


**Л.А.ВАХРАМЕЕВА  
Л.М.БУГАЕВСКИЙ  
З.Л.КАЗАКОВА**

# **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КАРТОГРАФИЯ**



**ВЫСШЕЕ  
ОБРАЗОВАНИЕ**



Л.А.ВАХРАМЕЕВА  
Л.М.БУГАЕВСКИЙ  
Э.Л.КАЗАКОВА

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КАРТОГРАФИЯ

*Допущено  
Министерством высшего и среднего  
специального образования СССР  
в качестве учебника для студентов  
вузов, обучающихся по специальности  
«Картография»*



МОСКВА "НЕДРА" 1986

Вахрамеева Л. А., Бугаевский Л. М., Казакова З. Л. Математическая картография: Учебник для вузов.— М.: Недра, 1986.— 286 с., ил.

Изложена общая теория картографических проекций и их классификация; показано отображение поверхности эллипсоида на шар и плоскость. Рассмотрена теория конических, азимутальных и перспективных, цилиндрических, псевдоконических, псевдоазимутальных, псевдоцилиндрических и поликонических проекций, а также проекций, используемых для составления номенклатурных карт (топографических, обзорно-топографических) и др. Описаны методы изыскания картографических проекций; приведены основные положения по выбору картографических проекций; освещены вопросы автоматизации и механизации в математической картографии. Включены таблицы и номограммы, необходимые студентам для вычисления проекций, даны примеры выполнения основных лабораторных работ.

Для студентов вузов, обучающихся по специальности «Картография».

Табл. 10, ил. 74, список лит.— 14 назв.

Рецензенты: кафедра геодезии и картографии Иркутского государственного университета; Г. И. Конусова, проф. д-р техн. наук (Новосибирский инженерно-строительный институт).

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

Учебник написан в соответствии с программой курса «Математическая картография», утвержденной в 1983 г. для специальности «Картография».

Целью данного издания является передача учащимся такой системы знаний, которая позволила бы самостоятельно выполнять изыскания и выбор проекций для конкретных заданий.

Главное внимание уделено теории классов проекций и методам получения математической основы различных карт. Впервые в учебнике представлен материал о топоцентрической горизонтной и полярной сферической системах координат, о системах координат трехосного эллипсоида, изложены некоторые вопросы изображения эллипсоида вращения на поверхности шара. Наряду с традиционными вопросами математической картографии рассмотрены основные достижения картографической науки и производства в области механизации и автоматизации. Используемый математический аппарат и постановка проблемных вопросов должны способствовать развитию рационального мышления будущих инженеров.

Д-ром техн. наук Л. А. Вахрамеевой написаны: введение, гл. I, III, VI, VII, X, а также § 49—51, 53, 57, 58, 61, 68, прил. 1; д-ром техн. наук Л. М. Бугаевским — гл. VIII, XII, XIV, § 24, 29, 56, 59, 62; Л. А. Вахрамеевой совместно с Л. М. Бугаевским — § 2, 10—15, 60, 67; З. Л. Казаковой — гл. IV, § 22, 23, 25—28, 30, 52, подготовлены прил. 2—12.

## ВВЕДЕНИЕ

---

### Предмет и задачи математической картографии

Широкое применение карт в различных отраслях народного хозяйства при решении задач научного и прикладного характера, а также в качестве источника информации, хорошего путеводителя и средства обучения позволяет считать создание карт важной государственной задачей.

Очень часто использование карт предусматривает проведение по ним различных измерений, в результате которых могут быть получены важные характеристики, необходимые для решения научных и производственных вопросов. Возможность проведения измерений тесно связана с математической основой карты.

Предметом изучения математической картографии является математическая основа карт, проектирование которой — один из первых этапов в процессе создания карты. При решении этой задачи используют определенные математические законы, устанавливающие взаимосвязь координат точек картографируемой поверхности и плоскости, т. е. выбирают ту или иную картографическую проекцию и строят соответствующую картографическую сетку (чаще всего меридианов и параллелей), рассматривают вопросы о масштабах, их измерениях, геометрических аспектах определения компонок карт, их разграфки и номенклатуры.

Для того чтобы умело использовать карту, проводить на ней измерения, нужно знать картографическую проекцию, в которой она составлена, и законы распределения искажений.

Основными задачами курса математической картографии являются:

- развитие теории математической картографии, прежде всего в области получения наилучших картографических проекций;

- исследование различных картографических проекций, их сущности, свойств, взаимосвязи и целесообразности применения на практике;

- совершенствование имеющихся картографических проекций и разработка новых в соответствии с требованиями науки и производства, в частности, для создания разнообразных тематических и комплексных карт;

- совершенствование методов изыскания новых картографических проекций;

- разработка математических элементов карт (компонок, разграфки и номенклатуры), необходимых для многолистных изданий;

- развитие способов и средств выполнения различных измерений по картам с учетом свойств картографических проекций;

исследование и решение задач математического характера, возникающих при составлении карт (например, трансформирование картографических проекций, разработка технических средств, облегчающих измерения по картам, и др.);

разработка теории и методов автоматизации в математической картографии.

## Краткий обзор развития математической картографии

Начало математической картографии было положено около двух тысяч лет назад греческими учеными, которые первыми ввели в основу отображения Земли и звездного неба математические принципы и стали использовать сетку меридианов и параллелей. Большую роль в развитии картографии играли работы Анаксимандра, Эратосфена, Аполлония, Гиппарха.

Во II в. н. э. Птолемеем был написан капитальный труд «География», включавший описание способов создания карт и определения размеров Земли, а также построения картографических проекций. Эта работа послужила основой при создании в VII в. «Армянской географии», включавшей ряд карт.

Эпоха средневековья характеризуется появлением так называемых монастырских карт, отражающих господствующее религиозные представления устройства Мира. Редким исключением являются труды Абу Рейхана Бируни (жил в Хорезме в начале XI в.) о шаровой глобулярной проекции.

Особое развитие картографии началось в эпоху Возрождения — в эпоху великих географических открытий. Стали необходимы точные, достоверные карты для управления страной, военных походов, для развития торговли и мореплавания. Такие карты могли быть созданы только с использованием математической основы и результатов съемочных работ. Впервые появились топографические карты.

В конце XVI — начале XVII вв. значительным событием в дальнейшем развитии и популяризации картографии явилось создание географических атласов, изданных нидерландскими картографами Ортелием и Меркатором. Меркатор впервые применил равноугольную цилиндрическую проекцию, которая с успехом используется до настоящего времени для морских навигационных карт.

В это время для карт мира и значительных по размерам территорий широко использовались трапециевидная проекция Апиана, послужившие прообразом разработанных позднее псевдоцилиндрических проекций. В XVII в. новую синусоидальную псевдоцилиндрическую проекцию для карт мира предложил представитель французской школы Н. Сансон.

XVIII в. характеризуется разработкой научных основ картографии и началом планомерного топографического изучения Земли и, как следствие этого, дальнейшим повышением точности и достоверности карт. В картографическую практику был введен ряд но-

вых проекций, предложенных Р. Бонном, И. Ламбертом, Ж. Лагранжем, Л. Эйлером, Н. Делилем и другими картографами.

В начале XIX в. началось создание крупномасштабных военных топографических карт, для которых математическая основа имеет особое значение, так как по этим картам выполнялись определения расстояний и направлений.

В это же время К. Гаусс впервые решил задачу равноугольного отображения одной поверхности на другой, что послужило основанием для получения целого ряда равноугольных проекций (в том числе и для крупномасштабных карт). Появились работы Н. Тиссо, разработавшего общую теорию искажений картографических проекций.

В России первая известная карта Московского государства под названием «Большой чертеж» была составлена в конце XVI в. В XVII в. эта карта была вновь изготовлена и дополнена чертежом дорог от Москвы до Перекопа. Эти дорожные карты давали изображение значительной части Европейской России.

В конце XVII — начале XVIII вв. П. Годуновым и С. Ремезовым на территорию Сибири были составлены первые карты. В 1701 г. С. Ремезов подготовил первый русский географический атлас — «Чертежную книгу Сибири».

Помимо перечисленных чертежей, не имевших математической основы, имелись карты, принадлежавшие частным лицам или выполненные иностранцами по русским материалам, на которых уже в XVII в. была изображена сетка меридианов и параллелей (карты России Ф. Годунова, Г. Герритса, И. Массы, Н. Витсена). В XVIII в. по указанию Петра I началось проведение систематических съемок для удовлетворения нужд флота и составления генеральной карты России. В это время русские карты составлялись в цилиндрической, трапециевидной (псевдоцилиндрической), стереографической и конической проекциях.

В 1734 г. был опубликован «Атлас Всероссийской империи» И. Кирилова, появление которого следует отнести к значительным событиям русской картографии. Большинство карт атласа было составлено в равнопромежуточной конической проекции с двумя главными параллелями.

Дальнейшее развитие картографии тесно связано с деятельностью Российской Академии наук. При Академии наук был основан Географический департамент, который возглавлял и объединял все картографические работы в России почти до конца века.

В результате работы Географического департамента Академии в 1745 г. был выпущен в свет «Атлас Российский», который включал генеральную карту России, 13 карт европейской части страны и 6 карт — азиатской. Этот атлас считался одним из лучших атласов того времени; все входящие в него карты были составлены в трапециевидных (псевдоцилиндрических) и равнопромежуточных конических проекциях.

Наиболее значительные успехи в развитии картографии во второй половине XVIII в. были связаны с именем М. В. Ломоносова



который придавал большое значение математической основе карт. Под его руководством в Географическом департаменте Академии наук были созданы карты всего мира и России с включением акватории Северного Ледовитого океана, при составлении которых были использованы равноугольная цилиндрическая, косая стереографическая и нормальная азимутальная равнопромежуточная проекции. В первом томе «Трудов» Петербургской Академии наук были помещены три работы Л. Эйлера, посвященные вопросам математической картографии. Продолжением работ Л. Эйлера в области математической картографии явились исследования Ф. Ф. Шуберта, который принимал личное участие в картографических работах Географического департамента; указанные исследования отличались математической обоснованностью и оригинальностью решения задач.

Во второй половине XVIII столетия подробный картографический материал генерального межевания послужил основой при составлении Депо карт «Подробной карты Российской империи», известной под названием «столистовой», которая была составлена в равнопромежуточной конической проекции в масштабе 20 верст в дюйме (1 : 840 000).

В конце XVIII — начале XIX вв. вопросами создания карт и их математической основы занимались военные геодезисты, картографы, астрономы (Ф. Ф. Шуберт, А. П. Болотов, Н. Я. Цингер и др.), которые обращали большое внимание на рациональное использование уже имеющихся проекций и на точность создаваемых карт.

Силами Военно-топографического депо и Корпуса военных топографов проводились съемки и создавались крупномасштабные карты на значительную часть России и пограничные пространства. Наиболее значительными произведениями русской военной картографии явились: десятиверстная специальная карта западной части России, известная под названием карты Шуберта, и трехверстная военно-топографическая карта Западной России; обе эти карты были созданы в проекции Бонна. Несколько позже была издана специальная десятиверстная карта Европейской России, составленная в равноугольной конической проекции, а также десятиверстная карта Западной Сибири.

Теория картографических проекций была подробно изложена в курсе геодезии, написанном А. П. Болотовым; в этом курсе впервые в России была дана теория равноугольного изображения одной поверхности на другой по Гауссу и рекомендована для карт России равноугольная коническая проекция.

В 1848 г. специальная комиссия, созданная при Корпусе военных топографов, приняла для крупномасштабных русских топографических карт многогранную проекцию Мюффлинга, в которой изображение земной поверхности выполнялось по трапециям, ограниченными дугами меридианов и параллелей.

Карты средних и мелких масштабов на территорию России и ее отдельных частей создавались в это время чаще всего в равноуголь-

ных конических проекциях, а для карт иностранных государств, материков и всего мира применялись косые стереографические, псевдоконические, равнопромежуточные азимутальные и равноугольные цилиндрические проекции.

После учреждения в 1839 г. Пулковской обсерватории счет долгот на картах стали вести от меридиана Пулкова, до этого в качестве начального использовали меридиан Ферро (самого западного острова Канарских островов). В 1884 г. на Международной конференции в Вашингтоне был предложен в качестве начального меридиан Гринвича, который стал использоваться на некоторых русских картах.

Новый этап в развитии отечественной математической картографии связан с именем знаменитого русского математика П. Л. Чебышева, которым была сформулирована теорема о наилучшей равноугольной картографической проекции для заданной территории. Д. А. Граве доказал теорему Чебышева и провел ряд исследований по теории картографических проекций. Русские математики А. Н. Коркин и А. А. Марков также проводили исследования в области изыскания наилучших картографических проекций.

К концу XIX в. математическая картография как один из разделов геодезии была включена в учебные планы высших технических учебных заведений и физико-математических факультетов русских университетов.

Создание карт в это время было направлено в основном на удовлетворение потребностей армии. Крупномасштабные съемки в начале XX в. были выполнены на всю европейскую часть России, они покрывали пространство западнее меридиана с долготой  $\lambda = 30^\circ$ , Крым и Закавказье. Картографическая обеспеченность страны была неравномерной — от полуверстных топографических карт (1 : 21 000) на западе страны до «стоверстной» (1 : 4 200 000) на севере и для азиатской части России.

Исследованиями в области теории картографических проекций в начале XX в. занимались известные ученые: Д. И. Менделеев, Ф. Н. Красовский, А. А. Михайлов и др.

Важным событием в развитии математической картографии явилось опубликование в 1907 г. работы В. В. Витковского «Картография», в которой была дана теория картографических проекций с практическими рекомендациями их применения.

После Великой Октябрьской социалистической революции картография вступила в новый этап своего развития: началось выполнение неотложных заданий государства, направленных на выявление природных ресурсов, укрепление обороны страны, развитие народного образования и удовлетворение культурных запросов населения.

В 1918 г. был принят декрет Советского правительства о переходе к метрической системе мер и даны указания об отсчете долгот от Гринвичского меридиана.

Важным шагом в развитии советской картографии явился Декрет об учреждении Высшего геодезического управления (ВГУ) в 1919 г.

писанный В. И. Лениным 15 марта 1919 г. В этом Декрете была дана подробная программа производственной деятельности топографо-геодезической службы.

В 20-х годах был решен вопрос о математической основе новых советских топографических карт (в метрических масштабах). Для этих карт была оставлена применявшаяся раньше проекция Мюфлинга.

В указаниях В. И. Ленина, данных им в 1921 г. в связи с началом работ по созданию первых советских атласов, особое внимание было обращено на необходимость создания высококачественных карт, а следовательно, карт достоверных и точных. В первые годы Советской власти были изданы справочные административные карты европейской и азиатской частей РСФСР.

В 1921 г. известный ученый-геодезист Ф. Н. Красовский разработал две оригинальные равнопромежуточные конические проекции, предназначавшиеся для создания мелкомасштабных карт европейской части нашей страны и всего СССР. Одна из этих проекций сохраняла поверхность некоторого пояса и была наилучшим образом приспособлена к изображению территории нашей страны. Именно эта проекция получила широкое применение и известна под названием проекции Ф. Н. Красовского. Преимущество этой проекции совершенно очевидно, почти 90 % всей территории СССР имеют в ней искажения площади менее 1,5 %.

В проекции Ф. Н. Красовского создано очень много карт, в том числе: административная карта европейской части РСФСР масштаба 1 : 4 000 000 (изданная ВГУ в 1921—1922 гг.), справочная карта европейской части СССР масштаба 1 : 1 500 000 (неоднократно издававшаяся, послужившая основой целого ряда мелкомасштабных карт), карты СССР в географических атласах и многие др.

В условиях планового развития народного хозяйства в нашей стране назрел вопрос о введении в общегосударственном масштабе единой проекции и системы прямоугольных координат для топографо-картографических работ и обработки геодезических измерений. Советскими геодезистами и картографами были проведены большие исследования по разработке математического обоснования топографических карт: выбору проекции, установлению масштабов ряда, разграфки и номенклатуры.

В 1928 г. на Третьем геодезическом совещании была введена проекция Гаусса—Крюгера, единая для создания топографических карт и обработки геодезических измерений. Введение этой проекции в системе шестиградусных зон для всей территории СССР явилось большим достижением советской геодезии и картографии.

В начале 30-х годов начались исследования по картометрии, связанные с определением площади Советского Союза. В это же время значительные успехи были достигнуты и в области создания карт. Были изданы карты европейской части СССР масштаба 1 : 1 500 000 и азиатской части — масштаба 1 : 5 000 000, а также Атлас промышленности СССР. Карманный атлас СССР и др.

В начале 30-х годов началась также работа по созданию школьных карт, которые начали выпускать миллионными тиражами. Проф. М. Д. Соловьев провел исследования перспективно-цилиндрических проекций, разработал обобщенную теорию этих проекций и предложил вариант косо́й перспективно-цилиндрической проекции для школьных карт.

В ЦНИИГАиКе была создана специальная группа математической картографии, призванная систематически заниматься исследованиями в этой области.

Видные советские ученые Н. А. Урмаев, В. В. Каврайский, М. Д. Соловьев руководили исследованиями и разработкой теоретических и практических вопросов математической картографии.

Необходимо отметить, что выполнение топографо-геодезических и картографических работ в нашей стране осуществляется совместными усилиями военных и гражданских специалистов. Преимущество этого содружества особенно проявилось во время Великой Отечественной войны.

В послевоенный период были выпущены атласы картографических проекций и картографические таблицы, которые оказывали большую помощь картографам при вычислении проекций.

Помимо ученых, указанных выше, исследованиями по математической картографии занимались в эти годы Н. М. Волков, Г. А. Гинзбург, А. П. Юценко, Г. А. Мещеряков, А. С. Лисичанский, Ф. А. Старостин, Т. Д. Салманова, А. Г. Гедымин, А. К. Маловичко и др. В поисках новых методов изыскания картографических проекций советские ученые уделили большое внимание использованию и дальнейшей разработке идей и положений Чебышева—Граве. Н. А. Урмаевым было дано новое развитие этой сложной задачи в своей работе, посвященной методам изыскания новых картографических проекций, при разработке которых широко использовалось численное дифференцирование и интегрирование, а также применялся графоаналитический способ получения проекций по заданным эскизам картографической сетки.

В последние годы в области картографии выполнено много исследований теоретического и прикладного характера, имеются реальные возможности постепенной автоматизации всего комплекса работ по созданию карт.

Бурный рост информации, внедрение ЭВМ и автоматических устройств ставят перед картографией новые задачи, направленные на совершенствование математической основы, способов создания и использования карт.

## Глава I

# ОБЩАЯ ТЕОРИЯ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ. ИЗОБРАЖЕНИЕ ЭЛЛИпсоиДА ВРАЩЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

---

### § 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ОБ ОТОБРАЖЕНИИ ЭЛЛИпсоиДА (СФЕРЫ) НА ПЛОСКОСТИ

Картографируемые поверхности (Земля, Луна, планеты и их спутники), как правило, имеют сложную форму. Для того чтобы отобразить их на плоскости, необходимо от физической поверхности перейти к математической, которая наиболее близка к физической поверхности и может быть описана уравнениями.

В математической картографии картографируемые поверхности обычно принимают за сферу или за эллипсоид вращения, малая ось которого совпадает с осью вращения Земли.

При создании карт эллипсоид вращения или сфера должны быть отображены на плоскости. Ни одна из этих поверхностей не может быть развернута на плоскости без складок или разрывов, поэтому при создании карт прибегают к картографическим проекциям, в которых отображение поверхности на плоскости происходит по определенным математическим законам. Эти законы выражают функциональную связь координат точек картографируемой поверхности и плоскости.

В основу такого отображения картографируемой поверхности положены системы географических или геодезических координат, координатными линиями которых являются меридианы и параллели.

Линии меридианов получают путем сечения поверхности плоскостями, проходящими через ось ее вращения (для эллипсоида вращения меридианы будут эллипсами, а для шара — окружностями), а линии параллелей — путем сечения картографируемой поверхности плоскостями, перпендикулярными к оси ее вращения (параллели имеют вид окружностей).

Положение меридианов и параллелей на картографируемой поверхности определяется криволинейными географическими (или геодезическими) координатами: долготой  $\lambda$  и широтой  $\varphi$  (или  $l$  и  $B$ ).

Уравнение меридианов:  $\lambda = \text{const}$ , уравнение параллелей:  $\varphi = \text{const}$ .

Учитывая сказанное, можем написать общие уравнения картографических проекций:

$$x = f_1(\varphi, \lambda); \quad y = f_2(\varphi, \lambda), \quad (1)$$

где  $\varphi$  и  $\lambda$  — географические координаты некоторой точки на картографируемой поверхности;  $x$  и  $y$  — прямоугольные координаты

изображения этой точки на плоскости в проекции, определяемой функциями  $f_1$  и  $f_2$  при условии, что эти функции однозначны и непрерывны (вместе со своими частными производными).

Свойства проекций зависят от свойства и характера функций  $f_1$  и  $f_2$ , приведенных в уравнениях (1). Этим функциям может быть множество, поэтому и картографические проекции могут быть разнообразными.

Исключив из формул (1) широту  $\varphi$ , получим уравнение меридианов в проекции

$$F_1(x, y, \lambda) = 0,$$

а исключив долготу  $\lambda$  — уравнение параллелей

$$F_2(x, y, \varphi) = 0,$$

Если предположить, что  $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$ , то из уравнений (1) получим уравнения параллелей в параметрической форме

$$x = f_1(\varphi_0, \lambda); \quad y = f_2(\varphi_0, \lambda).$$

Если же предположить, что  $\lambda = \lambda_0 = \text{const}$ , то аналогично получим уравнения меридианов в параметрической форме

$$x = f_1(\varphi, \lambda_0); \quad y = f_2(\varphi, \lambda_0).$$

Изображение линий меридианов и параллелей в проекции называется *картографической сеткой*.

Картографическая сетка будет иметь наиболее простой вид, если проекция описывается уравнениями  $x = f_1(\varphi)$  и  $y = f_2(\lambda)$ . В этом случае и параллели, и меридианы изобразятся двумя системами взаимно перпендикулярных прямых.

Если  $x = f_1(\varphi)$  и  $y = f_2(\varphi, \lambda)$ , то параллели изобразятся прямыми линиями, параллельными оси  $Y$ , а меридианы — кривыми.

Если  $x = f_1(\varphi, \lambda)$  и  $y = f_2(\lambda)$ , то меридианы будут прямыми, параллельными оси  $X$ , а параллели — кривыми.

Если и  $x = f_1(\varphi, \lambda)$  и  $y = f_2(\varphi, \lambda)$ , то мы можем получить проекции с самыми разнообразными картографическими сетками, вид которых зависит от  $f_1$  и  $f_2$ .

Растяжение и сжатие отдельных частей изображения картографируемой поверхности в той или иной картографической проекции неизбежно сопровождаются искажениями длин, площадей и углов, причем эти искажения зависят от свойств изображения. В одних проекциях можно избежать искажений площади, в других — искажений углов, но длины линий будут искажаться во всех проекциях (искажения длин отсутствуют только в отдельных точках или на некоторых линиях карты).

Каждая карта имеет *главный масштаб*, который показывает общую степень уменьшения всей картографируемой поверхности (или ее части) при ее отображении на плоскости. Этот масштаб подписывается на карте, но сохраняется только в отдельных точках или на некоторых линиях карты

При исследовании картографических проекций главный масштаб, обозначаемый  $\mu_0$ , обычно принимают за единицу, так как он не влияет на свойства используемой картографической проекции.

Поскольку масштаб на карте является величиной переменной, в практику вводится понятие частных масштабов длин и площадей в данной точке по данному направлению.

*Частным масштабом длин ( $\mu$ )* называется отношение бесконечно малого отрезка в проекции ( $ds'$ ) к соответствующему бесконечно малому отрезку на картографируемой поверхности ( $ds$ )

$$\mu = ds'/ds. \quad (2)$$

Частный масштаб длин является функцией географических координат, определяющих положение точки на картографируемой поверхности, и азимута направления, по которому определяется частный масштаб,

$$\mu = F_1(\varphi, \lambda, \alpha).$$

В дальнейшем частные масштабы для простоты изложения будем называть масштабами вдоль каких-либо направлений. Например,

для меридиана:  $\alpha = 0$  или  $180^\circ$ ,  $\mu = m$  — масштаб по меридианам;

для параллели:  $\alpha = 90^\circ$  или  $270^\circ$ ,  $\mu = n$  — масштаб по параллелям.

*Искажением длин ( $v_\mu$ )* называется разность между частным масштабом и единицей, выраженная в процентах, например:

$$m = 1,58; \quad v_m = (m - 1) 100 = +58 \%;$$

$$n = 0,78; \quad v_n = (n - 1) 100 = -22 \%,$$

т. е. искажение длин может быть положительным и отрицательным. Частный масштаб длин отрицательным быть не может, в случае  $\mu = 0$  изображение пропадает.

*Частным масштабом площади ( $p$ )* называется отношение бесконечно малого (элементарного) участка на карте ( $dF'$ ) к соответствующему участку на картографируемой поверхности ( $dF$ )

$$p = dF'/dF.$$

Как правило,  $dF' \neq dF$ , но могут существовать такие проекции, в каждой точке которых  $dF' = dF$ , — равновеликие проекции.

Частный масштаб площади зависит только от географического положения изображаемой точки:

$$p = F_2(\varphi, \lambda).$$

В дальнейшем будем называть частный масштаб площади просто масштабом площади.

*Искажением площади ( $v_p$ )* называется разность между масштабом площади и единицей, выраженная в процентах, например:

$$p = 2,42; \quad v_p = (p - 1) 100 = +142 \%.$$

В некоторых случаях искажения длин и площадей характеризуют отвлеченной величиной, выраженной разностями  $(\mu-1)$ ,  $(\rho-1)$  или логарифмом масштаба  $\ln \mu$ , при разложении которого в ряд первым (главным) членом разложения будет разность  $(\mu-1)$ .

Третий вид искажений — *искажения углов*; они характеризуются разностью между величиной угла в проекции ( $u'$ ) и величиной соответствующего угла на картографируемой поверхности ( $u$ ). Как правило,  $u' \neq u$ , но могут существовать такие проекции, в каждой точке которых  $u' = u$ , — равноугольные проекции.

Искажение углов

$$\Delta u = u' - u$$

является функцией географических координат и азимутов направлений

$$\Delta u = F_3(\varphi, \lambda, \alpha).$$

В каждой точке проекции имеют место максимальные искажения углов, обозначаемые  $\omega$ :

$$\omega = \Delta u_{\max} = 2(\alpha - \beta),$$

где  $\beta$  — изображение азимута  $\alpha$  в проекции по указанному направлению.

Величина искажений является одним из основных критериев оценки достоинства картографических проекций.

## § 2. ОСНОВНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КАРТОГРАФИИ

Географическая (геодезическая) и геоцентрическая системы координат

Из бесчисленного множества параметрических линий, которые можно установить на эллипсоиде (сфере), выберем семейства географических параллелей и меридианов, составляющих географическую систему координат:  $\varphi = \text{const}$  и  $\lambda = \text{const}$ .

В произвольной точке  $A$  ( $\varphi, \lambda$ ) эллипсоида проведем нормаль  $AO'$  к этой поверхности (рис. 1).

Из бесчисленного множества нормальных сечений эллипсоида, которые можно провести через эту нормаль, выбираем два главных: сечение, совпадающее с плоскостью меридиана  $PAP'$ , называемое меридианным, и сечение, ортогональное первому, называемое сечением первого вертикала.

Радиусы кривизны этих нормальных сечений, согласно теореме Менье, будут соответственно равны

$$M = a(1 - e^2) / (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2};$$

$$N = a / (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}, \quad (3)$$



где  $e = \sqrt{(a^2 - b^2)/a^2}$  — первый эксцентриситет,  $a$  и  $b$  — соответственно большая и малая полуоси эллипсоида вращения.

Теперь предположим, что задана пространственная геоцентрическая система координат  $OX_G Y_G Z_G$ , в которой начало совмещено с центром масс Земли (с центром эллипсоида вращения), ось  $Z_G$  направлена на северный полюс Земли, ось  $X_G$  — в точку пересечения Гринвичского меридиана с экватором, ось  $Y_G$  — направлена на восток.

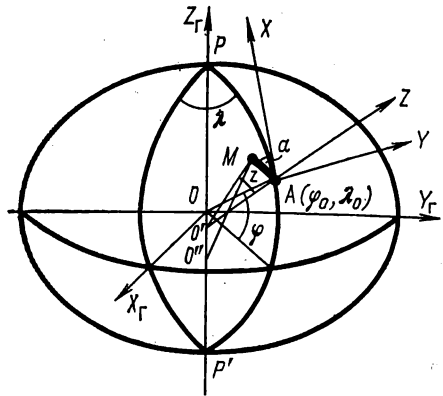


РИС. 1. Геоцентрическая и топоцентрическая пространственные системы координат

Тогда, учитывая выражения (3), связь геоцентрической и географической систем координат может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} X_G &= N \cos \varphi \cos \lambda; \\ Y_G &= N \cos \varphi \sin \lambda; \\ Z_G &= N (1 - e^2) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4)$$

### Топоцентрическая горизонтная и полярная сфероидическая (сферическая) системы координат

*Топоцентрической горизонтной системой координат* (см. рис. 1) будем называть систему, в которой начало совмещено с точкой нового полюса  $Q_0$  ( $\varphi_0, \lambda_0$ ), ось  $X$  лежит в плоскости меридиана точки  $Q_0$  и направлена на северный полюс, ось  $Z$  совпадает с нормалью  $O'Q_0$  к поверхности эллипсоида в точке  $Q_0$ , ось  $Y$  дополняет систему координат до левой. За точку полюса  $Q_0$  ( $\varphi_0, \lambda_0$ ) принимается заданная точка  $A$  ( $\varphi_0, \lambda_0$ ), как правило, средняя точка картографируемой области.

Учитывая широту, долготу точки нового полюса  $Q_0$  ( $\varphi_0, \lambda_0$ ) и радиус кривизны сечения первого вертикала  $N_0$  в данной точке, связь топоцентрической и геоцентрической систем координат можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z + N_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^2 N_0 \sin \varphi_0 \end{pmatrix}; \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = {}^t\mathbf{A} \begin{pmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r + N_0 e^2 \sin \varphi_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ N_0 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{A}$  — матрица преобразования координат,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\cos \lambda_0 \sin \varphi_0 & -\sin \lambda_0 & \cos \lambda_0 \cos \varphi_0 \\ -\sin \lambda_0 \sin \varphi_0 & \cos \lambda_0 & \sin \lambda_0 \cos \varphi_0 \\ \cos \varphi_0 & 0 & \sin \varphi_0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где  ${}^t\mathbf{A}$  — транспонированная матрица к  $\mathbf{A}$ .

Подставив в выражение (6) значения (4) и учитывая  ${}^t\mathbf{A}$  из (7), получаем следующие формулы для вычисления топоцентрических горизонтных координат:

$$\begin{aligned} X &= N [\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos (\lambda - \lambda_0)] + \\ &+ e^2 (N_0 \sin \varphi_0 - N \sin \varphi) \cos \varphi_0; \\ Y &= N \cos \varphi \sin (\lambda - \lambda_0); \\ Z &= N [\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos (\lambda - \lambda_0)] + \\ &+ e^2 (N_0 \sin \varphi - N \sin \varphi) \sin \varphi_0 - N_0. \end{aligned} \quad (8)$$

Теперь введем сфероидическую полярную систему координат  $z = \text{const}$ ,  $a = \text{const}$ , где  $a$  — углы между нормальными плоскостями в точке полюса  $Q_0$ ,  $z$  — углы между нормалью  $O'Q_0$  и направлениями в точке  $O'$  на текущие точки поверхности эллипсоида  $M_t$ , лежащие в соответствующих нормальных плоскостях (см. рис. 1). Обозначим  $MO' = N'_0$  и из рисунка получим

$$\begin{aligned} X &= N'_0 \sin z \cos a; \\ Y &= N'_0 \sin z \sin a; \\ Z &= N'_0 \cos z - N_0. \end{aligned} \quad (9)$$

Если в точке  $M$  провести нормаль  $MO''$  к эллипсоиду, которая пересечется с осью вращения эллипсоида в точке  $O''$ , то образуется треугольник  $O'O''M$ .

Учитывая широту данной точки  $M$ , значения сторон

$$O'M = N'_0; \quad O''M = N; \quad O'O'' = e^2 (N \sin \varphi - N_0 \sin \varphi_0)$$

и значение  $N$  из формулы (3), получаем по теореме косинусов

$$\begin{aligned} N'_0 &= N_0 \left\{ 1 - \frac{e^2}{2} (\sin \varphi - \sin \varphi_0)^2 \left[ 1 + \frac{e^2}{4} (5 \sin^2 \varphi + \right. \right. \\ &\left. \left. + \sin^2 \varphi_0 + 2 \sin \varphi \sin \varphi_0 - 4) \right] + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогично

$$N = N'_0 \left\{ 1 - e^2 (\sin \varphi - \sin \varphi_0) \sin \varphi \right.$$

$$+ \frac{e^2}{2} [\sin \varphi \sin \varphi_0 (\sin \varphi + \sin \varphi_0) + (\sin \varphi - \sin \varphi_0) (3 \sin^2 \varphi - 1)] + \dots \}. \quad (11)$$

Приравняв выражения (8), (9) и учитывая (10), (11), получаем следующие формулы связи полярных сфероидических координат  $z$ ,  $a$  и географических (геодезических)  $\varphi$  и  $\lambda$ :

$$\begin{aligned} \sin z \cos a &= t_1 + e^2 \tau [(t_1 \sin \varphi - \cos \varphi_0) + \\ &+ \frac{e^2}{2} (t_1 t_2 - 2t_3 \cos \varphi_0)]; \\ \sin z \sin a &= t_4 \left[ 1 + e^2 \tau \left( \sin \varphi + \frac{e^2}{2} t_3 \right) \right]; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\cos z = t_5 + e^2 \tau \left[ (t_5 \sin \varphi - \sin \varphi_0) + \frac{e^2}{2} (t_2 t_5 - 2t_3 \sin \varphi_0) \right],$$

где

$$\begin{aligned} t_1 &= \sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos (\lambda - \lambda_0); \\ t_2 &= \sin \varphi \sin \varphi_0 (\sin \varphi + \sin \varphi_0) + (\sin \varphi - \sin \varphi_0) (3 \sin^2 \varphi - 1); \\ t_3 &= \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \sin \varphi_0 (\sin \varphi - \sin \varphi_0); \\ t_4 &= \cos \varphi \sin (\lambda - \lambda_0); \\ t_5 &= \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos (\lambda - \lambda_0); \\ \tau &= \sin \varphi - \sin \varphi_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Заметим, что в большинстве случаев при выполнении вычислений достаточно удерживать в формулах (10) — (12) члены только до  $e^2$  включительно или заменять полярные сфероидические координаты на соответствующие сферические координаты, для которых полагают, что все члены при  $e^2, e^4, \dots$  равны нулю.

## Полярная геодезическая система координат

*Полярными геодезическими координатами* точки  $A$  ( $\varphi, \lambda$ ) называется длина геодезической линии  $s$  от полюса полярной системы координат  $Q_0$  ( $\varphi_0, \lambda_0$ ) до данной точки и азимут  $\alpha$  линии  $Q_0 A$  в точке  $Q_0$  (рис. 2). В этой системе семействами координатных линий являются:

при  $\alpha = \text{const}$  — пучок геодезических линий из полюса  $Q_0$ ,

при  $s = \text{const}$  — геодезические окружности, ортогональные первому семейству, не являющиеся геодезическими линиями и представляющие собой сложные кривые двойной кривизны.

## Эллиптические координаты

Любую картографируемую поверхность можно определить при помощи уравнений вида

$$\Phi(x, y, z) = 0.$$

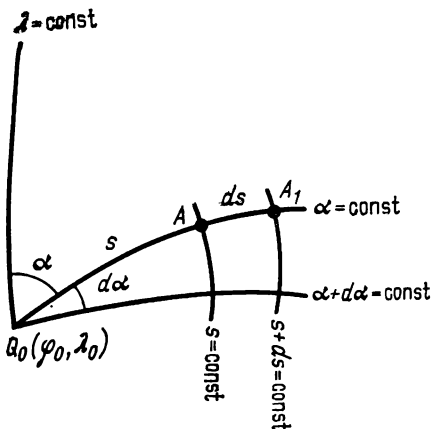


РИС. 2. Полярная геодезическая система координат

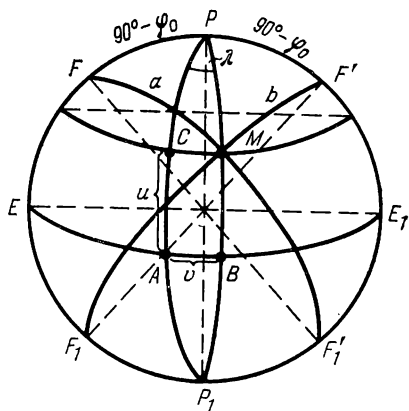


РИС. 3. Система эллиптических координат

где  $x, y, z$  — прямоугольные пространственные координаты,

$$x = F_1(u, v);$$

$$y = F_2(u, v);$$

$$z = F_3(u, v).$$

Независимые переменные  $u$  и  $v$  являются криволинейными координатами, определяющими положение точки на картографируемой поверхности.

В основу получения эллиптических координат положены две системы софокусных сферических эллипсов.

На рис. 3 фокус  $F$  является общим для сферического эллипса  $MC$ , который имеет второй фокус в точке  $F'$ , и для сферического эллипса  $MB$ , второй фокус которого находится в точке  $F_1$ .

Положение произвольной точки  $M$  определяется удалением ее от ближайших фокусов:  $FM = a$  и  $F'M = b$ . Если  $\lambda$  — долгота точки  $M$ , отнесенная к плоскости начального меридиана  $PCAP_1$ , перпендикулярного к плоскости рисунка, а  $\varphi$  — широта этой точки, то по формулам сферической тригонометрии (учитывая, что центральный угол измеряется дугой, на которую опирается)

$$\cos a = \sin \varphi \sin \varphi_0 - \cos \varphi \cos \varphi_0 \sin \lambda; \tag{14}$$

$$\cos b = \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \sin \lambda,$$

где  $\varphi_0$  — широта точки фокуса.

Примем дугу  $AC = u$  и дугу  $AB = v$  за эллиптические координаты.

Зная  $a$  и  $b$ , можно найти эллиптические координаты  $u$  и  $v$  по формулам

$$\sin u \sin \varphi_0 = \cos \frac{a+b}{2};$$

$$\sin v \cos \varphi_0 = \sin \frac{a-b}{2}.$$

15)

Контрольная формула  $\cos u \cos v = \cos \varphi \cos \lambda$ .

Приведенные формулы показывают, что эллиптические координаты зависят от положения на поверхности шара фокусов сферических эллипсов ( $F, F', F_1, F'_1$ ). По этому признаку эллиптические координаты подразделяют на различные системы (в частных случаях координаты Гюйу, Пирса, Адамса). Проекции, получаемые при помощи этих координат, будут рассмотрены в гл. XI.

### Системы координат трехосного эллипсоида

Применительно к трехосному эллипсоиду учеными даются различные определения геодезической системы координат.

Н. А. Беспалов предлагает называть широтой  $\varphi$  трехосного эллипсоида дополнение до  $90^\circ$  угла между нормалью к поверхности и осью вращения, а меридианом — кривую, в точках которой все нормали к эллипсоиду перпендикулярны к некоторой, для каждого меридиана постоянной, прямой в плоскости экватора.

Линией северного направления он называет кривую, касательные к которой в любой точке направлены на север (или на юг).

Ляме предложил использовать эллиптические координаты  $u$ ,  $v$  трехосного эллипсоида, выражаемые формулами

$$u = b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 u;$$

$$v = b^2 - (b^2 - c^2) \cos^2 v,$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — полуоси трехосного эллипсоида.

Учитывая уравнение трехосного эллипсоида в пространственных координатах

$$X^2/a^2 + Y^2/b^2 + Z^2/c^2 = 1,$$

можем представить связь этих координат с эллиптическими в следующем виде:

$$X^2 = a^2 \frac{(a^2 - u)(a^2 - v)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)};$$

$$Y^2 = b^2 \frac{(b^2 - u)(b^2 - v)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)};$$

$$Z^2 = c^2 \frac{(c^2 - u)(c^2 - v)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}.$$

Введя обозначения

$$\lambda^2 = (a^2 - b^2)/(a^2 - c^2); \quad \lambda_1^2 = (b^2 - c^2)/(a^2 - c^2); \quad \lambda^2 + \lambda_1^2 = 1,$$

получим

$$X = a \sin u \Delta';$$

$$Y = b \cos u \cos v;$$

$$Z = c \sin v \Delta,$$

где

$$\Delta' = \sqrt{1 - \lambda_1^2 \sin^2 v}; \quad \Delta = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}$$

Формулы связи пространственных прямоугольных координат  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и геодезических  $\varphi$ ,  $\lambda$  в работах Ф. Н. Красовского и Н. А. Беспалова выражаются следующим образом:

$$X = a \cos \varphi \cos \lambda / W;$$

$$Y = a(1 - e^2) \cos \varphi \cos \lambda / W;$$

$$Z = a(1 - e^2) \sin \varphi / W,$$

где

$$W = \sqrt{1 - e \sin^2 \varphi - e_a^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \lambda},$$

$$e^2 = (a^2 - c^2)/a^2; \quad e_a^2 = (a^2 - b^2)/a^2;$$

$e$ ,  $e_a$  — соответственно первые полярный и экваториальный эксцентриситеты.

Согласно второй точке зрения рассматривают понятия об условно-геодезической и геодезической широтах, геодезической долготе, а также о приведенной широте.

*Геодезической долготой*  $\lambda$  называется двугранный угол между плоскостями сечений, проходящих через ось эллипсоида, начальный и текущий пункты.

Для введения понятий о широтах отметим следующее. Пусть линия  $AK$  (рис. 4) — нормаль эллипса  $PDP_1$  в точке  $A$ . Для эллипсоида вращения с полуосями  $d$  и  $c$  эта нормаль была бы одновременно нормалью к его поверхности в точке  $A$  и угол  $\varphi$  представлял бы собой геодезическую широту данной точки. Однако для трехосного эллипсоида линия  $AK$  не является нормалью к его по-

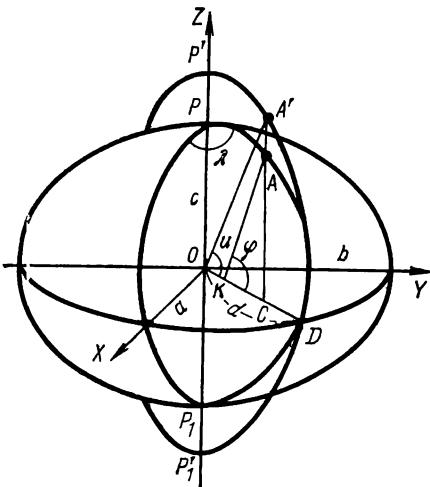


РИС. 4. Системы координат трехосного эллипсоида

верхности и угол  $\varphi$  не является геодезической широтой. Поэтому назовем угол  $\varphi$  между нормалью  $AK$  к эллипсу  $PAP_1$  в точке  $A$  и линией  $OD$  условно-геодезической широтой. Угол  $\varphi$  пересечения нормали к поверхности трехосного эллипсоида в точке  $A$  и плоскости экватора ( $Z = 0$ ) назовем *геодезической широтой*.

Проведем в плоскости меридиана  $PP_1$  окружность радиусом  $d = OD$ . Тогда, по аналогии с эллипсоидом вращения, угол  $u$  между линиями  $OA'$  и  $OD$  назовем приведенной широтой данной точки трехосного эллипсоида.

Зададим поверхность трехосного эллипсоида в параметрических уравнениях

$$X = d \cos u \cos \lambda;$$

$$Y = d \cos u \sin \lambda;$$

$$Z = c \sin u,$$

где, согласно рис. 4,

$$d = ab (a^2 \sin^2 \lambda + b^2 \cos^2 \lambda)^{-1/2}.$$

Обозначив

$$p^2 = 1 - c^2/d^2,$$

получим формулы связи условно-геодезической и приведенной широт:

$$\cos^2 u = \cos^2 \varphi / (1 - p^2 \sin^2 \varphi);$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{d}{c} \operatorname{tg} u.$$

Записав уравнения нормали к поверхности трехосного эллипсоида в данной точке и плоскости ( $Z = 0$ ), получаем по формулам аналитической геометрии выражение для определения значений геодезических широт:

$$\sin \varphi = d^2 \sin^2 u / \sqrt{c^2 \cos^2 \lambda (d_\lambda + d^2) + d^4 \sin^2 u},$$

или

$$\sin \varphi = \sin \varphi / \sqrt{1 + (d_\lambda/d)^2 \cos^2 \varphi},$$

где

$$d_\lambda/d = -\sin 2\lambda \frac{a^2 - b^2}{2} (a^2 \sin^2 \lambda + |b^2 \cos^2 \lambda|)^{-1}.$$

Отметим, что вопросы отображения трехосного эллипсоида и более сложных поверхностей на других поверхностях, а также решения геодезических и других задач с использованием их систем координат требуют дальнейших исследований.

### § 3. ВЫВОД ОБЩЕЙ ФОРМУЛЫ ЧАСТНОГО МАСШТАБА. МАСШТАБЫ ПО МЕРИДИАНАМ И ПАРАЛЛЕЛЯМ

Частный масштаб длин по формуле (2)  $\mu = ds'/ds$ . Из элементарного сферического треугольника (рис. 5).

$$ds' = \sqrt{dx^2 + dy^2}; \quad ds = \sqrt{ds_m^2 + ds_n^2}.$$

В этом треугольнике бесконечно малая дуга меридиана

$$ds_m = M d\varphi, \tag{16}$$

где  $M$  — радиус кривизны меридиана; бесконечно малая дуга параллели

$$ds_n = r d\lambda, \tag{17}$$

где  $r$  — радиус кривизны параллели.

Учитывая значения  $M$  из формулы (3),

$$\mu^2 = (dx^2 + dy^2)/(M^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2). \tag{18}$$

Получив на основании формул (1) первые дифференциалы

$$dx = x_\varphi d\varphi + x_\lambda d\lambda;$$

$$dy = y_\varphi d\varphi + y_\lambda d\lambda,$$

можем написать

$$\begin{aligned} d^2s' = dx^2 + dy^2 = x_\varphi^2 d\varphi^2 + 2x_\varphi x_\lambda d\varphi d\lambda + \\ + x_\lambda^2 d\lambda^2 + y_\varphi^2 d\varphi^2 + 2y_\varphi y_\lambda d\varphi d\lambda + y_\lambda^2 d\lambda^2 = ed\varphi^2 + 2fd\varphi d\lambda + gd\lambda^2. \end{aligned} \tag{19}$$

В последней формуле использованы коэффициенты Гаусса:

$$e = x_\varphi^2 + y_\varphi^2; \quad x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda; \tag{20}$$

$$g = x_\lambda^2 + y_\lambda^2; \quad h = \sqrt{eg - f^2} = x_\varphi y_\lambda - x_\lambda y_\varphi.$$

Подставим (19) в формулу масштаба (18)

$$\mu^2 = \frac{ed\varphi^2 + 2fd\varphi d\lambda + gd\lambda^2}{M^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2}. \tag{21}$$

Введем в уравнение (21) вспомогательную функцию  $u = \frac{d\varphi}{d\lambda}$ , разделив числитель и знаменатель на  $\lambda^2$ , тогда

$$\mu^2 = \frac{eu^2 + 2fu + g}{M^2 u^2 + r^2}. \tag{22}$$

Найдем значение вспомогательной функции  $u$  из элементарного сферического треугольника (см. рис. 5)

$$\operatorname{tg} \alpha = ds_n/ds_m = r d\lambda/M d\varphi = r/M u;$$

$$u = \frac{r}{M} \operatorname{ctg} \alpha \tag{23}$$



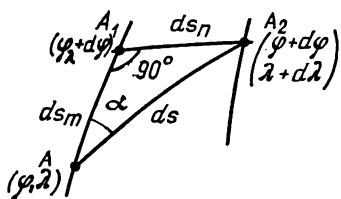


РИС. 5. Элементарный сфероидический треугольник

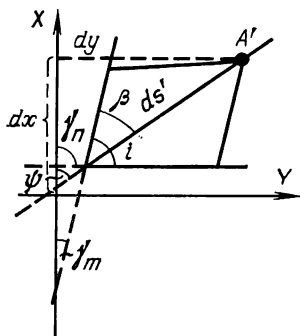


РИС. 6. Изображение азимута в проекции

и подставим в формулу (22),

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \left[ e \frac{r^2}{M^2} \operatorname{ctg}^2 \alpha + \left\{ 2f \frac{r}{M} \operatorname{ctg} \alpha + g \right\} / \left[ r^2 (\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1) \right] \right] = \\ &= \frac{e}{M^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{f}{Mr} \cos \alpha \sin \alpha + \frac{g}{r^2} \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Для упрощения последней формулы введем обозначения

$$P = e/M^2; \quad Q = f/Mr; \quad R = g/r^2 \quad (24)$$

и получим общую формулу масштаба длин

$$\mu^2 = P \cos^2 \alpha + Q \sin 2\alpha + R \sin^2 \alpha. \quad (25)$$

При  $\alpha = 0$  ( $180^\circ$ ),  $\mu^2 = m^2 = P$ , масштаб по меридианам

$$m = \sqrt{e}/M; \quad (26)$$

при  $\alpha = 90^\circ$  ( $270^\circ$ ),  $\mu^2 = n^2 = R$ , масштаб по параллелям

$$n = \sqrt{g}/r = \sqrt{g}/N \cos \varphi. \quad (27)$$

Для шара

$$m = \sqrt{e}/R; \quad n = \sqrt{g}/R \cos \varphi.$$

#### § 4. ВЫВОД ФОРМУЛЫ АЗИМУТА В ПРОЕКЦИИ. УГОЛ МЕЖДУ МЕРИДИАНАМИ И ПАРАЛЛЕЛЯМИ. УСЛОВИЕ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ СЕТКИ

Рассмотрим изображение элементарной сфероидической трапеции на плоскости (рис. 6). Сторонами этой трапеции являются элементарные дуги меридианов и параллелей. Азимут произвольного направления  $\alpha$  обозначим в проекции через  $\beta$ .

Найдем углы  $\psi$ ,  $\gamma_m$  и  $\gamma_n$ , которые образуют с положительным направлением оси  $X$  соответственно элементарный отрезок  $ds'_m$ , изображение западного меридиана и южной параллели. Из рис. 6

$$\operatorname{tg} \psi = dy/dx = (y_\varphi d\varphi + j_\lambda d\lambda) / (x_\varphi d\varphi + x_\lambda d\lambda).$$

Принимая для меридиана  $\lambda = \text{const}$ , а для параллели  $\varphi = \text{const}$ , получим

$$\operatorname{tg} \gamma_m = y_\varphi / x_\varphi; \quad \operatorname{tg} \gamma_n = y_\lambda / x_\lambda.$$

Азимут элементарного отрезка  $ds'$

$$\beta = \psi - \gamma_m.$$

Известно, что

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \gamma_m}{1 + \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \gamma_m}$$

Подставим в последнюю формулу значения  $\operatorname{tg} \psi$  и  $\operatorname{tg} \gamma_m$  и получим

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{x_\varphi y_\varphi d\varphi + x_\varphi y_\lambda d\lambda - x_\varphi y_\varphi d\varphi - x_\lambda y_\varphi d\lambda}{x_\varphi^2 d\varphi + x_\varphi x_\lambda d\lambda + y_\varphi^2 d\varphi + y_\varphi y_\lambda d\lambda}.$$

После преобразований и приведения подобных членов с использованием формулы (20)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{(x_\varphi y_\lambda - x_\lambda y_\varphi) d\lambda}{(x_\varphi^2 + y_\varphi^2) d\varphi + (x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda) d\lambda} = \frac{hd\lambda}{ed\varphi + fd\lambda}.$$

Введем вспомогательную функцию  $u = d\varphi/d\lambda$ , тогда

$$\operatorname{tg} \beta = h/(eu + f). \quad (28)$$

Подставив в последнее уравнение из (23) значение

$$u = \frac{r}{M} \operatorname{ctg} \alpha,$$

получим

$$\operatorname{tg} \beta = Mh/(er \operatorname{ctg} \alpha + Mf) \quad (29)$$

или

$$\operatorname{tg} \beta = Mh \operatorname{tg} \alpha / (er + Mf \operatorname{tg} \alpha). \quad (30)$$

На основании рис. 6 можем также получить угол между изображениями меридианов и параллелей ( $i$ )

$$i = \gamma_n - \gamma_m,$$

тогда

$$\operatorname{tg} i = \frac{\operatorname{tg} \gamma_n - \operatorname{tg} \gamma_m}{1 + \operatorname{tg} \gamma_n \operatorname{tg} \gamma_m} = \frac{y_\lambda/x_\lambda - y_\varphi/x_\varphi}{1 + (y_\lambda/x_\lambda)(y_\varphi/x_\varphi)}.$$

После приведения к общему знаменателю

$$\operatorname{tg} i = (x_\varphi y_\lambda - x_\lambda y_\varphi) / (x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda).$$

Выразив полученное выражение через коэффициенты Гаусса, найдем

$$\operatorname{tg} i = h/f. \quad (31)$$

Получим последнюю формулу другим путем.

Азимут  $\beta$  в проекции при  $\alpha = 90^\circ$  можно рассмотреть как угол  $i$  между меридианами и параллелями на плоскости

$$\operatorname{tg} i = \operatorname{tg} \beta_{\alpha=90^\circ} = h/f.$$

Угол  $i = 90^\circ + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — уклонение угла между изображениями

меридианов и параллелей от  $90^\circ$ , эта величина характеризует неортогональность картографической сетки.

Если  $\operatorname{tg} i = \operatorname{tg} (90^\circ + \varepsilon) = h/f$ , то при отсчете угла  $i$  по часовой стрелке (в первой четверти)

$$\operatorname{tg} \varepsilon = -f/h. \quad (32)$$

Для того чтобы картографическая сетка была ортогональной, показатель неортогональности  $\varepsilon$  должен быть равным нулю, но это возможно, если  $f = 0$ .

Поэтому условие ортогональности сетки будет иметь вид

$$f = x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda = 0. \quad (33)$$

При изучении отдельных вопросов математической картографии полезно знать не только значение  $\operatorname{tg} i$ , но и других тригонометрических функций.

Известно, что

$$\begin{aligned} \sin^2 i &= \operatorname{tg}^2 i / (1 + \operatorname{tg}^2 i) = h^2 / (f^2 + h^2) = h^2 / eg; \\ \sin i &= h / \sqrt{eg}. \end{aligned} \quad (34)$$

Значение  $\sin i$  будет положительным, если отсчитывать угол в том же направлении, что и азимут.

$$\begin{aligned} \cos^2 i &= 1 / (1 + \operatorname{tg}^2 i) = f^2 / (f^2 + h^2) = f^2 / eg; \\ \cos i &= f / \sqrt{eg}. \end{aligned} \quad (35)$$

Последняя формула позволяет определить величину угла  $i$ : если  $f > 0$ , то  $i < 90^\circ$ ;  $f < 0$ ,  $i > 90^\circ$ ;  $f = 0$ ,  $i = 90^\circ$  и сетка становится ортогональной, т. е. подтверждается условие ортогональности картографической сетки, полученное ранее.

Если известна формула азимута в проекции, то можно получить формулу масштаба длин как функцию координат и азимута на плоскости.

Из формулы (22)

$$\frac{1}{\mu^2} = \frac{M^2 u^2 + r^2}{e u^2 + 2fu + g}.$$

Подставим в числитель из формулы (28) значение

$$u = \frac{h}{e} \operatorname{ctg} \beta - \frac{f}{e},$$

а в знаменатель

$$e u^2 + 2fu + g = h^2 / e \sin^2 \beta.$$

Тогда

$$\sin^2 \beta = \frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = \frac{h^2}{e^2 u^2 + 2efu + f^2 + h^2} = \frac{h^2}{e(eu^2 + 2fu + g)}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu^2} &= \frac{e \sin^2 \beta}{h^2} \left[ M^2 \left( \frac{h}{e} \operatorname{ctg} \beta - \frac{f}{e} \right)^2 + r^2 \right] = \\ &= \frac{e \sin^2 \beta}{h^2} \left( \frac{M^2 h^2}{e^2} \operatorname{ctg}^2 \beta - 2 \frac{M^2 h f}{e^2} \operatorname{ctg} \beta + \right. \\ &+ \left. \frac{M^2 f^2 + e^2 r^2}{e^2} \right) = \frac{M^2}{e} \cos^2 \beta - 2 \frac{M^2 f}{eh} \cos \beta \sin \beta + \\ &+ \frac{M^2 f^2 + e^2 r^2}{eh^2} \sin^2 \beta. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\frac{M^2}{e} = P_1; \quad - \frac{M^2 f}{eh} = Q_1; \quad \frac{M^2 f^2 + e^2 r^2}{eh^2} = R_1, \quad (36)$$

тогда

$$1/\mu^2 = P_1 \cos^2 \beta + 2Q_1 \cos \beta \sin \beta + R_1 \sin^2 \beta \quad (37)$$

или

$$1/\mu^2 = P_1 \cos^2 \beta + Q_1 \sin 2\beta + R_1 \sin^2 \beta.$$

Полученную формулу рекомендуем сопоставить с формулой (25) — в них много общего.

## § 5. ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗМЕНЕНИЯ МАСШТАБА ДЛИН В ДАННОЙ ТОЧКЕ. ГЛАВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Известна зависимость масштаба длин от азимута из формулы (25), поэтому, чтобы определить экстремальные значения масштаба длин, нужно взять производную масштаба по азимуту и приравнять ее к нулю. Те значения азимута  $\alpha$ , при которых производная равна нулю, называются стационарными — в них возможен экстремум.

$$\begin{aligned} d\mu^2/d\alpha &= -2P_1 \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 + 2Q \cos 2\alpha_0 + \\ &+ 2R \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 = (R - P) \sin 2\alpha_0 + 2Q \cos 2\alpha_0 = 0, \end{aligned}$$

где  $\alpha_0$  — корень уравнения  $d(\mu^2)/d\alpha = 0$ , т. е. является частным значением азимута  $\alpha$ .

Отсюда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = 2Q/(P - R) = 2Mfr/(er^2 - gM^2). \quad (38)$$

Полученное численное значение  $\operatorname{tg} 2\alpha_0$  одинаково по величине и знаку для двух значений  $\alpha_0$ , отличающихся друг от друга на  $90^\circ$  и расположенных между  $0^\circ$  и  $180^\circ$ . Докажем, что для этих значений  $\alpha_0$  масштабы длин могут быть минимальны и максимальны.

Найдем вторую производную от  $\mu^2$  по  $\alpha_0$

$$\begin{aligned} d^2\mu^2/d\alpha_0^2 &= (R - P) \cos 2\alpha_0 - 4Q \sin 2\alpha_0 = \\ &= 2 \cos 2\alpha_0 (R - P - 2 \operatorname{tg} 2\alpha_0). \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что вторая производная будет иметь противоположные знаки для азимутов  $\alpha_0$  и  $\alpha_0 + 90^\circ$ , так как выражение, заключенное в скобки, на знак не влияет. Следовательно, при отображении заданной точки существуют два взаимно перпендикулярных направления, по которым масштабы длин имеют максимальное и минимальное значения. Проанализируем, под каким углом будут пересекаться эти направления в проекции.

Азимуту  $\alpha_0$  в проекции соответствует азимут  $\beta_0$  и азимуту  $(\alpha_0 + 90^\circ)$  — азимут  $\beta_1$ .

Согласно уравнению (29)

$$\operatorname{tg} \beta_0 = Mh / (er \operatorname{ctg} \alpha_0 + Mf)$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = Mh / (-er \operatorname{tg} \alpha_0 + Mf).$$

Если  $\beta_1 = \beta_0 + 90^\circ$ , то произведение тангенсов этих азимутов должно быть равно минус единице:

$$\operatorname{tg} \beta_0 \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{M^2 h^2}{-e^2 r^2 + Mfer (\operatorname{ctg} \alpha_0 - \operatorname{tg} \alpha_0) + M^2 f^2} = -1.$$

Известно, что

$$\operatorname{ctg} \alpha_0 - \operatorname{tg} \alpha_0 = 2 \operatorname{ctg} 2\alpha_0.$$

Из формулы (38)

$$2 \operatorname{ctg} 2\alpha_0 = (er^2 - gM^2) / Mfr,$$

тогда

$$\operatorname{tg} \beta_0 \operatorname{tg} \beta_1 = \frac{M^2 h^2}{-e^2 r^2 + e^2 r^2 - egM^2 + M^2 f^2} = \frac{h^2}{f^2 - eg} = -1,$$

следовательно,  $\beta_1 = \beta_0 + 90^\circ$ .

Назовем два взаимно перпендикулярных направления на картографируемой поверхности, которые остаются взаимно перпендикулярными и в проекции, *главными направлениями*, масштабы по этим направлениям экстремальны. Если картографическая сетка ортогональна, то главные направления совпадают с меридианами и параллелями.

## § 6. ЭЛЛИПС ИСКАЖЕНИЙ. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ МАСШТАБЫ. МЕРЫ ИСКАЖЕНИЯ ДЛИН

Возьмем на картографируемой поверхности окружность бесконечно малого радиуса с центром в точке  $A$  и исследуем, как эта окружность изобразится в проекции.

Частный масштаб длин в данной точке зависит от азимута  $\alpha$ ; азимуту  $\alpha_1$  на картографируемой поверхности в проекции соответствует азимут  $\beta_1$  (рис. 7), масштаб по этому направлению обозначим  $\mu_1$ ; азимуту  $\alpha_2$  соответствует в проекции азимут  $\beta_2$ , масштаб длин по этому направлению  $\mu_2$  и т. д.

Из точки  $A'$ , которая является изображением заданной на картографируемой поверхности точки  $A$ , проведем направления, со-

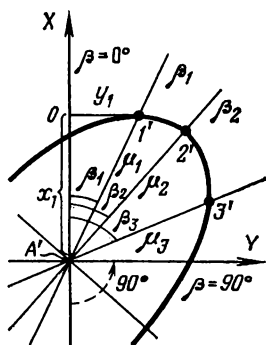


РИС. 7. Схема построения эллипса искажений

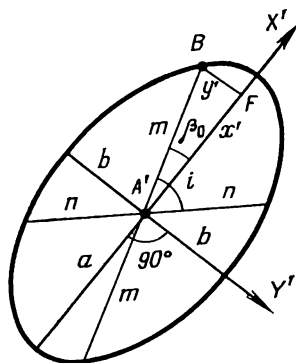


РИС. 8. Элементы эллипса искажений

ставляющие с изображением меридиана, принятым за ось  $X$ , углы  $\beta_1, \beta_2$  и т. д. На этих направлениях отложим отрезки, численно равные значениям частного масштаба длин  $\mu_1, \mu_2$  и т. д.

Соединив конечные точки отрезков, получим кривую, которая показывает зависимость масштаба длин от азимута.

