

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. А. Буланов, М. А. Юденко

**РЕШЕНИЕ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
С ПОМОЩЬЮ СТЕРЕОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ**

Учебное пособие

Иркутск 2006

УДК 548. 0 (02)
ББК 26. 303
Б 90

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Иркутского государственного университета

Научный редактор проф. *А. И. Сизых*
Рецензенты: проф. *А. Н. Иванов*; проф. *Г. Я. Абрамович*

Буланов, В. А.

Б 90 Решение кристаллографических задач с помощью стереографических проекций : учеб. пособие / В. А. Буланов, М. А. Юденко. – Иркутск : Иркут. гос. ун-т, 2006. – 175 с.

ISBN 5-9624-0124-7

В учебном пособии изложены основы учения о кристаллографических особенностях минералов. Дана характеристика применяемых проекций кристаллов и стереографических сеток. Рассмотрены особенности применения стереографических проекций для усвоения основ геометрической кристаллографии. Основные примеры и иллюстративный материал направлены на минералогическое приложение кристаллографии.

Пособие ориентировано на активизацию самостоятельной работы студентов, обучающихся на геологических специальностях.

Библиогр. 13 назв. Ил. 86. Табл. 18.

УДК 548. 0 (02)
ББК 26. 303

ISBN 5-9624-0124-7

© Буланов В. А., Юденко М. А., 2006
© ГОУ ВПО «Иркутский государственный университет», 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
ВВЕДЕНИЕ	7
1. ПРОЕКЦИИ КРИСТАЛЛОВ	10
1.1. Аксонометрическая и ортогональная проекции	11
1.2. Графические проекции	13
1.3. Стереографические сетки	21
1.4. Решение кристаллографических задач с помощью сетки Вульфа	28
<i>Контрольные задания для самостоятельных работ</i>	35
2. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ СТЕРЕОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ ДЛЯ УСТАНОВЛЕНИЯ ЗАКОНОВ ОГРАНКИ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕМЕНТОВ СИММЕТРИИ КРИСТАЛЛОВ	38
2.1. Элементы симметрии	38
2.2. Взаимодействие элементов симметрии	50
2.3. Виды симметрии	54
2.4. Морфология кристаллов	63
2.5. Установка кристаллов	84
2.6. Определение символов граней кристаллов	88
<i>Контрольные задания для самостоятельных работ</i>	100
3. ГРАФИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИСТАЛЛОВ	108

3.1. Примеры вычисления кристаллов	109
<i>Контрольные задания для самостоятельных работ</i>	130
Краткий словарь использованных кристаллографических терминов	132
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	148
Рекомендуемая литература	149
ПРИЛОЖЕНИЯ	150
Приложение 1. Задачи на определение симметрии и простых форм	150
Приложение 2. Рисунки и ортогональные проекции кристаллов для практических занятий	155
Приложение 3. Рисунки кристаллов минералов для самостоятельной работы	159
Приложение 4. Задачи на вычисление кристаллов ...	165
Приложение 5. Таблица натуральных синусов и косинусов	174

Предисловие

Необходимость в создании учебного пособия по кристаллографии возникла в связи с тем, что учебные планы подготовки бакалавров значительно уменьшили время аудиторных занятий для изучения кристаллов. Для получения навыков определения симметрии и форм кристаллов необходима самостоятельная работа с моделями и рисунками кристаллов и более детальное знакомство с основным рабочим методом практической кристаллографии – методом проекций. Стереографические проекции позволяют делать достаточно точные графические построения и вычисления, детально характеризующие данный кристалл.

Предлагаемое учебное пособие разработано на основе курса лекций, практических занятий и самостоятельных заданий по разделу «Геометрическая кристаллография» для студентов первого курса, обучающихся по программе бакалавров геологии. Также оно может предназначаться для студентов других геологических и смежных специальностей, для которых кристаллография не является ведущей дисциплиной, но составляет важную часть комплексного курса геологических дисциплин.

Основной целью написания учебного пособия ставилась активизация самостоятельной работы студентов, направленной на практическое знакомство с кристаллами. Поэтому примеры и иллюстративный материал ориентированы на минералогическое приложение кристаллографии. Основные задачи, составляющие содержание практической кристаллографии, были сформулированы Е. Е. Флинтом и сводятся к следующему:

1. Определение констант пространственной решетки исследуемого вещества.
2. Выяснение вопроса о том, какие из возможных для данной решетки плоскостей принимают участие в ограничении кристалла или серии кристаллов этого вещества.
3. Определение степени симметрии, которая свойственна кристаллам данного вещества, и отсюда нахождение того места, которое занимает это вещество в принятой системе классификации кристаллических веществ.

На овладение студентами способами решения названных задач и направлено данное учебное пособие. Все разделы сопрово-

ждаются вопросами и задачами с детальной разборкой способов их выполнения.

В учебном пособии изложен только самый необходимый материал. Он написан с максимально возможным упрощением и освобождением от специальных терминов и многочисленных синонимов, применяемых в научной литературе. Для более полного усвоения приведён словарь использованных кристаллографических терминов с объяснением их значений.

При разработке учебного пособия авторами учтены основные учебники и учебные пособия по геометрической кристаллографии. Список этих работ и ряда справочных руководств по кристаллографии приведен в конце книги.

Неоценимую помощь в подготовке данного учебного пособия оказал заведующий кафедрой минералогии и петрографии профессор А. И. Сизых, взявший на себя нелёгкий труд редактирования рукописи. Искреннюю благодарность авторы приносят всем коллегам по кафедре, неоднократно обсуждавшим отдельные разделы пособия.

Введение

Находящиеся в природе вещества могут быть газообразными, жидкими или твёрдыми. Твёрдое вещество может быть кристаллическим или аморфным. В переводе с греческого *кристалл* означает лёд, а *аморфный* – бесформенный.

Окружающий мир состоит из кристаллов. Обычные сахар и поваренная соль, лёд и песок состоят из множества мелких кристалликов. Излом любого металла глянет на нас сверкающими кристаллическими гранями. Основная масса горных пород, слагающих земную кору, состоит из кристаллов. Даже глина представляет собой нагромождение мельчайших кристалликов. Кристаллическими являются очень многие синтетические материалы, используемые в современной технике – полупроводники, ферромагнетики, сверхпрочные и жаростойкие сплавы. Из кристаллов состоят и такие вещества, как шёлк, хлопок, сажа, кости человека и многие предметы. Мы постоянно пользуемся кристаллами в быту, едим их, лечимся или частично сами состоим из кристаллов.

Изучением кристаллического состояния вещества занимается наука *кристаллография*, подразделяющаяся на геометрическую, химическую (кристаллохимию) и физическую (кристаллофизику), включая кристаллооптику.

Геометрическая кристаллография рассматривает вопросы симметрии, изучает формы кристаллов и определяет положение граней и других элементов кристаллов в пространстве.

Кристаллохимия изучает зависимость химических свойств от особенностей кристаллического строения минералов, рассматривает типы связи химических элементов в зависимости от их размеров и сил химического взаимодействия.

Кристаллофизика рассматривает физические свойства в зависимости от геометрии кристаллической структуры и природы химической связи между элементами, составляющими кристалл.

Кристаллооптика изучает оптические свойства кристаллов, имеющих исключительное значение для исследования и определения кристаллического вещества.

Кристаллическое вещество характеризуется тремя основными свойствами: однородностью, анизотропностью и способностью самоограняться.

Однородность – свойство физического тела быть одинаковым во всём объёме.

Анизотропность – это способность проявлять различные свойства в разных направлениях.

Способность самоограняться – свойство кристаллического тела принимать при определённых условиях многогранную форму. Это свойство присуще только кристаллам (однородными и анизотропными могут быть и некристаллические вещества).

Хорошо развитые грани хотя и характерный, но совсем не обязательный признак кристаллического вещества. В некоторых случаях грани кристаллов бывают выражены весьма нечётко. Иногда вещество состоит из таких мелких кристалликов, что грани трудно обнаружить даже под микроскопом.

Перечисленные свойства кристаллического вещества связаны с его внутренним строением. А внутреннее строение кристаллов, в отличие от аморфного вещества, характеризуется упорядоченным расположением атомов. Кристаллическое состояние – это равновесное наиболее устойчивое состояние твёрдого вещества.

В 1669 г. датский учёный Н. Стенон открыл, что углы между соответственными гранями одного и того же кристаллического вещества всегда постоянны. В 1949 г. М. В. Ломоносов, измеряя кристаллы селитры, связал открытие Н. Стенона с внутренним строением кристалла. А в 1783 г. французский кристаллограф Ромэ-де-Лиль подтвердил наблюдения Н. Стенона и впервые дал формулировку закона постоянства двухгранных углов, известного также под названием закона Стенона–Ломоносова–Ромэ-де-Лиля: во всех кристаллах данного вещества одной и той же полиморфной модификации при одинаковых условиях углы между соответственными гранями постоянны.

Этот закон дал возможность точно охарактеризовать всякое вещество, встречающееся в виде кристаллов, позволил отличать различные кристаллические вещества сходного состава. То есть

он позволил при описании кристаллического многогранника определять геометрические константы кристалла, являющиеся либо индивидуальными для каждого вещества и отражающие различия периодов повторяемости кристаллической решетки вдоль направлений, выбираемых в качестве координатных осей. Геометрические константы и их соотношения определяют ориентировку единичной грани и соответствующих ей серии атомных сеток структуры в пространстве. Необходимость в использовании подобных констант возникает потому, что прямое изменение осевых единиц при изучении кристаллических многогранников (без специальных структурных исследований) невозможно.

1. ПРОЕКЦИИ КРИСТАЛЛОВ

Знакомство с кристаллическим состоянием и его законами является задачей целого ряда дисциплин. В основе этого знакомства всегда лежит предмет так называемой геометрической кристаллографии кристаллического многогранника, занимающийся наблюдением, измерением огранки кристаллов и установлением законов огранки.

Элементами огранки являются плоские грани, прямые рёбра и вершины углов. Между ними устанавливается следующая зависимость, известная как формула Эйлера–Декарта:

$$\text{Грани} + \text{Вершины} = \text{Рёбра} + 2.$$

Так, например, общеизвестная геометрическая фигура – куб ограничена 6 квадратными гранями, дающими при пересечении 12 рёбер, а последние пересекаются в 8 вершинах. Согласно формуле Эйлера–Декарта имеем:

$$6 + 8 = 12 + 2 = 14.$$

Грани кристалла располагаются по поясам. *Поясом*, или *зоной*, называется совокупность граней, пересекающихся по параллельным рёбрам. Направление параллельное этим рёбрам называется *осью пояса*.

Согласно закону постоянства углов, характерными параметрами любого кристаллического вещества являются углы между гранями кристалла. При росте кристалла могут меняться размеры и форма граней, но углы между гранями остаются постоянными. Поэтому форму кристаллического многогранника (рис. 1.1, а) можно характеризовать набором углов между гранями. В кристаллографии чаще пользуются углами между нормальными к граням (рис. 1.1, б) – именно эти углы измеряются гониометрами (специальными приборами для измерения углов в кристаллах) или методом рентгеноструктурного анализа. Зная углы между нормальными, можно заменить кристаллический многогранник пучком перпендикуляров к его граням, проходящего через центр тяжести кристалла (рис. 1.1, в) и называемого *полярным комплексом*.

Для изображения направления элементов симметрии, граней и рёбер кристаллов в кристаллографии обычно пользуются двумя методами: образным, или перспективным, и графическим. В первом случае получаем реальное перспективное представление о форме и взаимном расположении граней кристалла, графические же проекции дают сразу точные значения углов между гранями данного кристалла, представленными схематически в виде линий или точек.

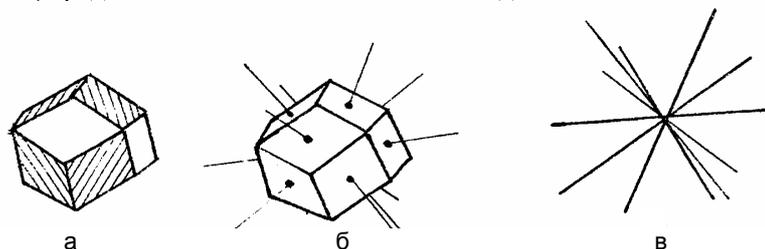


Рис. 1.1. Кристаллический многогранник:
а – ромбический додекаэдр; б – нормали к его граням;
в – его полярный комплекс

Учитывая этих два основных направления в изображении кристаллов, в кристаллографии применяются следующие виды проекций: образные (перспективные) – аксонометрическая и ортогональная; графические – сферическая и плоскостные (стереографическая, гномостереографическая, гномоническая).

1.1. Аксонометрическая и ортогональная проекции

В перспективном изображении параллельные рёбра кристалла представляются отрезками прямых, продолжения которых пересекаются в одной точке (рис. 1.2, а). Для отражения на чертеже взаимной параллельности рёбер, образованных пересечением граней соответствующих зон, необходимо, чтобы проектирующие лучи падали параллельно, т. е. необходимо перенести точку пересечения их в бесконечность. Такая аксонометрическая (параллельно-перспективная) проекция изображена на рис. 1.2, б для куба и на рис. 1.3, а для комбинированной формы. Этот метод проектирования кристаллов применяется достаточно часто и особенно удобен, так как даёт достаточно реальное представление о данном кристалле.

Другим видом параллельно-перспективного изображения является так называемая *ортогональная* проекция. Здесь параллельные проектирующие лучи падают перпендикулярно плоскости проекции, обычно совмещённой с той или иной гранью кристалла. Подобная ортогональная проекция изображена на рис. 1.3, б, причём для сравнения взят тот же комбинированный кристалл, что и в аксонометрической проекции (рис. 1.3, а). Плоскость проекции совмещена с гранью c_1 ; остальные грани, перпендикулярные плоскости проекции и аналогичные грани c_1 , изображаются прямыми линиями. В виде прямых линий проектируется и часть граней d и a , составляющих с гранями c наружный контур проекции. Из сравнения с рис. 1.3, а видно, что в ортогональной проекции с контурными линиями могут совпадать рёбра кристалла, в действительности не параллельные между собой (например, $c : a$ и $c : n$).

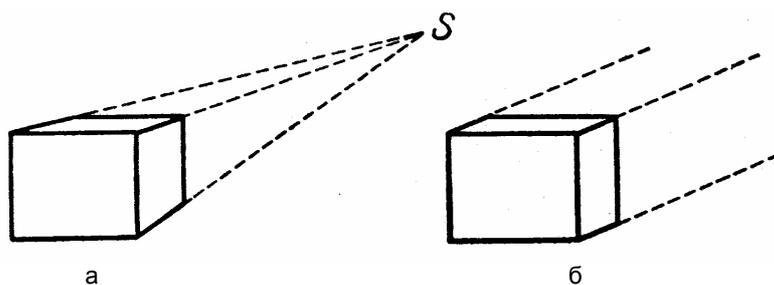


Рис. 1.2. Проекция куба:
а – перспективная проекция; б – аксонометрическая проекция

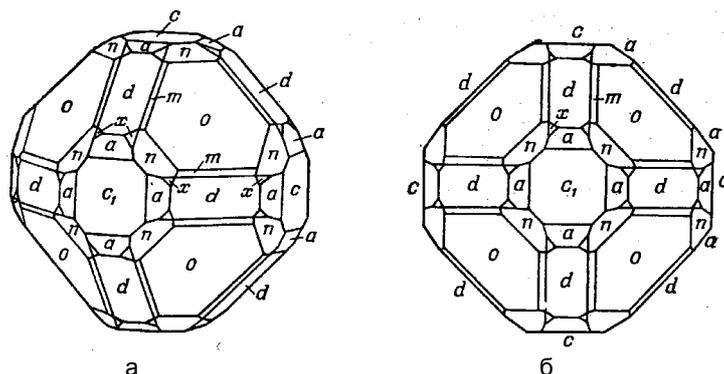


Рис. 1.3. Проекция комбинированного кристалла флюорита:
а – аксонометрическая проекция; б – ортогональная проекция

Несмотря на удобства изображения кристалла указанными выше способами, ни аксонометрическая, ни ортогональная проекции не выявляют в достаточной степени ни зависимости между отдельными зонами, ни действительные величины углов между гранями. Этим недостатком лишены графические проекции.

1.2. Графические проекции

Сферическая проекция. Центр кристаллического многогранника совмещается с центром сферы. Из центра кристалла опускаются перпендикуляры на его грани, и продолжают до пересечения со сферой (рис. 1.4, а). После этого кристалл можно отбросить – его заменили пучком прямых, который характеризует набор углов между гранями. Так как сферический угол между точками на сфере отвечает углу между соответственными прямыми полярного комплекса, после отметок точек пересечения на сфере, пучок прямых можно отбросить (рис. 1.4, б). Так получают сферическую проекцию.

Сферическая проекция наглядна, но для практического применения её удобнее спроектировать на плоскость. Для этого пользуются стереографическими, гномостереографическими и гномоническими проекциями.

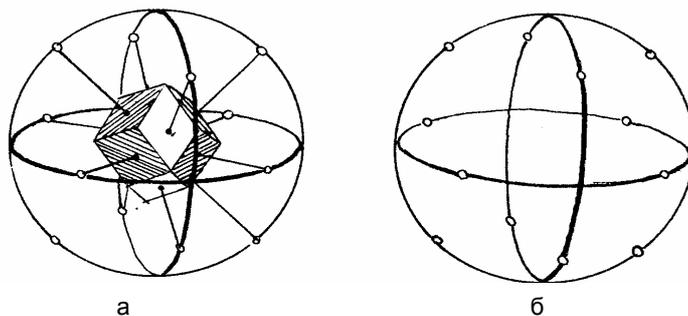


Рис. 1.4. Построение сферической проекции ромбического додекаэдра:
 а – сферическая проекция нормалей к граням кристалла;
 б – отдельная полная сферическая проекция кристалла

Стереографическая проекция. Принцип построения стереографической проекции показан на рис. 1.5. За плоскость сте-

реографической проекции P выбирается экваториальная плоскость, на которую сфера проектируется в виде круга проекции. В одном из полюсов этой сферы помещается точка зрения («глазная точка») S . В рассматриваемой фигуре выбирают некоторую точку O (обычно центр тяжести) и принимают его за центр проекции. Вокруг точки O произвольным радиусом описывают сферу и через точку O проводят экваториальную плоскость. Пересечение сферы с плоскостью даёт круг проекции. Восстанавливая из точки O перпендикуляр к этому кругу, находят северный и южный полюса сферы. Для того чтобы спроектировать какое-либо направление (например, $O-a$), его продолжают до пересечения со сферой. Точку пересечения a' соединяют с южным полюсом. Отрезок $a'-S$ пересечёт экваториальную плоскость в точке a_1 , которая и является проекцией направления $O-a$.

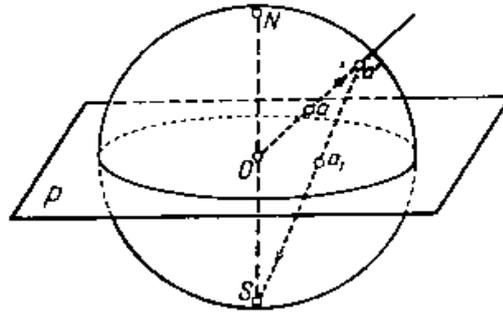


Рис. 1.5. Стереографическая проекция точки

Таким образом, наклонное направление изображается точкой внутри круга проекции, вертикальное направление – точкой в центре круга проекции, горизонтальное двумя точками на пересечении окружности проекции с экватором; наклонная плоскость изображается дугой большого круга, вертикальная плоскость – вертикальным диаметром круга проекции, горизонтальная плоскость – совпадает с кругом проекции (рис. 1.6, *a*, *б*, *в*, *г*, *д*, *е*).

Все точки, полученные при пересечении продолжения прямой со сферой, переносятся на горизонтальную плоскость Q (рис. 1.7, *a*). Для этого их соединяют с южным полюсом S («точкой зрения»). При этом точки, находящиеся в северном полушарии, проектируются на плоскость Q внутри круга проекции, а точ-

ки южного полушария – за его пределами. Чтобы этого избежать, «точку зрения» переносят в северный полюс, и тогда точки, проектируемые из северного полушария, обозначаются кружочком, а точки, проектируемые из южного полушария, крестиком (рис. 1.7, б).

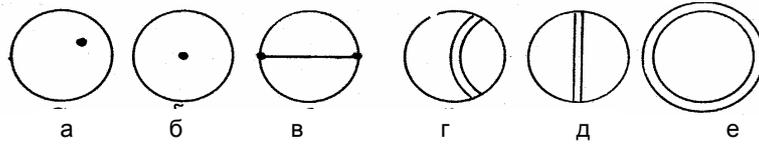


Рис. 1.6. Стереографические проекции направлений (а, б, в) и плоскостей (г, д, е); а, г – под косым углом к плоскости проекции; б, д – перпендикулярно плоскости проекции; в, е – в плоскости проекции

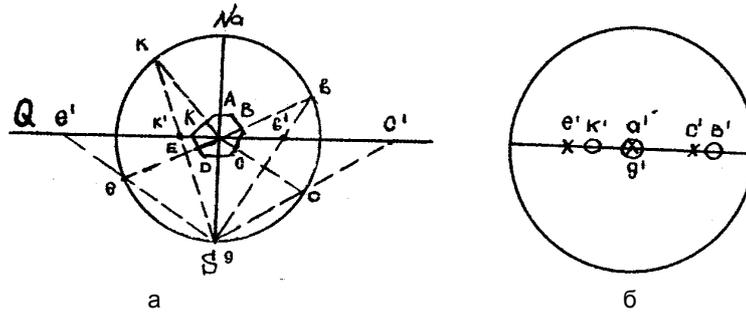


Рис. 1.7. Гномостереографические проекции граней А, В, С, D, Е, К (а) и изображение этих проекций на плоскости (б – вид сверху)

Стереографическая проекция особенно удобна для графического изображения элементов симметрии.

Гномостереографическая проекция. Гномостереографическая проекция применяется для графического изображения кристаллических многогранников. При этом проектируется не многогранник, а его полярный комплекс, т. е. не грань кристалла, а перпендикуляр (нормаль) к грани. Плоскостью гномостереографической проекции также как и для стереографической, служит экваториальная плоскость сферы проекции. Фактически в кристаллографии чаще имеют дело с гномостереографическими проекциями, обычно ошибочно называемыми стереографическими. Принцип же построения этих проекций одинаков.

На рис. 1.8 показан способ получения гномостереографической проекции кубического кристалла, из которого равномерно срезаны вершины и рёбра. Как и в случае стереографической проекции, представим себе кристалл находящимся внутри воображаемой сферы некоторого радиуса. К каждой грани кристалла проводим перпендикуляр (нормаль).

Пересечения нормалей с поверхностью сферы представляют сферические проекции граней кристалла. Спроектировав эти точки на круг проекции E выше рассмотренным способом, получим гномостереографическую проекцию кристалла, показанную на рис. 1.9. Из этой проекции явствует, что грани, перпендикулярные плоскости проекции (кругу проекции), проектируются на окружность проекции, называемую основным кругом. Все остальные точки лежат внутри основного круга, в центре которого проектируются грани, параллельные плоскости проекции.

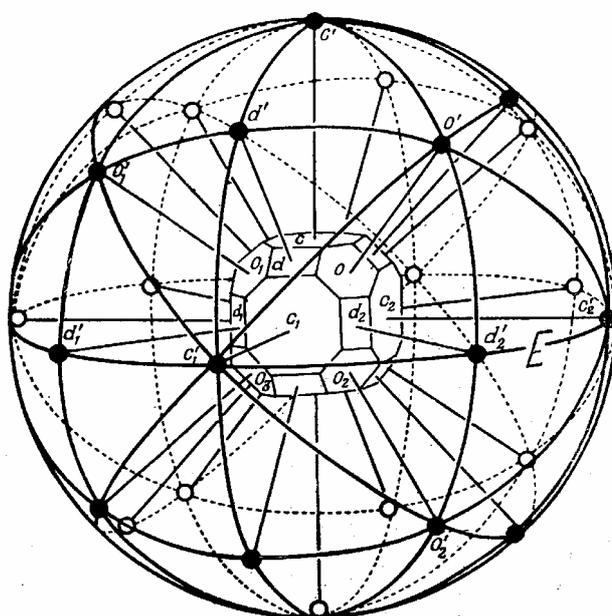


Рис. 1.8. Получение гномостереографической проекции куба с равномерно срезанными вершинами и гранями

Точки внутри круга размещены на дугах или прямых линиях – на проекциях так называемых больших кругов, т. е. кругов, проходящих через центр сферы проекции. Круги, перпендикулярные основному кругу, проектируются в виде прямых линий (диаметры круга), наклонённые же круги – в виде дуг; дуги более пологих кругов расположены ближе к окружности. Основной круг, дуги и диаметры основного круга представляют, в сущности, соответствующие зоны кристалла, грани которого изображены точками на них. Так, сам основной круг с точками $c_1, d'_1, c'_2, d'_2, d_1, c_2$ и d_2 – одна зона, которую на аксонометрической проекции кристалла, помещённого в сферу проекции, составляют грани d'_1, c_1, d_2 и c_2 , пересекающиеся по параллельным рёбрам. Диаметр d'_1, d_1 – другая зона, в которой расположены точки, являющиеся гномостереографическими проекциями граней d'_1, o'_1, c' и o'_3 . Дуга c'_1, c_1 – третья зона, содержащая точки c'_1, o'_1, d', o'_2 и c_1 – гномостереографические проекции граней c_1, o_1, d_1 и o_2 .

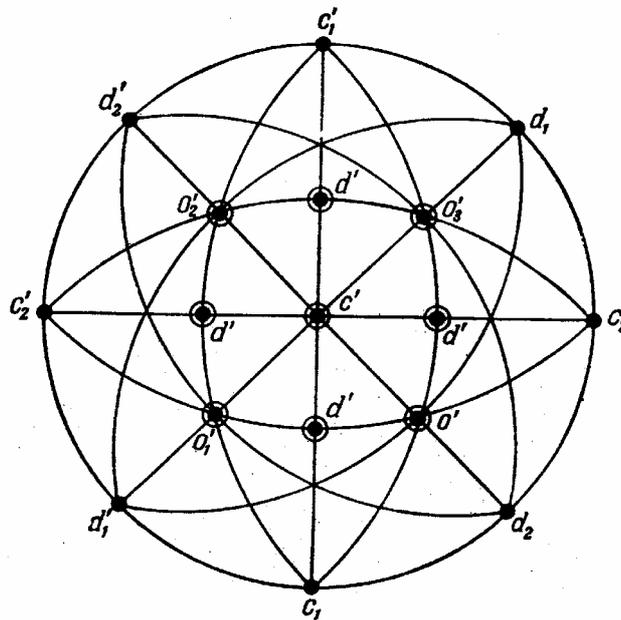


Рис. 1.9. Гномостереограмма куба с равномерно срезанными вершинами и гранями

Чтобы получить гномостереографическую проекцию любой грани кристалла, проводят перпендикуляр к этой грани из центра проекции до пересечения со сферой. Точку пересечения соединяют с «точкой зрения» S или N . Проекции граней, расположенных выше плоскости проекции и вертикальных граней обозначаются кружочками, а граней, расположенных ниже плоскости проекции – крестиками. Иногда верхнюю грань изображают пустым кружком, а нижнюю – зачернённым. Если нижние и верхние грани проектируются в одной точке – кружочек и крестик совмещаются. Горизонтальные грани проектируются в центре круга проекции, вертикальные – на круге, наклонные – внутри круга проекции, причём, чем круче наклон грани, тем дальше от центра располагается проектирующая её точка (рис. 1.10).

При изображении осей симметрии вместо точки на проекции ставится специальный значок. При этом используется следующая система обозначений:

○ - L_2 △ - L_3 □ - L_4 ⬡ - L_6 ◼ - L_{i4} ◼ - L_{i6}

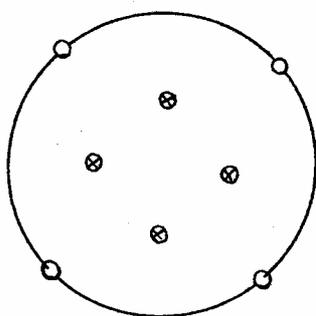


Рис. 1.10. Гномостереографическая проекция ромбододекаэдра

Центр инверсии обозначается значком C в центре круга проекции.

Если по одному направлению проходит несколько осей симметрии, то изображается ось высшего порядка. Если по одному направлению проходят инверсионная и поворотная оси, то на проекции изображается инверсионная ось.

Гномоническая проекция. Этот вид проекции широко применяется в рентгеноструктурном анализе. Гномоническая проекция строится при помощи такого же пучка нормалей к грани, как и гномостереографическая. Разница заключается в том, что плоскость проекции берётся касательной к сфере, а точка зрения помещается в её центре. Рисунок 1.11 иллюстрирует принцип по-

строения гномонической проекции: плоскость проекции горизонтальна и расположена над кристаллом на расстоянии r от его центра. Обычно r принимают за 50 мм. Из центра кристалла проведена нормаль к плоскости проекции. Точка O , где нормаль пересеклась с плоскостью, называется центром гномонической проекции. Проекции горизонтальных и наклонных граней будут изображаться в виде точек. Для каждой грани эта точка является точкой пересечения нормали грани с плоскостью проекций. Чем сильнее наклон грани, тем дальше от центра расположится её проекция. Вертикальные грани проектируются в бесконечности и их положение указывается на гномонической проекции в виде стрелок. Направление стрелок отвечает ориентировке нормали к данной вертикальной грани.

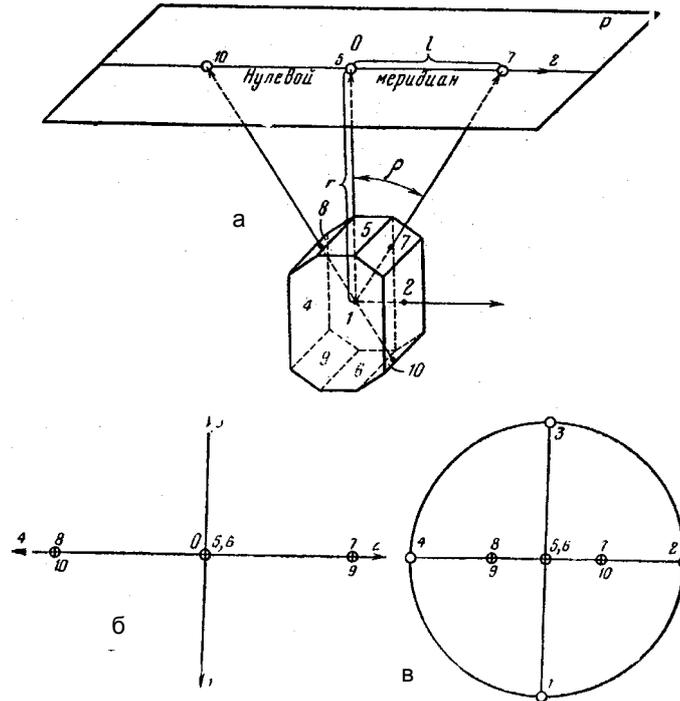


Рис. 1.11. Гномоническая проекция:
 а – принцип построения гномонической проекции;
 б – гномоническая проекция кристалла с позиции а;
 в – стереографическая проекция того же кристалла

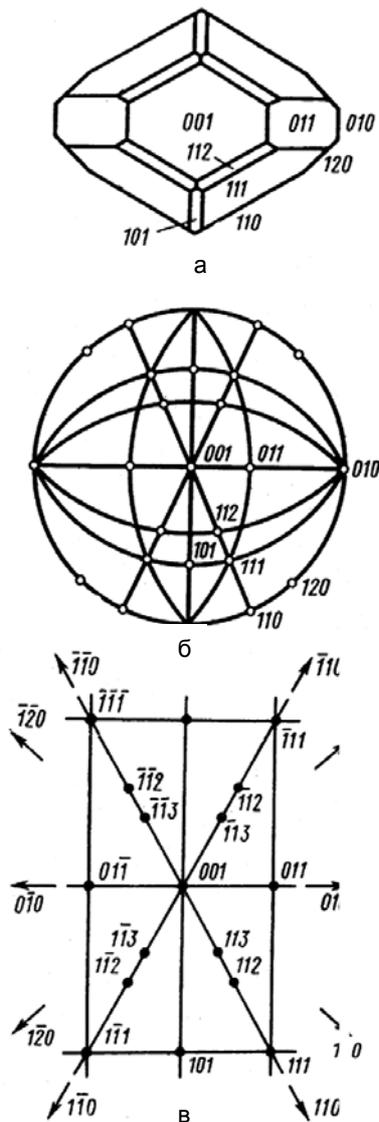


Рис. 1.12. Кристалл топаза и его ортогональная (а), гномостереографическая (б) и гномоническая, (в) проекции

Расстояние l (мм), на котором находится проекция грани от точки O , вычисляется по формуле: $l = 50 \operatorname{tg} \rho$ (ρ – полярное расстояние грани).

Общие правила построения гномонической проекции:

1) на листе бумаги произвольно ставят центр проекции;

2) через центр O проводят линию нулевого меридиана;

3) проекции горизонтальных граней совпадают с точкой O (грани 5 и 6 на рис. 1.11);

4) для проектирования верхней и наклонной грани проводят через центр O луч под углом φ грани к нулевому меридиану; от центра O на расстоянии l откладываем точку – проекцию грани (грани 7, 8 на рис. 1.11);

5) для проектирования нижней наклонной грани проводят через центр O под углом φ грани к нулевому меридиану. Луч продолжают в противоположную сторону от центра O ; откладывают на нём точку на расстоянии l – проекцию грани, при этом выявляется особое свойство гномонической проекции: точки для нижних наклонных граней лежат с противоположной стороны от центра O по сравнению с их реальным положением (грани 9, 10 на рис. 1.11);

6) для проектирования вертикальных граней проводят через

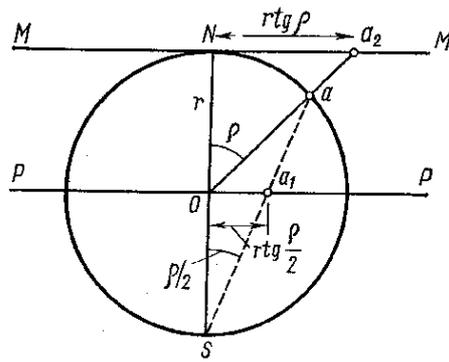


Рис 1.13. Соотношения между гномической, стереографической и гномо­стереографической проекциями

(плоскость *MM*) – точку a_2 , на стереографической проекции (плоскость *PP*) – точку a_1 . На гномо­стереографической проекции (плоскость *PP*) – точка a_1 – это проекция плоскости перпендикулярной направлению $O-a$. Угловые соотношения легко найти по рисунку.

центр O стрелку под углом φ грани к нулевому меридиану (лучи 1, 2, 3, 4 на рис. 1.11).

Для сравнения приводим пример разных проекций одного и того же кристалла топаза (рис. 1.12).

Соотношения между всеми перечисленными типами проекций сведены в табл. 1.1 и показаны на рис. 1.13. Проекция направления $O-a$ даёт на сферической проекции точку a , на гномонической проекции

Таблица 1.1

Соотношения между типами проекций

Тип проекции	Изображение	
	плоскости	прямой
Стереографическая	Дуга большого круга	Точка
Гномо­стереографическая	Точка	Дуга большого круга
Гномоническая	Точка	Прямая

1.3. Стереографические сетки

Для решения количественных задач с помощью стереографических и гномо­стереографических проекций пользуются стереографическими сетками, которые представляют собой стереографическую проекцию всей системы меридианов и параллелей, нанесённых на поверхность сферы. В зависимости от плоскости, на

которую проектируется со сферы эта сетка, различают сетки полярного (рис. 1.14) и экваториального (рис 1.15) типов.

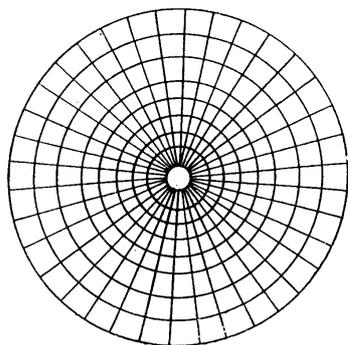


Рис. 1.14. Стереографическая сетка полярного типа

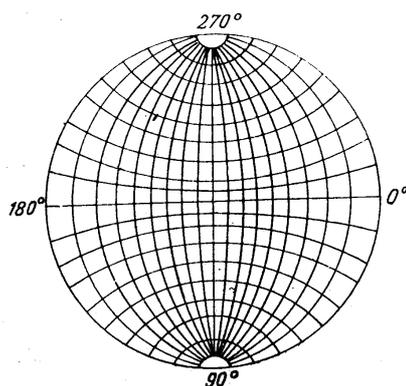


Рис. 1.15. Стереографическая сетка экваториального типа

Взяв точку зрения в одном из полюсов, получим полярную сетку, плоскостью её проекции является экваториальная плоскость. Она называется полярной потому, что точка зрения лежит на полюсе шара, разделённого на меридианы и параллельные круги. Если точку зрения поместить на экваторе, проектируя на один из меридианов, получим сетку экваториального типа. На полярной сетке очень легко откладывать углы как от центра, так и на концентрических окружностях, но нельзя измерить углы между точками, взятыми произвольно внутри проекции. Экваториальная сетка даёт возможность решать эту важнейшую для практической кристаллографии задачу и в тоже время вполне может заменить полярную сетку. Наибольшее применение нашла экваториальная сетка в виде, предложенном русским кристаллографом Ю. В. Вульфом. Сетка Вульфа стандартно чертится на круге диаметром 20 см, линии меридианов и параллелей проводятся через два градуса. Для удобства отсчётов каждый десятый меридиан и каждая десятая параллель проведены более толстыми линиями (рис. 1.16).

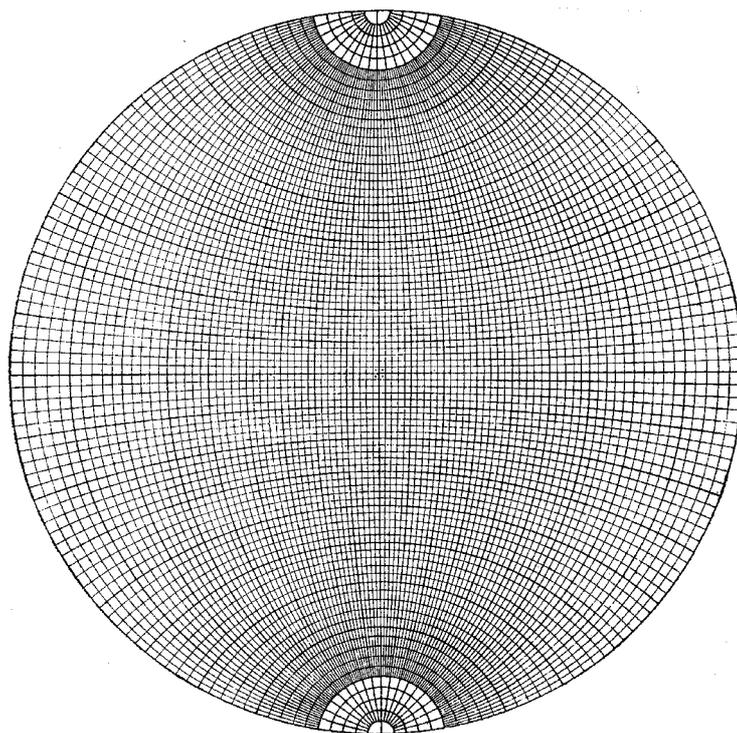


Рис. 1.16. Сетка Вульфа

Построение этой сетки делается следующим образом. Проведём окружность диаметром 20 см и разделим её двумя взаимно перпендикулярными диаметрами $A-A_1$ и $B-B_1$ (рис. 1.17 уменьшен линейно в два раза) на четыре равные части. Каждую из этих четвертей разделим на 9 частей (очень удобно делить на 3 и ещё на 3). Таким образом, вся окружность будет разделена на 36 равных дуг по 10° в каждой. Разделив каждую дугу ещё на пять равных частей, получим окончательные деления сетки (2°).

Сетка Вульфа представляет собой стереографическую проекцию шара, разделённого на градусы меридианами и параллельными кругами. Следовательно, для её построения нужно применить тот же приём, которым мы пользовались для проектирования полюсов граней кристалла. Поместив точку зрения в B_1 , найдём про-

екцию точек 0° , 10° , 20° , и т. д. на диаметр $A-A_1$. Чтобы не усложнять чертёж, на рис. 1.17 деление окружности доведено до 10° , а проектирование меридианов и параллелей сделано для одной половины. Точки пересечения проведённых из B_1 лучей зрения с диаметром $A-A_1$ (на рис. 1.17 эти точки показаны крестиком) определяют точки соответствующих меридианов на проекции. Две точки для каждого меридиана мы имеем на полюсах B и B_1 , следовательно, по трём точкам мы можем построить проекцию меридианов (больших кругов). Перенеся точку зрения в точку A и сделав аналогичное построение на диаметр $B-B_1$, найдём проекцию параллелей (малых кругов). Для каждого их них две точки имеются на окружности, а третья определяется пересечением соответствующего луча зрения с диаметром $B-B_1$.

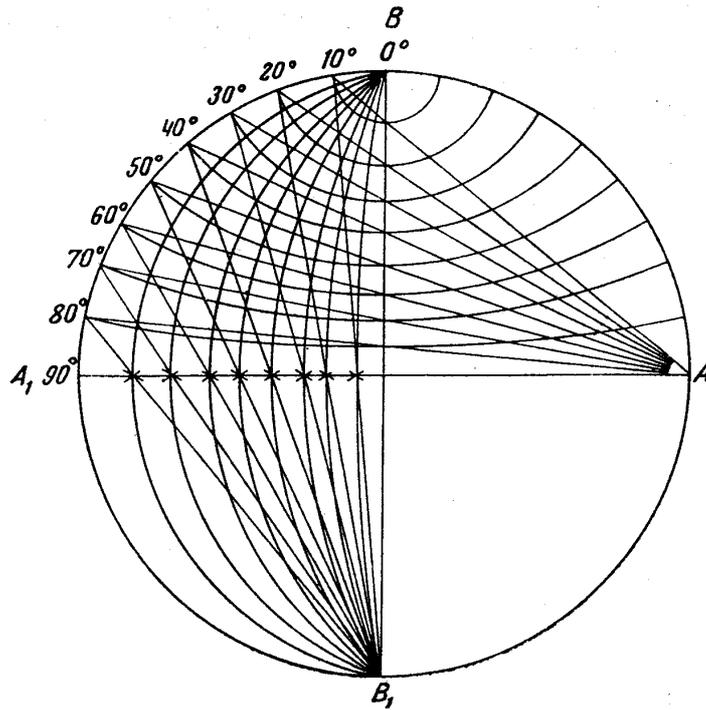


Рис. 1. 17. Принцип построения сетки Вульфа

Положение любой точки на сетке Вульфа определяется двумя сферическими координатами – долготой φ и полярным расстоянием ρ , которые отсчитываются соответственно от центра и правого конца горизонтального диаметра основного круга по ходу часовой стрелки, как показано на рис. 1.18.

Полярное расстояние может меняться от 0 до 90° для верхних граней и от 90° до 180° для нижних граней. Причём точки, обозначаемые $\rho = 0$ и $\rho = 180^\circ$, а также $\varphi = 0$ и $\varphi = 360^\circ$ совпадают.

Кроме наиболее широко применяемой сетки Вульфа в отдельных случаях пользуются стереографическими сетками других авторов.

