

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОУ ВПО «СИБИРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ГЕОДЕЗИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ»

Н.А. Телеганов
А.В. Елагин

**ВЫСШАЯ ГЕОДЕЗИЯ
И ОСНОВЫ КООРДИНАТНО-ВРЕМЕННЫХ СИСТЕМ**

Рекомендовано СибРУМЦ высшего профессионального образования для
межвузовского использования в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по направлениям подготовки 650300 – «Геодезия»
специальности 300500 – «Космическая геодезия»

Новосибирск
2004

УДК 528.2/.3+530.12
С 26

Рецензенты:
Доктор технических наук, профессор
Сибирского государственного университета путей сообщения
А.А. Визгин
Кандидат технических наук, доцент
Сибирской государственной геодезической академии
Б.Т. Мазуров

Телеганов Н.А., Елагин А.В.

С 26 Высшая геодезия и основы координатно-временных систем:
Учебное пособие. – Новосибирск: СГГА, 2004. – 216 с.

ISBN 5-87693-154-3

Учебное пособие написано в соответствии с Государственным образовательным стандартом 2000 г. для направления подготовки дипломированных специалистов 650300 – «Геодезия» специальности 300500 – «Космическая геодезия». Представлены основы трёх классических разделов высшей геодезии (основные геодезические работы, сфероидическая геодезия, теоретическая геодезия) и новый раздел – основы координатно-временных систем.

Печатается по решению редакционно-издательского совета СГГА

УДК 528.2/.3+530.12

ISBN 5-87693-154-3

© Сибирская государственная геодезическая академия (СГГА), 2004
© Н.А. Телеганов, А.В. Елагин, 2004

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	6
1. Основные геодезические работы	12
1.1. Опорные геодезические сети и их назначение.....	12
1.2. Методы создания геодезических сетей	13
1.3. Измерение горизонтальных углов и направлений	18
1.3.1. Способ круговых приёмов	19
1.3.2. Способ измерения углов во всех комбинациях.....	21
1.3.3. Поверки и исследования теодолитов	23
1.4. Определение элементов приведения	24
1.4.1. Приведение к центрам пунктов измеренных расстояний и горизонтальных направлений	25
1.4.2. Приведение к центрам пунктов спутниковых измерений	26
1.5. Измерение превышений.....	29
1.5.1. Геометрическое нивелирование.....	29
1.5.2. Тригонометрическое нивелирование	35
1.6. Методы уравнивания геодезических сетей.....	38
1.6.1. Общие сведения	38
1.6.2. Параметрический метод уравнивания	40
1.6.3. Коррелятный метод уравнивания	44
1.6.4. Пример совместного уравнивания координатной космической и наземной геодезических сетей параметрическим методом.....	47
2. Сфероидическая геодезия.....	52
2.1. Параметры земного эллипсоида	52
2.2. Системы координат, используемые в высшей геодезии	53
2.3. Связь систем координат	58
2.3.1. Связь координат меридианного эллипса с приведённой широтой.....	58
2.3.2. Связь геодезической, приведенной и геоцентрической широт	59
2.3.3. Связь координат меридианного эллипса с различными системами широт	60
2.3.4. Связь координат меридианного эллипса с пространственными прямоугольными координатами	61
2.3.5. Связь пространственных геодезических координат.....	61
2.3.6. В, L, Н с пространственными прямоугольными координатами X, Y, Z	61
2.3.7. Связь двух систем прямоугольных пространственных координат	63
2.3.8. Связь геодезических координат референчного эллипсоида с геодезическими координатами общеземного эллипсоида.....	66
2.4. Длины дуг меридианов и параллелей	67
2.4.1. Меридианы	68
2.4.2. Параллели	75
2.5. Радиусы кривизны нормальных сечений.....	76

2.6.	Средний радиус кривизны.....	79
2.7.	Площадь и размеры рамок сфероидической трапеции	80
2.8.	Двойственность нормальных сечений	84
2.9.	Решение сфероидических треугольников	86
2.10.	Дифференциальные уравнения геодезической линии.....	87
2.11.	Решение главной геодезической задачи	89
2.11.1.	Общие сведения	89
2.11.2.	Способ решения по начальным аргументам	91
2.11.3.	Способ решения по средним аргументам	92
2.11.4.	Способ Бесселя	96
2.11.5.	Пространственная прямая геодезическая задача.....	103
2.11.6.	Пространственная обратная геодезическая задача.....	105
2.12.	Проекция Гаусса – Крюгера	106
2.12.1.	Общие сведения	106
2.12.2.	Преобразование геодезических координат плоские прямоугольные координаты	111
2.12.3.	Преобразование плоских прямоугольных координат в геодезические координаты	115
2.12.4.	Сближение меридианов на плоскости	118
2.12.5.	Масштаб изображения.....	120
2.12.6.	Редуцирование расстояний и направлений с эллипсоида на плоскость	123
2.12.7.	Порядок проектирования геодезических сетей с эллипсоида на плоскость	126
2.12.8.	Преобразование прямоугольных координат Гаусса – Крюгера из одной зоны в другую	129
3.	Некоторые вопросы теоретической геодезии	130
3.1.	Общие сведения об отклонениях отвесных линий.....	130
3.2.	Способы определения отклонений отвесных линий.....	136
3.2.1.	Гравиметрический способ.....	136
3.2.2.	Астрономо-геодезический способ.....	136
3.2.3.	Астрономо-гравиметрический способ.....	138
3.2.4.	Определение УОЛ на морской поверхности по альтиметрическим измерениям	140
3.2.5.	Определение УОЛ по GPS-измерениям.....	142
3.3.	Системы высот.....	144
3.3.1.	Общие сведения	144
3.3.2.	Ортометрическая система высот	148
3.3.3.	Нормальная система высот	149
3.3.4.	Вывод формулы вычисления разности нормальных высот....	151
3.3.5.	Динамическая система высот	153
3.3.6.	Формулы связи систем высот	154
3.4.	Методы определения высот квазигеоида.....	155
3.4.1.	Астрономо-геодезический метод	156
3.4.2.	Астрономо-гравиметрический метод.....	159

3.4.3.	Определение высот геоида по спутниковым альтиметрическим измерениям	160
3.5.	Редуцирование геодезических и астрономических измерений с физической поверхности Земли на эллипсоид	162
3.5.1.	Редуцирование астрономических измерений	163
3.5.2.	Редуцирование горизонтальных углов и направлений	165
3.5.3.	Редуцирование измеренных расстояний.....	168
3.6.	Фундаментальные геодезические постоянные	169
3.7.	Геодезические методы изучения движений земной коры	172
4.	Основы координатно-временных систем	176
4.1.	Системы отсчёта и принципы инвариантности законов природы	176
4.2.	Преобразования Галилея	176
4.3.	Относительность одновременности	178
4.4.	Преобразования Лоренца.....	179
4.5.	Временеподобные и пространственноподобные интервалы	183
4.6.	Собственное время.....	184
4.7.	Четырёхмерные скорости и ускорения	185
4.8.	Тензоры и элементы тензорной алгебры	185
4.8.1.	Типы тензоров	186
4.8.2.	Элементы тензорной алгебры.....	187
4.9.	Релятивистские действия и функция Лагранжа	188
4.10.	Сведения из общей теории относительности	189
4.10.1.	Принцип эквивалентности	189
4.10.2.	Дифференцирование тензоров.....	191
4.10.3.	Связь символов Кристоффеля с метрическим тензором	193
4.10.4.	Движение частицы в гравитационном поле	194
4.10.5.	Тензор кривизны	196
4.10.6.	Тензор энергии-импульса.....	198
4.10.7.	Уравнения тяготения Эйнштейна	199
4.10.8.	Центрально-симметричное гравитационное поле.....	201
4.11.	Приложение теории пространственно-временных преобразований в астрономии и геодезии	204
4.11.1.	Звёздная аберрация	204
4.11.2.	Шкалы времени	207
4.11.3.	Временная задержка сигнала в лазерной локации ИСЗ.....	209
4.11.4.	Доплеровское смещение частоты	211
4.11.5.	Релятивистские уравнения движения ИСЗ	212
4.11.6.	Релятивистские прецессии.....	213
	Список литературы.....	215

ВВЕДЕНИЕ

Краткая история развития учения о фигуре Земли.

Предмет и задачи высшей геодезии

Вопрос о форме и размерах Земли был поставлен человечеством ещё на ранней стадии своего культурного развития. Началом изучения фигуры Земли принято считать первые попытки людей научно обосновать её шарообразность.

Мысль о шарообразности Земли впервые была высказана древнегреческим математиком Пифагором в VI в. до н. э. Однако первые научные доказательства были приведены лишь в IV в. до н. э. знаменитым философом Греции Аристотелем. Например, одним из доказательств являлся тот факт, что во время лунных затмений тень от Земли имела форму части окружности.

Первое исторически достоверное определение размера радиуса Земли принадлежит также древнегреческому ученому Эратосфену (III в. до н. э.). Способ, предложенный Эратосфеном (рис. В.1), сохраняет своё значение и сейчас.

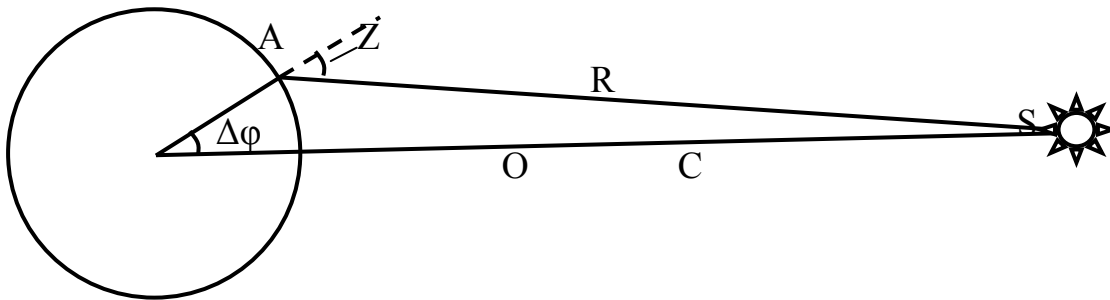


Рис. В.1. Способ Эратосфена

Полагая, что Земля шар, Эратосфен измерил зенитное расстояние Солнца в Александрии в полдень того дня, когда в другом городе Египта Сиене (ныне Асуан) Солнце находилось в зените и, принимая, что Солнце «бесконечно» удалено от Земли, т. е. линии AS и CS параллельны, а следовательно $\Delta\phi \approx Z$, он вычислил радиус по формуле

$$R = \frac{D}{Z} \rho.$$

При этом расстояние D между Александрией и Сиеной Эратосфен не измерял. Он вычислил его косвенно на основании сведений, полученных от купцов о продолжительности перехода караванов из одного города в другой и скорости движения.

Хотя точность определения радиуса Земли Эратосфеном относительно низкая (по сравнению с современными данными погрешность составляет около 100 км), однако принцип, положенный им в основу (измерение длины дуги меридиана и разности широт по концам её), остается неизменным при астрономо-геодезическом методе изучения фигуры нашей планеты.

Поверхность Земли мало отличается от поверхности сферы, поэтому мнение о том, что Земля – шар просуществовало в науке более двадцати столетий, вплоть до конца XVII в.

Новая эпоха в изучении фигуры Земли началась после открытия гениальным Исааком Ньютоном закона всемирного тяготения.

Исходя из предположения, что наша планета когда-то находилась в огненно-жидком состоянии, Ньютон теоретически пришел к выводу, что Земля должна иметь форму эллипсоида, сжатого по направлению полюсов. Для проверки этого утверждения Французская Академия наук организовала в 1735 – 1736 гг. две экспедиции для измерения двух одноградусных дуг меридианов под разными широтами. Одна экспедиция была направлена в Перу (экваториальная зона), а другая – в Лапландию (ныне Финляндия, приполярная зона). Результаты работ экспедиций показали, что длина дуги меридиана в один градус в Лапландии больше, чем в Перу. Это полностью подтвердило справедливость теории Ньютона.

После установления эллипсоидальности земной поверхности во многих странах мира получили широкое распространение геодезические работы, направленные на определение размеров земного эллипсоида. В дальнейшем эти работы получили специальное название – «градусные измерения».

Характерной особенностью этого периода явилось то, что помимо чисто геометрического метода изучения фигуры Земли (градусных измерений), получил развитие физический метод, основанный на гравиметрических измерениях ускорений силы тяжести.

В принципе, геометрический метод остался тем же самым, за исключением того, что раньше размеры Земли определялись одним параметром – радиусом, теперь же для установления формы и размеров Земли как эллипсоида, необходимо знать два параметра. Например: большая – a и малая – b полуоси или полуось и какая-то другая характеристика формы эллипсоида (сжатие – α , эксцентриситет – e и др.).

Математическая сущность геометрического метода определения параметров эллипсоида вытекает из формул длин дуг меридианов S_m и длин дуг параллелей S_p

$$S_m = \frac{a(1 - e^2)(B_2 - B_1)}{(1 - e^2 \sin^2 B_{cp})^{3/2}},$$

$$S_p = \frac{a \cos B(L_2 - L_1)}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{1/2}}.$$

Измеряя длины дуг меридианов и параллелей, а также имея по концам их широты B_1 , B_2 и долготы L_1 , L_2 , из решения, как минимум, двух уравнений находят параметры a и e^2 эллипсоида.

В период с конца XVIII в. до конца XIX в. многократно выполнялось определение параметров эллипсоида в разных странах (Даламбер – 1800 г., Бессель – 1841 г., Кларк – 1866 г. и др.). Однако сравнение одноименных параметров различных определений показало, что их разности значительно превосходят величины, которые могли быть объяснены погрешностями измерений длин дуг, широт и долгот.

Дальнейший анализ результатов градусных измерений привел ученых к выводу о том, что земная поверхность не является строго поверхностью эллипсоида, а представляет собой более сложную в геометрическом отношении поверхность, и эллипсоид может представлять Землю лишь с определенной степенью приближения.

Всё это привело к тому, что в 1872 г. по предложению немецкого геофизика Листинга за фигуру Земли стали принимать поверхность геоида.

Геоид – это тело, ограниченное уровенной поверхностью, совпадающей на морях и океанах с невозмущенной поверхностью воды и продолженной под материками.

Таким образом, с конца XIX в. началась эпоха следующего этапа изучения фигуры Земли. Все усилия ученых геодезистов теперь были направлены на определение поверхности геоида как фигуры Земли.

Но как показали в дальнейшем исследования известного советского ученого Михаила Сергеевича Молоденского, положение геоида под континентами, без знания распределения плотностей масс в теле Земли, строго определить нельзя.

В связи с этим Молоденский предложил отказаться от изыскания поверхности геоида, а определять действительную, реально существующую физическую поверхность Земли. Для этого, им была разработана теория, на основании которой физическая поверхность Земли строго определяется без привлечения каких-либо гипотез о распределении масс в теле Земли, лишь по результатам геодезических, астрономических и гравиметрических измерений.

В теории Молоденского вводится вспомогательная поверхность – поверхность *квазигеоида*, совпадающая с геоидом на морях и океанах и мало отличающаяся от поверхности геоида на суше (в равнинных районах отличие составляет несколько сантиметров, в горах не превышает 2 метров). Поверхность квазигеоида играет роль «уровня моря», и от неё ведётся счет топографических высот точек физической поверхности Земли. Она определяется строго на основании только фактических измерений.

Таким образом, в настоящее время *основной задачей геодезии* является изучение реально существующей физической поверхности Земли и её внешнего гравитационного поля. Эта задача решается на основе математической обработки результатов спутниковых, астрономических, геодезических и гравиметрических измерений.

Практически задача изучения фигуры Земли сводится к определению координат точек её поверхности в единой, общей для всей Земли, системе координат. Отсюда вытекает *практическая задача* высшей геодезии – построение опорных геодезических сетей на поверхности Земли и определение координат её точек. Программы, методы построения геодезических сетей на земной поверхности, способы измерений, а также математическая обработка измерений рассматриваются в первой части высшей геодезии, которую называют «практической частью высшей геодезии» или «основными геодезическими работами».

По измеренным на земной поверхности углам и расстояниям, к сожалению, вычислить с высокой точностью координаты точек невозможно, так как неизвестен вид сложной физической поверхности Земли (форма, размеры, уравнение поверхности). Целью измерений и является определение этой поверхности. Поэтому в геодезии при решении задач, связанных с математической обработкой наземных измерений, вводится некоторая вспомогательная координатная поверхность, которая, с одной стороны, должна быть наиболее близкой по форме и размерам к действительной поверхности Земли, а с другой стороны – иметь достаточно простой математический вид, чтобы без больших затруднений выполнять на ней математическую обработку измерений.

В качестве такой поверхности принята поверхность эллипсоида вращения с небольшим сжатием. Поверхность эллипсоида, предназначенная для вычисления координат точек, является координатной поверхностью, а сам эллипсоид называется земным эллипсоидом.

Если земной эллипсоид наилучшим образом представляет собой всю Землю в целом, то такой эллипсоид называется *общим земным эллипсоидом*, и определяется он с соблюдением следующих условий:

- совпадение центра эллипсоида с центром масс Земли, и плоскости его экватора с плоскостью земного экватора;
- сумма квадратов уклонений высот квазигеоида (геоида) от поверхности эллипсоида должна быть минимальной.

В некоторых странах, в том числе и в России, для математической обработки геодезических измерений используют эллипсоиды, параметры которых получены по результатам измерений, охватывающих территорию одного или нескольких прилегающих государств. Такие эллипсоиды называются *референц-эллипсоидами*.

На территории государства, где выполнены измерения, сумма квадратов уклонений квазигеоида от референц-эллипсоида будет меньше чем сумма квадратов уклонений от общего земного эллипсоида, поэтому иногда целесообразно использовать для математической обработки наземных измерений именно референц-эллипсоид.

В настоящее время геодезические измерения в России обрабатываются на референц-эллипсоиде Красовского, параметры которого были получены в ЦНИИГАиКе в 1940 г. из обработки астрономо-геодезических измерений, произведенных в СССР, США и ряде стран Западной Европы.

Таким образом, проблема изучения фигуры Земли по наземным измерениям как бы распадается на две составные части. Первая часть – определение формы, размеров земного эллипсоида и его ориентирование в теле Земли, а вторая часть – изучение отступления физической поверхности Земли от поверхности принятого эллипсоида.

На рис. В.2. дана геометрическая интерпретация проблемы изучения фигуры Земли по наземным данным. Построив на физической поверхности Земли опорные геодезические сети и спроектировав измерения на эллипсоид по нормали Q_n к нему, можно, используя формулы связи координат точек

поверхности эллипсоида с измеренными величинами (сторонами, углами) геодезических сетей, вычислить координаты точки Q' . А так как точки Q' и Q лежат на одной нормали, то широты и долготы этих точек будут одинаковыми. Если ещё каким-то образом определить дополнительно длину отрезка нормали $QQ' = H$, то тогда B , L и H будут однозначно определять положения точек земной поверхности относительно выбранного эллипсоида вращения.

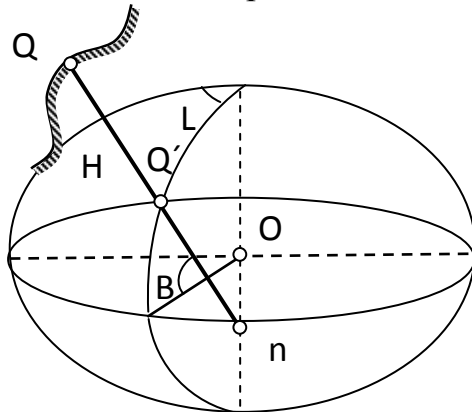


Рис. В.2. Геометрическая интерпретация проблемы изучения фигуры Земли

Если используются спутниковые методы, то фигура Земли (координаты точек поверхности) непосредственно определяется в прямоугольной пространственной системе координат X, Y, Z по измеренным приращениям координат

$$X=X_0+\Delta X; Y=Y_0+\Delta Y; Z=Z_0+\Delta Z,$$

где X_0, Y_0, Z_0 – координаты исходного пункта; $\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$ – приращения координат.

Новые современные спутниковые методы определения фигуры Земли изучаются в отдельном курсе *космической геодезии*.

Раздел высшей геодезии, в котором рассматриваются методы определения параметров земного эллипсоида, его ориентирование в теле Земли, редуцирование измеренных величин с физической поверхности Земли на эллипсоид, теоретические основы определения геодезических высот точек земной поверхности и другое, называется *теоретической геодезией*.

Изучение геометрии земного эллипсоида, методов решения различных геодезических задач на его поверхности, отображение земного эллипсоида на плоскость с целью получения систем плоских прямоугольных координат составляют основное содержание *сфероидической геодезии*.

Основные геодезические работы, сфероидическая геодезия и теоретическая геодезия это три составные части *высшей геодезии*. В этой последовательности они и будут рассмотрены в настоящем пособии, причём в объёмах, предусмотренных стандартом для специальности «Космическая геодезия».

В настоящее время многие задачи высшей геодезии решаются с привлечением спутниковых измерений высокой точности. Например, погрешность измерения расстояний от искусственных спутников Земли до наземной станции всего несколько сантиметров. При такой точности необходимо использовать в

моделях измерений результаты специальной и общей теорий относительности, так как относительная скорость между спутником и станцией составляет приблизительно $1/100\,000$ часть скорости света, т. е. соизмерима со скоростью света.

Владеть основами теории относительности специалистам в области космической и высшей геодезии необходимо в связи с тем, что при математической обработке спутниковой измерительной информации приходится решать теоретические и практические задачи по применению различных систем координат и времени (систем отсчёта), движущихся с огромными скоростями относительно друг друга, а также рассчитывать траектории движения спутников и планет путём численного интегрирования релятивистских уравнений движения.

На основе релятивистской теории построены и применяются в теориях движения планет и спутников (с 1984 г. в *Астрономических Ежегодниках*) новые шкалы времени: барицентрическое координатное время, геоцентрическое координатное время, земное время. Использовать новые шкалы времени при математической обработке спутниковых измерений необходимо осознанно, с пониманием механизма их построения.

Теории систем координат и времени, релятивистские уравнения движения, сведения из специальной и общей теории относительности и т. д. вкратце приведены в разделе *основы координатно-временных систем*.

На наш взгляд, раздел *основы координатно-временных систем* является необходимым и важным с точки зрения подготовки современных специалистов, способных разрабатывать новые высокоточные методы решения задач высшей геодезии.

1. ОСНОВНЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ РАБОТЫ

1.1. Опорные геодезические сети и их назначение

Геодезическая сеть – это совокупность закрепленных на земной поверхности точек, положение которых определено в общей для них системе геодезических координат. Современные геодезические сети по территориальному признаку подразделяются:

1. на *глобальные*, покрывающие поверхность всей Земли;
2. *государственные*, создаваемые на территории данной страны;
3. *геодезические съёмочные сети*, для обеспечения в локальных районах топографических съёмки масштаба 1:2000 и крупнее;
4. *геодезические сети специального назначения*, для решения специальных задач различных ведомств.

По геометрическому признаку различают плановые, высотные и пространственные геодезические сети. В плановой сети координаты пунктов определяются по геодезическим измерениям на поверхности эллипсоида или плоскости. В высотной сети по измеренным превышениям высоты пунктов получают относительно поверхности квазигеоида. В пространственных сетях положение пунктов вычисляют по измерениям в трёхмерном пространстве.

При построении геодезических сетей соблюдается принцип перехода от общего к частному.

Глобальная геодезическая сеть – создается методами космической геодезии. Положение пунктов определяется в геоцентрической системе прямоугольных координат с началом в центре масс Земли. Ось Z совпадает с малой полуосью общеземного эллипсоида, ось X совпадает с линией пересечения плоскостей экватора и начального меридиана, ось Y дополняет систему до правой. Глобальная геодезическая сеть используется для уточнения фундаментальных геодезических постоянных, изучения фигуры и гравитационного поля Земли, определения перемещения и деформации литосферных плит земной коры и т. д.

Государственная геодезическая сеть включает в себя:

астрономо-геодезические пункты космической геодезической сети (26 стационарных пунктов с погрешностью взаимного положения 0.2 м, расстояние между пунктами 1000 – 1500 км);

доплеровскую геодезическую сеть (131 пункт, погрешность взаимного положения 0.4 – 0.6 м, расстояние между пунктами 500 – 700 км);

астрономо-геодезическую сеть (164 тыс. пунктов триангуляции и полигонометрии 1 и 2 классов, погрешность взаимного положения 0.02 – 0.03 м при расстояниях до нескольких десятков километров);

геодезические сети сгущения (300 тыс. пунктов триангуляции, полигонометрии и трилатерации 3 и 4 классов, погрешность взаимного положения 0.05 м при длинах сторон 6 км – в 3 классе и 3 км – в 4 классе).

Государственная геодезическая сеть предназначена для решения следующих основных научных и практических задач:

- 1) установление и распространение государственной системы геодезических координат на всей территории страны;
- 2) геодезическое обеспечение картографирования территории страны;
- 3) геодезическое обеспечение изучения земельных ресурсов и землепользования, кадастра, строительства, разведки и освоения природных ресурсов;
- 4) обеспечение геодезическими данными наземной, морской и аэрокосмической навигации;
- 5) изучение геодинамических явлений и т. д.

6) *Государственная нивелирная сеть* включает в себя линии нивелирования I, II, III и IV классов, в которых высоты пунктов определяются с наивысшей точностью относительно поверхности квазигеоида. В настоящее время в России имеется 500 тыс. нивелирных знаков I – IV классов.

Государственная гравиметрическая сеть содержит пункты, на которых с наивысшей точностью определяется ускорение силы тяжести.

Геодезические сети специального назначения развиваются для решения специальных задач на геодинамических и техногенных полигонах, инженерных и промышленных объектах, в горно- и нефтедобывающих бассейнах и т. д.

1.2. Методы создания геодезических сетей

Основными наземными методами создания государственных геодезических сетей являются: триангуляция, полигонометрия, трилатерация, линейно-угловые сети. Кроме того, в последние 10 – 15 лет широкое распространение получили спутниковые и космические методы координатных определений: по навигационным ИСЗ, радиоинтерферометрия со сверхдлинной базой, лазерные наблюдения ИСЗ и т. д.

Сеть *триангуляции* строится в виде рядов треугольников, системы рядов треугольников или сплошной сети треугольников (рис. 1.1). Геометрическими элементами такой сети обычно являются треугольники, геодезические четырёхугольники и центральные системы. Измеряемыми элементами в таких построениях являются длина и дирекционный угол как минимум одной базисной стороны – АВ и все углы в треугольниках.

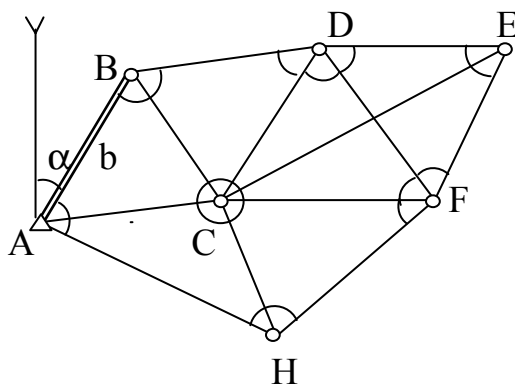


Рис. 1.1. Элементы сети: CDEF – геодезический четырёхугольник, ABDFH – центральная система с пунктом С внутри неё

Координаты определяемых пунктов в триангуляции, как впрочем и во всех последующих видах построения геодезических сетей, вычисляются путём последовательной передачи координат начиная от исходного пункта А по измеренным или вычисленным из решения треугольников сторонам и углам (решение прямых геодезических задач).

Например, в треугольнике ABC находим

$$x_B = x_A + b \cos \alpha; \quad y_B = y_A + b \sin \alpha; \quad S_{AC} = \frac{b \sin \angle B}{\sin \angle C}; \quad \alpha_{AC} = \alpha + \angle A;$$

$$x_C = x_A + S_{AC} \cos \alpha_{AC}; \quad y_C = y_A + S_{AC} \sin \alpha_{AC}.$$

Основным достоинством таких построений является высокая жесткость конструкции геодезической сети, большое число избыточных измерений, которые позволяют непосредственно в поле выполнить надёжный контроль измерений, большой подвиг в работе, небольшие экономические расходы непосредственно на наблюдения.

К недостаткам триангуляции следует отнести дорогостоящую постройку высоких знаков для обеспечения прямой видимости между всеми смежными направлениями.

Сеть *полигонометрии* создаётся в виде одиночных ходов или системы ходов, в которых измеряют длины сторон, соединяющие пункты, а на пунктах углы поворота (рис. 1.2).

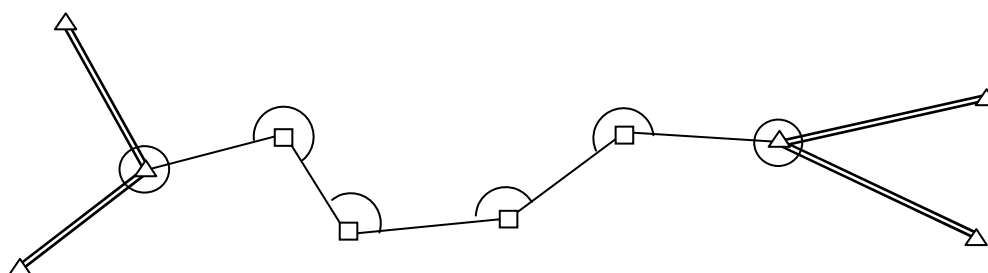


Рис. 1.2. Одиночный полигонометрический ход

Начальные и конечные пункты полигонометрических ходов являются опорными (с известными координатами) и на них измеряют примычные углы между твердыми (с известными дирекционными углами) и определяемыми сторонами. Координаты определяемых пунктов последовательно вычисляются путём решения прямых геодезических задач по формулам, которые представлены выше при описании метода триангуляции.

В крупных населённых пунктах, городах, а также в залесённой местности применение метода полигонометрии оказывается более эффективным, по сравнению с триангуляцией, так как требует менее высокие геодезические знаки, с которых нужно обеспечить видимость только на два или три направления. Это достоинство метода. Недостатками полигонометрии по сравнению с триангуляцией являются: меньшая жесткость геометрического построения, малое число избыточных измерений, и следовательно – слабый

контроль полевых измерений. И кроме того, координатное обеспечение осуществляется только для узкой полосы местности.

Сеть *трилатерации*, как и сеть триангуляции, состоит из цепочки треугольников, геодезических четырёхугольников, центральных систем, сплошных сетей треугольников, в которых измеряют только длины сторон (рис. 1.1). Для вычисления координат осуществляется переход от измеренных сторон к углам по теореме косинусов. Например, в треугольнике ABC (рис. 1.1)

$$S_{BC}^2 = S_{AB}^2 + S_{AC}^2 - 2S_{AB}S_{AC} \cos A.$$

Отсюда

$$A = \arccos \left(\frac{S_{AB}^2 + S_{AC}^2 - S_{BC}^2}{2S_{AB}S_{AC}} \right).$$

После вычисления углов из решения прямых геодезических задач последовательно находятся координаты определяемых пунктов. Достоинства метода – автоматизация процесса измерений, меньшая, по сравнению с триангуляцией и полигонометрией, зависимость от погодных условий. Метод трилатерации применяется только при создании геодезических сетей сгущения 3 и 4 классов. В геодезических сетях 1 и 2 классов метод не нашёл применения из-за следующих недостатков:

1. контроль измерения сторон или вовсе отсутствует, или очень слаб (в треугольниках трилатерации избыточные измерения отсутствуют, в геодезическом четырёхугольнике и в центральной системе их только по одному);

2. с точки зрения материальных затрат трилатерация по сравнению с триангуляцией требует большой штат бригады и больших транспортных расходов, так как при измерении линий нужны отражатели на соседних пунктах, а при них – люди.

Линейно-угловая сеть – это комбинация триангуляции и трилатерации. Линейно-угловые сети создают для достижения максимальной точности определения координат пунктов традиционными методами.

В настоящее время Федеральной службой геодезии и картографии разработан проект перехода топографо-геодезического производства на автономные методы *спутниковых координатных определений*. Традиционные наземные геодезические методы координатных определений (триангуляция, полигонометрия, трилатерация) основанные на последовательном развитии геодезических сетей требуют обеспечения взаимной видимости между смежными пунктами. Традиционные методы по точности, оперативности и экономической эффективности не соответствуют современным требованиям науки и практики и уступают автономным методам координатных определений при помощи спутниковых систем ГЛОНАСС и GPS.

По сравнению с традиционными, спутниковые методы имеют ряд преимуществ.

1. Координаты передаются от одного пункта к другому с высокой точностью и оперативностью практически на любые расстояния.

2. Геодезические пункты располагаются в благоприятных для их сохранности местах, так как не нужно строить дорогостоящие геодезические знаки для обеспечения взаимной видимости между пунктами.

3. Высокий уровень автоматизации работ.

4. Возможность использования менее плотной исходной геодезической основы.

Современными положениями, разработанными Федеральной службой геодезии и картографии России и топографической службой Вооруженных сил Российской Федерации, предусмотрено создание следующих современных государственных геодезических сетей [15]:

1. *ФАГС* (фундаментальная астрономо-геодезическая сеть) – это высшее звено координатного обеспечения. Она должна обеспечивать оперативное воспроизведение общеземной геоцентрической системы координат. Пункты *ФАГС* располагаются на расстоянии 800 – 1000 км, их общее число на территории России – 50 – 70, из них 10 – 15 пунктов должны быть постоянно действующими, а остальные – переопределяться группами через промежутки времени, зависящие от геодинамической активности региона.

Пространственное положение пунктов *ФАГС* определяется в общеземной системе координат с ошибкой положения пунктов относительно центра масс не более $(2 - 3)10^{-8}R$, где R – радиус Земли. Ошибка взаимного положения пунктов *ФАГС* не более 2 см в плане и 3 см по высоте. Для обеспечения такой точности необходимо использовать весь комплекс существующих космических измерений (радиоинтерферометрических, лазерных, GPS-измерений и т. д.). Постоянно действующие пункты *ФАГС* в основном создаются на базе действующих пунктов спутниковых наблюдений, астрономических обсерваторий, пунктов службы вращения Земли, радиоинтерферометрических комплексов со сверхдлинными базами «Квазар», программы «Дельта» и т. д. На пунктах *ФАГС* предусматривают две программы наблюдений: постоянные наблюдения спутниковых систем ГЛОНАСС и GPS (включая и международные программы) и наблюдения других специализированных спутников и космических объектов согласно межведомственным программам построения *ФАГС*. На пунктах *ФАГС* должны быть выполнены определения нормальной высоты из нивелирования не ниже II класса и абсолютные гравиметрические определения силы тяжести.

2. *ВГС* (высокоточная геодезическая сеть) обеспечивает распространение на всю территорию страны общеземной геоцентрической системы координат и определение точных параметров взаимного ориентирования общеземной и референцной систем координат. Расстояния между пунктами *ВГС* 150 – 300 км. Координаты пунктов в сети *ВГС* определяются относительными методами космической геодезии со средней квадратической погрешностью не более $(3 \text{ мм} + 5 \cdot 10^{-8}D)$ для плановых координат и $(5 \text{ мм} + 7 \cdot 10^{-8}D)$ – для геодезических высот.

3. *СГС-1* (спутниковая геодезическая сеть 1 класса) состоит из системы легко доступных пунктов с плотностью, достаточной для использования потребителями всевозможных спутниковых определений. *СГС-1* определяется

относительными методами космической геодезии со средними квадратическими погрешностями ($3 \text{ мм} + 10^{-7}D$) в плане и ($5 \text{ мм} + 2 \cdot 10^{-7}D$) по геодезической высоте для геодинамически активных регионов и ($5 \text{ мм} + 2 \cdot 10^{-7}D$) в плане и ($7 \text{ мм} + 3 \cdot 10^{-7}D$) по высоте для остальных регионов. Среднее расстояние между пунктами СГС-1 равно 25 – 35 км. В экономически развитых районах пункты СГС-1 в зависимости от требований потребителей могут иметь большую плотность.

Реализация проекта позволит [10]:

- 1) повысить точность и оперативность геодезических определений на 1 – 2 порядка;
- 2) повысить уровень автоматизации работ в топографо-геодезическом производстве;
- 3) внедрить новые и оперативные методы геодезического обеспечения аэрофототопографических и других съёмки;
- 4) автоматизировать работы по установлению границ земельных участков;
- 5) исключить строительство наружных геодезических знаков;
- 6) разместить геодезические пункты в удобных для потребителей местах;
- 7) внедрить методы спутникового нивелирования вместо геометрического нивелирования III и IV классов;
- 8) обеспечить изучение деформаций земной коры, являющихся предвестниками землетрясений и других опасных природных явлений;
- 9) создать систему постоянных наблюдений за динамикой уровней морей на уровне постах и прогноза их состояния;
- 10) обеспечить геодезическое обоснование картографирования страны и создание геоинформационных систем;
- 11) установить для территории СНГ высокоточную единую геодезическую систему координат и поддерживать её на уровне современных и перспективных требований экономики, науки и обороны страны.

Не следует думать, что современные спутниковые технологии полностью исключают возможности применения традиционных методов построения наземных геодезических сетей. Методы космической геодезии на сегодняшний день ещё имеют недостаточную относительную точность определения взаимного положения точек на коротких расстояниях. Поэтому в инженерной геодезии и во многих других случаях лучше применять традиционные методы.

Очень сложно выполнять спутниковые измерения в закрытой и полузакрытой местности: в лесу, в городе, вблизи зданий, под кроной деревьев, так как для измерений нужна прямая видимость (не должно быть препятствий) между приёмником и спутниками. В этих случаях, например, для производства топографической съёмки экономически выгодней применить наземный метод с использованием электронного тахеометра.

Для создания геодезических сетей уже около сорока лет применяется ещё один метод спутниковых координатных определений – метод *лазерной локации ИСЗ*. Погрешность современных лазерных измерений расстояний от наземных пунктов до ИСЗ не превосходит 5 – 10 см, поэтому с сантиметровой погрешностью определяются и координаты пунктов.

Для выполнения лазерных измерений на спутниках устанавливаются уголкового отражатели. Лазерные установки, расположенные на земной поверхности, имеют телескоп-передатчик с вмонтированным лазером и телескоп-приёмник. В момент выхода лазерного импульса с передатчика начинает работать счетчик циклов частоты 100 МГц или 1 ГГц, который выключается в момент поступления в приёмник отраженного импульса, что дает возможность определить интервал времени Δt прохождения световым импульсом расстояния от лазерной установки до ИСЗ и обратно. По известной скорости распространения света – c расстояние до ИСЗ вычисляется по формуле

$$D = c \cdot \Delta t / 2.$$

Помимо спутниковых методов координатных определений интенсивно развивается метод *радиоинтерферометрии со сверхдлинной базой* (РСДБ). Радиоинтерферометр РСДБ состоит, как минимум, из двух радиотелескопов А и В, установленных на расстоянии S . Радиотелескопы синхронно принимают излучение от одного и того же внегалактического радиоисточника J. Из обработки записанных на магнитофон радиосигналов можно определить временную задержку dt прихода фронта радиоволны к радиотелескопу А относительно В.

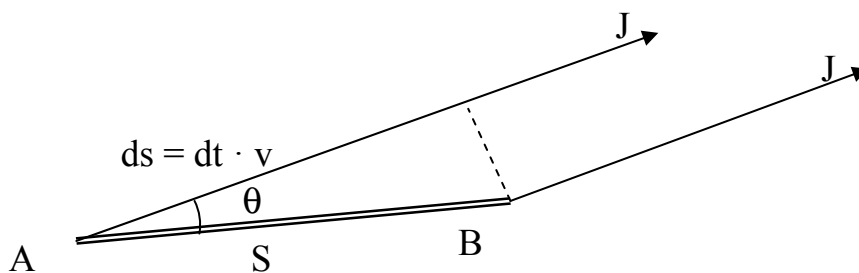


Рис. 1.3. Геометрическая схема РСДБ-измерений

Разность расстояний от радиотелескопов до радиоисточника вычисляется по формуле

$$ds = dt \cdot v,$$

где v – скорость распространения радиоволн. В результате обработки многочисленных значений dt можно вычислить приращения координат пункта В относительно пункта А с погрешностью 1 – 3 см.

1.3. Измерение горизонтальных углов и направлений

Углы и направления при построении наземных государственных геодезических сетей измеряются высокоточными и точными теодолитами, а превышения – нивелирами. Устройство теодолитов и нивелиров подробно изучается в курсе «Геодезическое инструментоведение» и поэтому здесь и далее рассматриваться не будет.

Выполняя угловые измерения, стремятся получить результаты с наивысшей точностью (при наименьших затратах труда и времени), независимые и равноточные (на всех пунктах с одним и тем же весом). Для этого измерения каждого направления или угла производят в периоды наивыгоднейшего времени наблюдений, когда влияние внешней среды минимально. Для исключения

ошибок нанесения делений лимба каждое направление измеряется на различных диаметрах лимба, равномерно распределенных по кольцу делений. В приёме, при измерении каждого направления, операции должны выполняться единообразно и симметрично во времени относительно среднего для приёма времени наблюдений. Направления или углы на пункте необходимо измерять симметрично относительно момента изотермии воздуха.

В практике геодезии нашей страны, как правило, использовались и ныне применяются два классических способа измерения горизонтальных углов (направлений). Измерение направлений способом круговых приёмов и измерение углов во всевозможных комбинациях.

1.3.1. Способ круговых приёмов

Способ круговых приёмов был предложен в 1816 г. Василием Яковлевичем Струве. Он прост в исполнении и поэтому широко применяется почти во всех странах. В нашей стране он использовался при построении геодезических сетей 2 – 4 классов.

В этом способе измерения выполняются многократно m приёмами. Вначале выбирается самое лучшее, в смысле видимости, начальное (первое) направление (рис. 1.4 на стр. 22). Биссектор сетки нитей наводится на это направление, а на лимбе, устанавливается отсчет соответствующий данному номеру приёма. При неподвижном лимбе алидаду вращают по ходу часовой стрелки и биссектор сетки нитей трубы последовательно наводят на первый, второй, ..., последний и снова на первый (замыкание горизонта) наблюдаемые пункты, каждый раз отсчитывая по горизонтальному кругу. В этом состоит первый полуприем. Затем трубу переводят через зенит и, вращая алидаду против часовой стрелки, наводят биссектор на те же пункты, но в обратной последовательности, т. е. на первый, последний, предпоследний, ..., второй и снова на первый пункт. На этом заканчивается второй полуприем соответствующего приема. Между приемами лимб переставляют на угол – δ , который вычисляется по формуле

$$\delta = \frac{180^\circ}{m} + \frac{i}{2} \quad \text{либо} \quad \delta = \frac{180^\circ}{m} + i,$$

где m – число приемов; i – цена деления лимба.

Покажем (см. табл. 1.1), что описанная выше методика наблюдений позволяет помимо достижения основной цели, свести к минимуму и влияние, связанные с кручением геодезических знаков, если последнее действует закономерно (с течением времени по линейному закону).

Таблица. 1.1

Предмет	I полуприём	II полуприём	Среднее	Направления, приведённые к начальному
A	a_1	$a_2 + n\Delta$	$a_{cp} + (n/2)\Delta$	$00^\circ 00' 00''$
B	$b_1 + \Delta$	$b_2 + (n-1)\Delta$	$b_{cp} + (n/2)\Delta$	$b_{cp} - a_{cp}$
C	$c_1 + 2\Delta$	$c_2 + (n-2)\Delta$	$c_{cp} + (n/2)\Delta$	$c_{cp} - a_{cp}$
D	$d_1 + 3\Delta$	$d_2 + (n-3)\Delta$	$d_{cp} + (n/2)\Delta$	$d_{cp} - a_{cp}$
...
A	$a'_1 + n\Delta$	a'_2	$a'_{cp} + (n/2)\Delta$	—

Здесь a, b, c, \dots – отсчеты по лимбу;

Δ – величина кручения сигнала за период перехода наблюдателя от очередного до следующего направления.

Из табл. 1.1 видно, что направления в приёме, приведённые к начальному будут свободны от влияния кручения, если сам процесс смещений происходит по указанной гипотезе.

После наблюдений, переходят к математической обработке результатов измерений на станции, т. е. выполняют уравнивание, которое сводится к вычислению среднего значения по каждому направлению из m приемов. По результатам уравнивания вес уравненного направления получается равным удвоенному числу приемов измерений $p_n = 2m$. А вес угла, вычисленного по направлениям, будет равен числу приёмов $p_y = m$.

Для оценки точности направления применяют формулу Петерса

$$\mu = \frac{1.25}{\sqrt{m(m-1)}} \cdot \frac{\sum |\vartheta|}{n},$$

где μ – средняя квадратическая погрешность направления, полученного из одного приема (средняя квадратическая ошибка единицы веса);

$\sum |\vartheta|$ – сумма абсолютных уклонений измеренных направлений от их средних значений, вычисленных по всем направлениям;

n, m – число направлений и число приемов, соответственно.

Средняя квадратическая погрешность уравненного направления вычисляется по формуле

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{m}}.$$

Достоинства способа круговых приемов [10]:

- 1) простота программы измерений на станции;
- 2) значительное ослабление влияния систематических ошибок делений лимба;
- 3) высокая эффективность при хорошей видимости по всем направлениям.

Недостатки:

- 1) сравнительно большая продолжительность приема, особенно при большом числе направлений;
- 2) повышенные требования к качеству геодезических сигналов;

- 3) необходимость примерно одинаковой видимости по всем направлениям;
- 4) более высокая точность начального направления.

1.3.2. Способ измерения углов во всех комбинациях

Этот способ был предложен Гауссом и применен в 1870-х гг. Шрейбером при развитии прусской триангуляции. В России применяется с 1910 г.

Суть способа состоит в следующем. На пункте с n направлениями (рис. 1.4) измеряют все углы, образованные парами направлений по нижеприведенной схеме.

1.2 1.3 1.4 ... 1.n
 2.3 2.4 ... 2.n
 3.4 ... 3.n

 (n-1).n

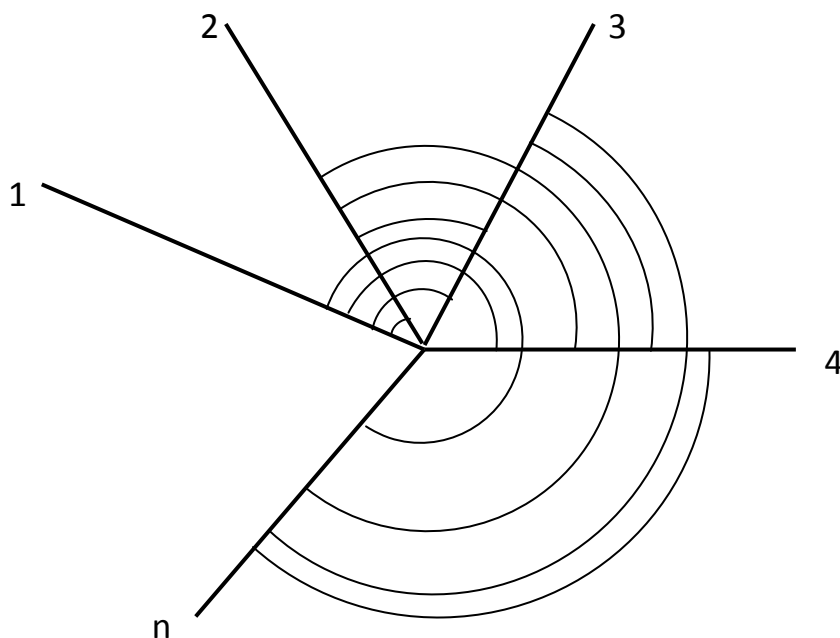


Рис. 1.4. Измерение углов способом во всех комбинациях

Число таких углов равно

$$r = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Значения углов 1.2, ..., 2.3, ..., 3.4, ... и т. д. получают путем вычислений из комбинаций других измеренных углов. Например, угол 1.2 получают из вычислений таким образом

$$1.2 = 1.3 - 2.3;$$

$$1.2 = 1.4 - 2.4;$$

$$1.2 = 1.n - 2.n.$$

Вес для произвольной функции $F = f(x, y, z)$, при известных весах некоррелированных аргументов определяется по формуле [10]

$$\frac{1}{p_F} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{p_x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \frac{1}{p_y} + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \frac{1}{p_z}. \quad (1.1)$$

Если вес непосредственно измеренного угла равен 1, то вес этого же угла, полученного из вычислений, в соответствии с формулой (1.1) будет равен 1/2, например, $1.2 = 1.3 - 2.3$, $1/p_{1.2} = 1/p_{1.3} + 1/p_{2.3}$. При $p_{1.3} = p_{2.3} = 1$ $1/p_{1.2} = 1/1 + 1/1 = 2$, откуда $p_{1.2} = 1/2$. Таким образом вес угла, полученного из вычислений, в два раза меньше веса того же угла, но измеренного непосредственно.

При уравнивании на станции для каждого угла вычисляют его среднее значение из всех приёмов (при допустимых расхождениях между приёмами). Используя эти средние значения, находят уравненные на станции углы как средние весовые значения. Учитывая, что сумма весов измеренного и вычисленного значений данного угла равна $\sum p = 1 \cdot 1 + 1/2 \cdot (n - 2) = n/2$, получаем формулы для вычисления средневесовых значений углов

$$\begin{aligned} [1.2] &= \frac{2}{n} \left[1 \cdot 1.2 + \frac{1}{2}(1.3 - 2.3) + \frac{1}{2}(1.4 - 2.4) + \dots + \frac{1}{2}(1.n - 2.n) \right] = \\ &= \frac{1}{n} [2 \cdot 1.2 + (1.3 - 2.3) + (1.4 - 2.4) + \dots + (1.n - 2.n)]; \\ [1.3] &= \frac{2}{n} \left[1 \cdot 1.3 + \frac{1}{2}(1.2 + 2.3) + \frac{1}{2}(1.4 - 3.4) + \dots + \frac{1}{2}(1.n - 3.n) \right] = \\ &= \frac{1}{n} [2 \cdot 1.3 + (1.2 + 2.3) + (1.4 - 3.4) + \dots + (1.n - 3.n)]; \\ [1.n] &= \frac{2}{n} \left[1 \cdot 1.n + \frac{1}{2}(1.2 + 2.n) + \frac{1}{2}(1.4 + 3.n) + \dots + \frac{1}{2}(1.n - 1 + n - 1.n) \right] = \\ &= \frac{1}{n} [2 \cdot 1.n + (1.2 + 2.n) + (1.4 + 3.n) + \dots + (1.n - 1 + n - 1.n)], \end{aligned}$$

где n – число направлений на пункте.

Углы, полученные в результате уравнивания на станции относительно первого направления, являются равноточными.

Применим формулу (1.1) для вычисления веса угла [1.2], получим

$$\frac{1}{p_{[1.2]}} = \frac{4}{n^2} \left[1 \frac{1}{p_{1.2}} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p_{1.3}} + \frac{1}{p_{2.3}} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p_{1.4}} + \frac{1}{p_{2.4}} \right) + \dots + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p_{1.n}} + \frac{1}{p_{2.n}} \right) \right].$$

$$\text{Так как } \frac{1}{p_{1.2}} = \frac{1}{p_{1.3}} = \dots = \frac{1}{p_{1.n}} = \frac{1}{p}, \text{ то } \frac{1}{p_{[1.2]}} = \frac{4}{2n^2} \cdot \frac{1}{p} [2 + (n - 2)] = \frac{2n}{n^2 p} = \frac{2}{np}.$$

$$\text{Откуда } p_{[1.2]} = \frac{np}{2}.$$

При $p = 1$, $p_{[1.2]} = \frac{n}{2}$, т. е. веса уравненных углов равны половине числа направлений, наблюдаемых с данного пункта. Если каждый угол измерен m приёмами, то при n направлениях вес каждого угла будет равен

$$p = \frac{mn}{2}.$$

Для равенства весов окончательных углов на всех станциях необходимо, чтобы произведение $m \cdot n$ для всех пунктов сети оставалось постоянным. Так как вес направления в два раза больше веса угла, то mn – вес направления.

Для измерения углов в сетях 2– 4 классов может применяться любой из рассматриваемых методов при соблюдении условия, что вес углов, измеренных во всех комбинациях равен весу углов, измеренных способом круговых приёмов, т. е. $p = m_{кр} = mn/2$, откуда $2m_{кр} = mn$, где $m_{кр}$ – число приёмов в методе круговых приёмов. Например, если углы в триангуляции 2 класса измерены 15-ю круговыми приёмами ($m_{кр} = 15$), то $mn = 30$. При числе направлений $n = 5$ способом во всех комбинациях их нужно измерять 6 приёмами ($m = 30/5 = 6$).

Средние квадратические погрешности единицы веса μ и уравненного угла M_y вычисляются по формулам

$$\mu = \sqrt{\frac{2\sum \vartheta^2}{(n-1)(n-2)}}, \quad M_y = \frac{\mu}{\sqrt{mn/2}}.$$

Достоинства способа измерения углов во всех комбинациях [10]:

1. уравненные результаты являются рядом равноточных направлений;
2. углы можно измерять в любой последовательности, выбирая наиболее благоприятные условия видимости и обеспечивая в итоге высокую точность;
3. малая продолжительность одного приёма (на измерения угла тратится 2 – 4 мин) обеспечивает меньшую зависимость точности результата от кручения сигнала;
4. большое число перестановок горизонтального круга ослабляет влияние ошибок диаметров лимба.

Недостатки:

1. быстрое уменьшение числа m приёмов измеренного угла с ростом числа n направлений на пунктах (малое число приёмов непосредственного измерения углов снижает точность их средних и уравненных значений);
2. быстрый рост объёма работ при $n > 5$.

Все контроли и допуски измерения горизонтальных углов способами круговых приёмов и всевозможных комбинаций приведены в инструкции о построении государственной геодезической сети [3].

1.3.3. Поверки и исследования теодолитов

Поверки позволяют привести инструмент в рабочее состояние, т. е. выявить отклонения от геометрических условий и оптико-механических требований положенных в основу конструкции конкретного прибора и осуществить наиболее полное устранение этих отклонений соответствующей *юстировкой*.

Однако в полевых условиях не всякие отклонения можно устранить, поэтому перед полевыми работами выполняются исследования инструментов. Исследования предусматривают определение неустранимых отклонений с целью введения соответствующих поправок в результаты измерений,

определение постоянных инструмента (цены деления уровней, окулярного микрометра и т. д.), испытания работы отдельных механизмов инструмента, определения ошибок делений шкал и, наконец, пригодности инструмента в целом для производства работ данного класса точности.

Перед наблюдениями на каждом пункте должны выполняться следующие обязательные поверки:

- 1) подъёмные винты должны вращаться плавно;
- 2) ось цилиндрического уровня на алидаде горизонтального круга должна быть перпендикулярна оси вращения алидады;
- 3) вертикальная нить (биссектор) сетки нитей должна располагаться в вертикальной плоскости;
- 4) визирная ось должна быть перпендикулярна оси вращения зрительной трубы (двойная коллимационная ошибка $2C \leq 20''$);
- 5) место зенита вертикального круга должно быть близким к нулю (практически не превышать $15''$).

После приобретения или ремонта инструмента, а также перед полевыми работами, теодолит исследуют. Исследования выполняются по следующей полной (лабораторной) программе:

- 1) определение цены деления цилиндрических уровней;
- 2) исследование правильности хода фокусирующей линзы трубы;
- 3) определение ошибки совмещения изображения штрихов лимба;
- 4) определение рена оптического микрометра;
- 5) определение мертвого хода барабанчика оптического микрометра;
- 6) определение ошибок делений шкалы микрометра;
- 7) определение эксцентриситетов лимба и алидады;
- 8) исследование правильности вращения алидады;
- 9) исследование ошибок деления лимба;
- 10) определение средних квадратических ошибок измерения горизонтального и вертикального углов в лабораторных условиях.

Рен – это разность между номинальной и измеренной с помощью микрометра величиной полуделения лимба.

Эксцентриситет алидады – несовпадение центра кольца делений лимба с осью вращения алидады.

Эксцентриситет лимба – несовпадение центра кольца делений лимба с осью вращения лимба.

Порядок выполнения поверок и исследований подробно описан в инструкции о построении государственной геодезической сети СССР [3] и здесь, поэтому не приводится.

1.4. Определение элементов приведения

Вследствие несовпадения отвесных линий, проходящих через центр пункта и ось прибора (теодолита, светодальномера, приёмника GPS и т. д.), измеренные величины (направления, расстояния, координаты и т. д.) исправляют поправками «с» за *центрировку* (рис. 1.5). Если не совпадают отвесные линии проходящие через центр наблюдаемого пункта и ось визирной цели или

отражателя, то измеренные направления или расстояния исправляют поправками «г» за *редукцию* (рис. 1.5). Процесс введения этих поправок называют приведением направлений или расстояний к центрам знаков.

1.4.1. Приведение к центрам пунктов измеренных расстояний и горизонтальных направлений

Пусть в полигонометрическом ходе из-за препятствий отсутствует взаимная видимость между центрами пунктов C и C_1 (рис. 1.5). Для выполнения угловых и линейных измерений приходится теодолит и светодальномер устанавливать в точку J , а визирную цель и отражатель в точку V . Кроме того, на рис. 1.5 изображены: M' – измеренное на пункте направление; s' – измеренное расстояние; e, e_1 – соответственно, линейные элементы центрировки и редукции, измеренные рулеткой; θ, θ_1 – соответственно, угловые элементы центрировки и редукции, измеренные теодолитом или при малых линейных элементах транспортиром; CO, JO – параллельные линии, обозначающие направление нулевого диаметра лимба теодолита. Линиям CV и CC_1 , соответственно, параллельны линии JV' и JC'_1 .

Все вместе e, θ, e_1, θ_1 называют элементами приведения. Задача – привести измеренные расстояния и горизонтальные направления к центрам пунктов.

Из треугольника CJV по теоремам косинуса и синуса, получим

$$s'' = \sqrt{e^2 + s'^2 - 2es' \cos \theta};$$

$$c_s = s'' - s';$$

$$c'' = \rho'' \arcsin\left(\frac{e \sin \theta}{s''}\right),$$

где c_s и c'' – соответственно, поправки за центрировку в расстояние и направление.

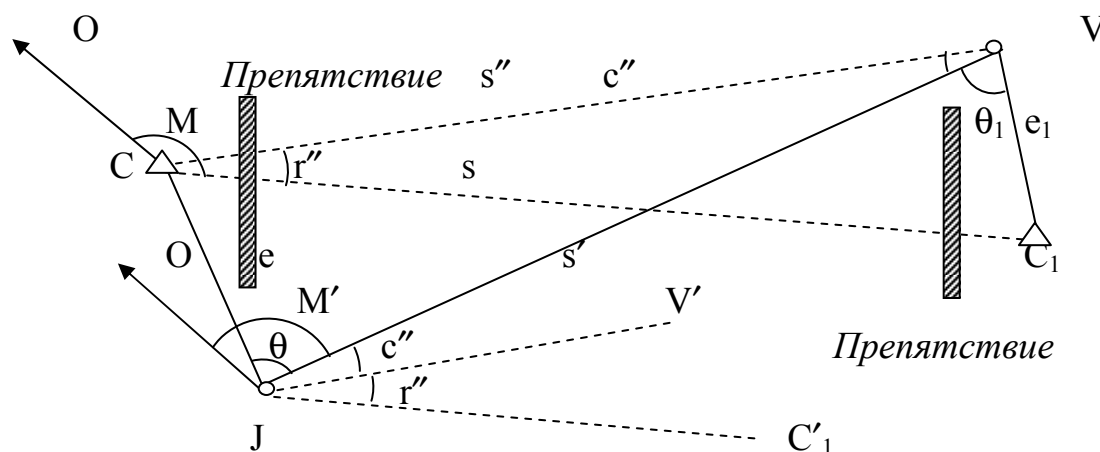


Рис. 1.5. Элементы приведения

Аналогично, из треугольника C_1VC , имеем

$$s = \sqrt{e_1^2 + s''^2 - 2e_1s'' \cos(\theta_1 + c)};$$

$$r_s = s - s'';$$

$$r'' = \rho'' \arcsin\left(\frac{e_1 \sin(\theta_1 + c)}{s}\right),$$

где r_s и r'' – соответственно, поправки за редукцию в расстояние и направление, s – приведённое к центрам пунктов расстояние.

Если линейные элементы центрировки и редукции намного меньше расстояния между пунктами (обычно в случаях, когда для обеспечения взаимной видимости инструменты устанавливаются на знаках над центрами пунктов выше препятствий), то приводить к центрам пунктов расстояния и направления можно отдельно по приближенным формулам. Они выводятся путём разложения в ряды вышеприведённых соотношений.

$$s'' = s' \left[1 + \frac{e^2}{s'^2} - \frac{2e}{s'} \cos \theta \right]^{\frac{1}{2}} = s' \left[1 + \frac{e^2}{2s'^2} - \frac{e}{s'} \cos \theta + \dots \right] \approx s' - e \cos \theta$$

Отсюда поправка за центрировку в расстояние

$$c_s = -e \cos \theta.$$

Если принять, что $\cos(\theta_1 + c) \approx \cos \theta_1$, то поправку за редукцию в расстояние получим аналогично

$$s = s'' \left[1 + \frac{e_1^2}{s''^2} - \frac{2e_1}{s''} \cos \theta_1 \right]^{\frac{1}{2}} = s'' \left[1 + \frac{e_1^2}{2s''^2} - \frac{e_1}{s''} \cos \theta_1 + \dots \right] \approx s'' - e_1 \cos \theta_1$$

$$r_s = -e_1 \cos \theta_1.$$

Тогда расстояние, приведённое к центрам пунктов, равно

$$s = s' + c_s + r_s.$$

При малых линейных элементах приведения e и e_1 можно также считать, что $s \approx s' \approx s''$ – приближенное расстояние и $\sin(\theta_1 + c) \approx \sin \theta_1$. Тогда, разлагая в ряд арксинусы, ограничившись только первыми членами ряда, получим приближенные формулы для вычисления поправок за центрировку и редукцию в измеренные горизонтальные направления

$$c'' = \frac{e \cdot \sin \theta}{s} \rho'';$$

$$r'' = \frac{e_1 \cdot \sin \theta_1}{s} \rho''.$$

Из рис. 1.5 следует, что приведённое к центру пункта направление равно

$$M = M' + c + r.$$

1.4.2. Приведение к центрам пунктов спутниковых измерений

Для приведения спутниковых измерений к центру пункта, вблизи него выполняются спутниковые измерения в двух точках 1 и 2 (рис. 1.6). По результатам измерений вычисляются прямоугольные координаты этих точек в проекции Гаусса – Крюгера. Элементами приведения для спутниковых наблюдений являются измеренные электронным тахеометром углы и/или расстояния редуцированные на плоскость. Для вычисления поправок в плоские

координаты за центрировку можно использовать полярную засечку (рис. 1.6, а) прямую угловую засечку (рис. 1.6, б) линейную засечку, створные засечки (рис. 1.6, в, г). Наиболее оптимальный по точности и затратам метод – это установка электронного тахеометра над центром пункта и измерение расстояний и угла между спутниковыми точками, расположенными приблизительно на одинаковом расстоянии по обе стороны от пункта и примерно в створе с центром пункта. Применяя формулы линейной засечки, вычисляются поправки в координаты в этом методе.

Для передачи отметки высоты от одной из двух точек на центр знака можно использовать методы геометрического, тригонометрического или гидростатического нивелирования.

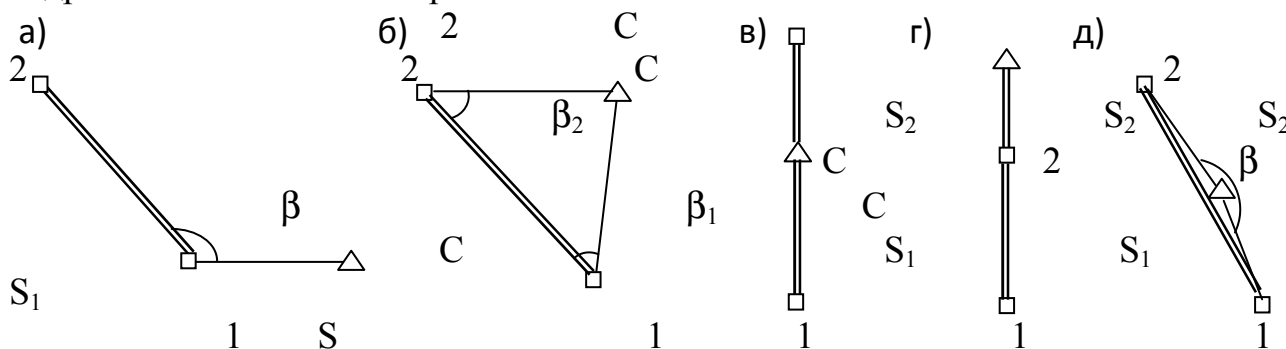


Рис. 1.6. Элементы приведения спутниковых измерений к центрам пунктов

Элементы приведения для горизонтальных направлений, расстояний или в случае, когда спутниковый приёмник находился на столике знака, определяются в поле графическим или аналитическим способами.

1.4.3. Графический способ определения элементов приведения

Этот способ применяется, когда линейные элементы e и e_1 не превышают 0.5 м. В этом случае точки C , J и V (здесь точка V – место наведения инструментов с соседних пунктов, относится к пункту, на котором выполняются измерения) можно спроектировать на единую плоскость (рис. 1.5). Над центром C устанавливают на штативе мензулу, прикрепляют к планшету центрировочный лист, приводят планшет в горизонтальное положение. На расстоянии, равном примерно двойной высоте знака, выбирают такие три точки, которые видны из центра примерно под углами 60 или 120° . На выбранных точках последовательно устанавливают теодолит технической точности, в котором сетка нитей повернута на 90° , чтобы дальномерные нити выполняли роль биссектора. Приводят теодолит в рабочее положение и при круге лево наводят вертикальную нить (биссектор) трубы на ось визирной цели, после чего трубу осторожно опускают до появления в поле зрения центрировочного листа.

На край центрировочного листа кладут линейку со скошенным краем, на котором нанесены миллиметровые деления. Наблюдатель делает отсчет по линейке в точке её пересечения вертикальной нитью сетки. Помощник наблюдателя по этому отсчету хорошо отточенным карандашом наносит на центрировочном листе точку V_1 . Затем помощник перемещает линейку на противоположный край центрировочного листа, наблюдатель делает отсчет по линейке, а помощник отмечает точку V'_1 . После этого наблюдатель наводит

вертикальную нить на ось вращения прибора и выполняет те же действия. В результате на центрировочном листе получают точки J_1, J'_1 . Аналогично проектируют и центр пункта. Получают точки C_1, C'_1 .

Затем трубу переводят через зенит и выполняют те же действия, что и при круге лево. В итоге на центрировочном листе получают точки, которые совпадут с точками $V_1, V'_1, J_1, J'_1, C_1, C'_1$ если геометрические условия теодолита выполнены, или будут располагаться вблизи точек, полученных при круге лево. Середины расстояний между этими точками соединяют. Подобные действия выполняют и с двух других точек. В пересечении трех линий получают проекции V, J, C .

Вследствие погрешностей теодолита и визирования при пересечении линий образуются треугольники погрешностей, его стороны не должны быть более 5 мм при проектировании J и C и 10 мм – при проектировании V . За окончательное положение точек J, V, C берут центры треугольников.

Из точек J и V с помощью визирной линейки прочерчивают направления на два пункта сети. Если с центрировочного листа пункты сети не видны, то предварительно с помощью теодолита, установленного на столике сигнала, выставляют в створах этих направлений вехи и визирование с центрировочного листа выполняют на эти вехи. С помощью буссоли прочерчивают направления $C - Ю$. Значения e и e_1 измеряют линейкой с точностью до 1 мм, а углы θ и θ_1 – транспортиром с точностью до 0.5° . Для контроля выполняют повторное определение элементов приведения. Элементы приведения определяют до начала наблюдений и после их завершения.

1.4.4. Аналитический способ определения элементов приведения

Этот способ применяется при e и $e_1 > 0.5$ м или если нет возможности применить графический метод. На расстоянии, равном примерно полутора высотам знака, разбивают базис b (рис. 1.7) такой длины, чтобы треугольники ABJ и ABC были примерно равносторонними. Двумя приемами измеряют углы $\alpha_J, \alpha_C; \beta_J, \beta_C; \gamma$. В условной прямоугольной системе начало координат совмещают с точкой A , а ось x – с направлением базиса.