Приняв точку  $A'$  за начало прямоугольных координат и за полюс плоских полярных координат ( $\beta$  и  $\mu$ ), можем записать

$$x = \mu \cos \beta; \quad y = \mu \sin \beta, \quad (39)$$

откуда

$$\cos \beta = x/\mu; \quad \sin \beta = y/\mu. \quad (40)$$

Подставив (40) в (37), получим уравнение центральной кривой второго порядка в системе координат, отнесенной к точке  $A'$ ,

$$P_1 x^2 + 2Q_1 xy + R_1 y^2 = 1.$$

Исследуя последнее уравнение, найдем дискриминант

$$P_1 R_1 - Q_1^2 = \frac{M^2 r^2}{h^2} > 0$$

и установим, что исследуемая кривая является эллипсом. Следовательно, в общем случае (при изображении, не сохраняющем подобия в бесконечно малых частях) бесконечно малая окружность картографируемой поверхности изобразится в проекции бесконечно малым эллипсом. Эллипс конечных размеров, соответствующий этому бесконечно малому эллипсу, называют эллипсом искажений. Понятие эллипс искажений ввел в математическую картографию Тиссо.

Величина полуосей этого эллипса численно соответствует экстремальным масштабам, а величина сопряженных полуосей — масштабам по меридианам и параллелям (рис. 8). Меридианы и параллели эллипсоида (сферы) всегда взаимно перпендикулярны. Поскольку проекции обладают свойствами аффинного преобразова-

ния, диаметры эллипса искажений, изображающие взаимно перпендикулярные на поверхности направления, делят пополам хорды, параллельные другому диаметру, т. е. являются сопряженными.

Для определения ориентировки эллипса искажений относительно линий меридианов и параллелей воспользуемся общим уравнением эллипса

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1.$$

Подставим значения  $x, y$  из формул (39), обозначив в частном случае (для меридианов)  $\mu = m$  и  $\beta = -\beta_0$  (при отсчете против часовой стрелки),

тогда

$$\frac{m^2 \cos^2 \beta_0}{a^2} + \frac{m^2 \sin^2 \beta_0}{b^2} = 1.$$

Из теории тригонометрических функций известно, что

$$\cos^2 \beta_0 = 1/(1 + \operatorname{tg}^2 \beta_0); \quad \sin^2 \beta_0 = \operatorname{tg}^2 \beta_0 / (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_0),$$

откуда

$$\frac{m^2}{a^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_0)} + \frac{m^2 \operatorname{tg}^2 \beta_0}{b^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_0)} = 1;$$

$$a^2 (m^2 - b^2) \operatorname{tg}^2 \beta_0 = b^2 (a^2 - m^2);$$

$$\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2 - m^2}{m^2 - b^2}}. \quad (41)$$

Для того чтобы построить эллипс в любой заданной точке проекции, нужно знать шесть указанных выше величин:  $m, n, a, b, i$  (или  $\epsilon$ ) и  $\beta_0$ .

Применяя к эллипсу положения Аполлония, можем найти формулу связи экстремальных масштабов с масштабами по меридианам и параллелям.

**Положение 1.** Сумма квадратов сопряженных полу диаметров эллипса — величина постоянная, равная сумме квадратов его полуосей:

$$m^2 + n^2 = a^2 + b^2.$$

**Положение 2.** Площадь параллелограмма, построенного на сопряженных полу диаметрах эллипса, — величина постоянная, равная площади прямоугольника, построенного на его полуосях:

$$mn \sin i = ab. \quad (42)$$

Решим приведенные уравнения совместно (умножив предварительно обе части последнего уравнения на два):

$$m^2 + n^2 + 2mn \sin i = (a + b)^2;$$

$$m^2 + n^2 - 2mn \sin i = (a - b)^2$$

и введем новые обозначения  $A$  и  $B$ :

$$A = a + b = \sqrt{m^2 + n^2 + 2mn \sin i};$$

$$B = a - b = \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \sin i}.$$

Тогда искомые экстремальные масштабы

$$a = (A + B)/2; \quad b = (A - B)/2. \quad (43)$$

Значение  $\sin i$  известно из формулы (34).

В настоящее время для характеристики искажений в отдельных точках проекции наиболее часто используют *изоколы* — линии равных искажений, которые дают наглядное представление о величине и распределении различных искажений на карте.

При определении искажений следует отличать меру относительного искажения длин в точке по заданному направлению от меры относительного искажения длин в точке по всем направлениям, а также от меры искажения длин на всю картографируемую территорию.

Примем за меру искажения длин в заданной точке величину  $\varepsilon$ . Эту величину можно охарактеризовать средним квадратическим искажением длин по главным направлениям

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^2 &= \frac{1}{2} [(a-1)^2 + (b-1)^2] = \frac{1}{2} (v_a^2 + v_b^2) = \\ &= \frac{1}{2} (\ln^2 a + \ln^2 b) \end{aligned}$$

или по всем направлениям, тогда

$$\varepsilon_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\mu - 1)^2 d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_\alpha^2 d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln^2 \mu d\alpha.$$

Мера искажения длин на всю картографируемую территорию может быть определена по формулам

$$E_1^2 = \frac{1}{F} \int_F \varepsilon_1^2 dF \quad \text{или} \quad E_2^2 = \frac{1}{F} \int_F \varepsilon_2^2 dF,$$

где  $F$  — площадь изображаемой территории. Величина  $E_1^2$  носит название критерия Эйри, а  $E_2^2$  — критерия Иордана.

Для оценки достоинства картографических проекций может быть использован любой из указанных выше критериев. В картографической практике интеграл заменяют суммой, для чего изображаемую территорию подразделяют на участки  $\Delta F$  и для каждого участка находят  $\varepsilon$ . Тогда формула среднего квадратического искажения длин будет иметь вид

$$E = \sqrt{\frac{\Delta F}{F} \sum \varepsilon^2}.$$

## § 7. ЧАСТНЫЙ МАСШТАБ ПЛОЩАДЕЙ

Из определения частного масштаба площадей

$$\rho = dF'/dF.$$

На картографируемой поверхности площадь элементарной трапеции, ограниченной бесконечно малыми дугами меридианов и па-



раллелей (рис. 9, а),

$$dF = ds_m ds_n.$$

На плоскости (рис. 9, б)

$$dF' = ds'_m ds'_n \sin i.$$

Тогда масштаб площадей

$$\rho = \frac{ds'_m}{ds_m} \cdot \frac{ds'_n}{ds_n} \sin i = mn \sin i. \quad (44)$$

Используя формулу (42), получим  $\rho = ab$ . Известно, что  $i = 90^\circ + \epsilon$ , поэтому

$$\rho = mn \cos \epsilon. \quad (45)$$

В приведенных формулах частный масштаб площадей выражен через частные масштабы длин. Если в формулу (44) подставить значения частных масштабов длин и синуса угла между меридианами и параллелями, то формула частного масштаба площадей примет вид

$$\rho = \frac{\sqrt{e}}{M} \cdot \frac{\sqrt{g}}{r} \cdot \frac{h}{\sqrt{eg}} = \frac{h}{Mr}. \quad (46)$$

## § 8. МАКСИМАЛЬНОЕ ИСКАЖЕНИЕ УГЛОВ

Угол  $u$ , образованный двумя направлениями на картографируемой поверхности (рис. 10, а), при изображении на плоскости (рис. 10, б) принимает значение  $u'$

$$u = 180^\circ - 2\alpha; \quad u' = 180^\circ - 2\beta.$$

Искажение угла

$$u' - u = \Delta u = 2(\alpha - \beta),$$

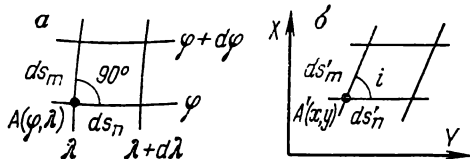
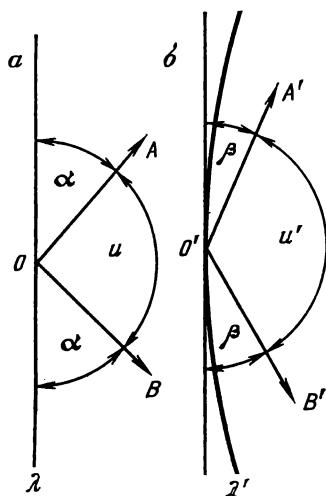


РИС. 9. Элементарная сферодическая трапеция:

а — на поверхности; б — на плоскости

РИС. 10. Угол между двумя направлениями:

а — на поверхности; б — на плоскости



откуда

$$\Delta u/2 = \alpha - \beta.$$

Для проекции с ортогональной сеткой ( $f = 0$ ) формула (30) примет вид

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{M \sqrt{eg}}{er} \operatorname{tg} \alpha = \frac{M}{\sqrt{e}} \frac{\sqrt{g}}{r} \operatorname{tg} \alpha = \frac{n}{m} \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \alpha.$$

Правую и левую части последнего уравнения вычтем из  $\operatorname{tg} \alpha$  и прибавим к  $\operatorname{tg} \alpha$ :

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{a-b}{a} \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{a+b}{a} \operatorname{tg} \alpha,$$

а затем разделим верхнее уравнение на нижнее, одновременно заменив разность и сумму тангенсов их значениями из известной формулы:

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

Тогда

$$\sin(\alpha - \beta) / \sin(\alpha + \beta) = (a - b) / (a + b);$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \frac{\Delta u}{2} = \frac{a - b}{a + b} \sin(\alpha + \beta).$$

Наибольшее значение  $\Delta u$  будет в случае, когда

$$\sin(\alpha + \beta) = 1.$$

Обозначим наибольшее искажение углов  $\omega$ . Тогда

$$\sin(\omega/2) = (a - b) / (a + b). \quad (47)$$

Отсюда

$$\cos(\omega/2) = \sqrt{1 - \sin^2(\omega/2)} = 2\sqrt{ab} / (a + b);$$

$$\operatorname{tg}(\omega/2) = (a - b) / 2\sqrt{ab}; \quad (48)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{4} = \sqrt{\left(1 - \cos \frac{\omega}{2}\right) / \left(1 + \cos \frac{\omega}{2}\right)} =$$

$$= (\sqrt{a} - \sqrt{b}) / (\sqrt{a} + \sqrt{b});$$

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\omega}{4}\right) = \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\omega}{4}\right) / \left(1 - \operatorname{tg} \frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{a/b}. \quad (49)$$

В практике для определения искажения углов используют формулы, по которым наиболее просто выполнять вычисления.

В частности, при вычислении равновеликих проекций целесообразнее использовать формулы тангенсов, которые при  $p = 1$  имеют более простой вид.

## § 9. РАВНОУГОЛЬНОЕ И РАВНОВЕЛИКОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ЭЛЛИПСОИДА НА ПЛОСКОСТИ

В математической картографии широкое применение получили равноугольные и равновеликие проекции.

Основным условием равноугольного отображения является подобие в бесконечно малых частях, а следовательно, независимость масштаба длин от направления.

Если же масштаб длин не зависит от направления, то его производная по азимуту ( $\alpha$ ) будет равна нулю

$$d\mu^2/d\alpha = (R - P) \sin 2\alpha + 2Q \cos 2\alpha = 0.$$

Это равенство соблюдается только в том случае, когда  $Q = 0$  и  $P = R$ .

В соответствии с формулами (24)

$$f/Mr = 0; \quad e/M^2 = g/r^2 \quad (50)$$

или

$$f = 0; \quad m^2 = n^2; \quad m = n.$$

Следовательно, в равноугольных проекциях картографическая сетка ортогональна, масштаб не зависит от направления  $m = n = a = b$  и углы не искажаются, т. е.  $\omega = 0$ .

Если в формулы (50) подставить значения  $e$ ,  $f$  и  $g$ , то

$$x_{\Phi} x_{\lambda} + y_{\Phi} y_{\lambda} = 0;$$

$$\frac{1}{M^2} (x_{\Phi}^2 + y_{\Phi}^2) = \frac{1}{r^2} (x_{\lambda}^2 + y_{\lambda}^2).$$

Получив значение  $y_{\lambda}$  из первого уравнения и подставив его во второе, найдем

$$x_{\lambda} = \pm \frac{r}{M} y_{\Phi},$$

получив значение  $x_{\lambda}$ , найдем

$$y_{\lambda} = \pm \frac{r}{M} x_{\Phi}.$$

В полученных уравнениях выберем знаки, при которых величина  $h$  будет иметь положительное значение. Окончательный вид уравнений равноугольных проекций, называемых уравнениями Коши—Римана:

$$x_{\lambda} = -\frac{r}{M} y_{\Phi}; \quad y_{\lambda} = +\frac{r}{M} x_{\Phi}. \quad (51)$$

При равновеликом отображении сохраняется постоянным отношение площади на карте к соответствующей площади на картографируемой поверхности.

Масштаб площадей в этом случае  $p = \text{const} = 1$ .

Из формулы (46)

$$p = h/Mr = 1,$$

отсюда для эллипсоида

$$h = Mr \tag{52}$$

(для  $p = \text{const}$   $h = kMr$ , где  $k$  — постоянный коэффициент), для поверхности шара

$$h = R^2 \cos \varphi.$$

## Глава II

### ИЗОБРАЖЕНИЕ ЭЛЛИпсоиДА ВРАЩЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ШАРА

---

#### § 10. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ОБ ИЗОБРАЖЕНИИ ЭЛЛИпсоиДА ВРАЩЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ШАРА

Картографические проекции могут быть получены путем непосредственного отображения эллипсоида на плоскости или по способу двойного отображения, когда вначале эллипсоид отображается на поверхности шара, а затем последняя отображается на плоскости.

Во многих случаях картографической практики способ двойного отображения является более простым и эффективным как с точки зрения обеспечения минимума искажений проекций и лучшего их распределения, так и с позиций экономии трудовых затрат и времени.

Рассмотрим основные положения решения задачи отображения указанных поверхностей.

Пусть на эллипсоиде  $S$  выделена односвязная замкнутая область  $\Delta_1$ , которой на поверхности шара соответствует область  $\Delta_2$ , и установлены системы координат: в первой области — геодезическая (сфероидическая) система координат  $\varphi = \text{const}$  и  $\lambda = \text{const}$ , во второй — географическая (сферическая) система координат  $\varphi' = \text{const}$  и  $\lambda' = \text{const}$ .

Потребуем, чтобы каждой точке одной области соответствовала только одна точка во второй, а при бесконечно малом перемещении данной точки на  $ds$  в первой области соответствующая ей точка во второй области перемещалась бы также на бесконечно малую величину  $d\sigma$  и наоборот.

Тогда уравнения отображения эллипсоида на поверхности шара в общем виде можно записать следующим образом:

$$\varphi' = f_1(\varphi, \lambda); \quad \lambda' = f_2(\varphi, \lambda),$$

где  $f_1, f_2$  — функции однозначные, непрерывные (первые и вторые частные производные также непрерывны) и независимые.

В настоящее время разработаны различные способы таких отображений, например способы геодезических отображений (в том числе способ Бесселя), способы соответствия по нормальям и др.

Наиболее простым является способ, в котором можно пренебречь полярным сжатием и предположить, что широты и долготы эллипсоида и шара равны, т. е.  $\varphi' = \varphi$  и  $\lambda' = \lambda$ .

В этом случае радиус шара, заменяющего эллипсоид, для уменьшения искажений определяют либо как средний радиус кривизны на средней параллели  $\varphi_0$  картографируемой территории

$$R = \sqrt{M_0 N_0},$$

либо как средний радиус кривизны на крайних параллелях  $\varphi_{ю}$  и  $\varphi_{с}$  этой территории

$$R = \sqrt{R_{ю} R_{с}}.$$

В некоторых случаях шар берется равным по объему земному эллипсоиду и тогда

$$R = \sqrt[3]{a^2 b}.$$

Здесь  $M$ ,  $N$  — радиусы кривизны меридианного сечения и сечения первого вертикала, определяемые по формулам (3);  $a$  и  $b$  — полуоси эллипсоида вращения.

Указанный способ отображения может применяться при создании мелкомасштабных карт, когда представляется возможным пренебречь искажениями данного отображения.

В математической картографии наибольшее распространение получили способы равноугольного, равновеликого и равнопромежуточного отображения.

Во всех наиболее часто используемых способах предполагается, что плоскости экваторов эллипсоида и шара и их центры совпадают, параллели эллипсоида изображаются параллелями шара, их средние меридианы совпадают и имеют долготу, равную нулю, а долготы прочих меридианов пропорциональны, т. е. меридианы и параллели эллипсоида изображаются на поверхности шара ортогонально и, следовательно, главные направления в изображении совпадают с меридианами и параллелями. Кроме этих способов иногда используется способ отображения с сохранением длины осевого (среднего) меридиана. В последнее время находят применение также способы перспективного отображения эллипсоида на поверхности шара.

В этих отображениях при сохранении точности вычислений до членов с  $e^4$  (вполне достаточной для решения абсолютного большинства задач математической картографии и фотограмметрии) меридианы и параллели изображаются на поверхности шара также ортогонально.

Запишем квадраты линейных элементов эллипсоида  $ds$  и шара  $d\sigma$

$$ds^2 = M^2 d\varphi^2 + r^2 d\lambda^2;$$

$$d\sigma^2 = R^2 d\varphi'^2 + R^2 \cos^2 \varphi' d\lambda'^2,$$

где  $R$  — радиус шара,  $R \cos \varphi'$  — радиус кривизны параллели на шаре.

Тогда формулы частных масштабов длин принимают вид:  
для любого направления

$$\mu^2 = \frac{R^2 d\varphi'^2 + R^2 \cos^2 \varphi' d\lambda'^2}{M^2 d\varphi^2 + N^2 \cos^2 \varphi d\lambda^2},$$

по направлению меридианов

$$m = \frac{R d\varphi'}{M d\varphi},$$

по направлению параллелей

$$n = \frac{R \cos \varphi' d\lambda'}{N \cos \varphi d\lambda} = \alpha \frac{R \cos \varphi'}{N \cos \varphi}, \quad (53)$$

где  $\alpha$  — коэффициент пропорциональности долгот.

Получим формулы указанных выше способов отображений. При этом будем рассматривать только те из них, в которых меридианы и параллели изображаются симметрично относительно среднего меридиана.

## § 11. РАВНОУГОЛЬНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ЭЛЛИПСОИДА НА ПОВЕРХНОСТИ ШАРА

Условие равноугольности в данном случае можно записать в виде

$$m = n = \mu$$

или с учетом формул (53)

$$\frac{R d\varphi'}{M d\varphi} = \alpha \frac{R \cos \varphi'}{N \cos \varphi};$$

$$\frac{d\varphi'}{\cos \varphi} = \alpha \frac{M d\varphi}{r} = \alpha \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi}.$$

Интегрирование этого дифференциального уравнения позволяет получить группу способов равноугольного отображения.

Рассмотрим некоторые из них. Для этого вначале перепишем приведенное выше дифференциальное уравнение с учетом (3) следующим образом:

$$\frac{d\varphi'}{\cos \varphi'} = \alpha \frac{1 - e^2}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi}.$$

Умножив в числителе  $e^2$  на  $(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)$  и введя обозначение

$$\sin \psi = e \sin \varphi,$$

получим

$$\frac{d\varphi'}{\cos \varphi'} = \alpha \frac{[(1 - e^2 \sin^2 \varphi) - e^2 \cos^2 \varphi] d\varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} = \alpha \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - \alpha e \frac{d\varphi}{\cos \psi}.$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение и учитывая табличный интеграл

$$\int \frac{d\varphi'}{\cos \varphi'} = \ln \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi'/2),$$

получим

$$\begin{aligned} \ln \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi'/2) &= \alpha \ln \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi/2) - \\ &- \alpha e \ln \operatorname{tg} (45^\circ + \psi/2) + \ln C = \alpha \ln \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi/2) - \frac{e}{2} \alpha \times \\ &\times \ln \frac{1 + e \sin \varphi}{1 - e \sin \varphi} + \ln C \end{aligned}$$

или

$$\operatorname{tg} (45^\circ + \varphi'/2) = CU^\alpha, \quad (54)$$

где

$$U = \frac{\operatorname{tg} (45^\circ + \varphi/2)}{\operatorname{tg}^e (45^\circ + \psi/2)} = \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi/2) \left( \frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{e/2}. \quad (55)$$

Величины  $q' = \ln \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi'/2)$  и  $q = \ln U$  называют соответственно *изометрическими широтами* поверхности шара и эллипсоида. Изометрические долготы совпадают с геодезическими (географическими) долготами.

На основании формул (54), (55) легко получить конкретные способы равноугольных отображений.

Равноугольное изображение по Мольвейде было предложено в 1807 г., оно характеризуется следующими начальными условиями изображения: длины сохраняются на экваторе, долготы эллипсоида и сферы при  $\varphi = 0$  равны  $\varphi' = 0$ .

Значение сферической широты, полученное при условии равноугольного изображения, может быть определено по приближенной формуле (с точностью до членов, содержащих  $e^4$ )

$$\varphi' = \varphi - A \sin 2\varphi + B \sin 4\varphi, \quad (56)$$

где

$$A = \frac{e^2}{2} + \frac{5}{24} e^4 = 692,23'';$$

$$B = \frac{5}{48} e^4 = 0,96''$$

для эллипсоида Красовского.

Точность определения сферической широты по формуле (56) составляет  $0,1''$ .

Наибольшая разность между сфероидической и сферической широтами достигает на параллели с широтой  $\varphi = 45^\circ$  величины порядка  $11'$ .

Значения сферической широты с округлением до целых секунд могут быть получены из таблиц, помещенных в прил. 11.

Формулы частного масштаба длин можно также получить с использованием разложения в ряды.

С точностью до членов с  $e^2$

$$m = n = \frac{R}{a} \left( 1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi \right).$$

Максимального значения 0,3 % искажение длин достигает на полюсах.

С той же точностью частные масштабы площадей будут

$$p = m^2 = \frac{R^2}{a^2} (1 + e^2 \sin^2 \varphi),$$

где радиус шара  $R = a$ ;  $a$  — большая полуось земного эллипсоида. Известно, что для эллипсоида Красовского  $R = a = 6\,378\,245$  м.

Если в начальных условиях данного способа принять, что длины сохраняются не на экваторе, а на параллели с широтой  $\varphi_k$ , то все приведенные формулы останутся справедливыми, но радиус шара будет

$$R = a \left( 1 - \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi_k \right).$$

Изоколы в этом случае совпадают с параллелями.

Существуют также равноугольные изображения, разработанные К. Гауссом. Первый способ предложен им в 1825 г.

В отличие от способа Мольвейде ставится условие, что длины сохраняются не на экваторе, а на средней параллели  $\varphi_0$  отображаемой области. Формулы Е. Гаусса были преобразованы В. П. Морозовым, который привел их к виду, удобному для решения на ЭВМ.

Следует отметить, что в проекциях двойного отображения переход от эллипсоида к поверхности шара с достаточной точностью обеспечивают приближенные формулы (56). Более точные формулы таких преобразований даны в учебниках по сфероидической геодезии.

## § 12. РАВНОВЕЛИКОЕ И РАВНОПРОМЕЖУТОЧНОЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ЭЛЛИПСОИДА НА ПОВЕРХНОСТИ ШАРА

Условие равновеликого отображения

$$p = mn = 1.$$

Учитывая выражение (53) и обозначая для сферы географические широты  $\varphi''$ , получим

$$\cos \varphi'' d\varphi'' = \frac{\alpha}{R^2} Mr d\varphi = \frac{\alpha}{R^2} MN \cos \varphi d\varphi.$$



Подставив значения  $M$ ,  $N$  из формул (3), получим

$$\cos \varphi'' d\varphi'' = \frac{\alpha a^2}{R^2} \frac{(1 - e^2) \cos \varphi d\varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^2};$$

$$\cos \varphi'' d\varphi'' = \frac{\alpha a^2}{R^2} (1 - e^2) (1 + 2e^2 \sin^2 \varphi + 3e^4 \sin^4 \varphi + \dots) \cos \varphi d\varphi.$$

После интегрирования

$$\begin{aligned} \sin \varphi'' &= \frac{\alpha a^2}{R^2} (1 - e^2) \left( \sin \varphi + \frac{2}{3} e^2 \sin^3 \varphi + \right. \\ &\left. + \frac{3}{5} e^4 \sin^5 \varphi + \dots \right) + C. \end{aligned}$$

В зависимости от условий определения постоянной  $\alpha$ , радиуса шара  $R$  и постоянной интегрирования  $C$  можно получить группу способов равновеликого отображения поверхности эллипсоида на поверхности шара.

Рассмотрим способ, в котором приняты следующие начальные условия: на экваторе и на полюсе широты  $\varphi_0'' = \varphi_0 = 0$ ,  $\varphi_{90}'' = 90^\circ$  все долготы  $\lambda'' = \lambda$ , тогда  $\alpha = 1$  и  $C = 0$ .

Радиус шара определим из условия равенства площадей поверхностей эллипсоида и шара, что приводит к выражению

$$\begin{aligned} R^2 &= a^2 (1 - e^2) \left( 1 + \frac{2}{3} e^2 + \frac{3}{4} e^4 + \dots \right) = \\ &= a^2 \left( 1 - \frac{e^2}{3} - \frac{e^4}{15} + \dots \right); \\ R &= a \left( 1 - \frac{e^2}{6} - \frac{17}{360} e^4 + \dots \right). \end{aligned}$$

Подставим это значение в формулу  $\sin \varphi''$ :

$$\sin \varphi'' = \sin \varphi [a_1'' + \sin^2 \varphi (a_3'' + a_5'' \sin^2 \varphi + \dots)],$$

где

$$\begin{aligned} a_1'' &= 1 - \frac{2}{3} e^2 - \frac{7}{45} e^4 + \dots; & a_3'' &= \frac{2}{3} e^2 - \frac{4}{9} e^4 + \dots; \\ a_5'' &= \frac{3}{5} e^4 + \dots \end{aligned}$$

По этим формулам легко вычислить значения сферических широт  $\varphi''$  точек по их геодезическим широтам (с точностью до членов с  $e^4$ ).

Указанным формулам можно придать и другой вид:

$$\sin \varphi'' = \sin [(\varphi'' - \varphi) + \varphi].$$

Учитывая малость значений  $(\varphi'' - \varphi) = \Delta\varphi$ , разложим это выражение в ряд Тейлора по степеням  $\Delta\varphi$ , выполним обращение по-

лученного ряда и заменим в нем степенные функции на функции кратного аргумента.

После преобразований получим с точностью до членов с  $e^6$  следующее выражение:

$$\varphi'' = \varphi - A_1 \sin 2\varphi + B_1 \sin 4\varphi - \dots, \quad (57)$$

где

$$A_1 = \frac{e^2}{2} + \frac{31}{180} e^4 + \dots; \quad B_1 = \frac{17}{360} e^4 + \dots$$

С учетом элементов эллипсоида Красовского можно записать

$$A_1 = 461,81''; \quad B_1 = 0,44''.$$

Соответственно радиус шара равновеликого изображения равен  $R = 6\,371\,116$  м.

Частные масштабы длин этой проекции можно найти по формулам (53).

Так, частный масштаб длин по параллелям, определяемый по формуле

$$n = R \cos \varphi'' / N \cos \varphi,$$

после преобразований по биному Ньютона получаем с точностью до членов с  $e^4$ :

$$n = 1 - \frac{e^2}{6} \cos^2 \varphi + \dots$$

Поскольку рассматриваемое отображение является равновеликим, т. е.  $p = mn = 1$ , с той же точностью

$$m = 1 + \frac{e^2}{6} \cos^2 \varphi + \dots$$

Наибольшие искажения углов будут

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{m - n}{m + n} = \frac{e^2}{3} \cos^2 \varphi \dots$$

или

$$\omega = \frac{e^2}{3} \rho \cos^2 \varphi.$$

Расхождения широт  $\varphi$  и  $\varphi''$  достигают наибольших значений на параллели с  $\varphi = 45^\circ$  и равны  $7'43,8''$ .

Изоколы в данном отображении, как и в предыдущем, совпадают с параллелями.

Максимальные искажения длин, площадей и углов возникают в точках экватора ( $\varphi = 0$ ) и составляют величины

$$n_s = 0,99; \quad m_s = 1,001; \quad \omega = 3,84'.$$

Равнопромежуточные изображения эллипсоида на поверхности шара получают, исходя из условий сохранения длин либо вдоль меридианов, либо вдоль параллелей.

Условие равнопромежуточного отображения вдоль меридианов

$$m = 1.$$

Тогда из формул (53), заменив обозначения  $\varphi'$ ,  $\lambda'$  на  $\varphi'''$ ,  $\lambda'''$ , получаем дифференциальное уравнение

$$d\varphi''' = \frac{M}{R} d\varphi,$$

интегрирование которого дает (в радианной мере)

$$\varphi''' = \frac{s}{R} + C,$$

где  $R$  — радиус шара;  $C$  — постоянная интегрирования;  $s$  — длина дуги меридиана от экватора до параллели с заданной широтой  $\varphi$ , определяемая по известной формуле сфероидической геодезии

$$s = \frac{a}{1+n'} \left[ \left( 1 + \frac{n'^2}{4} + \frac{n'^4}{64} + \dots \right) \varphi - \left( \frac{3}{2} n' - \frac{3}{16} n'^3 - \dots \right) \sin 2\varphi + \left( \frac{15}{16} n'^2 - \frac{15}{64} n'^4 + \dots \right) \times \right. \\ \left. \times \sin 4\varphi - \dots \right],$$

где  $n' = (a - b)/(a + b)$ ;  $a$ ,  $b$  — полуоси эллипсоида.

Значения  $\varphi'''$  могут быть также получены из таблиц, помещенных в прил. 11.

Для определения радиуса шара  $R$  поставим условие, чтобы длины дуг меридианов от экватора до полюсов на шаре и эллипсоиде были равны.

Тогда

$$R = \frac{s_0^{90}}{90^\circ} \rho = \frac{a}{1+n'} \left( 1 + \frac{n'^2}{4} + \frac{n'^4}{64} + \dots \right).$$

Применительно к эллипсоиду Красовского  $R = 6\,367\,558,5$  м. Частные масштабы площадей и длин по параллелям (при сохранении точности вычислений до членов с  $e^2$ ) можно найти по формуле

$$n = \rho = \frac{R \cos \varphi'''}{N \cos \varphi} = 1 - \frac{e^2}{4} \cos 2\varphi + \dots$$

Наибольшие искажения углов равны

$$\sin \left( \frac{\omega}{2} \right) = (N \cos \varphi - R \cos \varphi''') / (N \cos \varphi + R \cos \varphi''')$$

или (с точностью до членов с  $e^2$ )

$$\omega = \frac{e^2}{4} \rho \cos 2\varphi.$$

Условие равнопромежуточного изображения вдоль параллелей

$$n = 1.$$

Из выражения (53) получаем дифференциальное уравнение

$$\cos \varphi''' = \alpha \frac{N \cos \varphi}{R}.$$

Учитывая значение  $N$  из формул (3), запишем

$$\cos \varphi''' = \frac{\alpha a}{R} \left( 1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi + \frac{3}{8} e^4 \sin^4 \varphi + \dots \right) \cos \varphi.$$

В зависимости от значений  $\alpha$ ,  $R$  и задаваемой начальной параллели можно получить группу изображений, равнопромежуточных вдоль параллелей.

Рассмотрим только один способ, в котором приняты следующие начальные условия: широты экватора и полюса  $\varphi_0'' = \varphi_0 = 0$ ,  $\varphi_{90}''' = \varphi_{90} = 90^\circ$ ; долготы  $\lambda''' = \lambda$ . Тогда  $\alpha = 1$  и  $R = a$ .

Основная формула принимает вид

$$\cos \varphi''' = \frac{\cos \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} = \cos \varphi \left( 1 + \frac{e^2}{2} \sin^2 \varphi + \frac{3}{5} e^4 \sin^4 \varphi + \dots \right).$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \varphi''' = (1 - e^2)^{1/2} \operatorname{tg} \varphi,$$

т. е. широта  $\varphi'''$  данного отображения представляет собою приведенную широту  $u$ .

Формулу частных масштабов площадей и длин вдоль меридианов можно записать следующим образом:

$$m = p = R d\varphi''' / M d\varphi = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} / \sqrt{1 - e^2} = 1 + \frac{e^2}{2} \cos^2 \varphi + \frac{e^4}{8} (3 - 2 \sin^2 \varphi - \sin 4\varphi) \dots$$

Наибольшие искажения углов равны

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{m - n}{m + n}$$

или (с точностью до членов с  $e^4$ )

$$\omega = \frac{e^2}{2} \rho \cos^2 \varphi.$$

Кроме рассмотренных способов равноугольного, равновеликого и равнопромежуточного изображений разработаны и другие, аналогичные способы.

Например, записав условия получаемых изображений в виде

$$m_0 = 1; \quad (dm/ds)_0 = 0; \quad (d^2m/ds^2)_0 = 0;$$

$$n_0 = 1; \quad (dn/ds)_0 = 0; \quad (d^2n/ds^2)_0 = 0,$$

К. Гаусс, И. Фришауф и Н. И. Бауман разработали способы соответственно равноугольного (второй способ Гаусса), равновеликого и равнопромежуточного (вдоль меридианов) отображений эллипсоида на поверхность шара, в которых относительные искажения длин являются величинами третьего порядка малости относительно расстояний от данной точки до заданной параллели.

Значительное количество способов равноугольных и иных отображений рассмотрено в работах Н. Я. Цингера, В. П. Морозова и других ученых.

### § 13. НЕКОТОРЫЕ СПОСОБЫ ОТОБРАЖЕНИЯ, В КОТОРЫХ МЕРИДИАНЫ И ПАРАЛЛЕЛИ ЭЛЛИПСОИДА НЕ СОВПАДАЮТ С ИХ ИЗОБРАЖЕНИЯМИ НА СФЕРЕ

Равноугольное отображение с сохранением длины осевого меридиана

В качестве начальных поставим условия:

изображение является симметричным относительно среднего меридиана;

долготы средних меридианов  $\lambda_0 = \lambda'_0 = 0$ ; отображаемая область имеет малое протяжение по долготе;

длины дуг среднего (осевого) меридиана сохраняются;

широты экватора и полюса  $\varphi'_0 = \varphi_0 = 0$ ,  $\varphi'_{90} = \varphi_{90} = 90^\circ$ ;

изображение является равноугольным.

Учитывая первое и второе условия, разложим выражения (1) в ряд Тейлора по степеням  $e = \lambda - \lambda_0$ :

$$\varphi = \varphi'_m + a_2 e^2 + a_4 e^4 + \dots;$$

$$\lambda = a_1 e + a_3 e^3 + a_5 e^5 + \dots$$

В соответствии с третьим условием

$$\varphi'_m = s/R,$$

где  $s$  — длина дуги меридиана, определяемая по известной формуле (или получаемая из таблиц прил. 6)

$$s = \frac{a}{1+n'} \left[ \left( 1 + \frac{n'^2}{4} + \frac{n'^4}{64} + \dots \right) \varphi - \left( \frac{3}{2} n' - \frac{3}{16} n'^3 + \dots \right) \sin 2\varphi + \left( \frac{15}{16} n'^2 - \frac{15}{64} n'^4 + \dots \right) \sin 4\varphi \right] + \dots;$$

$R$  — радиус шара, величина которого согласно четвертому условию

$$R = \frac{a}{1+n'} \left( 1 + \frac{n'^2}{4} + \frac{n'^4}{64} + \dots \right).$$

Формула для вычисления  $\varphi'_m$  с учетом значений  $s$  и  $R$  примет вид

$$\varphi'_m = \varphi - \left( \frac{3}{2} n' - \frac{9}{16} n'^3 - \dots \right) \sin 2\varphi + \left( \frac{15}{16} n'^3 - \right. \\ \left. - \frac{15}{32} n'^5 - \dots \right) \sin 4\varphi.$$

Условие равноугольного отображения:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial e} = \frac{N \cos \varphi \partial \varphi'}{\cos \varphi' \partial s}; \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial e} = - \frac{N \cos \varphi \partial \lambda'}{\cos \varphi' \partial s}.$$

Продифференцируем уравнения параллелей  $\varphi = f_1(a, e)$  и меридианов  $\lambda = f_2(a, e)$  и подставим полученные производные в условия равноугольного отображения. Затем разложим

$$\cos \varphi = \cos [\varphi_m - (\varphi_m - \varphi)]$$

в ряд Тейлора и заменим значения  $\cos \varphi$  величинами их разложения. Тогда получим из сравнения коэффициентов при одинаковых степенях левых и правых сторон условий равноугольности значения коэффициентов  $a_i$ ,  $\varphi'$ ,  $\lambda'$ ,  $\varphi$  и  $e$ .

При ширине полосы  $12^\circ$  координаты можно вычислить по формулам В. П. Морозова с ошибкой менее  $0,0001''$ .

Частные масштабы длин и площадей можно определять по формуле общей теории картографических проекций с учетом выражения (53).

Рассмотрим наиболее общие случаи перспективного отображения эллипсоида на поверхности шара, когда сфера касается эллипсоида в заданной точке.

При этом отображения эллипсоида на поверхности шара, получаемые при расположении точек зрения со стороны вогнутости картографируемой области, называются негативными, а при расположении со стороны выпуклости этой области — позитивными.

## Перспективное негативное изображение эллипсоида на поверхности шара

Пусть поверхность шара касается эллипсоида вращения в заданной точке  $Q_0$  ( $\varphi_0, \lambda_0$ ), являющейся полюсом полярной сфероидической системы координат (рис. 11).

Выполним преобразования систем координат:

от геоцентрической системы координат  $OX_\Gamma Y_\Gamma Z_\Gamma$  данной точки перейдем к топоцентрической горизонтной системе  $Q_0XYZ$  с началом в точке полюса  $Q_0\varphi_0\lambda_0$ ;

от топоцентрической системы  $OXYZ$  перейдем к полярной сфероидической системе координат  $z = \text{const}$ ,  $a = \text{const}$ , где  $z$  — угол в точке  $O'$  между нормалью  $O'Q_0$  к поверхности эллипсоида в точке  $Q_0$  и линией  $O'C$ , лежащей в нормальной плоскости  $Q_0CO'$ , проходящей через текущую точку  $C$  ( $\varphi, \lambda$ );  $a$  — азимут нормальной плоскости.

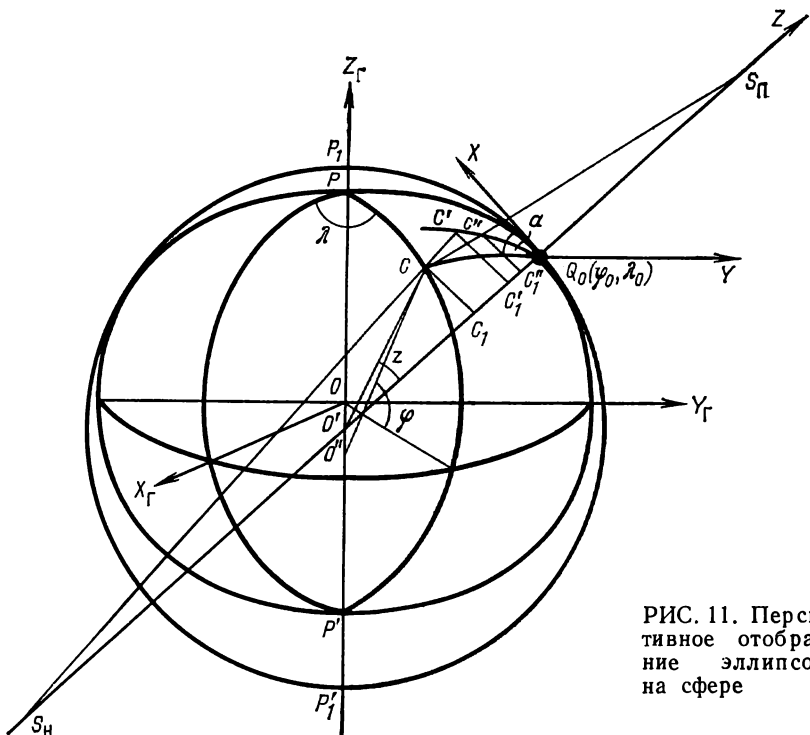


РИС. 11. Перспективное отображение эллипсоида на сфере

Введем обозначения:

$$O'Q_0 = N_0; \quad O'C = N'_0; \quad S_n O' = D_n; \quad S_n O' = D_n; \quad S_n Q_0 = H,$$

где  $S_n$  — точка зрения для случаев положительного изображения;  $S_n$  — точка зрения для случаев отрицательного изображения.

Учитывая введенные обозначения, формулы связи геодезических и полярных сфероидических координат с точностью до членов с  $e^4$  будут иметь вид

$$\sin z \cos a = t_1 + e^2 \tau (t_1 \sin \varphi - \cos \varphi_0) + \dots;$$

$$\sin z \sin a = t_4 (1 + e^2 \tau \sin \varphi) + \dots;$$

$$\cos z = t_5 + e^2 \tau (t_5 \sin \varphi - \sin \varphi_0) + \dots,$$

где  $e$  — первый эксцентриситет эллипсоида,  $t_1, t_4, t_5, \tau$  — см. формулы (13).

Из треугольников  $S_n C' C'_1$  и  $S_n C C_1$  можно записать

$$\sin z_{\text{сф}} = \frac{N_0 \sin z}{D + N_0 \cos z} \left( \cos z_{\text{сф}} + \frac{D}{R} \right).$$

Введя обозначения

$$t_0 = D \sin z / (N'_0 + D \cos z); \quad k = N'_0 / R - 1 = N'_0 / N'_0 - 1$$

и учитывая, что разности  $\Delta z = Z_{\text{сф}} - z$  малы по сравнению с  $z$ , разложим  $\sin z_{\text{сф}}$  в ряд Тейлора и после его обращения получим

$$z_{\text{сф}} = z + t_0 k \left\{ 1 + \frac{1}{2} t_0^2 k \left[ 1 + k \left( t_0^2 + \frac{1}{3} \right) \right] \right\} + \dots,$$

где

$$\frac{N_0}{N'_0} = 1 + \frac{e^2}{2} (\sin \varphi - \sin \varphi_0)^2 \left\{ 1 + \frac{e^2}{4} [(3 \sin^4 \varphi_0 - 4) + \sin \varphi (-2 \sin \varphi_0 + 7 \sin \varphi)] \right\}.$$

С точностью до членов с  $e^4$  из выражений, приведенных выше, получим

$$z_{\text{сф}} = z - \frac{e^2}{2} [\sin z \cos a \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 (\cos z - 1)]^2 \times \\ \times \frac{D \sin z}{N_0 + D \cos z} + \dots;$$

$$N'_0 = N_0 \left\{ 1 - \frac{e^2}{2} [\sin z \cos a \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 (\cos z - 1)]^2 \right\} + \dots$$

С той же степенью точности частные масштабы длин вдоль вертикалов  $\mu_1$  и альмукантаратов  $\mu_2$  с учетом принятой сфероидической системы координат  $(z, a)$  можно вычислить по формулам

$$\mu_1 = \left\{ 1 + \frac{e^2}{2} [\sin z \cos a \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 (\cos z - 1)]^2 \right\} \frac{dz_{\text{сф}}}{dz}; \\ \mu_2 = \left\{ 1 + \frac{e^2}{2} [\sin z \cos a \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 (\cos z - 1)]^2 \right\} \frac{\sin z_{\text{сф}}}{\sin z}.$$

Из формул, полученных для вычисления  $z_{\text{сф}}$  и частных масштабов длин, следует, что в зависимости от положения точки зрения (величины  $D$ ) можно получить совокупность различных перспективных отображений. Например, при проектировании из центра сферы  $D = 0$ .

Тогда

$$z_{\text{сф}} = z; \quad \mu_1 = \mu_2 = 1 + \frac{e^2}{2} [\sin z \cos a \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 (\cos z - 1)]^2,$$

т. е. с точностью до членов с  $e^4$  перспективное отображение эллипсоида на поверхность шара, касательного к эллипсоиду в заданной точке, является равноугольным.

Это позволяет обобщить вывод В. В. Каврайского о свойствах центральной перспективы и отметить, что всякая перспектива эллипсоида на поверхность шара при расположении точки зрения в центре шара и вне зависимости от удаления этого центра по ее оси вращения от центра эллипсоида и от положения полюса полярной сфероидической системы координат дает отображение, близкое к равноугольному (с точностью до членов с  $e^2$ ).



С той же степенью точности частные масштабы площадей и искажения углов можно вычислить по известным формулам общей теории картографических проекций

$$\rho = \mu^2 = 1 + e^2 [\sin z \cos a \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 (\cos z - 1)]^2; \quad \omega = 0.$$

Перспективное позитивное отображение эллипсоида на поверхности шара

Из треугольников  $S_n C C_1$  и  $S_n C'' C'_1$  (см. рис. 11)

$$\sin z_{\text{сф}} = \frac{N'_0 \sin z}{D - N_0 \cos z} \left( \frac{D}{R} - \cos z_{\text{сф}} \right).$$

Введем обозначения

$$t'_0 = \frac{D \sin z}{N'_0 - D \cos z}; \quad K' = \frac{e^2}{2} (\sin \varphi - \sin \varphi_0)^2$$

и, разложив  $\sin z_{\text{сф}}$  в ряд по степеням  $\Delta z = z_{\text{сф}} - z$ , получим

$$z_{\text{сф}} = z + t'_0 K' \left\{ 1 - \frac{1}{2} t'_0 K' \left[ 1 - K' \left( t'^2_0 + \frac{1}{3} \right) \right] \right\} + \dots$$

С точностью до членов с  $e^4$  последнее выражение принимает вид

$$z_{\text{сф}} = z + \frac{e^2}{2} (\sin \varphi - \sin \varphi_0)^2 \frac{D \sin z}{N_0 - D \cos z} + \dots \quad (58)$$

Определим с той же степенью точности значения частных масштабов длин. После преобразований приведенных формул получим

$$\mu_1 = 1 + \frac{e^2}{2} \tau \left[ \tau + \frac{2\tau_1 D \sin z}{N_0 - D \cos z} + \frac{D\tau (N_0 \cos z - D)}{(N_0 - D \cos z)^2} \right] + \dots;$$

$$\mu_2 = 1 + \frac{e^2}{2} \tau^2 \left( 1 + \frac{D}{N_0 - D \cos z} \right) + \dots,$$

где

$$\tau = \sin z \cos a \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 (1 - \cos z);$$

$$\tau_1 = \cos z \cos a \cos \varphi_0 - \sin z \sin \varphi_0.$$

Формулы частных масштабов площадей и наибольших искажений углов принимают вид

$$\rho = \mu_1 \mu_2 = 1 + \frac{e^2}{2} \tau \left[ 2\tau + \frac{D(\tau + 2\tau_1 \sin z)}{N_0 - D \cos z} + \frac{D\tau (N_0 \cos z - D)}{(N_0 - D \cos z)^2} \right] + \dots;$$

$$\omega = 2 \arcsin \left( \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \right) = \frac{e^2 \tau D}{2(N_0 - D \cos z)} \left[ (2\tau_1 \sin \tau - \tau) + \frac{\tau (N_0 \cos z - D)}{N_0 - D \cos z} \right] + \dots$$

В последние годы все более широкое использование для решения научных и производственных задач находят аэро- и космодетские снимки, а также стерео- и ортодетские снимки, идеальными моделями которых являются перспективные азимутальные проекции с позитивным и негативным изображениями.

Рассмотренные в данном параграфе способы перспективных и других отображений эллипсоида на поверхности шара позволяют получать указанные азимутальные и другие проекции двойного отображения эллипсоида с заданной степенью точности при некотором сокращении затрат труда и времени, и самое главное, вне зависимости от положения заданной точки полюса применяемой сферодетической полярной системы координат и используемых начальных условий рассматриваемых отображений.

### Глава III

## КЛАССИФИКАЦИЯ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

---

Рассмотрим классификацию проекций по трем основным признакам: по характеру искажений (свойствам изображения); по виду нормальной сетки меридианов и параллелей и ориентировке картографической сетки.

### § 14. КЛАССИФИКАЦИЯ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ ПО ХАРАКТЕРУ ИСКАЖЕНИЙ

По характеру искажений проекции делятся на равноугольные, равновеликие и произвольные.

В равноугольных проекциях сохраняется подобие бесконечно малых частей изображения, следовательно, частный масштаб длин не зависит от направления  $m = n = a = b = \mu$ , искажения углов отсутствуют  $\omega = 0$ , масштаб площади равен квадрату масштаба длин  $p = a^2$ .

Условия равноугольности имеют вид  $f = 0$ ;  $m = n$  или

$$x_\lambda = -\frac{r}{M} y_\phi; \quad y_\lambda = +\frac{r}{M} x_\phi;$$

для поверхности шара

$$x_\lambda = -\cos \phi y_\phi; \quad y_\lambda = +\cos \phi x_\phi.$$

При изображении в равноугольных проекциях участков конечного размера изменение частных масштабов длин обуславливает искажение конечных контуров. В этих проекциях обычно сильно искажаются площади.

В равновеликих проекциях сохраняется постоянным отношение площадей на картографируемой поверхности и на плоскости. При

этом постоянство отношения площадей распространяется не только на бесконечно малые участки, но и на участки конечных размеров.

В этих проекциях частный масштаб площадей

$$p = mn \sin i = ab = h/Mr = \text{const},$$

но чаще всего  $p = 1$ , поэтому условие равновеликости имеет вид  $h = Mr$ , а для поверхности шара  $h = R^2 \cos \varphi$ .

Экстремальные масштабы длин обратно пропорциональны друг другу:  $a = 1/b$ ;  $b = 1/a$ .

Максимальное искажение углов целесообразно вычислять по формулам тангенсов, которые в равновеликих проекциях принимают вид

$$\text{tg}(\omega/2) = (a-b)/2; \quad \text{tg}(45^\circ + \omega/4) = a.$$

Если картографическая проекция не обладает ни свойством равноугольности, ни свойством равновеликости, то она относится к группе произвольных. В этих проекциях искажаются углы и площади.

Среди произвольных проекций следует выделить проекции равнопромежуточные, в которых сохраняется постоянным экстремальный масштаб длин по одному из главных направлений, т. е.  $a = 1$  или  $b = 1$ .

В этих проекциях соответственно  $p = b$  или  $p = a$ .

Для вычислений максимального искажения углов целесообразно использовать общую формулу  $\sin(\omega/2) = (a-b)/(a+b)$ . Если сетка равнопромежуточной проекции ортогональна и главные направления совпадают с меридианами или параллелями, проекции называют соответственно равнопромежуточными по меридианам или равнопромежуточными по параллелям.

С развитием теории и практики математической картографии изменялись и уточнялись понятия свойств проекций и возможности их оценки.

В связи с широким использованием произвольных проекций возникла потребность в критериях, применимых к оценке именно этих проекций.

Характер искажения — свойство, которое до настоящего времени определялось интуитивно, без количественной оценки. Исследования Г. И. Конусовой показали, что характер искажений можно определять как соотношение искажений разного рода. В качестве единого показателя величины и характера искажений в любой точке проекции был предложен вектор  $\bar{\rho}$ , проекциями которого являются искажения площадей ( $p-1$ ) и форм ( $\omega-1$ ), где  $\omega = a/b$ . Векторы равноугольных и равновеликих проекций ортогональны, независимы и составляют базис, относительно которого можно определить вектор  $\bar{\rho}$  ( $p-1$ ,  $\omega-1$ ) любой проекции.

Длина вектора

$$\rho = \sqrt{(p-1)^2 + (\omega-1)^2}$$

принята за меру комплексного искажения форм и площадей одновременно.

Соотношение искажений форм и площадей определяется углом  $\alpha$ , для которого

$$\operatorname{tg} \alpha = (\omega - 1) / (\rho - 1); \quad \sin \alpha = (\omega - 1) / \rho; \quad \cos \alpha = (\rho - 1) / \rho.$$

Угол  $\alpha$ , составленный вектором  $\bar{\rho}$  любой проекции с вектором равноугольной проекции, Г. И. Конусова предлагает использовать в качестве меры характера искажений в точке. Характер искажений в различных проекциях может изменяться от 0 до  $2\pi$ . Равноугольные, равнопромежуточные и равновеликие проекции имеют в пределах картографируемой территории постоянный характер искажений, величина которого соответственно равна  $0, \pi/4, \pi/2$

## § 15. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОЕКЦИЙ ПО ВИДУ НОРМАЛЬНОЙ СЕТКИ МЕРИДИАНОВ И ПАРАЛЛЕЛЕЙ

*Нормальной сеткой* называется сетка меридианов и параллелей, которая получается в случае, когда полюс используемой системы координат совпадает с географическим полюсом; проекции с такой сеткой называются нормальными.

По виду нормальной сетки картографические проекции подразделяются на следующие классы: конические, цилиндрические, азимутальные, псевдоконические, псевдоцилиндрические, псевдоазимутальные, поликонические, производные (условные).

*Нормальными коническими* называются проекции (рис. 12), в которых картографическая сетка имеет следующий вид: меридианы — прямые, сходящиеся в одной точке под углами, пропорциональными разности долгот соответствующих меридианов, а параллели — дуги концентрических окружностей, центр которых находится в точке схода меридианов.

Частные масштабы и искажения зависят только от широты, поэтому изоколы совпадают с параллелями и имеют вид дуг концентрических окружностей.

Если при получении конических проекций использовать геометрический метод (линейное проектирование поверхности конуса на плоскость), то получим перспективно-конические проекции.

Если представить, что точка схода меридианов удалится в бесконечность, то параллели превратятся в прямые линии и вместо конической проекции получим цилиндрическую.

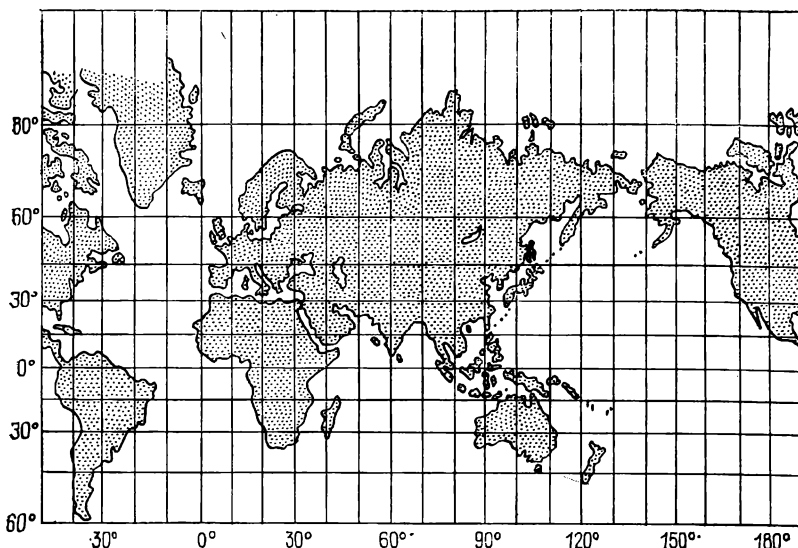
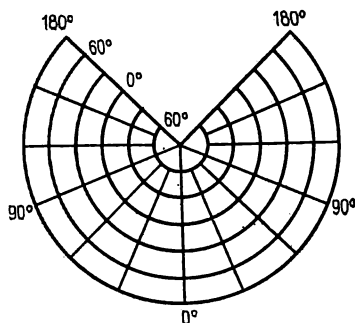
*Нормальные цилиндрические проекции* (рис. 13) имеют наиболее простую картографическую сетку; меридианы изображаются в них равноотстоящими параллельными прямыми, а параллели — параллельными прямыми, ортогональными меридианам.

Частные масштабы и искажения являются функциями только широты, поэтому изоколы (линии равных искажений) совпадают с параллелями и имеют вид прямых.

Цилиндрические проекции, как и конические, можно получить геометрическими путем; эти проекции называются перспективно-цилиндрическими.

РИС. 12. Нормальная коническая проекция

РИС. 13. Нормальная цилиндрическая проекция



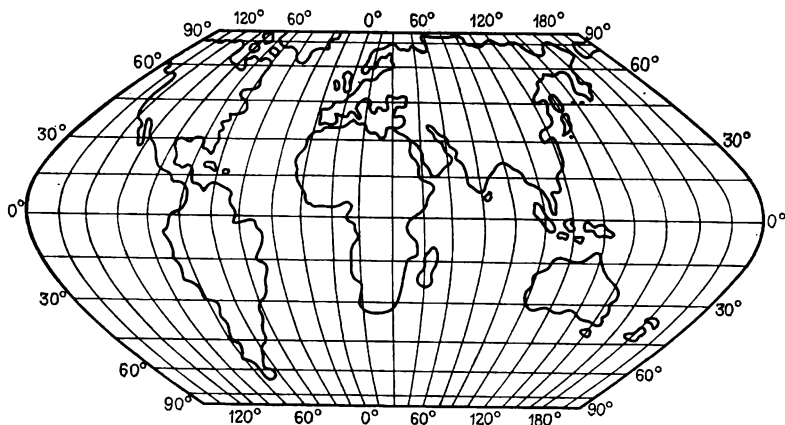
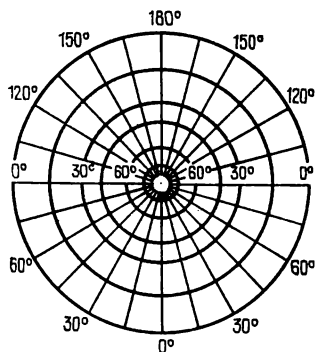
В азимутальных проекциях (рис. 14) меридианы нормальной сетки — прямые, пересекающиеся в одной точке под углами, равными разности долгот соответствующих меридианов, параллели — концентрические окружности с центром в точке пересечения меридианов.

Эти проекции также можно получить и геометрическим путем с использованием линейной перспективы, тогда они называются перспективно-азимутальными или обыкновенными перспективными.

Частные масштабы и искажения в азимутальных и перспективно-азимутальных проекциях являются функциями только широты, поэтому изоколы совпадают с параллелями или альмукантаратами и имеют вид окружностей. Эти проекции применяют для изображения территорий округлой формы, чаще всего для карт мелкого масштаба.

РИС. 14. Нормальная азимутальная проекция

РИС. 15. Псевдоцилиндрическая проекция



В псевдоцилиндрических проекциях (рис. 15) параллели — прямые линии перпендикулярные к прямолинейному осевому меридиану, остальные меридианы — кривые (синусоиды, эллипсы), симметричные относительно осевого. Сетка проекций неортогональна, поэтому по характеру искажений псевдоцилиндрические проекции могут быть только равновеликими и произвольными.

Изоколы, характеризующие искажение длины параллелей и искажение площади, совпадают с параллелями и являются прямыми линиями, а изоколы, характеризующие искажение длины меридианов и искажение углов, имеют вид гиперболических кривых, симметричных относительно осевого меридиана и экватора.

В проекциях псевдоконических (рис. 16) нормальная сетка имеет следующий вид: параллели — дуги концентрических окружностей, а меридианы — кривые, симметричные относительно осевого прямолинейного. Сетка проекции неортогональна, поэтому по характеру искажений эти проекции могут быть только равновеликими и произвольными; ортогональность сохраняется на осевом меридиане и на средней параллели с широтой  $\varphi_0$ .

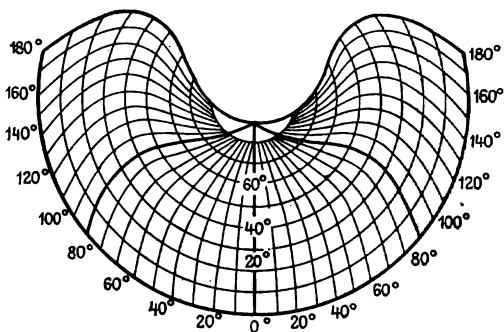


РИС. 16. Псевдоконическая проекция

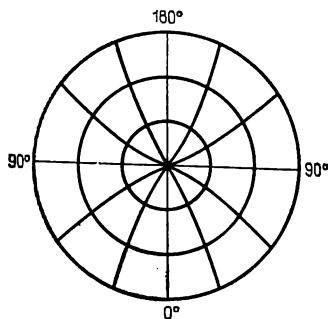


РИС. 17. Нормальная псевдоазимутальная проекция

Изоколы имеют вид кривых, попарно симметричных относительно осевого меридиана.

Псевдоазимутальные проекции (рис. 17) появились в советской картографии сравнительно недавно (проекция с овальными изоколами). Параллели нормальной сетки этих проекций являются концентрическими окружностями, а меридианы кривыми, за исключением двух, взаимно перпендикулярных, которые служат осями симметрии.

Поликонические проекции широко применяются в современной картографической практике, особенно для карт мира. В этих проекциях параллели изображаются дугами эксцентрических окружностей, а меридианы — кривыми, симметричными относительно осевого прямолинейного меридиана и экватора. Изоколы имеют вид сложных кривых, симметричных относительно осевого меридиана и экватора; их форма зависит от дополнительных условий, поставленных при получении проекции.

Частными вариантами поликонических проекций являются проекции с круговыми меридианами и параллелями — круговые проекции, в которых параллели и меридианы изображаются дугами эксцентрических окружностей.

Заканчивая классификацию проекций по виду нормальной сетки меридианов и параллелей, необходимо отметить, что кроме рассмотренных классов существует еще большой класс производных (условных) проекций, которые получают, видоизменяя имеющиеся проекции в соответствии с поставленными условиями. Этот класс проекций непрерывно пополняется.

Достоинства приведенной выше классификации, разработанной В. В. Каврайским, — ее простота и наглядность, однако в ней рассмотрены только такие проекции, параллели которых являются кривыми постоянной кривизны. Многие проекции, используемые для создания карт в настоящее время, не находят своего места в этой классификации.

В последнее время советскими учеными были разработаны новые классификации. Например, Г. А. Мещеряков предложил классифицировать картографические проекции по виду дифференциальных уравнений — создал основу для генетической классификации. Эта классификация является достаточно полной, но не наглядной, так как не связана с видом сетки меридианов и параллелей. В гл. XII рассмотрен ряд способов изыскания картографических проекций на основе решения указанных дифференциальных уравнений.

На кафедре проектирования и составления карт МИИГАиК разработана новая классификация картографических проекций по виду нормальной сетки меридианов и параллелей, которая, по замыслу авторов, должна охватывать все возможное множество картографических проекций.

Это множество состоит из двух подмножеств. Первое включает проекции с параллелями постоянной кривизны, второе — проекции с параллелями переменной кривизны.

Первое подмножество в соответствии с видом параллелей подразделяют на три семейства: в первом — параллели прямые, во втором — концентрические окружности, в третьем — окружности эксцентрические.

Каждое семейство подразделяется по виду меридианов на классы

Первое семейство (с прямолинейными параллелями) включает четыре класса.

1. Цилиндрические проекции, общие формулы которых

$$x = f(\varphi); \quad y = \beta\lambda,$$

где  $\beta$  — параметр проекции.

2. Обобщенные цилиндрические проекции

$$x = f_1(\varphi); \quad y = f_2(\lambda).$$

Этот класс можно разделить на два подкласса — с сеткой, симметричной относительно осевого меридиана, и с сеткой асимметричной

3. Псевдоцилиндрические проекции

$$x = f(\varphi); \quad y = F(\varphi, \lambda).$$

Этот класс проекций также можно разделить на два подкласса, учитывая симметричность сетки относительно осевого меридиана.

4. Цилиндрическо-конические проекции, в которых параллели изображаются пучком прямых, а меридианы — концентрическими окружностями.

Второе семейство (с концентрическими параллелями) включает пять классов.

1. Конические проекции:

$$\begin{aligned} \rho &= f(C, \varphi); & \delta &= \alpha\lambda; \\ x &= q - \rho \cos \delta; & y &= \rho \sin \delta; \\ q &= \text{const}, \end{aligned}$$

где  $\alpha$  и  $C$  — параметры проекции.



В точке полюса происходит разрыв изображения.