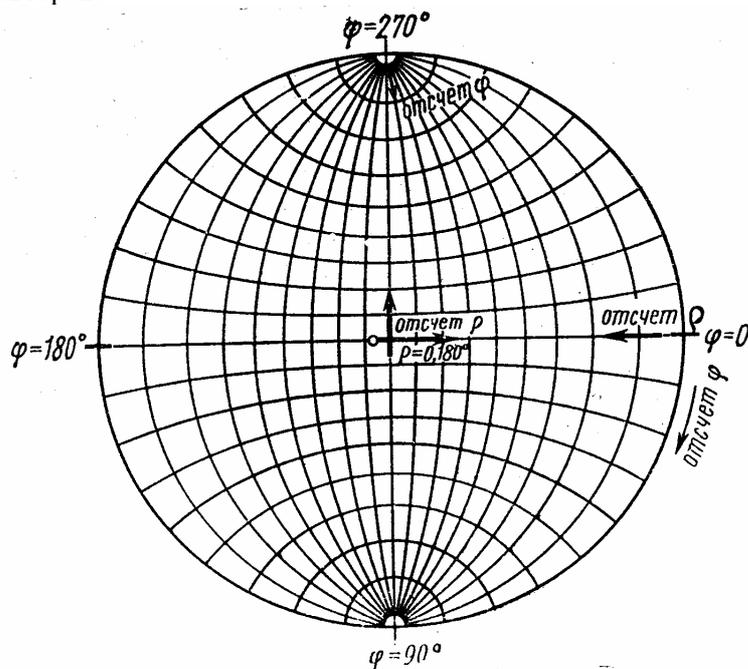


Рис. 1.18. Схема отсчета координат на сетке Вульфа

Сетка Болдырева (рис. 1.19) представляет собой полярную сетку с делениями до двух градусов. Она очень удобна для нанесения результатов измерений, полученных в виде сферических координат φ и ρ , но не позволяет измерять углы между точками.

В сетке **Е. С. Фёдорова** (рис. 1.20) одна полярная сетка сочетается с двумя экваториальными, повернутыми относительно друг друга на 90° . Дуги больших и малых кругов проведены через каждые пять градусов. Сетка **Е. С. Фёдорова** менее удобна, чем сетка **Г. В. Вульфа** и, кроме того, точность отсчёта на сетке **Фёдорова** меньше, так как расстояние между дугами равно пяти, а не двум градусам, как на сетке **Вульфа**.

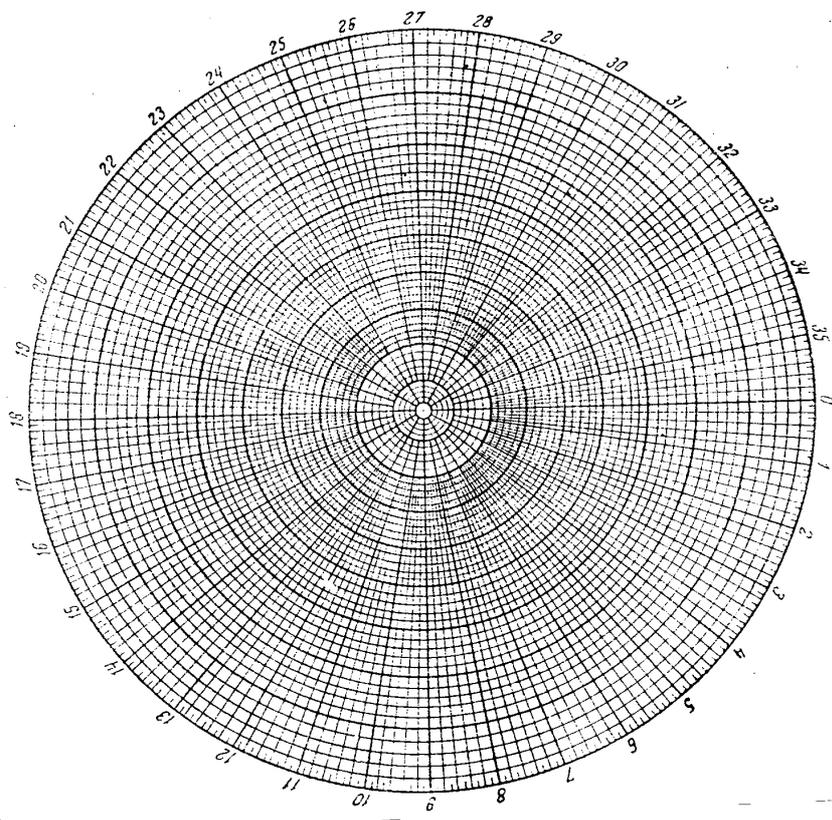


Рис. 1.19. Сетка **А. К. Болдырева**

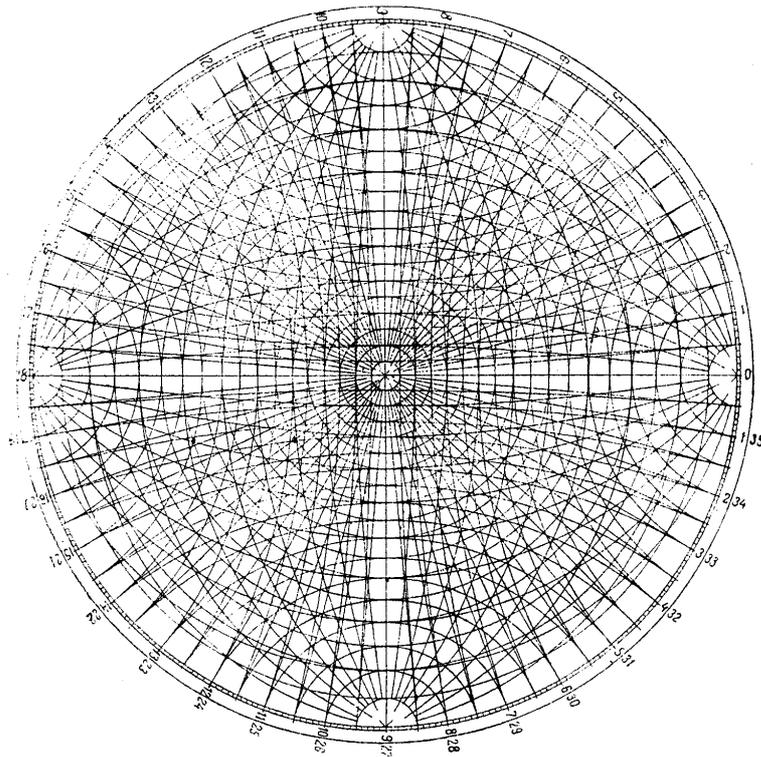


Рис. 1. 20. Сетка Федорова

Сетка Е. Е. Флинта (рис. 1.21) представляет собой сочетание сеток Вульфа и Болдырева, из которых каждая разрезана пополам. Полярная половина, в которой деления доведены до двух градусов, служит для нанесения результатов измерения, а вторая часть, являющаяся половиной сетки Вульфа, служит для измерения углов и решения всех задач, связанных с графическим методом вычисления кристаллов.

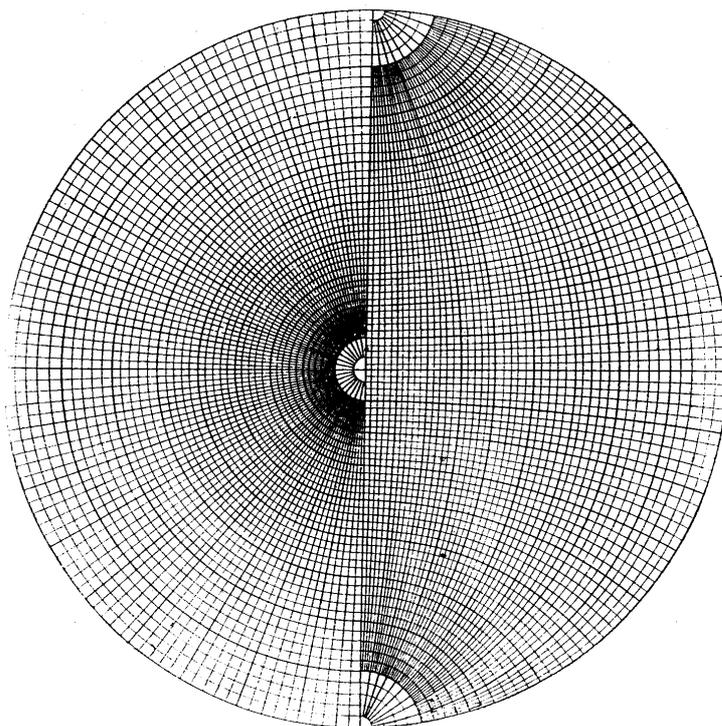


Рис. 1.21. Сетка Е. Е. Флинта

1.4. Решение кристаллографических задач с помощью сетки Вульфа

При работе с сеткой Вульфа придерживаются следующих правил:

1. Все работы выполняются на кальке, не допускаются никакие отметки на самой сетке.

2. Сетку располагают так, чтобы её экватор был горизонтален. На сетку кладут кальку, крестиком отмечают центр проекции, а горизонтальной чёрточкой на правом конце экватора сетки – нулевую точку. По этим двум отметкам чертёж всегда можно привести в исходное положение.

3. Все построения производятся путём концентрического вращения кальки. При отсчётах надо всё время следить за тем, чтобы центральная отметка, сделанная на кальке, точно совпадала с центром сетки.

4. Верхние грани принято обозначать точками, обведёнными маленькой окружностью, точки нижнего полушария – крестиками, рядом с точкой ставят цифру, например $\odot(4)$. Чем меньше будет срединная точка значка \odot , тем точнее окажется работа.

Задача 1. Построение стереографической проекции точек заданными координатами φ и ρ .

Например, пусть точки 1 и 2 заданы следующими координатами; $\varphi_1 = 198^\circ$, $\rho_1 = 73^\circ$; $\varphi_2 = 115^\circ$, $\rho_2 = 58^\circ$.

Решение: 1) накладываем кальку на сетку, отмечаем крестиком центр проекции и чёрточкой нулевой индекс для φ ;

2) отсчитываем заданные углы $\varphi_1 = 198^\circ$ и $\varphi_2 = 115^\circ$ от нулевого индекса ($\varphi_0 = 0$) по основному кругу проекций по часовой стрелке и делаем вспомогательные отметки на основном круге (рис. 1.22);

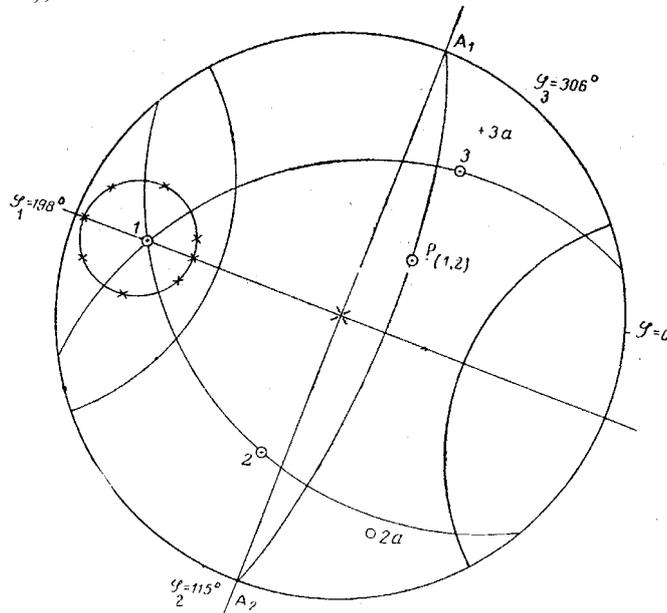


Рис. 1.22. Схема решения кристаллографических задач на сетке Вульфа

3) поворачиваем кальку так, чтобы одна из найденных вспомогательных отметок $\varphi_1 = 198^\circ$ попала на конец ближайшего диаметра сетки (при вращении необходимо следить, чтобы центр кальки совпадал с центром сетки);

4) по данному диаметру отсчитываем $\rho_1 = 73^\circ$, ведя отсчёт от центра сетки ($\rho = 0$) и отмечаем найденную точку небольшим кружком и цифрой.

5) повторяя операции 3 и 4, наносим точку с координатами $\varphi_2 = 115^\circ$ и $\rho_2 = 58^\circ$. Для точек нижней полусферы полярные расстояния превышают 90° . Такие ρ отсчитываются от центра круга до круга проекций и далее назад от круга проекций к центру. Получающиеся при этом проекции отмечаются крестиком.

Задача 2 (обратная). Определить сферические координаты точки заданной на стереографической проекции.

Решение: 1) вращением кальки приводим заданную точку на один из диаметров сетки и по этому диаметру от центра сетки до заданной точки отсчитываем полярное расстояние ρ ;

2) делаем вспомогательную отметку на конце диаметра сетки, по которому отсчитываем φ ;

3) приводим кальку в исходное положение и по кругу проекций отсчитываем сферическую координату φ от нулевого индекса по ходу часовой стрелки до вспомогательной отметки.

Задача 3. Измерить угловое расстояние между двумя заданными точками (точки 1 и 2).

Все измерения угловых расстояний на сфере делаются по большим кругам, т. е. кругам, опирающимся на диаметр сферы. На сетке большими кругами являются все меридианы и экватор, остальные (параллели) суть малые круги. Следовательно, если мы желаем измерить угол между точками 2 и 1, то их надо привести на один и тот же большой круг (меридиан) и по нему сделать отсчёт. Правильность отсчёта зависит от опытности и глазомера работающего, а также от того, насколько аккуратно сделаны отметки точек и от точности совмещения центров кальки и сетки.

Решение: 1) если обе точки лежат на одной половине сферы (обе изображены кружочками или крестиками), то, вращая кальку, приводим обе точки на один меридиан, и отсчитываем по нему

угол от точки до другой точки (в нашем случае, отсчитав по меридиану расстояние между точками 1 и 2, получаем 75°);

2) если точки лежат в разных полусферах (кружок и крестик), то поворачиваем кальку так, чтобы обе точки попали на меридианы, симметричные относительно центра сетки, и отсчитываем угол по одному меридиану от точки до полюса, а по другому – от полюса до точки.

Задача 4. Через две заданные точки (1 и 2) провести дугу большого круга.

Решение: 1) вращением кальки приводим обе точки на один меридиан (или на симметричные меридианы, если точки лежат в разных полусферах). Этот меридиан (или два симметричных меридиана) и являются искомой дугой большого круга;

2) найденную дугу по всей её протяжённости (от полюса до полюса) обводим карандашом. Если точки лежат в разных полушариях, то часть дуги, проходящую по нижней полусфере, прочёркиваем пунктиром, по верхней полусфере – сплошной чертой.

Задача 5. Построить точку диаметрально противоположную данной (1).

Две точки называются диаметрально противоположными, если они лежат на концах одного и того же диаметра сферы. Отсюда ясен путь решения задачи: следует привести точку на один из диаметров сетки, отсчитать по нему её расстояние от центра и это же расстояние отложить в обратную сторону. В частных случаях, когда точка находится в центре или на основном круге, задача решается ещё проще. Диаметрально противоположные точки, конечно, окажутся на разных половинах сферы, т. е. если заданная точка лежит в верхнем полушарии, точка диаметрально противоположная должна лежать в нижнем.

Решение: вращая кальку, проводим точку 1 на горизонтальный диаметр (рис. 1.22). Её расстояние от центра известно ($\rho = 73^\circ$). Отсчитываем от центра в противоположную сторону 73° и находим исходную точку, отмечаем её крестиком, так как она лежит в нижнем полушарии.

Задача 6. Найти полюс большого круга, заданного определёнными точками (1 и 2).

Полюсом большого круга на сфере называется точка, отстоящая от всех точек этого круга на 90° . На проекции полюс

должен, очевидно, лежать на прямой, перпендикулярной к диаметру, стягивающему данную дугу. Кроме того, мы знаем из геометрии, что она отстоит на 90° от трёх точек взятого круга. Отсюда ясен способ её нахождения.

Решение: 1) совмещаем точки с одним и там же меридианом и проводим дугу большого круга;

2) отсчитываем по экватору 90° от точки пересечения с ним дуги в сторону центра проекции (перейдя за него) и отмечаем кружком найденную точку $P_{(1,2)}$.

В нашем случае получим $P_{(1,2)}=34^\circ$ и $P_{(1,2)}=316^\circ$.

Решение этой задачи даёт возможность переходить от гномостереографической проекции к стереографической и обратно. Если заданная дуга является стереографической проекцией грани, то найденный полюс является стереографической проекцией нормали к грани, т. е. гномостереографической проекцией грани. Если заданная дуга есть гномостереографическая проекция ребра, то найденный полюс – гномостереографическая проекция грани, нормальной к этому ребру, или стереографическая проекция этого ребра.

Задача 7. По заданному полюсу (точка 1) найти соответствующую ему дугу большого круга.

Очевидно, что эта задача является обратной для только что решённой задачи 6. Рассуждая совершенно аналогично, найдём, что заданную точку надо привести на экватор сетки и по нему отсчитать 90° . Меридиан, проходящий через точку, полученную отсчётом, будет искомым большим кругом.

Решение: 1) вращением кальки выводим заданную точку (1) на экватор сетки;

2) отсчитываем по экватору 90° в направлении центра сетки и через точку отсчёта проводим меридиан. Этот меридиан и является искомой дугой.

Задача 8. Найти угол между двумя дугами больших кругов (дуги (1, 2) и (1, 3)).

При пересечении двух дуг на сфере получаются четыре попарно равных угла. Возьмём для измерения больший угол β . Выше было сказано, что все отсчёты в сфере делаются по большим кругам; так мы поступали и при решении всех предыдущих задач.

В данном случае, когда нам надо измерить угол между дугами, следует держаться того же правила. Этого достигнем, если будем вести отсчёт по дуге того круга, для которого вершина нашего угла является полюсом. Тогда дуга, заключённая между кругами, образующими стороны угла, даёт искомую величину в угловых единицах.

Решение: 1) наносим на кальку точку 3 с координатами $\rho_3 = 68^\circ$ и $\varphi_3 = 306^\circ$ и через точки 1 и 3 проводим большой круг (см. рис. 1.22);

2) вращением кальки совмещаем точку пересечения дуг – (1) (вершину измеряемого угла) с линией экватора;

3) по дуге, отстоящей от точки 1 на 90° , производим отсчёт между дугами (1, 2) и (1, 3), получаем угол $\beta = 124^\circ$.

Возможен и другой путь решения этой задачи. Дело в том, что искомый угол β равен дополнительному углу α между полюсами двух дуг больших кругов. В этом случае находим полюсы этих дуг (см. задачу 6), определяем угол α между ними (см. задачу 3) и находим угол $\beta = 180 - \alpha$.

Задача 9. Построить геометрическое место точек, образующих с заданной на проекции точкой одно и то же угловое расстояние (положим $\alpha = 15^\circ$) (задача на построение малого круга).

Сущность задачи сводится к следующему. Вокруг некоторого направления, стереографическая проекция которого отвечает заданной на проекции точке, имеется множество направлений, отклонённых от первого на один и тот же угол α и образующих в совокупности конус с углом раствора 2α . Пересечение этого конуса с поверхностью сферы даёт малый круг. В центре этого круга находится точка пересечения заданного направления со сферой. Основную трудность данной задачи составляет то, что в общем случае геометрический центр не совпадает со стереографическим.

Решение: 1) совмещаем заданную точку (точка 1 на рис. 1.22) с одной из параллелей и по меридианной дуге сетки, проходящей через исходную точку, вверх и вниз откладываем угловое расстояние α и отмечаем полученные при этом две точки;

2) вращением кальки приводим заданную точку на какую-нибудь другую параллель и снова аналогичным путём получаем пару точек;

3) повторяем такой приём до тех пор, пока точки не начнут совершенно отчётливо обрисовывать окружность. Наиболее рационально выбрать расстояние между параллелями в 20° ;

4) сдвигаем кальку к полюсу и отыскиваем параллельный круг, на котором найденные точки будут укладываться без натяжки. Для нашего случая это будет параллель, отстоящая от полюса сетки на 12° ;

5) совмещая часть построенных точек с упомянутой параллелью, в несколько приёмов вычерчиваем требуемый малый круг.

Решение задачи чрезвычайно упрощается при наличии циркуля. Поворотом кальки приводим заданную точку на горизонтальный диаметр сетки, и отсчитываем вправо и влево от неё требуемый угол α . Взяв геометрическую середину найденного отрезка, принимаем её за центр, и вычерчиваем заданный круг. Если исходная точка лежит слишком близко к кругу проекции, – задача решается по трём точкам, из которых две берутся по соответствующему меридиану сетки.

Задача 10. Заменить плоскость проекции.

За плоскость проекции можно брать любую диаметральную плоскость шара. Если вместо выбранной в предыдущих задачах плоскости мы желали бы взять какую-либо другую, то все нанесённые точки должны быть соответствующе передвинуты. При этом вновь избранную плоскость мы должны привести в то положение, которое занимала первоначальная. Это можно сделать поворотом шара вокруг двух осей, а так как система «калька – сетка» даёт возможность делать любые вращения, то задача может быть легко решена. Выберем за новую плоскость проекции ту диаметральную плоскость шара, которая сечёт его по большому кругу $A_1P_{(1,2)}A_2$ (см. рис. 1.22). Полюсом его будет точка 1. Нам надо привести эту плоскость на место прежней. Для этого мы должны:

1) привести полюс избранного круга на экватор;

2) передвинуть его по экватору так, чтобы он совместился с центром сетки.

Решение: вращением кальки приводим точку 1 на экватор. Она отстоит от центра на 73° . Делаем мысленно поворот вправо на этот угол; точка 1 попадает в центр проекции, меридиан $A_1P_{(1,2)}A_2$

стал на место крайнего правого меридиана. Точки 2 и 3 передвинулись по своим параллелям каждая на 73° . Точка 2 заняла положение точки 2 а. Для точки 3 нам не хватает места для отсчёта. Это объясняется тем, что при повороте на 73° точка 3 уходит на то полушарие, которого мы не видим. Однако положение её можно найти, если продолжать отсчёт по той же параллели в обратном направлении. Новое положение точки 3 а отмечено крестиком (до крайнего меридиана считаем 52° и затем 21° в обратном направлении).

Задача 11. Найти геометрическое место точек, отстоящих от данной диаметральной плоскости на p .

Задача решается крайне просто при помощи предыдущей.

Решение: приводим заданную плоскость к совпадению с экваториальной плоскостью сетки – это всегда можно сделать уже известными двумя вращениями. Тогда каждая пара соответственных параллельных кругов будет представлять собой искомое геометрическое место. На рис. 1.22 нанесены параллели, являющиеся геометрическим местом точек, отстоящих на 50° от плоскости, пересекающей шар по большому кругу A_1A_2 . Этим построением часто приходится пользоваться на практике.

Разобъяснённые в приведённых задачах операции составляют необходимый минимум того, что нужно знать, приступая к вычислению кристаллов при помощи кристаллографической сетки Вульфа. Занимающиеся обязательно должны проделать все построения самостоятельно, пользуясь сеткой Вульфа.

Контрольные задания для самостоятельных работ

Для закрепления степени усвоения изложенного выше материала предлагаются 30 вариантов контрольных заданий. От выполняющего эти задания требуется следующее.

1. По данным координатам нанести точки 1, 2, 3 и 4.
2. Измерить угловое расстояние $\alpha(1, 2)$, $\alpha(1, 3)$, $\alpha(2, 3)$ между точками 1 и 2, 1 и 3, 2 и 3.
3. Через точки (1 и 2) и (1 и 3) провести дуги больших кругов.

4. Построить точки диаметрально противоположные данным (1, 2, 3 и 4), обозначив их цифрой со штрихом ($1'$, $2'$, $3'$, $4'$) и найти координаты этих точек.

5. Построить полюса больших кругов, заданных точками (1 и 2), (1 и 3), и найти их координаты $P_{(1,2)}$ и $P_{(1,3)}$.

6. По заданному полюсу (точка 1) построить соответствующую ему дугу большого круга.

7. Найти угол β между двумя дугами больших кругов (дуги (1, 2) и (1, 3)).

8. Около данной точки (точка 1) построить малый круг радиусом 20° .

9. Заменить плоскость проекции и обозначить новое положение точек с индексом a (1 а, 2 а, 3 а, 4 а) плоскостью с полюсом в точке 1.

10. Найти геометрическое место точек, отстоящих от диаметральной плоскости с полюсом в точке 1 на 40° .

Контрольное задание выполняется на кальке на которой кроме аккуратно выполненных графических построений указываются фамилия и номер группы выполняющего, а также координаты точек 1, 2, 3, 4, $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $P_{(1,2)}$, $P_{(1,3)}$ и значения углов $\alpha_{(1,2)}$, $\alpha_{(1,3)}$, $\alpha_{(2,3)}$, β .

Варианты контрольных заданий

Вариант	Координаты в градусах							
	φ_1	ρ_1	φ_2	ρ_2	φ_3	ρ_3	φ_4	ρ_4
1	212	64	108	18	348	82	22	124
2	224	56	160	52	280	38	24	136
3	236	77	146	48	337	74	27	128
4	207	69	112	56	302	37	28	137
5	172	81	84	55	309	48	31	108
6	168	78	71	49	317	52	33	162
7	161	76	78	39	322	53	17	132
8	171	75	88	44	328	58	13	142
9	178	74	93	46	332	64	21	152
10	202	71	106	52	334	71	38	162
11	217	69	117	53	344	48	36	145
12	223	68	122	57	356	72	42	135
13	228	67	128	46	287	74	46	125
14	233	78	133	54	292	68	49	115

✂ РЕШЕНИЕ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ СТЕРЕОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ ✂

15	244	75	146	51	298	64	51	105
16	182	71	95	28	296	44	34	121
17	185	68	102	61	303	48	38	126
18	188	57	121	33	342	69	59	130
19	191	78	96	68	317	56	46	134
20	194	69	117	37	352	71	61	138
21	197	76	98	72	283	54	44	143
22	202	73	111	54	304	68	48	147
23	205	58	88	61	315	76	26	106
24	209	66	112	74	299	59	49	119
25	212	77	121	46	324	61	51	152
26	215	58	108	59	317	72	12	162
27	218	71	127	72	332	58	46	99
28	221	62	116	61	327	79	67	146
29	224	73	121	78	294	61	54	133
30	226	61	115	52	306	73	23	136

2. ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ СТЕРЕОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ ДЛЯ УСТАНОВЛЕНИЯ ЗАКОНОВ ОГРАНКИ И ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕМЕНТОВ СИММЕТРИИ КРИСТАЛЛОВ

2.1. Элементы симметрии

Одним из характерных признаков кристалла является их правильная геометрическая форма. В правильных кристаллических многогранниках характерно выступает закономерная повторяемость элементов их огранки (граней, рёбер, вершин) – в этом и проявляется симметрия кристаллов. Операции, подчёркивающие симметрию кристаллов, то есть устанавливающие повторяемость элементов их огранки называются *симметричными операциями*. Этими операциями, приводящими многогранник в совмещение с самим собой, являются отражения и вращения. Воображаемые плоскости, линии и точки, с помощью которых осуществляются эти операции, называются *элементами симметрии*. Характерными элементами симметрии кристаллических многогранников являются плоскости, оси симметрии и центр симметрии.

Для обозначения симметричных операций и соответствующим им элементов симметрии в кристаллографии пользуются условными символами. Наиболее распространены две системы обозначений, которые приведены в табл. 2.1.

1. Международная символика («интернациональная»), принятая Интернациональным союзом кристаллографов.

2. Символика, основанная на формулах симметрии.

В табл. 2.1 также даны международные условные изображения элементов симметрии на плоскости стереографической проекции.

Плоскости симметрии. Плоскостью симметрии называется плоскость, разделяющая фигуру на зеркально равные части, расположенные относительно друг друга как предмет и его зеркальное изображение.

Чтобы найти плоскость симметрии в многограннике, мысленно рассечём его плоскостью, проходящей через центр фигуры. Если при отражении в такой плоскости, как в зеркале, левая половина фигуры совместится всеми своими точками с правой половиной (и отражённая правая половина как бы перейдёт на место левой), проведённая плоскость является плоскостью симметрии.

При определении количества плоскостей симметрии необходимо учитывать следующее:

1. Плоскости симметрии проходят через середины граней и рёбер, перпендикулярно им, или же идут вдоль рёбер, образуя равные углы с одинаковыми гранями и рёбрами.

Таблица 2.1
Системы обозначения симметричных операций

Название	Обозначение		Направление			
	международный символ	по формуле симметрии	перпендикулярное	параллельное		
Плоскость симметрии	m	P				
Центр симметрии	1	C				
Поворотная ось симметрии	n	L _n				
двойная	2	L ₂				
тройная	3	L ₃				
четверная	4	L ₄				
шестерная	6	L ₆				
Инверсионная ось симметрии	n	L _{in}				
тройная	$\bar{3}$	L _{3i}				
четверная	$\bar{4}$	L _{4i}				
шестерная	$\bar{6}$	L _{6i}				

2. При подсчёте количества плоскостей симметрии в исследуемой фигуре нужно держать её в одном положении, для того чтобы одну и ту же плоскость не считать несколько раз.

Изображение плоскостей на проекции удобнее всего рассмотреть на примере куба (рис. 2.1), имеющего максимально возможное в кристаллографических формах количество плоскостей (девять). В других кристаллах могут присутствовать одна, две, три, пять, шесть и семь плоскостей симметрии.

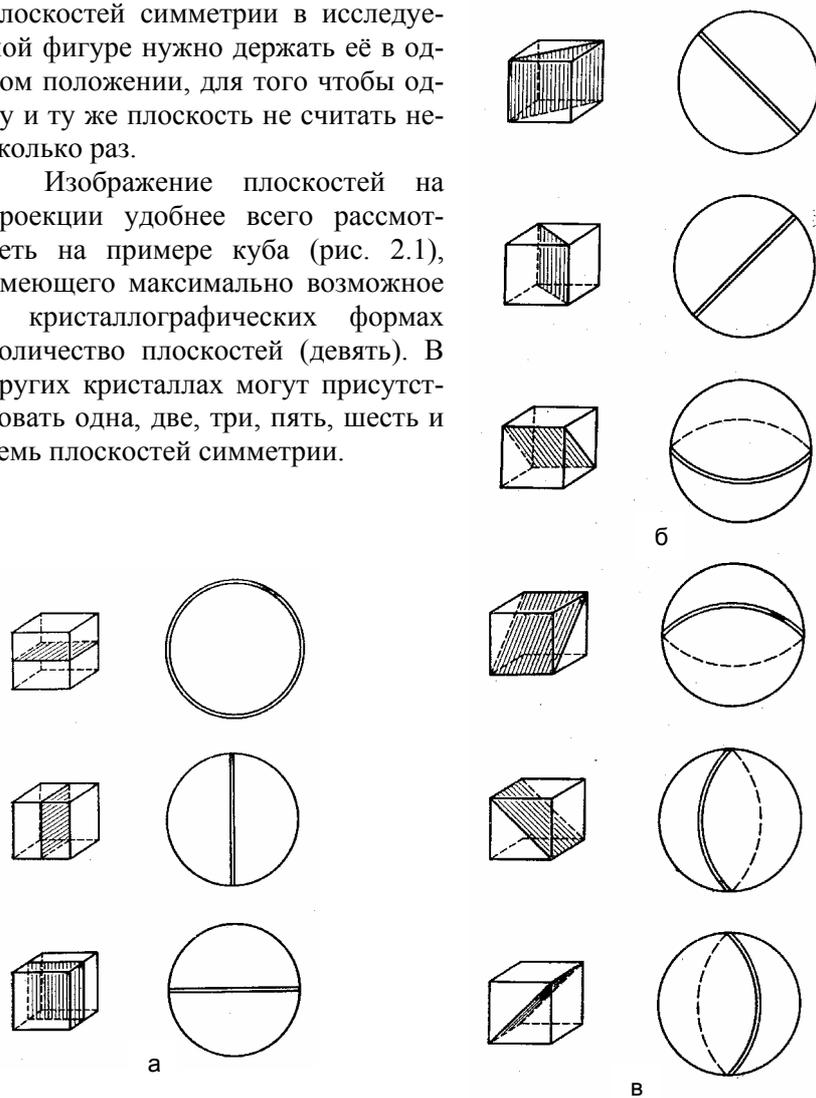


Рис. 2.1. Плоскости симметрии куба и их стереографические проекции: а – три координатные плоскости симметрии; б, в – шесть диагональных плоскостей симметрии

В любом идеально развитом кристалле кубической формы через середины его граней можно провести всего три взаимно перпендикулярные плоскости, параллельно граням куба (рис. 2.1, а). Они делят пополам противоположные рёбра куба, как координатные плоскости прямоугольной системы координат. Кроме того, воображаемая плоскость, делящая куб пополам, может проходить через диагонали двух противоположных его граней (рис. 2.1, б) и через два противоположных ребра (рис. 2.1, в). Таких плоскостей в кубе может быть только шесть. Все девять плоскостей симметрии куба (три параллельные его граням и шесть диагональных) пересекаются в одной точке – в центре куба. Других плоскостей симметрии в кубе нет. Таким образом, плоскости симметрии в симметричной фигуре располагаются строго определённо и все пересекаются друг с другом.

Симметричные преобразования плоскостями, различно ориентированными по отношению к плоскости чертежа, отображены на рис. 2.2, а, б, в.

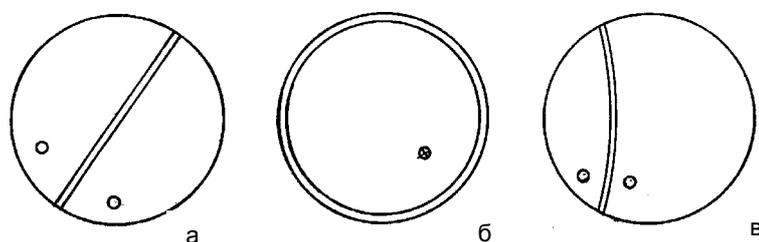


Рис. 2.2. Симметричное преобразование плоскостью:
а – перпендикулярной плоскости чертежа; б – параллельной плоскости
чертежа; в – наклонной к плоскости чертежа

Оси симметрии. Поворотной осью симметрии называется воображаемая прямая, при повороте вокруг которой на определённый угол фигура совмещается сама с собою. Минимальный угол, на который надо повернуть фигуру, чтобы она совместилась сама с собою, называется *элементарным углом поворота*. Количество совмещений при повороте на 360° определяет порядок поворотной оси. Доказано, что в кристаллах возможны оси второго, третьего, четвёртого и шестого порядков (рис. 2.3, а, б, в).

Осей пятого и более шестого порядков в кристаллах не бывает. Причина этого наглядно выступает из рис. 2.4, по М. П. Шаскольской (1976), это как бы плоские сетки (узоры паркета), составленные из одинаковых многоугольников с осями симметрии от второго до восьмого порядков. Видно, что при помощи пяти-, семи-, восьмиугольников не удаётся однородно покрыть всю плоскость, остаются дырки, а их в плоской сетке пространственной решётки, являющейся основой любого кристалла, не бывает.

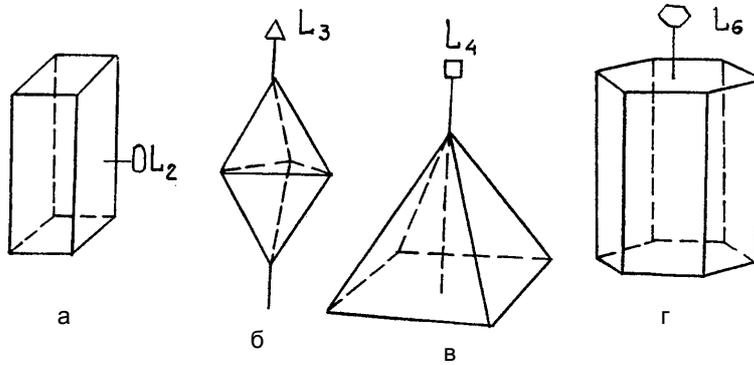


Рис. 2.3. Многогранники с осями симметрии второго (а), третьего (б), четвертого (в) и шестого (г) порядков

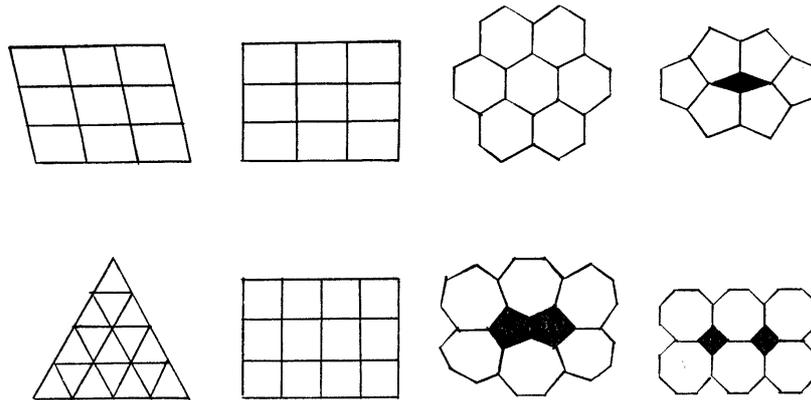


Рис. 2.4. Плоские узоры из фигур с разными осями симметрии

Симметричное преобразование осями разных порядков показано на рис. 2.5.

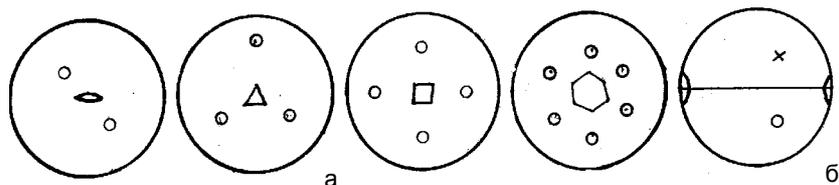


Рис. 2.5. Симметричное преобразование осями разных порядков:
а – перпендикулярные плоскости чертежа;
б – параллельные плоскостям чертежа

Примеры изображения осей на проекции также рассмотрим на примере куба. У куба есть три оси 4-го порядка, которые проходят через центры противоположных граней, четыре оси 3-го порядка, являющиеся пространственными диагоналями куба, и шесть осей 2-го порядка, проходящих через середины пар противоположных рёбер (рис. 2.6). Соответственно углы поворота при них 90° , 120° и 180° . Все оси симметрии пересекаются в центре куба.

Оси симметрии – изображаемая прямая, проходящая через середину кристалла, – может соединять либо два совершенно одинаковых, либо два различных элемента огранения, например вершину и грань, ребро и грань, две грани, различные по форме и по размерам и т. п. Оси симметрии, соединяющие одинаковые элементы огранения кристалла, называются *биполярными* в отличие от *полярных осей*, соединяющих различные элементы огранения.

На рис 2.7, а изображён кристалл с биполярной осью 4-го порядка, а на рис 2.7, б – кристалл с полярной осью 4-го порядка; ниже приведены соответствующие стереографические проекции. Из стереограммы ясно, что в первом случае в кристалле имеется как плоскость симметрии, перпендикулярная оси 4-го порядка, так и центр симметрии, во втором случае таковые отсутствуют. На чертеже в случае полярной оси геометрический значок становится лишь у одного конца её, как показано на рис. 2.7, б.

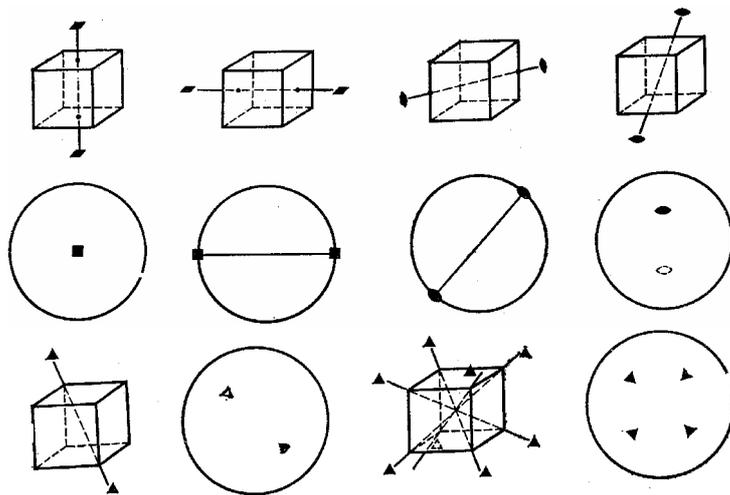


Рис. 2.6. Некоторые из осей симметрии куба и их стереографические проекции

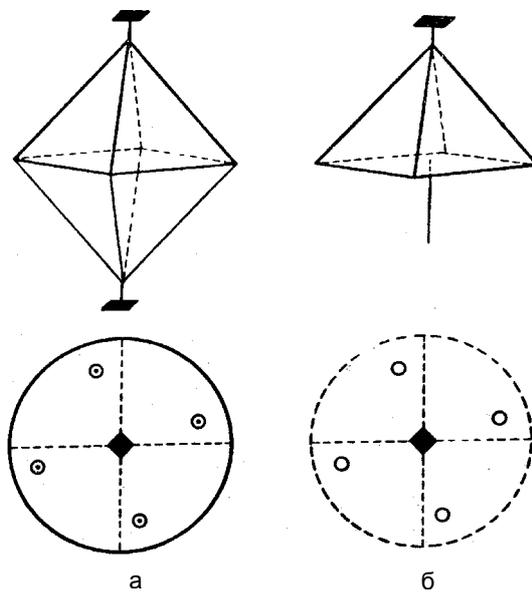


Рис. 2.7. Полярная и биполярная оси 4-го порядка и соответствующие стереографические проекции:
 а – биполярная ось 4-го порядка; б – полярная ось 4-го порядка

Центр симметрии (центр инверсии, центр обратного равенства) – особая точка внутри фигуры, характеризующаяся тем, что любая прямая, проведённая через центр симметрии, встречает одинаковые (соответственные) точки фигуры по обе стороны от центра на равных расстояниях. Симметричное преобразование в центре – это зеркальное отражение в точке (рис. 2.8). Каждая точка фигурки отражается в центре так, что фигурка как бы поворачивается при этом «с лица на изнанку». На рис. 2.8, в изображена гномостереографическая проекция двух граней кристалла, преобразующихся одна в другую с помощью инверсии в центре симметрии.

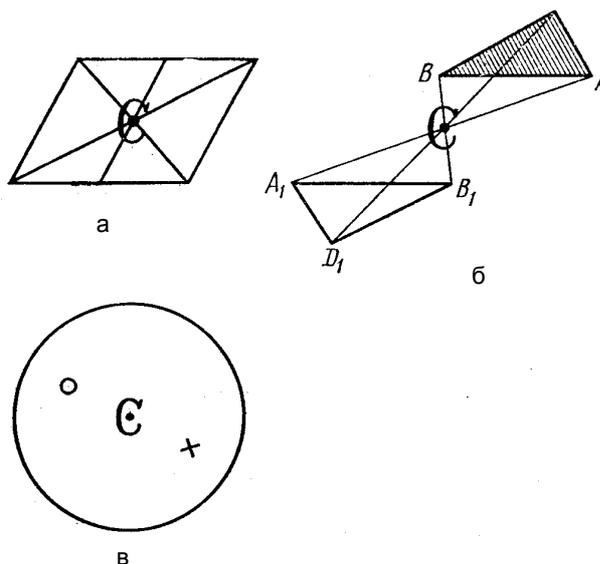


Рис. 2.8. Действие центра симметрии:
а, б – симметричные фигуры; в – гномостереографическая проекция двух
граней симметричных относительно центра симметрии

В кристаллах, имеющих центр симметрии, противоположные грани попарно равны (рис. 2.9). В данном случае соответствующие грани повторяются при отражении их в некоторой воображаемой точке; такая операция называется инверсией. На рис. 2.9 для наглядности заштрихована пара инверсионно равных граней.

Оси составной симметрии. Кроме рассмотренных простых операций симметрии в кристаллах возможны и другие комбинарованные геометрические преобразования: одновременные поворот и отражение либо в точке, либо в плоскости. В результате этих составных геометрических преобразований приходим к дополнительным элементам симметрии кристалла, а именно – *инверсионным* и *зеркальным осям*. Подобно обыкновенным осям симметрии, инверсионные и зеркальные оси могут быть 1, 2, 3, 4 и 6-го порядков в зависимости от угла поворота.

Инверсионные оси симметрии представляют собой сочетание оси вращения и одновременного отражения (инверсии) в центре симметрии.

