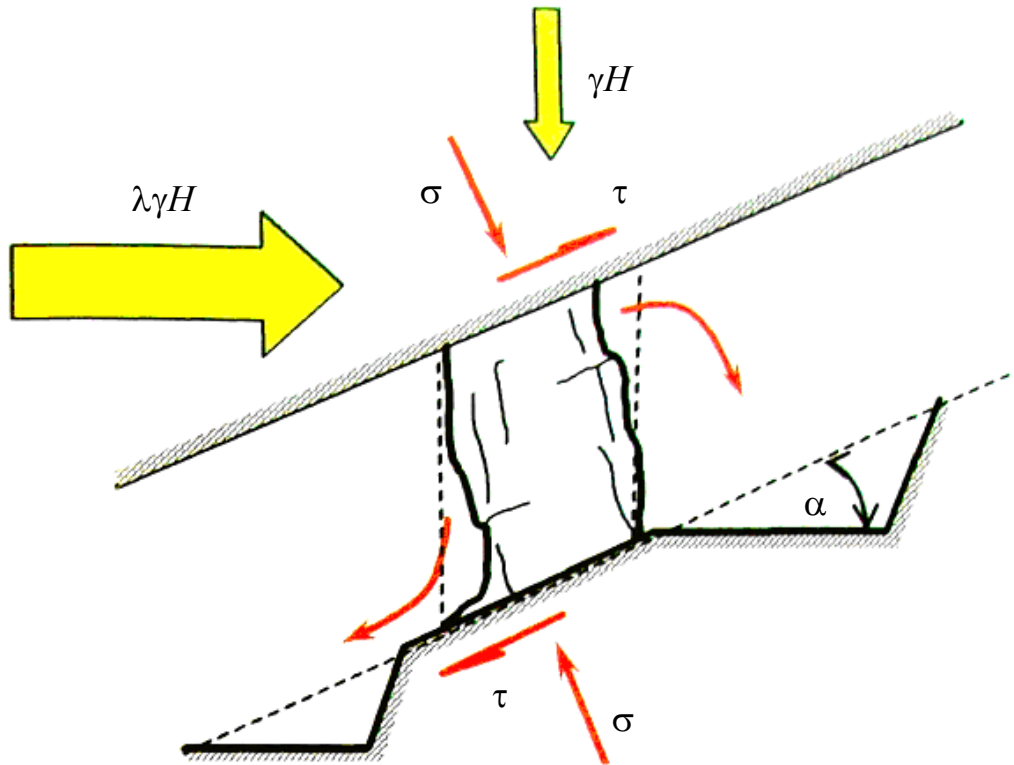


Рис. 3.15. Характер разрушения целиков при наклонном залегании залежи и взбросовом характере напряженного состояния

Используя уравнения (3.8), (3.22), запишем зависимость для определения средней нормальной нагрузки на целики в панели при наклонном залегании залежи:

$$\begin{aligned} \sum N' = & \gamma H 2b \cos \alpha - \frac{2C^2 \cos \alpha}{\gamma f (1+f^2)} \times \\ & \times \left(\int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi+\varphi}{4}\right)}^{\sqrt{1+\frac{f\gamma(H+b\operatorname{tg}\alpha)}{C}}} (p^3 - 2fp^2 - p) dp + \int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi+\varphi}{4}\right)}^{\sqrt{1+\frac{f\gamma(H-b\operatorname{tg}\alpha)}{C}}} (p^3 - 2fp^2 - p) dp \right) + \\ & + \frac{2C^2 \sin \alpha}{\gamma f^2 (1+f^2)} \left(\int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi+\varphi}{4}\right)}^{\sqrt{1+\frac{f\gamma(H+b\operatorname{tg}\alpha)}{C}}} (p^3 - 2fp^2 - p) dp - \int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi+\varphi}{4}\right)}^{\sqrt{1+\frac{f\gamma(H-b\operatorname{tg}\alpha)}{C}}} (p^3 - 2fp^2 - p) dp \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Разделив в выражении (3.23) обе части на первое слагаемое в правой части, перейдем к коэффициенту нагрузки для наклонных залежей в случае, когда нагрузка еще зависит от глубины:

$$K'_H = 1 - \frac{C}{\gamma H} \frac{C}{\gamma b} \frac{1}{f(1+f^2)} \left[\int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}^C \sqrt{1 + \frac{f\gamma(H+b\operatorname{tg}\alpha)}{C}} (p^3 - 2fp^2 - p) dp + \int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}^C \sqrt{1 + \frac{f\gamma(H-b\operatorname{tg}\alpha)}{C}} (p^3 - 2fp^2 - p) dp \right] +$$

$$+ \frac{C}{\gamma H} \frac{C}{\gamma b} \frac{\operatorname{tg}\alpha}{f^2(1+f^2)} \left[\int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}^C \sqrt{1 + \frac{f\gamma(H+b\operatorname{tg}\alpha)}{C}} (p^3 - 2fp^2 - p) dp - \int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}^C \sqrt{1 + \frac{f\gamma(H-b\operatorname{tg}\alpha)}{C}} (p^3 - 2fp^2 - p) dp \right]. \quad (3.24)$$

Заметим, что в отличие от своего аналога, коэффициента нагрузки для горизонтальных залежей K_H , коэффициент нагрузки для наклонных залежей K'_H может принимать значения, большие единицы. Это обусловлено горизонтальными силами со стороны призм смещения. Кроме того, помимо рассматриваемых нормальных нагрузок на целики будут действовать еще и касательные, которые также негативно влияют на их устойчивость. Из зависимости (3.24) также следует инвариантность коэффициента нагрузки относительно величин $\frac{C}{\gamma H}$ и $\frac{\gamma b}{C}$.

Влияние угла падения залежи (относительно горизонтального залегания) может быть оценено при помощи коэффициента влияния угла падения залежи:

$$K_\alpha = \frac{K'_H}{K_H}.$$

Взяв производную по H от первых двух слагаемых (3.23) и приравняв ее нулю, определим глубину, начиная с которой вертикальная нагрузка максимальна и прекращает зависеть от глубины:

$$\frac{\gamma H}{C} - \frac{\gamma b(1+f^2)}{C f} = \sqrt{1 + \frac{f\gamma(H+b\operatorname{tg}\alpha)}{C}} + \sqrt{1 + \frac{f\gamma(H-b\operatorname{tg}\alpha)}{C}}. \quad (3.25)$$

Положив в уравнении (3.25) $\alpha=0$, получим уравнение, определяющее предельную глубину для горизонтального залегания залежи (3.11). Необходимо отметить, что глубина, полученная по формуле (3.25), отличается от глубины, полученной по формуле (3.11), незначительно. То есть влияние угла падения залежи на предельную глубину достаточно ничтожно.

На рис. 3.16 в качестве примера представлены графики, определяющие зависимость коэффициента влияния K_α от угла падения залежи, степени подработки и физико-механических свойств горных пород.

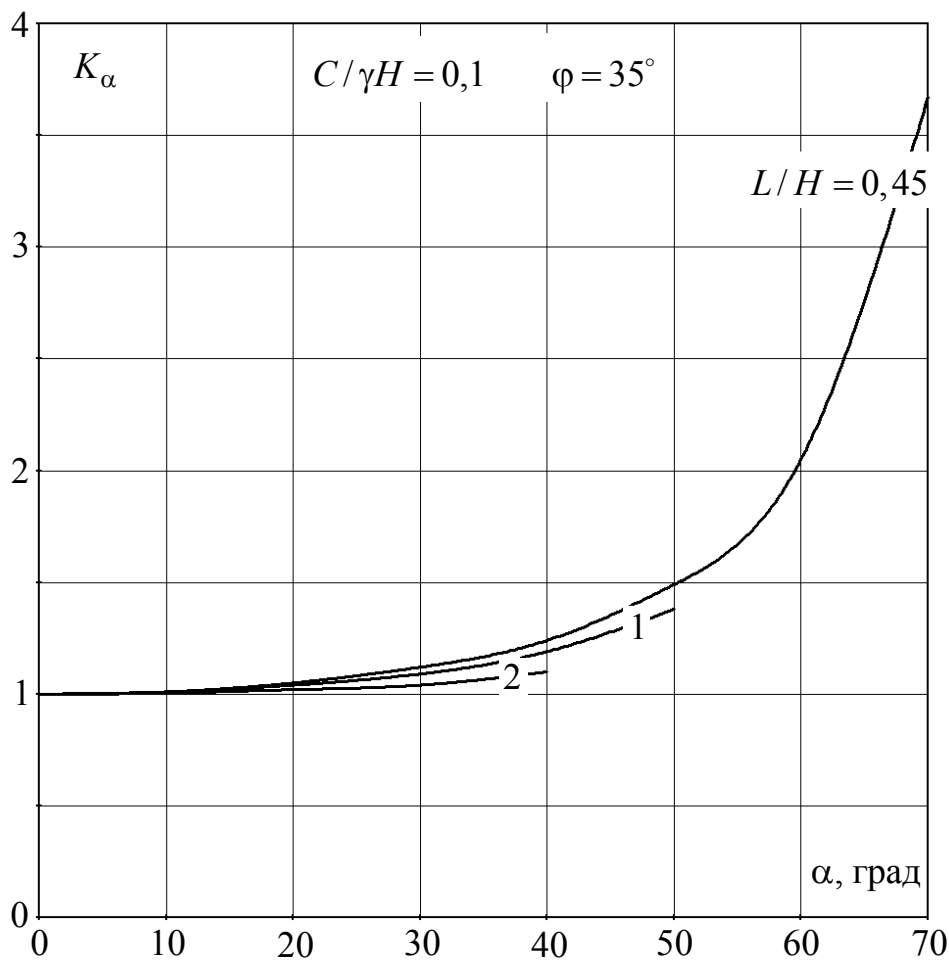


Рис. 3.16. Графики зависимости коэффициента влияния угла падения залежи от угла ее падения, степени подработанности массива и его физико-механических характеристик

Анализ графиков показывает:

1. С увеличением степени подработки коэффициент влияния угла падения уменьшается.