2. Обобщенные конические проекции, в которых сохраняются все приведенные формулы, за исключением формулы полярного угла

$$\delta = f_2(\lambda).$$

В точке полюса также происходит разрыв изображения.

Проекция этих двух классов можно разделить на два подкласса, учитывая симметричность сетки относительно среднего меридиана.

3. Псевдоконические проекции:

$$\rho = f_1(\varphi); \quad \delta = f_2(\varphi, \lambda);$$

$$x = q - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$

$$q = \text{const.}$$

Данный класс также включает два подкласса; в первом сетка симметрична относительно среднего прямолинейного меридиана, во втором — асимметрична, причем этот меридиан может изображаться и прямой, и кривой линиями.

4. Азимутальные проекции:

$$\rho = f_1(\varphi); \quad \delta = \lambda;$$

$$x = \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta.$$

5. Псевдоазимутальные проекции, в которых меридианы с долготой  $0^\circ$  — прямые линии, а с долготами  $90^\circ$ ,  $180^\circ$  и  $270^\circ$  — прямые или кривые линии. Общие уравнения этих проекций:

$$\rho = f_1(\varphi); \quad \delta = f_2(\varphi, \lambda) = \lambda + F(\varphi) \sin k\lambda;$$

$$x = \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta,$$

где  $k$  — целое число.

Этот класс подразделяется на два подкласса: в первом картографическая сетка симметрична относительно меридианов с долготами  $0^\circ$  и  $180^\circ$ , во втором — сетка асимметрична.

К третьему семейству (с эксцентрическими параллелями) относятся два класса проекций.

1. Обобщенные поликонические проекции:

$$\rho = f_1(\varphi); \quad \delta = f_2(\varphi, \lambda);$$

$$x = q - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$

$$q = f_2(\varphi).$$

Данный класс включает четыре подкласса. В основу подразделения положена симметричность картографической сетки: относительно прямолинейного меридиана, относительно экватора, относительно и меридиана, и экватора (или ее асимметричность).

2. Поликонические проекции:

$$\rho = N \operatorname{ctg} \varphi; \quad \delta = f(\varphi, \lambda);$$

$$x = q - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$

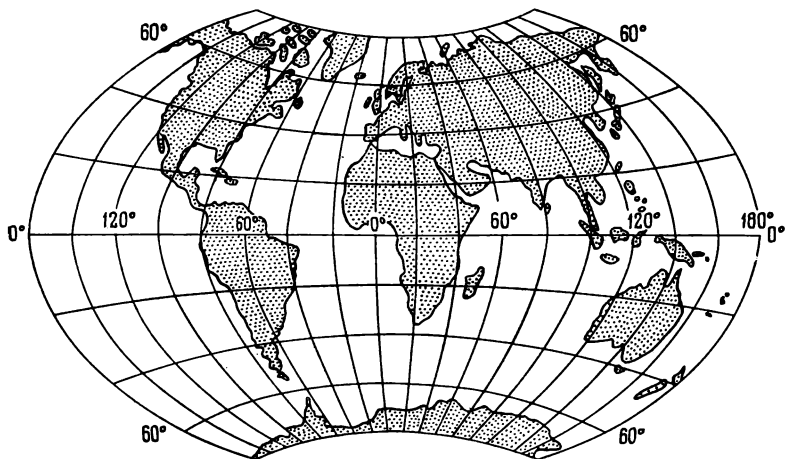


РИС. 18. Поликоническая проекция

$$q = ks + N \operatorname{ctg} \varphi,$$

где  $s$  — длина дуги меридиана,  $k$  — коэффициент.

Данный класс включает два подкласса, в основе подразделения лежит симметричность сетки относительно осевого меридиана (рис. 18).

Второе подмножество проекций включает три семейства. В основе этого подразделения лежат изображение полюса и вид уравнений.

Первое семейство (отсутствует разрыв изображения в окрестности полюса) включает два класса.

1. Полиазимутальные проекции, в которых параллели изображаются эллипсами, а меридианы — пучком прямых или кривых, исходящих из центра эллипсов.

Общие уравнения этих проекций:

$$\begin{aligned} \rho &= f_1(\varphi, \lambda); & \delta &= f_2(\varphi, \lambda); \\ x &= \rho \cos \delta; & y &= \rho \sin \delta. \end{aligned}$$

2. Полиазимутальные проекции обобщенные, в которых параллели — кривые произвольной кривизны, а меридианы — пучок прямых или кривых, исходящих из точки полюса.

Общие уравнения имеют такой же вид, как и в классе полиазимутальных проекций.

Второе семейство (имеется разрыв в окрестности полюса) включает четыре класса проекций, которые можно назвать поликоническими обобщенными: с эллиптическими параллелями, с параболическими параллелями, с гиперболическими параллелями, с параллелями любой кривизны.

Общие уравнения проекций:

$$\rho = f_1(\varphi, \lambda); \quad \delta = f_2(\varphi, \lambda);$$

$$x = q - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$

$$q = f_2(\varphi).$$

Все классы обобщенных поликонических проекций, за исключением проекций с гиперболическими параллелями, делятся на четыре подкласса по признаку симметричности сетки, а проекции с гиперболическими параллелями — на два подкласса (по этому же признаку).

Третье семейство включает два класса полицилиндрических проекций, в которых также имеется разрыв в полюсе, но уравнения проекций выражаются только в системе прямоугольных координат (это присуще цилиндрическим проекциям):

$$x = f_1(\varphi, \lambda); \quad y = f_2(\varphi, \lambda).$$

Меридианы и параллели этих проекций изображаются кривыми произвольной кривизны.

Классы проекций выделяют на основании способа задания прямоугольных координат. К первому классу относятся проекции, в которых прямоугольные координаты заданы в аналитическом виде, ко второму — в которых прямоугольные координаты даны в виде таблиц.

Каждый из классов полицилиндрических проекций включает четыре подкласса, разделение на которые осуществляется по признаку симметричности сетки.

Рассмотренная классификация проекций включает не только все известные проекции, но и все проекции, которые могут быть разработаны в будущем.

## **§ 16. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОЕКЦИЙ ПО ОРИЕНТИРОВКЕ КАРТОГРАФИЧЕСКОЙ СЕТКИ. ПЕРЕХОД ОТ ГЕОГРАФИЧЕСКИХ КООРДИНАТ К СФЕРИЧЕСКИМ КООРДИНАТАМ КОСОЙ И ПОПЕРЕЧНОЙ СИСТЕМ; ВЫБОР ПОЛЮСОВ ЭТИХ СИСТЕМ**

Кроме нормальных проекций существуют проекции косые и поперечные. В основу этого подразделения положено значение широты полюса сферической системы координат ( $\varphi_0$ ). При  $\varphi_0 = 90^\circ$  получают нормальные проекции, при  $\varphi_0 = 0^\circ$  — поперечные, при  $0^\circ < \varphi_0 < 90^\circ$  — косые.

В нормальных проекциях нормальная сетка совпадает с основной, т. е. с сеткой параллелей и меридианов, положение которых на картографируемой поверхности характеризуется географическими координатами ( $\varphi, \lambda$ ).

В косых и поперечных проекциях нормальная сетка не совпадает с основной. Нормальной сеткой в этих проекциях является сетка вертикалов и альмукантаратов.

Вертикалы являются большими кругами, пересекающимися в точках полюсов косой или поперечной системы  $Q(\varphi_0, \lambda_0)$ .

Положение вертикалов на картографируемой поверхности определяется азимутом  $a$ , который равен двугранному углу между

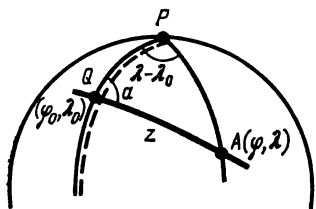


РИС. 19. Сферические координаты  $z$  и  $a$  косой системы

плоскостями текущего и начального вертикалов. Начальным называется вертикал, который совпадает с меридианом полюса косой или поперечной системы координат, т. е. имеет долготу  $\lambda_0$  (рис. 19).

*Альмукантараты* — малые круги, перпендикулярные к вертикалам; их положение на картографируемой поверхности определяется координатой  $z$  — зенитным расстоянием, которое равно нормальной системе координат  $Q$  до теку-

дуге вертикала от полюса кующего альмукантарата.

Сетку вертикалов и альмукантаратов можно рассматривать как смещенную сетку меридианов и параллелей, в которой географический полюс  $P$  заменен полюсом косой или поперечной системы координат  $Q$ .

В косых и поперечных проекциях картографируемую поверхность, как правило, принимают за поверхность шара радиуса  $R$ , значение которого находят в соответствии с заданными условиями (например, как радиус шара, равновеликого поверхности земного эллипсоида) или считают равным среднему радиусу кривизны картографируемой области.

Переход от географических координат к сферическим полярным координатам косой и поперечной систем осуществляется по известным формулам сферической тригонометрии:

$$\begin{aligned} \cos z &= \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos (\lambda_0 - \lambda); \\ \sin a \sin z &= \cos \varphi \sin (\lambda_0 - \lambda); \end{aligned} \quad (59)$$

$$\cos a \sin z = \sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos (\lambda_0 - \lambda).$$

Разделив вторую формулу (59) на третью получим,

$$\operatorname{tg} a = \frac{\cos \varphi \sin (\lambda_0 - \lambda)}{\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos (\lambda_0 - \lambda)} \quad (60)$$

или для удобства вычислений

$$\operatorname{ctg} a = \operatorname{tg} \varphi \cos \varphi_0 \operatorname{cosec} (\lambda_0 - \lambda) - \sin \varphi_0 \operatorname{ctg} (\lambda_0 - \lambda). \quad (61)$$

Для перехода к полярным сферическим координатам косой и поперечной систем необходимо знать координаты полюса  $Q$  —  $\varphi_0$ ,  $\lambda_0$ , которые можно определить тремя способами.

Первый способ применим для большинства азимутальных и перспективно-азимутальных проекций: полюс совмещают с центральной точкой изображаемой территории; координаты полюса берутся непосредственно с карты или глобуса или вычисляются как средние значения широты и долготы точек, расположенных на границах изображаемой территории.

Второй способ, к которому прибегают в косых и поперечных цилиндрических проекциях, предусматривает определение коор-

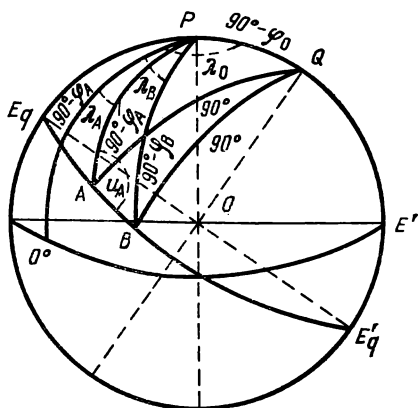


РИС. 20. Вычисление координат полюса косой системы по двум заданным точкам (A, B)

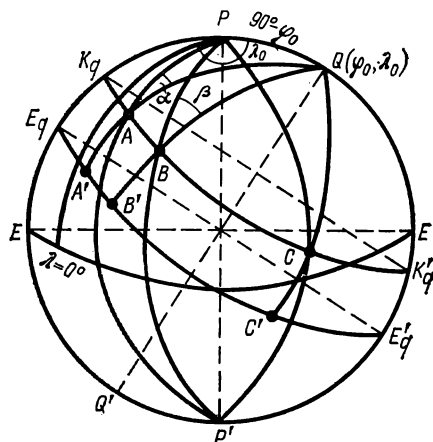


РИС. 21. Схема вычисления координат полюса по трем заданным точкам (A, B, C)

динат полюса в соответствии с положением дуги большого круга, отстоящего от полюса на девяносто градусов (экватора косой или поперечной системы). В поперечных проекциях этот большой круг совпадает с меридианом (рис. 20).

В этих проекциях

$$\varphi_0 = 0; \quad \lambda_0 = \lambda_{\text{ср}} \pm 90^\circ,$$

где  $\lambda_{\text{ср}}$  — долгота среднего меридиана.

Если счет долгот вести от среднего меридиана, то  $\lambda_0 = \pm 90^\circ$ .

При определении полюса Q косой системы координат необходимо решить два треугольника. Сначала из треугольника APB найдем угол  $u_1$  по формуле

$$\operatorname{tg} u_1 = \operatorname{tg} (\lambda_2 - \lambda_1) \cos x \operatorname{cosec} (x - \varphi_1),$$

где  $x$  — вспомогательный угол  $u$

$$\operatorname{tg} x = \sec (\lambda_2 - \lambda_1) \operatorname{tg} \varphi_2,$$

а затем из треугольника APQ находим  $\varphi_0$  и  $\lambda_0$  по формулам

$$\sin \varphi_0 = \cos \varphi_1 \sin u_1;$$

$$\operatorname{tg} (\lambda_0 - \lambda_1) = \operatorname{cosec} \varphi_1 \operatorname{ctg} u_1. \quad (62)$$

Третий случай предусматривает определение координат полюса косой системы на основании малого круга, проходящего через середину изображаемой территории. Этот способ используют при получении косых конических проекций, которые в современной картографической практике применяют редко. Однако данный способ получения координат полюса представляет теоретический интерес.

Зная направление малого круга, проходящего через середину изображаемой территории, нужно отыскать точку пересечения

больших кругов, перпендикулярных к малому кругу и проведенных минимум из трех его точек с координатами  $\varphi_1, \lambda_1; \varphi_2, \lambda_2; \varphi_3, \lambda_3$ .

На рис. 21 эти три точки расположены на малом круге  $K_q K'_q$ , определяющем положение полюса косо́й системы  $Q (\varphi_0, \lambda_0)$ ; большой круг  $E_q E'_q$  является экватором этой косо́й системы, он параллелен малому кругу  $K_q K'_q$ .

Из треугольников  $PAQ, PBQ, PCQ$ :

$$\begin{aligned} \cos z_k &= \sin \varphi_0 \sin \varphi_1 + \cos \varphi_0 \cos \varphi_1 \cos (\lambda_0 - \lambda_1); \\ \cos z_k &= \sin \varphi_0 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_0 \cos \varphi_2 \cos (\lambda_0 - \lambda_2); \\ \cos z_k &= \sin \varphi_0 \sin \varphi_3 + \cos \varphi_0 \cos \varphi_3 \cos (\lambda_0 - \lambda_3). \end{aligned} \quad (63)$$

В этих трех уравнениях три неизвестных  $z_k, \varphi_0$  и  $\lambda_0$ . Решим уравнения относительно искомых  $\varphi_0, \lambda_0$  и найдем координаты полюса косо́й системы по формулам

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} (\lambda_0 - \lambda_1) &= \frac{(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_3) [\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1)]}{(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_3) \cos \varphi_2 \sin (\lambda_2 - \lambda_1) - (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) \cos \varphi_3 \cos (\lambda_3 - \lambda_1)} - \\ &= \frac{(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) [\cos \varphi_1 - \cos \varphi_3 \cos (\lambda_3 - \lambda_1)]}{(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_3) \cos \varphi_2 \sin (\lambda_2 - \lambda_1) - (\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) \cos \varphi_3 \cos (\lambda_3 - \lambda_1)}; \end{aligned} \quad (64)$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\cos \varphi_2 \cos (\lambda_0 - \lambda_2) - \cos \varphi_1 \cos (\lambda_0 - \lambda_1)}{\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2}.$$

Для контроля определение широты  $\varphi_0$  может быть выполнено по паре других точек, например, первой и третьей или второй и третьей.

## Глава IV

### КНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

---

#### § 17. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ КНИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

В нормальных конических проекциях меридианы изображаются прямыми линиями, сходящимися в одной точке под углами, пропорциональными разностям соответствующих долгот, а параллели — дугами концентрических окружностей с центром в точке схода меридианов (см. рис. 12). В косо́х и поперечных проекциях такой же вид имеют вертикалы и альмукантараты, а меридианы и параллели изображаются сложными кривыми. Практическое применение получили в основном нормальные конические проекции.

Уравнения конических проекций в общем виде выражают в плоских прямоугольных  $(x, y)$  и полярных координатах ( $\rho$  — поляр-

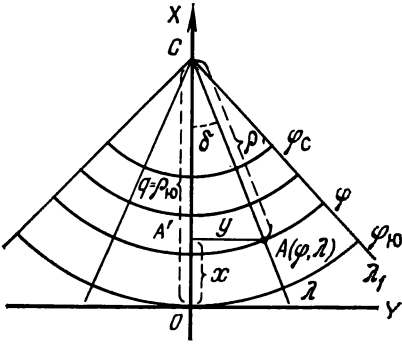


РИС. 22. Системы координат в нормальной конической проекции

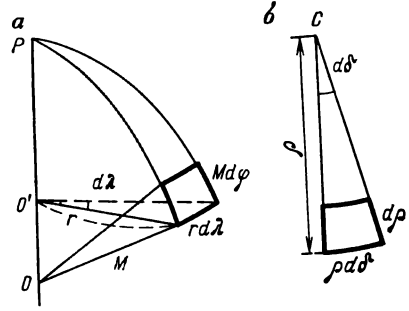


РИС. 23. Бесконечно-малая трапеция: а — на эллипсоиде; б — в конической проекции

ный радиус,  $\delta$  — полярный угол). За полюс этих координат принимается точка пересечения меридианов, за полярную ось — средний меридиан, от которого ведется счет разностей долгот  $\lambda$  (рис. 22).

За начало прямоугольных координат примем точку  $O$ , расположенную на среднем меридиане к югу от южной параллели карты, тогда

$$x = q - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta; \quad (65)$$

$$\delta = \alpha \lambda; \quad \rho = f(\varphi), \quad (66)$$

где  $q = \text{const}$  — расстояние между полюсом полярных и началом прямоугольных координат;  $\rho$  — радиус параллели, являющейся функцией только широты. Параметр  $\alpha$  всегда меньше единицы, т. е. параллели изображаются неполными окружностями (см. рис. 12). Если  $\alpha = 1$ , то конические проекции превращаются в азимутальные, если  $\alpha = 0$  — в цилиндрические проекции.

Вид функции, определяющей полярный радиус  $\rho$ , находят в зависимости от заданных условий изображения: равноугольного, равновеликого или равнопромежуточного по меридианам. В зависимости от вида функции определяют второй параметр. В равноугольных и равнопромежуточных проекциях он имеет определенный геометрический смысл — это радиус экватора в проекции.

Так как сетка меридианов и параллелей в нормальных конических проекциях ортогональна, главные направления совпадут с меридианами и параллелями и частные масштабы длин по меридианам  $m$  и параллелям  $n$  будут экстремальными. Исходя из определения частного масштаба длин и на основании рис. 23 получим

$$m = - \frac{d\rho}{M d\varphi};$$

$$n = \frac{\rho d\delta}{r d\lambda} = \frac{\alpha \rho}{r}.$$

(67)

Знак минус показывает, что с увеличением  $\varphi$  радиус  $\rho$  уменьшается.

Масштаб площади

$$\rho = mn.$$

Наибольшее искажение углов определяют по формуле

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}.$$

В зависимости от размеров изображаемой территории и способа определения параметров в конической проекции есть одна или две параллели, длины которых не искажаются; такие *параллели* называются *главными*.

Анализ формул  $m$ ,  $n$ ,  $\rho$ ,  $\omega$  показывает, что искажения в этих проекциях зависят только от широты, поэтому изоколы совпадают в них с параллелями и являются дугами окружностей.

Нормальные конические проекции особенно выгодны для территорий, вытянутых вдоль параллелей и расположенных в средних широтах. Однако они широко применяются и для территорий различной конфигурации, расположенных не только в средних, но и в южных и северных широтах (но не в полярных районах).

## § 18. РАВНОУГОЛЬНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ КОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

В равноугольных нормальных конических проекциях полярный радиус  $\rho$  находят, используя основное условие равноугольного отображения

$$m = n.$$

Учитывая формулы (67), получим уравнение

$$-\frac{d\rho}{M d\varphi} = \frac{\alpha\varphi}{r} \quad \text{или} \quad \frac{d\rho}{\rho} = -\alpha \frac{M d\varphi}{r}. \quad (68)$$

После интегрирования

$$\ln \rho = \ln C - \alpha \int \frac{M d\varphi}{r}, \quad (69)$$

где  $C$  — постоянная интегрирования.

Интеграл  $\int \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi} = q$  встречается во всех выводах при равноугольном изображении эллипсоида.

После интегрирования получим

$$\int \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi} = \ln U, \quad (70)$$

где

$$U = \frac{\operatorname{tg}(45^\circ + \varphi/2)}{\operatorname{tg}^\epsilon(45^\circ + \psi/2)};$$

$$\sin \psi = e \sin \varphi,$$

$e$  — первый эксцентриситет эллипсоида.



Тогда формула (69) примет вид

$$\ln \rho = \ln C - \alpha \ln U,$$

откуда

$$\rho = C/U^\alpha. \quad (71)$$

При  $\varphi = 0$  (тогда и  $\psi = 0$ ) функция  $U$  равна единице. Тогда по формуле (71)

$$\rho_{\varphi=0} = C,$$

т. е. параметр  $C$  равен радиусу экватора в проекции. При  $\varphi = 90^\circ$  функция  $U$  равна бесконечности и  $\rho_{\varphi=90^\circ} = 0$ , т. е. географический полюс изображается точкой.

На основании уравнений (65), (66), (67) и (71) получим формулы нормальных равноугольных конических проекций:

$$\begin{aligned} x &= q - \rho \cos \delta; & y &= \rho \sin \delta; \\ \rho &= C/U^\alpha; & \delta &= \alpha \lambda; \\ \alpha &= \text{const}; & C &= \text{const}; \\ m &= n = \alpha \rho / r = \alpha C / r U^\alpha; \\ \rho &= m^2; & \omega &= 0. \end{aligned} \quad (72)$$

Если земную поверхность принять за сферу, то

$$\begin{aligned} U &= \text{tg}(45^\circ + \varphi/2); \\ \rho &= C \text{ctg}^\alpha(45^\circ + \varphi/2); \\ m &= n = \alpha \rho / R \cos \varphi. \end{aligned}$$

Параметры  $\alpha$  и  $C$  влияют на величину и распределение искажений. Прежде чем рассматривать способы их определения, исследуем масштаб  $n$  на экстремум и найдем широту  $\varphi_0$  параллели с минимальным масштабом. Для этого продифференцируем  $n$  по  $\varphi$ :

$$n_\varphi = \alpha (\rho_\varphi r - r_\varphi \rho) / r^2.$$

На основании выражения (68)

$$\rho_\varphi = -\alpha \rho M / r.$$

С учетом формул (3)

$$\begin{aligned} r_\varphi &= (N \cos \varphi)_\varphi = N \varphi \cos \varphi - N \sin \varphi = \frac{ae^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} - \\ &- \frac{a \sin \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} = \frac{a \sin \varphi (e^2 \cos^2 \varphi + e^2 \sin^2 \varphi - 1)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = \\ &= -\frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} = -M \sin \varphi, \end{aligned} \quad (73)$$

тогда

$$n_\varphi = \frac{\alpha \rho}{r} \frac{M}{r} (\sin \varphi - \alpha).$$

Полученная производная обращается в нуль при  $\alpha = \sin \varphi_0$ .

Вторая производная по широте

$$(n_{\varphi\varphi})_0 = n_0 \frac{M_0}{N_0}$$

положительна, поэтому масштаб  $n_0$  на параллели с широтой  $\varphi_0$  минимален. Таким образом, уравнение экстремума в равноугольных конических проекциях имеет вид

$$\sin \varphi_0 = \alpha. \quad (74)$$

Так как в равноугольной проекции частный масштаб длин в любой точке не зависит от направления, эллипс искажений будет окружностью бесконечно малого радиуса. Масштаб длин, так же как и промежутки между параллелями, возрастает от параллели с широтой  $\varphi_0$  в обе стороны, но к полюсу быстрее, чем к экватору.

Рассмотрим несколько способов определения параметров  $\alpha$  и  $C$ .

1. Частный масштаб длин  $n_0$  на главной параллели с заданной широтой  $\varphi_0$  (обычно средней для изображаемой территории) наименьший и равен единице.

Параметр  $\alpha$  находим из уравнения экстремума (74), а параметр  $C$  — из формул (72), учитывая принятое условие  $n_0 = 1$ :

$$\alpha C / r_0 U_0^\alpha = 1,$$

откуда

$$C = r_0 U_0^\alpha / \alpha.$$

Равноугольную коническую проекцию с одной заданной главной параллелью применяют для территорий, протяженность которых по широте не превышает 6—8°. В этом случае искажения длин не будут превышать 0,2 %.

2. Частный масштаб  $n_0$  на главной параллели с широтой  $\varphi_0$  наименьший и равен единице, частные масштабы на крайних параллелях с заданными широтами  $\varphi_{ю}$  и  $\varphi_с$  равны между собой, т. е.  $n_{ю} = n_с$ .

Для определения  $\alpha$  воспользуемся вторым условием ( $n_{ю} = n_с$ ) с использованием формул (67)

$$\alpha C / r_{ю} U_{ю}^\alpha = \alpha C / r_с U_с^\alpha,$$

откуда

$$r_{ю} U_{ю}^\alpha = r_с U_с^\alpha.$$

После логарифмирования

$$\alpha = (\lg r_{ю} - \lg r_с) / (\lg U_с - \lg U_{ю}).$$

Значения  $\lg U$  даются в прил. 7.

Зная  $\alpha$ , можно определить широту  $\varphi_0$  по формуле (74), а исходя из условия  $n_0 = 1$ , по формуле (72) найти  $C$ .

3. Частные масштабы  $n_1$  и  $n_2$  на двух главных параллелях с заданными широтами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  равны единице ( $n_1 = n_2 = 1$ ).

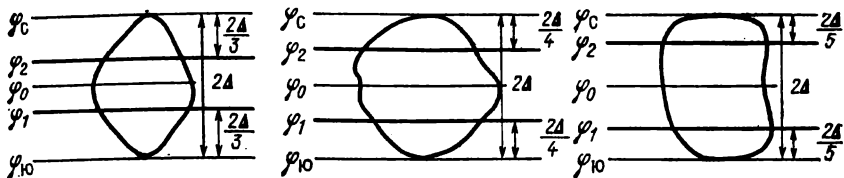


РИС. 24. Способ определения широт главных параллелей в конических проекциях

Так как  $n_1 = n_2$ , то

$$\alpha C/r_1 U_1^\alpha = \alpha C/r_2 U_2^\alpha,$$

откуда

$$\alpha = (\lg r_1 - \lg r_2) / (\lg U_2 - \lg U_1).$$

Зная  $\alpha$ , можно найти  $\varphi_0$  по формуле (74).

Параметр  $C$  найдем из условия равенства единице частных масштабов длин на главных параллелях, тогда

$$C = r_1 U_1^\alpha / \alpha = r_2 U_2^\alpha / \alpha.$$

В. В. Каврайский предлагал определять широты главных параллелей по формулам

$$\varphi_1 = \varphi_{ю} + 2\Delta/K; \quad \varphi_2 = \varphi_c - 2\Delta/K,$$

где  $2\Delta = \varphi_c - \varphi_{ю}$ . Величина  $K$  зависит от конфигурации граничной линии (рис. 24): при ромбической форме  $K = 3$ ; при форме, близкой к округлой,  $K = 4$ ; при форме, близкой к прямоугольной,  $K = 5$ .

Равноугольная коническая проекция с двумя главными параллелями используется для изображения территорий «средних» размеров, протяженность которых по широте примерно  $10-30^\circ$ . И только в редких случаях, когда предъявляются повышенные требования к изображению площадей, приходится переходить к равнопромежуточной конической проекции, в которой искажение площадей примерно в два раза меньше, чем в равноугольной.

4. Частные масштабы длин  $n_{ю}$  и  $n_c$  на крайних параллелях с заданными широтами  $\varphi_{ю}$  и  $\varphi_c$  равны между собой и во столько раз больше единицы, во сколько меньше единицы минимальный частный масштаб  $n_0$ , т. е.  $1 : n_0 = n_{ю} : 1$  или  $1 : n_0 = n_c : 1$ .

По первому условию

$$\alpha = (\lg r_{ю} - \lg r_c) / (\lg U_c - \lg U_{ю}).$$

Зная  $\alpha$ , находим  $\varphi_0$  по формуле (74).

Второе условие приводит к уравнениям  $n_{ю}n_0 = 1$  и  $n_cn_0 = 1$ . Исходя из формул (72),

$$\frac{\alpha^2 C^2}{r_{ю} U_{ю}^\alpha r_0 U_0^\alpha} = 1; \quad \frac{\alpha^2 C^2}{r_c U_c^\alpha r_0 U_0^\alpha} = 1,$$

откуда

$$C = \frac{1}{\alpha} \sqrt{r_{ю} r_{\phi} U_{ю}^{\alpha} U_{\phi}^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{r_{с} r_{0} U_{с}^{\alpha} U_{0}^{\alpha}}.$$

В этом случае широты главных параллелей не задаются и в результате вычислений принимают дробные значения. Этот способ предложен В. В. Каврайским.

5. Среднее квадратическое искажение длин является наименьшим.

Вся изображаемая территория разбивается на элементарные зоны с одинаковым протяжением по широте  $\Delta\varphi$  (удобно применять  $1^{\circ}$ ) и протяжением по долготе  $\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ . Площадь каждой зоны принимают за ее геометрический вес:

$$p = M \Delta\varphi r \lambda = MN \cos \varphi \operatorname{arc}^2 1^{\circ} \cdot \lambda.$$

За меру искажений берут натуральный логарифм масштаба, получаемый логарифмированием формулы масштаба длин (72):

$$v = \ln \mu = \ln (\alpha C) - \ln r - \alpha \ln U.$$

Среднее квадратическое искажение длин выразится формулой

$$E = \pm \sqrt{\frac{[p v v]}{[p]}}.$$

Обозначим

$$\ln (\alpha C) = \beta; \quad -\ln U = a; \quad 1 = b; \quad -\ln r = h.$$

Тогда

$$v = \alpha a + \beta b + h,$$

причем число таких уравнений равно числу взятых широтных зон.

Неизвестные  $\alpha$  и  $\beta$  находят по способу наименьших квадратов при условии  $[p v v] = \min$  решением системы нормальных уравнений

$$(aa) = [paa] = p_1 a_1 a_1 + p_2 a_2 a_2 + \dots;$$

$$(ab) = [pab] = p_1 a_1 b_1 + p_2 a_2 b_2 + \dots;$$

$$\dots$$

Решая нормальные уравнения, находим

$$\alpha = [(ah)(bb) - (bh)(ab)] / [(aa)(bb) - (ab)^2];$$

$$\beta = [(bh)(aa) - (ah)(ab)] / [(aa)(bb) - (ab)^2];$$

$$\lg C = \operatorname{mod} \beta - \lg \alpha.$$

## § 19. РАВНОВЕЛИКИЕ НОРМАЛЬНЫЕ КОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Условие равновеликого изображения ( $p = 1$ ) для проекции с ортогональной сеткой принимает вид  $mn = 1$ .

Подставив выражения частных масштабов  $m$  и  $n$  из формул (67), получим

$$-\frac{\alpha r d\rho}{M r d\varphi} = 1,$$

откуда

$$\rho d\rho = -\frac{Mr}{\alpha} d\varphi. \quad (75)$$

Проинтегрируем это выражение:

$$\rho^2 = -\frac{2}{\alpha} \int_0^{\varphi} Mr d\varphi = C - \frac{2}{\alpha} S,$$

где  $S = \int_0^{\varphi} Mr d\varphi$  — площадь сфероидической трапеции с разностью долгот в один радиан и протяжением по широте от экватора до параллели с широтой  $\varphi$ .

Если принять

$$C = \frac{2}{\alpha} c,$$

то

$$\rho^2 = \frac{2}{\alpha} (c - S), \quad (76)$$

где  $c$  — второй параметр проекции.

При  $\varphi = 90^\circ$  радиус  $\rho \neq 0$ , так как по формулам (79) и (80)  $c \neq S$ . Следовательно, полюс в равновеликой проекции изображается не точкой, а полярной дугой.

На основании уравнений (65), (66), (67), (76) получим формулы нормальных равновеликих конических проекций для эллипсоида:

$$\begin{aligned} x &= q - \rho \cos \delta; & y &= \rho \sin \delta; \\ \rho^2 &= \frac{2}{\alpha} (c - S); & \delta &= \alpha \lambda; \\ \alpha &= \text{const}; & c &= \text{const}; \end{aligned} \quad (77)$$

$$n = \frac{\alpha \rho}{r}; \quad m = \frac{1}{n} = \frac{r}{\alpha \rho};$$

$$p = 1; \quad \text{tg}(45^\circ + \omega/4) = a.$$

Исследуем частные масштабы длин на экстремум. Первая производная по широте

$$n_\varphi = \frac{\alpha (\rho_\varphi r - r_\varphi \rho)}{r^2},$$

но из формул (75) и (73) соответственно

$$\rho_\varphi = -Mr/\alpha\rho; \quad r_\varphi = -M \sin \varphi,$$

отсюда

$$n_\varphi = \alpha \left( \frac{-Mr^2/\alpha\rho + \rho M \sin \varphi}{r^2} \right) = \frac{\alpha\rho}{r} \frac{M}{r} \left( \sin \varphi - \frac{r^2}{\alpha\rho^2} \right).$$

Первая производная будет равна нулю только при  $\varphi_0$ , т. е.

$$\sin \varphi_0 - r_0^2 / \alpha \rho_0^2 = 0.$$

Тогда уравнение экстремума

$$\rho_0 = r_0 / \sqrt{\alpha \sin \varphi_0}. \quad (78)$$

Так как вторая производная  $(n_{\varphi\varphi})_0 > 0$ , на параллели с широтой  $\varphi_0$  масштаб  $n_0$  будет минимальным.

Частные масштабы по меридианам ( $m$ ) обратно пропорциональны масштабам длин по параллелям ( $n$ ) и уменьшаются с удалением от параллели  $\varphi_0$  в обе стороны, но к полюсу быстрее. Соответственно и промежутки между параллелями к полюсу уменьшаются быстрее, чем к экватору.

Рассмотрим два способа определения параметров  $\alpha$  и  $c$ .

1. Частный масштаб длин  $n_0$  на главной параллели с заданной широтой  $\varphi_0$  минимален и равен единице, т. е.

$$n_0 = \alpha \rho_0 / r_0 = 1.$$

Используя уравнение экстремума (78), получим

$$\frac{\alpha r_0}{r_0 \sqrt{\alpha \sin \varphi_0}} = 1,$$

откуда первый параметр

$$\alpha = \sin \varphi_0.$$

Тогда

$$\rho_0 = N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0.$$

Зная  $\alpha$  и  $\rho_0$ , на основании формулы (76) получим второй параметр:

$$C = \alpha \rho_0^2 / 2 + S_0. \quad (79)$$

2. Частные масштабы длин  $n_1$  и  $n_2$  на двух главных параллелях с заданными широтами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  равны единице, т. е.  $n_1 = 1$  и  $n_2 = 1$ .

Тогда согласно уравнениям (77)

$$(\alpha \rho_1)^2 = r_1; \quad (\alpha \rho_2)^2 = r_2^2.$$

Подставим из формул (77)  $\rho_1^2$  и  $\rho_2^2$  и вычтем из первого уравнения второе:

$$2\alpha (S_2 - S_1) = r_1^2 - r_2^2.$$

Отсюда

$$\alpha = (r_1^2 - r_2^2) / 2 (S_2 - S_1).$$

Зная  $\alpha$ , можно найти полярные радиусы  $\rho_1$  и  $\rho_2$  главных параллелей

$$\rho_1 = r_1 / \alpha; \quad \rho_2 = r_2 / \alpha$$

и второй параметр

$$c = \frac{\alpha \rho_1^2}{2} + S_1 = \frac{\alpha \rho_2^2}{2} + S_2. \quad (80)$$

Если земную поверхность принять за сферу радиуса  $R$ , то

$$\rho^2 = \frac{2R^2}{\alpha} (c - \sin \varphi);$$

$$1) \quad \alpha = \sin \varphi_0; \quad 2) \quad \alpha = \frac{r_1^2 - r_2^2}{2R^2 (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)};$$

$$c = \frac{\alpha \rho_0^2}{2R^2} + \sin \varphi_0. \quad c = \frac{\alpha \rho_1^2}{2R^2} + \sin \varphi_1 = \\ = \frac{\alpha \rho_2^2}{2R^2} + \sin \varphi_2.$$

## § 20. РАВНОПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ПО МЕРИДИАНАМ НОРМАЛЬНЫЕ КОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

В этой проекции полярный радиус  $\rho$  определяется при условии сохранения длин всех меридианов:

$$m = -\frac{d\rho}{M d\varphi} = 1.$$

Тогда

$$d\rho = -M d\varphi \quad (81)$$

и после интегрирования

$$\rho = -s + C = C - s, \quad (82)$$

где  $s$  — длина дуги меридиана от экватора до параллели с широтой  $\varphi$ ,  $C$  — параметр, выражающий радиус экватора в проекции (при  $\varphi = 0$   $s = 0$  и  $\rho_{\text{экв}} = C$ ). Полюс изобразится дугой окружности радиусом  $\rho = C - s_0^{90^\circ}$ .

Общие формулы нормальных равнопромежуточных по меридианам конических проекций, полученные на основании формул (82), (65), (66), (67), имеют вид

$$x = q - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta; \\ \rho = C - s; \quad \delta = \alpha \lambda; \\ \alpha = \text{const}; \quad C = \text{const}; \quad (83) \\ m = 1; \quad n = \alpha(C - s)/r; \\ \rho = n; \quad \sin(\omega/2) = (a - b)/(a + b).$$

Значения  $s$  даются в прил. 6.

Исследуем на экстремум частный масштаб длин  $n$ . Так как из формул (81) и (83)

$$\rho_{\varphi} = -M; \quad r_{\varphi} = -M \sin \varphi,$$

то

$$\begin{aligned} n_{\varphi} &= \alpha \frac{-Mr + M\rho \sin \varphi}{r^2} = \frac{\alpha\rho}{r} \frac{M}{r} \left( -\frac{r}{\rho} + \sin \varphi \right) = \\ &= n \frac{M}{r} \left( \sin \varphi - \frac{r}{\rho} \right). \end{aligned}$$

Первая производная равна нулю только при  $\varphi_0$ , т. е.

$$\sin \varphi_0 - r_0/\rho_0 = 0.$$

Тогда уравнение экстремума

$$\rho_0 = C - s_0 = N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0. \quad (84)$$

Так как вторая производная  $(n_{\varphi\varphi})_0 > 0$ , на параллели с широтой  $\varphi_0$  частный масштаб  $n_0$  будет минимальным:

$$n_0 = \alpha N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0 / N_0 \cos \varphi_0 = \alpha / \sin \varphi_0. \quad (85)$$

Рассмотрим способы определения параметров  $\alpha$  и  $C$ .

1. Масштаб  $n_0$  на главной параллели с заданной широтой  $\varphi_0$  является наименьшим и равен единице, т. е.  $n_0 = 1$ . С учетом формулы (85)

$$n_0 = \alpha / \sin \varphi_0 = 1;$$

$$\alpha = \sin \varphi_0,$$

$$C = s_0 + N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0.$$

2. Частные масштабы длин  $n_1$  и  $n_2$  на двух главных параллелях с заданными широтами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  равны единице, т. е.  $n_1 = 1$  и  $n_2 = 1$ .

Тогда

$$\alpha (C - s_1) / r_1 = 1; \quad \alpha (C - s_2) / r_2 = 1,$$

отсюда

$$C = s_1 + r_1/\alpha; \quad C = s_2 + r_2/\alpha.$$

Вычитая из первой формулы вторую, найдем параметр  $\alpha$ :

$$s_2 - s_1 = (r_1 - r_2)/\alpha; \quad \alpha = (r_1 - r_2)/(s_2 - s_1).$$

3. Среднее квадратическое искажение длин по параллелям является наименьшим.

Так же как и в равноугольной конической проекции, территория разбивается на элементарные широтные зоны с одинаковым прогибанием по долготе  $\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$ .

Геометрический вес каждой зоны

$$p = M \Delta \varphi r \lambda.$$

За меру искажения в этой проекции принимают

$$s = n - 1 = \alpha C r - \alpha s' r - 1.$$



Тогда среднее квадратическое искажение длин по параллелям

$$E_n = \pm \sqrt{\frac{[\rho v v]}{[\rho]}}$$

Обозначив

$$\beta = \alpha C; \quad -s/r = a; \quad 1/r = b; \quad 1 = h,$$

получим

$$\alpha a + \beta b - h = v.$$

Число полученных уравнений равно числу зон.

Решая эти уравнения под условием минимума  $[\rho v v]$ , находим  $\alpha$  и  $\beta$ , а затем  $C = \beta/\alpha$ .

В. В. Каврайский определил параметры  $\alpha$  и  $C$  под условием минимума среднеквадратического искажения длин в пределах территории СССР к югу от полярного круга. С полученными значениями  $\alpha$  и  $C$  были вычислены частные масштабы  $n$ , а затем с помощью графика изменения  $n$  определены широты главных параллелей. Округлив их до целых градусов, В. В. Каврайский заново определил  $\alpha$  и  $C$  по формулам второго способа. Широты главных параллелей:  $\varphi_1 = 47^\circ$  и  $\varphi_2 = 62^\circ$ .

4. В равнопромежуточной по меридианам проекции Ф. Н. Красовского для территории СССР сохраняется площадь пояса, протяжение которого по широте известно; соблюдается равенство частных масштабов длин на крайних параллелях этого пояса с широтами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  ( $n_1 = n_2$ ); сумма квадратов искажений длин по параллелям для всей территории имеет минимальное значение.

Протяжение пояса по широте  $2\theta$  было задано, а параметры  $\alpha$  и  $\varphi_1$  найдены при условии

$$E_n = \pm \sqrt{\frac{[\rho v v]}{[\rho]}} = \min,$$

где  $v = n - 1$ ,  $\rho$  — протяжение по долготе параллелей с широтами  $\varphi$ , выражающее их геометрический вес. Частный масштаб длин по меридианам при принятых условиях не равен единице.

Приведем основные формулы проекции для случая, когда земная поверхность принимается за сферу радиуса  $R = 1$ :

$$\rho = \rho_1 + m(\varphi_1 - \varphi) = \rho_2 + m(\varphi_2 - \varphi),$$

где  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  — широты крайних параллелей пояса,

$$\varphi_1 = 73^\circ 28' 42''; \quad \varphi_2 = 39^\circ 28' 42'';$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2\theta = 34^\circ; \quad \varphi_m = (\varphi_1 + \varphi_2)/2 = 66^\circ 28' 42'';$$

$$\rho_1 = \cos \varphi_1 / \sqrt{\alpha \cos \theta \sin \varphi_m}; \quad \rho_2 = \cos \varphi_2 / \sqrt{\alpha \cos \theta \sin \varphi_m};$$

$$\alpha = 0,851\ 568; \quad n = \alpha \rho / \cos \varphi;$$

$$m = \frac{\sin \theta}{\theta} \sqrt{\frac{\sin \varphi_m}{\alpha \cos \theta}} = 0,99\ 703.$$

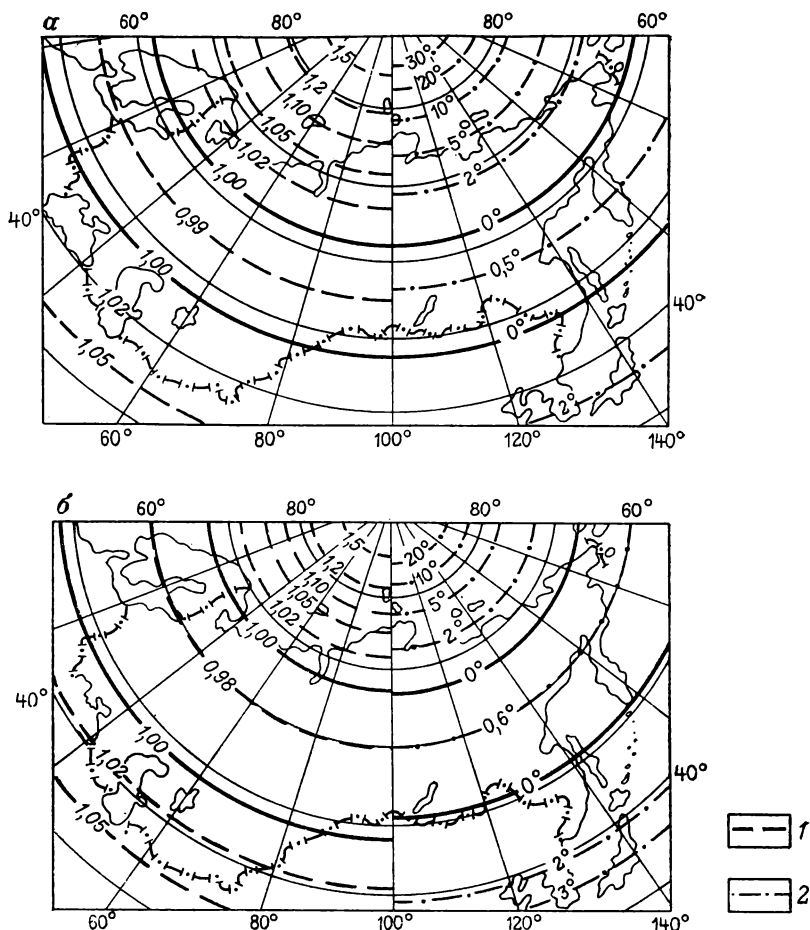


РИС. 25. Изоколы  $\rho$  (1) и  $\omega$  (2) в равнопромежуточных конических проекциях: а — Каврайского; б — Красовского

В табл. 1 приведены частные масштабы длин, площадей и наибольшие искажения углов в равнопромежуточных конических проекциях Каврайского и Красовского, разработанных для карт территории СССР.

Как видно из табл. 1, в проекции Красовского искажения длин и углов на 80-й параллели меньше, чем в проекции Каврайского, почти в два раза. Распределение искажений в обеих проекциях показано на рис. 25.

Проекцию Каврайского следует применять для карт территории Советского Союза, когда необходимо получить изображение его материковой части с минимальными искажениями, проекцию Красовского — в случаях, когда не только материковая часть, но и район полярного бассейна должен быть изображен с возможно меньшими искажениями.

Т а б л и ц а 1

Параметры проекций	Каврайского		Красовского	
$\alpha$ $C(\text{км})$ $t$	0,811 823 8 10 575,2 1,000 00		0,851 568 0 5968,3 0,997 03	
$\varphi$ , градус	$n$	$\omega$	$n$	$\omega$
30	1,065	3°38'	1,084	4°45'
40	1,020	1 07	1,031	1 56
50	0,995	0 18	0,998	0 05
60	0,996	0 15	0,987	0 35
70	1,041	2 19	1,010	0 45
80	1,235	12 03	1,136	7 28

## § 21. О КОСЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ КОНИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЯХ

Нормальные конические проекции наиболее выгодны для изображения территорий, вытянутых вдоль параллелей. Если же территория вытянута вдоль малого круга, не совпадающего с параллелью, т. е. вдоль альмукантарата, то могут быть использованы косые или поперечные конические проекции.

В этих проекциях земная поверхность принимается за сферу радиуса  $R$ , вводится система полярных сферических координат  $z$  и  $a$ , которой соответствуют линии вертикалов и альмукантаратов. В косых проекциях широта полюса  $\varphi_0$  полярных сферических координат  $0 < \varphi_0 < 90^\circ$ , в поперечных —  $\varphi_0 = 0$ .

В косых и поперечных конических проекциях вертикалы изображаются прямыми линиями, сходящимися в одной точке под углами, пропорциональными разностям азимутов, альмукантараты — дугами концентрических окружностей с центром в точке схода вертикалов. Меридиан полюса  $Q$  (одновременно это и вертикал полюса  $P$ ) изображается прямой линией и принимается за ось абсцисс проекции, является осью симметрии для остальных меридианов и параллелей, которые изображаются кривыми линиями.

Начало прямоугольных координат выбирают обычно в точке пересечения оси абсцисс и параллели с наименьшей широтой.

Главные направления в косых и поперечных конических проекциях совпадают с вертикалами и альмукантаратами, поэтому частные масштабы длин по вертикалам и альмукантаратам ( $\mu_1, \mu_2$ ) являются экстремальными.

Процесс вычисления косых и поперечных конических проекций складывается из нескольких этапов:

переход от эллипсоида к сфере и выбор радиуса сферы  $R$ ;

определение координат полюса косо́й или поперечной системы  $\varphi_0, \lambda_0$ ;

переход от географических координат  $\varphi, \lambda$  к координатам  $z, a$ ; вычисление координат  $\rho, \delta; x, y$ ; масштабов и искажений углов.

Общие формулы косо́х и поперечных конических проекций можно получить по формулам (65), (66), (67), подставив вместо  $\varphi$  и  $\lambda$  величины  $(90^\circ - z)$  и  $a$ . Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}x &= q - \rho \cos \delta; & y &= \rho \sin \delta; \\ \rho &= f(z); & \delta &= \alpha a; \\ \mu_1 &= d\rho/Rdz; & \mu_2 &= \alpha\rho/R \sin z; \\ \rho &= \mu_1\mu_2; & \sin(\omega/2) &= (a-b)/(a+b); \\ \alpha &= \text{const.}\end{aligned}\tag{86}$$

Как видно из формул (86), в косо́х и поперечных конических проекциях искажения зависят только от зенитного расстояния  $z$ , а изоколы являются дугами концентрических окружностей, совпадающих с альмукантаратами.

Полярный радиус  $\rho$  находят в зависимости от условий изображения.

Приведем формулы косо́й и поперечной равноугольных конических проекций для случаев одного или двух главных альмукантаратов с заданными зенитными расстояниями соответственно  $z_0$  или  $z_1$  и  $z_2$ , для которых  $\mu_2 = 1$ :

$$x = q - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$

$$\rho = C \operatorname{tg}^\alpha \frac{z}{2}; \quad \delta = \alpha a;$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \alpha C \operatorname{tg}^\alpha \frac{z}{2} / R \sin z;$$

$$\alpha = \text{const.}$$

$$1) \quad \alpha = \cos z_0;$$

$$2) \quad \alpha = (\lg \sin z_1 - \lg \sin z_2) / \left( \lg \operatorname{ctg} \frac{z_2}{2} - \lg \operatorname{ctg} \frac{z_1}{2} \right);$$

$$C = R \operatorname{tg} z_0 \operatorname{ctg}^{\cos z_0} \frac{z_0}{2}.$$

$$C = R \sin z_1 \operatorname{ctg} \frac{z_1}{2} / \alpha.$$

Косо́е и поперечные равноугольные конические проекции могут быть использованы для составления маршрутных аэронавигационных карт.

# Глава V

## АЗИМУТАЛЬНЫЕ И ПЕРСПЕКТИВНО-АЗИМУТАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

### § 22. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ АЗИМУТАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

Азимутальные проекции можно рассматривать как частный случай конических проекций, в которых параметр  $\alpha$  равен единице.

Азимутальные проекции чаще всего применяются для карт мелких масштабов, поэтому поверхность Земли или другой планеты обычно принимают за сферу радиуса  $R$ . Если же проекции используются для карт средних или крупных масштабов, то земная поверхность может быть принята за эллипсоид.

Азимутальные проекции делятся на нормальные ( $\varphi_0 = 90^\circ$ ), косые ( $0^\circ < \varphi_0 < 90^\circ$ ) и поперечные ( $\varphi_0 = 0^\circ$ ). Полнос сферической (или сферондической) системы координат  $Q(\varphi_0, \lambda_0)$  выбирается в центральной точке территории.

В нормальных азимутальных проекциях (рис. 26) меридианы изображаются прямыми линиями, пересекающимися в одной точке под углами, равными разностям долгот соответствующих меридианов, а параллели — концентрическими окружностями с центром в точке пересечения меридианов. Промежутки между параллелями определяются принятым характером изображения или способом проектирования точек поверхности на картинную плоскость (перспективно-азимутальные проекции).

В косых и поперечных проекциях такой же вид имеет сетка вертикалов и альмукантаратов, меридианы же и параллели чаще всего изображаются кривыми линиями (рис. 27).

Получение косых и поперечных азимутальных проекций складывается из нескольких этапов:

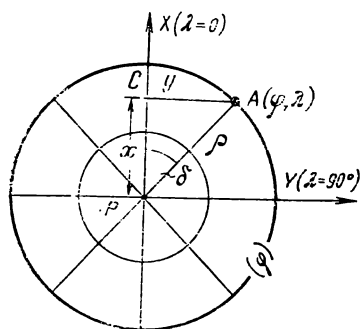


РИС. 26. Системы координат в нормальной азимутальной проекции

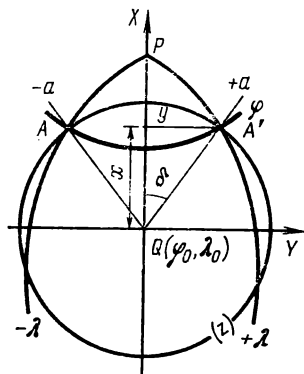


РИС. 27. Системы координат в косой и поперечной азимутальных проекциях

1) для карт крупных и средних масштабов — переход от эллипсоида к сфере (см. гл. II), для карт мелких масштабов — выбор радиуса сферы  $R$ ;

2) определение координат  $\varphi_0$  и  $\lambda_0$  полюса  $Q$  полярных сферических координат, который обычно выбирают в центральной точке картографируемой территории;

3) переход от географических координат ( $\varphi$  и  $\lambda$ ) к полярным сферическим координатам ( $z$  и  $a$ ) косо́й или поперечной системы по формулам (59), (60), (61);

4) вычисление координат проекции, частных масштабов и искажений углов.

В азимутальных проекциях используются две системы плоских координат — полярные ( $\rho$  и  $\delta$ ) и прямоугольные ( $x$  и  $y$ ) (см. рис. 26).

Общие формулы азимутальных проекций можно получить для случая косо́й проекций как наиболее общего:

$$x = \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$

$$\rho = f(z); \quad \delta = a;$$

$$\mu_1 = d\rho/Rdz = \rho z/R; \quad \mu_2 = \rho/R \sin z; \quad (87)$$

$$\rho = \mu_1 \mu_2; \quad \sin \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}(45^\circ + \omega/4) = \sqrt{a/b},$$

где  $\mu_1$  — частные масштабы длин по вертикалам;  $\mu_2$  — частные масштабы длин по альмукантаратам;  $a$  и  $b$  — экстремальные частные масштабы длин. Формулы нормальных азимутальных проекций могут быть получены по формулам (87) путем замены  $z$  на  $(90^\circ - \varphi)$  и  $a$  на  $\lambda$ .

Значение функции, определяющей полярный радиус  $\rho$ , находят в зависимости от условий изображения — равноугольного, равновеликого, равнопромежуточного по вертикалам (меридианам), или иного по характеру искажений.

Так как в азимутальных проекциях вертикалы и альмукантараты взаимно перпендикулярны, с ними совпадают главные направления и масштабы  $\mu_1$  и  $\mu_2$  являются экстремальными ( $\mu_1 = b$ ,  $\mu_2 = a$ ). Масштабы и искажения являются функциями только зенитного расстояния (широты), поэтому изоколы совпадают с альмукантаратами (параллелями) и имеют вид окружностей. Азимутальные проекции выгодны для изображения территорий с округлыми очертаниями.

В проекциях, определяемых формулами (87), искажения всех видов отсутствуют в центральной точке проекции и нарастают с удалением от нее. Для более равномерного распределения искажений в формулу для вычисления  $\rho$  может быть введен редуцированный коэффициент  $k < 1$ , равный масштабу длин в центральной точке. Тогда главный масштаб будет сохранен вдоль главного альмукантарата (главной параллели — для нормальных проекций).

Нормальные азимутальные проекции применяются для изобра-

жения полярных областей, северного и южного полушарий. Более часто используются косые и поперечные проекции — для карт материков, западного и восточного полушарий и других частей земной поверхности или планет.

### § 23. РАВНОУГОЛЬНЫЕ АЗИМУТАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

В равноугольной азимутальной проекции полярный радиус определяется из условия независимости частного масштаба длин в данной точке от направления, т. е.

$$\mu_1 = \mu_2.$$

Подставив в это условие значения  $\mu_1$  и  $\mu_2$  из формул (87), получим

$$d\rho/Rdz = \rho/R \sin z; \quad d\rho/\rho = dz/\sin z.$$

Проинтегрируем это выражение

$$\ln \rho = \ln \operatorname{tg} \frac{z}{2} + \ln C,$$

следовательно,

$$\rho = C \operatorname{tg} \frac{z}{2},$$

где  $C$  — постоянная интегрирования.

Найдем выражение для частного масштаба длин  $\mu$ , подставив в формулу  $\mu_2$  полученное значение  $\rho$ :

$$\mu = \left( C \operatorname{tg} \frac{z}{2} \right) / R \sin z = \left( C \sec^2 \frac{z}{2} \right) / 2R.$$

Параметр  $C$  определим, поставив условие, чтобы частный масштаб длин в центральной точке ( $z = 0$ ) равнялся единице. Тогда

$$C = 2R.$$

Формулы равноугольной азимутальной проекции для этого случая:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \delta; & y &= \rho \sin \delta; \\ \rho &= 2R \operatorname{tg} (z/2); & \delta &= \alpha; \\ \mu &= \sec^2 (z/2); & p &= \mu^2; \\ \omega &= 0. \end{aligned} \tag{88}$$

Если же поставить условие, что частный масштаб длин равен единице на главном альмукантарате с зенитным расстоянием  $z_k$ , то

$$C = 2R \cos^2 (z_k/2).$$

Обозначив

$$\cos^2 (z_k/2) = k,$$

получим

$$C = 2Rk,$$

где  $k$  — редуционный коэффициент. Тогда формулы (87) для вычислений  $\rho$ ,  $\mu$  и  $p$  примут вид:

$$\rho = 2Rk \operatorname{tg}(z/2);$$

$$\mu = k \sec^2(z/2); \quad p = \mu^2.$$

При  $z \doteq 0$   $k = \mu$ , т. е.  $k$  — масштаб длин в центральной точке проекции.

Если в формулах (88) заменить  $z$  на  $(90^\circ - \varphi)$ , а на  $\lambda$ , то получим формулы равноугольной нормальной азимутальной проекции для случая, когда частный масштаб длин равен единице в точке географического полюса:

$$x = \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$

$$\rho = 2R \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi/2); \quad \delta = \lambda; \tag{89}$$

$$m = n = \sec^2(45^\circ - \varphi/2); \quad p = m^2.$$

Для более равномерного распределения искажений в формулы может быть также введен редуционный коэффициент

$$k = \cos^2(45^\circ - \varphi_k/2).$$

Тогда формулы (89) примут вид

$$\rho = 2Rk \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi/2);$$

$$m = n = k \sec^2(45^\circ - \varphi/2),$$

где  $\varphi_k$  — широта главной параллели, на которой искажения всех видов равны нулю, а  $k$  — масштаб длин в точке географического полюса.

В равноугольной азимутальной проекции расстояния между альмукуантаратами (параллелями) увеличиваются с удалением от центральной точки проекции. Нормальная равноугольная азимутальная проекция шара используется для создания карт звездного неба.

## § 24. РАВНОУГОЛЬНЫЕ АЗИМУТАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ЭЛЛИПСОИДА

Рассмотрим три способа получения этих проекций.

**Равноугольная азимутальная проекция эллипсоида для изображения полярных областей**

Эта проекция является частным случаем равноугольной конической проекции при  $\alpha = 1$ .

Формулы (71) принимают вид

$$x = \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$



$$\begin{aligned} \rho &= C/U; \quad \delta = \lambda; \\ m &= n = C/rU; \quad \rho = m^2; \\ C &= r_0 U_0, \end{aligned}$$

где  $r_0$  и  $U_0$  определяются по заданной широте  $\varphi_0$  главной параллели, для которой частный масштаб равен единице.

Равноугольная азимутальная проекция эллипсоида для изображения территорий с округлыми очертаниями (кроме полярных областей)

Приведем формулы проекции, являющейся частным случаем равноугольной проекции Лагранжа (проекция Лагранжа будет рассматриваться позже) при  $\alpha = 1$ :

$$\begin{aligned} x &= \frac{k \sin \delta}{1 + \cos \delta \cos \lambda}; \quad y = \frac{k \cos \delta \sin \lambda}{1 + \cos \delta \cos \lambda}; \\ m &= n = \frac{k \cos \delta}{r(1 + \cos \delta \cos \lambda)}; \quad \rho = m^2; \\ \operatorname{tg}(45^\circ + \delta/2) &= \beta U. \end{aligned}$$

Здесь  $\beta$  и  $k$  — параметры проекции, определяемые по формулам

$$\beta = \frac{1 + \sin \varphi_0}{1 - \sin \varphi_0} U_0; \quad k = m_0 r_0 (1 + \sec \delta_0),$$

где

$$\operatorname{tg}(\delta/2) = \sin \varphi_0,$$

$\varphi_0$  — широта заданной параллели (средней).

Равноугольная азимутальная проекция эллипсоида, получаемая с использованием косо́й полярной сфероидической системы координат

Учитывая формулы связи полярных и геодезических координат, квадрат линейного элемента поверхности эллипсоида (при вычислениях с точностью до членов с  $e^4$ ) представим в виде

$$ds^2 = P^2 (dz^2 + \sin^2 z da^2), \quad (90)$$

где

$$P = N_0 \left\{ 1 - \frac{e^2}{2} [\sin z \cos a \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 (\cos z - 1)]^2 \right\} + \dots;$$

$N_0$  — радиус кривизны сечения первого вертикала в точке полюса;  $z$ ,  $a$  определяются по формулам (59) и (60) или (61).

Принимая во внимание формулы (87) и (90), частные масштабы длин вдоль вертикалов и альмукантаратов можно определить из выражений

$$\mu_1 = d\rho/Pdz; \quad \mu_2 = \rho/P \sin z. \quad (91)$$

Записав условия равноугольности  $\mu_1 = \mu_2$ ,  $f = 0$ , получим  $d\rho/\rho = dz/\sin z$ .

Проинтегрировав полученное дифференциальное уравнение при условии равенства частных масштабов длин единице в точке полюса, получим

$$\rho = 2N_0 \operatorname{tg}(z/2).$$

Частные масштабы длин с учетом выражений (90), (91) будут равны

$$\mu = \sec^2 \frac{z}{2} \left\{ 1 + \frac{e^2}{2} [\sin z \cos a \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 (\cos z - 1)]^2 \right\} + \dots$$

Формулы данной проекции:

$$x = \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$

$$\rho = 2N_0 \operatorname{tg} \frac{z}{2}; \quad \delta = a;$$

$$\mu = \sec^2 \frac{z}{2} \left\{ 1 + \frac{e^2}{2} [\sin z \cos a \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 (\cos z - 1)]^2 \right\} + \dots;$$

$$\operatorname{tg} a = t_4 / (t_1 - e^{2\tau} \cos \varphi_0); \quad (92)$$

$$\sin z \cos a = t_1 + e^{2\tau} (t_1 \sin \varphi - \cos \varphi_0);$$

$$\sin z \sin a = t_4 (1 + e^{2\tau} \sin \varphi);$$

$$\cos z = t_5 + e^{2\tau} (t_5 \sin \varphi - \sin \varphi_0),$$

где

$$t_1 = \sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos (\lambda - \lambda_0);$$

$$t_4 = \cos \varphi \sin (\lambda - \lambda_0);$$

$$t_5 = \sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos (\lambda - \lambda_0);$$

$$\tau = \sin \varphi - \sin \varphi_0,$$

$\varphi_0$ ,  $\lambda_0$  — географические координаты точки нового полюса.