Из рис. 1.7 видно, что

$$y_J = x_J \operatorname{tg} \alpha_J = (b - x_J) \operatorname{tg} \beta_J.$$

Откуда

$$x_J = \frac{b \cdot \operatorname{tg} \beta_J}{\operatorname{tg} \alpha_J + \operatorname{tg} \beta_J}.$$

Аналогично получаем

$$y_C = x_C \operatorname{tg} \alpha_C = (b - x_C) \operatorname{tg} \beta_C;$$

$$x_C = \frac{b \cdot \operatorname{tg} \beta_C}{\operatorname{tg} \alpha_C + \operatorname{tg} \beta_C}.$$

Угол φ находим из выражения

$$\operatorname{ctg} \varphi = \frac{x_C - x_J}{y_C - y_J}.$$

Искомые элементы приведения вычисляем по формулам

$$h_{AB} = (a + A_3A_4 - A_2A_4) - (b + B_3B_4 - B_2B_4). \quad (1.2)$$

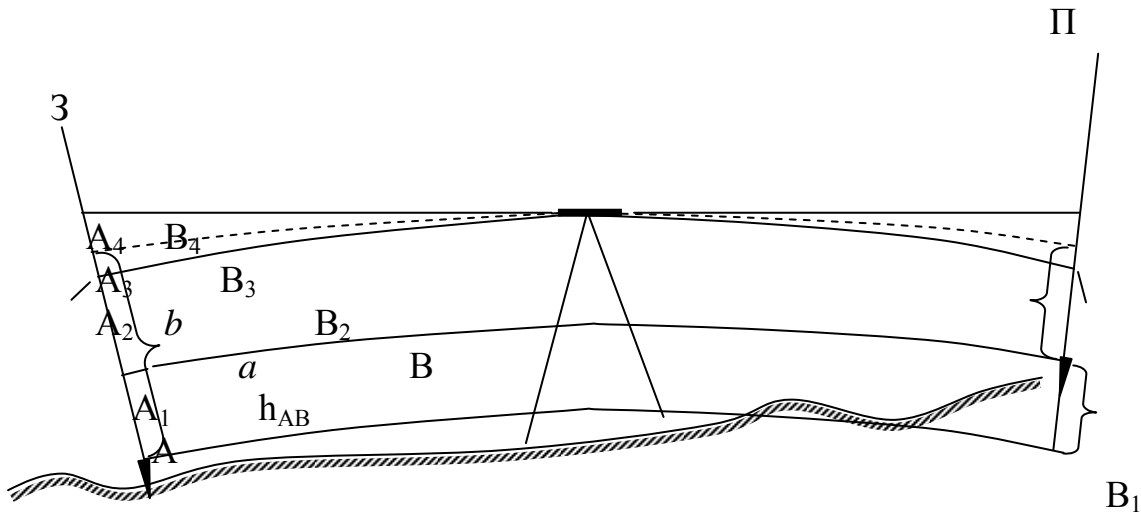


Рис. 1.8. Геометрическое нивелирование

В выражении (1.2) отрезки A_3A_4 и B_3B_4 – поправки за вертикальную рефракцию, которые вычисляются по формулам

$$r_3 = \frac{S_3^2}{2R} k_3; \quad r_{\Pi} = \frac{S_{\Pi}^2}{2R} k_{\Pi},$$

где $k_3 \approx k_{\Pi} \approx \frac{R}{R_r}$ – коэффициент рефракции, который для нашего государства в среднем принят равным 0.14;

R_r – радиус кривизны луча света, искривлённого вертикальной рефракцией;

R – средний радиус Земли;

S_3, S_{Π} – соответственно, расстояния до задней и передней реек.

Отрезки на рейках A_2A_4 и B_2B_4 являются поправками за кривизну Земли, которые вычисляются по формулам

$$c_3 = \frac{S_3^2}{2R}; \quad c_{\Pi} = \frac{S_{\Pi}^2}{2R}.$$

Отсюда выражение (1.2) можно записать следующим образом

$$h_{AB} = (a - b) - (c_3 - c_{\Pi}) + (r_3 - r_{\Pi}).$$

При получении этих формул предполагалось, что уровенные поверхности, проходящие через точки A, B и горизонт инструмента параллельны, т. е. $AB_1 \parallel A_1B \parallel A_2B_2$. Однако уровенные поверхности, на самом деле, не параллельны, практически, их непараллельность сказывается только при высокоточном нивелировании на большие расстояния. Учёт непараллельности уровенных поверхностей будет рассмотрен в разделе теоретической геодезии.

Если расстояния от нивелира до задней и передней реек при измерениях откладываются приблизительно одинаковые, то разности поправок за кривизну Земли будут равны нулю, а поправка за рефракцию стремится к нулю при

высоте луча визирования над подстилающей поверхностью не менее 0.5 м. Тогда измеренное превышение из геометрического нивелирования может быть получено по простой формуле

$$h_{AB} = (a - b).$$

Государственная нивелирная сеть, так же как и плановые сети, строится по принципу от общего к частному и делится на I, II, III и IV классы. Нивелирные сети I и II классов создают единую систему высот на территории страны. Их используют для решения таких научных задач, как изучение вертикальных движений земной коры, определение фигуры Земли и разности высот поверхности морей и океанов. Сети III и IV классов являются главной высотной основой топографических съёмок и инженерно-геодезических работ. Характеристики различных классов нивелирования приведены в табл. 1.2 [10].

Таблица. 1.2

Характеристика	Класс нивелирования			
	I	II	III	IV
Допустимые невязки, f , мм, в полигонах и по линиям, (L – в км)	$3\sqrt{L}$	$5\sqrt{L}$	$10\sqrt{L}$	$20\sqrt{L}$
Периметры нивелирных полигонов в км:				
- обжитые районы	1200	400	60 – 150	20 – 60
- малообжитые районы	2000	1000	100 – 300	25 – 80
- локальные геодинамические полигоны	40	20	-	-
- застроенная территория города	граница города	50	25	8
- незастроенная территория города	граница города	80	40	12

Нивелирование I класса

Схема построения. Нивелирная сеть I класса состоит из отдельных ходов и замкнутых полигонов с периметрами 1200 – 2000 км. Ходы нивелирования прокладывают по железным, шоссейным и грунтовым дорогам, а в труднодоступных районах – по берегам рек, тропам и зимникам. Ходы должны быть связаны с основными морскими и речными водомерными установками. Нивелирные ходы I класса прокладывают в прямом и обратном направлениях одновременно по двум парам костылей, образуя правую и левую линии нивелирования. Прямой и обратный ходы прокладывают по одной и той же трассе участками, состоящими из нескольких секций длиной 20 – 30 км.

Приборы. Для нивелирования I класса используются штриховые рейки с инварной полосой и высокоточные нивелиры, имеющие трубу с увеличением не менее $40\times$. Контактный цилиндрический уровень должен иметь цену деления не более 12" на 2 мм. Если используется компенсатор вместо уровня, то ошибка самоустановки линии визирования не должна превышать 0.2". Цена деления оптического микрометра – 0.05 мм. Из современных высокоточных нивелиров

наиболее пригодны Н-05, Ni-004, цифровые нивелиры DL-101С, DL-102С (Япония).

Методика нивелирования. Нивелирование I класса выполняют методом совмещения с наивысшей точностью и с наиболее полным исключением систематических погрешностей. Длина визирного луча – до 50 м, неравенство расстояний от нивелира до реек на станции – не более 0.5 м, накопление разностей расстояний в секции – до 1 м, высота визирного луча над почвой – не менее 0.8 м. При длине визирного луча 25 м и меньше высота визирного луча может быть уменьшена до 0.5 м. Последовательность наблюдений на станции в прямом ходе по правой и левой линиям на нечетной станции – по схеме $Z_o - P_o - P_d - Z_d$, на четной станции – по схеме $P_o - Z_o - Z_d - P_d$, где индексы о и д обозначают отсчеты по основной и дополнительной шкалам задней Z и передней P реек. В обратном ходе на нечетных станциях – $P_o - Z_o - Z_d - P_d$, на четных – $Z_o - P_o - P_d - Z_d$.

Контроль и допуски. На каждой станции вычисляют:

1) превышение h_o по основной и h_d дополнительной шкалам реек правой и левой линии, разности $d = h_d - h_o \leq 0.5$ мм;

2) расхождение между превышениями задней пары костылей данной станции и превышением передней пары костылей предыдущей станции не должно превышать 0.7 мм;

3) по каждой секции в ходе и по участку между фундаментальными реперами вычисляются попарно суммы превышений по правой линии $[h_p]_{пр}$ и левой линии $[h_l]_{пр}$ прямого хода и $[h_p]_{обр}$, $[h_l]_{обр}$ обратного хода.

Расхождения сумм превышений по правой и левой линии не должны быть более $2\sqrt{L}$ мм при числе станций n на 1 км хода до 15 и $3\sqrt{L}$ мм при $n > 15$. Вычисляются $[h_{ср}]_{пр} = ([h_p] + [h_l])_{пр} / 2$ и $[h_{ср}]_{обр} = ([h_p] + [h_l])_{обр} / 2$. Расхождение между ними не должны превышать $3\sqrt{L}$ мм при $n \leq 15$ и $4\sqrt{L}$ мм при $n > 15$. В приведенных формулах L – длина хода в км.

Нивелирование II класса

Схема построения. Ходы нивелирования II класса опираются на реперы нивелирования I класса, образуя полигоны с периметрами 400 – 1000 км. В районах, не имеющих ходов нивелирования I класса, нивелирную сеть II класса строят самостоятельно с такими же периметрами. Ходы нивелирования II класса прокладывают по улучшенным путям сообщений, а при их отсутствии – по берегам морей и больших рек, по тропам и зимникам. Ходы связывают с морскими и речными водомерными установками. Нивелирные ходы II класса прокладывают по одной паре костылей в прямом и обратном направлениях.

Приборы. Применяются штриховые рейки с инварной полосой и высокоточные нивелиры Н-05, Ni004, Ni002, цифровые нивелиры DL-101С, DL-102С и т. д.

Методика нивелирования. Нивелирование II класса выполняется методом совмещения. Уравненное превышение в ходе длиной 1 км определяется со средней квадратической ошибкой не более 0.8 мм, а превышение на станции – 0.3 мм. Нормальная длина визирного луча – 65 м, а при увеличении зрительной трубы

не менее 44^x – до 75 м. Неравенство расстояний от нивелира до реек на станции – до 1 м, накопление неравенств по секции – не более 2 м. Высота визирного луча над почвой – не менее 0.5 м. При длине визирного луча 30 м и менее высота визирного луча может быть уменьшена до 0.3 м. Последовательность наблюдений на станции в прямом и обратном ходах, на нечетных и четных станциях такая же, как и при нивелировании I класса.

Контроль и допуски. На каждой станции разность превышений, вычисленных по основной и дополнительной шкалам, $d = h_d - h_o$ по абсолютной величине не должна быть больше 0.7 мм. Для прямого и обратного ходов по каждой секции и по участку вычисляются суммы превышений по станциям. Расхождение этих сумм не должно превышать $5\sqrt{L}$ мм, где L – длина хода в км, при числе станций на 1 км хода до 15 и $6\sqrt{L}$ мм – при $n > 15$.

Поверки и исследования нивелиров и реек

Поверки, как было упомянуто выше, нужны для того, чтобы выявить отступления от требований к взаимному расположению осей прибора. Юстировкой устраняют эти отклонения. При исследовании определяют неустраняемые отклонения прибора для принятия мер, уменьшающих влияние отклонения на результат.

После транспортировки нивелира и через каждые 2 – 3 дня работы выполняются нижеперечисленные поверки и юстировки прибора.

1. *Внешний осмотр нивелира.* Проверяется исправность всех частей нивелира, действие винтов (зажимного, наводящего, элевационного, подъёмных), качество оптики, работа отсчетного механизма и т. д.

2. *Поверка и регулировка хода подъёмных винтов.* Подъёмные винты при плотно завинченном станом винте должны вращаться плавно. Для регулировки хода вывинчивают подъёмные винты настолько, чтобы имеющиеся на их стержнях отверстия установились напротив углублений во внутренней втулке винтов. С помощью шпильки, вставленной в эти углубления, можно повернуть втулку винта и тем самым ослабить или сделать более тугим его ход.

3. *Поверка плавности вращения трубы вокруг вертикальной оси.* Если зрительная труба вращается туго вокруг вертикальной оси, то необходимо произвести чистку и смазку оси.

4. *Поверка и исправление установочного уровня.* Подъёмными винтами приводят пузырёк круглого уровня в нуль-пункт и поворачивают трубу на 180° . Если пузырёк отклонился от нуль-пункта, то на половину отклонения смещают пузырёк исправительными винтами, а в нуль-пункт приводят подъёмными винтами.

5. *Поверка и исправление установки сетки нитей.* Вертикальная нить сетки должна совпадать с изображением нити отвеса. Поверку выполняют с помощью подвешенного в 20 – 25 м отвеса. Исправляют с помощью трёх винтов пластинки, к которой прикреплена сетка нитей.

6. *Поверка и исправление установки цилиндрического уровня (поверка главного условия).* Ось цилиндрического уровня и визирная ось трубы должны

быть параллельны между собой. Для соблюдения этого требования должны выполняться два условия.

А. *Отвесная плоскость, проходящая через ось уровня, должна быть параллельна отвесной плоскости, проходящей через визирную ось.* На расстоянии 50 м от рейки устанавливают нивелир так, чтобы один из подъёмных винтов располагался в створе визирования на рейку. Два других винта займут симметричное положение относительно линии визирования. Нивелир приводят в рабочее положение. Зрительную трубу наводят на рейку. Элевационным винтом совмещают концы пузырька уровня и по средней горизонтальной нити берут отсчет по рейке. Вращая винты расположенные перпендикулярно линии визирования в разные стороны, дают боковой наклон нивелиру. Отсчет по рейке должен остаться тем же самым. Зарисовывается положение пузырька уровня. После этого наклоняют нивелир в противоположном направлении. Если концы пузырька уровня не разошлись или разошлись в ту же сторону, как было зарисовано, то первое условие выполнено. В противном случае исправление выполняют боковыми исправительными винтами уровня.

Б. *Проекции на отвесную плоскость оси уровня и визирной оси должны быть взаимно параллельны или пересекаться под углом не более $10''$ (угол i).* На ровной площадке на расстоянии примерно 50 м забивают два колышка (рис. 1.9), обозначим их номерами №1 и №2.

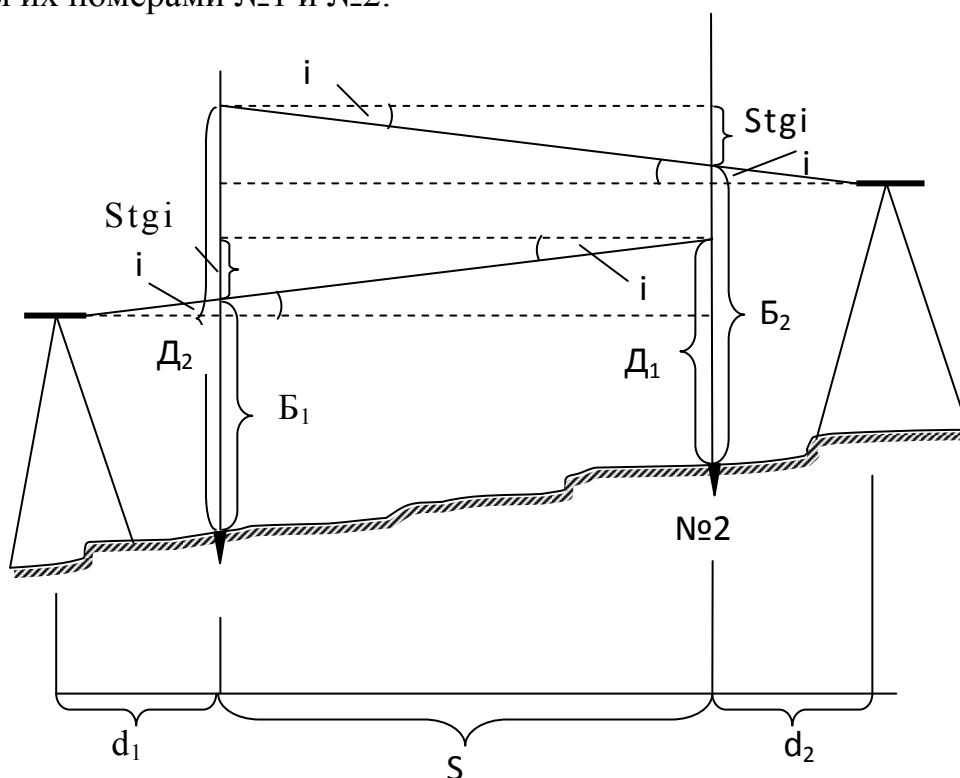


Рис. 1.9. Определение угла i

На продолжении створа за колышком №1 примерно в 5 м устанавливаем нивелир. Берём отсчет по ближней рейке B_1 и берем отсчет по дальней рейке D_1 . Устанавливаем нивелир примерно в 5 м за колышком №2. Не меняя фокусировки, берем отсчет сначала по дальней рейке D_2 , а затем по ближней B_2 .

Из рис. 1.9 видно, что для определения угла i можно записать следующее равенство

$$\text{Stgi} = (D_2 - B_1) - (B_2 - D_1 + \text{Stgi}) = (D_1 + D_2) - (B_1 + B_2) - \text{Stgi}.$$

Отсюда, раскладывая tgi в ряд и приведя подобные члены, получим

$$i'' = \left[\frac{(D_1 + D_2) - (B_1 + B_2)}{2} \right] \frac{\rho''}{S}. \quad (1.3)$$

Если значение угла i превышает $10''$, то правильный отсчет для юстировки вычисляем по формуле

$$D'_2 = D_2 - \frac{i''}{\rho''}(S + d_2). \quad (1.4)$$

Необходимо заметить, что в формуле (1.3) отсутствуют расстояния d_1 и d_2 до ближних реек, поэтому необязательно соблюдать их равенство. Вследствие того, что S намного больше d_2 , в выражении (1.4) d_2 можно отбросить.

Правильный отсчет устанавливаем либо оптическим клином, либо элевационным винтом. Если действовали элевационным винтом, то пузырек уровня приводится на середину вертикальными исправительными винтами уровня (предварительно ослабив горизонтальные исправительные винты). Чтобы убедиться в правильности юстировки, поверка выполняется еще один раз.

К основным исследованиям нивелира относятся:

- 1) исследование работы механизма, наклоняющего плоскопараллельную пластинку, и определение цены деления отсчетного барабана;
- 2) исследование правильности хода фокусирующей линзы нивелира;
- 3) определение коэффициента дальномера и асимметрии нитей;
- 4) определение цены деления цилиндрического уровня и т. д.

К основным поверкам и исследованиям нивелирных реек относятся:

- 1) определение стрелы прогиба рейки;
- 2) поверка правильности нанесения дециметровых делений шкал рейки;
- 3) поверка перпендикулярности плоскости пятки к оси рейки и определение разности высот нулей реек;
- 4) контрольное определение длины метровых интервалов реек;
- 5) поверка правильности установки круглого уровня на рейке;
- 6) определение разности высот нулей реек;

Подробно порядок выполнения поверок и исследований нивелиров и реек изложен в инструкции по нивелированию [4].

1.5.2. Тригонометрическое нивелирование

Метод тригонометрического нивелирования по точности уступает геометрическому методу нивелирования, но в горной местности применять его экономически целесообразнее.

Пусть на пунктах 1 и 2 измерены теодолитом зенитные расстояния Z_1 и Z_2 , а светодальномером – наклонная дальность D (рис. 1.10) [10]. Световой луч между точками А и В распространяется по кривой, и измеренные зенитные расстояния по этой причине искажаются на углы γ_1 и γ_2 из-за влияния

вертикальной рефракции. Отвесные линии отклоняются от нормалей к эллипсоиду на углы ϑ_1 и ϑ_2 . На рис. 1.10 показаны также: i_1 – высота инструмента; l_2 – высота точки визирования; R_A – радиус Земли; H_1 и H_2 – геодезические высоты точек; S – расстояние на эллипсоиде между проекциями точек 1 и 2.

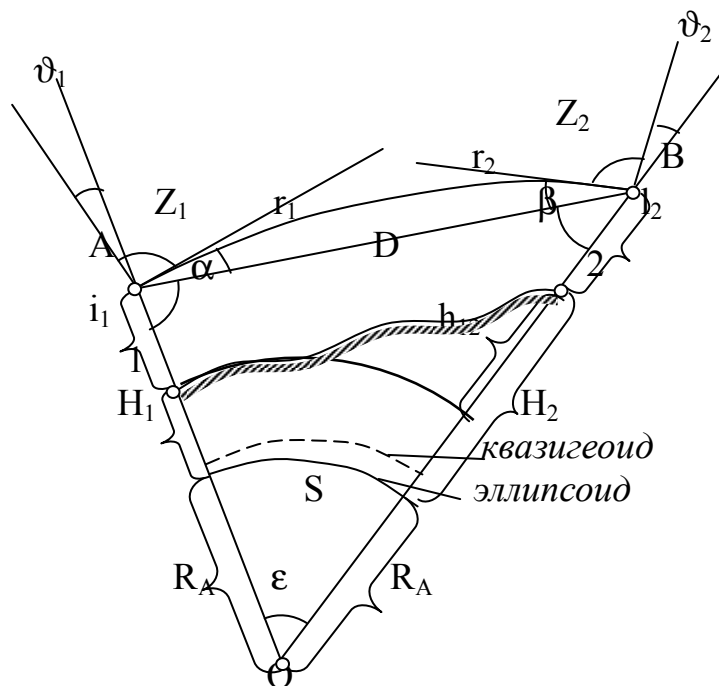


Рис. 1.10. Тригонометрическое нивелирование

Обозначим исправленные зенитные расстояния следующим образом

$$\bar{Z}_1 = Z_1 + r_1 - \vartheta_1;$$

$$\bar{Z}_2 = Z_2 + r_2 + \vartheta_2.$$

Из треугольника OAB имеем

$$R_A + H_1 + i_1 = (R_A + H_2 + l_2) \cos \epsilon - D \cos \bar{Z}_1.$$

Подставляя в формулу $\cos \epsilon = 1 - 2 \sin^2 \frac{\epsilon}{2}$ выражение для $\cos \epsilon$, получим прямое превышение

$$h_{12} = H_2 - H_1 = D \cos \bar{Z}_1 + 2(R_A + H_2 + l_2) \sin^2 \frac{\epsilon}{2} + i_1 - l_2. \quad (1.5)$$

Формула для обратного превышения имеет вид

$$h_{21} = H_1 - H_2 = D \cos \bar{Z}_2 + 2(R_A + H_1 + l_1) \sin^2 \frac{\epsilon}{2} + i_2 - l_1. \quad (1.6)$$

Угол ϵ находится из треугольника OAB

$$\epsilon = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 - 180^\circ.$$

Более точное среднее арифметическое превышение \bar{h}_{12} из прямого и обратного определений (1.5) и (1.6) находится по формуле

$$\bar{h}_{12} = \frac{D}{2} (\cos \bar{Z}_1 - \cos \bar{Z}_2) + (h_{12} + l_2 - l_1) \sin^2 \frac{\epsilon}{2} + \frac{i_1 + i_2}{2} - \frac{l_2 + l_1}{2}, \quad (1.7)$$

где h_{12} – прямое превышение.

Углы рефракции на земной поверхности можно приближённо вычислить следующим образом

$$r_1 \approx r_2 \approx k \frac{S'^2}{2R_A},$$

где $S' = D \sin \bar{Z}_1$ – горизонтальное проложение наклонной дальности D ,

$k \approx 0.14$ – коэффициент рефракции,

R_A – радиус кривизны эллипсоида в направлении 1 – 2.

Итак, получены формулы вычисления превышений геодезических высот по измеренным зенитным расстояниям и наклонной дальности.

Если наклонная дальность не измерялась, но известны прямоугольные плоские координаты точек 1 и 2, то по ним можно вычислить расстояние S' на плоскости. По S' определяются углы рефракции для исправления зенитных расстояний.

Из треугольника OAB по теореме тангенсов получим

$$\frac{BO - AO}{BO + AO} = \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2},$$

где

$$AO = R_A + H_1 + i_1; \quad BO = R_A + H_2 + l_2; \quad \alpha = 180 - \bar{Z}_1; \quad \beta = 180 - \bar{Z}_2; \quad \alpha + \beta = 180 - \varepsilon$$

Подставляя эти соотношения, и выполнив несложные преобразования, находим превышение как разность геодезических высот точек 1 и 2

$$h_{12} = H_2 - H_1 = 2 \left(R_A + \frac{H_1 + H_2 + i_1 + l_2}{2} \right) \operatorname{tg} \frac{\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1}{2} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} + i_1 - l_2.$$

Так как H_2 , стоящая в правой части выражения, величина неизвестная, то превышение можно определить методом итераций. На первой итерации можно принять $H_2 = H_1$. Вычислив превышение, для второй итерации принимаем, что $H_2 = H_1 + h_{12}$. Итерации выполняем до тех пор, пока не выполнится условие $h_{12}^{i+1} = h_{12}^i$, где i – номер итерации.

Формулу можно упростить. Выразим \bar{Z}_2 через \bar{Z}_1 и найдём полуразность

$$\frac{\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1}{2} = \frac{1}{2} \{ 180 - [180 - (180 - \bar{Z}_1) - \varepsilon] - \bar{Z}_1 \} = 90 - \bar{Z}_1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Можно принять

$$\operatorname{tg} \frac{\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1}{2} \approx \operatorname{ctg} \left(\bar{Z}_1 - \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

или, применяя разложение в ряд, получим

$$\operatorname{tg} \frac{\bar{Z}_2 - \bar{Z}_1}{2} \approx \operatorname{ctg} \bar{Z}_1 - \frac{\partial \operatorname{ctg} \bar{Z}_1}{\partial \bar{Z}_1} \frac{\varepsilon}{2} \approx \operatorname{ctg} \bar{Z}_1 + \frac{\varepsilon}{2} \approx \operatorname{ctg} \bar{Z}_1 + \frac{S}{2R_A};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \approx \frac{\varepsilon}{2} \approx \frac{S}{2R_A}; \quad \left(R_A + \frac{H_1 + H_2 + i_1 + l_2}{2} \right) \varepsilon = \bar{S}; \quad S \bar{S} \approx \bar{S}^2,$$

где \bar{S} – расстояние между пунктами 1 и 2, приведённое к средней высоте.

Тогда выражение для h_{12} можно записать следующим образом

$$h_{12} = \bar{S} \operatorname{ctg} \bar{Z}_{12} + \frac{\bar{S}^2}{2R_A} + i - l_2.$$

Для перехода от превышений геодезических высот к превышениям нормальных высот используется выражение

$$h_{12}^{\gamma} = h_{12} - (\zeta_2 - \zeta_1),$$

где ζ_1 и ζ_2 – высоты квазигеоида над эллипсоидом в точках 1 и 2.

1.6. Методы уравнивания геодезических сетей

1.6.1. Общие сведения

При построении геодезических сетей на пунктах выполняются многократные измерения углов, расстояний, превышений, приращений координат и т. д. В результате в сети имеется не одна случайная величина, а система случайных величин, которые могут быть связаны математическими зависимостями.

Допустим, что сеть состоит из трёх пунктов (рис. 1.11), на которых измерены три угла. Каждый угол τ_i измерялся многократно. Если измерены в треугольнике только два угла в сети, то вся математическая обработка сети сводится к нахождению вероятнейших значений углов как среднеарифметических или средневесовых значений. Когда в треугольнике измерены все три угла, то появляется новая избыточная информация об углах (математическая зависимость между углами), вытекающая из геометрических свойств плоского треугольника

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = 180^\circ.$$

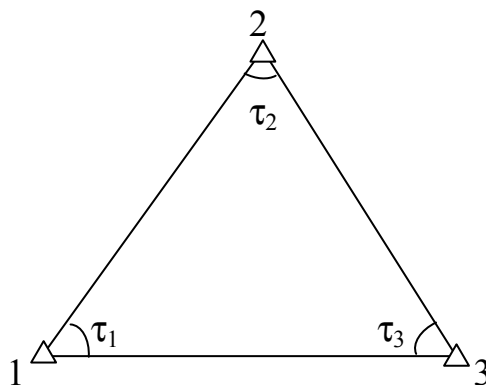


Рис. 1.11. Геодезическая сеть из трёх пунктов

Тогда, помимо каждого из непосредственно измеренных углов τ_i можно вычислить косвенным путём его ещё одно значение, например,

$$\tau'_1 = 180^\circ - \tau_2 - \tau_3.$$

Если назначить непосредственно измеренному углу τ_1 вес P_1 , а косвенно вычисленному углу τ'_1 вес P'_1 , то можно вычислить более точное вероятнейшее значение первого угла по формуле

$$\bar{\tau}_1 = \frac{\tau_1 P_1 + \tau'_1 P'_1}{P_1 + P'_1}. \quad (1.8)$$

Нетрудно показать, что угол $\bar{\tau}_1$ будет более точным, чем τ_1 . Для этого достаточно доказать, что

$$m_{\bar{\tau}_1}^2 < m_{\tau_1}^2.$$

Дифференцируя (1.8) и переходя к квадратам средних квадратических погрешностей, будем иметь

$$m_{\bar{\tau}_1}^2 = \frac{1}{(P_1 + P_1')^2} [m_{\tau_1}^2 P_1^2 + m_{\tau_1'}^2 P_1'^2] = \frac{m_0^2}{(P_1 + P_1')}. \quad (1.9)$$

Здесь учтено, что

$$m_i^2 = \frac{m_0^2}{P_i},$$

где m_0^2 – средняя квадратическая погрешность единицы веса.

С другой стороны

$$m_{\tau_1}^2 = \frac{m_0^2}{P_1}. \quad (1.10)$$

Из сравнения (1.9) с (1.10) видим, что $\frac{m_0^2}{(P_1 + P_1')} < \frac{m_0^2}{P_1}$ и $m_{\bar{\tau}_1} < m_{\tau_1}$.

Таким образом, математическая обработка результатов измерений при построении геодезических сетей должна осуществляться с учетом геометрических связей обрабатываемых величин. Это позволяет получить не только более надежные результаты измерений, но и устранить невязки геометрических условий, возникающих из-за наличия ошибок в измерениях.

Математическая обработка результатов непосредственных измерений при построении геодезических сетей включает в себя предварительные вычисления, уравнивание и оценку точности.

На этапе предварительных вычислений выполняются следующие работы:

1) проверяются полевые журналы и материалы исследований инструментов;

2) измерения приводятся к центрам знаков;

3) результаты измерений, приведенные к центрам знаков, редуцируются с физической поверхности Земли на эллипсоид;

4) если математическую обработку предполагается выполнять не на эллипсоиде, а на плоскости в проекции Гаусса – Крюгера, то тогда измерения следует перенести с эллипсоида на плоскость;

5) оценка качества выполненных непосредственно измерений (обычно она производится по невязкам геометрических условий).

Теоретически задача уравнивания геодезической сети возникает только в том случае, если имеются избыточные измерения и результаты измерений сопровождаются ошибками.

Второе условие носит чисто теоретический характер и выполняется практически всегда.

Основными задачами уравнивания являются:

1) получение уравненных результатов измерений, которые удовлетворяли бы всем существующим в геодезической сети геометрическим условиям и при заданных условиях решения задачи имели бы минимальные средние квадратические погрешности;

2) выполнение оценки точности результатов измерений;

3) оценка точности уравненных координат пунктов и их функций.

В высшей геодезии в основном применяются два классических метода уравнивания: параметрический и корреляционный.

1.6.2. Параметрический метод уравнивания

Объединить результаты разрозненных измерений (измерений, выполненных на разных пунктах геодезической сети) в единую систему (вектор) случайных величин можно двумя различными методами: при помощи *геометрических условий*, возникающих в сети при наличии избыточных измерений и при помощи *параметров сети*, т. е. таких функционально независимых величин, которые однозначно дают возможность построить геодезическую сеть и позволяют однозначно выразить все измеренные величины через эти параметры. Первый способ получил название корреляционного метода, второй – параметрического.

Теоретически, в качестве параметров могут выступать различные элементы геодезических сетей, в том числе и такие элементы, которые не подлежат измерению. Однако при уравнивании геодезических сетей на практике, почти всегда, в качестве параметров принимают координаты пунктов, потому что через координаты наиболее просто можно выразить любые элементы геодезической сети. Число таких параметров в сети в случае двумерного пространства равно удвоенному числу t (количеству определяемых пунктов сети) или утроенному t , если пространство трехмерное.

Кроме того, отметим, что результаты измерений могут быть равноточными или неравноточными, зависимыми или независимыми. Качественно вектор измерений будем оценивать с помощью корреляционной матрицы

$$K_{T'} = \mu^2 Q, \quad (1.11)$$

где μ - ошибка единице веса;

Q – та же корреляционная матрица результатов измерений известная с точностью до постоянного множителя μ^2 .

Корреляционную матрицу Q можно разложить

$$Q = P^{-\frac{1}{2}} R P^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.12)$$

где P – матрица весов, характеризующая точность измерений; R – матрица коэффициентов корреляции, характеризующая коррелированность результатов измерений.

Для упрощения математического изложения введём обозначения:

$\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_t)^T$ – вектор истинных значений параметров;

$X = (x_1, x_2, \dots, x_t)^T$ – вектор уравненных значений параметров;

$X^\circ = (x^\circ_1, x^\circ_2, \dots, x^\circ_t)^\top$ – вектор приближенных значений параметров;
 $\bar{T} = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)^\top$ – вектор истинных значений измеренных величин;
 $T = (t_1, t_2, \dots, t_n)^\top$ – вектор уравненных значений измеренных величин;
 $T' = (\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_n)^\top$ – вектор измерений.

Тогда вектор истинных значений любых измеренных величин (углов, сторон и др.) \bar{T} можно представить как функцию вектора истинных значений параметров \bar{X}

$$\bar{T} = T(\bar{X}). \quad (1.13)$$

Например, истинное значение расстояния \bar{s} на плоскости можно записать следующим образом

$$\bar{s}_{12} = s(\bar{X}) = \sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2},$$

а выражение для истинного значения горизонтального угла $\bar{\tau}_k$ будет записано в виде

$$\bar{\tau}_k = \tau(\bar{X}) = \arctg \frac{\bar{y}_j - \bar{y}_k}{\bar{x}_j - \bar{x}_k} - \arctg \frac{\bar{y}_i - \bar{y}_k}{\bar{x}_i - \bar{x}_k},$$

где \bar{x}, \bar{y} – плоские прямоугольные координаты пунктов, j – пункт правого направления угла, i – пункт левого направление угла.

Зависимость (1.13) может быть и нелинейной, поэтому линеаризуем её, раскладывая в ряд Тейлора вокруг точки t -мерного пространства параметров сети, ограничиваясь только линейными членами разложения. При этом будем полагать

$$\bar{X} = X^\circ + \delta\bar{X}; \quad (1.14)$$

$$\bar{T} = T' + \bar{V}, \quad (1.15)$$

где $\delta\bar{X}_{t,1}, \bar{V}_{n,1}$ – векторы неизвестных истинных поправок, соответственно, параметров и измеренных величин в сети.

Тогда

$$T' + \bar{V} = T(X^\circ) + \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial X} \right)_0 \right\} \cdot \delta\bar{X} + \dots \quad (1.16)$$

Обозначая свободный член уравнения (1.16) через L ,

$$L = T(X^\circ) - T', \quad (1.17)$$

а матрицу производных – через $A_{n,t}$,

$$A_{n,t} = \left\{ \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_0 \right\}_{n,t}, \quad (1.18)$$

получим систему n параметрических уравнений поправок, записанную в матричном виде

$$A_{n,t} \delta\bar{X}_{t,1} + L_{n,1} = \bar{V}_{n,1}. \quad (1.19)$$

Число уравнений в (1.19) равно n – числу выполненных измерений. Неизвестными в уравнениях являются вектор поправок к измерениям \bar{V} (n неизвестных) и вектор поправок к приближенным параметрам $\delta\bar{X}$ (t неизвестных). Таким образом, в системе линейных уравнений (1.19) количество

неизвестных превышает число уравнений. Из линейной алгебры известно, что решить такую систему уравнений невозможно без привлечения каких-либо дополнительных условий. Очень важно отметить, что, введя дополнительные условия для решения системы (1.19), мы получаем из такого решения не истинные значения поправок $\delta\bar{X}$ и \bar{V} , а поправки, удовлетворяющие дополнительному условию. Будем их называть уравненными значениями поправок и обозначать, соответственно, δX и V . Решим систему уравнений (1.19), в общем случае неравноточных и коррелированных измерений, при условии, что

$$V^T Q^{-1} V = \min, \quad (1.20)$$

где Q^{-1} – обратная корреляционная матрица измеренных величин, известная с точностью до постоянного множителя μ^2 (ошибки единицы веса).

Выражение (1.20), являющееся математическим выражением дополнительного условия решения неопределённой системы уравнений (1.19), получило специальное название принципа (метода) наименьших квадратов, так как оно совместно с уравнением (1.19) определяет весь математический аппарат уравнивания геодезических сетей параметрическим способом. Действительно, с математической точки зрения эта задача теперь представляет собой определение абсолютного экстремума функции (1.20).

Дифференцируя по δX выражение (1.20) с учетом уравнения (1.19), находим

$$\frac{d}{dV} (V^T Q^{-1} V) \cdot \frac{dV}{d(\delta X)} = 2V^T Q^{-1} \cdot A = 2(A\delta X + L)^T Q^{-1} A = 2\delta X^T N + 2B^T, \quad (1.21)$$

где

$$N = A^T Q^{-1} A; \quad (1.22)$$

$$B = A^T Q^{-1} L. \quad (1.23)$$

Приравняв к нулю выражение (1.21), получим алгебраическую систему уравнений, которую в геодезии называют нормальной системой уравнений

$$N_{tt} \delta X_{t,1} + B_{t,1} = 0. \quad (1.24)$$

Решение системы уравнений (1.24) может быть выполнено любым известным способом в математике. Решая матричное уравнение (1.24) с помощью обратной матрицы, находим

$$\delta X = -N^{-1} B. \quad (1.25)$$

И, тогда, уравненные значения параметров равны

$$X = X^\circ + \delta X. \quad (1.26)$$

Вектор поправок к измерениям находится по формуле

$$V = A\delta X + L. \quad (1.27)$$

Складывая вектор поправок с вектором измерений, получим вектор уравненных значений измеренных величин

$$T = T' + V. \quad (1.28)$$

Оценка точности в параметрическом методе

Апостериорная оценка точности результатов измерений в параметрическом методе уравнивания выполняется с использованием квадратичной формы (1.20) и сводится к вычислению ошибки единицы веса, т. е. ошибки величины, вес которой при уравнивании был принят за единицу

$$\mu^2 = \frac{V^T Q^{-1} V}{n - t} \quad (1.29)$$

и оценке точности определения уравненного значения любого элемента геодезической сети. При этом отметим, что наиболее полную характеристику для вектора случайных величин можно получить с помощью корреляционной матрицы, так как она содержит в себе информацию и о точности результатов случайных величин (её диагональные элементы), и об их корреляционных зависимостях. Поэтому для полной (сплошной) оценки точности элементов геодезических сетей будем определять их корреляционные матрицы.

С теоретической точки зрения, получение корреляционной матрицы линейного преобразования

$$Y = Y_0 + AX, \quad (1.30)$$

где X , Y – векторы случайных величин, а A – матрица констант, не представляет особого труда

$$K_Y = AK_X A^T = \mu^2 A Q_X A^T. \quad (1.31)$$

Вычисление ошибки единицы веса

Получив уравненные значения параметров сети и, вычислив поправки к измеренным величинам по формуле (1.27), можно сразу получить из выражения (1.29) ошибку единицы веса.

Оценка точности любого элемента геодезической сети

Любой элемент геодезической сети можно выразить в функции параметров сети, т. е.

$$\Phi_{k,l} = \Phi(X) = \Phi(X^0 + \delta X), \quad (1.32)$$

где Φ – вектор оцениваемых k параметров сети.

Линеаризуя (1.32), получим

$$\Phi_{k,l} = \Phi(X^0) + F_{k,t} \cdot \delta X_{t,1}, \quad (1.33)$$

где $F_{k,t} = \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)_0 \right\}_{k,t}$ – матрица производных.

Тогда на основании (1.30) и (1.31)

$$K_\Phi = F_{k,t} K_{\delta X} F_{k,t}^T = \mu^2 F N^{-1} F^T, \quad (1.34)$$

так как легко показать, что

$$K_{\delta X} = \mu^2 N^{-1}. \quad (1.35)$$

Действительно, согласно выражениям (1.25) и (1.23),

$$\delta X = -N^{-1} B = -N^{-1} A^T Q^{-1} L = -GL, \quad (1.36)$$

где

$$G = N^{-1} A^T Q^{-1}. \quad (1.37)$$

Тогда

$$K_{\delta X} = GK_L G^T. \quad (1.38)$$

Но $L = T(X^\circ) - T'$, а на основании (1.30), (1.31) и (1.11)

$$K_L = K_{T'} = \mu^2 Q. \quad (1.39)$$

Подставляя (1.39) в (1.38) с учетом (1.37), получаем выражение (1.35).

Формула (1.35) выражает оценку точности уравненных значений параметров геодезической сети.

Если требуется произвести оценку точности получения вектора уравненных значений измеренных величин, то это можно легко сделать на основании общей формулы (1.34), в которой достаточно заменить матрицу F на матрицу A .

И тогда

$$K_T = \mu^2 AN^{-1}A^T. \quad (1.40)$$

1.6.3. Коррелятный метод уравнивания

Результаты измерений при построении геодезических сетей, как было отмечено ранее, можно объединить в единый вектор случайных величин и с помощью геометрических условий, возникающих в сети при наличии избыточных измерений.

Пусть в результате n измерений в сети получили вектор измерений $T' = (\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_n)^T$. Если в геодезической сети r избыточных измерений, то в сети возникает r независимых геометрических условий (например, условие суммы углов в треугольнике $F(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \bar{\tau}_3) = \bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2 + \bar{\tau}_3 - 180^\circ = 0$ и т. д.). Любое геометрическое условие сети в общем виде может быть представлено математическим уравнением

$$\varphi_j(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \dots, \bar{\tau}_n) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad (1.41)$$

где $\bar{\tau}_i$ (при $i = 1, 2, \dots, n$) – истинные значения измеренных величин.

Если подставить в уравнение (1.41) вместо истинных значений измеренных величин их фактически измеренные значения, то в правой части получим не ноль, а величину ω , отличающуюся от нуля, которую в геодезии называют невязкой данного геометрического условия

$$\varphi_j(\tau'_1, \tau'_2, \dots, \tau'_n) = \omega_j. \quad (1.42)$$

Обозначим через $\bar{V} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)^T$ вектор истинных поправок к измерениям. Подставляя $\bar{\tau}_i = \tau'_i + \bar{v}_i$ в выражение (1.41) и линеаризуя его (раскладывая в ряд Тейлора и сохраняя члены содержащие только первые степени поправок), получаем условные уравнения поправок, которые в матричном виде представляются следующим образом

$$A\bar{V} + W = 0, \quad (1.43)$$

где $A = \left\{ \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial \tau'_i} \right)_{ji} \right\}$ – матрица коэффициентов условных уравнений

размером $r \times n$ (элементами матрицы A являются частные производные от функций геометрических условий по измеренным величинам), а $W_{r,1}$ – вектор свободных членов.

Система линейных уравнений (1.43) неопределенна и имеет множество решений, так как число уравнений r меньше числа неизвестных n . Решение неопределённой системы уравнений (1.43) выполним под условием (1.20)

$$\Phi = V^T Q^{-1} V = \min. \quad (1.44)$$

Решая матричное уравнение (1.43) под условием принципа наименьших квадратов (1.44), мы получим не вектор истинных поправок \bar{V} , а вектор поправок V уравненных значений измеренных величин. Математически эту задачу можно сформулировать как отыскание условного экстремума функции (1.44) при условии (1.43). Наиболее распространенным методом решения такой задачи является метод неопределенных множителей Лагранжа. Этот метод предусматривает минимизацию следующего функционала

$$\Phi = V^T Q^{-1} V - 2\lambda^T (AV + W) = \min, \quad (1.45)$$

где $\lambda_{r \times 1}$ – вектор неопределенных множителей, который в геодезии получил название вектора коррелат. Отсюда и название метода уравнивания – коррелатный метод. Для отыскания минимума функции (1.45) необходимо найти частные производные от функции по вектору поправок V и приравнять их к нулю

$$\frac{\partial \Phi}{\partial V} = V^T Q^{-1} + V^T Q^{-1} - 2\lambda^T A = 0.$$

Отсюда вектор искомых поправок через коррелаты выразится следующим образом

$$V = QA^T \lambda. \quad (1.46)$$

Но в (1.46) вектор коррелат λ пока неизвестен. С целью определения вектора коррелат подставим (1.46) в (1.43), получим линейную систему из r уравнений с r неизвестными

$$N\lambda + W = 0, \quad (1.47)$$

которую называют матричным нормальным уравнением системы.

Здесь

$$N = AQA^T \quad (1.48)$$

представляет собой матрицу коэффициентов нормальных уравнений. Из решения (1.47) находим вектор коррелат

$$\lambda = -N^{-1}W. \quad (1.49)$$

И тогда

$$V = -QA^T N^{-1}W, \quad (1.50)$$

а вектор уравненных измеренных величин $T = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)^T$ получим как

$$T = T' + V. \quad (1.51)$$

Необходимо отметить, что если одну и ту же геодезическую сеть уравнивать параметрическим и коррелятным методами, то результаты получатся совершенно идентичными.

Оценка точности в коррелятном методе

Средняя квадратическая погрешность измерений, вес которых при уравнивании принят за единицу, может быть вычислена по общей формуле (1.29), которая в случае уравнивания коррелятным способом примет вид

$$\mu^2 = \frac{V^T Q^{-1} V}{r}.$$

Однако эта формула неудобна, так как требует определения обратной матрицы Q^{-1} . Поэтому преобразуем её.

Заменив вектор $-V$ его значением (1.46), после простых преобразований с учетом (1.47), получим

$$\mu^2 = \frac{\lambda^T N \lambda}{r} = -\frac{W^T \lambda}{r}. \quad (1.52)$$

С целью упрощения получения формул для оценки точности различных величин предварительно получим выражения для корреляционных матриц вектора W и вектора V .

Нетрудно показать, что вектор невязок W связан с вектором Δ истинных ошибок измерений выражением

$$W = A \cdot \Delta. \quad (1.53)$$

Тогда, применив формулу (1.31), получим

$$K_{\Delta} = K_{T'} = \mu^2 Q, \quad (1.54)$$

$$K_W = \mu^2 A Q A^T = \mu^2 N. \quad (1.55)$$

Подставляя (1.53) и (1.49) в (1.46), находим

$$V = -Q A^T N^{-1} A \cdot \Delta. \quad (1.56)$$

Тогда на основании (1.31) и с учётом (1.54) ковариационная матрица вектора поправок запишется следующим образом

$$K_V = Q A^T N^{-1} A \mu^2 Q A^T N^{-1} A Q = \mu^2 Q A^T N^{-1} A Q. \quad (1.57)$$

Оценка точности уравненных значений измеренных величин

Принимая во внимание (1.56), вектор уравненных значений измеренных величин можно записать следующим образом

$$T = T' + V = \bar{T} + \Delta - Q A^T N^{-1} A \Delta = \bar{T} + (E - Q A^T N^{-1} A) \Delta,$$

где \bar{T} – вектор безошибочных истинных значений измеренных величин,

E – единичная матрица.

Ковариационная матрица вектора уравненных значений измеренных величин определяется согласно формуле (1.31)

$$K_T = (E - Q A^T N^{-1} A) K_{\Delta} (E - Q A^T N^{-1} A)^T.$$

Выполнив перемножение, принимая во внимание (1.54), получим

$$K_T = \mu^2 Q (E - A^T N^{-1} A Q). \quad (1.58)$$

Формула (1.58) даёт возможность получить сплошную оценку точности уравненных значений измеренных величин.

На основании (1.58) с учетом (1.57) и (1.54), можно показать, что уравнивание геодезических сетей приводит к повышению точности определения результатов измерений, так как

$$K_T = K_{T'} - K_V . \quad (1.59)$$

Оценка точности функций уравненных величин

Любой элемент геодезической сети – Φ_j , можно представить как функцию уравненных значений измеренных величин

$$\Phi_j = \Phi(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n). \quad (1.60)$$

В общем случае функция (1.60) нелинейная, поэтому линеаризуем её с учетом того, что $\tau_i = \tau'_i + v_i = \bar{\tau}_i + \Delta_i + v_i$

$$\Phi_j = \Phi(\bar{\tau}_1, \bar{\tau}_2, \dots, \bar{\tau}_n) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_j}{\partial \tau_i} (\Delta_i + v_i) . \quad (1.61)$$

Подставим выражение для вектора поправок (1.56) в формулу (1.61). Тогда в матричном виде вектор к функций уравненных значений измерений представится следующим образом

$$\Phi = \bar{\Phi} + F(\Delta - QA^T N^{-1} A \Delta) = \bar{\Phi} + (F - FQA^T N^{-1} A) \Delta,$$

где $F = \left\{ \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \right) \right\}_{kn}$.

Введём обозначение:

$$\bar{F} = F - FQA^T N^{-1} A .$$

Тогда

$$\Phi = \bar{\Phi} + \bar{F} \Delta ,$$

где $\bar{\Phi}$ – безошибочное истинное значение функции.

Применяя общую формулу (1.31), ковариационная матрица функции уравненных измерений запишется в виде

$$K_\Phi = \bar{F} K_\Delta \bar{F}^T = \mu^2 \bar{F} Q \bar{F}^T . \quad (1.47)$$

1.6.4. Пример совместного уравнивания координатной космической и наземной геодезических сетей параметрическим методом

В настоящее время геодезические сети строят при помощи спутниковых и радиоинтерферометрических измерений [космическая геодезическая сеть (КГС)] и посредством выполнения измерений углов, длин линий и превышений на земной поверхности [наземная геодезическая сеть (НГС)]. На практике часто сети КГС и НГС считаются отдельными самостоятельными построениями, и уравнивание их выполняется независимо. Координаты пунктов КГС вычисляются из уравнивания в системе координат, связанной с общеземным эллипсоидом (общеземные координаты), а пунктов НГС в системе координат референц-эллипсоида (референчные координаты). Однако для повышения точности наземной геодезической сети и определения элементов трансформирования (параметров преобразования) координатных систем (см. п. 2.3.6) целесообразно выполнить совместное уравнивание координат КГС и

НГС. Если координатами пунктов НГС являются референсные геодезические координаты B, L, H , то они могут быть пересчитаны в референсные пространственные прямоугольные координаты по формулам (2.28) – (2.30).

Для наглядности изложения технологии совместного уравнивания координат пунктов КГС и НГС рассмотрим простейшую сеть состоящую из пяти пунктов A, B, C, D, E (рис. 1.12).

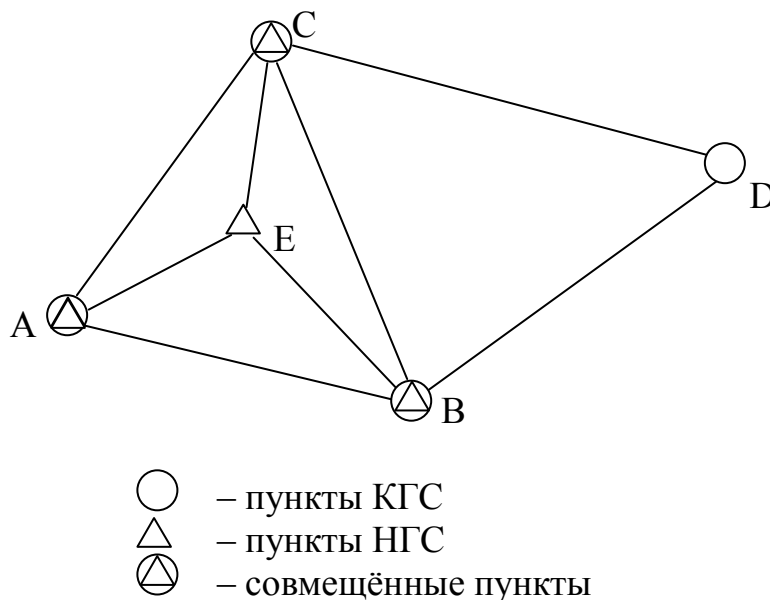


Рис. 1.12. Космическая и наземная геодезические сети

Пункты A, B, C одновременно являются пунктами КГС и НГС. Пункт D относится к КГС, а E – к НГС. Формально пространственные прямоугольные координаты пунктов геодезических сетей будем считать измерениями с известными ковариационными матрицами и постановку задачи сформулируем следующим образом.

Дано.

1. Вектор координат пунктов КГС и ковариационная матрица в общеземной системе

$$T'_O = (X_{O,A}, Y_{O,A}, Z_{O,A}, X_{O,B}, Y_{O,B}, Z_{O,B}, X_{O,C}, Y_{O,C}, Z_{O,C}, X_{O,D}, Y_{O,D}, Z_{O,D})^T; K_O$$

2. Вектор координат пунктов НГС и ковариационная матрица в референционной системе

$$T'_R = (X_{R,A}, Y_{R,A}, Z_{R,A}, X_{R,B}, Y_{R,B}, Z_{R,B}, X_{R,C}, Y_{R,C}, Z_{R,C}, X_{R,E}, Y_{R,E}, Z_{R,E})^T; K_R$$

Требуется найти.

1. В общеземной системе координат вектор уравненных значений координат пунктов из совместной обработки

$$X_O = (X_A, Y_A, Z_A, X_B, Y_B, Z_B, X_C, Y_C, Z_C, X_D, Y_D, Z_D, X_E, Y_E, Z_E)^T.$$

2. Вектор параметров преобразования координат (см. формулу (2.34))

$$X_P = (x, y, z, \omega_x, \omega_y, \omega_z, \Delta m)^T.$$

3. Ковариационную матрицу уравненных значений координат и параметров преобразования.

Тогда, в соответствии с обозначениями раздела 1.6.2, вектор измерений T' составляется из двух векторов

$$T' = (T'_O, T'_R)^T \quad (1.48)$$

с ковариационной матрицей

$$K_{T'} = \mu^2 Q = \begin{pmatrix} K_O & 0 \\ 0 & K_R \end{pmatrix}. \quad (1.49)$$

Аналогично формируются:

1. Вектор уравненных значений оцениваемых параметров

$$X = (X_O, X_P)^T. \quad (1.50)$$

2. Вектор приближенных значений оцениваемых параметров в общеземной системе координат

$$X^0 = (X^0_O, X^0_P)^T, \quad (1.51)$$

где

$$X^0_O = (X^0_A, Y^0_A, Z^0_A, X^0_B, Y^0_B, Z^0_B, X^0_C, Y^0_C, Z^0_C, X^0_D, Y^0_D, Z^0_D, X^0_E, Y^0_E, Z^0_E)^T;$$

$$X^0_P = (x^0, y^0, z^0, \omega^0_x, \omega^0_y, \omega^0_z, \Delta m^0)^T.$$

3. Вектор поправок к приближенным значениям оцениваемых параметров

$$\delta X = (\delta X_O, \delta X_P)^T, \quad (1.52)$$

где

$$\delta X_O = (\delta X_A, \delta Y_A, \delta Z_A, \delta X_B, \delta Y_B, \delta Z_B, \delta X_C, \delta Y_C, \delta Z_C;$$

$$\delta X_D, \delta Y_D, \delta Z_D, \delta X_E, \delta Y_E, \delta Z_E)^T;$$

$$\delta X_P = (\delta x, \delta y, \delta z, \delta \omega_x, \delta \omega_y, \delta \omega_z, \delta \Delta m)^T.$$

В заданной сети общее количество измерений – 24, а оцениваемых параметров – 22. Так как число измерений больше числа оцениваемых параметров, то возникает задача уравнивания по методу наименьших квадратов.

Запишем уравнение связи между вектором измерений, поправками к измерениям V_O , приближенными значениями оцениваемых параметров и их поправками для пунктов КГС

$$T'_O + V_O = X^0_O + \delta X_O.$$

Здесь X^0_O и δX_O – усечённые векторы без координат и поправок пункта E.

Отсюда уравнение поправок для пунктов КГС примет вид

$$\delta X_O + L_O = V_O, \quad (1.53)$$

где $L_O = X^0_O - T'_O$ – вектор свободных членов.

Формулу связи референчных координат с общеземными можно получить таким же путём, как это сделано в разделе 2.3.6 при выводе обратного соотношения (2.34). Поэтому запишем её без вывода

$$\left. \begin{aligned} X_R &= X_O - x + \varepsilon_y Z_O - \varepsilon_z Y_O - \Delta m X_O; \\ Y_R &= Y_O - y - \varepsilon_x Z_O + \varepsilon_z X_O - \Delta m Y_O; \end{aligned} \right\} \quad (1.54)$$

$$Z_R = Z_O - z + \varepsilon_x Y_O - \varepsilon_y X_O - \Delta m Z_O.$$

Или с учетом того, что X_R , Y_R и Z_R содержат погрешности

$$\left. \begin{aligned} X_R + V_R^x &= (X^0 + \delta X) - (x^0 + \delta x) + (\varepsilon_y^0 + \delta \varepsilon_y)(Z^0 + \delta Z) - (\varepsilon_z^0 + \delta \varepsilon_z)(Y^0 + \delta Y) - \\ &\quad - (\Delta m^0 + \delta \Delta m)(X^0 + \delta X); \\ Y_R + V_R^y &= (Y^0 + \delta Y) - (y^0 + \delta y) - (\varepsilon_x^0 + \delta \varepsilon_x)(Z^0 + \delta Z) + (\varepsilon_z^0 + \delta \varepsilon_z)(X^0 + \delta X) - \\ &\quad - (\Delta m^0 + \delta \Delta m)(Y^0 + \delta Y); \\ Z_R + V_R^z &= (Z^0 + \delta Z) - (z^0 + \delta z) + (\varepsilon_x^0 + \delta \varepsilon_x)(Y^0 + \delta Y) - (\varepsilon_y^0 + \delta \varepsilon_y)(X^0 + \delta X) - \\ &\quad - (\Delta m^0 + \delta \Delta m)(Z^0 + \delta Z). \end{aligned} \right\} (1.55)$$

Линеаризуя соотношения (1.55) (отбрасывая члены второго порядка малости) найдём уравнения поправок для пунктов НГС

$$\left. \begin{aligned} (1 - \Delta m^0) \delta X_i - \varepsilon_z^0 \delta Y_i + \varepsilon_y^0 \delta Z_i - \delta x + Z_i^0 \delta \varepsilon_y - Y_i^0 \delta \varepsilon_z - X_i^0 \delta \Delta m + L_{R,i}^x &= V_{R,i}^x; \\ \varepsilon_z^0 \delta X_i + (1 - \Delta m^0) \delta Y_i - \varepsilon_x^0 \delta Z_i - \delta y - Z_i^0 \delta \varepsilon_x + X_i^0 \delta \varepsilon_z - Y_i^0 \delta \Delta m + L_{R,i}^y &= V_{R,i}^y; \\ -\varepsilon_y^0 \delta X_i + \varepsilon_x^0 \delta Y_i + (1 - \Delta m^0) \delta Z_i - \delta z + Y_i^0 \delta \varepsilon_x - X_i^0 \delta \varepsilon_y - Z_i^0 \delta \Delta m + L_{R,i}^z &= V_{R,i}^z, \end{aligned} \right\} (1.56)$$

где $i = A, B, C, E$ – обозначение пунктов НГС;

$L_{R,i}^x = X_i^0 - X_{R,i}$, $L_{R,i}^y = Y_i^0 - Y_{R,i}$, $L_{R,i}^z = Z_i^0 - Z_{R,i}$, – элементы вектора свободных членов уравнений поправок;

$V_{R,i}^x$, $V_{R,i}^y$, $V_{R,i}^z$ – элементы вектора поправок.

Объединяя уравнения поправок (1.53) для пунктов КГС и (1.56) для пунктов НГС, получим общую систему уравнений поправок, которую в матричном виде можно записать

$$A \delta X + L = V, \quad (1.57)$$

где

$$\begin{aligned} L &= (L_0, L_{R,A}^x, L_{R,A}^y, L_{R,A}^z, L_{R,B}^x, L_{R,B}^y, L_{R,B}^z, L_{R,C}^x, L_{R,C}^y, L_{R,C}^z, L_{R,E}^x, L_{R,E}^y, L_{R,E}^z)^T; \\ V &= (V_0, V_{R,A}^x, V_{R,A}^y, V_{R,A}^z, V_{R,B}^x, V_{R,B}^y, V_{R,B}^z, V_{R,C}^x, V_{R,C}^y, V_{R,C}^z, V_{R,E}^x, V_{R,E}^y, V_{R,E}^z)^T \end{aligned}$$

Матрицу коэффициентов параметрических уравнений поправок представим в виде

$$A_{24 \times 22} = \begin{pmatrix} I_{12 \times 12} & O_{12 \times 10} \\ B_{12 \times 12} & C_{12 \times 10} \end{pmatrix},$$

где I – единичная матрица, O – нулевая матрица,

$$B = \begin{pmatrix} P & O & O & O \\ O & P & O & O \\ O & O & P & O \\ O & O & O & O \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} O & -I & G_A \\ O & -I & G_B \\ O & -I & G_C \\ P & -I & G_E \end{pmatrix}.$$

Элементами матриц В и С являются подматрицы

$$P = \begin{pmatrix} 1 - \Delta m^0 & -\varepsilon_z^0 & \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_z^0 & 1 - \Delta m^0 & -\varepsilon_x^0 \\ -\varepsilon_y^0 & \varepsilon_x^0 & 1 - \Delta m^0 \end{pmatrix};$$

$$G_i = \begin{pmatrix} 0 & Z_i^0 & -Y_i^0 & -X_i^0 \\ -Z_i^0 & 0 & X_i^0 & -Y_i^0 \\ Y_i^0 & -X_i^0 & 0 & -Z_i^0 \end{pmatrix},$$

где $i = A, B, C, E$.

Далее совместное уравнивание космической и наземной геодезических сетей и оценка точности выполняются в соответствии с формулами (1.22) – (1.29) и (1.35).

Получив уравненные значения координат пунктов в общеземной системе и параметры преобразования, можно, если возникнет необходимость, вычислить референсные прямоугольные координаты по формулам (1.54).

Аналогичным путём выполняется уравнивание и в референцной системе координат, когда в референцную систему перевычисляются в результате уравнивания пункты КГС. Также можно было бы применить и коррелятивный метод уравнивания [26], где в качестве геометрических условий используется требование совпадения значений координат (перевычисленных с помощью параметров преобразования в одну и ту же систему координат) на совмещенных пунктах КГС и НГС.

2. СФЕРОИДИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

2.1. Параметры земного эллипсоида

Поверхность эллипсоида образуется вращением эллипса вокруг его малой оси. А это значит, что форма и размеры эллипсоида вращения определяются теми же параметрами, что и эллипс. *Земным эллипсоидом* называют эллипсоид вращения, форма и размеры которого с той или иной степенью точности соответствуют форме и размерам Земли [19].

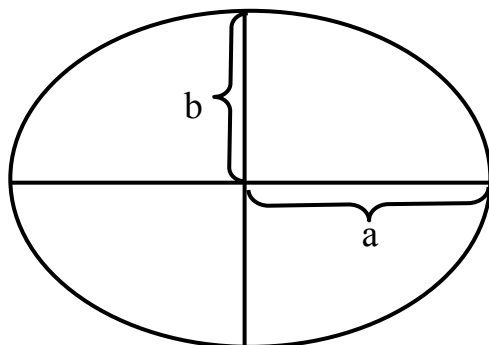


Рис. 2.1. Параметры земного эллипсоида

Основными параметрами земного эллипсоида являются a – большая полуось и b – малая полуось.

Однако очень часто размеры эллипсоида определяются одной из его полуосей, а форма – одной из относительных величин, зависящих от размеров полуосей a и b . В качестве таких относительных величин в геодезии обычно принимают:

$$- \text{ первое сжатие } \alpha = \frac{a - b}{a}; \quad (2.1)$$

$$- \text{ второе сжатие } \alpha' = \frac{a - b}{b}; \quad (2.2)$$

$$- \text{ квадрат первого эксцентриситета } e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}; \quad (2.3)$$

$$- \text{ квадрат второго эксцентриситета } e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2}. \quad (2.4)$$

Кроме того, многие теоретические выкладки упрощаются, если ввести полярный радиус кривизны C , который вычисляется следующим образом

$$C = \frac{a^2}{b} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}}. \quad (2.5)$$

Несмотря на большое количество приведенных параметров, только два из них однозначно определяют форму и размеры земного эллипсоида и являются основными. Один из параметров обязательно должен быть линейным, например a , а вторым может быть либо b , либо α , либо α' , либо e^2 , либо e'^2 .

Основные соотношения между различными элементами эллипсоида:

$$b = a(1 - \alpha) = \frac{a}{1 + \alpha'} = a\sqrt{1 - e^2} = \frac{a}{\sqrt{1 + e'^2}} = \frac{a^2}{C}; \quad (2.6)$$

$$\alpha = \frac{\alpha'}{1 + \alpha'} = 1 - \sqrt{1 - e^2} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2}}; \quad (2.7)$$

$$\alpha' = \frac{\alpha}{1 - \alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} - 1 = \sqrt{1 + e'^2} - 1; \quad (2.8)$$

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2 = 1 - \frac{1}{(1 + \alpha')^2} = \frac{e'^2}{1 - e'^2}; \quad (2.9)$$

$$e'^2 = \frac{2\alpha - \alpha^2}{(1 - \alpha)^2} = 2\alpha' + \alpha'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}; \quad (2.10)$$

$$C = \frac{a^2}{b} = \frac{a}{1 - \alpha} = a(1 + \alpha') = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} = a\sqrt{1 + e'^2}. \quad (2.11)$$

В России, для обработки результатов геодезических измерений, в качестве отсчетной (координатной) поверхности принят референц-эллипсоид Красовского с параметрами: $a = 6378245$ м, $\alpha = 1:298.3$.

2.2. Системы координат, используемые в высшей геодезии

Положение точки на поверхности земного эллипсоида, на поверхности Земли и в пространстве может быть определено с помощью различных систем координат. В геодезии наибольшее распространение получили следующие системы:

1. Система прямоугольных координат x, y , отнесенных к плоскости меридиана данной точки (координаты меридианного эллипса).
2. Система прямоугольных пространственных координат X, Y, Z .
3. Система геодезических пространственных координат B, L, H .
4. Система геоцентрических широт и геодезических долгот Φ, L .
5. Система приведенных широт и геодезических долгот U, L .
6. Полярная система координат A, S, Z .
7. Система плоских прямоугольных координат Гаусса – Крюгера x, y .

Прежде чем перейти к характеристике вышеперечисленных систем координат приведём определения основных сечений эллипсоида.

Меридианный эллипс – след сечения поверхности эллипсоида плоскостью, проходящей через ось вращения.

Меридиан – часть меридианного эллипса, заключенная между полюсами.

Параллель – след сечения поверхности эллипсоида плоскостью, параллельной оси вращения.

Экватор – параллель с наибольшим радиусом (равным большой полуоси).

Дадим простую характеристику перечисленным системам координат.

Система прямоугольных координат меридианного эллипса

Предположим, что положение меридианного эллипса задано. Приняв центр эллипса O за начало координат, ось Ox направим по большой полуоси, а ось Oy – по малой полуоси. Тогда положение точки Q однозначно будет определяться координатами:

$$\begin{aligned}x &= OQ_1, \\y &= OQ_2.\end{aligned}$$

у

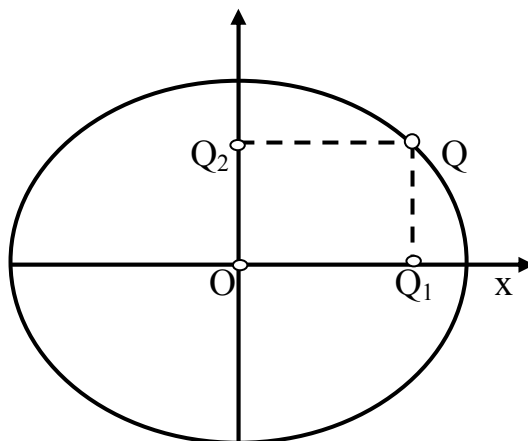


Рис. 2.2. Система прямоугольных координат меридианного эллипса

Эта система координат применяется только при теоретических исследованиях и решении геодезических задач на поверхности эллипсоида.

Система прямоугольных пространственных координат

За начало координат в этой системе принимается центр эллипсоида – O (рис. 2.3). Ось OZ направлена по полярной оси, ось OX расположена по линии пересечения плоскости Гринвичского меридиана и плоскости экватора. Ось OY дополняет систему до правой. Тогда положение точки Q на поверхности эллипсоида будет определено однозначно координатами (рис. 2.3)

$$\begin{aligned}X &= OQ_1; \\Y &= OQ_2; \\Z &= OQ_3.\end{aligned}$$

Система пространственных прямоугольных координат X, Y, Z позволяет также определять положение точек Q' и вне эллипсоида, т. е. на земной поверхности и вне неё. Эта система играет важную роль в спутниковых определениях положения точек. Если центр эллипсоида совпадает с центром масс Земли, то в название системы добавляется слово «геоцентрическая».

- 1) система едина для всей поверхности Земли;
- 2) координатные линии в этой системе параллели и меридианы являются основными линиями любой картографической проекции;
- 3) геодезическая широта и долгота определяют положение нормали к эллипсоиду, проходящей через заданную точку.

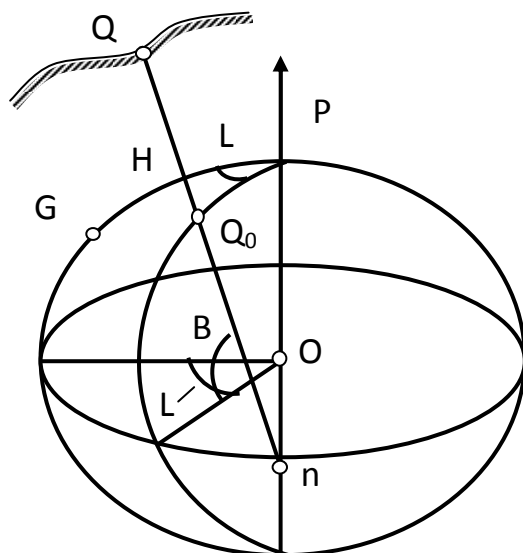


Рис. 2.4. Система геодезических широт и долгот

Система геодезических широт и долгот относится к эллипсоиду в отличие от астрономических широт и долгот связанных с уровенной поверхностью Земли.