2. Коэффициент влияния возрастает при снижении величины $\frac{C}{\gamma H}$ или сцепления массива, особенно это проявляется для крутых углов. Данный факт объясняется снижением удерживающих сил вдоль поверхностей скольжения.

3. С ростом угла падения залежи увеличивается коэффициент влияния угла падения, причем наиболее интенсивный рост коэффициента начинается при $\alpha > 60^\circ$. Это объясняется тем, что при этих значениях углов падения залежи в формировании общей нагрузки на целики все большее участие принимают именно горизонтальные реакции (а не вертикальные от веса столба), формирующиеся под действием призм смещения.

Перейдем к рассмотрению вопроса о формировании нагрузок на междукамерные целики для крутопадающих залежей. Под крутопадающими будем понимать такие залежи, угол падения которых превышает так называемый предельный угол падения, то есть такой угол, при котором начинается сдвиг пород лежачего бока залежи (рис. 3.17).

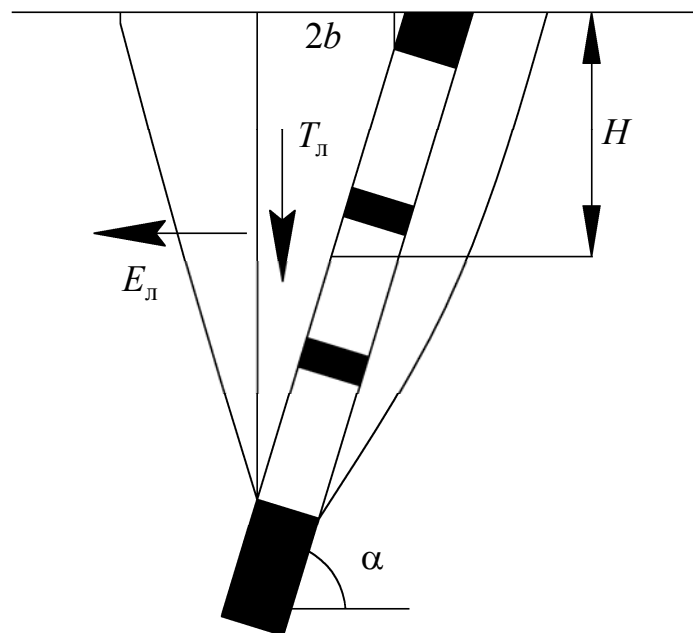


Рис. 3.17. Схема к расчету средней нагрузки на междукамерные целики для крутопадающих залежей

Из рис. 3.17 видно, что в принципе расчетная схема для крутопадающей залежи ничем не отличается от схемы с наклонным залеганием (см. рис. 3.13).

Пожалуй, единственным отличием является практически полное отсутствие призмы смещения в борте породного столба со стороны восстания (если рассчитывается первая со стороны восстания панель). В этой связи действием реакций E_{Π}, T_{Π} в практических расчетах можно пренебречь. Поэтому выражения (3.20) примут вид:

$$P_{\text{верт}} = 2b\gamma H - T_{\text{л}};$$
$$P_{\text{гор}} = E_{\text{л}}.$$

Во всем остальном расчет ничем не отличается от расчета нагрузок на целики наклонных залежей. В частном случае, когда залегание залежи вертикальное, нагрузка на целики определяется по формуле $\sum N' = P_{\text{гор}} = E_{\text{л}}$.

Таким образом, угол падения залежи является весьма существенным фактором при формировании нагрузок на целики. Как следует из проведенных исследований, нагрузка на целики наклонных пластов может в разы превышать нагрузку на целики горизонтальных залежей.

3.5. Механизм формирования горного давления в поле действия тектонических напряжений

Очень часто при разработке месторождений помимо гравитационных полей напряжений в массиве действуют тектонические поля, причем зачастую они значительно (в разы) превышают гравитационные. Установление значений тектонических напряжений и ориентировки главных осей напряжений является сложной фундаментальной научной и прикладной задачей.

При проведении выработок происходит разгрузка естественных полей напряжений. При открытой разработке месторождений разгрузка напряжений ведет к деформированию прибортовых массивов. Форма карьеров меняется в плане (эллипсообразность), изменяется профиль бортов карьеров, происходит разуплотнение массива и, как следствие, снижение величины сцепления трещиноватых горных массивов. Однако вследствие больших масштабов данные яв-

ления визуально не заметны и приводят к локальным разрушениям (отслоениям). Кроме того, снижается устойчивость борта в целом.

При подземной разработке, в силу относительно небольших размеров выработок, проявление тектонических напряжений иное. При неблагоприятной ориентировке выработок разгрузка напряжений может приводить к разрушению выработок или к аккумуляции потенциальной энергии деформации с последующим преобразованием в горный удар. В монографии [10] описывается следующий пример. При проведении кольцевого откаточного штрека руддвора клетового ствола (рудник Расвумчорр ОАО «Апатит» (Хибинский массив)) на глубине 600 м наблюдались разрушения кровли с образованием характерного шатрового свода в интервале AB (рис. 3.18). При использовании обычных графических построений, существует возможность определения направления действия максимальных напряжений и критических углов ориентировки выработок (см. рис. 3.18). В идеальном случае оси выработок необходимо ориентировать по направлению действия максимальных напряжений, особенно на удароопасных месторождениях.

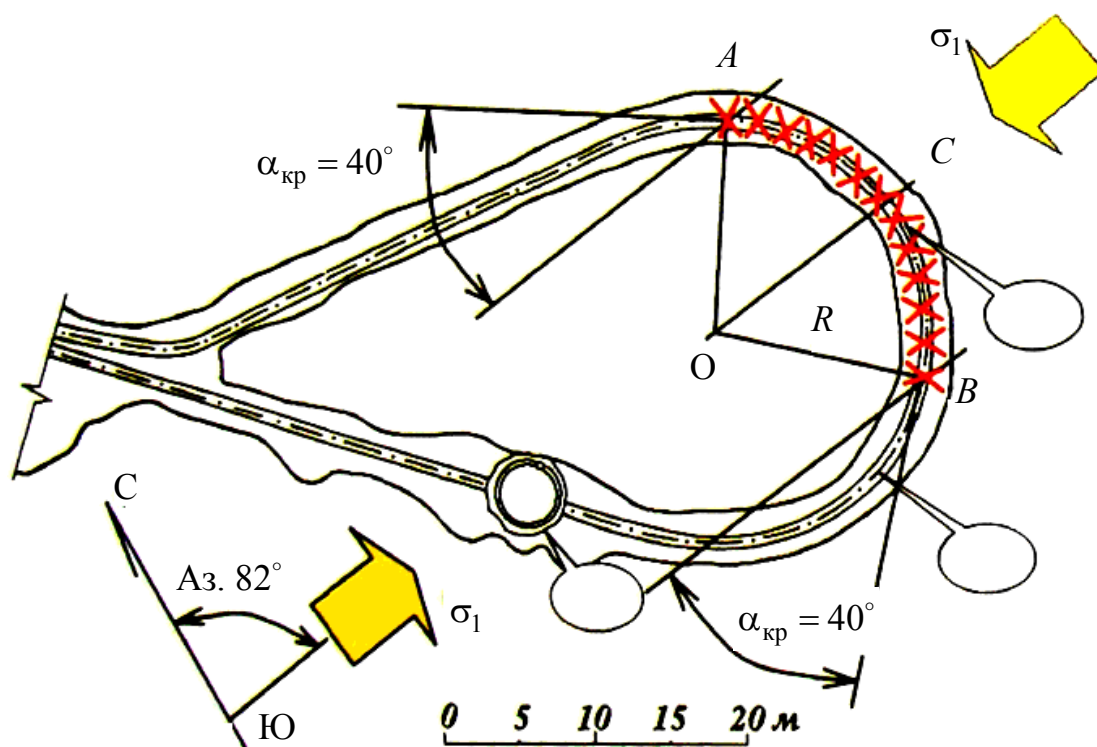


Рис. 3.18. Определение направления действия в массиве максимальных главных напряжений

Тектонические (активные) напряжения часто представляют в виде:

$$\sigma_T = \lambda \gamma H,$$

где λ – коэффициент пропорциональности, численно равный отношению горизонтальной составляющей поля тектонических напряжений к вертикальной. Численное значение коэффициента λ некоторые авторы для тектонических регионов оценивают величиной 1 – 10 (если тектоники нет, то будем считать $\lambda = 0$).