Эта проекция может быть использована для картографирования в средних и крупных масштабах любых территорий с границами округлых очертаний. Формулы проекции удобны для программирования.

## § 25. РАВНОВЕЛИКИЕ АЗИМУТАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

В этой проекции для случая, когда частные масштабы длин равны единице в центральной точке проекции, полярный радиус  $\rho$  находят из условия равновеликости

$$\rho = \mu_1 \mu_2 = 1.$$

После подстановки значений частных масштабов длин из формул (87)

$$\frac{d\rho}{Rdz} \frac{\rho}{R \sin z} = 1,$$

откуда

$$\rho d\rho = R^2 \sin z dz.$$

Проинтегрировав это выражение, получим

$$\rho^2/2 = C - R^2 \cos z.$$

Постоянную интегрирования  $C$  находим из условия, что в центральной точке проекции ( $z = 0$ )  $\rho = 0$ , тогда  $C = R^2$  и

$$\rho^2 = 2R^2 (1 - \cos z) = 4R^2 \sin^2 (z/2);$$

$$\rho = 2R \sin (z/2). \quad (93)$$

Формулы равновеликой азимутальной проекции

$$x = \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$

$$\rho = 2R \sin (z/2); \quad \delta = a;$$

$$\mu_1 = \cos (z/2); \quad \mu_2 = \sec (z/2); \quad (94)$$

$$\rho = 1; \quad \operatorname{tg} (45^\circ + \omega/4) = \sec (z/2).$$

В данном случае в центральной точке проекции искажения всех видов отсутствуют.

Если же поставить условие, что частный масштаб длин  $\mu_2$  равенся единице на главном альмукантарате с зенитным расстоянием  $z_k$ , то масштаб площади будет величиной постоянной, но не равной единице.

Для этого случая формулы (94) примут вид

$$\rho = 2Rk \sin (z/2); \quad \delta = a;$$

$$\mu_1 = k \cos (z/2); \quad \mu_2 = k \sec (z/2);$$

$$\rho = k^2; \quad \operatorname{tg} (45^\circ + \omega/4) = \sec (z/2).$$

Здесь редуционный коэффициент  $k = \cos (z_k/2)$  'равен масштабу длин в центральной точке проекции, так как при  $z = 0$  и  $k = \cos (z_k/2) = 1$ .

Заменив в формулах (94)  $z$  на  $(90^\circ - \varphi)$  и  $a$  на  $\lambda$ , получим для равновеликой нормальной азимутальной проекции

$$x = \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$

$$\rho = 2R \sin (45^\circ - \varphi/2); \quad \delta = \lambda;$$

$$m = \cos (45^\circ - \varphi/2); \quad n = \sec (45^\circ - \varphi/2);$$

$$\rho = 1; \quad \operatorname{tg} (45^\circ + \omega/4) = \sec (45^\circ - \varphi/2).$$

В этом случае искажения всех видов отсутствуют в точке географического полюса ( $\varphi = 90^\circ$ ).

В равновеликой азимутальной проекции (проекция Ламберта) расстояния между альмукантаратами (параллелями) уменьшаются с удалением от центральной точки проекции пропорционально изменению  $\sin \frac{z}{2}$ .

Косая и поперечная равновеликие азимутальные проекции широко применяются для карт полушарий и материков (кроме Антарктиды).

## § 26. РАВНОПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ПО ВЕРТИКАЛАМ (МЕРИДИАНАМ) АЗИМУТАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

В этой проекции ставится условие, что частный масштаб длин по вертикалам равен единице.

$$\mu_1 = d\rho/Rdz = 1.$$

После интегрирования

$$\rho = Rz + C,$$

где  $C$  — постоянная интегрирования. Так как при  $z = 0$   $\rho = 0$ , то и  $C = 0$ , а следовательно,  $\rho = Rz$ , т. е. полярный радиус  $\rho$  равен выпрямленной дуге вертикала, и расстояния между альмукантаратами постоянны.

Тогда формулы равнопромежуточной по вертикалам азимутальной проекции будут иметь вид

$$\begin{aligned} x &= \cos \delta; & y &= \sin \delta; \\ \rho &= Rz; & \delta &= a; \\ \mu_1 &= 1; & \mu_2 &= z/\sin z; \\ \rho &= \mu_2; & \sin(\omega/2) &= (\mu_2 - 1)/(\mu_2 + 1). \end{aligned} \tag{95}$$

В этом случае в центральной точке проекции ( $z = 0$ ) искажения всех видов отсутствуют.

Если же поставить условие, чтобы частный масштаб длин равнялся единице на главном альмукантарате ( $z_k$ ), то частный масштаб длин по вертикалам будет постоянен, но меньше единицы:

$$\mu_1 = \sin z_k/z_k.$$

Тогда формулы (95) примут вид

$$\begin{aligned} \rho &= Rkz; & \delta &= a; \\ \mu_1 &= k = (\sin z_k)/z_k; & \mu_2 &= k(z/\sin z); \\ \rho &= \mu_1 \mu_2; & \sin(\omega/2) &= (\mu_2 - k)/(\mu_2 + k). \end{aligned}$$

Для равнопромежуточной по меридианам нормальной проекции:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \delta; & y &= \rho \sin \delta; \\ \rho &= R(90^\circ - \varphi); & \delta &= \lambda; \\ n &= \rho = R(90^\circ - \varphi)/\cos \varphi; & \sin(\omega/2) &= (n - 1)/(n + 1). \end{aligned}$$

Если же поставить условие, чтобы на главной параллели  $\varphi_k$  частный масштаб  $n_k = 1$ , то

$$\rho = kR(90^\circ - \varphi); \quad m = k = \cos \varphi_k / (90^\circ - \varphi_k).$$

Равнопромежуточную по вертикалам (меридианам) азимутальную проекцию часто называют проекцией Постеля.

Так как в этой проекции длины вертикалов (меридианов) передаются без искажений, ее применяют для специальных карт, по которым требуется определять расстояния от центральной точки до любых других точек. Нормальную проекцию применяют для карт Арктики и Антарктики.

## § 27. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПЕРСПЕКТИВНО-АЗИМУТАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ СФЕРЫ

В перспективно-азимутальных проекциях картографируемую поверхность принимают за сферу радиуса  $R$  или за эллипсоид вращения. Изображение проектируется по законам линейной перспективы из точки зрения на картинную плоскость; при этом точка зрения помещается на продолжении одного из диаметров сферы. Этот диаметр считается основным и совпадает с главным лучом проектирования. Картинная плоскость перпендикулярна к основному диаметру и, как правило, является касательной к поверхности в центральной точке изображаемой территории. С данной точкой совмещается и полюс полярных сферических координат  $Q(\varphi_0, \lambda_0)$ .

Перспективно-азимутальные проекции подразделяют на проекции с негативным изображением и проекции с позитивным изображением.

В проекциях с негативным изображением на картинную плоскость  $K$  проектируется наиболее удаленная от точки зрения  $g_n$  часть сферы (рис. 28). В проекциях же с позитивным изображением проектируется та часть сферы, которая обращена к точке зрения  $g_n$ .

Если расстояние от точки зрения до картинной плоскости принять за  $L$ , а расстояние от точки зрения до центра сферы — за  $D$ , то для перспективно-азимутальных проекций с негативным изображением

$$L_n = D + R,$$

а для перспективно-азимутальных проекций с позитивным изображением

$$L_n = D - R.$$

В зависимости от расстояния  $D$  перспективно-азимутальные проекции подразделяются на гномонические ( $D = 0$ ), стереографические ( $D = R$ ), внешние ( $R < D < \infty$ ), ортографические ( $D = \infty$ ).

В зависимости от широты  $\varphi_0$  полюса полярной сферической системы координат перспективно-азимутальные проекции подразде-

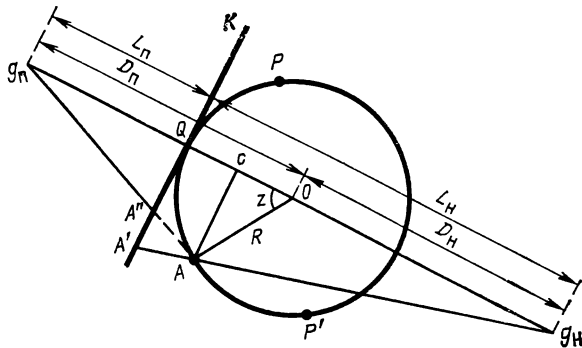


РИС. 28. Схема образования перспективных проекций с негативным и позитивным изображениями

ляются на нормальные ( $\varphi_0 = 90^\circ$ ), косые ( $0^\circ < \varphi_0 < 90^\circ$ ), поперечные ( $\varphi_0 = 0$ ).

Сетка вертикалов и альмукантаратов изображается так же, как и в азимутальных проекциях. Основные формулы идентичны формулам азимутальных проекций, но полярный радиус  $\rho$  находят геометрическим путем.

Определим  $\rho$  для косых внешних проекций с негативным и позитивным изображениями, как для наиболее общих случаев (см. рис. 28).

При негативном изображении из подобия треугольников  $g_nQA'$  и  $g_nCA$

$$QA'/CA = g_nQ/g_nC;$$

из  $\Delta OCA : CA = R \sin z; OC = R \cos z$ .

Так как  $g_nQ = L_n; g_nO = D_n; g_nC = D_n + R \cos z$ , то

$$\frac{\rho_n}{R \sin z} = \frac{L_n}{D_n + R \cos z};$$

$$\rho_n = \frac{L_n R \sin z}{D_n + R \cos z} = \frac{(D_n + R) R \sin z}{D_n + R \cos z}. \quad (96)$$

При позитивном изображении из подобия треугольников  $g_nQA''$  и  $g_nCA$

$$QA''/CA = g_nQ/g_nC.$$

Подставив значения

$$g_nQ = L_n; g_nO = D_n; g_nC = D_n - R \cos z,$$

получим

$$\rho_n = \frac{L_n R \sin z}{D_n - R \cos z} = \frac{(D_n - R) R \sin z}{D_n - R \cos z}.$$

Применяя общие формулы азимутальных проекций (87), получим формулы перспективно-азимутальных проекций с негативным и позитивным изображениями:

$$x = \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$

$$\delta = a;$$

$$\rho_n = \frac{(D+R)R \sin z}{D+R \cos z}; \quad \rho_n = \frac{(D-R)R \sin z}{D-R \cos z}; \quad (97)$$

$$(\mu_1)_n = \frac{(D+R)(D \cos z + R)}{(D+R \cos z)^2}; \quad (\mu_1)_n = \frac{(D-R)(D \cos z - R)}{(D-R \cos z)^2};$$

$$(\mu_2)_n = \frac{D+R}{D+R \cos z}; \quad (\mu_2)_n = \frac{D-R}{D-R \cos z};$$

$$p = \mu_1 \mu_2; \quad \sin(\omega/2) = (\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1).$$

Так как изоколы имеют вид окружностей, совпадающих с альмукантаратами, перспективно-азимутальные проекции используются для изображения территорий округлой формы.

Внешние проекции с позитивным изображением могут применяться для построения картографической сетки на аэрокосмических снимках как в случаях, когда оптическая ось фотокамеры перпендикулярна к картографируемой поверхности, так и в случаях наличия углов наклона.

Рассмотрим частные случаи перспективно-азимутальных проекций с негативным изображением для сферы, нашедших широкое применение.

## § 28. ГНОМОНИЧЕСКИЕ, СТЕРЕОГРАФИЧЕСКИЕ И ОРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

### Гномоническая проекция

В этой проекции точка зрения расположена в центре сферы. Подставив значение  $D = 0$  в формулы (97), получим

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \delta; & y &= \rho \sin \delta; \\ \rho &= R \operatorname{tg} z; & \delta &= a; \\ \mu_1 &= \sec^2 z; & \mu_2 &= \sec z; \\ p &= \mu_1 \mu_2; & \sin(\omega/2) &= (\mu_1 - \mu_2)/(\mu_1 + \mu_2) = \operatorname{tg}^2(z/2). \end{aligned} \quad (98)$$

В поперечной проекции координаты  $x$ ,  $y$  вычисляются по формулам

$$x = R \operatorname{tg} \varphi \sec \lambda; \quad y = R \operatorname{tg} \lambda.$$

Формулы нормальной проекции можно получить по формулам (98), заменив  $z$  на  $(90^\circ - \varphi)$  и  $a$  на  $\lambda$ :

$$x = R \operatorname{ctg} \varphi \cos \lambda; \quad y = R \operatorname{ctg} \varphi \sin \lambda;$$

$$m = \operatorname{cosec}^2 \varphi; \quad n = \operatorname{cosec} \varphi;$$

$$p = mn; \quad \sin(\omega/2) = \operatorname{tg}^2(45^\circ - \varphi/2).$$

Расстояния между альмукантаратами (параллелями) быстро возрастают с удалением от центральной точки. В поперечной и косой гномонических проекциях меридианы и экватор изображаются

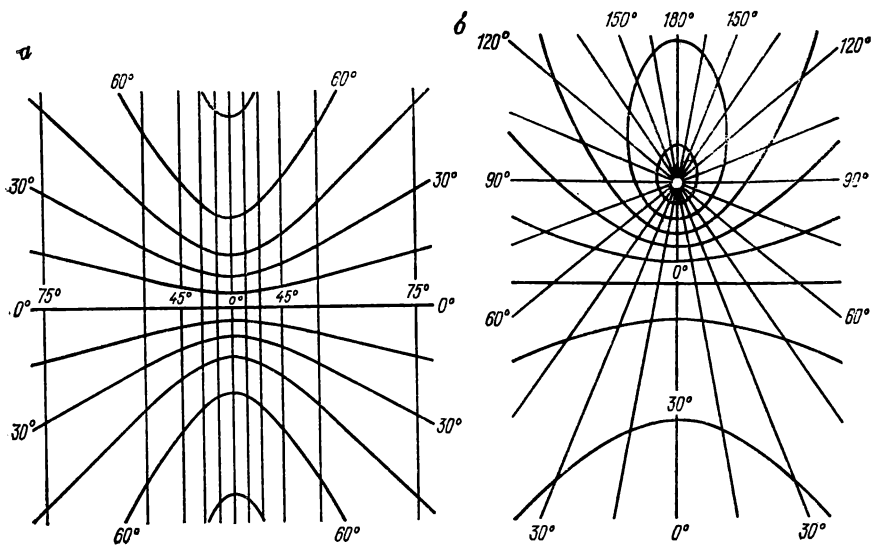


РИС. 29. Гномоническая проекция:  
 а — поперечная; б — косая

прямыми линиями (рис. 29). В косой проекции параллель центральной точки с широтой  $\varphi_0$  изображается параболой, параллели с широтой  $\varphi > \varphi_0$  — эллипсами, а с  $\varphi < \varphi_0$  — гиперболами.

Линией кратчайшего расстояния (ортодромией) на сфере является дуга большого круга. Так как центр такой окружности совпадает с центром сферы, а значит, с точкой зрения в гномонической проекции, то ортодромия изображается в проекции прямой линией. Это важное свойство используется для определения промежуточных точек ортодромии и для перенесения ортодромии на карту, составленную в любой другой проекции.

### Стереографическая проекция

В этой проекции точка зрения расположена на сфере, т. е.  $D = R$ . Тогда по формуле (96)

$$\rho = (2R \sin z) / (1 + \cos z) = 2R \operatorname{tg}(z/2).$$

Общие формулы проекции:

$$x = \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$

$$\rho = 2R \operatorname{tg}(z/2); \quad \delta = \alpha;$$

$$\mu = \sec^2(z/2); \quad p = \mu^2; \quad \omega = 0.$$

Как видно из формул (88), стереографическая проекция идентична равноугольной азимутальной.



Для вычисления нормальной проекции можно использовать и формулы

$$x = \frac{2R \cos \varphi \cos \lambda}{1 + \sin \varphi};$$

$$y = \frac{2R \cos \varphi \sin \lambda}{1 + \sin \varphi}.$$

Стереографическая проекция обладает важным свойством — любая окружность конечных размеров на сфере изображается в проекции окружностью. Докажем это геометрически.

На сфере (рис. 30) возьмем окружность конечных размеров  $a_1 a_2 a_3$ . Конус, касательный к сфере по этой окружности, имеет вершину  $v$  и образующие  $a_1 v$ ,  $a_2 v$ ,  $a_3 v$ , которые перпендикулярны к касательным в точках  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ . При проектировании получим на картинной плоскости кривую  $a'_1 a'_2 a'_3$ , проекции вершины и образующих конуса. Так как изображение равноугольно, углы между проекциями образующих и касательных равны  $90^\circ$ , а, значит, кривая  $a'_1 a'_2 a'_3$  имеет нормали, пересекающиеся в одной точке, т. е. является окружностью.

Это свойство стереографической проекции используется для графического решения задач сферической астрономии. Сетку проекции легко построить графически, так как меридианы и параллели изображаются окружностями, осевой меридиан — прямой линией.

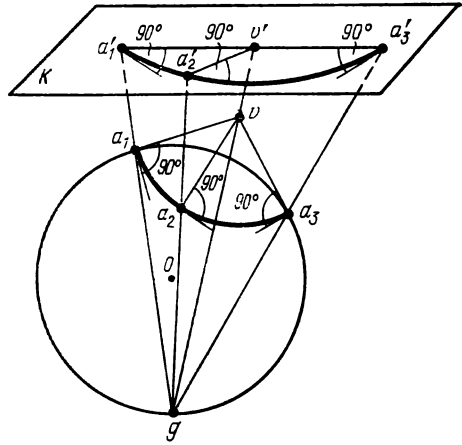


РИС. 30. Схема доказательства главного свойства стереографической проекции

## Ортографическая проекция

В этой проекции точка зрения находится в бесконечности ( $D = \infty$ ), т. е. проектирование ведется пучком параллельных лучей.

Если разделить числитель и знаменатель дроби в формуле (96) на  $D$ , то получим

$$\rho = R \sin z.$$

Тогда формулы ортографической проекции:

$$x = \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$

$$\rho = R \sin z; \quad \delta = a;$$

(99)

$$\mu_1 = \cos z; \quad \mu_2 = 1;$$

$$\rho = \mu_1 = \cos z; \quad \sin(\omega/2) = \operatorname{tg}^2(z/2).$$

Так как частный масштаб  $\mu_2 = 1$ , ортографическая проекция

является равнопромежуточной по альмукантаратам (нормальная — по параллелям).

Для вычисления поперечной проекции могут использоваться также формулы

$$x = R \sin \varphi; \quad y = R \cos \varphi \sin \lambda;$$

$$n = \cos \lambda; \quad m = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \sin^2 \lambda};$$

$$p = \cos \varphi \cos \lambda; \quad \sin(\omega/2) = (m - n)/(m + n).$$

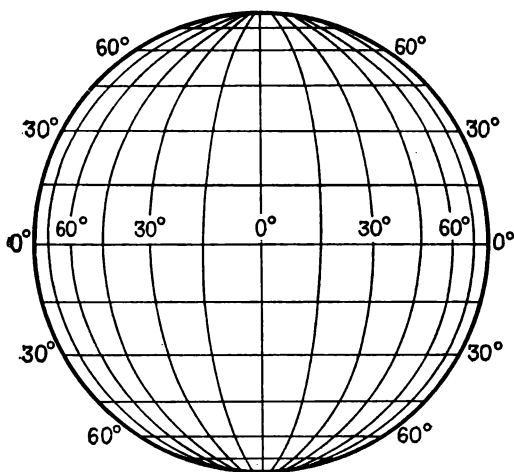


РИС. 31. Поперечная ортографическая проекция

хорошо передают сферичность картографируемой поверхности. В поперечной проекции параллели изображаются параллельными прямыми, а меридианы — дугами эллипсов. Эта проекция нашла применение для карт Луны.

Для нормальной проекции;

$$x = R \cos \varphi \cos \lambda;$$

$$y = R \cos \varphi \sin \lambda;$$

$$m = \sin \varphi; \quad n = 1;$$

$$p = m;$$

$$\sin(\omega/2) = \operatorname{tg}^2(45^\circ - \varphi/2).$$

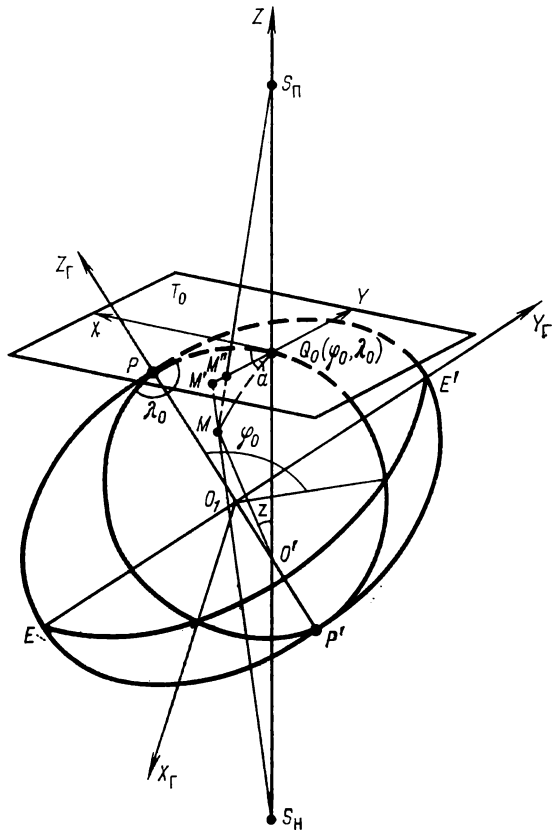
Расстояния между параллелями в нормальной проекции, так же как между альмукантаратами в косой и поперечной, быстро уменьшаются (рис. 31). Косая и поперечная ортографические проекции

## § 29. ПЕРСПЕКТИВНО-АЗИМУТАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ЭЛЛИпсоиДА

Перспективно-азимутальные проекции эллипсоида с негативным и позитивным отображением на горизонтальную картинную плоскость

В картографической практике при использовании перспективно-азимутальных проекций Земля, как правило, принимается за шар. Однако в ряде случаев при создании карт на средние и крупные по площади регионы (более 1 млн. кв. км) и в масштабах крупнее 1 : 10 000 000 возникает необходимость учета полярного сжатия эллипсоида.

РИС. 32. Перспективно-азимутальная проекция при отображении на горизонтальную картинную плоскость



Пусть на поверхности эллипсоида вращения (рис. 32) задана точка  $Q_0(\varphi_0, \lambda_0)$  нового полюса, проведены касательная плоскость  $T_0$  и нормаль  $Q_0O'$ ; в точке  $Q_0$  установлена пространственная прямоугольная топоцентрическая система координат  $Q_0XYZ$ , ось  $X$  которой направлена вдоль меридиана  $Q_0P$  на север, ось  $Z$  совпадает с нормалью  $O'Q_0$ , ось  $Y$  дополняет систему до левой.

Введем обозначения:

$$S_nO' = D_n; \quad S_nO'' = D_n; \quad O'Q_0 = N_0; \quad Q_0S_n = H; \quad O'M = N_0',$$

где  $S_n, S_n'$  — точки проектирования (зрения) при негативном и позитивном изображениях;  $N_0$  — радиус кривизны сечения первого вертикала в точке полюса  $Q_0(\varphi_0, \lambda_0)$ .

Для получения искомых проекций используем полярную сфероидическую систему координат  $z, a$  (см. § 2), связи которой с географической системой координат при вычислениях с точностью до членов с  $\rho^4$  приведены в формулах (12), (13).

Из рис. 32 значения полярных радиусов для негативного ( $\rho_n$ ) и позитивного ( $\rho_n$ ) изображений

$$\rho_n = (N_0 + D) \frac{N'_0 \sin z}{D + N'_0 \cos z}; \quad (100)$$

$$\rho_n = \frac{HN'_0 \sin z}{D - N'_0 \cos z},$$

где (с той же точностью)

$$\begin{aligned} N'_0 &= N_0 \left\{ 1 - \frac{e^2}{2} [\sin z \cos a \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 (\cos z - 1)]^2 \right\} + \dots = \\ &= N_0 \left[ 1 - \frac{e^2}{2} (\sin \varphi - \sin \varphi_0)^2 \right] + \dots \end{aligned} \quad (101)$$

Учитывая выражения (92), (100), формулы прямоугольных координат проекции  $x$ ,  $y$  с точностью до членов с  $e^4$  принимают вид: для перспективно-азимутальных проекций эллипсоида с негативным изображением

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{N_0(N_0 + D_n)}{D_n + N_0 t_5} \left\{ t_1 + \frac{e^2}{2} \tau [2(t_1 \sin \varphi - \cos \varphi_0) - \right. \\ &\quad \left. - (\tau D_n + t_6) \frac{t_1}{D_n + N_0 t_5}] + \dots \right\}; \end{aligned} \quad (102)$$

$$Y_n = \frac{N_0(N_0 + D_n)}{D_n + N_0 t_5} \left\{ t_4 \left[ 1 + \frac{e^2}{2} \tau \left( 2 \sin \varphi - \frac{\tau D_n + t_6}{D_n + N_0 t_5} \right) \right] + \dots \right\},$$

для перспективно-азимутальных проекций с позитивным изображением

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{HN_0}{D_n - N_0 t_5} \left\{ t_1 + \frac{e^2}{2} \tau [2(t_1 \sin \varphi - \cos \varphi_0) - \right. \\ &\quad \left. - (\tau D_n - t_6) \frac{t_1}{D_n - N_0 t_5}] + \dots \right\}; \end{aligned} \quad (103)$$

$$Y_n = \frac{HN_0}{D_n - N_0 t_5} \left\{ t_4 \left[ 1 + \frac{e^2}{2} \tau \left( 2 \sin \varphi - \frac{\tau D_n - t_6}{D_n - N_0 t_5} \right) \right] + \dots \right\},$$

где  $t_1$ ,  $t_4$ ,  $t_5$ ,  $\tau$  определяются по формулам (92),

$$t_6 = 2N_0(t_5 \sin \varphi - \sin \varphi_0);$$

$$D = N_0 + H.$$

Для получения формул частных масштабов и наибольших искажений углов воспользуемся выражениями (90) и формулами общей теории картографических проекций

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{1}{P} (x_z^2 + y_z^2)^{1/2}, \\ \mu_2 &= \frac{1}{P \sin z} (x_a^2 + y_a^2)^{1/2},\end{aligned}\quad (104)$$

где

$$P = N_0 \left( 1 - \frac{e^2}{2} \tau^2 \right).$$

Продифференцировав по  $z$  и  $a$  выражения (102), (103) и учитывая (104), получим следующие формулы для определения частных масштабов длин вдоль вертикалов и альмукантаратов:

для перспективно-азимутальных проекций с негативным изображением

$$\begin{aligned}\mu_1 &= (N_0 + D) \frac{D \cos z + N_0}{(D + N_0 \cos z)^2} \left\{ 1 - \frac{e^2}{2} \times \right. \\ &\times \left[ t_z \frac{\sin z (D + N_0 \cos z)}{D \cos z + N_0} - \tau^2 \frac{N_0 \cos z}{D + N_0 \cos z} \right] \}; \\ \mu_2 &= \frac{N_0 + D}{D + N_0 \cos z} \left( 1 + \frac{e^2}{2} \tau^2 \frac{N_0 \cos z}{D + N_0 \cos z} \right),\end{aligned}\quad (105)$$

где

$$\begin{aligned}t_z &= \frac{2\tau}{D + N_0 \cos z} [D (\cos z \cos a \cos \varphi_0 - \sin z \sin \varphi_0) + \\ &+ \frac{\tau D N_0 \sin z}{2 (D + N_0 \cos z)}];\end{aligned}$$

для перспективно-азимутальных проекций с позитивным изображением

$$\begin{aligned}\mu_{1r} &= \frac{H (D \cos z - N_0)}{(D - N_0 \cos z)^2} \left\{ 1 - \frac{e^2}{2} \left[ p_z \frac{\sin z (D - N_0 \cos z)}{D \cos z - N_0} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \tau^2 \frac{N_0 \cos z}{D - N_0 \cos z} \right] \right\};\end{aligned}\quad (106)$$

$$\mu_{2r} = \frac{H}{D - N_0 \cos z} \left( 1 - \frac{e^2}{2} \tau^2 \frac{N_0 \cos z}{D - N_0 \cos z} \right),\quad (107)$$

где

$$\begin{aligned}P_z &= \frac{2\tau}{D - N_0 \cos z} [D (\cos z \cos a \cos \varphi_0 - \sin z \sin \varphi_0) - \\ &- \frac{\tau D N_0 \sin z}{2 (D - N_0 \cos z)}].\end{aligned}$$

Значения частных масштабов площадей и наибольших величин искажений углов с той же степенью точности можно определить из выражений

$$p = \mu_1 \mu_2; \quad \sin(\omega/2) = (\mu_2 - \mu_1) / (\mu_2 + \mu_1). \quad (108)$$

Приведенные формулы позволяют получить множество перспективных азимутальных проекций эллипсоида с негативным и позитивным изображениями в зависимости от положения точек проектирования  $S_n$  и  $S_n$  (т. е. от расстояний  $D$ ), в том числе вариантов, соответствующих гномонической, ортографической и стереографической проекциям сферы.

Так, для случая центральной перспективы  $D = 0$ .

Формулы (102), (105) и (108) принимают вид

$$x = N_0 \left\{ t_1 + \frac{e^2}{2} \tau [2(t_1 \sin \varphi - \cos \varphi_0) - t_1 t_6 / N_0 t_5] \right\} \frac{1}{t_5};$$

$$y = N_0 \left\{ t_4 \left[ 1 + \frac{e^2}{2} \tau (2 \sin \varphi - t_6 / N_0 t_5) \right] \right\} \frac{1}{t_5};$$

$$\mu_1 = \sec^2 z (1 + e^2 \tau^2 / 2); \quad \mu_2 = \sec z (1 + \tau^2 e^2 / 2);$$

$$p = \sec^3 z (1 + e^2 \tau^2); \quad \sin(\omega/2) = (\sec z - 1) / (\sec z + 1) = \operatorname{tg}^2(z/2).$$

В данной проекции линия кратчайшего расстояния изображается с малой кривизной.

Для ортографической проекции эллипсоида  $D \rightarrow \infty$ .

Из тех же формул

$$x = N_0 \left\{ t_1 + \frac{e^2}{2} \tau [2(t_1 \sin \varphi + \cos \varphi_0) - \tau t_1] \right\};$$

$$y = N_0 \left\{ t_4 \left[ 1 + \frac{e^2}{2} \tau (2 \sin \varphi - \tau) \right] \right\};$$

$$\mu_1 = \cos z [1 - e^2 \tau (\sin z \cos \alpha \cos \varphi_0 - \sin z \operatorname{tg} z \sin \varphi_0)];$$

$$\mu_2 = p = 1;$$

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{1 - \cos z [1 - e^2 \tau (\sin z \cos \alpha \cos \varphi_0 - \sin z \operatorname{tg} z \sin \varphi_0)]}{1 + \cos z [1 - e^2 \tau (\sin z \cos \alpha \cos \varphi_0 - \sin z \operatorname{tg} z \sin \varphi_0)]}.$$

Указанную проекцию целесообразно использовать не только для решения картографических задач, но и при получении ортофотоснимков средних масштабов, дающих изображение крупных по размеру территорий.

**Внешняя перспективно-азимутальная проекция с позитивным отображением на наклонную картинную плоскость (проекция аэро- и космofотоснимков)**

Предположим, что по формулам (103) вычислены прямоугольные координаты  $X$ ,  $Y$  внешней перспективно-азимутальной проекции с позитивным отображением на горизонтальную картинную пло-

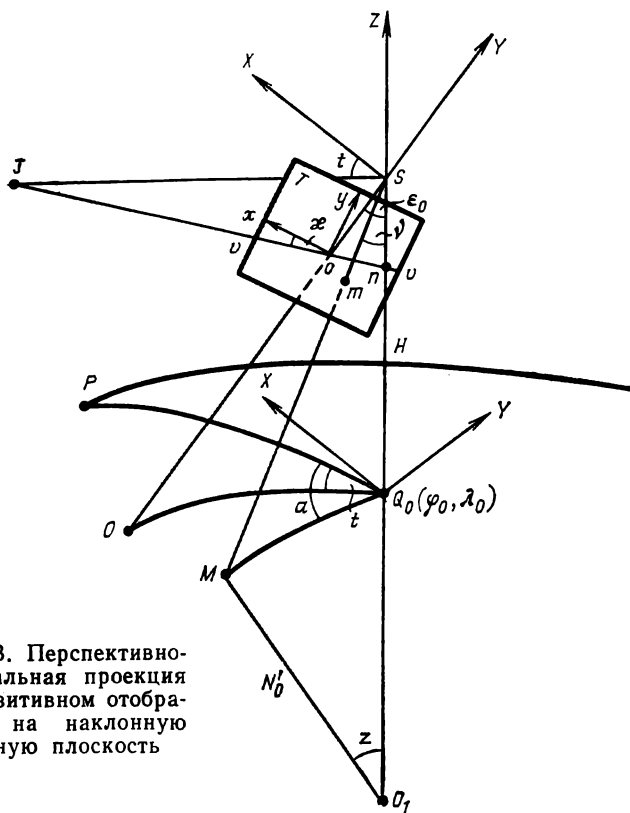


РИС. 33. Перспективно-азимутальная проекция при позитивном отображении на наклонную картинную плоскость

скость и известны значения элементов внутреннего и внешнего ориентирования соответствующего перспективного фотоснимка (рис. 33).

К элементам внутреннего ориентирования относятся фокусное расстояние объектива фотографического аппарата, прямоугольные координаты  $x_0, y_0$  главной точки  $O$  на фотоснимке.

Элементы внешнего ориентирования включают:

линейные элементы: геодезические координаты  $\varphi_0, \lambda$ , точки надира (точки полюса)  $Q_0$  и высоту фотографирования (или проектирования)  $H$ ,

угловые элементы:  $t$  — азимут направления «плоскость главного вертикала — плоскость фотосъемки»;  $\varepsilon_0$  — угол в плоскости главного вертикала между главным оптическим лучом и нормалью к эллипсоиду из точки зрения  $S$ ;  $\kappa$  — угол между осью абсцисс снимка и главной вертикалью — линией пересечения плоскостей главного вертикала и снимка.

Задача определения прямоугольных координат этого фотоснимка (рассматриваемой проекции на наклонную картинную плоскость) может быть сведена к следующему.

Переместим параллельно систему координат  $Q_0XYZ$  так, чтобы ее начало оказалось в точке  $S$ , и затем эту систему координат повернем на углы  $t$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $\kappa$ .

Если предположить, что при определении координат  $X$ ,  $Y$  по формулам (103) вместо сфероидических величин  $a$  были использованы значения  $a' = a - t$  и, следовательно, абсциссы и ординаты ( $x$ ,  $y$ ) были вычислены с учетом поворота  $t$ , то матрица преобразования координат, учитывающая оставшиеся углы  $\varepsilon_0$  и  $\kappa$ , принимает вид

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \cos \varepsilon_0 \cos \kappa & -\sin \varepsilon_0 \sin \kappa & -\sin \varepsilon_0 \\ \sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ \sin \varepsilon_0 \cos \kappa & -\sin \varepsilon_0 \sin \kappa & -\cos \varepsilon_0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (109)$$

Координаты  $x$ ,  $y$  точек наклонной картинной плоскости — фотоснимка (начало координат в главной точке) и координаты  $X$ ,  $Y$  точек горизонтальной картинной плоскости (начало координат в точке полюса  $Q$  — точке надира), как известно, находятся в гомографическом соответствии:

$$\begin{aligned} x &= -f \frac{a_1 X + b_1 Y - c_1 H}{a_3 X + b_3 Y - c_3 H}; & y &= -f \frac{a_2 X + b_2 Y - c_2 H}{a_3 X + b_3 Y - c_3 H}; \\ X &= -H \frac{a_1 x + a_2 y - a_3 f}{c_1 x + c_2 y - c_3 f}; & Y &= -H \frac{b_1 x + b_2 y - b_3 f}{c_1 x + c_2 y - c_3 f}, \end{aligned}$$

где  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  — направляющие косинусы, определяемые по (109);  $f$ ,  $H$  — фокусное расстояние и высота проектирования (фотографирования).

В развернутом виде эти формулы принимают вид

$$x = f \frac{(X \cos \varepsilon_0 - H \sin \varepsilon_0) \cos \kappa + Y \sin \kappa}{X \sin \varepsilon_0 + H \cos \varepsilon_0}; \quad (110)$$

$$y = f \frac{-(X \cos \varepsilon_0 - H \sin \varepsilon_0) \sin \kappa + Y \cos \kappa}{X \sin \varepsilon_0 + H \cos \varepsilon_0};$$

$$X = H \frac{(\cos \varepsilon_0 \cos \kappa) x - (\cos \varepsilon_0 \sin \kappa) y + f \sin \varepsilon_0}{-(\sin \varepsilon_0 \cos \kappa) x + (\sin \varepsilon_0 \sin \kappa) y + f \cos \varepsilon_0};$$

(111)

$$Y = H \frac{x \sin \kappa + y \cos \kappa}{-(\sin \varepsilon_0 \cos \kappa) x + (\sin \varepsilon_0 \sin \kappa) y + f \cos \varepsilon_0}.$$



Если сместить начало систем координат  $xoy$  наклонной картинной плоскости  $T$  в точку надира  $n$ , поставить условие, чтобы частный масштаб длин по альмукантарату  $\mu_2$  в этой точке был равен единице, выразить значения координат в метрах, ввести обозначение

$$\operatorname{tg} \beta = X/H$$

и Землю (или другое небесное тело) принять не за эллипсоид вращения, а за шар, то из формул (110) получим

$$x = X \frac{\cos \beta}{\cos(\beta - \varepsilon_0)}; \quad y = Y \frac{\cos \beta \cos \varepsilon_0}{\cos(\beta - \varepsilon_0)}$$

— формулы предложены для этого частного случая Н. М. Волковым.

Теперь перейдем к вопросу определения частных масштабов и других характеристик проекций.

Поскольку при поворотах и смещениях плоских систем координат в своей плоскости величины искажений проекции не изменяются, предположим, что угол  $\kappa = 0$ , и воспользуемся выражениями (110).

Продифференцировав их по  $z$  и  $a$  и подставив значения производных в формулы (104), (105), получим следующие выражения для определения (с точностью до членов с  $e^4$ ) частных масштабов длин наклонной картинной плоскости (перспективного фотоснимка): вдоль вертикалов

$$\mu_1 = \mu_{1r} k^2 (1 - \sin^2 a \sin^2 \varepsilon_0)^{1/2}, \quad (112)$$

где  $\mu_{1r}$  — определяется по формулам (106);

$$k = H / (H \cos \varepsilon_0 + X \sin \varepsilon_0); \quad (113)$$

вдоль альмукантаратов

$$\begin{aligned} \mu_2 = \mu_{2r} k^2 \left[ \sin^2 a + \left( \cos a \cos \varepsilon_0 + \frac{\rho}{H} \sin \varepsilon_0 \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 \frac{\rho a}{\rho} \sin a \sin \varepsilon_0 \left( \frac{\rho}{H} \cos \varepsilon_0 - \cos a \sin \varepsilon_0 \right) \right]^{1/2}, \quad (114) \end{aligned}$$

где

$$\frac{\rho a}{\rho} = e^{2\tau} \frac{D \sin z \sin a \cos \varphi_0}{D - N_0 \cos z},$$

$\mu_{2r}$ ,  $k$ ,  $\rho$  — определяются соответственно из выражений (107), (113), (91).

Из выражений (112), (114) следует, что для точек главной вертикали будем иметь

$$\mu_1 = \mu_{1r} k^2; \quad \mu_2 = \mu_{2r} k.$$

В частности, в главной точке  $o$ , точках нулевых искажений  $o$  и надира  $n$  получим

$$\mu_{1o} = \mu_{1r} \cos^2 \varepsilon_0; \quad \mu_{2o} = \mu_{2r} \cos \varepsilon_0;$$

$$\mu_{1c} = \mu_{1r}; \quad \mu_{2c} = \mu_{2r};$$

$$\mu_{1n} = \sec^2 \varepsilon_0; \quad \mu_{2n} = \sec \varepsilon_0.$$

Следовательно, в точке надира имеют место искажения только за счет наклона картинной плоскости на угол  $\varepsilon_0$ , в точке нулевых искажений — только за счет сфероидичности (сферичности) изображаемой поверхности, в главной точке, как и во всех других точках проекции, за счет влияния обоих факторов.

Частные масштабы площади и максимальные искажения углов в точках проекции определим с точностью до членов с  $e^4$  по известным формулам:

$$\rho = \mu_1 \mu_2; \quad \sin(\omega/2) = (\mu_2 - \mu_1) / (\mu_2 + \mu_1).$$

Учитывая, что данная проекция — идеальная модель перспективного аэрокосмофотоснимка — находит все более широкое применение, рассмотрим способ обратного преобразования, т. е. способ определения географических координат точек поверхности эллипсоида по прямоугольным координатам  $x$ ,  $y$  наклонной картинной плоскости (перспективного фотоснимка).

Последовательность вычислений (с точностью до членов с  $e^4$ ) будет следующей.

Используя значения координат  $x$ ,  $y$ , вычисляем по (111) прямоугольные координаты  $X$ ,  $Y$  и затем находим

$$\operatorname{ctg} a = X/Y; \quad \rho = \sqrt{X^2 + Y^2}; \quad \operatorname{tg} v = \rho/H.$$

Согласно рис. 33 запишем

$$z = \arcsin \left( \frac{H + N_0}{N'_0} \sin v \right) - v, \quad (115)$$

где с принятой точностью

$$\begin{aligned} N'_0 &= N_0 \left[ 1 - \frac{e^2}{2} (\sin \varphi - \sin \varphi_0)^2 \right] = \\ &= N_0 \left\{ 1 - \frac{e^2}{2} [\sin z \cos a \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 (\cos z - 1)]^2 \right\}. \end{aligned}$$

Полагая для первой итерации  $N'_0 = N_0$ , получим

$$z^{(1)} \approx \arcsin [(1 + H/N_0) \sin v] - v. \quad (116)$$

Используя формулы (92), получим после обращения ряда

$$\sin \varphi = [1 + e'^2 (\sin \varphi_0 - t_0) t_0] t_0, \quad (117)$$

где  $e$ ,  $e'$  — первый и второй эксцентриситеты эллипсоида вращения,

$$t_0 = \frac{\sin z \cos a \cos \varphi_0 + \cos z \sin \varphi_0 - e^2 \sin \varphi_0}{1 - e^2}. \quad (118)$$

Подставив в (118) значения  $z^{(1)}$  из (116), находим  $t_0^{(1)}$  и затем по (117) величину  $\varphi^{(1)}$ .

Учитывая формулу (101) и подставив в нее величину  $\varphi^{(1)}$ , находим  $N_0^{(2)}$  (по 115), (118), (117) значения  $z^{(2)}$ ,  $t_0^{(2)}$ ,  $\varphi^{(2)}$  второй итерации.

После этого аналогично определяем  $z^{(3)}$ ,  $\varphi^{(3)}$ ; далее  $z^{(4)}$ ,  $\varphi^{(4)}$  и так до тех пор, пока

$$\varphi^{(n)} - \varphi^{(n-1)} \leq \delta,$$

где  $\delta$  — допустимая величина.

Для определения долгот точек воспользуемся формулами (92)

$$\lambda = \lambda_0 + \arcsin [t'_1 (1 - e^2 t'_2)],$$

где

$$t'_1 = \sin z \sin a \sec \varphi;$$

$$t'_2 = \sin \varphi (\sin \varphi - \sin \varphi_0).$$

### § 30. ОБОБЩЕННЫЕ ФОРМУЛЫ АЗИМУТАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ

На основании анализа формул полярного радиуса  $\rho$  азимутальных проекций (включая перспективно-азимутальные) был предложен ряд обобщенных формул, позволяющих получать разнообразные по характеру искажений проекции. Так, например, Г. А. Гинзбург предложил обобщенную формулу

$$\rho = R [L_1 \sin (z/k_1) + L_2 \operatorname{tg} (z/k_2)].$$

При определенных значениях параметров  $L$  и  $k$  можно получить формулы  $\rho$  ряда известных и различных промежуточных проекций.

Так, при  $L_1 = 0$  и  $L_2 = k_2$  получим формулу  $\rho$  для «тангенсной ветви» проекций (здесь индекс у параметра  $k$  опускается):

$$\rho = Rk \operatorname{tg} (z/k).$$

Очевидно, что при  $k = 2$  проекция будет равноугольной азимутальной (стереографической), при  $k = 1$  — гномонической.

При  $L_2 = 0$ ,  $L_1 = k$  получим формулу  $\rho$  для «синусной ветви» проекций:

$$\rho = Rk \sin (z/k).$$

В этом случае при  $k = 2$  получим равновеликую азимутальную проекцию; при  $k = 1$  — ортографическую; при  $k$ , близких к 2, 7—3, — проекции с небольшими искажениями площадей (рис. 34); при  $k$ , близких к 1,2—1,5 — проекции, передающие сферичность картографируемой поверхности.

В проекциях «синусной ветви»

$$\mu_1 = \cos (z/k); \quad \mu_2 = k \sin (z/k) \operatorname{cosec} z.$$

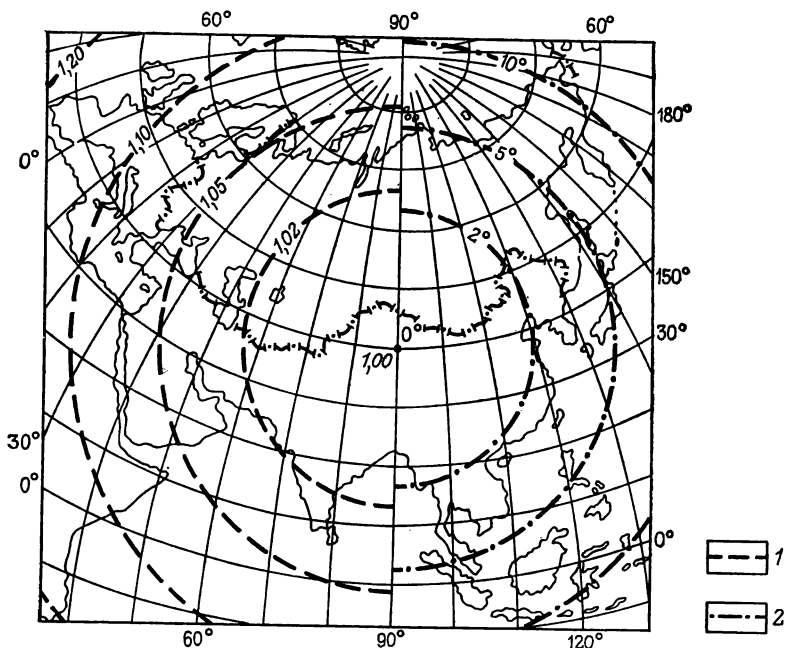


РИС. 34. Изоколы  $\rho$  (1) и  $\omega$  (2) в азимутальной проекции «синусной ветви» ( $k = 3$ )

Обобщенную формулу  $\rho$  азимутальных проекций предложил А. К. Маловичко:

$$\rho = R [2 \sin (z/2)]^k [2 \operatorname{tg} (z/2)]^{(1-k)}.$$

При  $k = 1/2$  получим проекцию Брейзинга, который определил  $\rho$  как среднее геометрическое из значений  $\rho$  в равноугольной и равновеликой азимутальных проекциях:

$$\rho = 2R \sqrt{\operatorname{tg} (z/2) \sin (z/2)}.$$

## Глава VI

### ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

#### § 31. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Нормальная сетка цилиндрических проекций имеет простой вид: все меридианы — параллельные прямые, расположенные на одинаковом расстоянии друг от друга, параллели — прямые, перпендикулярные к меридианам; расстояния между ними изменяются в зависимости от свойств проекции.

Прямоугольные координаты этих проекций:  $x = f(\varphi)$ ;  $y = \beta\lambda$ , где параметр проекции  $\beta = \text{const}$ .

За ось  $X$  выбирают один из меридианов, за ось  $Y$  — экватор или одну из параллелей (рис. 35).

Функцию, определяющую абсциссу проекции, находят под условием равноугольности, равновеликости или равнопромежуточности изображения; соответственно и цилиндрические проекции могут быть равноугольными, равновеликими или равнопромежуточными по меридианам. Кроме перечисленных проекций в картографической практике встречаются также произвольные по характеру искажений проекции (с заданным распределением искажений и перспективно-цилиндрические проекции, получаемые геометрическим путем).

Картографируемую поверхность принимают в этих проекциях за эллипсоид или за сферу.

Главные направления в нормальных цилиндрических проекциях совпадают с меридианами и параллелями, поэтому масштабы по меридианам и параллелям являются экстремальными.

Общие формулы нормальных цилиндрических проекций эллипсоида:

$$x = f(\varphi); \quad y = \beta\lambda;$$

$$m = \sqrt{e}/M = dx/Md\varphi, \quad \text{так как } e = (dx/d\varphi)^2;$$

$$n = \sqrt{g}/r = \beta/r, \quad \text{так как } g = (dy/d\lambda)^2 = \beta^2; \quad (119)$$

$$p = mn = \beta dx/Mrd\varphi;$$

$$\sin(\omega/2) = (a-b)/(a+b) \quad \text{или} \quad \text{tg}(45^\circ + \omega/4) = \sqrt{a/b},$$

где  $a$  и  $b$  — экстремальные масштабы длин;  $\beta = \text{const}$ . При получении параметра  $\beta$  ставят условие, чтобы главный масштаб сохранялся на параллелях с широтой  $\pm \varphi_k$ :

$$n_k = \beta/r_k = 1,$$

откуда

$$\beta = r_k, \quad (120)$$

где  $r_k$  — радиусы главных параллелей.

Если  $\varphi_k = 0^\circ$ , то  $\beta = a$ , где  $a$  — большая полуось эллипсоида.

Искажения в нормальных цилиндрических проекциях являются функцией только широты, поэтому изоколы совпадают с параллелями и имеют вид прямых. Нормальные цилиндрические проекции целесообразно применять при создании карт на территории, вытянутые вдоль географического экватора.

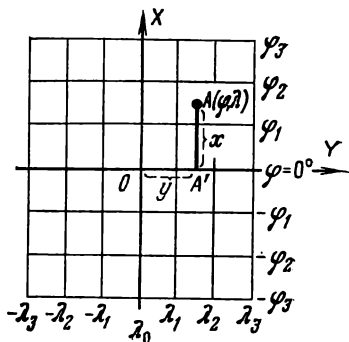


РИС. 35. Цилиндрическая проекция (равновеликая)

## § 32. НОРМАЛЬНЫЕ РАВНОУГОЛЬНЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ, ИХ СВОЙСТВА И ПРИМЕНЕНИЕ

В этих проекциях абсциссу  $x$  находят под условием независимости масштаба длин от направления:

$$m = n.$$

Подставив значения масштабов, получим

$$dx/Md\varphi = \beta/r.$$

Тогда

$$dx = \beta \frac{Md\varphi}{r} = \beta \frac{Md\varphi}{N \cos \varphi},$$

откуда

$$x = \beta \int \frac{Md\varphi}{N \cos \varphi}.$$

Учитывая выражение (70),

$$x = \frac{\beta}{\text{mod}} \lg U + C,$$

где  $C$  — постоянная интегрирования.

Если ось  $Y$  совмещена с экватором, то  $C = 0$  и

$$x = \frac{\beta}{\text{mod}} \lg U,$$

где

$$U = \frac{\text{tg}(45^\circ + \varphi/2)}{\text{tg}^e(45^\circ + \psi/2)};$$

$$\sin \psi = e \sin \varphi; \quad \text{mod} = \ln e.$$

Для поверхности шара

$$x = \frac{\beta}{\text{mod}} \lg \text{tg}(45^\circ + \varphi/2).$$

Формулы нормальных равноугольных цилиндрических проекций:

$$x = \frac{\beta}{\text{mod}} \lg U; \quad y = \beta\lambda;$$

$$m = n = \beta/r; \quad \beta = r_k; \tag{121}$$

$$p = m^2; \quad \omega = 0.$$

Равноугольные цилиндрические проекции известны под названием проекций Меркатора\*; они отличаются друг от друга параметром  $\beta$ , который влияет на величину абсцисс и распределение искажений.

\* Меркатор — нидерландский картограф (XVI в.), издавший ряд карт и географических пособий, в том числе известный «Атлас», в котором была использована равноугольная цилиндрическая проекция.

В проекции могут быть две главные параллели с широтами  $\pm \varphi_k$ , тогда  $\beta = r_k$ , и одна главная параллель, тогда  $\beta = a$  (большая полуось эллипсоида) или  $\beta = R$  (радиус шара).

Минимальный масштаб длин будет на экваторе, поэтому расстояния между параллелями с увеличением широты возрастают. Географический полюс в этой проекции изобразить нельзя, его изображение уходит в бесконечность.

Нормальные равноугольные цилиндрические проекции применяются для морских карт, так как они обладают свойством локсодромичности. *Локсодромией* называется линия, пересекающая меридианы картографируемой поверхности под одним и тем же углом. В равноугольных цилиндрических проекциях локсодромии изображаются прямыми линиями.

Локсодромия и ортодромия называются *линиями положения*; их используют для решения практических задач по картам.

Интересные исследования линий положения выполнил Г. М. Кирьяков, который дал сравнительную оценку их свойств.\*

Абсциссы  $x$  в проекции Меркатора называют меридианными частями и обозначают  $D'$  (в мин):

$$x = D' = \frac{a}{\text{mod}} \lg U,$$

где  $a = 3\,437\,747$  м.м (морских миль);  $a/\text{mod} = 7\,915,705$  м.м.

$$y = a\lambda = \lambda.$$

В морской навигации счет расстояний ведется в морских милях (1 миля = 1852 м).

Наиболее простой равноугольной цилиндрической проекцией (собственно проекцией Меркатора) является проекция сферы с одной главной параллелью.

Формулы этой проекции:

$$x = \frac{R}{\text{mod}} \lg \text{tg}(45^\circ + \varphi/2); \quad y = R\lambda; \quad (122)$$

$$m = n = \sec \varphi; \quad p = \sec^2 \varphi; \quad \omega = 0.$$

Анализ формул показывает, что изменение масштабов медленнее всего происходит вблизи экватора, следовательно, нормальную цилиндрическую проекцию выгодно применять при создании карт на экваториальную зону или для узкой полосы, вытянутой вдоль параллелей (в том числе и для морских карт крупных масштабов).

При создании карт мелких масштабов равноугольные цилиндрические проекции целесообразно использовать для изображения значительных частей картографируемой поверхности, вытянутых вдоль экватора, а также для обзорных карт всего мира.

\* Кирьяков Г. М. Линии положения и их изображение на картографических сетках. — Известия вузов. Геодезия и аэросъемка, 1959, вып. 5, 6.

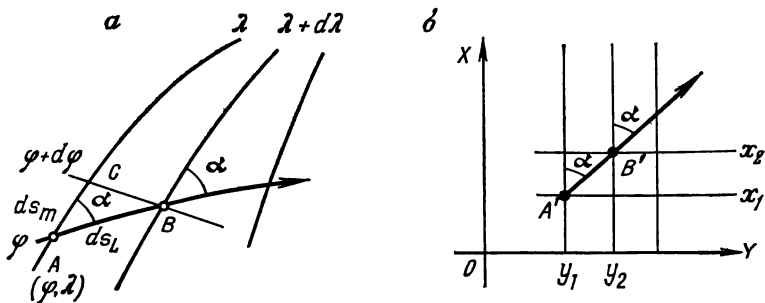


РИС. 36. Локсодромия и ее изображение:  
*a* — на эллипсоиде; *б* — на плоскости

Получим уравнения локсодромии для картографируемой поверхности и в равноугольной цилиндрической проекции (рис. 36 *a*, *б*):

$$\operatorname{tg} \alpha = ds_n / ds_m = r d\lambda / M d\varphi,$$

откуда

$$d\lambda = \operatorname{tg} \alpha \frac{M d\varphi}{r};$$

$$\int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda = \operatorname{tg} \alpha \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi}.$$

После интегрирования

$$\lambda_B - \lambda_A = \operatorname{tg} \alpha (\ln U_B - \ln U_A);$$

для поверхности шара вместо  $U$  подставим  $\operatorname{tg} (45^\circ + \varphi/2)$  и, приняв точку  $A$  за начальную ( $\varphi_1 = 0, \lambda_1 = 0$ ), получим уравнение локсодромии на сфере

$$\lambda = \operatorname{tg} \alpha \ln \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi/2),$$

откуда

$$\operatorname{tg} (45^\circ + \varphi/2) = e^{\lambda \operatorname{ctg} \alpha},$$

где  $e$  — основание натуральных логарифмов.

Следовательно, локсодромия — спиралевидная кривая с асимптотической точкой в полюсе.

В равноугольной цилиндрической проекции

$$\operatorname{tg} \alpha = (y_B - y_A) / (x_B - x_A),$$

т. е. получаем уравнение прямой.

Локсодромия не является кратчайшим расстоянием между двумя точками, ее длину можно приближенно определить по формуле

$$s_L = s_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sec \alpha.$$



### § 33. НОРМАЛЬНЫЕ РАВНОВЕЛИКИЕ И РАВНОПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ПО МЕРИДИАНАМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

В равновеликих проекциях абсциссу  $x$  находят под условием сохранения отношения площадей

$$p = mn = 1.$$

Из формулы (119)

$$p = \frac{\beta dx}{Mr d\varphi} = 1,$$

следовательно,

$$dx = \frac{Mr}{\beta} d\varphi.$$

Равновеликую цилиндрическую проекцию используют при создании обзорных карт мелкого масштаба, поэтому картографируемую поверхность целесообразно принять за сферу, тогда

$$dx = \frac{R^2 \cos \varphi}{\beta} d\varphi$$

и после интегрирования

$$x = \frac{R^2}{\beta} \sin \varphi + C.$$

Так как ось  $Y$  совмещена с экватором, постоянная интегрирования  $C$  равна нулю, тогда

$$x = \frac{R^2}{\beta} \sin \varphi.$$

Формулы равновеликих цилиндрических проекций:

$$x = \frac{R^2}{\beta} \sin \varphi; \quad y = \beta \lambda;$$

в проекции с двумя главными параллелями  $\beta = r_k = R \cos \varphi_k$ ;

$$x = R \sec \varphi_k \sin \varphi; \quad y = R \lambda \cos \varphi_k;$$

в проекции с одной главной параллелью  $\beta = R$  при  $\varphi_k = 0$ ,

$$x = R \sin \varphi; \quad y = R \lambda;$$

$$n = \beta/r = r_k/r; \quad m = 1/n = r/\beta;$$

$$p = 1; \quad \operatorname{tg}(45^\circ + \omega/4) = a,$$

где  $\beta = \text{const}$ ,  $a$  — максимальный масштаб длин.

В проекциях с двумя главными параллелями масштаб равен единице на этих параллелях ( $\pm \varphi_k$ ), а в проекции с одной главной параллелью — на экваторе. Масштаб по параллелям от экватора к полюсам увеличивается, а масштаб по меридианам — уменьшается, поэтому и расстояния между параллелями уменьшаются

при удалении от экватора. Географический полюс изображается линией.

Равновеликая цилиндрическая проекция, сохраняющая длину экватора ( $\beta = R$ ), носит название *изоцилиндрической*.

Формулы проекции:

$$x = R \sin \varphi; \quad y = R\lambda;$$

$$n = \sec \varphi; \quad m = \cos \varphi;$$

$$p = 1; \quad \operatorname{tg}(45^\circ + \omega/4) = \sec \varphi.$$

В равнопромежуточных по меридианам цилиндрических проекциях абсциссу находят под условием сохранения длины всех меридианов

$$m = dx/Rd\varphi = 1; \quad dx = Rd\varphi,$$

тогда

$$x = R\varphi + C,$$

где  $C$  — постоянная интегрирования.

Если ось  $Y$  совпадает с экватором, то  $C = 0$  и  $x = R\varphi$ , т. е. абсциссы проекции равны выпрямленным дугам меридианов.

Общие формулы этих проекций:

$$x = R\varphi; \quad y = R\lambda;$$

$$m = 1; \quad n = p = \beta/r = r_k/r;$$

$$\sin(\omega/2) = (a-b)/(a+b),$$

где  $a$  и  $b$  — экстремальные масштабы длин.

Если  $\beta = r_k = R \cos \varphi_k$ , то

$$x = R\varphi; \quad y = R\lambda \cos \varphi_k;$$

если  $\beta = R$  при  $\varphi_k = 0$ , то

$$x = R\varphi; \quad y = R\lambda.$$

Последние формулы описывают проекцию, которая называется *квадратной*; масштабы и искажения углов в этой проекции вычисляют по формулам

$$m = 1; \quad n = p = \sec \varphi;$$

$$\sin(\omega/2) = (\sec \varphi - 1)/(\sec \varphi + 1) = \operatorname{tg}^2(\varphi/2).$$

#### § 34. ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ С ЗАДАНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ИСКАЖЕНИЙ

Цилиндрические проекции с заданным распределением искажений были предложены Н. А. Урмаевым, который впервые сформулировал обратную задачу математической картографии — «отыскание уравнений проекции по заданным искажениям или масштабам».\*

\* Урмаев Н. А. Изыскание некоторых новых цилиндрических, азимутальных и псевдоцилиндрических проекций. — Сб. ГУГК, 1950, вып. XXIХ.

В цилиндрических проекциях масштабы по меридианам являются функцией широты. Если принять

$$m = dx/d\varphi$$

и задать его значение в некоторых точках, то абсциссу  $x$  можно определить интегрированием

$$x = \int m d\varphi.$$

Для удобства и простоты решения задачи масштаб можно представить в виде многочлена, четного относительно широты:

$$m = a_0 + a_2\varphi^2 + a_4\varphi^4 + \dots,$$

где  $a_0$ ,  $a_2$  и  $a_4$  — коэффициенты, которые можно найти решением трех уравнений с тремя неизвестными (если заданы три значения масштаба) или интерполированием.

Рассмотрим в качестве примера получение произвольной цилиндрической проекции, предложенной Н. А. Урмаевым.

Значение функции  $f(z)$  для некоторого аргумента  $z$  можно получить по интерполяционной формуле Ньютона с разделенными разностями

$$f(z) = f(a_0) + (z-a_0)f_{01} + (z-a_0)(z-a_1)f_{012} + \dots,$$

где  $f_{01}$  и  $f_{012}$  — первая и вторая разделенные разности:

$$f_{01} = \frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0}; \quad f_{12} = \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1};$$

$$f_{012} = \frac{f_{12} - f_{01}}{a_2 - a_0} = \left[ \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} - \frac{f(a_1) - f(a_0)}{a_1 - a_0} \right] / (a_2 - a_0).$$

На параллелях с широтами  $\varphi_0 = 0^\circ$ ,  $\varphi_1 = 60^\circ$  и  $\varphi_2 = 80^\circ$  масштабы соответственно  $m_0 = 1$ ;  $m_1 = 1,5$ ;  $m_2 = 2,0$ .

Вычисление разделенных разностей производят по следующей схеме:

$\varphi$ , градус	$a$	$f(a) = m$	$f_{01}, f_{02}$	$f_{012}$
0	0	1,0		
60	36	1,5	+1/72	
80	64	2,0	+1/56	+1/16 128

В качестве аргументов  $a$  примем широту параллелей, выраженную (при частоте сетки  $\Delta\varphi = \Delta\lambda = 10^\circ$ ) квадратом десятков градусов, а в качестве функции  $f(a)$  — значения масштаба  $m$ .