Астрономическая широта φ – это острый угол между отвесной линией в данной точке и плоскостью экватора.

Астрономическая долгота λ – есть двугранный угол, образованный плоскостью начального меридиана и плоскостью астрономического меридиана данной точки.

Плоскость астрономического меридиана – плоскость, проходящая через отвесную линию и параллельная оси вращения Земли.

Система координат с геоцентрической широтой

Положение меридианного эллипса, проходящего через точку Q, определяется с помощью геодезической долготы L, а положение точки на меридианном эллипсе определяется геоцентрической широтой.

Геоцентрическая широта – это острый угол между радиусом-вектором текущей точки Q и плоскостью экватора (рис. 2.5).

Эта система криволинейных координат широко используется в математической картографии и теории фигуры Земли.

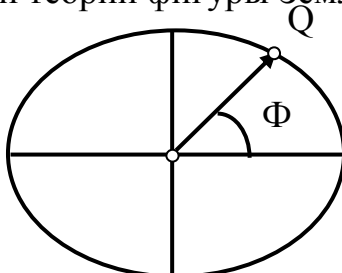


Рис. 2.5. Система с геоцентрической широтой

Система координат с приведённой широтой

Определение положения точки на меридианном эллипсе может осуществляться и с помощью так называемой приведённой широты (рис. 2.6). Для построения приведенной широты, опишем из центра меридианного эллипса окружность радиуса большой полуоси a и спроектируем точку Q на эту окружность по линии параллельной малой оси. Соединив проекцию точки с центром меридианного эллипса, получим линию, которая образует с экватором приведенную широту U .

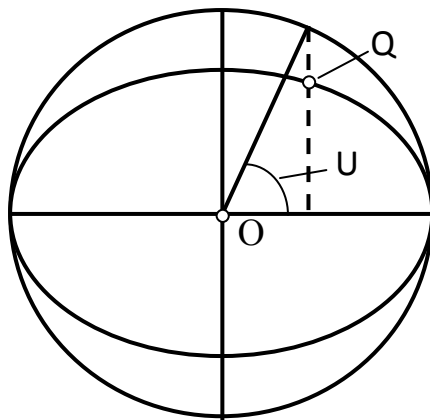


Рис. 2.6. Система с приведённой широтой

Таким образом, *приведённая широта* – это острый угол, составленный плоскостью экватора и линией проведенной из центра эллипсоида до точки, являющейся пересечением окружности радиуса большой полуоси и линии, проходящей через заданную точку параллельно оси вращения.

Приведённая широта имеет очень широкое применение в сфероидической геодезии и используется, в основном, для определения положения точек на поверхности земного эллипсоида.

Система полярных координат

Очень широкое распространение в практике и теории геодезических работ получили различные системы полярных координат. Системы полярных координат могут быть как двухмерные (на плоскости, сфере, эллипсоиде), так и трёхмерные – пространственные.

В двухмерной полярной системе координат за полюс может быть принята любая точка поверхности эллипсоида, а в качестве полярной оси обычно принимается меридиан точки O (рис. 2.7). Тогда положение любой точки Q в этой системе координат будет определяться двумя величинами: геодезическим азимутом A линии OQ и длиной S геодезической линии от полюса до точки Q .

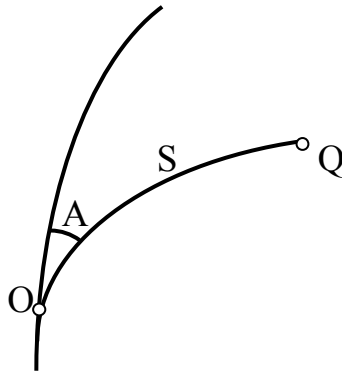


Рис. 2.7. Система полярных координат

Геодезическим азимутом называется двугранный угол, составленный плоскостью геодезического меридиана данной точки и нормальной плоскостью, проходящей через касательную к заданной кривой в данной точке.

Геодезический азимут можно также определить и как плоский угол между касательными в данной точке к меридиану и к заданной линии.

Система полярных сфероидических координат имеет очень широкое распространение и в теории, и в практике геодезических работ. Например, решение главной геодезической задачи есть не что иное, как преобразование полярных координат в геодезические (прямая задача) и геодезических координат – в полярные (обратная задача).

2.3. Связь систем координат

Так как положение точек на эллипсоиде и в пространстве может определяться в различных системах координат, то необходимо знать связь между ними, то есть располагать формулами перехода из одной системы в другую.

2.3.1. Связь координат меридианного эллипса с приведённой широтой

Для установления этой связи совместим на одном и том же чертеже системы координат x, y меридианного эллипса и приведенной широты U .

Тогда непосредственно из рис. 2.8 следует, что

$$x = a \cdot \cos U. \quad (2.12)$$

Точка Q лежит на меридианном эллипсе, поэтому её координаты должны удовлетворять уравнению эллипса

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1. \quad (2.13)$$

Подставляя вместо абсциссы выражение (2.12) и разрешая уравнение (2.13) относительно ординаты, получаем

$$y = b \cdot \sin U. \quad (2.14)$$

Формулы (2.12) и (2.14) решают поставленную задачу.

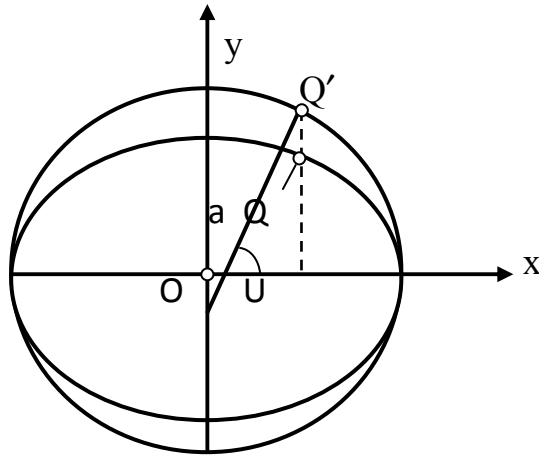


Рис. 2.8. Связь координат меридианного эллипса с приведённой широтой

2.3.2. Связь геодезической, приведенной и геоцентрической широт

Проведём касательную к меридианному эллипсу в точке Q на эллипсоиде и продолжим её до пересечения с положительным направлением оси ox (рис. 2.9). Тогда на основании геометрической интерпретации первой производной можно записать

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(90^\circ + B) = -\operatorname{ctg}B. \quad (2.15)$$

Дифференцируя уравнения координат (2.12) и (2.14) и подставляя полученные производные в выражение (2.15) находим

$$\operatorname{tg} B = a/b \operatorname{tg} U.$$

Но $b = a\sqrt{1 - e^2}$, тогда

$$\operatorname{tg}U = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg}B. \quad (2.16)$$

Соединив точку Q с центром меридианного эллипса O, согласно рис. 2.9 имеем

$$\operatorname{tg}\Phi = \frac{y}{x} = \frac{b \cdot \sin U}{a \cdot \cos U} = \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg}U. \quad (2.17)$$

Из сравнения равенств (2.16) и (2.17) и учитывая, что

$$\sqrt{1 - e^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + e'^2}},$$

окончательно получаем формулы связи различных широт

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}U &= \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg}B = \sqrt{1 + e'^2} \operatorname{tg}\Phi, \\ \operatorname{tg}\Phi &= \sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg}U = (1 - e^2) \operatorname{tg}B. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

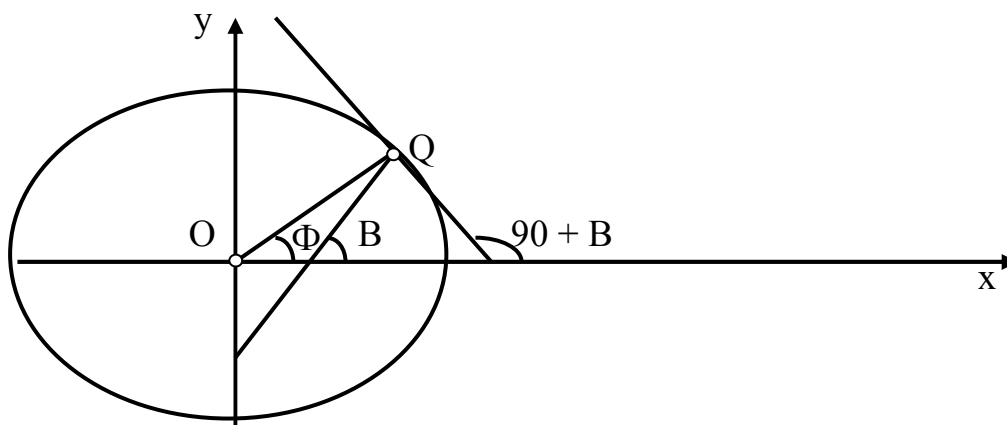


Рис. 2.9. Связь геодезической, приведенной и геоцентрической широт

В дальнейшем, при выводе формул, часто будут использоваться тригонометрические функции $\sin U$ и $\cos U$, поэтому получим для них выражения.

Возводя в квадрат левые и правые части первой формулы (2.18) и прибавляя к ним по единице, имеем

$$1 + \operatorname{tg}^2 U = 1 + \operatorname{tg}^2 B - e^2 \operatorname{tg}^2 B = 1 + \operatorname{tg}^2 \Phi + e'^2 \operatorname{tg}^2 \Phi;$$

$$\frac{1}{\cos^2 U} = \frac{1}{\cos^2 B} - e^2 \frac{\sin^2 B}{\cos^2 B} = \frac{1}{\cos^2 \Phi} + \frac{e'^2 \sin^2 \Phi}{\cos^2 \Phi}.$$

Откуда после простых преобразований находим

$$\cos U = \frac{\cos B}{W} = \frac{\cos \Phi}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \Phi}}, \quad (2.19)$$

где $W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}. \quad (2.20)$

Перемножая почленно выражение для косинуса (2.19) и первую формулу (2.18), получаем выражение для синуса

$$\sin U = \frac{\sin B \sqrt{1 - e^2}}{W} = \frac{\sin B}{V} = \frac{\sin \Phi \sqrt{1 + e'^2}}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \Phi}}. \quad (2.21)$$

В этом выражении

$$V = \frac{W}{\sqrt{1 - e^2}} = \sqrt{1 + \eta^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 U}}, \quad (2.22)$$

где $\eta^2 = e'^2 \cos^2 B$.

Величины W и V присутствуют во многих формулах сфероидической геодезии, поэтому им даны специальные названия – сфероидические функции. W – первая сфероидическая функция, V – вторая сфероидическая функция.

2.3.3. Связь координат меридианного эллипса с различными системами широт

На основании формул координат (2.12), (2.14) и выражений для синуса (2.21) и косинуса (2.19), получаем

$$x = a \cos U = \frac{a \cos B}{W} = \frac{a \cos \Phi}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \Phi}} = \frac{a \cos \Phi \sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \Phi}}; \quad (2.23)$$

$$y = b \sin U = \frac{b \sin B}{V} = \frac{a(1 - e^2) \sin B}{W} = \frac{a \sin \Phi}{\sqrt{1 + e'^2 \sin^2 \Phi}}. \quad (2.24)$$

Введя обозначение

$$N = \frac{a}{W}, \quad (2.25)$$

запишем выражения для координат меридианного эллипса в таком виде, в котором в дальнейшем они часто будут использоваться

$$\left. \begin{aligned} x &= N \cos B; \\ y &= N(1 - e^2) \sin B. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

2.3.4. Связь координат меридианного эллипса с пространственными прямоугольными координатами

Совместим на одном чертеже систему прямоугольных координат меридианного эллипса с системой прямоугольных пространственных координат для точки Q, лежащей на эллипсоиде (рис. 2.10), тогда будем иметь

$$\left. \begin{aligned} X &= x \cos L = N \cos B \cos L; \\ Y &= x \sin L = N \cos B \sin L; \\ Z &= y = N(1 - e^2) \sin B. \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

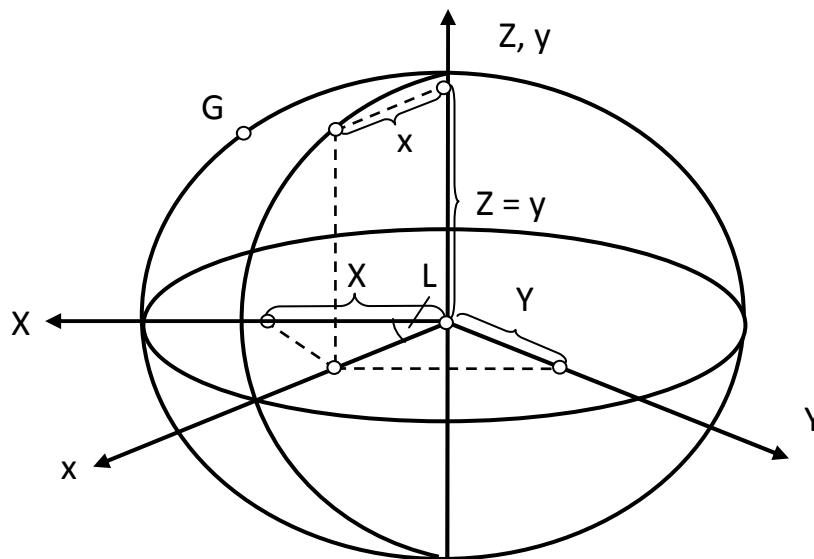


Рис. 2.10. Связь координат меридианного эллипса с пространственными прямоугольными координатами

2.3.5. Связь пространственных геодезических координат

2.3.6. B, L, H с пространственными прямоугольными координатами X, Y, Z

Геодезическая высота H точки, расположенной над эллипсоидом, в совокупности с геодезической широтой B и геодезической долготой L, даёт

возможность однозначно определять положение точек и в пространстве (вне эллипсоида).

Формулы вычисления прямоугольных координат по геодезическим легко выводятся на основании рис. 2.11. Спроектируем на плоскость экватора отрезок нормали nQ_1 . Очевидно, что длина проекции этого отрезка D равна

$$D = (N + H) \cos B = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad (2.28)$$

а координата Z вычисляется по формуле

$$Z = (N + H) \sin B - \overline{on}.$$

Но из второй формулы (2.26) и рис. 2.11 следует

$$\overline{on} = \overline{cn} - \overline{co} = N \sin B - y = N \sin B - N(1 - e^2) \sin B = Ne^2 \sin B \quad (2.29)$$

и тогда

$$\left. \begin{aligned} X &= (N + H) \cos B \cos L; \\ Y &= (N + H) \cos B \sin L; \\ Z &= [N(1 - e^2) + H] \sin B. \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

Формулы обратного перехода от пространственных прямоугольных координат к пространственным геодезическим координатам имеют более сложный вид.

Поделив второе уравнение (2.30) на первое, найдём долготу точки

$$L = \operatorname{arctg} \frac{Y}{X}.$$

Третье уравнение (2.30) можно записать в виде

$$\operatorname{tg} B - \frac{Ne^2 \sin B}{D} = \frac{Z}{D}.$$

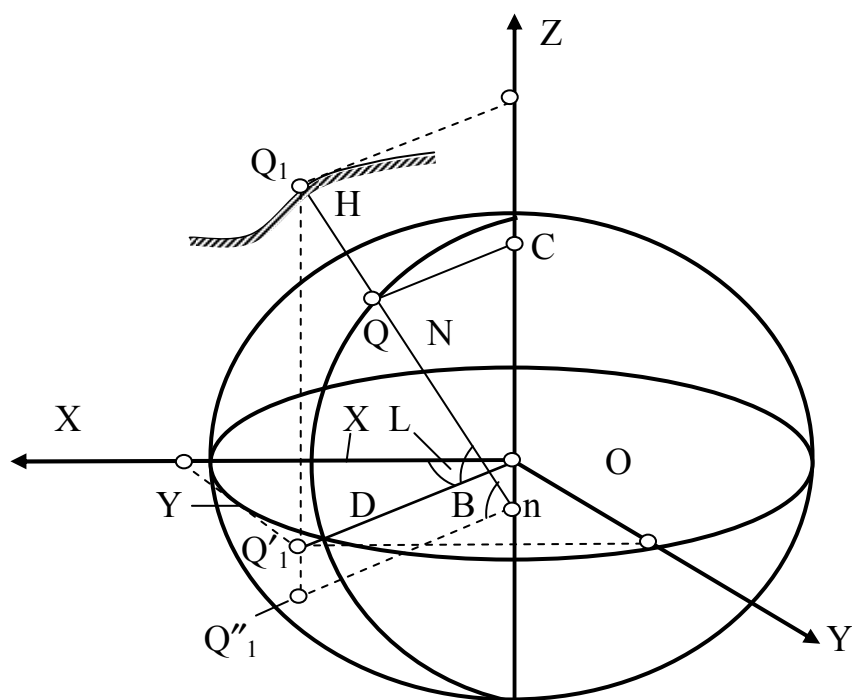


Рис. 2.11. Связь пространственных геодезических координат с пространственными прямоугольными координатами

Подставив вместо D в левой части выражение (2.28), после несложных преобразований получим

$$\operatorname{tg}B = \frac{Z}{D(1 - \bar{e}^2)}, \quad (2.31)$$

где

$$\bar{e}^2 = \frac{e^2}{1 + \frac{H}{N}}. \quad (2.32)$$

Формулу для вычисления геодезической высоты H по известной широте B несложно вывести из выражения (2.28)

$$H = \frac{D}{\cos B} - N. \quad (2.33)$$

Из формулы (2.31) видно, что широта B может быть определена только в результате итеративного процесса. В первом приближении, полагая $H = 0$, получаем, что $\bar{e}^2 = e^2$, тогда из формулы (2.31) можно определить приближенное значение B . Затем во втором приближении вычисляем

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}$$

и по формуле (2.33) находим значение высоты H . Имея N и H , определяем \bar{e}^2 по формуле (2.32) и переходим к вычислению нового значения B . Третья и последующие итерации повторяются уже с более точными значениями широты. Процесс заканчивается, когда значения широты и высоты перестают изменяться от итерации к итерации.

2.3.7. Связь двух систем прямоугольных пространственных координат

В настоящее время для определения положения точек на земной поверхности или в околоземном пространстве очень широкое распространение получили методы спутниковой геодезии. Местоположение спутникового приёмника определяется в прямоугольной пространственной геоцентрической системе координат $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$, отнесенной к общеземному эллипсоиду. Однако в практике геодезических работ того или иного государства используются так называемые референцные системы пространственных прямоугольных координат X, Y, Z , т. е. системы координат, отнесённые к референц-эллипсоиду. В связи с этим возникает проблема, связанная с преобразованием одной системы прямоугольных координат в другую.

Пусть известны референцные пространственные прямоугольные координаты точки в системе координат, начало которой совпадает с центром референц-эллипсоида, ось X образуется пересечением плоскостей Гринвичского меридиана и экватора, ось Z совпадает с малой полуосью эллипсоида, а ось Y дополняет систему до правой. Предположим также, что в общеземной прямоугольной пространственной системе координат, связанной аналогично с общеземным эллипсоидом, известны координаты начала референцной системы $\bar{R} = (x, y, z)^T$ и углы Эйлера $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, которые полностью определяют

ориентировку референцной системы координат относительно общеземной системы, когда оси двух систем не параллельны (см. рис. 2.12). В действительности положение начал и осей систем координат задаётся координатами опорных пунктов.

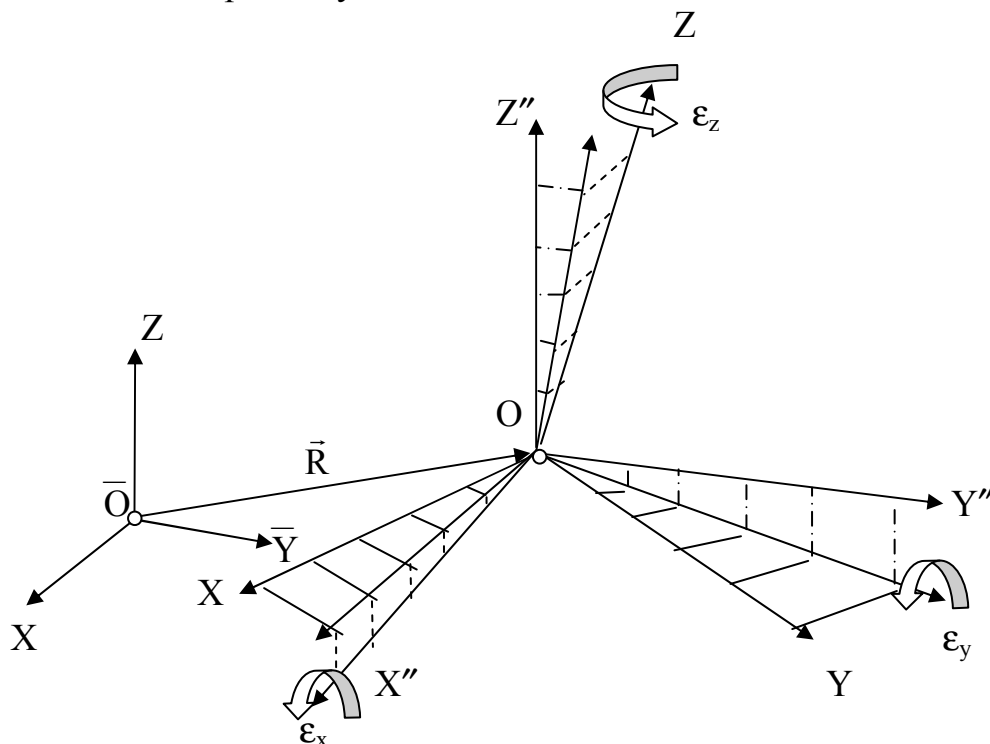


Рис. 2.12. Преобразование референцных прямоугольных координат в общеземные.

Если вычислить расстояния по референцным и общеземным координатам двух точек, то они будут отличаться друг от друга из-за разномасштабности систем координат. Образно говоря, длины линий и координаты выражены через метры разной длины. Разномасштабность вызвана неисключенными систематическими погрешностями линейных измерений при создании глобальных и локальных геодезических сетей. Для определения отличия масштаба референцной системы от единицы можно воспользоваться формулой

$$\Delta m = \frac{\bar{S} - S}{S},$$

где \bar{S} – расстояние, вычисленное по общеземным координатам двух точек,

S – расстояние между теми же двумя точками, но вычисленное по референцным координатам.

Отсюда легко получить формулы преобразования расстояний и координат за разномасштабность референцной и общеземной систем

$$\bar{S} = (1 + \Delta m)S;$$

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = (1 + \Delta m) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}.$$

Для преобразования референчных координат за непараллельность осей систем координат, необходимо осуществить три вращения референчной системы вокруг осей X, Y, Z на углы Эйлера $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$.

Первое вращение. Вращая плоскость OXY вокруг оси Z на угол ϵ_z , добиваемся того, чтобы плоскость XOZ стала параллельной оси абсцисс общеземной системы \overline{OX} .

Второе вращение. Вращая вокруг нового положения оси Y плоскость OXZ на угол ϵ_y , добиваемся того, чтобы ось OX стала параллельной оси \overline{OX} .

Третье вращение. Вращая вокруг нового положения оси OX плоскость OYZ на угол ϵ_x , добиваемся чтобы ось OZ стала параллельной оси \overline{OZ} . Ось OY автоматически станет параллельной оси \overline{OY} .

Математически преобразование координат вращениями представляется следующим образом

$$\begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{pmatrix} = R_1(\epsilon_x)R_2(\epsilon_y)R_3(\epsilon_z) \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix},$$

где R_1, R_2, R_3 – матрицы вращения.

Найдём произведение этих матриц

$$\begin{aligned} R_1R_2R_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\epsilon_x & \sin\epsilon_x \\ 0 & -\sin\epsilon_x & \cos\epsilon_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\epsilon_y & 0 & -\sin\epsilon_y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\epsilon_y & 0 & \cos\epsilon_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\epsilon_z & \sin\epsilon_z & 0 \\ -\sin\epsilon_z & \cos\epsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos\epsilon_y \cos\epsilon_z & \cos\epsilon_y \sin\epsilon_z & -\sin\epsilon_y \\ \sin\epsilon_x \sin\epsilon_y \cos\epsilon_z - \cos\epsilon_x \sin\epsilon_z & \sin\epsilon_x \sin\epsilon_y \sin\epsilon_z + \cos\epsilon_x \cos\epsilon_z & \sin\epsilon_x \cos\epsilon_y \\ \cos\epsilon_x \sin\epsilon_y \cos\epsilon_z + \sin\epsilon_x \sin\epsilon_z & \cos\epsilon_x \sin\epsilon_y \sin\epsilon_z - \sin\epsilon_x \cos\epsilon_z & \cos\epsilon_x \cos\epsilon_y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и пренебрегая членами второго порядка малости (порядок вторых членов разложения в ряд $\sin\epsilon_i$ и $\cos\epsilon_i$), запишем

$$R_1R_2R_3 = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon_z & -\epsilon_y \\ -\epsilon_z & 1 & \epsilon_x \\ \epsilon_y & -\epsilon_x & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon_z & -\epsilon_y \\ -\epsilon_z & 1 & \epsilon_x \\ \epsilon_y & -\epsilon_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix}.$$

Для полного перехода от референчных координат точки к координатам в общеземной системе осталось добавить координаты начала референчной системы. Опустив промежуточные переходы, получим

$$\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} (1 + \Delta m) + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Перемножая и складывая матрицы в правой части и пренебрегая членами второго порядка малости, получим окончательные формулы для преобразования координат точки из референцной системы координат в общеземную систему прямоугольных координат

$$\left. \begin{aligned} \bar{X} &= X + X\Delta m + \varepsilon_z Y - \varepsilon_y Z + x; \\ \bar{Y} &= Y + Y\Delta m + \varepsilon_x Z - \varepsilon_z X + y; \\ \bar{Z} &= Z + Z\Delta m + \varepsilon_y X - \varepsilon_x Y + z. \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

2.3.8. Связь геодезических координат референцного эллипсоида с геодезическими координатами общеземного эллипсоида

Наиболее часто используемый путь преобразований такой

$$B, L, H \Rightarrow X, Y, Z \Rightarrow \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z} \Rightarrow \bar{B}, \bar{L}, \bar{H},$$

где символ \Rightarrow обозначает преобразование.

Все формулы этих преобразований выведены выше. Для вывода формул прямого перехода $B, L, H \Rightarrow \bar{B}, \bar{L}, \bar{H}$ продифференцируем выражение (2.30), получим

$$dX = -(M + H) \sin B \cos L dB - (N + H) \cos B \sin L dL + \cos B \cos L dH;$$

$$dY = -(M + H) \sin B \sin L dB + (N + H) \cos B \cos L dL + \cos B \sin L dH;$$

$$dZ = (M + H) \cos B dB + \sin B dH.$$

В матричном виде это можно записать следующим образом

$$\begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} dB \\ dL \\ dH \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} -(M+H)\sin B \cos L & -(N+H)\cos B \sin L & \cos B \cos L \\ -(M+H)\sin B \sin L & (N+H)\cos B \cos L & \cos B \sin L \\ (M+H)\cos B & 0 & \sin B \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует обратное преобразование

$$\begin{pmatrix} dB \\ dL \\ dH \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

где

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-\sin B \cos L}{M+H} & \frac{-\sin B \sin L}{M+H} & \frac{\cos B}{M+H} \\ \frac{-\sin L}{(N+H)\cos B} & \frac{\cos L}{(N+H)\cos B} & 0 \\ \frac{\cos B \cos L}{\cos B \cos L} & \frac{\cos B \sin L}{\cos B \sin L} & \sin B \end{pmatrix}.$$

Из выражения (2.34) следует

$$\left. \begin{aligned} dX &= \bar{X} - X = X\Delta m + \varepsilon_z Y - \varepsilon_y Z + x; \\ dY &= \bar{Y} - Y = Y\Delta m + \varepsilon_x Z - \varepsilon_z X + y; \\ dZ &= \bar{Z} - Z = Z\Delta m + \varepsilon_y X - \varepsilon_x Y + z. \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

Подставляя формулы (2.28) и (2.30) в (2.36), а (2.36) в (2.35), после многочисленных преобразований получим

$$\left. \begin{aligned} dB &= \bar{B} - B = -\frac{\rho''}{M+H} [x \sin B \cos L + y \sin B \sin L - z \cos B - \Delta a e^2 \sin B \cos B - \\ &\quad - a \Delta e^2 \sin B \cos B (1 + e^2 \sin^2 B) + a e^2 \Delta m \sin B \cos B] - \\ &\quad - (\varepsilon_x'' \sin L - \varepsilon_y'' \cos L) \left[1 + \frac{e'^2}{\left(1 + \frac{H}{M}\right)} \cos 2B \right]; \\ dL &= \bar{L} - L = -\frac{\rho''}{(N+H) \cos B} (x \sin L - y \cos L) - \varepsilon_z'' + (\varepsilon_x'' \cos L + \varepsilon_y'' \sin L) \operatorname{tg} B \times \\ &\quad \times \left[1 - \frac{e^2}{\left(1 + \frac{H}{N}\right)} \right]; \\ dH &= \bar{H} - H = x \cos B \cos L + y \cos B \sin L + z \sin B - \Delta a W + \frac{a \Delta e^2}{2W} \sin^2 B + \\ &\quad + a W \Delta m + H \Delta m + \frac{a e^2 \sin B \cos B}{\rho'' W} (\varepsilon_y'' \cos L - \varepsilon_x'' \sin L), \\ \bar{B} &= B + (\bar{B} - B); \quad \bar{L} = L + (\bar{L} - L); \quad \bar{H} = H + (\bar{H} - H), \end{aligned} \right\} \quad (2.37)$$

где

$$\Delta a = \bar{a} - a; \quad \Delta e^2 = \bar{e}^2 - e^2; \quad \rho'' = 206265'';$$

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 B)^3}}; \quad N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}};$$

\bar{a} и \bar{e}^2 – параметры общеземного эллипсоида.

2.4. Длины дуг меридианов и параллелей

Из бесчисленного множества кривых, которые можно построить на поверхности эллипсоида вращения, наибольший интерес для геодезии представляют меридианы, параллели, нормальные сечения и геодезические линии. Меридианы и параллели являются координатными линиями криволинейной системы координат. Нормальные сечения являются линиями тесно связанными с геодезическими измерениями. Геодезические линии – это кратчайшие линии между точками как на поверхности эллипсоида, так и на любой другой поверхности. Геодезические линии позволяют образовывать на эллипсоиде сфероидические треугольники. Рассмотрим последовательно перечисленные кривые.

2.4.1. Меридианы

Меридиан – есть заключённое между полюсами сечение поверхности эллипсоида плоскостью проходящей через ось вращения.

Отсюда следует, что меридиан является плоской кривой, уравнение которой $L = \text{const}$, а широта B изменяется от 0 до $\pm 90^\circ$.

Так как эта кривая имеет постоянную долготу для всех точек, то в геодезии она принята в качестве одной из координатных линий.

Радиус кривизны меридиана

Основными характеристиками любой плоской кривой являются её радиус кривизны и длина дуги этой кривой. Пусть точки 1 и 2 располагаются на меридиане на бесконечно близком расстоянии (рис. 2.13). Радиусом кривизны меридиана M является отношение дифференциала дуги меридиана ds к дифференциалу широты dB

$$M = \frac{ds}{dB}. \quad (2.38)$$

Элемент дуги можно выразить через прямоугольные координаты меридианного эллипса

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.39)$$

Элемент угла смежности можно найти из следующих преобразований

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg}(90 + B) = -\text{ctg}B; \quad (2.40)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sin^2 B} \frac{dB}{dx}; \quad (2.41)$$

$$dB = \frac{d^2y}{dx^2} \sin^2 B dx$$

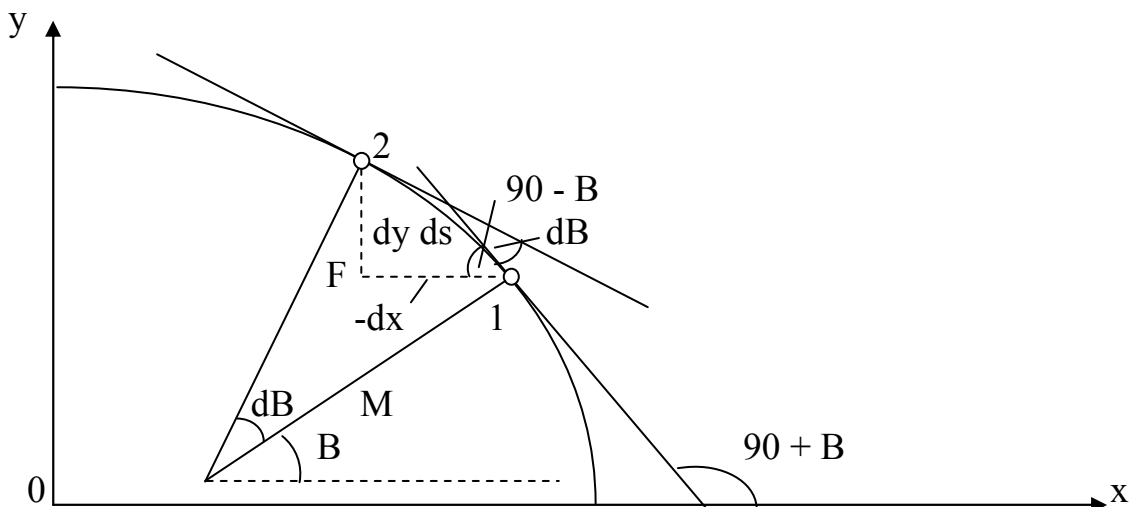


Рис. 2.13. Радиус кривизны меридиана

Из треугольника F12 на рис. 2.13 видно, что $\sin(90 - B) = \frac{dy}{ds}$. С учётом этого и выражения (2.39), получим

$$dB = \frac{d^2y}{dx^2} \left[1 - \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \right] dx = \frac{d^2y}{dx^2} \frac{dx}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]}. \quad (2.42)$$

Формула для радиуса кривизны меридиана в общем виде находится путём подстановки выражений (2.39) и (2.42) в (2.38)

$$M = - \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}. \quad (2.43)$$

Знак минус поставлен потому, что $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, а M – положительная величина.

Выведем формулу для вычисления радиуса кривизны меридиана как функцию параметров эллипсоида и геодезической широты.

Воспользуемся выражениями (2.40) и (2.41). В (2.41) производную $\frac{dB}{dx}$ найдём путём дифференцирования (2.12) и (2.16) с учётом (2.19), (2.21) и (2.22)

$$dx = -a \sin U dU = - \frac{a \sin B}{V} \frac{dB}{WV},$$

$$\frac{dB}{dx} = - \frac{W^3}{a(1-e^2) \sin B}. \quad (2.44)$$

Подставляя (2.44) в (2.41), а (2.41) и (2.40) в (2.43), получим

$$M = \frac{(1 + \operatorname{ctg}^2 B)^{\frac{3}{2}} \sin^3 B \cdot a(1-e^2)}{W^3} = \frac{\left(\frac{1}{\sin^2 B} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sin^3 B \cdot a(1-e^2)}{W^3};$$

или

$$M = \frac{a(1-e^2)}{W^3} = \frac{C}{V^3}, \quad (2.45)$$

где

$$C = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Длина дуги меридиана

Поскольку эллипсоид есть поверхность переменной кривизны, то выразить аналитически в конечном виде длину дуги меридиана не представляется возможным. Поэтому вначале составим дифференциальное уравнение длины дуги меридиана. С этой целью на меридиане выберем бесконечно близкие точки Q_1 и Q_2 . Обозначим элементарную (бесконечно малую) дугу меридиана через dS (рис. 2.14). Тогда проведя в точках Q_1 и Q_2 нормали, можно написать, что элементарная длина дуги меридиана (можно считать частью окружности, так как радиусы кривизны в точках Q_1 и Q_2 почти совпадают) равна

$$dS = MdB. \quad (2.46)$$

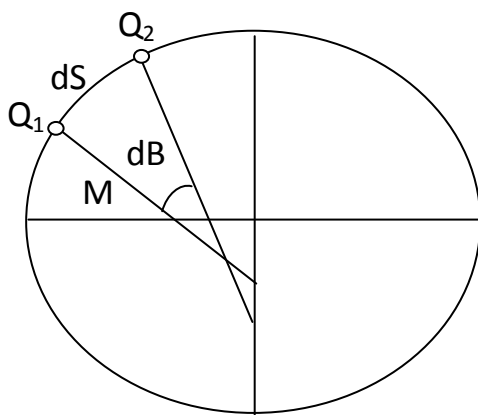


Рис. 2.14. Элементарная дуга меридиана

Интегрируя левую и правую части от точки с широтой B_1 до точки с широтой B_2 , получим

$$S_M = \int_{B_1}^{B_2} MdB. \quad (2.47)$$

Подставим в (2.47) выражение для радиуса кривизны меридиана (2.45), тогда

$$S_M = a(1 - e^2) \int_{B_1}^{B_2} \frac{dB}{\left(\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}\right)^3} = a(1 - e^2) \int_{B_1}^{B_2} \left(1 - e^2 \sin^2 B\right)^{-\frac{3}{2}} dB. \quad (2.48)$$

Таким образом, для вычисления S_M необходимо найти интеграл. Однако этот интеграл является эллиптическим, а из математики известно, что эллиптические интегралы не берутся с помощью конечного числа элементарных функций. Это значит, что нельзя получить замкнутую строгую формулу для вычисления S_M . Поэтому выполняется приближенное интегрирование, которое можно осуществить двумя путями:

- 1) применить какой-нибудь метод численного интегрирования;
- 2) разложить подынтегральную функцию в ряд, а затем каждый член ряда, представленный простой элементарной функцией проинтегрировать.

В вычислительной математике разработано множество различных способов численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Но в геодезии наибольшее распространение получили методы Симпсона и Рунге – Кутты и их модификации.

Метод Симпсона заключается в следующем. Разделим область интегрирования от a до b на четное число одинаковых отрезков и в узлах вычислим значения подынтегральной функции. Пусть область из двух соседних отрезков образует зону (рис. 2.15). В каждой зоне заменим подынтегральную функцию параболой $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, проходящей через три точки. Введём локальную систему координат зоны, начало которой совместим с левой границей зоны (рис. 2.16).

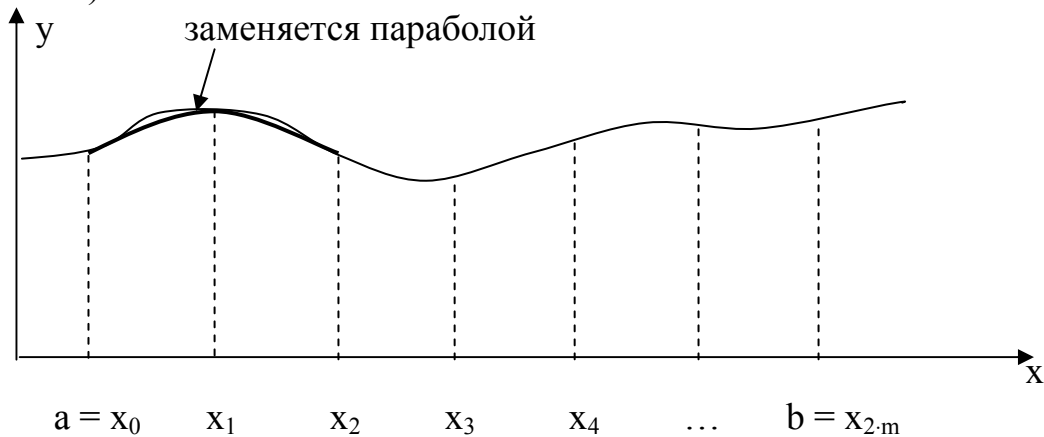


Рис. 2.15. Метод Симпсона

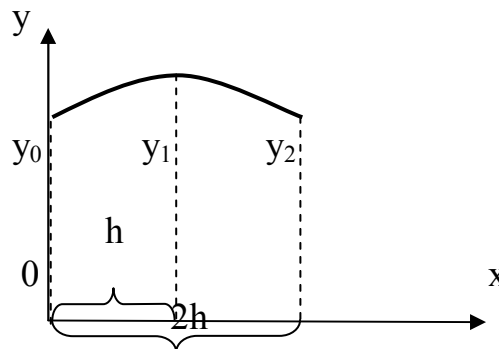


Рис. 2.16. Локальная система координат зоны

Подставляя в формулу параболы координаты узлов зоны, получим три уравнения

$$y_0 = a_0;$$

$$y_1 = a_0 + a_1h + a_2h^2;$$

$$y_2 = a_0 + 2a_1h + 4a_2h^2.$$

Умножая второе уравнение на 4 и складывая левые и правые части, получим

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 6a_0 + 6a_1h + 8a_2h^2. \quad (2.49)$$

Найдём интеграл, подставляя в подынтегральное выражение формулу параболы

$$\int_0^{2h} y dx = \int_0^{2h} (a_0 + a_1x + a_2x^2) dx = 2a_0h + 2a_1h^2 + \frac{8a_2h^3}{3} = \frac{h}{3} (6a_0 + 6a_1h + 8a_2h^2). \quad (2.50)$$

Из сравнения (2.50) с (2.49) можно записать

$$\int_0^{2h} y dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2). \quad (2.51)$$

Интеграл в следующей трёхточечной зоне (x_2, x_3, x_4) очевидно будет равен

$$\int_0^{2h} y dx = \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

и т. д.

Если сложить интегралы всех зон в интервале от a до b , получим следующее выражение

$$\int_a^b y dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + 2y_6 + \dots + 2y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}).$$

После приведения подобных членов, учитывая, что $h = \frac{b-a}{2m}$, окончательная рабочая формула вычисления интеграла примет вид

$$\int_a^b y dx = \frac{b-a}{6m} \{y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1})\}. \quad (2.52)$$

Для вывода рабочей формулы длины дуги меридиана требуется проинтегрировать методом Симпсона выражение (2.47). Разобьем область интегрирования на два участка (рис. 2.17).

Широту средней параллели обозначим B_{cp} . Обозначениям на рис. 2.17 соответствуют следующие величины в формуле (2.52)

$$B_1 = a; B_2 = b; M_1 = y_0; M_{cp} = y_1; M_2 = y_{2m}.$$

Тогда

$$S_M = \frac{B_2 - B_1}{6} (M_1 + M_2 + 4M_{cp}). \quad (2.53)$$

Эту формулу можно упростить. Если принять, что

$$\frac{M_1 + M_2}{2} \approx M_{cp},$$

тогда

$$S_M = M_{cp} \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''}.$$

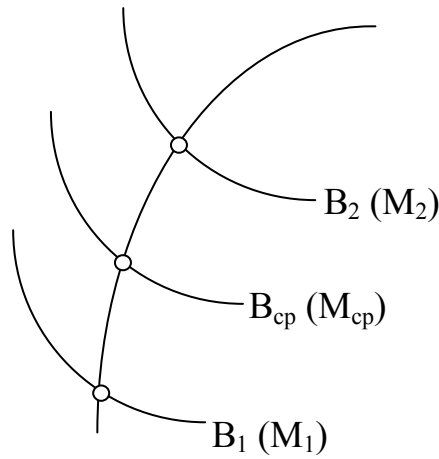


Рис. 2.17. Узловые точки для вычисления длины дуги меридиана методом Симпсона

Полученная формула позволяет вычислять длины дуг с точностью до миллиметров при расстояниях, не превышающих 100 км.

Более строгую формулу можно получить путем разложения подынтегральной функции в (2.48) в ряд по биному Ньютона. Ограничиваясь членами порядка e^6 и принимая во внимание, что

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 B &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2B; \\ \sin^4 B &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2B + \frac{1}{8} \cos 4B; \\ \sin^6 B &= \frac{5}{16} - \frac{15}{32} \cos 2B + \frac{3}{16} \cos 4B - \frac{1}{32} \cos 6B, \end{aligned} \right\} \quad (2.54)$$

получим

$$\begin{aligned} (1 - e^2 \sin^2 B)^{-\frac{3}{2}} &= 1 + \frac{3}{2} e^2 \sin^2 B + \frac{15}{8} e^4 \sin^4 B + \frac{35}{16} e^6 \sin^6 B + \dots = \\ &= 1 + \frac{3}{2} e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2B \right) + \frac{15}{8} e^4 \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2B + \frac{1}{8} \cos 4B \right) + \frac{35}{16} e^6 \left(\frac{5}{16} - \dots \right) + \dots = \\ &= \bar{A} - \bar{B} \cos 2B + \bar{C} \cos 4B - \bar{D} \cos 6B + \dots, \end{aligned}$$

где

$$\bar{A} = 1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 + \frac{175}{256} e^6 + \dots;$$

$$\bar{B} = \frac{3}{4} e^2 + \frac{15}{16} e^4 + \frac{525}{512} e^6 + \dots;$$

$$\bar{C} = \frac{15}{64} e^4 + \frac{105}{256} e^6 + \dots;$$

$$\bar{D} = \frac{35}{512} e^6 + \dots$$

Длину дуги представим в следующем виде

$$S_M = a(1 - e^2) \int_{B_1}^{B_2} (\bar{A} - \bar{B} \cos 2B + \bar{C} \cos 4B - \bar{D} \cos 6B + \dots) dB.$$

Интегрируя почленно это выражение, находим

$$S_M = a(1 - e^2) \left[\bar{A}(B_2 - B_1) - \frac{\bar{B}}{2} (\sin 2B_2 - \sin 2B_1) + \frac{\bar{C}}{4} (\sin 4B_2 - \sin 4B_1) - \frac{\bar{D}}{6} (\sin 6B_2 - \sin 6B_1) + \dots \right].$$

(2.55)

Формула (2.55) обеспечивает вычисление длин дуг меридианов с точностью до миллиметров при самых произвольных расстояниях вплоть до 10 000 км.

Длина дуги меридиана, отсчитываемая от экватора

Помимо геометрических задач длины дуг меридианов приходится вычислять при переходе от B, L к x, y в проекции Гаусса – Крюгера. Причём длины дуг вычисляются от экватора до параллели с заданной широтой (рис. 2.18)

и обозначаются большой буквой X . Подставляя в формулу (2.55) $B_1 = 0$ (широта экватора), получим

$$X = a(1 - e^2) \left\{ \bar{A} \cdot B - \frac{\bar{B}}{2} \sin 2B + \frac{\bar{C}}{4} \sin 4B - \frac{\bar{D}}{6} \sin 6B \dots \right\}. \quad (2.56 \text{ a})$$

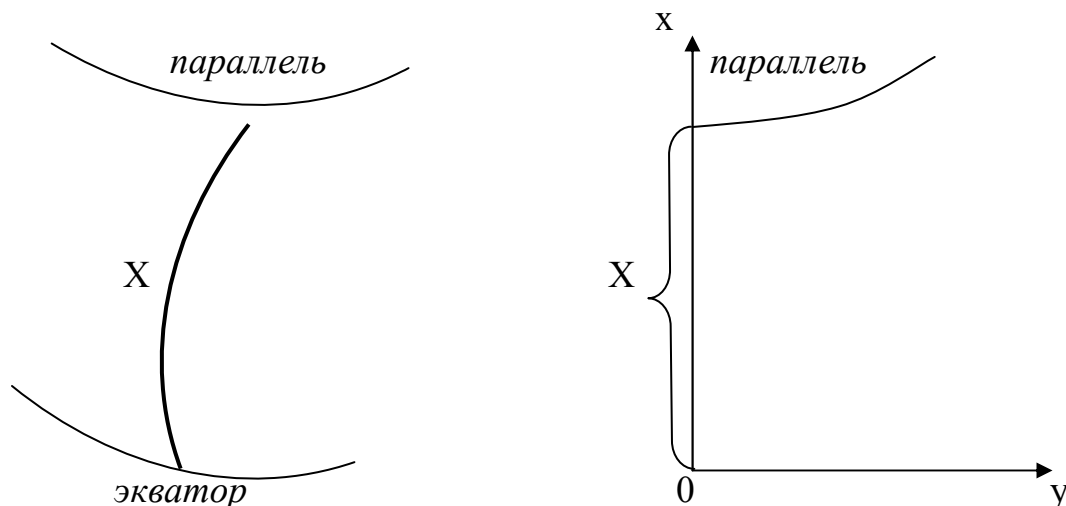


Рис. 2.18. Длина дуги меридиана, отсчитываемая от экватора

Вычисление широты по известной длине дуги меридиана, отсчитываемой от экватора

При переходе от плоских прямоугольных координат x, y в проекции Гаусса – Крюгера к геодезическим координатам B и L возникает необходимость решить и обратную задачу, т. е. по известной длине дуги меридиана X найти соответствующую геодезическую широту B_x . Формулы для вычисления B_x выводятся из выражения (2.56 а) и имеют следующий вид

$$\left. \begin{aligned} B_x &= B_0 + (B_x - B_0); \\ B_0 &= \frac{X}{A}; \\ B_x - B_0 &= (\alpha + \beta \cos 2B_0 - \gamma \sin^2 2B_0) \sin 2B_0, \end{aligned} \right\} (2.56 \text{ б})$$

где коэффициенты в формулах зависят от эксцентриситета эллипсоида и равны

$$A = a \left(1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{3}{64} e^4 - \frac{5}{256} e^6 - \dots \right); \quad \alpha = \frac{3}{8} e^2 + \frac{3}{16} e^4 + \frac{91}{512} e^6 + \dots;$$

$$\beta = \frac{21}{128} (e^4 + e^6) + \dots; \quad \gamma = \frac{151}{1536} e^6 + \dots$$

2.4.2. Параллели

Параллель – это сечение поверхности эллипсоида плоскостью перпендикулярной оси вращения.

Из определения следует, что параллель есть плоская замкнутая кривая, все точки которой удалены от оси вращения эллипсоида на одинаковое расстояние и геометрически представляет собой окружность радиуса r . Уравнение параллели $B = \text{const}$. Как и в случае меридиана, основными характеристиками этой кривой будут: радиус кривизны и длина дуги параллели.

Радиус параллели

Если обозначить радиус параллели через r , то согласно рис. 2.19

$$r = x = a \cdot \cos U = \frac{a \cdot \cos B}{W} = N \cos B. \quad (2.57)$$

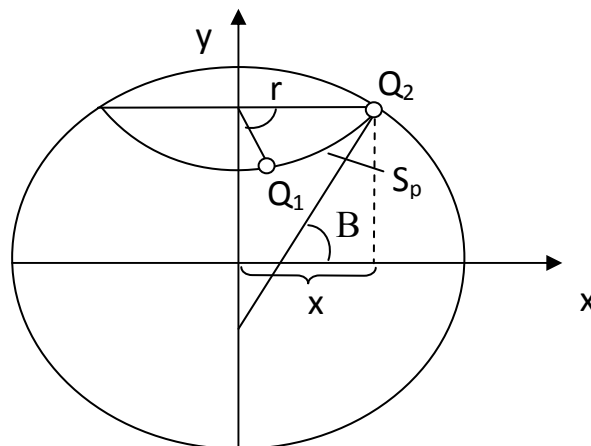


Рис. 2.19. Радиус параллели

Длина дуги параллели

Учитывая, что параллель представляет собой окружность, длину дуги параллели можно найти как произведение радиуса параллели на центральный угол, который представляет собой разность долгот, т. е.

$$S_p = r \cdot \Delta L = a \cdot \cos U (L_2 - L_1)'' = \frac{a \cdot \cos B (L_2 - L_1)''}{W \rho''} = N \cos B \frac{(L_2 - L_1)''}{\rho''}. \quad (2.58)$$

2.5. Радиусы кривизны нормальных сечений

Нормальные сечения

Очень большое значение в геодезии имеют нормальные сечения. *Нормальное сечение* – это сечение поверхности эллипсоида плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности эллипсоида в заданной точке. Из этого определения следует, что нормальное сечение является плоской кривой, обладающей тем замечательным свойством, что в начальной точке главная нормаль кривой совпадает с нормалью к поверхности. Через заданную точку поверхности можно провести бесчисленное множество нормальных сечений.

Выведем формулы радиусов кривизны нормальных сечений.

Теорема Эйлера

Рассечем эллипсоид в заданной точке Q плоскостью, отстоящей от касательной плоскости на бесконечно малое расстояние z и параллельной данной касательной (рис. 2.20) [5]. Длина дуги s , также как и z , является бесконечно малой величиной, поэтому дугу s можно считать прямой. Из

подобия треугольников QQ_1Q_2 и $Q_1Q_2Q_3$ справедливо соотношение $\frac{z}{c} = \frac{c}{(2R - z)}$

или $c^2 = 2Rz - z^2$, где c и R – радиусы кривизны.

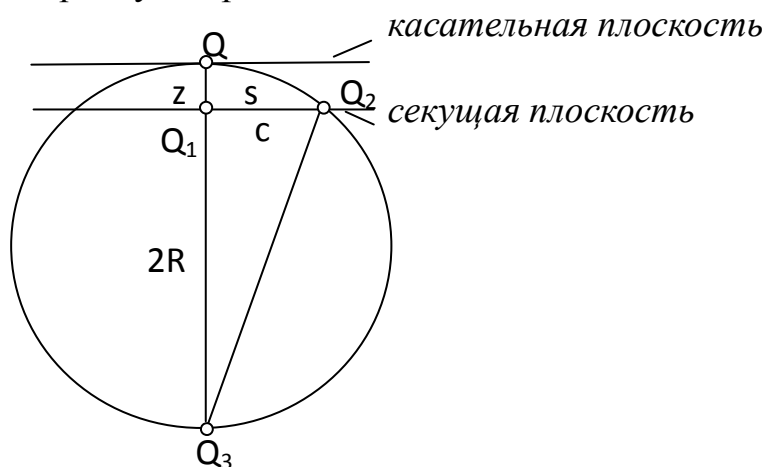


Рис. 2.20. Сечение плоскостью, параллельной касательной плоскости

Так как величина z по сравнению с R малая величина, то можно записать

$$c^2 = 2Rz. \quad (2.59)$$

На рис. 2.21 показан эллипс, полученный в результате пересечения поверхности эллипсоида плоскостью параллельной и бесконечно близкой касательной плоскости в точке Q . Обозначим через \bar{b} полуось эллипса, лежащую в плоскости меридиана, а через \bar{a} – полуось лежащую перпендикулярно плоскости меридиана в плоскости первого вертикала.

Уравнение эллипса в системе координат x, y , связанной с этим эллипсом будет иметь вид

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \quad (2.60)$$

Из рис. 2.21 видно, что $x = r \cdot \cos A$, а $y = r \cdot \sin A$. Подставим эти выражения в формулу (2.60), разделим на r^2 , и получим

$$\frac{\cos^2 A}{b^2} + \frac{\sin^2 A}{a^2} = \frac{1}{r^2}. \quad (2.61)$$

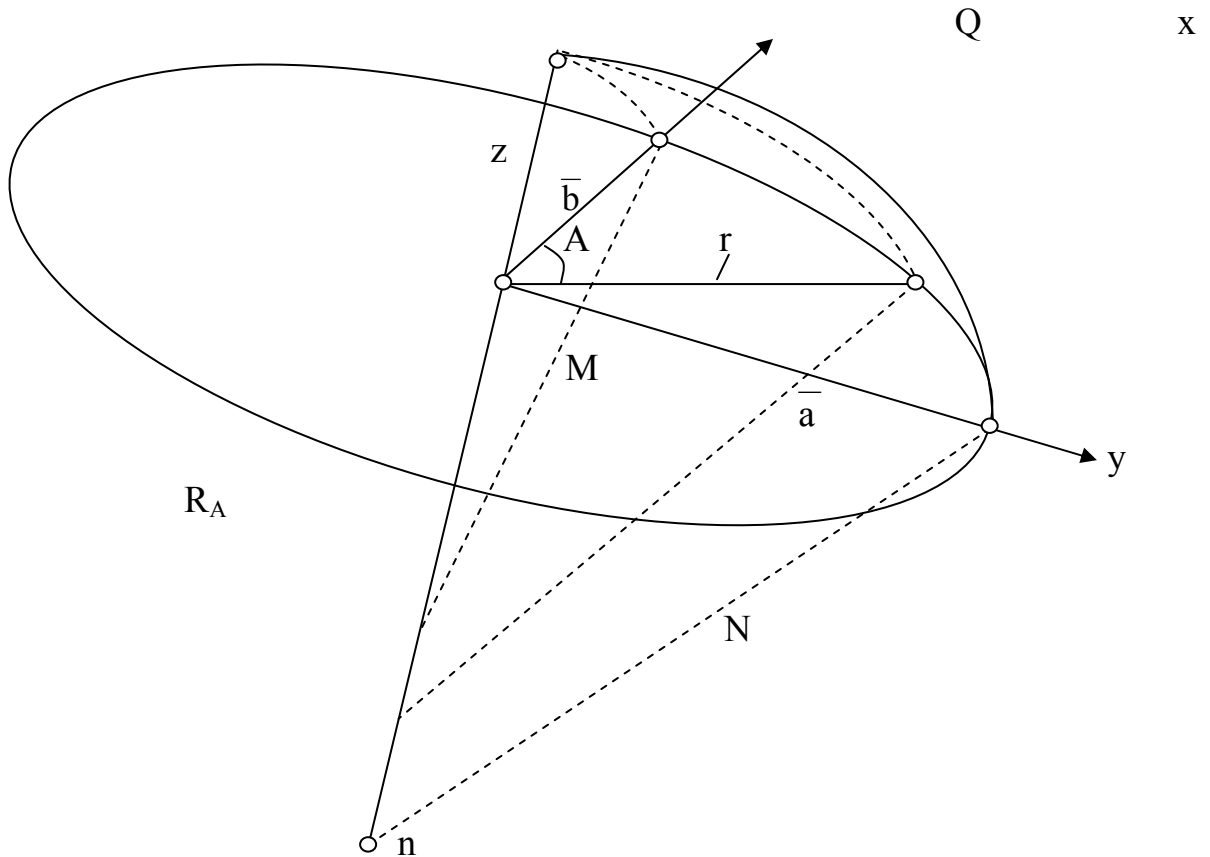


Рис. 2.21. Эллиптическое сечение перпендикулярное нормали nQ

Используя формулу (2.59) запишем выражения для a^2 , b^2 и r^2

$$\left. \begin{aligned} a^2 &= 2Nz; \\ b^2 &= 2Mz; \\ r^2 &= 2R_A z. \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

Подставим (2.62) в (2.61), умножим на $2z$ и получим следующее уравнение

$$\frac{1}{R_A} = \frac{\cos^2 A}{M} + \frac{\sin^2 A}{N}. \quad (2.63)$$

Формула (2.63) получена Л. Эйлером и называется *формулой Эйлера*. Она связывает радиус кривизны произвольного нормального сечения с радиусами кривизны меридиана (M) и первого вертикала (N). Формулу для радиуса кривизны меридиана (2.45) мы уже вывели, теперь получим формулу для радиуса кривизны первого вертикала на основании *теоремы Менье*.

Всякое сечение поверхности плоскостью, не проходящей через нормаль, называется наклонным сечением. Радиус кривизны наклонного сечения можно получить из радиуса кривизны нормального сечения, если у них общая касательная. Примером наклонного сечения может быть параллель, а нормального – сечение первого вертикала. В точке Q у них общая касательная, поскольку параллель и первый вертикал перпендикулярны меридиану (рис. 2.22).

На основании (2.59) запишем $c^2 = 2Nz$, $c_1^2 = 2rz_1$. На рис. 2.22 (вид сверху) видно, что при уменьшении z размер эллипса уменьшается и величина c_1 стремится к c . Если пренебречь бесконечно малыми высших порядков, то можно считать, что $c = c_1$. Тогда $2Nz = 2rz_1$. Отсюда

$$r = N \cdot \frac{z}{z_1} = N \cdot \cos B. \quad (2.64)$$

Эта зависимость открыта Менье (1754 – 1793). Теорема Менье формулируется следующим образом: если через точку поверхности проведены два сечения – нормальное и наклонное, причем в рассматриваемой точке эти два сечения имеют общую касательную, то радиус кривизны наклонного сечения будет равен радиусу кривизны нормального сечения, умноженному на косинус угла между плоскостями этих двух сечений.

Формулу радиуса кривизны параллели мы уже вывели ранее, тогда радиус кривизны первого вертикала равен

$$N = \frac{r}{\cos B} = \frac{a \cdot \cos B}{W \cos B} = \frac{a}{W} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{W\sqrt{1-e^2}} = \frac{C}{V}. \quad (2.65)$$

Из формулы (2.63) радиус кривизны произвольного нормального сечения равен

$$R_A = \frac{MN}{N \cos^2 A + M \sin^2 A} = \frac{MN}{M \left(\frac{N}{M} \cos^2 A + 1 - \cos^2 A \right)}.$$

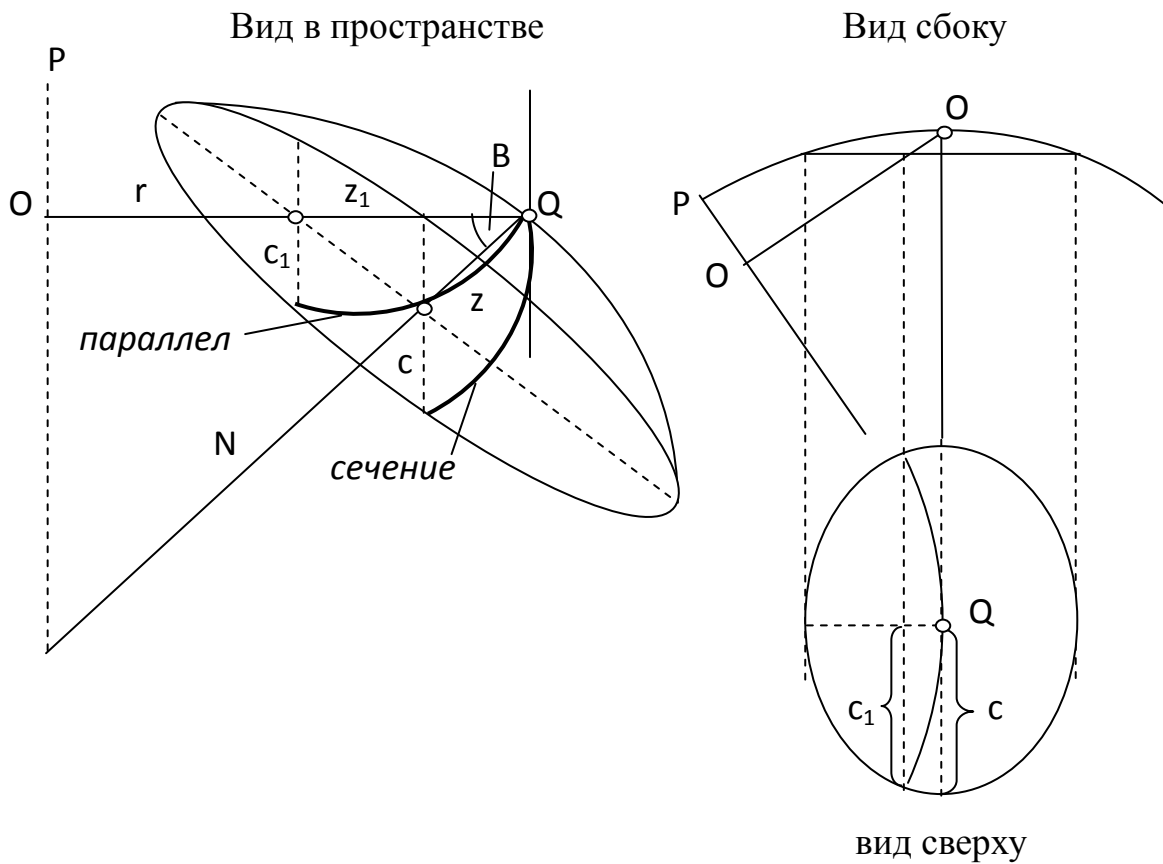


Рис. 2.22. Геометрия доказательства теоремы Менье

Учитывая, что

$$\frac{N}{M} = \frac{CV^3}{VC} = V^2 = 1 + e'^2 \cos^2 B ,$$

а также используя ранее введённое обозначение в формуле (2.22)

$$\eta^2 = e'^2 \cos^2 B,$$

получим

$$R_A = \frac{N}{1 + \eta^2 \cos^2 A} . \quad (2.66)$$

Формула (2.66) является общей для вычисления радиуса кривизны любого нормального сечения. Из формулы видно, что радиус кривизны меридиана M при $A = 0, 180^\circ$ является минимальным, а первого вертикала при $A = 90, 270^\circ$ – максимальным. Поэтому сечения меридиана и первого вертикала называются главными нормальными сечениями.

2.6. Средний радиус кривизны

Очень часто в геодезии, например, при отображении эллипсоида на плоскость или сферу требуется средний радиус кривизны из радиусов всех нормальных сечений, которые можно построить в данной точке.

За средний радиус в высшей геодезии принимается величина

$$R_{cp} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum R_A}{n} . \quad (2.67)$$

Количество нормальных сечений n в промежутке $A = 0 \div 2\pi$ легко связать с углом между нормальными сечениями ΔA

$$n = \frac{2\pi}{\Delta A}.$$

Подставляя это выражение в (2.67), получим

$$R_{cp} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta A \rightarrow \infty} \sum R_A \Delta A = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R_A dA = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{MN}{N \cos^2 A + M \sin^2 A} dA.$$

Разделив числитель и знаменатель на $N \cos^2 A$, а затем вынося за знак интеграла \sqrt{MN} , найдем выражение для среднего радиуса

$$R_{cp} = \frac{2\sqrt{MN}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\frac{M}{N}} \frac{dA}{\cos^2 A}}{1 + \left(\sqrt{\frac{M}{N}} \operatorname{tg} A\right)^2}.$$

Введём новую переменную t , которая записывается следующим образом

$$t = \sqrt{\frac{M}{N}} \operatorname{tg} A.$$

Тогда

$$dt = \sqrt{\frac{M}{N}} \frac{dA}{\cos^2 A}.$$

Выражение для радиуса с учетом новой переменной примет вид

$$R_{cp} = \frac{2\sqrt{MN}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2\sqrt{MN}}{\pi} \operatorname{arctg} t \Big|_0^{\infty}.$$

Подставляя пределы в это выражение, получим окончательную формулу

$$R_{cp} = \sqrt{MN} = \frac{C}{V^2}. \quad (2.68)$$

Основные формулы для вычисления радиусов кривизны

$$\left. \begin{aligned} N &= \frac{C}{V}; \\ R &= \frac{C}{V^2}; \\ M &= \frac{C}{V^3}; \\ R_A &= \frac{N}{1 + \eta^2 \cos^2 A}. \end{aligned} \right\} \quad (2.69)$$

2.7. Площадь и размеры рамок сфероидической трапеции

При решении некоторых специальных задач в геодезии требуется знать площади и размеры рамок сфероидических трапеций. Например, при

построении съёмочной трапеции нужны размеры сторон рамок трапеции, а при определении объёмов съёмочных работ необходимо знать площади трапеций того или иного масштаба. Учитывая, что съёмочные трапеции до масштаба 1:2000 включительно ограничены меридианами и параллелями, задача сводится к вычислению размеров сторон и площадей сфероидических трапеций.

Сфероидическая трапеция – это геометрическая фигура на поверхности эллипсоида, ограниченная меридианами и параллелями.

Площадь трапеции

Представим на чертеже бесконечно малую трапецию, ограниченную бесконечно близкими меридианами и параллелями.

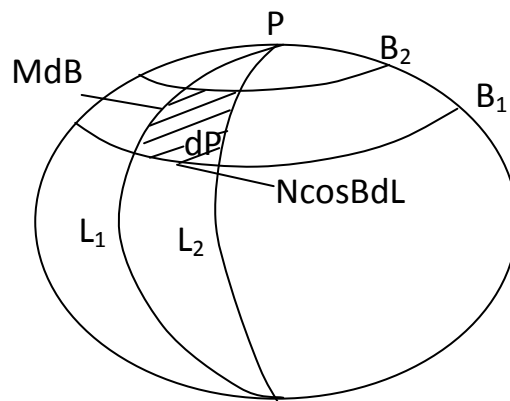


Рис. 2.23. Площадь элементарной трапеции

Рассматривая dP как площадь элементарной трапеции, мы можем записать $dP = MN \cos B dB dL$.