Для определения значения равнодействующей тектонической силы необходимо проинтегрировать тектоническое напряжение по глубине:

$$E_T = \int \lambda \gamma H dH = \lambda \gamma H^2 / 2.$$

Рассмотрим, каким образом формируется нагрузка на целики (выработки) в поле действия гравитационно-тектонических напряжений. Используя выражение (3.8) для горизонтальной выработки (панели) и пренебрегая ее высотой (мощностью тела), касательная реакция между призмой и породным столбом определяется по формуле:

$$T_0 = \frac{2C^2}{\gamma f^3} \int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}^{\sqrt{1 + \frac{f\gamma H}{C}}} (p^3 - 2fp^2 - p) dp - \frac{\lambda \gamma H^2}{2f}.$$

Таким образом, условие равновесия призмы смещения и столба горных пород над выработкой в условиях действия тектонической составляющей поля напряжений будет иметь вид:

$$p = \gamma H - \frac{2C^2}{\gamma f^3 b} \int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}^{\sqrt{1 + \frac{f\gamma H}{C}}} (p^3 - 2fp^2 - p) dp + \frac{\lambda \gamma H^2}{2fb}. \quad (3.26)$$

Как и раньше, нагрузка не может превышать величины γH и не может убывать с глубиной. Используя выражение (3.26), получим зависимость, определяющую средний коэффициент нагрузки:

$$K_H = \frac{p}{\gamma H} = 1 - \frac{C}{\gamma H} \frac{C}{\gamma b} \frac{2}{f^3} \int_{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi+\varphi}{4}\right)}^{\sqrt{1+\frac{f\gamma H}{C}}} (p^3 - 2fp^2 - p) dp + \frac{\lambda}{2f} \frac{\gamma H}{C} \frac{C}{\gamma b}. \quad (3.27)$$

Положим в уравнении (3.27) $K_H = 1$, $\varphi = 35^\circ$ и исследуем влияние коэффициента λ на величину горного давления (рис. 3.19). Анализируя графики, делаем вывод о том, что если в массиве действуют горизонтальные тектонические напряжения, превышающие вертикальные ($\lambda \geq 1$), то для любых физико-механических характеристик горного массива и отношения L/H расчет средней вертикальной нагрузки на горную выработку (целики в панели) необходимо производить исходя из полного веса столба вышележащих пород, то есть $K_H = 1$. Другими словами, если распределение горизонтальных напряжений превышает уровень гидростатического поля, то необходимо принять $K_H = 1$, при любых размерах выработанного пространства.

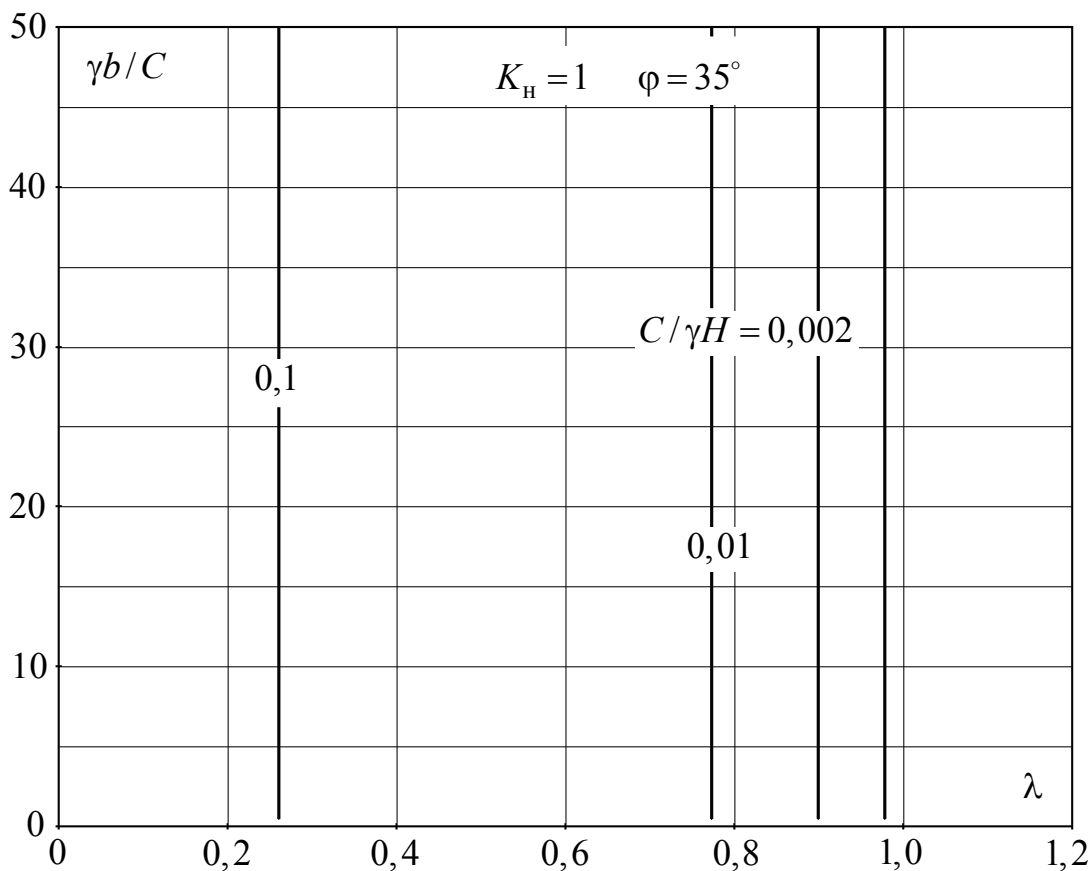


Рис. 3.19. Графики влияния тектонического напряжения на величину вертикального горного давления

Таким образом, механизм формирования вертикального горного давления в поле действия горизонтальных тектонических (активных) напряжений заключается в том, что они создают дополнительное горизонтальное (нормальное) усилие, удерживающее призмы смещения в бортах столба пород, расположенных над выработанным пространством. При этом снижается касательная составляющая реакции между призмой и породным столбом, которая удерживает столб пород, тем самым увеличивая нагрузку на целики, крепь и т. д. При некоторой величине активных тектонических напряжений, создаваемого ими усилия становится достаточно для удержания призмы смещения в равновесии без участия касательной составляющей реакции (между призмой и породным столбом), которая, в свою очередь, снижала вертикальную нагрузку.

Говоря о нагрузке, необходимо оговориться. Отыскиваемая нами нагрузка равна той силе, которую необходимо приложить к породному столбу, чтобы он находился в равновесии после подработки. Если этой силы не будет (выработка без крепи, отсутствие целиков и т. д.), то это еще не значит, что столб пород обрушится. В процессе деформирования (смещения столба вниз) по боковым граням породного столба произойдет перераспределение касательной реакции вплоть до ее максимального значения, равного пределу кулоновской прочности на срез.

В том случае, когда нагрузка на целики определяется полем тектонических напряжений, то есть вертикальная компонента равна γH , а горизонтальная $\lambda \gamma H$, то для наклонных залежей влияние угла падения на величину нормальной нагрузки на целики в панели (коэффициента нагрузки) можно выразить через коэффициент. Коэффициент влияния угла падения залежи определяется формуле [10]:

$$K_{\alpha} = 0,5(1 + \lambda + (1 - \lambda) \cos 2\alpha).$$

Таким образом, тектонические поля напряжений определяют не только граничные условия в горизонтальной плоскости, но также способствуют повышению вертикального горного давления.

Выводы по главе 3

На основе разработанной во второй главе теории дано новое решение актуальных научных и прикладных задач.

1. Получены зависимости, определяющие начальное напряженное состояние нетронутого горного массива с учетом пластической (а не только упругой, по А. Н. Диннику) составляющей гравитационных напряжений. Таким образом, предлагается новый подход к обоснованию величины горизонтального поля гравитационных напряжений.

2. Предлагается аналитический метод определения угловых параметров процесса сдвижения (углы разрыва, сдвижения, граничные), основанный на определении положения границы областей сдвижения с разрывом сплошности горного массива (собственно сдвижений) и деформаций массива без разрыва сплошности (собственно деформаций). Аналитически доказана стабильность углов разрыва с глубиной. Указывается на причины слабой зависимости углов разрыва, а соответственно и углов сдвижения от физико-механических (прочностных) свойств горного массива. С другой стороны, в подтверждение экспериментальных данных указывается на почти функциональную линейную связь углов разрыва со стороны лежачего бока залежи от угла ее падения.

3. Получены зависимости, определяющие нагрузку на крепь горизонтальных горных выработок. Доказывается, что максимальная нагрузка на крепь инвариантна относительно глубины.

4. Обоснован и исследован механизм формирования нагрузки на целики. Исследовано влияние на величину нагрузки физико-механических свойств горных массивов, угла падения залежи, глубины и степени подработки.