В качестве аргумента  $z$  примем величину  $\varphi/\text{arc } 10^\circ$ . Тогда

$$m = 1 + \frac{z^2}{72} + \frac{z^2(z^2 - 36)}{16\,128} = 1 + \frac{188z^2}{16\,128} + \frac{z^4}{16\,128}$$

и после интегрирования

$$x = z + \frac{188z^3}{48\,384} + \frac{z^5}{80\,640}.$$

Окончательные значения прямоугольных координат проекции, полученные для конкретной поверхности в масштабе карты:

$$x_{см} = R (\mu_0 100) x \quad \text{и} \quad y_{см} = R (\mu_0 100) \lambda \operatorname{arc} 1^\circ.$$

### § 35. КОСЫЕ И ПОПЕРЕЧНЫЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Поперечные цилиндрические проекции целесообразно использовать при создании карт на территории, вытянутые вдоль меридианов, а косые — на территории, вытянутые вдоль больших кругов произвольной ориентировки.

В косых и поперечных цилиндрических проекциях картографируемую поверхность обычно принимают за сферу. Получение этих проекций складывается из следующих этапов:

переход от эллипсоида к поверхности шара (для карт крупных масштабов) или определение радиуса шара  $R$ ;

определение координат полюса  $Q (\varphi_0, \lambda_0)$ ;

переход от географических координат к полярным сферическим координатам косой или поперечной системы;

вычисление координат проекции, масштабов и искажений углов.

При получении косых и поперечных проекций для карт крупного масштаба, например карт аэронавигационных, при создании которых чаще всего используют равноугольные проекции, переход от эллипсоида к поверхности шара также следует выполнять под условием равноугольного отображения. В этом случае сферическую широту можно выбрать из картографических таблиц, данных в прил. II. Под этим же условием находят и радиус шара  $R$ .

В поперечных проекциях широта полюса  $\varphi_0 = 0$ , а долгота  $\lambda_0 = \pm 90^\circ$ .

Переход от географических координат к координатам поперечной системы выполняется по формулам

$$\cos z = \cos \varphi \cos (90^\circ - \lambda) = \cos \varphi \sin \lambda;$$

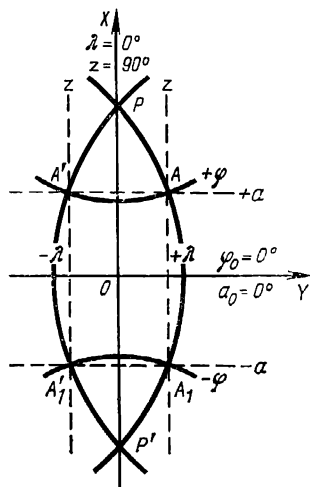
$$\operatorname{tg} a = \operatorname{ctg} \varphi \sin (90^\circ - \lambda) = \operatorname{ctg} \varphi \cos \lambda.$$

Следует учесть, что начальным вертикалом в косых проекциях мы считаем вертикал, совмещенный с меридианом полюса косой системы координат. В поперечных проекциях начальный вертикал совмещен с географическим экватором, т. е. повернут на  $90^\circ$  (рис. 37), поэтому правая сторона формулы для получения азимута должна быть заменена обратными величинами:

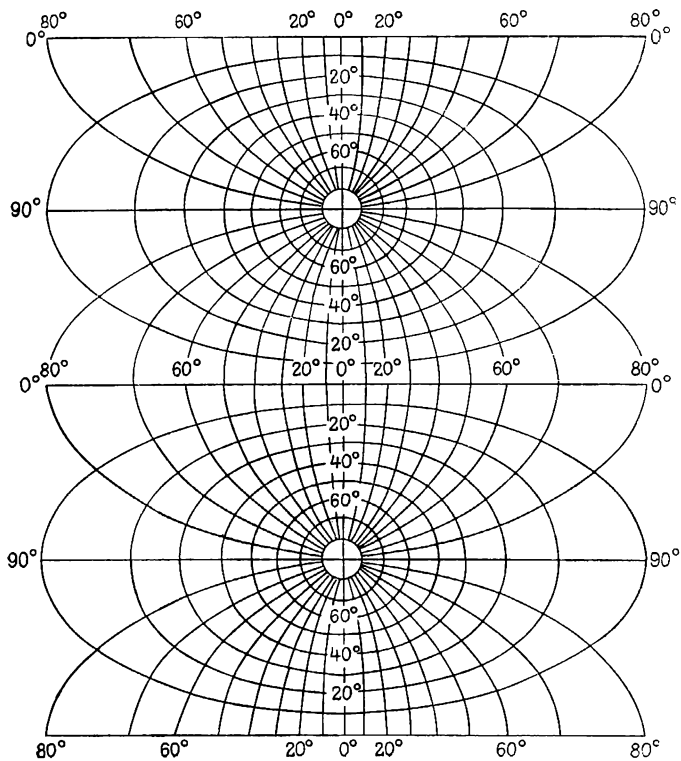
$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} \varphi \sec \lambda.$$

Формулы для вычисления прямоугольных координат поперечно-цилиндрических проекций могут быть получены так же, как и формулы прямых проекций (под условием равноугольного, равновеликого или равнопромежуточного отображения с использованием масштабов по вертикалам и альмукантаратам), но лучше для этой цели воспользоваться формулами нормальных проекций, заменив в них  $\lambda$  на  $a$ ,  $\varphi$  на  $(90^\circ - z)$  и одновременно повернув сетку проекции на  $90^\circ$ .

**РИС. 37.** Системы координат в поперечно-цилиндрических проекциях



**РИС. 38.** Равноугольная поперечно-цилиндрическая проекция



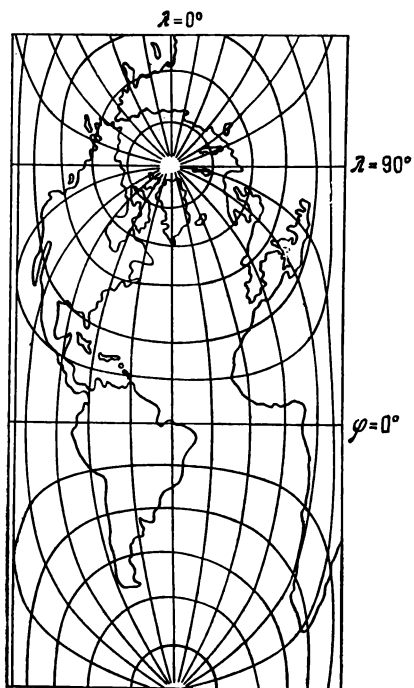


РИС. 39. Равнопромежуточная по вертикалам поперечно-цилиндрическая проекция

Для получения равноугольной поперечно-цилиндрической проекции воспользуемся формулами проекции Меркатора (122), которые после указанного выше несложного преобразования будут соответствовать формулам равноугольной поперечно-цилиндрической проекции, известной под названием проекции Гаусса—Ламберта (рис. 38),

$$x = Ra; \quad y = \frac{R}{\text{mod}} \lg \operatorname{ctg} \frac{z}{2};$$

$$\mu = \operatorname{cosec} z; \quad p = \operatorname{cosec}^2 z;$$

$$\omega = 0,$$

где  $\mu$  — масштаб длин.

Используя аналогично квадратную проекцию, получим формулы равнопромежуточной по вертикалам поперечно-цилиндрической проекции, известной под названием проекции Кассини—Зольднера (рис. 39):

$$x = Ra; \quad y = R(90^\circ - z);$$

$$\mu_1 = 1; \quad \mu_2 = p = \operatorname{cosec} z;$$

$$\sin(\omega/2) = \operatorname{tg}^2(45^\circ - z/2),$$

где  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — соответственно масштабы по вертикалам и альмукантаратам.

Эта проекция была положена в основу геодезических координат Зольднера.

В поперечно-цилиндрических проекциях (см. рис. 37) прямолинейный осевой меридиан совпадает с экватором поперечной системы координат, остальные альмукантараты изображаются прямыми, параллельными осевому меридиану; вертикалы изображаются прямыми, перпендикулярными к осевому меридиану, начальный вертикал  $a = 0$  совпадает с географическим экватором.

Искажения зависят от зенитного расстояния, поэтому изоколы совпадают с альмукантаратами и имеют вид прямых.

Косые цилиндрические проекции следует применять для изображения длинных полос картографируемой поверхности, вытянутых под острым или тупым углом к меридианам. При получении этих проекций нужно:

перейти от эллипсоида к поверхности шара для карт крупного масштаба или же определить радиус шара  $R$  при создании карт мелкого масштаба;

вычислить координаты полюса косо́й системы  $Q$  ( $\varphi_0, \lambda_0$ ) по формулам, помещенным в гл. III: определить вспомогательный угол  $u_1$ , характеризующий направление экватора косо́й системы, а затем — координаты  $\varphi_0$  и  $\lambda_0$  по формулам (62). Обычно значения координат округляют до целых градусов;

осуществить переход от географических координат к полярным сферическим координатам косо́й системы. Этот переход осуществляют по формулам (59) и (60) или (61).

Если значения  $\varphi_0$  и  $\lambda_0$  кратны пяти градусам и частота картографической сетки также равна пяти или десяти градусам, то для перехода от географических координат к полярным сферическим координатам косо́й системы можно воспользоваться готовыми значениями  $z$  и  $a$  из «Картографических таблиц» (Тр. ЦНИИГАиК. М., Геодезиздат, 1960, вып. 132).

Получив значения  $z$  и  $a$ , переходят к вычислению прямоугольных координат и масштабов проекции по формулам

$$x = f(z); \quad y = \beta a;$$

$$\mu_1 = -\beta/R dz; \quad \mu_2 = \beta/R \sin z; \quad \rho = \mu_1 \mu_2;$$

$$\sin(\omega/2) = (a-b)/(a+b) \quad \text{или} \quad \text{tg}(45^\circ + \omega/4) = \sqrt{a/b};$$

$$\beta = R \sin z_k \quad \text{или} \quad \beta = R.$$

( $a$  и  $b$  — экстремальные масштабы).

Формулы конкретных вариантов проекций могут быть получены из приведенных выше общих формул путем нахождения значений абсцисс под условиями равноугольного, равновеликого или равнопромежуточного изображения или же путем несложного преобразования формул нормальных проекций. Например, формулы равноугольных косо́х цилиндрических проекций, которые часто применяются для аэронавигационных карт, могут быть получены из формул равноугольных нормальных цилиндрических проекций при замене  $\varphi$  на  $(90^\circ - z)$  и  $\lambda$  на  $a$ . После указанного преобразования формул (122) получим

$$x = \frac{\beta}{\text{mod}} \lg \text{ctg}(z/2); \quad y = \beta a;$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \beta/R \sin z;$$

$$\rho = \mu^2; \quad \omega = 0;$$

$$\beta = R \sin z_k \quad \text{или} \quad \beta = R.$$

## § 36. ПЕРСПЕКТИВНО-ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Выше было указано, что цилиндрические проекции могут быть получены геометрическим путем, они обладают всеми общими свойствами цилиндрических проекций. Рассмотрим вопрос получения этих проекций.

Представим цилиндр, ось которого совпадает с полярной осью картографируемой поверхности (сферы). Этот цилиндр может пересекать сферу или касаться ее по экватору. Спроектируем дуги меридианов методом перспективных проекций на образующие цилиндра отдельно в плоскости каждого меридиана в соответствии с заданной частотой картографической сетки (рис. 40). При этом проектировании точку зрения будем мысленно передвигать в плоскости экватора, от одного меридиана к другому, оставаясь все время на одинаковом расстоянии от центра шара. Соединив спроектированные точки одноименных меридианов и параллелей линиями и развернув боковую поверхность цилиндра, получим на плоскости картографическую сетку нормальной перспективно-цилиндрической проекции. Если

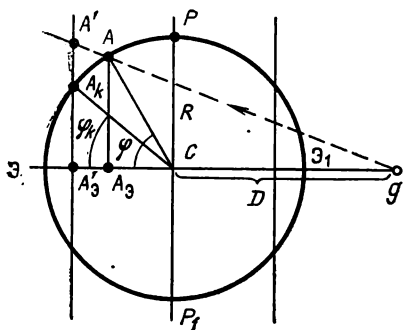


РИС. 40. Получение нормальной перспективно-цилиндрической проекции

принять за ось  $X$  один из меридианов, а за ось  $Y$  — экватор или параллель с наименьшим значением широты, то формулы прямоугольных координат этой проекции будут иметь вид

$$x = f(\varphi); \quad y = \beta\lambda.$$

Меридианы и параллели изобразятся в этой проекции двумя системами взаимно перпендикулярных прямых; расстояния между меридианами определяются так же, как и в нормальных цилиндрических проекциях, а между параллелями — по методу перспективных проекций.

При получении нормальных перспективно-цилиндрических проекций картографируемую поверхность можно принять за эллипсоид вращения, но, учитывая целесообразность применения этих проекций для обзорных карт мелкого масштаба, ограничимся рассмотрением проекций шара.

Значение абсциссы  $x$  найдем геометрическим путем. На рис. 40 точка  $A$  проектируется из точки зрения  $g$  на образующую цилиндра, пересекающего шар в точке  $A_k$ , находящейся на параллели с широтой  $\varphi_k$ . При этом точка зрения находится на расстоянии  $D$  от центра шара. Точка  $A'$  является проекцией точки  $A$ , если начало прямоугольных координат совместить с точкой  $A'_3$  (в плоскости экватора), то отрезок  $A'_3g$  будет абсциссой изображаемой точки  $A$ .

Из подобия треугольников  $gAA_3$  и  $gA'A'_3$

$$x = \frac{AA_3 \cdot A'_3g}{A_3g},$$

причем

$$A'_3g = D + A'_3C.$$



Из  $\triangle AA_3C$

$$AA_3 = R \sin \varphi; \quad A_3C = R \cos \varphi,$$

тогда

$$x = \frac{R \sin \varphi (D + \cos \varphi_k)}{D + \cos \varphi}.$$

Если принять отношение  $D/R = k$ , то

$$x = \frac{R \sin \varphi (k + \cos \varphi_k)}{D + \cos \varphi}.$$

Величина  $(k + \cos \varphi_k)$  для получаемой проекции является постоянной, обозначив ее  $C$ , получим

$$x = CR \frac{\sin \varphi}{k + \cos \varphi}.$$

Если  $\varphi_k = 0$  (цилиндр является касательным), то  $C = k + 1$ .

Общие формулы нормальных перспективно-цилиндрических проекций:

$$x = CR \frac{\sin \varphi}{k + \cos \varphi}; \quad y = \beta \lambda;$$

$$m = dx/Rd\varphi = C(1 + k \cos \varphi)/(k + \cos \varphi)^2; \quad n = \beta/r;$$

$$p = mn; \quad \sin(\omega/2) = (a - b)/(a + b),$$

где  $a$  и  $b$  — экстремальные масштабы длин.

При

$$C = k + \cos \varphi_k; \quad \beta = R \cos \varphi_k$$

— цилиндр секущий, при

$$C = k + 1; \quad \beta = R$$

— цилиндр касательный.

Сетка проекций ортогональна, поэтому масштабы  $m$  и  $n$  являются экстремальными.

По характеру искажений перспективно-цилиндрические проекции являются произвольными. Они отличаются друг от друга широтой  $\varphi_k$  параллели, по которой цилиндр пересекает сферу, и удалением  $D$  точки зрения  $g$  от центра шара  $C$ .

Рассмотрим несколько частных случаев.

1.  $k = 0$  — проектирование по методу гномонических проекций;  
 $\varphi_k = 0^\circ$  — цилиндр касательный;

$$x = R \operatorname{tg} \varphi; \quad y = R \lambda;$$

$$m = \sec^2 \varphi; \quad n = \sec \varphi;$$

$$p = \sec^3 \varphi; \quad \sin(\omega/2) = \operatorname{tg}^2(\varphi/2).$$

Этот вариант соответствует известной проекции Уэтча.

2.  $k = 1$  — проектирование по методу стереографических проекций.

$$\begin{aligned}\varphi_k &= 0^\circ \text{ — цилиндр касательный;} \\ x &= 2R \operatorname{tg}(\varphi/2); \quad y = R\lambda; \\ m &= \sec^2(\varphi/2); \quad n = \sec \varphi; \\ p &= \sec^2(\varphi/2) \sec \varphi; \quad \sin(\omega/2) = (a-b)/(a+b),\end{aligned}$$

где  $a$  и  $b$  — экстремальные масштабы длин.

Данный вариант соответствует проекции Брауна.

3.  $k = 1$ .

$$\begin{aligned}\varphi_k &= 45^\circ \text{ — цилиндр секущий;} \\ x &= (1 + \cos \varphi_k) R \operatorname{tg}(\varphi/2); \quad y = R \cos \varphi_k \lambda; \\ m &= \frac{(1 + \cos \varphi_k)}{2} \sec^2(\varphi/2); \quad n = \cos \varphi_k \sec \varphi; \\ p &= mn; \quad \sin(\omega/2) = (a-b)/(a+b),\end{aligned}$$

где  $a$  и  $b$  — экстремальные масштабы длин.

Этот вариант известен как проекция Голла. При  $\varphi_k = 30^\circ$  применялся для карт мира в I т. БСАМ.

Искажения в нормальных перспективно-цилиндрических проекциях зависят только от широты, поэтому изоколы совпадают с параллелями и имеют вид прямых. Проекции имеют два параметра —  $k$  и  $\varphi_k$ , которые влияют на вид сетки (изменение расстояний между параллелями и меридианами) и распределение искажений.

В косых перспективно-цилиндрических проекциях сетка меридианов и параллелей не совпадает с нормальной. Меридианы и параллели имеют вид кривых, а вертикалы и альмукантараты изображаются двумя системами взаимно перпендикулярных прямых. Эти проекции могут быть получены указанным выше способом, но при этом точка зрения, из которой выполняется проектирование на картинную плоскость, находится не в плоскости экватора, а в плоскости альмукантарата с зенитным расстоянием  $z = 90^\circ$ . Общие формулы косых перспективно-цилиндрических проекций можно получить и более простым способом из уравнений нормальных перспективно-цилиндрических проекций, заменив в них  $\varphi$  на  $(90^\circ - z)$  и  $\lambda$  на  $a$ :

$$\begin{aligned}x &= CR \frac{\cos z}{k + \sin z}; \quad y = \beta a; \\ \mu_1 &= C(1 + k \sin z)/(k + \sin z)^2; \quad \mu_2 = \beta/R \sin z; \\ p &= \mu_1 \mu_2; \quad \sin(\omega/2) = (a-b)/(a+b),\end{aligned}$$

где  $a$  и  $b$  — экстремальные масштабы длин.

При

$$C = k + \sin z_k; \quad \beta = R \sin z_k$$

— цилиндр секущий, при

$$C = k + 1; \quad \beta = R$$

— цилиндр касательный.

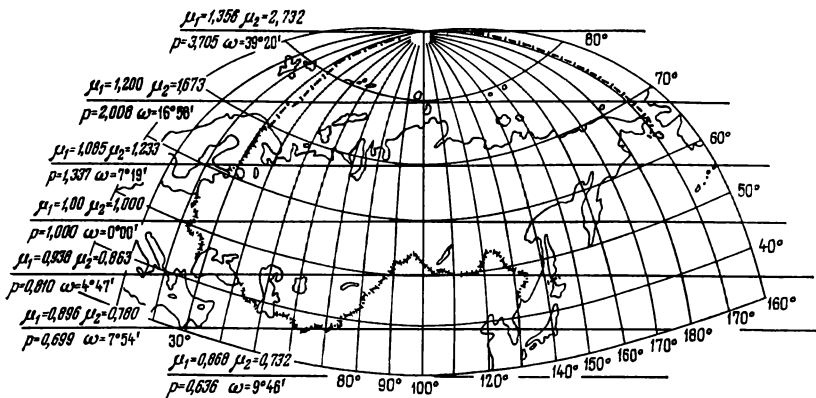


РИС. 41. Косая поперечно-цилиндрическая проекция (вариант М. Д. Соловьева)

Искажения зависят только от координаты  $z$ , поэтому изоколы совпадают с альмукантаратами и имеют вид параллельных прямых, перпендикулярных к прямолинейному меридиану.

Косые перспективно-цилиндрические проекции были разработаны для создания учебных карт.

В рассматриваемых проекциях имеются три величины:  $\varphi_0$ ,  $k$  и  $z_k$ , которые влияют на вид сетки и распределение искажений. Путем подбора этих параметров можно изменять кривизну параллелей, размеры картографической сетки и перераспределять искажения. Эти проекции целесообразно использовать в том случае, когда изображаемая на карте территория должна быть ограничена рамками определенного размера.

Один из вариантов косых перспективно-цилиндрических проекций, разработанный М. Д. Соловьевым (рис. 41), широко применялся в нашей стране при создании школьных карт, на которых показаны географический полюс и Северный Ледовитый океан ( $\varphi_0 = 75^\circ$ ,  $\lambda_0 = -80^\circ$ ,  $k = 1$  и  $z_k = 45^\circ$ ).

## Глава VII

### ПСЕВДОЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

#### § 37. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ

Нормальная сетка псевдоцилиндрических проекций имеет следующий вид: параллели изображаются прямыми линиями, а меридианы — кривыми. Эти проекции можно рассматривать как видоизмененные нормальные цилиндрические проекции, в которых все

меридианы (за исключением осевого) изображаются кривыми линиями.

В системе прямоугольных координат общие уравнения этих проекций

$$x = f(\varphi); \quad y = F(\varphi, \lambda).$$

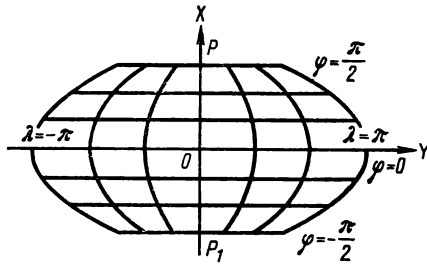
При этом начало координат находится в точке пересечения экватора с осевым меридианом (рис. 42).

В псевдоцилиндрических проекциях можно изобразить всю картографируемую поверхность, а при необходимости повторить части изображения по долготе.

Географические полюсы можно показать точками или линиями, которые параллельны параллелям и называются *полярными линиями*.

Меридианы имеют заданный вид и изображаются чаще всего эллипсами или синусоидами, но можно получить псевдоцилиндрические проекции, в которых меридианы имеют вид парабол, гипербол и других линий.

Сетка в псевдоцилиндрических проекциях не ортогональна:



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varepsilon &= -f/h = -y_{\varphi} y_{\lambda} / x_{\varphi} x_{\lambda} = \\ &= -y_{\varphi} / x_{\varphi}, \end{aligned}$$

отсюда

$$y_{\varphi} = -x_{\varphi} \operatorname{tg} \varepsilon. \quad (123)$$

РИС. 42. Система координат в псевдоцилиндрической проекции

Найдем масштаб по меридианам и параллелям по общим формулам  $m = \sqrt{e/M}$ ;  $n = \sqrt{g/r}$ .

Для псевдоцилиндрических проекций

$$e = x_{\varphi}^2 + y_{\varphi}^2$$

или, с учетом формулы (123),

$$e = x_{\varphi}^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon) = x_{\varphi}^2 \sec^2 \varepsilon,$$

отсюда

$$m = \frac{x_{\varphi}}{M} \sec \varepsilon; \quad g = x_{\lambda}^2 + y_{\lambda}^2,$$

$x_{\lambda}^2 = 0$ , поэтому  $g = y_{\lambda}^2$ .

Подставив значение  $g$  в формулу масштаба по параллелям, получим

$$n = \frac{y_{\lambda}}{r} = \frac{y_{\lambda}}{N \cos \varphi} = \frac{y_{\lambda}}{N} \sec \varphi.$$

Масштаб площади

$$p = mn \cos \varepsilon = x_{\varphi} y_{\lambda} / Mr.$$

В рассматриваемых проекциях главные направления не совпадают с меридианами и параллелями, поэтому масштабы по меридианам и параллелям не являются экстремальными. Экстремальные масштабы  $a$  и  $b$  определяют по формулам (43).

Максимальное искажение углов целесообразно в этих проекциях находить по формуле

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{B}{2\rho} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - 2\rho}{\rho}}.$$

Псевдоцилиндрические проекции, как правило, применяют для составления карт мелких масштабов, поэтому картографируемую поверхность обычно принимают за сферу радиуса  $R$ .

Общие уравнения псевдоцилиндрических проекций для сферы:

$$x = f(\varphi); \quad y = F(\varphi; \lambda);$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = -y_{\varphi}/x_{\varphi};$$

$$m = \frac{x_{\varphi}}{R} \sec \varepsilon; \quad n = \frac{y_{\lambda}}{R \cos \varphi} = \frac{y_{\lambda}}{R} \sec \varphi; \quad (124)$$

$$\rho = \frac{x_{\varphi} y_{\lambda}}{R^2 \cos \varphi}; \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - 2\rho}{\rho}}.$$

По характеру искажений псевдоцилиндрические проекции подразделяются на равновеликие и произвольные; наибольшее распространение получили равновеликие проекции.

Если масштаб площади

$$\rho = \frac{x_{\varphi} y_{\lambda}}{M\tau} = k^2,$$

где  $k$  — постоянная величина, то

$$y_{\lambda} = \frac{k^2 M\tau}{x_{\varphi}}.$$

После интегрирования

$$y = \frac{k^2 M\tau}{x_{\varphi}} \lambda + F(\varphi),$$

где  $F$  — произвольная функция широты  $\varphi$ . При  $\lambda = 0$  и  $y = 0$  ось  $X$  совпадает с осевым меридианом, следовательно,  $F(\varphi) = 0$ .

Чаще всего  $k = 1$ , тогда

$$y = \frac{M\tau}{x_{\varphi}} \lambda.$$

Для шара

$$y = \frac{R^2 \cos \varphi}{x_{\varphi}} \lambda. \quad (125)$$

Последнее уравнение характерно для всех равновеликих псевдоцилиндрических проекций.

### § 38. РАВНОВЕЛИКИЕ ПСЕВДОЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Псевдоцилиндрические проекции известны давно, но раньше при разработке этих проекций каждый ученый предлагал свой способ получения картографической сетки.

Советские ученые В. В. Каврайский и Н. А. Урмаев предложили новый обобщенный способ получения равновеликих псевдоцилиндрических проекций.

Уравнения прямоугольных координат псевдоцилиндрических проекций в параметрическом виде, исходя из характера изображения меридианов и географического полюса:

для проекций с синусоидальными меридианами

$$x = C\alpha; \quad (126)$$

$$y = (A \cos \alpha + B) \lambda; \quad (127)$$

для проекций с эллиптическими меридианами

$$x = C \sin \alpha; \quad (128)$$

$$y = (A \cos \alpha + B) \lambda,$$

где  $A, B, C$  — параметры, характеризующие размеры сетки;  $\alpha = f(\varphi)$ .

Для получения равновеликих псевдоцилиндрических проекций поставим три условия.

1. Условие пределов, которое устанавливает связь между широтой  $\varphi$  и вспомогательной функцией широты  $\alpha$ : при  $\varphi = 0^\circ$  и  $\alpha = 0^\circ$ , а при  $\varphi = \pi/2$  и  $\alpha = \pi/2$ .

2. Условие размерности сетки (для общего случая, т. е. для проекции с полярными линиями):

$$x_p = y_p = y_s/2.$$

Если полюс изображается точкой, то  $y_p = 0$ .

3. Условие равновеликости [из формулы (125)]

$$y = \frac{R^2 \cos \varphi}{x_\varphi} \lambda.$$

Исходя из приведенных условий находят соотношения между параметрами  $A, B$  и  $C$ ; затем выражают эти параметры через элементы картографируемой поверхности и, наконец, определяют связь между широтой и вспомогательной функцией  $\alpha$ .

При выводе формул используется равенство двух значений ординат: одно из общего уравнения в параметрическом виде, другое — из условия равновеликости. При получении псевдоцилиндрических произвольных проекций вместо условия равновеликости используют другие условия.

**§ 39. РАВНОВЕЛИКАЯ СИНУСОИДАЛЬНАЯ ПСЕВДОЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ С ПОЛЮСАМИ В ВИДЕ ТОЧЕК**

Проекция синусоидальная, поэтому по формуле (126)

$$x = \alpha C.$$

Географические полюсы изображаются точками, поэтому  $y_p = 0$ , а из формулы (127)  $y = A \lambda \cos \alpha$ .

Проекция равновеликая, поэтому по формуле (125)

$$y = \frac{R^2 \cos \varphi}{x_\varphi} \lambda.$$

На основании условия размерности сетки

$$x_p = y_s/2.$$

Для изображения всей картографируемой поверхности

$$x_p = C \frac{\pi}{2}; \quad y_s = A\pi.$$

Тогда

$$C \frac{\pi}{2} = \frac{A\pi}{2}; \quad C = A.$$

Отсюда

$$y = C\lambda \cos \alpha.$$

Приравняем значения ординат:

$$C \cos \alpha = R^2 \cos \varphi / x_\varphi = R^2 \cos \varphi / C \alpha_\varphi;$$

$$C^2 \cos \alpha d\alpha = R^2 \cos \varphi d\varphi.$$

После интегрирования

$$C^2 \sin \alpha = R^2 \sin \varphi + C_1.$$

Если при  $\varphi = 0$  и  $\alpha = 0$ , то постоянная интегрирования тоже равна нулю:

$$C^2 \sin \alpha = R^2 \sin \varphi. \quad (129)$$

При  $\varphi = \pi/2$  и  $\alpha = \pi/2$

$$C^2 = R^2.$$

Подставим значение  $C^2$  в формулу (129), тогда

$$\sin \alpha = \sin \varphi; \quad \alpha = \varphi.$$

Используя полученные результаты в формулах (124), напомним уравнения равновеликой синусоидальной псевдоцилиндрической проекции, которая известна под названием проекции Сансона\*:

\* Сансон — французский географ (1600—1667).

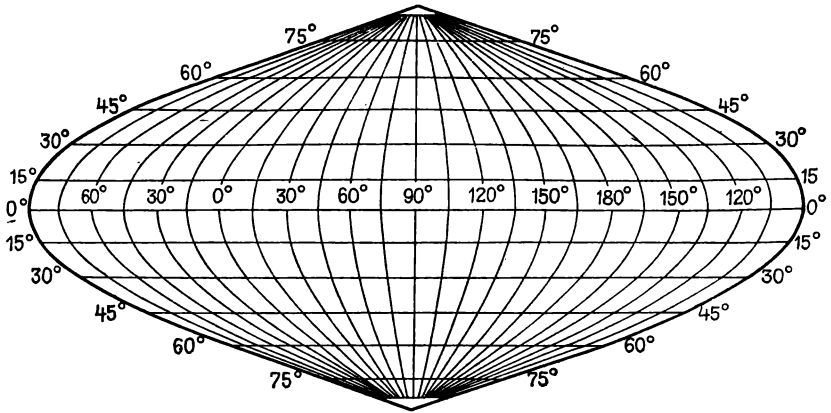


РИС. 43. Равновеликая синусоидальная псевдоцилиндрическая проекция Сансона

$$\begin{aligned}
 x &= R\varphi; & y &= R\lambda \cos \varphi; \\
 \operatorname{tg} \varepsilon &= \lambda \sin \varphi; \\
 m &= \sec \varepsilon; & m_0 &= 1; & n &= 1; \\
 \rho &= 1; & \operatorname{tg} (\omega/2) &= \operatorname{tg} \varepsilon/2.
 \end{aligned}
 \tag{130}$$

В проекции Сансона (рис. 43) сохраняется длина всех параллелей и длина осевого меридиана.

Масштаб по меридианам и искажения углов являются функциями широты и долготы (ниже приводятся значения масштабов длин), изоколы, характеризующие искажения длины меридианов и искажения углов имеют вид гиперболических кривых, симметричных относительно экватора и осевого меридиана. Проекцию Сансона применяли в атласах для мелкомасштабных обзорных карт мира. Долгие годы ее считали одной из лучших проекций, предназначенных для создания этих карт.

Ф., градус	0	15	30	45	60
0	1,0	1,000	1,000	1,000	1,000
15	1,0	1,002	1,009	1,020	1,036
30	1,0	1,009	1,034	1,074	1,129
45	1,0	1,017	1,066	1,144	1,244
60	1,0	1,025	1,098	1,209	1,350

#### § 40. РАВНОВЕЛИКАЯ СИНУСОИДАЛЬНАЯ ПСЕВДОЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ С ПОЛЯРНОЙ ЛИНИЕЙ

В этой проекции географические полюсы изображаются полярными линиями, параллельными параллелям, длина этих линий в два раза меньше длины экватора (см. рис. 15).

Проекция синусоидальная, поэтому по формуле (126)

$$x = \alpha C.$$



Географические полюсы изображаются линиями, поэтому по формуле (128)

$$y = (A \cos \alpha + B) \lambda.$$

Проекция равновеликая, поэтому из (125)

$$y = \frac{R^2 \cos \varphi}{x_\varphi} \lambda.$$

На основании условия размерности сетки для рассматриваемой проекции

$$x_p = y_p = y_s/2;$$

$$x_p = C \frac{\pi}{2}; \quad y_p = B\pi; \quad y_s = (A + B) \pi;$$

$$C \frac{\pi}{2} = B\pi = \frac{A + B}{2} \pi;$$

$$A = B = C/2.$$

Тогда

$$y = \frac{C}{2} (\cos \alpha + 1) \lambda;$$

$$y = \frac{R^2 \cos \varphi}{x_\varphi} \lambda = \frac{R^2 \cos \varphi}{C (d\alpha/d\varphi)} \lambda.$$

Приравняв значения ординат, получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{C^2}{2} (1 + \cos \alpha) d\alpha = R^2 \cos \varphi d\varphi.$$

После интегрирования

$$\frac{C^2}{2} (\alpha + \sin \alpha) = R^2 \sin \varphi. \quad (131)$$

Постоянная интегрирования равна нулю, так как при  $\varphi = 0$  и  $\alpha = 0$ .

При  $\varphi = \pi/2$  и  $\alpha = \pi/2$ , следовательно,

$$\frac{C^2}{2} \left( \frac{\pi}{2} + 1 \right) = R^2,$$

отсюда

$$C = 2R/\sqrt{\pi + 2}; \quad A = B = R/\sqrt{\pi + 2}.$$

Подставим полученное значение  $C$  в формулу (131)

$$\alpha + \sin \alpha = \frac{\pi + 2}{2} \sin \varphi, \quad (132)$$

где  $\alpha$  — в радианах.

Последнее уравнение является трансцендентным и может быть решено только приближенно (по способу последовательных приближений).

Заданные и искомые величины при определении обычно объединяют в таблицы, поэтому и способ определения  $\alpha$  называют способом двух таблиц.

В первой таблице по  $\alpha$  находят значения  $\varphi$ , которые не соответствуют целым значениям градусов.

Во второй таблице помещают значения широт, выраженные целыми числами градусов:  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  и т. д. и путем интерполирования находят  $\alpha$  для каждого значения широты. Ниже приводятся вычисленные значения  $\alpha$ .

$\varphi$ , градус	"	15	30	45	60	75	90
$\alpha$	0	19°15'	38°12'	56°25'	72°49'	85°11'	90°00'

Формулы равновеликой синусоидальной псевдоцилиндрической проекции с полярными линиями (эту проекцию иногда называют проекцией Эккерта, но она получена советскими учеными как частный случай равновеликой псевдоцилиндрической проекции):

$$x = \frac{2R}{\sqrt{\pi + 2}} \alpha; \quad y = \frac{2R\lambda}{\sqrt{\pi + 2}} \cos^2 \frac{\alpha}{2};$$

$$\alpha + \sin \alpha = \frac{\pi + 2}{2} \sin \varphi; \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\lambda}{2} \sin \varphi;$$

$$m = \frac{\sqrt{\pi + 2}}{2} \sec^2 \frac{\alpha}{2} \cos \varphi \sec \varepsilon; \quad n = \frac{2}{\sqrt{\pi + 2}} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sec \varphi;$$

(133)

$$p = 1; \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + n^2 - 2}.$$

В этой проекции искажения длин по параллелям являются функцией только широты, поэтому изоколы, характеризующие этот вид искажений, совпадают с параллелями и имеют вид прямых. Искажения длин по меридианам и искажения углов зависят и от широты, и от долготы, изоколы, характеризующие искажения этих видов, являются гиперболическими кривыми, симметричными осевому меридиану и экватору.

Рассмотренную проекцию широко использовали в довоенных изданиях советских географических атласов.

#### § 41. РАВНОВЕЛИКАЯ СИНУСОИДАЛЬНАЯ ПСЕВДОЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ КАВРАЙСКОГО

Эта проекция очень близка к рассмотренной выше равновеликой синусоидальной проекции с полярной линией. Для ее получения В. В. Каврайский поставил два дополнительных условия: параметр  $B = 0$  и функция широты  $\alpha = \pi/3$  при  $\varphi = \pi/2$ .

Проекция синусоидальная, поэтому

$$x = C\alpha; \quad y = A\lambda \cos \alpha.$$

Из условий размерности сетки

$$x_p = y_p = y_s/2;$$

$$x_p = C(\pi/3); \quad y_p = A\lambda \cos(\pi/3); \quad y_s = A\lambda;$$

$$C(\pi/3) = A\lambda \cos(\pi/3) = A\lambda/2,$$

откуда

$$A = \frac{2}{3}C.$$

Проекция равновеликая, следовательно,

$$y = \frac{R^2 \cos \varphi}{x_\varphi} \lambda.$$

Из равенства ординат

$$\frac{2}{3}C \cos \alpha = R^2 \cos \varphi / C \frac{d\alpha}{d\varphi}$$

получим дифференциальное уравнение

$$\frac{2}{3}C^2 \cos \alpha d\alpha = R^2 \cos \varphi d\varphi.$$

После интегрирования

$$\frac{2}{3}C^2 \sin \alpha = R^2 \sin \varphi, \quad (134)$$

где постоянная интегрирования равна нулю, так как при  $\varphi = 0$   
 $\alpha = 0$ . При  $\varphi = \pi/2$   $\alpha = \pi/3$ , откуда

$$C^2 = \sqrt{3} R^2. \quad (135)$$

Подставим формулу (135) в (134) и получим соотношение между  $\varphi$  и  $\alpha$ :

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi.$$

Вспомогательную функцию  $\alpha$  в этой проекции найти легче, для ее определения не нужно составлять специальных таблиц; кривизна меридианов в проекции Каврайского изменяется медленнее, чем в проекции, рассмотренной в § 40.

Формулы равновеликой синусоидальной проекции Каврайского:

$$x = R \sqrt[4]{3} \alpha; \quad y = \frac{2}{3} R \sqrt[4]{3} \lambda \cos \alpha;$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \varphi; \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2}{3} \lambda \sin \varphi;$$

$$m = \frac{3}{2\sqrt[4]{3}} \sec \alpha \cos \varphi \sec \varepsilon; \quad n = \frac{2}{3} \sqrt[4]{3} \cos \alpha \sec \varphi; \quad (136)$$

$$p = 1; \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + n^2 - 2}.$$

#### § 42. РАВНОВЕЛИКАЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ПСЕВДОЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ С ПОЛЮСАМИ В ВИДЕ ТОЧЕК

Рассматриваемая проекция носит название проекции Мольвейде. Картографическая сетка этой проекции помещена на рис. 44. Все меридианы являются эллипсами, за исключением осевого — прямолинейного и меридиана с долготой  $\lambda = 90^\circ$ , который изображается окружностью.

Сетка проекции позволяет получить наглядное представление о всей земной поверхности, и до настоящего времени ее применяют для карт океанов и в качестве обзорной в атласах.

Проекция эллиптическая, поэтому по формуле (127)

$$x = C \sin \alpha.$$

Географические полюсы изображаются точками, следовательно, из (128)

$$y = A \lambda \cos \alpha.$$

Проекция равновеликая, поэтому из уравнения (125)

$$y = \frac{R^2 \cos \varphi}{x \varphi} \lambda.$$

На основании условия размерности сетки

$$x_p = y_s/2.$$

Так как

$$x_p = C; \quad y_s = A\pi,$$

$$C = A\pi/2; \quad A = 2C/\pi.$$

Тогда

$$y = \frac{2C}{\pi} \lambda \cos \alpha$$

и из условия равновеликости

$$y = \frac{R^2 \cos \varphi}{x \varphi} \lambda = \frac{R^2 \cos \varphi}{C \cos \alpha (d\alpha/d\varphi)} \lambda.$$

Приравняв уравнения, получим

$$\frac{2C}{\pi} \cos \alpha = \frac{R^2 \cos \varphi}{C \cos \alpha (d\alpha/d\varphi)}.$$

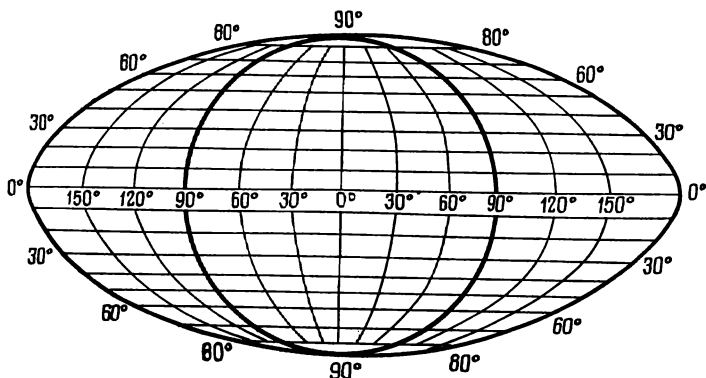


РИС. 44. Равновеликая эллиптическая псевдоцилиндрическая проекция с полюсами в виде точек

Получим дифференциальное уравнение с разделенными переменными и преобразуем его:

$$\frac{2C^2}{\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = R^2 \cos \varphi d\varphi;$$

$$\frac{C^2}{\pi} (1 + \cos 2\alpha) d\alpha = R^2 \cos \varphi d\varphi.$$

После интегрирования получим

$$\frac{C^2}{2\pi} (2\alpha + \sin 2\alpha) = R^2 \sin \varphi. \quad (137)$$

Постоянная интегрирования равна нулю, так как при  $\varphi = 0 \alpha = 0$ . При  $\varphi = \pi/2 \alpha = \pi/2$ , следовательно,  $C^2/2 = R^2$ , откуда

$$C^2 = 2R^2.$$

Подставив значение  $C^2$  в формулу (137), получим уравнение Мольвейде

$$2\alpha + \sin 2\alpha = \pi \sin \varphi,$$

которое характеризует связь широты  $\varphi$  со вспомогательной функцией  $\alpha$ . Это уравнение трансцендентное; его решают обычно по способу последовательных приближений (см. § 40).

Формулы проекции Мольвейде:

$$x = \sqrt{2} R \sin \alpha; \quad y = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} R \lambda \cos \alpha;$$

$$2\alpha + \sin 2\alpha = \pi \sin \varphi; \quad \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2\lambda}{\pi} \operatorname{tg} \alpha;$$

$$m = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \sec \alpha \cos \varphi \sec \varepsilon; \quad n = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cos \alpha \sec \varphi; \quad (138)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{m^2 + n^2 - 2}.$$

Распределения частных масштабов длин и искажений углов приведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2. Значения частных масштабов длин и искажений углов в проекции Мольвейде

φ, градус	n	Обозначения	λ, градус			
			0	30	60	90
0	0,900	<i>m</i>	1,111	1,111	1,111	1,111
		ω, градус	12,0	12,0	12,0	12,0
30	0,951	<i>m</i>	1,052	1,063	1,096	1,150
		ω, градус	5,8	10,5	18,5	26,7
60	1,165	<i>m</i>	0,858	0,922	1,091	1,326
		ω, градус	17,4	25,7	40,7	55,7
90	3,665	<i>m</i>	0,273	1,305	2,568	3,840
		ω, градус	180,0	180,0	180,0	180,0

### § 43. ПРОИЗВОЛЬНАЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКАЯ ПСЕВДОЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ КАВРАЙСКОГО

Проекция эллиптическая, поэтому

$$x = C \sin \alpha.$$

Поставим условие, чтобы длина осевого меридиана сохранялась в этой проекции без искажений, тогда

$$x = R\varphi,$$

отсюда

$$\sin \alpha = \frac{R\varphi}{C};$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{R^2\varphi^2}{C^2}} = \frac{1}{C} \sqrt{C^2 - R^2\varphi^2}. \quad (139)$$

После подстановки  $\cos \alpha$  в формулу

$$y = A\lambda \cos \alpha$$

получим

$$y = \frac{A\lambda}{C} \sqrt{C^2 - R^2\varphi^2}. \quad (140)$$

На основании условия размерности сетки

$$y_p = y_s/2 = \frac{A\lambda}{C} \sqrt{C^2 - R^2 \frac{\pi^2}{4}} = \frac{A\lambda}{2C} \sqrt{4C^2 - R^2\pi^2};$$

$$y_s = \frac{A\lambda}{C} \sqrt{C^2}; \quad \sqrt{C^2} = \sqrt{4C^2 - R^2\pi^2};$$

$$3C^2 = R^2\pi^2; \quad C = R\pi/\sqrt{3}.$$

Один из меридианов изображается окружностью; для этого меридиана  $C = A\lambda_1$ , где  $\lambda_1$  — его долгота.

Подставим это выражение в формулу (140):

$$y = \frac{\lambda R}{\lambda_1} \sqrt{\frac{\pi^2 - 3\varphi^2}{3}}.$$

Долготу меридиана ( $\lambda_1$ ), который изображается окружностью, можно найти под условием, что на параллелях с заданной широтой  $\pm \varphi_k$ , масштаб  $n_k = 1$ , т. е. длина этих параллелей передается на карте без искажений:

$$\lambda_1 = \sqrt{\pi^2 - 3\varphi_k^2} / \sqrt{3} \cos \varphi_k.$$

Если задать значение долготы  $\lambda_1$ , то получим широту параллелей  $\pm \varphi_k$ , изображаемых без искажений.

В. В. Каврайский принял для своей проекции  $\lambda_1 = 120^\circ$ . При этом условии сохраняется длина двух параллелей с широтами  $\varphi_k = \pm 35^\circ 31' 34''$ .

Сетка проекции (рис. 45) может быть построена при помощи циркуля и линейки.

Общие формулы проекции Каврайского:

$$x = R\varphi; \quad y = \frac{\lambda R}{\lambda_1 \sqrt{3}} \sqrt{\pi^2 - 3\varphi^2};$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\lambda \sqrt{3} \varphi}{\lambda_1 \sqrt{\pi^2 - 3\varphi^2}}; \quad (141)$$

$$m = \sec \varepsilon; \quad n = \frac{\sqrt{\pi^2 - 3\varphi^2}}{\lambda_1 \sqrt{3} \cos \varphi} = p;$$

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - 2p}{p}}.$$

Обычно проекцию вычисляют по упрощенным формулам:

$$x = R\varphi; \quad y = \frac{\lambda}{\lambda_1} k \cos \alpha;$$

$$\sin \alpha = \sqrt{3} \varphi / \pi; \quad k = R\pi / \sqrt{3};$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\lambda}{\lambda_1} \operatorname{tg} \alpha; \quad m_0 = 1; \quad (142)$$

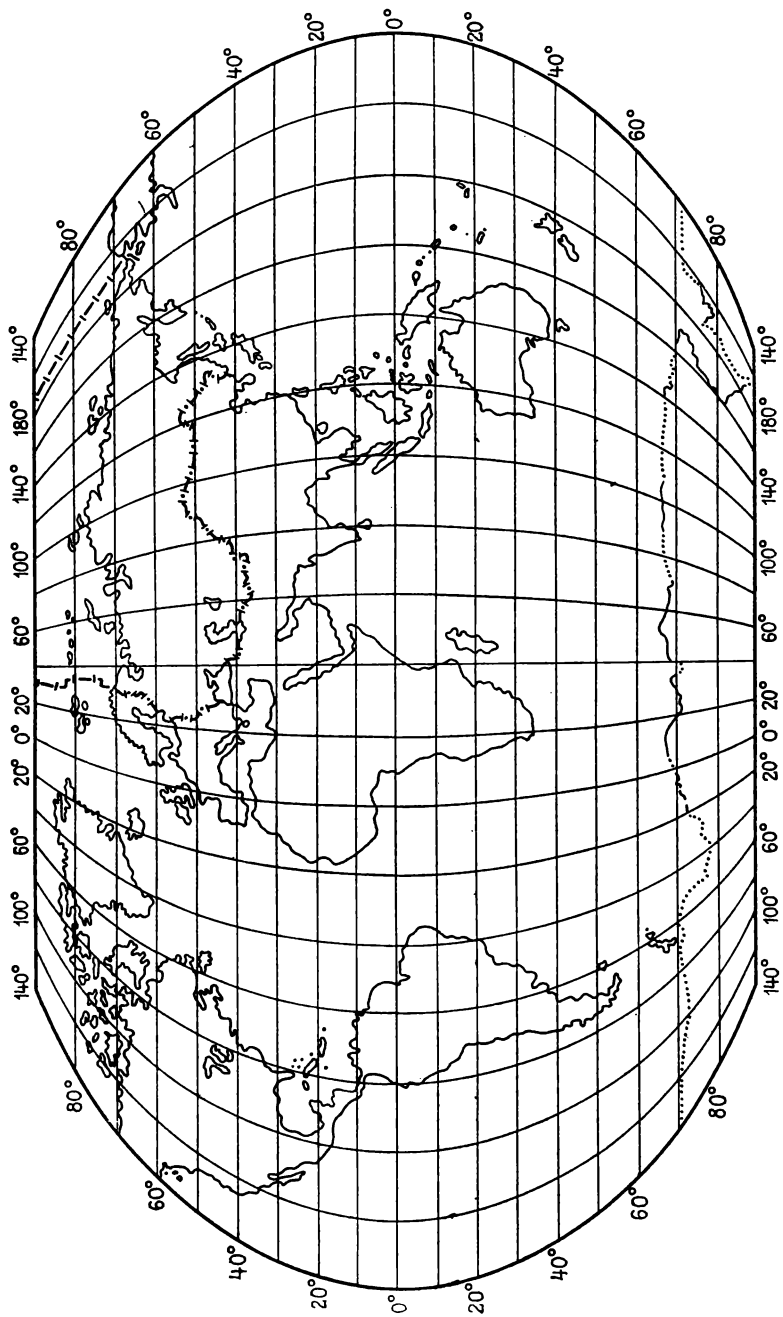


РИС. 45. Произвольная эллиптическая псевдоцилиндрическая проекция В. В. Каврайского



$$m = \sec \varepsilon; \quad n_3 = \pi/\lambda_1 \sqrt{3} = 0,866026;$$

$$n = n_3 \frac{\cos \alpha}{\cos \varphi} = p; \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - 2p}{p}},$$

где  $\lambda_1 = \frac{2}{3}\pi$ ;  $k$  — радиус кругового меридиана.

Распределения масштабов и искажений углов помещены в табл.3.

Изоколы в рассматриваемой проекции имеют разную форму: те из них, которые характеризуют искажения длины параллелей и искажения площадей, имеют вид прямых и совпадают с параллелями, а изоколы, характеризующие искажения длины меридианов и искажения углов, имеют вид гиперболических кривых, симметричных относительно осевого меридиана и экватора.

**Т а б л и ц а 3. Значения частных масштабов длин и искажений углов в проекции Каврайского**

Ф, градус	$n = p$	Обозначения	λ, градус						
			0	20	40	80	120	160	180
0	0,866	$m$	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
		ω, градус	8,2	8,2	8,2	8,2	8,2	8,2	8,2
20	0,904	$m$	1,000	1,001	1,002	1,009	1,019	1,034	1,042
		ω, градус	5,7	6,1	7,0	9,7	13,1	16,6	18,5
40	1,043	$m$	1,000	1,002	1,010	1,038	1,083	1,144	1,180
		ω, градус	2,4	4,6	8,1	15,7	23,2	30,5	34,1
60	1,414	$m$	1,000	1,007	1,027	1,106	1,225	1,374	1,458
		ω, градус	19,8	20,5	22,7	29,6	38,0	46,8	51,2
80	3,183	$m$	1,000	1,020	1,078	1,283	1,567	1,894	2,067
		ω, градус	62,9	63,1	63,8	66,2	69,9	74,5	76,9

#### § 44. ПРИМЕНЕНИЕ СПОСОБА ГУДА В ПСЕВДОЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЯХ

Анализ искажений в псевдоцилиндрических проекциях показывает, что искажения в этих проекциях в высоких широтах достигают значительной величины. Английский ученый Гуд предложил применять для изображения всей картографируемой поверхности псевдоцилиндрические проекции, разработанные в определенной системе для отдельных частей изображаемой территории. Для каждой части (континента или океана) выбирается осевой меридиан с таким расчетом, чтобы искажения не были очень большими, а затем все отдельные части объединяются по экватору. В результате этого объединения получают проекцию для карты мира, на которой континенты изображаются с меньшими искажениями, но зато на океанах возникают разрывы изображения (или, наоборот, океаны изображаются с небольшими искажениями, но за счет разрывов по континентам).

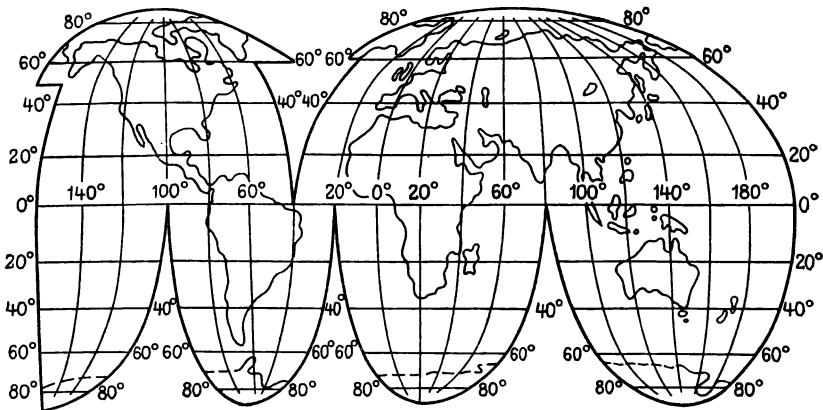


РИС. 46. Проекция Мольвейде—Гуда

Чаще всего для карты континентов долготу осевых меридианов принимают для Северной Америки  $\lambda_0 = -100^\circ$ ; для Южной Америки  $\lambda_0 = -60^\circ$ ; для Евразии  $\lambda_0 = +60^\circ$ ; для Африки  $\lambda_0 = +20^\circ$ ; для Австралии  $\lambda_0 = +140^\circ$ .

По способу Гуда может быть использована любая псевдоцилиндрическая проекция. Сетка проекции Мольвейде—Гуда для карты мира изображена на рис. 46.

## Глава VIII

### ПСЕВДОКОНИЧЕСКИЕ И ПСЕВДОАЗИМУТАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

#### § 45. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ ПСЕВДОКОНИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

*Псевдоконическими* называются *проекции*, в которых параллели представляют собой дуги концентрических окружностей, а меридианы — кривые, симметричные относительно среднего прямолинейного меридиана, на котором расположен центр параллелей (см. рис. 16).

Согласно определению общие уравнения этих проекций:

$$\begin{aligned} x &= q - \rho \cos \delta; & y &= \rho \sin \delta; \\ \rho &= f(\varphi); & \delta &= F(\varphi, \lambda), \end{aligned} \quad (143)$$

где  $q = \text{const}$  — полярное расстояние южной параллели на плоскости.

Продифференцировав уравнения (143) по  $\varphi$  и  $\lambda$ , подставим значения производных в формулы общей теории картографических проекций:

$$f = x_{\varphi}x_{\lambda} + y_{\varphi}y_{\lambda} = \rho^2\delta_{\varphi}\delta_{\lambda}; \quad (144)$$

$$h = x_{\varphi}y_{\lambda} - x_{\lambda}y_{\varphi} = -\rho\rho_{\varphi}\delta_{\lambda}; \quad (145)$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = -f/h = (\rho\delta_{\varphi})/\rho_{\varphi}; \quad (146)$$

$$n = \frac{1}{r} (x_{\lambda}^2 + y_{\lambda}^2)^{1/2} = \frac{\rho\delta_{\lambda}}{r}; \quad (147)$$

$$p = h/Mr = -(\rho\rho_{\varphi}\delta_{\lambda})/Mr; \quad (148)$$

$$m = \frac{p}{n} \sec \varepsilon = -\frac{\rho_{\lambda}}{M} \sec \varepsilon; \quad (149)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{p} - 2}; \quad (150)$$

$$a = (A + B)/2; \quad b = (A - B)/2; \quad (151)$$

где

$$A = \sqrt{m^2 + n^2 + 2p}; \quad B = \sqrt{m^2 + n^2 - 2p},$$

$p, m, n, a, b$  — частные масштабы площадей и длин вдоль меридианов, параллелей и главных направлений (экстремальные масштабы).

Из определения псевдоконических проекций и анализа формул (144), (146) — (150) следует, что картографические сетки в этих проекциях неортогональны, а длины дуг меридианов в них являются функциями и широты, и долготы.

Следовательно, эти проекции не могут быть равноугольными и сохранять длины вдоль меридианов. Они могут быть только равновеликими и произвольными по характеру искажений.

В частном случае, при  $\delta = \alpha\lambda$  или  $\delta = \lambda$ , меридианы — прямые линии и полученные проекции будут соответственно коническими или азимутальными с ортогональными картографическими сетками и с заданным характером искажений.

В рассматриваемых проекциях параллели могут изображаться равноразделенными окружностями, вдоль которых сохраняются длины дуг или постоянные значения масштабов длин (см. § 49).

Наибольшее применение из псевдоконических получила равновеликая проекция Бонна, которая была предложена им в 1752 г.

#### § 46. РАВНОВЕЛИКИЕ ПСЕВДОКОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ. ПРОЕКЦИЯ БОННА

Условие равновеликости с учетом формул (145) и (147)

$$h = -\rho\rho_{\varphi}\delta_{\lambda} = -\rho_{\varphi}nr = Mr.$$

Отсюда полярное расстояние

$$\rho = C - \int \frac{M}{n} d\varphi = C - s, \quad (152)$$

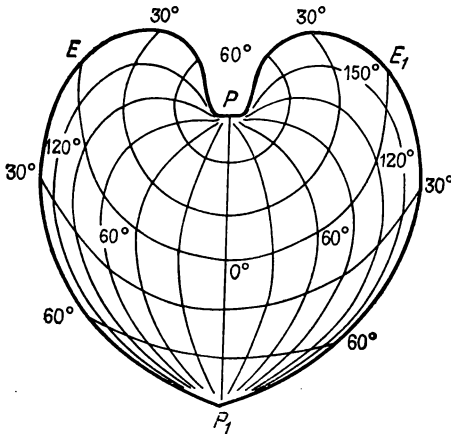


РИС. 47. Равновеликая псевдоконическая проекция Бонна

Для получения равновеликой псевдоконической проекции Бонна (рис. 47) поставим условие, чтобы частные масштабы длин вдоль среднего меридиана и параллелей были равны единице, т. е.

$$n = 1; \quad m_0 = 1.$$

Тогда из выражений (152), (153), (146), (148) — (150)

$$\rho = C - s; \quad \delta = \frac{r}{\rho} \lambda;$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\rho}{M} \left( \frac{\lambda \rho M \sin \varphi - r \lambda M}{\rho^2} \right) = \lambda \left( \sin \varphi - \frac{r}{\rho} \right); \quad (154)$$

$$m = \sec \varphi; \quad p = 1;$$

$$\operatorname{tg} (\omega/2) = \operatorname{tg} \varepsilon/2,$$

где  $s$  — длина дуги меридиана от экватора до данной параллели.

Из этих формул следует, что все виды искажений ( $\varepsilon$ ,  $\omega$ ,  $v_m$ ) равны нулю на среднем меридиане  $\lambda = \lambda_0 = 0$  и на заданной параллели  $\varphi_0$ , для которой

$$\sin \varphi_0 - r_0/\rho_0 = 0.$$

Определив из этого выражения значение  $\rho_0$ , по формуле (154) получим постоянную интегрирования  $C$  и окончательную формулу

где  $C$  — постоянная интегрирования.

Используя уравнение (147), найдем значение полярного угла:

$$\delta = \int \frac{nr}{\rho} d\lambda + F(\varphi).$$

Так как по условию  $\rho = f(\varphi)$ , из формулы (152) следует, что частные масштабы длин вдоль параллелей  $n$  в этих проекциях могут быть только функцией широты  $\varphi$  или постоянной величиной.

Если рассматриваемая проекция симметрична относительно среднего прямо-

для вычисления полярных расстояний

$$\begin{aligned} C &= s_0 + N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0; \\ \rho &= (s_0 - s) + N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0. \end{aligned} \quad (155)$$

Формулы псевдоконической проекции Бонна:

$$\begin{aligned} x &= q - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta; \\ q &= \operatorname{const}; \\ \rho &= (s_0 - s) + N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0; \quad \delta = \frac{r}{\rho} \lambda; \\ \operatorname{tg} \varepsilon &= \lambda \left( \sin \varphi - \frac{r}{\rho} \right); \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{\operatorname{tg} \varepsilon}{2}; \\ m &= \sec \varepsilon; \quad n = 1; \quad p = 1; \\ a &= (A + B)/2; \quad b = (A - B)/2; \\ A &= \sqrt{4 + \operatorname{tg}^2 \varepsilon}; \quad B = \pm \operatorname{tg} \varepsilon. \end{aligned}$$

Из анализа формул данной проекции следует, что изоколы в ней вблизи осевого меридиана и средней параллели являются симметричными относительно этих линий равнобочными гиперболами.

По свойствам эта проекция очень близка к псевдоцилиндрической равновеликой проекции Сансона, которая может рассматриваться как частный случай псевдоконической равновеликой проекции Бонна.

В 40-х годах проф. М. Д. Соловьев предложил видоизмененные формулы, в которых путем введения трех постоянных параметров уменьшена кривизна изображения параллелей в проекции Бонна.

Эти формулы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} x &= q - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta; \\ q &= \operatorname{const}; \\ \rho &= C_0 + C_1 (s_0 - s); \quad \delta = C_2 \frac{r}{\rho} \lambda; \\ \operatorname{tg} \varepsilon &= C_2 \lambda \left( \frac{\sin \varphi}{C_1} - \frac{r}{\rho} \right); \\ \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(C_1 - C_2)^2 + C_1^2 \operatorname{tg}^2 \varepsilon}{C_1 C_2}}; \\ m &= C_1 \sec \varepsilon; \quad n = C_2; \quad p = C_1 C_2; \\ a &= (A + B)/2; \quad b = (A - B)/2; \\ A &= \sqrt{(C_1 \sec \varepsilon)^2 + C_2^2 + 2C_1 C_2}; \\ B &= \sqrt{(C_1 \sec \varepsilon)^2 + C_2^2 - 2C_1 C_2}, \end{aligned} \quad (156)$$

где  $C_0$ ,  $C_1$  и  $\mathcal{E}_2$  — постоянные параметры, подбираемые при решении практических задач.

Рассмотрим вопрос об определении параметров  $C_0$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  по заданным условиям и прежде всего по заданной кривизне параллелей.