Подставляя вместо M , N и W выражения (2.45), (2.65) и (2.20), получим

$$P = a^2(1-e^2) \int_{B_1}^{B_2} \int_{L_1}^{L_2} \frac{\cos B}{(1-e^2 \sin^2 B)^2} dB dL = b^2(L_2 - L_1) \int_{B_1}^{B_2} \frac{\cos B}{(1-e^2 \sin^2 B)^2} dB. \quad (2.70)$$

При интегрировании в правой части этого выражения сделаем замену переменных. Пусть $e \cdot \sin B = \sin \psi$, тогда $\cos B dB = \frac{1}{e} \cos \psi d\psi$, и формула площади трапеции примет вид

$$P = b^2(L_2 - L_1) \frac{1}{e} \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{d\psi}{\cos^3 \psi}. \quad (2.71)$$

Интегрируя по частям формулу (2.71) (для сокращения записи находится неопределённый интеграл, опуская константы интегрирования), найдём

$$\int \frac{d\psi}{\cos^3 \psi} = \int \frac{d\psi}{\cos^2 \psi} \cdot \frac{1}{\cos \psi} = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\cos \psi} - \int \operatorname{tg}^2 \psi \sec \psi d\psi.$$

Проинтегрируем интеграл в правой части полученного выражения ещё раз по частям

$$\int \frac{d\psi}{\cos^3 \psi} = \frac{\sin \psi}{\cos^2 \psi} - \int \frac{d\psi}{\cos^3 \psi} + \int \frac{d\psi}{\cos \psi}.$$

После приведения подобных членов, получим

$$\int \frac{d\psi}{\cos^3 \psi} = \frac{\sin \psi}{2\cos^2 \psi} + \frac{1}{2} \int \frac{d\psi}{\cos \psi} = \frac{\sin \psi}{2\cos^2 \psi} + \frac{1}{2} \int \frac{\cos \psi d\psi}{1 - \sin^2 \psi}.$$

Выполним замену переменных, пусть $t = \sin \psi$, $dt = \cos \psi d\psi$, тогда интеграл в правой части будет равен

$$\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right|.$$

Отсюда

$$\int \frac{d\psi}{\cos^3 \psi} = \frac{\sin \psi}{2\cos^2 \psi} + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1 + \sin \psi}{1 - \sin \psi} \right|.$$

Подставляя это выражение в формулу (2.71) и возвращаясь к старым переменным, найдём после несложных преобразований точную формулу для вычисления площади сфероидической трапеции

$$P = b^2 (L_2 - L_1) \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin B_2}{W_2^2} - \frac{\sin B_1}{W_1^2} + \frac{1}{e} \ln \left| \frac{(1 + e \sin B_2) W_1}{(1 + e \sin B_1) W_2} \right| \right\}, \quad (2.72 \text{ а})$$

где $W_i = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_i}$, при $i = 1, 2$.

Можно получить для вычисления площади трапеции и более простую приближённую формулу, если разложить в ряд подынтегральное выражение в (2.70)

и почленно проинтегрировать. В результате получим

$$P = b^2 (L_2 - L_1) \left[\sin B_2 - \sin B_1 + \frac{2}{3} e^2 (\sin^3 B_2 - \sin^3 B_1) + \frac{3}{5} e^4 (\sin^5 B_2 - \sin^5 B_1) + \frac{4}{7} e^6 (\sin^7 B_2 - \sin^7 B_1) + \dots \right]. \quad (2.72 \text{ б})$$

Формулы (2.72 а) и (2.72 б) являются универсальными в том смысле, что они позволяют вычислять не только площади сфероидических трапеций, а и площади сфероидических поясов, заключённые между двумя параллелями с широтами B_1 и B_2 (рис. 2.23), площадь полусфероида или площадь всей поверхности эллипсоида вращения.

Так, например, положив в формуле (2.72 б) $(L_2 - L_1) = 2\pi$; $B_1 = 0$ и $B_2 = \pi/2$ и удвоив полученное выражение, находим формулу для вычисления площади всей поверхности эллипсоида

$$P_3 = 4\pi b^2 \left(1 + \frac{2}{3} e^2 + \frac{3}{5} e^4 + \frac{4}{7} e^6 + \frac{5}{9} e^8 + \dots \right). \quad (2.73)$$

Вычисленная по этой формуле площадь поверхности эллипсоида Красовского равна 510 083 035 км².

Формула площади сфероида (2.73) может быть использована и для вычисления радиуса $R_{сф}$ шара, площадь которого равна площади эллипсоида. Так как $P_{сф} = 4\pi R_{сф}^2$, то из равенства (2.73), получим

$$R_{сф} = b \sqrt{1 + \frac{2}{3}e^2 + \frac{3}{5}e^4 + \frac{4}{7}e^6 + \frac{5}{9}e^8 + \dots}$$

Для эллипсоида Красовского радиус такого шара будет равен $R_{сф} = 6\,371\,116$ м.

Размеры рамок трапеции

Так как трапеция ограничена меридианами и параллелями, то размеры рамок можно вычислять на основании формул длин дуг меридианов и параллелей, полученных ранее, только с учётом масштаба m съёмочной трапеции (рис. 2.24).

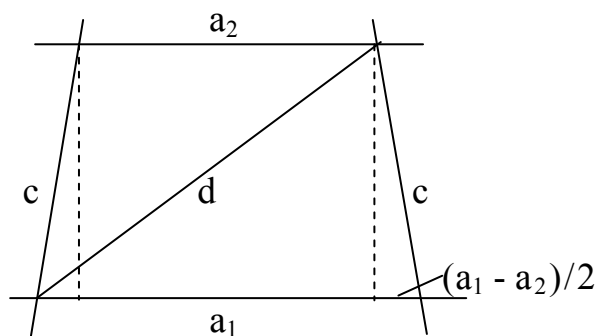


Рис. 2.24. Обозначения рамок трапеции

Формулы для вычисления имеют вид:

$$c = M_{ср} \frac{(B_2 - B_1)''}{\rho''} \cdot \frac{1}{m}; \quad a_i = N_i \cos B_i \frac{(L_2 - L_1)''}{\rho''} \cdot \frac{1}{m}; \quad i = 1, 2;$$

$$d^2 = \left(a_1 - \frac{a_1 - a_2}{2} \right)^2 + \left[c^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2} \right)^2 \right] = a_1 a_2 + c^2;$$

$$d = \sqrt{a_1 a_2 + c^2},$$

где N_i – радиусы кривизны первого вертикала;

$M_{ср}$ – радиус кривизны меридиана, вычисленный по средней широте трапеции;

a_1 и a_2 – соответственно, южная и северная рамки трапеции;

c – западная и восточная рамки;

d – диагональ трапеции, которая вычисляется для контроля правильности графического построения рамок трапеции.

2.8. Двойственность нормальных сечений

Нормальные сечения играют важную роль в геодезии, так как измерения, выполненные на земной поверхности, после их редуцирования на эллипсоид, представляют собой нормальные сечения. Через одну точку на поверхности эллипсоида в направлении другой точки можно провести, как уже отмечалось ранее, одно нормальное сечение. Со второй точки на первую, очевидно, тоже будет проходить одно нормальное сечение. Но поверхность эллипсоида – поверхность переменной кривизны и, естественно, возникает вопрос. Эти нормальные сечения сольются, т. е. будут представлять одну и ту же кривую, или это будут разные кривые? Исследуем этот вопрос.

Возьмем на эллипсоиде две точки Q_1 и Q_2 , координаты которых в общем случае не равны; т. е. $B_1 < B_2$ и $L_1 < L_2$. Из рис. 2.25 видно, что между этими точками можно построить два взаимнообратных нормальных сечения. Одно Q_1aQ_2 – через нормаль к поверхности эллипсоида в точке Q_1 в направлении точки Q_2 , другое Q_2bQ_1 – через нормаль точки Q_2 в направлении точки Q_1 . Докажем, что взаимные нормальные сечения на эллипсоиде в общем случае не совпадают.

На основании формулы (2.29) можно записать, что

$$On_1 = N_1 e^2 \sin B_1$$

и аналогично

$$On_2 = N_2 e^2 \sin B_2.$$

Если $B_2 > B_1$, то и $On_2 > On_1$.

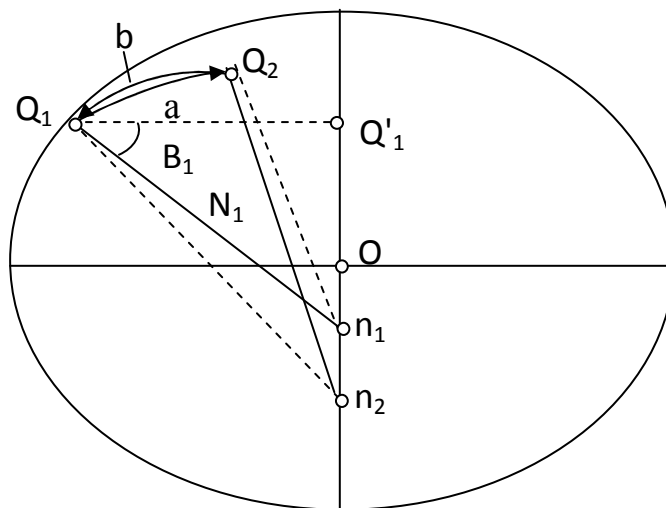


Рис. 2.25. Двойственность нормальных сечений

Следовательно, нормали к поверхности эллипсоида в точках Q_1 и Q_2 не лежащих на одной параллели, пересекают ось вращения эллипсоида в разных точках. Если, к тому же, точки имеют и разные долготы, то нормальная плоскость $Q_1n_1Q_2$, построенная в точке Q_1 , не будет совпадать с нормальной плоскостью $Q_2n_2Q_1$, построенной в точке Q_2 . Пересекая поверхность эллипсоида, эти нормальные плоскости образуют две кривые Q_1aQ_2 и Q_2bQ_1 , которые получили название *взаимнообратных нормальных сечений* между двумя точками поверхности эллипсоида. Одно из них будет прямым, другое – обратным. Так, для точки Q_1 , сечение Q_1aQ_2 будет прямым (располагается южнее), а Q_2bQ_1 –

обратным. Для точки Q_2 , лежащей севернее точки Q_1 , сечение Q_2bQ_1 будет прямым, а Q_1aQ_2 – обратным.

Двойственность нормальных сечений приводит к неопределенности при построении геометрических фигур на эллипсоиде. Так, например, если на местности имеется треугольник, в вершинах которого измерены углы, то после их редуцирования на эллипсоид, вследствие двойственности нормальных сечений, результатам измерений будет соответствовать разорванная фигура из шести сторон и трёх углов (на каждом пункте измеренному углу соответствует угол между двумя прямыми нормальными сечениями).

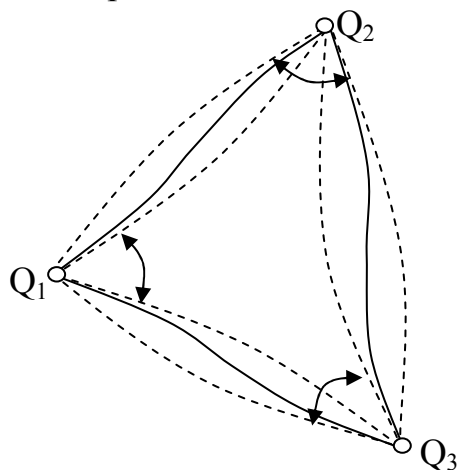


Рис. 2.26. Сфероидический треугольник

Для устранения этой неопределенности, соединим вершины фигуры кратчайшими линиями. Кратчайшие линии на любой поверхности в геодезии называются геодезическими линиями (на рис. 2.26 – сплошные линии). Таким образом, получим замкнутый сфероидический треугольник. Для образования такого треугольника на поверхности эллипсоида необходимо от непосредственно измеренных углов перейти к углам, образованным геодезическими линиями. Опуская вывод, напишем формулы для вычисления поправки δS за переход от длины нормального сечения к длине геодезической линии и поправки Δ за переход от азимута нормального сечения к азимуту геодезической линии (рис. 2.27).

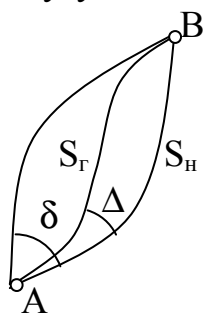


Рис. 2.27. Поправка за переход от азимута нормального сечения к азимуту геодезической линии

$$\left. \begin{aligned} \delta S &= S_H - S_r = \frac{S_H}{360} \sigma^4 \eta^4 \sin^2 2A; \\ \delta'' &= \frac{\rho''}{4} \sigma^2 \eta^2 \sin 2A; \\ \Delta &= -\frac{1}{3} \delta, \end{aligned} \right\} \quad (2.74)$$

где $\sigma = \frac{S}{N}$; $\eta^2 = e'^2 \cos^2 B$.

При $S = 640$ км поправка $\delta S = 0.008$ мм. При $S = 32$ км поправка $\Delta = 0.003''$. Расчеты показывают, что поправки эти очень малы по сравнению с ошибками измерений, поэтому есть смысл их учитывать только при выполнении геодезических работ наивысшей точности.

2.9. Решение сфероидических треугольников

Сфероидическим треугольником называется треугольник, образованный геодезическими линиями на поверхности эллипсоида вращения. Поверхность эллипсоида имеет переменную кривизну, поэтому строгое решение больших сфероидических треугольников по замкнутым формулам не возможно. Однако, поверхность земного эллипсоида по своей форме близка к сфере ($\alpha \approx 1:300$) и поэтому можно ожидать, что элементы сфероидического треугольника будут мало отличаться от соответствующих элементов сферического треугольника с надлежаще подобранным радиусом шара.

В более фундаментальных курсах по сфероидической геодезии [19] доказывається, что сфероидические треугольники со сторонами, не превышающими 250 км можно решать по формулам сферической тригонометрии, при этом относительные искажения элементов сферического треугольника будут меньше $1 \cdot 10^{-8}$. В случае триангуляции, когда в треугольнике даны три угла и известна одна сторона (рис. 2.28), наиболее простым решением будет применение теоремы синусов сферической тригонометрии:

$$b = R \arcsin \left[\sin \left(\frac{a}{R} \right) \frac{\sin B}{\sin A} \right]; \quad d = R \arcsin \left[\sin \left(\frac{a}{R} \right) \frac{\sin D}{\sin A} \right]. \quad (2.75)$$

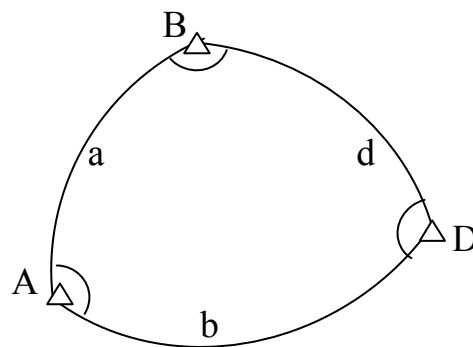


Рис. 2.28. Элементы сфероидического треугольника

Если известны три стороны в треугольнике (трилатерация), то углы можно вычислить по сторонам на основании теоремы косинусов сферической тригонометрии

$$\left. \begin{aligned} A &= \arccos \left(\frac{\cos \frac{a}{R} - \cos \frac{b}{R} \cos \frac{d}{R}}{\sin \frac{b}{R} \sin \frac{d}{R}} \right); \\ B &= \arccos \left(\frac{\cos \frac{b}{R} - \cos \frac{a}{R} \cos \frac{d}{R}}{\sin \frac{a}{R} \sin \frac{d}{R}} \right); \\ D &= \arccos \left(\frac{\cos \frac{d}{R} - \cos \frac{a}{R} \cos \frac{b}{R}}{\sin \frac{a}{R} \sin \frac{b}{R}} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.76)$$

Если стороны превышают 270 км, то треугольники решаются с применением расширенной теоремы Лежандра. При необходимости, формулы могут быть взяты из учебника по сфероидической геодезии [19].

2.10. Дифференциальные уравнения геодезической линии

Через любую точку на эллипсоиде можно провести касательную плоскость. Прямая, перпендикулярная к касательной плоскости в точке касания, называется *нормалью к поверхности*. Через три бесконечно близкие точки кривой можно провести *соприкасающуюся плоскость*. Нормаль кривой, лежащая в соприкасающей плоскости, называется *главной нормалью*. Точка кривой на поверхности вращения, в которой главная нормаль совпадает с нормалью к поверхности, называется *геодезической точкой*. Кривая, все точки которой геодезические, называется *геодезической линией*.

Геодезическая линия играет важную роль в геодезии так как обладает замечательными свойствами:

- 1) это кратчайшее расстояние между двумя точками поверхности;
- 2) через заданную точку в заданном направлении можно провести только одну геодезическую линию;
- 3) через две точки можно провести геодезическую линию и, притом, только одну.

В дальнейшем для решения прямых геодезических задач нам понадобятся дифференциальные уравнения, характеризующие изменения геодезических координат и азимутов в зависимости от изменения длины геодезической линии. Выведем эти уравнения.

На поверхности эллипсоида возьмём две точки Q_1 и Q_2 на бесконечно малом расстоянии dS . Через точки проведём меридианы и параллели и геодезическую линию между точками Q_1 и Q_2 (рис. 2.29).

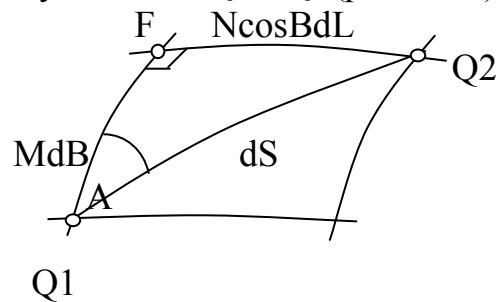


Рис. 2.29. Связь дифференциала геодезической линии с дифференциалами координат

В образованном бесконечно малом прямоугольном треугольнике существуют следующие зависимости:

$$\frac{MdB}{dS} = \cos A;$$

$$\frac{N \cos B dL}{dS} = \sin A,$$

или

$$\frac{dB}{dS} = \frac{\cos A}{M}; \quad (2.77)$$

$$\frac{dL}{dS} = \frac{\sin A}{N \cos B}. \quad (2.78)$$

Мы получили дифференциальные уравнения изменения широт и долгот в зависимости от длины S . Для установления дифференциальной зависимости геодезического азимута от длины геодезической линии рассмотрим полярный треугольник Q_2Q_3P (рис. 2.30). Из этого треугольника следует (считая его сферическим), что

$$\cos(90 - B) = \operatorname{ctg} dL \operatorname{ctg} (90 - dA) \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} dA = \operatorname{tg} dL \sin B.$$

Раскладывая тангенсы в ряд $\operatorname{tg} x = x + x^3/3 + \dots$ и ограничиваясь первым членом, получим:

$$dA = dL \sin B.$$

Разделив левую и правую часть на dS , и подставив выражение (2.78) для

$\frac{dL}{dS}$ найдем

$$\frac{dA}{dS} = \frac{\sin A}{N} \operatorname{tg} B. \quad (2.79)$$

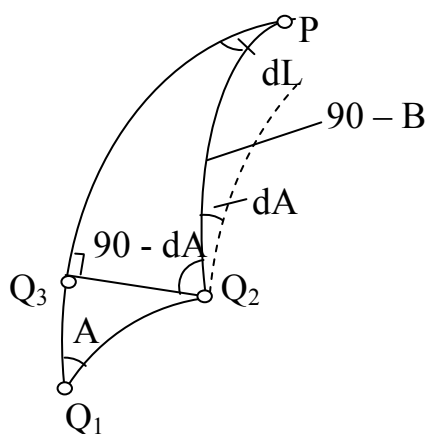


Рис. 2.30. Полярный треугольник

Итак, в итоге получены три дифференциальных уравнения (2.77), (2.78) и (2.79), которые лежат в основе решения главных геодезических задач.

2.11. Решение главной геодезической задачи

2.11.1. Общие сведения

Положение точки Q на земной поверхности и в пространстве может быть однозначно определено плановыми геодезическими координатами B , L и геодезической высотой H [20]. Обычно плановые координаты точек определяются отдельно от высот. В сфероидической геодезии рассматриваются только способы определения плановых координат. Теория определения высот точек рассматривается в курсе теоретической геодезии. При построении плановых геодезических сетей традиционными наземными методами (триангуляция, полигонометрия, трилатерация) координаты пунктов определяются путем последовательного вычисления координат определяемых пунктов, начиная от исходного, по измеренным углам и сторонам.

Задача, связанная с вычислением координат определяемого пункта по известным координатам исходного пункта, измеренным азимуту и расстоянию называется *прямой геодезической задачей*. При решении прямой геодезической задачи дано:

- геодезические координаты B_1, L_1 исходного пункта Q_1 ;
- полярные координаты S и A_1 определяемого пункта Q_2 .

Требуется найти:

1. геодезические координаты B_2, L_2 пункта Q_2 ;
2. обратный азимут A_2 с пункта Q_2 на пункт Q_1 .

Прямую геодезическую задачу можно рассматривать как задачу преобразования полярных координат в геодезические.

На практике часто решают и другую задачу, а именно: по геодезическим координатам пунктов Q_1 и Q_2 определяется кратчайшее расстояние S между ними и азимуты A_1 и A_2 . Такая задача в геодезии получила название *обратной геодезической задачи*. Решить обратную задачу это значит преобразовать геодезические координаты точки в полярные.

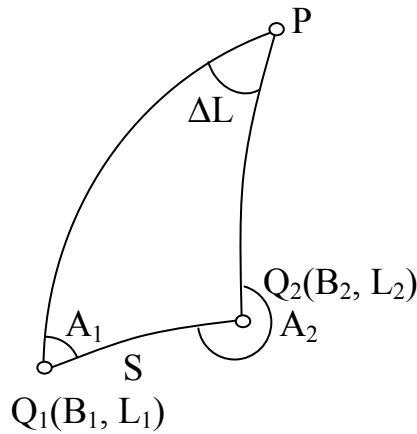


Рис. 2.31. Прямая и обратная геодезические задачи

Прямую и обратную геодезические задачи часто называют *главной геодезической задачей*. Решение главной геодезической задачи на эллипсоиде может осуществляться по различным кривым, соединяющим точки Q_1 и Q_2 (нормальные, геоцентрические сечения, хорды и т. д.). Однако наибольшее распространение в геодезической практике получили способы решения главных геодезических задач по геодезическим линиям.

В основе решения геодезических задач на поверхности эллипсоида лежат дифференциальные уравнения геодезической линии

$$\left. \begin{aligned} \frac{dB}{dS} &= \frac{\cos A}{M}; \\ \frac{dL}{dS} &= \frac{\sin A}{N \cos B}; \\ \frac{dA}{dS} &= \frac{\sin A}{N} \operatorname{tg} B. \end{aligned} \right\} \quad (2.80)$$

Принимая S за независимую переменную и интегрируя (2.80), получим

$$\left. \begin{aligned} B_2 &= B_1 + \int_0^S \frac{\cos A}{M} dS; \\ L_2 &= L_1 + \int_0^S \frac{\sin A}{N \cos B} dS; \\ A_2 &= A_1 \pm 180^\circ + \int_0^S \frac{\sin A}{N} \operatorname{tg} B dS. \end{aligned} \right\} \quad (2.81)$$

Формулы (2.81) дают решение прямой геодезической задачи в общем виде. Однако проинтегрировать выражения (2.81) точно невозможно, так как интеграл эллиптический и не может быть выражен с помощью конечного числа элементарных функций. Поэтому мы можем проинтегрировать (2.81) только приближенно. Приближенные методы интегрирования, при решении главной геодезической задачи, делятся на три группы.

К первой группе относятся методы, основанные на разложении подынтегральных функций (2.81) в ряды с последующим почленным интегрированием ряда.

Во второй группе используется сфера как некоторая вспомогательная поверхность, и решение задачи осуществляется на этой сфере с последующим переходом на эллипсоид.

В третьей группе исходные дифференциальные уравнения (2.81) интегрируются при помощи какого-нибудь численного метода, например, Симпсона, Рунге – Кутты, Адамса, Эверхарта и т. д.

Рассмотрим общие принципы методов первой группы.

2.11.2. Способ решения по начальным аргументам

Представим первый интеграл (2.81) в следующем виде

$$B_2 - B_1 = \int_0^S \left(\frac{dB}{dS} \right) dS.$$

В виду краткости изложения материала выводы формул выполняются на примере разности широт ($B_2 - B_1$), однако, аналогичным образом выполняются преобразования ΔL и ΔA , конечные формулы которых будут приведены ниже.

Разложим подынтегральную функцию в ряд вокруг начальной точки $S = 0$ по степеням дуги S . При таком способе разложения коэффициенты рядов должны вычисляться по аргументам B_1 и A_1 начальной точки.

Таким образом, будем иметь:

$$B_2 - B_1 = \int_0^S \left\{ \left(\frac{dB}{dS} \right)_1 + \left(\frac{d^2B}{dS^2} \right)_1 S + \left(\frac{d^3B}{dS^3} \right)_1 \frac{S^2}{2} + \dots \right\} dS.$$

Откуда после интегрирования, находим выражение для ΔB и, аналогично, для ΔL и ΔA

$$\left. \begin{aligned} B_2 - B_1 &= \left(\frac{dB}{dS} \right)_1 S + \left(\frac{d^2B}{dS^2} \right)_1 \frac{S^2}{2!} + \left(\frac{d^3B}{dS^3} \right)_1 \frac{S^3}{3!} + \dots; \\ L_2 - L_1 &= \left(\frac{dL}{dS} \right)_1 S + \left(\frac{d^2L}{dS^2} \right)_1 \frac{S^2}{2!} + \left(\frac{d^3L}{dS^3} \right)_1 \frac{S^3}{3!} + \dots; \\ A_2 - A_1 \pm 180^\circ &= \left(\frac{dA}{dS} \right)_1 S + \left(\frac{d^2A}{dS^2} \right)_1 \frac{S^2}{2!} + \left(\frac{d^3A}{dS^3} \right)_1 \frac{S^3}{3!} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.82)$$

Первые коэффициенты этих рядов определяются дифференциальными уравнениями (2.80). Последовательно дифференцируя эти уравнения находим вторые, третьи и т. д. коэффициенты в (2.82). Сходимость рядов (2.82) зависит от длины дуги S . Если длина дуги будет больше радиуса Земли, то ряды станут расходящимися и найти решение методами первой группы будет невозможно.

2.11.3. Способ решения по средним аргументам

Повысить сходимость рядов (2.82) можно, если за начальную точку разложения в ряд выбрать точку O расположенную в середине дуги S (рис. 2.32).

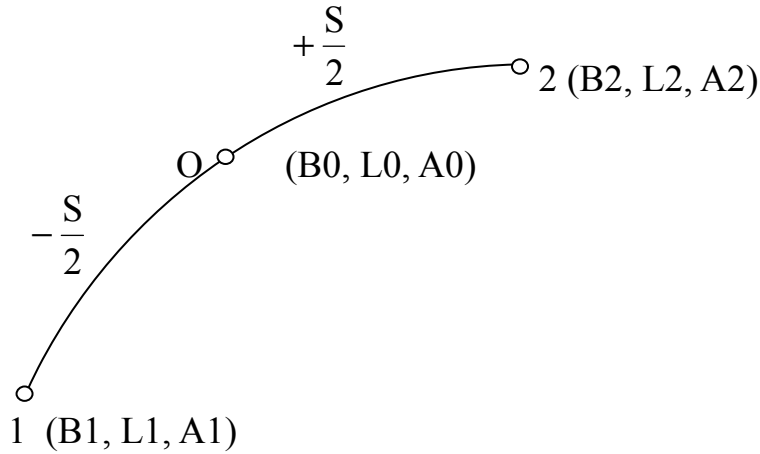


Рис. 2.32. Разложение в ряд в средней точке

Тогда ряды (2.82) запишутся следующим образом

$$\left. \begin{aligned} B_2 - B_0 &= \left(\frac{dB}{dS}\right)_0 \frac{S}{2} + \left(\frac{d^2B}{dS^2}\right)_0 \frac{S^2}{8} + \left(\frac{d^3B}{dS^3}\right)_0 \frac{S^3}{48} + \dots; \\ B_1 - B_0 &= -\left(\frac{dB}{dS}\right)_0 \frac{S}{2} + \left(\frac{d^2B}{dS^2}\right)_0 \frac{S^2}{8} - \left(\frac{d^3B}{dS^3}\right)_0 \frac{S^3}{48} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.83)$$

Вычитая второй ряд из первого, находим

$$B_2 - B_1 = \left(\frac{dB}{dS}\right)_0 S + \left(\frac{d^3B}{dS^3}\right)_0 \frac{S^3}{24} + \dots \quad (2.84)$$

По аналогии запишем выражения для разностей долгот и азимутов

$$\left. \begin{aligned} L_2 - L_1 &= \left(\frac{dL}{dS}\right)_0 S + \left(\frac{d^3L}{dS^3}\right)_0 \frac{S^3}{24} + \dots, \\ A_2 - A_1 \pm 180^\circ &= \left(\frac{dA}{dS}\right)_0 S + \left(\frac{d^3A}{dS^3}\right)_0 \frac{S^3}{24} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.85)$$

Из сравнения рядов (2.82) с рядами (2.84), (2.85) видно неоспоримое преимущество последних, так как при одном и том же числе членов они сходятся быстрее. Однако, коэффициенты в рядах (2.84), (2.85) вычислить невозможно, так как неизвестны координата B_0 и азимут A_0 в середине дуги S (в начальной точке ряда).

Возьмем сумму рядов (2.83) и разделим на два, получим

$$\left. \begin{aligned} B_{cp} - B_0 &= \left(\frac{d^2 B}{dS^2} \right)_0 \frac{S^2}{8} + \dots ; \\ A_{cp} - A_0 &= \left(\frac{d^2 A}{dS^2} \right)_0 \frac{S^2}{8} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.86)$$

Предположим, что средние координаты, средний азимут и производные по ним мы можем вычислить, тогда [20]

$$\left(\frac{dB}{dS} \right)_0 = \left(\frac{dB}{dS} \right)_{cp} - \left[\frac{d}{dB} \left(\frac{dB}{dS} \right) \right]_{cp} (B_{cp} - B_0) - \left[\frac{d}{dA} \left(\frac{dB}{dS} \right) \right]_{cp} (A_{cp} - A_0) + \dots$$

Подставляя вместо $(B_{cp} - B_0)$ и $(A_{cp} - A_0)$ выражения (2.86), будем иметь следующее

$$\left(\frac{dB}{dS} \right)_0 = \left(\frac{dB}{dS} \right)_{cp} - \left[\frac{d}{dB} \left(\frac{dB}{dS} \right) \right]_{cp} \left(\frac{d^2 B}{dS^2} \right)_0 \frac{S^2}{8} - \left[\frac{d}{dA} \left(\frac{dB}{dS} \right) \right]_{cp} \left(\frac{d^2 A}{dS^2} \right)_0 \frac{S^2}{8} + \dots,$$

и с ошибкой до малых 4-го порядка

$$\left(\frac{dB}{dS} \right)_0 = \left(\frac{dB}{dS} \right)_{cp} - \left[\frac{d}{dB} \left(\frac{dB}{dS} \right) \right]_{cp} \left(\frac{d^2 B}{dS^2} \right)_{cp} \frac{S^2}{8} - \left[\frac{d}{dA} \left(\frac{dB}{dS} \right) \right]_{cp} \left(\frac{d^2 A}{dS^2} \right)_{cp} \frac{S^2}{8} + \dots \quad (2.87)$$

Поступая аналогично с первыми производными долгот и азимутов, получим

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{dL}{dS} \right)_0 &= \left(\frac{dL}{dS} \right)_{cp} - \left[\frac{d}{dB} \left(\frac{dL}{dS} \right) \right]_{cp} \left(\frac{d^2 B}{dS^2} \right)_{cp} \frac{S^2}{8} - \left[\frac{d}{dA} \left(\frac{dL}{dS} \right) \right]_{cp} \left(\frac{d^2 A}{dS^2} \right)_{cp} \frac{S^2}{8} + \dots ; \\ \left(\frac{dA}{dS} \right)_0 &= \left(\frac{dA}{dS} \right)_{cp} - \left[\frac{d}{dB} \left(\frac{dA}{dS} \right) \right]_{cp} \left(\frac{d^2 B}{dS^2} \right)_{cp} \frac{S^2}{8} - \left[\frac{d}{dA} \left(\frac{dA}{dS} \right) \right]_{cp} \left(\frac{d^2 A}{dS^2} \right)_{cp} \frac{S^2}{8} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.88)$$

Если теперь подставить в равенства (2.84), (2.85) вместо первых производных их выражения (2.87), (2.88), а третьи производные оставить без изменения (только вычисляться они должны по средним координатам B_{cp} и A_{cp}), то получим общие формулы для вычисления ΔB , ΔL , ΔA

$$\left. \begin{aligned}
B_2 - B_1 &= \left(\frac{dB}{dS} \right)_{cp} S - \left[\frac{d}{dB} \left(\frac{dB}{dS} \right) \right]_{cp} \left(\frac{d^2 B}{dS^2} \right)_{cp} \frac{S^3}{8} - \\
&\quad - \left[\frac{d}{dA} \left(\frac{dB}{dS} \right) \right]_{cp} \left(\frac{d^2 A}{dS^2} \right)_{cp} \frac{S^3}{8} + \left(\frac{d^3 B}{dS^3} \right)_{cp} \frac{S^3}{24} + \dots ; \\
L_2 - L_1 &= \left(\frac{dL}{dS} \right)_{cp} S - \left[\frac{d}{dB} \left(\frac{dL}{dS} \right) \right]_{cp} \left(\frac{d^2 B}{dS^2} \right)_{cp} \frac{S^3}{8} - \\
&\quad - \left[\frac{d}{dA} \left(\frac{dL}{dS} \right) \right]_{cp} \left(\frac{d^2 A}{dS^2} \right)_{cp} \frac{S^3}{8} + \left(\frac{d^3 L}{dS^3} \right)_{cp} \frac{S^3}{24} + \dots ; \\
A_2 - A_1 \pm 180^\circ &= \left(\frac{dA}{dS} \right)_{cp} S - \left[\frac{d}{dB} \left(\frac{dA}{dS} \right) \right]_{cp} \left(\frac{d^2 B}{dS^2} \right)_{cp} \frac{S^3}{8} - \\
&\quad - \left[\frac{d}{dA} \left(\frac{dA}{dS} \right) \right]_{cp} \left(\frac{d^2 A}{dS^2} \right)_{cp} \frac{S^3}{8} + \left(\frac{d^3 A}{dS^3} \right)_{cp} \frac{S^3}{24} + \dots .
\end{aligned} \right\} \quad (2.89)$$

Отличие значений третьих производных, вычисленных по аргументам B_0 и A_0 и по средним значениям B_{cp} и A_{cp} , будут приводить к ошибкам вычисления ΔB , ΔL , ΔA на величины, не превышающие пятого порядка малости.

Первые производные в уравнениях (2.89) являются дифференциальными уравнениями геодезической линии (2.80).

В общем виде формулу производной высшего порядка можно записать следующим образом

$$\left(\frac{d^{i+1} F}{dS^{i+1}} \right) = \frac{d}{dB} \left(\frac{d^i F}{dS^i} \right) \frac{dB}{dS} + \frac{d}{dA} \left(\frac{d^i F}{dS^i} \right) \frac{dA}{dS}.$$

Если предположить, что $F = B, L, A$, то дифференцируя (2.80), находим

$$\frac{d^2 B}{dS^2} = \frac{d}{dS} \left(\frac{dB}{dS} \right) = -\frac{\operatorname{tg} B}{C^2} V^4 (\sin^2 A + 3\eta^2 \cos^2 A);$$

$$\frac{d^2 L}{dS^2} = \frac{d}{dS} \left(\frac{dL}{dS} \right) = \frac{V^2}{C^2} \sec B \cdot \sin 2A \cdot \operatorname{tg} B;$$

$$\frac{d^2 A}{dS^2} = \frac{d}{dS} \left(\frac{dA}{dS} \right) = \frac{V^2}{C^2} \sin A \cos A (1 + 2\operatorname{tg}^2 B + \eta^2).$$

Путем последовательного дифференцирования можно получить производные третьего порядка и т. д.

Подставляя производные в выражения (2.89), получаем окончательные формулы метода решения главной геодезической задачи на эллипсоиде, который получил название *способа со средними аргументами*

$$\left. \begin{aligned} B_2 - B_1 &= b \left\{ 1 + \frac{l^2}{12} + \frac{a^2}{24} \right\}; \\ L_2 - L_1 &= l \left\{ 1 - \frac{b^2}{24} + \frac{a^2}{24} \right\}; \\ A_2 - A_1 \pm 180^\circ &= a \left\{ 1 + \frac{b^2}{12} + \frac{l^2}{12} - \frac{a^2}{24} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (2.90)$$

где

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{S \cos A_{cp}}{M}; \\ l &= \frac{S \sin A_{cp} \sec B_{cp}}{N}; \\ a &= l \sin B_{cp}. \end{aligned} \right\} \quad (2.91)$$

Однако решение прямой задачи по этим формулам можно выполнить только методом последовательных приближений, так как средние широты и азимуты неизвестны. Вначале, принимая $A_{cp} = A_1$ и $B_{cp} = B_1$, вычисляем с точностью до секунд b и a по формулам (2.91). Затем находим

$$B_{cp} = B_1 + \frac{b}{2};$$

$$A_{cp} = A_1 + \frac{a}{2}$$

и по формулам (2.90) вычисляем разности широт, долгот и азимутов. Снова определяем средние значения, но уже в виде

$$B_{cp} = B_1 + \frac{\Delta B}{2};$$

$$A_{cp} = A_1 + \frac{\Delta A}{2},$$

где $\Delta B = B_2 - B_1$, $\Delta A = A_2 - A_1 \pm 180^\circ$.

С новыми значениями B_{cp} и A_{cp} переходим к третьему приближению. И так повторяем до тех пор, пока результаты двух смежных приближений не совпадут. Обычно достаточно трёх приближений. Эти формулы позволяют вычислять разности координат и азимутов с точностью до $0.0003''$ при $S < 60$ км.

При решении обратной геодезической задачи способом со средними аргументами координаты точек известны, а определению подлежат азимуты A_1 , A_2 и длина геодезической линии S . Рабочие формулы выводятся из выражений (2.90) и (2.91).

Разрешая первое уравнение (2.90) относительно $(S \cos A_{cp})$, а второе относительно $(S \sin A_{cp})$, получим вспомогательные величины P и Q :

$$P = S \cos A_{cp} = \Delta B M_{cp} \left\{ 1 - \frac{\Delta L^2}{12} - \frac{(\Delta L \sin B_{cp})^2}{24} \right\};$$

$$Q = S \sin A_{cp} = \Delta L \cos B_{cp} N_{cp} \left\{ 1 + \frac{\Delta B^2}{24} - \frac{(\Delta L \sin B_{cp})^2}{24} \right\},$$

где $\Delta L = L_2 - L_1$, а затем определяем

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}; \quad A_{cp} = \arctg\left(\frac{Q}{P}\right); \quad (2.92)$$

Зная S и A_{cp} и используя третье уравнение (2.90), получаем приращение азимута

$$\Delta A = \Delta L \sin B_{cp} \left\{ 1 + \frac{\Delta B^2}{12} + \frac{\Delta L^2}{12} - \frac{(\Delta L \sin B_{cp})^2}{24} \right\}.$$

И тогда окончательно

$$A_1 = A_{cp} - \frac{\Delta A}{2}; \quad A_2 = A_{cp} \pm 180^\circ + \frac{\Delta A}{2}. \quad (2.93)$$

2.11.4. Способ Бесселя

Способ Бесселя, согласно классификации данной в общих сведениях (раздел 2.11.1), относится ко второй группе приближенных методов интегрирования дифференциальных уравнений геодезической линии.

Поверхность эллипсоида очень близка к поверхности сферы, поэтому возможен следующий путь решения главной геодезической задачи:

1. Отображение стороны полярного сфероидического треугольника на сферу с целью перехода от элементов сфероидического треугольника к элементам полярного сферического треугольника.

2. Решение сферического треугольника на сфере по формулам сферической тригонометрии.

3. Переход от сферических элементов к сфероидическим.

Но для реализации такого пути необходимо на первом и третьем этапах её решения располагать соответствующими дифференциальными уравнениями связи геодезических координат, азимута и длины дуги геодезической линии с соответствующими сферическими элементами, т. е.

$$\frac{dB}{d\varphi} = f_1, \quad \frac{dL}{d\lambda} = f_2, \quad \frac{dA}{d\alpha} = f_3, \quad \frac{dS}{d\sigma} = f_4. \quad (2.94)$$

Вид функций (2.94), очевидно, будет зависеть от выбора проекции и условий отображения эллипсоида на шар.

При решении главной геодезической задачи обычно используются геодезические отображения, т. е. такие отображения, когда геодезическая линия с эллипсоида переходит в дугу большого круга на шаре.

В основу способа Бесселя положены следующие два условия:

1. геодезическая линия эллипсоида изображается на сфере дугой большого круга;

2. азимуты в соответствующих точках геодезической линии эллипсоида и дуги большого круга равны.

Исходя из первого условия, для дуги геодезической линии на эллипсоиде имеем дифференциальные уравнения

$$\left. \begin{aligned} dB &= \frac{\cos A}{M} dS; \\ dL &= \frac{\sin A}{N \cos B} dS; \\ dA &= \frac{\sin A}{N} \operatorname{tg} B dS. \end{aligned} \right\} \quad (2.95)$$

На сфере $M = N = R$ и соответствующие дифференциальные уравнения для дуги большого круга сферы примут вид

$$\left. \begin{aligned} d\varphi &= \cos \alpha d\sigma; \\ d\lambda &= \frac{\sin \alpha}{\cos \varphi} d\sigma; \\ d\alpha &= \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi d\sigma, \end{aligned} \right\} \quad (2.96)$$

где σ – сферическое расстояние, то есть расстояние, выраженное в частях радиуса, а φ, λ, α – соответственно, сферические широта, долгота и азимут.

Разделив (2.95) на (2.96), определим вид дифференциальных уравнений (2.94)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dB}{d\varphi} &= \frac{\cos A}{M \cos \alpha} \frac{dS}{d\sigma}; \\ \frac{dL}{d\lambda} &= \frac{\sin A \cos \varphi}{N \cos B \sin \alpha} \frac{dS}{d\sigma}; \\ \frac{dA}{d\alpha} &= \frac{\sin A \operatorname{tg} B}{N \sin \alpha \operatorname{tg} \varphi} \frac{dS}{d\sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (2.97)$$

Получена система трёх дифференциальных уравнений, в которой неизвестными являются функции $\frac{dS}{d\sigma}, \frac{dB}{d\varphi}, \frac{dL}{d\lambda}, \frac{dA}{d\alpha}$. Очевидно, для решения системы (2.97) одну из производных следует задать произвольно. В способе Бесселя производная $\frac{dA}{d\alpha} = 1$ определяется на основании второго условия $\alpha = A$.

Подставив эти соотношения в (2.97), получим три исходных дифференциальных уравнения способа Бесселя

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS}{d\sigma} &= \frac{N \operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} B}; \\ \frac{dB}{d\varphi} &= \frac{N \operatorname{tg} \varphi}{M \operatorname{tg} B}; \\ \frac{dL}{d\lambda} &= \frac{\sin \varphi}{\sin B}. \end{aligned} \right\} \quad (2.98)$$

Второе уравнение (2.98) легко интегрируется. Разделяя переменные, находим

$$\operatorname{tg} \varphi d\varphi = \frac{M \sin B dB}{N \cos B} = -\frac{dr}{r},$$

где $r = N \cos B = a \cos U$ – радиус параллели.

Интегрируя левую и правую части выражения, получим
 $-\ln \cos \varphi = -\ln r + \ln C,$

или

$$\frac{r}{\cos \varphi} = C, \quad (2.99)$$

где C – постоянная интегрирования. Уравнение (2.99) справедливо для любой точки геодезической линии, в том числе и для точки пересечения экватора, где $\varphi = U = 0$ и $C = a$.

Тогда подставив в (2.99) константу $C = a$, можно сделать вывод, что

$$\varphi = U. \quad (2.100)$$

Заменяя в уравнениях (2.98) сферическую широту φ на приведённую широту U , используя соотношения (2.16), (2.21), (2.22) из первого и третьего уравнений находим

$$\left. \begin{aligned} dS &= N \frac{\operatorname{tg} U}{\operatorname{tg} B} d\sigma = \frac{a \sqrt{1-e^2} \operatorname{tg} B}{W \operatorname{tg} B} d\sigma = \frac{a}{V} d\sigma; \\ dL &= \frac{\sin U}{\sin B} d\lambda = \frac{\sin B}{V \sin B} d\lambda = \frac{1}{V} d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (2.101)$$

Подставив в выражения (2.101) вместо второй сфероидической функции V формулу (2.22), получим

$$\left. \begin{aligned} dS &= a \sqrt{1-e^2 \cos^2 U} d\sigma; \\ dL &= \sqrt{1-e^2 \cos^2 U} d\lambda \end{aligned} \right\} \quad (2.102)$$

или после интегрирования вдоль дуги большого круга $Q_1 Q_2$ (рис. 2.33)

$$S = a \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{1-e^2 \cos^2 U} d\sigma; \quad (2.103)$$

$$L_2 - L_1 = \Delta L = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{1-e^2 \cos^2 U} d\lambda. \quad (2.104)$$

В формулах (2.103), (2.104) σ_1 и σ_2 – сферические расстояния от экватора до точек Q_1 и Q_2 , соответственно, а λ_1 и λ_2 – сферические долготы тех же точек (рис. 2.33), т. е.

$$\begin{aligned}\sigma_2 &= \sigma_1 + \sigma, \\ \lambda_2 &= \lambda_1 + \Delta\lambda,\end{aligned}$$

если σ – сферическое расстояние между точками Q_1 и Q_2 , а $\Delta\lambda$ – разность долгот этих точек.

Для интегрирования (2.103) заменим переменную U на σ . Из треугольника $E_0Q_1E_1$, считая точку Q_1 текущей

$$\sin U = \cos A_0 \sin \sigma.$$

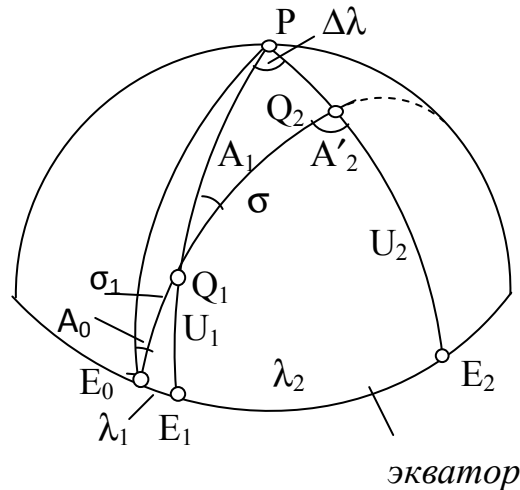


Рис. 2.33. Преобразование элементов полярного сфероидического треугольника на сферу

Тогда

$$\cos^2 U = 1 - \cos^2 A_0 \sin^2 \sigma, \quad (2.105)$$

где A_0 – постоянная величина (азимут, под которым дуга большого круга пересекает экватор). Подставим (2.105) в (2.103), получим

$$S = a \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sqrt{1 - e^2 (1 - \cos^2 A_0 \sin^2 \sigma)} d\sigma = b \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} (1 + k^2 \sin^2 \sigma)^{\frac{1}{2}} d\sigma, \quad (2.106)$$

где $k^2 = e'^2 \cos^2 A_0$.

Разложим подынтегральную функцию (2.106) в ряд

$$S = b \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left(1 + \frac{1}{2} k^2 \sin^2 \sigma - \frac{1}{8} k^4 \sin^4 \sigma + \frac{1}{16} k^6 \sin^6 \sigma + \dots \right) d\sigma.$$

Подставив вместо чётных степеней синусов соотношения (2.54) и выполнив группировку членов, получим

$$S = b \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} (C_0 - C_1 \cos 2\sigma - C_2 \cos 4\sigma - C_3 \cos 6\sigma + \dots) d\sigma, \quad (2.107)$$

где

$$\begin{aligned}
C_0 &= 1 + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{64}k^4 + \frac{5}{256}k^6 + \dots; \\
C_1 &= \frac{1}{4}k^2 - \frac{1}{16}k^4 + \frac{15}{512}k^6 + \dots; \\
C_2 &= \frac{1}{64}k^4 - \frac{3}{256}k^6 + \dots; \\
C_3 &= \frac{1}{512}k^6 + \dots.
\end{aligned}
\tag{2.108}$$

Проинтегрировав выражение (2.107), находим:

$$\begin{aligned}
S = bC_0 [(\sigma_2 - \sigma_1) - \frac{C_1}{2C_0}(\sin 2\sigma_2 - \sin 2\sigma_1) - \frac{C_2}{4C_0}(\sin 4\sigma_2 - \sin 4\sigma_1) - \\
- \frac{C_3}{6C_0}(\sin 6\sigma_2 - \sin 6\sigma_1)].
\end{aligned}$$

Выразив разности синусов углов через произведения синусов углов и учитывая, что $\sigma_2 - \sigma_1 = \sigma$ и $\sigma_2 = \sigma_1 + \sigma$ запишем окончательную формулу

$$\begin{aligned}
S = D_0 [\sigma - D_1 \sin \sigma \cos(2\sigma_1 + \sigma) - D_2 \sin 2\sigma \cos(4\sigma_1 + 2\sigma) - \\
- D_3 \sin 3\sigma \cos(6\sigma_1 + 3\sigma)],
\end{aligned}
\tag{2.109}$$

где

$$D_0 = bC_0; \quad D_1 = \frac{C_1}{C_0}; \quad D_2 = \frac{C_2}{2C_0}; \quad D_3 = \frac{C_3}{3C_0}.
\tag{2.110}$$

Формула (2.109) используется при решении обратной геодезической задачи.

Для решения прямой геодезической задачи перепишем (2.109) следующим образом

$$\begin{aligned}
\sigma = \sigma_0 + D_1 \sin \sigma \cos(2\sigma_1 + \sigma) + D_2 \sin 2\sigma \cos(4\sigma_1 + 2\sigma) + \\
+ D_3 \sin 3\sigma \cos(6\sigma_1 + 3\sigma),
\end{aligned}
\tag{2.111}$$

где $\sigma_0 = \frac{S}{D_0}$.

Так как коэффициенты D_1 и D_2 малы, то сферическое расстояние σ можно определить по длине геодезической линии S методом последовательных приближений.

Для интегрирования выражения (2.104) разложим подынтегральную функцию в ряд и получим следующее выражение

$$\Delta L = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 U} d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(1 - \frac{1}{2}e^2 \cos^2 U - \frac{1}{8}e^4 \cos^4 U - \frac{1}{16}e^6 \cos^6 U + \dots\right) d\lambda =$$

$$= \lambda_2 - \lambda_1 - \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{8}e^4 \cos^2 U + \frac{1}{16}e^6 \cos^4 U + \dots \right) \cos^2 U d\lambda. \quad (2.112)$$

Сделаем замену переменных. Из второй формулы (2.96), с учётом того, что $\varphi = U$ и $\alpha = A$, имеем

$$\cos U d\lambda = \sin A d\sigma,$$

а из треугольника $E_0Q_1E_1$ (рис. 2.33, точка Q_1 текущая) находим

$$\sin A_0 = \cos U \sin A.$$

Тогда

$$\cos^2 U d\lambda = \sin A_0 d\sigma. \quad (2.113)$$

Подставляя равенства (2.105) и (2.113) в формулу (2.112), получим

$$\Delta L = \Delta\lambda - \sin A_0 \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left[\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{8}e^4 (1 - \cos^2 A_0 \sin^2 \sigma) + \frac{1}{16}e^6 (1 - \cos^2 A_0 \sin^2 \sigma)^2 + \dots \right] d\sigma.$$

Если заменить синусы чётных степеней выражениями (2.54), то после группирования членов найдём:

$$\Delta L = \Delta\lambda - \sin A_0 \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} (\beta_1 + \beta_2 \cos 2\sigma + \beta_3 \cos 4\sigma + \dots) d\sigma, \quad (2.114)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{16}e^6 + \dots - \left(\frac{1}{16}e^4 + \frac{1}{16}e^6 \right) \cos^2 A_0 + \\ &\quad + \left(\frac{3}{128}e^6 + \dots \right) \cos^4 A_0 + \dots; \\ \beta_2 &= \left(\frac{1}{16}e^4 + \frac{1}{16}e^6 + \dots \right) \cos^2 A_0 - \left(\frac{1}{32}e^6 + \dots \right) \cos^4 A_0 + \dots; \\ \beta_3 &= \left(\frac{1}{128}e^6 + \dots \right) \cos^4 A_0. \end{aligned} \right\} \quad (2.115)$$

Проинтегрировав выражение (2.114), окончательно получим

$$\Delta L = \Delta\lambda - \sin A_0 \left[\beta_1 \sigma + \beta_2 \sin \sigma \cos(2\sigma_1 + \sigma) + \frac{\beta_3}{2} \sin 2\sigma \cos(4\sigma_1 + 2\sigma) + \dots \right]. \quad (2.116)$$

При решении обратной геодезической задачи разность сферических долгот находится из выражения (2.116) методом последовательных приближений.

Получены основные формулы способа Бесселя. Недостающие для решения элементы легко находятся по формулам сферической тригонометрии из треугольников $E_0Q_1E_1$ и Q_1PQ_2 рис. 2.33. Не выводя простых очевидных

соотношений, запишем алгоритмы решения прямой и обратной геодезических задач способом Бесселя.

Алгоритм решения прямой геодезической задачи по способу Бесселя:

- 1) $\alpha_1 = A_1$;
- 2) $\varphi_1 = U_1 = \text{arctg}(\sqrt{1 - e^2} \text{tg} B_1)$;
- 3) $\sigma_1 = \text{arctg}\left(\frac{\text{tg} U_1}{\cos A_1}\right)$, $A_0 = \arcsin(\cos U_1 \sin A_1)$;
- 4) $k^2 = e'^2 \cos^2 A_0$ и по формулам (2.108) и (2.110) вычисляем коэффициенты $C_0, C_1, C_2, C_3, D_0, D_1, D_2, D_3$, затем методом приближений находим σ по формуле (2.111), при этом $\sigma_2 = \sigma_1 + \sigma$;
- 5) $\lambda_1 = \text{arctg}(\text{tg} \sigma_1 \sin A_0)$, $\lambda_2 = \text{arctg}(\text{tg} \sigma_2 \sin A_0)$;
- 6) $\Delta \lambda = \lambda_2 - \lambda_1$;
- 7) $A'_2 = \text{arctg}\left(\frac{\text{tg} A_0}{\cos \sigma_2}\right)$, $U_2 = \text{arctg}(\text{tg} \sigma_2 \cos A'_2)$;
- 8) вычисляем коэффициенты β_i по формулам (2.115), а затем ΔL – по формуле (2.116);
- 9) $B_2 = \text{arctg}(\sqrt{1 + e'^2} \text{tg} U_2)$;
 $L_2 = L_1 + \Delta L$;
 $A_2 = A'_2 \pm 180^\circ$.

Алгоритм решения обратной геодезической задачи по способу Бесселя:

$j = 1, 2$;

1. $W_j = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_j}$; $\sin U_j = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin B_j}{W_j}$; $\cos U_j = \frac{\cos B_j}{W_j}$;
2. $\Delta L = L_2 - L_1$;
3. $\Delta \lambda^1 = \Delta L$
 $i=1$ (i – номер итерации);
4. начало итеративного процесса,
 $\sigma^i = \arccos \left(\sin U_1 \sin U_2 + \cos U_1 \cos U_2 \cos \Delta \lambda^i \right)$;
- $A_1^i = \arcsin \left(\frac{\sin \Delta \lambda^i}{\sin \sigma^i} \cos U_2 \right)$;
- $A_0^i = \arcsin \left(\sin A_1^i \cos U_1 \right)$;
- $\sigma_1^i = \arcsin \left(\frac{\sin U_1}{\cos A_0^i} \right)$;

$$\beta_1^i = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{8}e^4 + \frac{1}{16}e^6 - \left(\frac{1}{16}e^4 + \frac{1}{16}e^6\right)\cos^2 A_0^i + \left(\frac{3}{128}e^6\right)\cos^4 A_0^i;$$

$$\beta_2^i = \left(\frac{1}{16}e^4 + \frac{1}{16}e^6\right)\cos^2 A_0^i - \left(\frac{1}{32}e^6\right)\cos^4 A_0^i;$$

$$\beta_3^i = \frac{e^6}{128}\cos^4 A_0^i;$$

$$\Delta\lambda^{i+1} = \Delta L + \sin A_0^i [\beta_1^i \sigma^i + \beta_2^i \sin \sigma^i \cos(2\sigma_1^i + \sigma^i) + \beta_3^i \sin 2\sigma^i \cos(4\sigma_1^i + 2\sigma^i)],$$

если $|\Delta\lambda^{i+1} - \Delta\lambda^i| > \varepsilon$ (ε – точность решения), то i увеличивается на 1 и выполняется переход на начало пункта 4, иначе – конец итеративного процесса и переход к пункту 5;

$$5. \quad A_2 = \arcsin\left(\frac{\sin A_0}{\cos U_2}\right) \pm 180^\circ;$$

6. полагаем $k^2 = e^2 \cos^2 A_0$ и по формулам (2.108) и (2.110) вычисляем коэффициенты $C_0, C_1, C_2, C_3, D_0, D_1, D_2, D_3$, а затем по формуле (2.109) находим длину геодезической линии S .

К третьей группе методов решения прямой и обратной геодезических задач на эллипсоиде относятся численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. К такому типу уравнений относятся и дифференциальные уравнения геодезической линии. Наиболее эффективными и точными являются методы: Эверхарта, Адамса, Булержа – Штёра, Рунге – Кутты, Симпсона (см. формулу (2.52)) и др. Теория методов изложена в книгах [21] и [22] и здесь рассматриваться не будет.

Прямые и обратные геодезические задачи можно решать не только на плоскости и эллипсоиде, но и в пространстве.

2.11.5. Пространственная прямая геодезическая задача

Пусть положение точки Q_1 задано в трехмерном пространстве координатами B_1, L_1, H_1 (рис. 2.34). Положение второй точки Q_2 относительно первой Q_1 определяется полярными координатами D_{12}, A_{12}, Z_{12} . Из треугольника $Q_1 n_1 Q_2$ можно написать следующие соотношения

$$\left. \begin{aligned} d\sin\sigma &= D_{12} \sin Z_{12}; \\ d\cos\sigma &= D_{12} \cos Z_{12} + N_1 + H_1, \end{aligned} \right\} \quad (2.117)$$

$$\text{где } N_1 = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_1}}.$$

Разделив первое уравнение на второе, найдём

$$\sigma = \operatorname{arctg}\left(\frac{D_{12} \sin Z_{12}}{D_{12} \cos Z_{12} + N_1 + H_1}\right). \quad (2.118)$$

Из первого и второго уравнений (2.117)

$$d = \frac{D_{12} \sin Z_{12}}{\sin \sigma} = \frac{D_{12} \cos Z_{12} + N_1 + H_1}{\cos \sigma}. \quad (2.119)$$

Вокруг точки n_1 опишем сферу единичного радиуса. В результате пересечения поверхности сферы плоскостями меридианов точек Q_1 и Q_2 и нормальной плоскостью $Q_1 n_1 Q_2$, образуется сферический треугольник $q_1 P q_2$ (рис. 2.35) из решения которого получим приближённое значение геодезической широты и разность геодезических долгот

$$B'_2 = \arcsin(\cos \sigma \sin B_1 + \sin \sigma \cos B_1 \cos A_{12}); \quad (2.120)$$

$$\Delta L = \arcsin\left(\frac{\sin \sigma \sin A_{12}}{\cos B'_2}\right). \quad (2.121)$$

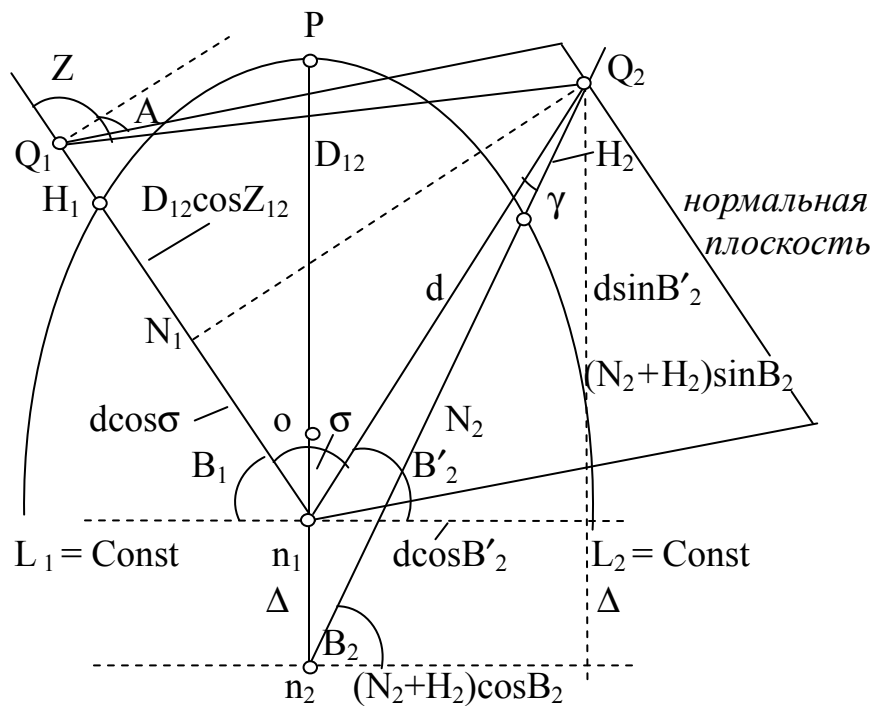


Рис. 2.34. Геометрия прямой и обратной пространственных геодезических задач

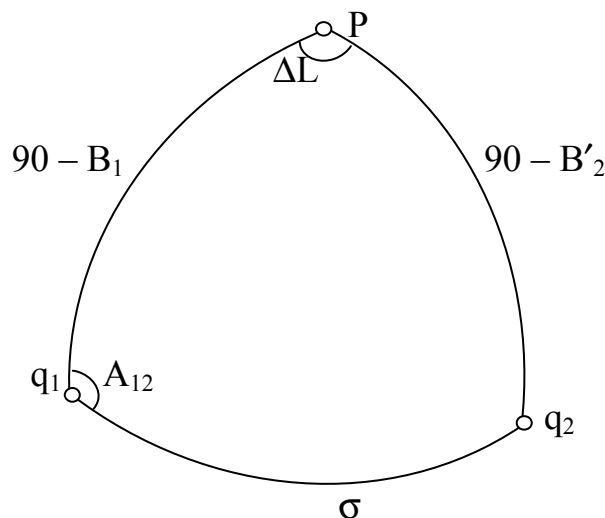


Рис. 2.35. Сферический треугольник единичной сферы

Отсюда

$$L_2 = L_1 + \Delta L. \quad (2.122)$$

Из рисунка 2.34 видно, что

$$\left. \begin{aligned} (N_2 + H_2) \sin B_2 &= d \sin B'_2 + \Delta; \\ (N_2 + H_2) \cos B_2 &= d \cos B'_2, \end{aligned} \right\} \quad (2.123)$$

где $\Delta = n_1 n_2$.

Учитывая, что

$$\Delta = n_1 n_2 = o n_1 - o n_2 = e^2 N_2 \sin B_2 - e^2 N_1 \sin B_1, \quad (2.124)$$

разделив первое уравнение (2.123) на второе, получим

$$B_2 = \arctg \left(\operatorname{tg} B'_2 + \frac{e^2 N_2 \sin B_2 - e^2 N_1 \sin B_1}{d \cos B'_2} \right). \quad (2.125)$$

Так как искомая широта B_2 располагается и в правой части уравнения (2.125), то решить его можно методом последовательных приближений. В первой итерации считаем, что $B_2 = B'_2$.

Высоту определим из второго уравнения (2.123)

$$H_2 = \frac{d \cos B'_2}{\cos B_2} - N_2. \quad (2.126)$$

2.11.6. Пространственная обратная геодезическая задача

Из треугольника $Q_2 n_1 n_2$ (рис. 2.34) можно записать следующие соотношения

$$\left. \begin{aligned} d \sin \gamma &= \Delta \cos B_2; \\ d \cos \gamma &= N_2 + H_2 - \Delta \sin B_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.127)$$

Деля первое из этих уравнений на второе найдём

$$\gamma = \arctg \left(\frac{\Delta \cos B_2}{N_2 + H_2 - \Delta \sin B_2} \right). \quad (2.128)$$

Из второго уравнения (2.127) следует, что

$$d = \frac{N_2 + H_2 - \Delta \sin B_2}{\cos \gamma}. \quad (2.129)$$

Определим угол B'_2 , связанный со стороной сферического треугольника $q_1 P q_2$ (см. рис. 2.34 и рис. 2.35)

$$B'_2 = B_2 - \gamma. \quad (2.130)$$

Между сторонами и углами сферического треугольника существуют следующие соотношения

$$\left. \begin{aligned} \sin \sigma \cos A_{12} &= \cos B_1 \sin B'_2 - \sin B_1 \cos B'_2 \cos \Delta L; \\ \sin \sigma \sin A_{12} &= \cos B'_2 \sin \Delta L; \\ \cos \sigma &= \sin B_1 \sin B'_2 + \cos B_1 \cos B'_2 \cos \Delta L, \end{aligned} \right\} \quad (2.131)$$

где $\Delta L = L_2 - L_1$.

Разделив второе из этих уравнений на первое, получим

$$A_{12} = \operatorname{arctg} \left(\frac{\cos B'_2 \sin \Delta L}{\cos B_1 \sin B'_2 - \sin B_1 \cos B'_2 \cos \Delta L} \right). \quad (2.132)$$

Деля второе уравнение из (2.131) на третье, найдем

$$\sigma = \operatorname{arctg} \left[\frac{\cos B'_2 \sin \Delta L}{(\sin B_1 \sin B'_2 + \cos B_1 \cos B'_2 \cos \Delta L) \sin A_{12}} \right]. \quad (2.133)$$

Преобразовав формулы (2.117), получим следующие выражения

$$Z_{12} = \operatorname{arctg} \left(\operatorname{ctg} \sigma - \frac{N_1 + H_1}{d \sin \sigma} \right); \quad (2.134)$$

$$D_{12} = \frac{d \sin \sigma}{\sin Z_{12}}. \quad (2.135)$$

Таким образом, полученные формулы позволяют решить обратную геодезическую задачу в пространстве.

2.12. Проекция Гаусса – Крюгера

2.12.1. Общие сведения

Математическая обработка измерений, выполненных на больших территориях с целью изучения фигуры Земли, осуществляется на эллипсоиде в единой геодезической системе координат.

Однако, при построении на небольших территориях геодезических сетей, предназначенных для производства топографических съемок, для обеспечения строительства крупных инженерно-технических сооружений, железных и шоссейных дорог и т. д. более удобной является система плоских прямоугольных координат.

Основным преимуществом системы плоских прямоугольных координат является простота и удобство формул плоской тригонометрии, используемых при математической обработке геодезических измерений и решении различных геодезических задач.

Известно, что поверхность эллипсоида не может быть развернута на плоскость без искажений. Поэтому и не может быть предложена система плоских координат, в которой взаимное положение точек будет выражено без искажений. При любом способе отображения эллипсоида на плоскость мы будем иметь дело с искажениями, но какими? Это зависит от выбора проекции и условий её отображения. Так, при проектировании на плоскость сфероидического треугольника, в зависимости от типа проекции могут быть искажены только стороны, а углы спроектированы без искажений, либо углы исказятся, а стороны будут теми же, что и на эллипсоиде, либо будут искажены и углы и стороны и т. д.

Для геодезии очень важно, чтобы величина искажений угловых и линейных элементов была небольшой, тогда их можно будет легко учесть. С теоретической точки зрения при любом изображении эллипсоида на плоскость можно вычислить все искажения с требуемой степенью точности, как бы велики они не были. Но тогда был бы потерян практический смысл перехода на

плоскость, так как вычисление больших искажений выполнялось бы по таким же сложным формулам, как и решение геодезических задач на эллипсоиде.

С точки зрения искажений для геодезии наиболее приемлемы равноугольные (конформные) проекции. Достоинство конформной проекции состоит в том, что масштаб изображения в данной точке не зависит от направления, а это влечёт за собой сохранение подобия бесконечно малых фигур и, следовательно, и равноугольность, то есть углы переносятся на плоскость без искажений.

В нашей стране для производства и математической обработки топографо-геодезических работ используется равноугольная (конформная) проекция эллипсоида на плоскость. Теоретические основы этой проекции разработаны К.Ф. Гауссом в начале XIX в., а доведена она до стадии практического применения Крюгером в начале XX в. Поэтому, эту проекцию геодезисты называют сокращённо проекцией Гаусса – Крюгера.

Поверхность земного эллипсоида в ней разделяется меридианами на зоны, которые простираются от северного до южного полюсов. Средний меридиан каждой зоны называется осевым, а крайние – граничными меридианами. Ширина зоны выбирается произвольно в зависимости от величины искажений на краю зоны. В нашей стране приняты две системы координатных зон – шестиградусные и трехградусные. Шестиградусные зоны являются основными в том смысле, что все материалы математической обработки геодезических сетей и каталоги координат оформляются в системе шестиградусных зон. Трехградусные зоны используются только для производства крупномасштабных топографических съёмки.

Счет шестиградусных зон ведется от Гринвичского меридиана на восток, при этом западный граничный меридиан первой шестиградусной зоны совпадает с Гринвичским меридианом (рис. 2.36). Граничные меридианы зон поочередно совпадают с западными и восточными рамками карт масштаба 1 : 1000000, а номер зоны n и долгота осевого меридиана L_0 вычисляются по формулам

$$n = N - 30 = \text{целое} \left(\frac{L^\circ}{6^\circ} \right) + 1; \quad L_0 = 6^\circ n - 3^\circ, \quad (2.136)$$

где N – номер колонны листа карты масштаба 1 : 1000000.