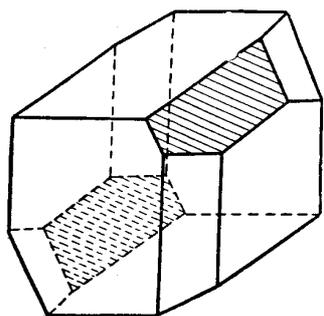


Рис. 2.9. Кристаллический многогранник, имеющий только центр симметрии

Рассмотрим многогранник с инверсионной осью симметрии и его гномостереографическую проекцию (рис. 2.10). Повернём мысленно этот многогранник на 90° ; грани четырёхгранной призмы могли бы быть при этом симметрично совместиться друг с другом, но не совместятся две «двухскатные крыши», повернутые под углом 90° друг к другу. Значит, простой оси 4-го порядка у этого многогранника нет. Можно совместить его грани только путём сложного преобразования: повернуть многогранник во-

круг вертикальной оси на 90° и одновременно отразить его грани в центре симметрии. Это симметричное преобразование инверсионной осью 4-го порядка. На рис. 2.10, б показано построение проекций граней, симметричных относительно оси $\bar{4}$: грань *A* поворачивается на 90° на верхней полусфере проекции и, отражаясь в центре симметрии, занимает положение *B* на нижней полусфере проекции.

Обратим внимание на то, что у этого многогранника нет ни оси 4, ни центра симметрии. В самом деле грань, *A* не совместится с гранью *B* ни путём инверсии в центре симметрии, ни путём простого поворота на 90° .

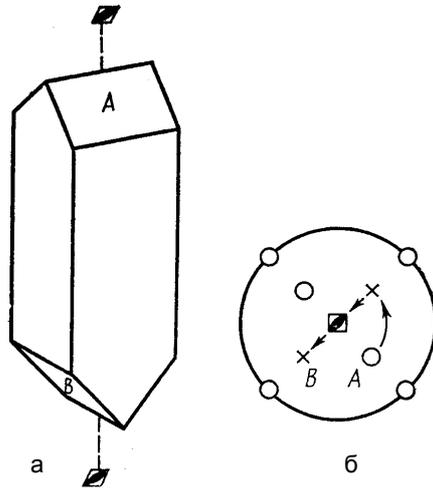


Рис. 2.10. Многогранник с инверсионной осью симметрии $\bar{4}$ – (а) и его гномостереографическая проекция – (б); стрелками указано симметричное совмещение граней А и В

Симметричное преобразование здесь включает в себя поворот на 90° и отражение в центре, действующие совместно, т. е. инверсионную ось $\bar{4}$. На рис. 2.11, а показано начало симметричного преобразования инверсионной осью $\bar{6}$: грань А поворачивается на 60° , но не отражаясь в центре симметрии попадает в положение A_1 . На рис. 2.11, б показаны гномостереографические проекции граней, симметричных относительно инверсионных осей $\bar{1}2\bar{3}4\bar{6}$. Нетрудно видеть, что инверсионная ось $\bar{1}$ -

го порядка эквивалентна центру симметрии, а инверсионная ось $\bar{2}$ -го порядка эквивалентна плоскости симметрии: $\bar{1} = C$; $\bar{2} = P$. Инверсионная ось $\bar{4}$ всегда является одновременно поворотной осью 2, ось $\bar{6}$ – осью 3 (но не наоборот). Инверсионная ось $\bar{3}$ может рассматриваться как совокупность отдельно действующих оси 3 и центра симметрии: $L_{3i} = \bar{3} = L_3C$.

Зеркально-поворотная ось симметрии представляет собой сочетание оси симметрии и отражения в плоскости симметрии, перпендикулярной этой оси. Однообразия в отношении обозначения зеркально-поворотных осей не наблюдается: они могут обозначаться как: $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ, 6^\circ; \tilde{1}\tilde{2}\tilde{3}\tilde{4}\tilde{6}$; $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \Lambda_4, \Lambda_6$ или S_1, S_2, S_3, S_4, S_6 .

На рис. 2.12, а показано начало симметричного преобразования осью $\bar{6}$ (Λ_6); грань А (кружок) на верхней полусфере проекций поворачивается на 60° и, отражаясь в горизонтальной плоскости симметрии, попадает на нижнюю полусферу проекции A' (крестик).

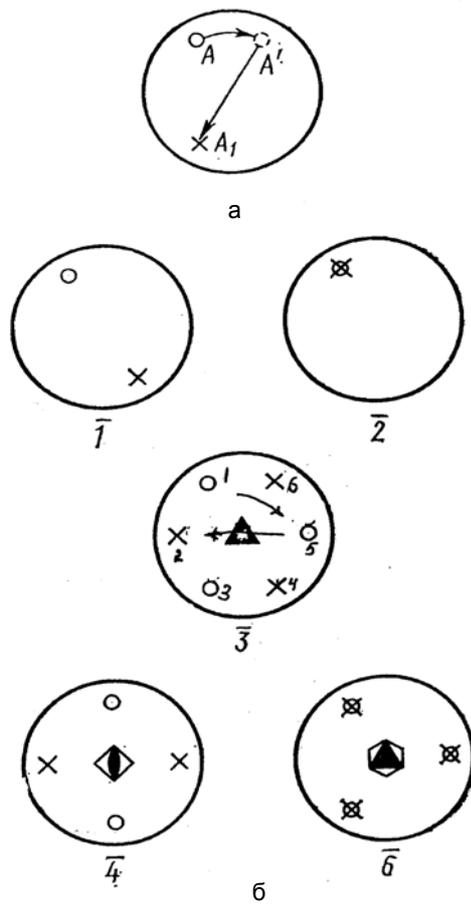


Рис. 2.11. Начало симметричного преобразования инверсионной осью $\bar{6}$ (а); грани, симметричные относительно инверсионных осей $\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\bar{6}$ (б) (гномостереографическая проекция)

Окончательный результат преобразования осью $\bar{6}$ (Λ_6) можно видеть на рис. 2.12, б, где показаны действия осей $\bar{1}$ (Λ_1), $\bar{2}$ (Λ_2), $\bar{3}$ (Λ_3), $\bar{4}$ (Λ_4), $\bar{6}$ (Λ_6).

В международной символике зеркально-поворотные оси не указываются, потому, что все зеркально-поворотные оси, возможные в кристаллах, можно заменить инверсионными осями симметрии. Из сравнения рис. 2.12 с рис. 2.11 видно, что $\bar{1} = \bar{2} = m$; $\bar{2} = \bar{1} = C$; $\bar{3} = \bar{6} = L_3P$; $\bar{4} = \bar{4}$; $\bar{6} = \bar{3} = L_3C$.

Необходимо обратить внимание на то, что $\bar{6}$ тождественна не $\bar{6}$, а $\bar{3}$ и $\bar{3}$, в свою очередь, тождественна не $\bar{3}$, а $\bar{6}$; то же относится к осям $\bar{1} = \bar{2}$ и $\bar{2} = \bar{1}$. При всех симметричных преобразованиях все расстояния между точками фигуры остаются неизменными, т. е. фигура не испытывает растяжения, сжатия, изгиба.

Когда мы отражаем кристаллический многогранник в плоскостях симметрии, зеркально отражаются все его точки, кроме находящихся на самой плоскости симметрии. Когда кристалличе-

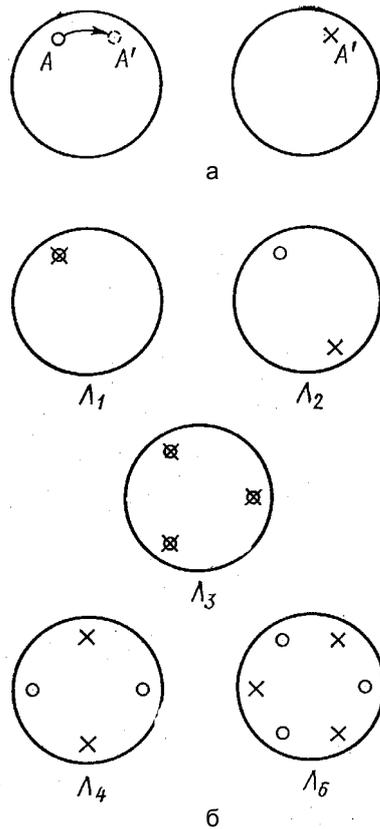


Рис. 2.12. Начало симметричного преобразования зеркально-поворотной осью $\tilde{6}$ (а); грани симметричные относительно зеркально-поворотных осей $\tilde{1}\tilde{2}\tilde{3}\tilde{4}\tilde{6}$ (б) (гномо-стереографическая проекция)

рично преобразуются не точки, а, например, несимметричные двухцветные фигурки (средний ряд, рис. 2.13) меняющие белую «лицевую» сторону и чёрную «изнанку», то различие сразу же выявляется. Плоскость симметрии поворачивает фигурку в зеркально равные положения, не переворачивая «с лица на изнанку».

ский многогранник поворачивается вокруг разных осей симметрии, поворачиваются все точки, кроме точек, лежащих на самой оси симметрии. Наконец, при отражении в центре симметрии остаётся одна точка, не отражающаяся, не смещающаяся – сам центр. Таким образом, при всех этих преобразованиях фигура не перемещается как целое и хотя бы одна её точка остаётся на месте. Поэтому такие преобразования, оставляющие фигуру на месте, называются *точечными симметричными преобразованиями*.

Итак, внешняя, видимая точечная симметрия кристаллов исчерпывающе описывается следующими элементами симметрии – $m, 1, 2, 3, 4, 6, \bar{4}, \bar{6}$.

Обратим внимание на то, что действие оси 2 не всегда легко отличить от действия плоскости или центра симметрии. Две точки в верхнем ряду рис. 2.13 симметричны, но определить тип преобразования здесь нельзя. Это могла быть и ось 2, и плоскость m , и центр симметрии. Если же симмет-

Преобразование в центре симметрии переворачивает фигуру «наизнанку» и в обратное положение.

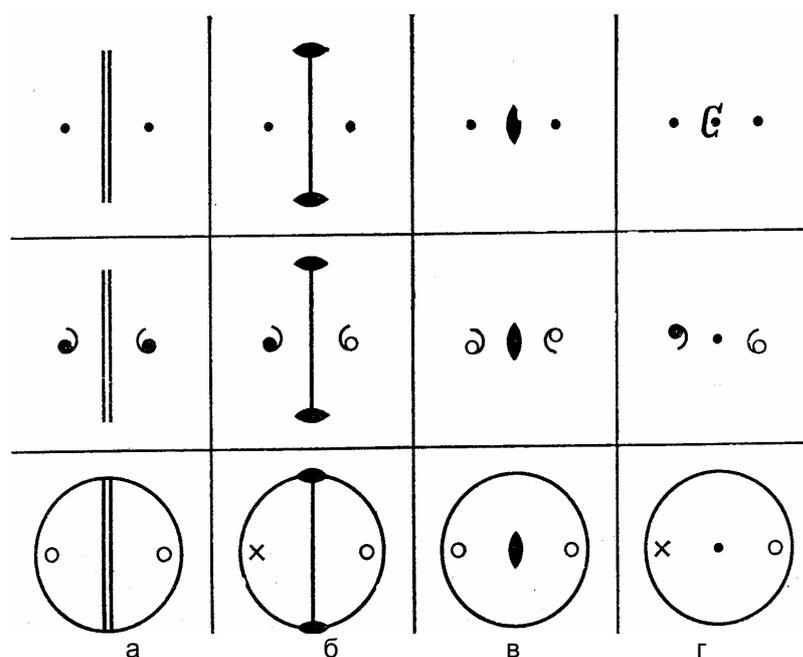


Рис. 2.13. Симметричное преобразование:

а – плоскостью чертежа; б – осью симметрии 2-го порядка, лежащей в плоскости чертежа; в – осью симметрии 2-го порядка, перпендикулярной плоскости чертежа; г – инверсией в центре симметрии (нижний ряд – те же преобразования, показанные на гномостереографической проекции)

2.2. Взаимодействие элементов симметрии

В симметричных многогранниках операции симметрии сочетаются друг с другом. Естественно ожидать большого числа их сочетаний, но, однако, имеется ряд ограничений числа их возможных сочетаний. Эти ограничения определяются несколькими теоремами о сочетании элементов симметрии. Ниже даны нестрогие доказательства этих теорем, или поясняющие их иллюстративные примеры, приведённые М. П. Шаскольской (1976).

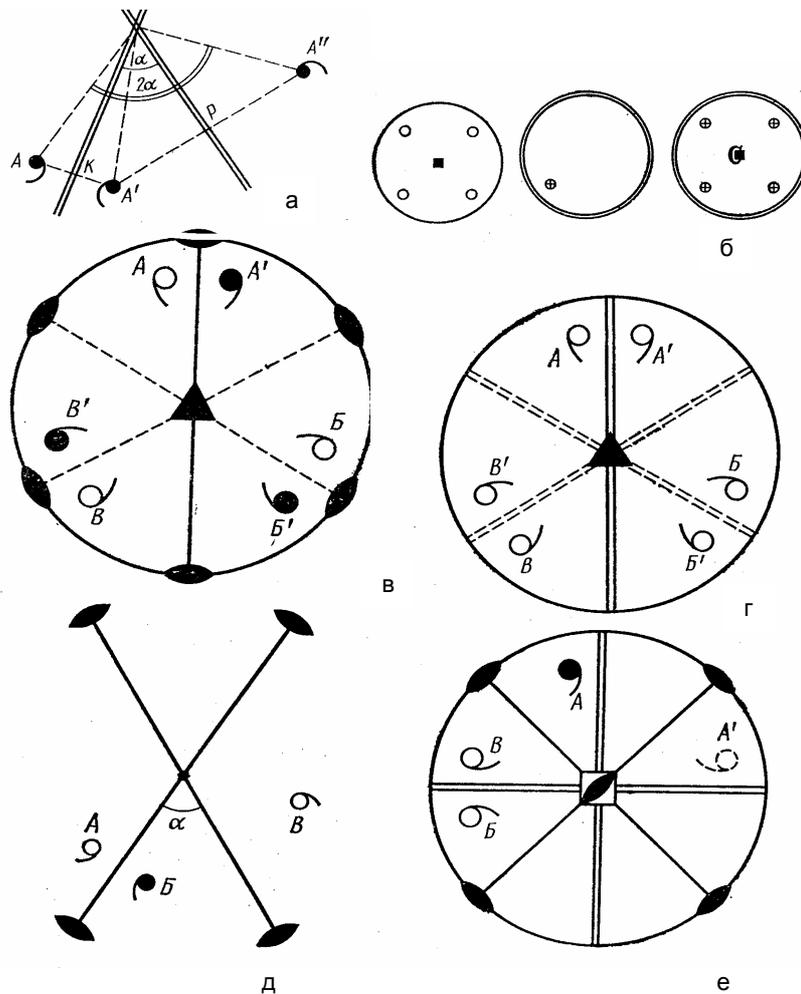


Рис. 2.14. Иллюстрации к теоремам о сочетании элементов симметрии:
 а – к теоремам 1 и 1 а; б – к теоремам 2, 2 а и 2 б; в – к теореме 3;
 г – к теореме 4; д – к теореме 5; е – к теореме 6

Теорема 1. Линия пересечения двух плоскостей симметрии является осью симметрии, причём угол поворота вокруг этой оси вдвое больше угла между плоскостями.

Доказательство этой теоремы ясно из равенства треугольников AKO и $A'KO$, а также $A'OP$ и $A''OP$ на рис. 2.14, а. Последова-

тельные отражения фигурки (запятой) в двух зеркалах, поставленные под углом α , эквивалентны повороту на угол 2α вокруг оси перпендикулярной плоскости чертежа в точке 0.

Теорема 1 а (обратная). Поворот вокруг оси симметрии на угол α эквивалентен отражениям в двух плоскостях симметрии, проходящих вдоль оси; угол между плоскостями равен $\alpha/2$, причём отсчёт угла производится в направлении поворота.

Доказательство теоремы очевидно из того же рис. 2.14, а.

Теорема 2. Точка пересечения чётной оси симметрии с перпендикулярной ей плоскостью симметрии есть центр симметрии.

На первой проекции рис. 2.14, б показано действие оси L_4 , перпендикулярной плоскости чертежа, на второй – действие плоскости симметрии, совпадающей с плоскостью чертежа. Очевидно, сочетание этих двух преобразований даёт картину, показанную на рис. 2.14, б справа, где для каждой грани имеется парная, связанная с ней центр симметрии. В международных символах такое сочетание обозначается $4/m$, в общем случае n/m , где n – порядок оси. Черта в символе обозначает, что плоскость перпендикулярна оси.

Теорема 2 а (обратная). Если есть чётная ось симметрии и на ней центр симметрии, то перпендикулярно этой плоскости проходит чётная ось симметрии.

Действие этих теорем видно на том же рис. 2.14, б.

Теорема 3. Если есть ось симметрии n -го порядка и перпендикулярно этой оси проходит ось 2-го порядка, то всегда имеется n осей 2-го порядка, перпендикулярных оси n -го порядка.

Покажем это на проекции для случая, когда ось 2, лежащая в плоскости чертежа, перпендикулярна оси 3 (рис. 2.14, в). Поворот вокруг оси 2 переведёт A в положение A' , поворот вокруг оси 3 переведёт A в B и B , A' – в B' и B' . Но, очевидно, каждая пара фигур B и B' , или B и B' , связана между собой также и поворотами вокруг оси 2, проходящей между ними в плоскости чертежа, т. е. имеется не одна ось 2, а три такие оси.

Эту теорему легко понять также и по самому определению оси симметрии: вокруг оси n -го порядка любой объект симметрично повторяется n раз. Международное обозначение такого сочетания $L_n L_2 - n2$ (в приведённом примере $L_3 L_2 - 32$).

Теорема 4. Если есть ось симметрии n -го порядка и вдоль неё проходит плоскость симметрии, то имеется n таких плоскостей.

Иллюстрацией теоремы служит рис. 2.14, *г*. Плоскость m , проходящая вдоль оси 3 преобразует фигуру A в A' . Поворот оси 3 преобразует A в B и A' в B' и B'' . Но каждая пара B и B' , или B и B'' , связана между собой и отражением в плоскости m . Обозначения $L_n n P$ или $n m$ (в нашем случае – $L_3 3 P$ или $3 m$).

Теорема 5 (теорема Эйлера). Равнодействующей двух пересекающихся осей симметрии является третья ось, проходящая через точку их пересечения.

Рисунок 2.14, *д* служит иллюстрацией этой теоремы для частного случая, когда две оси 2 лежат в плоскости чертежа, пересекаясь под углом α : поворот вокруг первой оси приводит фигуру A в положение B , поворачивая её с лицевой стороны «наизнанку», а поворот вокруг второй оси – в положение B , снова поворачивая фигуру «с изнанки на лицо». Конечный результат оказывается таким же, как и в случае пересечения двух плоскостей (см. рис. 2.14, *а*), хотя промежуточные операции различны. Очевидно, фигуру B можно было бы получить поворотом фигуры A в плоскости чертежа на угол 2α вокруг оси симметрии, проходящей через точку пересечения заданных осей.

Теорема 6. Плоскость, проходящая вдоль чётной инверсионной оси симметрии, приводит к появлению оси 2-го порядка, перпендикулярной инверсионной оси и проходящей по биссектрисе угла между плоскостями.

Рисунок 2.14, *е* иллюстрирует эту теорему для случая оси $\bar{4}$. Прежде всего, заметим, что инверсионная ось $\bar{4}$ является одновременно простой осью симметрии 2, а по теореме 4, если задана одна плоскость симметрии вдоль оси 2, значит, неизбежно появляется и вторая плоскость симметрии. С помощью оси $\bar{4}$ фигура переходит из положения A через положение A' в положение B , а с помощью второй плоскости – из B в положение B . Можно видеть, что фигура A связана с фигурой B также и поворотом вокруг оси 2-го порядка, проходящей по биссектрисе угла между плоскостями симметрии. Действительно, это ось 2, а не плоскость m : фигура B повернута белой стороной, а фигура A – чёрной, т. е. произо-

шёл поворот с лица на изнанку. Таким образом, от добавления продольной плоскости симметрии к оси $\bar{4}$ появилась вторая продольная плоскость m и две оси 2. Полное сочетание элементов симметрии записывается как $L\bar{4}2L_22P(\bar{4}2m)$.

Аналогично, если добавить плоскость вдоль оси $\bar{6}$, получим сочетание $L\bar{6}3L_23P$ или, что-то же самое L_3L_24P (или $\bar{6}m2$).

2.3. Виды симметрии

Полное сочетание элементов симметрии кристаллического многогранника называется его видом симметрии. Сформулированные выше теоремы ограничивают число возможных сочетаний элементов симметрии, приводя лишь к строго определённым комбинациям. Всё многообразие симметрии кристаллических многогранников и их физических свойств описывается 32 видами симметрии. Эти 32 вида симметрии лежат в основе морфологии кристаллов и имеют ещё одно название – *классы кристаллов*.

Вывод 32 видов симметрии. Строгий математический вывод всех возможных сочетаний элементов симметрии был впервые сделан И. Гесселем в 1830 г. Позднее многие авторы сделали тот же вывод различными способами.

Для вывода 32 видов симметрии часто пользуются пятью основными ступенями симметрии, которым соответствуют пять основных кристаллографических форм (рис. 2.15).

I. *Примитивная*, или полярная, симметрия – без элементов симметрии. Все грани кристалла различны по форме и размерам и, следовательно, не повторяются. В таких кристаллах присутствуют лишь оси идентичности L_1 . Каждая грань подобных кристаллов представляет собой независимую простую форму, называемую *моноэдром* (монос – один).

II. *Центральная* симметрия – имеет центр симметрии. Здесь каждой грани отвечает другая, одинаковая по форме, размерам и антипараллельная первой.

Две такие грани образуют простую форму, называемую *пинаксом* («пинакс» – доска).

III. *Аксиальная*, или осевая, симметрия – имеется одна полярная ось 2-го порядка. Здесь любая грань совмещается с другой

путём поворота на 180° вокруг оси 2-го порядка. Две такие грани в общем положении образуют клиновидную форму – осевой диэдр.

IV. *Планальная симметрия* – с плоскостью симметрии между двумя гранями, расположенными в виде крыши и совмещающиеся друг с другом при отражении в плоскости симметрии – безосный диэдр.

V. *Планаксиальная симметрия* – сочетание двух предыдущих типов (ступеней) симметрии. Характерна четырёхгранная форма, называемая призмой.

Эти пять основных форм могут быть восстановлены во всех более высокосимметричных кристаллических формах. Последние получаются путём повторения основных форм при поворотах вокруг соответствующих осей симметрии.

На рис. 2.16 показан вывод форм, отличающихся по своей симметрии и облику характеризующих соответственные кристаллографические классы, путём сочетания оси симметрии 3-го порядка с пятью простыми основными формами, так как на рис. 2.16, I трижды повторённый моноэдр даёт трёхгранную пирамиду с одной полярной осью третьего порядка; на рис. 2.16, II трижды повторённый вокруг оси третьего порядка пинакоид приводит к так называемому ромбоэдру, характеризующемуся одной осью 3-го порядка и центром симметрии; на рис. 2.16, III трижды повторённый осевой диэдр даёт тригональный трапецоэдр с одной осью 3-го порядка и двумя полярными осями 2-го порядка. На рис. 2.16, IV трижды повторённый безосный диэдр создаёт, так называемую, дитригональную пирамиду, с одной полярной осью третьего порядка и тремя плоскостями симметрии, проходящими через неё. На рис. 2.16, V трижды повторённая призма даёт так называемый дитригональный скаленоэдр, имеющий одну ось третьего порядка, три плоскости симметрии, три перпендикулярные им оси 2-го порядка и центр симметрии.

Таким путём могут быть выведены 32 вида симметрии (32 класса кристаллов), характеризующиеся следующими комплексами элементов симметрии (табл. 2.2).

На рис. 2.17 представлены стереографические проекции всех 32 видов симметрии, а на рис. 2.18 и 2.19 характеристические для них формы и представители минералов.

Приведёнными 32 видами симметрии исчерпываются все возможные сочетания элементов симметрии кристаллов. 32 вида симметрии были выведены сначала математическим путём, и не для каждого из них имелись известные представители среди кристаллов. Со временем такие представители были найдены для всех видов (рис. 2.19), причём до сих пор не найдено ни одного кристалла, который бы не попадал в тот или иной из 32 видов симметрии.

Все виды симметрии делятся на три категории: низшую, среднюю и высшую. Низшая категория включает виды симметрии, не имеющие осей выше 2-го порядка; средняя категория включает виды симметрии с одной осью выше 2-го порядка; высшая категория включает виды симметрии с несколькими осями высшего порядка.

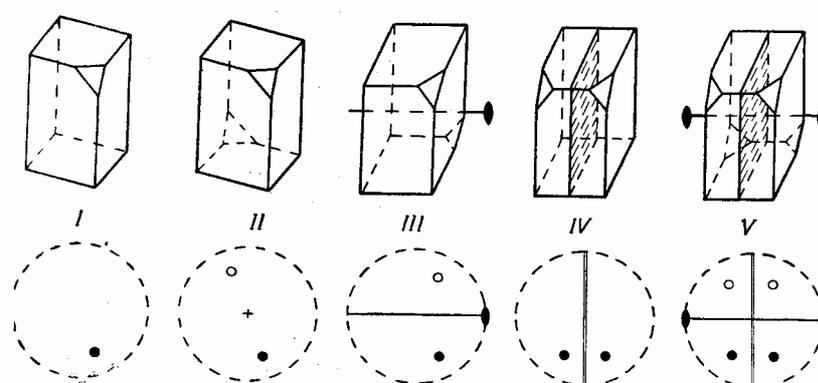


Рис. 2.15. Основные ступени симметрии:

- I – примитивная, или полярная, соответствующая форма – моноэдр;
- II – центральная (пинакоид); III – аксиальная, или осевая (осевой диэдр);
- IV – планальная (безосный диэдр); V – планаксиальная (призма)

Таблица 2.2

Сводка видов симметрии кристаллических многогранников

Категория	Сингония	Вид симметрии							
		примитивный	центральный	планальный	аксиальный	панаксиальный	инверсионно-примитивный	инверсионно-планальный	
Низшая	Триклинная	$L_1 (1)$	$C (1)$						
	Моноклинная			$P (m)$		$L_2 PC (2/m)$			
	Ромбическая			$L_2 P (mm2)$	$3L_2 (222)$	$3L_2 3PC (mmm)$			
Средняя	Тригональная	$L_3 (3)$	$L_3 C (3)$	$L_3 P (3m)$	$L_3 3L_2 (32)$	$L_3 3L_2 3PC (3m)$			
	Тетрагональная	$L_4 (4)$	$L_4 PC (4/m)$	$L_4 P (4mm)$	$L_4 4L_2 (422)$	$L_4 4L_2 5PC (4mm)$	$L_4 (\bar{4}) 4 \bar{4}$	$L_4 2L_2 2P (4 2m)$	
	Гексагональная	$L_6 (6)$	$L_6 PC (6mm)$	$L_6 P (6mm)$	$L_6 6L_2 (622)$	$L_6 6L_2 7P (6mm)$	$L_{6ss} (\bar{6}) = L_3 P$	$L_6 3L_2 3P = L_3 3L_2 4P (\bar{6} m2)$	
Высшая	Кубическая	$3L_2 4L_3 (23)$	$3L_2 4L_3 3PC (m3)$	$3L_2 4L_3 6P (4 3m)$	$3L_4 4L_3 6L_2 (422)$	$3L_4 4L_3 6L_2 9PC (m3m)$			

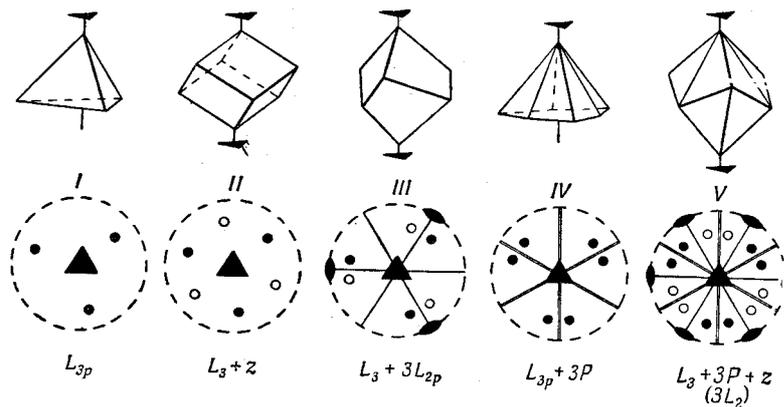


Рис. 2.16. Вывод пяти классов симметрии путем сочетания оси 3-го порядка с основными степенями симметрии

Каждая категория подразделяется на сингонии. Сингония объединяет виды симметрии, обладающие одним или несколькими одинаковыми элементами симметрии и имеющие одинаковое расположение кристаллографических осей.

В нижней категории выделяется три сингонии: триклинная, моноклинная, ромбическая. В кристаллах триклинной сингонии нет ни осей, ни плоскостей симметрии; у моноклинных кристаллов могут быть и ось и плоскость, но не может быть нескольких одинаковых элементов симметрии; ромбические кристаллы, наоборот, имеют несколько одинаковых элементов симметрии.

В средней категории также выделяется три сингонии, которые называются по типу главной оси – тригональная (имеет поворотную или инверсионную ось третьего порядка); тетрагональная (имеет поворотную или инверсионную ось четвертого порядка); гексагональная (имеет поворотную или инверсионную ось шестого порядка).

Классификация	Сингония	Примитивный	Инверсионно-примитивный	Центральный	Аксиальный	Планиальный	Инверсионно-планиальный	Аксиально-центральный
Низшая	Триклинная	1		1	2	m		$\frac{2}{m}$
	Моноклиная				222	m2		m2
	Ромбическая				32	3m		3m
Средняя	Тригональная	3		3	622	6mm		6/mmm
	Гексагональная	6	6	$\frac{6}{m}$	422	4mm	$\frac{6}{m}2$	$\frac{6}{m}2$
	Тетрагональная	4	4	$\frac{4}{m}$	432	43m	$\frac{4}{m}2$	$\frac{4}{m}2m$
Вышая	Кубическая	23		$\frac{m}{3}$				m3m

Рис. 2.17. Стереографические проекции видов симметрии

Сингонии	Ступени симметричности						A	B
	I	II	III	IV	V			
Моноклин-триклинная	 Педюион (моноклин)	 Пинакоид	 Диэдр осевой	 Диэдр безосный	 Призма			
Ромбическая			 Тетраэдр	 Пирамида	 Бипирамида			
Тригональная	 Пирамида	 Ромбоэдр	 Трапецоэдр	 Дитриг. пир.	 Скаленоэдр			
Тетрагональная	 Пирамида	 Бипирамида	 Трапецоэдр	 Дитетр. пир.	 Дитриг. битир.	 Тетраэдр	 Скаленоэдр	
Гексагональная	 Пирамида	 Бипирамида	 Трапецоэдр	 Дигекс. пир.	 Дигекс. битир.	 Триг. битир	 Дитриг. битир.	
Кубическая	 Пентагон-тритедр	 Диодоэкаэдр	 Пентагон-триокт.	 Гексатетраэдр	 Гексоктаэдр			

Рис. 2.18. Характеристические формы 32 видов симметрии

Высшая категория включает одну сингонию – кубическую, имеющую несколько осей высшего порядка (в частности, все кристаллы кубической сингонии имеют четыре оси третьего порядка).

Сравнительная характеристика сингоний приведена в табл. 2.3.

Симметрия	Ступени симметричности						
	I	II	III	IV	V	A	B
Моноклинно-тригональная	 Sr-тартарат	 Аксинит	 Винная к-та	 Хилгардит	 Аегит		
Ромбическая			 Эпсамит	 Гемморфит	 Топаз		
Тригональная	 Na-перовит	 Диоптаз	 β-кварц	 Турмалин	 Кальцит		
Тетрагональная	 Вульфенит	 Шеелит	 Фосгенит	 Диабалейт	 Касситерит	 Канит	 Халькопирит
Гексагональная	 Нефелин	 Апатит	 α-кварц	 Цинкит	 Берилл		 Бенитоит
Кубическая	 Ва-нитрат	 Пирит	 Куприт	 Сфалерит	 Флюорит		

Рис. 2.19. Представители 32 видов симметрии

Таблица 2.3

Сравнительная характеристика сингоний

Количество элементов симметрии	Категории и сингонии							высшая категория
	низшая категория			средняя категория				
	триклинная	моноклинная	ромбическая	тригональная	тетрагональная	гексагональная	кубическая	
Минимум элементов симметрии	Нет ни одной оси выше 2-го порядка			Только одна ось выше 2-го порядка				Более одной оси выше 2-го порядка
Обязательно присутствуют	Нет элементов симметрии	Одна L_2 и (или) одна P	Более одной L_2 или P	L_3	L_4 или L_4	L_6 или L_{16}	$4L_3$	
Максимум возможных элементов симметрии	C	L_2PC	$3L_23PC$	L_33L_23PC	L_44L_25PC	L_66L_27PC	$4L_33L_46L_29PC$	
Характерный признак данной сингонии	Нет осей и плоскостей симметрии	По одной L_2 или (и) P	Более одной L_2 или P при отсутствии других осей	Одна L_3		Одна L_6 или L_{16}	Наличие $4L_3$	

2.4. Морфология кристаллов

Кристаллография как точная наука родилась при изучении внешней формы кристаллов. Наблюдение внешней формы – плоских граней, углов между ними и изучение обнаруживающихся при этом закономерностей привели к однозначному заключению о правильности внутренней структуры кристаллов. Свободно развивающиеся кристаллы обычно образуют многогранники с различным количеством граней. По характеру внешней огранки все кристаллы можно разбить на две группы. К первой группе относятся кристаллы, состоящие из одинаковых и симметрично расположенных граней. Это кристаллы в виде куба, октаэдра, дипирамиды и др. Ко второй группе относятся идеальные кристаллы, обладающие различными по величине и очертаниям граням, например спичечный коробок, имеющий грани трёх сортов в виде парных прямоугольников большого, среднего и малого размеров.

Многогранники первой группы представляют собой простые формы, а многогранники второй группы – комбинации нескольких простых форм.

Простой формой называется совокупность граней, связанных между собой элементами симметрии. Так, грани гексагональной пирамиды (рис. 2.20, д) представляют одну простую форму. Все они могут быть выведены из одной исходной грани путём её поворотов вокруг оси 6-го порядка на 60° , 120° , 180° , 240° и 300° . В идеально развитых кристаллических многогранниках все грани одной простой формы должны быть одинаковыми как по величине, так и по контурам, так как оси выводятся друг из друга с помощью элементов симметрии.

Комбинацией простых форм называется совокупность двух или нескольких простых форм. Грани отдельных простых форм в комбинациях не связаны друг с другом элементами симметрии и поэтому могут быть различными по очертаниям, величине и другим свойствам.

Различные по очертаниям и величине грани всегда принадлежат простым различным формам. Грани одинаковые по очертаниям и величине, в большинстве случаев, относятся к одной простой форме. Простых форм в комбинациях столько, сколько на них обнаруживается различных граней.

Если совокупность плоскостей простой формы не замыкает пространство, то такая простая форма называется открытой. Открытые формы характерны для кристаллов низших сингоний и возможны во всех сингониях, кроме кубической. Если пространство замыкается, то образуется выпуклый многогранник, представляющий собой закрытую форму. Открытые формы могут встречаться только в комбинациях, а закрытые как в виде самостоятельных многогранников, так и в комбинациях.

Названия простых форм происходят от греческих названий чисел и слов «эдр» – гранник или «гон» – угольник. Для более лёгкого усвоения названий простых форм приведём список греческих слов, положенных в основу:

Моно – один	Тетра – четыре	Окта – восемь
Ди – два	Пента – пять	Дека – десять
Три – три	Гекса – шесть	Додека – двенадцать
Эдра – грань	Голо – полный	Скалено – косой
Гония – угол	Геми – половина	Пинако – доска
Клино – наклоняю	Тетарто – четверть	Трапеца – четырёхугольник

В низших сингониях возможны открытые формы – моноэдр (рис. 2.20, *а*), пинакоид (рис. 2.20, *б*) – в триклинной сингонии, диэдры (рис. 2.20, *в*, *г*), а также моноэдры и пинакоиды – в моноклинной сингонии. В ромбических группах добавляются ромбические призмы, тетраэдры, ромбическая пирамида и ромбическая дипирамида (рис. 2.20, *д–з*).

Для средних сингоний, кроме моноэдров и пинакоидов, характерны тетраэдры (рис. 2.21, *в*), призмы, пирамиды, дипирамиды (рис. 2.23), ромбоэдры (рис. 2.21, *а*, *б*), трапецоэдры (рис. 2.22), скаленоэдры (рис. 2.21, *г*, *д*).

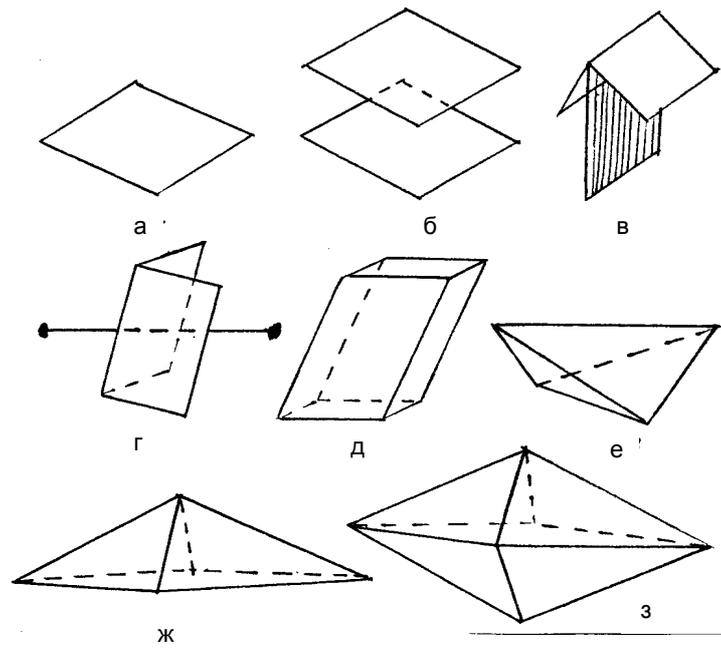


Рис. 2.20. Простые формы низшей категории: а – моноэдр; б – пинакоид; в – диэдр с плоскостью; г – диэдр с осью; д – ромбическая призма; е – ромбический тетраэдр; ж – ромбическая пирамида; з – ромбическая дипирамида

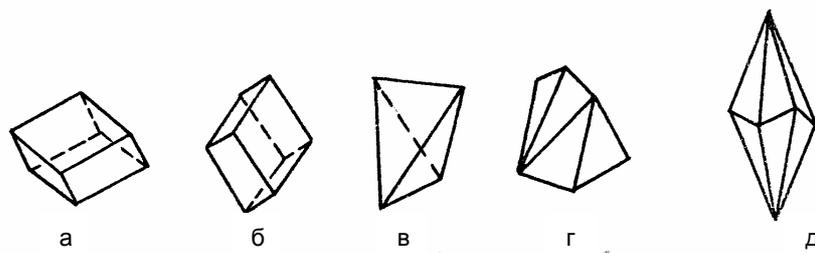


Рис. 2.21. Ромбоэдры (а, б); тетрагональный тетраэдр (в); скаленоэдры: тетрагональный (г) и дитригональный (д)

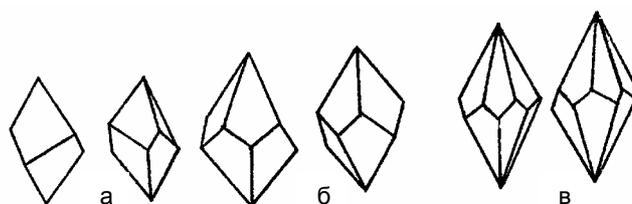


Рис. 2.22. Трапецоэдры: а – тригональные; б – тетрагональные; в – гексагональные

Наличие четырёх осей третьего порядка во всех видах симметрии кубической сингонии создаёт условия для образования простых форм, резко отличающихся от простых форм других сингоний. Ни одна из ранее разобранных форм сюда не переходит. Из старых названий встречается лишь тетраэдр. Никаких пинакоидов, призм, пирамид, дипирамид и т. д. здесь быть не может. В кубических группах все простые формы закрытые (рис. 2.24). В основу номенклатуры простых форм кубической сингонии положены, с одной стороны, число граней, а с другой – несколько основных форм. К таким исходным (простейшим) формам относятся: тетраэдр кубический (рис. 2.24, а) – четыре грани в виде правильных треугольников; гексаэдр (куб) (рис. 2.24, н) – шесть граней в форме квадратов; октаэдр (рис. 2.24, ж) – восемь граней в виде правильных треугольников. Они являются усложнением форм тетраэдра (рис. 2.24, а–е), октаэдра (рис. 2.24, ж–м), куба (рис. 2.24, н–с).

Всего имеется 47 геометрически различных простых форм (см. рис. 2.20–2.24).

Вывод простых форм. Полный вывод кристаллографических простых форм осуществляется на основе 32 видов симметрии. Сущность вывода состоит в том, что для каждого вида симметрии рассматриваются все возможные случаи расположения граней относительно элементов симметрии. При этом для каждого случая указывается число граней, выводящихся с помощью элементов симметрии. Для иллюстрации сказанного воспользуемся примерами, приведёнными Поповым и Шафрановским (1972).

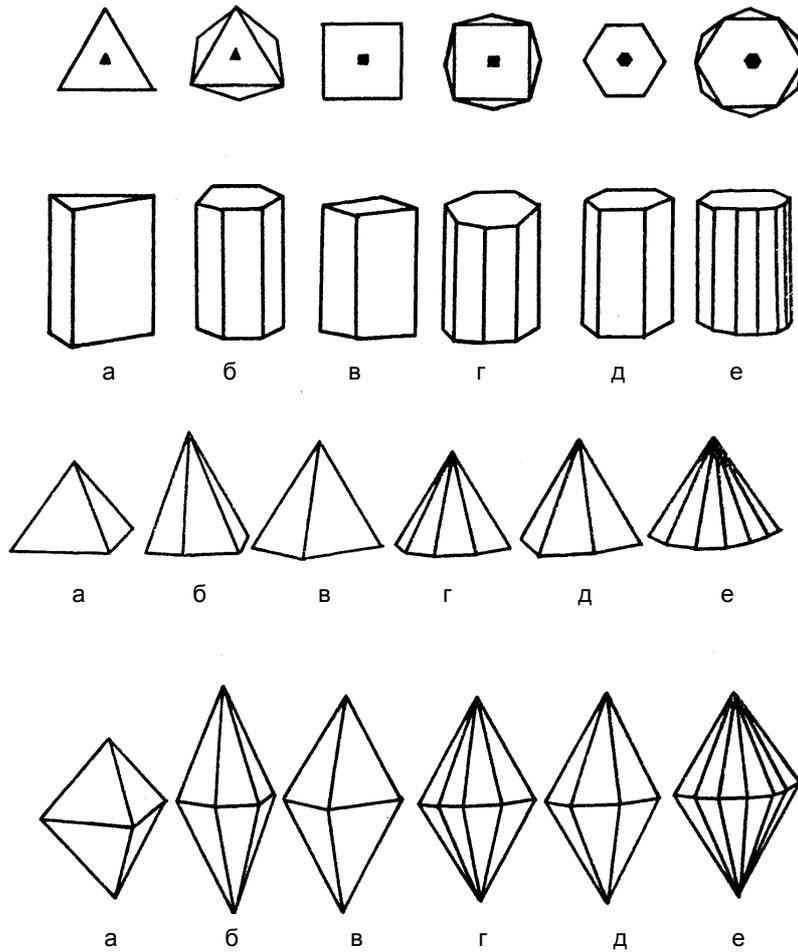


Рис. 2.23. Призмы, пирамиды и дипирамиды средней категории (верхний ряд их сечения): а – тригональные; б – дитригональные; в – тетрагональные; г – дитригональные; д – гексагональные; е – дигексагональные

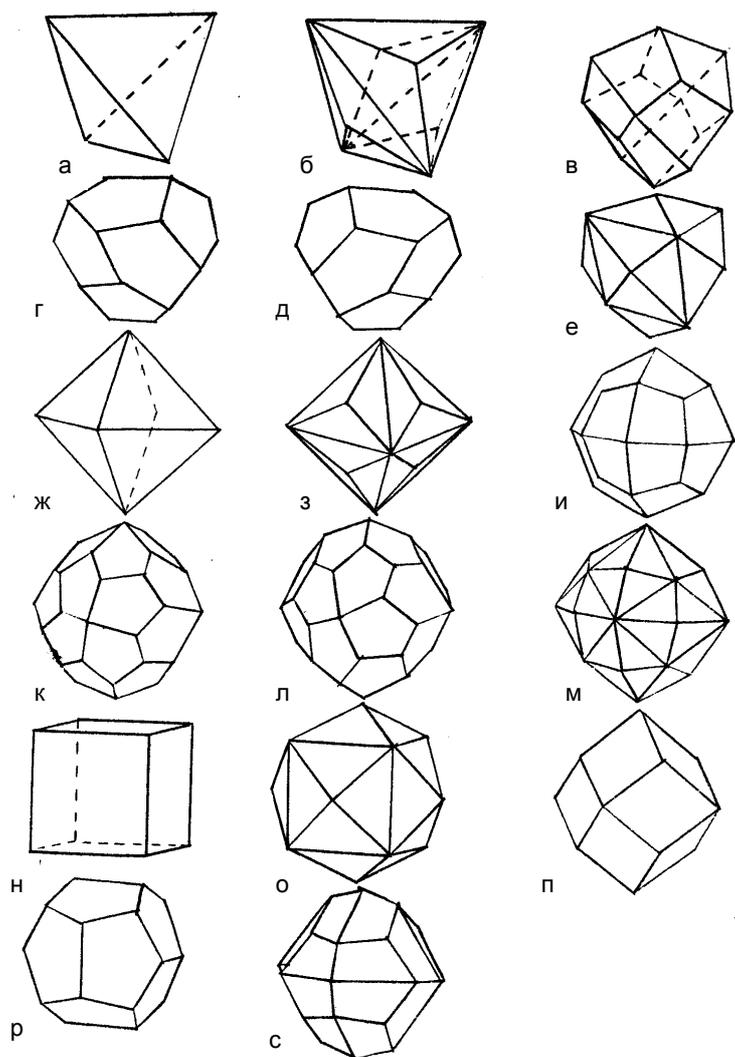


Рис. 2.24. Простые формы кубической сингонии: а – тетраэдр; б – тригонритетраэдр; в – тетрагонритетраэдр; г, д, – положительный и отрицательный пентагонритетраэдр; е – гексатетраэдр; ж – октаэдр; з – тригонтриоктаэдр; и – тетрагонтриоктаэдр; к, л – правый и левый пентагонтриоктаэдр; м – гексоктаэдр; н – куб (гексаэдр); о – тетрагексаэдр; (пирамидальный куб); п – ромбододекаэдр; р – пентагондододекаэдр; е – дидодокаэдр

В аксиальном виде моноклинной сингонии содержится лишь одна ось $N = 2$. Относительно этой единственной оси грани могут располагаться либо косо (a), либо перпендикулярно (b), либо параллельно (c) (рис. 2.25). Никаких иных ориентировок представить нельзя.