Кривизна параллелей может быть определена по формуле

$$K_{\text{п}} = \frac{x_{\lambda}y_{\lambda\lambda} + y_{\lambda}x_{\lambda\lambda}}{(x_{\lambda}^2 + y_{\lambda}^2)^{3/2}} = \frac{1}{nr} \left\{ [(mM)_{\lambda} \operatorname{tg} \varepsilon + (nr)_{\varphi} \operatorname{sec} \varepsilon] \frac{1}{mM} + \varepsilon_{\lambda} \right\}. \quad (157)$$

Следовательно, для вычисления значений  $K_{\text{п}}$  достаточно определить по уравнениям проекции ее производные  $m_{\lambda}$ ,  $(nr)_{\varphi}$ ,  $\varepsilon_{\lambda}$ .

Однако применительно к псевдоконическим проекциям кривизна параллелей легко вычисляется по формуле

$$K_{\text{п}} = -1/\rho. \quad (158)$$

С учетом выражений (156)

$$-1/K_{\text{п}} = C_0 + C_1 (s_0 - s). \quad (159)$$

Задав значения кривизны  $K_{\text{п}_1}$ ,  $K_{\text{п}_2}$  двух параллелей с широтами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , найдем из формулы (159) коэффициенты  $C_1$  и  $C_0$ :

$$C_1 = \frac{K_{\text{п}_1} - K_{\text{п}_2}}{K_{\text{п}_1} - K_{\text{п}_2} (s_2 - s_1)};$$

$$C_0 = -1/K_{\text{п}_1} - C_1 (s_0 - s_1) = -1/K_{\text{п}_2} - C_1 (s_0 - s_2). \quad (160)$$

Коэффициент  $C_2$  можно определить исходя из заданного постоянного значения частного масштаба длин вдоль параллелей  $n = n_k$  либо из постоянного значения частного масштаба площади  $p = p_k$ .

В первом случае

$$C_2 = n_k, \quad (161)$$

во втором

$$C_2 = p_k/C_1. \quad (162)$$

Поставим условие  $p = 1$ , тогда

$$C_2 = 1/C_1. \quad (163)$$

Данная проекция является равноразделенной по параллелям (см. § 47). Частные масштабы длин вдоль параллелей и среднего меридиана, а также частные масштабы площадей являются постоянными величинами.

Благодаря уменьшению кривизны параллелей видоизмененная проекция Бонна обеспечивает благоприятные условия для правильного зрительного восприятия географического положения территорий, что имеет важное значение при создании некоторых карт, например школьных (рис. 48).

В рассмотренных вариантах псевдоконических проекций предполагалось, что частные масштабы длин ( $n$ ) вдоль параллелей яв-

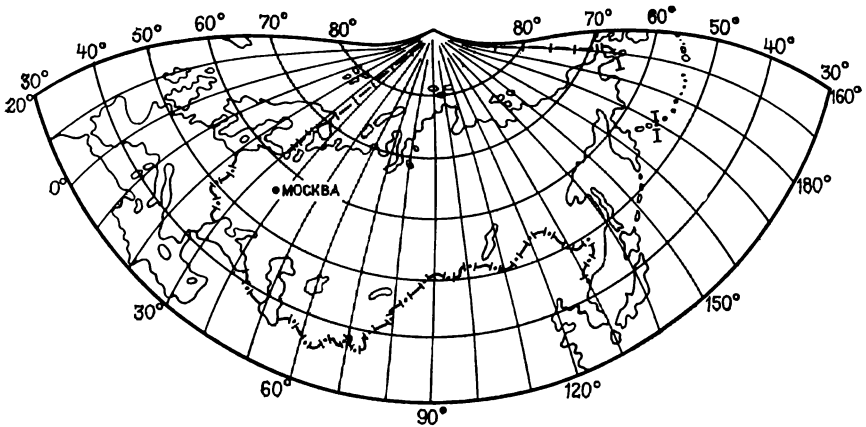


РИС. 48. Видоизмененная проекция Бонна для карты СССР

ляются постоянными величинами (в частности, равны единице).

В более общем случае исходя из заданных дополнительных условий

$$n = f(\varphi)$$

или, если функция задана,

$$n = \sum_{i=1}^k a_i \cos(i\varphi); \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

где  $a_i$  — постоянные коэффициенты, определяемые по способу наименьших квадратов с использованием заданных значений функции  $n = f(\varphi)$  для параллелей с разными широтами.

Подставив значение  $n$  в формулу (152) и проинтегрировав это выражение, получим совокупность равновеликих псевдоконических проекций, удовлетворяющих поставленным дополнительным условиям.

#### § 47. КАРТОГРАФИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ С РАВНОРАЗДЕЛЕННЫМИ ПАРАЛЛЕЛЯМИ

Проф. Н. А. Урмаев в 1953 г. разработал теорию картографических проекций с равноразделенными параллелями, частным случаем которых является ряд псевдоконических и псевдоцилиндрических проекций.

При получении формул проекций с равноразделенными параллелями проф. Н. А. Урмаев принял земную поверхность за поверхность шара единичного радиуса и исходил из условия, что частные масштабы длин вдоль параллелей равны частным масштабам площадей и что они являются функциями только широты,

$$n = p = f(\varphi),$$

следовательно,

$$m = \sec \varepsilon.$$

(164)

На основании формул частных масштабов длин

$$m^2 = x_\varphi^2 + y_\varphi^2;$$

$$v^2 = n^2 \cos^2 \varphi = x_\lambda^2 + y_\lambda^2$$

значения частных производных были представлены в виде

$$\begin{aligned} x_\varphi &= m \cos(\varepsilon + \tau); & x_\lambda &= v \sin \tau; \\ y_\varphi &= m \sin(\varepsilon + \tau); & y_\lambda &= v \cos \tau, \end{aligned} \quad (165)$$

где  $\varepsilon$  — отклонение от  $90^\circ$  угла  $i$  между изображениями меридианов и параллелей в проекции;  $\tau$  — угол между нормалью к параллели в данной точке и осью абсцисс.

Условия интегрируемости уравнений (165):

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (x_\varphi) = \frac{\partial}{\partial \varphi} (x_\lambda); \quad \frac{\partial}{\partial \lambda} (y_\varphi) = \frac{\partial}{\partial \varphi} (y_\lambda). \quad (166)$$

Продифференцировав выражение (165) по  $\varphi$ ,  $\lambda$  и подставив значения производных в (166), с учетом уравнения (164) получим

$$-\operatorname{tg} \varepsilon \tau_\lambda = v \tau_\varphi; \quad (167)$$

$$\tau_\lambda + (\operatorname{tg} \varepsilon)_\lambda = -v_\varphi = -dv/d\varphi. \quad (168)$$

Так как  $v = n \cos \varphi$  является функцией только широты, а рассматриваемые проекции симметричны относительно среднего меридиана, интегрирование уравнения (168) дает

$$\tau + \operatorname{tg} \varepsilon = -\lambda v_\varphi. \quad (169)$$

Тогда с учетом (169) уравнение (167) принимает вид

$$v \tau_\varphi - (\tau + \lambda v_\varphi) \tau_\lambda = 0. \quad (170)$$

Поскольку по условию частные масштабы длин по параллели, а значит, и  $v = n \cos \varphi$ , заданы, решение уравнения (170) сводится к интегрированию однородного линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, общий интеграл которого содержит в себе не произвольную постоянную, как в обыкновенном дифференциальном уравнении, а произвольную функцию.

Учитывая это положение и проинтегрировав (170), получим

$$\tau \varphi + \lambda v = f(\tau), \quad (171)$$

где  $f(\tau)$  — произвольная функция.

Уравнения (169) и (171) представляют собой основу теории картографических проекций с равноразделенными параллелями, в которых соблюдается условие  $n = p = f(\varphi)$ .

В частном случае, если  $\tau = 0$ , то из (169)

$$\operatorname{tg} \varepsilon = -\lambda v_\varphi, \quad (172)$$

и выражения (165) с учетом (164) принимают вид

$$x_\varphi = 1; \quad y_\varphi = \lambda v_\varphi; \quad (173)$$

$$x_\lambda = 0; \quad y_\lambda = v = n \cos \varphi.$$



После интегрирования уравнений (173):

$$x = \varphi; \quad y = \lambda n \cos \varphi$$

— формулы равновеликой псевдоцилиндрической проекции Сансона.

Если предположить, что в уравнении (171)  $f(\tau)$  — линейная функция, т. е.  $f(\tau) = C\tau$ , то

$$\tau = \lambda v / (C - \varphi) = \lambda n \cos \varphi / (C - \varphi). \quad (174)$$

Подставим значение  $\tau$  в (169). При  $n = p = 1$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \lambda [-v_{\varphi} - v / (C - \varphi)] = \lambda [\sin \varphi - \cos \varphi / (C - \varphi)]. \quad (175)$$

Поскольку  $\lambda n \cos \varphi$  есть длина дуги параллели в проекции между двумя точками, а угол  $\tau$  есть угол между нормальными к параллели в этих точках, из уравнения (174) следует, что  $(C - \varphi)$  — это радиус кривизны параллели:

$$\rho = C - \varphi. \quad (176)$$

Так как он не зависит от долготы, то является постоянной величиной во всех точках данной параллели с широтой  $\varphi$ .

Таким образом, формулы (174) — (176) свидетельствуют о том, что полученная в данном случае проекция является равновеликой псевдоконической проекцией Бонна.

#### § 48. ПОНЯТИЕ О ПСЕВДОАЗИМУТАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЯХ

В 1952 г. эти проекции были разработаны д-ром техн. наук Г. А. Гинзбургом применительно к отображению поверхности шара на плоскость.

Псевдоазимутальными называются проекции, в которых параллели изображаются концентрическими окружностями или их дугами, а меридианы — кривыми, сходящимися в центре параллелей, симметричными относительно одного или двух прямолинейных меридианов.

Меридианы с долготами  $0^\circ$ ,  $360^\circ$  всегда изображаются прямыми, меридианы с долготами  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  — прямыми или кривыми, прочие меридианы, как правило, — кривыми (см. рис. 17).

По определению, общие уравнения этих проекций

$$x = \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta; \quad (177)$$

$$\rho = f_1(z); \quad \delta = a + f_2(z) \sin ka, \quad (178)$$

где  $z$ ,  $a$  — полярные сферические координаты, определяемые по формулам (59) и (61);  $k$  — постоянные числа, от значений которых зависят свойства проекции и вид меридианов.

Например, при  $k = 1$  прямыми линиями будут изображаться меридианы с долготами  $0^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $360^\circ$ ; при  $k = 2$  — с долготами  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $360^\circ$ .

В случае когда параметр  $k$  получает дробные значения, проекции становятся псевдоконическими, а не псевдоазимутальными.

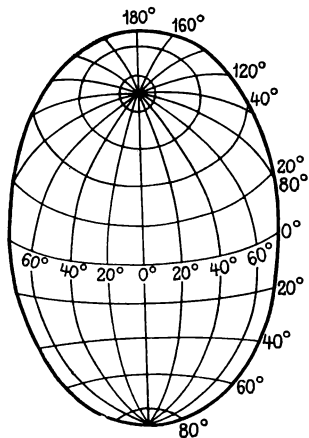


РИС. 49. Косая псевдоазимутальная проекция для карты Атлантического океана

Г. А. Гинзбургом для определения полярного угла  $\delta$  между меридианами в проекции была предложена следующая формула:

$$\delta = a - C (z/z_{\max})^q \sin ka; \quad (179)$$

$$q = \text{const},$$

где  $z_{\max}$  — наибольшее значение зенитного расстояния картографируемой территории. При этом ставилось условие, что большая ось овала, форму которого имеет рамка карты, направлена по среднему меридиану.

Для случая когда большая ось овалов направлена под углом  $90^\circ$  среднему меридиану,

$$\delta = (90^\circ + a) - C (z/z_{\max})^q \sin [k(90^\circ + a)]. \quad (180)$$

Вид картографической сетки, а также свойства этих картографических проекций зависят от постоянных параметров  $C$ ,  $z_{\max}$ ,  $q$  и  $k$ .

Значения параметров подбирают в зависимости от желаемого вида картографической сетки.

Вид функции  $\rho = f_1(z)$  влияет на характер искажений псевдоазимутальных проекций, но они не могут быть равноугольными, в них не могут сохраняться длины вдоль меридианов (кроме некоторых из них).

Псевдоазимутальные проекции обладают одним ценным свойством — они хорошо передают сферичность земной поверхности. Эти проекции обычно применяются в косо́й ориентировке для создания карт (с овальными рамками) на крупные районы в мелких масштабах (рис. 49).

Например, псевдоазимутальная проекция была использована для составления карты Атлантического океана в Атласе мира, для которой в целях уменьшения искажений площадей было принято  $\rho = 3R \sin(z/3)$ .

## Глава IX ПОЛИКОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

### § 49. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ПОЛИКОНИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Поликонические проекции характеризуются следующим видом нормальной сетки: параллели — дуги эксцентрических окружностей с центрами, расположенными на осевом меридиане, который

РИС. 50. Системы координат в поликонической проекции

изображается прямой линией; все остальные меридианы — кривые, симметричные относительно осевого.

Картографическая сетка обычно неортогональна (условие ортогональности может быть поставлено, но поликонические проекции с ортогональной сеткой в картографической практике в настоящее время принимаются редко).

В этих проекциях, как и в нормальных конических, используют две системы плоских координат: полярные и прямоугольные (рис.

50). Полярный угол  $\delta = F(\varphi, \lambda)$ ; радиус параллели  $\rho = f_1(\varphi)$ . Абсциссы центров параллелей  $q$  являются в этих проекциях величиной переменной и зависят от широты, т. е.  $q = f_2(\varphi)$ .

Если совместить ось  $X$  с осевым меридианом, а ось  $Y$  — с экватором (или с касательной к параллели с наименьшей широтой в точке ее пересечения с осевым меридианом), то

$$x = q - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta.$$

Продифференцируем уравнения прямоугольных координат:

$$x_\varphi = q_\varphi - \rho_\varphi \cos \delta + \delta_\varphi \rho \sin \delta;$$

$$x_\lambda = \delta_\lambda \rho \sin \delta;$$

$$y_\varphi = \rho_\varphi \sin \delta + \delta_\varphi \rho \cos \delta;$$

$$y_\lambda = \delta_\lambda \rho \cos \delta,$$

откуда, учитывая формулы (20) и (32),

$$\operatorname{tg} \varepsilon = -f/h;$$

$$f = \rho \sigma_\lambda (q_\varphi \sin \delta + \rho \delta_\varphi);$$

$$h = \rho \delta_\lambda (q_\varphi \cos \delta - \rho_\varphi);$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = -\frac{q_\varphi \sin \delta + \rho \delta_\varphi}{q_\varphi \cos \delta - \rho_\varphi}.$$

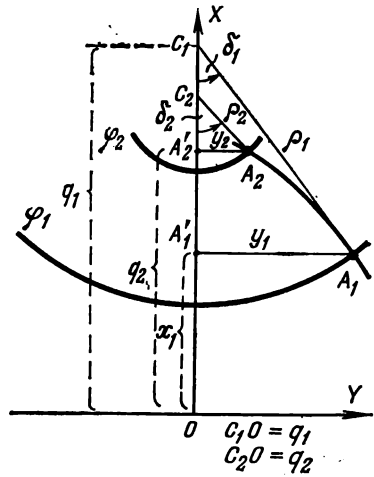
(181)

Остальные формулы проекции:

$$n = \sqrt{g}/r = \rho \delta_\lambda / r;$$

$$\rho = \frac{h}{Mr} = \rho \delta_\lambda \frac{q_\varphi \cos \delta - \rho_\varphi}{Mr};$$

$$m = \frac{\rho}{n} \sec \varepsilon = \frac{q_\varphi \cos \delta - \rho_\varphi}{M} \sec \varepsilon;$$



$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - 2\rho}{\rho}};$$

$$a = (A + B)/2; \quad b = (A - B)/2,$$

где

$$A = \sqrt{m^2 + n^2 + 2\rho}; \quad B = \sqrt{m^2 + n^2 - 2\rho}.$$

По характеру искажений поликонические проекции могут быть равноугольными, равновеликими и произвольными, но наиболее часто применяют произвольные.

Произвольные поликонические проекции часто используют при создании мелкомасштабных карт мира. При вычислении этих проекций широко применяются методы численного анализа.

Как отмечалось выше, поликонические проекции подразделяются на простые и сложные.

Характерным представителем простых являются простая поликоническая проекция. Среди сложных поликонических проекций следует назвать круговые проекции, проекции Н. А. Урмаева, проекции Г. А. Гинзбурга (ЦНИИГАиК), для получения которых используют графоаналитический способ изыскания поликонических проекций (подробно см. § 52).

## § 50. ПРОСТАЯ ПОЛИКОНИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ

Для получения простой поликонической проекции были поставлены следующие дополнительные условия:

радиусы параллелей  $\rho = N \operatorname{ctg} \varphi$  равны образующим конуса, касательного к эллипсоиду (шару) по этим параллелям;

длины всех параллелей передаются без искажений ( $n = 1$ );

осевой меридиан также сохраняет свою длину ( $m_0 = 1$ ).

На основании первого и второго условий

$$n = \frac{\rho \partial \delta}{r \partial \lambda} = 1,$$

откуда

$$\partial \delta = \frac{r}{\rho} \partial \lambda,$$

и после интегрирования

$$\delta = \frac{r}{\rho} \lambda + F(\varphi),$$

где  $F(\varphi)$  — произвольная функция широты.

Если при  $\lambda = 0$   $\delta = 0$ , тогда и  $F(\varphi) = 0$ , следовательно,

$$\delta = \frac{r}{\rho} \lambda.$$

Подставим значения  $r$  и  $\rho$ :

$$\delta = \lambda \sin \varphi.$$

Условие  $m_0 = 1$  служит для определения абсцисс центров параллелей  $q$ . Если длина осевого меридиана изображается без искажений, то

$$q = \rho + s = N \operatorname{ctg} \varphi + s,$$

где  $s$  — длина меридиана от экватора до текущей параллели.

Тогда уравнения простой поликонической проекции будут иметь вид

$$\begin{aligned} x &= s + N \operatorname{ctg} \varphi (1 - \cos \delta) = s + N \operatorname{ctg} \varphi [1 - \cos (\lambda \sin \varphi)]; \\ y &= N \operatorname{ctg} \varphi \sin \delta = N \operatorname{ctg} \varphi \sin (\lambda \sin \varphi); \\ \rho &= N \operatorname{ctg} \varphi; \quad \delta = \lambda \sin \varphi; \\ q &= N \operatorname{ctg} \varphi + s. \end{aligned} \quad (182)$$

В соответствии с общими формулами поликонических проекций получим формулы  $\operatorname{tg} \varepsilon$ , частных масштабов и искажений углов для простой поликонической проекции.

Подставим значения

$$\rho_\varphi = -M - N \operatorname{ctg}^2 \varphi;$$

$$q_\varphi = -N \operatorname{ctg}^2 \varphi;$$

$$\delta_\varphi = \lambda \cos \varphi,$$

полученные из формул (181):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varepsilon &= - \frac{-N \operatorname{ctg}^2 \varphi \sin \delta + N \lambda \operatorname{ctg} \varphi \cos \varphi}{-N \operatorname{ctg}^2 \varphi \cos \delta + M + N \operatorname{ctg}^2 \varphi} = \\ &= - \frac{\lambda \sin \varphi - \sin \delta}{(M/N) \operatorname{tg}^2 \varphi + 1 - \cos \delta} = - \frac{\delta - \sin \delta}{(M/N) \operatorname{tg}^2 \varphi + 2 \sin^2 (\delta/2)}. \\ \rho &= N \cos \varphi \frac{-N \operatorname{ctg}^2 \varphi \cos \delta + M + N \operatorname{ctg}^2 \varphi}{Mr} = \\ &= 1 + \frac{N}{M} \operatorname{ctg}^2 \varphi (1 - \cos \delta) = 1 + 2 \frac{N}{M} \operatorname{ctg}^2 \varphi \sin^2 \frac{\delta}{2}; \\ m &= \left( 1 + 2 \frac{N}{M} \operatorname{ctg}^2 \varphi \sin^2 \frac{\delta}{2} \right) \sec \varepsilon. \\ \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2 + n^2 - 2\rho}{\rho}}. \end{aligned} \quad (183)$$

Полученные формулы позволяют сделать вывод, что искажения в простой поликонической проекции зависят от широты и от долготы; изоколы имеют вид кривых, симметричных относительно осевого меридиана. С наименьшими искажениями в этой проекции можно изобразить территорию, вытянутую вдоль меридианов.

Недостатком простой поликонической проекции является большая кривизна параллелей (особенно в высоких широтах) и значительные искажения длины меридианов, площадей а также углов при удалении от осевого меридиана (табл. 4).

Вблизи осевого меридиана искажения растут медленно, например для полосы шириной  $30^\circ$   $v_m = v_p \leq 3,4\%$ ,  $\omega = 2^\circ$ , а затем быстро, и в точке пересечения экватора с меридианом, долгота которого  $\lambda = \pm 90^\circ$ , достигают

$$v_m = v_p = 123\%; \quad \omega = 44,9^\circ.$$

Т а б л и ц а 4. Значения частных масштабов длин меридианов и искажений углов в простой поликонической проекции

Ф, градус	Обозначения	λ, градус				
		0	15	30	60	90
0	<i>m</i>	1,000	1,034	1,137	1,548	2,234
	ω, градус	0,0	1,9	7,4	24,9	44,9
15	<i>m</i>	1,000	1,032	1,128	1,509	2,141
	ω, градус	0,0	1,8	6,9	23,5	42,8
30	<i>m</i>	1,000	1,026	1,102	1,404	1,894
	ω, градус	0,0	1,5	5,6	19,6	36,7
60	<i>m</i>	1,000	1,009	1,034	1,129	1,270
	ω, градус	0,0	0,5	1,9	7,2	14,1
90	<i>m</i>	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	ω, градус	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

В настоящее время простую поликоническую проекцию для изображения территорий значительных размеров почти не используют, отдавая предпочтение поликоническим проекциям, полученным графоаналитическим способом по эскизам картографических сеток.

Простая поликоническая проекция положена в основу проекции международной карты мира масштаба 1 : 1 000 000.

В США простую поликоническую проекцию применяют также для топографических карт более крупных масштабов, создаваемых в Управлении береговой и геодезической съемки, поэтому простую поликоническую проекцию иногда называют американской.

Простую поликоническую проекцию применяют для изображения трапеций или меридианных зон, ширина которых не превышает шести градусов, т. е. долгота, отсчитываемая от осевого меридиана, является малой величиной ( $\lambda \leq 3^\circ$ ). Поэтому при выводе формул указанных проекций можно использовать разложение в ряды, ограничивая это разложение (для большинства случаев картографической практики) членами, содержащими  $\lambda^2$  и  $\lambda^3$ .

#### § 51. ПРОСТАЯ ПОЛИКОНИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ ДЛЯ УЗКОЙ МЕРИДИАННОЙ ЗОНЫ

Из теории рядов известно, что

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin (\lambda \sin \varphi) = \lambda \sin \varphi - \frac{\lambda^3}{6} \sin^3 \varphi + \dots ; \\ \cos \delta &= \cos (\lambda \sin \varphi) = 1 - \frac{\lambda^2}{2} \sin^2 \varphi + \dots , \end{aligned} \quad (184)$$

тогда

$$1 - \cos \delta = \frac{\lambda^2}{2} \sin^2 \varphi + \dots \quad (185)$$

После подстановки последних значений в формулы (180) получим

$$x = s + \frac{\lambda^2}{2} N \cos \varphi \sin \varphi \dots ;$$

(186)

$$y = \lambda N \cos \varphi - \frac{\lambda^3}{6} N \cos \varphi \sin^2 \varphi \dots$$

Для узкой зоны можем принять  $M \approx N$ ,

тогда

$$\operatorname{tg} \varepsilon = -\frac{\lambda^3 \sin^3 \varphi}{6 \operatorname{tg}^2 \varphi} = -\frac{\lambda^3}{6} \sin \varphi \cos^2 \varphi \dots ,$$

откуда

$$\varepsilon'' = -\frac{(\lambda^\circ)^3}{6} \frac{\rho''}{(\rho^\circ)^3} \sin \varphi \cos^2 \varphi \dots ,$$

но

$$\rho''/6 (\rho^\circ)^3 = 0,18'' ,$$

следовательно,

$$\varepsilon'' = -0,18'' (\lambda^\circ)^3 \sin \varphi \cos^2 \varphi \dots$$

При  $\lambda \leq 3^\circ$  значение  $\varepsilon''$  не будет превышать двух секунд, поэтому картографическую сетку простой поликонической проекции для шестиградусной меридианной зоны практически можно считать ортогональной, тогда

$$p = m = 1 + \frac{(\lambda^\circ)^2}{2 (\rho^\circ)^2} \cos^2 \varphi \dots ,$$

так как

$$1/2 (\rho^\circ)^2 = 0,000152 ,$$

то

$$p = m = 1 + 0,000152 (\lambda)^2 \cos^2 \varphi \dots$$

Используя формулу (183), получим

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m^2 + 1 - 2m}{m}} \approx \frac{m-1}{2} ,$$

откуда

$$\omega' = \frac{\rho'}{(\rho^\circ)^2} \frac{(\lambda^\circ)^2}{2} \cos^2 \varphi \dots ,$$

но

$$\rho'/2 (\rho^\circ)^2 = 0,52' ,$$

тогда

$$\omega' = 0,52' (\lambda^\circ)^2 \cos^2 \varphi.$$

Искажения всех видов в этой проекции возрастают с удалением от осевого меридиана и с уменьшением широты; максимальные искажения будут наблюдаться в точках пересечения крайних меридианов зоны с экватором, где

$$v_m = v_p = 0,14\%; \quad \omega = 4,7'.$$

## **§ 52. ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ПОЛИКОНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ ДЛЯ КАРТ МИРА, ПОЛУЧАЕМЫЕ ПО ЭСКИЗАМ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ СЕТОК**

Наряду с различными методами получения проекций успешно применяются и такие, в которых координаты точек и искажения находят средствами численного анализа. Идея и разработка методики применения численного анализа в математической картографии принадлежат Н. А. Урмаеву. Он же разработал и теорию получения проекций по эскизам картографических сеток с использованием методов численного анализа и теорий приближения и интерполирования функций. По эскизам картографических сеток можно получить варианты поликонических проекций, хорошо приспособленные к требованиям конкретного задания. Так, Г. А. Гинзбургом был разработан способ получения произвольных поликонических проекций для карт мира.

Сущность этого способа заключается в следующем. Сначала строится эскиз картографической сетки, удовлетворяющий тем или иным требованиям в отношении характера сетки и примерного распределения искажений на изображаемой территории. Затем на основании построенного эскиза определяются координаты узловых точек сетки, искажения длин, площадей и углов, т. е. находится приближенное аналитическое выражение проекции. Уравнения проекции при этом не дают, ограничиваясь таблицами числовых значений координат.

В основу разработки проекций для карт мира указанным способом была положена система поликонических проекций, обладающая известной приспособляемостью к трансформированию сетки и некоторому изменению величин и распределению искажений для создания новых эскизов сетки, в большей степени отвечающих заданию.

Разработка проекции может быть разделена на два этапа: построение эскиза сетки и математическую обработку эскиза.

### **Построение эскиза сетки**

При разработке эскиза определяют: симметричность сетки относительно экватора и осевого меридиана, осевой меридиан сетки (влияет на взаимное расположение материков на карте), как должны быть разделены осевой меридиан и параллели сетки, изображение



полюсов (точками или линиями), длину полярных линий, характер и распределение искажений и т. д.

Выбрав за основные один или два варианта исходных проекций и внося в них нужные изменения, проводят построение эскиза сетки меридианов и параллелей в мелком масштабе на миллиметровой бумаге.

Чтобы рационально трансформировать сетку и совершенствовать эскиз в зависимости от требований, нужно хорошо знать свойства исходных проекций, распределение искажений и связь искажений с видом сетки.

При построении параллелей в общем случае масштаб длин по прямолинейному осевому меридиану может быть представлен в виде четного полинома

$$m_0 = a_0 + a_2\varphi^2 + a_4\varphi^4 + \dots,$$

для решения практических задач достаточно ограничиться двумя членами ряда

$$m_0 = a_0 + a_2\varphi^2 + \dots,$$

причем коэффициенты  $a_0$  и  $a_2$  могут быть найдены, если заданы масштабы  $m$  для двух широт. Тогда для абсцисс точек осевого меридиана

$$x_0 = a_0\varphi + \frac{a_2}{3}\varphi^3.$$

Для случая равномерного осевого меридиана и при  $m_0 = 1$

$$x_0 = R\varphi\mu_0,$$

где  $\mu_0$  — масштаб карты.

Через найденные точки деления осевого меридиана после необходимого анализа сеток исходных вариантов проекций проводят параллели — плавные кривые, близкие к окружностям. При этом необходимо учитывать, что увеличение кривизны параллелей ведет к уменьшению искажений углов и увеличению искажений площадей.

Построение меридианов выполняют в следующем порядке. Если параллели равномерные, то, наметив наиболее выгодные положение и очертание крайнего меридиана ( $\lambda = 180^\circ$ ), делят параллели на равные части и проводят остальные меридианы.

При построении крайнего меридиана удобно задать широту  $\varphi_k$  параллели, на которой масштаб  $n_k = 1$ . Зная широту, можно определить длину дуги этой параллели от осевого меридиана до крайнего  $s_n = \pi R \cos \varphi_k$ . Можно задаться и масштабом  $n_s$ . Чтобы наметить наиболее выгодные очертания крайнего меридиана, анализируют сетки исходных вариантов проекций.

На основании первичного эскиза графически (приблизительно) определяют частные масштабы и искажения углов.

При этом путем непосредственных измерений находят величины

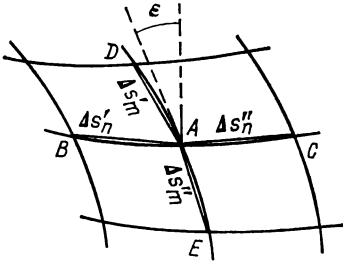


РИС. 51. Схема определения  $m$  и  $n$

хорд  $\Delta s'_m$ ,  $\Delta s''_m$  и  $\Delta s'_n$ ,  $\Delta s''_n$  (рис. 51). Приближенные значения частных масштабов  $m$  и  $n$  получают по формулам

$$m \approx (\Delta s'_m + \Delta s''_m) / (2\Delta s_m \mu_0);$$

$$n \approx (\Delta s'_n + \Delta s''_n) / (2\Delta s_n \mu_0),$$

где  $\Delta s_m$  и  $\Delta s_n$  — отрезки соответствующих дуг на земной поверхности.

Угол  $i$  и затем  $\varepsilon$  определяют непосредственным измерением.

Зная  $m$ ,  $n$ ,  $i$ , можно определить частный масштаб площади  $p$  и наибольшее искажение углов  $\omega$ . Обычно это определение производят приближенно с использованием номограмм.

Полученные значения могут содержать ошибки до 2—3 % в величинах  $p$  и 2—3° — в величинах  $\omega$ .

Зная величины искажений в ряде точек сетки, можно построить приближенные изоколы, которые будут сложными кривыми. Если полученные значения искажений и их размещение не удовлетворяют поставленным требованиям, в эскиз вносят поправки.

В качестве примера рассмотрим получение поликонической проекции, разработанной ЦНИИГАиК в 1950 г., которая использовалась при составлении политической карты мира в Атласе для учителей средней школы.

При разработке этой проекции ставилось условие, чтобы сетка меридианов и параллелей была симметрична относительно осевого меридиана и экватора, а также имела равноразделенные осевой меридиан и параллели. Параллели, в том числе и околополярные, должны иметь малую кривизну. В отношении искажений основное требование заключалось в том, чтобы искажения площадей не превышали 100 % для важнейших участков суши, однако и большие искажения форм также считались нежелательными.

**М а т е м а т и ч е с к а я о б р а б о т к а э с к и з а**

Целью математической обработки эскиза является определение прямоугольных координат узловых точек сетки и величин искажений. Необходимые для этого исходные данные получают с помощью построенного эскиза.

Математический аппарат для обработки эскиза был разработан Н. А. Урмаевым.

## 1. В ы ч и с л е н и е п р я м о у г о л ь н ы х к о о р д и н а т

Сначала находят окончательные значения координат небольшого числа исходных узловых точек, а затем интерполированием и экстраполированием — координаты остальных узловых точек сетки.

Вычисления производятся в следующей последовательности:

РИС. 52. Схема вычисления  $x$  и  $y$  в поликонической проекции ЦНИИГАиК:

1 — исходные узловые точки крайнего меридиана; 2 — узловые точки промежуточных меридианов

вычисляют исправленные значения координат исходных узловых точек крайнего меридиана  $\lambda = 180^\circ$  (рис. 52);

интерполируют и экстраполируют полученные величины для определения координат остальных узловых точек этого меридиана;

вычисляют координаты точек на основных промежуточных меридианах;

интерполируют и экстраполируют полученные данные для определения координат остальных узловых точек сетки.

При вычислении исправленных значений координат исходных узловых точек меридиана  $\lambda = 180^\circ$  в качестве исходных узловых точек принимают точки равноразделенных осевого меридиана и экватора, координаты которых находят по чертежу. При симметричной относительно экватора сетке, равноразделенных параллелях и осевом меридиане поликоническая проекция будет определена, если будут известны координаты точек крайнего меридиана, отстоящего от осевого на  $180^\circ$ .

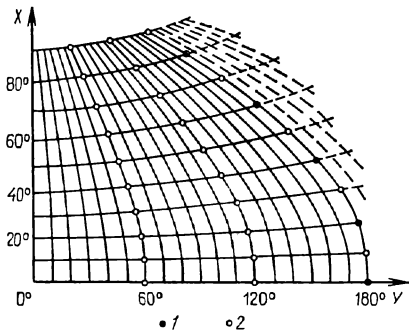
При выборе числа исходных узловых точек на крайнем меридиане учитывают, что при небольшом числе таких точек окончательное очертание меридиана отклонится от эскизного. Но чем меньше точек взято за исходные, тем проще получить исправленные координаты остальных узловых точек, так как порядок степенного многочлена, которым могут быть представлены координаты точек этого меридиана, будет ниже.

Удобно принять за исходные точки крайнего меридиана с широтами  $0^\circ, 20^\circ, 40^\circ, 60^\circ$  и  $80^\circ$  (5 точек). Тогда уравнение абсцисс симметричного относительно экватора меридиана, проходящего через пять заданных точек, можно выразить нечетным многочленом 7-й степени, а уравнение ординат — четным многочленом 8-й степени:

$$x = a_1\varphi + a_3\varphi^3 + a_5\varphi^5 + a_7\varphi^7;$$

$$y = a_0 + a_2\varphi^2 + a_4\varphi^4 + a_6\varphi^6 + a_8\varphi^8.$$

Полученные по эскизу приближенные значения абсцисс и ординат исходных точек исправляются по методу квадратических приближений. Применяя этот метод, стремятся снизить степени многочленов, которыми выражаются координаты, т. е. сгладить небольшую волнистость меридиана. Если поставить условие, чтобы абс-



циссы выражались многочленом 5-й степени, а ординаты — 6-й, тогда должны быть равны нулю шестые (для абсцисс) и седьмые (для ординат) разности.

Рассмотрим получение ординат исходных точек крайнего меридиана. Разность седьмого порядка:

$$f_{0.5}^{VII} = 35f_0 - 56f_1 + 28f_2 - 8f_3 + f_4,$$

где  $f_i$  — значения ординат.

Приравнивая это выражение к нулю, получим единственное условное уравнение:

$$a_0f_0 + a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3 + a_4f_4 = 0,$$

где коэффициенты

$$a_0 = +35, \quad a_1 = -56, \quad a_2 = +28, \quad a_3 = -8, \quad a_4 = +1.$$

Если в это уравнение подставить измеренные значения ординат  $f = y_{изм}$ , то левая часть не обратится в нуль и тогда

$$[af] = W.$$

Поправки  $v_0, v_1, v_2 \dots$  к измеренным значениям ординат находят под условием

$$v_0^2 + v_1^2 + v_2^2 + \dots = \min.$$

Следовательно, уравнения поправок, выраженные через коррелату  $k$ , будут:

$$v_0 = a_0k, \quad v_1 = a_1k, \quad v_2 = a_2k, \dots$$

Значение неопределенного множителя — коррелаты находят из нормального уравнения

$$[aa]k + W = 0; \quad k = -W/[aa].$$

Зная  $k$ , легко найти поправки  $v$  и исправленные значения ординат (табл. 5).

Т а б л и ц а 5. Вычисление исправленных значений ординат

$\varphi$ , градус	$f$ , мм = $y_{изм}$	$a$	$af$	$aa$	$v = ak$	$av$	$y, \text{ мм}$ $= y_{изм} + v$
0	266,5	+35	+9 327,5	1225	-0,02	-0,70	266,48
20	256,2	-56	-14 347,2	3136	+0,03	-1,68	256,23
40	228,2	+28	+6 389,6	784	-0,01	-0,42	228,18
60	187,9	-8	-1 503,2	64	0	0	187,90
80	136,1	+1	+136,1	1	0	0	136,10

Контроль:

$$[av] = -[af] = -W.$$

$$W = [af] = +2,8; \quad [aa] = 5210; \quad [av] = -2,8;$$

$$k = -W/[aa] = -2,8/5210 = -0,000537.$$

Так же получают и исправленные значения абсцисс, причем приравнивается к нулю разность шестого порядка:

$$f_1^{VI} = -14f_1 + 14f_2 - 6f_3 + f_4.$$

После уравнивания шестые разности для ординат и пятые — для абсцисс будут постоянными величинами, что свидетельствует о правильности уравнивания (см. табл. 5).

При интерполировании и экстраполировании для получения координат остальных точек крайнего меридиана полученные значения абсцисс и ординат точек крайнего меридиана принимают за окончательные, определяют координаты промежуточных точек крайнего меридиана, расположенных через  $10^\circ$  по широте. При этом удобно применять интерполяционные формулы Стирлинга. Находят новые начальные разности  $\psi$ , соответствующие промежуткам по широте в  $10^\circ$ , по начальным разностям  $f$ , соответствующим промежуткам в  $20^\circ$ .

Для четной функции (ординаты) при доле интервала  $n = 10^\circ/20^\circ = 0,5$ :

$$\psi_0^{II} = 0,250\,000f_0^{II} - 0,015\,625f_0^{IV} + 0,001\,953f_0^{VI};$$

$$\psi_0^{IV} = -0,062\,500f_0^{IV} - 0,007\,812f_0^{VI};$$

$$\psi_0^{VI} = -0,015625f_0^{VI}.$$

Для нечетной функции (абсциссы) при  $n = 0,5$ :

$$\psi_{0,5}^I = 0,500\,000f_0^I - 0,062\,500f_0^{III} + 0,0117\,19f_0^V;$$

$$\psi_{0,5}^{III} = -0,125\,000f_0^{III} + 0,023\,438f_0^V;$$

$$\psi_{0,5}^V = +1,031\,250f_0^V.$$

Рассмотрим получение ординат точек крайнего меридиана через  $10^\circ$  по широте. Сначала находят начальные разности ординат, соответствующие промежуткам в  $20^\circ$  по широте (табл. 6).

Т а б л и ц а 6. Разности ординат точек крайнего меридиана через  $20^\circ$  по широте

$\varphi$ , градус	$y$ , мм	$f_0^I$	$f_0^{II}$	$f_0^{III}$	$f_0^{IV}$	$f_0^V$	$f_0^{VI}$	$f_0^{VII}$
0	266,480	-10,250	-20,500	+2,705	+5,410	-2,560	-5,120	
20	256,230	-28,045	-17,795	+5,555	+2,850	-7,680	-5,120	
40	228,185	-40,285	-12,240	+0,725	-4,830			
60	187,900	-51,800	-11,515					
80	136,100							

Новые начальные разности:

$$\psi_0^{\text{II}} = 0,250\,000 (-20,500) - 0,015\,625 (+5,410) + \\ + 0,001\,953 (-5,120) = -5,2195;$$

$$\psi_0^{\text{IV}} = 0,3781; \quad \psi_0^{\text{VI}} = -0,0800.$$

По свойству четных функций:

$$\psi_{0,5}^{\text{V}} = 0,5\psi_0^{\text{VI}} = -0,0400;$$

$$\psi_{0,5}^{\text{III}} = 0,5\psi_0^{\text{IV}} = +0,1890;$$

$$\psi_{0,5}^{\text{I}} = 0,5\psi_0^{\text{II}} = -2,6098.$$

Так как шестые разности постоянны, последовательным суммированием (табл. 7) от правых столбцов к левым получают разности пятого, четвертого, третьего и т. д. порядков и, наконец, искомые значения ординат. Значение ординаты  $y_{90^\circ}$  находят экстраполированием (числа в скобках).

Т а б л и ц а 7. Вычисление ординат точек крайнего меридиана через  $10^\circ$  по широте

$\varphi$ , градус	$y$ , мм	$\psi^{\text{I}}$	$\psi^{\text{II}}$	$\psi^{\text{III}}$	$\psi^{\text{IV}}$	$\psi^{\text{V}}$	$\psi^{\text{VI}}$
0	266,48		-5,2195		+0,3781		-0,8800
10	263,87	-2,6098	-5,0305	+0,1890	+0,3381	-0,0400	
20	256,23	-7,6403	-4,5034	+0,5271	+0,2181	-0,1200	
30	244,09	-12,1437	-3,7582	+0,7452	+0,0181	-0,2000	
40	228,18	-15,9019	-2,9949	+0,7633	-0,2619	-0,2800	
50	209,29	-18,8968	-2,4935	+0,5014	-0,6219	-0,3600	
60	187,90	-21,3903	-2,6140	-0,1205	-1,0619	-0,4400	
70	163,89	-24,0043	-3,7964	-0,1824	(-1,5819)	(-0,5200)	
80	133,09	-27,8007	(-6,5607)	(-2,7643)			
90	(101,73)	(-34,3614)					

Вычисление координат узловых точек на основных промежуточных меридианах выполняют следующим образом. Зная на каждой параллели прямоугольные координаты точек, лежащих на осевом ( $\lambda = 0$ ) и крайнем ( $\lambda = 180^\circ$ ) меридианах, по формулам тригонометрии находят координаты точек на двух основных промежуточных меридианах ( $\lambda = 60^\circ$  и  $\lambda = 120^\circ$ ).

РИС. 53. Схема определения  $x$  и  $y$  точек основных промежуточных меридианов ( $\lambda = 60^\circ$  и  $\lambda = 120^\circ$ )

Так как параллели — равно-разделенные дуги окружностей, легко получить полярные координаты  $\delta$  и  $\rho$  основных узловых точек параллелей.

Для точек меридиана  $\lambda = 180^\circ$  (рис. 53) значения  $\delta$  и  $\rho$  можно найти по формулам

$$\operatorname{tg}(\delta_{180^\circ}/2) = x_1/y_{180^\circ};$$

$$\rho = y_{180^\circ} \operatorname{cosec} \delta_{180^\circ},$$

где

$$x_1 = x_{180^\circ} - x_0.$$

Значение  $\rho$  для каждой параллели постоянно,  $\delta$  для точек основных промежуточных меридианов можно получить как

$$\delta_{60^\circ} = \frac{1}{3} \delta_{180^\circ}; \quad \delta_{120^\circ} = \frac{2}{3} \delta_{180^\circ},$$

а прямоугольные координаты — по формулам

$$x = x_0 + \rho(1 - \cos \delta); \quad y = \rho \sin \delta.$$

При интерполировании и экстраполировании для получения координат всех остальных узловых точек необходимо вставить пять точек между четырьмя твердыми точками каждой параллели. Для этого также используют интерполяционные формулы Стирлинга для четных (абсциссы) и нечетных (ординаты) функций долготы при  $n = 10^\circ/60^\circ = 1/6$ . Для абсцисс:

$$\psi_0^{\text{II}} = 0,027778f_0'' - 0,002250f_0^{\text{IV}} + 0,000298f_0^{\text{VI}};$$

$$\psi_0^{\text{IV}} = -0,000772f_0^{\text{IV}} - 0,000125f_0^{\text{VI}};$$

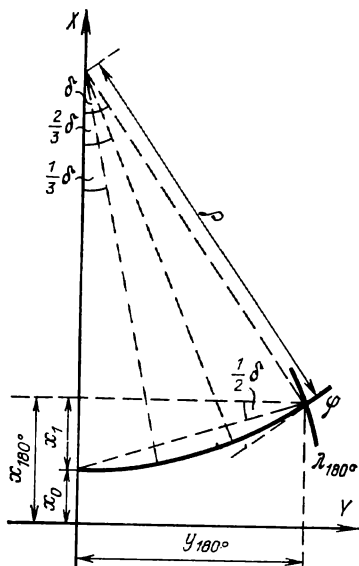
$$\psi_0^{\text{VI}} = +0,000021f_0^{\text{VI}}.$$

Для ординат:

$$\psi_{0,5}^{\text{I}} = 0,166667f_{0,5}^{\text{I}} - 0,027006f_{0,5}^{\text{III}} + 0,005364f_{0,5}^{\text{V}};$$

$$\psi_{0,5}^{\text{III}} = +0,004630f_{0,5}^{\text{III}} - 0,001125f_{0,5}^{\text{V}};$$

$$\psi_{0,5}^{\text{V}} = +0,000129f_{0,5}^{\text{V}}.$$



## 2. Вычисление уточненных значений искажений

Вычисление уточненных значений частных масштабов и искажений углов производят с использованием известных в теории искажений формул:

$$m = \frac{1}{R} \sqrt{x_{\varphi}^2 + y_{\varphi}^2}; \quad n = \frac{1}{R} \sec \varphi \sqrt{x_{\lambda}^2 + y_{\lambda}^2};$$

$$p = \frac{1}{R^2} \sec \varphi (x_{\varphi} y_{\lambda} - x_{\lambda} y_{\varphi});$$

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{m^2 + n^2}{4p} - \frac{1}{2}}.$$

При этом значения частных производных находят по формулам численного дифференцирования с использованием таблиц разностей, составленных для имеющихся значений координат.

Так, приближенное значение производной какой-либо функции по независимой переменной  $z$  может быть найдено с использованием значений нечетных разностей функции по формуле

$$f'(z)_k = \frac{1}{\omega} \left( f_k^I - \frac{1}{6} f_k^{III} + \frac{1}{30} f_k^V - \dots \right),$$

где  $\omega$  — величина промежутка между соседними значениями функции ( $\omega = \operatorname{arc} 10^\circ$ ). Третьим членом обычно пренебрегают.

Для случая равноразделенных параллелей вычисление частных масштабов длин упрощается:

$$n = \rho \delta_{180^\circ} / R \pi \cos \varphi.$$

Чтобы построить изоколы, определяют искажения для ряда точек, расположенных не реже чем через  $20^\circ$  по широте и  $30^\circ$  по долготе. Вид сетки с изоколами  $p$  и  $\omega$  дан на рис. 54.

В поликонической проекции, использованной для карт мира в БСЭ, а затем и для политической карты мира в Атласе мира, промежутки между параллелями по осевому меридиану возрастают к полюсам, а параллели имеют большую кривизну, чем в рассмотренном выше варианте. В результате искажения площадей увеличились до 180 % в пределах изображения материков (кроме Антарктиды) при уменьшении искажений углов примерно на  $10^\circ$ . Для стенных карт мира нашла применение проекция с равноразделенными параллелями в западной части сетки и неравноразделенными — в восточной. При этом из-за убывания промежутков между меридианами Тихий океан изображается не таким увеличенным по площади, как при равноразделенных параллелях.

Метод разработки произвольных проекций по эскизам сеток получил дальнейшее развитие в работах В. М. Богинского. Эскиз картографической сетки может быть построен для проекции, в которой меридианы и параллели изображаются сложными кривыми.



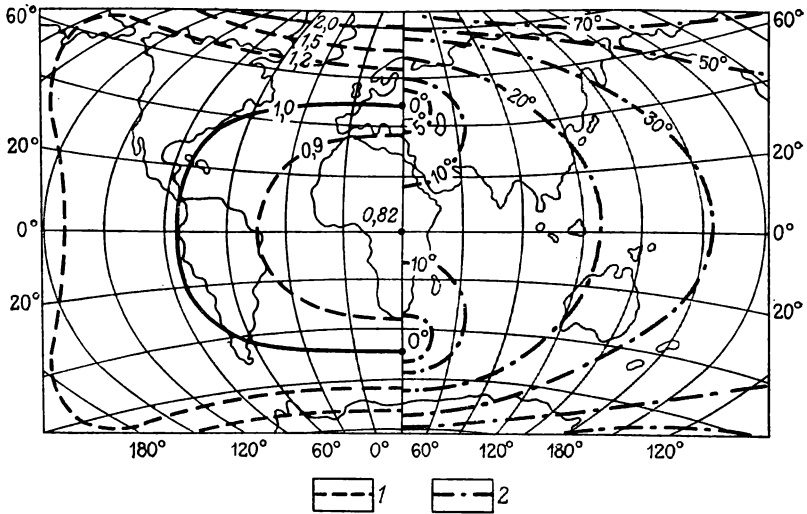


РИС. 54. Изоколы  $\rho$  (1) и  $\omega$  (2) в поликонической проекции для карты мира

Для аппроксимирования эскиза, т. е. для установления функциональных зависимостей, выражающих связь между прямоугольными и географическими координатами узловых точек сетки, используются степенные полиномы с двумя переменными —  $\varphi$  и  $\lambda$ .

В общем виде

$$f(\varphi, \lambda) = \sum_{i=0}^{i=s} \sum_{j=0}^{j=t} k_{ij} \varphi^i \lambda^j,$$

где  $i = 0, \dots, s$ ;  $j = 0, \dots, t$ ;  $i + j \leq n$ ;  $n$  — степень полинома;  $k_{ij}$  — постоянные коэффициенты.

Если картографическая сетка симметрична относительно осей  $X$  и  $Y$ , то абсциссы будут выражаться полиномом четной степени долготы и нечетной степени широты, а ординаты — полиномом нечетной степени долготы и четной степени широты:

$$x = a_1 \varphi + a_2 \varphi \lambda^2 + a_3 \varphi^3 + \dots;$$

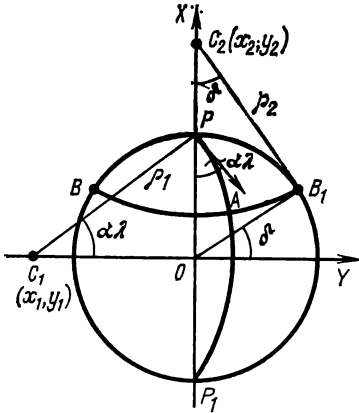
$$y = b_1 \lambda + b_2 \varphi^2 \lambda + b_3 \lambda^3 + \dots$$

Для нахождения постоянных коэффициентов ( $a_i$  и  $b_i$ ) определяют по эскизу приближенные значения прямоугольных координат, уравнивают их по способу наименьших квадратов. Подробно последний вопрос рассмотрен в гл. XII.

### § 53. ПРОЕКЦИЯ ЛАГРАНЖА

Проекцию Лагранжа можно рассматривать как частный случай поликонических проекций, равноугольных по характеру искажений. В этой проекции и меридианы, и параллели изображаются дугами эллиптических окружностей.

РИС. 55. Системы координат в проекции Лагранжа



Представим себе круг радиуса  $k$  (рис. 55), где  $k$  — первый параметр проекции. Один из диаметров круга примем за изображение осевого меридиана с долготой  $\lambda_0$ , которую приравняем к нулю; этот меридиан совпадает с осью  $X$  и пересекает основной круг в точках географических полюсов  $P$  и  $P_1$ . Все остальные меридианы — дуги кругов, проходящие через точки полюсов; центры их находятся

на прямолинейной параллели с широтой  $\varphi_1$ , которая совпадает с осью  $Y$ .

Все остальные параллели — дуги кругов, центры которых находятся на прямолинейном меридиане.

Касательные к меридианам в точках  $P$  и  $P_1$  образуют с линией осевого меридиана углы  $\alpha\lambda$ , где  $\alpha$  — второй параметр проекции.

Сетка меридианов и параллелей ортогональна.

Проведем через точку  $A$  ( $\varphi$ ,  $\lambda$ ) меридиан  $PAP_1$  и параллель  $BAV_1$ ; координаты центра меридиана  $C_1$  —  $x_1$ ,  $y_1$ , центра параллели  $C_2$  —  $x_2$ ,  $y_2$ .

Для меридиана с центром  $C_1$

$$x_1 = 0; \quad y_1 = -k \operatorname{ctg}(\alpha\lambda);$$

$$\rho_1 = k \operatorname{cosec}(\alpha\lambda),$$

где  $\rho_1$  — радиус дуги меридиана;

для параллели с центром  $C_2$

$$x_2 = k \operatorname{cosec} \delta; \quad y_2 = 0;$$

$$\rho_2 = k \operatorname{ctg} \delta,$$

где  $\rho_2$  — радиус дуги параллели.

В этих формулах  $\delta = f(\varphi)$  — вспомогательная функция широты.

Зная координаты центров, составим уравнение меридианов

$$x^2 + [y + k \operatorname{ctg}(\alpha\lambda)]^2 = k^2 \operatorname{cosec}^2(\alpha\lambda)$$

и уравнение параллелей

$$(x - k \operatorname{cosec} \delta)^2 + y^2 = k^2 \operatorname{ctg}^2 \delta.$$

После простых преобразований получим систему уравнений

$$x^2 + 2ky \operatorname{ctg}(\alpha\lambda) + y^2 = k^2;$$

$$x^2 - 2kx \operatorname{cosec} \delta + y^2 = -k^2,$$

решив которую, найдем прямоугольные координаты проекции:

$$x = \frac{k \sin \delta}{1 + \cos \delta \cos (\alpha \lambda)}; \quad y = \frac{k \cos \delta \sin (\alpha \lambda)}{1 + \cos \delta \cos (\alpha \lambda)}. \quad (187)$$

Функцию  $\delta$  определим из условия равноугольности, используя одно из уравнений Коши—Римана (51). Для этого найдем частные производные  $x_\varphi$ ,  $x_\lambda$ ,  $y_\varphi$  и  $y_\lambda$  и подставим их в указанные уравнения:

$$x_\varphi = x_\delta \delta_\varphi = \frac{k [\cos \delta + \cos (\alpha \lambda)]}{[1 + \cos \delta \cos (\alpha \lambda)]^2} \delta_\varphi;$$

$$x_\lambda = \frac{\alpha k \sin \delta \cos \delta \sin (\alpha \lambda)}{[1 + \cos \delta \cos (\alpha \lambda)]^2};$$

$$y_\varphi = y_\delta \delta_\varphi = - \frac{k \sin \delta \sin (\alpha \lambda)}{[1 + \cos \delta \cos (\alpha \lambda)]^2} \delta_\varphi;$$

$$y_\lambda = \frac{\alpha k \cos \delta [\cos \delta + \cos (\alpha \lambda)]}{[1 + \cos \delta \cos (\alpha \lambda)]^2}.$$

Решив уравнения, получим

$$\alpha \cos \delta = \frac{r}{M} \frac{d\delta}{d\varphi}$$

или

$$\frac{d\delta}{\cos \delta} = \alpha \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi}.$$

После интегрирования

$$\ln \operatorname{tg} (45^\circ + \delta/2) = \alpha \ln U + \ln \beta,$$

где  $\beta$  — третий параметр проекции.

Отсюда

$$\operatorname{tg} (45^\circ + \delta/2) = \beta U^\alpha, \quad (188)$$

где

$$U = \frac{\operatorname{tg} (45^\circ + \varphi/2)}{\operatorname{tg}^\epsilon (45^\circ + \psi/2)};$$

$$\psi = \arcsin (e \sin \varphi).$$

Проекция равноугольная, поэтому масштабы по меридианам и параллелям равны между собой:

$$m = n = \frac{1}{r} \sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2},$$

откуда

$$m = n = \frac{\alpha k \cos \delta}{r [1 + \cos \delta \cos (\alpha \lambda)]}. \quad (189)$$

В проекции Лагранжа три параметра:  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $k$ ; для их определения ставят условие, чтобы масштаб в центральной точке проекции (с координатами  $\varphi_0$ ,  $\lambda_0$ ) был экстремален.

Получив производные масштаба и приравняв их к нулю, найдем, что  $\lambda_0 = 0$  и

$$\operatorname{tg}(\delta_0/2) = \sin \varphi_0 / \alpha. \quad (190)$$

Последняя формула дает возможность найти  $\delta_0$ , если известны  $\varphi_0$  и  $\alpha$ .

Радиус основного круга  $k$  находят, задаваясь значением масштаба  $m_0$  в центральной точке,

$$k = \frac{m_0 r_0}{\alpha} (1 + \sec \delta_0). \quad (191)$$

Формулы (190), (191) предполагают, что параметр  $\alpha$  известен. Этот параметр находят путем исследования формы изоколы вблизи центральной точки.

Уравнение изоколы имеет следующий вид:

$$\frac{m}{m_0} - 1 = v_m = \left( \frac{1}{2R^2} - \frac{\alpha^2 - \sin^2 \varphi_0}{4R^2 \cos^2 \varphi_0} \right) x^2 + \frac{\alpha^2 - \sin^2 \varphi_0}{4R^2 \cos^2 \varphi_0} y^2,$$

т. е. изокола является центральной кривой второго порядка.

Если обозначить полуось изоколы, направленную вдоль меридиана,  $a$  и полуось, направленную вдоль параллели —  $b$ , то

$$a^2 = \frac{1}{1/2R^2 - (\alpha^2 - \sin^2 \varphi_0)/4R^2 \cos^2 \varphi_0} = \frac{4R^2 \cos^2 \varphi_0}{2 \cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0 - \alpha^2};$$

$$b^2 = \frac{1}{(\alpha^2 - \sin^2 \varphi_0)/4R^2 \cos^2 \varphi_0} = \frac{4R^2 \cos^2 \varphi_0}{\alpha^2 - \sin^2 \varphi_0}.$$

Обозначим соотношение полуосей изоколы  $n$ , тогда

$$n^2 = \frac{b^2}{a^2} = \frac{2 \cos^2 \varphi_0 - (\alpha^2 - \sin^2 \varphi_0)}{\alpha^2 - \sin^2 \varphi_0} = \frac{2 \cos^2 \varphi_0}{\alpha^2 - \sin^2 \varphi_0} - 1$$

или

$$n^2 \alpha^2 - n^2 \sin^2 \varphi_0 = 2 \cos^2 \varphi_0 - \alpha^2 + \sin^2 \varphi_0,$$

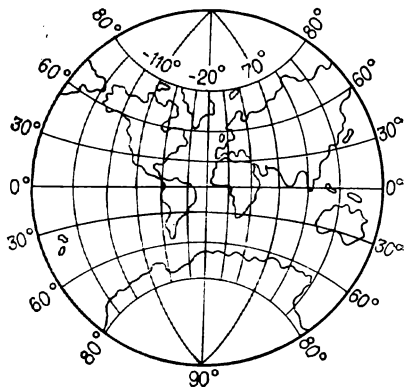
откуда

$$\alpha = \sqrt{1 + \frac{1 - n^2}{1 + n^2} \cos^2 \varphi_0}. \quad (192)$$

Формула (192) показывает, что параметр  $\alpha$  влияет на форму изоколы, а следовательно, и на распределение искажений.

Если  $\alpha = 1$ , то изоколы будут окружностями, а проекция — стереографической, при  $\alpha > 1$  — изоколы — овалы, вытянутые вдоль меридианов, при  $\alpha < 1$  — овалы, вытянутые вдоль параллелей, при  $\alpha = 0$  изоколы превращаются в параллельные линии, т. е. получаем равноугольную цилиндрическую проекцию.

РИС. 56. Вид сетки в проекции Лагранжа



Проекция Лагранжа явилась первой проекцией, в которой можно управлять формой изогол.

Для получения проекции:

на эскизе сетки, составленном в любом масштабе, в любой проекции, намечают изоголу, оконтуривающую изображаемую территорию, и находят значения  $a$ ,  $b$ ,  $n$  и  $\varphi_0$ ;

вычисляют по заданной величине масштаба в центральной точке проекции ( $m_0$ )

$$\operatorname{tg}(\delta_0/2) = \sin \varphi_0 / \alpha;$$

$$\beta = \operatorname{tg}(45^\circ + \delta_0/2) U_0^{-\alpha};$$

$$k = \frac{m_0 r_0}{\alpha} (1 + \sec \delta_0);$$

определяют значения  $\delta$  для каждой параллели по формуле (188); вычисляют прямоугольные координаты и масштаб для каждой точки проекции по формулам (187) и (189).

Проекция Лагранжа для карты мира помещена на рис. 56.

Чтобы получить широту прямолинейной параллели  $\varphi_1$ , на которой находятся центры всех меридианов, воспользуемся формулой (188) для определения вспомогательной функции.

На этой параллели  $\delta = 0$ , т. е. левая часть формулы равна единице.

Правая часть (для поверхности шара) будет равна

$$\beta U^\alpha = \beta \operatorname{tg}^\alpha (45^\circ + \varphi_1/2),$$

откуда

$$\operatorname{tg}(45^\circ - \varphi_1/2) = \sqrt[\alpha]{\beta}.$$

## Глава X

### ПРОЕКЦИИ НОМЕНКЛАТУРНЫХ КАРТ МАСШТАБОВ 1 : 1 000 000 И 1 : 2 500 000

#### § 54. ВИДОИЗМЕНЕННАЯ ПРОСТАЯ ПОЛИКОНИЧЕСКАЯ ПРОЕКЦИЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ КАРТЫ МАСШТАБА 1 : 1 000 000

Идея о создании Международной карты всего мира возникла в конце прошлого века.

В 1909 г. на Международном географическом конгрессе в Лондоне были установлены масштаб этой карты (1 : 1 000 000), проекция (видоизмененная простая поликоническая), разграфка и номенклатура листов, а также правила по составлению карты.

В 1913 г. на Международной конференции в Париже были приняты «Основные положения по созданию Международной миллионной карты мира».

Рассмотрим видоизмененную простую поликоническую проекцию и особенности ее применения при создании карты масштаба 1 : 1 000 000.

Проекция применяется как многогранная. В этом случае земная поверхность, принимаемая за поверхность эллипсоида вращения, делится линиями меридианов и параллелей на трапеции. Каждая такая трапеция изображается на отдельном листе карты в одной и той же проекции — для карты масштаба 1 : 1 000 000 в видоизмененной простой поликонической. При сложении листов по рамкам они образуют многогранник.

Для этой карты установлены определенные размеры сторон трапеций — по меридианам  $4^\circ$  и по параллелям  $6^\circ$ , на широте от  $60^\circ$  до  $76^\circ$  листы сдваиваются и имеют размеры по параллелям  $12^\circ$ ; выше  $76^\circ$  листы учетверяются и имеют протяжение по параллелям  $24^\circ$ .

Применение проекции как многогранной неизбежно связано с введением номенклатуры, т. е. системы обозначения отдельных листов. Для карты масштаба 1 : 1 000 000 установлено обозначение трапеций по широтным поясам буквами латинского алфавита (*A, B, C, D* и т. д.) в направлении от экватора к полюсам и по колоннам — арабскими цифрами (1, 2, 3, 4 и т. д.), которые считают от меридиана с долготой  $180^\circ$  (по Гринвичу) против часовой стрелки; лист, на котором показывается г. Москва, имеет номенклатуру *N-37*. Номенклатура сдвоенных и счетверенных листов карты складывается из обозначений широтного пояса и соответственно двух или четырех колонн, например *P — 39, 40*.

Рассмотрим особенности видоизмененной простой поликонической проекции и распределение искажений в пределах отдельных листов карты масштаба 1 : 1 000 000.