В системе трехградусных зон осевые меридианы располагаются через 3° по долготе и совпадают поочередно с граничными и осевыми меридианами шестиградусных зон. Причем осевые меридианы первых шестиградусной и трехградусной зон совпадают. Долготы осевых меридианов трехградусных зон определяются по формуле

$$L_0 = 3^\circ n', \quad (2.137)$$

где $n' = \text{целое}[(L^\circ - 1.5^\circ)/3^\circ] + 1$ – номер соответствующей трехградусной зоны.

Всего шестиградусных зон – 60, а трехградусных – 120.

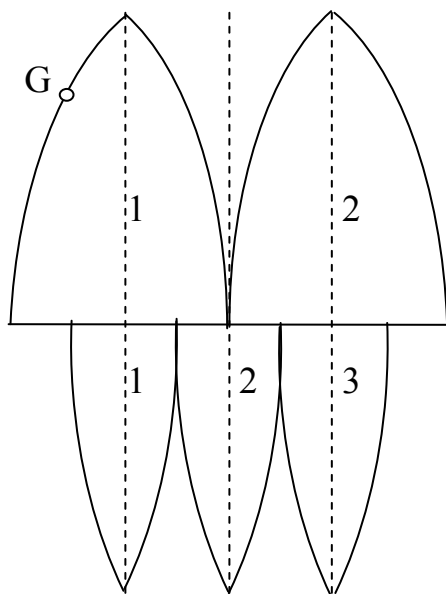


Рис. 2.36. Взаимное расположение и счёт шестиградусных и трёхградусных зон

Каждая зона в проекции Гаусса – Крюгера изображается на плоскости независимо от других зон в своей системе плоских прямоугольных координат.

В проекции Гаусса – Крюгера выводятся следующие условия.

1. Проекция равноугольна (конформна).
2. Осевой меридиан и экватор каждой зоны изображаются на плоскости прямыми линиями.

3. Масштаб изображения на осевом меридиане равен единице.

Исходя из второго условия, изображение осевого меридиана принимается за ось абсцисс, а изображение экватора – за ось ординат.

Системы плоских координат в каждой зоне проекции Гаусса совершенно однообразны и, поэтому, формулы преобразования координат, углов, линий при проектировании их на плоскость будут одинаковыми для всех зон, независимо от их местоположения на эллипсоиде. Это одно из достоинств проекции Гаусса. Недостаток же – неоднозначность определения положения точки, так как одни и те же числовые значения координат могут быть в разных зонах.

На территории России, абсциссы пунктов геодезических сетей всегда положительные, а ординаты – положительны к востоку от осевого меридиана и отрицательны к западу.

Чтобы исключить отрицательные ординаты и неоднозначность, т. е. иметь возможность по значениям плоских прямоугольных координат судить о местоположении зоны, вводятся условные ординаты. Переход к ним осуществляется по формуле:

$$y' = n \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + y, \quad (2.138)$$

где y' – условная ордината, n – номер зоны.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию проектирования геодезических сетей с эллипсоида на плоскость в проекции Гаусса – Крюгера.

Пусть на поверхности эллипсоида в некоторой зоне задана геодезическая сеть в виде сфероидического треугольника $Q_1Q_2Q_3$ (рис. 2.37).

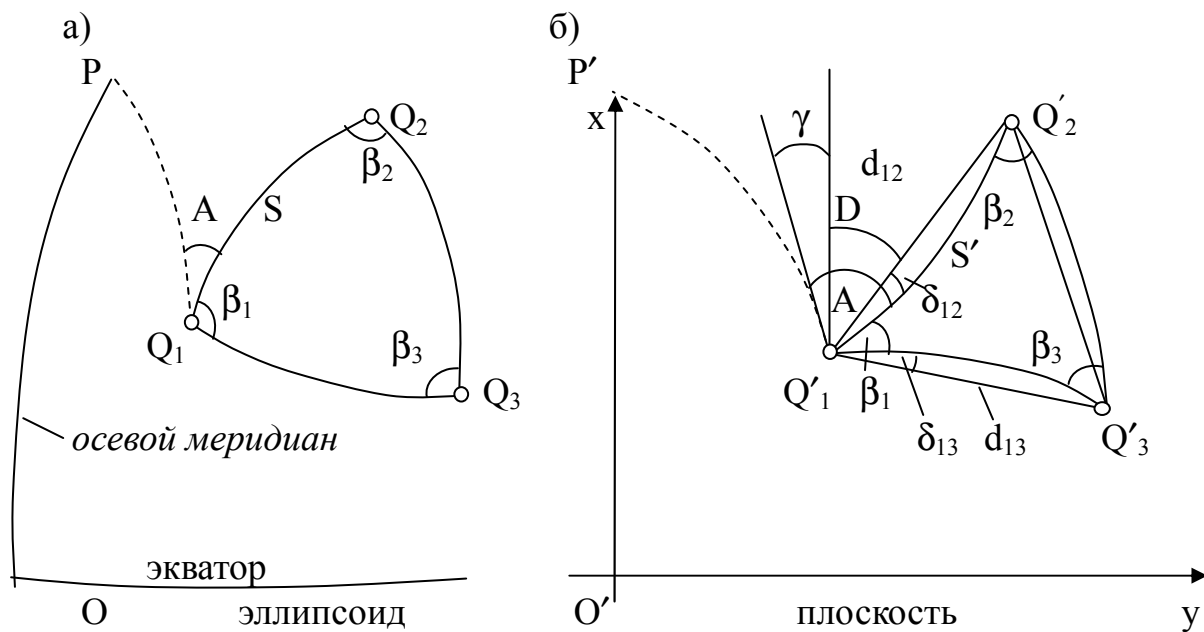


Рис. 2.37. Геометрия проектирования геодезической сети с эллипсоида на плоскость

На рис. 2.37, а: OP – осевой меридиан зоны; Q_1P – меридиан исходного пункта Q_1 ; S – длина исходной стороны; A – геодезический азимут исходной стороны; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – углы сфероидического треугольника.

При отображении зоны на плоскость в проекции Гаусса осевой меридиан и экватор изобразятся в виде прямых линий. Примем их изображения за оси координат Ox и Oy , соответственно.

Пусть вершины сфероидического треугольника $Q_1Q_2Q_3$ отобразились на плоскости в виде точек Q'_1, Q'_2, Q'_3 (рис. 2.37, б). Геодезические линии Q_1Q_2, Q_1Q_3 и Q_2Q_3 образующие сфероидический треугольник изобразятся на плоскости в виде кривых $Q'_1Q'_2, Q'_1Q'_3$, и $Q'_2Q'_3$, углы между которыми в силу равноугольности проекции будут равны соответствующим углам между геодезическими линиями на поверхности эллипсоида. При этом, вследствие линейных искажений проекции, длины геодезических линий на эллипсоиде – S и их изображения на плоскости – S' не будут равны между собой.

Меридиан Q_1P изобразится на плоскости также в виде кривой Q'_1P' . Угол между изображением меридиана и геодезической линией $Q'_1Q'_2$ равен геодезическому азимуту A вследствие равноугольности проекции.

Чтобы иметь возможность при последующей математической обработке геодезической сети на плоскости использовать формулы плоской тригонометрии, необходимо перейти от кривых $Q'_1Q'_2, Q'_1Q'_3$, и $Q'_2Q'_3$ к хордам d_{12}, d_{13}, d_{23} (геодезическим линиям на плоскости). Но тогда возникает дополнительная задача по переходу от углов β_i ($i = 1, 2, 3$) к углам β'_i , образованных хордами; от длин изображения геодезических линий S' к длинам хорд d , а также от геодезического азимута A изображения исходной стороны $Q'_1Q'_2$ на плоскости к дирекционному углу хорды D .

Для перехода от углов β_i к β_i' достаточно учесть небольшие поправки δ_{ij} горизонтальных направлений, вызванные кривизной изображения геодезических линий на плоскости.

Из рис. 2.37, б видно, что угол β_1' между хордами d_{12} и d_{13} будет равен

$$\beta_1' = \beta_1 + \delta_{13} - \delta_{12} = \beta_1 + \Delta_1, \quad (2.139)$$

где $\Delta_1 = \delta_{13} - \delta_{12}$ – поправка в угол.

Отсюда следует, что поправка в любой угол равна разности поправок за кривизну изображения геодезической линии на плоскости правого и левого направлений.

С целью перехода от азимута A к дирекционному углу D , проведём в точке Q_1' линию, параллельную оси Ox . Угол, составленный касательной к изображению меридиана данной точки и линией параллельной изображению осевого меридиана, называется сближением меридиана на плоскости. Сближение меридиана обозначается буквой γ .

Из рис. 2.37, б видно, что дирекционный угол – это угол между хордой d_{12} , стягивающей конечные точки изображения геодезической линии на плоскости и линией, параллельной осевому меридиану, который равен:

$$D = A - \gamma + \delta. \quad (2.140)$$

Таким образом, изложенные общие геометрические сведения о проекции Гаусса – Крюгера позволяют установить, в общем виде, порядок действий при переходе с эллипсоида на плоскость при математической обработке геодезических измерений в этой проекции.

1. Переход от геодезических координат (B, L) исходных пунктов к плоским прямоугольным координатам (x, y) .

2. Определение длины исходной стороны (хорды) и её дирекционного угла на плоскости.

3. Вычисление поправок δ_{ij} за кривизну изображения геодезической линии на плоскости и введение их в непосредственно измеренные горизонтальные направления.

4. Обработка геодезической сети на плоскости.

Для математического обеспечения выполнения вышеперечисленных этапов необходимо располагать следующими формулами:

1) преобразования геодезических координат B, L в плоские прямоугольные координаты x, y и обратно;

2) вычисления сближения меридианов γ на плоскости и масштаба изображения m ;

3) редуцирования сторон с эллипсоида на плоскость (т. е. перехода от S к S');

4) перехода от длины S' изображения геодезической линии на плоскости к длине хорды d ;

5) вычисления поправок за кривизну изображения геодезической линии δ_{ij} .

2.12.2. Преобразование геодезических координат плоские прямоугольные координаты

Отобразить поверхность земного эллипсоида на плоскость – это значит установить взаимно однозначное соответствие между точками поверхности эллипсоида и плоскости. В общем виде сказанное можно математически сформулировать следующим образом

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(B, L); \\ y &= f_2(B, L), \end{aligned} \right\} \quad (2.141)$$

где B , L – геодезические координаты изображаемой точки, а x , y – прямоугольные координаты на плоскости. Таким образом, задача определения взаимно однозначного точечного соответствия двух поверхностей сводится к установлению вида функций f_1 и f_2 . Вид этих функций будет зависеть от выбора проекции и её конкретных условий.

Для изучения равноугольных (конформных) преобразований очень удобным математическим аппаратом являются аналитические функции комплексного переменного, так как известно, что функция комплексного переменного осуществляет конформное преобразование одной системы изометрических координат, в другую, систему изометрических координат.

Из сказанного следует, что для отыскания вида функций f_1 и f_2 с использованием функций комплексного переменного необходимо, чтобы обе системы координат в равенствах (2.141) были изометрическими.

С точки зрения математики изометрическими системами координат называются такие, для которых линейный элемент поверхности имеет вид

$$dS^2 = \rho^2(d\xi^2 + d\eta^2), \quad (2.142)$$

где ρ – некоторая функция координат ξ и η , не содержащая дифференциалов $d\xi$ и $d\eta$.

Простой анализ плоских прямоугольных координат показывает, что система координат x и y есть изометрическая система. Из рис. 2.38 следует

$$dS^2 = dx^2 + dy^2.$$

Однако система геодезических широт и долгот не является изометрической системой, потому что для этой системы координат линейный элемент равен

$$dS^2 = M^2 dB^2 + r^2 dL^2;$$

где r – радиус параллели, а M – радиус кривизны меридиана.

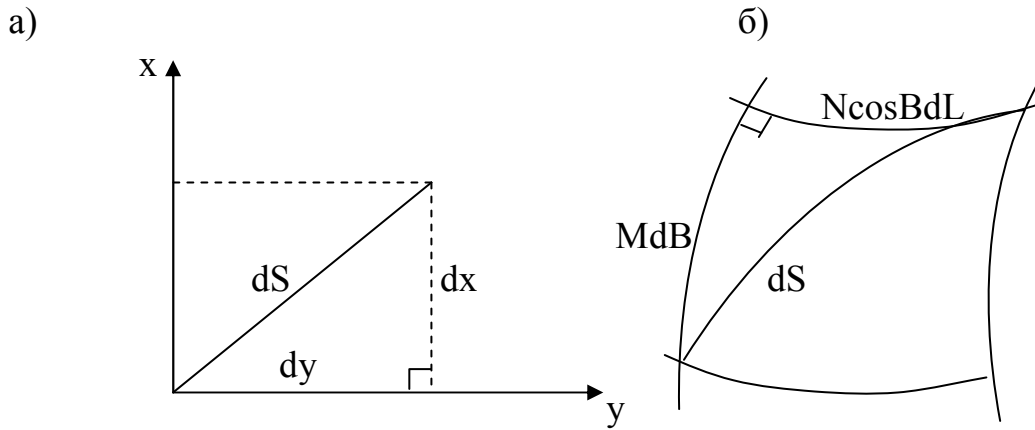


Рис. 2.38. Связь дифференциала линейного элемента с дифференциалами координат: а) в изометрической системе и б) в неизометрической системе

В общем случае $r \neq M$. Однако путем несложных преобразований можно от неизометрической системы B, L перейти к изометрической системе координат q и L . Действительно, вынося за скобки r^2 , получим

$$dS^2 = r^2(dq^2 + dL^2), \quad (2.143 \text{ а})$$

где

$$dq = \frac{M dB}{r}. \quad (2.143 \text{ б})$$

Сравнивая выражение (2.143 а) с (2.142) видим, что система координат q, L изометрическая. Величину q принято называть изометрической широтой. Связь изометрической широты q с геодезической B можно получить из выражения (2.143 б), интегрируя его

$$q = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin B}{1 - \sin B} - \frac{e}{2} \ln \frac{1 + e \sin B}{1 - e \sin B}. \quad (2.144)$$

В системе изометрических координат уравнение (2.141) можно записать в виде

$$x = F_1(q, L);$$

$$y = F_2(q, L).$$

Для отыскания вида функций F_1 и F_2 составим функцию комплексного переменного:

$$x + iy = F(q + iL), \quad (2.145)$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Для проекции Гаусса – Крюгера

$$L = L_0 + l, \quad (2.146)$$

где L_0 – долгота осевого меридиана, а l – разность долгот между осевым меридианом и меридианом данной точки.

Подставим равенство (2.146) в функцию (2.145) и, раскладывая правую часть в ряд Тейлора, найдем:

$$\begin{aligned}
x + iy &= F[(q + iL_0) + (0 + il)] = F_{q+iL_0} + F_{q+iL_0}^I (il) + F_{q+iL_0}^{II} \frac{(il)^2}{2} + \\
&+ F_{q+iL_0}^{III} \frac{(il)^3}{6} + F_{q+iL_0}^{IV} \frac{(il)^4}{24} + F_{q+iL_0}^V \frac{(il)^5}{120} + F_{q+iL_0}^{VI} \frac{(il)^6}{720} + \dots = \\
&= \left(F_{q+iL_0} - F_{q+iL_0}^{II} \frac{l^2}{2} + F_{q+iL_0}^{IV} \frac{l^4}{24} - F_{q+iL_0}^{VI} \frac{(il)^6}{720} + \dots \right) + \\
&+ i \left(F_{q+iL_0}^I l - F_{q+iL_0}^{III} \frac{l^3}{6} + F_{q+iL_0}^V \frac{l^5}{120} + \dots \right).
\end{aligned}$$

Два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части. Поэтому, приравнивая действительные и мнимые части, получаем общие уравнения для симметричных относительно осевого меридиана конформных преобразований

$$\left. \begin{aligned}
x &= F_{q+iL_0} - F_{q+iL_0}^{II} \frac{l^2}{2} + F_{q+iL_0}^{IV} \frac{l^4}{24} - F_{q+iL_0}^{VI} \frac{l^6}{720} + \dots ; \\
y &= F_{q+iL_0}^I l - F_{q+iL_0}^{III} \frac{l^3}{6} + F_{q+iL_0}^V \frac{l^5}{120} + \dots .
\end{aligned} \right\} \quad (2.147)$$

Вид функции F_{q+iL_0} должен определяться исходя из условий конкретной проекции. Для проекции Гаусса – Крюгера масштаб на осевом меридиане равен единице и при $l = 0$, ордината $y = 0$, а абсцисса x равна длине дуги меридиана X , отсчитываемой от экватора (рис. 2.39).

Тогда

$$F_{q+iL_0} = X. \quad (2.148)$$

С учетом равенства (2.148) уравнения (2.147) примут вид:

$$\left. \begin{aligned}
x &= X - \frac{d^2 X l^2}{dq^2 2} + \frac{d^4 X l^4}{dq^4 24} - \frac{d^6 X l^6}{dq^6 720} + \dots ; \\
y &= \frac{dX}{dq} l - \frac{d^3 X l^3}{dq^3 6} + \frac{d^5 X l^5}{dq^5 120} + \dots .
\end{aligned} \right\} \quad (2.149)$$

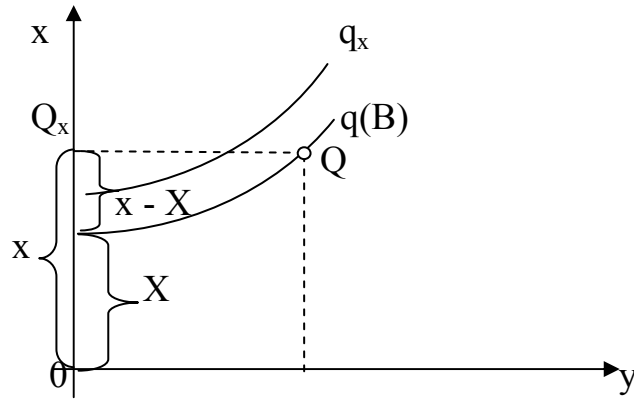


Рис. 2.39. Геометрическая интерпретация изометрических широт

Для вывода рабочих формул необходимо найти производные и подставить их в выражение (2.149). Формулы для производных имеют следующий вид

$$dX = MdB; \quad dq = M \frac{dB}{r}; \quad \frac{dX}{dq} = r; \quad (2.150)$$

$$\frac{d^2X}{dq^2} = \frac{d}{dB} (r) \frac{dB}{dq}; \quad \frac{dr}{dB} = -M \sin B; \quad \frac{dB}{dq} = \frac{r}{M};$$

$$\frac{d^2X}{dq^2} = -r \sin B = -N \cos B \sin B;$$

$$\frac{d^3X}{dq^3} = \frac{d}{dB} (-r \sin B) \frac{dB}{dq} = (M \sin^2 B - N \cos^2 B) \frac{N \cos B}{M} = \left(\frac{M}{N} \operatorname{tg}^2 B - 1 \right) \frac{N^2 \cos^3 B}{M};$$

$$\frac{M}{N} = \frac{1}{V^2}; \quad MV^2 = N;$$

$$\frac{d^3X}{dq^3} = \left(\frac{\operatorname{tg}^2 B - V^2}{V^2} \right) \frac{N^2 \cos^3 B}{M} = (\operatorname{tg}^2 B - V^2) N \cos^3 B; \quad V^2 = 1 + \eta^2;$$

$$\frac{d^3X}{dq^3} = -N \cos^3 B (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2).$$

Продолжая выводить производные следующих порядков аналогичным образом, получим

$$\frac{d^4X}{dq^4} = N \sin B \cos^3 B (5 - \operatorname{tg}^2 B + 9\eta^2);$$

$$\frac{d^5X}{dq^5} = N \cos^5 B (5 - 18\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B + 14\eta^2 - 58\eta^2 \operatorname{tg}^2 B),$$

$$\frac{d^6 X}{dq^6} = -N \sin B \cos^5 B (61 - 58 \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B).$$

Окончательные формулы вычисления плоских координат будут иметь вид

$$x = X + \frac{N \cos B \sin B \cdot l^2}{2\rho^2} \left\{ 1 + \frac{l^2 \cos^2 B}{12\rho^2} (5 - \operatorname{tg}^2 B + 9\eta^2) + \frac{l^4 \cos^4 B}{36\rho^4} (61 - 58 \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B) \right\}; \quad (2.151)$$

$$y = \frac{N \cos B \cdot l}{\rho} \left\{ 1 + \frac{l^2 \cos^2 B}{6\rho^2} (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2) + \frac{l^4 \cos^4 B}{120\rho^4} (5 - 18 \operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B + 14\eta^2 - 58\eta^2 \operatorname{tg}^2 B) \right\}. \quad (2.152)$$

В этих формулах разность долгот $-l$ выражается в градусной мере, а ρ – величина радиана в градусной мере.

Точность вычисления плоских прямоугольных координат по этим формулам 0.001 м, при разности долгот до $3^\circ 30'$.

2.12.3. Преобразование плоских прямоугольных координат в геодезические координаты

Однозначное соответствие между координатами точек на эллипсоиде и плоскости предполагает наличие и обратного перехода

$$B = f_1(x, y);$$

$$l = f_2(x, y).$$

При этом учтено, что в проекции Гаусса $L = L_0 + l$.

Чтобы можно было использовать функцию комплексного переменного и для вывода формул обратного перехода, сначала установим связь между плоскими координатами x, y и изометрической системой $-q, l$

$$q = F_1(x, y);$$

$$l = F_2(x, y),$$

а затем, используя выражение (2.144), перейдем от q к B .

Для отыскания вида функций F_1 и F_2 составим функцию комплексного переменного вида

$$q + il = F(x + iy) = F[(x + i0) + (0 + iy)].$$

Разлагая правую часть в ряд и ограничиваясь членами пятого порядка малости, получим

$$q + il = F_{x+i0} + \sum_{j=1}^5 \frac{1}{j!} F_{x+i0}^j (iy)^j + \dots$$

Разделяя переменные, находим

$$\left. \begin{aligned} q &= F_{x+i0} - \frac{1}{2} F_{x+i0}^{\text{II}} y^2 + \frac{1}{24} F_{x+i0}^{\text{IV}} y^4 - \frac{1}{720} F_{x+i0}^{\text{VI}} + \dots \\ l &= F_{x+i0}^{\text{I}} y - \frac{1}{6} F_{x+i0}^{\text{III}} y^3 + \frac{1}{120} F_{x+i0}^{\text{V}} y^5 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.153)$$

Формулы (2.153) устанавливают связь двух изометрических систем координат.

Вид функции F_{x+i0} установим исходя из условий проекции Гаусса – Крюгера. Из формул (2.153), следует, что при $y = 0, l = 0$, а

$$q = F_{x+i0} = q_x. \quad (2.154)$$

Изометрическую широту q_x , которая является широтой основания ординаты точки Q (рис. 2.39), следует считать величиной известной, так как она может быть получена как функция длины дуги меридиана $X = x$ по известным формулам (2.56 б) и (2.144).

Тогда равенство (2.153) перепишем в виде

$$\left. \begin{aligned} q &= q_x - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 q}{dX^2} \right) y^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{d^4 q}{dX^4} \right) y^4 - \frac{1}{720} \left(\frac{d^6 q}{dX^6} \right) + \dots \\ l &= \left(\frac{dq}{dX} \right) y - \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 q}{dX^3} \right) y^3 + \frac{1}{120} \left(\frac{d^5 q}{dX^5} \right) y^5 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.155)$$

Таким образом, получены общие формулы перехода от плоских координат проекции Гаусса – Крюгера к изометрической широте и разности долгот.

Переход от изометрической широты q к геодезической широте B можно сделать на стадии вывода рабочих формул. На основании соотношения (2.144) в общем виде можно написать

$$B = f(q) = f[q_x + (q - q_x)] = f(q_x) + \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right)_{x=X} (q - q_x) + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q^2} \right)_{x=X} \frac{(q - q_x)^2}{2} + \dots \quad (2.156)$$

Но

$$f(q_x) = B_x \quad (2.157)$$

и тогда

$$B = B_x + \frac{dB}{dq} (q - q_x) + \frac{1}{2} \frac{d^2 B}{dq^2} (q - q_x)^2 + \dots \quad (2.158)$$

Заменив $(q - q_x)$ в (2.158), согласно первого выражения (2.155), будем иметь

$$B = B_x - \frac{1}{2} \left(\frac{dB}{dq} \right) y^2 \left[\left(\frac{d^2 q}{dX^2} \right) - \frac{y^2}{12} \left(\frac{d^4 q}{dX^4} \right) \right] + \dots \quad (2.159)$$

Из выражения (2.159) последовательным дифференцированием первой производной $\frac{dq}{dX} = \frac{1}{r} = \frac{1}{N_x \cos B_x}$ (см. формулы (2.150)), как сложной функции,

найдем производные следующих порядков переменной q по длине дуги меридиана X по формуле

$$\frac{d^{i+1}q}{dX^{i+1}} = \frac{d}{dB} \left(\frac{d^i q}{dX^i} \right) \frac{dB}{dX}, \quad (i=1, 2, \dots).$$

При этом следует учесть, что

$$\frac{dB}{dX} = \frac{1}{M}; \quad \frac{dB}{dq} = \frac{N \cos B}{M} = \frac{r}{M}; \quad \frac{dr}{dB} = -M \sin B.$$

Тогда вторая производная примет вид

$$\frac{d^2 q}{dX^2} = \frac{d}{dB} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{dB}{dX} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dB} \cdot \frac{dB}{dX} = \frac{\sin B}{r^2} = \frac{\operatorname{tg} B_x}{N_x^2 \cos B_x}.$$

Запишем без вывода в окончательном виде с третьей по шестую производные

$$\frac{d^3 q}{dX^3} = \frac{1}{N_x^3 \cos B_x} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 B_x + \eta_x^2);$$

$$\frac{d^4 q}{dX^4} = \frac{1}{N_x^4 \cos B_x} (5 + 3 \operatorname{tg}^2 B_x + \eta_x^2 - 9 \eta_x^2 \operatorname{tg}^2 B_x);$$

$$\frac{d^5 q}{dX^5} = \frac{1}{N_x^5 \cos B_x} (5 + 28 \operatorname{tg}^2 B_x + 24 \operatorname{tg}^4 B_x + 6 \eta_x^2 + 8 \eta_x^2 \operatorname{tg}^2 B_x);$$

$$\frac{d^6 q}{dX^6} = \frac{1}{N_x^6 \cos B_x} (61 + 90 \operatorname{tg}^2 B_x + 45 \operatorname{tg}^4 B_x).$$

Найдя все производные и подставив их в выражение (2.159) и во второе уравнение (2.155), окончательно получим

$$\begin{aligned} B = B_x - \rho \frac{y^2 (1 + \eta_x^2) \operatorname{tg} B_x}{2 N_x^2} \left\{ 1 - \frac{y^2}{12 N_x^2} (5 + 3 \operatorname{tg}^2 B_x + \eta_x^2 - 9 \eta_x^2 \operatorname{tg}^2 B_x) + \right. \\ \left. + \frac{y^4}{360 N_x^4} (61 + 90 \operatorname{tg}^2 B_x + 45 \operatorname{tg}^4 B_x) \right\}; \end{aligned} \quad (2.160)$$

$$\begin{aligned} l = \frac{\rho y}{N_x \cos B_x} \left\{ 1 - \frac{y^2}{6 N_x^2} (1 + 2 \operatorname{tg}^2 B_x + \eta_x^2) + \right. \\ \left. + \frac{y^4}{120 N_x^4} (5 + 28 \operatorname{tg}^2 B_x + 24 \operatorname{tg}^4 B_x + 6 \eta_x^2 + 8 \eta_x^2 \operatorname{tg}^2 B_x) \right\}, \end{aligned} \quad (2.161)$$

где ρ – коэффициент для перехода из радианной в градусную меру.

Ошибка вычислений по этим формулам, при $l \leq 3.5^\circ$, меньше $0.0001''$.

2.12.4. Сближение меридианов на плоскости

Сближение меридианов на плоскости, как было определено ранее в разделе 2.12.1, представляет собой угол, составленный касательной к изображению меридиана данной точки и линией, проведённой через эту же точку параллельно осевому меридиану. Продолжив касательную к меридиану (рис. 2.40), проходящую через точку Q до пересечения с осью Oy, получим угол $(90^\circ + \gamma)$. На основании геометрической интерпретации первой производной можно записать $\text{tg}(90^\circ + \gamma) = \frac{dx}{dy}$ или

$$\text{tg}\gamma = -\frac{dy}{dx} \quad (2.162)$$

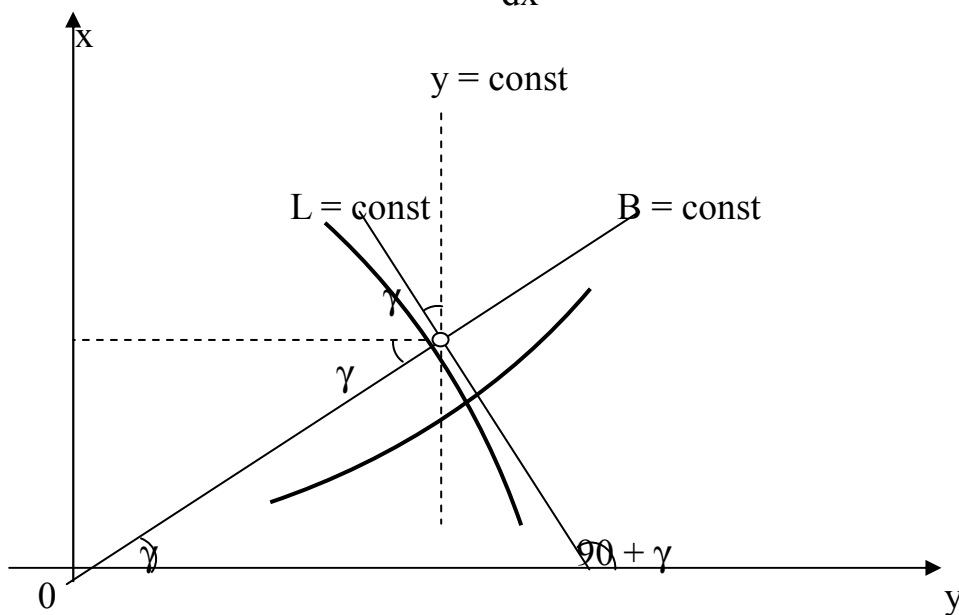


Рис. 2.40. Сближение меридианов

На основании (2.141) дифференциалы dx и dy представим следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial B} dB + \frac{\partial x}{\partial l} dl; \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial B} dB + \frac{\partial y}{\partial l} dl. \end{aligned} \right\} \quad (2.163)$$

Откуда для меридиана, как линии, у которой $L = \text{const}$,

$$dx = \frac{\partial x}{\partial B} dB,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial B} dB.$$

Подставив эти дифференциалы в выражение (2.162), получим

$$\operatorname{tg}\gamma = -\left(\frac{\partial y}{\partial B}\right) : \left(\frac{\partial x}{\partial B}\right). \quad (2.164)$$

Но можно получить и другую формулу для сближения меридианов. Продолжив изображение касательной к параллели в той же точке до пересечения с осью Оу, будем иметь

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{dx}{dy} = \left(\frac{\partial x}{\partial l}\right) : \left(\frac{\partial y}{\partial l}\right). \quad (2.165)$$

При этом было учтено, что для параллели, которую можно записать уравнением $B = \text{const}$,

$$dx = \frac{\partial x}{\partial l} dl;$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial l} dl;$$

$$L = L_0 + l; \quad dL = dl.$$

Так как дифференцировать выражения для координат (2.151) и (2.152) по переменной l гораздо проще, чем по B , то для вывода рабочей формулы вычисления сближения меридианов воспользуемся формулой (2.165).

Дифференцируя выражения (2.151) и (2.152) по l , находим с точностью до членов четвертого порядка

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial l} &= N \cdot l \cdot \cos B \sin B \left\{ 1 + \frac{1}{6} l^2 \cos^2 B (5 - \operatorname{tg}^2 B + 9\eta^2) + \dots \right\}; \\ \frac{\partial y}{\partial l} &= N \cos B \left\{ 1 + \frac{1}{2} l^2 \cos^2 B (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2) + \dots \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (2.166)$$

Подставляя производные (2.166) в формулу (2.165), получим

$$\operatorname{tg}\gamma = l \sin B \left\{ 1 + \frac{1}{3} l^2 \cos^2 B (1 + \operatorname{tg}^2 B + 3\eta^2) + \dots \right\}. \quad (2.167)$$

Величина тангенса сближения меридианов невелика, поэтому, используя соотношение $\gamma = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\gamma)$, можно, раскладывая правую часть в ряд, написать

$$\gamma = \operatorname{tg}\gamma - \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \gamma + \dots$$

Или после подстановки выражения (2.167), пренебрегая членами пятого порядка малости, получим

$$\gamma = l \sin B + \frac{l^3}{3} \sin B \cos^2 B (1 + \operatorname{tg}^2 B + 3\eta^2) - \frac{l^3}{3} \sin^3 B.$$

Умножая и деля третий член правой части на $\cos^2 B$, получим окончательную формулу для вычисления сближения меридианов на плоскости как функцию геодезических координат с точностью до 0.01"

$$\gamma = l \sin B \left\{ 1 + \frac{l^2 \cos^2 B}{3} (1 + 3\eta^2) \right\}. \quad (2.168)$$

Более точная формула (с ошибкой, меньшей 0.0005") имеет вид:

$$\gamma = l \sin B \left\{ 1 + \frac{l^2 \cos^2 B}{3} (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) + \frac{l^4 \cos^4 B}{15} (2 - \operatorname{tg}^2 B) \right\}. \quad (2.169)$$

Иногда на практике возникает необходимость вычисления сближения меридианов как функции плоских координат x и y . Формулу для вычисления сближения меридианов в функции плоских координат можно получить путем замены в формуле (2.168) геодезических величин l и B на прямоугольные координаты, записанные формулами (2.160) и (2.161).

С целью упрощения дальнейших математических преобразований предварительно найдем выражения для $\sin B$ и $\cos^2 B$ через функции плоских координат.

Для этого напомним очевидное соотношение

$$\sin B = \sin[B_x + (B - B_x)] = \sin B_x + \cos B_x (B - B_x) + \dots$$

Подставив вместо $(B - B_x)$ выражение (2.160), с точностью до членов четвертого порядка малости, находим

$$\left. \begin{aligned} \sin B &= \sin B_x \left[1 - \frac{y^2 (1 + \eta_x^2)}{2N_x^2} + \dots \right]; \\ \cos^2 B &= 1 - \sin^2 B = \cos^2 B_x \left[1 + \frac{y^2 \operatorname{tg}^2 B_x}{N_x^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.170)$$

Заменяя в формуле (2.168) разность долгот l выражением (2.161), а $\sin B$ и $\cos^2 B$, соответственно, выражениями (2.170), после несложных преобразований получаем окончательную формулу для вычисления сближения меридианов в радианной мере

$$\gamma = \frac{y \cdot \operatorname{tg} B_x}{N_x} \left\{ 1 - \frac{y^2}{3N_x^2} (1 + \operatorname{tg}^2 B_x - \eta_x^2) + \dots \right\}. \quad (2.171)$$

Формула (2.171) позволяет вычислять сближения меридианов, не грубее $0.005''$.

2.12.5. Масштаб изображения

Масштабом изображения называется предел отношения малого отрезка проекции к соответствующему малому отрезку отображаемой поверхности при стремлении последнего к нулю.

Обозначим длину малого отрезка на плоскости через $\Delta S'$, а на эллипсоиде – ΔS , тогда можно записать следующее выражение

$$m = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta S'}{\Delta S},$$

где m – масштаб изображения в точке.

Если $\Delta S'$ рассматривать как приращение функции, а ΔS – как приращение аргумента, то формулу масштаба изображения можно записать в виде

$$m = \frac{dS'}{dS}. \quad (2.172)$$

Учитывая, что на плоскости

$$dS'^2 = dx^2 + dy^2,$$

а на эллипсоиде

$$dS^2 = M^2 dB^2 + r^2 dL^2,$$

запишем

$$m^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{M^2 dB^2 + r^2 dL^2} = \left(\frac{dy}{dL}\right)^2 \frac{\left[1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right]}{r^2 \left[1 + \left(\frac{M^2}{r^2}\right) \left(\frac{dB}{dL}\right)^2\right]}. \quad (2.173)$$

Для геодезической линии

$$\frac{dB}{dS} = \frac{\cos A}{M};$$

$$\frac{dL}{dS} = \frac{\sin A}{r},$$

тогда

$$\frac{dB}{dL} = \operatorname{ctg} A \frac{r}{M}.$$

С учетом этого выражения, формула (2.173) примет вид

$$m^2 = \left(\frac{dy}{dL}\right)^2 \frac{\left(1 + \frac{dx^2}{dy^2}\right)}{r^2 (1 + \operatorname{ctg}^2 A)}. \quad (2.174)$$

Проекция Гаусса – Крюгера – конформная, т. е. масштаб не зависит от направления. Поэтому, принимая в формуле (2.174) $\operatorname{ctg} A = 0$ и учитывая, что для проекции Гаусса – Крюгера $L = L_0 + l$, а, следовательно, $dL = dl$ и радиус параллели $r = N \cos B$, будем иметь

$$m = \frac{1}{N \cos B} \sqrt{\left(\frac{dy}{dl}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dl}\right)^2}. \quad (2.175)$$

Для получения рабочей формулы масштаба, подставим в выражение (2.175) производные (2.166) с точностью до членов четвертого порядка малости

$$m = \frac{1}{N \cos B} \{N^2 \cos^2 B [1 + l^2 \cos^2 B (1 - \operatorname{tg}^2 B + \eta^2) + \dots] + N^2 \cdot l^2 \cos^2 B \sin^2 B [1 + \frac{1}{3} l^2 \cos^2 B (5 - \operatorname{tg}^2 B + 9\eta^2) + \dots]\}^{\frac{1}{2}}.$$

Или, после простых преобразований, ограничиваясь членами второго порядка малости, получаем

$$m = 1 + \frac{1}{2\rho^2} l^2 \cos^2 B (1 + \eta^2) + \dots \quad (2.176)$$

Погрешность вычисления масштаба изображения по этой формуле не превышает 2 единиц седьмого знака.

Более точная формула ($\delta m < 1 \cdot 10^{-9}$) имеет следующий вид [20]

$$m = 1 + \frac{1}{2\rho^2} l^2 \cos^2 B (1 + \eta^2) + \frac{1}{24\rho^4} l^4 \cos^4 B (5 - 4\text{tg}^2 B). \quad (2.177)$$

Из этой формулы видно, что масштаб изображения в проекции Гаусса – Крюгера на осевом меридиане ($l = 0$) действительно равен единице, а по мере удаления от осевого меридиана, увеличивается ($m > 1$) тем больше, чем дальше удалена точка от осевого меридиана.

Формула масштаба принимает более простой и наглядный вид, если в качестве аргументов использовать плоские прямоугольные координаты.

Из выражения (2.152) имеем

$$l \cos B = \frac{y}{N} \left\{ 1 - \frac{l^2 \cos^2 B}{6} (1 - \text{tg}^2 B + \eta^2) \right\},$$

откуда

$$l^2 \cos^2 B = \frac{y^2}{N^2} \left\{ 1 - \frac{l^2 \cos^2 B}{3} (1 - \text{tg}^2 B + \eta^2) \right\}.$$

Заменяя в фигурных скобках в поправочном члене

$$l^2 \cos^2 B \approx \frac{y^2}{N^2},$$

будем иметь

$$l^2 \cos^2 B = \frac{y^2}{N^2} \left\{ 1 - \frac{y^2}{3N^2} (1 - \text{tg}^2 B + \eta^2) \right\},$$

$$l^4 \cos^4 B \approx \frac{y^4}{N^4}.$$

Подставим эти выражения в равенство (2.177)

$$m = 1 + \frac{y^2 (1 + \eta^2)}{2N^2} \left\{ 1 - \frac{y^2}{3N^2} (1 - \text{tg}^2 B + \eta^2) \right\} + \frac{1}{24} (5 - 4\text{tg}^2 B) \frac{y^4}{N^4}.$$

Во втором члене

$$\frac{1 + \eta^2}{N^2} = \frac{V^2}{N^2} = \frac{V^4}{C^2} = \frac{1}{R^2}.$$

Принимая в членах четвертого порядка $N \approx R$, получаем

$$\begin{aligned} m &= 1 + \frac{y^2}{2R^2} - \frac{y^4}{6R^4} (1 - \text{tg}^2 B + \eta^2) + \frac{y^4}{24R^4} (5 - 4\text{tg}^2 B) = \\ &= 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4} (5 - 4\text{tg}^2 B - 4 + 4\text{tg}^2 B - 4\eta^2). \end{aligned}$$

После приведения подобных членов и пренебрегая членом, содержащим η^2 , окончательно найдём

$$m = 1 + \frac{y^2}{2R^2} + \frac{y^4}{24R^4} + \dots \quad (2.178)$$

Используя формулу (2.178), нетрудно подсчитать искажения на краю зоны в проекции Гаусса – Крюгера. Для шестиградусной зоны $\Delta m = m - 1 \approx 1/1300$, для трехградусных зон $\Delta m \approx 1/5000$.

Таким образом, искажения на краю шестиградусных зон таковы, что с ними приходится считаться при производстве крупномасштабных съёмок. Поэтому съёмки масштаба 1:5000 и крупнее производятся в трёхградусных зонах.

2.12.6. Редуцирование расстояний и направлений с эллипсоида на плоскость

Редуцирование расстояний

Под редуцированием расстояний понимается перенос расстояний с эллипсоида на плоскость, т. е. переход от длины геодезической линии эллипсоида S к длине её изображения на плоскости S' .

Связь между S и S' можно установить на основании формулы масштаба изображения

$$m = \frac{dS'}{dS}.$$

Откуда

$$dS' = mdS,$$

или

$$S' = \int_0^S mdS. \quad (2.179)$$

Для интегрирования правой части выражения (2.179) необходимо масштаб выразить через длину геодезической линии. Установить зависимость масштаба от длины геодезической линии сложно. Поэтому для интегрирования (2.179) воспользуемся методом численного интегрирования по Симпсону (2.52).

Разобьём область интегрирования между точками 1 и 2 на два равных отрезка и обозначим масштабы в узловых точках соответственно: m_1 , m_{cp} , m_2 (рис. 2.41). Тогда, на основании формулы Симпсона (2.51), можно написать

$$S' = \frac{S}{6} (m_1 + m_2 + 4m_{cp}). \quad (2.180)$$

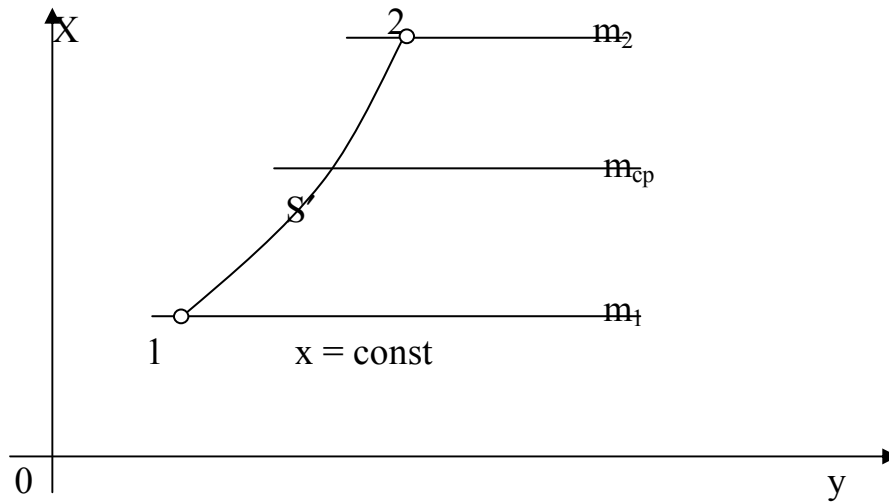


Рис. 2.41. Масштабы в узловых точках метода Симпсона

Если заменить в равенстве (2.180) масштабы их выражениями (2.178), то с точностью до членов четвертого порядка малости, получим

$$S' = S \left(1 + \frac{y_1^2 + y_2^2 + 4y_{cp}^2}{12R_{cp}^2} + \frac{y_1^4 + y_2^4 + 4y_{cp}^4}{144R_{cp}^4} \right), \text{ где принято что } R_1 \approx R_2 \approx$$

R_{cp} .

Учитывая, что

$$y_1 = y_{cp} - \frac{\Delta y}{2};$$

$$y_2 = y_{cp} + \frac{\Delta y}{2},$$

где $\Delta y = y_2 - y_1$, находим

$$y_1^2 + y_2^2 + 4y_{cp}^2 = 6y_{cp}^2 + \frac{\Delta y^2}{2};$$

$$y_1^4 + y_2^4 + 4y_{cp}^4 \approx 6y_{cp}^4 + \dots$$

Окончательная формула для редуцирования расстояний примет вид

$$S' = S \left(1 + \frac{y_{cp}^2}{2R_{cp}^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_{cp}^2} + \frac{y_{cp}^4}{24R_{cp}^4} \right). \quad (2.181)$$

Однако, как было показано ранее (рис. 2.37), при математической обработке геодезической сети на плоскости в проекции Гаусса – Крюгера необходимо от длины изображения геодезической линии исходной стороны S' перейти к длине хорды d_{12} , стягивающей конечные точки изображения геодезической линии на плоскости.

Опуская громоздкий вывод [20], приведём окончательную формулу такого перехода

$$d_{12} = S' \left(1 - \frac{y_1^2 (x_2 - x_1)^2}{24R_1^4} \right).$$

В практике применения проекции Гаусса – Крюгера в нашей стране, ординаты y обычно не превышают 300 км, а длины сторон наземных геодезических построений – 60 км.

С этими данными разность $(S' - d)$ будет меньше 0.0005 м. Таким образом, при математической обработке наземных геодезических сетей всех классов следует принимать $S' = d$.

Вычисление поправок в горизонтальные направления за кривизну изображения геодезической линии

Угол между изображением геодезической линии и хордой принято называть поправкой за кривизну изображения геодезической линии на плоскости и обозначать δ_{ij} .

Из рис. 2.42 видно, что поправка δ_{21} определяется соотношением [10]

$$\delta_{21} = \frac{\tau}{d} = \frac{1}{d} \int_0^y D_i d\gamma. \quad (2.182)$$

Бесконечно малую трапецию $1'2'3'4'$ на плоскости отобразим конформно на эллипсоид. Суммы углов криволинейных четырехугольников на плоскости и на эллипсоиде равны, т. е.

$$360^\circ + \varepsilon = 360^\circ + d\gamma,$$

откуда

$$d\gamma = \varepsilon = \frac{P}{R_{cp}^2} = \frac{y dx}{R_{cp}^2}, \quad (2.183)$$

где ε – сферический избыток, $P = y dx$ – площадь трапеции $1'2'3'4'$, R_{cp} – средний радиус кривизны. Представим y и dx в следующем виде

$$y = y_1 + D_i \sin \alpha;$$

$$dx = dD_i \cos \alpha,$$

где α – дирекционный угол направления $1'2'$.

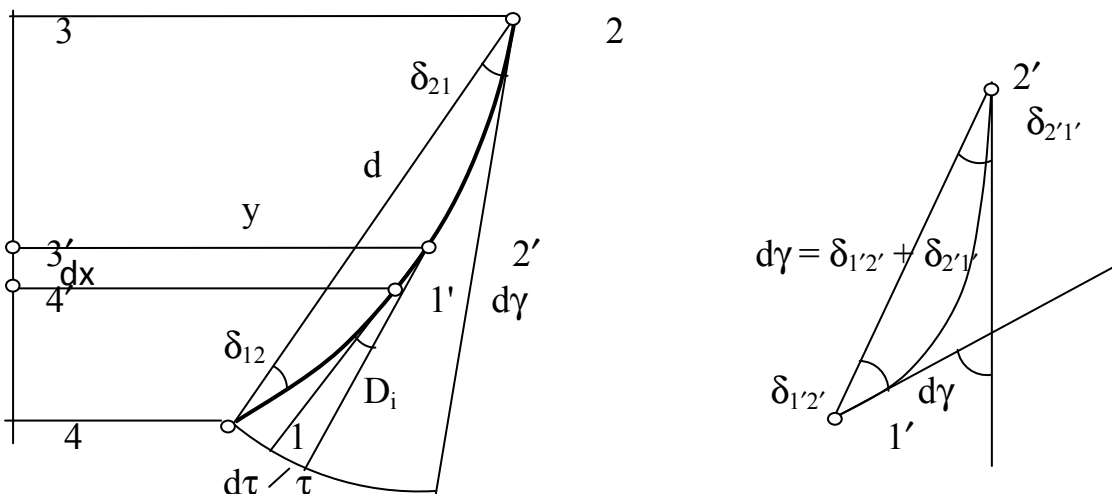


Рис. 2.42. Поправки за кривизну изображения геодезической линии

Подставим эти выражения в (2.183), а (2.183) в (2.182) и получим

$$\delta_{21} = \frac{1}{R_{cp}^2 d} \int_0^{S'} D_i (y_1 + D_i \sin \alpha) \cos \alpha dD_i.$$

Преобразуем выражение полагая, что $S' \approx d$, а $\alpha = \text{const}$ и получим

$$\delta_{21} = \frac{y_1 \cos \alpha}{R_{cp}^2 d} \left[\frac{D_i^2}{2} \right]_0^d + \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{R_{cp}^2 d} \left[\frac{D_i^3}{3} \right]_0^d = \frac{d \cos \alpha y_1}{2R_{cp}^2} + \frac{d^2 \sin \alpha d \cos \alpha}{3R_{cp}^2}. \quad (2.184)$$

На плоскости в проекции Гаусса – Крюгера

$$d \cdot \cos \alpha = \Delta x = x_2 - x_1;$$

$$d \cdot \sin \alpha = \Delta y = y_2 - y_1.$$

Подставляя приращения координат в формулу (2.184), получим

$$\begin{aligned} \delta_{21} &= \frac{(x_2 - x_1)}{2R_{cp}^2} y_1 + \frac{(x_2 - x_1)}{3R_{cp}^2} (y_2 - y_1) = \frac{(x_2 - x_1)}{R_{cp}^2} \left(\frac{y_1}{2} + \frac{y_2 - y_1}{3} \right) = \\ &= \frac{(x_2 - x_1)(y_1 + 2y_2)}{6R_{cp}^2}. \end{aligned}$$

Окончательная формула для вычисления поправок за кривизну геодезической линии имеет вид

$$\delta_{21}'' = \frac{f}{3} (x_2 - x_1)(2y_2 + y_1), \quad (2.185)$$

где $f = \frac{\rho''}{2R_{cp}^2}$.

Для поправки δ_{12}'' поменяем индексы в формуле (2.185), получим

$$\delta_{12}'' = -\frac{f}{3} (x_2 - x_1)(2y_1 + y_2), \quad (2.186)$$

Формулы (2.185) и (2.186) имеют погрешность, не превышающую $0.01''$ при расстояниях между пунктами до 30 км.

Более точные формулы, погрешность которых не превосходит $0.001''$ при длине сторон до 60 км, имеют следующий вид [20]

$$\delta_{12}'' = -\frac{\rho''}{2R_1^2} (x_2 - x_1) \left[y_1 + \frac{\Delta y}{3} - \frac{y_1^3}{3R_1^2} + \frac{y_1^2 \Delta y e'^2 \sin 2B_1}{R_1 \Delta x} \right];$$

$$\delta_{21}'' = \frac{\rho''}{2R_2^2} (x_2 - x_1) \left[y_2 - \frac{\Delta y}{3} - \frac{y_2^3}{3R_2^2} + \frac{y_2^2 \Delta y e'^2 \sin 2B_2}{R_2 \Delta x} \right].$$

2.12.7. Порядок проектирования геодезических сетей с эллипсоида на плоскость

Выше были получены все необходимые формулы для проектирования геодезических сетей с эллипсоида на плоскость. Порядок проектирования

зависит от исходных данных, которыми мы располагаем для данной геодезической сети. Рассмотрим наиболее общий случай.

Пусть для некоторой геодезической сети на эллипсоиде исходными данными являются геодезические координаты B_1, L_1 пункта 1, длина исходной стороны S_{12} и её геодезический азимут A_{12} , а измеренными величинами являются углы β_i (рис. 2.43).

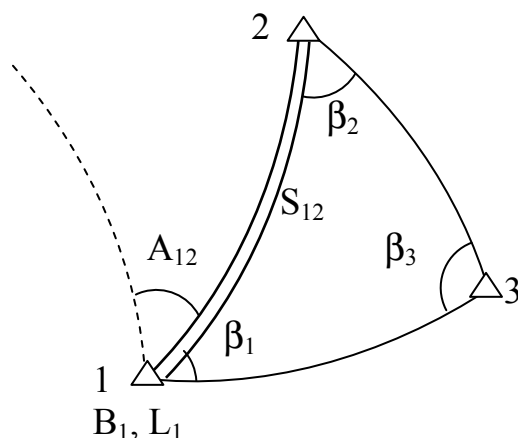


Рис. 2.43. Проектируемая с эллипсоида на плоскость геодезическая сеть

При таком наборе исходных данных будет следующий порядок проектирования.

1. Переход от геодезических координат B_1 и L_1 исходного пункта к плоским прямоугольным координатам x_1, y_1 по формулам (2.151) и (2.152) с одновременным вычислением сближения меридианов (2.168) и масштаба изображения (2.178), т. е.

$$B_1, L_1 \Rightarrow x_1, y_1, \gamma_1, m.$$

2. Редуцирование исходной стороны на плоскость и вычисление её дирекционного угла по нижеприведенным формулам

$$\left. \begin{aligned} S' &= S \left(1 + \frac{y_{cp}^2}{2R_{cp}^2} + \frac{\Delta y^2}{24R_{cp}^2} \right); \\ D_{12} &= A_{12} - \gamma_1 + \delta_{12}; \\ \delta_{12} &= -\frac{f}{3}(x_2 - x_1)(2y_1 + y_2). \end{aligned} \right\} \quad (2.187)$$

На этом этапе решение можно выполнить только методом последовательных приближений, так как неизвестны координаты x_2, y_2 .

В первом приближении, принимая $x_2 \approx x_1, y_2 \approx y_1, \delta = 0, S' = Sm_1, D_{12} \approx A_{12} - \gamma_1$, определяем по формулам (2.187) S', δ, D .

Во втором приближении вычисляем координаты второй точки

$$x_2 = x_1 + S' \cos D_{12};$$

$$y_2 = y_1 + S' \sin D_{12}.$$

И вновь по формулам (2.187) определяем новые значения S', δ, D , а затем переходим к третьему приближению и т.д.

Вычисления заканчиваются тогда, когда два смежных приближения повторяют друг друга.

3. Вычисление поправок в горизонтальные направления за кривизну изображения геодезической линии на плоскости.

Во все горизонтальные направления сети (прямые и обратные) вычисляются поправки по формуле

$$\delta_{ij} = -\frac{f}{3}(x_j - x_i)(2y_i + y_j).$$

Для вычисления поправок необходимо знать координаты определяемых пунктов, которые нам неизвестны. Поэтому и на этом этапе задача решается по методу приближений.

Считая в первом приближении $\beta'_i = \beta_i$, удобно вычислять координаты по формулам Юнга

$$x_3 = \frac{x_1 \operatorname{ctg} \beta'_2 + x_2 \operatorname{ctg} \beta'_1 - (y_2 - y_1)}{\operatorname{ctg} \beta'_1 + \operatorname{ctg} \beta'_2};$$

$$y_3 = \frac{y_1 \operatorname{ctg} \beta'_2 + y_2 \operatorname{ctg} \beta'_1 + (x_2 - x_1)}{\operatorname{ctg} \beta'_1 + \operatorname{ctg} \beta'_2}.$$

Плоские углы определяются следующим образом

$$\Delta_i = \delta_{i,\text{пр}} - \delta_{i,\text{лев}};$$

$$\beta'_i = \beta_i + \Delta_i.$$

Во втором, третьем и последующих приближениях уточненные плоские углы подставляются в формулы Юнга и по всё более и более точным координатам вычисляются поправки за кривизну изображения геодезической линии.

Анализируя формулы (2.186) видно, что поправки δ_{ij} невелики и редко превышают $10''$. Поэтому для их вычисления достаточно знать координаты определяемых пунктов с точностью 7 м [20] и делать не более одного или двух приближений. В этом случае ошибка вычисления δ_{ij} не будет превышать $0.005''$.

Существует контроль правильности вычисления поправок за кривизну изображения геодезических линий по сферическим избыткам треугольников

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = -\epsilon.$$

4. Математическая обработка геодезической сети на плоскости.

На этом этапе выполняют предварительную обработку, уравнивание и оценку точности геодезической сети.

5. Окончательные вычисления и составление каталога.

При составлении каталога, если пункты попадают в $30'$ перекрытие зон, то их координаты в каталоге приводятся в системах двух смежных зон.

2.12.8. Преобразование прямоугольных координат Гаусса – Крюгера из одной зоны в другую

Проекция Гаусса – Крюгера проста и удобна для производства топографо-геодезических работ. Однако она имеет и существенный недостаток, так как при отображении на плоскость большой территории возникает необходимость деления её на отдельные участки, что влечет за собой появления большого количества систем прямоугольных координат (много зон). Это вызывает большое неудобство при производстве топографо-геодезических работ на стыке двух смежных зон.

Действительно, если некоторая геодезическая сеть располагается на территории двух смежных зон (рис. 2.44), в этом случае при математической обработке геодезической сети необходимо исходные данные перевести в одну систему координат. Тогда имеется возможность уравнивать сеть в единой системе координат по простым формулам, вычислять невязки геометрических условий в коррелятном методе уравнивания и/или контролировать по ним правильность выполненных измерений и т. д.

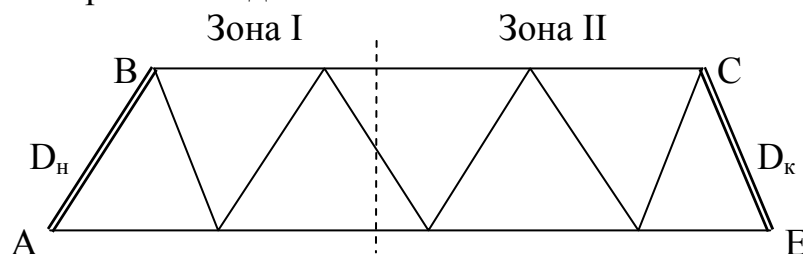


Рис. 2.44. Геодезическая сеть на стыке двух смежных зон

Аналогичная задача возникает и при производстве крупномасштабных съёмок 1: 5 000 – 1: 500 когда требуется преобразовывать координаты из шестиградусной в трехградусную зону и обратно.

В практике геодезических работ разработано несколько графических и табличных способов преобразования координат из одной зоны в другую для проекции Гаусса – Крюгера. В настоящее время при широком внедрении персональных компьютеров наиболее целесообразно использовать аналитический способ преобразования координат, который является наиболее точным и который схематично можно представить в следующем виде

$$x^I, y^I \Rightarrow B, l^I \Rightarrow B, L \Rightarrow B, l^{II} \Rightarrow x^{II}, y^{II}.$$

В этом способе связь различных систем плоских прямоугольных координат осуществляется с помощью системы геодезических координат, которая является единой для всей поверхности Земли. Вначале плоские прямоугольные координаты первой зоны преобразуются по формулам (2.160), (2.161) и (2.146) в геодезические, а затем геодезические координаты по формулам (2.151) и (2.152) – снова в плоские, но уже относительно осевого меридиана второй зоны.

Точность способа 2 – 3 мм. С появлением компьютеров аналитический способ стал основным, поэтому другие способы (табличный, графический) здесь рассматриваться не будут, так как в настоящее время они утратили практическое значение.

3. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

3.1. Общие сведения об отклонениях отвесных линий

Уклонение отвесной линии (УОЛ) – это угол, составленный отвесной линией и нормалью к поверхности эллипсоида в данной точке. Отвесные линии непосредственно связаны с гравитационным полем Земли. Под гравитационным полем надо понимать поле силы тяжести, силы с которой всякое тело притягивается к Земле. Гравитационное поле Земли формируют две силы (рис. 3.1): сила тяготения \vec{F} и центробежная сила \vec{K} . Результирующая этих двух сил и есть сила тяжести

$$\vec{P} = \vec{F} + \vec{K}.$$

Вектор силы тяжести – это произведение массы тела m на вектор ускорения силы тяжести \vec{g}

$$\vec{P} = m\vec{g}.$$

Изучить гравитационное поле Земли это значит знать в каждой точке Земли величину ускорения g и его направление. Но, как известно, вектор может быть представлен выражением

$$\vec{g} = g_x \vec{i} + g_y \vec{j} + g_z \vec{k}.$$

где g_x, g_y, g_z – проекции ускорения g на координатные оси, а $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – единичные векторы осей координат.

Если известны три составляющие, то модуль вектора ускорения силы тяжести и его направление относительно осей системы координат могут быть получены по формулам:

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2};$$

$$\cos(\vec{g}, \vec{i}) = \frac{g_x}{g}; \quad \cos(\vec{g}, \vec{j}) = \frac{g_y}{g}; \quad \cos(\vec{g}, \vec{k}) = \frac{g_z}{g}.$$

Однако на практике изучение гравитационного поля Земли сводится не к получению трёх составляющих g_x, g_y, g_z , а к получению одной так называемой потенциальной функции поля силы тяжести.

Потенциальная функция – это такая функция, частные производные от которой по соответствующим координатам равны составляющим вектора ускорения силы тяжести – g_x, g_y, g_z .

Пусть $W(x, y, z)$ – потенциальная функция, тогда

$$\frac{\partial W}{\partial x} = g_x; \quad \frac{\partial W}{\partial y} = g_y; \quad \frac{\partial W}{\partial z} = g_z.$$

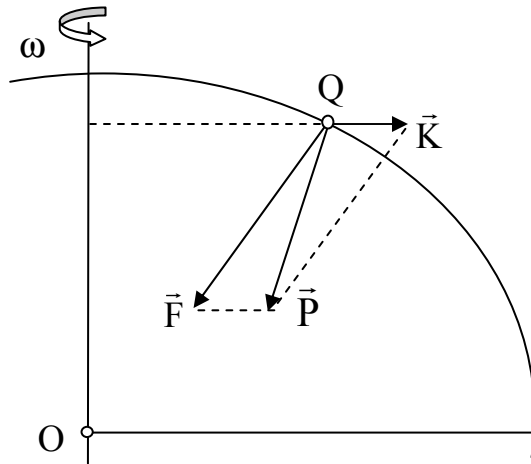


Рис. 3.1. Вектор поля силы тяжести

Для потенциала силы тяжести W справедливо равенство

$$\frac{\partial W}{\partial S} = g \cos(\vec{g}, \vec{S}), \quad (3.1)$$

где \vec{S} – произвольное направление.

Изучение гравитационного поля неразрывно связано с такими понятиями как силовая линия поля и уровенная поверхность.

Силовая линия поля – это пространственная кривая, в каждой точке которой касательная к ней совпадает с направлением действия силы тяжести. Касательная совпадает с направлением *отвесной линии* в данной точке.

С геометрической точки зрения *уровенной поверхностью* называется поверхность, в каждой точке которой отвесные линии пересекают её под прямым углом. Можно дать и физическое толкование уровенной поверхности гравитационного поля Земли.

Возьмем некоторую уровенную поверхность (рис. 3.2). Если выбрать направление S перпендикулярное к направлению действия силы тяжести \vec{g} в точке M , то в силу (3.1) составляющая ускорения силы тяжести по этому направлению будет равна $\frac{\partial W}{\partial S} = 0$. А производная равна нулю только в том случае, когда функция $W = \text{const}$. Отсюда уровенную поверхность можно определить как поверхность равного потенциала силы тяжести. А как располагаются уровенные поверхности по отношению друг к другу?

Возьмем две уровенные поверхности и выберем в точке M на одной из них направление диаметрально противоположное действию силы \vec{g} в этой точке (рис. 3.3). Тогда на основании (3.1) имеем

$$\frac{dW}{dH} = g \cos(\vec{g}, d\vec{H}) = g \cos(180^\circ) = -g.$$

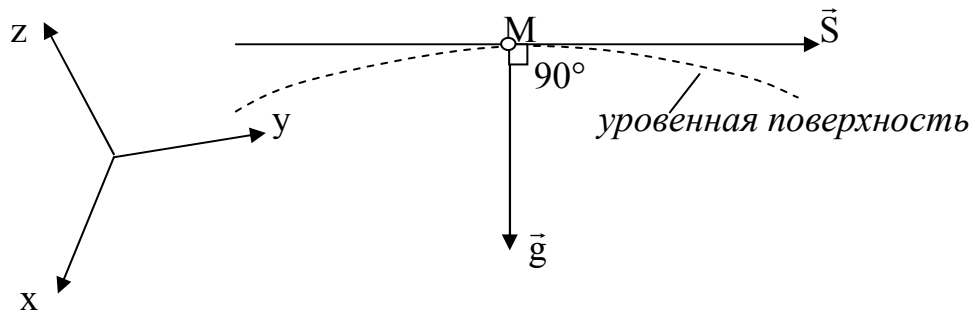


Рис. 3.2. Направление вектора силы тяжести на уровне поверхности

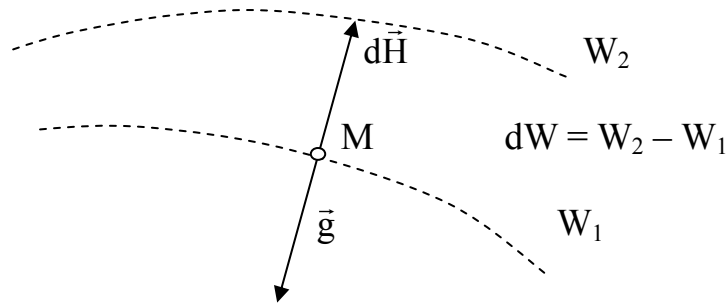


Рис. 3.3. Превышение между двумя уровнями поверхностями

Откуда

$$dH = -\frac{dW}{g} \quad (3.2)$$

В нашем случае $dW = \text{const}$. Если бы g на каждой уровне поверхности было бы постоянным, то уровенные поверхности были бы параллельными. В действительности модуль и направление вектора \vec{g} зависит от распределения масс внутри Земли. Поэтому в общем случае уровенные поверхности не параллельны. Расстояние между уровнями поверхностями уменьшается в направлении от экватора к полюсам.

Таким образом, изучение гравитационного поля Земли сводится к определению W .

Но потенциал W можно вычислить [2]

$$W = f \int_{\tau} \frac{\delta \tau}{r} + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2),$$

где f – постоянная тяготения,

δ – плотность масс,

x, y – координаты точки,

r – расстояние элемента до точки, в которой вычисляется W ,

ω – угловая скорость вращения Земли,

τ – объем тела Земли.

Так как плотность распределения масс δ нам неизвестна, то и определить W без привлечения гипотез о внутреннем распределении масс невозможно. Поэтому, для упрощения задачи определения потенциальной функции её обычно представляют в виде

$$W = U + T,$$

где U – нормальный потенциал, а T – возмущающий потенциал.

За нормальный потенциал принят потенциал уровенного эллипсоида с заданными параметрами. Нормальный потенциал U точно определяется из решения задачи Стокса.

Если известна уровенная поверхность, известна масса, известна угловая скорость, то потенциал силы тяжести создаваемый этим телом определяется однозначно не зависимо от распределения масс внутри Земли.

На поверхности эллипсоида [2]

$$U_0 = \gamma_3 a \left(1 - \frac{2}{3} \alpha - \frac{1}{5} \alpha^2 - \dots\right) + \frac{11}{6} \omega^2 a^2 \left(1 - \frac{24}{77} - \dots\right). \quad (3.3)$$

Ускорение силы тяжести нормального поля на поверхности эллипсоида вычисляется по формуле Сомильяна – Пицетти

$$\gamma_0 = \frac{\gamma_3 a \cos^2 B + \gamma_p b \sin^2 B}{\sqrt{a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B}}, \quad (3.4)$$

где γ_3 , γ_p – соответственно, нормальное ускорение силы тяжести на экваторе и полюсе. Формула (3.4) является строгой, но если её разложить в ряд, то получим выражение, с использованием которого вычисление γ_0 значительно упрощается

$$\gamma_0 = \gamma_3 (1 + \beta \sin^2 B - \beta_1 \sin^2 2B + \dots), \quad (3.5)$$

где постоянные коэффициенты для заданного эллипсоида определяются по формулам

$$\beta = \frac{5}{2} q - \alpha; \quad q = \frac{\omega^2 a}{\gamma_3} = \frac{\gamma_p - \gamma_3}{\gamma_3}; \quad \beta_1 = \frac{1}{8} \alpha^2 + \frac{1}{4} \alpha \beta.$$

Если пренебречь последним членом, то приходим к формуле Клеро

$$\gamma_0 = \gamma_3 (1 + \beta \sin^2 B). \quad (3.6)$$

Уровенную поверхность нормального поля силы тяжести вне эллипсоида принято называть *сфероном*. Форма сферона не является эллипсоидом.

Возмущающий потенциал – это несовпадение действительного и нормального потенциалов силы тяжести.

Возмущающий потенциал является функцией аномалий силы тяжести. В общем виде можно записать следующим образом

$$T = f(\Delta g_1, \Delta g_2, \dots, \Delta g_n),$$

где $\Delta g_i = g_i - \gamma_i$ – аномалии силы тяжести в точках распределённых по всей поверхности Земли, γ_i – нормальные ускорения силы тяжести.