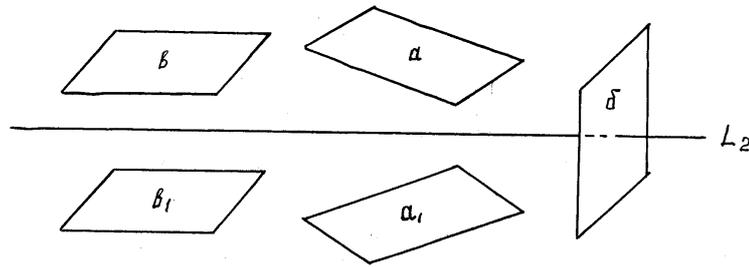


Рис. 2.25. Возможные положения граней относительно оси 2

1. Грань, заданная косо по отношению к оси 2, после поворота вокруг оси на 180° даёт вторую такую же грань. В результате получим простую форму, состоящую из двух плоскостей, лежащих под углом друг к другу, и связанных двойной осью (так называемый осевой диэдр).

2. Задав грань перпендикулярно оси 2, ничего нового из неё не выведем, так, вращаясь вокруг двойной оси, она совмещается сама с собой. В этом случае получим простую форму, состоящую из одной грани (моноэдр).

3. Взяв грань параллельно оси 2, выведем из неё при повороте на 180° вторую равную ей грань, также параллельную оси. Получаем третью простую форму, состоящую из двух взаимно параллельных граней (пинакоид).

Следовательно, в аксиальном виде моноклинной сингонии возможны простые формы трёх типов: диэдры, моноэдры и пинакоиды.

Аналогично по-разному ориентируя грани относительно элементов симметрии во всех 32 видах, выводим все простые формы кристаллов.

В каждом виде симметрии возможен определённый набор простых форм. Распределение простых форм по видам симметрии дан в табл. 2.4 – 2.7.

Таблица 2.4
Распределение простых форм низших сингоний по видам симметрии

Название простой формы	Триклинная	Моноклиная			Ромбическая			
	Вид симметрии							
	1	$\bar{1}$	2	m	2/m	222	mm2	mmm
Моноэдр (1)	*		+	+			+	
Пинакоид (2)		*	+	+	++	+	+	+
Диэдр (2)			*	*			+	
Ромбическая пирамида (4)							*	
Ромбическая призма (4)					*	+	+	+
Ромбический тетраэдр (4)						*		
Ромбическая дипирамида (4)								*

Примечание: Число стоящее рядом с названием простой формы указывает количество её граней; знак + наличие той или иной простой формы в данном классе; ++ наличие двух разных по симметрии граней простых форм; * общая для данного вида симметрии простая форма.

Таблица 2.5
Распределение простых форм тетрагональной сингонии по видам симметрии

Название простой формы	Вид симметрии						
	4	$\bar{4}$	4/m	422	4mm	$\bar{4} 2m$	4/mmm
Моноэдр	+				+		
Пинакоид		+	+	+		+	+
Тетрагональная пирамида (4)	*						
Тетрагональная призма (4)	+	+	+	+	+	++	+
Тетрагональный тетраэдр (4)		*				+	
Дитетрагональная пирамида (8)					*		
Тетрагональная дипирамида (8)			*	+		+	+
Дитетрагональная призма (8)				+	+	+	+
Тетрагональный скаленоэдр (8)						*	
Тетрагональный трапецоэдр (8)				*			
Дитетрагональная дипирамида (16)							*

Примечание: Число, стоящее рядом с названием простой формы, указывает количество её граней; знак + наличие той или иной простой формы в данном классе; ++ наличие двух разных по симметрии граней простых форм; * общая для данного вида симметрии простая форма.

Таблица 2.6

Распределение простых форм тригональной и гексагональной сингоний по видам симметрии

Название простой формы $\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$ $\bar{4}$ $\bar{6}$	Вид симметрии											
	3	$\bar{3}$	32	3m	3m	6	$\bar{6}$	6/m	622	6mm	6m2	6/mmm
Моноэдр (1)	+			+		+				+		
Пинакоид (2)		+	+		+		+	+	+		+	+
Тригональная пирамида (3)	*			+								
Тригональная призма (3)	+		+	+			+				+	
Дитригональная пирамида (6)				*								
Тригональная дипирамида (6)			+				*				+	
Дитригональная призма (6)			+	+							+	
Гексагональная пирамида (6)				+		*			+			
Гексагональная призма (6)		+	+	+	++	+		+	+	+	+	+
Ромбоэдр (6)		*	+		+							
Тригональный трапецоэдр (6)			*									
Дитригональная дипирамида (12)											*	
Дитригональный скаленоэдр (12)					*							
Гексагональный трапецоэдр (12)									*			
Гексагональная дипирамида (12)					+			*	+	+	+	
Дигексагональная пирамида (12)										*		
Дигексагональная призма (12)					+				+	+	+	
Дигексагональная дипирамида 24												*

*Примечание: Число, стоящее рядом с названием простой формы, указывает количество её граней; знак + наличие той или иной простой формы в данном классе; ++ наличие двух разных по симметрии граней простых форм; * общая для данного вида симметрии простая форма.*

Среди простых форм различаются частные и общие простые формы.

Частной формой называют ту, любая грань которой находится в частном положении относительно элементов симметрии точечной группы кристаллов. Это означает, что грань может быть ориентирована параллельно или перпендикулярно хотя бы одному элементу симметрии точечной группы, или же эта грань может иметь равный наклон к двум симметрично равным элементам симметрии точечной группы. В разобранный примере – это моноэдр (грань перпендикулярна оси 2) и пинакоид (грань параллельна оси 2).

Общей формой называют простую форму, грань которой находится в общем положении, т. е. косо относительно всех элементов симметрии, так как понятие параллельности или перпендикулярности точке лишено смысла). В разобранный примере – это диэдр (осевой).

Из сказанного выше видно, что в аксиальном виде моноклинной сингонии все грани общего положения образуют осевые диэдры. Наоборот, все диэдры являются здесь общими формами. Подобное явление имеет место и для всех других видов симметрии.

В каждом виде общая форма может быть только одного типа и одного названия и поэтому может служить названием данного вида симметрии (табл. 2.8). В других видах симметрии эта же простая форма может занимать только частное положение. Наоборот, частные формы данного вида в других видах симметрии могут присутствовать либо как частные, либо как общие.

Таблица 2.7

Распределение простых форм кубической сингонии по видам симметрии

Название простой формы	Вид симметрии				
	23	$m\bar{3}$	432	$\bar{4}3m$	$m\bar{3}m$
Тетраэдр (4)	+			+	
Гексаэдр (6)	+	+	+	+	+
Октаэдр (8)		+	+		+
Ромбододекаэдр (12)	+	+	+	+	+
Пентагондододекаэдр (12)	+		+		
Тригонритетраэдр (12)	+			+	
Тетрагонритетраэдр (12)	+			+	
Пентагонритетраэдр (12)	*				
Гексатетраэдр (24)				*	
Тригонтриоктаэдр (24)		+	+		+
Тетрагонооктаэдр (24)		+	+		+
Пентагонтриоктаэдр (24)			*		
Тетрагексаэдр (24)			+	+	+
Дидодекаэдр (24)		*			
Гексоктаэдр (48)					*

Примечание: Число, стоящее рядом с названием простой формы, указывает количество её граней; знак + наличие той или иной простой формы в данном классе; ++ наличие двух разных по симметрии граней простых форм; * общая для данного вида симметрии простая форма.

(В таблице 2.8 не указаны названия по общей простой форме тетрагонально-инверсионно-примитивного – тетрагонально-тетраэдрического; гексагонально-инверсионно-примитивного – тригонально-дипирамидального; тетрагонально-инверсионно-планального – тетрагонально-скаленоэдрического и гексагонально-инверсионно-планального – дитригонально-дипирамидального видов симметрии.)

Таблица 2.8
Названия видов симметрии по общим простым формам

Сингония	Вид симметрии				
	примитивный	центральный	аксиальный	планальный	планаксиальный
Триклинная	Моноклинный	Пинакоидальный			
Моноклинная			Диэдрический (осевой)	Диэдрический (без осевой)	Призматический
Ромбическая			Ромбо-тетраэдрический	Ромбо-призматический	Ромбо-дипирамидальный
Тригональная	Тригонально-дипирамидальный	Ромбоэдрический	Тригонально-трапецоэдрический	Дитригонально-дипирамидальный	Дитригонально-скаленоэдрический
Тетрагональная	Тетрагонально-дипирамидальный	Тетрагонально-дипирамидальный	Тетрагонально-трапецоэдрический	Дитетрагонально-дипирамидальный	Дитетрагонально-дипирамидальный
Гексагональная	Гексагонально-дипирамидальный	Гексагонально-дипирамидальный	Гексагонально-трапецоэдрический	Дигексагонально-дипирамидальный	Дигексагонально-дипирамидальный
Кубическая	Пентагон-триэдрический	Дидодекаэдрический	Пентагон-триоктаэдрический	Гексатетраэдрический	Гексаоктаэдрический

Большую помощь при выводе простых форм оказывают стереографические проекции. Взяв проекцию элементов симметрии одного из 32 видов и задав на ней какую-либо точку (проекцию нормали к грани), можно вывести все остальные точки, связанные

с первой элементами симметрии. Все эти точки принадлежат одной простой форме, понятие о которой получаем по числу и взаимному расположению их на проекции (точки проекций нормалей к граням). По-разному размещая точки относительно изображённых осей и плоскостей симметрии, выведем все простые формы данного вида симметрии. Наконец, проделав такую операцию с проекциями 32 видов симметрии и вычеркнув повторения, получим все простые формы, возможные в кристаллографии. (Вывод простых форм, возможных в каждом из 32 видов симметрии, предлагается студентам сделать самостоятельно.)

Для ознакомления с техникой вывода простых форм воспользуемся примерами, приведёнными Поповым и Шафрановским (1972).

1. Начнём с планаксиального вида ромбической сингонии

(ромбо-дипирамидального) – D_{2h} , mmm , $3L_23PC$, элементы симметрии которого изображены на рис. 2.26.

Точка, соответствующая нормали к некоторой грани, может располагаться:

а) на выходах двойных осей симметрии (случай 1, 2, 3);

б) на линиях, изображающих плоскость симметрии (случай 4, 5, 6);

в) внутри круга, но вне проекций осей и плоскостей симметрии (случай 7).

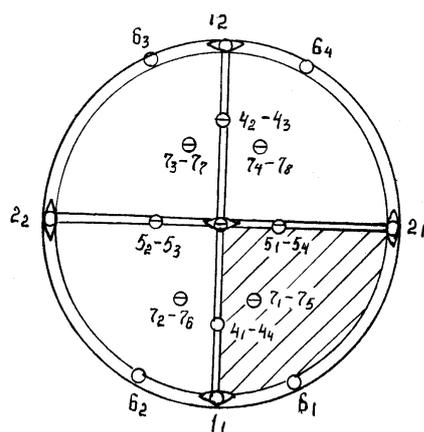


Рис. 2.26. Вывод простых форм планаксиального вида симметрии ромбической сингонии

Эти же случаи можно представить и по-другому. Точки задаются в вершинах заштрихованного сферического треугольника 1-2-3 (случай 1, 2, 3), либо на его сторонах (случай 4, 5, 6), либо внутри треугольника (случай 7).

Восемь таких треугольников нацело покрывают шар проекции.

А) В случаях 1, 2, и 3 заданная грань, отражаясь в параллельной ей плоскости симметрии, или в центре инверсии, или же вра-

щаяся на 180° вокруг оси 2, даёт параллельную грань. Для 1_1 выводим 1_2 , для $2_1 - 2_2$, для $-3_1 - 3_2$, последняя грань располагается внизу. Каждая из таких пар граней, взятая в отдельности, образует одну простую форму, называемую пинакоидом (рис. 2.20, б).

Б) В случаях 4, 5, и 6 из каждой заданной грани получается всего четыре грани. Разберём случай 4. Отражаясь в вертикальной плоскости, или центре инверсии, или же вращаясь вокруг одной из горизонтальных осей 2 грани 4_1 и 4_2 дают две нижние грани 4_3 и 4_4 . В результате получим простую форму, состоящую из четырёх попарно параллельных граней – ромбическую призму (рис. 2.20, д). К аналогичному решению придём и в случаях 5 и 6, получая и здесь ромбические призмы.

В) В случае 7 заданная грань 7_1 , отражаясь в вертикальных плоскостях, даёт грани $7_2, 7_3, 7_4$ (грань 7_3 выводится также из 7_1 путём поворота последней вокруг вертикальной оси 2). Наконец, отражаясь в горизонтальной плоскости симметрии, или в центре инверсии, или же вращаясь вокруг горизонтальных осей 2, верхние четыре грани дают четыре нижних грани $7_5, 7_6, 7_7, 7_8$. Получаем простую форму, состоящую из восьми граней – ромбическую дипирамиду (рис. 2.20, з).

Таким путём выведены всего три типа простых форм: пинакоиды, ромбические призмы и ромбические дипирамиды.

Замечание 1. Согласно чертежу (см. рис. 2.26), грани 4, 5 и 6 могут быть заданными различными способами в пределах сторон сферического треугольника 1-2-3. То же относится к грани 7, произвольно расположенной внутри того же треугольника. Таким образом, в этих случаях можно получить бесконечное множество простых форм; однако все они совпадают с названными выше типами – ромбическими призмами (случаи 4, 5, 6) и ромбическими дипирамидами (случай 7). Никаких других простых форм в данном виде симметрии получить нельзя.

Замечание 2. Точки, расположенные на выходах двойных осей, отвечают частным формам, поскольку плоскости соответственных граней перпендикулярны этим осям. Таковы грани 2, 1, 3.

Точки, лежащие на линиях плоскостей симметрии, также изображают частные формы, либо соответствующие грани перпендикулярны имеющимся плоскостям. Таковы грани 4, 5, 6 (и грани 1, 2, 3).

Точки, расположенные вне проекций осей и плоскостей симметрии внутри треугольников, соответствуют граням, косо ориентированным относительно элементов симметрии, т. е. дают общую форму. Таковы в данном случае грани ромбической дипирамиды 7.

2. В качестве второго примера рассмотрим вывод всех простых форм планаксиального вида тригональной сингонии (дигригонально-скаленоэдрического) – D_{3d} , $3m$, L_3L_23PC . Здесь также можно выделить заштрихованный на рис. 2.27 сферический треугольник 1-2-3.

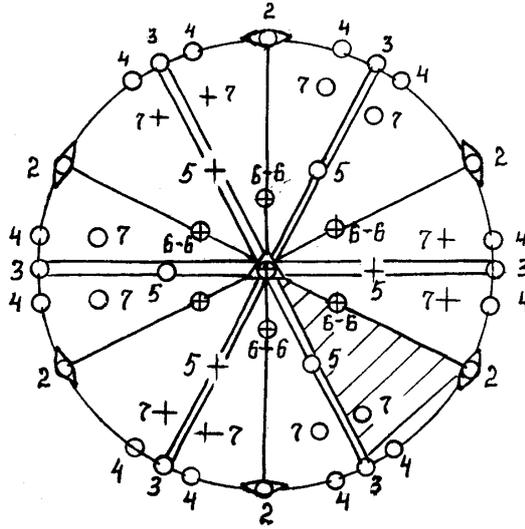


Рис. 2.27. Вывод простых форм планаксиального вида симметрии тригональной сингонии

Точки, соответствующие проекциям нормалей к граням, могут располагаться либо в вершинах треугольника 1-2-3 (случаи 1, 2, 3), либо на сторонах (случаи 4, 5, 6), либо внутри его (случай 7). Пользуясь элементами симметрии для каждого случая, выводим полную совокупность граней.

В случае 1 получаем пару параллельных граней 1-1 (пинакoid), (см. рис. 2.20, б).

В случаях 2 и 3 выводим по шести граней параллельных оси 3 (получаем две простых формы, а именно гексагональные призмы, рис. 2.22, *д*).

Случай 4 приводит к двенадцати граням, также параллельным тройной оси (дигексагональная призма) (рис. 2.22, *е*).

Случай 5 даёт шесть граней, косо расположенных относительно оси 3. Три грани обращены вверх, три – вниз. Каждая нижняя грань располагается симметрично между двумя верхними (ромбоэдр, рис. 2.21, *а, б*).

Случай 6 приводит к двенадцати граням, под косым углом пересекающим тройную ось. Шесть верхних граней лежат над шестью нижними (гексагональная дипирамида, рис. 2.22, *е*).

Случай 7 снова приводит к двенадцати граням, косо расположенными по отношению к тройной оси. Как и в предыдущем случае, здесь шесть граней обращены вверх, шесть – вниз. Однако здесь каждая пара нижних граней располагается симметрично между двумя парами верхних (дитригональный скаленоэдр, рис. 2.21, *д*).

Таким образом, всего выделено шесть типов простых форм: пинакоид, две гексагональные призмы, дигексагональные призмы, ромбоэдры, гексагональные дипирамиды и дитригональные скаленоэдры.

Простые формы пяти первых типов принадлежат к частным формам (см. рис. 2.27). Простые формы последнего типа являются общими.

3. В заключение рассмотрим планаксиальный вид кубической сингонии (гексоктаэдрический) – O_h , $m\bar{3}m$, $3L_44L_36L_29PC$. Здесь выделим сферический треугольник 1–2–3, отдельно изображённый на рис. 2.28, *а* и заштрихованный на рис. 2.28, *б*.

Согласно сказанному выше, точки, соответствующие проекциям нормалей к граням, могут располагаться либо в вершинах треугольника (случаи 1, 2, 3), либо на сторонах (случаи 4, 5, 6), либо внутри его (случай 7).

Точка 1 совпадает с выходом четверной оси. Всего для трёх осей 4-го порядка имеем шесть выходов, связанных между собой элементами симметрии. В результате получаем одну простую форму в виде шестигранника – гексаэдр (куб), рис. 2.24, *Н*.

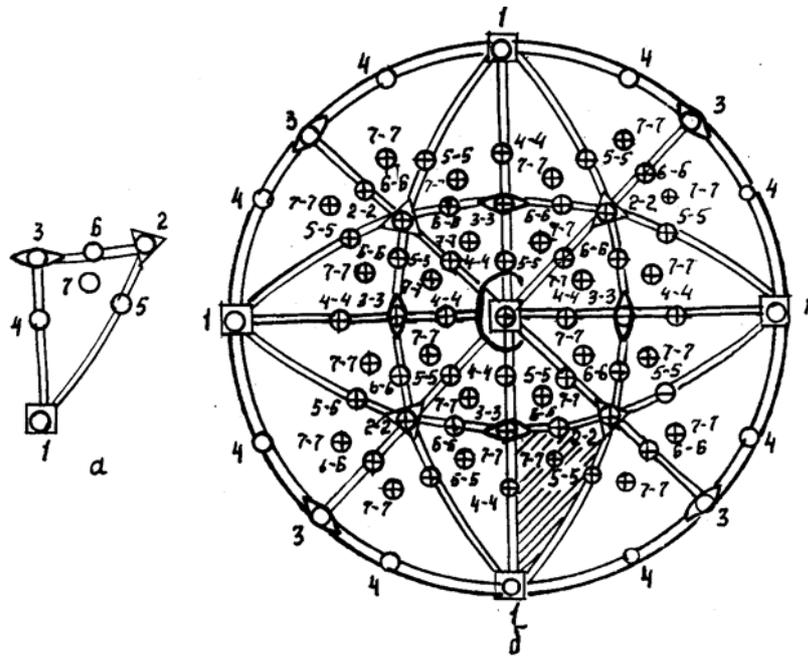


Рис. 2.28. Вывод простых форм планаксиального вида симметрии кубической сингонии

Точка 2 совмещена с выходом тройной оси. Соответственно восьми выходам $4L_3$, связанных друг с другом элементами симметрии, выводим восьмигранник – октаэдр (рис. 2.24, ж).

Точка 3 совпадает с выходом двойной оси. Таких выходов для $6L_2$ будет двенадцать, и все они связаны между собой элементами симметрии. Получаем простую форму в виде некоторого двенадцатигранника – ромбо-додекаэдра (рис. 2.24, п).

В случаях 4, 5, 6 выводим посредством элементов симметрии три простых формы, соответствующие трём двадцатичетырёхгранникам (для случаев: 4 – тетрагексаэдр, (рис. 2.24, о); 5 – тетрагон-триоктаэдр, (рис. 2.24, и); 6 – тригон-триоктаэдр, (рис. 2.24, з.)).

Наконец, точка 7, согласно числу сферических треугольников (1-2-3), повторяется 48 раз, отвечая сорокавосьмиграннику (гексоктаэдру, рис. 2.24, м).

Из семи найденных простых форм (куб, октаэдр, ромбододекаэдр, тетрагексаэдр, тетрагон-триоктаэдр, тригон-триоктаэдр и гексоктаэдр) первые шесть представляют частные формы (см. рис. 2.24), последний – общую (проекции его граней внутри треугольников).

Общие сведения о простых формах и описание взаимного расположения их граней собраны в табл. 2.9, 2.10.

Существенно облегчает определение названий простых форм кристалла построение его стереографической проекции, на которой хорошо видны как количество граней, так и их взаимное расположение.

Наибольшую трудность учащиеся испытывают при определении по проекции простых форм низшей категории. С целью облегчения распознавания простых форм в низшей категории на рис. 2.29, 2.30 приводятся все характерные случаи расположения граней кристаллов этой категории.

На рис. 2.29 отображены проекции пинакоидов и диэдров, при этом возможны следующие случаи:

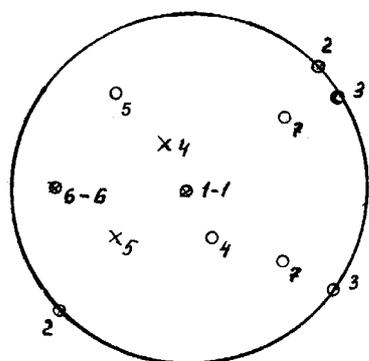


Рис. 2.29. Возможные случаи расположения на проекции граней простых форм, состоящих из двух граней

А. Обе грани горизонтальны – пинакоид (1);

Б. Обе грани вертикальны
а) грани лежат на одном диаметре – пинакоид (2);

б) грани не лежат на одном диаметре – диэдр (3);

В. Грани наклонны и лежат в разных полусферах (одна верхняя, а другая нижняя);

а) грани лежат на одном диаметре – пинакоид (4);

б) грани не лежат на одном диаметре – диэдр (5);

в) грани проектируются в одной точке – пинакоид (6).

Г. Грани наклонны и лежат в одной полусфере (обе верхние, или обе нижние) – диэдр (7).

На рис. 2.30 изображены проекции ромбической призмы, ромбической пирамиды и тетраэдра. При этом возможны следующие случаи:

А. В ромбической призме:

а) грани вертикальны (1);

б) проекции нижних и верхних граней лежат в одной точке (2);

в) нижние грани лежат на одном диаметре с верхними (3).

Б. Ромбические пирамиды – грани только верхние или только нижние (4).

В. Ромбический тетраэдр – нижние грани лежат на одном диаметре, а верхние на другом (5).

При определении простых форм средних сингоний по их проекциям можно одновременно пользоваться табл. 2.9 и руководствоваться следующим:

1) имеются только верхние, или только нижние грани – это пирамиды (обычные или двойные);

2) грани вертикальны (параллельны) основной оси – призмы (обычные или двойные);

3) проекции верхних и нижних граней совпадают – дипирамиды (обычные или двойные);

4) проекции нижних граней лежат симметрично между проекциями верхних; а) граней четыре – тетрагональный тетраэдр; б) граней шесть – ромбоэдр;

5) проекции двух нижних граней находятся между проекциями двух верхних – скаленоэдры;

б) проекция нижней грани лежит несимметрично между проекциями двух верхних – трапецоэдры.

Как правило, на кристаллах наблюдаются грани, принадлежащие нескольким простым формам. Такие многогранники, составленные из нескольких простых форм, называются комбинациями. Последние, в отличие от простых форм, не могут быть выведены из одной исходной плоскости и, следовательно, имеют грани кристаллографически разные. Число простых форм, сочетание которых даёт определённую комбинацию, может быть определено по числу различных граней фигуры.

Таблица 2.9

Характерные признаки простых форм низшей и средней категорий

Простые формы		Число граней	Характерные признаки	
Моноэдр		1	Одна грань	
Диэдр		2	Две непараллельные грани	
Пинакоид		2	Две параллельные грани	
Призмы	Ромбическая	4	Грани параллельны главной оси	Разные углы между смежными гранями
	Тригональная	3		Одинаковые углы между смежными гранями
	Тетрагональная	4		
	Гексагональная	6		Разные углы между смежными гранями
	Дитригональная	6		
	Дитетрагональная	8		
Дигексагональная	12			
Пирамиды	Тригональная	3	Грани пересекают ось Z в одной точке	Одинаковые углы между смежными гранями
	Тетрагональная	4		Разные углы между смежными гранями
	Гексагональная	6		
	Ромбическая	4		
	Дитригональная	6		
	Дитетрагональная	8		
Дипирамиды	Тригональная	6	Грани пересекают ось Z в двух точках вверху и внизу	Одинаковые углы между смежными гранями, нижние грани точно под верхними
	Тетрагональная	8		Разные углы между смежными гранями, нижние грани точно под верхними
	Гексагональная	12		
	Ромбическая	8		
	Дитригональная	12		
	Дитетрагональная	16		
Трапецоэдры	Тригональный	6		Нижние грани расположены несимметрично между верхними
	Тетрагональный	8		
	Гексагональный	12		
Скаленоэдры	Тетрагональный	8		Пара нижних граней расположена симметрично между двумя верхними
	Дитригональный	12		
Тетраэдры	Ромбический	4		Грани непараллельны
	Тетрагональный	4		
Ромбоэдр		6		Нижние грани симметричны между верхними

Таблица 2.10

Определитель простых форм кристаллов кубической сингонии

Простые формы	Символы граней	Число граней	Характерные признаки
Тетраэдр	{111}	4	Количество граней
Гексаэдр (куб)	{100}	6	
Октаэдр	{111}	8	
Ромбододекаэдр	{110}	12	Грани попарно параллельны, есть перпендикулярные грани
Пентагондододекаэдр	{hk0}	12	Грани попарно параллельны, нет перпендикулярных граней
Тригонритетраэдр	{hhk}	12	Грани расположены между L_2 и L_3
Тетрагонритетраэдр	{hhl}	12	Грани расположены между L_3
Пентагонритетраэдр	{hkl}	12	Каждая грань различно наклонена ко всем L_2
Дидодекаэдр	{hkl}	24	
Гексатетраэдр	{hhl}	24	У многогранника нет L_4 (есть m)
Пентагонтриоктаэдр	{hkl}	24	У многогранника есть L_4 (нет m)
Тетрагексаэдр	{hk0}	24	Грани параллельны L_4 или L_{i4}
Тригонтриоктаэдр	{hkk}	24	Грани попарно параллельны и расположены между осями L_3 и L_2
Тетрагонтриоктаэдр	{hkk}	24	Грани попарно параллельны и расположены между осями L_3 и L_4
Гексоктаэдр	{hkl}	48	Количество граней

Очевидно, что открытые простые формы могут присутствовать на кристаллах только в комбинациях с другими, открытыми или закрытыми формами, закрытые простые формы – и в комбинациях и в чистом виде.

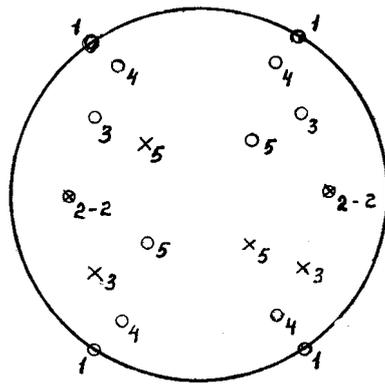


Рис. 2.30. Возможные случаи расположения на проекции простых форм низшей категории, состоящих из четырех граней

Принцип образования комбинаций показан на рис. 2.31; простые формы режут друг друга, образуя выпуклый многогранник. Ясно, что конкретные размеры получающихся граней зависят от числа комбинирующихся простых форм и от размеров каждой из них. Могут комбинироваться между собой и простые формы одинакового наименования, но с разными индексами.

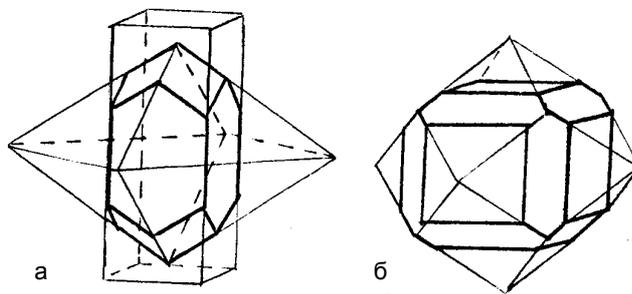


Рис. 2.31. Образование комбинаций простых форм:
 а – тетрагональная призма и тетрагональная дипирамида;
 б – ромбододекаэдр и куб

Очевидно, что комбинации могут образовывать только простые формы, встречаемые в данном виде симметрии. Так, к примеру, в тетрагонально центральном виде симметрии L_4PC могут встречаться комбинации пинакоидов, тетрагональных призм и тетрагональных дипирамид, но никогда не встречаются тетрагональный скаленоэдр или ромбоэдр.

2.5. Установка кристаллов

Знание элементов симметрии и простых форм не всегда даёт однозначное представление о кристалле. На рис. 2.32 изображены два многогранника планаксиального вида симметрии тетрагональной сингонии – L_44L_25PC , являющихся комбинациями тетрагональной дипирамиды и тетрагональной призмы. Несмотря на тождественную характеристику обеих фигур, их внешний вид резко отличен. Отсюда следует, что помимо приведённых данных, необходимо выяснить взаимное расположение граней в пространстве. С этой целью применяются кристаллографические символы, определяющие положение любой грани данного кристалла относительно некоторых координатных осей, и некоторой грани, принятой за исходную.

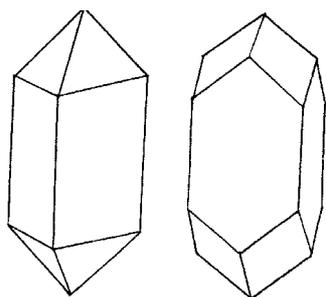


Рис. 2.32. Тетрагональные дипирамида и призма в двух комбинациях

Для определения положения граней кристалла в пространстве, а также для определения самих кристаллографических форм в кристаллографии, как и в геометрии пользуются координатными системами – разными для различных сингоний. Оси таких координатных систем называются кристаллографическими осями.

Координатные оси, как и в начертательной геометрии, обозначаются следующим образом (рис. 2.33). Первая ось I (X) – это кристаллографическая ось a ; тот её конец, который направлен к наблюдателю, считается положительным, противоположный – отрицательным. Вторая ось II (Y) – кристаллографическая ось b ; её положительный конец направлен вправо от наблюдателя, отрицательный – влево. Верхний конец третьей координатной оси III (Z) – кристаллографической оси c , принимается за положительный, нижний – за отрицательный. Таким образом, у правого верхнего октанта все параметры положительные, а у противоположному ему левого нижнего заднего октанта – отрицательные.

Углы между координатными осями обозначаются α , β , γ ; при этом угол α лежит против оси X (YOZ), угол β лежит против оси Y (XOZ), а угол γ лежит против оси Z (XZY) (рис. 2.34).

При ориентировании кристалла в пространстве его располагают закономерно относительно выбранных координатных осей. При выборе координатных осей придерживаются определённых правил, сводящих к минимуму возможный в этом выборе произвол; поэтому за координатные оси принято брать некоторые постоянные направления в кристалле, какими являются оси симметрии и нормали к плоскостям симметрии.

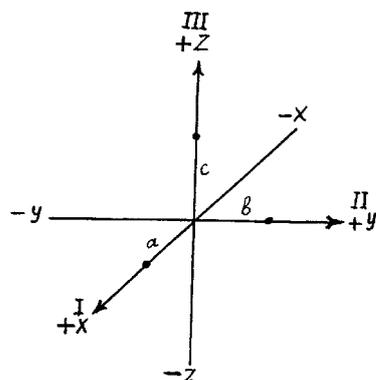


Рис. 2.33. Обозначение координатных осей

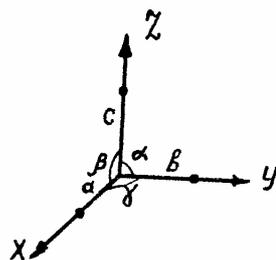


Рис. 2.34. Расположение координатных осей при установке

Данные, касающиеся установки кристаллов различных сингоний, приведены в табл. 2.11. Ниже мы добавим несколько пояснений, которые помогут разобраться в этой таблице и запомнить её. По расположению координатных осей можем различать:

1. Сингонии, в которых все осевые углы имеют постоянные значения. Сюда относятся:

а) сингонии, в которых все три угла α , β и γ прямые (кубическая, тетрагональная, ромбическая);

б) сингонии, у которых два угла α и $\beta = 90^\circ$, а третий угол $\gamma = 120^\circ$ (гексагональная и тригональная). Для этих сингоний берутся не три, а четыре кристаллографические оси.

2. Сингонии, в которых не все углы имеют постоянные значения:

а) два угла прямые, третий индивидуален для данного вещества – моноклинная сингония;

б) все три угла индивидуальны для данного вещества – триклинная сингония.

При нанесении на проекцию выходов координатных осей, таким образом, имеются следующие варианты; для группы Ia – (рис. 2.35, а); Ib – (рис. 2.35, б); для группы 2a – (рис. 2.35, в) и, наконец, для группы 2,б – (рис. 2.35, г). Первые два случая понятны сами по себе. В третьем – ось X может, вообще говоря, выходить в любой точке диаметра aa' ; кроме самих точек aa' и центра, где выходит ось Z. Практически угол между X и Z редко отклоняется от 90° больше чем на 40° . Для четвертого случая постоянное место имеет только ось Z; две другие оси могут выходить где угодно, только не на окружности большого круга, и не могут отстоять одна от другой на 90° .

Таблица 2.11

Установка кристаллов

Сингония	Выбор осей координат	Координатный репер	Единичная грань (111)
Кубическая	X, Y, Z – три оси L_4 ; при их отсутствии – три оси L_2	$a=b=c$; $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$	Грань октаэдра или тетраэдра
Гексагональная и тригональная	Z – L_3 , L_6 или L_6 ; оси X, Y и U – три эквивалентных оси L_2 ; при их отсутствии три нормали к плоскостям симметрии; при отсутствии плоскостей – два направления параллельные ребрам	$a=b \neq c$; $\alpha=\beta=90^\circ$ $\gamma=120^\circ$	Грани тригональных и гексагональных пирамид, дипирамид, ромбоэдра с символами. $(10\bar{1}1)$ $(11\bar{2}1)$
Тетрагональная	Z – L_4 или L_4 ; оси X и Y – две эквивалентные оси L_2 или, при их отсутствии – две нормали к плоскостям симметрии; при отсутствии плоскостей – два направления параллельные ребрам	$a=b \neq c$; $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$	Грани тетрагональных пирамиды, дипирамиды, тетраэдра
Ромбическая	Z – L_2 (обычно по удлинению кристалла); X и Y – две другие L_2 или нормали к плоскостям симметрии	$a \neq b \neq c$; $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$	Грани ромбических пирамиды, дипирамиды или тетраэдра
Моноклинная	Y – L_2 или нормаль к плоскости, X и Z в плоскости перпендикулярной оси Y, параллельно ребрам	$a \neq b \neq c$; $\alpha=\gamma=90^\circ \neq \beta$	Грани ромбической призмы, или диэдра
Триклинная	Все координатные оси параллельны ребрам кристалла (осям соответствующих поясов)	$a \neq b \neq c$; $\alpha \neq \gamma \neq \beta \neq 90^\circ$	Грани пинакоида, или моноэдра

Рассмотрим теперь, каким образом можно связать эти положения координатных осей с элементами симметрии отдельных видов различных сингоний.

Кубическая сингония (рис. 2.35, а). Во всех пяти видах кубической сингонии есть три взаимно перпендикулярных оси симметрии: либо $3L_4$, либо $3L_2$. Они берутся за оси X, Y и Z. Так как эти три оси симметрии совершенно одинаковы, то безразлично, какую именно поставить на то или иное место. За единичную грань берётся грань октаэдра или тетраэдра.

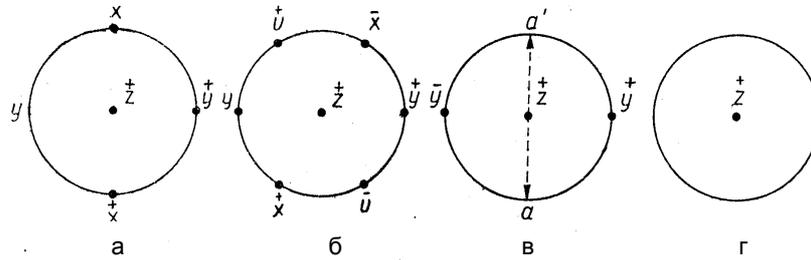


Рис. 2.35. Схема расположения осей в разных сингониях на кристаллографических проекциях

Гексагональная и тригональная (рис. 2.35, б). Во всех видах этих сингоний есть одна ось высшего порядка, её всегда берут за вертикальную ось Z. Если есть оси второго порядка (всегда перпендикулярные к главной), то они берутся за три остальные оси, которые в этих сингониях называются X, Y и U. Если таких осей нет, но есть плоскости симметрии, параллельные главной оси, то за X, Y и U берутся три нормали к этим плоскостям. Наконец, в видах, где нет ни осей 2-го порядка, ни плоскостей, параллельных главной оси, за оси X, Y и U берутся направления трёх действительных или возможных рёбер, удовлетворяющие поставленному условию (углы 120°), т. е. тому, что угол $\gamma=120^\circ$ считается между одноимёнными выходами осей (плюс или минус).

Тетрагональная сингония. В тетрагональной сингонии мы имеем совершенно аналогичное положение, только вместо четырёх осей здесь три. За Z берётся L_4 или L_2 , за X и Y оси второго порядка, нормали к плоскостям симметрии или, наконец, направления действительных или возможных рёбер (взаимно перпендикулярных, а также перпендикулярных к главной оси).

Ромбическая сингония. В тетрагональной, гексагональной и тригональной сингониях установка хотя и неоднозначна, но более

или менее приближается к таковой. Однако она далеко не так определённа в ромбической сингонии. Хотя в двух её видах мы имеем по три взаимоперпендикулярные оси второго порядка, но они не равнозначны, и нет никакого критерия для того, чтобы ту или иную из них брать за X, Y или Z. Обычно, но не всегда, за вертикальную ось Z принимается ось 2-го порядка, являющаяся осью наиболее развитого пояса, а за X и Y две другие L_2 . В планальном виде всегда имеется больше определённости: за вертикальную ось Z всегда принимают L_2 , а за два другие оси X и Y – нормали к плоскости симметрии.

Моноклиная сингония (рис. 2.35, в). В этой сингонии установку всегда начинают с выбора оси Y. В аксиальном и планаксиальном видах симметрии ей отвечает L_2 , а в планальном – нормаль к плоскости симметрии. Затем ориентируют вертикально ось зоны удлинения кристалла и принимают её за ось Z. При этом следует иметь в виду то, что кристаллы моноклиной сингонии, например эпидот, могут быть удлинены и по оси Y. Ось X проводят параллельно каким-либо реальным или возможным рёбрам кристалла, лежащим в плоскости симметрии (в планальном и планаксиальном видах симметрии) или в плоскости перпендикулярной к L_2 (в аксиальном виде симметрии).

Триклинная сингония (рис. 2.35, г). В триклинной сингонии имеется полная неопределённость установки. Симметрия кристалла ограничивается одним центром симметрии, который не даёт никакого определённого направления. За оси X, Y и Z берутся оси наиболее ярко выраженных поясов, одну ставят вертикально (Z), другие выбирают так, чтобы одна шла слева направо (Y), другая – к наблюдателю (X). При этом предпочтительно в качестве осей выбирать оси, углы между которыми максимально приближаются к прямым.

2.6. Определение символов граней кристаллов

При установке кристаллов выбирается не только положение координатных осей, но и положение *единичной грани*. Единичная грань пересекает все три координатные оси и принимается за масштабную. Параметры, отсекаемые единичной гранью на координатных осях X, Y, Z, соответственно называются осевыми еди-

ницами – a , b , c . Выбор единичной грани имеет однозначное решение только в кристаллах кубической сингонии, в которых единичной гранью является грань октаэдра или тетраэдра. Во всех остальных случаях такой определённости нет. При этом нужно руководствоваться следующим правилом: чем проще символы, получаемые для всех граней кристалла, тем больше вероятность правильности выбора единичной грани.

Таким образом, установив кристалл, мы при помощи трёх осей координат X , Y , Z и параметрических отрезков a , b , c можем определить положение в пространстве любой грани, задав отрезки OH , OK , OL , отсекаемые этой гранью на осях, считая от начала координат (рис. 2.36).

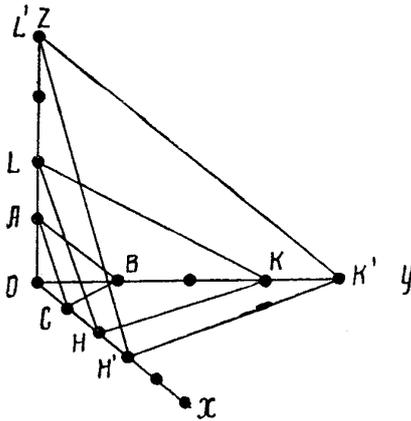


Рис. 2.36. Грани различных символов

Известно, что при росте кристалла грани перемещаются параллельно самим себе, поэтому важны не абсолютные величины отрезков OH , OK , OL , а их отношения $OH : OK : OL$.