5. Обоснован механизм увеличения вертикального горного давления на горные выработки, конструктивные элементы систем разработок (целики) в поле действия тектонических (активных) напряжений.

Список литературы к главе 3

1. Влох, Н. П. Управление горным давлением на подземных рудниках / Н. П. Влох – М.: Недра, 1994. – 207 с.
2. Зубков, А. В. Гипотеза нелинейного изменения гравитационно-тектонических напряжений с глубиной в верхней части земной коры / А. В. Зубков // Геомеханика в горном деле: Доклады международной конференции, 19 – 21 ноября 2002 г., г. Екатеринбург. – Екатеринбург: ИГД УрО РАН, 2003. – С. 17 – 21.
3. Казикаев, Д. М. Геомеханика подземной разработки руд / Д. М. Казикаев. – М.: МГГУ, 2009. – 544 с.
4. Кузнецов, М. А. Сдвигение горных пород на рудных месторождениях / М. А. Кузнецов, А. Г. Акимов, В. И. Кузьмин и др. – М.: Недра, 1971. – 224 с.
5. Булычев, Н. С. Механика подземных сооружений / Н. С. Булычев – М.: Недра, 1994. – 382 с.
6. Цимбаревич, П. М. Механика горных пород / П. М. Цимбаревич – М.: Углетехиздат, 1948. – 184 с.
7. Борисов, А. А. Механика горных пород и массивов / А. А. Борисов – М.: Недра, 1980. – 360 с.
8. Борщ-Компониец, В. И. Механика горных пород, массивов и горное давление: учеб. пособие / В. И. Борщ-Компониец. – М.: Изд-во МГИ, 1968. – 484 с.
9. Юн, А. Б. Развитие методов расчета нагруженности и устойчивости междокамерных целиков при отработке пологих и наклонных рудных залежей / А. Б. Юн, А. Б. Макаров, Д. В. Мосякин и др. // Геомеханика в горном деле: доклады международной конференции, 19 – 21 ноября 2002 г., г. Екатеринбург. – Екатеринбург: ИГД УрО РАН, 2003. – С. 128 – 130.
10. Макаров, А. Б. Практическая геомеханика: учебное пособие для горных инженеров / А. Б. Макаров – М.: Горная книга, 2006. – 391 с.

11. Зотеев, О. В. Геомеханика: учеб. пособие / О. В. Зотеев, В. А. Осинцев. – Екатеринбург: УГГГА, 1997. – 128 с.
12. Чарковский, К. И. Обоснование метода обратного расчета прочности междукамерных целиков по факту их разрушения: автореф. дис. ... канд. техн. наук / К. И. Чарковский. – М.: МГГРУ, 2004. – 21 с.
13. Удалов, А. Е. Горно-геомеханическое обоснование технологии выемки целиков на отработанных рудных месторождениях: автореф. дис. ... канд. техн. наук / А. Е. Удалов. – СПб.: ВНИМИ, 2000. – 21 с.
14. Методические указания по определению размеров камер и целиков при подземной разработке руд цветных металлов. – Чита, 1988. – 126 с.
15. Руппeneйт, К. В. Некоторые вопросы механики горных пород / К. В. Руппeneйт – М.: Углетехиздат, 1954. – 384 с.
16. Турчанинов, И. А. Основы механики горных пород / И. А. Турчанинов, М. А. Иофис, Э. В. Каспарьян – Л.: Недра, 1989. – 488 с.: ил.
17. Жабко, А. В. Напряженное состояние земной коры / А. В. Жабко // Изв. УГГУ. – 2014. – № 3(35). – С. 57-60.
18. Жабко, А. В. Начальное поле напряжений нетронутого массива горных пород / А. В. Жабко // Маркшейдерия и недропользование. – 2015. – № 2(76). – С. 49-52.
19. Жабко, А. В. Аналитический метод определения основных угловых параметров процесса сдвижения / А. В. Жабко // Геомеханика в горном деле: доклады Всероссийской научно-технической конференции с международным участием, 4 – 5 июня 2014 г., ИГД УрО РАН. – Екатеринбург, 2014. – С. 274 – 283.
20. Жабко, А. В. Способ расчета сдвижений и деформаций земной поверхности и вмещающих пород / А. В. Жабко // Изв. вузов. Горный журнал. – 2015. – № 4. – С. 37-44.

4. РАСЧЕТНЫЕ ПРОЧНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГОРНЫХ МАССИВОВ

4.1. Общие сведения

Пожалуй, самой загадочной и абстрактной величиной в геомеханике является величина сцепления трещиноватого горного массива. Трещины отдельности (кливаж) придают горному массиву структуру кирпичной кладки и делают массив в каждой конкретной точке анизотропным. Сцепление по направлению, совпадающему с трещиной отдельности, может на два порядка отличаться от прочности структурного элемента (блока, куска, образца). Кроме того, элементы залегания систем трещин в горном массиве меняются с глубиной горных работ и по площади шахтных и карьерных полей. Также меняются и прочностные характеристики трещин и структурных блоков. Несмотря на это, нашей задачей является определение сцепления массива размером в сотни и даже первые тысячи метров.

Таким образом, объективному установлению свойств массива препятствуют, по меньшей мере, три проблемы.

1. Высокая изменчивость показателей свойств ненарушенных пород, то есть образцов (коэффициенты вариации лабораторных определений свойств горных пород могут достигать сотен процентов).

2. Весьма маленький объем выборки при определении свойств пород.

3. Фактически не существует физически обоснованных представлений о явлении снижения прочности (сцепления) массивов вследствие их трещиноватости, как результат – отсутствие обоснованной методики определения величины сцепления. В этой связи приходится довольствоваться лишь эмпирическими зависимостями, прогнозирующими результат с неизвестной точностью, либо определять величину сцепления массива посредством обратных расчетов.

Источником первой проблемы является сложнейший генезис месторождений полезных ископаемых, а также процессы физического и химического выветривания, метаморфизма, тектонической активности и др. Прежде всего это

относится к рудным месторождениям. Если провести аналогию, например, между образцами горных пород и кирпичами (и те и другие фактически являются строительным материалом соответственно для горняков и строителей), то станет очевидным, что у строителей о высоких показателях изменчивости свойств кирпича не может идти даже речи, так как он производится практически из одного и того же материала (глины) при совершенно одинаковых условиях (температура, давление и др.).

При разработке месторождений полезных ископаемых происходит изменение (перераспределение) естественных полей напряжений вокруг горных выработок в радиусе десятков километров в плане и километров по глубине, образуется депрессионная воронка с размерами, превышающими сотню километров. Таким образом, для прогнозирования протекания геомеханических процессов нам необходимо располагать свойствами горных пород в радиусе влияния разработок. Рассмотрим следующий пример. Пусть имеется среднее по размерам месторождение глубиной 500 метров, с размерами шахтного поля в плане 3000×1000 метров. И пусть в пределах шахтного поля было отобрано и испытано на одноосное сжатие 1000 образцов (достаточно много), средний размер стандартного образца составляет $40 \times 40 \times 40$ мм. Определим долю выборки от генеральной совокупности как отношение объемов выборки к объему генеральной совокупности. Порядок этой величины составит 10^{-10} . При этом рассматривалась не область влияния, а лишь непосредственно область ведения горных работ.

Используя такой мизерный объем выборки, нам необходимо произвести прогноз свойств горных пород, характеризующих всю генеральную совокупность (весь массив). А если учесть чрезвычайно высокую изменчивость свойств горных пород, даже в пределах одной литологической разности, то становится очевидной весьма низкая представительность получаемых результатов.

Трудности прогнозирования свойств, описанные выше, относились лишь к ненарушенным трещиноватостью массивам, последняя же и определяет в геомеханике, на взгляд автора, самую большую проблему. Дело в том, что скаль-

ные и полускальные горные породы, которые и сопровождают в своем большинстве разработку месторождений, являются, при отсутствии сплошных трещин, достаточно прочными. Поясним это на примере.

Как известно, М. М. Протодьяконов разделил все горные породы по степени сопротивляемости технологическим воздействиям (буримость, взрываемость, экскавируемость, абразивность, твердость, и т.д.) на двадцать классов. Для скальных горных пород коэффициент крепости в среднем можно принять $f = 15$. Известно, что между коэффициентом крепости и пределом прочности на одноосное сжатие существует корреляционная связь:

$$f = \frac{\sigma_{сж}}{1000}.$$

Заметим, что по этой зависимости коэффициент крепости горных пород может достигать значений $f = 35$. Представим предел прочности на сжатие, т/м^2 :

$$\sigma_{сж} = \gamma H,$$

где γ – объемный вес налегающей толщи; H – предельная глубина расположения рассматриваемого куска горной породы.

Таким образом, выразим из рассмотренных выражений предельную глубину, на которой произойдет разрушение ненарушенного образца:

$$H = \frac{1000f}{\gamma}.$$

Примем приближенно $\gamma = 3 \text{ т/м}^3$, откуда $H = 5000 \text{ м}$. Таким образом, даже при одноосном сжатии образец средней крепости на глубинах ведения горных работ (в России до 2000 м) разрушен не будет. Другими словами, при такой прочности можно выстроить вертикальный борт карьера высотой $H = 5 \text{ км}$, на практике же он на два порядка меньше. Из этого примера отчетливо видна негативная роль трещиноватости.