Несовпадение уровенных поверхностей нормального и действительного полей силы тяжести приводит к несовпадению нормалей к ним. В геодезии несовпадение нормали к уровенной поверхности нормального поля и отвесной линии (нормали к уровенной поверхности действительного поля) получило название *уклонение отвесной линии*.

Уклонения отвесных линий (УОЛ) имеют для геодезии очень большое значение.

Проекция полного уклонения отвесной линии на плоскость в любом произвольном направлении с учётом (3.7) вычисляется по формуле

$$\vartheta = u \cos(A - \theta) = u \cos \theta \cos A + u \sin \theta \sin A = \xi \cos A + \eta \sin A . \quad (3.8)$$

В зависимости от принятого эллипсоида различают абсолютные и относительные уклонения отвесных линий.

Абсолютным уклонением отвесной линии называется угол между отвесной линией и нормалью к общеземному эллипсоиду.

Относительным уклонением отвесной линии называется угол между отвесной линией и нормалью к референц-эллипсоиду.

Кроме того, следует различать УОЛ в геометрическом и физическом смысле.

Если уклонение отвесной линии определяется как угол между отвесной линией в точке М (рис. 3.5) и нормалью, проведённой из той же точки М к эллипсоиду, то такие УОЛ называют *геометрическими*. Если же уклонение отвесной линии определяется как угол в точке М между вектором ускорения силы тяжести \vec{g} реального поля и вектором ускорения силы тяжести $\vec{\gamma}$ нормального поля, то такие УОЛ называются *физическими*. Связь между геометрическим и физическим УОЛ можно установить исходя из рис. 3.5.

В точке М проведем отвесную линию MM_0 и нормали MM_2 к эллипсоиду и MM_1 к сферопу (уровенной поверхности нормального поля). Из рис. 3.5 видно, что составляющие УОЛ в плоскости меридиана ξ_r и ξ_ϕ будут отличаться друг от друга на угол ϵ , который вычисляется по формуле

$$\epsilon'' = 0.171'' N^{KM} \sin 2B . \quad (3.9)$$

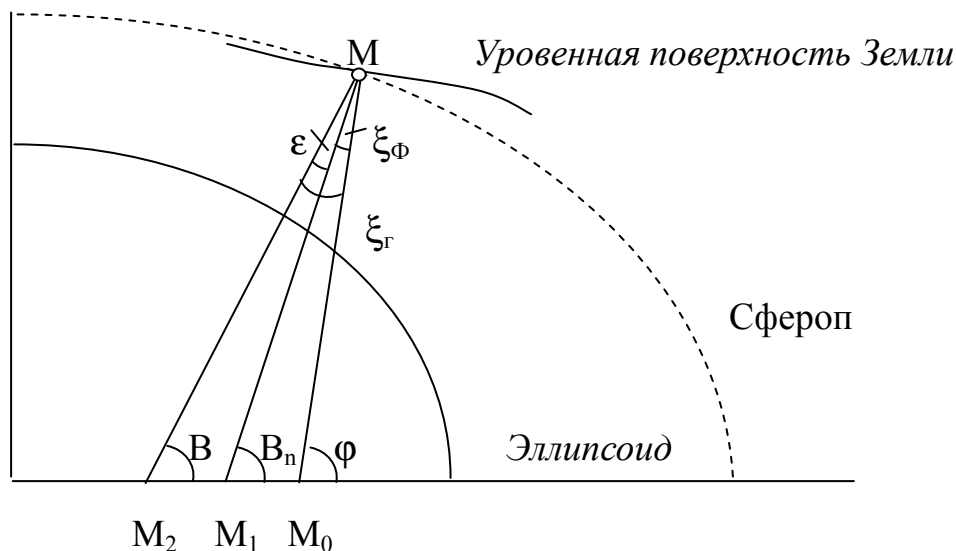


Рис. 3.5. Связь геометрического и физического УОЛ в плоскости меридиана

По методу определения различают следующие УОЛ:

1. гравиметрические;
2. астрономо-геодезические;
3. астрономо-гравиметрические.

В настоящее время помимо трёх, указанных выше способов определения УОЛ, появилась возможность определения УОЛ и современными спутниковыми методами по альтиметрическим и GPS-измерениям.

3.2. Способы определения уклонений отвесных линий

3.2.1. Гравиметрический способ

Возмущающий потенциал $T = W - U$ порожден несовпадением действительного и нормального полей силы тяжести. А это значит, что уклонения отвесных линий являются функцией возмущающего потенциала. Формулы связи УОЛ и возмущающего потенциала выводятся в курсе теории фигуры Земли и имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \xi^{гр} &= -\frac{1}{R\gamma} \frac{\partial T}{\partial B}; \\ \eta^{гр} &= -\frac{1}{R\gamma \cos B} \frac{\partial T}{\partial L}. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

В 1928 г. голландским учёным Венинг-Мейнесом были получены выражения для производных возмущающего потенциала по широте и долготе, подстановка которых в (3.10) позволила ему получить следующие формулы

$$\left. \begin{aligned} \xi^{гр} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Q \Delta g \cos A d\psi dA; \\ \eta^{гр} &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} Q \Delta g \sin A d\psi dA, \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

где ψ – сферическое расстояние от исследуемой точки до текущей точки;

A – геодезический азимут направления на текущую точку;

$\Delta g = g - \gamma$ – аномалии силы тяжести;

$$Q = \frac{\rho''}{2\gamma} \cos^2 \frac{\psi}{2} \left[\operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} + 12 \sin \frac{\psi}{2} - 32 \sin^2 \frac{\psi}{2} + \frac{3}{1 + \sin \frac{\psi}{2}} - \right.$$

$$\left. - 12 \sin^2 \frac{\psi}{2} \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \right] - \text{функция Венинг-Мейнеса.}$$

Интегрирование в формулах (3.11) заменяется суммированием. Для вычисления гравиметрических УОЛ Еремеевым В.Ф. в 1957 г. разработаны специальные палетки. В настоящее время такие вычисления производятся на компьютере.

Анализ формул (3.11) показывает, что для вычисления УОЛ гравиметрическим методом необходимо располагать гравиметрической съёмкой всей поверхности Земли. И в этом случае мы получали бы абсолютные, физические УОЛ. Однако геодезические измерения обрабатываются на референц-эллипсоиде, поэтому нас интересуют относительные УОЛ. В силу указанных причин гравиметрический способ в чистом виде не применяется.

3.2.2. Астрономо-геодезический способ

Этот способ позволяет определять УОЛ при наличии астрономических и геодезических координат точки. Для вывода формул предположим, что для

некоторой точки геодезической сети O известны и астрономические и геодезические координаты. Опишем из точки O сферу единичного радиуса и продолжим до пересечения с этой сферой нормаль к эллипсоиду OZ_T и отвесную линию OZ_A (рис. 3.6).

Относительным геометрическим уклонением отвесной линии будет дуга $Z_T Z_A = u$. УОЛ невелики и составляют в равнинной местности $3'' - 5''$, в горах – несколько десятков секунд. Поэтому для вывода формул уклонения отвесной линии проведём из точки O линию OP параллельную оси мира (оси вращения Земли). На основании формулы косинуса среднего элемента из сферической тригонометрии имеем

$$\cos(\lambda - L) = \operatorname{ctg}(90 - \varphi) \operatorname{ctg}[90 - (90 - B - \xi)]$$

или по малости $(\lambda - L)$ можно написать

$$1 \approx \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{ctg}(B + \xi)$$

и

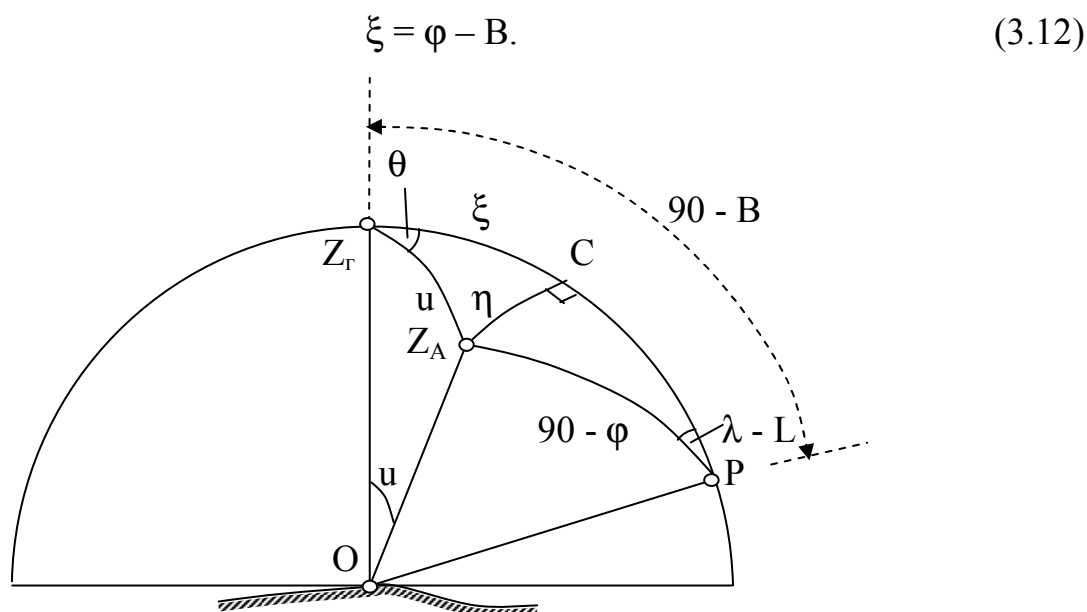


Рис. 3.6. Астрономо-геодезический способ определения УОЛ

По теореме синусов

$$\frac{\sin \eta}{\sin(\lambda - L)} = \frac{\sin(90 - \varphi)}{\sin 90},$$

отсюда по малости η и $\lambda - L$, получим

$$\eta = (\lambda - L) \cos \varphi . \quad (3.13)$$

Достоинства этого способа:

- 1) позволяет получать геометрические, относительные уклонения отвесных линий;
- 2) высокая точность способа, погрешность определения УОЛ соответствует точности определения координат.

Недостаток способа – на каждом пункте необходимо выполнять дорогостоящие астрономические наблюдения.

3.2.3. Астрономо-гравиметрический способ

Астрономо-гравиметрический способ разработан М.С. Молоденским в 1937 г. Этот метод основан на использовании сравнительно редкой астрономо-геодезической сети и локальной гравиметрической съёмки. Суть способа заключается в следующем.

Предположим, что в точке O требуется определить относительное уклонение отвесной линии (рис. 3.7). Вокруг точки O в области σ выполнена гравиметрическая съёмка. Оставшуюся область земной поверхности обозначим через Σ . В этой области может и отсутствовать гравиметрическая съёмка.

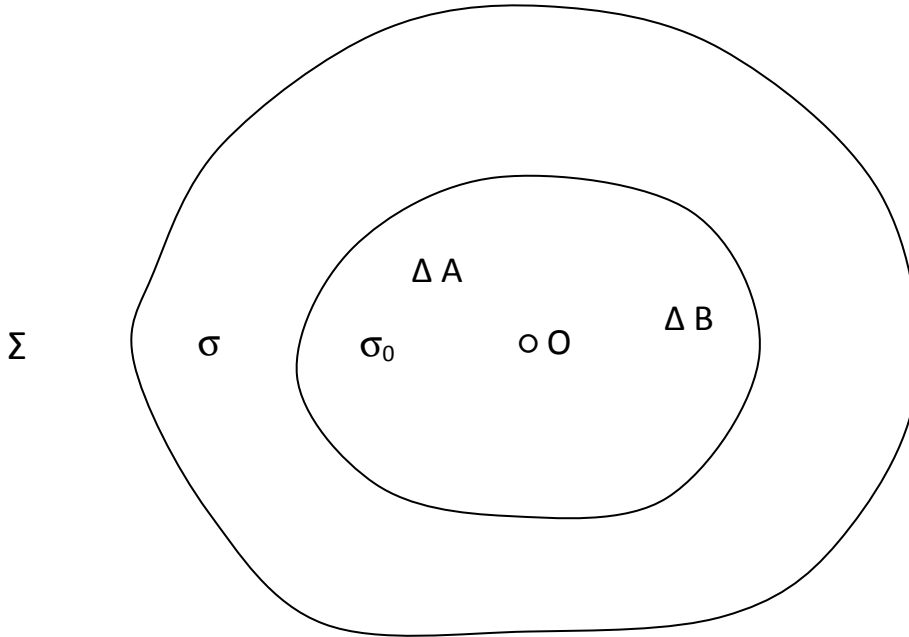


Рис. 3.7. Астрономо-гравиметрический способ определения УОЛ

Представим составляющие уклонения отвесной линии, вычисленные гравиметрическим способом в точке O , как сумму двух слагаемых

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= \xi_\sigma + \xi_\Sigma; \\ \eta_0 &= \eta_\sigma + \eta_\Sigma . \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Первое слагаемое обусловлено аномалиями силы тяжести в области σ , а второе слагаемое – в области Σ . Вычисленные составляющие УОЛ в этом случае, являются абсолютными и физическими, а нам нужны относительные, поэтому добавим к выражениям (3.14) поправки за переход от абсолютных УОЛ к относительным.

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= \xi_\sigma + \xi_\Sigma + \delta\xi; \\ \eta_0 &= \eta_\sigma + \eta_\Sigma + \delta\eta . \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Внутри области σ выберем такую область σ_0 , в пределах которой, при переходе из одной точки в другую, вторые и третьи слагаемые в (3.15) изменялись бы линейно. Тогда можно говорить о совместном определении этих двух слагаемых. Введем следующее обозначение

$$\Delta\xi = \xi_{\Sigma} + \delta\xi ;$$

$$\Delta\eta = \eta_{\Sigma} + \delta\eta ,$$

получим

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= \xi_{\sigma} + \Delta\xi ; \\ \eta_0 &= \eta_{\sigma} + \Delta\eta . \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Первые слагаемые в выражениях (3.16) определяются гравиметрическим способом по формулам Венинг-Мейнеса (3.11), используя аномалии силы тяжести Δg в области σ

$$\xi_{\sigma} = \xi_0^{\text{ГР}} ;$$

$$\eta_{\sigma} = \eta_0^{\text{ГР}} .$$

Вторые слагаемые (3.16) можно получить следующим образом.

Предположим, что в области σ_0 имеется три пункта с известными астрономическими и геодезическими координатами. Тогда для этих пунктов астрономо-геодезическим способом можно вычислить относительные в физическом смысле отклонения отвесных линий по формулам:

$$\xi_i = \varphi_i - (B_i + 0.171''N_i \sin 2B_i);$$

$$\eta_i = (\lambda - L)_i \cos \varphi_i, \text{ где } i = A, B, C.$$

Для этих же пунктов, применяя гравиметрический способ, вычисляем гравиметрические УОЛ $\xi_i^{\text{ГР}}$, $\eta_i^{\text{ГР}}$, используя при этом аномалии силы тяжести Δg в области σ . Взяв разности

$$\Delta\xi_i = \xi_i - \xi_i^{\text{ГР}};$$

$$\Delta\eta_i = \eta_i - \eta_i^{\text{ГР}} ,$$

получим поправки за учёт влияния на УОЛ дальних зон и переход от абсолютных к относительным УОЛ для пунктов А, В, С. Но так как $\Delta\xi_i$ и $\Delta\eta_i$ в области σ_0 изменяются линейно, то можно путем линейного интерполирования получить $\Delta\xi_0$ и $\Delta\eta_0$ для точки О.

На практике графическое линейное интерполирование обычно заменяют аналитическим. Для этого, для каждого из пунктов А, В, С в области σ_0 составляется по два уравнения линейной модели

$$\left. \begin{aligned} \Delta\xi_i &= a_0 + a_1\Delta x_i + a_2\Delta y_i; \\ \Delta\eta_i &= b_0 + b_1\Delta x_i + b_2\Delta y_i, \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{\text{ср}}$, $\Delta y_i = y_i - y_{\text{ср}}$ – приращения координат пунктов относительно координат средней точки области σ_0 , которые можно приближённо определить по топографической карте или из обработки геодезических измерений. Для трёх пунктов получаем шесть уравнений (3.17) с шестью неизвестными коэффициентами $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$. Из решения системы уравнений находим эти коэффициенты. Зная коэффициенты, поправки для точки О за учёт влияния

на УОЛ дальних зон и переход от абсолютных к относительным УОЛ, можно вычислить по формулам

$$\Delta\xi_0 = a_0 + a_1\Delta x_0 + a_2\Delta y_0;$$

$$\Delta\eta_0 = b_0 + b_1\Delta x_0 + b_2\Delta y_0,$$

где $\Delta x_0 = x_0 - x_{cp}$, $\Delta y_0 = y_0 - y_{cp}$, а x_0 и y_0 – приближённые координаты точки О.

Окончательно относительные геометрические уклонения отвесной линии в точке О вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \xi_0 &= \xi_\sigma + \Delta\xi_0 - 0.171''N_0 \sin 2B_0; \\ \eta_0 &= \eta_\sigma + \Delta\eta_0 . \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

3.2.4. Определение УОЛ на морской поверхности по альтиметрическим измерениям

Альтиметр (радиовысотометр) установленный на борту ИСЗ (или самолёта) измеряет кратчайшее расстояние h'_1 от спутника до морской поверхности по направлению отвесной линии, проведённого из ближайшей точки водной поверхности. Однако для дальнейших вычислений требуется знать расстояние h_1 от ИСЗ до поверхности моря или океана по направлению нормали к эллипсоиду (рис. 3.8). Расстояние между точками пересечения нормали и отвесной линии с морской поверхностью не превышают 600 м, поэтому участок водной поверхности размером 600×600 м² будем считать для наглядности изложения плоскостью.

Задача решается методом приближений. В первом приближении можно принять, что полное уклонение отвесной линии в точке измерения на морской поверхности $u = 0$. Тогда можно считать, что расстояние от ИСЗ до морской поверхности в направлении нормали h_1 равно измеренному расстоянию h'_1 .

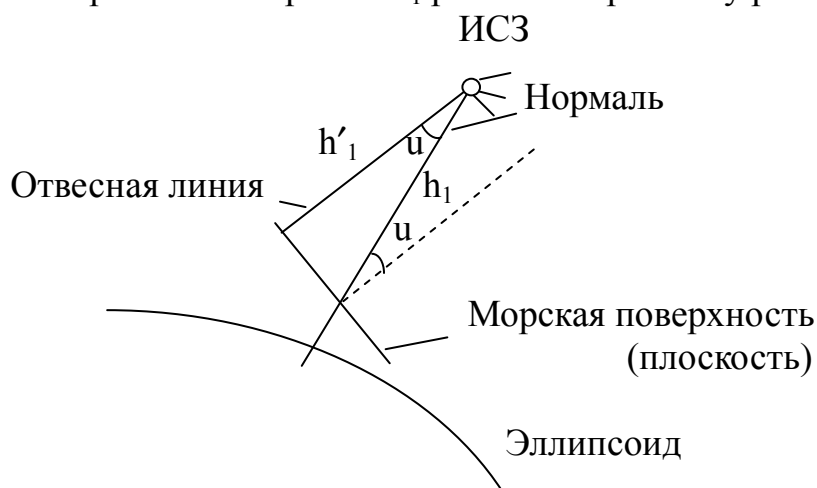


Рис. 3.8. Связь измеренного h'_1 и вычисленного в направлении нормали расстояния h_1 от ИСЗ до морской поверхности

Если в момент измерений известны координаты ИСЗ, то по ним вычисляется высота спутника относительно эллипсоида N_1 . Разность $\zeta'_1 = N_1 - h_1$ является высотой точки морской поверхности над эллипсоидом.

После введения в высоту ζ'_1 поправок за приливы, течения, топографию морской поверхности, определяем высоту геоида ζ_1 .

Аналогичные вычисления выполняются и в соседней точке, чтобы получить высоту геоида ζ_2 . Спроектируем точки расположения ИСЗ в моменты t_1 и t_2 на эллипсоид по нормальям и назовём проекции подспутниковыми точками (рис. 3.9). Вычислив по координатам расстояние между двумя соседними подспутниковыми точками на эллипсоиде S ($S \approx 5 - 10$ км) и разность высот геоида $\Delta\zeta$, можно найти уклонения отвесных линий в направлении следа орбиты спутника. Проектируя УОЛ в направлении меридиана и первого вертикала, получаем составляющие УОЛ ξ и η и по ним полное уклонение отвесной линии u .

Во втором приближении измеренные альтиметром расстояния h' перевычисляются в расстояния h по направлению нормали к эллипсоиду по формуле

$$h = \frac{h'}{\cos u}, \quad (3.19)$$

и вновь повторяются перечисленные выше этапы обработки.

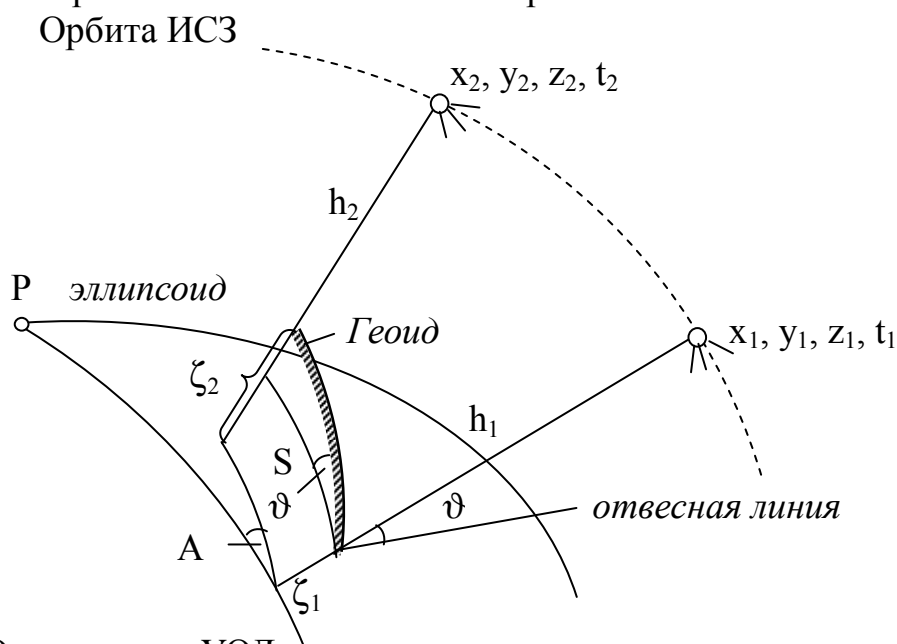


Рис. 3.9. Определение УОЛ по альтиметрическим измерениям

Алгоритм обработки альтиметрических измерений с целью определения УОЛ и высот геоида можно представить следующим образом.

1. Переход от измеренных альтиметрических высот в направлении отвесной линии к альтиметрическим высотам в направлении нормали к эллипсоиду по формуле (3.19), т. е.

$$h'_1 \Rightarrow h_1;$$

$$h'_2 \Rightarrow h_2.$$

2. Вычисление геодезических координат спутника через прямоугольные по формулам (2.28) – (2.33), т. е.

$$x_1, y_1, z_1 \Rightarrow B_1, L_1, H_1;$$

$$x_2, y_2, z_2 \Rightarrow B_2, L_2, H_2.$$

3. Определение высот морской поверхности по формулам

$$\zeta'_1 = H_1 - h_1;$$

$$\zeta'_2 = H_2 - h_2.$$

4. Вычисление высот геоида путём введения поправок $\Delta\zeta_1$ и $\Delta\zeta_2$ в высоты морской поверхности за влияние приливов, течений и топографию

$$\zeta_1 = \zeta'_1 + \Delta\zeta_1;$$

$$\zeta_2 = \zeta'_2 + \Delta\zeta_2.$$

5. Вычисление расстояния между подспутниковыми точками S и геодезического азимута A из решения обратной геодезической задачи по формулам (2.92) – (2.93).

6. Определение угла ϑ УОЛ в направлении следа орбиты ИСЗ, составляющих в плоскости меридиана ξ , первого вертикала η и полного УОЛ u , по формулам

$$\vartheta \approx \operatorname{arctg}\left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{S_{12}}\right)$$

$$\xi \approx \vartheta \cos A_{12};$$

$$\eta \approx \vartheta \sin A_{12};$$

$$u = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

7. Полученное полное УОЛ сравнивается с соответствующим значением в предыдущем приближении. Если их разность по абсолютной величине не превышает заранее установленного предела, то приближения заканчиваются.

3.2.5. Определение УОЛ по GPS-измерениям

Под GPS-измерениями будем понимать измерения, выполненные спутниковыми приёмниками навигационных систем GPS и/или ГЛОНАСС.

По GPS-измерениям можно получать как абсолютные, так и относительные уклонения отвесных линий, потому что координаты пунктов, полученные в системе общеземного эллипсоида можно преобразовать в координаты, связанные с референцным эллипсоидом.

Пусть в точках 1 и 2 (рис. 3.10) выполнены спутниковые измерения. Полученные разности координат могут быть преобразованы в топоцентрическую систему координат с началом в точке 1. Если оси топоцентрической прямоугольной системы координат x' , y' , z' параллельны осям геодезической прямоугольной системы координат X , Y , Z , то координаты второй точки в такой топоцентрической системе равны

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ Y_2 - Y_1 \\ Z_2 - Z_1 \end{pmatrix}.$$

Однако для определения УОЛ подходит лучше топоцентрическая система координат x , y , z , ось z в которой направлена вверх и совпадает с направлением нормали, проходящей через точку 1, ось x лежит в плоскости геодезического

горизонта и направлена на север, ось y находится в этой же плоскости и направлена на восток (рис. 3.10).

Для получения формул превычисления координат второй точки из топоцентрической системы x', y', z' в топоцентрическую систему x, y, z применим метод вращений (см. раздел 2.3.6) вокруг оси z' на угол, равный геодезической долготе L , и вокруг оси y' на угол, равный геодезической широте B , при этом широта и долгота получены через геодезические прямоугольные координаты точки 1 по формулам (2.28) – (2.33). Тогда

$$\begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = R_2(-B)R_3(L) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos B & 0 & \sin B \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin B & 0 & \cos B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos L & \sin L & 0 \\ -\sin L & \cos L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos B \cos L & \cos B \sin L & \sin B \\ -\sin L & \cos L & 0 \\ -\sin B \cos L & -\sin B \sin L & \cos B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

или

$$x = -\sin B \cos L x' - \sin B \sin L y' + \cos B z';$$

$$y = -\sin L x' + \cos L y';$$

$$z = \cos B \cos L x' + \cos B \sin L y' + \sin B z'.$$

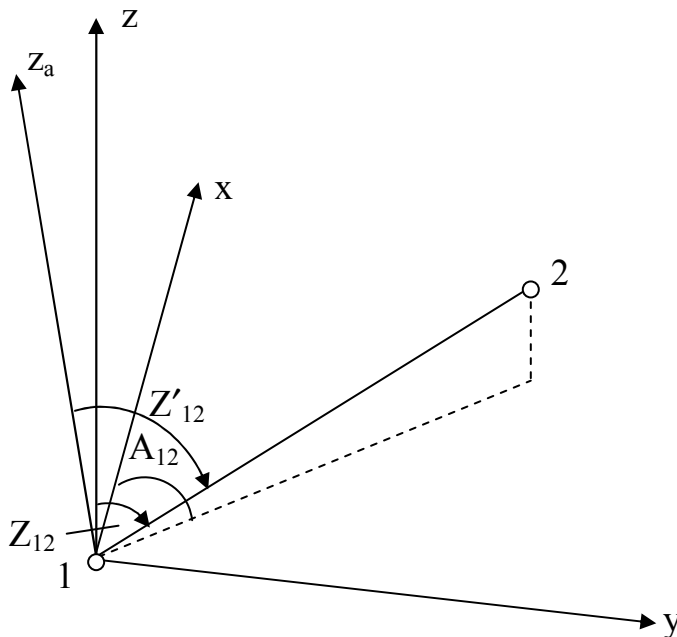


Рис. 3.10. Определение УОЛ по GPS-измерениям

По вычисленным топоцентрическим координатам легко можно определить геодезическое зенитное расстояние и азимут по формулам

$$Z_{12} = \operatorname{arcctg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$A_{12} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Астрономическое зенитное расстояние Z'_{12} непосредственно измеряется при помощи теодолита или косвенно вычисляется, если выполнить геометрическое нивелирование между точками.

Выполнив измерение двух и более направлений и используя формулу связи составляющих УОЛ с разностью геодезического и астрономического зенитных расстояний [16], получим систему из двух и более уравнений с двумя неизвестными ξ и η

$$\left. \begin{aligned} Z_{12} - Z'_{12} &= \xi \cos A_{12} + \eta \sin A_{12}; \\ Z_{13} - Z'_{13} &= \xi \cos A_{13} + \eta \sin A_{13}. \end{aligned} \right\} \quad (3.20)$$

Решая систему уравнений (3.20), получаем ξ и η

$$\xi = \frac{\Delta Z_{12}}{\cos A_{12}} - \eta \operatorname{tg} A_{12};$$

$$\eta = \frac{\Delta Z_{13} - \Delta Z_{12} \operatorname{sec} A_{12} \cos A_{13}}{\sin A_{13} - \operatorname{tg} A_{12} \cos A_{13}},$$

где $\Delta Z_{12} = Z_{12} - Z'_{12}$, $\Delta Z_{13} = Z_{13} - Z'_{13}$.

Если уравнений в системе (3.20) больше двух, то решение системы выполняется по методу наименьших квадратов.

3.3. Системы высот

3.3.1. Общие сведения

Для определения положения точек на физической поверхности Земли относительно координатной поверхности референц-эллипсоида, в отличие от определения положения точек лежащих непосредственно на эллипсоиде, не достаточно знать только широту и долготу точки, так как B и L определяют положение нормали, проходящей через точку физической поверхности Земли, а не положение этой точки (рис. 2). Поэтому для определения положения точки на нормали, необходимо знать третью величину – отрезок нормали от поверхности эллипсоида до точек физической поверхности Земли. В геодезии эта величина обозначается буквой H и называется геодезической высотой. Таким образом, положение точки однозначно определяется на поверхности Земли, если известны три пространственные геодезические координаты B , L , H .

Высоты точек физической поверхности Земли необходимы для следующих целей:

- 1) изучения отступления физической поверхности Земли от поверхности референц-эллипсоида;
- 2) редуцирования измерений на координатную поверхность (эллипсоид);
- 3) изображения рельефа на различных топографических картах способом горизонталей или с помощью цифровой модели местности;

4) изыскания, проектирования и эксплуатации сложных инженерно-технических сооружений;

5) изучения вертикальных движений земной коры и т. д.

Для решения вышеперечисленных задач требуется различная точность определения высот, колеблющаяся в большом диапазоне, но для большинства задач требуется точность в миллиметровом диапазоне. Поэтому при разработке теории определения высот точек Земли необходимо учитывать все факторы, влияющие на точность определения высот.

Непосредственно высоты точек наземными методами измерить нельзя. Из измерений можно получить превышение одной точки над другой. Если известна высота начальной точки, то высоту следующей по ходу точки можно вычислить по формуле

$$H_{i+1} = H_i + \Delta H_{i,i+1}.$$

Следовательно, для построения высотной геодезической сети необходимо располагать хотя бы одной точкой с заданной высотой (отметкой) до построения высотной сети. Такой точкой в России является нуль Кронштадского футштока. Футшток в переводе с немецкого это «рейка». На рейке нулевой отметке соответствует риска, которая указывает на средний уровень моря за многолетний период наблюдений. Высоты вычисляются по измеренным превышениям от этой риски, то есть от среднего уровня Балтийского моря. Поэтому на топографических картах внизу пишется «Система высот Балтийская», хотя следовало бы писать «Система отсчета высот Балтийская».

В России за геоид принята уровенная поверхность, проходящая через нуль Кронштадского футштока. Высоты, отсчитываемые от поверхности квазигеоида называются *нормальными высотами* и обозначаются H^N . Квазигеоид это геометрическая поверхность, которая не является уровенной поверхностью. Высоты квазигеоида над эллипсоидом обычно в литературе обозначаются ζ , а высоты геоида – ζ_1 . Их ещё называют *аномалиями высот*. Из рис. 3.11 видна связь различных систем высот с геодезической высотой, отсчитываемой от эллипсоида

$$H = H^g + \zeta_1 = H^N + \zeta. \quad (3.21)$$

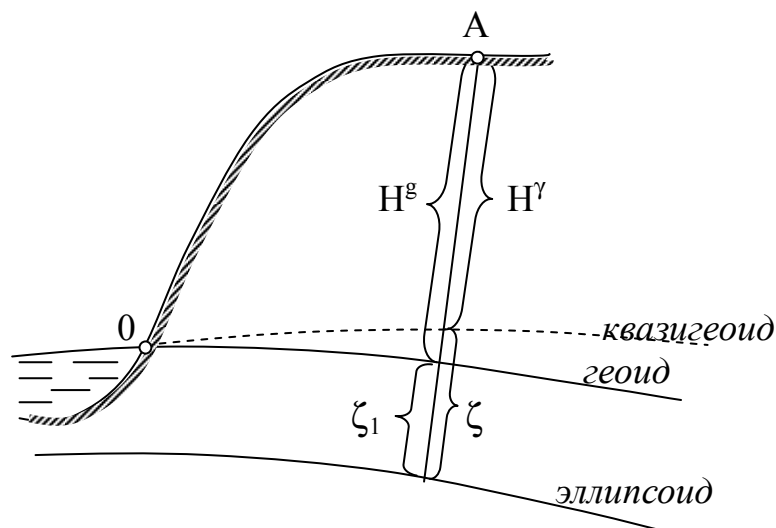


Рис. 3.11. Нормальные и ортометрические высоты

Для определения аномалий высот разработан специальный вид геодезических работ, который называется *нивелированием квазигеоида*. H^g и H^y могут быть вычислены по превышениям, полученным из нивелирования. В геодезии чаще всего применяются два способа определения превышений – это геометрическое нивелирование и тригонометрическое (геодезическое) нивелирование.

Из-за недостаточной точности измерения зенитных расстояний второй способ применяется только при выполнении работ невысокой точности. Для высокоточных работ применяется метод геометрического нивелирования. Геометрический способ нивелирования основан на использовании горизонтального луча, т. е. луча, направленного по касательной к уровенной поверхности и проходящего через точку пересечения оси вращения нивелира с визирной осью.

Геометрия нивелирования (без учета непараллельности уровенных поверхностей) проста – разность отсчетов по рейкам дает превышение. Если же учесть непараллельность уровенных поверхностей, то теория геометрического нивелирования становится достаточно сложной.

Действительно, пусть требуется определить высоту точки А (рис. 3.12). Предположим, что уровенные поверхности не параллельны.

Умозрительно, можно выполнить нивелирование от точки О до точки А по трём разным трассам и получить по измеренным превышениям различные высоты

$$H_A = \sum_{OA} h_i; \quad H'_A = \sum_{OA'A} h'_i; \quad H''_A = \sum_{OA''A} h''_i.$$

Следовательно, вычисленные по непосредственно измеренным превышениям высоты при непараллельности уровенных поверхностей зависят от пути нивелирования, и невязка в замкнутом полигоне не будет равна нулю. В геодезии получены формулы, которые дают возможность однозначно вычислять высоты независимо от пути нивелирования. Но эту задачу можно решить, если на основе знания гравитационного поля Земли учесть непараллельность уровенных поверхностей. Выведем формулу, которая позволяет определить высоты точек физической поверхности Земли с учетом непараллельности уровенных поверхностей. Высоты, вычисленные по этой формуле, не должны зависеть от пути нивелирования.

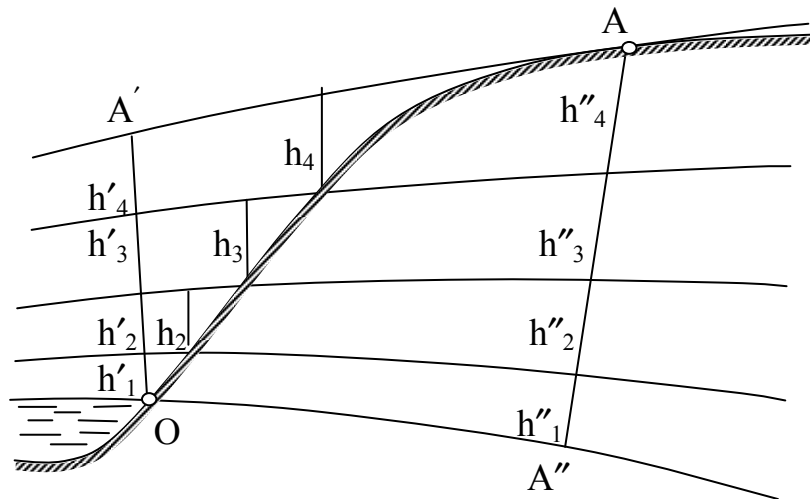


Рис. 3.12. Зависимость превышения от пути нивелирования при непараллельности уровенных поверхностей

На основании выражения (3.2) (см. рис. 3.3) можно записать дифференциал

$$dW = -gdH. \quad (3.22)$$

Проинтегрируем (3.22) от точки O до точки A (рис. 3.12) и получим

$$W_O - W_A = \int_{OA} gdH. \quad (3.23)$$

По формуле (3.23) вычисляется приращение потенциала. Приращение потенциала (т. е. работа поля силы тяжести) не зависит от пути перемещения от точки O до A, на которую действовала сила g. Поэтому можно записать

$$W_O - W_A = \int_{OA} gdH + \int_{A''A} gdH.$$

Первый интеграл равен нулю, так как мы с нивелиром двигались по одной и той же уровенной поверхности, а поэтому на этом отрезке $W_O - W_{A''} = 0$. Ко второму интегралу применим теорему о среднем интегральном, которая утверждает, что на линии A''A найдется такая точка, в которой справедливо соотношение

$$\int_{A''A} gdH = \tilde{g}_A H_A, \quad (3.24)$$

где \tilde{g}_A – среднее интегральное значение ускорения силы тяжести в некоторой точке отрезка A''A.

H_A – высота точки A над геоидом или длина линии A''A.

Приравнявая (3.24) к (3.23), получим

$$H_A = \frac{W_O - W_A}{\tilde{g}_A} = \frac{\int_{OA} gdH}{\tilde{g}_A}. \quad (3.25)$$

В числителе (3.25) приращение потенциала, независящее от пути нивелирования. В знаменателе конкретное значение ускорения силы тяжести в некоторой точке на линии A''A, т. е. знаменатель также не зависит от пути нивелирования.

Равенство (3.25) является основной формулой теории высот. В зависимости от того, какое ускорение силы тяжести будет стоять в знаменателе, мы будем иметь различные системы высот: ортометрическую, нормальную или динамическую.

К системам высот предъявляются следующие пять основных требований [16]:

- 1) высота не должна зависеть от выбора трассы нивелирного хода;
- 2) высота должна вычисляться по результатам измерений выполненных на физической поверхности Земли без привлечения гипотез о её внутреннем строении;
- 3) поправки в измеренные превышения за переход к выбранной системе высот должны быть достаточно малы, чтобы ими можно было пренебречь при обработке нивелировок низшего класса;
- 4) в принятой системе высот должен быть разработан строгий и удобный способ определения геоидальной части геодезической высоты;
- 5) высоты точек лежащие на одной уровенной поверхности должны быть одинаковыми.

Системы высот, в которой были бы выполнены все пять требований не существует. Поэтому любая система высот имеет свои достоинства и недостатки. Нормальная система высот не удовлетворяет только пятому требованию. Ортометрическая – второму, четвёртому и пятому. Динамическая – третьему и четвёртому. В России основной является нормальная система высот. Динамическая система высот (единственная система высот, удовлетворяющая пятому требованию) применяется при решении некоторых инженерных и научных задач. В большинстве зарубежных стран принята ортометрическая система высот, несмотря на её недостатки.

3.3.2. Ортометрическая система высот

Ортометрической высотой называется расстояние от поверхности геоида до точки физической поверхности Земли, отложенное по силовой линии поля силы тяжести.

В этом определении длина силовой линии отличается от перпендикуляра опущенного из точки на поверхность геоида не более чем на 0.5 мм при $H = 10$ км.

Из основной формулы теории высот (3.25) можно получить формулу для вычисления ортометрических высот

$$\tilde{g} = \frac{1}{H_A} \int_{A''A} g dH \approx \frac{1}{H_A} \sum_{i=1}^n g_i \Delta H. \quad (3.26)$$

Т. е. мы заменили интеграл суммой, разделив силовую линию $A''A$ на n отрезков равной длины ΔH (рис. 3.13).

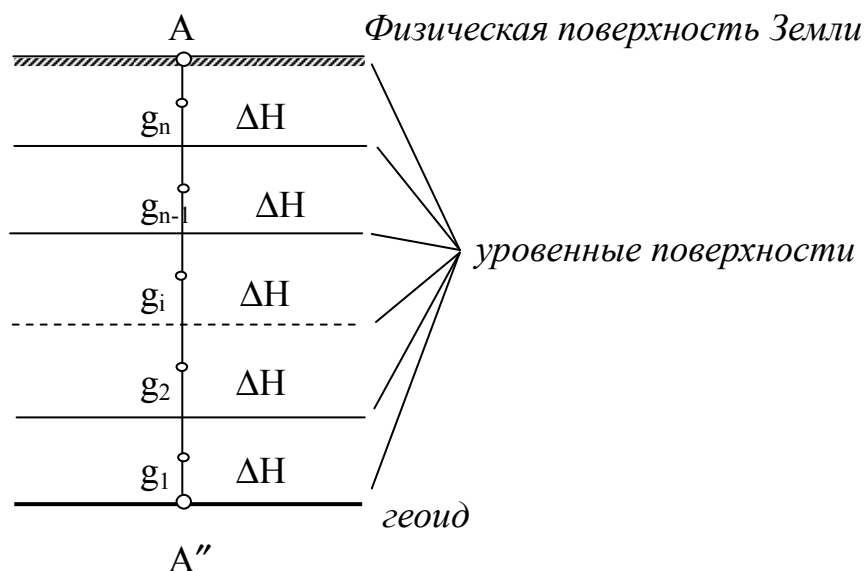


Рис. 3.13. Приближённое определение среднего интегрального значения \tilde{g}

Подставив в (3.26) вместо ΔH выражение $\Delta H = \frac{H_A}{n}$, получим приближенную формулу для вычисления среднего интегрального значения

$$\tilde{g} \approx \frac{\sum_{i=1}^n g_i}{n} = g^A_{\text{cp}}.$$

Тогда окончательная формула вычисления ортометрических высот примет вид

$$H^g_A = \frac{W_0 - W_A}{g^A_{\text{cp}}} = \frac{\int g dH}{g^A_{\text{cp}}}. \quad (3.27)$$

Анализируя формулу (3.27), можно дать следующую характеристику системе ортометрических высот.

1. Система ортометрических высот не зависит от пути нивелирования.
2. Ортометрические высоты различных точек одной и той же уровенной поверхности не одинаковы («вода не любит ортометрических высот»), так как меняется знаменатель в формуле (3.27) вследствие того, что ускорение силы тяжести зависит от распределения масс внутри Земли.
3. Ортометрическая высота может быть определена строго, если в точке А пробурить скважину и измерить гравиметром ускорение силы тяжести g_i в n точках по линии $A''A$. Однако с практической точки зрения определять ортометрические высоты таким путём нереально.

3.3.3. Нормальная система высот

Невозможность строгого вычисления ортометрических высот, привела М.С. Молоденского в 1940-е гг. к разработке нормальной системы высот.

Выберем на силовой линии A_0A (рис. 3.14) точку A_1 , в которой уровенная поверхность нормального потенциала, генерируемого эллипсоидом, имеет значение $U_{A_1} = C_A$.

Из рис. 3.14 видно, что

$$W_0 - W_A = C_0 - C_A = U_0 - U_{A_1}. \quad (3.28)$$

Для нормального поля на основании (3.2) запишем дифференциал

$$dU = -\gamma dH. \quad (3.29)$$

Интегрируя (3.29), получим

$$U_0 - U_{A_1} = \int_{A_0A_1} \gamma dH. \quad (3.30)$$

К правой части выражения (3.30) применим теорему о среднем интегральном, тогда

$$\int_{A_0A_1} \gamma dH = \tilde{\gamma} H_{A_1} \approx \gamma_{cp}^{A_1} H_{A_1}. \quad (3.31)$$

Подставив выражение (3.31) в (3.30) и используя равенства (3.28) и (3.23), получим

$$H_{A_1} = \frac{U_0 - U_{A_1}}{\gamma_{cp}^{A_1}} = \frac{W_0 - W_A}{\gamma_{cp}^{A_1}} = \frac{\int_{OA} g dH}{\gamma_{cp}^{A_1}}.$$

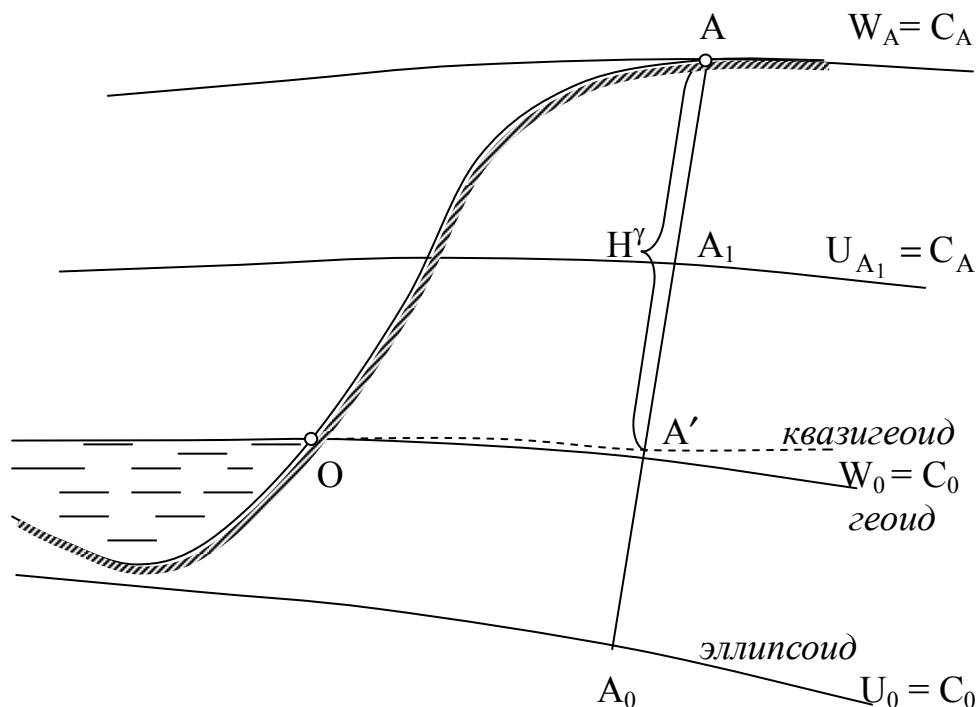


Рис. 3.14. Нормальные высоты

Если откладывать высоту H_{A_1} не от точки A_0 эллипсоида, а от точки физической поверхности Земли A , то получим точку A' . Если подобным образом отложить высоты от многих точек, то из их совокупности получим поверхность *квазигеоида*. Это не уровенная, а геометрическая поверхность.

Высоты, отсчитываемые от поверхности квазигеоида до точек физической поверхности Земли, и называются нормальными высотами.

Тогда окончательно формулу вычисления нормальных высот можно записать в виде выражения

$$H_A^\gamma = \frac{W_0 - W_A}{\gamma_{cp}^A} = \frac{\int_{OA} g dH}{\gamma_{cp}^A}. \quad (3.32)$$

Знаменатель в формуле (3.27) для ортометрической высоты g_{cp} нельзя точно вычислить из-за незнания закона распределения масс внутри Земли. Знаменатель же в выражении (3.32) для нормальной высоты может быть вычислен строго с требуемой точностью по формулам (3.5)

$$\gamma_0^A = \gamma_3(1 + \beta \sin^2 B + \beta_1 \sin^2 2B)$$

и

$$\gamma_{cp}^A = \gamma_0^A - 0.3086 \frac{H_A}{2},$$

где γ_3 – значение нормального ускорения силы тяжести на экваторе (на эллипсоиде);

γ_0^A – значение нормального ускорения силы тяжести на эллипсоиде в точке А с геодезической широтой В;

H_A – приближенное значение высоты точки А.

Из анализа формулы (3.32) можно сделать следующие выводы:

- 1) нормальные высоты не зависят от пути нивелирования;
- 2) нормальные высоты одной и той же уровенной поверхности в общем различны (одинаковы только для одной и той же параллели);
- 3) нормальные высоты могут быть вычислены с требуемой точностью.

3.3.4. Вывод формулы вычисления разности нормальных высот

Как уже упоминалось ранее формула (3.32) для вычисления нормальных высот получена М.С. Молоденским, В.Ф. Еремеев и М.И. Юркина преобразовали формулу к более удобному виду для практического применения. Выполним следующую цепь преобразований.

$$H_A^\gamma = \frac{1}{\gamma_{cp}^A} \int_{OA} g dH = \frac{1}{\gamma_{cp}^A} \int_{OA} (g - \gamma + \gamma - \gamma_{cp}^A + \gamma_{cp}^A) dH;$$

$$H_A^\gamma = \int_{OA} dH + \frac{1}{\gamma_{cp}^A} \int_{OA} (\gamma - \gamma_{cp}^A) dH + \frac{1}{\gamma_{cp}^A} \int_{OA} (g - \gamma) dH. \quad (3.33)$$

Анализ формулы (3.33) показывает, что первый член соответствует непосредственно измеренному превышению, второй и третий члены – есть поправки за непараллельность уровенных поверхностей. При этом второй член учитывает непараллельность уровенных поверхностей в нормальном поле силы тяжести, а третий член учитывает поправку за отличие нормального поля силы тяжести от действительного.

Преобразуем второй интеграл с учетом того, что

$$\gamma = \gamma_0 - 0.3086H; \quad \gamma_{cp}^A = \gamma_0^A - 0.3086 \frac{H_A}{2}, \quad (3.34)$$

где индекс 0 указывает на то, что нормальное ускорение силы тяжести вычисляется на эллипсоиде, и получим

$$\begin{aligned} \int_{OA} (\gamma - \gamma_{cp}^A) dH &= \int_{OA} \left(\gamma_0 - 0.3086H - \gamma_0^A + 0.3086 \frac{H_A}{2} \right) dH = \\ &= \int_{OA} (\gamma_0 - \gamma_0^A) dH - 0.3086 \int_{OA} H dH + 0.3086 \frac{H_A}{2} \int_{OA} dH = \\ &= \int_{OA} (\gamma_0 - \gamma_0^A) dH - 0.3086 \frac{(H_A)^2}{2} + 0.3086 \frac{(H_A)^2}{2} = \\ &= \int_{OA} (\gamma_0 - \gamma_0^A) dH. \end{aligned}$$

Мы получили строгое равенство $\int_{OA} (\gamma - \gamma_{cp}^A) dH = \int_{OA} (\gamma_0 - \gamma_0^A) dH$ только

потому, что в формулах (3.34) отбросили члены более высокого порядка малости.

Тогда формулу (3.33) можно записать в следующем виде

$$H_A^\gamma = \int_{OA} dH + \frac{1}{\gamma_{cp}^A} \int_{OA} (\gamma_0 - \gamma_0^A) dH + \frac{1}{\gamma_{cp}^A} \int_{OA} (g - \gamma) dH. \quad (3.35)$$

В следующей по ходу точке В выражение для нормальной высоты запишется аналогично

$$H_B^\gamma = \int_{OB} dH + \frac{1}{\gamma_{cp}^B} \int_{OB} (\gamma_0 - \gamma_0^B) dH + \frac{1}{\gamma_{cp}^B} \int_{OB} (g - \gamma) dH. \quad (3.36)$$

Оценим величину вторых членов правых частей формул (3.35), (3.36) и выясним, как влияют на величину этих членов знаменатели. Продифференцируем формулу Клеро (3.6)

$$d\gamma_0 = \gamma_3 \beta \sin 2B dB$$

или

$$\Delta\gamma_0 = \gamma_3 \beta \sin 2B \Delta B \approx 0.023 \sin 2B_{cp} \Delta B''.$$

Таким образом, наибольшее значение второго члена даже при $\Delta B = 20^\circ$ и $\Delta H = 500$ м будет равно

$$\frac{\Delta\gamma_0 \Delta H}{\gamma_{cp}} \approx 0.84 \text{ м.}$$

А это значит, что для вычисления поправочных членов в формулах (3.35) и (3.36) с точностью до миллиметров достаточно знать γ_{cp} с точностью не более трёх значащих цифр. Поэтому, принимая $\gamma_{cp}^A \approx \gamma_{cp}^B = \gamma_{cp}$ и вычитая из (3.36) выражение (3.35), находим

$$\Delta H_{AB}^{\gamma} = H_B^{\gamma} - H_A^{\gamma} = \int_{AB} dH + \frac{1}{\gamma_{cp}} \int_{AB} (g - \gamma) dH + \frac{1}{\gamma_{cp}} \left\{ \int_{AB} \gamma_0 dH + \gamma_0^A \int_{OA} dH - \gamma_0^B \int_{OB} dH \right\}$$

Если А и В удалены друг от друга на небольшое расстояние, то тогда можно выполнить приближённое интегрирование с применением теоремы о среднем интегральном, т. е.

$$\Delta H_{AB}^{\gamma} = \Delta H_{AB} + \frac{1}{\gamma_{cp}} (g - \gamma)_{cp} \Delta H_{AB} + \frac{1}{\gamma_{cp}} \left(\frac{\gamma_0^A + \gamma_0^B}{2} \right) (H_B - H_A) - \frac{1}{\gamma_{cp}} \gamma_0^B H^B + \frac{1}{\gamma_{cp}} \gamma_0^A H^A.$$

Или после несложных преобразований, учитывая, что

$$H_B - \frac{\Delta H}{2} = H_A + \frac{\Delta H}{2} = H_{cp},$$

найдём

$$\Delta H_{AB}^{\gamma} = \Delta H_{AB} + \frac{1}{\gamma_{cp}} (\gamma_0^A - \gamma_0^B) H_{cp} + \frac{1}{\gamma_{cp}} (g - \gamma)_{cp} \Delta H_{AB}. \quad (3.37)$$

где ΔH_{AB}^{γ} – разность нормальных высот,

ΔH_{AB} – непосредственно измеренное превышение,

H_{cp} – среднее значение высот точек А и В.

Если точки А и В разнесены на большое расстояние, то разбивая линию на отрезки $i, i + 1, \dots (\approx 20 - 30 \text{ км, см. рис. 3.15})$, получаем

$$H_B^{\gamma} - H_A^{\gamma} = \sum_{i=A}^B \Delta H_{i,i+1} + \frac{1}{\gamma_{cp}} \sum_{i=A}^B (\gamma_0^i - \gamma_0^{i+1}) H_{cp}^{i,i+1} + \frac{1}{\gamma_{cp}} \sum_{i=A}^B (g - \gamma)_{cp}^{i,i+1} \Delta H_{i,i+1}. \quad (3.38)$$

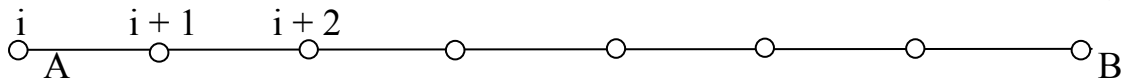


Рис. 3.15. Разбивка длинной нивелирной линии на короткие участки

3.3.5. Динамическая система высот

Второе свойство ортометрической и нормальной систем высот может иногда на практике приводить к ошибкам при решении задач, связанных с изысканием уровенных поверхностей.

Предположим, что требуется показать на карте или местности зону затопления водохранилища. Задачей является определение контура затопления. Может создаться впечатление, что можно воспользоваться горизонталями на картах. Однако горизонтالي относятся к нормальной системе высот, а вода располагается по уровенной поверхности. Второй пример. При проектировании железной дороги требуется, чтобы не было никаких уклонов, а это значит, что железную дорогу оптимальней всего прокладывать по уровенной поверхности.

Поэтому, для решения задач связанных с изысканием положения уровенных поверхностей хорошо бы располагать такой системой высот, в

которой на одной и той же уровенной поверхности высоты были одинаковыми.

Например, разность отметок нормальных высот северного и южного урезов воды озера Байкал составляет 16.5 см, а озера Кукунор в Китае 19 см. Можно образно сказать: «Вода любит уровенную поверхность».

Из анализа формул вычисления ортометрических и нормальных высот (3.27) и (3.32) видно, что разность нормальных высот одной уровенной поверхности обусловлена знаменателем формул. Поэтому, для практической деятельности вводится так называемая динамическая система высот с одним и тем же знаменателем ($\gamma = \text{const}$). Для нашего государства принято $\gamma_{45^\circ} = \text{const}$, т. е. за const принято нормальное ускорение силы тяжести для параллели с широтой 45° .

Тогда

$$H^d_A = \frac{W_0 - W_A}{\gamma_{45^\circ}} = \frac{\int g dH}{\gamma_{45^\circ}} . \quad (3.39)$$

Для уменьшения отличия динамических высот от нормальных в различных регионах могут приниматься свои значения $\gamma = \text{const}$. Так, для Новосибирска лучше взять $\gamma_{55^\circ} = \text{const}$, тогда разность динамических и нормальных высот будет небольшой.

Как и в случае нормальных высот, если откладывать динамические высоты от физической поверхности Земли, то получим какую-то условную отсчетную поверхность для динамических высот, которая не имеет, в отличие от геоида, физического смысла. Однако на практике нас больше интересуют разности высот и поэтому безразлично от какой поверхности они отсчитываются.

Исходя из формулы (3.39), можно перечислить следующие основные свойства динамической системы высот:

- 1) динамические высоты не зависят от пути нивелирования;
- 2) различные точки уровенной поверхности имеют одно и то же значение динамической высоты;
- 3) динамические высоты могут быть вычислены с требуемой степенью точности.

3.3.6. Формулы связи систем высот

Связь нормальных, динамических и ортометрических высот можно легко установить на основании формул (3.27), (3.32) и (3.39). Разделив выражение (3.27) на (3.32), получим

$$\frac{H^g_A}{H^\gamma_A} = \frac{\gamma_{\text{ср}}^A}{g_{\text{ср}}^A} .$$

Вычтем по единице из левой и правой частей. После несложных преобразований находим

$$H_A^g = H_A^\gamma - H_A^\gamma \left(\frac{g_{cp}^A - \gamma_{cp}^A}{g_{cp}^A} \right). \quad (3.40)$$

Или, деля выражение (3.32) на (3.27), после аналогичных преобразований получим

$$H_A^\gamma = H_A^g - H_A^g \left(\frac{\gamma_{cp}^A - g_{cp}^A}{\gamma_{cp}^A} \right).$$

Если точки лежат на поверхности моря, то $H_A^\gamma = H_A^g = 0$. На суше эти высоты будут отличаться на величину

$$H_A^g - H_A^\gamma = \Delta H = H_A^g \left(\frac{\gamma_{cp}^A - g_{cp}^A}{\gamma_{cp}^A} \right). \quad (3.41)$$

Подставим в формулу (3.41) $\gamma_{cp} - g_{cp} = 500$ мГал, $\gamma_{cp} = 980000$ мГал. Для равнинной местности $H_A^g = 100$ м, получим $\Delta H = 5$ см; в горной местности, принимая $H_A^g = 4000$ м, $\Delta H = 2$ м. Следовательно, поверхности геоида и квазигеоида на морях и океанах совпадают, а на суше отличаются по высоте не более чем на 2 м.

Для установления связи нормальной высоты с динамической высотой разделим выражение (3.39) на (3.32), получим

$$\frac{H_A^d}{H_A^\gamma} = \frac{\gamma_{cp}^A}{\gamma_{45^\circ}^A}.$$

Вычитая единицу из левой и правой частей, как это было сделано ранее, найдем

$$H_A^d = H_A^\gamma - H_A^\gamma \left(\frac{\gamma_{45^\circ}^A - \gamma_{cp}^A}{\gamma_{45^\circ}^A} \right) = H_A^\gamma - H_A^\gamma q, \quad (3.42)$$

где q – динамический коэффициент, $q = 1 - \frac{\gamma_{cp}^A}{\gamma_{45^\circ}^A}$.

Если известна нормальная высота, то по формулам связи (3.42) и (3.40) можно вычислить, соответственно, точно динамическую и приближенно ортометрическую высоты.

3.4. Методы определения высот квазигеоида

Для определения положения точки в пространстве (на земной поверхности) и для редуцирования измерений на поверхность эллипсоида необходимо знать геодезические высоты H . Связь геодезической высоты с нормальной высотой показана на рис. 3.11 и выражается формулой (3.21), т. е.

$$H = H^\gamma + \zeta,$$

где ζ – аномалия высоты или высота квазигеоида над эллипсоидом.

Аномалия высоты ζ вычисляется из специальных геодезических работ, которые получили название « нивелирование квазигеоида».

В настоящее время можно указать четыре метода нивелирования квазигеоида:

- астрономо-геодезический;
- астрономо-гравиметрический;
- по спутниковым альтиметрическим измерениям;
- по нивелирным и GPS-измерениям.

3.4.1. Астрономо-геодезический метод

Выведем дифференциальную формулу связи высоты квазигеоида с уклонением отвесной линии, аномалией силы тяжести и измеренным нивелиром превышением. Из дифференцирования (3.21) получим

$$d\zeta = dH - dN^\gamma. \quad (3.43)$$

Для определения разности дифференциалов построим чертёж (рис. 3.16). Проведём из точек А и В, удалённых друг от друга на бесконечно малое расстояние на физической поверхности Земли, нормали к эллипсоиду. Через точку А проведём уровенную поверхность и поверхность параллельную эллипсоиду. Тогда h – это элементарное превышение, измеренное нивелиром, dH – разность геодезических высот, или её еще называют элементарным геодезическим превышением.

Обозначим через ϑ уклонение отвесной линии в плоскости A_0ABV_0 . На рис. 3.16 дуга AC равна дифференциалу dS . Из рис. видно, что

$$h = (dH + dS \cdot \operatorname{tg}\vartheta) \cos\vartheta.$$

Ввиду малости угла ϑ можно записать, что

$$dH = h - \frac{\vartheta''}{\rho''} dS. \quad (3.44)$$

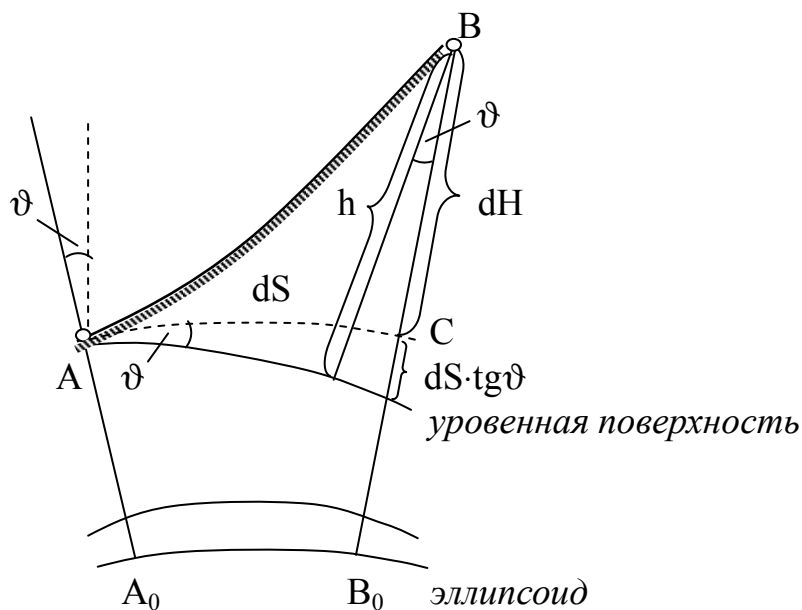


Рис. 3.16. Астрономо-геодезический метод

Подставим формулу (3.44) в (3.43), получим

$$d\zeta = -\frac{\vartheta''}{\rho''} dS - (dN^\gamma - h). \quad (3.45)$$

Разность в скобках в выражении (3.45) определяется формулой разности нормальных высот (3.37)

$$\Delta N^\gamma = h + \frac{\gamma_0^A - \gamma_0^B}{\gamma_{cp}} N_{cp} + \frac{1}{\gamma_{cp}} (g - \gamma)_{cp} h.$$

Заменяв приращение нормальных высот дифференциалом, найдем

$$dN^\gamma - h = \frac{\gamma_0^A - \gamma_0^B}{\gamma_{cp}} N_{cp} + \frac{1}{\gamma_{cp}} (g - \gamma)_{cp} h. \quad (3.46)$$

Числитель в первом члене правой части при близком расположении точек А и В есть дифференциал $d\gamma$, т. е. $\gamma_0^A - \gamma_0^B = -d\gamma$. Продифференцировав формулу Клеро (3.6), получим

$$d\gamma = 2\gamma_{\text{эКВ}} \beta \sin B \cos B dB. \quad (3.47)$$

Из первого уравнения системы дифференциальных уравнений геодезической линии (2.77)

$$dB = \frac{\cos A}{M} dS. \quad (3.48)$$

Подставив (3.48) и (3.47) в (3.46), запишем

$$dN^\gamma - h = -\left(\frac{\gamma_{\text{эКВ}} \beta}{\gamma_{cp} M} \right) N_{cp} \sin 2B \cos A dS + \frac{1}{\gamma_{cp}} (g - \gamma)_{cp} h.$$

Если умножить коэффициент в скобках в первом члене правой части на $\rho'' = 206265''$, а M и N_{cp} выразить в км, то при $\gamma_{\text{эКВ}} = 9.780 \text{ мс}^{-2}$ получим $0.171''$. Сравним первый член с формулой (3.9) $\varepsilon'' = 0.171'' N^{\text{км}} \sin 2B$, где ε'' – угол между геометрическим и физическим уклонением отвесной линии, тогда

$$dN^\gamma - h = -\frac{\varepsilon''}{\rho''} \cos A dS + \frac{1}{\gamma_{cp}} (g - \gamma)_{cp} h. \quad (3.49)$$

Подставив выражение (3.49) в (3.45), получим

$$d\zeta = -\frac{1}{\rho''} (\vartheta''_A - \varepsilon'' \cos A) dS - \frac{1}{\gamma_{cp}} (g - \gamma)_{cp} h.$$

Выражение в скобках в первом члене правой части есть уклонение отвесной линии в физическом смысле, выраженное в секундах, для направлении АВ. Обозначим его через $\vartheta' = \vartheta'' - \varepsilon'' \cos A$. Второй член величина малая, так как если принять $(g - \gamma)_{cp} = 50 \text{ мГал}$, $h = 100 \text{ м}$, то $\frac{50 \text{ мГал} \cdot 100 \text{ м}}{980000 \text{ мГал}} = 5 \text{ мм}$

В результате, отбросив второй член, найдем

$$d\zeta = -\frac{1}{\rho''} \vartheta' dS.$$

Проинтегрировав последнее выражение, приходим к общей формуле нивелирования квазигеоида

$$\zeta_B - \zeta_A = -\frac{1}{\rho''} \int_{AB} \vartheta' dS. \quad (3.50)$$

Если предположить, что уклонения отвесных линий от одной точки трассы нивелирования квазигеоида до другой изменяются линейно, то можно при интегрировании в (3.50) среднее интегральное значение подынтегральной функции $\tilde{\vartheta}'$ заменить ее средним значением. И тогда получаем окончательную рабочую формулу астрономо-геодезического нивелирования квазигеоида

$$\zeta_B - \zeta_A = -\frac{\vartheta'_A + \vartheta'_B}{2\rho''} S, \quad (3.51)$$

где ϑ'_A – уклонение отвесной линии в точке А;
 ϑ'_B – уклонение отвесной линии в точке В;
 S – расстояние между точками на эллипсоиде.

Вдоль профиля трассы нивелирования квазигеоида через определённое расстояние S закладываются пункты (рис. 3.15), на которых с целью получения уклонений отвесных линий определяются и астрономические и геодезические координаты. Тогда для каждого такого пункта вычисляются УОЛ

$$\vartheta'_i = (\varphi_i - B_i - 0.171'' N_i^{KM} \sin 2B) \cos A + \eta_i \sin A$$

и по формуле (3.51) определяются превышения $\Delta\zeta_{i,i+1}$. А затем находятся высоты квазигеоида над эллипсоидом в соответствующих точках

$$\zeta_{i+1} = \zeta_i + \Delta\zeta_{i,i+1}.$$

Остаётся открытым вопрос: «А на каком расстоянии должны располагаться пункты по трассе нивелирования квазигеоида?». На этот вопрос можно ответить исходя из точности самого нивелирования.

Точность определения превышения, очевидно, будет зависеть в основном от точности определения на пунктах УОЛ, т. е. от ошибки замены среднего интегрального $\tilde{\vartheta}'$ на среднее ϑ'_{cp}

$$m_{\vartheta} = (\vartheta'_{cp} - \tilde{\vartheta}').$$

Эта ошибка может быть получена по эмпирической формуле

$$m_{\vartheta'} = 0.17 \sqrt{S_{KM}}. \quad (3.52)$$

Тогда ошибка определения $\Delta\zeta$ запишется в следующем виде

$$m_{\Delta\zeta} = m_{\vartheta'} \cdot \frac{S}{\rho}, \quad (3.53)$$

а формула ошибки определения высот квазигеоида в наиболее слабом месте будет иметь вид

$$M_{\zeta} = m_{\Delta\zeta} \cdot \sqrt{\frac{L_{KM}}{S_{KM}}}, \quad (3.54)$$

где L – удаленность точки от исходной.