Таким образом, если кристалл ограничен рядом граней, отсекающих на осях координат отрезки OH , OK , OL ; OH' , OK' , OL' ; то можно определить зависимость, связывающую положение всех этих граней.

Поскольку отношение осевых единиц $a : b : c$ нам известно из отрезков, отсекаемых единичной гранью ABC , можем через них выразить отрезки: OH , OK , OL ; OH' , OK' , OL' ; a/OH , b/OK , c/OL ; a/OH' , b/OK' , c/OL' .

В этих дробях числители везде равны осевой единице, а знаменатели должны быть целыми числами, поскольку каждая грань либо отсекает на координатных осях целое число осевых единиц непосредственно, либо при параллельном перемещении может быть проведена к такому положению, при котором она проходит через три узла. Отсюда следует, что, взяв вышеуказанные отношения, мы всегда можем привести эти отношения к отношению

целых чисел: $a/OH : b/OK : c/OL = h : k : l$; $a/OH' : b/OK' : c/OL' = h' : k' : l'$, где $h, k, l, h', k', l' \dots$ и т. д. – целые числа.

Три таких числа h, k, l вполне определяют положение любой грани при посредстве единичной грани, и после освобождения от общего делителя называются *индексами грани*.

Индексы символа при обозначении грани или простой формы пишутся подряд и берутся в круглые скобки. При этом на первое место ставится индекс по оси X, на второе – индекс по оси Y и на третье – индекс по оси Z. В кристаллах тригональной и гексагональной сингоний на первое место ставится индекс по оси X, на второе – индекс по оси Y, на третье – индекс по оси U и на четвёртое – индекс по оси Z.

В кристаллах низших категорий, где все осевые единицы разные, буквенные индексы h, k, l закрепляются за определёнными осями – индекс h за осью X, k за осью Y и l за осью Z. Например, если грань пересекает все три координатные оси, то её буквенный индекс будет (hkl) вне зависимости от абсолютных значений этих величин (рис. 2.37) Грани вертикального пояса будут иметь символы: (100) , (110) , (010) , $(hk0)$, остальные грани символы: (111) , (011) , (001) , (hkl) . Символы граней, параллельных оси X, будут содержать на первой позиции ноль: $((010)$, (011) , $(0kl)$, а параллельных оси Y будут содержать ноль на средней позиции: (100) , (101) , $(h0l)$, где h, k и l – любые целые небольшие числа.

В кристаллах средней категории, где осевые единицы по осям X и Y (а в гексагональной и тригональной сингониях и по оси U) одинаковые, принимается условие, что $h > k$ и каждый из этих индексов может принадлежать любой из горизонтальных осей X или Y, в зависимости от их величины, а индекс l жёстко закреплён за осью Z, поэтому индекс (hkl) будет соответствовать индексам $(21l)$, $(32l)$ и т. д., а индекс (khl) – $(12l)$, $(23l)$ и т. д. Грани вертикального пояса могут иметь символы (100) , $(hk0)$, (110) , $(kh0)$, (010) ; символы граней параллельных оси X будут (010) , $(0kl)$, а граней параллельных оси Y (100) , $(h0l)$.

В кристаллах тригональной и гексагональной сингоний, в которых выбирается четырёхкоординатный репер, символы граней будут четырёхзначными. При их описании для горизонтальных осей кроме индексов h и k вводится ещё и индекс i , помещаемый на третьей позиции. При этом принимается что $|i| > |h| > |k|$,

$(h+k+i)=0$. Тогда грань, занимающая общее положение в пространстве по отношению к осям координат, будет иметь символ (hkl) или другой подобный символ, где знак индекса i будет противоположен сумме знаков h и k : $-i=(h+k)$.

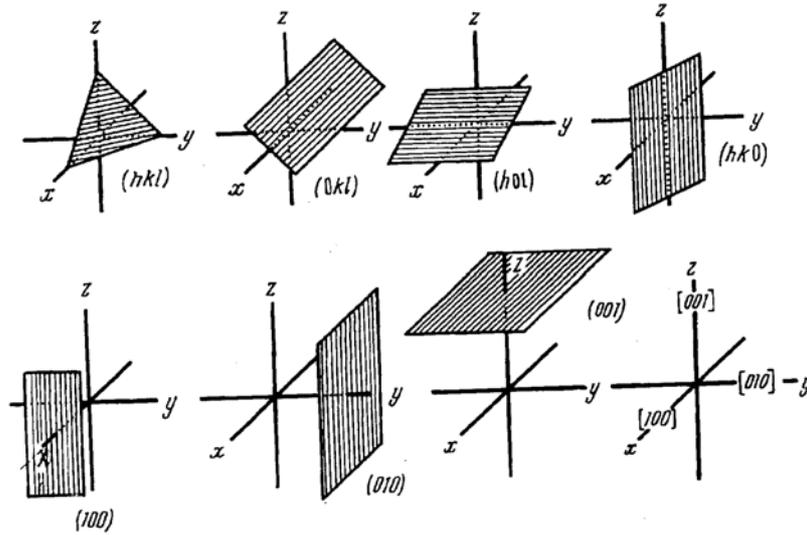


Рис. 2.37. Символы граней в разном положении относительно координатных осей (1920)

В кристаллах кубической сингонии, где все осевые единицы одинаковы, индексы h , k , l не закрепляются за определёнными осями, принимается условие, что $h > k > l$. Грани, пересекающие все оси координат и имеющие разные параметры, могут иметь шесть вариантов буквенных символов: (hkl) , (khl) , (klh) , (lkh) , (lkh) , (hkl) в зависимости от соотношения этих параметров.

Необходимо заметить, что осевые единицы, как и любые другие единицы меры, не имеют знака. Осевые же отрезки могут быть как положительными, так и отрицательными, смотря по тому, какое направление координатной оси – положительное или отрицательное – пересекаются гранью. Знак минус ставится над индексом.

При приближённом определении индексов на глаз руководствуются следующим правилом, справедливым во всех случаях: чем ближе лежит полюс грани к точке выхода какой-либо оси координат на проекции, тем больше индекс этой грани по данной оси. Сущность этого правила можно объяснить следующим образом.

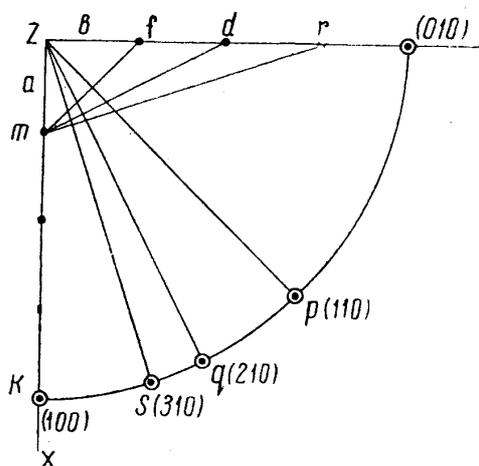


Рис. 2.38. Чертеж к правилу о возрастании индексов

На рис. 2.38 мы имеем координатную плоскость XY; K и (010) являются точками выхода этих осей на проекции. Если грань mf отсекает на указанных осях по одному отрезку a и b и параллельна оси Z, то нормаль к этой грани пересекает основной круг проекции в точке p . Символ этой грани будет (110). Другая грань md также параллельна оси Z, отсекает один отрезок по оси X и два отрезка по оси

Y; следовательно, её числовой параметр будет (12∞) . Нормаль к этой грани пересекает основной круг проекции в точке q . Символ этой грани будет (210), поскольку индексы являются величинами обратными числовым параметрам. Наконец, третья грань отсекает один отрезок по оси X и три отрезка по оси Y. Её числовой параметр будет (13∞) , а символ (310). Из этого построения видно, что при увеличении индекса по оси X полюс грани всё время приближается к k – точке выхода оси X на проекции. Если бы брали один отрезок по оси Y и два–три и т. д. отрезка по оси X, то полюс новых проведённых граней всё время приближался бы к (010) – точке выхода оси Y, а индексы по этой оси возрастали бы в порядке (120), (130), (140) и т. д.

Разберём два примера определения символов на глаз. В качестве первого примера возьмём кристалл оливина (хризолита) $MgFe[SiO_4]$. На рис. 2.39 определяем симметрию минерала – на-

ходим $3L_23PC$ – ромбо-планаксиальный вид симметрии. Три оси второго порядка берутся за оси координат. Ставим кристалл так, чтобы та ось 2, которая является осью пояса $bsmam''$ и т. д., была направлена вертикально, т. е. была бы осью Z . За ось X возьмём ту ось 2, которая соответствует поясу $bkhc$ и т. д. Чертим на глаз проекцию и на ней расставляем полюсы всех граней (рис. 2.40), пользуясь имеющимися поясами. В первую очередь наносим полюсы тех граней, которые нормальны к имеющимся осям 2-го порядка, т. е. полюсы a, a', b, b', c . Полюсы граней нижней половины кристалла проектировать не будем, так как они симметричны граням верхней половины. Поскольку из рис. 2.38 видно, что все рёбра между гранями $bkhc$ параллельны – проводим пояс $bkhc$. Пояс будет проектироваться в виде диаметра основного круга проекции. Расставляем полюсы k, h, h', k' . Такое же построение делаем для пояса abc и т. д. и наносим полюсы d и d' . Из рис. 2.38 видим, что рёбра fe, ed, de'' также параллельны. Проводим этот пояс и наносим полюсы соответствующих граней (рис. 2.40).

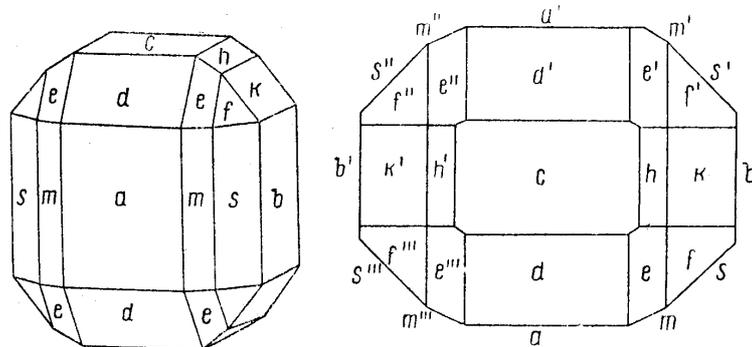


Рис. 2.39. Кристалл оливина

Теперь макропроекция нанесена, и мы можем перейти к приближённому определению символов. За единичную возьмём грань e (её символ (111)). Ясно, что грани a, b, c пересекают только одну ось и параллельны двум другим; следовательно, они должны получить следующие символы: $a - (100)$, $a' - (100)$, $b - (010)$, $b' - (010)$ и $c - (001)$.

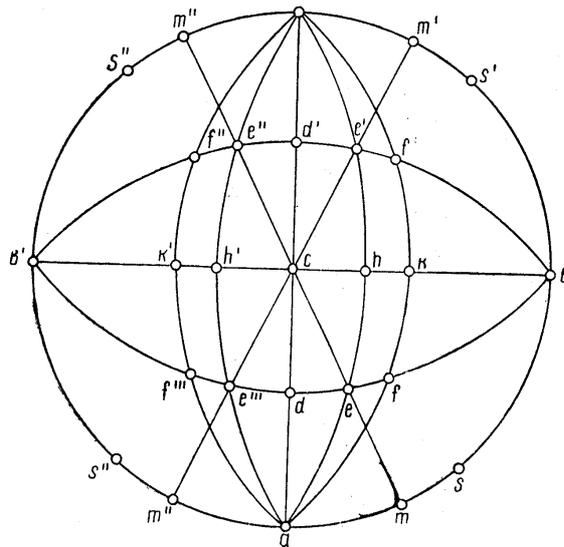


Рис. 2.40. Стереографическая проекция кристалла оливина

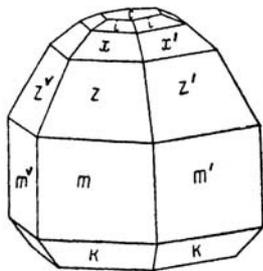


Рис. 2.41. Кристалл гринокита

Граням ромбической призмы m дадим символы (110) , поскольку они параллельны оси Z и проекция нормалей к ним совпадает с проекцией нормалей к e . Расставляем символы (110) , $(\bar{1}\bar{1}0)$, $(\bar{1}\bar{1}0)$ и $(1\bar{1}0)$. То же делаем в поясах acd и $bc'b'$, в результате получаем для $d - (101)$ и $d' - (\bar{1}01)$, $h - (011)$ и $h' - (0\bar{1}1)$, $k - (021)$ и $k' - (0\bar{2}1)$. Остаются грани ромбической пирамиды f и ромбической призмы s . Поскольку полюсы ромбической пирамиды лежат ближе всего к точке выхода оси Y , можем дать им следующие символы $f - (121)$, $f' - (\bar{1}\bar{2}1)$, $f'' - (\bar{1}\bar{2}1)$, $- (1\bar{2}1)$, а для граней ромбической призмы $s - (120)$, $s' - (\bar{1}\bar{2}0)$, $s'' - (\bar{1}\bar{2}0)$, $s''' - (1\bar{2}0)$.

Для второго примера возьмём кристалл гексагональной сингонии, чтобы рассмотреть расположение символов при установке на четыре оси. На рис. 2.41 изображён кристалл гринокита (CdS) а на рис. 2.42 его стереографическая проекция. Определяем элементы симметрии – одна ось между гранями m''' шестого порядка и шесть пересекающихся по ней плоскостей симметрии. Осей второго порядка нет, следовательно, за X, Y и U придётся брать нормали к плоскостям симметрии. Поскольку их шесть, то возможны две различные установки. В первом варианте за ось Y примем ось пояса $mzxc$ и т. д. (рис. 2.41). Точка её выхода будет в ребре между гранями m' и m'' . Тогда ось X будет выходить в ребре между гранями m и m^V , а U между гранями – m''' и m^{IV} . За ось Z, согласно правилам установки, берётся ось 6. Какую грань взять за единичную? Мы можем выбрать грань одной из гексагональных пирамид z , x и i . Неоднозначность установки сказывается здесь весьма резко, так как в каждом случае символы будут различными. Выберем сперва за единичную грань формы x , как лежащую между z и i . Её символ будет $(10\bar{1}1)$, поскольку она параллельна оси Y. При этой установке грани гринокита получают следующие символы: $c - (0001)$, $m - (10\bar{1}0)$, $z - (20\bar{2}1)$, $i - (10\bar{1}2)$, $k - (10\bar{1}\bar{1})$ и нижний моноэдр j , не показанный на рисунке, $-(000\bar{1})$. Если же за единичную грань взять грань простой формы z , то мы получим следующие символы: $m - (10\bar{1}0)$, $z - (10\bar{1}1)$, $x - (10\bar{1}2)$, $i - (10\bar{1}3)$, $c - (0001)$, $k - (10\bar{1}2)$, $i - (000\bar{1})$.

Разберём второй вариант: за X, Y и U возьмём нормали к граням простой формы m , т. е. нормали к трём другим плоскостям симметрии кристалла гринокита. Тогда точка выхода оси X будет совпадать с полюсом грани m^V на проекции, Y будет совпадать с полюсом грани m' и U с полюсом грани m''' . За единичную грань возьмём грань гексагональной пирамиды x . При этой установке её символ $-(11\bar{2}1)$. Другие грани получают следующие символы: $m - (11\bar{2}0)$, $z - (22\bar{4}1)$, $i - (11\bar{2}2)$, $c - (0001)$, $k - (11\bar{2}1)$, $j - (000\bar{1})$.

Для упражнений по определению символов на глаз следует воспользоваться чертежами кристаллов на таблицах, помещённых в приложениях 1, 2.

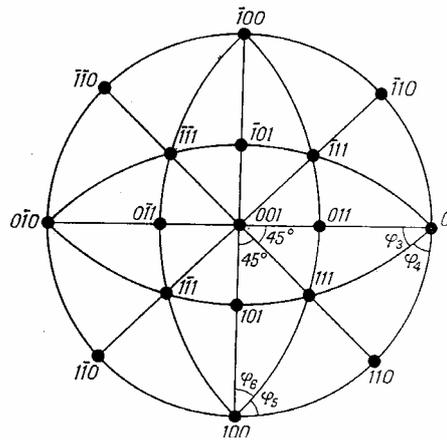


Рис. 2.45. Стереогрaмма тетрагонального кристалла

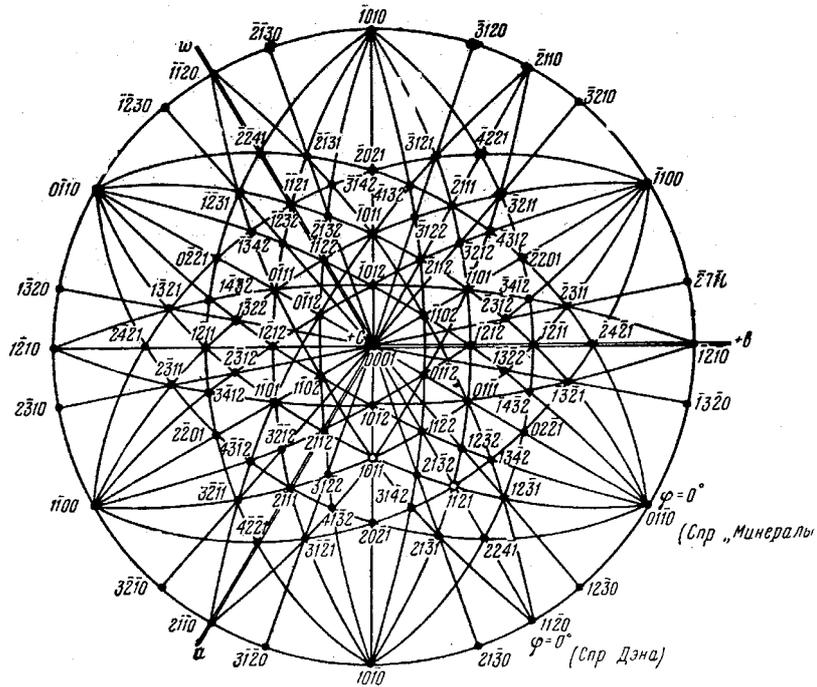


Рис. 2.46. Положение осей и сводная проекция граней в кристаллах гексагональной и тригональной сингоний

Для более уверенного определения приблизительных символов граней, приводим стереограммы кристаллов всех сингоний с указанием символов наиболее распространённых форм (рис. 2.43–2.47).

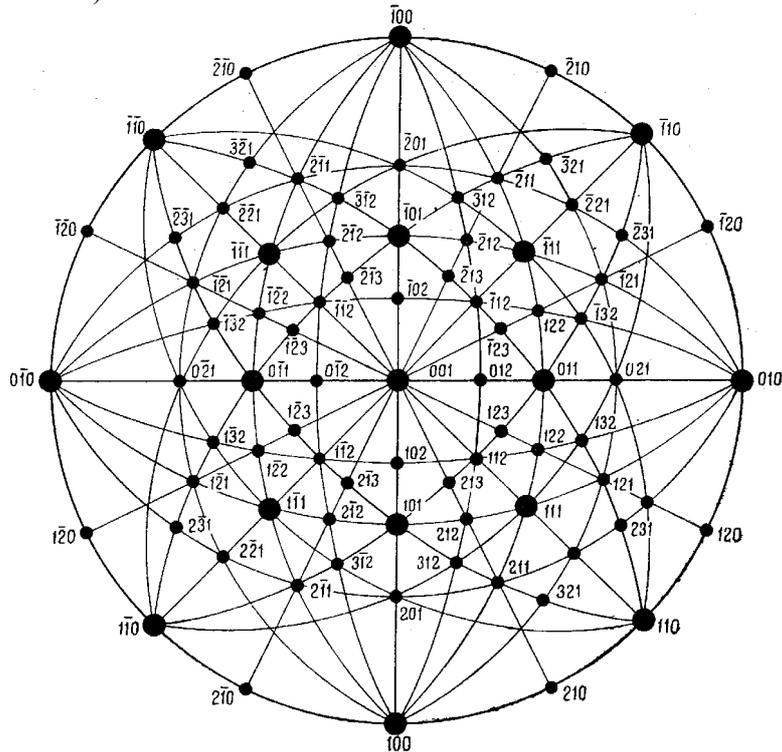


Рис. 2.47. Символы наиболее распространенных граней в кристаллах кубической сингонии

Наибольшую трудность в определении простых форм вызывают кристаллы кубической сингонии. Диагностика простых форм кубической сингонии существенно облегчается тем, что в каждом виде симметрии кубической сингонии грань определённой простой формы имеет индивидуальное соотношение индексов hkl . Определив индекс грани и точечную группу кристалла с помощью табл. 2.12, можно легко определить искомую простую форму.

В заключение укажем ещё некоторые практические приёмы исследований кубических кристаллов. В пентагон-триоктаэдре не легко найти ось второго порядка. Рассматривая модели этой формы, обратим внимание на то, что в ней имеются рёбра трёх различных типов: одни пересекаются (сходятся) в точках выхода осей четвёртого порядка, другие – в точках выхода осей третьего порядка; рёбра третьего типа не пересекаются в указанных осях – в их серединах лежат выходы осей второго порядка. В пентагон-триоктаэдре два типа рёбер; одни пересекаются в точках выхода осей третьего порядка, другие в них не пересекаются. В середине рёбер второго типа выходят взаимно перпендикулярные оси второго порядка.

Таблица 2.12

Определение простых форм кубической сингонии с помощью кристаллографических индексов грани простой формы

Класс симметрии	Название простых форм						
	{hkl}	{hhl}	{hkk}	{111}	{hk0}	{110}	{100}
Примитивный	Пентагон-трикетраэдр (12)	Тетрагон-трикетраэдр (12)	Тригон-трикетраэдр (12)	Тетраэдр (4)	Пентагон-додекаэдр (12)	Ромбо-додекаэдр (12)	Гексаэдр (6)
Центральный	Дододекаэдр (24)	Тригон-триоктаэдр (24)	Тетрагон-триоктаэдр (24)	Октаэдр (8)	Пентагон-додекаэдр (12)	Ромбо-додекаэдр (12)	Гексаэдр (6)
Планиальный	Гексатетраэдр (24)	Тетрагон-трикетраэдр (12)	Тригон-трикетраэдр (12)	Тетраэдр (4)	Тетрагексаэдр	Ромбо-додекаэдр (12)	Гексаэдр (6)
Аксиальный	Пентагон-триоктаэдр (24)	Тригон-триоктаэдр (24)	Тетрагон-триоктаэдр (24)	Октаэдр (8)	Тетрагексаэдр (24)	Ромбо-додекаэдр (12)	Гексаэдр (6)
Планиаксиальный	Гексоктаэдр (48)	Тригон-триоктаэдр (24)	Тетрагон-триоктаэдр (24)	Октаэдр (8)	Тетрагексаэдр (24)	Ромбо-додекаэдр (12)	Гексаэдр (6)

Примечание: В скобках количество граней.

Контрольные задания для самостоятельных работ

Для закрепления степени усвоения изложенного выше материала предлагается три контрольные работы, охватывающие все основные разделы данной главы.

Контрольная работа № 1. Вывести возможные простые формы в следующих видах симметрии: 1 – 1, $\bar{1}$ и m ; 2 – 2 и $mm2$; 3 – 222 ; 4 – 3 и $\bar{3}$; 5 – $\bar{3}m$; 6 – 32 ; 7 – 4 и $4/m$; 8 – $4mm$; 9 – 422 ; 10 – $4/mmm$; 11 – 6 и $6/m$; 12 – $6mm$; 13 – 622 ; 14 – $6/mmm$; 15 – $\bar{4}$; 16 – $\bar{4}2m$; 17 – $\bar{6}m2$; 18 – 23 ; 19 – $m\bar{3}$; 20 – $43m$; 21 – 432 ; 22 – 6; 23 – $3m$; 24 – $2/m$; 25 – $m\bar{3}m$.

Выполнение этих заданий производится в следующей последовательности.

1. Записываем обозначение данного вида симметрии в виде формулы симметрии и международных символов.

2. Указываем название вида симметрии по общей форме и номенклатуре Фёдоровского института.

3. На стереографическую проекцию наносим элементы симметрии данного вида и выделяем сферический треугольник. При проектировании кристалла можно заранее заготовить упрощенную стереографическую сетку – стереографическую проекцию всех возможных плоскостей симметрии в кристаллах данной сингонии (рис. 2.48).

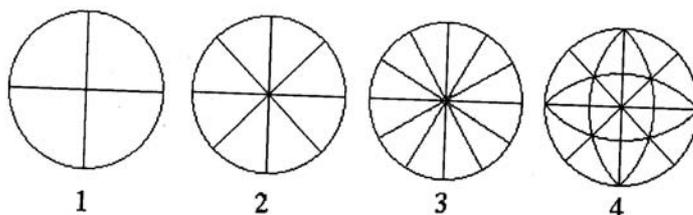


Рис. 2.48. Сетки для учебного проектирования кристаллов:
1 – низшей категории; 2 – тетрагональной сингонии; 3 – тригональной и гексагональной сингонии; 4 – кубической сингонии

4. Рассматриваем все возможные случаи расположения точки, соответствующей нормали к некоторой грани, по отношению к элементам симметрии:

- а) на выходах осей (грань перпендикулярна данной оси);
- б) на линии окружности (грань вертикальна);
- в) на линиях изображающих проекции осей;
- г) на линиях изображающих плоскости;
- д) внутри круга (вне проекций осей и плоскостей (грань расположена косо ко всем элементам симметрии)).

5. Все выбранные точки будут являться проекцией одной из граней возможных простых форм. Остальные грани этих простых форм получим путём взаимодействия выбранных граней со всеми элементами симметрии данного вида. Грани каждой простой формы обозначаем одной соответствующей цифрой.

6. По расположению граней каждой простой формы относительно элементов симметрии и друг друга определяем их название.

7. Записываем все возможные в данном виде симметрии простые формы.

8. Определяем и записываем в обобщённом буквенном виде обобщённые символы граней выведенных простых форм.

Контрольная работа № 2. Определить, в каких видах симметрии возможны следующие комбинации, и изобразить их на стереографической проекции: 1 – ромбическая призма и пинакоид; 2 – пинакоид и ромбический тетраэдр; 3 – ромбическая призма и ромбическая пирамида; ромбическая пирамида и диэдр; 5 – ромбическая дипирамида и пинакоид; 6 – тетрагональная призма и моноэдр; 7 – тетрагональная призма и тетрагональный тетраэдр; 8 – дитетрагональная призма и тетрагональный трапецоэдр; 9 – дитетрагональная призма и дитетрагональная пирамида; 10 – дитетрагональная призма и тетрагональный тетраэдр; 11 – дитетрагональная дипирамида и тетрагональная призма; 12 – тетрагональный скаленоэдр и пинакоид; 13 – дитетрагональная пирамида и моноэдр; 14 – тригональная призма и моноэдр; 15 – тригональная пирамида и дитригональная призма; 16 – ромбоэдр и тригональная дипирамида; 17 – тригональный трапецоэдр и тригональная призма; 18 – дитригональный скаленоэдр и ромбоэдр; 19 – дитригональная пирамида и моноэдр; 20 – гексагональная пирамида и моноэдр; 21 – гексагональный трапецоэдр и пинакоид; 22 – дигексагональная пирамида и гексагональная призма; 23 – дигексагональная призма и моноэдр; 24 – дитригональная дипирамида

и пинакоид; 26 – гексагональная дипирамида и тригональная призма.

Выполнение этих заданий происходит в следующей последовательности.

1. Определяем сингонию.

2. Определяем, в каких видах симметрии данной сингонии возможны в отдельности каждая из названных простых форм и останавливаемся на том виде, в котором они могут встречаться совместно. При определении видов симметрии руководствуемся следующим: *моноэдры* встречаются в видах, в которых нет центра симметрии: *пинакоиды* – в аксиальных видах и в видах с центром симметрии *призмы* – во всех видах; *пирамиды* – в примитивных и планальных видах, а также в тригонально-планаксиальном виде; *удвоенные призмы* – в аксиальных, планальных и планаксиальных видах; *удвоенные пирамиды* – в планальных видах; трапецеэдры – в аксиальных видах.

3. Записываем обозначения найденного вида симметрии в виде формулы симметрии, международных символов, символов Шенфлиса и указываем его название по общей простой форме и по номенклатуре Фёдоровского института.

4. На стереографическую проекцию наносим элементы симметрии выбранного вида и проекции граней данных простых форм.

5. Определяем и записываем в обобщённом буквенном виде обобщённые символы граней простых форм, участвующих в комбинации.

Контрольная работа № 3. По заданным рисункам кристаллов (приложения № 1, 2, 3) определить симметрию кристаллов и названия простых форм, образующих данную комбинацию огранки.

Выполнение этой работы производится в следующей последовательности.

1. Определяется число единичных направлений в кристалле. Это позволяет сразу оценить категорию кристалла. Особая необходимость в предварительной оценке категории возникает тогда, когда в кристалле присутствуют инверсионные оси симметрии или когда возможна ошибка определения симметрии при малом различии линейных и угловых параметров у кристаллов низших

категорий. В этом случае, как известно, тетрагональные или ромбоэдрические кристаллы могут оказаться псевдокубическими, ромбические – псевдотетрагональными и т. п.

2. Определяем имеющиеся элементы симметрии, сингонию и вид симметрии.

3. Записываем обозначения найденного вида симметрии в виде формулы симметрии, международных символов, символов Шенфриса и указываем название вида по общей форме и по номенклатуре Фёдоровского института.

4. Производим установку кристалла с указанием системы координат и единичной или двуединичных граней. Оси координат и единичную грань показываем на рисунке кристалла.

5. По количеству разновидностей граней определяем число простых форм. По количеству граней и их расположению относительно друг друга определяем название каждой простой формы. Записываются обобщённые символы каждой простой формы, её название и число граней.

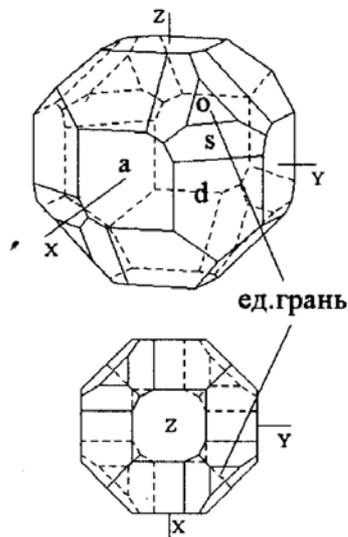


Рис. 2.49. Аксонометрическая и ортогональная проекции кристалла кубической сингонии

6. Наносим на кристаллографическую проекцию выявленного вида симметрии и проекции всех граней обнаруженных простых форм. Определяем положение на проекции координатных осей. На проекции расставляются (записываются) символы всех или части граней, достаточных для представления об изменчивости символов граней каждой простой формы.

Приводим несколько примеров описания кристаллов по их рисункам.

Пример 1. Кристалл кубической сингонии (рис 2. 49).

1. Кристалл не имеет единичных направлений и, следовательно, относится к высшей кубической сингонии.

2. Набор элементов симметрии кристалла $4L_33L_2(3L_4)6P$, что соответствует планальному виду симметрии кубической сингонии. Международный символ $43m$.

3. При установке координатные оси совмещаются с тремя взаимно перпендикулярными осями симметрии второго порядка, являющимися одновременно инверсионными осями четвёртого порядка. Имеется единичная грань, равнонаклонная ко всем осям координат и определяющая равенство всех осевых единиц. Итоговая запись установки $a=b=c$; $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$. Оси координат и единичная грань показаны на рис. 2. 49.

4. В кристалле устанавливаются четыре разновидности граней – простые формы:

o – тетраэдр $\{111\}$ – простая форма, образованная четырьмя гранями, каждая из которых равнонаклонна к осям координат;

a – гексаэдр $\{100\}$ – простая форма, образованная шестью гранями, каждая из которых пересекает только одну ось координат и параллельна двум другим;

d – ромбодекаэдр $\{110\}$ – простая форма, образованная двенадцатью гранями, каждая из которых равнонаклонна к двум осям координат и параллельна третьей оси;

s – тетрагонритетраэдр $\{hhl\}$ – простая форма, образованная двенадцатью гранями, каждая из которых равнонаклонна к двум осям координат и пересекает третью ось координат, но отсекает по ней больший параметр, образуя простую форму $\{hhl\}$ (в частном случае $\{221\}$).

5. Стереографическая проекция кристалла показана на рис. 2.50.

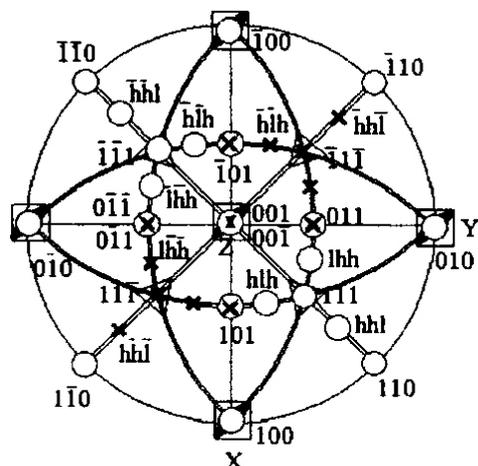


Рис. 2.50. Стереографическая проекция кристалла, изображённого на рис. 2.49.

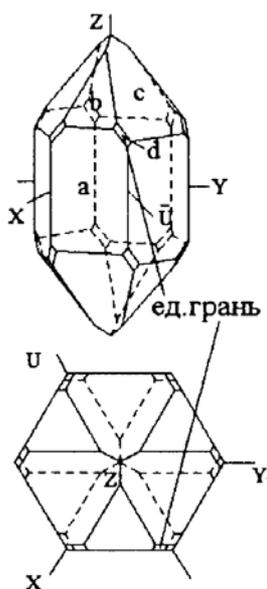


Рис. 2.51. Кристалл гексагональной сингонии

Пример 2. Кристалл тригональной сингонии (рис. 2.51).

1. Кристалл имеет одно единичное направление, то есть принадлежит к средней категории.

2. Планаксиальный вид симметрии тригональной сингонии L_33L_23PC ; международный символ: $3m$.

3. Выбираем четыре оси координат; вертикальная ось Z совмещается с осью симметрии третьего порядка; горизонтальные оси координат совмещаются с тремя осями симметрии второго порядка. Единичная грань отсекает равные параметры по осям X и Y , вдвое меньший параметр по отрицательному направлению оси U и пересекает ось Z . Её символ $\{11\bar{2}1\}$ и её основные параметры: $a=b \neq c$; $\alpha=\beta=90^\circ$; $\gamma=120^\circ$. Оси координат и единичная грань показаны на рис. 2.52.

4. В огранке кристалла устанавливаются четыре простые формы:

- грани типа a образуют гексагональную призму – шесть граней параллельных главной координатной оси Z с символом $\{10\bar{1}0\}$;

- грани типа b пересекают ось Z в двух точках – вверху и внизу, нижние грани расположены симметрично между верхними, общее количество граней 6, символ в общем виде $\{h0hl\}$, в частном случае $\{10\bar{1}1\}$, форма определяется как ромбоид; её грани могут рассматриваться как единичные;

- грани типа c также образуют шестигранник – ромбоэдр с символом $\{0hhl\}$ или $\{10\bar{1}1\}$; формы $\{10\bar{1}1\}$ и $\{10\bar{1}0\}$ могут рассматриваться как конгруэнтные;

- грани типа d пересекают ось Z в двух точках – вверх и вниз, нижние грани расположены под верхними, образуя в совокупности двенадцатигранник – гексагональную пирамиду с символом $\{11\bar{2}1\}$.

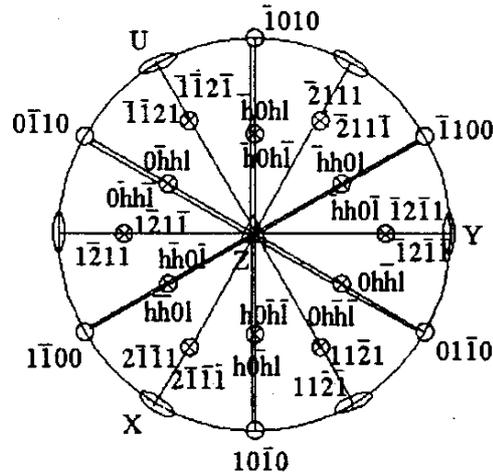


Рис. 2.52. Стереографическая проекция кристалла, изображённого на рис. 2.51

Пример 3. Кристалл триклинной сингонии (рис. 2.53).

1. Судя по рисунку и ортогональной проекции, все сечения кристалла являются косоугольными; все направления в нём являются единичными и поэтому он относится к нижней категории.

2. Из элементов симметрии в нём присутствует лишь центр инверсии. Кристалл относится к центральному виду симметрии триклинной сингонии C . Международный символ – $\bar{1}$.

3. Оси координат ориентируются параллельно рёбрам кристалла (осям соответствующих поясов). Ориентируем ось Z параллельно оси пояса $abd\dots$, ось X параллельно оси пояса $cfb\dots$, ось Y – параллельно оси пояса $aec\dots$. Ось Z вместе с осью соответствующего пояса ориентируется вертикально. Ось Y располагается в плоскости параллельной наблюдателю. Ось X направляется вниз и в сторону наблюдателя. Единичная грань по всем осям координат отсекает разные параметры. Общая запись установки $a \neq b \neq c$; $\alpha \neq \beta \neq \gamma$.

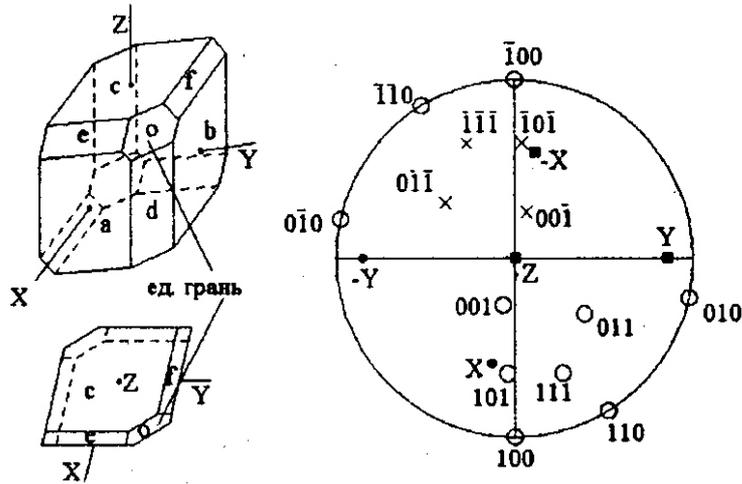


Рис. 2.53. Кристалл триклинной сингонии и его стереографическая проекция

4. В огранке кристалла выделяется семь простых форм. Каждая форма представлена двумя параллельными гранями:

- $a - \{100\}$ – первый пинакоид;
- $b - \{010\}$ – второй пинакоид;
- $c - \{001\}$ – третий пинакоид;
- $f - \{011\}$ (в общем случае $\{0kl\}$) – пинакоид первого рода;
- $e - \{101\}$ (в общем случае $\{hol\}$) – пинакоид второго рода;
- $d - \{110\}$ (в общем случае $\{hk0\}$) – пинакоид третьего рода;
- $o - \{111\}$ (в общем случае $\{hkl\}$) – пинакоид четвертого рода.

5. На стереографической проекции наклонные оси координат изображены внутри круга проекции.

3. ГРАФИЧЕСКОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИСТАЛЛОВ

При описании кристаллического многогранника одной из важнейших задач является определение геометрических констант кристалла, т. е. отношения $a:b:c$, осевых углов α , β , γ и символов его граней. Наиболее просто эта задача решается путём графического вычисления, производимого по результатам измеренных с помощью гониометра углов между несколькими гранями. Намечается следующая упрощенная схема графического вычисления кристалла.

1. С помощью гониометра определяем, где это возможно, углы между гранями. В учебных целях в качестве объектов вычисления взяты рисунки (аксонометрические и ортогональные проекции) кристаллов, позволяющие частично компенсировать отсутствие объёмного восприятия и значения углов между некоторыми гранями.

2. Определяем вид симметрии, количество и названия простых форм.

3. Производим установку (выбираем кристаллографические реперы и единичную грань).

4. Наносим на сетку Вульфа полюса тех граней, которые могут быть нанесены без всяких углов – это грани, лежащие закономерно относительно координатных и кристаллографических осей.

5. По определённым углам, с учётом элементов симметрии данного вида, последовательно, по мере возможностей, наносим полюса граней, проводим возможные пояса и по этим поясам с учётом углов между гранями, лежащих в этих поясах и точек их пересечения наносим полюса всех оставшихся граней.

6. Намечаем точки выхода осей координат на проекции и измеряем осевые углы α , β и γ . Измеряем углы между полюсами одной из граней (принимаемой за обобщённую грань) всех простых форм и точками выхода осей координат на проекции.

7. На основании зависимости параметрических отрезков от косинусов углов, образованных с этими осями единичной гранью, определяем геометрические константы данного кристалла. В кристаллах моноклинной и триклинной сингоний (с косоугольным координатным репером) константами являются также и углы между кристаллографическими осями. В кубической сингонии, где все осевые единицы координатного репера равны между собой, а углы между осями координат прямые, констант для отличия кристаллов разных веществ нет. В средней категории в качестве геометрической константы кристалла принимается отношение $c_0 : a_0$, а в случае применения в тригональных кристаллах собственно тригонального координатного репера ($a_0 = b_0 = c_0; \alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$) константой является угол α .

8. Делением косинуса угла нормали грани к данной оси на косинус такого же угла для единичной грани находим индекс грани и определяем её символ.

3.1. Примеры вычисления кристаллов

Ниже разобраны примеры графического вычисления кристаллов, предложенные Е. Е. Флинтом (1956).

Пример 1. Форстерит $Mg_2[SiO_4]$ (рис. 3.1, а, б).

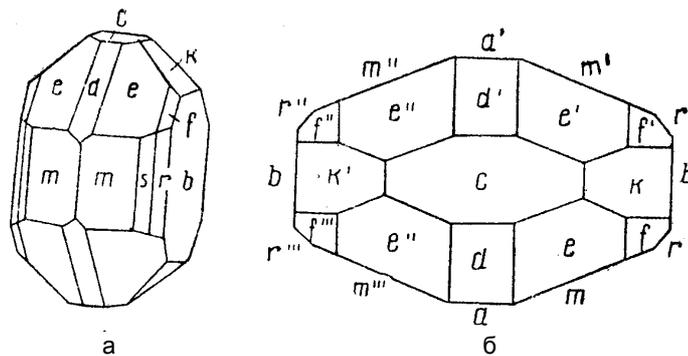


Рис. 3.1. Кристалл форстерита

По модели или по рисункам определяем симметрию. Находим три взаимно перпендикулярные оси второго порядка, три плоскости симметрии и центр инверсии ($3L_23PC$). Следовательно,

кристалл принадлежит к планаксиальному виду ромбической сингонии. Комбинация составлена десятью простыми формами: тремя пинакоидами, пятью ромбическими призмами и двумя ромбическими дипирамидами. Обозначаем грани буквами. Грани одной и той же простой формы обозначаются одной и той же буквой. Принято грани юго-восточного октанта обозначать буквами без знаков, например m . В северо-восточном октанте над буквой справа ставится значок $'$, например m' ; в северо-западном два значка и в юго-западном – три, соответственно m'' , m''' . Выбираем установку: три оси второго порядка берём за оси координат. За единичную грань следует брать грань, пересекающую все три оси под косыми углами. Мы видим, что таких граней две e и f (рис. 3.1, a). Выбираем за единичную грань e , поскольку полюс её нормали будет, очевидно, лежать ближе к центру юго-восточного октанта, чем полюс грани f .

Какие из осей второго порядка выбрать за X , Y и Z ? Ставим кристалл так, чтобы на основной круг проекции попало возможно большее число полюсов. Для этого за вертикальную ось выбираем ту, которая перпендикулярна грани c . За X возьмём ось нормальную к граням a и a' .

Берём лист кальки размером около 23x24 см, кладём его на сетку Вульфа и делаем центральную и боковые отметки.

В первую очередь наносим полюса тех граней, которые могут быть нанесены без всяких углов – это грани трёх пинакоидов: c будет лежать в центре, a и b на основном круге проекции в точках пересечения с ним вертикального и горизонтального диаметров сетки (рис. 3.2)

Нам даны следующие углы: $mm''' = 49^\circ 51'$, $ss' = 94^\circ 11'$, $rr' = 71^\circ 18'$, $ce = 54^\circ 15'$, и $ff' = 72^\circ 07'$.