4.2. Сцепление массива скальных трещиноватых горных пород

Основными механическими характеристиками при расчете предельных параметров элементов систем горных разработок являются сцепление и угол внутреннего трения. Что касается погрешностей прогнозирования механических характеристик горных пород, отметим, что ошибка оценки угла внутреннего трения редко превышает 2 – 3 градуса. Иначе обстоит дело с определением величины сцепления массива горных пород. При ее обосновании разными методами результаты могут отличаться между собой в 2 – 4 раза, что делает расчет и найденные предельные параметры сооружений недостоверными.

Величину сцепления трещиноватого горного массива можно выразить следующим образом:

$$C_m = C_k p_k + C' p', \quad (4.1)$$

где C_m, C_k, C' – соответственно сцепления массива, структурного блока (куска, образца) и по трещине отдельности; p_k, p' – соответственно вероятности (частоты) разрушения структурных элементов и трещин вдоль поверхности разрушения (скольжения).

В действительности, если обратиться к экспериментальным данным, например к исследованиям Д. Н. Кима [1], то даже если трещины расположены перпендикулярно и параллельно прилагаемой нагрузке (нормально секущая трещиноватость), то есть срез происходит по поверхности, не совпадающей с поверхностями трещин, то снижение сцепления все равно происходит. Однако это снижение незначительно, то есть величины сцеплений массива и куска имеют один порядок, а если учесть достаточно большие значения величины сцепления куска скальной породы, то задача по определению условий снижения прочности в этом случае теряет актуальность. Таким образом, далее рассматривается случай снижения прочности массива вследствие более низкой прочности трещины на срез и частичного совпадения поверхности скольжения (разрушения) с поверхностями трещин. В этом случае величина сцепления массива снижается относительно куска на 1-2 порядка.

Учитывая, что в любой точке поверхности скольжения разрушается либо трещина отдельности, либо структурный блок, то есть $p_k + p' = 1$, из формулы (4.1) получим:

$$C_M = (C_K - C')p_k + C'. \quad (4.2)$$

Таким образом, задача по определению величины сцепления массивов горных пород сводится к определению вероятности разрушения структурных блоков вдоль поверхности скольжения. Отметим, что, согласно формуле (4.2), величина p_k имеет смысл коэффициента структурного ослабления λ :

$$\lambda = \frac{(C_M - C')}{(C_K - C')}. \quad (4.3)$$

Используя данный подход к обоснованию величины сцепления трещиноватых массивов Г. Л. Фисенко [2] рекомендует формулу:

$$C_M = \frac{(C_K - C')}{1 + a' \ln(HW)} + C', \quad (4.4)$$

где $a' = 0,5 \div 10$ – коэффициент, зависящий от характера трещиноватости (определяется из таблицы); H – размер рассматриваемого массива (высота борта карьера, целика); W – интенсивность трещиноватости, величина, обратная среднему размеру структурного блока.

Автором в кандидатской диссертации [3] получена подобная зависимость:

$$C_M = \frac{C_K - C'}{1 + \frac{\operatorname{tg}\left(50^\circ + 3(\vartheta'_{\max} - \varphi)\right)\left(1 - \frac{C'}{C_K}\right)(HW - 1)}{HW}} + C', \quad (4.5)$$

где ϑ'_{\max} – максимальный из углов падения в выработанное пространство систем трещин, но трещины со сдвиговым характером разрушения.

Кроме того, определена область значений углов падения систем трещиноватости и соотношений сцепления по трещине к сцеплению структурного блока, при которых необходимо принимать

$$C_M = C'.$$

Как видно, формулы (4.4) и (4.5) получены из более общих зависимостей (4.2) и (4.3), а их принципиальное различие состоит в способе обоснования вероятности разрушения структурных блоков вдоль поверхности скольжения.

В работе [4] предпринята попытка обосновать вероятность разрушения структурного блока в каждой точке поверхности скольжения. То есть в каждой точке поверхности скольжения сравнивались обобщенные силы при разрушении по трещинам, с заданными углами их падения, и при разрушении структурного блока (куска). Однако, как было показано выше, поверхность скольжения выбирает тот “путь”, который обеспечивает ей максимум разности сдвигающих и удерживающих сил на возможном перемещении (максимум обобщенной силы) всей призмы смещения, то есть всей механической системы.

Когда массив нетрещиноватый, поверхность скольжения будет криволинейной и монотонной, в трещиноватом же массиве поверхность разрушения будет ломаной. Таким образом, задача по определению величины сцепления состоит в определении такой поверхности разрушения, с учетом поверхностей трещин, которая обеспечивала бы максимум обобщенной силы при обязательном выполнении условия предельного равновесия. Как видно из последней формулировки, задачи по определению сцепления трещиноватого массива и его предельных параметров совпадают, то есть фактически величина сцепления массива становится незначимой.

Как было показано выше, в случае прямолинейной поверхности ослабления, каковой можно считать трещину отдельности или разрушенный структурный блок, обобщенная сила выражается зависимостью:

$$\sum_{i=1}^n \left(\gamma h (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \varphi) - C (1 + \operatorname{tg}^2 \beta) \right) \Delta, \quad (4.6)$$

где n – количество трещин и структурных блоков, пересекаемых поверхностью скольжения; C – сцепление структурного блока или трещины, в зависимости от того, что будет разрушено в конкретной точке поверхности скольжения; φ – угол внутреннего трения структурного блока или угол трения по трещине, в зависимости от того, что будет разрушено в конкретной точке поверхности

скольжения; γ – объемный вес горных пород; h – глубина рассматриваемой точки; β – угол падения трещины или площадки среза структурного элемента в горном массиве; Δ – ширина отсека (средний размер структурного элемента).

Таким образом, пусть массив разбит на структурные блоки некоторым количеством систем трещин, необходимо определить наиболее слабую поверхность скольжения, совпадающую с поверхностями трещин и поверхностями разрушения структурных элементов. То есть требуем максимума выражения (4.6) при одновременном выполнении условия предельного равновесия. Другими словами, подбираем, например, такое значение объемного веса, при заданной высоте откоса, чтобы условие (4.6) было равно нулю.

Целевая функция в этом случае будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
 & \left(\gamma h_1 (\operatorname{tg} \beta'_1 - \operatorname{tg} \varphi') - C' (1 + \operatorname{tg}^2 \beta'_1) \right) \Delta \quad \left(\gamma h_2 (\operatorname{tg} \beta'_2 - \operatorname{tg} \varphi') - C' (1 + \operatorname{tg}^2 \beta'_2) \right) \Delta \\
 & \quad \text{или} \qquad \qquad \qquad + \qquad \qquad \qquad \text{или} \qquad \qquad \qquad + \dots + \\
 & \left(\gamma h_1 (\operatorname{tg} \beta_{к1} - \operatorname{tg} \varphi_k) - C_k (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_{к1}) \right) \Delta \quad \left(\gamma h_2 (\operatorname{tg} \beta_{к2} - \operatorname{tg} \varphi_k) - C_k (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_{к2}) \right) \Delta \\
 & \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad (4.7) \\
 & \left(\gamma h_n (\operatorname{tg} \beta'_n - \operatorname{tg} \varphi') - C' (1 + \operatorname{tg}^2 \beta'_n) \right) \Delta \\
 & + \qquad \qquad \qquad \text{или} \qquad \qquad \qquad \rightarrow \max \\
 & \left(\gamma h_n (\operatorname{tg} \beta_{kn} - \operatorname{tg} \varphi_k) - C_k (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_{kn}) \right) \Delta
 \end{aligned}$$

Условие предельного равновесия:

$$\sum_{i=1}^n \left(\gamma h_i (\operatorname{tg} \beta_i - \operatorname{tg} \varphi) - C (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_i) \right) \Delta = 0. \quad (4.8)$$

Углы падения трещин β' будем считать известными из полевых данных. Возможность разрушения структурного блока в массиве определяется минимальной глубиной. Однако прочность структурных блоков скальных массивов достаточно велика, о чем уже говорилось выше. С другой стороны, если прочность структурных блоков соизмерима с прочностью трещинных участков, то в этом случае коэффициент структурного ослабления будет принимать достаточно большие значения и в его обосновании теряется смысл.

Максимальное значение обобщенной силы в точке при определенном угле наклона площадки среза может не дать максимума целевой функции. Таким образом, необходимо установить некоторое правило для выбора той или иной площадки скольжения в точке, чтобы целевая функция была максимальной.

Выражения (4.7), (4.8) представляют собой задачу динамического программирования. Задача динамического программирования сводится к нахождению оптимальной стратегии посредством определения экстремума некоторого критерия оптимальности.

На рис. 4.1 представлена схема к решению задачи динамического программирования. Таким образом, на каждом $(i-1)$ -м шаге выбирают именно ту площадку среза (трещину отдельности либо площадку среза структурного элемента), которая, совместно с одной из площадок на i -м шаге, обеспечит экстремум (максимум) целевого выражения (4.6), (4.7) для двух шагов, то есть сумма обобщенных сил на двух участках будет максимальной [5].