Задаваясь ошибкой M_ζ , можно теперь решить вопрос о расстоянии между пунктами. Подставляя в формулу (3.54) выражения (3.52) и (3.53) находим

$$S_{(M)} = \frac{M_{\zeta(M)} \cdot \rho''}{0.17 \sqrt{L_{\text{км}}}}.$$

Если принять $M_\zeta \approx 2$ м, а $L \approx 7200$ км, то $S \approx 30$ км.

Астрономо-геодезический метод дорогостоящий, так как на пунктах через каждые 30 – 35 км необходимо выполнять астрономические наблюдения для вычисления УОЛ.

3.4.2. Астрономо-гравиметрический метод

Этот метод разработан в 1937 г. М. С. Молоденским.

Предположим в некоторой области имеются гравиметрические данные и по формулам Венинг-Мейнеса можно определить абсолютные физические уклонения отвесных линий. Подставив абсолютные УОЛ в формулу (3.50), получим абсолютные превышения квазигеоида относительно поверхности общего земного эллипсоида

$$\bar{\zeta}_B - \bar{\zeta}_A = -\frac{1}{\rho''} \int_A^B \bar{\vartheta} dS.$$

Однако для математической обработки измерений на референц-эллипсоиде требуется знать относительные превышения квазигеоида над референц-эллипсоидом.

Образую разность разностей

$$(\zeta_B - \zeta_A) - (\bar{\zeta}_B - \bar{\zeta}_A) = -\frac{1}{\rho''} \int_A^B (\vartheta' - \bar{\vartheta}) dS.$$

Отсюда относительное превышение равно

$$(\zeta_B - \zeta_A) = -\frac{1}{\rho''} \int_A^B (\vartheta' - \bar{\vartheta}) dS + (\bar{\zeta}_B - \bar{\zeta}_A). \quad (3.55)$$

При рассмотрении астрономо-гравиметрического метода определения уклонений отвесных линий в разделе 3.2.3, было отмечено, что в области σ_0 поправки составляющих $\Delta\xi$ и $\Delta\eta$ за влияние дальних зон и за переход от абсолютных УОЛ к относительным УОЛ изменяются линейно, а подынтегральная функция в (3.55) есть разность астрономо-геодезических и гравиметрических УОЛ, т. е. представляет собой те же самые поправочные члены, изменяющиеся в области σ_0 линейно. Поэтому на основании теоремы о среднем интегральном, находим

$$\begin{aligned} (\zeta_B - \zeta_A) &= -\frac{1}{\rho''} \left[\frac{(\vartheta'_A - \bar{\vartheta}_A) + (\vartheta'_B - \bar{\vartheta}_B)}{2} \right] S + (\bar{\zeta}_B - \bar{\zeta}_A) = \\ &= -\frac{\vartheta'_A + \vartheta'_B}{2\rho''} S + \left[(\bar{\zeta}_B - \bar{\zeta}_A) + \frac{\bar{\vartheta}_A + \bar{\vartheta}_B}{2\rho''} S \right]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Здесь высоты квазигеоида относительно общеземного эллипсоида $\bar{\zeta}_i$ в точках А и В определяются по формуле Стокса (*гравиметрический метод*)

$$\bar{\zeta} = \frac{R}{4\pi\gamma} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Delta g S(\psi) \sin \psi \, d\psi \, dA,$$

а $\bar{\vartheta}_i$ – по формулам (3.8) и (3.11).

В этих формулах используются следующие обозначения:

Δg – аномалии силы тяжести;

ψ – сферическое расстояние от данной точки до текущей точки;

$$S(\psi) = \operatorname{cosec} \frac{\psi}{2} - 6 \sin \frac{\psi}{2} + 1 - 5 \cos \psi - 3 \cos \psi \ln \left(\sin \frac{\psi}{2} + \sin^2 \frac{\psi}{2} \right) \quad - \quad \text{функция}$$

Стокса;

A – азимут направления на текущую точку.

Из сравнения выражения (3.56) с (3.51) видно, что первый член (3.56) представляет собой математическую запись астрономо-геодезического метода нивелирования квазигеоида, а выражение в квадратных скобках (3.56) выражает поправку за нелинейность изменения УОЛ на отрезке нивелирной трассы. Отсюда следует, что астрономо-геодезические пункты по трассе нивелирного хода в астрономо-гравиметрическом методе можно располагать значительно реже.

Действительно, на основании (3.56) имеем

$$m_{\Delta\zeta} = \frac{m_{\vartheta^{a/гр}}}{\rho} S;$$

$$M_\zeta = m_{\Delta\zeta} \cdot \sqrt{\frac{L_{км}}{S_{км}}} = \frac{m_{\vartheta^{a/гр}}}{\rho} S_M \sqrt{\frac{L_{км}}{S_{км}}};$$

$$S_{км} = \frac{M_\zeta^2 \rho^2}{m_{\vartheta^{a/гр}}^2 \cdot L_{км} \cdot 10^6}.$$

Принимая $M_\zeta = 2$ м, $m_{\vartheta^{a/гр}} = 0.5''$, $L = 7200$ км, получим $S \approx 100$ км.

Таким образом, при астрономо-гравиметрическом методе нивелирования необходимо располагать гравиметрическими данными вдоль трассы нивелирного хода и знать астрономо-геодезические УОЛ через каждые 100 – 110 км. Совершенно очевидно, что этот метод намного эффективнее астрономо-геодезического метода, в котором астрономо-геодезические пункты должны располагаться через каждые 30 – 40 км.

3.4.3. Определение высот геоида по спутниковым альтиметрическим измерениям

Вспомогательная поверхность квазигеоида была введена Молоденским М.С. в связи с тем, что под сушей поверхность геоида не может быть строго определена. В разделе 3.3.6 было показано, что на морях и океанах поверхности квазигеоида и геоида совпадают. В отличие от квазигеоида поверхность геоида имеет важный для геодезии физический смысл уровенной поверхности, поэтому

этот раздел оказалось целесообразнее назвать «Определение высот геоида (а не квазигеоида) по спутниковым альтиметрическим измерениям».

Геометрия определения высот геоида по спутниковым альтиметрическим измерениям была дана ранее на рис. 3.8 и рис. 3.9 в разделе 3.2.4, где рассматривался метод определения УОЛ по альтиметрическим измерениям. В этом пункте также было показано, что для повышения точности определения как УОЛ, так и высот геоида, их надо находить совместно методом приближений по представленному алгоритму.

Если находить высоты геоида приближенно с погрешностью 1 – 2 м, то можно полагать, что расстояния от ИСЗ до морской поверхности измерены по направлению нормали. Также можно, учитывая только приливы, пренебречь топографией морской поверхности, величина которой не превышает 1.5 м, и считать морскую поверхность поверхностью геоида. Тогда по альтиметрическим измерениям в акваториях морей, озёр и океанов высоты геоида над общеземным эллипсоидом вычисляются по простой формуле (рис. 3.17)

$$\zeta = H - h, \quad (3.57)$$

где H – геодезическая высота космического аппарата, на котором установлен альтиметр (вычисляется по траекторным измерениям);

h – измеренная альтиметром высота космического аппарата над морской поверхностью.

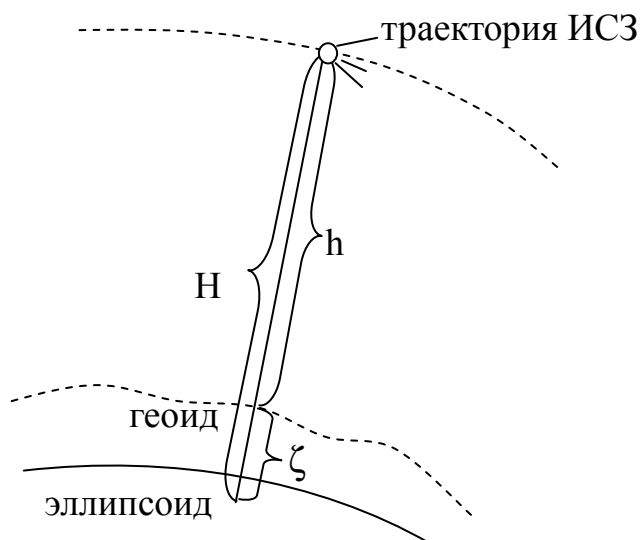


Рис. 3.17. Геометрия приближённого определения высот геоида по спутниковым альтиметрическим измерениям

Определение высот квазигеоида по нивелирным и GPS-измерениям

Пусть в точке А на земной поверхности (рис. 3.18) выполнены измерения спутниковым приёмником навигационной системы GPS (GPS-измерения) и известна нормальная высота, вычисленная по нивелирным и гравиметрическим данным.

Тогда по GPS-измерениям можно вычислить геодезическую высоту точки H и на основании формулы связи геодезической и нормальной высот $H = H^N + \zeta$, получить высоту квазигеоида над общеземным эллипсоидом

$$\zeta = H - H^y. \quad (3.58)$$

Погрешность способа – несколько сантиметров.

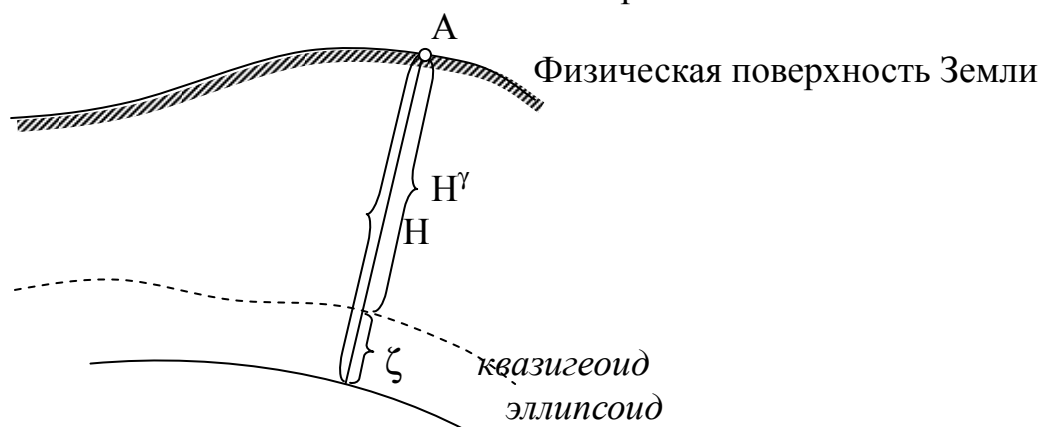


Рис. 3.18. Геометрия определение высот квазигеоида по нивелирным и GPS-измерениям

3.5. Редуцирование геодезических и астрономических измерений с физической поверхности Земли на эллипсоид

Под *редукционной проблемой* понимается совокупность геодезических задач, связанных с вычислением различных поправок в результаты измерений при переносе их с физической поверхности Земли на поверхность референц-эллипсоида или общеземного эллипсоида.

Можно указать два принципиально различных метода редуцирования измерений:

1. метод развёртывания;
2. метод проектирования.

Метод развёртывания заключается в том, что результаты измерений с физической поверхности Земли переносятся на геоид по отвесным линиям, при этом предполагается, что эллипсоид совпадает с геоидом, то есть результаты отнесенные на геоид как бы разворачиваются на эллипсоид без введения дополнительных поправок. Отсюда и название – метод развёртывания. Это приближенный метод, и степень его неточности будет зависеть от того, насколько геоид по высоте не совпадает с эллипсоидом. Так как различие по высоте геоида с эллипсоидом для нашего государства может достигать 150 м, то редуцированные по методу развёртывания измерения приобретут значительные погрешности, которые будут иметь систематический характер. Поэтому в настоящее время в России применяется второй метод – метод проектирования.

Метод проектирования был разработан Ф.Н. Красовским и М.С. Молоденским в 40-е годы XX в. и заключается в том, что результаты измерений с физической поверхности Земли переносятся на эллипсоид по нормальям к нему. Для этого используются формулы связи искомых поправок с параметрами (высоты, УОЛ), характеризующими отступление по высоте и наклону земной поверхности и эллипсоида. Метод развёртывания в настоящее время практически не применяется, поэтому ниже будем рассматривать теорию только метода проектирования.

3.5.1. Редуцирование астрономических измерений

В разделе 3.2.2 получены формулы для вычисления УОЛ астрономо-геодезическим способом. Решим обратную задачу. Пусть даны составляющие УОЛ ξ и η и измерены астрономические координаты φ и λ . Из формул (3.12) и (3.13) легко получаются выражения для редуцирования измеренных астрономических координат, то есть преобразования их в геодезические координаты

$$\left. \begin{aligned} B &= \varphi - \xi; \\ L &= \lambda - \eta \sec \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

где ξ , η – геометрические относительные составляющие уклонения отвесной линии.

Для вывода формулы перехода от измеренного астрономического азимута к геодезическому азимуту построим чертёж (рис. 3.19).

На рис. 3.19 O – точка земной поверхности, с которой выполнено астрономическое определение азимута α (угол PZ_AQ) на пункт Q . Точки Z_A и Z_Γ , соответственно, точки пересечения продолжений отвесной линии и нормали с описанной из точки O сферой радиусом равным единице. OP – линия параллельная оси вращения Земли. Угол $PZ_\Gamma Q$ – геодезический азимут. Дуга $Z_\Gamma Z_A$, опирающаяся на центральный угол u единичной сферы очевидно будет равна уклонению отвесной линии. Угол θ – азимут плоскости, в которой располагается полное УОЛ относительно плоскости геодезического меридиана $Z_\Gamma CP$. Z – измеренное зенитное расстояние. R_1 и R – углы, соответственно, в точках Z_A и Z_Γ относительно плоскости УОЛ до направления на точку Q .

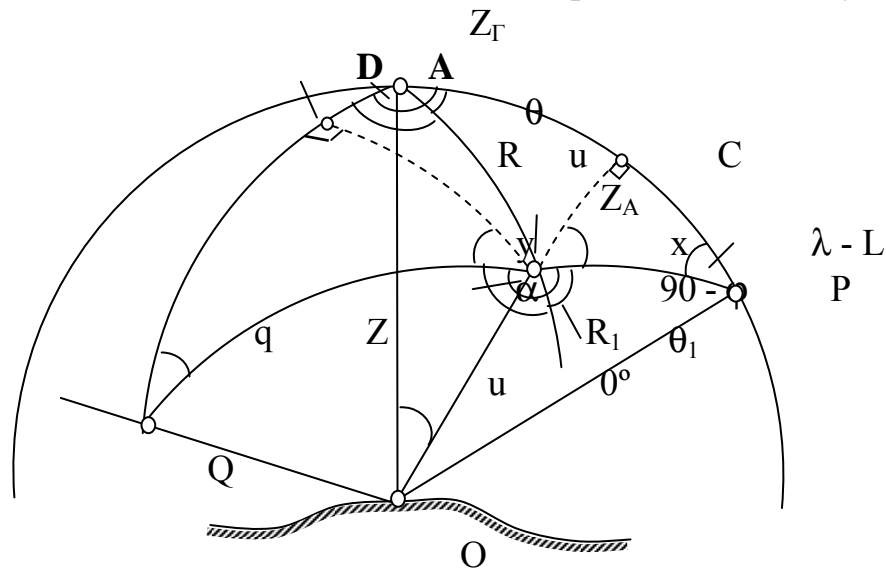


Рис. 3.19. Геометрия редуцирования астрономического азимута

Из рис. 3.19 можно сразу же написать очевидную формулу перехода от астрономических к геодезическим азимутам

$$A = \alpha + (A - \alpha). \quad (3.60)$$

Таким образом, для редуцирования астрономического азимута на эллипсоид необходимо найти формулу для вычисления разности $(A - \alpha)$.

Но из того же рис. 3.19 следует, что

$$\left. \begin{aligned} A &= \theta + R; \\ \alpha &= \theta_1 + R_1. \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

Вычитая второе уравнение из первого, получаем

$$(A - \alpha) = (\theta - \theta_1) + (R - R_1). \quad (3.62)$$

Неизвестными в (3.62) являются разности $(\theta - \theta_1)$ и $(R - R_1)$. Найдём их.

Из прямоугольного сферического треугольника PCZ_A следует, что

$$\cos(90 - \varphi) = \text{ctg } x \text{ ctg } (\lambda - L).$$

Отсюда

$$\text{ctg } x = \text{tg}(\lambda - L) \sin \varphi. \quad (3.63)$$

Треугольник $CZ_\Gamma Z_A$ мал, поэтому угол x можно найти из следующих соотношений

$$x = 180^\circ - \theta_1 - (180^\circ - \theta - 90^\circ) = 90^\circ + (\theta - \theta_1). \quad (3.64)$$

Подставляя выражение (3.64) в (3.63) и разлагая тангенсы в ряды, ограничиваясь их первыми членами, получим

$$(\theta - \theta_1) = -(\lambda - L) \sin \varphi = -\eta \text{tg } \varphi. \quad (3.65)$$

Для определения разности $R - R_1$ из точки Z_A проведём дугу Z_AD так, чтобы в точке D был образован угол 90° . Из треугольника Z_ADQ следует соотношение

$$\cos Z = \text{ctg } y \cdot \text{ctg } q. \quad (3.66)$$

Но угол y можно выразить через разность $R - R_1$

$$y = 180^\circ - R_1 - (180^\circ - 90^\circ - R) = 90^\circ + (R - R_1). \quad (3.67)$$

Подставляя формулу (3.67) в (3.66) и разлагая тангенсы малых углов в ряды, получим

$$R - R_1 = -q \cos Z_A. \quad (3.68)$$

Неизвестный угол q можно найти из треугольника $QZ_A Z_\Gamma$. Воспользуемся теоремой синусов

$$\frac{\sin q}{\sin u} = \frac{\sin R}{\sin Z_A}.$$

Откуда, после разложения $\sin q$ и $\sin u$ в ряды, с удержанием из-за малости u и q только первых членов разложений, найдём

$$q = \frac{u \sin R}{\sin Z_A}. \quad (3.69)$$

Из рис. 3.19 видно, что $R = A - \theta$. И тогда, подставляя это равенство в (3.69), а (3.69) в (3.68), получим

$$R - R_1 = -u \sin(A - \theta) \text{ctg } Z_A = -(u \cos \theta \sin A - u \sin \theta \cos A) \text{ctg } Z_A, \quad (3.70)$$

а с учётом соотношения (3.7)

$$R - R_1 = (\eta \cos A - \xi \sin A) \text{ctg } Z_A. \quad (3.71)$$

Подставляя формулы (3.71) и (3.65) в выражение (3.62), а (3.62) в (3.60), найдём окончательную формулу для перехода от измеренного астрономического азимута к геодезическому азимуту

$$A = \alpha - \eta \operatorname{tg} \varphi + (\eta \cos A - \xi \sin A) \operatorname{ctg} Z_A. \quad (3.72)$$

В правой части уравнения (3.72) стоит неизвестный геодезический азимут A , который мало отличается от астрономического азимута α и при вычислении малого по значению поправочного члена его можно без ущерба практической точности заменить астрономическим азимутом. Геодезические азимуты, вычисленные по формуле (3.72), называют азимутами Лапласа.

3.5.2. Редуцирование горизонтальных углов и направлений

Так как любой горизонтальный угол определяется как разность двух горизонтальных направлений, то и рассмотрим только теорию редуцирования горизонтальных направлений. В случае же редуцирования углов поправка за переход на эллипсоид, очевидно, может быть получена как разность поправок редуцирования правого и левого направлений данного угла. Для редуцирования направлений необходимо ввести три поправки:

- 1) поправку за уклонение отвесной линии;
- 2) поправку за высоту наблюдаемого пункта;
- 3) поправку за переход от азимута нормального сечения к азимуту геодезической линии.

Поправка за уклонение отвесной линии

В процессе измерения горизонтальных направлений на пунктах геодезической сети вертикальная ось теодолита приводится при помощи уровня в отвесное положение, то есть измеренному углу будет соответствовать некоторый двугранный угол, ребром которого является отвесная линия, а гранями вертикальные плоскости, проведённые в заданных направлениях. Обработка результатов измерений выполняется на эллипсоиде, где роль вертикальной линии выполняет нормаль к поверхности эллипсоида. Таким образом, на эллипсоиде измеренному углу должен соответствовать двугранный угол, ребром которого является нормаль, а гранями нормальные плоскости. Но так как нормаль и отвесная линия не совпадают, то при редуцировании направлений или углов с поверхности Земли на эллипсоид необходимо вводить поправки за уклонение отвесной линии.

Пусть с некоторого пункта O на пункт Q измерено горизонтальное направление OQ (рис. 3.19).

Горизонтальное направление – это отсчет по горизонтальному кругу при определенной ориентировке нулевого диаметра лимба. Предположим, что нулевой диаметр лимба совпадает с продолжением дуги $Z_\Gamma Z_A$. Тогда непосредственно измеренному горизонтальному направлению будет соответствовать угол R_1 . Этому углу на эллипсоиде будет соответствовать двугранный угол R , ребром которого является нормаль к эллипсоиду, а гранями – нормальные плоскости.

Из рис. 3.19 следует, что

$$R = R_1 + (R - R_1) = R_1 + \Delta_\vartheta,$$

где разность в скобках и есть искомая поправка Δ_{ϑ} за уклонение отвесной линии. Для её вычисления выше уже была выведена формула (3.71), поэтому

$$\Delta_{\vartheta} = (\eta \cos A - \xi \sin A) \operatorname{ctg} z. \quad (3.73)$$

Величина поправки в равнинной местности несколько десятых долей секунд, а в горной местности может достигать и нескольких секунд.

Поправка за высоту наблюдаемого пункта

Геометрический смысл этой поправки (рис. 3.20) заключается в том, что нормали пунктов с которого наблюдают А и на который наблюдают В не лежат в одной плоскости. И если пункт, на который мы наблюдаем, расположен не на эллипсоиде, а на некоторой высоте Н над ним, то коллимационная плоскость зрительной трубы теодолита в момент наблюдения пересечет поверхность эллипсоида по кривой ab' , не совпадающей с прямым нормальным сечением ab . Следовательно, при редуцировании в измеренное направление необходимо вводить поправку за высоту наблюдаемого пункта Δ_H .

Сложность вывода формулы для вычисления поправки Δ_H будет зависеть от её величины. Если поправка мала, то тогда можно сферический треугольник abb' принять за плоский и вывод значительно упрощается. Поэтому, вначале приближённо оценим косвенным путём величину этой поправки (рис. 3.20).

Поправка Δ_H будет зависеть от величины дуги bb' , которая в свою очередь зависит от угла α , а величина угла α от величины отрезка $n_a n_b$. Отрезок $n_a n_b = on_b - on_a$ и на основании второй формулы (2.26) будет равен

$$n_a n_b = e^2 N_2 \sin B_2 - e^2 N_1 \sin B_1 = e^2 N_2 \left(\sin B_2 - \frac{N_1}{N_2} \sin B_1 \right).$$

Если принять $N_1 \approx N_2$, то

$$e^2 N_2 (\sin B_2 - \sin B_1) = 2 e^2 N_2 \sin \frac{\Delta B}{2} \cos B_{cp} = e^2 N_2 \Delta B \cos B_{cp},$$

а учитывая (2.77), находим

$$n_a n_b = \frac{e^2 N_2 S \cos A_{cp}}{M_{cp}} \cos B_{cp}. \quad (3.74)$$

Эта формула показывает, что при $S \approx 30 - 40$ км $n_a n_b \approx 100$ м, а угол $\alpha < 3''$. Из треугольника Bbb' следует, что

$$bb' = H_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (3.75)$$

Если принять, что $H_2 = 10000$ м, $\alpha = 3''$, то $bb' = 0.15$ м. Тогда рассматривая треугольник abb' как плоский и учитывая, что

$$\sin(360^\circ - A_2) = \sin[360^\circ - (A_1 \pm 180^\circ + \Delta A)] \approx \sin(180^\circ - A_1) = \sin A_1,$$

находим

$$\Delta_H = H_2 \operatorname{tg} \alpha \frac{\sin A_1}{S}. \quad (3.76)$$

Угол α определяем из прямоугольного треугольника BCn_a

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Cn_a}{N_2 + H_2 - Cn_b} \approx \frac{Cn_a}{N_2}. \quad (3.77)$$

к геодезическим линиям. Вывод этой поправки очень сложный, поэтому, опуская вывод, запишем

$$\Delta_{\Gamma}'' = -\frac{\rho'' e'^2}{12N^2} S^2 \cos^2 B \sin 2A \approx -0.0282 \cdot S^2_{(100\text{км})} \cos^2 B \sin 2A. \quad (3.80)$$

При $S = 30$ км поправка равна $0.003''$. Поправка очень мала и учитывалась только в триангуляции 1 класса и то не всегда.

3.5.3. Редуцирование измеренных расстояний

Высокоточные измерения расстояний при построении наземных геодезических сетей могут выполняться либо с помощью инварных проволок, либо радиодальномерами или светодальномерами. Так как в настоящее время расстояние инварными проволоками почти не измеряют, рассмотрим только редуцирование наклонных дальностей, измеренных радиодальномерами или светодальномерами.

Предположим, что с точки Q_1 на точку Q_2 измерена наклонная дальность, которая обозначена через d (рис. 3.21).

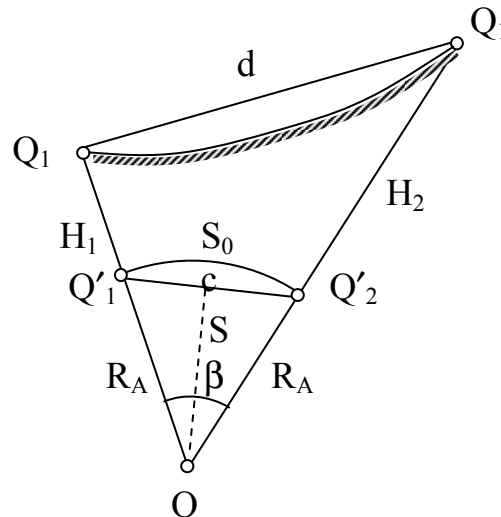


Рис. 3.21. Редуцирование измеренных расстояний

Если редуцирование осуществляется по методу проектирования, то необходимо найти на эллипсоиде проекцию S_0 . Для небольших расстояний ($S \leq 40$ км) эллипсоид можно заменить сферой радиуса R_A (R_A вычисляется по формуле (2.66)), допуская при этом относительную погрешность $3 \cdot 10^{-8}$. Тогда из рис. 3.21 видно, что

$$S_0 = R_A \cdot \beta, \quad (3.81)$$

где β – угол между нормальными. Из треугольника $Q_1 Q_2 O$ на основании теоремы косинусов, находим

$$d^2 = (R_A + H_1)^2 + (R_A + H_2)^2 - 2(R_A + H_1)(R_A + H_2) \cos \beta.$$

Откуда

$$\cos \beta = \frac{(R_A + H_1)^2 + (R_A + H_2)^2 - d^2}{2(R_A + H_1)(R_A + H_2)}. \quad (3.82)$$

Длину хорды S (рис. 3.21) можно найти из треугольника $Q'_1 Q'_2 O$

$$S^2 = R_A^2 + R_A^2 - 2R_A R_A \cos\beta = 2R_A^2 (1 - \cos\beta). \quad (3.83)$$

Подставив (3.82) в (3.83), получим

$$S = \sqrt{\frac{d^2 - \Delta H^2}{\left(1 + \frac{H_1}{R_A}\right)\left(1 + \frac{H_2}{R_A}\right)}}. \quad (3.84)$$

Из выражения (3.83)

$$\cos\beta = 1 - \frac{S^2}{2R_A^2}. \quad (3.85)$$

Тогда спроектированное на эллипсоид расстояние находится по формуле

$$S_0 = R_A \arccos\left(1 - \frac{S^2}{2R_A^2}\right). \quad (3.86)$$

На практике формула (3.86) не всегда бывает удобной. Поэтому получим более приемлемую формулу для практического применения.

Из треугольника Q'_1CO (рис. 3.21) видно, что

$$\beta = 2 \arcsin \frac{S}{2R_A}. \quad (3.87)$$

Раскладывая арксинус в ряд с удержанием членов до пятого порядка малости и подставив (3.87) в (3.81), получаем

$$S_0 = S + \frac{S^3}{24R_A^2} + \frac{3}{640} \frac{S^5}{R_A^4} + \dots \quad (3.88)$$

Это выражение и является формулой, по которой на практике вычисляется редуцированное на эллипсоид расстояние.

3.6. Фундаментальные геодезические постоянные

Изучить фигуру Земли, как планетарного тела, строго только геометрическим путём без знания её гравитационного поля невозможно. Поэтому в настоящее время изучение фигуры и гравитационного поля Земли представляют собой две составные части по существу одной общей задачи. Изучение же гравитационного поля Земли, в свою очередь, является сложной задачей ещё и потому, что нам неизвестно распределение масс внутри Земли. Поэтому не случайно изучение каждой из составных частей осуществляется по одной и той же технологии.

Сначала определяется форма и размеры земного эллипсоида как математической модели Земли и его ориентирование в теле Земли, а затем изучаются отступления реально существующей физической поверхности Земли от принятой математической модели её. Аналогично происходит и с изучением гравитационного поля Земли. Сначала определяется так называемый нормальный потенциал, т. е. потенциал силы тяжести, развиваемый уровенным эллипсоидом с определёнными параметрами, а затем изучаются отступления действительного потенциала силы тяжести Земли от нормального, которые называют возмущающим потенциалом.

Итак, в настоящее время за модель Земли принимается эллипсоид вращения, внешняя поверхность которого считается уровенной, то есть потенциал этой поверхности $U_0 = \text{const}$. Центр эллипсоида совпадает с центром масс Земли, а ось вращения – со средней осью вращения Земли.

По известным параметрам уровенного эллипсоида вычисляется нормальный потенциал и его производные на поверхности и вне эллипсоида.

Уровенный эллипсоид, который принимается за физическую модель Земли при решении задачи определения её фигуры и гравитационного поля, называется *Нормальной Землёй*. Наиболее часто потенциал Нормальной Земли представляется в виде разложения в ряд шаровых функций геоцентрических координат r , Φ и L

$$U = \frac{fM_0}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} J_{2n}^0 P_{2n}(\sin \Phi) \right] + \frac{\omega^2}{2} r^2 \sin^2 \Phi, \quad (3.89)$$

где r – расстояние от центра эллипсоида до точки, в которой определяется нормальный потенциал; f – универсальная гравитационная постоянная; M_0 – масса уровенного эллипсоида; a – большая полуось эллипсоида; J_{2n}^0 – зональные гармонические коэффициенты четной степени при полиномах Лежандра $P_{2n}(\sin \Phi)$, ω – скорость вращения Земли.

Для определения нормального потенциала и различных его характеристик необходимо располагать величинами, которые принято называть параметрами Нормальной Земли или геодезическими постоянными.

Параметры Нормальной Земли можно классифицировать в зависимости от их величины и важности.

Параметры нулевого порядка:

- 1) геоцентрическая гравитационная постоянная fM ;
- 2) нормальный потенциал силы тяжести на поверхности Нормальной Земли U_0 ;
- 3) экваториальный радиус Земли a ;
- 4) нормальная сила тяжести на экваторе γ_e .

Параметры порядка сжатия:

- 1) зональный гармонический коэффициент геопотенциала второй степени J_2 ;

- 2) геометрическое сжатие Земли $\alpha = \frac{a-b}{a}$;

- 3) гравиметрическое сжатие Земли $\beta = \frac{\gamma_p - \gamma_e}{\gamma_e}$, где γ_p – нормальная сила

тяжести на полюсе;

- 4) малый параметр, являющиеся функцией угловой скорости вращения Земли ω и параметров нулевого порядка

$$q = \frac{\omega^2 a^3}{fM}. \quad (3.90)$$

Параметры высших порядков:

- 1) коэффициент β_1 в формуле (3.5) нормальной силы тяжести;
- 2) гармонические коэффициенты нормального потенциала J_4^0, J_6^0, \dots и т. д.

Совершенно очевидно, что не все вышеперечисленные параметры одновременно необходимы для полной характеристики нормального поля силы тяжести. Вероятно, многие из них являются следствием каких-то других, основных параметров и поэтому при необходимости могут быть легко вычислены по специальным формулам связи.

В настоящее время за основные или, как их иначе называют, *фундаментальные параметры* Нормальной Земли (или фундаментальные геодезические постоянные) принимают:

- 1) fM – геоцентрическая гравитационная постоянная;
- 2) a – большая полуось эллипсоида;
- 3) J_2 – зональный гармонический коэффициент второй степени;
- 4) ω – угловая скорость вращения Земли.

Другие параметры Нормальной Земли являются функциями фундаментальных геодезических постоянных. Например, определив по формуле (3.90) q , можно найти сжатие Земли

$$\alpha = \frac{3}{2}J_2 + \frac{1}{2}q + \frac{9}{8}J_2^2 - \frac{11}{56}q^2 - \frac{3}{14}J_2q,$$

и квадрат эксцентриситета

$$e^2 = 3J_2 + q - \frac{27}{14}qJ_2 - \frac{9}{14}q^2 + \dots$$

Нормальный потенциал U_0 на поверхности эллипсоида равен

$$U_0 = \frac{fM}{a} \left(1 + \frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{15}\alpha^2 \right) + \frac{1}{3}q + \frac{2}{35}\alpha^3 + \dots$$

Нормальное ускорение силы тяжести на экваторе и полюсе вычисляется по формулам

$$\gamma_e = \frac{fM}{a^2} \left(1 - \frac{3}{2}q + \alpha + \alpha^2 - \frac{3}{7}\alpha q + \alpha^3 - \frac{125}{194}\alpha^2 q \right);$$

$$\gamma_p = \frac{fM}{a^2} \left[1 + \left(1 - \frac{\alpha}{7} - \frac{\alpha^2}{147} \right) q \right].$$

Зональные гармонические коэффициенты являются функциями от второй зональной гармоники и эксцентриситета

$$J_{2n} = (-1)^{n+1} \frac{3e^{2n-1}}{(2n+1)(2n+3)} [5nJ_2 - (n-1)e^2].$$

Способы определения фундаментальных постоянных выходят за рамки данного учебного пособия, поэтому здесь не рассматриваются.

Параметры Нормальной Земли, принятые в Геодезической референц-системе 1980 г.

В 1979 г. Международная ассоциация геодезии приняла Геодезическую референц-систему 1980 г. (GRS80).

Её основой является геоцентрический уровенный эллипсоид со своим нормальным гравитационным полем. Систему задают следующие фундаментальные геодезические постоянные:

1. экваториальный радиус земного эллипсоида (большая полуось) $a = 6378137$ м;

2. геоцентрическая гравитационная постоянная Земли (включая массу атмосферы) $fM = 398600.5 \cdot 10^9 \text{ м}^3\text{с}^{-2}$;

3. зональный гармонический коэффициент второй степени $J_2 = 1082.63 \cdot 10^{-6}$;

4. угловая скорость суточного вращения Земли $\omega = 7.292115 \cdot 10^{-5} \text{ рад}\cdot\text{с}^{-1}$.

Наиболее важные производные постоянные системы GRS80 равны:

1. геометрическое сжатие $\alpha = 1:298.2572$;

2. нормальный потенциал на поверхности эллипсоида $U_0 = 6.2636861 \cdot 10^7 \text{ м}^2\text{с}^{-2}$;

3. коэффициенты разложения по сферическим функциям $J_4 = -2.37091 \cdot 10^{-6}$, $J_6 = 0.00608 \cdot 10^{-6}$, $J_8 = 0.00001 \cdot 10^{-6}$;

4. нормальная сила тяжести на экваторе и на полюсе $\gamma_e = 9.7803268 \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$, $\gamma_p = 9.8321864 \text{ м}\cdot\text{с}^{-2}$;

5. гравиметрическое сжатие $\beta = 0.005302440$.

3.7. Геодезические методы изучения движений земной коры

Одной из задач высшей геодезии является изучение движений земной коры по спутниковым, астрономическим, геодезическим и гравиметрическим измерениям.

Движения земной коры подразделяются на следующие виды [1, 13]:

1. планетарные, относящиеся ко всей планете;

2. региональные, проявляющиеся в пределах континента или литосферной плиты;

3. областные, распространяющиеся на территории протяженностью 1 – 3 тыс. км;

4. локальные, распространяемые в радиусе 50 – 300 км.

Внешняя динамика Земли проявляется в следующих явлениях:

1) движение полюса и центра масс Земли;

2) неравномерное вращение Земли;

3) деформация земной коры и литосферных плит;

4) изменение береговых линий и уровней морей и океанов;

5) перемещение масс на поверхности Земли;

6) временные изменения её фигуры и физических полей.

Планетарные изменения параметров Земли имеют такие значения:

1) годовое изменение большой полуоси эллипсоида $\Delta a = -1$ см;

2) годовое изменение полярного сжатия $\Delta \alpha = -1 \cdot 10^{-9}$;

3) среднее перемещение земных плит 2 см / год;

4) вековые движения полюса составляют 10 см / год по меридиану 70° западной долготы;

5) земной полюс за 436.5 суток совершает полный оборот по радиусу 15 м, а за одни сутки – 5 см.

Для изучения геодинамических процессов на земной поверхности создаются геодинамические полигоны.

Геодинамические полигоны

Геодинамическим полигоном называется целесообразно выбранная территория, в пределах которой ведётся комплекс регулярных астрономо-геодезических и гравиметрических измерений, предназначенных для количественного определения деформаций земной коры и изменений локального гравитационного поля, а также для изучения развития этих явлений во времени.

Полигоны обычно располагаются в сейсмоактивных районах Земли. По территориальному признаку современные геодинамические полигоны делятся на четыре группы:

- 1) глобальные (планетарные);
- 2) региональные;
- 3) областные;
- 4) локальные.

На геодинамических полигонах обнаружение деформаций земной коры осуществляется на основе повторных циклов высокоточных спутниковых, астрономо-геодезических и гравиметрических наблюдений, выполняемых с определённой периодичностью.

Геодинамические полигоны могут быть прогностическими и техногенными.

Прогностические полигоны предназначены для прогноза землетрясений и извержения вулканов.

Геодезические построения на прогностических геодинамических полигонах создаются в следующих видах:

- 1) линейно-угловые астрономо-геодезических сети, состоящие, как правило, из треугольников с размерами сторон 6 – 12 км и включающие в себя 20 – 25 надёжно закрепленных пунктов;
- 2) локальные геодезические построения в зонах глубинных разломов (наиболее простой и контролирующей смещения фигурой является *геодезический четырёхугольник*, вытянутый вдоль разлома);
- 3) локальные построения с центральной обсерваторией;
- 4) сети высокоточного нивелирования, на начальных и конечных пунктах которых выполняются гравиметрические наблюдения.

Техногенные геодинамические полигоны подразделяются на две основные группы:

- 1) геодинамические полигоны гидроэлектростанций, создаваемые с целью изучения смещений земной коры, обусловленных давлением водных масс;
- 2) геодинамические полигоны районов добычи нефти, газа, угля и других полезных ископаемых, создаваемые для изучения смещений, обусловленных изменением давления внутри земной коры вследствие эксплуатации месторождений.

Основным методом изучения вертикальных деформаций на техногенных полигонах является нивелирование.

На полигонах первой группы прокладывают линию нивелирования I класса вдоль берегов водохранилища и образуют, если позволяют условия местности, замкнутый полигон. Далее прокладывают по 3 – 4 хода нивелирования длиной порядка 10 – 15 км каждый, идущих от реперов основной линии в направлениях, перпендикулярных берегам водохранилища. Их назначение – привязать основную линию к реперам, неподверженным техногенным влияниям. Также создают линейно-угловые построения в виде геодезических четырёхугольников, соединяющих пункты на противоположных берегах водохранилища. Цель таких построений – контролировать возможные взаимные смещения берегов. Очередные циклы измерений выполняются ежегодно во время заполнения водохранилища и первые 5 лет после него. Также проводятся гравиметрические измерения в начальных и конечных пунктах линий нивелирования.

На геодинамических полигонах второй группы развивается нивелирование в виде систем пересекающихся нивелирных линий, как правило, образующих полигоны с периметром 25 – 100 км (в зависимости от размеров объекта). При проектировании этих линий необходимо располагать схемой месторождения с указанием его контура. Концы линий, пересекающих месторождение, должны выходить за его границы не менее чем на 5 км и закрепляться фундаментальными реперами. По крайней мере, четыре из этих реперов должны быть удалены от границ месторождения на расстояния не менее 10 км. Затем на созданном полигоне выполняются наблюдения в несколько циклов с определенной периодичностью. После трёх выполненных циклов результаты повторных измерений изображаются в виде графиков скоростей вертикальных движений.

Развитие плановых сетей на геодинамических полигонах целесообразно лишь в том случае, когда вертикальные движения значительны (5 и более см в год).

Пространственные смещения точек земной поверхности, принимаемые за движение земной коры, обычно принято разлагать на вертикальную и две горизонтальные составляющие.

Вертикальная составляющая – это смещение точки относительно её начального положения вдоль проходящей через неё отвесной линии. Вертикальные движения выявляют из повторных высокоточных нивелировок.

Горизонтальными составляющими движения являются смещения точки в двух взаимно перпендикулярных направлениях по проходящей через неё уровенной поверхности потенциала силы тяжести. Иногда целесообразнее отнести горизонтальные составляющие к какой-нибудь общей для всех исследуемых точек поверхности (например, к поверхности референц-эллипсоида).

Для выявления современных горизонтальных движений земной коры развиваются сети триангуляции, трилатерации или простейшее построение – геодезический четырёхугольник. На местности проводятся линейно-угловые

измерения, которые повторяют с определенной периодичностью. Результаты наблюдений представляют в виде карт горизонтальных скоростей. Наличие карт вертикальных и горизонтальных скоростей, выявленных на нескольких геодинамических полигонах, дают возможность оценить, происходящие во времени деформации территории целого региона.

В результате движения земной коры, изменяется не только положение точек в пространстве, но и местное гравитационное поле Земли. Поэтому на полигонах выполняют также гравиметрические наблюдения.

Итак, для изучения движений земной коры применяются следующие геодезические методы:

- 1) для изучения вертикальных движений – нивелирование;
- 2) для изучения горизонтальных движений – угловые, линейные, линейно-угловые и спутниковые измерения.

4. ОСНОВЫ КООРДИНАТНО-ВРЕМЕННЫХ СИСТЕМ

4.1. Системы отсчёта и принципы инвариантности законов природы

Для описания различных явлений и процессов, происходящих в природе, геодезическими методами необходимо иметь систему отсчёта. *Система отсчёта* – совокупность системы координат и системы времени для указания места в пространстве, где происходит точечное событие, и момента времени, когда оно происходит [9]. Систему отсчёта невозможно задать в пустоте, она должна быть обязательно связана с какими-либо объектами в пространстве (звёзды, Солнце, Земля и другие планеты и т. д.).

Система отсчёта является *инерциальной*, если тело, связанное с этой системой, не находится под действием внешних сил и находится в покое или движется равномерно и прямолинейно без каких-либо ускорений. Множество других систем, движущихся относительно первой с постоянной скоростью, также будут инерциальными. *Неинерциальные системы отсчёта* вращаются и/или движутся относительно инерциальных систем с ускорением. В различных неинерциальных системах отсчёта формулы, описывающие одни и те же явления и процессы в природе, отличаются друг от друга и зачастую имеют более сложный вид, чем в инерциальных системах отсчёта.

Из многочисленных опытов установлено, что во всех инерциальных системах отсчёта законы природы инвариантны, то есть математические соотношения (формулы) одни и те же. Инвариантность законов природы называется принципом относительности. Это один из постулатов теории относительности, который берётся из практики. Законы природы инвариантны по отношению к четырём типам преобразований:

- переносу в пространстве;
- повороту в пространстве;
- сдвигу во времени;
- преобразованию движения.

4.2. Преобразования Галилея

Принцип относительности классической механики установлен в XVII в. Галилеем. Он базируется на двух постулатах.

1. В инерциальных системах все механические явления протекают одинаково (при одинаковых условиях).

2. Во всех системах отсчёта время течёт одинаково.

Механическое движение (перемещение тела в пространстве) – это движение относительно других тел. Для математического описания движения жестко свяжем инерциальные системы отсчёта с другими телами. На рис. 4.1 показан простой пример, где две инерциальные системы отсчёта $oxyz$ и $o'x'y'z'$, движутся относительно друг друга прямолинейно с постоянной скоростью V в направлении совпадающих осей абсцисс. Оси ординат и аппликат двух систем параллельны.

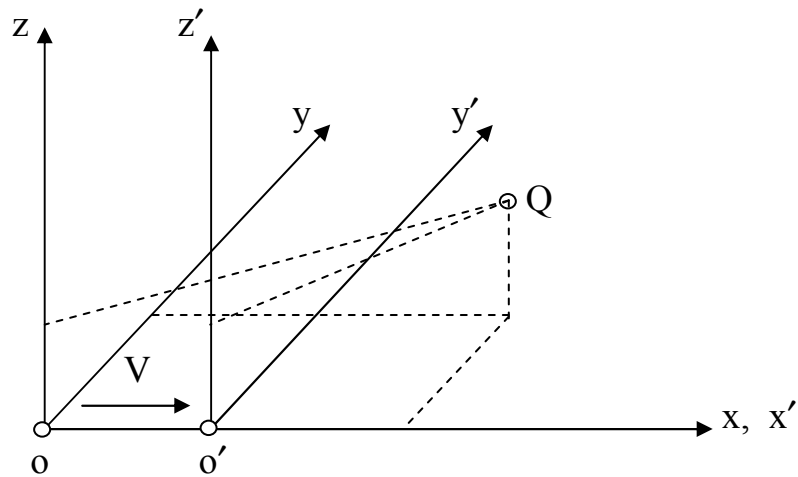


Рис. 4.1. Инерциальные системы координат.

Если в момент времени $t_0 = 0$, начала обеих систем совпали, то преобразование пространственных координат точки Q и времени из одной системы отсчёта в другую для момента времени t задаётся формулами

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - Vt; \\ y' &= y; \\ z' &= z; \\ t' &= t \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

или в векторной форме

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} - \vec{V}t; \\ t' &= t. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Представленные уравнения (4.2) являются координатно-временными преобразованиями Галилея.

Выполнив преобразования Галилея для двух тел видно, что расстояние между телами и промежутки времени между двумя событиями будут одинаковыми во всех инерциальных системах отсчёта. Они являются инвариантами преобразований Галилея

$$l_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2} = l'_{12}$$

$$\Delta t_{12} = t_2 - t_1 = t'_2 - t'_1 = \Delta t'_{12} .$$

Дифференцируя первое из уравнений (4.2) по времени, находим формулу преобразования Галилея для скоростей

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} . \quad (4.3)$$

Из (4.3) видно, что скорость движения объекта различна в разных инерциальных системах отсчёта.

Продифференцируем ещё раз по времени формулу сложения скоростей (4.3). Тогда с учётом того, что $\vec{V} = \text{const}$, получим

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} .$$

Отсюда следует, что ускорения являются инвариантами преобразований Галилея. Инвариантом преобразований Галилея является и относительная скорость двух материальных точек.

Так как вектора ускорения и силы не зависят от системы инерциальных координат, в которых они описаны, то фундаментальный закон природы – второй закон Ньютона инвариантен относительно преобразований Галилея, то есть все механические явления протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчёта.

4.3. Относительность одновременности

Уравнения, описывающие механические законы природы, согласно принципу относительности Галилея, имеют один и тот же вид в различных инерциальных системах отсчёта.

В классической механике предполагается, что тела взаимодействуют друг с другом мгновенно и величина взаимодействия (например, сила тяготения) зависит от взаимного положения тел. Если положение одного из тел изменилось, мгновенно изменяется сила тяготения, воздействующая на другие тела [11].

Многие физические эксперименты, однако, указывают на то, что мгновенных взаимодействий в природе не существует. Поэтому классическая механика, исходящая из предположения о мгновенности распространения взаимодействий является не совсем точной теорией.

На основе опытных данных Эйнштейн в разработанной им теории относительности постулировал, что максимальная скорость распространения взаимодействий и скорость света в вакууме равны друг другу, одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта и численно равны универсальной постоянной $c = 299\,792\,458 \text{ мс}^{-1}$.

Объединив принцип относительности с конечностью скорости распространения взаимодействий, Эйнштейн сформулировал в 1905 г. так называемый *принцип относительности Эйнштейна*. Принцип же относительности Галилея исходит из предположения о бесконечной скорости распространения взаимодействий.

В классической механике время является абсолютным. Оно одно для всех систем отсчёта. Это значит, что если два события происходят одновременно для какого-нибудь наблюдателя, то они являются одновременными и для всякого другого наблюдателя, в какой бы системе отсчёта он не находился. Промежуток времени между двумя неодновременными событиями во всех системах отсчёта одинаков.

Понятие абсолютного времени находится в глубоком противоречии с эйнштейновским принципом относительности.

В классической механике скорость сложного движения равна векторной сумме скоростей, составляющих это движение. Отсюда следует, что скорость света различна в разных инерциальных системах отсчёта, а это противоречит постулату Эйнштейна о постоянстве скорости света. Этот постулат основан на экспериментах, проведенных Майкельсоном и Морли в 1881 г. Из измерений

ими установлена независимость скорости света от направления его распространения и скорости движения источника излучения.

Из принципа относительности Эйнштейна следует вывод о том, что время не является абсолютным и течёт по-разному в различных системах отсчёта. События, которые являются одновременными в одной системе отсчёта, будут неодновременными в другой системе отсчёта.

Для уяснения вопроса об относительности одновременности рассмотрим две инерциальные системы отсчёта, из которых одна система (подвижная $o'x'y'z'$) движется относительно другой (неподвижной $oxyz$) прямолинейно и равномерно вдоль оси абсцисс. Оси ординат и аппликат двух систем параллельны (рис. 4.2).

Пусть из некоторой точки A на оси x' в двух взаимно противоположных направлениях отправляются световые сигналы. Поскольку скорость распространения сигнала в подвижной системе, как и во всякой инерциальной системе, в обоих направлениях равна c , то сигналы достигнут равноудаленных от A точек B и C в один и тот же момент времени. Однако приход сигналов с той же скоростью света в точки B и C в инерциальной неподвижной системе будет не одновременным, поскольку точка B движется навстречу посланному к ней сигналу, а точка C – по направлению от сигнала, посланного из точки A в точку C . Сигнал придёт в точку B раньше, чем в точку C . Таким образом, события одновременные в одной системе координат, становятся неодновременными в другой.

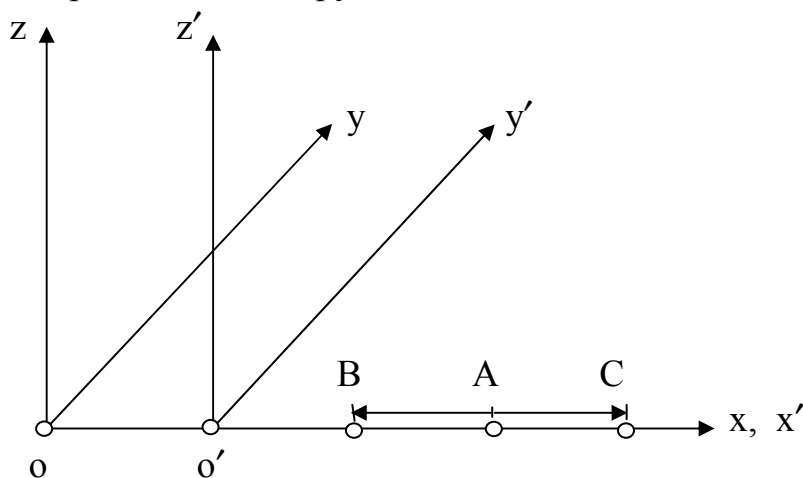


Рис. 4.2. Относительность одновременности

Понятие одновременности не имеет абсолютного значения, независимо от системы координат. Чтобы утверждение об одновременности каких-либо событий имело определенное содержание, необходимо указать, к какой системе координат это утверждение относится.

4.4. Преобразования Лоренца

Формулы преобразования координат и времени из одной инерциальной системы отсчёта в другую должны быть такими, чтобы скорость света в двух системах оставалась постоянной величиной.

Пусть в какой-либо момент времени $t = t' = 0$ начала неподвижной $oxyz$ и подвижной систем координат совпали и из начал координат произведена световая вспышка.

Уравнение фронта световой волны в неподвижной системе координат имеет вид (рис. 4.3)

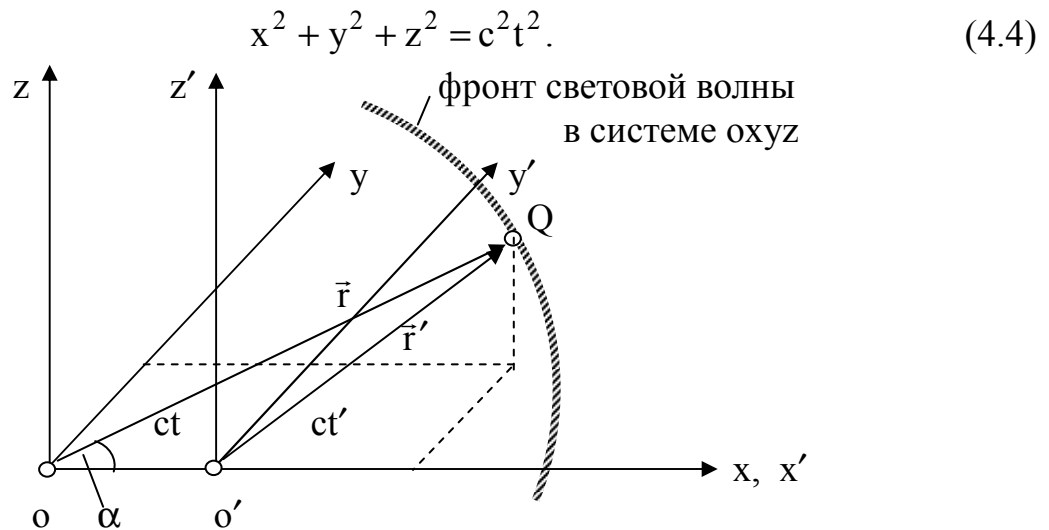


Рис. 4.3. Преобразования Лоренца

Уравнение (4.4) описывает сферическую поверхность, радиус которой увеличивается со скоростью c . В подвижной системе координат уравнение сферического волнового фронта запишется аналогичным образом

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2. \quad (4.5)$$

В уравнениях (4.4) и (4.5) скорость света постоянна на основании постулата Эйнштейна.

Пусть подвижная система движется в положительном направлении оси абсцисс с постоянной скоростью V относительно неподвижной системы. Выразим координаты точки Q в подвижной системе через координаты неподвижной системы при помощи преобразования Галилея (4.1) и подставим их в уравнение (4.5), получим [6]

$$x^2 - 2xVt + V^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. \quad (4.6)$$

Видно, что уравнение (4.6) не согласуется с уравнением (4.4), поэтому необходимо так подправить преобразование Галилея, чтобы уравнение (4.6) преобразовалось бы к виду выражения (4.4). Что-то должно быть прибавлено к t , чтобы сократились члены $-2xVt + V^2 t^2$. Представим время в подвижной системе координат функцией

$$t' = t + ax, \quad (4.7)$$

где a – постоянная, значение которой необходимо определить. Подставив первые три уравнения (4.1) и уравнение (4.7) в (4.5), находим

$$(x - Vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2 (t + ax)^2$$

или

$$x^2 - 2Vxt + V^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 + 2c^2 axt + c^2 a^2 x^2. \quad (4.8)$$

Для того чтобы члены, содержащие xt , сократились, необходимо чтобы

$$a = -\frac{V}{c^2}. \quad (4.9)$$

Тогда подставив (4.9) в (4.7), получим

$$t' = t - \frac{V}{c^2}x. \quad (4.10)$$

Уравнение (4.8) преобразуется к виду

$$x^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right). \quad (4.11)$$

Уравнение (4.11) уже лучше, чем уравнение (4.6), согласуется с (4.4), однако ещё остаётся нежелательный масштабный множитель $1 - \frac{V^2}{c^2}$. Чтобы избавиться от него, необходимо выражения для x и t разделить на $\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$.

После выполненных действий преобразование Лоренца запишется следующим образом

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (4.12)$$

На основании (4.12) легко записать и обратные преобразования

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + \frac{V}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (4.13)$$

Если подставим преобразования (4.12) в (4.5) получим уравнение (4.4).

Таким образом, преобразование Лоренца не изменяет, в отличие от преобразования Галилея, форму уравнения фронта световой волны. Поэтому справедливы первый (уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной системы к другой) и второй (скорость света постоянна в любой системе координат) постулаты теории относительности.

Продифференцируем формулы (4.13) и получим

$$dx = \frac{dx' + Vdt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad dy = dy'; \quad dz = dz'; \quad dt = \frac{dt' + \frac{V}{c^2}dx'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (4.14)$$

Поделив первые три уравнения на четвёртое, находим формулы преобразования скоростей

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}; \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}; \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}}. \quad (4.15a)$$

Формулы обратного преобразования имеют следующий вид

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}; \quad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}; \quad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}. \quad (4.15б)$$

Запишем преобразования Лоренца для координат и времени в векторной форме [9]. Для этого разложим радиус-векторы \vec{r} и \vec{r}' в точке Q (рис. 4.3) на

компоненты $\vec{r}_x = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\vec{r}'_x = \begin{pmatrix} x' \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, параллельные скорости $\vec{V} = \begin{pmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, и

перпендикулярные скорости компоненты $\vec{r}_{yz} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}$ и $\vec{r}'_{yz} = \begin{pmatrix} 0 \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Тогда

преобразования Лоренца могут быть представлены следующим образом

$$\vec{r}'_x = \frac{\vec{r}_x - \vec{V}t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}; \quad \vec{r}'_{yz} = \vec{r}_{yz}; \quad t' = \frac{t - \frac{1}{c^2} \vec{V} \cdot \vec{r}_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (4.16)$$

Запишем очевидные соотношения

$$\vec{r}' = \vec{r}'_x + \vec{r}'_{yz}; \quad (4.17)$$

$$\vec{r}_x = r \cos \alpha \frac{\vec{V}}{V} = \frac{(\vec{r} \cdot \vec{V}) \vec{V}}{V^2}; \quad (4.18)$$

$$\vec{r}_{yz} = \vec{r} - \vec{r}_x = \vec{r} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{V}) \vec{V}}{V^2}. \quad (4.19)$$

Подставив в (4.17) первое и второе уравнения (4.16), с учётом (4.18) и (4.19), получим

$$\vec{r}' = \vec{r} - \frac{\vec{V}t}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + \frac{(\vec{r} \cdot \vec{V}) \vec{V}}{V^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - 1 \right). \quad (4.20)$$

Подставив (4.18) в третье уравнение (4.16), запишем

$$t' = \frac{t - \frac{1}{c^2} \vec{r} \cdot \vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad (4.21)$$

Дифференцируя (4.20) и (4.21) найдём преобразование Лоренца в векторной форме для бесконечно близких событий (*событие* произошедшее с материальной частицей определяется тремя координатами, где оно произошло, и временем, когда оно произошло)

$$d\vec{r}' = d\vec{r} - \frac{\vec{V} dt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} + \frac{(d\vec{r} \cdot \vec{V})\vec{V}}{V^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - 1 \right); \quad (4.22)$$

$$dt' = \frac{dt - \frac{1}{c^2} d\vec{r} \cdot \vec{V}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (4.23)$$

Разделив (4.22) на (4.23), получим преобразование Лоренца для скоростей в векторной форме

$$\vec{v}' = \frac{\vec{v} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} - \vec{V} + \frac{(\vec{v} \cdot \vec{V})\vec{V}}{V^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \right)}{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{V}}{c^2}}. \quad (4.24)$$

4.5. Временеподобные и пространственноподобные интервалы

Выполнив преобразования Лоренца по формулам (4.12) для двух точек можно убедиться, что расстояние между точками не является инвариантом для различных инерциальных систем координат. Инвариантом будет *интервал*, который в неподвижной и подвижной системах координат определяется следующими математическими соотношениями

$$\left. \begin{aligned} s_{12} &= \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}; \\ s'_{12} &= \sqrt{c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

причём для одного и того же события всегда $s_{12} = s'_{12}$.

Часто из соображений наглядности удобно воспользоваться четырёхмерным пространством, на осях которого откладываются три пространственные координаты и время. Событие в этом пространстве изображается точкой. Такую точку часто называют мировой точкой.

Совокупность событий образуют мировую линию в четырёхмерном пространстве.

Интервалы (4.25) формально можно рассматривать как расстояния между двумя точками в четырёхмерном пространстве.

Пусть x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2, t_2 – координаты двух событий в (условно) неподвижной системе отсчёта. Есть ли такая подвижная система отсчёта, в которой эти события произошли бы в одном и том же месте пространства, то есть $x'_1 = x'_2, y'_1 = y'_2, z'_1 = z'_2$? Вследствие инвариантности интервала, система отсчёта с требуемыми свойствами существует, если интервал вещественный

$$s_{12}^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = c^2(t'_2 - t'_1)^2 > 0.$$

Вещественные интервалы называются *временеподобными*.

Можно также выбрать такую подвижную систему отсчёта, в которой произошедшие в разные моменты два события произойдут в одно время $t'_1 = t'_2$. В силу инвариантности интервала, найдём

$$\begin{aligned} s_{12}^2 &= c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = \\ &= -(x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 < 0. \end{aligned}$$

Как видим, интервал получился мнимым. Мнимые интервалы называются *пространственноподобными*.

4.6. Собственное время

Пусть из некоторой инерциальной системы отсчёта, которую условно будем называть неподвижной, наблюдаются произвольно движущиеся часы. Движение на бесконечно малом отрезке времени dt можно считать равномерным. Тогда подвижная система отсчёта, связанная с часами является инерциальной. В неподвижной системе за время dt движущиеся часы пройдут расстояние, равное $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. Так как в подвижной системе отсчёта часы находятся в состоянии покоя, то соответствующее пройденное расстояние равно нулю или $dx' = dy' = dz' = 0$. Инвариантность интервала приводит к следующим соотношениям

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2.$$

Отсюда с учётом того, что $v^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$, получим

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{ds}{c}. \quad (4.26)$$

Интегрирование даёт возможность найти промежуток времени, который покажут движущиеся часы, если по неподвижным часам промежуток времени будет равен $t_2 - t_1$

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt. \quad (4.27)$$

Если часы находятся в покое на движущемся объекте, то они показывают *собственное время* объекта. Часы на неподвижном объекте в неподвижной системе отсчёта показывают *координатное время*. Собственное время всегда течёт медленнее координатного времени.

4.7. Четырёхмерные скорости и ускорения

Координаты события (ct, x, y, z) могут рассматриваться как компоненты четырёхмерного радиуса-вектора в четырёхмерном пространстве. Компоненты обозначим через x^i , где индекс i принимает значения 0, 1, 2, 3, при этом $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$.

Вектор

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \quad (4.28)$$

является четырёхмерной скоростью частицы. Выразив интервал ds из (4.26) и подставив в знаменатель (4.28), получим

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

Для определения четырёхмерного ускорения продифференцируем (4.28). Тогда

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{d^2x^i}{ds^2}. \quad (4.29)$$

Очевидно, что при свободном движении материальной точки в четырёхмерном пространстве (без силового воздействия) ускорение будет равно нулю.

4.8. Тензоры и элементы тензорной алгебры

Тензор – от латинского слова *tendo*, что буквально означает «напрягаю, растягиваю» – величина, координаты которой преобразуются по особому закону при переходе от одной системы координат к другой [12]. Термин первоначально относился к тензору деформации, связанному с упругими деформациями при малых растяжениях.

Тензорное исчисление – математическая теория, изучающая величины особого рода – тензоры, их свойства и правила действия с ними. Тензорное исчисление является развитием и обобщением векторного исчисления и теории матриц.

Тензорное исчисление нашло применение в теории относительности в связи с тем, что тензоры инвариантны относительно выбора системы координат. Например, простейшие тензоры – скалярные величины (температура, масса, геопотенциал и т. д.) – описываются одним числом, неизменяющимся при переходе от одной системы координат к другой. Другие величины, векторные (сила, скорость, ускорение и т. д.), описываются тремя числами (компонентами вектора) и при переходе от одной системы координат к другой компоненты

векторов преобразуются по известному закону. Есть величины, которые называются тензорными и имеют больше трёх компонент тензора (например, шесть компонент у тензора вторых производных потенциала силы тяжести). Чтобы отнести величину к тензору, должен обязательно быть известен закон преобразования компонент при переходе от одной системы координат к другой. В данном учебном пособии рассматриваются лишь основы тензорного исчисления, более подробно можно ознакомиться с тензорами по работам [8, 17].

4.8.1. Типы тензоров

В общем случае тензоры являются функциями точки в n -мерном пространстве. Пусть $Q(x^1, x^2, \dots, x^n)$ – тензор, компоненты которого определяются совокупностью n^{R+S} скалярных функций точки [7]. Обозначим компоненты тензора, как

$$Q_{i_1, i_2, \dots, i_R}^{k_1, k_2, \dots, k_S}, \quad (4.30)$$

где индексы $i_1, i_2, \dots, i_R, k_1, k_2, \dots, k_S$ независимо друг от друга пробегают значения $1, 2, \dots, n$. Количеством индексов $R + S$ определяется ранг (валентность) тензора. Если индексы компонент тензора в (4.30) записаны только вверху, то тензор называется *контравариантным* (например, контравариантный тензор второго ранга A^{ik}). Если только внизу, то тип тензора *ковариантный* (например, ковариантный тензор четвертого ранга B_{ijpq}). Если индексы и вверху и внизу, то тензор называется *смешанным* (например, смешанный тензор седьмого ранга C_{ikmn}^{pq}).

Тензором нулевого ранга (с одной компонентой) является скаляр. Его значение не зависит от системы координат, в которой он записан.

Запишем уравнения (закон) преобразования координат точки из одной системы в другую в виде

$$x'^i = x'^i(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (4.31)$$

Дифференцируя (4.31), можно получить формулы преобразования дифференциалов при переходе от одной системы координат в другую

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} dx^k. \quad (4.32)$$

Контравариантным тензором первого ранга (контравариантным вектором) называется объект, который в координатной системе x определяется n упорядоченными числами (компонентами) $A^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$ и в координатной системе x' определяется n упорядоченными компонентами $A'^i(x'^1, x'^2, \dots, x'^n)$, связанными с $A^i(x^1, x^2, \dots, x^n)$ в каждой точке пространства преобразованием [9]

$$A'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} A^k. \quad (4.33)$$

Из сравнения выражений (4.33) с (4.32) видно, что закон преобразования у контравариантных тензоров такой же, как у дифференциалов координат.

Если буквой ϕ обозначить некоторую скалярную функцию, то производные при преобразовании координат преобразуются по формулам

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'^i} = \frac{\partial \phi}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i}. \quad (4.34)$$

Тогда, *ковариантным тензором первого ранга* (ковариантным вектором) называется объект, который в координатной системе x определяется n упорядоченными компонентами $A_i(x^1, x^2, \dots, x^n)$ и в координатной системе x' определяется n упорядоченными компонентами $A'_i(x'^1, x'^2, \dots, x'^n)$, связанными с $A_i(x^1, x^2, \dots, x^n)$ в каждой точке пространства преобразованием

$$A'_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} A_k. \quad (4.35)$$

Из сравнения (4.35) с (4.34) обнаруживаем, что закон преобразования ковариантных тензоров первого ранга при переходе из одной системы координат в другую такой же, как и при преобразовании производных от скалярной функции.

Аналогичным образом определяются и тензоры более высоких рангов.

Контравариантным тензором второго ранга A^{ik} называется совокупность n^2 величин, которые преобразуются при переходе от одной системы координат в другую как произведения двух контравариантных векторов

$$A'^{ik} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^p} \frac{\partial x'^k}{\partial x^q} A^{pq}. \quad (4.36)$$

Ковариантным тензором второго ранга A_{ik} называется совокупность n^2 величин, которые преобразуются как произведения двух ковариантных векторов

$$A'_{ik} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^i} \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} A_{pq}. \quad (4.37)$$

Смешанным тензором второго ранга A^i_k называется совокупность n^2 компонентов, которые преобразуются как произведения контравариантного и ковариантного векторов

$$A'^i_k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial x'^k} A^p_q. \quad (4.38)$$

4.8.2. Элементы тензорной алгебры

Для одной и той же точки пространства приведём соотношения и арифметические операции между тензорами [9].

Два тензора одного и того же типа и ранга равны в точке, если равны их соответствующие компоненты в некоторой координатной системе.

Тензор A^{ik} (или A_{ik}) называется *симметричным*, если $A^{ik} = A^{ki}$ ($A_{ik} = A_{ki}$).

У *антисимметричного* тензора все компоненты с одинаковыми значениями индексов равны нулю, а при разных значениях индексов $A^{ik} = -A^{ki}$ ($A_{ik} = -A_{ki}$).