Поскольку угол mm''' нам известен, а вертикальная плоскость симметрии делит этот угол пополам, то можем найти полюсы всех четырёх граней m . Разделив $49^\circ 51'$ на 2 и получив половинный угол, округляем его до 25° , отложим его от точки a вправо и влево по основному кругу и наметим полюсы m и m''' . Такими же отсчётами находим сверху m' и m'' .

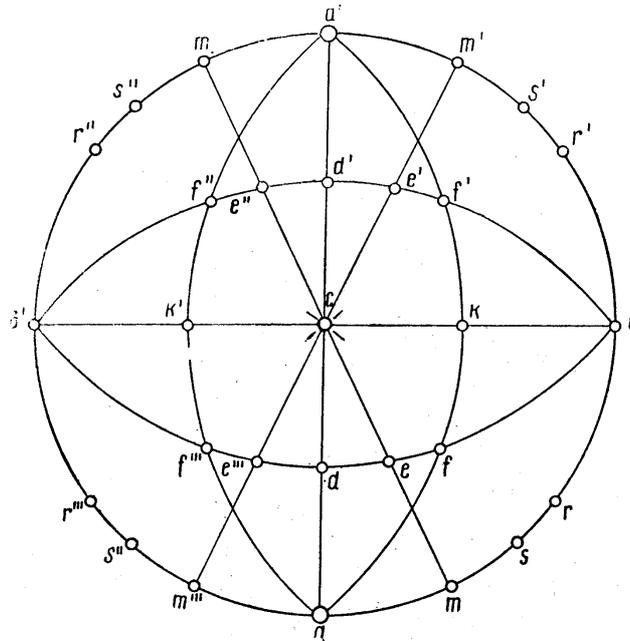


Рис. 3.2. Проекция граней кристалла форстерита

Аналогичным построением, используя данные углы $ss' = 94^\circ 11'$ и $rr' = 71^\circ 18'$, отсчитываем по основному кругу от точек b и b' половинные углы, т. е. 47° и $35^\circ 30''$, находим полюсы граней простых форм s и r .

Из рис. 3.1, б видим, что рёбра между гранями m , e , c , e'' , m'' параллельны, следовательно все эти грани лежат в одном поясе. Полюсы четырёх граней m и грани c уже нанесены на проекцию, поэтому мы можем начертить оба полюса mcm'' и $m''cm'$. Точно также мы можем провести пояса $bc b'$ и aca' , поскольку нам известны по три точки для каждого из этих поясов.

Теперь на поясе mcm'' мы можем найти проекцию грани e , поскольку нам дан угол $ce = 54^\circ 15'$. Поворачиваем кальку так, чтобы полюсы граней m и m' совместились соответственно с нижним и верхним концом вертикального диаметра. При этом точка c должна попасть в центр сетки. Отсчитывая по $54^\circ 15'$ вверх и вниз от точки c , находим полюсы граней e'' и e . Проделав такую же работу с поясом $m''cm'$, находим проекции граней e''' и e' .

Все данные в задаче углы использованы, кроме угла $ff'' = 72^\circ 07'$. Как применить этот угол для нахождения проекций граней простой формы f ? Рассматривая рис. 3.1, b – ортогональную проекцию форстерита, видим, что рёбра между гранями b, f, e, d, e'', f'', b' параллельны, следовательно, все эти грани лежат в одном поясе $bfede''f''b'$. Проводим его, а также пояс $bf'd'e''f''b'$, положив кальку так, чтобы точки b и b' совпадали с концами вертикального диаметра.

Теперь можем нанести проекции всех четырёх граней формы f . Нам дан угол $ff'' = 72^\circ 07'$. Мы видим, что плоскость симметрии, совпадающая при данном положении кальки с горизонтальным диаметром сетки, делит этот угол пополам. Отложив на проведённых полюсах от горизонтального диаметра по половине угла $72^\circ 07'$, т. е. по 36° , найдём все четыре точки f . Мало того, точки пересечения проведённых поясов с горизонтальным диаметром дадут нам проекции граней d и d' , поскольку они лежат в точках пересечения поясов $bfede''f''b'$ и $abcd'a'$.

Нахождение проекций граней про помощи точек пересечения поясов является очень удобным и часто применяемым способом. Таким образом, можем найти проекции граней ромбической призмы k . Из ортогональной проекции видно, что k лежит в точке пересечения $bkck'b'$ и fkf' . Проведя пояс ff' , найдём в точке его пересечения с горизонтальным диаметром (калька повернута в начальное положение) точку k и, соответственно, с левой стороны k' после проведения пояса $f''f'''$.

Теперь построение проекции фостерита закончено и можем приступить к графическому вычислению констант кристалла и символов его граней. Намечаем точки выхода осей координат на проекции. В точках a и a' будет выходить ось X ; в a её положительный конец, в a' – отрицательный (соответственно в b и b' будут выходить Y и Y' ; в точке c будет выходить Z . Углы между этими точками дадут нам осевые углы: $Z - Y = \alpha$, $Z - X = \beta$, $X - Y = \gamma$. В нашем случае все они равны 90° , как и полагается для кристалла ромбической сингонии. Единичная грань e даёт нам возможность вычислить отношение $a:b:c$. Измеряем по углам больших кругов, т. е. по меридианам сетки, углы eX, eY, eZ . Для этого ставим в южный полюс сетки X и, отсчитав дугу до e , получим $42^\circ 30'$. Приводим в южный полюс точку Y , получим $eY = 70^\circ$. Для

того чтобы измерить угол eZ , приводим e на один из диаметров сетки и по нему отсчитываем $eZ = 54^{\circ} 15'$. Этот угол можно было бы и не измерять, так как он входит в число данных в задаче.

Теперь на основании зависимости параметрических отрезков от косинусов углов, образованных с этими осями единичной гранью, можем написать $a:b:c=1/\cos e_x : 1/\cos e_y : 1/\cos e_z$. Поскольку отношение по оси Y принято приравнять к единице, получим: $a : l : c = \cos e_y / \cos e_x : 1 : \cos e_y / \cos e_z = \cos 70^{\circ} / \cos 42^{\circ} 30' : 1 : \cos 70^{\circ} / \cos 54^{\circ} 15' = 0,342 / 0,737 : 1 : 0,342 / 0,584 = 0,4649 : 1 : 0,5854$. Проводить отношения осевых единиц далее четвёртого знака не имеет смысла.

Теперь, когда геометрические константы форстерита нами получены, остаётся вычислить символы граней его простых форм. Для этого измеряем углы между полюсами всех граней и точками выхода осей координат на проекции. Заполняем первые три столбца нижеприведённой таблицы (табл. 3.1). Для каждой простой формы, входящей в комбинацию, достаточно найти символ одной её грани, так как для остальных граней этой простой формы символы будут состоять из тех же индексов. Изменяться будут только знаки и порядок расстановки индексов.

Таблица 3.1

Вычисление символов граней форстерита

Грани	Углы с осями			Натуральные косинусы углов			Частные $\cos P / \cos(111)$			Символы граней
	+X	+Y	+Z	+X	+Y	+Z	+X	+Y	+Z	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a	0°	90°	90°	1	0	0	-	-	-	(100)
b	90°	0°	90°	0	1	0	-	-	-	(010)
c	90°	90°	0°	0	0	1	-	-	-	(001)
m	25°	65°	90°	0,906	0,423	0	1,1	1,2	0	(110)
s	43°	47°	90°	0,731	0,682	0	1	2	0	(120)
r	54°30'	35°30'	90°	0,581	0,814	0	0,8	2,4	0	(130)
d	39°	90°	51°	0,777	0	0,629	1	0	1,1	(101)
k	90°	40°30'	49°30'	0	0,760	0,649	0	2,2	1,1	(021)
e	42°30'	70°	54°15'	0,737	0,342	0,584	1	1	1	(111)
f	51°	54°30'	60°	0,629	0,581	0,500	0,9	1,7	0,9	(121)

Для нахождения индекса грани по данной оси следует косинус угла, который составляет нормаль к грани с этой осью, разделить на косинус такого же угла для единичной грани. Выписываем натуральные косинусы всех измеренных нами углов и составляем столбцы 5–7 табл. 3.1. Затем производим указанное выше деление и получаем столбцы 8–10. Деление достаточно вести до первого знака после запятой, в редких случаях – до второго. Отношения полученных дробей (правильных и неправильных) приводим к отношению целых чисел. При этом надо помнить, что, поскольку мы делали вычисление графически, полученные нами цифры являются приближёнными, но индексы всегда должны быть целыми числами. Например, для грани ромбической призмы m мы получим 1,1:1,2:0; первые две цифры можно считать равными и написать символ (110). Для ромбической дипирамиды f имеем 0,9:1,7:0,9; можно считать, что 0,9 в два раза меньше 1,7, и поэтому символ этой формы будет (121).

Для тех граней, у которых в таблице косинусов имеются два нуля, например, 1:0:0 – никакого деления на косинус единичной грани делать не надо, а сразу же написать символ (100). Это ясно из следующего. Если произвести указанное деление, то в столбцах 8–10 для простой формы a получим 1,3:0:0. Для того чтобы это отношение привести к отношению целых чисел, все три члена отношения нужно разделить на 1,3 и получить 1:0:0, следовательно, для таких граней, как a , b , c никакого деления на косинусы единичной грани делать не надо.

Суммируем результаты нашей работы в виде следующей характеристики минерала форстерита.

1. Ромбическая сингония.
2. Ромбодипирамидальный (планаксиальный) класс симметрии ($3L_23PC, mmm, D_{2h}$).
3. Геометрические константы: $a:b:c=0,4649:1:0,5854$; $\alpha=\beta=\gamma=90^\circ$.
4. Комбинация содержит следующие простые формы: пинакоиды $a\{100\}$, $b\{010\}$, $c\{001\}$; ромбические призмы – $m\{110\}$, $s\{120\}$, $r\{130\}$, $d\{101\}$, $k\{021\}$; ромбические дипирамиды – $e\{111\}$ и $f\{121\}$
5. Расставляем на проекции символы всех граней.

Пример 2. Ортоклаз $K[AlSi_3O_8]$ (рис. 3.3, а, б).

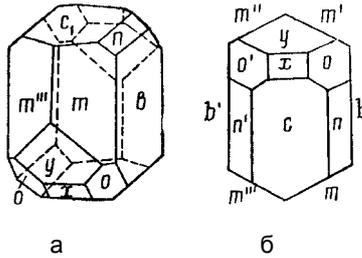


Рис. 3.3. Кристалл ортоклаза

По модели или рисунку определяем симметрию: плоскость симметрии, ось второго порядка и центр инверсии. Следовательно, взятый кристалл относится к планаксиальному классу моноклинной сингонии (L_2PC).

Комбинация состоит из семи простых форм – четырёх пинакоидов (b, c, x, y) и трёх ромбических призм (m, n, o).

Берём лист кальки и кладём его на стереографическую сетку. Намечаем центр и боковой знак и обводим по сетке основной круг проекции (рис. 3.4). Ориентируем кристалл так, чтобы пояс mbm'/m'' и т. д. принял вертикальное положение. Если будем смотреть на кристалл сверху, то увидим картину, показанную на рис. 3.3, б. Нанесём на проекцию элементы симметрии. Очевидно, выходы оси второго порядка, как совпадающие с нормальными к граням b, b' , попадают на основной круг проекции. Мы можем поместить их на две любые диаметрально противоположные точки основного круга. Наметим b и b' на крайних точках экватора сетки справа и слева (рис. 3.4). Плоскость симметрии изобразится диаметром, соединяющим оба полюса сетки. Наносим этот диаметр на кальку.

Нам даны следующие углы между гранями: $mm'''=61^\circ, cm=68^\circ, cx=50^\circ, cy=80^\circ, cv=45^\circ, xo=27^\circ$. Рассматривая данные углы, намечаем схему дальнейшей работы. Какие грани наносятся прежде всего? Очевидно, m , так как мы знаем, что они лежат на основном круге и угол между двумя гранями m нам известен. В следующую очередь найдём грани c, x, y , лежащие перпендикулярно к плоскости симметрии, и, наконец, оставшиеся грани n и o .

Грани m . Из рис. 3.4. видно, что грани m и m''' расположены симметрично относительно плоскости симметрии, следовательно, последняя делит пополам угол между обеими гранями.

Берём половину угла 61° , т. е. $30^\circ 30'$, отсчитываем эту величину вправо от нижнего полюса сетки (где основной круг пересекает плоскость проекции) по основному кругу и находим проек-

цию грани m . Сделав такой же отсчёт влево, найдём m''' . От верхнего полюса аналогично строим m' и m'' .

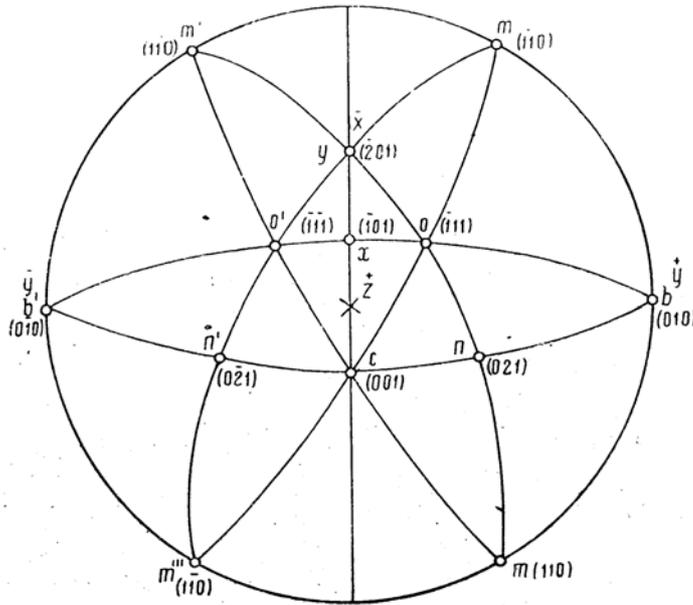


Рис. 3.4. Проекция граней кристалла ортоклаза

Теперь весь вертикальный пояс нанесён и даёт нам опорные пункты для дальнейшего проектирования.

Обычно все грани на кристалле расположены по поясам или зонам. *Поясом* называется совокупность граней, пересекающихся по параллельным рёбрам. Направление рёбер, проведённое через начало координат, называется *осью пояса*. При этом всегда надо помнить следующее.

1. Пояс всегда изображается на стереографической проекции в виде большого круга.

2. Как всякий большой круг на шаре, пояс определяется двумя при условии, что эти точки не представляют концов одного и того же диаметра.

3. Полюсы пояса, или выходы его оси, являются полюсами большого круга, изображающего этот пояс на проекции.

4. Если какая-либо грань принадлежит одновременно двум различным поясам, то проекция этой грани определяется точкой пересечения этих поясов.

Какие зоны или пояса наблюдаются на взятом примере? Ищем на рисунках параллельные рёбра и находим несколько поясов: sxu , $bncn'b'$, $boxo'b$... и т. д. Выбираем тот из них, который проще всего связать с уже нанесёнными точками. Это будет пояс sxu . Его ось совпадает с осью второго порядка, полюсы будут лежать в точках b и b' . Отсюда мы должны заключить, что нормали к граням этого пояса должны лежать в плоскости симметрии, следовательно, их проекции попадут на диаметр, изображающий эту плоскость. Этот же диаметр будет, очевидно, проекцией самого пояса sxu .

Перейдём к нанесению этих граней. Положение всякой точки на сфере определяется пересечением двух дуг. Одна дуга (изображённая на проекции диаметром) у нас есть. Для построения каждой из точек s , x и y нам надо иметь ещё одну дугу. Они даны углами ms , sx , sy . Очевидно, сперва мы должны найти грань s . Нам известен угол $ms=67^\circ 47'$, поэтому точка s лежит на малом круге, проведённом из m , радиус которого равен $67^\circ 47'$.

Построение малых кругов нам известно из ранее разобранных задач 9. Здесь оно значительно облегчается тем, что точка m лежит на основном круге проекции. Приведя её в полюс сетки и отсчитав угол $67^\circ 47'$, обводим часть соответствующей параллели до встречи с диаметром. Точка пересечения этой параллели с диаметром будет искомой проекцией грани s . От этой точки нетрудно найти x и y , так как их угловые расстояния от s нам известны; кроме того, мы знаем, что они лежат на уже проведённом диаметре. Отсчитываем от s вверх 50° и 80° и отмечаем точки x и y . Теперь нами закончен второй пояс, перпендикулярный к первому ($mbm'm''$... и т. д.).

Найденные точки дают возможность провести несколько новых поясов и воспользоваться ими для нанесения оставшихся граней n и o . Проведя большой круг через точки b , s , b' , нанесём пояс, в котором лежит грань n (см. рис. 3.3). Зная расстояние от n до s из таблицы углов, легко найдём проекции граней n и n' . Проводим b и b' в полюсы сетки и наносим круг bsb' по меридиану. Затем отсчитываем от точки s 45° и отмечаем положение найденной та-

ким образом грани. Симметрично наносим n' . Для нахождения проекции грани o производим построение, совершенно аналогичное предыдущему. Грань o лежит в поясе $boxo'b'$; приводим опять b и b' в полюсы сетки и находим меридиан, проходящий через точку x . Затем от x отсчитываем вверх и вниз по $27'$ и находим o и o' .

Теперь нанесены все грани, и задача проектирования закончена. Остаётся сделать проверку нанесённой проекции. Из рисунков (рис. 3.3, 3.4) видим, что на кристалле имеются пояса, которыми мы не пользовались при построении и поэтому их не нанесли. Если теперь проведём некоторые из этих поясов и увидим, что нанесённые точки расположены на них и в точках их пересечения, то проекция построена верно.

Приводим m и m'' в полюсы сетки. Проекция граней c и o должны оказаться на одном меридиане. Равным образом точки n , o , u должны попасть на другой. Наносим эти пояса на проекцию и приводим в полюсы сетки грани m''' и m' . Теперь наносим пояса $m'''n'oym'$ и $m'''com'$. Если около точек c , o , o' , u не получается треугольников от пересечения начерченных дуг, то проекция сделана верно. Если такие треугольники имеются, то где-то есть ошибка в отсчётах.

На взятом примере выбираем за оси координат следующие направления: за ось X – направление рёбер пояса $bncn'b'$, за ось Y – ось второго порядка, т. е. направление рёбер пояса sxu , а за ось Z – направление рёбер пояса $tbm'm''$.

Когда говорим, что за ось координат берём направление ребра, то это надо понимать так, что мы берём направление параллельное этому ребру, а следовательно, и всем рёбрам определённого пояса. Это направление и будет осью пояса, оно будет выходить в полюсе большого круга, который соответствует данному поясу на проекции.

Следовательно, когда мы хотим найти на проекции направление оси какого-либо пояса (или серии параллельных рёбер на кристалле), то должны взять полюс того большого круга, который изображает этот пояс на проекции.

В рассматриваемом случае (ортоклаз) ось X проектируется в полюсе пояса $bncn'b'$, ось Y – в полюсе пояса sxu и ось Z – в полюсе пояса $tbm'm''$..., т. е. в центре основного круга. Напомним, что положительным направлением считается: для оси X – к наблюда-

телю, для оси Y – вправо и для оси Z – вверх. Следовательно, на рис. 3.4 мы имеем $+Z$, $+Y$ и $-X$, положительный конец оси X оказался под плоскостью проекции и попал в нижнее полушарие.

Зная точки выхода осей, можно легко измерить осевые углы, проводя эти точки на один меридиан. Прodelав это, получим: $ZY = \alpha = 90^\circ$, $ZX = 64^\circ$, следовательно, $ZX = \beta = 180 - 64 = 116^\circ$ и, наконец, $XY = \gamma = 90^\circ$.

Переходим к определению параметрических отрезков. Для этого сначала выберем единичную грань. Какая нанесённая на проекцию грань пересекает все три оси координат под косыми углами? По видимому только грань o . Измерив углы между её проекцией (o) и точкой выхода осей, получим: 133° , 63° и 36° . Взяв натуральные косинусы этих углов получим: $OA:OB:OC = a:b:c = 1/0,682:1/0,454:1/0,809$, или $a:b:c = 0,454/0,809:1:0,454/0,809 = 0,6658:1:0,5613$.

Это значит, что если за ребро b взять, например, 10 см, то рёбра a и c будут равны (округляя) 6,7 и 5,6 см.

Переходим теперь к определению символов граней кристалла. Для этого нам необходимо знать косинусы углов, которые нормали к граням образуют с точками выхода координатных осей X , Y и Z на проекции. Эти углы легко измерить при помощи сетки Вульфа, приводя полюс грани и точку выхода оси на один и тот же меридиан. Результаты измерения располагаем должным образом в виде таблицы (табл. 3.2).

В столбце 1 пишем буквенные обозначения граней. В столбцах 2, 3 и 4 располагаем соответствующие углы с осями X , Y и Z . В столбцах 5, 6 и 7 выписываем натуральные косинусы измеренных углов. Зная эти косинусы, по формуле: $h:k:l = \cos P_x / \cos E_x : \cos P_y / \cos E_y : \cos P_z / \cos E_z$ составляем столбцы 8, 9 и 10. При этом принимаем в расчёт знак делимого (например, для косинусов граней o , x и y), между тем как в делителе берём лишь абсолютную величину косинуса единичной грани. Знак минус здесь не принимается во внимание, поскольку отрезки, отсекаемые единичной гранью, определяют масштабы по осям и как единицы меры не имеют знака.

Полученные дробные отношения заменяем отношением целых чисел, делая при этом соответствующие сокращения. Например, для грани m имеем 1,14; 1,13 и 0. Первые две величины мо-

жем принять за равные и, разделив их одну на другую, получим 1, 1, 0 – это и будет символ грани, если его написать в виде (110). Возьмём пример. Для грани *y* имеем 0,45; 0; 0,73. Без особой натяжки можно считать, что 0,73 по абсолютной величине вдвое меньше 0,45. Разделив все три величины на 0,73, получим $\bar{2}$, 0, 1 – символ ($\bar{2}$ 01). Таким образом, составляем последний столбец табл. 3.2.

Таблица 3.2

Вычисление символов граней ортоклаза

Грани	Углы с осями			Натуральные косинусы углов			Частные cos P/cos (111)			Символы граней
	+X	+Y	+Z	+X	+Y	+Z	+X	+Y	+Z	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
b	90°	0°	90°	0	1	0	-	-	-	(010)
c	90°	90°	26°	0	0	0,899	-	-	-	(001)
m	39°	59°	90°	0,777	0,515	0	1,14	1,13	0	(110)
n	90°	45°	50°	0	0,707	0,643	0	1,56	0,79	(021)
o	133°	63°	36°	$\bar{0}$,682	0,454	0,809	1	1	1	($\bar{1}$ 11)
x	141°	90°	24°	$\bar{0}$,777	0	0,914	1,14	0	1,13	($\bar{1}$ 01)
y	171°	90°	54°	$\bar{0}$,988	0	0,588	1,45	0	0,73	($\bar{2}$ 01)

Заметим, что для символов рёбер принято заключать индексы в квадратные скобки, например [100]. Фигурные скобки обозначают символ всей простой формы. Если в нашем примере для *m* поставить {110}, то это будет обозначать всю простую форму – ромбическую призму, состоящую из граней (110), ($\bar{1}$ 10), ($\bar{1}\bar{1}$ 0) и ($\bar{1}$ 10). Знак минус (-) ставится в символе над соответствующим индексом. Он показывает, что грань пересекает отрицательное направление оси (так, на взятом примере грани *o*, *x* и *y* пересекают ось X). Вписываем найденные индексы в соответствующих местах на проекции.

Дадим окончательный результат нашей работы в виде следующей характеристики минерала ортоклаза (K[AlSi₃O₈]).

1. Моноклинная сингония.
2. Призматический (планаксиальный) класс (L₂PC-2/m-C_{2h}).

3. Геометрические параметры – $a:b:c = 0,6658:1:0,5613$; $\alpha = \gamma = 90^\circ$, $\beta = 116^\circ$.

4. Комбинация содержит следующие простые формы: пинакоиды – $b\{010\}$, $c\{001\}$, $x\{\bar{1}01\}$, $y\{\bar{2}01\}$, ромбические призмы – $m\{110\}$, $n\{021\}$, $o\{\bar{1}11\}$.

5. Расставляем на проекции символы всех граней.

Пример 3. Халькоцит Cu_2S (рис. 3.5, а, б).

На рис. 3.5 видим, что кристалл принадлежит к планаксиальному классу ромбической сингонии ($3L_23PC$), так как он имеет три взаимно перпендикулярные оси второго порядка, три плоскости и центр симметрии.

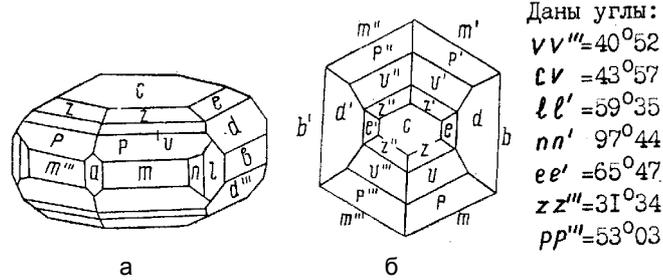


Рис. 3.5. Кристалл халькоцита: а – вид сбоку; б – вид сверху

Комбинация состоит из одиннадцати простых форм – трёх пинакоидов (a , b , c), пяти ромбических призм (m , n , l , d , e) и трёх ромбических дипирамид (p , v , z).

1. Ориентируем кристалл так, чтобы проекции граней a , b , l , m , n попали на основной круг проекции, т. е., иначе говоря, помещаем полюс пояса, в котором лежат эти грани, в центр проекции (рис. 3.6). В этом центре будет лежать проекция грани c . Поместим грани b и b' по концам экватора сетки. Грани a , очевидно, попадут в её полюсы. Наносим два диаметра сетки aa' и bb' , которые являются проекциями двух плоскостей симметрии.

2. Грани l и n можем построить по углам $ll' = 59^\circ 35'$ и $nn' = 97^\circ 44'$. Разделив эти углы по полам и сделав отсчёты точки найдём грани l и n .

метр aa' совмещается при этом с экватором сетки. Отсчитываем по любому меридиану $20^\circ 30'$ вверх и вниз от экватора и наносим соответствующие параллели. Точки их пересечения с приведённым малым кругом дадут искомые проекции граней v .

4. Теперь имеем две известные точки, можем провести пояса $trvc\dots$ и $m'''p'''v'''c\dots$. В местах встречи их с основным кругом найдём проекции граней m .

5. Построение для p и z аналогично тому, которое разобрано для v , только вместо малого круга около точки c мы здесь воспользуемся только что приведёнными поясами.

6. Грань s находится простым отсчётом половины её угла от центра по диаметру bb' .

7. Единственное затруднение возникает с гранью d , для которой не заданно никаких углов.

Из рис. 3.5, a мы видим, что лежащая внизу грань d''' расположена в одном поясе с l и p , так как рёбра их пересечения параллельны. Но грань d''' параллельна диаметрально противоположной для неё грани d' . Поэтому заключаем, что если провести пояс через p и l , то на нём должна лежать грань d' ; с другой стороны, видим, что грань d' лежит на диаметре bb' . Построение ясно из выше сказанного: приводим l и l''' в полюсы сетки, наносим пояс $lp'l'$; точка пересечения данного пояса с диаметром bb' даёт искомую проекцию грани d' . Симметрично расположена d .

8. Проверяем сделанную проекцию и переходим к вычислению.

Из таблицы установок видим, что в этом примере оси X , Y и Z совпадают с осями симметрии второго порядка, следовательно, выходы их положительных концов будут в точках a , b и c . Осевые углы все равны 90° .

Приёмы вычисления подробно описаны в примерах 1 и 2. В табл. 3.3 приведены окончательные результаты. За единичную грань принята грань p .

Таблица 3.3

Вычисление символов граней халькоцита

Грани	Углы с осями			Натуральные косинусы			Частные $\cos P / \cos (11)$			Символы граней
	+X	+Y	+Z	+X	+Y	+Z	+X	+Y	+Z	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
a	0	90	90	1	0	0	-	-	-	(100)
b	90	0	90	0	1	0	-	-	-	(010)
c	90	90	0	0	0	1	-	-	-	(001)
m	30 15'	59 45'	90	0,865	0,504	0	1,1	1,1	0	(110)
n	41 15'	48 45'	90	0,754	0,659	0	0,98	1,48	0	(230)
l	60 15'	29 45'	90	0,499	0,868	0	0,65	1,9	0	(130)
d	90	27 20'	62 40'	0	0,888	0,459	0	1,99	0,99	(021)
e	90	57	33	0	0,545	0,839	0	1,2	1,8	(023)
p	40	63 30'	62 30'	0,766	0,446	0,462	1	1	1	(111)
v	53	69 30'	44	0,602	0,350	0,719	0,79	0,79	1,55	(112)
z	63	74 15'	32	0,454	0,271	0,848	0,59	0,6	1,8	(113)

Пример 4. Кварц SiO_2 (рис. 3.7, а, б, в)
Даны углы $mr = 38^\circ 13'$; $mx = 12^\circ 01'$

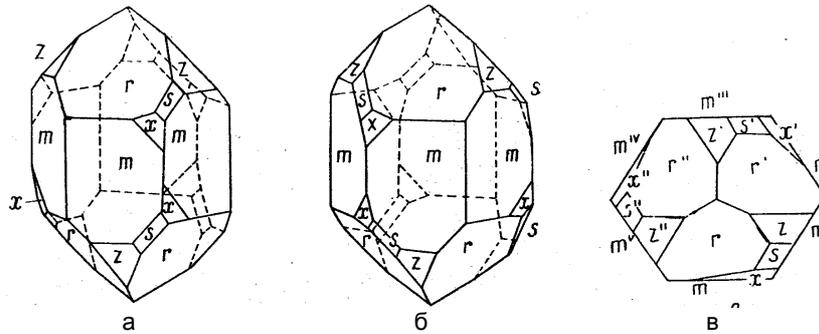


Рис. 3.7. Кристаллы кварца
а – правый кристалл сбоку; б – левый кристалл сбоку;
в – правый кристалл (а) сверху

Определяем симметрию. Из рис. 3.7, а и б убеждаемся в присутствии одной оси симметрии третьего порядка и трёх осей вто-

рого. Плоскостей симметрии нет, следовательно, кристалл принадлежит к аксиальному классу тригональной сингонии ($L_33L_2 - 32 - D_3$).

Нам дано всего два угла, но этого вполне достаточно для построения проекции. При этом будут широко использоваться имеющиеся на кристалле пояса.

1. Из таблицы установок видим, что, при проектировании кристаллов тригональной сингонии на четыре оси, главная ось третьего порядка берётся за вертикальную. Следовательно, проекции граней m должны попасть на основной круг проекции. За X, Y и U берём три оси второго порядка.

Ставим кристалл так, чтобы полюс грани попал в нижний полюс сетки; тогда проекции граней m' , m'' , m''' и т. д. расположатся по окружности симметрично, как вершины правильного шестиугольника. Наносим эти грани (рис. 3.8).

2. На рис. 3.7, в видим, что грани m , r , z' , m''' все лежат в одном поясе, ось которого перпендикулярна к оси третьего порядка. Точно так же расположены пояса $m'zr'/m^{IV}$ и $m''r'/z''/m^V$.

Проводим эти пояса и по данному углу $mr = 38^\circ 13'$ наносим грани r , r' , r'' , проводя соответственно m , m'' , m^{IV} в полюс сетки.

3. На рис. 3.7, в виден, кроме того, ещё один очень ясный пояс $m'xr'$. Точки m и r нам известны, следовательно, можем провести этот пояс на проекции. Наносим указанный пояс, а также оба ему симметричных $m''r''/m^V$ и $m^{IV}r/m'$. В точках пересечения трёх поясов найдём грани s , s' и s'' (рис. 3.8), а первые три пояса дадут в пересечении с вновь найденными поясами точки z , z' и z'' , это также совершенно ясно из рисунка (например, грань z , очевидно, лежит в пересечении поясов $m'zr'/m^{IV}$ и $m'xr'$ и т. д.).

4. Наконец, для X мы имеем угол $mx = 12^\circ 01'$ и знаем, что грань лежит в проведённом уже поясе $m'xs$.

При выборе осей пользуемся данными таблицы установок. Ось третьего порядка будет служить осью Z с выходом в центре проекции; осями X, Y и U служат оси второго порядка, которые выходят в серединах рёбер вертикального пояса. Следовательно, X будет лежать посередине между m и m^V ; Y между m' и m'' и, наконец, U между m''' и m^{IV} .

2) либо отсекать по одной из горизонтальных осей вдвое меньший параметр (рис. 3.9, б). В первом случае в числе её индексов должен быть 0; например $(10\bar{1}1)$, во втором – двойка, например $(11\bar{2}1)$. При вычислении гексагональных и тригональных кристаллов решают задачу так, как будто четвёртой оси нет, т. е. для каждого символа находят три индекса и затем вычисляют четвёртый по формуле $h + k + i = 0$.

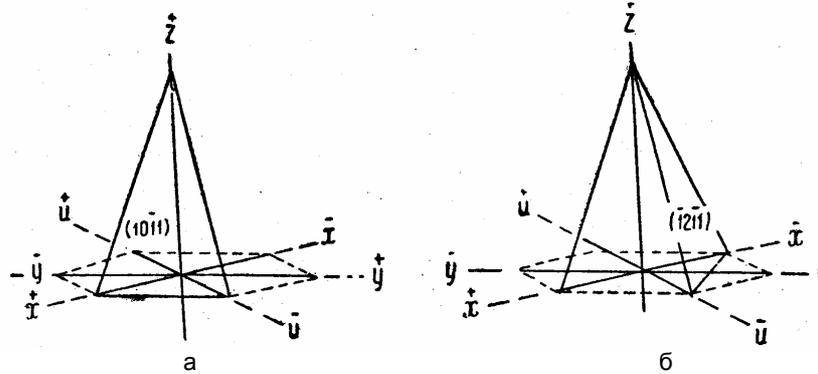


Рис. 3.9. Два случая положения единичной грани при установке на четыре оси: а – грань имеет символ $(10\bar{1}1)$; б – грань имеет символ $(\bar{1}2\bar{1}1)$

В разбираемом примере единичная грань r параллельна оси Y . Следовательно относящийся к Y столбец можно было бы пропустить и вести вычисление для X, U и Z .

Определяем отношение: $a:b = 0,682/0,616 = 1,107$. Дальнейших пояснений таблица не требует. В этом примере обратим внимание на то, как, пользуясь поясами, можно при проектировании обойтись небольшим количеством данных.

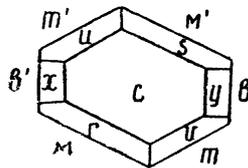


Рис. 3.10. Кристалл борной кислоты (вид сверху)

Пример 5. Борная кислота $B(OH)_3$ (рис. 3.10)

Даны углы: $bm = 59^\circ 00'$, $mM = 61^\circ 30'$, $ct = 80^\circ 30'$, $cs = 43^\circ 14'$, $cv = 41^\circ 06'$, $cM = 95^\circ 03'$.

Из рис. 3.10 определяем, что кристалл принадлежит к центральному виду триклинной сингонии.

7. Наконец, пояс ur в пересечении с $bc'b'$ даёт полюс грани x . Таким образом, используя каждую вновь получаемую грань, мы дошли до конца задачи.

За кристаллографические оси возьмём направление рёбер следующих поясов:

для оси X – ось пояса $b'xsub$;

для оси Y – ось пояса, проходящего через c и опирающегося на точки пересечения поясов vus и rxu с основным кругом. В этих точках должны лежать грани пинакоида (100), который на кристаллах борной кислоты не наблюдается.

Для оси Z – ось пояса $Mmb...$, она выходит в центре проекции.

Наносим точки выхода осей координат. Для X и Y имеем отрицательные концы. Измеряем осевые углы: $\alpha=104^\circ$; $\beta=93^\circ$; $\gamma=89^\circ 20'$.

За единичную грань принимаем v . Результаты графического вычисления приведены в табл. 3.5

8. Определяем геометрические константы: $a:1:c = 0,326/0,582:1:0,326/0,620 = 0,5611:1:0,5284$; вычисленные величины – $a:1:c = 0,5771:1:0,5282$.

Во всех разобранных примерах мы не испытывали затруднений при определении отношения $a:b:c$ и символов граней потому, что всегда имелась на лицо грань, пересекающая все три оси X , Y , Z , которую можно было взять за единичную.

Таблица 3.5

Вычисление символов граней борной кислоты

Грани	Углы с осями			Натуральные косинусы			Частные $\cos P/\cos (11)$			Символы граней
	+X	+Y	+Z							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
c	90°	90°	15°	0	0	0,966	-	-	-	(001)
b	90°	14° 15'	90°	0	0,970	0	-	-	-	(010)
m	31°	60°	90°	0,857	0,500	0	1,5	1,5	0	(110)
M	30° 40'	120°	90°	0,860	0,500	0	1,5	1,5	0	(1 $\bar{1}$ 0)
y	90°	65° 15'	38° 45'	0	0,412	0,781	0	1,3	1,3	(011)
x	90°	121°	17° 45'	0	0,515	0,953	0	1,6	1,5	(0 $\bar{1}$ 0)
v	54° 30'	71°	51° 45'	0,580	0,326	0,620	1	1	1	(111)
s	127°	71°	50° 45'	0,660	0,326	0,636	1,1	1	1	($\bar{1}$ 11)
r	50°	112°	46°	0,642	0,375	0,696	1,1	1,2	1,1	(1 $\bar{1}$ 1)
u	130° 30'	114°	43°	0,649	0,407	0,732	1,1	1,2	1,2	($\bar{1}$ $\bar{1}$ 1)

На практике часто бывает так, что ни одна грань измеренного кристалла (при определённой установке) не будет удовлетворять этому условию. Как вести решение задачи в этом случае? Рассмотрим несколько вариантов.

1. Есть две грани, которые пересекают попарно все три оси; например, одна пересекает X и Y , другая Y и Z . Приняв первую за (110) , определяем $a:b$; из второй, принятой за (011) , находим $b:c$. Приравняв эти отношения, получим искомое $a:b:c$.

При арифметическом вычислении можно решить эту задачу следующим образом. Проводим дуги $(001) - (110)$ и $(100) - (011)$. В точке пересечения этих дуг найдём место отсутствующей на кристалле грани (111)

2. Имеется одна грань, пересекающая две оси. В общем случае задачу решить нельзя: можно лишь определить одно из отношений $a:b$; $b:c$ или $a:c$. В частных случаях полное вычисление кристалла возможно, а именно:

а) когда кристалл принадлежит к одной из средних сингоний, и грань пересекает ось Z и одну из двух других осей;

б) когда кристалл принадлежит кубической сингонии. В последнем случае безразлично, какие две оси пересекают грань.

3. Нет граней, пересекающих оси попарно. Это может быть в том случае, когда на кристалле имеются всего три пары параллельных граней (или четыре в случае гексагонального облика). Задачу решить нельзя. Можно, приписав граням символы (100) , (010) и (001) , измерить осевые углы, но отношение $a:b:c$ определить не возможно.

Контрольные задания для самостоятельных работ

После разбора вышеприведённых примеров студент может приступить к самостоятельному решению задач на проектирование и вычисление. Эти задачи составлены Е. Е. Флинтом для всех сингоний, кроме кубической, и приведены в приложении 4.

Некоторые задачи составлены так, что в них имеется минимальное число данных. Это сделано для того, чтобы приучить работающего широко использовать поясную зависимость и обходиться небольшим количеством измеренных углов.

Приступая к решению задач, надо иметь в виду следующее.

1. Когда даны два рисунка, то один представляет собой вид кристалла спереди и сбоку, а второй – сверху без всякого поворота, так что грани вертикального пояса представляются в виде прямых внешних линий. При этом буквы, служащие для обозначения таких граней, стоят не на самом рисунке, а сбоку. Если таких обозначений нет, то это показывает на отсутствие вертикального пояса.

2. Когда приведён только один рисунок, то он всегда представляет вид кристалла сверху в том положении, в каком надо проектировать, поэтому при моноклинных кристаллах дано направление только для оси X.

Грани одной и той же простой формы обозначаются одинаковыми буквами, причём над ними ставятся значки ^I, ^{II}, ^{III} и т. д.

При пинакоидах значком ^I обозначается диаметрально противоположная грань; в призмах значки возрастают в направлении против часовой стрелки или, когда грани лежат в различных полушариях (при ромбических призмах пересекающих вертикальную ось), спереди назад, или справа налево.

В этих случаях в верхнем полушарии лежат всего две грани призмы.

Обозначение пирамидальных граней подчинено тому же правилу (против часовой стрелки) и понятно из рисунков.

При решении задач на вычисление кристаллов студент представляет аккуратно выполненную проекцию граней кристалла с расставленными символами всех граней и пояснительную записку, в которой приводятся следующие данные.

1. Номер задачи и приведённые данные углы.
2. Сингония и вид симметрии.
3. Количество и названия простых форм.
4. Схема нанесения проекций граней с указанием используемых поясов.
5. Расположение выходов осей.
6. Таблица вычисления символов граней кристалла.
7. Ход вычисления параметрических отношений.
8. Полная окончательная характеристика минерала: а – сингония; б – вид симметрии; в – значения параметрических углов α , β , γ и отношение осевых единиц $a:b:c$; г – названия всех простых форм; д – обобщённый символ граней каждой простой формы.

КРАТКИЙ СЛОВАРЬ ИСПОЛЬЗОВАННЫХ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ

Аллотропия – способность элементов кристаллизоваться в разных структурных формах в зависимости от условий кристаллизации.

Асимметрия – отсутствие симметрии.

Анизотропность – различие свойств кристаллов по разным направлениям при равенстве свойств по одинаковым направлениям. Анизотропность кристаллов проявляется в их оптических, механических, электрических свойствах.

Вид симметрии кристалла – полная совокупность элементов симметрии кристалла. Различаются следующие виды симметрии: *примитивный* – есть только одна поворотная или инверсионно-поворотная ось любого порядка; *центральный* – кроме оси симметрии присутствует центр симметрии и в случае чётного порядка оси – плоскость, перпендикулярная данной оси; *планальный* – плоскости симметрии и лежащая на их пересечении ось симметрии; *аксиальный* – перпендикулярно основной оси имеются поворотные оси второго порядка; *планаксиальный* – кроме основной оси имеются плоскости симметрии, поворотные оси симметрии и центр симметрии.

Винтовые оси симметрии – включают поворот вокруг оси, соответствующий её порядку, и трансляцию в направлении оси на период равный, в элементарном случае, периоду повторяемости в указанном направлении. При повороте по часовой стрелке винтовая ось получает название правой, а при повороте против часовой стрелки – левой.

Вицинали – небольшие пологие выступы на гранях кристалла с углами наклона от нескольких минут до нескольких градусов. Образование вициналей можно рассматривать как результат расщепления при росте кристаллов.

Возможные грань (ребро) кристалла – грань или ребро, не присутствующие в огранке данного кристалла, но которые могут встретиться в огранке других кристаллов этого вещества.

Габитус кристалла – характеристика общих особенностей формы кристалла, проявляющихся в соотношениях размеров граней разных

простых форм, участвующих в огранке кристалла. Наиболее хорошо проявленные грани кристалла являются габитусными. Они имеют наибольшую ретикулярную плотность.

Гексагональная сингония – совокупность видов симметрии имеющих поворотную или инверсионно-поворотную ось шестого порядка.

Гексаэдр (куб) – простая форма кубической сингонии, имеющая шесть граней.

Гексаоктаэдр – простая форма кубической сингонии, имеющая 48 граней.

Геометрические константы – отношения параметрических отрезков координатных осей $a:b:c$ и углы α, β, γ между ними.

Гетеродесмические структуры – структуры, в которых проявляются разные типы химической связи.

Гномоническая проекция – вид проекции, на которой все проектируемые элементы, расположенные на поверхности шара проекции и внутри шара, изображаются на плоскости касательной к северному полюсу сферы проекций.

Гномостереографическая проекция – стереографическая проекция на экваториальную плоскость нормалей к граням.

Гомодесмические структуры – структуры с одним типом химических связей.