Порядок построения поверхности разрушения и определения величины сцепления трещиноватого горного массива следующий. Вся расчетная область разбивается вертикальными линиями на n отсеков, ширину которых можно принять равной среднему размеру структурного элемента в горном массиве. В каждом отсеке вычисляют значения обобщенной силы для всех систем трещин и для критической площадки разрушения структурного блока. Для смежных отсеков составляются попарные суммы обобщенных сил с общим числом:

$$(r+1) \times (m+1),$$

где r, m – количество систем трещин в $(i-1)$ -м и i -м отсеках.

Полученные суммы сравниваются. Максимальное значение суммы будет указывать на систему трещин (или структурный блок) в $(i-1)$ -м отсеке, обеспечивающую экстремум целевому выражению (4.7). Повторяя описанную операцию, отстраивают всю ломаную поверхность разрушения. После построения поверхности скольжения появляется возможность оценить средневзвешенное значение величины сцепления вдоль поверхности разрушения, т. е. величину

сцепления массива. Массив при этом должен находиться в предельном равновесии.

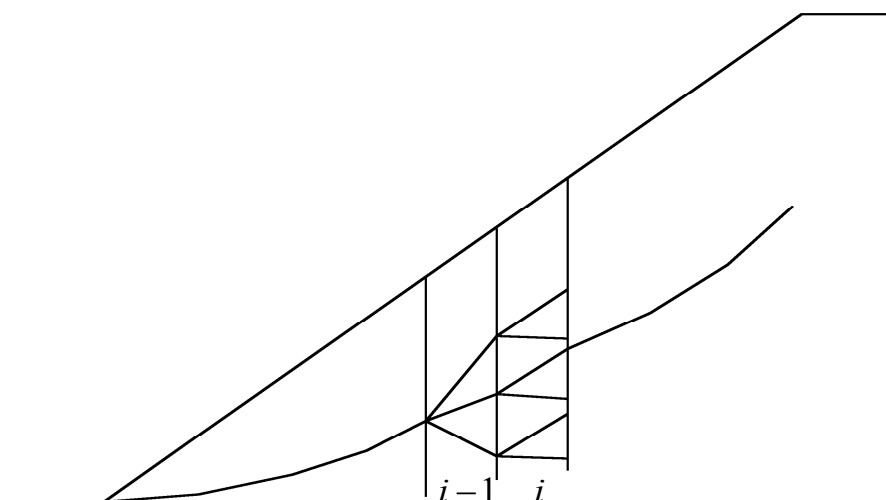


Рис. 4.1. Схема к решению задачи определения наиболее слабой поверхности скольжения в трещиноватом горном массиве

В заключение отметим, что метод динамического программирования уже применялся для нахождения потенциальной поверхности скольжения в однородном откосе [6, 7], однако критерий оптимизации не обосновывался и представлял собой сумму сдвигающих и удерживающих сил на площадку среза (критерий алгебраического сложения сил).

4.3. Нормативное значение коэффициента запаса устойчивости

Приведем некоторые определения.

Коэффициент устойчивости n – это коэффициент, полученный методом алгебраического сложения сил по произвольной поверхности скольжения. Его численное значение определяется отношением суммы всех удерживающих откос сил к сумме всех сил, его сдвигающих.

Коэффициент запаса устойчивости n_3 – это показатель, с помощью которого сдвигающая сила вдоль плоскости (в пределах элементарного блока)

скольжения уравнивается с предельным сопротивлением сдвигу. Данный коэффициент выражается методами предельного равновесия.

Необходимый или *нормативный* коэффициент запаса устойчивости n_n – это коэффициент, который вводится в прочностные характеристики массива (высоту откоса и др.). Под данным коэффициентом следует понимать специальный корректив, вводимый в расчет с целью исправить все возможные погрешности, которые мы могли сделать, выполняя данный расчет.

Ввиду значительной изменчивости и неполной изученности, с целью учета всех факторов, влияющих на устойчивость горного массива, в средневзвешенные показатели вводится нормативный коэффициент запаса устойчивости. Назначение оптимальной величины нормативного коэффициента запаса устойчивости имеет очень большое значение, так как эта величина является границей между экономической эффективностью работы карьера и безопасностью работы с точки зрения устойчивости откосов.

Теоретическому исследованию вопроса о запасе устойчивости посвящено много работ. Однако единого мнения о структуре нормативного коэффициента запаса и его величине при оценке устойчивости бортов карьеров до настоящего времени нет. Также остается открытым вопрос о том, в какие величины (параметры) необходимо вводить запас.

Выделяются два направления в назначении нормативного коэффициента запаса устойчивости.

Первое направление – это статистический метод определения нормативного коэффициента запаса в зависимости от ошибок исходных данных, входящих в расчеты. При этом значение общего запаса устойчивости вводится в прочностные характеристики массива пород. Большие работы в этом направлении проведены под руководством Г. Л. Фисенко (ВНИМИ), а также другими авторами.

Коэффициент устойчивости рассматривается как отношение удерживающих откос сил к сумме всех сил сдвигающих:

$$n = \frac{f \sum N + C_M L}{\sum T};$$

$$1 = \frac{\frac{f}{n_H} \sum N + \frac{C_M L}{n_H}}{\sum T},$$

где f – коэффициент внутреннего трения; $\sum N$, $\sum T$ – суммы нормальных и касательных сил, т; C_M – сцепление массива, т/м²; L – длина поверхности скольжения, м.

То есть устойчивое равновесие вдоль поверхности скольжения рассматривается как предельное равновесие с новыми прочностными характеристиками массива. Здесь необходимо отметить, что в качестве базового метода расчета принят метод алгебраического сложения сил. При использовании наиболее обоснованных методов – предельного равновесия, в которых коэффициент запаса не выражается в явном виде, необходимо производить сравнение его численного значения с нормативным коэффициентом запаса устойчивости.

Авторы некоторых работ, в которых рассматривается нормативный коэффициент запаса устойчивости, предлагают его обоснование на основе вероятностных методов. Здесь нормативный коэффициент запаса является не абсолютным критерием, а инструментом анализа и показывает чувствительность устойчивости массива к изменению тех или иных определяющих факторов.

Обобщая идеи Стрелецкого Н. С. [8], Н. К. Звонарев [9] представляет нормативный коэффициент запаса в виде произведения частных коэффициентов n_i . Из предположения, что каждый из них характеризуется нормальным законом распределения с плотностью

$$y_i = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a_i)^2}{2\sigma_i^2}},$$

где a_i – среднее значение n_i ; σ_i – стандарт или среднее квадратическое отклонение.

Определяется нормативный (общий) коэффициент запаса, который также будет характеризоваться нормальным законом распределения. При этом его среднее значение и среднеквадратическое отклонение

$$a_0 = a_1 \cdot a_2 \dots a_n;$$

$$\sigma_0 = \sqrt{a_2 \dots a_n \sigma_1^2 + \dots a_1 - \dots a_{n-1} \sigma_n^2}. \quad (4.9)$$

Правилами [10] для определения нормативного коэффициента запаса устойчивости рекомендуется использовать первую из формул (4.9). Причем частные значения a_i определяют следующие факторы:

– надежность определения механических характеристик пород (угла внутреннего трения и сцепления, а также угла трения и сцепления по естественным поверхностям ослабления);

– погрешности определения положения наиболее напряженной поверхности скольжения;

– способ учета гидрогеологических факторов;

– точность способа расчета устойчивости откосов.

Величину необходимого коэффициента запаса в зависимости от стадии освоения месторождения и способа получения исходных характеристик, входящих в расчеты, Правилами [10] предлагается определять, согласно табл. 4.1.

Таблица 4.1

Рекомендуемые величины нормативного коэффициента запаса устойчивости

Стадия освоения месторождения (степень надежности исходных данных)	<i>n</i>		Примечание
	нерабочий борт (срок стояния > 10 лет)	рабочий борт	
Проектирование (по данным бурения скважин и методом аналогий)	1,5	≥ 1,4	При трещиноватых, тектонически нарушенных вмещающих породах
	1,3	≥ 1,2	При слабых песчано-глинистых разностях
Эксплуатация (по данным изучения массива пород в обнажениях и анализу деформаций)	1,3	≥ 1,2	–
Ликвидация (постановка борта в предельное положение по данным длительных инструментальных наблюдений за состоянием откосов)	1,2	≥ 1,1	–

Кроме того, немаловажную роль при выборе нормативного коэффициента запаса играет наличие на земной поверхности в пределах призмы возможного обрушения охраняемых зданий и сооружений.

В практических расчетах математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нормативного коэффициента запаса устойчивости необходимо рассматривать как:

$$\begin{aligned} \bar{n}_H &= \Psi(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n); \\ \sigma_{n_H} &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \bar{x}_i} \right)^2 \sigma_{\bar{x}_i}^2}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$ – математические ожидания случайных аргументов; $\sigma_{\bar{x}_i}$ – средние квадратические отклонения случайных аргументов.