Суммой двух тензоров одного и того же типа и ранга называется тензор, компоненты которого получены путём суммирования соответствующих компонент тензоров

$$C_{ij}^{km} = A_{ij}^{km} + B_{ij}^{km}. \quad (4.39)$$

Произвольный тензор можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров

$$B^{ik} = S^{ik} + A^{ik},$$

где $S^{ik} = \frac{1}{2}(B^{ik} + B^{ki})$ – симметричная часть тензора B^{ik} ,

$$A^{ik} = \frac{1}{2}(B^{ik} - B^{ki}) \text{ – антисимметричная часть тензора } B^{ik}.$$

При умножении тензора на скаляр выполняется перемножение всех компонент тензора на скаляр.

Свёртывание – операция, применяемая к смешанному тензору. Пусть дан смешанный тензор например восьмого ранга A_{ijkm}^{prst} . Если выбрать какие-нибудь верхний и нижний индексы и просуммировать компоненты с совпадающими значениями этих индексов, то полученные n^6 чисел будут являться компонентами нового тензора. Операция свёртывания по паре индексов понижает ранг исходного тензора на два.

Внешним произведением двух тензоров является тензор с компонентами

$$C_{ijkm}^{prst} = A_{ij}^{pr} B_{km}^{st}. \quad (4.40)$$

Выражение (4.40) показывает, что внешнее произведение повышает ранг тензора.

Если произведение двух тензоров (4.40) можно свернуть так, что в каждом из слагаемых один или несколько верхних индексов тензора A_{ij}^{pr} совпадут с нижними индексами тензора B_{km}^{st} , то полученные суммы будут служить компонентами нового тензора, который называется *внутренним произведением* тензоров.

Компоненты единичного тензора равны

$$\delta_i^k = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k \\ 0, & \text{если } i \neq k \end{cases}. \quad (4.41)$$

4.9. Релятивистские действия и функция Лагранжа

При исследовании движения материальной точки часто применяется принцип наименьшего действия Гамильтона, который формулируется следующим образом: *для любой механической системы существует такой интеграл S, называемый действием, который для действительного движения имеет минимум и вариация δS , следовательно, равна нулю.*

Интеграл S не должен зависеть от выбора инерциальной системы отсчёта. Он должен быть инвариантом относительно преобразований Лоренца. Отсюда следует, что он должен быть взят от скаляра. Скаляром, инвариантным

преобразованиям Лоренца является интервал s . Действие для свободно движущейся точки имеет вид

$$S = -\alpha \int_a^b ds, \quad (4.42)$$

где α – некоторая постоянная, характеризующая тело, и интеграл берётся вдоль мировой линии между событиями a и b в моменты времени t_1 и t_2 .

Действие можно также представить в виде интеграла по времени

$$S = -\alpha \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial s}{\partial t} dt = \int_{t_1}^{t_2} L_r dt, \quad (4.43)$$

где L_r – релятивистская функция Лагранжа. Из (4.26) следует, что

$$\frac{ds}{dt} = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (4.44)$$

Подставляя (4.44) в (4.43) и сравнивая интегралы, находим

$$L_r = \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx -\alpha c + \frac{\alpha v^2}{2c}. \quad (4.45)$$

При $c \rightarrow \infty$ функция Лагранжа должна переходить в классический вид

$$L = \frac{m_0 v^2}{2}. \quad (4.46)$$

Постоянный член в функции Лагранжа αc не влияет на вывод дифференциальных уравнений движения точки, поэтому может быть опущен. Тогда сравнивая (4.46) с (4.45), получим

$$\alpha = m_0 c. \quad (4.47)$$

Подставляя (4.47) в (4.42) и (4.43) получаем формулы для вычисления релятивистского действия

$$\left. \begin{aligned} S &= -m_0 c \int_a^b ds; \\ S &= -m_0 c \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial s}{\partial t} dt. \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

Подставив (4.47) в (4.45) находим выражение для релятивистской функции Лагранжа

$$L_r = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (4.49)$$

4.10. Сведения из общей теории относительности

4.10.1. Принцип эквивалентности

Общая теория относительности (или теория тяготения) была создана Эйнштейном в 1915 г. Гравитационные поля обладают следующим основным

свойством [11]. Все тела вне зависимости от их массы движутся в них (при одинаковых начальных условиях) с одним и тем же ускорением. Это свойство позволило Эйнштейну провести аналогию между движением тел в гравитационном поле и движением тел в неинерциальной системе отсчёта при отсутствии гравитационного поля. По идее Эйнштейна неинерциальная система отсчёта эквивалентна некоторому гравитационному полю. Кроме того, Эйнштейн постулировал, что не только механические, но и вообще все физические процессы в поле тяготения и в ускоренной неинерциальной системе (в отсутствие тяготения) протекают по одинаковым законам. Этот принцип называется «сильным принципом эквивалентности», в отличие от «слабого принципа эквивалентности», относящегося только к законам механики [18].

В инерциальной (галилеевой) системе отсчёта квадрат интервала между двумя бесконечно близкими событиями равен

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = \\ &= g_{ik}^{(0)} dx^i dx^k, \end{aligned} \quad (4.50)$$

где $g_{00}^{(0)} = 1$, $g_{11}^{(0)} = g_{22}^{(0)} = g_{33}^{(0)} = -1$, $g_{ik}^{(0)} = 0$ при $i \neq k$.

При переходе в неинерциальную систему отсчёта, например, в равномерно вращающуюся систему координат по формулам

$$x = x' \cos \Omega t - y' \sin \Omega t, \quad y = x' \sin \Omega t + y' \cos \Omega t, \quad z = z'$$

где Ω – угловая скорость вращения вокруг оси z , интервал примет вид

$$ds^2 = [c^2 - \Omega^2(x'^2 + y'^2)] dt^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 + 2\Omega y' dx' dt - 2\Omega x' dy' dt \quad (4.51)$$

или в общей квадратичной форме

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k. \quad (4.52)$$

Из (4.51) видно, что в неинерциальной системе координат коэффициенты квадратичной формы g_{ik} являются уже функциями пространственных координат x^1, x^2, x^3 и временной координаты x^0 . Таким образом, четырёхмерная система координат при использовании неинерциальной системы отсчёта является криволинейной. Компоненты g_{ik} определяют все свойства геометрии в заданной криволинейной системе координат (определяется метрика пространства-времени). Тензор второго ранга с компонентами g_{ik} удовлетворяет трём требованиям.

Каждая компонента является действительной функцией координат с непрерывными частными производными.

$$g_{ik} = g_{ki}.$$

$$\det[g_{ik}] \neq 0.$$

Ковариантный тензор g_{ik} (метрический тензор) и контравариантный тензор g^{ik} называются *фундаментальными тензорами* риманова пространства. Они связаны между собой соотношением

$$g^{ik} g_{kq} = \delta_q^i. \quad (4.53)$$

При помощи фундаментальных тензоров одни и те же тензоры могут быть представлены как в контра-, так и ковариантных компонентах и в смешанных компонентах. Например:

$$A^i = g^{ik} A_k; \quad A_i = g_{ik} A^k; \quad (4.54)$$

$$A^{ik} = g^{ip} g^{kq} A_{pq}; \quad A^i_k = g^{ip} A_{pk}. \quad (4.55)$$

4.10.2. Дифференцирование тензоров

В прямоугольных галилеевых координатах дифференциалы dA^i вектора (тензора 1-го ранга) A^i образуют вектор. Производные по координатам от компонент вектора также образуют вектор. В криволинейных координатах этого не происходит потому, что в разных точках пространства векторы преобразуются по-разному, так как производные в формуле (4.33) являются функциями координат. Пусть обратное относительно (4.33) преобразование контрвариантного вектора имеет вид

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k. \quad (4.56)$$

Дифференцируя это выражение, получим

$$dA^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dA'^k + A'^k \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^i \partial x^p} dx^p. \quad (4.57)$$

Из (4.57) следует, что дифференциалы контравариантных векторов в системе криволинейных координат преобразуются не как векторы (то же самое относится и к дифференциалам ковариантных векторов). В инерциальных системах отсчёта производные в (4.56) – линейные функции, и вторые производные от них равны нулю, поэтому дифференциалы преобразуются как векторы.

Для получения дифференциала, являющегося вектором в криволинейных координатах, требуется, чтобы оба вычитаемых вектора находились в одной точке пространства [11]. Необходимо перенести один из двух бесконечно близких векторов в точку расположения другого вектора и определить разность обоих векторов. Операция переноса должна быть определена так, чтобы в галилеевых координатах разность векторов совпадала с обычным дифференциалом dA^i . Такой перенос в галилеевых координатах есть не что иное, как перенесение вектора параллельно самому себе, при этом компоненты вектора изменяться не будут. В общем случае, при параллельном переносе вектора в криволинейных координатах компоненты его изменятся [8].

Пусть в точке с координатами x^i есть вектор A^i . В соседней точке $x^i + dx^i$ он равен $A^i + dA^i$. При параллельном переносе в криволинейном пространстве вектора A^i в точку $x^i + dx^i$ его компоненты изменятся на величину δA^i . Тогда разность между двумя векторами, находящимися в одной точке, DA^i равна

$$DA^i = dA^i - \delta A^i. \quad (4.58)$$

При бесконечно малом переносе изменение компонент вектора δA^i зависит линейно от величин самих компонент, поэтому можно записать

$$\delta A^i = -\Gamma_{kp}^i A^k dx^p, \quad (4.59)$$

где Γ_{kp}^i – функции координат, вид которых зависит от выбора системы координат. Величины Γ_{kp}^i называются символами Кристоффеля второго рода или коэффициентами связности. Кроме символов Кристоффеля второго рода используются ещё символы Кристоффеля первого рода. Они связаны между собой соотношениями

$$\Gamma_{i,kp} = g_{im} \Gamma_{kp}^m \quad (4.60)$$

и обратный переход запишется следующим образом

$$\Gamma_{kp}^i = g^{im} \Gamma_{m,kp}. \quad (4.61)$$

Подставляя (4.59) в (4.58), найдём формулу для вычисления дифференциала контравариантного вектора

$$DA^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^p} + \Gamma_{kp}^i A^k \right) dx^p. \quad (4.62)$$

Аналогично находится дифференциал ковариантного вектора

$$DA_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^p} - \Gamma_{ip}^k A_k \right) dx^p. \quad (4.63)$$

Выражения в скобках являются тензорами, так как умноженные на вектор dx^p они снова дают вектор. Они обобщают понятие производной от вектора по криволинейным координатам. Эти тензоры называются ковариантными производными векторов A^i и A_i и обозначаются следующим образом

$$A^i{}_{;p} = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^p} + \Gamma_{kp}^i A^k \right); \quad (4.64)$$

$$A_{i;p} = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^p} - \Gamma_{ip}^k A_k \right). \quad (4.65)$$

Рассмотрим контравариантный тензор второго ранга, полученный путём перемножения двух контравариантных векторов. Требуется определить ковариантную производную от этого тензора. При бесконечно малом параллельном переносе изменение тензора запишется следующим образом

$$\delta(A^i B^k) = A^i \delta B^k + B^k \delta A^i = -A^i \Gamma_{pm}^k B^p dx^m - B^k \Gamma_{pm}^i A^p dx^m.$$

Вследствие линейности этого преобразования оно справедливо для любого тензора A^{ik} :

$$\delta A^{ik} = -\left(A^{im} \Gamma_{mp}^k + A^{mk} \Gamma_{mp}^i \right) dx^p. \quad (4.66)$$

Подставляя (4.66) в выражение для дифференциала контравариантного тензора

$$DA^{ik} = dA^{ik} - \delta A^{ik} = A^{ik}{}_{;p} dx^p, \quad (4.67)$$

получим ковариантную производную контравариантного тензора A^{ik}

$$A^{ik}_{;p} = \frac{\partial A^{ik}}{\partial x^p} + \Gamma^i_{mp} A^{mk} + \Gamma^k_{mp} A^{im}. \quad (4.68)$$

Аналогично находятся ковариантные производные смешанного и ковариантного тензоров

$$A^i_{k;p} = \frac{\partial A^i_k}{\partial x^p} - \Gamma^m_{kp} A^i_m + \Gamma^i_{mp} A^m_k; \quad (4.69)$$

$$A_{ik;p} = \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^p} - \Gamma^m_{ip} A_{mk} - \Gamma^m_{kp} A_{im}. \quad (4.70)$$

С учетом (4.67) имеют место следующие правила дифференцирования тензоров [7]

$$\left. \begin{aligned} D\varphi &= \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} dx^i; \\ D(A^{ik} + B^{pq}) &= DA^{ik} + DB^{pq}; \\ D(A^{ik} B^{pq}) &= A^{ik} DB^{pq} + B^{pq} DA^{ik}; \\ D(\varphi A^{ik}) &= A^{ik} D\varphi + \varphi DA^{ik}. \end{aligned} \right\} \quad (4.71)$$

4.10.3. Связь символов Кристоффеля с метрическим тензором

Приведём доказательство того, что ковариантная производная от метрического тензора равна нулю. Дифференцируя уравнение (4.54), получим

$$DA_i = g_{ik} DA^k + A^k Dg_{ik}. \quad (4.72)$$

Но так как дифференциал является вектором, то имеет место соотношение

$$DA_i = g_{ik} DA^k. \quad (4.73)$$

Сравнивая (4.72) с (4.73), вследствие произвольности вектора A^k , приходим к выводу, что

$$Dg_{ik} = 0$$

или

$$g_{ik;p} dx^p = 0.$$

Откуда следует теорема Риччи

$$g_{ik;p} = 0 \quad (4.74)$$

Применяя формулу определения ковариантной производной (4.70) с учётом (4.60), запишем

$$g_{ik;p} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^p} - g_{mk} \Gamma^m_{ip} - g_{im} \Gamma^m_{kp} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^p} - \Gamma_{k,ip} - \Gamma_{i,kp} = 0. \quad (4.75)$$

Выпишем производные, переставляя индексы i, k, p

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^p} = \Gamma_{k,ip} + \Gamma_{i,kp}; \quad \frac{\partial g_{pi}}{\partial x^k} = \Gamma_{i,kp} + \Gamma_{p,ik}; \quad -\frac{\partial g_{kp}}{\partial x^i} = -\Gamma_{p,ki} - \Gamma_{k,pi}. \quad (4.76)$$

Из полусуммы равенств (4.76) найдем

$$\Gamma_{i,kp} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{pi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kp}}{\partial x^i} \right). \quad (4.77)$$

Принимая во внимание (4.61), также запишем

$$\Gamma_{kp}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{mp}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kp}}{\partial x^m} \right). \quad (4.78)$$

Формулы (4.77), (4.78) выражают связь символов Кристоффеля с метрическим тензором.

Выведем формулы для вычисления упрощенных символов Кристоффеля и производной от вектора, которые потребуются при выводе уравнения Эйнштейна.

Дифференциал dg определителя g , составленного из компонент тензора g_{ik} , можно получить, взяв дифференциал от каждой компоненты тензора и умножив её на соответствующий минор. Но компоненты тензора g^{ik} , обратного тензору g_{ik} , равны минорам определителя из величин g_{ik} , делённым на этот определитель. Поэтому миноры определителя равны $g g^{ik}$. Тогда

$$dg = g g^{ik} dg_{ik} = g g_{ik} dg^{ik}.$$

Отсюда

$$g^{ik} dg_{ik} = g_{ik} dg^{ik} = \frac{dg}{g}. \quad (4.79)$$

Используя (4.78), можно записать

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^m} \right).$$

Если поменять местами индексы m и i в третьем и первом членах в скобках, то эти члены сократятся. Тогда

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2} g^{im} \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k},$$

или с учётом (4.79)

$$\Gamma_{ki}^i = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial x^k} = \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^k}. \quad (4.80)$$

Из выражений (4.64) и (4.80) имеем

$$A^{i; i} = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + \Gamma_{pi}^i A^p = \frac{\partial A^i}{\partial x^i} + A^p \frac{\partial \ln \sqrt{-g}}{\partial x^p}$$

и окончательно

$$A^{i; i} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} A^i)}{\partial x^i}. \quad (4.81)$$

4.10.4. Движение частицы в гравитационном поле

Движение частицы в специальной теории относительности определяется принципом наименьшего действия (4.48)

$$\delta S = -m_0 c \delta \int ds = 0. \quad (4.82)$$

Согласно этому принципу в отсутствии гравитационного поля частица движется равномерно и прямолинейно. В гравитационном поле движение частицы определяется тем же принципом наименьшего действия (4.82), так как гравитационное поле проявляется только в изменении метрики пространства-времени, то есть в изменении выражения ds через dx^i . Частица движется в гравитационном поле по экстремальной *геодезической* линии четырёхмерного пространства неравномерно по кривой линии. Обобщим дифференциальные уравнения свободного движения частицы в специальной теории относительности. Для свободно движущейся частицы в галилеевой системе отсчёта $du^i/ds = 0$ или $du^i = 0$. В системе криволинейных координат это уравнение обобщается в

$$Du^i = 0. \quad (4.83)$$

Выполним ковариантное дифференцирование вектора скорости согласно (4.62), получим

$$Du^i = \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^p} + \Gamma_{kp}^i u^k \right) dx^p = du^i + \Gamma_{kp}^i u^k dx^p = 0. \quad (4.84)$$

Разделив (4.84) на ds , с учётом (4.28) и (4.29), найдём

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kp}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^p}{ds} = 0. \quad (4.85)$$

Уравнение (4.85) и есть искомое дифференциальное уравнение движения. В то же время оно является дифференциальным уравнением геодезической линии, по которой свободно движется частица. Движение частицы в гравитационном поле определяется символами Кристоффеля Γ_{kp}^i . Вторая производная $d^2 x^i/ds^2$ является четырёхмерным ускорением. Величину $-m_0 \Gamma_{kp}^i u^k u^p$ можно назвать четырёхмерной силой, при этом тензор g_{ik} (входящий в Γ_{kp}^i) играет роль потенциалов гравитационного поля.

В классической механике движение частицы в гравитационном поле определяется функцией Лагранжа, которая после прибавления к ней постоянной $-m_0 c^2$ имеет вид

$$L = -m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2} + m_0 W, \quad (4.86)$$

где W – потенциал.

Тогда для нерелятивистского действия запишем формулу

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = -m_0 c \int_{t_1}^{t_2} \left(1 - \frac{W}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} \right) c dt. \quad (4.87)$$

Из сравнения (4.87) со второй формулой (4.48) для релятивистского действия видно, что интервал равен

$$ds = \left(1 - \frac{W}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2} \right) c dt. \quad (4.88)$$

Возводя в квадрат выражение (4.88), разлагая его в ряд и пренебрегая малыми членами, получим

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2W}{c^2}\right) c^2 dt^2 - d\vec{r}^2, \quad (4.89)$$

где $d\vec{r} = \vec{v}dt$.

4.10.5. Тензор кривизны

В кривом четырёхмерном пространстве бесконечно малый параллельный перенос вектора есть перенос, при котором компоненты вектора не изменяются в галилеевой (прямоугольной) системе координат, в данном бесконечно малом элементе объёма.

Пусть $x^i = x^i(s)$ – параметрическое уравнение кривой, где s – длина дуги отсчитываемая от некоторой точки. Тогда вектор $u^i = dx^i/ds$ есть единичный вектор касательный к кривой. Если кривая является геодезической линией, то при передвижении вдоль неё вектор касательной переносится параллельно самому себе. При параллельном переносе двух векторов угол между ними остаётся неизменным. Поэтому, при параллельном переносе какого-либо вектора вдоль геодезической линии угол между этим вектором и касательным к линии вектором останется неизменным. Однако, если параллельно перемещать вектор по замкнутому контуру в кривом пространстве, то он возвратившись в начальную точку не совпадёт с самим собой (рис. 4.4).

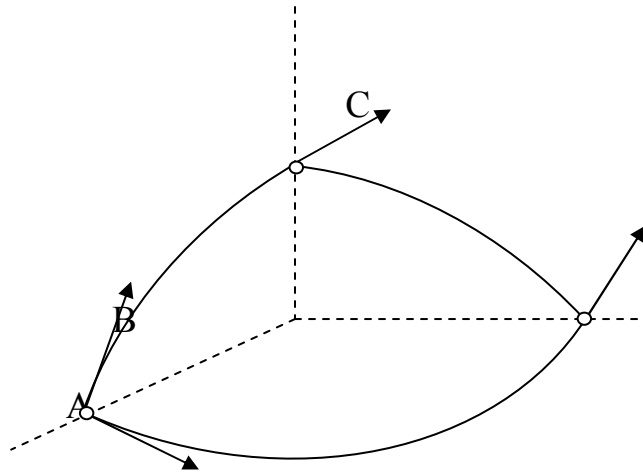


Рис. 4.4. Перемещение вектора по геодезическим линиям АВ, ВС, СА параллельно самому себе

Выразить изменение вектора при параллельном переносе вдоль бесконечно малого замкнутого контура можно следующим образом

$$\Delta A_k = \oint \delta A_k = \oint \Gamma_{kp}^i A_i dx^p. \quad (4.90)$$

Применив к (4.90) обобщенную теорему Стокса о замене интеграла по контуру на интеграл по поверхности [11], получим следующее

$$\oint A_i dx^i = \int \frac{\partial A_i}{\partial x^k} df^{ki} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) df^{ki}.$$

По малости контура, заменив дифференциал приращением, получим

$$\begin{aligned}\Delta A_k &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\Gamma_{km}^i A_i)}{\partial x^p} - \frac{\partial(\Gamma_{kp}^i A_i)}{\partial x^m} \right) \Delta f^{pm} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^p} A_i - \frac{\partial \Gamma_{kp}^i}{\partial x^m} A_i + \Gamma_{km}^i \frac{\partial A_i}{\partial x^p} - \Gamma_{kp}^i \frac{\partial A_i}{\partial x^m} \right) \Delta f^{pm} .\end{aligned}\quad (4.91)$$

Внутри бесконечно малого контура изменение вектора A_i с точностью до величин первого порядка можно записать в виде следующего выражения

$$\delta A_i = \Gamma_{ip}^n A_n dx^p .$$

Отсюда две последние производные в (4.91) записываются в виде

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^p} \approx \frac{\delta A_i}{dx^p} \approx \Gamma_{ip}^n A_n ; \quad \frac{\partial A_i}{\partial x^m} \approx \Gamma_{im}^n A_n .\quad (4.92)$$

Подставив (4.92) в (4.91) и переименовав немые (одинаковые верхние и нижние) индексы тензоров, получим

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^p} - \frac{\partial \Gamma_{kp}^i}{\partial x^m} + \Gamma_{np}^i \Gamma_{km}^n - \Gamma_{nm}^i \Gamma_{kp}^n \right) A_i \Delta f^{pm} ,\quad (4.93)$$

или в краткой форме

$$\Delta A_k = \frac{1}{2} R_{kpm}^i A_i \Delta f^{pm} ,\quad (4.94)$$

где

$$R_{kpm}^i = \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^p} - \frac{\partial \Gamma_{kp}^i}{\partial x^m} + \Gamma_{np}^i \Gamma_{km}^n - \Gamma_{nm}^i \Gamma_{kp}^n .\quad (4.95)$$

Тензор R_{kpm}^i называется тензором Римана – Кристоффеля или тензором кривизны. Если тензор кривизны равен нулю, то пространство плоское, иначе – искривлённое.

Тензор кривизны обладает свойствами симметрии. С помощью метрического тензора перейдём от смешанных компонент к ковариантным

$$R_{ikpm} = g_{in} R_{kpm}^n .\quad (4.96)$$

Выполнив преобразования (4.96), получим

$$R_{ikpm} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^k \partial x^p} + \frac{\partial^2 g_{kp}}{\partial x^i \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{ip}}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^p} \right) + g_{nq} \left(\Gamma_{kp}^n \Gamma_{im}^q - \Gamma_{km}^n \Gamma_{ip}^q \right) .\quad (4.97)$$

Из (4.97) очевидны следующие свойства симметрии

$$R_{ikpm} = -R_{kipm} = -R_{ikmp} ;\quad (4.98)$$

$$R_{ikpm} = R_{pmik} .\quad (4.99)$$

Отсюда следует, что тензор кривизны антисимметричен по каждой из пар индексов ik и pm и симметричен при перестановке этих пар друг с другом.

Используя свойства симметрии, можно перейти от тензора четвертого ранга к тензору второго ранга, который называется *тензором Риччи*

$$R_{ik} = g^{pm} R_{pimk} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^p}{\partial x^p} - \frac{\partial \Gamma_{ip}^p}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^p \Gamma_{pm}^m - \Gamma_{ip}^m \Gamma_{km}^p. \quad (4.100)$$

Этот тензор симметричен, т. е.

$$R_{ik} = R_{ki}.$$

Упростив R_{ik} , получим инвариант

$$R = g^{ik} R_{ik} = g^{ip} g^{km} R_{ikpm}, \quad (4.101)$$

который называется скалярной кривизной пространства.

4.10.6. Тензор энергии-импульса

Рассмотрим систему, для которой интеграл действия имеет вид

$$S = \int \Lambda \left(q, \frac{\partial q}{\partial x^i} \right) dV dt = \frac{1}{c} \int \Lambda d\Omega, \quad (4.102)$$

где Λ – функция от величин q , определяющих состояние системы.

Интеграл по пространству в (4.102) есть функция Лагранжа, поэтому Λ является производной от функции Лагранжа. Уравнения поля (уравнения движения) определяются на основании принципа наименьшего действия при помощи варьирования S . Обозначив для краткости производную $\partial q / \partial x^i = q_{,i}$, найдем

$$\delta S = \frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \delta q_{,i} \right) d\Omega =$$

$$\frac{1}{c} \int \left[\frac{\partial \Lambda}{\partial q} \delta q + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \delta q \right) - \delta q \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} \right] d\Omega = 0.$$

Второй член под интегралом исчезает при интегрировании по всему пространству. Тогда уравнение поля имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,i}} - \frac{\partial \Lambda}{\partial q} = 0. \quad (4.103)$$

Имеет место следующее соотношение

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial \Lambda}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial x^i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \frac{\partial q_{,k}}{\partial x^i}.$$

Подставляя в это соотношение (4.103), находим

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \right) q_{,i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \frac{\partial q_{,i}}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k} \left(q_{,i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{,k}} \right).$$

Если сделать замену в левой части равенства

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial x^i} = \delta_i^k \frac{\partial \Lambda}{\partial x^k}$$

и ввести обозначение

$$T_i^k = q_{;i} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{;k}} - \delta_i^k \Lambda, \quad (4.104)$$

то получим

$$\frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} = 0. \quad (4.105)$$

Тензор T_i^k и есть тензор энергии-импульса. Если имеется несколько величин $q^{(p)}$, то формула (4.104) примет вид

$$T_i^k = \sum_p q_{;i}^{(p)} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_{;k}^{(p)}} - \delta_i^k \Lambda. \quad (4.106)$$

Получим формулу для вариации действия в криволинейных координатах, которая потребуется в дальнейшем.

Формула (4.102) записана для галилеевых координат. В случае использования криволинейных координат этот интеграл представляется следующим выражением

$$S = \frac{1}{c} \int \Lambda \sqrt{-g} d\Omega. \quad (4.107)$$

Найдём вариацию действия

$$\delta S = \frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial g^{ik}} \delta g^{ik} + \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^p}} \delta \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^p} \right) d\Omega =$$

$$\frac{1}{c} \int \left(\frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^p} \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^p}} \right) \delta g^{ik} d\Omega.$$

Введём обозначение

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g} T_{ik} = \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial}{\partial x^p} \frac{\partial \sqrt{-g} \Lambda}{\partial \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^p}}.$$

Тогда формула вариации действия материи принимает вид

$$\delta S = \frac{1}{2c} \int T_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega. \quad (4.108)$$

4.10.7. Уравнения тяготения Эйнштейна

Уравнения тяготения Эйнштейна находятся из принципа наименьшего действия $\delta S + \delta S_g = 0$, где δS – вариация действия материи (4.108), а δS_g – вариация действия гравитационного поля. Действие гравитационного поля представляется в виде [11]

$$S_g = \int R \sqrt{-g} d\Omega, \quad (4.109)$$

где R – кривизна четырёхмерного пространства (4.101).

Вычислим вариацию

$$\delta S_g = \delta \int g^{ik} R_{ik} \sqrt{-g} d\Omega = \int \left(R_{ik} \sqrt{-g} \delta g^{ik} + R_{ik} g^{ik} \delta \sqrt{-g} + g^{ik} \sqrt{-g} \delta R_{ik} \right) d\Omega. \quad (4.110)$$

Продифференцировав это выражение с учетом (4.79), получим

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2\sqrt{-g}} \delta g = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{ik} \delta g^{ik}. \quad (4.111)$$

Подставляя (4.111) в (4.110), находим

$$\delta S_g = \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega + \int g^{ik} \delta R_{ik} \sqrt{-g} d\Omega. \quad (4.112)$$

Для вычисления δR_{ik} воспользуемся локальной системой координат, где все $\Gamma_{kp}^i = 0$. Из выражения (4.100) следует, что

$$g^{ik} \delta R_{ik} = g^{ik} \left(\frac{\partial}{\partial x^p} \delta \Gamma_{ik}^p - \frac{\partial}{\partial x^k} \delta \Gamma_{ip}^p \right) = g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^p} \delta \Gamma_{ik}^p - g^{ip} \frac{\partial}{\partial x^p} \delta \Gamma_{ik}^k = \frac{\partial \omega^p}{\partial x^p}, \quad (4.113)$$

где

$$\omega^p = g^{ik} \delta \Gamma_{ik}^p - g^{ip} \delta \Gamma_{pk}^k.$$

Так как ω^p является вектором, то принимая во внимание (4.81), можно записать (4.113) в произвольной системе координат в виде

$$g^{ik} \delta R_{ik} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^p} (\sqrt{-g} \omega^p).$$

Тогда второй интеграл в (4.112) равен

$$\int g^{ik} \delta R_{ik} \sqrt{-g} d\Omega = \int \frac{\partial \sqrt{-g} \omega^p}{\partial x^p} d\Omega. \quad (4.114)$$

По теореме Гаусса, математическая запись которой имеет следующий вид

$$\oint A^i dS_i = \int \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d\Omega, \quad (4.115)$$

интеграл (4.114) можно преобразовать в интеграл от ω^p по гиперповерхности, охватывающей весь четырёхмерный объём. Так как на пределах интегрирования вариация равна нулю, то член (4.114) исчезает. Тогда вариация действия гравитационного поля равна

$$\delta S_g = -\frac{c^3}{16\pi f} \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega, \quad (4.116)$$

где f – универсальная гравитационная постоянная.

Складывая (4.116) с (4.108), получим

$$-\frac{c^3}{16\pi f} \int \left(R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R - \frac{8\pi f}{c^4} T_{ik} \right) \delta g^{ik} \sqrt{-g} d\Omega = 0.$$

Откуда вследствие произвольности δg^{ik} окончательно найдём

$$R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} R = \frac{8\pi f}{c^4} T_{ik} \quad (4.117)$$

или умножая левую и правую часть на контравариантный метрический тензор g^{km} , получаем уравнения в смешанных компонентах

$$R_i^m - \frac{1}{2} \delta_i^m R = \frac{8\pi f}{c^4} T_i^m. \quad (4.118)$$

Уравнения гравитационного поля (4.117), (4.118) являются основными уравнениями общей теории относительности и называются *уравнениями Эйнштейна*. Уравнения нелинейные, поэтому для гравитационных полей принцип суперпозиции несправедлив. Он справедлив приближённо лишь для слабых полей, например для гравитационного поля в классической механике.

Уравнения Эйнштейна являются системой дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Фактически проинтегрировать их, чтобы найти метрический тензор g_{ik} по тензору энергии-импульса T_{ik} очень сложно, так как тензор кривизны R_{ik} выражен через g_{ik} , $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^p}$, $\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^p \partial x^m}$. Поэтому рассмотрим только более простой случай, когда поле тяготения создаётся массами, сосредоточенными в малой области, за пределами которой поле можно считать центрально-симметрическим.

4.10.8. Центрально-симметричное гравитационное поле

В центрально-симметричном поле метрика пространства времени, т. е. выражение для интервала ds , одинакова во всех точках, расположенных на равном расстоянии от центра. Если воспользоваться сферическими пространственными координатами r , φ , λ , то выражение для квадрата интервала в общем виде можно представить следующим образом [9]

$$ds^2 = f_0(r, t) dt^2 + f_1(r, t) dr^2 + f_2(r, t) (d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2) + f_3(r, t) dr dt, \quad (4.119)$$

где f_0, f_1, f_2, f_3 – функции радиуса вектора и времени.

Координату r и время t можно задать таким образом, чтобы $f_3(r, t) = 0$ и $f_2(r, t) = -r^2$. Функции f_0 и f_1 удобно представить в экспоненциальном виде, т. е. $f_0 = e^\alpha c^2$, $f_1 = -e^\beta$, где α и β – функции r и t . Тогда (4.119) запишется выражением

$$ds^2 = e^\alpha c^2 dt^2 - e^\beta dr^2 - r^2 (d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2). \quad (4.120)$$

Если считать, что $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \varphi$, $x^3 = \lambda$, то компонентами метрического тензора будут являться функции

$$g_{00} = e^\alpha, \quad g_{11} = -e^\beta, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \cos^2 \varphi. \quad (4.121)$$

Компонентами контравариантного метрического тензора будут

$$g^{00} = e^{-\alpha}, \quad g^{11} = -e^{-\beta}, \quad g^{22} = -r^{-2}, \quad g^{33} = -r^{-2} \cos^{-2} \varphi. \quad (4.122)$$

С помощью этих значений можно вычислить символы Кристоффеля по формуле (4.78)

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{\dot{\alpha}}{2}; \Gamma_{10}^0 = \frac{\alpha'}{2}; \Gamma_{11}^0 = \frac{\dot{\beta}}{2} e^{\beta-\alpha}; \Gamma_{00}^1 = \frac{\alpha'}{2} e^{\alpha-\beta}; \Gamma_{10}^1 = \frac{\dot{\beta}}{2}; \Gamma_{11}^1 = \frac{\beta'}{2}; \Gamma_{22}^1 = -r e^{-\beta};$$

$$\Gamma_{33}^1 = -r e^{-\beta} \cos^2 \varphi; \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}; \Gamma_{33}^2 = -\sin \varphi \cos \varphi; \Gamma_{23}^3 = \operatorname{tg} \varphi,$$

где точка над буквой обозначает дифференцирование по t , а штрих – дифференцирование по r . Остальные компоненты Γ_{kr}^i равны нулю.

Для составления уравнений Эйнштейна (4.118) необходимо вычислить компоненты тензора кривизны R_k^m по формуле (4.100) с переходом к смешанному тензору. Тогда получим следующие уравнения

$$\frac{8\pi f}{c^4} T_1^1 = -e^{-\beta} \left(\frac{\alpha'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2}; \quad (4.123)$$

$$\frac{8\pi f}{c^4} T_2^2 = \frac{8\pi f}{c^4} T_3^3 = -\frac{1}{2} e^{-\beta} \left(\alpha'' + \frac{\alpha'^2}{2} + \frac{\alpha' - \beta'}{r} - \frac{\alpha' \beta'}{2} \right) + \frac{1}{2} e^{-\alpha} \left(\ddot{\beta} + \frac{\dot{\beta}^2}{2} - \frac{\dot{\beta} \dot{\alpha}}{2} \right); \quad (4.124)$$

$$\frac{8\pi f}{c^4} T_0^0 = -e^{-\beta} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\beta'}{r} \right) + \frac{1}{r^2}; \quad (4.125)$$

$$\frac{8\pi f}{c^4} T_0^1 = -e^{-\beta} \frac{\dot{\beta}}{r}. \quad (4.126)$$

В случае центрально-симметричного поля в пустоте, т. е. вне создающих его масс, тензор энергии импульса (в левой части уравнений) равен нулю. Тогда

$$e^{-\beta} \left(\frac{\alpha'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0; \quad (4.127)$$

$$e^{-\beta} \left(\frac{\beta'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0; \quad (4.128)$$

$$\dot{\beta} = 0. \quad (4.129)$$

Уравнение (4.124) можно не выписывать, так как оно является следствием уравнений (4.123), (4.125) и (4.126).

Из (4.129) видно, что β не зависит от времени. Складывая (4.127) с (4.128) получаем

$$\alpha' + \beta' = 0. \quad (4.130)$$

Интегрируя (4.130) и приравнявая константы интегрирования к нулю путём преобразования времени, получим

$$\alpha = -\beta. \quad (4.131)$$

Сделаем замену переменных в (4.128). Пусть $\gamma = e^{-\beta} - 1$, тогда $\gamma' = -e^{-\beta} \beta'$. Подставляя в уравнение эти значения, найдём

$$\frac{\gamma'}{\gamma} = -\frac{1}{r}. \quad (4.132)$$

Проинтегрировав (4.132), получим

$$\ln \gamma = \ln \frac{1}{r} + \ln \text{const}$$

или

$$e^{-\beta} = e^{\alpha} = 1 + \frac{\text{const}}{r}. \quad (4.133)$$

Постоянную в (4.133) можно выразить через массу тела. Функция e^{α} является компонентом метрического тензора g_{00} . Соответствующий компонент для интервала в формуле (4.89) равен

$$g_{00} = 1 - \frac{2W}{c^2},$$

где $W = \frac{fM}{r}$ – ньютоновский потенциал, M – масса тела, создающего гравитационное поле. Тогда целесообразно в качестве константы принять

$$\text{const} = -\frac{2fM}{c^2}. \quad (4.134)$$

Постоянная имеет размерность длины, и её называют гравитационным радиусом

$$r_g = \frac{2fM}{c^2}. \quad (4.135)$$

Для Солнца $r_g = 3$ км, для Земли $R_g = 0.9$ см.

Подставляя найденные функции в (4.119), окончательно найдём пространственно-временную метрику в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2fM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2fM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 (d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\lambda^2). \quad (4.136)$$

Это решение уравнений Эйнштейна для случая центрально-симметричного поля было найдено К. Шварцшильдом в 1916 г.

Преобразуем выражение (4.136) так, чтобы вместо дифференциалов сферических координат стояли дифференциалы прямоугольных декартовых координат. Для этого используем подстановку

$$r = \rho \left(1 + \frac{r_g}{4\rho}\right)^2. \quad (4.137)$$

Дифференцируя (4.137), получим

$$dr = d\rho \left(1 + \frac{r_g}{4\rho}\right) \left(1 - \frac{r_g}{4\rho}\right). \quad (4.138)$$

С учётом (4.137) имеет место следующее соотношение

$$1 - \frac{2fM}{c^2 r} = 1 - \frac{r_g}{r} = \frac{\left(1 - \frac{r_g}{4\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{r_g}{4\rho}\right)^2}. \quad (4.139)$$

Подставляя полученные выражения в формулу (4.136), найдём

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{r_g}{4\rho}\right)^2}{\left(1 + \frac{r_g}{4\rho}\right)^2} c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{4\rho}\right)^4 (d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + \rho^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2). \quad (4.140)$$

Прямоугольные координаты связаны со сферическими координатами соотношениями

$$x = \rho \cos \varphi \cos \lambda; \quad y = \rho \cos \varphi \sin \lambda; \quad z = \rho \sin \varphi. \quad (4.141)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Продифференцируем эти формулы} \\ dx = d\rho \cos \varphi \cos \lambda - \rho \sin \varphi \cos \lambda d\varphi - \rho \cos \varphi \sin \lambda d\lambda, \\ dy = d\rho \cos \varphi \sin \lambda - \rho \sin \varphi \sin \lambda d\varphi + \rho \cos \varphi \cos \lambda d\lambda, \\ dz = d\rho \sin \varphi + \rho \cos \varphi d\varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4.142)$$

Если правые и левые части уравнений (4.142) возвести в квадрат и сложить, то найдём соотношение

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + \rho^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2. \quad (4.143)$$

Подставляя (4.143) в (4.140), получим

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{r_g}{2\rho} + \frac{r_g^2}{16\rho^2}\right)}{\left(1 + \frac{r_g}{2\rho} + \frac{r_g^2}{16\rho^2}\right)} c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{2\rho} + \frac{r_g^2}{16\rho^2}\right)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4.144)$$

Так как $\rho \gg r_g$, то для многих практических задач можно использовать и приближённую формулу

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} + \frac{r_g^2}{2r^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{r}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4.145)$$

4.11. Приложение теории пространственно-временных преобразований в астрономии и геодезии

4.11.1. Звёздная абберация

Абберация – это отклонение светового луча от действительного направления на звезду вызванное тем, что за время τ , которое требуется свету для прохождения от объектива оптического инструмента до перекрестия сетки нитей, само перекрестие сместится на длину $V\tau$, где V – скорость движения

наблюдателя (рис. 4.5). Для наблюдения светила в центре сетки нитей трубу инструмента нужно заранее повернуть зрительную трубу на угол абберации $\Delta\theta$. Формула для вычисления абберации получена Брадлеем. Она имеет вид [9]

$$\Delta\theta = \frac{V}{c} \sin u - \frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \sin 2u, \quad (4.146)$$

где u – угол между направлением вектора скорости наблюдателя и направлением на истинное место звезды.

Получим более точное выражение для абберации на основе формул релятивистской механики. Оси координат расположим в неподвижной и подвижной системах координат так, чтобы вектор скорости света в неподвижной системе имел компоненты $v_x = c \cos\theta$, $v_y = c \sin\theta$, $v_z = 0$, а в подвижной системе $v'_x = c \cos\theta'$, $v'_y = c \sin\theta'$, $v'_z = 0$. Оси x и x' совместим с вектором скорости движения наблюдателя. Тогда имеем следующие соотношения

$$\sin \theta = \frac{v_y}{c}; \quad \cos \theta = \frac{v_x}{c}; \quad (4.146)$$

$$\sin \theta' = \frac{v'_y}{c}; \quad \cos \theta' = \frac{v'_x}{c}. \quad (4.147)$$

Подставим в (4.146) формулы (4.15а). Тогда с учётом (4.147), получим

$$\sin \theta = \sin \theta' \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c} \cos \theta'}; \quad (4.148)$$

$$\cos \theta = \frac{\cos \theta' + \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c} \cos \theta'}. \quad (4.149)$$

Разделив (4.149) на (4.148), найдём

$$\operatorname{ctg} \theta = \frac{\operatorname{ctg} \theta' \left(1 + \frac{V}{c} \sec \theta' \right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}. \quad (4.150)$$

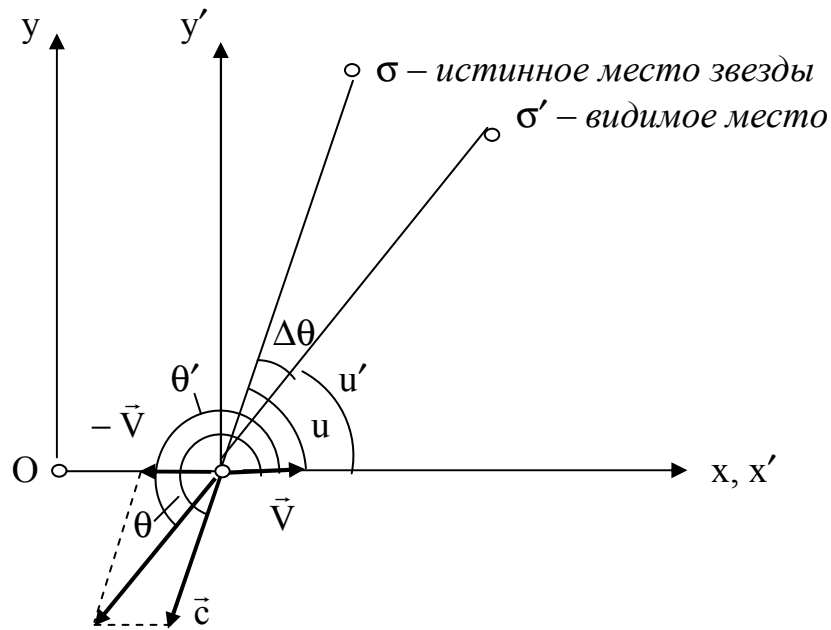


Рис. 4.5. Абберационное смещение $\Delta\theta = \theta - \theta'$

Ограничиваясь членами второго порядка малости относительно $\frac{V}{c}$, формулу (4.150) представим в следующем виде

$$\text{ctg}\theta = \text{ctg}(\theta - \Delta\theta) \left(1 + \frac{V}{c} \sec(\theta - \Delta\theta) \right) \left(1 + \frac{V^2}{2c^2} \right)$$

или

$$\text{ctg}\theta - \text{ctg}(\theta - \Delta\theta) = \frac{V}{c} \sec(\theta - \Delta\theta) + \frac{V^2}{2c^2} \frac{\cos(\theta - \Delta\theta)}{\sin(\theta - \Delta\theta)}.$$

Выразив разность котангенсов в левой части через синусы и выполнив несложные преобразования, найдём

$$\sin \Delta\theta = -\frac{V}{c} \sin \theta - \frac{V^2}{2c^2} \sin \theta \cos \theta \cos \Delta\theta - \frac{V^2}{2c^2} \sin^2 \theta \sin \Delta\theta.$$

Ограничиваясь членами второго порядка малости, учитывая, что $\theta = 180^\circ + u$ (рис. 4.5), окончательно получим

$$\Delta\theta = \frac{V}{c} \sin u - \frac{V^2}{4c^2} \sin 2u. \quad (4.151)$$

Из сравнения классической формулы Брадлея (4.146) с полученной релятивистской формулой (4.151) видно, что их разность не превышает величины $\frac{V^2}{4c^2} \sin 2u$. Если $\frac{V}{c} = 0.0001$, то разность не будет превосходить $0.0005''$ [9].

4.11.2. Шкалы времени

В настоящее время для решения задач астрономии и космической геодезии, на основе принципов теории относительности А. Эйнштейна, введены три шкалы времени [9].

1. Барицентрическое координатное время (ТСВ) – время, которое показывали бы часы, находящиеся в барицентре (центре тяжести) Солнечной системы.

2. Геоцентрическое координатное время (ТСГ) – время, которое показывали бы часы, размещённые в центре масс Земли.

3. Земное время (ТТ) – время, которое показывают часы в точках земной поверхности, расположенных на уровне моря на широте 45° .

Соотношения между шкалами ТСВ и ТСГ можно вывести на основании пространственно-временной метрики К. Шварцшильда. Подставляя (4.135) в (4.145) и обозначив гравитационный параметр Солнца через $\mu_s = f M_s$, где M_s – масса Солнца, запишем

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mu_s}{c^2 r} + \frac{2\mu_s^2}{c^4 r^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2\mu_s}{c^2 r}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4.152)$$

Умножим и разделим второй член в правой части формулы (4.152) на $c^2 dt^2$ и перенесём его в первый член, пренебрегая слагаемыми, у которых в знаменателе есть c^4 . Поделим левую и правую части на c^2 , извлечем корень и тогда получим формулу связи между элементарными промежутками собственного времени $d\tau$ и координатного времени dt

$$d\tau = \left(1 - \frac{\mu_s}{c^2 r} - \frac{v^2}{2c^2}\right) dt, \quad (4.153)$$

где $v = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt}$ – линейная скорость движения Земли по своей орбите.

Интеграл энергии у невозмущенного движения Земли по эллиптической орбите вокруг Солнца равен

$$v^2 = \frac{2\mu_s}{r} - \frac{\mu_s}{A}, \quad (4.154)$$

где $A = 1.49597870 \cdot 10^{11}$ м – астероническая единица, равная большой полуоси земной орбиты. Подставим (4.154) в (4.153) и получим

$$d\tau = \left(1 - \frac{2\mu_s}{c^2 r} + \frac{\mu_s}{2c^2 A}\right) dt. \quad (4.155)$$

Разложение отношения большой полуоси орбиты к радиус-вектору средней аномалии в ряд имеет вид

$$\frac{A}{r} = 1 + \left(e - \frac{e^3}{8}\right) \cos M + e^2 \cos 2M + \frac{9}{8} e^3 \cos 3M + \dots, \quad (4.156)$$

где M – средняя аномалия, $e = 0.016726$ – эксцентриситет земной орбиты.

Умножая и деля на A второй член правой части равенства (4.155), подставляя туда (4.156) и переходя от дифференциала dt к дифференциалу dM по формулам

$$dt = \frac{dM}{n}; \quad n = \sqrt{\frac{\mu_s}{A^3}}; \quad dt = \frac{dMA^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu_s}},$$

найдем

$$dt = \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\mu_s}{c^2 A}\right) dt - \frac{2\sqrt{\mu_s A}}{c^2} \left[\left(e - \frac{e^3}{8}\right) \cos M + e^2 \cos 2M + \frac{9}{8} e^3 \cos 3M \right] dM. \quad (4.157)$$

Моментом атомного времени синхронизации часов шкал TCB, TCG и TT является $0^h 00^m 00^s$ TAI 1 января 1977 г. Пусть в (4.157) собственным временем τ будет геоцентрическое координатное время TCG, а координатным временем t – барицентрическое координатное время TCB. Тогда после интегрирования (4.157) получим разность, выраженную в секундах

$$TCB - TCG = 1.27942 \cdot 10^{-3} (\text{MJD} - 43144.0) + 1.65844 \cdot 10^{-3} \sin(M - M_0) + \dots, \quad (4.158)$$

где M_0 – средняя аномалия Земли в $0^h 00^m 00^s$ TAI 1 января 1977 г.;

$\text{MJD} = \text{JD} - 2400000.5$ – модифицированная юлианская дата.

Для вывода соотношений между шкалами геоцентрического координатного времени TCG и земного времени TT воспользуемся формулой для интервала (4.88). Разделив правую и левую части (4.88) на скорость света, получим

$$d\tau = \left(1 - \frac{W}{c^2} - \frac{v_{\oplus}^2}{2c^2}\right) dt, \quad (4.159)$$

где W – потенциал Земли, v_{\oplus} – линейная скорость точки на земной поверхности.

Линейная скорость вычисляется по формуле

$$v_{\oplus} = \omega r \cos \Phi,$$

где $\omega = 7.292115 \cdot 10^{-5}$ – угловая скорость вращения Земли, Φ – геоцентрическая широта точки.

В выражении (4.159) потенциал более сложная функция, чем в (4.153). Там потенциал создаётся Солнцем, как точечной массой, и равен μ_s/r .

Примем за фигуру Земли эллипсоид вращения. Тогда с учётом второй зональной гармоники выражение для потенциала Земли примет вид

$$W = \frac{fM}{r} - \frac{fM}{r} J_2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \left(\frac{3}{2} \sin^2 \Phi - \frac{1}{2}\right). \quad (4.160)$$

Пусть в (4.159) собственным временем будет земное время TT, а координатным – геоцентрическое координатное время TCG. Земное время связано с международным атомным временем соотношением

$$TT = \text{TAI} + 32.184^s.$$

После интегрирования (4.159), получим формулу для вычисления разности шкал времени TCG – TT (в секундах), которая накопилась после 1 января 1977 г.

$$TCG - TT = 6.0215 \cdot 10^{-5} (\text{MJD} - 43144.0). \quad (4.161)$$

4.11.3. Временная задержка сигнала в лазерной локации ИСЗ

Пусть с пункта Q на земной поверхности лазерным дальномером излучается световой сигнал до отражателя К, размещенного на ИСЗ. Отразившись, сигнал возвращается снова в пункт Q.

Интервал для светового сигнала равен нулю, поэтому, используя пространственно-временную метрику Шварцшильда, запишем [9]

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mu}{c^2 r} + \frac{2\mu^2}{c^4 r^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2\mu}{c^2 r}\right) dr'^2 = 0, \quad (4.162)$$

где $\mu = fM$ – гравитационный параметр Земли;

$dr'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$ – дифференциал расстояния r' от пункта Q до ИСЗ;

r – расстояние от центра масс Земли до спутника.

Из (4.162), пренебрегая членом в знаменателе которого стоит c^4 , получим дифференциальное уравнение

$$cdt = dr' + \frac{2\mu}{c^2 r} dr'. \quad (4.163)$$

Для решения уравнения (4.163) выразим dr' через dr во втором члене правой части. Рассмотрим прямоугольный треугольник OFK (рис. 4.6), в котором катет ρ является кратчайшим расстоянием от центра масс Земли, до направления лазерного луча. Можно записать следующее соотношение

$$r' + x = \sqrt{r^2 - \rho^2}. \quad (4.164)$$

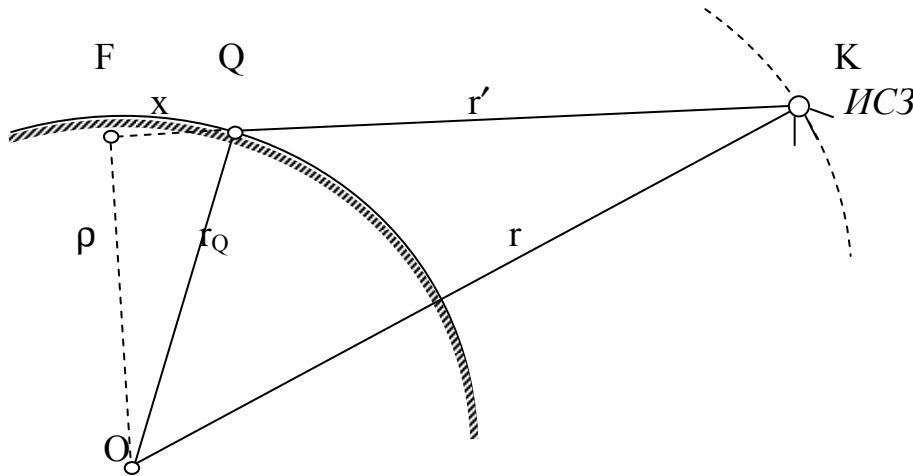


Рис. 4.6. Временная задержка сигнала

Дифференцируя уравнение (4.164), находим

$$dr' = \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}. \quad (4.165)$$

Подставляя (4.165) в дифференциальное уравнение (4.163), получим

$$c(t_K - t_Q) = r' + \frac{2\mu}{c^2} \int_{r_Q}^r \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}. \quad (4.165a)$$

Чтобы вычислить интеграл выражения (4.165a), выполним следующие подстановки

$$z = r + \sqrt{r^2 - \rho^2}; \quad \frac{dz}{z} = \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}.$$

Тогда

$$c(t_K - t_Q) = r' + \frac{2\mu}{c^2} \ln \frac{r + \sqrt{r^2 - \rho^2}}{r_Q + \sqrt{r_Q^2 - \rho^2}}, \quad (4.166)$$

где t_Q – момент времени посылки сигнала с наземного пункта,
 t_K – момент прихода сигнала на ИСЗ.

Из треугольника OFQ

$$x = \sqrt{r_Q^2 - \rho^2}. \quad (4.167)$$

Подставим (4.167) в левую часть (4.164) и, возведя ее в квадрат, получим

$$\sqrt{r^2 - \rho^2} = \frac{r^2 + r'^2 - r_Q^2}{2r'}. \quad (4.168)$$

Подставляя правую часть (4.168) в (4.164), также найдём

$$\sqrt{r_Q^2 - \rho^2} = \frac{r^2 - r'^2 - r_Q^2}{2r'}. \quad (4.169)$$

С учетом (4.168) и (4.169) выражение под логарифмом в правой части выражения (4.166) изменится следующим образом

$$\frac{r + \sqrt{r^2 - \rho^2}}{r_Q + \sqrt{r_Q^2 - \rho^2}} = \frac{(r + r')^2 - r_Q^2}{r^2 - (r' - r_Q)^2} = \frac{(r + r' - r_Q)(r + r' + r_Q)}{(r + r' - r_Q)(r + r_Q - r')} = \frac{r + r_Q + r'}{r + r_Q - r'}.$$

Видно, что исключилась вспомогательная величина ρ . Формула (4.166) примет вид

$$c(t_K - t_Q) = r' + \frac{2\mu}{c^2} \ln \frac{r + r_Q + r'}{r + r_Q - r'}. \quad (4.170)$$

Если рассматривать движение света после отражения от спутника, то получается та же самая формула, только в левой части в скобках будет стоять $t'_Q - t_K$. Тогда из (4.170) получим выражение для вычисления измеренного лазерным дальномером расстояния

$$r' = c\Delta t - \frac{2\mu}{c^2} \ln \frac{r + r_Q + r'}{r + r_Q - r'}, \quad (4.171)$$

где Δt – полуразность моментов посылки и приёма сигнала на пункте Q. При этом r' соответствует моменту отражения сигнала от спутника.

Однако Δt в (4.171) – промежуток координатного времени, а на станции измеряется собственное время. Поэтому необходимо перейти от координатного времени к собственному. Из метрики Шварцшильда связь между этими шкалами времени имеет вид

$$d\tau = \left(1 - \frac{\mu}{c^2 r_Q} - \frac{v_Q^2}{2c^2} \right) dt, \quad (4.172)$$

где v_Q – линейная скорость движения пункта Q.

Выразив dt через $d\tau$ и подставив полученное выражение в (4.171), окончательно найдём

$$r' = c\Delta\tau + \left(\frac{\mu}{c^2 r_Q} + \frac{v_Q^2}{2c^2} \right) c\Delta\tau - \frac{2\mu}{c^2} \ln \frac{r + r_Q + r'}{r + r_Q - r'}. \quad (4.173)$$

4.11.4. Доплеровское смещение частоты

Пусть имеется трое часов. Одни расположены и покоятся в центре масс Земли в точке O, вторые движутся вместе с пунктом Q, а третьи движутся вместе с ИСЗ в точке K (рис. 4.6). Необходимо установить соотношение между промежутками времени, которые показывают движущиеся часы. На основании метрики Шварцшильда формула связи между промежутками времени по часам в точках K и O имеет вид [9]

$$dt' = \left(1 - \frac{\mu}{c^2 r} - \frac{v_K^2}{2c^2} \right) dt. \quad (4.174)$$

Аналогично запишем связь между промежутками времени в точках Q и O

$$dt = \left(1 - \frac{\mu}{c^2 r_Q} - \frac{v_Q^2}{2c^2} \right) dt'.$$

Выразив в последней формуле dt через $d\tau$ и подставив полученное соотношение в (4.174), найдём связь между промежутками времени по часам в точках K и Q

$$dt' = \left(1 - \frac{\mu}{c^2 r} - \frac{v_K^2}{2c^2} + \frac{\mu}{c^2 r_Q} + \frac{v_Q^2}{2c^2} \right) d\tau. \quad (4.175)$$

Если из движущегося спутника за время dt' послано n электромагнитных волн, то по часам на наземном пункте те же n волн были бы излучены за время $d\tau$, зарегистрированы же принятые n волн будут за промежуток времени $d\tau'$. Между $d\tau'$ и $d\tau$ существует следующее соотношение (эффект Доплера)

$$d\tau' = d\tau \left(1 + \frac{\dot{r}'}{c} \right), \quad (4.176)$$

где \dot{r}' – радиальная скорость точки K относительно точки Q.

Выразив $d\tau$ через $d\tau'$ и подставив в (4.175), получим

$$d\tau' = \left[1 - \frac{\dot{r}'}{c} + \frac{\mu}{c^2} \left(\frac{1}{r_Q} - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2c^2} (v_Q^2 - v_K^2) \right] d\tau'. \quad (4.177)$$

Частота электромагнитного излучения – это количество излучённых или принятых волн в единицу времени. Введём следующие обозначения. Пусть $f_0 = n/d\tau'$ – собственная частота, а $f = n/d\tau$ – принятая частота. Тогда

$$\frac{1}{f_0} = \left[1 - \frac{\dot{r}'}{c} + \frac{\mu}{c^2} \left(\frac{1}{r_Q} - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{2c^2} (v_Q^2 - v_K^2) \right] \frac{1}{f}. \quad (4.178)$$

Умножая левую и правую части на f и вычтя из них по единице, получим формулу доплеровского смещения частоты

$$f - f_0 = \Delta f = -\frac{\dot{r}'}{c} f_0 + \frac{f_0 \mu}{c^2} \left(\frac{1}{r_Q} - \frac{1}{r} \right) + \frac{f_0}{2c^2} (v_Q^2 - v_K^2). \quad (4.179)$$

Первый член в правой части (4.179) называется продольным доплеровским эффектом, второй вызван разностью потенциалов гравитационного поля в точках Q и K, третий член называется поперечным доплеровским эффектом.

4.11.5. Релятивистские уравнения движения ИСЗ

На основании формул (4.43) и (4.47) действие можно записать в виде [9]

$$S = -\int_a^b m_0 c ds = \int_{t_0}^t -m_0 c \frac{ds}{dt} dt = \int_{t_0}^t L_r dt. \quad (4.180)$$

Отсюда

$$L_r = -m_0 c \frac{ds}{dt}. \quad (4.181)$$

Для определения производной в правой части, выполним преобразования формулы для интервала в пространственно-временной метрике Шварцшильда

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2\mu}{c^2 r} + \frac{2\mu^2}{c^4 r^2} \right) c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{2\mu}{c^2 r} \right) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4.182)$$

Разделив правую и левую части (4.182) на dt^2 , получим

$$\frac{ds}{dt} = c \left(1 - \frac{2\mu}{c^2 r} + \frac{2\mu^2}{c^4 r^2} - \frac{v^2}{c^2} - \frac{2\mu v^2}{c^4 r} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Разложив это выражение в ряд и подставив в (4.181), найдём релятивистскую функцию Лагранжа

$$L_r = -m_0 c^2 + \frac{m_0 \mu}{r} + \frac{m_0 v^2}{2} + \frac{m_0 v^4}{8c^2} + \frac{m_0 \mu}{2c^2 r} \left(3v^2 - \frac{\mu}{r} \right). \quad (4.183)$$

Для вывода релятивистских уравнений движения ИСЗ используем уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_r}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L_r}{\partial x} = 0 \quad (x \rightarrow y, z). \quad (4.184)$$

Найдём производные от функции Лагранжа

$$\frac{\partial L_r}{\partial x} = -\frac{m_0 \mu}{r^3} x \left(1 + \frac{3v^2}{2c^2} - \frac{\mu}{c^2 r} \right);$$

$$\frac{\partial L_r}{\partial \dot{x}} = m_0 \dot{x} + \frac{m_0 v^2}{2c^2} \dot{x} + \frac{3m_0 \mu}{c^2 r} \dot{x};$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_r}{\partial \dot{x}} \right) = m_0 \ddot{x} \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} + \frac{3\mu}{c^2 r} \right) - \frac{3m_0 \mu}{c^2 r^3} (x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})\dot{x}.$$

Подставляя полученные производные в уравнение (4.184), после несложных преобразований найдём

$$\ddot{x} = -\frac{\mu}{r^3}x + \frac{\mu}{c^2 r^3} \left[\left(4\frac{\mu}{r} - v^2 \right) x + 3(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})\dot{x} \right]. \quad (4.185)$$

Уравнение (4.185) – это уравнение движения в проекции на ось x . Уравнения в проекциях на оси y и z выводятся аналогично

$$\ddot{y} = -\frac{\mu}{r^3}y + \frac{\mu}{c^2 r^3} \left[\left(4\frac{\mu}{r} - v^2 \right) y + 3(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})\dot{y} \right]; \quad (4.185)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\mu}{r^3}z + \frac{\mu}{c^2 r^3} \left[\left(4\frac{\mu}{r} - v^2 \right) z + 3(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z})\dot{z} \right]. \quad (4.186)$$

Тогда релятивистские уравнения движения ИСЗ в векторной форме запишутся в виде

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \frac{\mu}{c^2 r^3} \left[\left(4\frac{\mu}{r} - v^2 \right) \vec{r} + 3(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\dot{\vec{r}} \right]. \quad (4.187)$$

4.11.6. Релятивистские прецессии

Рассмотрим кратко без вывода формул релятивистские прецессии Схоутена – де Ситтера и Ленза – Тирринга [9].

Прецессия Схоутена – де Ситтера возникает вследствие несовпадения направлений между начальным и конечным положениями вектора при его параллельном переносе по замкнутому контуру в четырёхмерном криволинейном пространстве.

Если считать орбиту Земли круговой и принять её за контур, то в четырёхмерном пространстве с центрально-симметричной метрикой Шварцшильда угловое несовпадение, в случае параллельного переноса вектора, составит

$$\delta\gamma'' = 206265'' \frac{3\pi\mu_s}{Ac^2}, \quad (4.188)$$

где μ_s – гравитационный параметр Солнца, A – большая полуось орбиты Земли, c – скорость света.

Эта прецессия приводит к смещению точки весеннего равноденствия на $1.92''$ за сто лет и вызывает дополнительное вращение эклиптической и экваториальной систем координат.

Прецессия Лензе – Тирринга вызвана вращением притягивающего тела вокруг своей оси. Формулы этой прецессии выводятся из интегрирования релятивистских уравнений движения с учетом компонент метрического тензора, отвечающего за вращение притягивающего тела вокруг своей оси. В частности, интегрирование уравнений движения Земли приводит к формуле вычисления движения перицентра за один оборот вследствие вращения Солнца

$$\delta\omega = -\frac{24}{5} \frac{\pi\mu_s}{c^2} v_s \frac{R_s^2}{a^3} (1 - e^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad (4.189)$$

где e – эксцентриситет земной орбиты, n – среднее движение, R_s – радиус Солнца, v_s – угловая скорость вращения Солнца.

Прецессия Лензе – Тирринга приводит к медленному повороту гелиоцентрической системы координат, связанной с перицентром земной орбиты. Перицентр движется при этом в обратном направлении – к точке весеннего равноденствия, в отличие от прямого релятивистского движения перицентра, которое определяется формулой

$$\Delta\omega = 6 \frac{\pi\mu_s}{c^2} \frac{1}{A(1-e^2)}. \quad (4.190)$$

Следовательно, величина прямого движения немного преуменьшается.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Геодезические методы изучения деформаций земной коры на геодинамических полигонах / Методическое руководство ГУГК. – М.: ЦНИИГАиК, 1985. – 112 с.
2. Закатов, П.С. Курс высшей геодезии / П.С. Закатов. – 3-е изд. – М.: Недра, 1976. – 512 с.
3. Инструкция о построении государственной геодезической сети СССР. – М.: Недра, 1966. – 342 с.
4. Инструкция по нивелированию I, II, III, IV классов. – М.: Недра, 1990. – 167 с.
5. Каврайский, В.В. Избранные труды. Том 1. Астрономия и геодезия / В.В. Каврайский. Издание Управления начальника Гидрографической службы ВМФ. 1956. - 358 с.
6. Киттель, Ч. Механика / Ч. Киттель, У. Найт, М. Рудерман. – 2-е изд., стереотипное. Перевод с англ. – М.: Наука, 1975. – 480 с.
7. Корн, Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1977. – 832 с.
8. Кочин, Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного анализа / Н.Е. Кочин. – 9-е изд. – М.: Наука, 1965. – 426 с.
9. Крылов, В.И. Учебное пособие по курсу «Теория систем отсчёта» (Основы пространственно-временных преобразований) / В.И. Крылов. – М.: Изд. МИИГАиК, 1998. – 92 с.
10. Куштин, И.Ф. Геодезия. Учебно-практическое пособие / И.Ф. Куштин. – М.: «Издательство ПРИОР», 2001. – 448 с.
11. Ландау, А.Д. Теория поля. (Серия: «Теоретическая физика», том II) / А.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – 7-е изд. – М.: Наука, 1973. – 504 с.
12. Математический энциклопедический словарь / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М.: Сов. энциклопедия, 1988. – 847 с.
13. Машимов, М.М. Геодезические аспекты изучения изменений фундаментальных характеристик Земли во времени / М.М. Машимов // Геодезия и картография. – 1996. – № 9. – С. 24.
14. Морозов, В.П. Курс сфероидической геодезии / В.П. Морозов. – М.: Недра, 1979. – 296 с.
15. Основные положения о государственной геодезической сети России. – М., 2000. – 16 с.
16. Пеллинен, Л.П. Высшая геодезия / Л.П. Пеллинен. – М.: Недра, 1978. – 264 с.
17. Практикум по высшей геодезии / Под редакцией Н. В. Яковлева. – М.: Недра, 1982. – 368 с.
18. Рашевский, П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П.К. Рашевский. – 3-е изд. – М.: Наука, 1967. – 564 с.
19. Телеганов, Н.А. Геометрия земного эллипсоида: Учебное пособие по сфероидической геодезии. Ч. 1 / Н.А. Телеганов. – Новосибирск: СГГА, 1995. – 83 с.

20. Телеганов, Н.А. Решение геодезических задач на эллипсоиде и конформное отображение эллипсоида на плоскости в проекции Гаусса – Крюгера: Учебное пособие по сфероидической геодезии. Ч. 2 / Н.А. Телеганов. – Новосибирск: СГГА, 1996. – 88 с.
21. Урмаев, М.С. Орбитальные методы космической геодезии / М.С. Урмаев. – М.: Недра, 1981. – 256 с.
22. Форсайт, Дж. Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 279 с.
23. Яковлев, Н.В. Высшая геодезия: Учебник для вузов / Н.В. Яковлев. – М.: Недра, 1989. – 445 с.
24. Бойко, Е.Г. Высшая геодезия. Часть II. Сфероидическая геодезия / Е.Г. Бойко. – М.: «Картогеоцентр» – «Геодезиздат», 2003.
25. Герасимов, А.П. Уравнивание государственной геодезической сети / А.П. Герасимов. – М.: «Картогеоцентр» – «Геодезиздат», 1996. – 216 с.
26. Глушков, В.В. Космическая геодезия: методы и перспективы развития / В.В. Глушков, К.К. Насретдинов, А.А. Шаравин. – М: Институт политического и военного анализа, 2002. – 448 с.
27. Машимов, М.М. Геодезия. Теоретическая геодезия. Справочное пособие / М.М. Машимов. – М.: Недра, 1991.