Гониометр – прибор для измерения углов между гранями кристаллов.

Группа симметрии – совокупность операций симметрии. В кристаллических многогранниках различаются точечные (32 группы) и пространственные (240 групп) группы симметрии. В точечных группах симметрии всегда сохраняется некоторая точка, не испытывающая никаких симметричных преобразований. В пространственных группах симметрии эта точка, а вместе с тем и вся точечная группа симметрии бесконечно повторяется в кристаллическом пространстве.

Группа трансляций – сочетание направлений трансляций, характерных для данных типов кристаллической решетки.

Двойники – закономерные непараллельные срастания кристаллов одного и того же состава. Двойники, в которых индивиды срастаются по некоторым поверхностям, называются *двойниками срастания*. Двойники, в которых индивидуальные кристаллы как бы проникают друг в друга, называются *двойниками прорастания*.

Двойниковые элементы симметрии – элементы симметрии, связывающие индивиды двойников. Различаются *двойниковые плоскости* и *двойниковые оси симметрии*.

Двуединичные грани – две грани, пересекающие по две кристаллографические оси. С их помощью можно, при отсутствии единичной грани, определить отношение осевых единиц.

Дендриты – одна из форм неправильного роста кристаллов, представляющая поликристаллические образования в виде ветвей дерева. Образуются благодаря быстрому росту кристалла по некоторым направлениям.

Дислокации – это плоскости (линии в двумерном представлении), нарушающие однородность и дальний порядок кристаллической решётки. Дислокации выражаются в прерывании отдельных плоских сеток и рядов структурных единиц и их смещении. На поверхности кристалла дислокации могут проявляться в виде разного рода ступенек, нарушающих гладкость грани.

Дифрактограммы – зафиксированные на фотоплёнке дифракционные картины рентгеновского излучения, проходящего через определённым образом ориентированный и вращающийся кристалл.

Диэдр – открытая простая форма сингоний низшей категории, состоящая из двух пересекающихся граней.

Дододекаэдр – простая форма кубической сингонии из 24 граней, различно наклонённых ко всем осям второго порядка.

Дипирамиды – семейство простых форм средней и низшей категорий грани, которых пересекают главную ось в двух точках и при этом нижние грани расположены точно под верхними. В зависимости от формы поперечного сечения и количества граней различаются: ромбические (8), тригональные (6), дитригональные (12), тетрагональные (8), дитетрагональные (16), гексагональные (12) и дигексагональные (24) дипирамиды; в скобках указано количество граней.

Додекаэдры – простые формы кубической сингонии из 12 попарнопараллельных граней; различаются *ромбододекаэдры* – есть перпендикулярные грани и *пентагондододекаэдры* – не имеющие перпендикулярных граней.

Единичная грань – грань, пересекающая три координатные оси и отсекающая на них масштабные отрезки. Эти масштабные отрезки по соответствующим осям координат X, Y и Z относятся между собой так же, как промежутки (периоды индентичности) рядов пространственной решётки, параллельно которым выбраны координатные оси.

Единичное направление – единственное не повторяющееся в кристалле направление. Число единичных направлений в кристаллах тем больше, чем меньше симметрия кристалла. В кристаллах кубической сингонии единичных направлений нет. В кристаллах средней категории одно единичное направление, а в кристаллах низшей категории – несколько.

Закон Грота – показывает зависимость симметрии кристалла от его состава: «Чем сложнее состав вещества, тем, в общем случае, ниже симметрия его кристаллов».

Закон постоянства углов – позволяет использовать в качестве констант кристаллов значения углов между соответствующими гранями. «Грани кристалла могут изменяться по своей форме и относительным размерам, но их взаимные наклоны постоянны и неизменны для каждого рода кристаллов».

Закон поясов, (закон Вейса) – грани, пересекающиеся так, что рёбра их параллельны, образуют пояс (зону) кристалла. «Всякая грань кристалла принадлежит, по крайней мере, двум поясам».

Закон рациональности отношений параметров (закон целых чисел). Закон рациональных отношений параметров, как и закон постоянства углов, связывает структуру и внешнюю форму кристаллов. Он отражает дискретное строение кристаллов по типу пространственной решётки, существование строгой периодичности в расположении структурных единиц по определённым направлениям. «Двойные отношения параметров граней кристалла, отсекаемых на соответствующих координатных осях, равны рациональным и притом небольшим числам».

Закон симметрии – устанавливает ограничения, накладываемые кристаллической структурой на симметрию кристаллических многогранников. «В кристаллах возможны оси симметрии только первого, второго, третьего, четвёртого и шестого порядков. Оси симметрии пятого порядка и выше шестого порядка невозможны».

Закон двойникования – тип двойникования, носящий собственные названия. Так, двойникования кристаллов кварца происходят по дофинельскому и бразильскому законам, полевым шпатам – по альбитовому, карлсбадскому, бавенскому и другим законам и так далее.

Зональность роста – последовательное изменение состава и свойств соответствующих участков – зон растущих граней. Зональность может быть однотипной для всего монокристалла и может проявляться несколько несогласованно в разных пирамидах роста, подчёркивая границы этих пирамид.

Изоморфизм – способность элементов в переменных количествах замещать друг друга в кристаллических постройках. Э. Митчерлих, которым было введено это понятие, под изоморфизмом понимал способность физически близких, но химически различных веществ кристаллизоваться в одних и тех же или почти в одних и тех же формах. Явления изоморфизма различаются между собой по типу характеру сохранения электронной нейтральности кристаллической решетки, по числу атомов, участвующих в изоморфном обмене, по структурному положению изоморфных примесей, по степени совершенства. В связи с этим выделяют

ся следующие типы изоморфизма: *изовалентный и гетеровалентный* – изоморфизм элементов с одинаковой и различной валентностью; *двуатомный и многоатомный*; *твёрдые растворы замещения, твёрдые растворы вычитания, твёрдые растворы внедрения*; *совершенный и несовершенный*; *полярный и неполярный*.

Индексы Миллера – величины обратные параметрам Вейса, величинам нормированных отношений отрезков, отсекаемых по координатным осям. Индексы Миллера, заключённые в круглые скобки, называются *символами граней*.

Ионная поляризация – нарушение чёткого разделения структурных единиц на анионы и катионы. Деформированный анион превращается в диполь с разделением центров положительных и отрицательных зарядов. Поляризация приводит к уменьшению симметрии связей, появлению в структурах обособленных групп и слоёв атомов, то есть приводит к уменьшению симметрии и степени координированности структур.

Каркасные кристаллические структуры – структуры, в которых обычно присутствует два типа связи. Наиболее прочной связью соединены атомы, образующие «каркас» структуры, а внутри каркаса расположены атомы или группы атомов, связанные менее прочно.

Категория кристаллов – группы кристаллов, различающихся по числу единичных направлений. Низшая категория включает кристаллы с несколькими единичными направлениями. Средняя сингония – кристаллы с одним единичным направлением. Высшая категория включает кристаллы без единичных направлений.

Количество атомов в ячейке – рассчитывается исходя из того, что атом или другая структурная единица, расположенная в вершине элементарной ячейки, принадлежит сразу к восьми смежным ячейкам, расположенная на ребре – к четырём смежным ячейкам, на грани – к двум ячейкам. Структурная единица, расположенная внутри ячейки, полностью принадлежит этой ячейке.

Комбинационная штриховка – штриховка (совокупность бороздок и выступов на плоской грани кристалла), формирующаяся в результате роста кристалла.

Комбинация простых форм – совокупность двух или нескольких простых форм, слагающих огранку кристалла. В комбинациях могут встречаться только простые принадлежащие одному и тому же виду симметрии.

Конгруэнтные простые формы – простые формы, которые могут быть совмещены друг с другом или поставлены в параллельное положение путём поворота одной из форм вокруг некоторой оси. Различаются положительные – (есть грань со всеми положительными символами) и отрицательные (есть только грани с отрицательными символами).

Константы пространственной решётки – тип кристаллической решетки (примитивный, базоцентрированный, гранецентрированный, объёмцентрированный); величины сторон элементарного параллелепипеда (a, b, c); и углы между ними (α, β, γ).

Координатные оси – метки пространства, используемые для определения положений граней кристалла и самих кристаллографических форм.

Координационное число – число ближайших соседних атомов (или ионов) окружающих данный атом.

Координационные кристаллические структуры – структура кристаллической решетки, в которой все атомы удалены друг от друга на одинаковые расстояния и нет сложных узлов.

Координационный полиэдр – многогранник, получающийся при соединении центров тяжести атомов, окружающих данный атом. Наиболее распространёнными полиэдрами кристаллических структур являются тетраэдры и октаэдры.

Кристаллоструктурная связь – сила, связывающая между собой атомы в кристаллической структуре. Различается четыре типа кристаллоструктурной (химической) связи: металлическая, ионная, ковалентная и ван-дер-ваальсовская. Структуры с одним типом связи называются *гомодезмическими*, структуры, в которых проявляются разные типы связи, называются *гетеродезмическими*.

Кристаллохимический анализ – предложенный Е. С. Фёдоровым метод для приближённой оценки состава вещества по форме их кристаллов.

Кубическая сингония – совокупность видов симметрии, имеющих несколько осей высшего порядка (обязательно есть четыре оси третьего порядка).

Лауэграмма – дифракционная картина кристалла в виде системы точек-максимумов дифракции от различных систем плоских сеток, полученная на фотографической пластинке от кристалла, помещённого на пути рентгеновского излучения.

Ложная симметрия – понижение или повышение симметрии реальных кристаллов по сравнению с идеальной формой.

Мозаичные кристаллы – кристаллы, состоящие из отдельных микроблоков, в ориентации которых наблюдается некоторое рассогласование. Появление мозаичных кристаллов обусловлено неправильным ростом с широким развитием нарушений в структуре кристалла в виде дислокаций.

Молекулярные кристаллы – содержат в качестве структурных единиц молекулы, связывающиеся друг с другом остаточными ван-дер-ваальсовыми силами. Ненаправленность ван-дер-ваальсовых связей оп-

ределяет тенденцию структур к плотнейшим упаковкам, однако эта тенденция существенно ограничивается низкой симметрией самих молекул, особенно у сложных органических соединений.

Моноклинная сингония – совокупность видов симметрии, которые могут иметь ось симметрии второго порядка и плоскость (как вместе, так и по отдельности), но не может быть несколько одинаковых элементов симметрии.

Моноэдр – простая форма низшей и средней категорий сингоний, состоящая из одной плоскости.

Морфотропия – резкое изменение симметрии и формы кристаллов в ряду родственных соединений при постепенном изменении химического состава.

Октаэдр – простая форма кубической сингонии, имеющая 8 граней.

Октаэдрическая пустота – пустота в плотнейшей упаковке, окружённая шестью шарами. Количество октаэдрических пустот равно количеству шаров.

Обобщённый символ граней простой формы – символ, отражающий совокупность граней данной простой формы. В качестве обобщённого символа совокупности граней простой формы берётся символ одной из её граней, для которого характерно наибольшее количество положительных индексов. Чаще всего это символ грани в верхнем переднем правом октанте сферы проекции. Такие символы, условно относящиеся к той или иной простой форме, принято заключать в фигурные скобки. Например, символ $\{230\}$ охватывает всю совокупность граней (230) , $(\bar{2}30)$, $(2\bar{3}0)$, $(2\bar{3}0)$ ромбической призмы.

Общая простая форма – простая форма грани которой расположены косо ко всем элементам симметрии. В каждом виде симметрии общая простая форма имеет наибольшее количество граней. Грань, занимающую общее положение, размножают все элементы симметрии данного вида симметрии, то есть она подвержена всем симметрическим операциям. Общая простая форма в полной мере отражает симметрию кристалла, и для каждого вида симметрии характерна своя общая простая форма. В связи с этим название общей простой формы можно использовать для однозначной характеристики конкретного вида симметрии.

Оптическая индикатрисса – поверхность, описывающая изменение показателей преломления. В кристаллах кубической сингонии показатели преломления по всем направлениям одинаковы, и оптическая индикатрисса имеет форму сферы. В кристаллах средней категории имеется два главных показателя преломления, отвечающих направлениям

равных осей двухосного эллипсоида. Все другие направления имеют некоторые промежуточные значения показателей преломления. В кристаллах низшей категории имеется три главных показателя преломления, обозначаемых N_g , N_m и N_p и соответствующих по направлению осям (а по значению) полуосям трёхосного эллипсоида.

Оптически анизотропные кристаллы – кристаллы, скорость распространения света в которых зависит от направлений. Попадая в оптически анизотропный кристалл, луч раздваивается. Оптически анизотропными являются все кристаллы низшей и средней категорий.

Оптически изотропные кристаллы – кристаллы, скорость распространения света в которых не зависит от направления. Оптически изотропными являются все кристаллы кубической сингонии и аморфные тела.

Оптические свойства – свойства, определяемые особенностями прохождения луча света через кристалл.

Оптические константы – показатели особенностей прохождения света через кристалл. Наиболее важными оптическими константами в кристаллах являются: показатели преломления – N_g , N_m , N_p , соответственно наибольший, средний и наименьший показатель преломления; величина двупреломления $N_g - N_p$; положительный (+) или отрицательный (-) оптический знак; угол между оптическими осями – $2V$.

Орбитальный радиус – расстояние от центра атома до границы (или максимума) его электронной оболочки.

Ортогональная проекция – параллельно-перспективная проекция, в которой проективные линии ориентируются перпендикулярно плоскости проекции.

Особые направления – направления, совпадающие с осями симметрии или с нормальными к плоскостям симметрии. Особенность этих направлений заключается в том, что они для кристалла являются характеристическими, ориентируясь параллельно рядам пространственной решетки.

Островные структуры кристаллической решетки – в кристаллической решётке выделяются сложные узлы или группировки атомов, связь внутри которых более прочная и не такая, как между отдельными узлами.

Ось пояса – прямая, параллельная всем граням и рёбрам пояса.

Ось симметрии – воображаемая прямая, при повороте вокруг которой кристалл периодически совмещается сам с собой всеми своими точками. Минимальный угол, на который надо повернуть фигуру, чтобы она совместилась сама с собой, называется *элементарным углом поворота*. Число совмещений кристалла при его повороте вокруг данной оси на 360° определяет порядок этой оси. Оси обозначаются латинской бук-

вой L с указанием в правом нижнем углу её порядка – L_1, L_2, L_3, L_4, L_6 , соответственно для осей первого, второго, третьего, четвёртого и шестого порядков или цифрой, соответствующей порядку оси – 1, 2, 3, 4, 6.

Ось трансляции – направление, при перемещении решётки вдоль которого параллельно самой себе, она периодически самосовмещается, то есть совпадает всеми узлами сама с собой. Расстояния, через которые решётка совмещается сама с собой, называются *периодами повторяемости*. В любой пространственной решётке можно выделить бесконечно много осей трансляций, однако для описания решётки достаточно знать лишь основные оси трансляции и периоды их повторяемости.

Параллелепипед повторяемости – параллелепипед, построенный на трёх элементарных трансляциях решетки, вполне однозначно описывающий всю пространственную решетку и характеризующийся тремя рёбрами и тремя углами между ними. Перемещение параллелепипеда повторяемости по направлению рёбер на величину этих рёбер приводит к бесконечной пространственной решётке.

Параллельные сростки – закономерные срастания кристаллов одного и того же состава, ориентированные взаимно параллельно. При этом кристаллы ориентируются строго параллельно друг другу всеми своими элементами.

Параметры Вейса – отношение целых взаимно простых чисел, представляющих отношения нормированных, каждого в своих единицах, отрезков, отсекаемых на координатных осях.

Параметры граней – отрезки, отсекаемые гранями на рёбрах, считая от точки их пересечения.

Параметры единичной грани – масштабные отрезки, отсекаемые единичной гранью на координатных осях, дающие отношения осевых единиц.

Пинакоид – простая форма низшей и средней категории, состоящая из двух параллельных граней.

Пирамиды – семейство открытых простых форм низшей и средних категорий, грани которых пересекают главную ось в одной точке. В зависимости от формы поперечного сечения и количества граней различаются: ромбические (4), тригональные (3), дитригональные (6), тетрагональные (4), дитетрагональные (8), гексагональные (6) и дигексагональные (12) пирамиды. В скобках указано количество граней.

Пирамиды роста – пирамиды, в вершинах которых располагаются центральные точки, от которых в процессе роста происходит послойное перемещение граней. Рёбра и грани пирамиды – это линии и поверхности её соприкосновения с пирамидами роста других граней. В однородном кристалле пирамиды роста обычно не видны и могут проявиться только в случае захвата гранями включений и красящих примесей.

Плоская сетка – узлы кристаллической решетки, расположенные в одной плоскости. Плоские сетки можно построить на основе двух векторов, исходящих из одной точки и образующих сетку, представленную системой одинаковых параллелограммов. Константами этой сетки будут являться величины сторон параллелограммов и угол между ними.

Плоскость симметрии – плоскость, разделяющая фигуру на две зеркально-равные части, расположенные относительно друг друга как предмет и его зеркальное отражение. В разных системах записи обозначается латинскими буквами *P* или *m*.

Плоскость скользящего отражения – симметрическая операция, включающая отражение в зеркальной плоскости и трансляцию на половину периода повторяемости параллельно плоскости в соответствующем направлении. В зависимости от ориентации плоскости и направления трансляции различаются плоскости скользящего отражения *a*, *b*, *c*, *n*, *d*. Для плоскостей *a*, *b*, *c* оси трансляции ориентированы параллельно координатным осям. Плоскости скользящего отражения типа *n* включают трансляции в направлении диагоналей элементарной ячейки. Особняком стоят плоскости типа *d*. Они включают диагональные трансляции на четверть периода повторяемости. Ориентация самих плоскостей скользящего отражения соответствует ориентации в пространстве обычных плоскостей симметрии.

Плотнейшая упаковка – максимально сближенное положение структурных единиц кристаллической решетки, обусловленное стремлением кристаллических построек к минимальной внутренней энергии. Возможны два типа плотнейшей упаковки – гексагональная и кубическая. В гексагональной упаковке ряды атомов повторяются через два слоя, ряды третьего слоя лежат точно над рядами первого. Поэтому гексагональную упаковку также называют двухслойной. В кубической плотнейшей упаковке ряды атомов повторяются через три слоя. Шары третьего слоя располагаются над дырками в первом слое и не повторяют ни первый ни второй слой. Лишь четвертый слой повторяет первый.

Поверхность срастания – поверхность, по которой срастаются индивидуальные кристаллы в составе двойника.

Пойкилит – монокристалл, насыщенный включениями более мелких кристалликов других веществ. Пойкилитовый рост кристаллов связан с кристаллизацией из расплавов, когда позже образующие кристаллы включают ранее выделившиеся кристаллические зёрна других минералов.

Полиморфизм (многоформие) – способность вещества кристаллизоваться в разных структурных формах в зависимости от условий кристаллизации. Полиморфизм может быть связан как с изменением симметрии, так и с изменением структуры. Различные виды кристаллов од-

ного и того же вещества называются полиморфными модификациями, которые принято обозначать начальными буквами греческого алфавита (α , β , γ и т. д.) Среди полиморфных модификаций могут быть выделены энантиотропные и монокотропные. В *энантиотропных* превращение совершается при определённой температуре, которая называется точкой превращения. Эта точка является границей, разделяющей одну модификацию от другой. При более низкой температуре может существовать одна модификация, при более высокой – другая. При *монокотропных* превращениях происходит необратимый переход одного соединения в другое, а обратного перехода не происходит.

Полиптипия – особая разновидность полиморфных превращений при которых структуры полиптипов отличаются друг от друга только в одном направлении, обычно в направлении третьей кристаллографической оси. Отличия заключаются в изменении периода повторяемости структуры в указанном направлении, то есть в изменении параметра элементарной ячейки. Полиптипизм характерен для слоистых силикатов: слюд, хлоритов, глинистых минералов.

Правильная система точек – совокупность точек кристаллического пространства, связанных элементами симметрии пространственной группы. Правильную систему точек можно получить, если задать некоторую исходную точку и размножить её с помощью элементов симметрии пространственной группы. Положение всех точек одной правильной системы можно описать с помощью координат исходной точки.

Призмы – семейство открытых простых форм низшей и средней категорий, грани которых расположены параллельно главной оси. В зависимости от формы поперечного сечения и количества граней выделяются: ромбические (4), тригональные (3), дитригональные (6), тетрагональные (4), дитетрагональные (8), гексагональные (6), дигексагональные (12) призмы. В скобках указано количество граней.

Принцип Кюри – принцип, связывающий симметрию среды и симметрию образующего кристалла. «Симметрия реального кристалла ограничивается симметрией среды кристаллизации; во внешней симметрии кристалла сохраняются только те элементы симметрии, которые являются общими для него и для среды кристаллизации».

Простая форма – совокупность граней кристаллов, связанных элементами симметрии. В идеально развитых кристаллических многогранниках все грани одной простой формы одинаковы по величине и по форме. Вид простой формы и число её граней зависят от того, как расположены эти грани по отношению к элементам симметрии и по отношению друг к другу. Всего известно 47 простых форм: 32 – в низшей и 15 в высшей категориях. Каждый класс симметрии, обладающий определённым набором симметрии, характеризуется соответствующими ему про-

стыми формами. Простые формы, не замыкающие пространства, называются *открытыми простыми формами*. Они могут встречаться только в комбинациях. Простые формы, замыкающие пространство, называются *закрытыми простыми формами*.

Пространственная решётка – закономерное, периодически повторяющееся в строго определённых направлениях, через строго определённые промежутки расположение в пространстве материальных частиц (атомов, ионов, молекул), образующих кристаллическую структуру. Пространственная решетка является геометрической схемой, описывающей расположение материальных частиц в кристалле. Она строится на трёх основных некомпланарных трансляциях a , b , c . В зависимости от величин и взаимной ориентировки трансляций a , b , c пространственные решетки имеют различную симметрию. Симметрия кристаллической структуры ограничивает число возможных решёток. Основные трансляции, а значит и решетка, должны соответствовать симметрии структуры кристалла.

Равновесная форма кристалла – форма, которая реализуется при идеальных равновесных условиях роста. Равновесная форма также может проявляться при любых условиях роста кристалла в области устойчивости данной твёрдой фазы. Эта форма является производной кристаллической структуры кристалла. Все изменения и искажения при процессах роста проявляются на фоне этой равновесной формы.

Равновесная форма роста – форма которая при данном объёме характеризуется минимумом поверхностной энергии. Существование равновесных форм роста подтверждается наличием ограниченного количества *габитусных форм*.

Рентгеноструктурный анализ – исследование кристаллов посредством рентгеновых лучей. В основе рентгеноструктурного анализа лежит свойство рентгеновых лучей проникать внутрь тел, а также их свойство дифрагировать от структурных единиц кристалла (атомов, ионов, молекул), периодически повторяющихся в пространстве. Выбор объектов для рентгеноструктурного анализа практически ничем не ограничен.

Ромбическая сингония – совокупность видов симметрии, имеющих оси симметрии второго порядка и плоскости, при этом обязательно имеются несколько одинаковых элементов симметрии.

Ромбоэдр – закрытая простая форма тригональной или гексагональной сингонии из 6 граней пересекающих основную ось в двух точках и, при этом нижняя грань расположена симметрично относительно двух верхних.

Ряды пространственной решётки – прямые линии, проходящие через узлы кристаллической решетки.

Символ грани – наглядная система простых целых чисел, описывающая пространственную ориентировку грани. Символ грани выражается тремя (в тригональной сингонии – четырьмя) целыми и взаимно простыми числами (hkl), ($hkil$). Эти числа представляют собой отношения трёх (четырёх) дробей, числители которых являются параметрами единичной грани, а знаменатели соответствуют параметрам заданной грани. Совокупность чисел, входящих в символ, принято заключать в круглые скобки без всяких знаков между ними. Для получения символов граней необходимо за координатные оси принять три направления, проходящие через одну точку и параллельные трём рёбрам кристалла, а также выбрать единичную грань. Если грань отсекает отрицательный конец координатной оси, то число в символе будет с минусом, знак минуса помещается над числом. Чем больший отрезок отсекает грань на координатной оси, тем меньше соответствующее ей число в символе. Если грань параллельна координатной оси, то в символе грани этой оси отвечает нуль – 0. Символ единичной грани всегда равен (111) (для кристаллов тригональной и гексагональной сингоний $(\bar{1}2\bar{1}1)$ или $(10\bar{1}1)$).

Симметрическая операция – действие, производимое элементом симметрии (поворот на элементарный угол, отражение в плоскости, в точке). Симметрические операции могут взаимодействовать между собой. Результат их взаимодействия может быть представлен как некоторая новая (производная) симметрическая операция, соответствующая новому (производному) элементу симметрии.

Симметрическое преобразование – такое преобразование (поворот, перемещение или отражение кристалла в трёхмерном пространстве без деформации), в результате которого предмет совместится сам с собой.

Симметрия – это свойство геометрических фигур повторять свои части или, выражаясь точнее, свойство их в различных положениях приходить в совмещение с первоначальным состоянием.

Сингония – группа видов симметрии, обладающих одним или несколькими одинаковыми элементами симметрии и имеющих одинаковое расположение осей. Всего выделяются семь сингоний: триклинная, моноклинная, ромбическая, тригональная, тетрагональная, гексагональная и кубическая.

Скаленоэдры – простые формы, грани которых пересекают главную ось в двух точках и, при этом две нижние грани расположены симметрично между двух верхних. Различаются тетрагональный (8 граней) и дитригональный (12 граней) скаленоэдры.

Слоистые кристаллические структуры – атомы в кристаллической решётке располагаются плоскими слоями, причём в слое связи более прочные, чем между слоями.

Спайность – способность кристаллов раскалываться по некоторым определённым направлениям. Плоскости спайности обычно оказываются параллельными плоским сеткам структуры, отвечающим граням с малыми индексами. Они ориентированы перпендикулярно направлениям наиболее слабых связей.

Стереорафические проекции – проекции, в которых все проектируемые элементы, расположенные на поверхности шара и внутри шара, располагаются на экваториальной плоскости и её окружности.

Стереорафические сетки – стереорафические проекции всей системы меридианов и параллелей, нанесённых на поверхность сферы. В зависимости от плоскости, на которую проектируется со сферы эта сетка, различаются сетки полярного и экваториального типов. Наиболее часто применяются экваториальная сетка Вульфа, полярная сетка Болдырева, сетка Флинта, представляющая собой сочетание сеток Вульфа и Болдырева, а также сетка Фёдорова в которой одна полярная сетка сочетается с двумя экваториальными.

Сферические координаты граней – координаты, показывающие положение грани на плоскости – φ и ρ . φ – долгота, отсчитываемая по часовой стрелке по основному кругу проекции, определяет угол между плоскостями нулевого меридиана и меридиана, проходящего через заданную точку. ρ – полярное расстояние, соответствует угловому расстоянию, заключённому между полюсом шара и заданной точкой.

Тетрагональная сингония – совокупность видов симметрии, в которых из осей выше второго порядка присутствует только одна поворотная или инверсионно-поворотная ось четвёртого порядка.

Тетраэдрические пустоты – пустоты между четырьмя шарами плотнейшей упаковки. Количество тетраэдрических пустот в два раза больше количества шаров.

Тетраэдры – семейство закрытых простых форм, образованных четырьмя гранями. По форме граней различаются ромбический тетраэдр – грани в виде неравностороннего треугольника, тетрагональный тетраэдр – грани в виде равнобедренного треугольника, кубический тетраэдр – грани в виде равностороннего треугольника.

Трапецоэдры – семейство закрытых простых форм, в которых грани пересекают главную ось в двух точках и при этом нижняя грань расположена не симметрично между двумя верхними. Различаются тригональный – 6 граней, тетрагональный – 8 граней и гексагональный – 12 граней трапецоэдры.

Тригональная сингония – совокупность видов симметрии, в которых из осей выше второго порядка присутствует только одна поворотная ось третьего порядка.

Триклинная сингония – совокупность видов симметрии, в которых нет ни осей ни плоскостей симметрии.

Триоктаэдр – простые формы кубической сингонии, имеющие 24 грани и представляющие собой октаэдр с утроенным количеством граней. Различаются: тригон-триоктаэдр – гранями по двум координатным осям отсекаются меньшие отрезки, чем по третьей (символ грани (hhl)); тетрагон-триоктаэдр – гранями по двум координатным осям отсекаются большие отрезки, чем по третьей (символ грани (hkk)); пентагон-триоктаэдр – грани по всем координатным осям отсекают разные отрезки (символ грани (hkl)).

Тритетраэдр – простые формы кубической сингонии, имеющие 12 граней и представляющие собой тетраэдр с утроенным количеством граней. Различаются: тригон-тритетраэдр – гранями по двум координатным осям отсекаются большие отрезки, чем по третьей (символ грани (hkk)); тетрагон-тритетраэдр – гранями по двум координатным осям отсекаются меньшие отрезки, чем по третьей (символ грани (hhl)); пентагон-тритетраэдр – гранями на всех координатных осях отсекаются разные отрезки (символ грани (hkl)).

Узлы кристаллической решётки – бесконечная периодическая система точек в пространственной решётке.

Установка кристалла – выбор в кристалле координатных осей и осевых единиц. Установка кристалла позволяет закономерно ориентировать кристалл в пространстве и даёт возможность определить символы любых его граней.

Форма поперечного сечения – диагностический признак, используемый наряду с количеством граней для разбраковки семейств призм, пирамид, дипирамид и тетраэдров. Поперечные сечения в кристаллах могут быть в виде ромба, правильных треугольников, квадратов и шестиугольников (ромбов, тригонов, тетрагонов и гексагонов), а также равносторонних шестиугольников, восьмиугольников и двенадцатиугольников (дитригонов, дитетрагонов и дигексагонов) с углами равными через один.

Частная простая форма – простая форма, грани которой расположены закономерно относительно элементов симметрии. Грани частных простых форм могут быть параллельны или перпендикулярны одной из кристаллографических осей или плоскости или отсекают по двум осям одинаковые отрезки. Одна и та же простая форма может быть частной в нескольких видах симметрии.

Центр симметрии (инверсии) – особая точка фигуры, характеризующая тем, что любая проведённая через неё прямая по обе стороны от неё и на равных расстояниях встречает одинаковые (соответственные) точки фигуры. Относительно этого центра симметричны все противоположные грани, рёбра и вершины кристалла.

Цепочечные кристаллические структуры – отдельные структурные узлы увязаны одинаковой связью в цепочки, бесконечно вытянутые в одном направлении, а связь между цепочками другая, более слабая.

Элементарная ячейка – минимальная ячейка структуры или решётки, однозначно характеризующая структуру в целом. Элементарная ячейка содержит некоторую минимальную группу трансляций, действие которых приводит к построению структуры кристалла из одной ячейки. Пространственные решётки, содержащие узлы только в вершинах элементарных ячеек, называются *примитивными*. Решётки, содержащие однотипные узлы не только в вершинах, но и внутри ячейки или на её гранях, называются *непримитивными*. Среди непримитивных решёток выделяются *объёмцентрированные* – содержащие узлы не только в вершинах, но и в центрах элементарных ячеек; *гранецентрированные* – содержащие узлы в вершинах и в центрах всех граней элементарных ячеек; *базоцентрированные* – содержащие узлы в вершинах и в центрах двух противоположных граней элементарных ячеек.

Элементы симметрии – вспомогательные геометрические образы (точки, прямые и плоскости), позволяющие описывать симметрию кристаллов – давать ей некоторую количественную оценку. Элементы симметрии включают оси симметрии, плоскости симметрии и центр инверсии (центр симметрии).

Энантиоморфные простые формы – зеркально-равные простые формы, которые могут быть совмещены только путём отражения в зеркальной плоскости. Различаются правые и левые энантиоморфные простые формы. Энантиоморфные простые формы возможны в аксиальных и примитивных видах симметрии и отсутствуют в кристаллах, содержащих плоскости симметрии и центр симметрии.

Заключение

Появившаяся в последние годы тенденция сокращения числа часов, отводимых курсу по кристаллографии, потребовала больше внимания уделить методике самостоятельных занятий и методам их контроля. При этом в качестве внеаудиторного описания идеально подходят рисунки (аксонометрические проекции) кристаллов, сопровождающиеся их ортогональными проекциями, позволяющими частично компенсировать отсутствие объёмного восприятия кристалла на рисунке.

При работе с кристаллами минералов требуется:

- нахождение всех элементов симметрии и установление сингонии и вида симметрии;
- определение числа простых форм, их названий и записи символов каждой простой формы;
- правильная ориентировка (установка) кристалла;
- определение констант пространственной решетки исследуемого кристалла.

Как следует из изложенного в учебном пособии материала, все эти задачи могут быть решены при помощи использования метода стереографических проекций, являющегося основным рабочим методом практической кристаллографии.

Кроме того, применение метода стереографических проекций позволяет:

- дать наглядное представление о работе всех элементов симметрии и принципах их взаимодействия;
- вывести все возможные для данного вида симметрии простые формы;
- произвести правильную установку кристалла;
- определить приближенные символы всех граней кристалла.

Таким образом, стереографические проекции очень удобны для графического изображения кристаллических многогранников и их элементов симметрии и существенно облегчают усвоение основ геометрической кристаллографии и процесс самостоятельной работы с моделями и рисунками кристаллов минералов.

Рекомендуемая литература

Аншалес О. М. Вычислительные и графические методы кристаллографии / О. М. Аншалес. – Л. : ЛГУ, 1939.

Буланов В. А. Практическая минералогия с основами кристаллографии / В. А. Буланов, А. А. Белоголов, А. И. Сизых. – Иркутск : Иркут. ун-т, 1995.

Булах А. Г. Графика кристаллов / А. Г. Булах. – М. : Недра, 1971.

Вульф Г. В. Практический курс геометрической кристаллографии / Г. В. Вульф, А. В. Шубников. – М. : Госиздат, 1924.

Егоров-Тисменко Ю. К. Кристаллография / Ю. К. Егоров-Тисменко, Г. П. Литвинская, Ю. Г. Загальская. – М. : МГУ, 1992.

Загальская Ю. Г. Геометрическая кристаллография / Ю. Г. Загальская, Г. М. Литвинская. – М. : МГУ, 1973.

Князев Г. Б. Введение в кристаллографию : учебное пособие / Г. Б. Князев. – Томск : Том. ун-т, 2000. – 182 с.

Костов И. Кристаллография / И. Костов. – М. : Мир, 1965.

Попов Г. М., Шафрановский И. И. Кристаллография / Г. М. Попов, И. И. Шафрановский. – М. : Высш. шк., 1972.

Разумовский Н. К. Стереографические проекции / Н. К. Разумовский. – Л. : Кубуч, 1932.

Татарский В. Б. Инструкция по черчению кристаллов / В. Б. Татарский. – Л. : Кубуч, 1934.

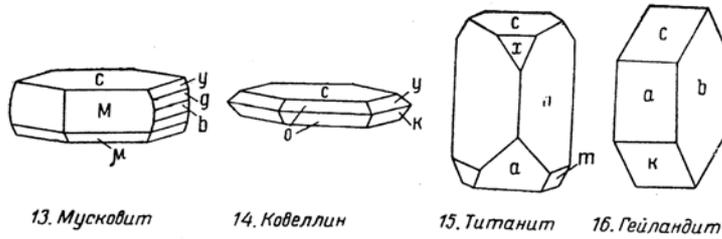
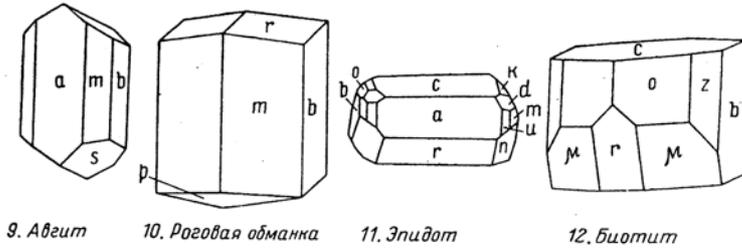
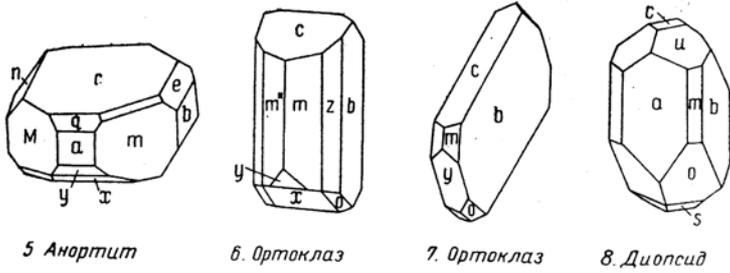
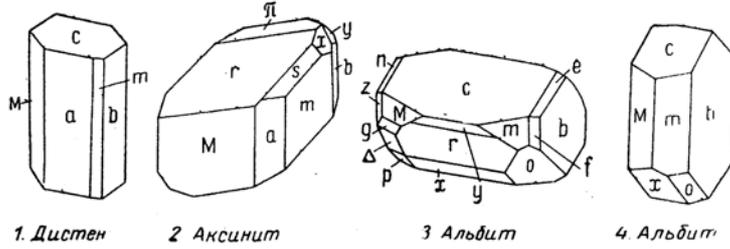
Флинт Е. Е. Практическое руководство по геометрической кристаллографии / Е. Е. Флинт. – М. : Гостехиздат, 1956.

Шафрановский И. И. Лекции по кристалломорфологии / И. И. Шафрановский. – М. : Высш. шк., 1968.

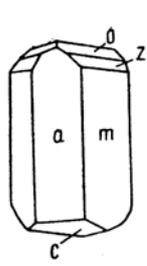
ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

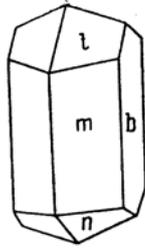
ЗАДАЧИ НА ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИММЕТРИИ
И ПРОСТЫХ ФОРМ



Продолжение прил. 1



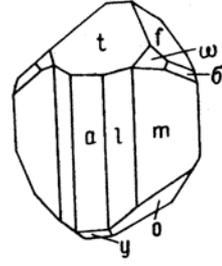
17. Бура



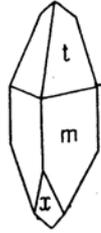
18. Гипс



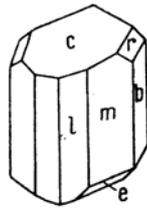
19. Гипс



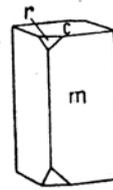
20. Вольфрамит



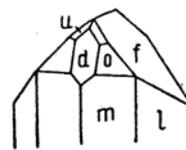
21. Крокоит



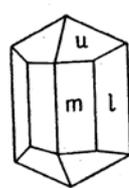
22. Реальгар



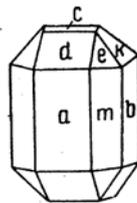
23. Андалузит



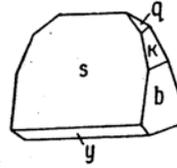
24. Топаз



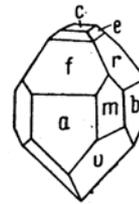
25. Топаз



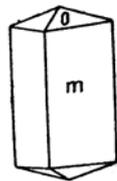
26. Оливин



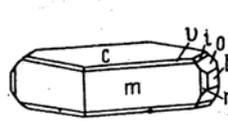
27. Струвит



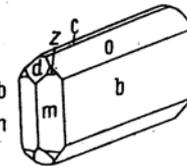
28. Каламин



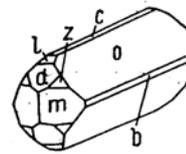
29. Натролит



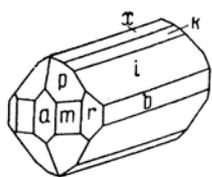
30. Барит



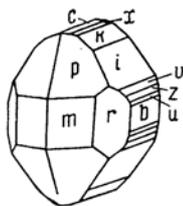
31. Барит



32. барит



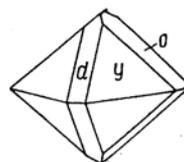
33. Церуссит



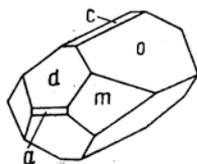
34. Церуссит



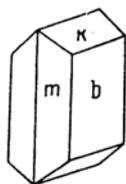
35. Церуссит



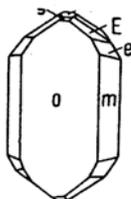
36. Англезит



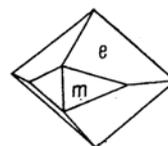
37. Англезит



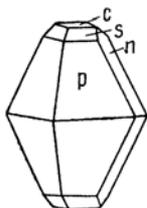
38. Арагонит



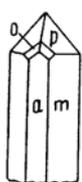
39. Бруцит



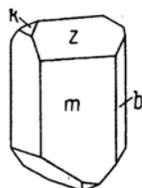
40. Бруцит



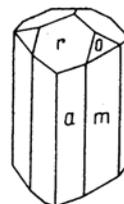
41. Сера



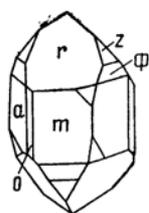
42. Антимонит



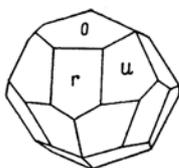
43. Горькая соль
(эпсомит)



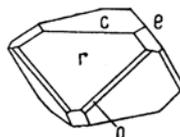
44. Турмалин



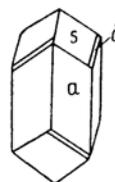
45. Кварц



46. Гематит

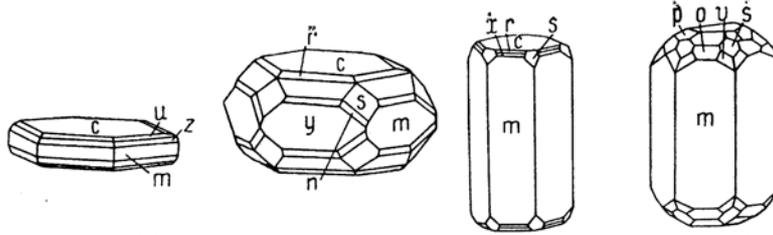


47. Гематит



48. Диоптаз

Продолжение прил. 1



49 Пирротин

50. Анатит

51. Анатит

52. Берилл



53. Кальцит



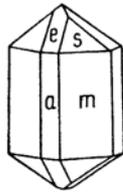
54. Кальцит



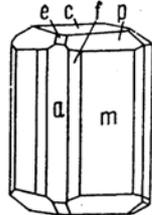
55. Корунд



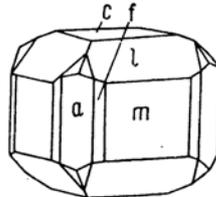
56. Корунд



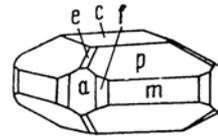
57. Касситерит



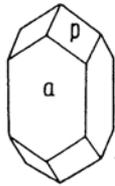
58. Везувиан



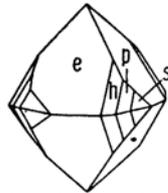
59. Везувиан



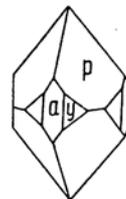
60. Везувиан



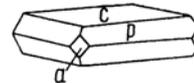
61. Циркон



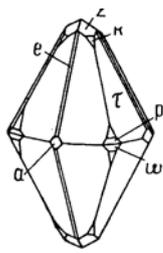
62. Шеелит



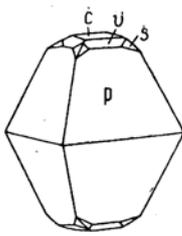
63. Апофиллит



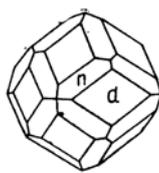
64. Апофиллит



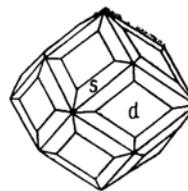
65. Анатаз



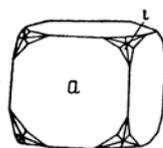
66. Анатаз



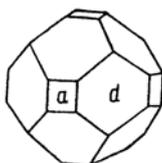
67. Гранат



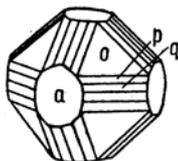
68. Гранат



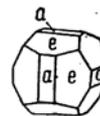
69. Флюорит



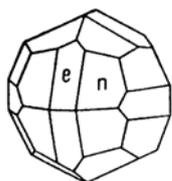
70. Галенит



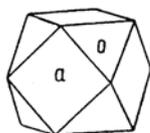
71. Галенит



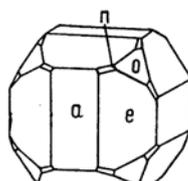
72. Пирит



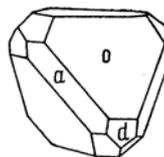
73. Пирит



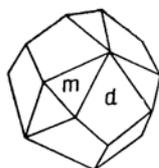
74. Пирит



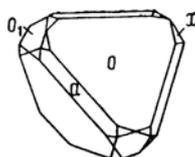
75. Пирит



76. Сфалерит



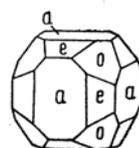
77. Сфалерит



78. Тетраэдрит

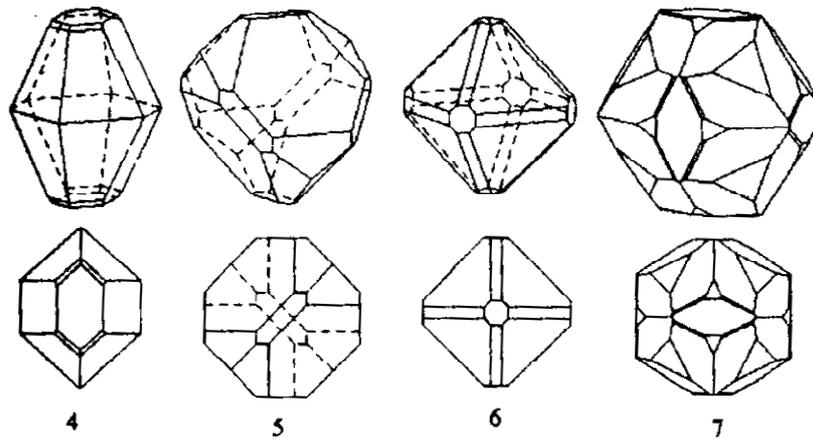
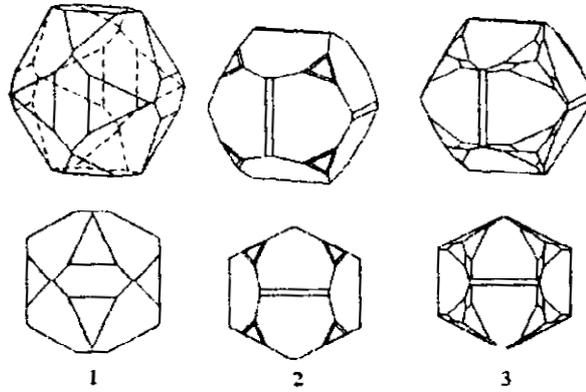