Очевидно, что когда откос находится в предельном состоянии $\bar{n}_H = 1$, а нормативный коэффициент выражается зависимостью

$$n_H = 1 + t_b m,$$

где t_b – коэффициент, соответствующий заданной надежности b ; m – общая погрешность расчетных условий, ее отличие от $\sigma_{\bar{x}_i}$ заключается в том, что в нее могут также входить ошибки некоторых факторов, не входящих в выражение для \bar{n}_H . $m = \sqrt{\sigma_{n_H}^2 + \sum m_i^2}$.

Заметим, что некоторые авторы предлагают вводить нормативные коэффициенты запаса отдельно для трения и сцепления:

$$\begin{aligned} C_p &= C_m - l_C; \\ \varphi_p &= \varphi - l_\varphi, \end{aligned}$$

где l_C, l_φ – половина доверительного интервала соответственно для сцепления и трения.

Мнения о величинах t_b и m у разных исследователей расходятся. Звонарев Н. К. считает, что необходимо выбирать ту надежность, при которой разность между возможной экономией от уменьшения объема вскрыши и возможными

расходами по ликвидации последствий оползней будет наибольшей и рекомендует величины нормативного коэффициента запаса (табл. 4.2).

В. И. Зобнин [11] коэффициент надежности определяет как функцию, зависящую от категории борта и срока его стояния:

$$t_b = ab,$$

где a – коэффициент, учитывающий категорию борта; b – коэффициент, учитывающий продолжительность стояния борта.

Величину нормативного запаса в зависимости от надежности Н. К. Звонарев рекомендует определять согласно табл. 4.2.

Таблица 4.2

Значения надежности и величины запаса по Н. К. Звонареву

Наименование борта	Надежность, %	Величина нормативного коэффициента запаса
Рабочий борт	87	$a_o + 1,12m$
Борта погашения	91	$a_o + 1,32m$
Нерабочие борта при автомобильном транспорте	95	$a_o + 1,60m$
Нерабочие борта при железнодорожном транспорте	98	$a_o + 1,80m$

Арсентьев А. И. [12] отмечает, что рациональный уровень риска должен устанавливаться исходя из взаимодействия оценки экономических и психологических (конъюнктурных) последствий риска. Для обоснования риска он вводит понятие функции опасения и рассматривает четыре отношения к риску – смелое, равное, осторожное, никакого риска. Каждое отношение описывается своей функцией опасения, которая в конечном итоге и определяет рациональный уровень риска.

Как отмечается в статье [13], “требуемый уровень надежности зависит от ответственности сооружения и определяется в основном из опыта или методом экспертных оценок”. В. И. Речицкий, например, рекомендует для скальных оснований плотин уровень надежности 0,984 – 0,997.

Различия в определении общей погрешности m заключается в количестве учтенных при ее расчете случайных факторов.

Отдельного рассмотрения требует методика обоснования нормативного коэффициента запаса устойчивости, предложенная Б. Д. Полововым [14, 15].

Вычисляется общая вероятность деформирования откоса по формуле

$$P_d = 1 - (1 - P_1)(1 - P_2)(1 - P_3) \dots,$$

где P_1 – вероятность деформирования горных пород вследствие случайного характера физико-технических и структурных параметров прибортового массива; P_2 – вероятность деформирования горных пород по фактору локальной обводненности; P_3 – вероятность деформирования горных пород, вызванная необнаруженными поверхностями ослабления.

Вероятность P_1 выражается отношением

$$P_1(n_n < 1) = \frac{1 - \Phi\left(\frac{1 - \bar{n}_n}{\sigma_{n_n}}\right)}{2}, \quad (4.11)$$

где Φ – символ интеграла вероятности.

Значения нормативного коэффициента запаса и его ошибки в отношении (4.11) определяются формулами (4.10).

Варьированием случайных входных параметров добиваются минимума одной из нижеследующих целевых функций, которые отражают важные экономические и социальные критерии устойчивости откосов:

$$P_d \sum Y + \sum Z \rightarrow \min;$$

$$(1 - P_n) P_d \sum Y + P_n P_d \sum Z + Z_n \rightarrow \min,$$

где $\sum Y$ – ущерб от деформаций карьерных откосов; $\sum Z$ – затраты на противодеформационные мероприятия; P_n – надежность контроля за состоянием откосов; Z_n – затраты на контроль.

Отметим, что все рассмотренные выше методики основаны на нормальном законе распределения.

Развивая идеи Б. Д. Половова, А. А. Смирнов [16] показывает, что задачи устойчивости откосов в условиях риска могут решаться методом Монте-Карло. Помимо этого указывается на возможность решения задачи при произвольных законах распределения входных случайных аргументов. Это, например, достигается разложением функции случайных аргументов в ряд Грамма-Шарлье, реализующий произвольный закон распределения.

Второе направление. Отличительной особенностью второго направления является попытка вводить нормативный коэффициент запаса устойчивости непосредственно в параметры откоса – высоту, угол наклона, величину заложения и т. п.

Окатов Р. П. [17], ссылаясь на С. И. Попова и А. М. Демина, утверждает: “Совершенно очевидно, что предельная высота откоса с учетом нормативного коэффициента запаса определится как”:

$$h_3 = \frac{h_p}{n_H}.$$

В. Е. Коновалов и В. А. Гордеев [18] рассматривают случайную величину – индекс устойчивости, которая численно равна отношению предельно допустимой высоты откоса к высоте откоса, для которой рассчитывается вероятность обрушения. Предельная высота определяется формулой Токмурзина О. Т. для однородных откосов. Описывая индекс устойчивости логнормальным законом распределения, они определяют вероятность обрушения откоса в зависимости от его величины (например, когда индекс устойчивости равен 1, вероятность обрушения равна 0,5). Дисперсия распределения оценивается формулой ошибки функции случайных коррелированных аргументов.

Анализируя рассмотренные методы назначения нормативного коэффициента запаса устойчивости, констатируем, что наиболее обоснованной из них является методика, предложенная Б. Д. Полововым. Она позволяет в результате вероятностного анализа принять оптимальное техническое решение.

На сегодняшний день практику введения запаса устойчивости (прочности) в механические характеристики пород откоса можно считать общепринятой.

Однако правомерность введения одинаковых значений нормативного коэффициента запаса в сцепление и коэффициент внутреннего трения и вообще правомерность введения запаса в коэффициент внутреннего трения, нужно поставить под сомнение ввиду следующих причин:

1. Различная точность определения механических характеристик пород откоса.

2. Неодинаковое участие в обеспечении устойчивости сцепления и угла внутреннего трения.

3. При введении запаса в коэффициент внутреннего трения изменяется не только расчетное значение, но также форма призмы смещения. Между тем в Правилах [10] указывается: “При построении поверхности скольжения в исходные характеристики прочности пород предварительно вводится коэффициент запаса”.

4. При введении запаса в величину трения для обводненных откосов неопределенно занижается значение негативного влияния гидростатического давления.

В работе [19] автором показано, что при различных точностях определения основных прочностных характеристик горных пород, одной и той же вероятности разрушения откоса соответствует множество пар нормативных коэффициентов запаса устойчивости, вводимых в величины сцепления и коэффициент внутреннего трения, и, как следствие, – различные значения предельного значения угла откоса. Таким образом, можно подобрать такие значения коэффициентов запаса, вводимых в сцепление и коэффициент внутреннего трения, чтобы угол откоса был максимален, при этом вероятность (риск) разрушения останется постоянной. Данный факт подтверждает справедливость высказываний, изложенных в пунктах 1, 2.

Утверждения, приведенные в пунктах 3, 4, и вовсе подтверждают неправомерность введения нормативного коэффициента запаса устойчивости в величину коэффициента внутреннего трения.

Таким образом, нормативный коэффициент запаса устойчивости должен вводиться только в величину сцепления. С другой стороны, в инженерной практике запас прочности (устойчивости) вводится либо в предельные прочностные характеристики материала, либо в величины внешних нагрузок. В геомеханике, и, в частности, при оценке устойчивости бортов карьеров активной (разрушающей) силой является сила тяжести (или тектонические силы, которые также выражаются через силу тяжести), определяемая объемным весом горных пород, таким образом, запас устойчивости может быть также введен в величину объемного веса горных пород.

Если теперь учесть, что величина предельного угла откоса, например, для однородных и изотропных откосов является функцией соотношения $C/\gamma H$, то становится очевидным, что запас может быть совершенно равнозначно введен в сцепление, объемный вес и даже в высоту откоса.

Выводы по главе 4

Таким образом, при развитой трещиноватости, придающей массиву структуру кирпичной кладки, рекомендуется производить моделирование разрушения массива по системам трещин с привлечением аппарата динамического программирования и определением поверхности разрушения. Данную методику можно рекомендовать и при наличии трещин большого протяжения (поверхностей ослабления). В этом случае порядок расчета и построения поверхности разрушения остается неизменным.