Все меридианы изображаются прямыми линиями. Длины двух меридианов, отстоящих от среднего на  $\pm 2^\circ$  по долготе (на  $\pm 4^\circ$  — на сдвоенных листах и на  $\pm 8^\circ$  — на счетверенных), искажений не имеют.

Крайние параллели каждого листа (северная и южная) являются дугами окружностей радиуса  $\rho = N \operatorname{ctg} \varphi$ ; центры параллелей находятся на среднем меридиане; длины не искажаются, т. е.  $n_c = n_{ю} = 1$ .

О проведении внутренних параллелей конкретных рекомендаций Лондонским конгрессом дано не было. Для их построения обычно используют способ Хинкса: проводят параллели через точки, полученные путем деления всех меридианов на четыре равные части. Картографическая сетка строится через  $1'$  по широте и по

долготе, на сдвоенных листах по долготе через  $2^\circ$ , на счетверенных — через  $4^\circ$ .

Таким образом, все листы карты масштаба  $1 : 1\,000\,000$  имеют пять параллелей и семь меридианов.

Прямоугольные координаты точек крайних параллелей каждого листа карты в соответствии с формулами (184)

$$x = \frac{\lambda^2}{2} N \cos \varphi \sin \varphi + \dots;$$

$$y = \lambda N \cos \varphi - \frac{\lambda^3}{6} N \cos \varphi \sin^2 \varphi \dots$$

Таблицы координат для построения рамок листов карты масштаба  $1 : 1\,000\,000$  помещены в «Картографических таблицах» (Тр. ЦНИИГАиК. М., Геодезиздат, 1953, вып. 97; 1960, вып. 132) и в «Наставлении по составлению и подготовке к изданию топографической карты масштаба  $1 : 1\,000\,000$ » (М., Недра, 1971).

Масштаб по меридианам в этой проекции получают путем редуцирования масштаба по меридианам простой поликонической проекции

$$m = \left(1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi\right) / \left(1 + \frac{4}{2} \cos^2 \varphi\right) = \\ = \left(1 + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2 \varphi\right) \left(1 + \frac{4}{2} \cos^2 \varphi\right)^{-1} = 1 + \frac{\lambda^2 - 4}{2} \cos^2 \varphi.$$

После введения  $(\rho^\circ)^2/2 = 0,000\,152$  ( $\lambda$  в градусах)

$$m = 1 + 0,000\,152 [(\lambda)^2 - 4] \cos^2 \varphi. \quad (193)$$

Для крайних меридианов при  $\lambda = \pm 3^\circ$

$$v_m = +0,076 \%,$$

для среднего меридиана при  $\lambda = 0$

$$m_0 = 1 - 0,000\,61 \cos^2 \varphi; \quad v_m = -0,061 \%.$$

Высота листа карты

$$H = s_{ю}^c m_0,$$

где  $s_{ю}^c$  — длина дуги меридиана между крайними параллелями, откуда

$$H = s_{ю}^c (1 - 0,000\,61 \cos^2 \varphi) = s_{ю}^c (1 - 0,000\,305 - 0,000\,305 \cos 2\varphi) = \\ = s_{ю}^c (0,999\,695 - 0,000\,305 \cos 2\varphi).$$

Криволинейные меридианы, которые изображались в простой поликонической проекции кривыми линиями, в видоизмененной поликонической заменяются прямыми, соединяющими соответственные точки крайних параллелей, поэтому масштабы на внутренних параллелях будут меньше единицы. Минимальный масштаб

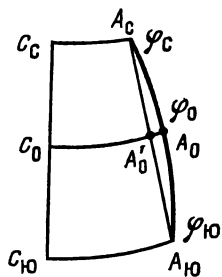


РИС. 57. Схема определения масштаба

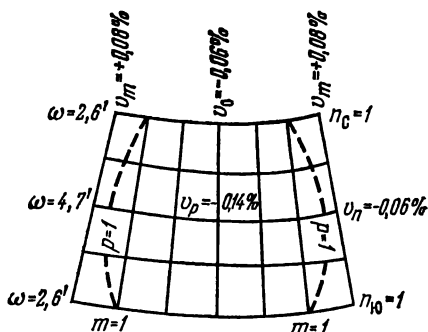


РИС. 58. Распределение искажений в пределах листа карты масштаба 1 : 1 000 000

получим на средней параллели каждого листа карты; широту этой параллели обозначим  $\varphi_0$ . Найдем масштаб  $n_0$  (рис. 57),

$$n_0 = 1 - \frac{A'_0 A_0}{C_0 A_0},$$

где  $A'_0 A_0$  — уменьшение длины средней параллели при переходе от криволинейных меридианов к прямолинейным.

$$C_c A_c = N_c \cos \varphi_c \lambda; \quad C_{y_0} A_{y_0} = N_{y_0} \cos \varphi_{y_0} \lambda;$$

$$C_0 A_0 = N_0 \cos \varphi_0 \lambda.$$

Можем принять

$$C_0 A'_0 = \frac{1}{2} (C_c A_c + C_{y_0} A_{y_0}) = \frac{1}{2} (N_{y_0} \cos \varphi_{y_0} + N_c \cos \varphi_c),$$

откуда

$$\begin{aligned} A'_0 A_0 &= C_0 A_0 - \frac{1}{2} (C_c A_c + C_{y_0} A_{y_0}) = \\ &= \lambda \left[ N_0 \cos \varphi_0 - \frac{1}{2} (N_{y_0} \cos \varphi_{y_0} + N_c \cos \varphi_c) \right]. \end{aligned}$$

Известно, что  $\varphi_c - \varphi_{y_0} = 4^\circ$ , поэтому можем приравнять  $N_c = N_{y_0} = N_0$  и получим

$$\begin{aligned} A'_0 A_0 &= \lambda N_0 \left( \cos \varphi_0 - \cos \frac{\varphi_c + \varphi_{y_0}}{2} \cos \frac{\varphi_c - \varphi_{y_0}}{2} \right) = \\ &= \lambda N_0 \cos \varphi_0 \left( 1 - \cos \frac{\varphi_c - \varphi_{y_0}}{2} \right). \end{aligned}$$

Примем  $\varphi_c - \varphi_{y_0} = \Delta\varphi$  и разложим в ряд  $\cos (\Delta\varphi/2)$ , ограничивая этот ряд членами второй степени  $\Delta\varphi$ , тогда

$$A'_0 A_0 = \frac{\lambda (\Delta\varphi)^2}{8} N_0 \cos \varphi_0;$$



$$n_0 = 1 - \frac{(\Delta\varphi^\circ)^2}{8(\rho^\circ)^2} = 1 - 0,000\ 152 \frac{(\Delta\varphi)^2}{4}. \quad (194)$$

Для карты масштаба 1 : 1 000 000 искажение вдоль средней параллели каждого листа составляет  $v_n = -0,06\%$ .

Масштабы по меридианам и параллелям для этой карты могут быть приняты за экстремальные ( $a$  и  $b$ ), так как сетка проекции практически является ортогональной.

Рассмотрим распределение искажений в пределах одного листа карты (рис. 58).

На каждом листе имеются 4 точки, в которых отсутствуют искажения всех видов; эти точки находятся на пересечении крайних параллелей листа с меридианами, удаленными от среднего на два градуса к западу и востоку.

Максимальное искажение площади  $v_p$  находится в середине листа, оно имеет знак минус и может достигать  $0,14\%$ . Изоколы нулевых искажений площади имеют вид кривых, проходящих через точки, в которых отсутствуют искажения, и вытянуты вдоль крайних меридианов.

Масштаб площади можно определить по следующим формулам ( $\lambda$  в градусах) на крайних параллелях:

$$p = m = 1 + 0,000\ 152 [(\lambda)^2 - 4] \cos^2 \varphi,$$

на средней параллели

$$p_0 = m_0 n_0 = 0 + 0,000\ 152 \{[(\lambda)^2 - 4] \cos^2 \varphi - (\Delta\varphi)^2/4\}. \quad (195)$$

Искажения углов, наоборот, в средней части листа практически отсутствуют; их максимальные значения сосредоточены на крайних меридианах и на листах, расположенных вблизи экватора и параллели с широтой  $\varphi = 60^\circ$ , могут достигать  $\omega \leq 4,7'$ .

Искажения углов (в минутах) для крайних параллелей

$$\omega_c = \omega_0 = 0,52' [(\lambda)^2 - 4] \cos^2 \varphi;$$

для средней параллели

$$\omega_0 = 0,52' \{[(\lambda)^2 - 4] \cos^2 \varphi + (\Delta\varphi)^2/4\}. \quad (196)$$

Достоинством видоизмененной простой поликонической проекции, примененной как многогранная, является небольшая величина искажений. Анализ искажений в пределах листа карты показал, что искажения длин не превышают  $0,10\%$ , искажения площади —  $0,15\%$  и искажения углов —  $5'$ , т. е. являются практически неощутимыми.

Недостатком же этой проекции можно считать появление разрывов при соединении листов по меридианам и параллелям. Эти разрывы при соединении 4 листов (по исследованиям В. В. Каврайского) равны сферическому избытку одной из соединяемых трапеций карты масштаба 1 : 1 000 000 (рис. 59), т. е.

$$\delta = \Delta\lambda \Delta\varphi \cos \varphi \frac{\rho'}{(\rho)^2},$$

где

$$\rho' / (\rho^\circ)^2 = 1,048,$$

тогда

$$\delta = 25,15' \cos \varphi$$

и линейная величина разрыва в мм

$$\bar{\delta} = \delta H / \rho' = 3,25 \cos \varphi.$$

В видоизмененной простой поликонической проекции должны быть созданы листы карты масштаба 1 : 1 000 000, в рамки которых входят суша и острова (978 листов); на акваторию океанов листы этой карты не создаются.

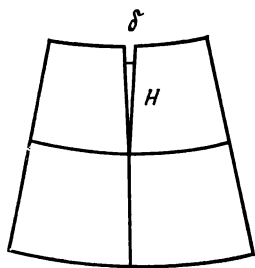


РИС. 59. Разрыв при соединении 4 листов карты масштаба 1 : 1 000 000

Советский Союз в конвенцию по созданию Международной карты масштаба 1 : 1 000 000 не входит.

В содружестве с социалистическими странами СССР принял участие в создании карты мира масштаба 1 : 2 500 000.

#### § 55. ПРОЕКЦИИ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ДЛЯ СОЗДАНИЯ КАРТЫ МИРА МАСШТАБА 1 : 2 500 000

Единую карту мира (WORLD MAP) масштаба 1 : 2 500 000 составляют геодезические службы семи социалистических стран: Болгарии, Чехословакии, Польши, Венгрии, ГДР, Румынии и СССР.

Карта мира масштаба 1 : 2 500 000 — общегеографическая карта, изображающая всю поверхность Земли (включая океаны) в едином масштабе, компоновке и оформлении; с едиными содержанием, легендой и правилами транскрипции. Она является картой-основой для тематического картографирования больших территорий (акваторий). Эта карта позволяет образовывать из отдельных листов такие блоки, на которых при надобности могут целно изображаться крупные физико-географические и экономические районы, государства и группы государств.

Указанные свойства карты предъявляют особые требования к ее математической основе (проекции, компоновке).

Основное назначение карты — справочное, поэтому искажения всех видов (длин, площадей и углов) должны быть сравнительно небольшими. Однако следует помнить, что попытка уменьшить искажения всегда приводит к уменьшению и изображаемой территории, а последнее обстоятельство заставляет использовать проекцию как многогранную и лишает потребителя карт возможности компоновать листы в блоки без разрывов, что нежелательно.

Учитывая, что масштаб карты довольно мелкий (1 км на местности соответствует 0,4 мм на карте) и степень генерализации значительная, измерения по этой карте будут приближенными, поэтому желательно, чтобы искажения всех видов были сравнительно небольшими.

Принимая во внимание сказанное выше, можем сделать вывод, что наиболее подходящей по характеру искажений для карты масштаба 1 : 2 500 000 является произвольная проекция.

Искажения длин и углов не должны превышать соответственно 3—4 % и 2—3°. При этом желательно, чтобы учет искажений был сравнительно прост.

Протяжение сторон листов карты масштаба 1 : 2 500 000 по меридианам и параллелям было принято кратным длине сторон листов карты масштаба 1 : 1 000 000; один лист карты масштаба 1 : 2 500 000 включает от 9 до 12 листов карты масштаба 1 : 1 000 000.

Разность широт крайних параллелей каждого листа (за исключением полярных) составляет 12°; протяжение же листов карты по долготе  $\Delta\lambda$  изменяется в зависимости от широты (рис. 60):

$\varphi\Delta$ , градус	0—48	48—60	60—72	72—84	84—90
Протяжение листа по долготе $\Delta\lambda$ , градус	18	24	36	60	360
Количество листов в полосе $q = 360^\circ/\Delta\lambda$	20	15	10	6	1

Полярные листы имеют круговую рамку, описанную радиусом, равным 6°.

Для составления листов карты принят эллипсоид Красовского.

Для изображения на карте поверхность Земли делится на 6 крупных зон, из которых две полярные (от  $\pm 90^\circ$  до  $\pm 60^\circ$ ) составляются в равнопромежуточной по меридианам нормальной азимутальной проекции, а четыре остальные в равнопромежуточной по меридианам конической проекции (по две проекции в каждом полушарии): первый пояс от  $\pm 24^\circ$  до  $\pm 64^\circ$  и второй пояс от  $0^\circ$  до  $\pm 24^\circ$  (рис. 61).

Каждое полушарие, учитывая приведенные размеры листов, содержит 112 основных карт и 10 дополнительных листов (в северном полушарии) шириной в 4° (от  $+60^\circ$  до  $+64^\circ$ ).

Стыки отдельных зон проходят по экватору и по параллелям с широтами  $\pm 24^\circ$  и  $\pm 60^\circ$ ; вдоль этих параллелей дается полоса перекрытия в несколько градусов по широте. Рассмотрим проекции, которые применяют для составления карт масштаба 1 : 2 500 000.

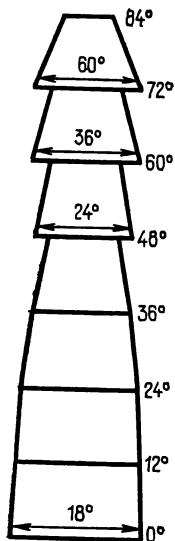
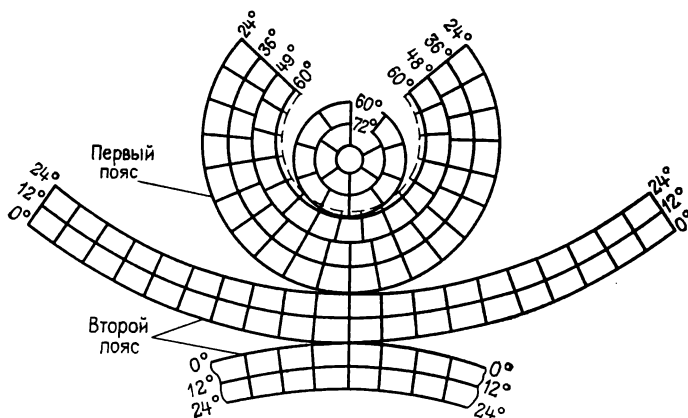


РИС. 60. Разграфка листа карты масштаба 1 : 2 500 000

РИС. 61. Схема расположения зон для карты масштаба 1 : 2 500 000



Равнопромежуточная по меридианам нормальная азимутальная проекция:

$$\rho = k (s_0^{90^\circ} - s); \quad \delta = \lambda,$$

где  $s_0^{90^\circ}$  — длина дуги меридиана от экватора до полюса,  $k$  — параметр, определяющий величину масштаба по меридианам  $m = 0,99$ .

При этом сохраняется длина параллелей с  $\varphi_k = \pm 76^\circ$  (обозначения см. в азимутальных проекциях — гл. V).

$$x = \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$

$$m = k = 0,99; \quad n = \rho/r;$$

$$\rho = mn; \quad \sin(\omega/2) = (n - 0,99)/(n + 0,99).$$

Максимальные искажения на параллелях с широтой  $\pm 60^\circ$  составляют  $v_n = +3,7\%$ ,  $v_p = 2,6\%$  и  $\omega = 2,6^\circ$ .

Равнопромежуточная по меридианам нормальная коническая проекция (обозначения см. в конических проекциях — гл. IV)

$$x = q - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$

$$\rho = C - s; \quad \delta = \alpha \lambda;$$

$$m = 1; \quad n = p = \alpha \rho / r;$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ + \omega/4) = \sqrt{n},$$

где параметры

$$\alpha = (r_1 - r_2)/(s_2 - s_1); \quad C = s_1 + r_1/\alpha = s_2 + r_2/\alpha.$$

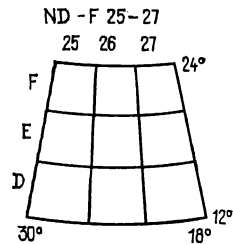


РИС. 62. Номенклатура карты масштаба 1 : 2 500 000

В первом поясе широты главных параллелей  $\varphi_1 = \pm 32^\circ$ ,  $\varphi_2 = \pm 64^\circ$ . Максимальные искажения на параллелях с широтами  $\varphi = \pm 48^\circ$  составляют  $v_n = v_p = -3,9\%$ ;  $\omega = 2,2^\circ$  и на параллелях с широтами  $\varphi = \pm 24^\circ$   $v_n = v_p = +4,0\%$ ,  $\omega = 2,3^\circ$ .

Во втором поясе широты главных параллелей  $\varphi_1 = \pm 4^\circ$  и  $\varphi_2 = \pm 21^\circ$ . Максимальные искажения в пределах этого пояса  $v_n = v_p \leq 1\%$ ,  $\omega \leq 0,7^\circ$ .

Номенклатура листов карт (рис. 62) складывается из указания полушария, номенклатуры листов карты масштаба 1 : 1 000 000, входящих в лист карты масштаба 1 : 2 500 000, и порядкового номера листа составляемой карты, который можно получить из сборного листа. Кроме того, каждый лист имеет наименование по названию города или другого основного географического объекта, например лист «53 Рим» или лист «91 Острова Зеленого Мыса».

## Глава XI

### РАВНОУГОЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ЭЛЛИПСОИДА ВРАЩЕНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

#### § 56. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть имеем две поверхности  $S$  и  $\sigma$  и на них установлены две системы криволинейных координат  $u = \text{const}$ ,  $v = \text{const}$  и  $\xi = \text{const}$ ,  $\eta = \text{const}$ .

Для отображения одной поверхности на другой необходимо, как уже отмечалось, установить между координатами этих поверхностей взаимно однозначное соответствие

$$\xi = f_1(u, v); \quad \eta = f_2(u, v),$$

где функции  $f_1, f_2$  и их производные до второго порядка включительно должны быть непрерывны, однозначны и независимы, т. е. якобиан  $\partial(\xi, \eta)/\partial(u, v)$  во всех точках изображаемой области должен быть не равен нулю.

Запишем линейный элемент поверхности  $S$  в метрической форме

$$dS^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

где  $E, F, G$  — коэффициенты первой квадратичной формы (коэффициенты Гаусса) первой поверхности  $S$ .

Для равноугольного отображения поверхности  $S$  на поверхность  $\sigma$  необходимо, чтобы для поверхности  $\sigma$  уравнение линейного элемента имело вид

$$d\sigma^2 = E'd\xi^2 + 2F'd\xi d\eta + G'd\eta^2 = Q^2(u, v) \times \\ \times [Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2],$$

где  $E', F', G'$  — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности  $\sigma$ ;  $Q(u, v)$  — функция, определяющая отличие линейных элементов первой и второй поверхностей.

При этом необходимо, чтобы установленные на обеих поверхностях системы криволинейных координат обеспечили сохранение пропорциональности:

$$\frac{E'd\xi^2}{Edu} = \frac{F'd\xi d\eta}{Fdudv} = \frac{G'd\eta^2}{Gdv^2} = Q^2(u, v).$$

Однако такой пропорциональности, как правило, нет и установить ее между криволинейными системами координат весьма сложно.

Поэтому в целях получения равноугольных изображений в большинстве случаев первые квадратичные формы приводят к изометрическому виду

$$ds^2 = P^2(\tau, \nu) [d\tau^2 + d\nu^2];$$

$$d\sigma^2 = \theta^2(\rho, t) [d\rho^2 + dt^2]$$

либо по методу Гаусса, либо на основе теории гармонических функций.

Выразив дифференциалы дуг второй поверхности через дифференциалы дуг первой поверхности

$$d\rho = \rho_\tau d\tau + \rho_\nu d\nu;$$

$$dt = t_\tau d\tau + t_\nu d\nu,$$

можно получить формулы частных масштабов длин при отображении  $S$  на  $\sigma$ :

$$m^2 = \frac{\theta^2(\rho, t)}{P^2(\tau, \nu)} [\rho_\tau^2 + t_\tau^2];$$

$$n^2 = \frac{\theta^2(p, t)}{P^2(\tau, \nu)} [p_\nu^2 + t_\nu^2].$$

Полученные формулы используют для отображения одной произвольной поверхности на другой. Следует заметить, что при отображении сложных поверхностей (поверхностей трехосного эллипсоида и более сложных) задача определения изометрических координат по заданным криволинейным координатам  $u, v$  или  $\xi, \eta$  представляет значительные трудности.

Однако определить изометрические координаты по геодезическим координатам эллипсоида вращения весьма просто.

В этом случае для поверхности эллипсоида и плоскости вместо систем координат  $\tau, \nu$ ;  $u, v$  и  $p, t$ ;  $\xi, \eta$  и метрических элементов  $P(u, v), \theta(p, t)$  получим:

на поверхности эллипсоида  $q, \lambda$  — изометрические координаты;  $\varphi, \lambda$  — геодезические координаты; радиус кривизны параллели  $r = P(u, v) = N \cos \varphi$ ;

на плоскости:  $x, y$  — прямоугольные координаты, находящиеся в определенном соответствии с геодезическими ( $\varphi, \lambda$ ) или изометрическими ( $q, \lambda$ ) координатами поверхности эллипсоида; член  $\theta(p, t) = 1$ .

Связь изометрических и геодезических координат поверхности эллипсоида вращения определяется формулами

$$q = \int \frac{M d\varphi}{r} = \ln U = \ln \frac{\operatorname{tg}(45^\circ + \varphi/2)}{\operatorname{tg}^\epsilon(45^\circ + \psi/2)}; \quad (197)$$

$$\psi = \arcsin(e \sin \varphi),$$

а формулы частных масштабов длин принимают вид

$$m = \frac{1}{M} (x_\varphi^2 + y_\varphi^2)^{1/2} = \frac{1}{r} \sqrt{x_q^2 + y_q^2};$$

$$n = \frac{1}{r} \sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2}.$$

В гл. I были конкретизированы условия, которым должны удовлетворять проекции, чтобы они были равноугольными.

Исходя из заданных требований к изображению, можно получить разнообразные равноугольные проекции, большинство из которых нашли широкое применение в картографической практике.

Эти проекции обладают определенными достоинствами и недостатками.

В соответствии с теоремой П. Л. Чебышева, о которой подробнее будет сказано ниже, существует ряд равноугольных проекций, которые относятся к наилучшим из них.

В настоящей главе будут рассмотрены вопросы получения таких проекций, а также некоторых других, которые не нашли еще широкого применения.

## § 57. ПРОЕКЦИЯ ГАУССА—КРЮГЕРА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ СОВЕТСКИХ ТОПОГРАФИЧЕСКИХ КАРТ

В Советском Союзе на III геодезическом совещании в 1928 г. для всех геодезических и топографических работ была принята проекция Гаусса—Крюгера на эллипсоиде Бесселя. В этой проекции начали создавать все номенклатурные топографические карты масштабов крупнее 1 : 500 000. С 1939 г. проекция Гаусса—Крюгера стала применяться и для карты масштаба 1 : 500 000.

В проекции Гаусса—Крюгера отображение эллипсоида на плоскости осуществляется по меридианным зонам, ширина которых равна шести градусам (для карт масштабов 1 : 10 000 — 1 : 500 000) и трем градусам (для карт масштабов 1 : 2 000 — 1 : 5000). Меридианы и параллели изображаются кривыми, симметричными относительно осевого меридиана зоны и экватора. При этом кривизна меридианов настолько мала, что западная и восточная рамки карты, с которыми они совпадают, изображаются прямыми линиями. Параллели, совпадающие с северной и южной рамками карт, изображаются прямыми только на картах крупных масштабов (1 : 2000—1 : 50 000), на картах более мелких масштабов они изображаются кривыми. Начало прямоугольных координат каждой зоны находится в точке пересечения осевого меридиана зоны с экватором.

В Советском Союзе принята нумерация зон, отличающаяся от нумерации колонн карты масштаба 1 : 1 000 000 на тридцать единиц, т. е. крайняя западная зона с долготой осевого меридиана  $L_0 = 21^\circ$  имеет номер 4, к востоку номера зон возрастают (до 32-й на Чукотке).

История применения проекции Гаусса—Крюгера в нашей стране такова: в 1825 г. Гаусс впервые решил общую задачу по изображению одной поверхности на другой с сохранением подобия в бесконечно малых частях. Частным случаем этой общей задачи является картографическая задача по отображению поверхности эллипсоида вращения на плоскости. Гаусс применил предложенную им проекцию для численной обработки Ганноверской триангуляции, после чего проекция практически не применялась.

В 1912 г. Крюгер, который занимался изданием и комментированием трудов Гаусса, вывел и опубликовал рабочие формулы этой проекции. После этого проекция, получившая название проекции Гаусса—Крюгера, нашла широкое применение в топографо-геодезических работах.

Рассмотрим теорию проекции.

На основании § 56 можем написать общее уравнение равноугольных проекций

$$x + iy = F(q + i\lambda),$$

где  $q$  и  $\lambda$  — изометрические координаты, а функция  $F$  может быть получена разными способами; она может быть линейной, показательной, степенной, функция может быть получена и путем разложения в ряд Тейлора.



$$F = (q + i\lambda) = F(q) + i\lambda \frac{dF(q)}{dq} + \frac{(i\lambda)^2}{2!} \frac{d^2F(q)}{dq^2} + \\ + \frac{(i\lambda)^3}{3!} \frac{d^3F(q)}{dq^3} + \dots, \quad (198)$$

но  $i = \sqrt{-1}$ ;  $i^2 = -1$ ,  $i^3 = -i$ ,  $i^4 = +1$  и т. д., поэтому из формулы (198) получим

$$x + iy = F(q) + i\lambda \frac{dF(q)}{dq} - \frac{\lambda^2}{2} \frac{d^2F(q)}{dq^2} - i \frac{\lambda^3}{6} \frac{d^3F(q)}{dq^3} + \\ + \frac{\lambda^4}{24} \frac{d^4F(q)}{dq^4} + i \frac{\lambda^5}{120} \frac{d^5F(q)}{dq^5} - \dots$$

Приравняв действительные и мнимые части последнего равенства, получим общие уравнения равноугольных проекций:

$$x = F(q) - \frac{\lambda^2}{2} \frac{d^2F(q)}{dq^2} + \frac{\lambda^4}{24} \frac{d^4F(q)}{dq^4} - \dots; \quad (199) \\ y = \lambda \frac{dF(q)}{dq} - \frac{\lambda^3}{6} \frac{d^3F(q)}{dq^3} + \frac{\lambda^5}{120} \frac{d^5F(q)}{dq^5} - \dots$$

Величина  $F(q)$  называется характеристикой; в проекциях, где картографические сетки симметричны осевому меридиану, она характеризует абсциссу проекции на этом меридиане.

Для того чтобы получить проекцию Гаусса—Крюгера, нужно поставить условия: проекция равноугольна и симметрична относительно среднего меридиана и экватора; осевой меридиан зоны, совпадающий с осью  $X$ , изображается прямой линией; длина осевого меридиана изображается без искажений, т. е.  $m_0 = 1$ .

Последнее условие приводит к равенству

$$F(q) = s_m = X,$$

где  $X$  — принятое в геодезии обозначение длины дуги осевого меридиана от экватора до текущей параллели.

Подставив значение характеристики в уравнения (199), получим для проекций с симметричной картографической сеткой

$$x = s_m - \frac{\lambda^2}{2} \frac{d^2s_m}{dq^2} + \frac{\lambda^4}{24} \frac{d^4s_m}{dq^4} - \dots; \quad (200) \\ y = \lambda \frac{ds_m}{dq} - \frac{\lambda^3}{6} \frac{d^3s_m}{dq^3} + \frac{\lambda^5}{120} \frac{d^5s_m}{dq^5} - \dots$$

Найдем производные  $\frac{ds_m}{dq}$ ,  $\frac{d^2s_m}{dq^2}$ ,  $\frac{d^3s_m}{dq^3}$  и т. д. и подставим в уравнения (200):

$$\frac{ds_m}{dq} = \frac{ds_m}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dq},$$

но  $d\varphi/dq = r/M$  из формул (197) и  $ds_m/d\varphi = M$ , поэтому  
 $ds_m/dq = r = N \cos \varphi$ ,

т. е. первая производная равна радиусу текущей параллели;

$$\frac{d^2 s_m}{dq^2} = \frac{dr}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dq},$$

но

$$dr/d\varphi = -M \sin \varphi; \quad d\varphi/dq = r/M,$$

откуда

$$\frac{d^2 s_m}{dq^2} = -r \sin \varphi = -N \cos \varphi \sin \varphi;$$

$$\frac{d^3 s_m}{dq^3} = -\frac{d(N \cos \varphi \sin \varphi)}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dq},$$

так как

$$d(N \cos \varphi \sin \varphi)/d\varphi = r_\varphi \sin \varphi + N \cos^2 \varphi = -M \sin^2 \varphi + N \cos^2 \varphi,$$

то

$$\frac{d^3 s_m}{dq^3} = -N \cos^3 \varphi \left( \frac{N}{M} - \frac{\sin^2 \varphi}{\cos^2 \varphi} \right),$$

где обозначим

$$\sin^2 \varphi / \cos^2 \varphi = t^2.$$

После замены  $\sin^2 \varphi$  на  $(1 - \cos^2 \varphi)$  в формуле

$$N/M = (1 - e^2 \sin^2 \varphi) / (1 - e^2)$$

получим

$$N/M = 1 + [e^2 / (1 - e^2)] \cos^2 \varphi = 1 + e'^2 \cos^2 \varphi = 1 + \eta^2,$$

где  $e'^2$  — квадрат второго эксцентриситета; тогда

$$d^3 s_m / dq^3 = -N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2)$$

Четвертую и пятую производные напишем без вывода

$$d^4 s_m / dq^4 = N \cos^3 \varphi \sin \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4);$$

$$d^5 s_m / dq^5 = N \cos^5 \varphi (5 - 18t^2 + t^4 - 14\eta^2 - 58\eta^2 t^2)$$

Подставим производные в уравнения (198):

$$x = s_m + \frac{\lambda^2}{2} N \cos \varphi \sin \varphi + \frac{\lambda^4}{24} N \cos^4 \varphi \sin \varphi (5 - t^2 + 9\eta^2 + 4\eta^4) + \dots;$$

$$y = \lambda N \cos \varphi + \frac{\lambda^3}{6} N \cos^3 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) + \frac{\lambda^5}{120} N \cos^5 \varphi (5 - 18t^2 + t^4 - \dots) + \dots$$

При составлении карт масштаба мельче 1 : 50 000 члены формул, содержащие  $\lambda^4$  и  $\lambda^5$ , обычно не учитывают.

В практике прямоугольные координаты проекции Гаусса—Крюгера обычно определяют по «Таблицам координат Гаусса—Крюгера и таблицам размеров рамок и площадей трапеций топографических съемок» (М., Госгеолтехиздат, 1963) и по «Таблицам прямоугольных координат углов рамок, размеров и площадей трапеций топографических съемок масштаба 1 : 5 000» (М., Геодезиздат, 1953).

Рассмотренная проекция Гаусса—Крюгера не является строго равноугольной, так как при ее получении использовано разложение в такой ряд, для которого выполняется только одно из условий Коши—Римана; если в уравнение проекции ввести еще один дополнительный член ряда, то начинает выполняться второе условие, а первое, которое выполнялось раньше, не выполняется. Проекция при сохранении в ее формулах достаточного количества (7—8) членов является практически равноугольной, поэтому можно считать, что в ней соблюдается и условие ортогональности сетки, и условие равенства масштабов.

Выведем формулу частного масштаба длин, ограничивая ее членами, содержащими  $\lambda^2$ .

Для нахождения частного масштаба длин воспользуемся известной формулой

$$m = n = \frac{\sqrt{g}}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2},$$

а также значениями производных  $x_\lambda$ ,  $y_\lambda$ .

Тогда коэффициент Гаусса  $g$  равен

$$\begin{aligned} g &= N^2 \cos^2 \varphi [\lambda^2 \sin^2 \varphi + 1 + \lambda^2 \cos^2 \varphi (1 - t^2 + \eta^2) \dots] = \\ &= N^2 \cos^2 \varphi [1 + \lambda^2 \cos^2 \varphi (\sin^2 \varphi / \cos^2 \varphi + 1 - t^2 + \eta^2)] = \\ &= N^2 \cos^2 \varphi [1 + \lambda^2 \cos \varphi (1 + \eta^2)]. \end{aligned}$$

Подставим полученное значение  $g$  в формулу масштаба ( $\lambda$  и  $\rho$  в градусах):

$$\begin{aligned} m = n &= [1 + \lambda^2 \cos^2 \varphi (1 + \eta^2)]^{1/2} = 1 + [(\lambda)^2/2 (\rho)^2] \cos^2 \varphi (1 + \eta^2) = \\ &= 1 + 0,000\,152 (\lambda)^2 \cos^2 \varphi (1 + \eta^2). \end{aligned}$$

В картографической практике величину  $\eta^2$  обычно не учитывают. Поэтому

$$m = n = 1 + 0,000\,152 \lambda^2 \cos^2 \varphi. \quad (201)$$

Исследования показали, что изоколы в проекции Гаусса—Крюгера имеют вид овалов, вытянутых вдоль осевого меридиана. Максимальные искажения длин в каждой зоне будут при  $\varphi = 0$  и  $\lambda = \pm 3^\circ$ ; в этих точках они достигают  $v_m = 0,14\%$ .

Осевые меридианы трехградусных зон совпадают попеременно то с осевыми меридианами шестиградусных зон, то с крайними меридианами этих зон.

Рассмотренная проекция Гаусса—Крюгера имеет много общего с равноугольной поперечно-цилиндрической проекцией Гаусса—Ламберта, рассмотренной в § 35, но соответствует ей не полностью; в этом легко убедиться путем сравнения проекций. Первая является проекцией непосредственного отображения эллипсоида на плоскости, а вторая (проекция Гаусса—Ламберта) — проекцией шара.

В ряде стран применяют сейчас для топографических карт так называемую универсальную поперечно-цилиндрическую проекцию Меркатора (*UTM*) в шестиградусных зонах.

Эта проекция очень близка по своим свойствам и распределению искажений к проекции Гаусса—Крюгера, но в ней на осевом меридиане каждой зоны масштаб  $m_0$  равен 0,9996, а не единице.

На расстоянии около 200 км по обе стороны от осевого меридиана и параллельно ему находятся две изоколы с нулевым искажением длин. При дальнейшем удалении от осевого меридиана масштаб длин становится больше единицы и достигает максимума на пересечении крайних меридианов зоны с экватором ( $v_m = + 0,05 \%$ ).

## § 58. РАЗГРАФКА И НОМЕНКЛАТУРА СОВЕТСКИХ ТОПОГРАФИЧЕСКИХ КАРТ

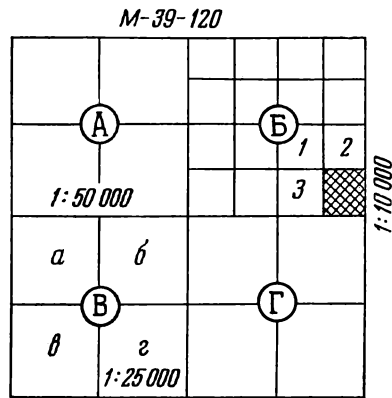
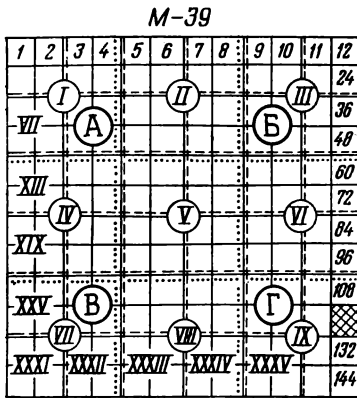
Для удобства пользования многolistными картами все листы обозначаются по определенной системе (включаются в номенклатуру). Напомним номенклатуру и разграфку топографических карт, принятые в Советском Союзе. В основу их положены разграфка и номенклатура карты масштаба 1 : 1 000 000. Размеры рамок карт при этой разграфке приведены в табл. 8.

Т а б л и ц а 8. Размеры рамок карт

Масштаб карт	Размеры сторон		Масштаб карт	Размеры сторон	
	по меридианам	по параллелям		по меридианам	по параллелям
1 : 1 000 000	4°00'	6°00'	1 : 50 000	10'00"	15'00"
1 : 500 000	2 00	3 00	1 : 25 000	5 00	7 30
1 : 300 000	1 20	2 00	1 : 10 000	2 30	3 45
1 : 200 000	0 40	1 00	1 : 5 000	1 15	1 52,5
1 : 100 000	0 20	0 30	1 : 2 000	0 25	0 37,5

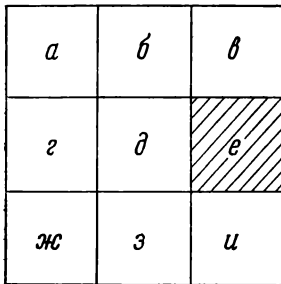
В одной трапеции карты масштаба 1 : 1 000 000 содержится 4 трапеции масштаба 1 : 500 000, 9 трапеций масштаба 1 : 300 000, 36 трапеций масштаба 1 : 200 000 и 144 трапеции масштаба 1 : 100 000.

Карты масштаба 1 : 500 000 обозначаются заглавными буквами русского алфавита А, Б, В, Г, которые записываются после номенклатуры листа карты масштаба 1 : 1 000 000, например М-39-Б;



а — А-1:500 000 ..... И-1:300 000 --- К-1:200 000 б — Б-1:500 000 2-1:25 000  
 — 120-1:100 000 4-1:10 000

**М-39-120-(72)**



в

РИС. 63. Разграфка и номенклатура советских топографических карт

листы карты масштаба 1 : 300 000 \* обозначаются римскими цифрами I—IX, которые записываются перед номенклатурой карты масштаба 1 : 1 000 000, например: VIII-М-39. Листы карты масштаба 1 : 200 000 также обозначаются римскими цифрами I—XXXVI, которые ставятся после номенклатуры карты масштаба 1 : 1 000 000, например: М-39-XXVII; и, наконец, трапеции карты масштаба 1 : 100 000 обозначаются арабскими цифрами от 1 до 144, которые также ставятся после номенклатуры карты масштаба 1 : 1 000 000, например: М-39-120. Расстановка букв и цифр ведется при этом слева направо по рядам, считаемым с севера к югу (рис. 63, а).

Лист карты масштаба 1 : 100 000 положен в основу разграфки и номенклатуры карт более крупного масштаба; в одном листе карты масштаба 1 : 100 000 содержится 4 листа карты масштаба

\* В практической деятельности картографы и геодезисты могут еще встретиться с картами этого масштаба, которые составляли в послевоенные годы. В настоящее время карты масштаба 1 : 300 000 не создают.

1 : 50 000, которые обозначаются заглавными буквами русского алфавита А, Б, В, Г, например: М-39-120-Б. Лист карты масштаба 1 : 50 000 содержит 4 листа карты масштаба 1 : 25 000, которые обозначаются строчными буквами русского алфавита а, б, в, г, например: М-39-120-Б-г (рис. 63, б).

Лист карты масштаба 1 : 25 000 содержит 4 листа карты масштаба 1 : 10 000, которые обозначаются арабскими цифрами 1, 2, 3, 4, например: М-39-120-Б-г-4. Кроме того, лист карты масштаба 1 : 100 000 содержит 256 листов карты масштаба 1 : 5 000, которые обозначаются арабскими цифрами по порядку от 1 до 256, взятыми в скобки, например (рис. 63, в): М-39-120-(72).

Лист карты масштаба 1 : 5000 содержит 9 листов карты масштаба 1 : 2000, которые обозначаются прописными буквами от а до и.

В широтах 60—76° листы номенклатурных топографических карт сдвигаются, а севернее параллели с широтой  $\varphi = 76^\circ$  — учтываются.

### § 59. ПРОЕКЦИЯ ГАУССА—КРЮГЕРА ДЛЯ ШИРОКОЙ ПОЛОСЫ

Разработкой формул проекции Гаусса—Крюгера для широкой полосы занимались многие ученые: Л. Крюгер, В. В. Каврайский, В. П. Морозов и др.

Это стремление было вызвано, главным образом, достоинствами проекции, нашедшей широкое применение при создании топографических карт и обработке геодезических измерений, а также тем, что используемые формулы Гаусса—Крюгера непосредственного отображения эллипсоида на плоскости пригодны в основном для решения задач только в узкой зоне. В самом деле, эта проекция по условию является равноугольной и, следовательно, в ней должны выполняться условия Коши—Римана

$$x_q = y_\lambda; \quad x_\lambda = -y_q$$

или (при заданных граничных условиях) уравнения Лапласа:

$$x_{qq} + x_{\lambda\lambda} = 0; \quad y_{qq} + y_{\lambda\lambda} = 0.$$

$$\ln \mu_{qq} + \ln \mu_{\lambda\lambda} = 0; \quad \gamma_{qq} + \gamma_{\lambda\lambda} = 0.$$

Однако, как уже отмечалось выше, в ней одновременно выполняется только одно из условий Коши—Римана и совсем не выполняются уравнения Лапласа.

Пусть, для примера, проекция Гаусса—Крюгера представлена в виде симметричных рядов по степеням  $\lambda$ , содержащих по четыре члена (с переменными коэффициентами  $A_i$  — функциями только широты) для вычисления абсцисс и по три соответствующих члена — для вычисления ординат.

Обозначим

$$x = X + \Delta x; \quad y = Y + \Delta y,$$

где  $X, Y$  — координаты проекции Гаусса—Крюгера;  $\Delta x, \Delta y$  — поправки для перехода от координат  $X, Y$  к координатам  $x, y$  строго равноугольной проекции.

Тогда, взяв вторые производные от полученных выражений, получим

$$\Delta x_{qq} + \Delta x_{\lambda\lambda} = 56A_8\lambda^6;$$

$$\Delta y_{qq} + \Delta y_{\lambda\lambda} = 42A_7\lambda^5,$$

где

$$A_8 = \frac{1}{6!} N \cos^7 \varphi \sin \varphi (1385 - 3111 \operatorname{tg}^2 \varphi + 543 \operatorname{tg}^4 \varphi - \operatorname{tg}^6 \varphi);$$

$$A_7 = \frac{1}{5!} N \cos^7 \varphi (61 - 479 \operatorname{tg}^2 \varphi + 179 \operatorname{tg}^4 \varphi - \operatorname{tg}^6 \varphi).$$

Поэтому при использовании формул проекции Гаусса—Крюгера в случае необходимости расширения зоны картографирования или укрупнения масштабов создаваемых карт возникает необходимость увеличения в указанных формулах количества сохраняемых членов разложения.

Это приводит к существенному увеличению объема вычислений, а при разности долгот, близкой к  $60^\circ$ , как показали исследования А. З. Сазонова, их практически невозможно выполнить даже при использовании ЭВМ.

Для получения рассматриваемой проекции можно использовать несколько способов.

Приведем способ получения проекции Гаусса—Крюгера, принятый Л. Крюгером и подробно рассмотренный в работах В. В. Каврайского, М. Д. Соловьева, В. П. Морозова.

В данном способе проекцию получают методом тройного отображения:

равноугольно отображают поверхность эллипсоида на поверхности шара по Мольвейде;

получают равноугольную проекцию Гаусса—Ламберта шара на плоскости;

осуществляют конформное преобразование полученной проекции при условии сохранения длин на среднем меридиане.

При изображении эллипсоида на поверхности шара связь геодезических координат  $\varphi$ ,  $\lambda$  точек эллипсоида и географических координат  $\varphi_{ш}$ ,  $\lambda_{ш}$  определяется выражениями

$$\lambda_{ш} = \lambda; \quad q_{ш} = q = \ln U$$

или

$$\operatorname{tg} (45^\circ + \varphi_{ш}/2) = \operatorname{tg} (45^\circ + \varphi/2) [(1 - e \sin \varphi)/(1 + e \sin \varphi)]^{e/2}. \quad (202)$$

Раскладывая члены последнего уравнения в ряд Тейлора, получают

$$\varphi_{ш} = \varphi - a_2 \sin 2\varphi + a_4 \sin 4\varphi - a_6 \sin 6\varphi + \dots, \quad (203)$$

где

$$a_2 = 2 \left( n' - \frac{1}{3} n'^2 - \frac{2}{3} n'^3 + \dots \right);$$

$$a_4 = \frac{5}{3} n'^2 - \frac{16}{15} n'^3 + \dots;$$

$$a_6 = \frac{26}{15} n'^3 + \dots; \quad (204)$$

$$n' = (a - b)/(a + b),$$

где  $a$  и  $b$  — полуоси эллипсоида.

Применительно к эллипсоиду Красовского:

$$a_2 = 0,003\ 356\ 072\ 8; \quad a_4 = 0,000\ 004\ 693\ 2;$$

$$a_6 = 0,000\ 000\ 008\ 2.$$

Полученные значения  $\varphi_{\text{ш}}$ ,  $\lambda_{\text{ш}}$  используются для вычисления прямоугольных координат  $x_{\Gamma\text{-Л}}$ ,  $y_{\Gamma\text{-Л}}$  проекции Гаусса—Ламберта (см. § 35), которые для удобства обозначим  $R\xi$  и  $R\eta$ , где

$$\xi = \arctg(\operatorname{tg} \varphi_{\text{ш}} \sec \lambda_{\text{ш}});$$

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \varphi_{\text{ш}} \sin \lambda_{\text{ш}}}{1 - \cos \varphi_{\text{ш}} \sin \lambda_{\text{ш}}}. \quad (205)$$

Для осуществления третьего преобразования, т. е. перехода от координат проекции Гаусса—Ламберта к проекции Гаусса—Крюгера, используют аналитическую функцию

$$x + iy = F(\xi + i\eta). \quad (206)$$

Для точек среднего меридиана эта функция принимает вид

$$x_0 = F(\xi_0) = F(\varphi_{\text{ш}}).$$

По условию в проекции Гаусса—Крюгера длины сохраняются на среднем меридиане, т. е.  $x_0 = s_m$ , где  $s_m$  — длина дуги меридиана от экватора до данной параллели.

Из сфероидической геодезии известна формула связи длины дуги меридиана  $s_m$  и геодезической широты  $\varphi$  эллипсоида. Но, учитывая формулу связи широт  $\varphi$  и  $\varphi_{\text{ш}}$ , можно после преобразований получить выражение для вычисления  $x_0$ :

$$x_0 = s_m = R(\varphi_{\text{ш}} + \alpha_2 \sin 2\varphi_{\text{ш}} + \alpha_4 \sin 4\varphi_{\text{ш}} + \dots),$$

где

$$R = \frac{a}{1 + n'} \left( 1 + \frac{n'^2}{4} + \frac{n'^4}{64} + \dots \right);$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} n' - \frac{2}{3} n'^2 + \frac{15}{16} n'^3 + \dots;$$

$$\alpha_4 = \frac{13}{48} n'^2 - \frac{3}{5} n'^3 + \dots$$

Применительно к эллипсоиду Красовского

$$R = 6\ 367\ 558,496\ 9;$$

$$\alpha_2 = 0,000\ 837\ 611\ 8; \quad \alpha_4 = 0,000\ 000\ 760\ 6.$$



Учитывая, что на среднем меридиане  $x = x_0$  и  $\xi = \xi_0 = \varphi_{\text{ш}}$ , в общем случае в аналитической функции следует записать вместо  $x_0$  значения  $x + iy$  и вместо  $\xi_0$  значения  $\xi + i\eta$ .

Тогда, применив формулы функций комплексного переменного, отделяем в полученной аналитической функции действительную часть от мнимой и в результате получаем формулы прямоугольных координат искомой строго равноугольной проекции Гаусса—Крюгера)

$$x = R (\xi + \alpha_2 \sin 2\xi \operatorname{ch} 2\eta + \alpha_4 \sin 4\xi \operatorname{ch} 4\eta + \dots);$$

$$y = R (\eta + \alpha_2 \cos 2\xi \operatorname{sh} 2\eta + \alpha_4 \cos 4\xi \operatorname{sh} 4\eta + \dots).$$

При разности долгот  $\Delta\lambda = 30^\circ$  ошибки вычислений прямоугольных координат проекции по этим формулам менее 0,1 м.

Частный масштаб длин данной проекции

$$m = m_1 m_2 m_3,$$

где  $m_1, m_2, m_3$  — частные масштабы указанных выше трех равноугольных отображений.

В общем виде

$$m = \frac{R \cos \varphi_{\text{ш}}}{N \cos \varphi} \sqrt{\frac{x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2}{1 - \cos^2 \varphi_{\text{ш}} \sin^2 \lambda_{\text{ш}}}}.$$

Применяя обозначения В. П. Морозова, получим

$$m = \frac{H \cos \varphi_{\text{ш}}}{\cos \varphi} \sqrt{1 + e'^2 \cos^2 \varphi} \sqrt{\frac{x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2}{1 + \cos^2 \varphi_{\text{ш}} \sin^2 \lambda_{\text{ш}}}},$$

где  $H = 0,994\,977\,825$ ;  $e'^2 = 0,006\,738\,525\,4$  (для эллипсоида Кравсовского).

Частные производные с достаточной точностью можно определить из выражений

$$x_{\xi} = 1 + 2\alpha_2 \cos 2\xi \operatorname{ch} 2\eta + 4\alpha_4 (2 \operatorname{ch} 2\eta - 1) (2 \cos^2 \xi - 1);$$

$$y_{\xi} = -2 \operatorname{sh} 2\eta \sin 2\xi (\alpha_2 + 8\alpha_4 \operatorname{ch} 2\eta \cos 2\xi).$$

| Сближение меридианов  $\gamma$  в рассматриваемой проекции Гаусса—Крюгера будет

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2,$$

где

$$\gamma_1 = \operatorname{arctg} (\sin \varphi_{\text{ш}} \operatorname{tg} \lambda_{\text{ш}});$$

$$\gamma_2 = -y_{\xi}/x_{\xi},$$

$x_{\xi}, y_{\xi}$  — указанные выше частные производные.

Достоинством данного способа определения проекции Гаусса—Крюгера является то, что полученные формулы, сохраняя сравнительную простоту, позволяют получить данную проекцию практически при любой разности долгот (за исключением особой точки с  $\varphi = 0, \lambda = 90^\circ$  и ее окрестности).

## § 60. РАВНОУГОЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ С ПРИСПОСОБЛЯЕМОЙ ИЗОКОЛОЙ

К числу таких проекций можно отнести проекции Схольса, Лабурда, Юнга, Лагранжа.

Проекция Схольса предназначалась для картографирования малых по площади областей (территории Голландии), проекция Лабурда применяется для создания топографических карт и обработки геодезических измерений на о-ве Мадагаскар, проекция Юнга весьма близка к первым двум.

Проекция Лагранжа может быть использована для создания карт как малых, так и крупных по размерам областей. Ниже будут рассмотрены некоторые ее свойства.

Наиболее полно вопрос о получении и использовании равноугольных проекций с приспособляемой изоколой рассмотрен в работах Л. А. Вахрамеевой.

Эти проекции можно получить с помощью однородных гармонических полиномов и разложений функций в ряды.

Рассмотрим первый из этих способов.

Гармонической функцией двух переменных  $u(x, y)$ , действительной в области  $D$ , называют функцию, которая дважды непрерывно дифференцируема в этой области и удовлетворяет уравнению Лапласа

$$u_{qq} + u_{\lambda\lambda} = 0,$$

где  $q$  и  $\lambda$  — изометрические координаты.

Решением этого уравнения является функция  $u = F(x + iy)$ , непрерывная в области  $D$ .

В данном случае предположим, что

$$u = F(x + iy) = (x + iy)^n. \quad (207)$$

Тогда последовательно возводят выражение (207) в степени  $n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) и, отделяя действительные и мнимые члены, формулы прямоугольных координат равноугольных проекций можно представить в виде

$$x = \sum_{i=1}^k (a_i \psi_i - b_i \theta_i); \quad y = \sum_{i=1}^k (a_i \theta_i + b_i \psi_i),$$

где  $a_i, b_i$  — постоянные коэффициенты,  $\psi_i, \theta_i$  — члены гармонических полиномов, которые можно определить, например, по формулам В. П. Морозова:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= (q - q_0) = \xi; & \theta_1 &= (\lambda - \lambda_0) = \eta; \\ \psi_2 &= \xi \psi_1 - \eta \theta_1; & \theta_2 &= \xi \theta_1 + \eta \psi_1; \end{aligned} \quad (208)$$

.....

$$\psi_k = \xi \psi_{k-1} - \eta \theta_{k-1}, \quad \theta_k = \xi \theta_{k-1} + \eta \psi_{k-1}.$$

Формулы (208) позволяют получить равноугольные картографические проекции для картографирования территории как с симметричной, так и с асимметричной конфигурацией.

В первом случае выражения (208) целесообразно представить в виде

$$x = \sum_{i=1}^k a_i \psi_i; \quad y = \sum_{i=1}^k a_i \theta_i. \quad (209)$$

Формулы частных масштабов длин и сближения меридианов в этих проекциях, согласно общей теории картографических проекций, принимают вид

$$\mu = \frac{1}{r} \sqrt{x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2} = \frac{1}{r} \sqrt{x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2};$$

$$\operatorname{tg} \gamma = y_{\xi}/x_{\xi},$$

где

$$x_{\xi} = \left[ \sum_{i=1}^k a_i \psi_i \right]_{\xi} = \sum_{i=1}^k i a_i \psi_{i-1};$$

$$y_{\xi} = \left[ \sum_{i=2}^k a_i \theta_i \right]_{\xi} = \sum_{i=2}^k i a_i \theta_{i-1};$$

$$r = N \cos \varphi; \quad N = a/(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2},$$

$a$ ,  $e$  — большая полуось и первый эксцентриситет эллипсоида.

При практическом использовании полученных формул возникают два вопроса:

сколько членов гармонических полиномов целесообразно в них сохранить;

какую выбрать методику определения постоянных коэффициентов  $a_i$ ,  $b_i$ .

Выполненные исследования \* показывают, что если в формулах (209) сохранить только один параметр ( $a_0$ ), то получим проекцию Меркатора, если два параметра ( $a_0$ ,  $a_1$ ) — равноугольную коническую проекцию.

В обеих этих проекциях изоколы совпадают с параллелями (альмукантатами), т. е. параметры  $a_0$ ,  $a_1$  не влияют на форму изоколы (на возможность приближения формы изоколы к очертаниям картографируемой территории).

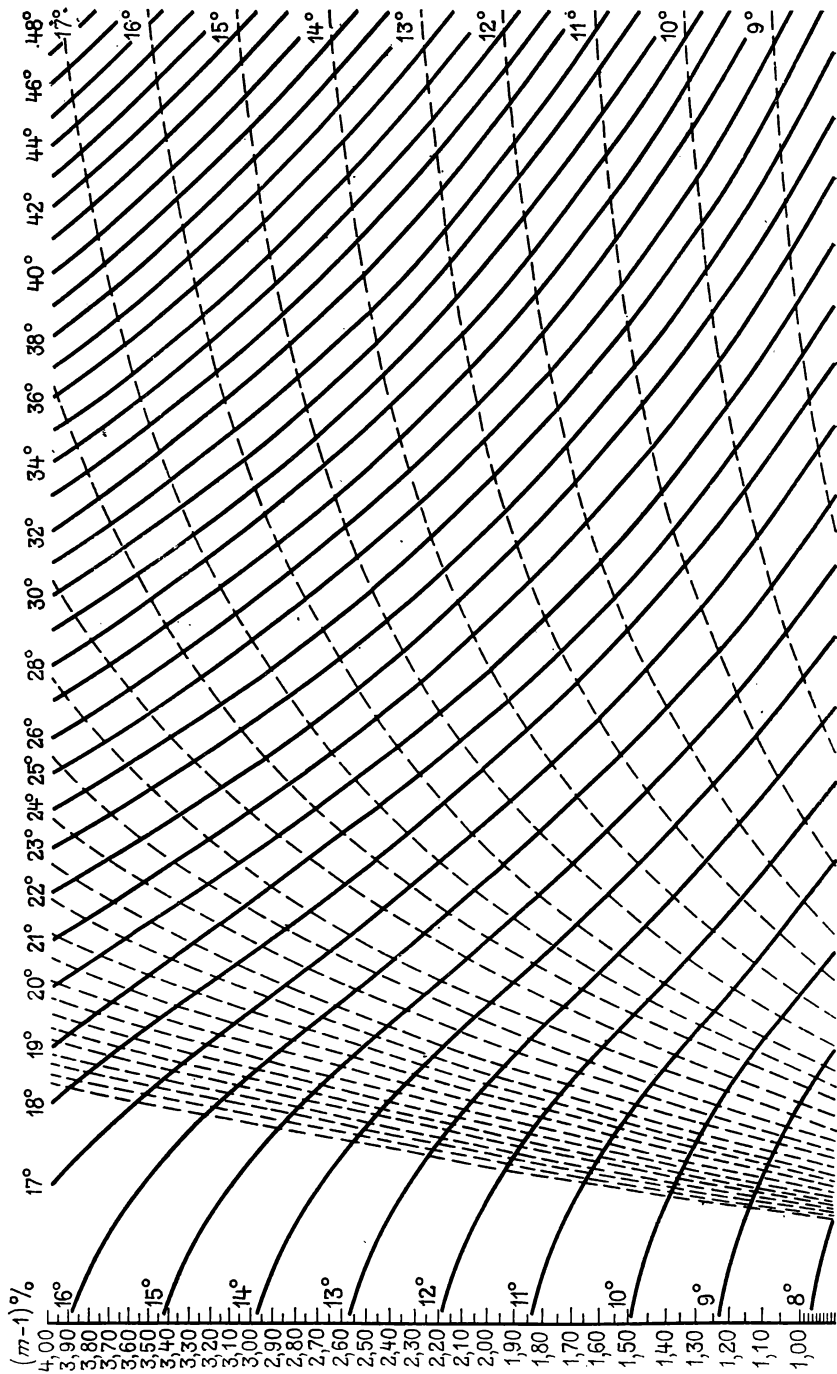
Резкое изменение в величинах искажений, их распределении и в форме изоколы происходит при введении третьего параметра  $a_2$ .

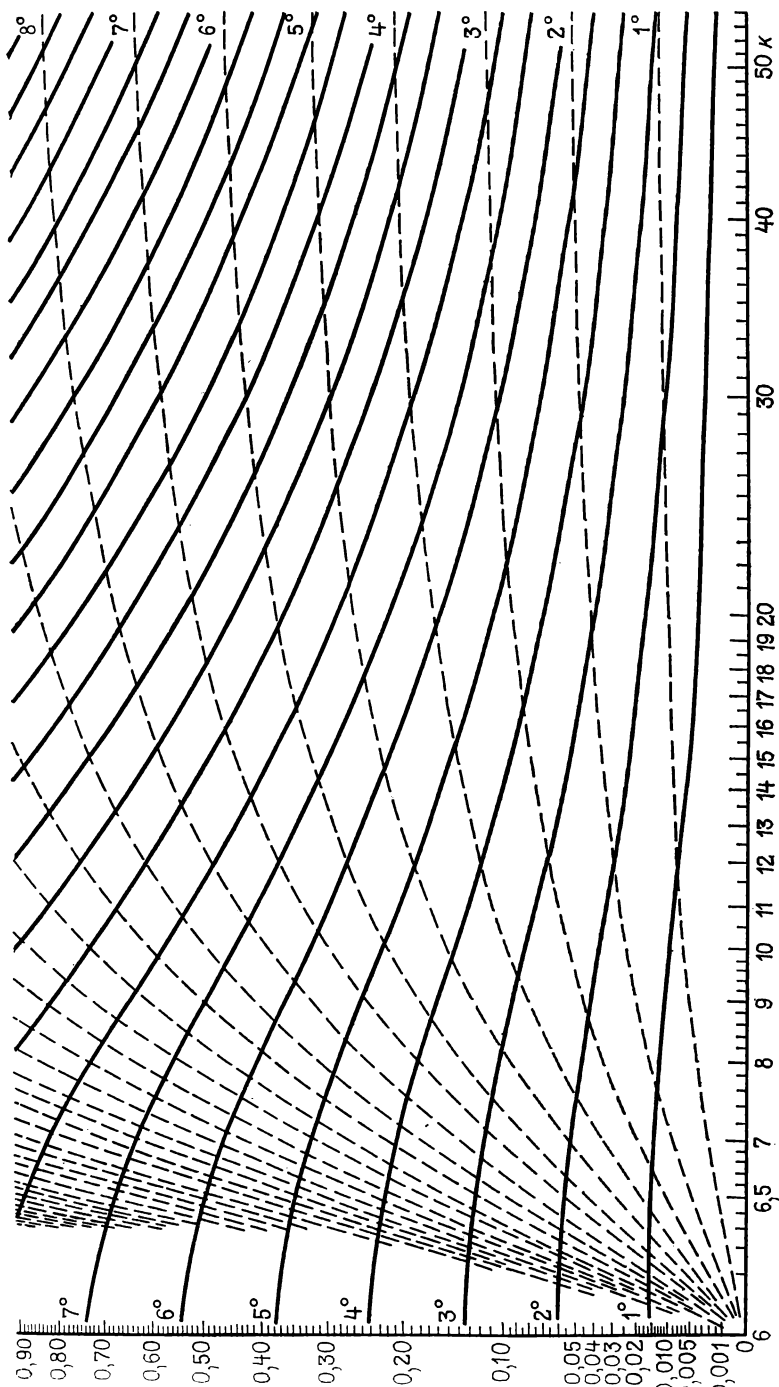
При сохранении следующих параметров несколько уменьшаются величины искажений, улучшается степень приближения изоколы к контуру картографируемой территории, но весьма существенно увеличивается объем вычислений.

Учитывая, что при создании карт на средние по размерам территории искажения длин в проекциях практически малозначимы,

\* Урмаев Н. А. Основы математической картографии. — Тр. ЦНИИГАиК М., Геодезиздат, 1962, вып. 144.

Вахрамеева Л. А. Теория конформных проекций с управляемыми изоколами и методы их изыскания. Автореф. докт. дис. М., МНИИГАиК, 1975.





РІС. 64. Номограмма для определения коэффициента  $k$  и величины искажений длин  $m-1$  в проекции, получаемой при помощи рядов

во многих случаях можно полагать, что оптимальным вариантом является получение проекции с тремя параметрами.

При этом следует иметь в виду, что в зависимости от значения этого параметра изменяются и значения искажений, их распределение и форма изокол, т. е. фактически получаем различные равноугольные проекции, которые с определенной степенью приближения можно принять за известные проекции Гаусса—Крюгера, равноугольные конические и азимутальные проекции, а также проекции, промежуточные между ними.

Постоянные параметры  $a_i$  рассмотренных формул можно определить по способу наименьших квадратов, исходя из заданных условий, но их значения можно также найти на основе анализа влияния изменения параметра  $a_3$  на свойства проекции и форму изоколы.