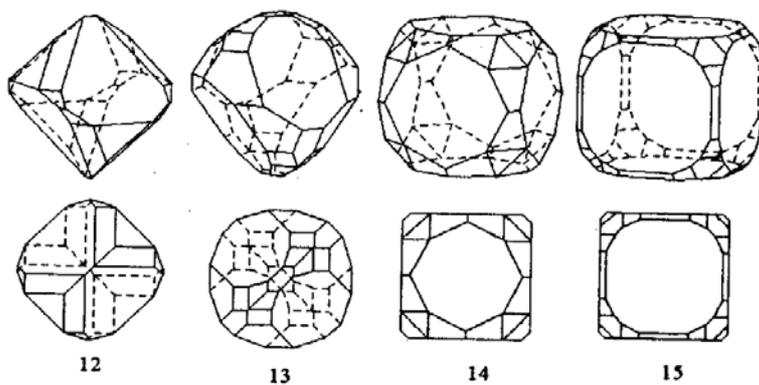
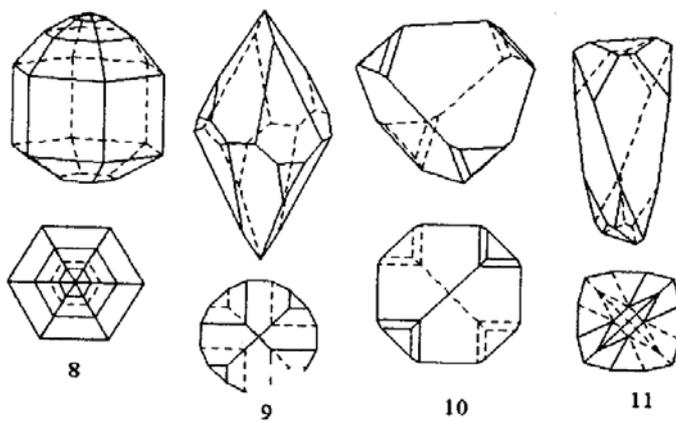
79. Пирит



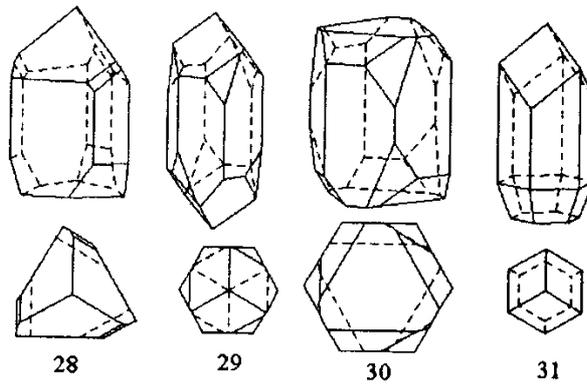
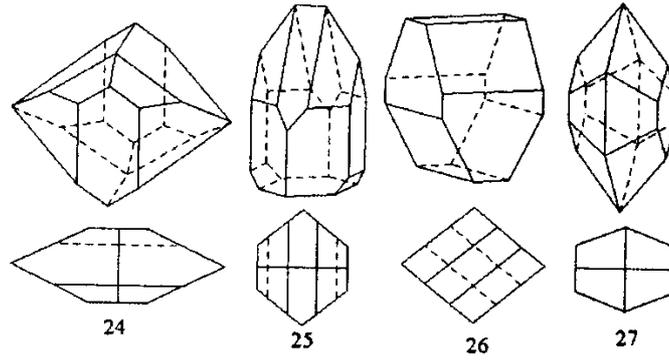
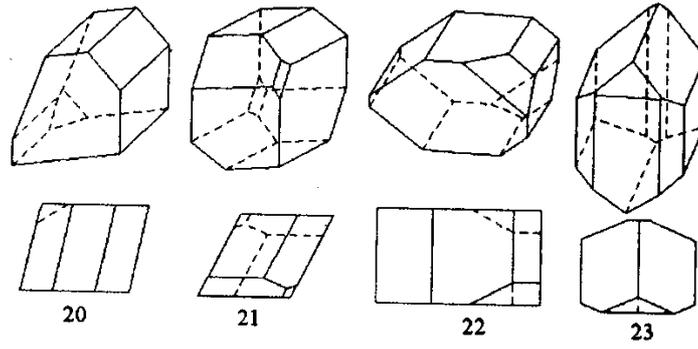
80. Кобальтин

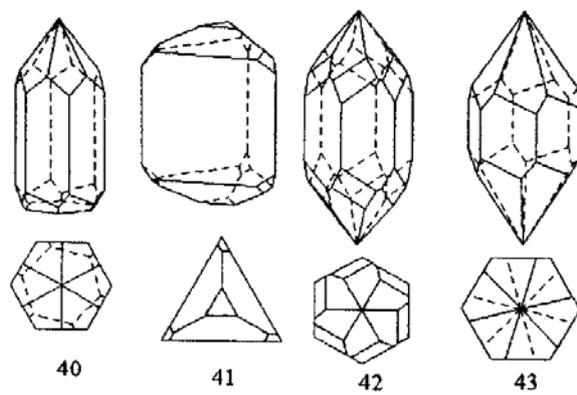
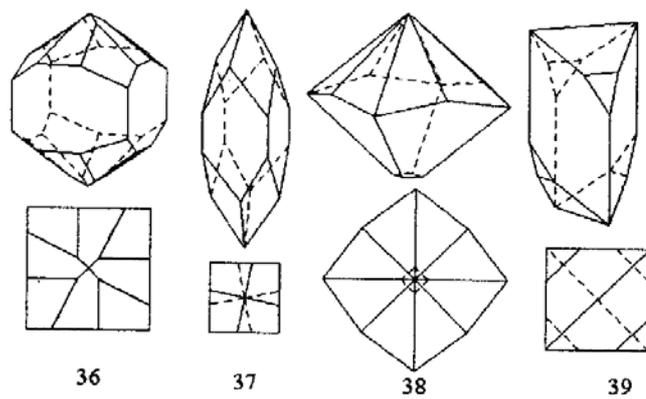
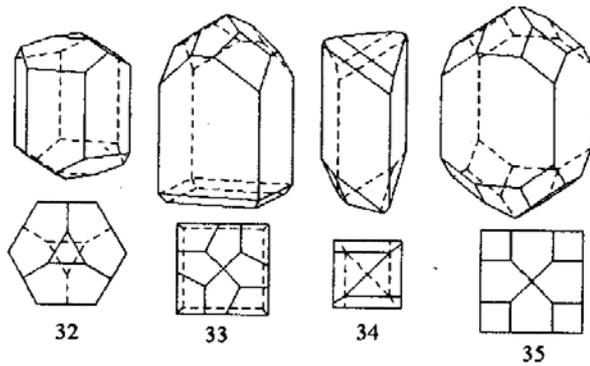
**РИСУНКИ И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ
КРИСТАЛЛОВ ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ**
(Князев Г. Б., 2000)





Продолжение прил. 2

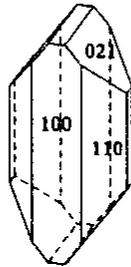




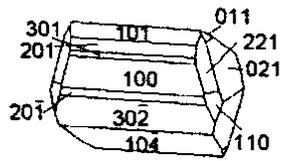
**РИСУНКИ КРИСТАЛЛОВ МИНЕРАЛОВ ДЛЯ
САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ**

(Князев Г. Б., 2000)

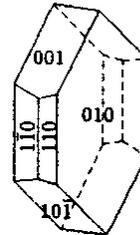
В приложении в качестве возможных самостоятельных заданий приведены рисунки кристаллов минералов. Для них не сделана ортогональная проекция, но указаны символы всех основных граней. Это позволяет на рисунках уверенно определять симметрию и простые формы.



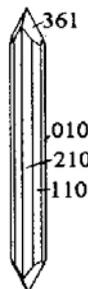
Авгит



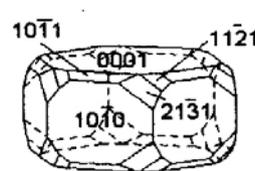
Азурит



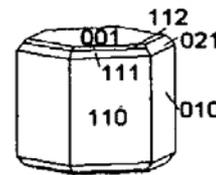
Альбит



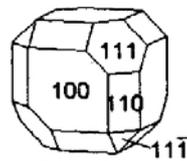
антимонит



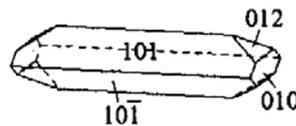
Апатит



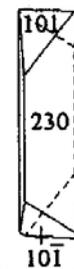
Арагонит



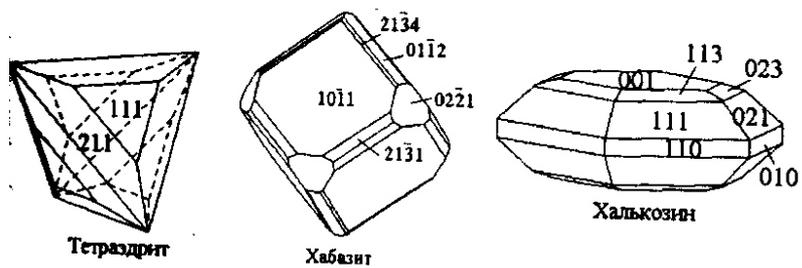
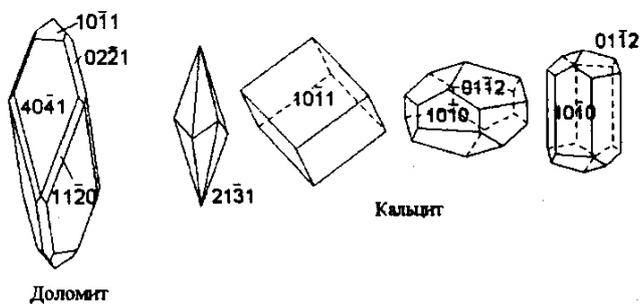
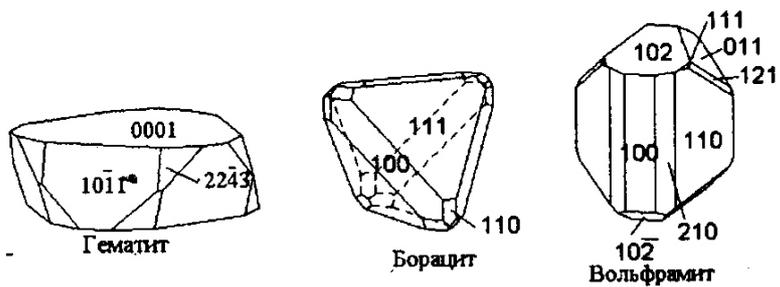
Борацит

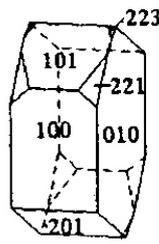


Арсенюврит

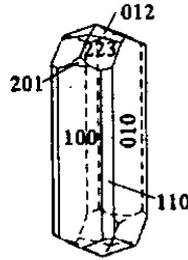


Арсенюврит

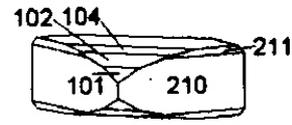




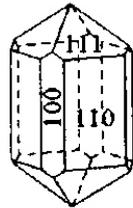
Гейландит



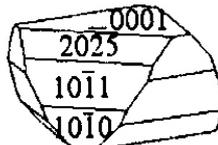
Диопсид



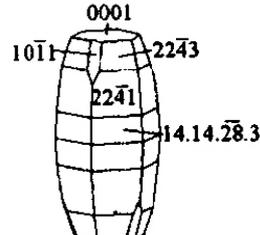
Барит



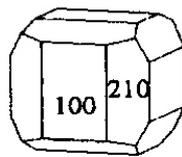
Касситерит



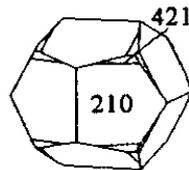
Кинюварь



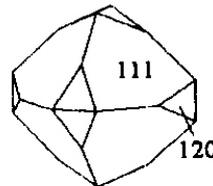
Корунд



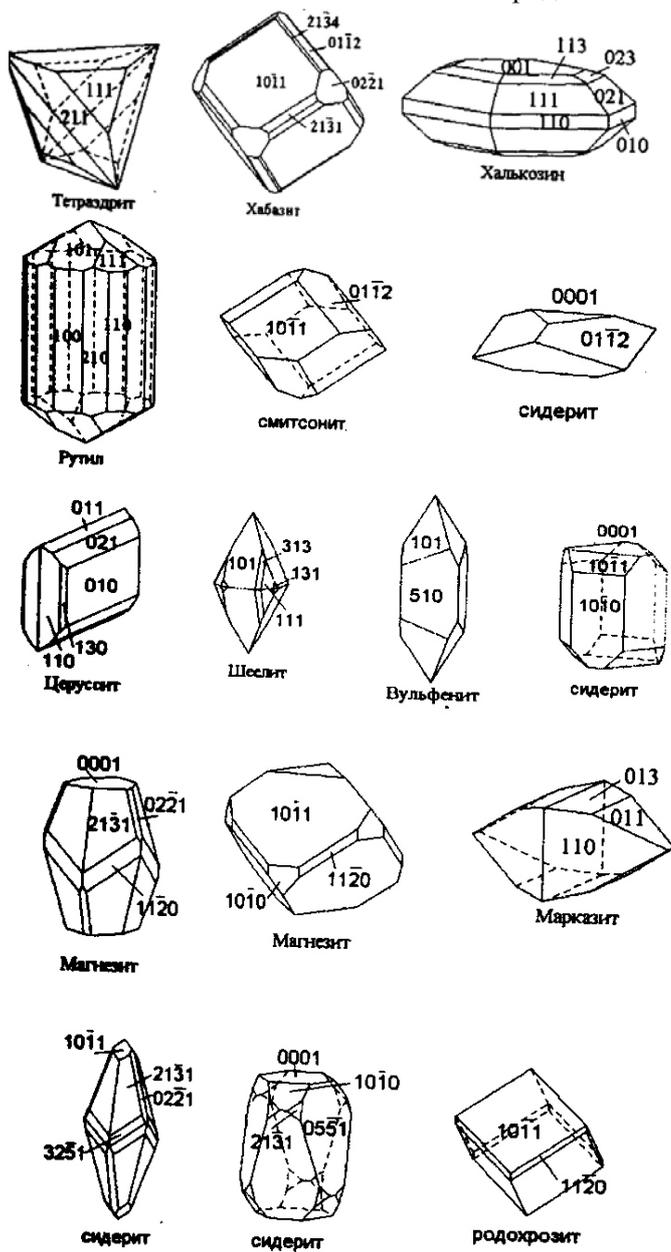
Пирит

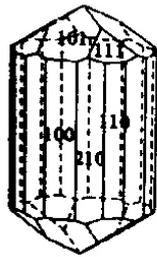


Кобальтин

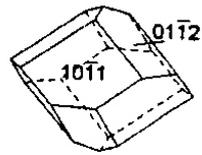


Кобальтин

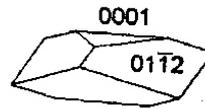




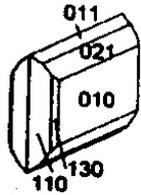
Рутил



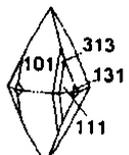
СМИТСОНИТ



сидерит



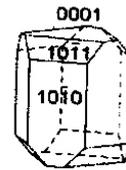
Церуссит



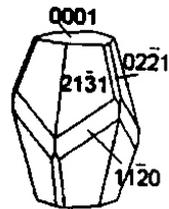
Шпелит



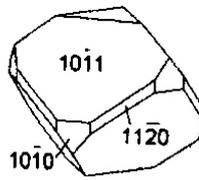
Вульфенит



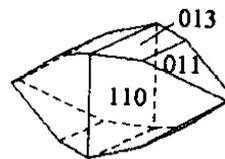
сидерит



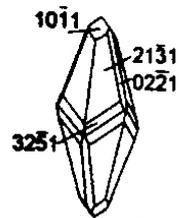
Магнетит



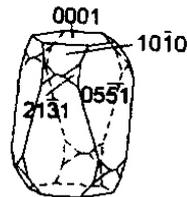
Магнетит



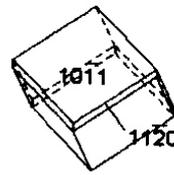
Марказит



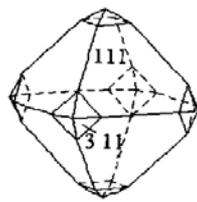
сидерит



сидерит



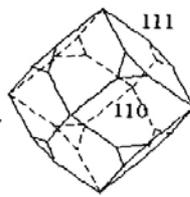
родохрозит



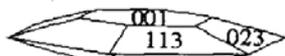
Шпинель



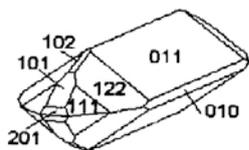
Шпинель



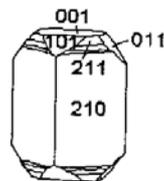
Шпинель



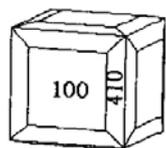
Халькозин



Целестин



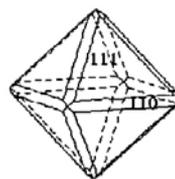
Англезит



Самородная медь



Шпинель



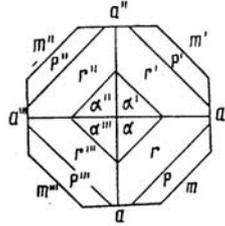
Шпинель

ЗАДАЧИ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИСТАЛЛОВ

ТЕТРАГОНАЛЬНАЯ СИНГОНΙΑ



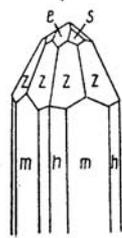
а



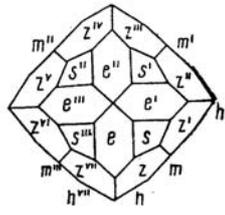
б

Задача 1. Каломель Hg_2Cl_2

$pp''' = 164^\circ 25'$ Единичная
 $ar = 49^\circ 09'$ грань r
 $aa' = 52^\circ 57'$



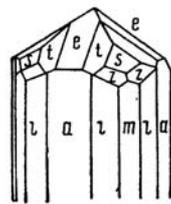
а



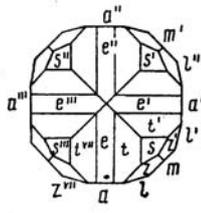
б

Задача 2. Касситерит SnO_2

$ms = 46^\circ 27'$ Единичная
 $hh^{VII} = 54^\circ$ грань S



а



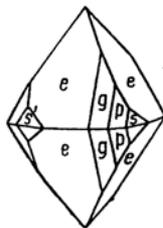
б

Задача 3. Рутил TiO_2

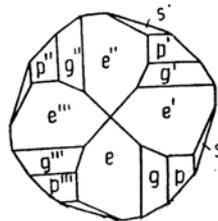
$ms = 47^\circ 40'$ Единичная
 $ee'' = 65^\circ 34'$ грань S
 $tt' = 29^\circ 06'$
 $al = 18^\circ 26'$
 $mz = 25^\circ 46'$
 $zz' = 20^\circ 45'$

Задача 4. Шеллит CaWO_4

$ee'' = 113^\circ 51'$ Единичная
 $eg = 22^\circ 44'$ грань p
 $ps = 28^\circ 21'$



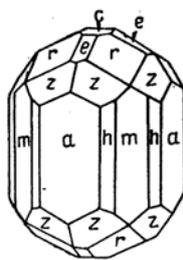
а



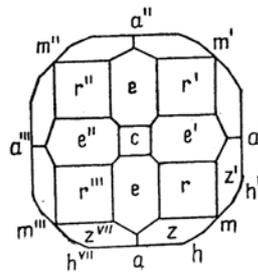
б

Задача 5. Вернерит

$mh = 18^\circ 26'$ Единичная
 $cr = 31^\circ 48'$ грань r



а

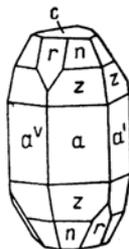


б

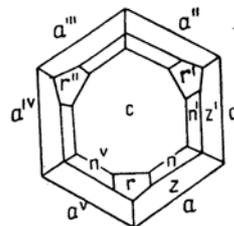
ТРИГОНАЛЬНАЯ И ГЕКСАГОНАЛЬНАЯ СИНГОНИИ

Задача 6. Корунд Al_2O_3

$cn = 61^\circ 11'$ Единичная
 $cz = 79^\circ 36'$ грань r

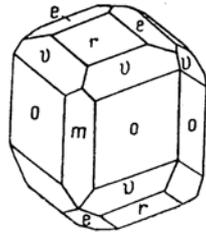


а

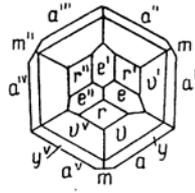


б

Продолжение прил. 4



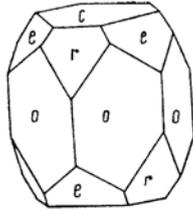
а



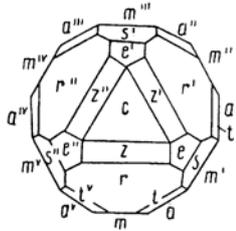
б

Задача 7. *Пираргирит* Ag_2SbS_3

$rr' = 71^\circ 22'$ Единичная
 $ay = 15^\circ 34'$ грань r
 $av = 24^\circ 54'$



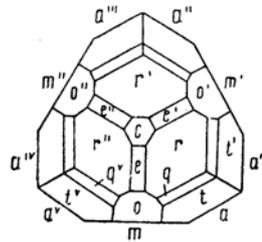
а



б

Задача 8. *Эвдиалит*

$ce = 50^\circ 38'$ Единичная
 $cs = 78^\circ 24'$ грань r

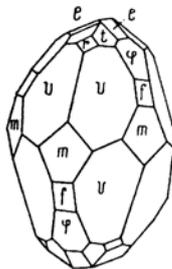


Задача 9. *Турмалин*

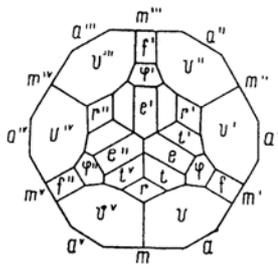
$ce = 14^\circ 30'$ Единичная
 $co = 45^\circ 57'$ грань r
 $qq' = 18^\circ 51'$

Выходы осей совпадают с полюсами

- + X — грани a^v
- + Y — грани a'
- + U — грани a'''



а

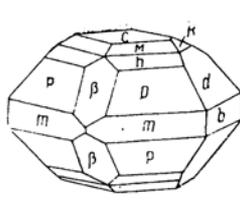


б

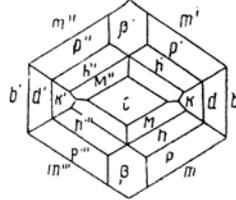
Задача 10. *Кальцит* $CaCO_3$

$rr' = 74^\circ 55'$ Единичная
 $\varphi\varphi' = 84^\circ 33'$ грань r
 $mv = 28^\circ 04'$

Продолжение прил. 4



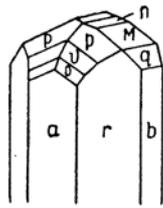
а



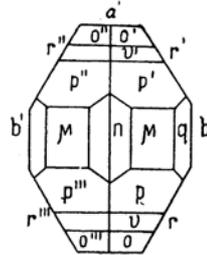
б

Задача 15. Стефанит
 Ag_8SbS_4

$mm''' = 64^\circ 21'$ Единичная
 $pp''' = 49^\circ 44'$ грань p
 $kk' = 68^\circ 50'$
 $dd' = 107^\circ 45'$
 $cM = 23^\circ 13'$



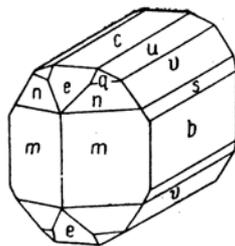
а



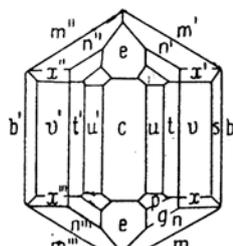
б

Задача 16. Скогболит $FeTa_2O_6$

$pp' = 67^\circ 28'$ Единичная
 $pp''' = 53^\circ 58'$ грань p
 $qq' = 125^\circ 47'$
 $rr' = 57^\circ 03'$
 $nn' = 12^\circ 23'$
 $vv' = 90^\circ 06'$
 $oo' = 106^\circ 22'$



а



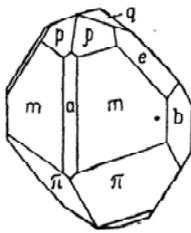
б

Задача 17. Гердерит
 $(CaF)BePO_4$

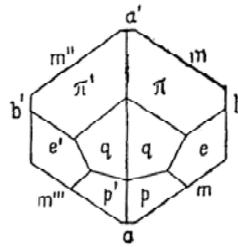
$ss' = 137^\circ 02'$ Единичная
 $ee' = 91^\circ 20'$ грань p
 $uu' = 45^\circ 54'$
 $mm''' = 63^\circ 39'$
 $nn' = 103^\circ 24'$

МОНОКЛИННАЯ СИМГОНИЯ

Задача 18. Дюрангит
 $\text{Na}(\text{AlF})\text{AsO}_4$
 $mm''' = 69^\circ 50'$ Единичная
 $ap = 38^\circ 06'$ грань p
 $pp' = 46^\circ 15'$
 $a'p = 61^\circ 15'$
 $\pi\pi' = 67^\circ 50'$
 $m'q = 72^\circ 06'$
 $me = 48^\circ 10'$
 X — ось пояса $bb'b'$

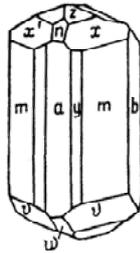


а

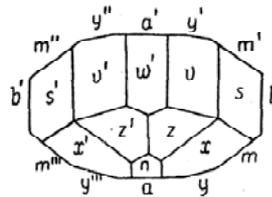


б

Задача 19. Вивианит
 $\text{Fe}_3\text{P}_2\text{O}_8 \cdot 8\text{H}_2\text{O}$
 $mm''' = 71^\circ 58'$ Единичная
 $YU''' = 27^\circ 13'$ грань x
 $a'w = 54^\circ 40'$
 $xx' = 47^\circ 53'$
 $az = 55^\circ 03'$
 $zz' = 31^\circ 28'$
 X — ось пояса, проходящего
 через b, b' и точку пересече-
 ния поясов $txzv'm''$ и
 $m''x'z'um'$

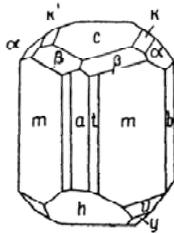


а

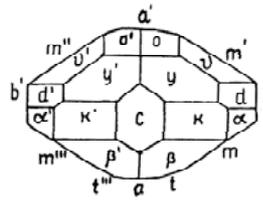


б

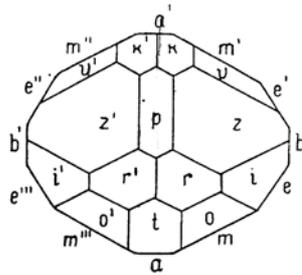
Задача 20. Колеманит
 $\text{Ca}_2\text{V}_6\text{O}_{11} \cdot 5\text{H}_2\text{O}$
 $tl''' = 39^\circ 58'$ Единичная
 $mt''' = 72^\circ 03'$ грань β
 $ac = 69^\circ 51'$
 $c\beta = 33^\circ 45'$
 $aa' = 90^\circ 54'$
 X — ось пояса ccb'



а

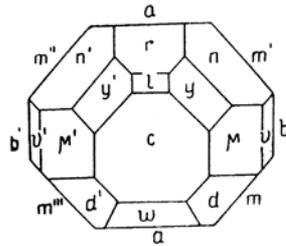


б



Задача 21. Роговая обманка

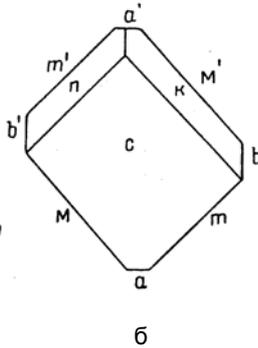
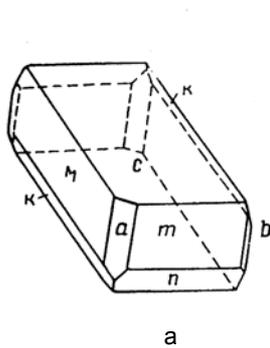
$mm''' = 55^\circ 49'$ Единичная грань (на рисунке нет) лежит в точке пересечения поясов $bt\delta'$ и aca'
 $ee' = 64^\circ 22'$
 $ct = 75^\circ 53'$
 $at = 49^\circ 54'$
 $a'k = 51^\circ 44'$
 X — ось пояса $bc\delta'$



Задача 22. Мирабилит $\text{Na}_2\text{SO}_4 \cdot 10\text{H}_2\text{O}$

$cl = 32^\circ 26'$ Единичная грань d
 $cw = 24^\circ 18'$
 $a'r = 49^\circ 50'$
 $mm''' = 93^\circ 29'$
 $nn' = 86^\circ 47'$
 $cv = 62^\circ 06'$
 X — ось пояса bcb'

ТРИКЛИННАЯ СИНГОНΙΑ

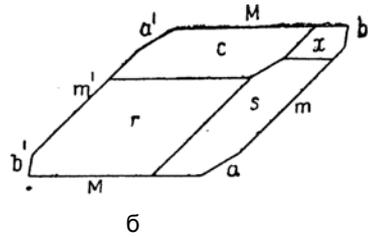
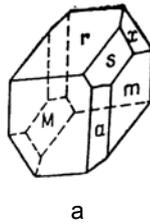


Задача 23. Родонит MnSiO_3

$bt = 45^\circ 53'$ Единичная грань p (на рисунке не показана) лежит в поясе tcm'
 $b'M = 41^\circ 38'$
 $b'a = 85^\circ 34'$
 $M'k = 31^\circ 13'$
 $ct = 68^\circ 45'$
 $cM = 86^\circ 23'$
 $cp = 29^\circ 49'$
 X — ось пояса bcb'
 Y — ось пояса aca'

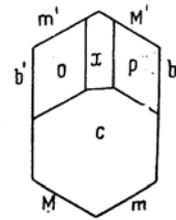
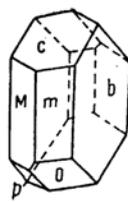
Задача 24. Аксицит
 $H(Fe, Mn)Ca_2Al_2B(SiO_4)_4$
 (рис. 219, а, б)

$am = 15^\circ 34'$ Единичная
 $aM = 28^\circ 55'$ грань x
 $Mr = 45^\circ 15'$
 $mr = 64^\circ 22'$
 $bm = 32^\circ 47'$
 $cM = 89^\circ 55'$
 X — ось пояса $bc'b'$
 Y — ось пояса aca'



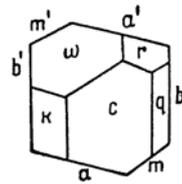
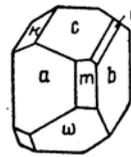
Задача 25. Альбит $NaAlSi_3O_8$

$\angle bt = 60^\circ 26'$ Единичная
 $b'M = 60^\circ 20'$ грань p
 $ct = 65^\circ 17'$
 $cM = 69^\circ 10'$
 $cp = 55^\circ 53'$
 $bx = 86^\circ 20'$
 X — ось пояса $bc'b'$
 Y — ось пояса cx

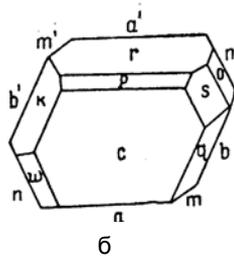
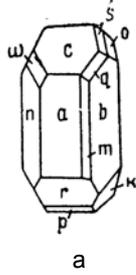


Задача 26. Уксуснокислый дидим
 $Di(CH_3COO)_2 \cdot 4H_2O$

$ab = 107^\circ 00'$ Единичная
 $bt = 61^\circ 26'$ грань ω
 $ac = 68^\circ 32'$
 $bc = 74^\circ 22'$
 $kb = 58^\circ 58'$
 X — ось пояса $bc'b'$
 Y — ось пояса aca'

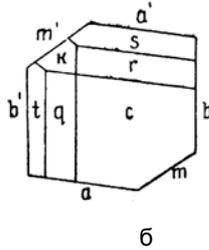
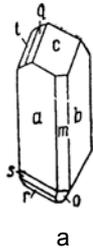


Окончание прил. 4



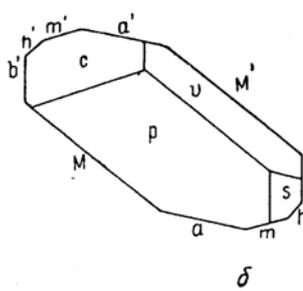
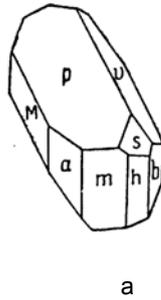
**Задача 27. Тетраэтиламмоний —
пентахлородимеркуриат**
 $\text{HgCl}_5\text{N}(\text{C}_2\text{H}_5)_4$

Единичная
грань O
 $pa = 68^\circ 01'$
 $mb = 27^\circ 55'$
 $ac = 71^\circ 04'$
 $bc = 87^\circ 31'$
 $bq = 34^\circ 54'$
 $oc = 45^\circ 24'$
 $a'r = 50^\circ 29'$
 $nb' = 47^\circ 36'$
 X — ось пояса $bc'b'$
 Y — ось пояса aca'



Задача 28. Ванадат бария
 $\text{Ba}_8\text{V}_{10}\text{O}_{28} \cdot 19\text{H}_2\text{O}$

Единичная
грань $O(\text{III})$
 $at = 41^\circ 56'$
 $ab = 96^\circ 13'$
 $ac = 69^\circ 32'$
 $bc = 62^\circ 40'$
 $m'o = 47^\circ 19'$
 $a's = 27^\circ 05'$
 X — ось пояса $bc'b'$
 Y — ось пояса aca'



Задача 29. Халькантит
 $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$

Единичная
грань p
 $am = 30^\circ 51'$
 $mb = 69^\circ 50'$
 $aM = 25^\circ 59'$
 $Mr = 71^\circ 39'$
 $ap = 59^\circ 10'$
 $mc = 107^\circ 17'$
 $bs = 55^\circ 02'$
 $ah = 53^\circ 24'$
 X — ось пояса $bc'b'$
 Y — ось пояса aca'

Таблица натуральных

° /	sin	cos	° /	° /	sin	cos	° /	° /	sin
0°00'	0,000	1,000	90°00'	9°00'	0,156	0,988	81°00'	18°00'	0,309
15	0,004	1,000	45	15	0,161	0,987	45	15	0,313
30	0,009	1,000	30	30	0,165	0,986	30	30	0,317
45	0,013	1,000	15	45	0,169	0,986	15	45	0,321
1°00'	0,017	1,000	89°00'	10°00'	0,174	0,985	80°00'	19°00'	0,326
15	0,022	1,000	45	15	0,178	0,984	45	15	0,330
30	0,026	1,000	30	30	0,182	0,983	30	30	0,334
45	0,031	1,000	15	45	0,187	0,982	15	45	0,338
2°00'	0,035	0,999	88°00'	11°00'	0,191	0,982	79°00'	20°00'	0,342
15	0,039	0,999	45	15	0,195	0,981	45	15	0,346
30	0,044	0,999	30	30	0,199	0,980	30	30	0,350
45	0,048	0,999	15	45	0,204	0,979	15	45	0,354
3°00'	0,052	0,999	87°00'	12°00'	0,208	0,978	78°00'	21°00'	0,358
15	0,057	0,998	45	15	0,212	0,977	45	15	0,362
30	0,061	0,998	30	30	0,216	0,976	30	30	0,367
45	0,065	0,998	15	45	0,221	0,975	15	45	0,371
4°00'	0,070	0,998	86°00'	13°00'	0,225	0,974	77°00'	22°00'	0,375
15	0,074	0,997	45	15	0,229	0,973	45	15	0,379
30	0,078	0,997	30	30	0,233	0,972	30	30	0,383
45	0,083	0,997	15	45	0,238	0,971	15	45	0,387
5°00'	0,087	0,996	85°00'	14°00'	0,242	0,970	76°00'	23°00'	0,391
15	0,092	0,996	45	15	0,246	0,969	45	15	0,395
30	0,096	0,995	30	30	0,250	0,968	30	30	0,399
45	0,100	0,995	15	45	0,255	0,967	15	45	0,403
6°00'	0,105	0,995	84°00'	15°00'	0,259	0,966	75°00'	24°00'	0,407
15	0,109	0,994	45	15	0,263	0,965	45	15	0,411
30	0,113	0,994	30	30	0,267	0,964	30	30	0,415
45	0,118	0,993	15	45	0,270	0,962	15	45	0,419
7°00'	0,122	0,993	83°00'	16°00'	0,276	0,961	74°00'	25°00'	0,423
15	0,126	0,992	45	15	0,280	0,960	45	15	0,427
30	0,131	0,991	30	30	0,284	0,959	30	30	0,431
45	0,135	0,991	15	45	0,288	0,958	15	45	0,434
8°00'	0,139	0,990	82°00'	17°00'	0,292	0,956	73°00'	26°00'	0,438
15	0,143	0,990	45	15	0,297	0,955	45	15	0,442
30	0,148	0,989	30	30	0,301	0,954	30	30	0,446
45	0,152	0,988	15	45	0,305	0,952	15	45	0,450
9°00'	0,156	0,988	81°00'	18°00'	0,309	0,951	72°00'	27°00'	0,454
° /	cos	sin	° /	° /	cos	sin	° /	° /	cos

Приложение 5

синусов и косинусов

cos	° /	° /	sin	cos	° /	° /	sin	cos	° /
0,951	72°00'	27°00'	0,454	0,891	63°00'	36°00'	0,588	0,809	54°00'
0,950	45	15	0,458	0,889	45	15	0,591	0,806	45
0,948	30	30	0,464	0,887	30	30	0,595	0,804	30
0,947	15	45	0,467	0,885	15	45	0,598	0,801	15
0,946	71°00'	28°00'	0,469	0,883	62°00'	37°00'	0,602	0,799	53°00'
0,944	45	15	0,473	0,881	45	15	0,605	0,796	45
0,943	30	30	0,477	0,879	30	30	0,609	0,793	30
0,941	15	45	0,481	0,877	15	45	0,612	0,791	15
0,940	70°00'	29°00'	0,485	0,875	61°00'	38°00'	0,616	0,788	52°00'
0,938	45	15	0,489	0,873	45	15	0,619	0,785	45
0,937	30	30	0,492	0,870	30	30	0,623	0,783	30
0,935	15	45	0,496	0,868	15	45	0,626	0,780	15
0,934	69°00'	30°00'	0,500	0,866	60°00'	39°00'	0,629	0,777	51°00'
0,932	45	15	0,504	0,864	45	15	0,633	0,774	45
0,930	30	30	0,508	0,862	30	30	0,636	0,772	30
0,929	15	45	0,511	0,859	15	45	0,639	0,769	15
0,927	68°00'	31°00'	0,515	0,857	59°00'	40°00'	0,643	0,766	50°00'
0,926	45	15	0,519	0,855	45	15	0,646	0,763	45
0,924	30	30	0,523	0,853	30	30	0,649	0,760	30
0,922	15	45	0,526	0,850	15	45	0,653	0,757	15
0,921	67°00'	32°00'	0,530	0,848	58°00'	41°00'	0,656	0,755	49°00'
0,919	45	15	0,534	0,846	45	15	0,659	0,752	45
0,917	30	30	0,537	0,843	30	30	0,668	0,749	30
0,915	15	45	0,541	0,841	15	45	0,666	0,746	15
0,914	66°00'	33°00'	0,545	0,839	57°00'	42°00'	0,669	0,743	48°00'
0,912	45	15	0,548	0,836	45	15	0,672	0,740	45
0,910	30	30	0,552	0,834	30	30	0,676	0,737	30
0,908	15	45	0,556	0,832	15	45	0,679	0,734	15
0,906	65°00'	34°00'	0,559	0,829	56°00'	43°00'	0,682	0,731	47°00'
0,904	45	15	0,563	0,827	45	15	0,685	0,728	45
0,903	30	30	0,566	0,824	30	30	0,688	0,725	30
0,901	15	45	0,570	0,822	15	45	0,692	0,722	15
0,899	64°00'	35°00'	0,574	0,819	55°00'	44°00'	0,695	0,719	46°00'
0,897	45	15	0,577	0,817	45	15	0,698	0,716	45
0,895	30	30	0,581	0,814	30	30	0,701	0,713	30
0,893	15	45	0,584	0,812	15	45	0,704	0,710	15
0,891	63°00'	36°00'	0,588	0,809	54°00'	45°00'	0,707	0,707	45°00'
sin	° /	° /	cos	sin	° /	° /	cos	sin	° /

Учебное издание

**Владимир Александрович Буланов
Михаил Александрович Юденко**

**РЕШЕНИЕ КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКИХ ЗАДАЧ
С ПОМОЩЬЮ СТЕРЕОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ**

Учебное пособие

ISBN 5-9624-0124-7

Редактор М. А. Айзиман

Верстка А. В. Врон
Дизайн обложки М. Г. Яскин

Темплан 2006 г. Поз. 120. Зак. 225.

Подписано в печать 25.11.06. Формат 60x84 1/16.
Печать трафаретная. Усл. печ. л. 10,2. Уч.-изд. л. 5,3
Тираж 100 экз.

Редакционно-издательский отдел
Иркутского государственного университета
664003, Иркутск, бульвар Гагарина, 36