Для оценочного определения величины сцепления массива трещиноватых скальных пород можно воспользоваться зависимостями (4.4) и (4.5). Как следует из зависимости (4.5), при наличии в массиве трещин с углом падения, превышающим угол трения по трещине на $10-15^\circ$, сцепление массива полностью определяется сцеплением по трещине отдельности. Основной сложностью при использовании формулы (4.4) является определение коэффициента a' . Дело в том, что для его определения вводится понятие нормально секущей и кососекущей трещиноватости. В широком смысле нормально секущая трещиноватость перпендикулярна и параллельна главным напряжениям, но направление действия главных напряжений в массиве установить очень сложно, кроме того, их ориентировка меняется от точки к точке. Поэтому задача по определению коэффициента a' и вообще величины сцепления массива приобретает субъективный характер.

Нормативный коэффициент запаса устойчивости необходимо вводить только в величину сцепления массива или объемного веса горных пород. Значение нормативного коэффициента должно устанавливаться исходя из надежности исходных данных, ответственности сооружения и минимизировать критерий, отражающий социально-экономические показатели эксплуатации сооружения.

Список литературы к главе 4

1. Ким, Д. Н. Исследование структурного ослабления трещиноватых пород моделированием прочностных свойств в лабораторных условиях / Д. Н. Ким // Труды ИГД. Вопросы исследования горного давления и сдвижения пород. – Свердловск, 1963. – С. 97 – 106.
2. Фисенко, Г. Л. Устойчивость бортов карьеров и отвалов / Г. Л. Фисенко. – М.: Недра, 1965. – 378 с.
3. Жабко, А. В. Исследование закономерностей, определяющих геометрию поверхности скольжения в откосах и расчетные характеристики, в изотропных горных массивах: дис. ... канд. техн. наук / А. В. Жабко; УГГУ. – Екатеринбург, 2009. – 152 с.
4. Жабко, А. В. Вероятностная трактовка величины сцепления трещиноватых горных массивов / А. В. Жабко // Маркшейдерия и недропользование. – 2011. – № 5. – С. 37-39.
5. Вентцель, Е. С. Введение в исследование операций / Е. С. Вентцель. – М.: Советское радио, 1964.
6. Попов, С. И. Оценка устойчивости бортов карьеров методом динамического программирования / С. И. Попов, М. А. Резников // Изв. вузов. Горный журнал. – 1973. – №8. – С. 56-58.
7. Резников, М. А. Определение коэффициента запаса устойчивости откосов горных пород / М. А. Резников, Б. А. Твердохлебов // Изв. вузов. Горный журнал. – 1976. – №3. – С. 49-51.
8. Избранные труды / Е. И. Беленя, Н. Н. Стрелецкий, Н. П. Мельников и др. – М.: Стройиздат, 1975. – 422 с.
9. Звонарев, Н. К. Методика обоснования величины коэффициента запаса устойчивости бортов карьеров / Н. К. Звонарев // Сб. трудов ВНИМИ. – 1964. – Вып. 52. – С. 258 – 266.
10. Правила обеспечения устойчивости откосов на угольных разрезах: утв. Госгортехнадзором РФ 16.03.98. – СПб.: ГосНИИ горной геомеханики и маркшейдерского дела, 1998. – 208 с.

11. Зобнин, В. И. О критериях оценки устойчивости откосов / В. И. Зобнин // Устойчивость и технология формирования бортов и отвалов на глубоких карьерах. сб. науч. трудов. / ИГД МЧМ СССР. – Свердловск, 1987. – Вып. 83. – С. 48-55.
12. Арсентьев, А. И. Установление уровня риска при определении производительности карьера / А. И. Арсентьев // Изв. вузов. Горный журнал. – 1975. – №12. – С. 10-15.
13. Пустовойтова, Т. К. Совершенствование методов расчета устойчивости откосов / Т. К. Пустовойтова, А. М. Мочалов, А. Н. Гурин // Сб. научных трудов “70 лет ВНИМИ”. – СПб: ВНИМИ, 1999.
14. Половов, Б. Д. Вероятностный расчет устойчивости откосов / Б. Д. Половов // Устойчивость и технология формирования бортов и отвалов на глубоких карьерах: сб. науч. трудов / ИГД МЧМ СССР. – Свердловск, 1987. – Вып. 83. – С. 22-27.
15. Половов, Б. Д. Решение задач устойчивости откосов в условиях риска / Б. Д. Половов // Изв. вузов. Горный журнал. – 1981. - №4. – С. 30-33.
16. Смирнов, А. А. Расчет устойчивости откосов и подпорных стен котлованов городских подземных сооружений в условиях риска: дис. ... канд. техн. наук / А. А. Смирнов. – Екатеринбург: УГГУ, 2005. – 176 с.
17. Окатов, Р. П. Аналитическое определение и учет коэффициента запаса при оценке устойчивости откосов скальных пород / Р. П. Окатов // Изв. вузов. Горный журнал. – 1978. – №1. – С. 41-48.
18. Коновалов, В. Е. Расчет вероятности обрушения однородного откоса / В. Е. Коновалов, В. А. Гордеев // Изв. вузов. Горный журнал. – 1983. - №2. – С. 28-31.
19. Жабко, А. В. Определение коэффициента запаса устойчивости откосов исходя из оптимизации их параметров / А. В. Жабко // Изв. УГГУ. Материалы Уральской горнопромышленной декады, 3 – 13 апреля 2006 г. – Екатеринбург: УГГУ, 2006. – С. 26 – 27.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В монографии приводится и предлагается к использованию принципиально новая теория расчета устойчивости откосов и оснований, разработанная автором и основанная на фундаментальных теоремах и принципах механики, таких как принцип возможных перемещений Лагранжа, принцип наименьшего принуждения Гаусса, теорема наименьшей потерянной работы Остроградского и т. д. Основой математического аппарата предлагаемой теории являются вариационное, дифференциальное и интегральное исчисления. На основе теории разработаны методики расчета устойчивости откосов практически для условий любой сложности: однородный откос, неоднородный откос, анизотропный откос, обводненный откос, откос на слабом наклонном контакте, откос на слабом наклонном основании, подработанный и закарстованный откос, нагруженный откос, откос несвязных пород на различном основании, устойчивость откосов в поле действия тектонических и сейсмических напряжений. Получен и проанализирован аналитический критерий прочности (разрушения) горных пород.

Получены зависимости, определяющие начальное напряженное состояние нетронутого горного массива с учетом пластической (а не только упругой, по А. Н. Диннику) составляющей гравитационных напряжений. Таким образом, предлагается новый подход к обоснованию величины горизонтального поля гравитационных напряжений. Предлагается аналитический метод определения угловых параметров процесса сдвижения (углы разрыва, сдвижения, граничные), основанный на определении положения границы областей сдвижения с разрывом сплошности горного массива (собственно сдвижений) и деформаций массива без разрыва сплошности (собственно деформаций). Тем самым достигается возможность постановки граничных условий. Аналитически доказана стабильность углов разрыва с глубиной.

Получены зависимости, определяющие нагрузку на крепь горизонтальных горных выработок. Обоснован и исследован механизм формирования нагрузки на целики. Исследовано влияние на величину нагрузки физико-механических свойств горных массивов, угла падения залежи, глубины и степени подработки.

Обоснован механизм увеличения вертикального горного давления на горные выработки, конструктивные элементы систем разработок (целики) в поле действия тектонических (активных) напряжений. Получены конкретные интервалы влияния и степень влияния тектонических напряжений на величину вертикального горного давления.

Рассмотрена проблематика обоснования величины сцепления трещиноватых горных массивов, и на основе аппарата динамического программирования предлагается методика по установлению поверхности разрушения в трещиноватом массиве и как следствие – определения величины сцепления. Рассмотрен круг вопросов, связанных с обоснованием нормативного значения коэффициента запаса устойчивости (прочности). Доказывается неправомерность введения нормативного запаса в величину коэффициента трения.

Основным достижением работы автор считает то, что ему удалось исследовать достаточно широкий круг вопросов (геомеханических явлений) с единых позиций, с учетом того, что при исследовании явлений автор опирался лишь на строгие теоретические положения. Другими словами, удалось увязать между собой и объяснить механизм весьма различных геомеханических процессов и явлений (устойчивость откосов, сдвигание горных пород, горное давление, разрушение пород) в рамках единой теории. Еще одним отличием данной работы является то, что автор не ограничивался лишь качественным анализом явлений, и, несмотря на достаточно сложные математические выкладки, все методики доведены до расчетных формул и практического применения.

Автор будет весьма благодарен за любую оценку работы и отнесется с полным вниманием к вопросам, замечаниям и пожеланиям по содержанию данной монографии. Вопросы и пожелания можно отправлять на электронный адрес: zhabkoav@mail.ru.

Научное издание

Андрей Викторович Жабко

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕХАНИКА

Научная монография

Редактор изд-ва *Л. В. Устьянцева*

Компьютерная верстка *Н. Л. Сайгиной*

Дизайн обложки *А. В. Жабко*

Подписано в печать 20.04.2016 г. Формат 60 × 84 1/16.

Бумага офсетная. Печать на ризографе.

Печ. л. 14,0. Уч.-изд. л. 11,25. Тираж 100. Заказ №

Издательство УГГУ

620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30

Уральский государственный горный университет

Отпечатано с оригинал-макета

в лаборатории множительной техники УГГУ