Выполненный анализ показал, что значение этого параметра равно:

при получении проекций, близких к проекции Гаусса—Крюгера,

$$a_3 = \frac{N_0}{6} \cos \varphi_0 \sin^2 \varphi_0 - \frac{N_0}{6} \cos^3 \varphi_0;$$

при получении проекций, близких к равноугольным коническим,

$$a_3 = \frac{N_0}{6} \cos \varphi_0 \sin^2 \varphi_0,$$

при получении проекций, близких к азимутальным проекциям,

$$a_3 = \frac{N_0}{6} \cos \varphi_0 \sin^2 \varphi_0 - \frac{N_0}{12} \cos^3 \varphi_0.$$

Если необходимо получить проекции с промежуточными свойствами, т. е. проекции с заданным видом граничной изоколы, значение параметра  $a_3$  можно вычислить по формуле

$$a_3 = \frac{N_0}{6} \cos \varphi_0 \sin^2 \varphi_0 - \frac{N_0}{k} \cos^3 \varphi_0,$$

в которой  $6 < k < \infty$ .

При  $k = 6$  изоколы вытянуты вдоль осевого меридиана, при  $k = 12$  изоколы имеют округленную форму, при  $k = \infty$  — совпадают с параллелями или приближаются к ним, при  $k < 6$  — имеют гиперболическую форму, при  $6 < k < 12$  — изоколы будут овалами, вытянутыми вдоль меридианов, при  $12 < k < \infty$  — овалами, вытянутыми вдоль параллелей.

Определение коэффициента  $k$  в соответствии с протяжением картографируемой территории по широте и долготе может осуществляться по номограмме, приведенной на рис. 64.

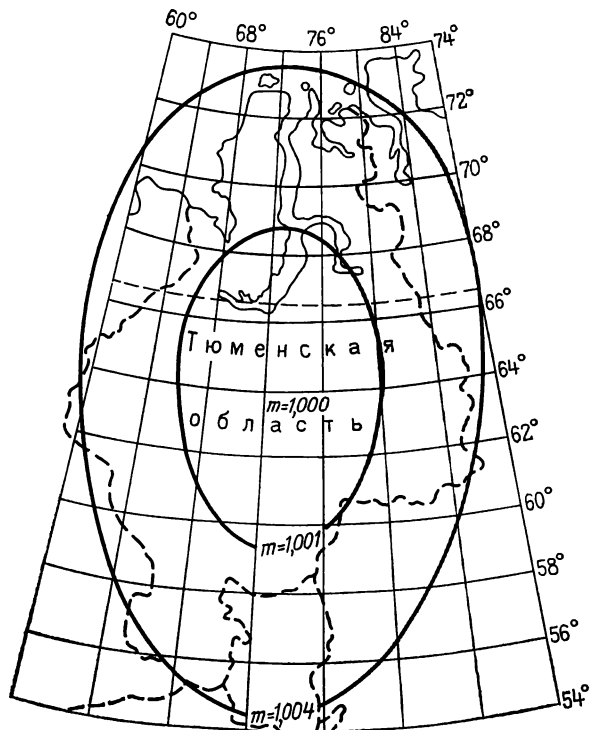


РИС. 65. Карта Тюменской области в проекции, полученной с применением рядов

Номограмма составлена для экватора, но может быть использована для любой широты, для этого величина  $b$  (протяженность вдоль средней параллели в градусах) должна быть умножена на косинус широты этой параллели:

$$b_{\text{пр}} = b \cos \varphi_{\text{ср}}; \quad n = b_{\text{пр}}/a,$$

где  $a$  — протяженность картографируемой территории вдоль среднего меридиана. Значение  $k$  достаточно определить с точностью до десятой доли.

В качестве примера приведем макет картографической сетки с приспособляемой изоколой, полученный для карты Тюменской области ( $k = 4, 8$ ) (рис. 65).

## § 61. РАВНОУГОЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ, ПОЛУЧАЕМЫЕ ПРИ ПОМОЩИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КООРДИНАТ

В § 2 было указано, что эллиптические координаты зависят от положения на поверхности шара фокусов сферических эллипсов.

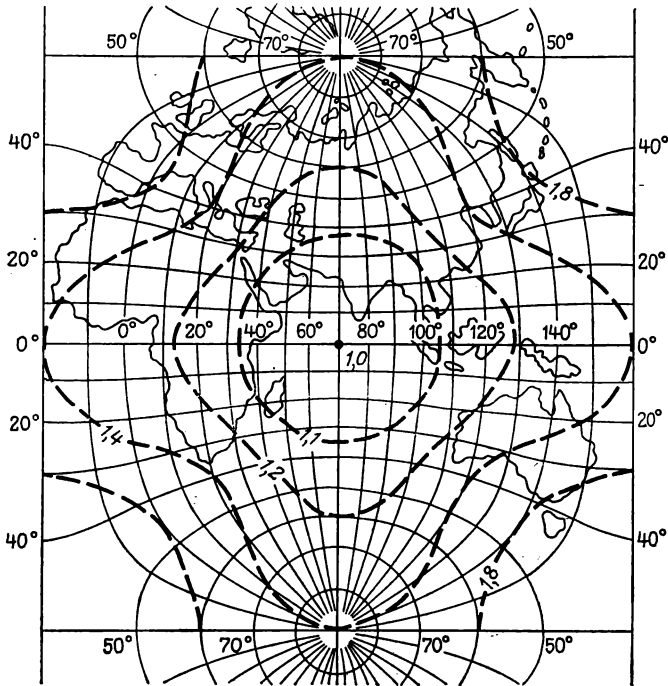


РИС. 66. Изоколы  $\rho$  в проекции Гюйу

В эллиптических координатах Гюйу фокусы сферических эллипсов имеют широту  $\varphi_0 = \pm 45^\circ$ . В этом случае формулы для вычислений координат имеют вид

$$\cos a = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \varphi - \cos \varphi \sin \lambda);$$

$$\cos b = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin \varphi + \cos \varphi \cos \lambda);$$

$$\sin u = \sqrt{2} \cos [(a + b)/2]; \quad \sin v = \sqrt{2} \sin [(a - b)/2].$$

В проекции Гюйу, полученной с использованием указанных формул, карта мира состоит из двух полушарий. Искажения отсутствуют в точках пересечения осевых меридианов каждого полушария с экватором и достигают максимума в критических точках на пересечении меридианов, ограничивающих каждое полушарие. Эти меридианы изображаются прямыми линиями, вследствие чего изображение каждого полушария имеет форму квадрата (рис. 66).

В эллиптических координатах Пирса все четыре фокуса расположены на географическом экваторе ( $\varphi_0 = 0$ ) в точках пересечения



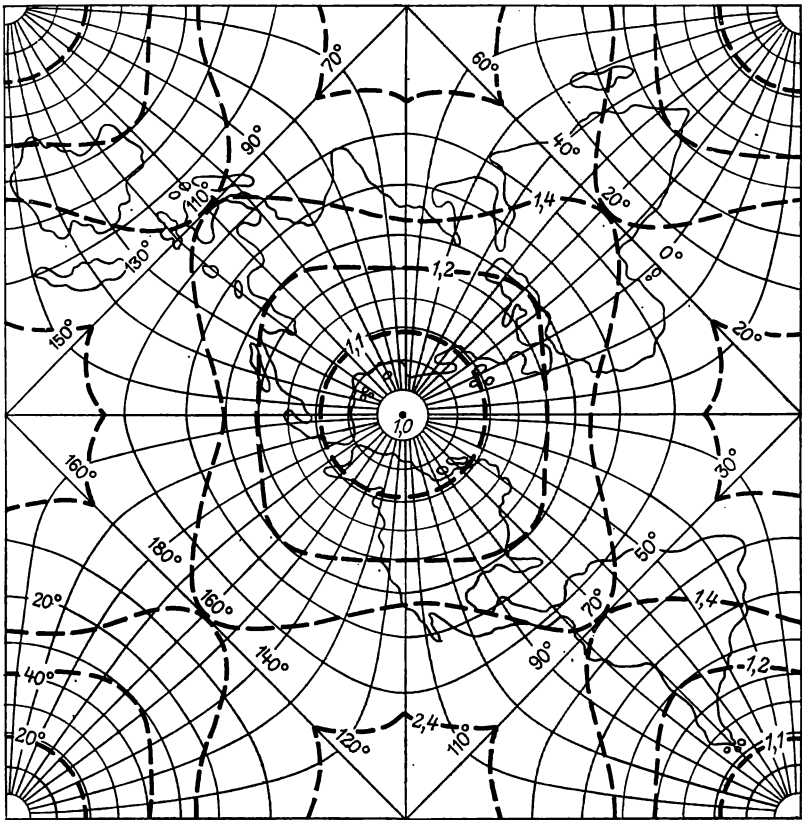


РИС. 67. Изоколы  $p$  в проекции Пирса

его с меридианами, имеющими долготу  $\lambda_0 = \pm 45^\circ$ . В этом случае окончательные формулы приобретают вид

$$\cos a = \cos \varphi \cos (45^\circ + \lambda);$$

$$\cos b = \cos \varphi \cos (45^\circ - \lambda).$$

Формулы для вычисления  $\sin u$  и  $\sin v$  одинаковы для рассматриваемых случаев.

Координаты Пирса напоминают координаты Гюйу, повернутые на  $90^\circ$ . Проекция, полученная при помощи этих координат, дает своеобразное изображение всей земной поверхности. В этой проекции искажения отсутствуют в точках географических полюсов; максимальные искажения наблюдаются в углах поворота экватора, который имеет форму квадрата (рис. 67).

Третья система эллиптических координат, известная под названием координат Адамса, имеет фокусы сферических эллипсов и в

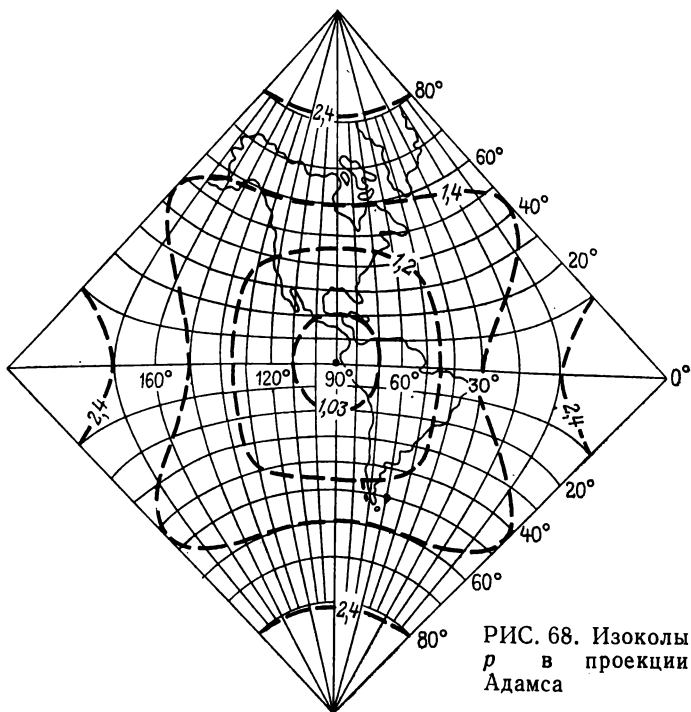


РИС. 68. Изоколы  $p$  в проекции Адамса

полюсах, и на экваторе. В этой системе координат формулы имеют вид

$$a = 90^\circ - \varphi, \quad \cos b = \cos \varphi \sin \lambda.$$

В проекции с такими координатами картографируемая поверхность изображается по полушариям; каждое полушарие (западное и восточное) имеет форму ромба. Искажения отсутствуют в точках пересечения осевого меридиана с экватором, а максимальные искажения сосредоточены на полюсах и в местах пересечения экватора с крайними меридианами полушария (рис. 68).

Рассмотренные системы эллиптических координат являются изометрическими координатами, при помощи которых могут быть получены равноугольные проекции по формулам

$$x = \xi; \quad y = \eta,$$

где

$$\xi = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \sin^2 u \sin^2 \varphi_0}}; \quad \eta = \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{1 - \sin^2 v \cos^2 \varphi_0}},$$

т. е. они являются эллиптическими координатами первого рода, значения которых могут быть получены из таблиц\*.

\* Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Формулы. Графики. Таблицы. М., Наука, 1968.

Выполненные исследования показали, что масштаб длин в проекциях, полученных с применением эллиптических координат, может быть вычислен по формуле

$$\mu = \sqrt{\operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} b}.$$

В окрестностях центральной точки каждого полушария изоколы имеют округлую форму; с удалением от этой точки вид изокол усложняется и приобретает четырехлепестковую форму.

## § 62. ПРОЕКЦИЯ ЧЕБЫШЕВА

В 1853 г. академик П. Л. Чебышев сформулировал теорему о наилучших равноугольных проекциях. Согласно этой теореме наилучшими равноугольными проекциями для создания карт на конкретные территории являются те из них, в которых на контурах этих территорий натуральный логарифм масштаба является постоянной величиной, в частности нулем. Доказал эту теорему в 1894 г. академик Д. А. Граве. Первые способы практического получения проекции предложил в 1947 г. проф. Н. А. Урмаев.

Разработке проекции Чебышева и близких к ней равноугольных проекций посвящен ряд работ профессоров В. В. Каврайского, Л. А. Вахрамеевой, Н. Я. Виленкина, Л. М. Бугаевского, Г. И. Косусовой, Г. А. Мещерякова и других ученых.

Вычисление проекции Чебышева сводится к решению двух задач:

нахождение значений частных масштабов длин и других характеристик проекции в точках картографируемой области по заданному постоянному значению логарифма частного масштаба длин  $\mu$  на контуре этой области;

определение прямоугольных координат  $x$ ,  $y$  точек проекции по имеющимся значениям частных масштабов длин в точках картографируемой области.

Первая часть задачи сводится к решению уравнения Пуассона с нулевыми граничными условиями или уравнения Лапласа с заданными граничными условиями, т. е. к решению внутренней задачи Дирихле:

$$\operatorname{In} \mu_{qq} + \operatorname{In} \mu_{\lambda\lambda} = 0;$$

при заданных граничных условиях

$$\operatorname{In} \mu|_{\Gamma} = \operatorname{In} r_{\Gamma}, \quad (210)$$

где  $q$ ,  $\lambda$  — изометрические координаты;

$$r = N \cos \varphi; \quad \operatorname{In} m = \operatorname{In} \mu - \operatorname{In} r.$$

Решением уравнения Лапласа является функция

$$\operatorname{In} \mu = F(q + i\lambda), \quad (211)$$

непрерывная в области картографирования, ограниченной контуром  $\Gamma$ .

Выражение (211) можно представить в виде (208) и получить решение уравнения Лапласа в однородных гармонических полиномах для картографирования территорий с любыми очертаниями

$$\ln \mu = \sum_{i=1}^k a_i \psi_i + \sum_{i=1}^k b_i \theta_i, \quad (i=1, 2, 3, \dots) \quad (212)$$

где  $\psi_i$ ,  $\theta_i$  определяются из выражений (208);  $a_i$ ,  $b_i$  — постоянные параметры проекции, определяемые по заданным граничным условиям (210).

В случае когда картографируемая территория имеет контур, симметричный относительно среднего прямолинейного меридиана, то выражение (212) принимает вид

$$\ln \mu = \sum_{i=1}^k a_i \psi_i; \quad (i=1, 2, 3, \dots) \quad (213)$$

При этом, как было сказано, на контуре изображаемой территории соблюдаются граничные условия (210).

В работах проф. Н. А. Урмаева показано, что для решения уравнения Лапласа и, следовательно, нахождения частных масштабов длин во внутренних точках изображаемой области могут быть использованы вариационный метод Ритца, метод сеток, метод построения гармонической функции, наилучшим образом удовлетворяющей граничным условиям, способ наименьших квадратов.

Наиболее удобным и эффективным, особенно при картографировании территорий со сложными очертаниями, является последний способ.

Воспользуемся решением уравнения Лапласа в виде (212) и представим с учетом (210) формулу для определения натурального логарифма частного масштаба длин в точках рассматриваемой проекции в виде

$$\ln m = \ln \mu - \ln r = \sum_{i=1}^k a_i \psi_i + \sum_{i=1}^k b_i \theta_i - \ln r. \quad (214)$$

Постоянные коэффициенты  $a_i$ ,  $b_i$  найдем, исходя из минимума суммы квадратов натуральных логарифмов масштаба длин, определяемых по формуле (214) для нескольких точек контура, число которых больше числа определяемых коэффициентов.

Определив постоянные коэффициенты, можно вычислить значения частных масштабов длин во внутренних точках изображаемой области, т. е. решить первую часть задачи.

Вторую часть задачи решим с помощью дифференциального уравнения

$$\mu^2 = x_q^2 + y_q^2, \quad (215)$$

где  $\mu = mr$ ;  $m$  — частные масштабы длин,  $r = N \cos \varphi$  — радиус кривизны параллели.

Различные способы определения прямоугольных координат проекции Чебышева рассмотрены в работах различных авторов (Н. А. Урмаева, Л. М. Бугаевского, Н. Я. Виленкина и др.).

Вспользуемся способом линейной аппроксимации и получим формулы проекции Чебышева для общего случая, когда территория картографирования имеет асимметричные очертания.

Перепишем выражение (215) в виде

$$\begin{aligned} y_q &= \mu \cos \gamma; & y_q &= \mu \sin \gamma; \\ x_\lambda &= -\mu \sin \gamma; & y_\lambda &= \mu \cos \gamma, \end{aligned} \quad (216)$$

где  $\gamma$  — сближения меридианов, которые в данном выражении неизвестны и  $\mu$  — функции, которые легко определить для каждой точки, так как значения частных масштабов длин  $m$  для каждой из них известны.

Чтобы определить сближения меридианов, запишем уравнение Лапласа

$$\gamma_{qq} + \gamma_{\lambda\lambda} = 0$$

и равносильные ему условия Коши—Римана в виде

$$\gamma_q = (\ln \mu)_\lambda; \quad \gamma_\lambda = -(\ln \mu)_q.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \gamma &= \int (\ln \mu_\lambda) dq + C_1(\lambda); \\ \gamma &= \int (\ln \mu_q) d\lambda + C_2(q). \end{aligned} \quad (217)$$

Продифференцировав формулу (212) и подставив полученные производные в выражения (217), получим

$$\begin{aligned} \gamma &= \int \left[ \sum_{i=0}^k a_i (\psi_i)_\lambda + \sum_{i=1}^k b_i (\theta_i)_\lambda \right] dq + C_1(\lambda); \\ \gamma &= \int \left[ \sum_{i=0}^k a_i (\psi_i)_q + \sum_{i=1}^k b_i (\theta_i)_q \right] d\lambda + C_2(q). \end{aligned}$$

С учетом условий Коши—Римана  $x_q = y_\lambda$ ;  $x_\lambda = -y_q$  получим

$$\begin{aligned} \gamma &= \int \left[ -\sum_{i=0}^k a_i (\theta_i)_q + \sum_{i=1}^k b_i (\psi_i)_q \right] dq + C_1(\lambda); \\ \gamma &= -\int \left[ \sum_{i=0}^k a_i' (\theta_i)_q + \sum_{i=1}^k b_i (\psi_i)_\lambda \right] d\lambda + C_2(q). \end{aligned}$$

Проинтегрировав эти уравнения и сравнив полученные значения, найдем

$$\gamma = -\sum_{i=1}^k a_i \theta_i + \sum_{i=1}^k b_i \psi_i. \quad (218)$$

Теперь для любой внутренней точки области можно получить численные значения  $\mu$  и  $\gamma$ .

Поскольку рассматриваемая проекция является равноугольной, то

$$x + iy = F(q + i\lambda).$$

Формулы прямоугольных координат:

$$\begin{aligned}x &= \sum_{i=1}^k m_i \psi_i - \sum_{i=1}^k n_i \theta_i; \\y &= \sum_{i=1}^k m_i \theta_i + \sum_{i=1}^k n_i \psi_i,\end{aligned}\quad (219)$$

где  $\psi_i$ ,  $\theta_i$  — члены гармонических полиномов, вычисленные по формулам (206);  $m_i$ ,  $n_i$  — постоянные коэффициенты.

Для вычисления  $m_i$ ,  $n_i$  продифференцируем выражения (219):

$$\begin{aligned}x_q &= \sum_{i=1}^k m_i v_i - \sum_{i=1}^k n_i \tau_i; \\y_q &= \sum_{i=1}^k n_i v_i + \sum_{i=1}^k m_i \tau_i,\end{aligned}\quad (220)$$

где

$$\begin{aligned}v_i &= (\psi_i)_q = (\theta_i)_\lambda = i\psi_{i-1}; \\ \tau_i &= (\theta_i)_q = -(\psi_i)_\lambda = i\theta_{i-1}.\end{aligned}$$

Введя в формулы (216) обозначения:

$$\mu \cos \gamma = T''; \quad -\mu \sin \gamma = P'',$$

с учетом выражения (216) и (220)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k im_i \psi_{i-1} - \sum_{i=1}^k in_i \theta_{i-1} &= T''; \\ \sum_{i=1}^k in_i \psi_{i-1} + \sum_{i=1}^k im_i \theta_{i-1} &= P'',\end{aligned}\quad (221)$$

в которых известными величинами являются  $T''$ ,  $P''$ ,  $\psi_{i-1}$ ,  $\theta_{i-1}$  а определяемыми — постоянные коэффициенты  $m_i$ ,  $n_i$ .

Составив системы вида (221), найдем искомые коэффициенты  $m_i$ ,  $n_i$  по способу наименьших квадратов.

Полученная проекция является непосредственным отображением поверхности эллипсоида на плоскость и согласно выполненным исследованиям многих ученых (Д. А. Граве, Н. А. Урмаева, В. В. Каврайского и др.) обеспечивает минимальные искажения длин в пределах изображаемой территории и лучшее их распределение, минимальную среднюю кривизну изображения геодезической линии по сравнению с любыми другими равноугольными проекциями.

Следует, однако, заметить, что вычисления этой продукции составляют некоторые трудности, которые при использовании ЭВМ в значительной мере могут быть преодолены.

## Глава XII

### СПОСОБЫ ИЗЫСКАНИЯ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

---

#### § 63. ПОНЯТИЯ О ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КАРТОГРАФИИ

Из гл. I известны общие уравнения картографических проекций

$$x = f_1(\varphi, \lambda); \quad y = f_2(\varphi, \lambda).$$

Если известны функции  $f_1, f_2$ , называемые отображающими, то на их основе можно получить основные уравнения отображения поверхностей на плоскости.

Эти уравнения выражаются в виде формул:  
частных масштабов длин и площадей

$$m = \frac{1}{M} \sqrt{x_\varphi^2 + y_\varphi^2}; \quad n = \frac{1}{r} \sqrt{x_\lambda^2 + y_\lambda^2};$$
$$a^2 + b^2 = m^2 + n^2; \quad ab = mn \sin i; \quad (222)$$
$$p = \frac{1}{Mr} (x_\varphi y_\lambda - x_\lambda y_\varphi) = ab;$$

сближения меридианов

$$\gamma = \arctg(y_\varphi/x_\varphi);$$

углов  $i$  в точках проекций между изображениями меридианов и параллелей и их отклонений  $\epsilon$  от прямого угла

$$i = \arctg\left(\frac{x_\varphi y_\lambda - x_\lambda y_\varphi}{x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda}\right); \quad \epsilon = i - 90^\circ;$$

наибольших искажений углов

$$\sin(\omega/2) = (a - b)/(a + b).$$

и других характеристик.

*Решением прямой задачи математической картографии* называются способы определения картографических проекций, когда вначале, исходя из заданных условий, получают отображающие функции  $f_1$  и  $f_2$ , а затем в зависимости от этих функций определяют частные масштабы и другие характеристики проекции, а также выполняют соответствующие вычисления.

Достоинством способов определения картографических проекций при решении прямой задачи математической картографии является сравнительная простота используемого при этом математического аппарата. Особенностью этих способов является то, что свойства получаемых проекций можно установить только после определения формул отображающих функций и характеристик проекции. Недостатком этих способов является ограниченность

возможности изыскания новых проекций, удовлетворяющих разнообразным требованиям.

*Решением обратной задачи математической картографии* называются способы определения картографических проекций, когда вначале задаются характеристики проекции (или часть из них), а затем в зависимости от них находят отображающие функции или непосредственно прямоугольные координаты проекции и другие, не заданные, характеристики проекции.

Уравнения прямых отображений поверхностей на плоскости, используемые для решения обратной задачи математической картографии, определяют следующим образом.

Подставив  $\mu = mM$ ,  $\nu = nr$  в формулы (222), получим

$$\begin{aligned} x_{\varphi} &= \mu \cos \gamma; & y_{\varphi} &= \mu \sin \gamma; \\ x_{\lambda} &= -\nu \sin (\gamma + \varepsilon); & y_{\lambda} &= \nu \cos (\gamma + \varepsilon), \end{aligned} \quad (223)$$

где  $\gamma$  — сближение меридианов,  $\varepsilon = i - 90^{\circ}$ .

Поставив условие, чтобы дифференциальные уравнения в частных производных (223) были интегрируемыми

$$\frac{\partial (x_{\varphi})}{\partial \lambda} = \frac{\partial (x_{\lambda})}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial (y_{\varphi})}{\partial \lambda} = \frac{\partial (y_{\lambda})}{\partial \varphi}, \quad (224)$$

дифференцируем выражения (223) и полученные значения производных подставляем в (224).

После преобразований получаем квазилинейную систему уравнений первого порядка в частных производных

$$\begin{aligned} \gamma_{\varphi} &= -\varepsilon_{\varphi} - \frac{\mu \lambda}{\nu} \sec \varepsilon - \frac{\nu_{\varphi}}{\nu} \operatorname{tg} \varepsilon; \\ \gamma_{\lambda} &= \frac{\mu \lambda}{\mu} \operatorname{tg} \varepsilon + \frac{\nu_{\varphi}}{\mu} \sec \varepsilon. \end{aligned} \quad (225)$$

Эта система, названная профессором Г. А. Мещеряковым системой Эйлера—Урмаева, является недоопределенной, так как имеет два уравнения, а входят в нее четыре характеристики.

Если эту систему доопределить, т. е. задать две из четырех характеристик и дополнительные граничные или начальные условия, то можно получить множество картографических проекций.

Проф. Г. А. Мещеряков показал, что всего может быть предложено 15 вариантов доопределения уравнений (225), и на этой основе предложил генетическую классификацию картографических проекций по видам описывающих их дифференциальных уравнений.

При доопределении системы уравнений Эйлера—Урмаева необходимо иметь в виду, что согласно формулам (222) и (223) из всего множества возможных характеристик проекции только четыре из них являются независимыми (для определения частных производных  $x_{\varphi}$ ,  $x_{\lambda}$ ;  $y_{\varphi}$ ,  $y_{\lambda}$ ).

Достоинством способов определения картографических проекций на основе решения обратной задачи математической карто-



графии является то, что изыскание проекций осуществляется, исходя из заданных желаемых их свойств, а также то, что эти способы обеспечивают возможность получения множества картографических проекций.

Недостатком этих способов является то, что при их использовании приходится решать дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка эллиптического, гиперболического, параболического и смешанных типов, что в большинстве случаев представляет собою сложную задачу и сопряжено с выполнением громоздких вычислений.

При вычислении картографических проекций можно исходить не только из выражений (1) или (225), но и использовать уравнения параллелей и меридианов

$$\varphi = F_1(x, y); \quad \lambda = F_2(x, y),$$

с помощью которых могут быть заданы обратные отображения, где координаты  $(x, y)$  точек искомой проекции являются переменными, а геодезические координаты  $(\varphi, \lambda)$  — их функциями.

Проф. Н. А. Урмаев получил формулы обращения, устанавливающие соотношения между частными производными  $x_\varphi, x_\lambda; y_\varphi, y_\lambda$  прямого и  $\varphi_x, \varphi_y; \lambda_x, \lambda_y$  обратного отображений:

$$x_\varphi = \frac{1}{J} \lambda_y; \quad y_\varphi = -\frac{1}{J} \lambda_x;$$

$$x_\lambda = -\frac{1}{J} \varphi_y; \quad y_\lambda = \frac{1}{J} \varphi_x,$$

где

$$J = 1/h = \varphi_x \lambda_y - \varphi_y \lambda_x.$$

Подставляя эти значения частных производных в формулы характеристик  $m, n, p, \operatorname{tg} \gamma, \operatorname{tg} \varepsilon \dots$  общей теории картографических проекций, Н. А. Урмаев получил систему дифференциальных уравнений, имеющую фундаментальное значение в теории обратных отображений:

$$\begin{aligned} m^2 &= p^2 r^2 (\lambda_x^2 + \lambda_y^2); & n^2 &= p^2 M^2 (\varphi_x^2 + \varphi_y^2); \\ \operatorname{tg} \gamma &= -\lambda_x / \lambda_y; & \operatorname{tg} (\gamma + \varepsilon) &= \varphi_y / \varphi_x; \\ p &= \frac{1}{Mr} \frac{1}{\varphi_x \lambda_y - \varphi_y \lambda_x}; & \operatorname{tg} \varepsilon &= \frac{\varphi_x \lambda_x + \varphi_y \lambda_y}{\varphi_x \lambda_y - \varphi_y \lambda_x}. \end{aligned} \quad (226)$$

Эту систему Г. А. Мещеряков назвал системой Тиссо—Урмаева.

Ее использование позволяет получить бесчисленное множество картографических проекций как на основе решения прямой, так и обратной задач математической картографии.

Если известны уравнения параллелей и меридианов или заданы условия получения их функций, система уравнений (226) дает возможность определить характеристики и прямоугольные координаты проекции (прямая задача математической картографии).

В случае когда заданы характеристики проекции или часть из них, эта же система дифференциальных уравнений (226) позволяет определить искомые проекции на основе решения обратной задачи математической картографии.

При этом система (226) не является линейной, поэтому ее решение представляет еще большие трудности, чем решение системы дифференциальных уравнений в частных производных Эйлера—Урмаева (225).

Все методы изыскания картографических проекций являются вариантами решения прямой или обратной задач математической картографии.

#### **§ 64. ИЗЫСКАНИЕ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КАРТОГРАФИИ**

**Классический аналитический способ  
получения картографических проекций**

Большинство из известных картографических проекций, в том числе рассмотренные в предыдущих главах настоящего учебника, получены этим способом. Суть его заключается в следующем.

Устанавливают желаемый вид изображения картографической сетки (например, меридианы — равноотстоящие параллельные прямые, параллели — параллельные прямые, ортогональные меридианам) и, в соответствии с условиями изображения, записывают уравнения картографических проекций в общем виде. В данном случае

$$x = f_1(\varphi); \quad y = C\lambda,$$

где  $C = \text{const}$ .

Исходные условия, выражающие в общем виде зависимость прямоугольных координат от геодезических, например (1), можно задать аналитически, предварительно не устанавливая желаемого вида картографической сетки.

После получения в общем виде уравнений картографических проекций задают желаемый характер искажений получаемой проекции и, используя рассмотренные выше уравнения теории отображения поверхностей на плоскости, находят в общем виде формулы частных масштабов и других характеристик картографических проекций, составляют дифференциальные уравнения с учетом заданных условий о характере искажений проекции, интегрируют эти уравнения и в результате получают искомые отображающие функции, а затем по ним частные масштабы и другие характеристики проекций.

## Перспективные способы получения картографических проекций

В перспективных способах точки поверхности Земли или других небесных тел проектируются из точек зрения на развертывающиеся поверхности конуса, цилиндра и на плоскость.

В первом случае получаем перспективно-конические проекции, используемые сравнительно мало, во втором — перспективно-цилиндрические проекции и в третьем — перспективно-азимутальные проекции, которые получили наиболее широкое применение.

Перспективно-азимутальные и перспективно-цилиндрические проекции весьма полно рассмотрены в гл. V, VI.

### Способ комбинаций уравнений исходных проекций

В этом способе комбинации могут осуществляться между проекциями одного или разных классов.

В случае комбинаций проекций одного и того же класса были предложены Г. А. Гинзбургом и А. К. Моловичко обобщенные формулы азимутальных проекций сферы (§ 30). Эти формулы позволяют в зависимости от заданных исходных параметров получать разнообразные по характеру искажений азимутальные проекции сферы (равноугольные, равно-великие и др.).

Можно получить аналогичные обобщенные формулы, например, для комбинации равноугольных и равнопромежуточных вдоль вертикалов азимутальных проекций

$$\rho = \frac{1}{k} R \left( k_1 \operatorname{tg} \frac{z}{2} + k_2 z \right),$$

где  $k$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  — const.

При  $k = 2$ ,  $k_1 = k_2 = 1$  получим формулу круговой проекции Нелля; при  $k = 1$  и  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 0$  — формулу стереографической проекции

$$\rho = 2R \operatorname{tg} (z/2);$$

при  $k = 1$ ;  $k_1 = 0$ ;  $k_2 = 1$  — формулу равнопромежуточной вдоль вертикалов азимутальной проекции

$$\rho = Rz.$$

Аналогично можно записать обобщенную формулу для проекций, промежуточных между равновеликими и равнопромежуточными вдоль альмукантаратов проекциями:

$$\rho = \frac{1}{k} R \left( k_1 \sin \frac{z}{2} + k_2 \sin z \right),$$

и получить различные их варианты.

Для цилиндрических, конических и других классов проекций с различным характером искажений обобщенные формулы имеют вид

$$x = kx_1 + (1 - k)x_2; \quad y = ky_1 + (1 - k)y_2,$$

где  $0 \leq k \leq 1$ ;  $x_1, y_1; x_2, y_2$  — прямоугольные координаты одного и того же класса проекций (цилиндрических, конических и других), различающихся характером искажений (равноугольные и равновеликие, равноугольные и равнопромежуточные, равновеликие и равнопромежуточные и т. п.).

Изменяя значения постоянных параметров ( $k_1$  и  $k_2$ ), можно получить множество картографических проекций с разнообразными свойствами и решать задачу оптимального выбора одной из них для создания карты конкретного назначения при изображении территорий с округленными очертаниями.

Рассмотрим некоторые проекции, полученные в результате комбинаций между классами проекций.

В производной равновеликой проекции Гаммера ординаты определяют как среднеарифметические значения ординат равновеликих проекций Сансона и цилиндрической

$$y = R\lambda \frac{1 + \cos \varphi}{2} = R\lambda \cos^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Используя условие равновеликости и полагая, что абсциссы не зависят от долготы,

$$x = 2R \left( \varphi - \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right).$$

Формулы прямоугольных координат производной проекции Винкеля определяют как среднеарифметические из координат проекций: равнопромежуточной цилиндрической и производной Аитова (см. ниже)

$$x = \frac{1}{2} (R\varphi + x_A); \quad y = \frac{1}{2} (Rk\lambda + y_A),$$

где  $k$  — постоянный коэффициент.

Исходя из условия, что на экваторе частный масштаб длин  $n = 0,85$ , В. В. Каврайским было получено значение  $k = 0,7$ .

Проекция широко применяется для карт мира в зарубежной картографии. В этой проекции искажения площадей меньше, чем искажения углов.

Проекция объединенных систем азимутально-цилиндрических и азимутально-конических проекций А. С. Лисичанского определяются путем сочетаний указанных трех проекций для изыскания равноугольных и равновеликих проекций с изоколами в виде овалов.

Для равноугольных проекций

$$x = k_1x_1 + k_2x_2; \quad y = k_1y_1 + k_2y_2,$$

где  $x_1, y_1; x_2, y_2$  — формулы прямоугольных координат соответ-

венно первой и второй проекций;  $k_1, k_2$  — постоянные величины, от изменения которых зависят свойства проекций. При этом  $k_1 + k_2 = 1$ .

Для определения равновеликих проекций указанных объединенных систем использовались условие равновеликости, выраженное в полярных системах координат:

$$x_2 y_a - x_a y_z = R^2 \sin z$$

и метод Майера, согласно которому одна из отображающих функций ( $x$  или  $y$ ) задается.

В данном случае задавались абсциссы как линейная комбинация абсцисс исходных проекций.

Условие равновеликости принимало вид неоднородного линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$p y_a - Q y_z = R^2 \sin z,$$

где

$$P = x_z; \quad Q = x_a.$$

В результате решения этого уравнения численными методами определялись ординаты искоемых проекций.

### Способ Аитова для получения производных проекций

Аитов предложил способ построения проекций для карт мира, в котором все ординаты исходной проекции удваиваются, меридианы подписываются соответствующими удвоенными долготами и затем по координатам определяются промежуточные меридианы.

Для получения такой проекции в качестве исходной Аитов предложил использовать поперечную азимутальную равнопромежуточную проекцию Постеля, формулы которой с учетом указанных преобразований принимают вид

$$x = Rz \cos a; \quad y = 2Rz \sin a,$$

где  $z, a$  — полярные сферические координаты, определяемые по формулам (59) и (61) гл. III.

По этому методу Е. Гаммером на основе использования равновеликой поперечной азимутальной проекции была разработана равновеликая проекция для карт мира, получившая наименование проекции Аитова—Гаммера. В этой проекции растяжение по долготе, как и в предыдущем варианте, равно 2.

М. Д. Соловьев вычислил формулы проекции Аитова—Гаммера для общего случая и рассмотрел вариант, в котором растяжение по долготе равно 1,6.

В настоящее время разработаны варианты проекций, в которых растяжение осуществляется не по одному, а по двум направлениям (проекции Е. Зимона, К. Вагнера, Е. Кремлинга).

## Способы получения проекций, имеющих составные сетки

Построение проекций по способу Гуда основано на применении любой псевдоцилиндрической проекции (Сансона, Мольвейде, Эккерта, Каврайского и др.), в которой искажения вблизи среднего меридиана малы и значительно возрастают по мере удаления от него.

Для изображения каждого материка используется только центральная часть проекции со своим прямолинейным меридианом, а объединение частей осуществляется по линии экватора. На участке, где должны изображаться океаны, возникают разрывы (подробно см. гл. VII).

Проекция, полученная по способу В. В. Каврайского, составлена из двух: равноугольной цилиндрической проекции Меркатора в полосе с  $\varphi = \pm 70^\circ$  и в более высоких широтах в цилиндрической равнопромежуточной проекции.

При получении проекций по способу Н. А. Урмаева предполагается, что две области эллипсоида (сферы), не имеющие общих границ, изображены в различных проекциях и что меридианы и параллели в этих и промежуточных областях изображаются плавными кривыми.

Построение составной проекции выполнялось следующим образом. Задав координаты точки второй области в системе координат первой области и установив угол разворота второй прямоугольной системы координат относительно первой, определялись координаты точек второй области в системе координат первой области путем выполнения преобразований плоских систем координат.

Для определения координат точек промежуточной области устанавливалась аналитическая зависимость (в виде многочлена или на основе использования интерполяционной формулы Стирлинга) при условии, чтобы три одноименные параллели (в трех областях) в общих точках имели общие касательные.

В результате было получено взаимно-однозначное соответствие систем координат поверхности и плоскости.

## Способы получения проекций на основании использования рядов и гармонических полиномов

Способы изыскания этих проекций, являющихся равноугольными или близкими к ним по характеру искажений, были разработаны Л. А. Вахрамеевой. Проекции, полученные указанными способами, имеют изоколы овальной, округлой или гиперболической формы, различно ориентированные относительно меридиана центральной точки.

Общие уравнения прямоугольных координат равноугольных проекций, получаемых с применением гармонических полиномов (см. гл. XI), имеют вид

$$x = \sum_{k=0}^n (a_k P_k - b_k Q_k); \quad y = \sum_{k=0}^n (b_k P_k + a_k Q_k),$$

где  $a_k$  и  $b_k$  — коэффициенты,  $P_k$  и  $Q_k$  — две группы однородных гармонических полиномов.

Рабочие формулы этих проекций (на примере гармонического полинома 3-й степени) можно представить следующим образом:

$$x = A_0 + B_1 \lambda + A_2 \lambda^2 + B_3 \lambda^3;$$

$$y = B_0 + A_1 \lambda + B_2 \lambda^2 + A_3 \lambda^3,$$

где  $A$  и  $B$  — переменные коэффициенты, получаемые по формулам

$$A_0 = a_0 + a_1 (q - q_0) + a_2 (q - q_0)^2 + a_3 (q - q_0)^3;$$

$$A_1 = \frac{dA_0}{dq} = a_1 + 2a_2 (q - q_0) + 3a_3 (q - q_0)^2;$$

$$A_2 = -\frac{1}{2} \frac{d^2 A_0}{dq^2} = -[a_2 + 3a_3 (q - q_0)];$$

$$A_3 = -\frac{1}{6} \frac{d^3 A_0}{dq^3} = -a_3;$$

$$B_0 = b_0 + b_1 (q - q_0) + b_2 (q - q_0)^2 + b_3 (q - q_0)^3;$$

$$B_1 = -\frac{dB_0}{dq} = -[b_1 + 2b_2 (q - q_0) + 3b_3 (q - q_0)^2];$$

$$B_2 = -\frac{1}{2} \frac{d^2 B_0}{dq^2} = -[b_2 + 3b_3 (q - q_0)];$$

$$B_3 = \frac{1}{6} \frac{d^3 B_0}{dq^3} = b_3,$$

где  $q$  и  $q_0$  — изометрические широты соответственно текущей параллели и параллели центральной точки.

Приведенные уравнения позволяют получить строго равноугольные проекции, удовлетворяющие условиям Коши—Римана, с управляемыми изоколами, которые являются центральными кривыми второго порядка и могут быть приспособляемы к обобщенным границам изображаемых областей.

Анализ коэффициентов  $a_k$  показал, что коэффициент  $a_0$  целесообразно принять равным нулю (в этом случае начало прямоугольных координат проекции будет совмещено с ее центральной точкой); коэффициенты

$$a_1 = r_0; \quad a_2 = -\frac{r_0}{2} \sin \varphi_0;$$

$$a_3 = r_0 \left( \frac{A}{3} \cos^2 \varphi_0 - \frac{\cos 2\varphi_0}{6} \right),$$

где  $r_0$  — радиус параллели центральной точки.

Определение коэффициентов  $b_k$  (в проекциях с асимметричными изоколами) целесообразно для простоты решения задачи выполнять по формулам

$$b_0 = b_1 = b_2 = 0; \quad b_3 = b = r_0 \frac{B}{3} \cos^3 \varphi_0.$$

В приведенных формулах  $A$  и  $B$  — числовые коэффициенты, влияющие на форму изокол и их поворот относительно меридиана центральной точки; их значение может быть получено по формулам

$$A = (1 - C \cos 2\alpha)/4; \quad B = C \sin 2\alpha/4,$$

где  $C = (a^2 - b^2)/(a^2 + b^2)$ ;  $\alpha$  — угол поворота изоколы относительно меридиана центральной точки;  $a$  и  $b$  — полуоси изоколы.

Если принять центральную точку проекции за начало прямоугольных координат и для простоты считать в ней масштаб длин равным единице, то уравнение изоколы можно написать в следующем виде:

$$v = 100(m - 1) = Ax^2 - 2Bxy + (1/2 - A)y^2,$$

где  $v$  — искажение длин;  $A$  и  $B$  — указанные выше коэффициенты, входящие в значения  $a_3$  и  $b_3$ .

Достоинством проекций, получаемых при помощи гармонических полиномов, является простота получения и небольшая величина искажений. Вычисления прямоугольных координат проекций и масштабов могут быть осуществлены как при помощи ЭВМ, так и с применением малой вычислительной техники. При получении проекций не нужен переход к косо́й системе координат.

По величине искажений эти проекции имеют некоторое преимущество по сравнению с другими равноугольными проекциями, используемыми в настоящее время, например цилиндрическими и коническими.

Это преимущество объясняется, прежде всего, возможностью приспособления изокол к обобщенным границам картографируемых областей, что проявляется наиболее заметно в проекциях с асимметричными изоколами.

Недостатком рекомендуемых проекций следует считать то, что в них невозможно изобразить приполярные районы, а также неполное, приближенное приспособление изокол к границам изображаемых областей.

Уравнения равноугольных проекций с изоколами, симметричными относительно осевого меридиана, получаемые с применением рядов, имеют вид

$$x = a_0 + a_2 s_n^2 + \dots; \quad y = a_1 s_n + a_3 s_n^3 + \dots,$$

где  $s_n$  — дуга параллели между меридианом центральной точки и текущим меридианом, соответствующая разности долгот этих меридианов ( $\lambda - \lambda_0$ );  $a_0$  — характеристика проекции;  $a_1, a_2, a_3$  —



переменные коэффициенты, которые могут быть вычислены по следующим формулам:

$$a_1 = \frac{da_0}{ds_m};$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left( a_1 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{N} - \frac{da_1}{ds_m} \right);$$

$$a_3 = -\frac{1}{3} \left( 2a_2 \frac{\operatorname{tg} \varphi}{N} - \frac{da_2}{ds_m} \right);$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n} \left[ (n-1) a_{n-1} \frac{\operatorname{tg} \varphi}{N} - \frac{da_{n-1}}{ds_m} \right],$$

где  $s_m$  — дуга меридиана между параллелью центральной точки и текущей параллелью;  $N$  — радиус кривизны первого вертикала.

Если формулы прямоугольных координат ограничить членами ряда третьей степени, значения координат в пределах участков, не превышающих по широте и долготе 400—450 км, можно получить с точностью одного—четырёх метров. При этом членами ряда первого порядка следует принять дуги меридианов и параллелей длиной 200—225 км.

Тогда члены ряда второго порядка будут включать соотношения

$$\frac{s_m^2}{R_0}; \quad \frac{s_m s_n}{R_0}; \quad \frac{s_n^2}{R_0},$$

которые при  $s_m \leq 200$  км и  $s_n \leq 200$  км не превысят восьми километров, а члены ряда третьего порядка

$$\frac{s_m^3}{R_0^2}; \quad \frac{s_m^2 s_n}{R_0^2}; \quad \frac{s_m s_n^2}{R_0^2}; \quad \frac{s_n^3}{R_0^2},$$

где  $R_0$  — средний радиус кривизны изображаемой поверхности в центральной точке проекции (для земной поверхности при  $s_m \leq 200$  км и  $s_n \leq 200$  км эти члены ряда не превысят 200 м).

Наиболее существенную роль в приведенных формулах играет характеристика проекции  $a_0$ , которая, как и в проекциях, получаемых с применением гармонических полиномов, влияет на вид сетки и распределение искажений.

Анализ проекций с изоколами разной формы позволил обнаружить закономерности их получения и вывести обобщенные формулы равноугольных проекций, получаемых при помощи рядов (ограниченных членами третьего порядка):

$$a_0 = s_m + \frac{s_m^3}{kR_0^2} \dots; \quad a_1 = 1 + \frac{3s_m^2}{kR_0^2} \dots;$$

$$a_2 = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2N} - \frac{3s_m}{kR_0^2} \dots; \quad a_3 = -\frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{6R_0^2} + \frac{k-6}{6kR_0^2} \dots$$

Тогда

$$x = s_m + \frac{s_m^3}{kR_0^2} + \left( \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2N} - \frac{3s_m}{kR_0^2} \right) s_n^2 + \dots;$$

$$y = \left( 1 + \frac{3s_m^2}{kR_0^2} \right) s_n + \left( \frac{k-6}{6kR_0^2} - \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{6R_0^2} \right) s_n^3 + \dots,$$

где  $k$  — числовой коэффициент.

Изменяя значения этого коэффициента, можно получить семь групп равноугольных проекций.

При  $k = \infty$  изоколы — овалы, вытянутые вдоль осевого меридиана; на небольших участках имеют вид прямых, параллельных этому меридиану;

$12 < k < \infty$  изоколы — эллиптические кривые, вытянутые вдоль меридианов;

$k = 12$  изоколы — окружности;

$6 < k < 12$  изоколы — эллиптические кривые, вытянутые вдоль параллелей;

$k = 6$  изоколы — дуги окружностей, совпадающие с параллелями;

$0 < k < 6$  изоколы — гиперболические кривые, действительная ось которых совпадает с меридианом центральной точки;

$k < 0$  изоколы — гиперболические кривые, действительная ось которых совпадает со средней параллелью.

В проекциях с асимметричными изоколами

$$x = a_0 + b_1 s_n + a_2 s_n^2 + b_3 s_n^3 + \dots;$$

$$y = b_0 + a_1 s_n + b_2 s_n^2 + a_3 s_n^3 + \dots$$

Значения переменных коэффициентов  $a_k$  известны.

Если принять

$$b_0 = s_m^3 / kR_0^2$$

и значения остальных коэффициентов  $b_k$  получить по тем же формулам, что и значения коэффициентов  $a_k$ , то

$$b_1 = 3s_m^2 / kR_0^2; \quad b_2 = 3s_m / kR_0^2; \quad b_3 = 1 / kR_0^2.$$

Подставляя  $a_k$  и  $b_k$  в приведенные выше формулы прямоугольных координат с асимметричными изоколами, получим

$$x = s_m + \frac{s_m^3}{kR_0^2} - \frac{3s_m^2 s_n^*}{kR_0^2} + \left( \frac{\operatorname{tg} \varphi}{2R_0} - \frac{3s_m}{kR_0^2} \right) s_n^2 +$$

$$+ \frac{s_n^{3*}}{kR_0^2} + \dots;$$

$$y = \frac{s_m^3}{kR_0^2} + \left( 1 + \frac{3s_m^2}{kR_0^2} \right) s_n - \frac{3s_m s_n^{2*}}{kR_0^2} +$$

$$+ \left( \frac{k-6}{6kR_0^2} - \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{6R_0^2} \right) s_n^3 + \dots$$

Последние уравнения отличаются от уравнений проекций с изоколами, симметричными относительно осевого меридиана, наличием дополнительных членов, обозначенных звездочками.

Формула масштаба в этих проекциях имеет вид

$$m = 1 + \frac{6s_m^2 - 12s_m s_n + (k-6)s_n^2}{2kR_0^2}.$$

Приведенные формулы прямоугольных координат, ограниченные членами ряда третьего порядка, могут быть использованы для получения проекций карт, как правило, масштабов 1 : 100 000 и мельче на участки указанных малых размеров.

С уменьшением масштаба карт пределы изображаемых участков соответственно увеличиваются.

Надлежащий выбор коэффициента  $k$  дает возможность получить проекции, изоколы которых подходят наиболее близко к границам контура, ограничивающего изображаемую территорию. Равноугольные проекции, получаемые с применением рядов, по величине искажений имеют преимущество по сравнению с некоторыми другими равноугольными проекциями, используемыми в настоящее время, например цилиндрическими и коническими.

Методика получения рассматриваемых проекций несложна. Прямоугольные координаты и масштабы этих проекций могут быть получены как при помощи ЭВМ, так и с применением малой вычислительной техники.

### Способ получения проекций путем введения дополнительных постоянных или функций

Ряд вариантов проекций, и прежде всего псевдоцилиндрических и псевдоконических, были разработаны ЦНИИГАиК, Ф. А. Старостиным и др.

Примером такой проекции является псевдоцилиндрическая трапециевидная проекция, в которую введены три постоянных параметра, определяемых из условия, что частные масштабы длин вдоль параллелей с заданными широтами  $\varphi_1, \varphi_2$  и вдоль меридианов с долготами  $\pm \lambda_0$  равны единице ( $m_0 = n_{1,2} = 1$ ).

Дополнительные функции могут быть введены в уравнения проекции или служить самостоятельной исходной функцией для определения проекций.

Например, при получении конических, псевдоконических или поликонических проекций можно задать уравнение для определения полярных расстояний

$$\rho = a_0 \rho_n \pm \sum_{i=1}^n a_i (\varphi - \varphi_0)^i,$$

где  $a_i$  — постоянные коэффициенты;  $\rho_u$  — полярное расстояние исходной проекции; коэффициент  $a_0$  в частном случае может быть равен 0.

В качестве иллюстрации приведем формулу, предложенную Г. А. Гинзбургом для вычисления конической проекции с заданными значениями искажений и углов,

$$\rho = c - \left[ m_0 s + \frac{k m_0}{3} (\varphi - \varphi_0)^3 \right],$$

где  $c$ ,  $k$  — постоянные величины;  $m_0$  — частный масштаб длин вдоль меридианов в точках с минимальным масштабом по параллелям.

### Графические и графоаналитические способы получения картографических проекций

Графические способы в настоящее время мало применяются. В качестве примеров приведем проекции Бируни и Мюфлинга.

Проекция Бируни — это шаровая (глобулярная) проекция.

Для ее построения в окружности радиуса  $k = \pi R/2$ , взятого в масштабе карты, проводят два взаимно перпендикулярных диаметра. Один из них принимается за экватор, другой — за средний меридиан, а за крайние меридианы принимается окружность.

Разделив оба диаметра и каждые четверти окружности на равные части, а затем, проведя по трем точкам, лежащим на меридианах, и по точкам полюсов и экватора окружности, получают линии меридианов и параллелей проекции.

Проекция Мюфлинга строилась по выпрямленным дугам отрезков параллелей и меридианов (для топографических карт масштаба 1 : 100 000 и крупнее) методом засечек. Проекция применялась как многогранная для построения топографических карт в СССР до использования проекции Гаусса—Крюгера.

Графоаналитические способы применялись для построения цилиндрических, конических, азимутальных и других проекций. В настоящее время этим методом получают, главным образом, поликонические проекции, основанные на аппроксимации эскиза картографической сетки.

Способ получения этих проекций может быть отнесен к способам решения обратной задачи математической картографии, и он будет рассмотрен в § 65.

### Способ преобразований исходных проекций

В качестве иллюстрации приведем формулы проекции, полученные путем гомографических преобразований по методу Н. А. Урмаева:

$$x = \frac{a_1 X + a_2 Y + a_3}{c_1 X + c_2 Y + c_3};$$

$$y = \frac{b_1X + b_2Y + b_3}{c_1X + c_2Y + c_3},$$

где  $X, Y; x, y$  — прямоугольные координаты точек соответственно исходной и получаемой проекций;  $a_i, b_i, c_i$  — постоянные проекции, получаемые по способу наименьших квадратов.

Вторым вариантом этого способа является предварительное определение коэффициентов  $a_i, b_i, c_i$ , исходя из условий задания проекции, а затем получение координат  $x, y$  по координатам  $X, Y$  исходной проекции.

### § 65. ИЗЫСКАНИЕ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ НА ОСНОВЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КАРТОГРАФИИ

Основные способы решения этой задачи основаны на использовании рассмотренных выше уравнений Эйлера—Урмаева и Тиссо—Урмаева.

Способ получения проекций, основанный на решении уравнений Эйлера—Урмаева

Рассмотрим приближенное решение дифференциальных уравнений Эйлера—Урмаева (225), для чего воспользуемся методом аппроксимации.

Выберем две функции, например \*

$$\gamma_\varphi = - \sum_{i=2}^k A_i \tau_i + \sum_{i=1}^k c_i T_i + \sum_{i=1}^k a_i f_i(\varphi, \lambda); \quad (227)$$

$$\gamma_\lambda = - \sum_{i=1}^k A_i T_i - \sum_{i=2}^k c_i \tau_i + \sum_{i=1}^k a_i \Phi_i(\varphi, \lambda),$$

которые удовлетворяют условию интегрируемости уравнений (224). Здесь  $A_i, c_i, a_i$  — постоянные коэффициенты;  $f_i(\varphi, \lambda), \Phi_i(\varphi, \lambda)$  — частные производные по  $\varphi, \lambda$  функции  $F(\varphi, \lambda)$  (например степенного ряда);  $\tau, T$  — частные производные членов полинома, имеющих структуру гармонических,

$$\tau = i \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = -i \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}; \quad T = \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = i \frac{\partial \theta}{\partial \lambda}, \quad (228)$$

$\theta, \psi$  — члены полиномов, определяемые по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} \psi_i &= \varphi \psi_{i-1} - \lambda \theta_{i-1}; & \theta_i &= \varphi \theta_{i-1} + \lambda \psi_{i-1}; \\ \psi_1 &= \varphi; & \theta_1 &= \lambda. \end{aligned} \quad (229)$$

\* Зависимость (227) можно представить и в более простом виде, используя не комбинированный, а только один из видов полиномов.

Для равноугольных проекций  $\tau$ ,  $T$  являются производными от  $\psi$ ,  $\theta$  по изометрическим координатам  $q$ ,  $\lambda$  и в формулы (229) вместо широты  $\varphi$  входит изометрическая широта  $q$ .

В системе (225), как уже говорилось, имеются два уравнения и четыре характеристики проекции:  $\gamma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ .

Задав две из них, составляем системы уравнений, в которые входят члены формул (227) с неизвестными коэффициентами  $A_i$ ,  $c_i$ ,  $a_i$  и правые части уравнений (225), значения которых можно вычислить после доопределения этих уравнений.

Решение полученных систем позволяет найти искомые коэффициенты  $A_i$ ,  $c_i$ ,  $a_i$ .

Так как при этом соблюдается условие интегрируемости уравнений (224), то можно составить соответствующие уравнения в полных дифференциалах и после интегрирования получить

$$\gamma = - \sum_{i=1}^k A_i \theta_i + \sum_{i=1}^k c_i \psi_i + \sum_{i=1}^k a_i F_i(\varphi, \lambda).$$

Для получения прямоугольных координат проекции необходимо решить дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} x_\varphi &= \mu \cos \gamma; & x_\lambda &= -\nu \sin(\varepsilon + \gamma); \\ y_\varphi &= \mu \sin \gamma; & y_\lambda &= \gamma \cos(\varepsilon + \gamma). \end{aligned} \quad (230)$$

Так как значения  $\gamma$  получены при условии интегрируемости системы (227), то можно составить аппроксимирующие полиномы, аналогичные уравнениям (227), отдельно для производных по  $x$  и по  $y$ .

Затем, приравняв правые части этих выражений и уравнений (230), найти из решения полученных систем постоянные коэффициенты  $m_i$ ,  $n_i$ ,  $b_i$ ,  $d_i$ .

Написав после этого соответствующие уравнения в полных дифференциалах, получим после их интегрирования

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^k m_i \psi_i - \sum_{i=1}^k n_i \theta_i + \sum_{i=1}^k b_i F_i(\varphi, \lambda); \\ y &= \sum_{i=1}^k m_i \theta_i + \sum_{i=1}^k n_i \psi_i + \sum_{i=1}^k d_i F_i(\varphi, \lambda). \end{aligned} \quad (231)$$

Для равноугольных проекций  $b_i = d_i = 0$ ; в формулах (229) для определения членов полиномов  $\psi$ ,  $\theta$  и их производных  $T$ ,  $\nu$  вместо геодезических широт  $\varphi$  будут входить изометрические широты  $q = \ln U$ .

Отметим, что вид приведенных выше уравнений зависит от исходных данных и, следовательно, от вида доопределяющих функций.

Точность приближенного решения уравнений во многих случаях практики является достаточной. Однако общая задача решения квазилинейных дифференциальных уравнений Эйлера—Урмаева в частных производных требует дальнейшей разработки.

Способ получения проекций, основанный на решении уравнений Тиссо—Урмаева

Дифференциальные уравнения в частных производных Тиссо—Урмаева (226) имеют фундаментальное значение, но в силу их нелинейности определение по ним картографических проекций является более сложной задачей, чем в предыдущем случае.

В 1953 г. Н. А. Урмаев разработал теорию проекций, в которых параллели изображаются равноотстоящими кривыми при условии, что отношения частных масштабов по параллелям к частным масштабам площадей являются функцией только широты, т. е.  $n/p = f(\varphi)$ . Тогда формула (226) примет вид

$$\varphi_x^2 + y_y^2 = g^2(\varphi). \quad (232)$$

Для интегрирования этого уравнения было предложено два способа. В качестве первого применялся способ полного интеграла Лагранжа, согласно которому составлялась система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx/2\varphi_x = dy/2\varphi_y = d\varphi/2g^2 = -d\varphi_x/2\varphi_x g' g = -d\varphi_y/2\varphi_y g' g, \quad (233)$$

где  $g' = dg/d\varphi$ .

Используя последние два члена выражения (233), получим

$$\varphi_y = (\sqrt{1-a^2/a}) \varphi_x,$$

где  $a$  — произвольная постоянная.

Из уравнения (232)

$$g^2 = \varphi_x^2/a^2,$$

тогда

$$\varphi_x = ag; \quad \varphi_y = \sqrt{1-a^2} g.$$

Уравнение в полных дифференциалах примет вид

$$d\varphi/g = a dx + \sqrt{1-a^2} dy.$$

Отсюда, обозначив  $u = \int d\varphi/g$ , общий интеграл можно представить системой уравнений:

$$u = ax + \sqrt{1-a^2} y + b(a); \quad (234)$$

$$\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial a} = 0.$$

Поскольку произвольная функция  $b(a)$  неопределенна, было предложено определять меридианы как ортогональные линии к семейству параллелей, определяемых уравнением (232), для чего

достаточно продифференцировать уравнение (234) по параметру  $a$  и результат дифференцирования приравнять некоторой новой постоянной.

Тогда

$$x = - \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} y = f(a).$$

Получаем семейство прямых с одним параметром  $a$ . При этом параллели являются равноотстоящими кривыми.

Во втором методе Н. А. Урмаев, введя обозначение  $\varphi_x = u_x g$  и  $u_y = u_y g$ , представил уравнение (232) в виде

$$u_x^2 + u_y^2 = 1.$$

Отсюда

$$u_x = \cos \tau; \quad u_y = -\sin \tau$$

или, введя обозначение  $t = \operatorname{tg} \tau$ ,

$$u_x = 1/\sqrt{1+t^2}; \quad u_y = -t/\sqrt{1+t^2},$$

где  $\tau$  — угол, образованный нормалью к параллели и осью  $X$ .

Дифференцируя первую формулу по  $y$ , а вторую по  $x$ , получим

$$t_x - t t_y = 0, \tag{235}$$

т. е. интегрирование нелинейного уравнения (232) было сведено к интегрированию линейного уравнения в частных производных первого порядка (235).

Составив систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx = -dy/t = dt/0,$$

найдем первый интеграл  $t = c_1$ .

Подставив полученное значение в формулу  $dx$ , находим второй и общий интегралы

$$y + tx = c_2; \quad y + tx = j(t).$$

Таким образом, и в данном методе в картографических проекциях, для которых  $n/p = f(\varphi)$ , параллели являются равноотстоящими кривыми, а ортогональные траектории (меридианы) к ним представляют собой семейство прямых с одним параметром  $t$ .

**Способ получения картографических проекций по заданной кривизне меридианов, параллелей, геодезической линии**

Уравнения кривизны меридианов и параллелей можно записать в виде

$$k_m = \gamma_\varphi / \mu = - \frac{1}{\mu} \left[ (\mu_\lambda \sec \varepsilon + \nu_\varphi \operatorname{tg} \varepsilon) \frac{1}{\nu} + \varepsilon_\varphi \right];$$

$$k_n = (\gamma + \varepsilon)_\lambda / \nu = \frac{1}{\nu} \left[ (\mu_\lambda \operatorname{tg} \varepsilon + \nu_\varphi \sec \varepsilon) \frac{1}{\mu} + \varepsilon_\lambda \right],$$



Средняя кривизна геодезических линий для любых по характеру искажений картографических проекций может быть определена по формуле

$$k_{cp} = \frac{1}{2r} \left[ \sin \varphi \left( \frac{m}{n^2} \sin i - \frac{1 + \cos i}{m \sin i} \right) + \frac{1 + \cos i}{mn \sin i} \left( n_{\varphi} \frac{r}{M} - m_{\lambda} \right) - \frac{i_{\varphi}}{mnM} \right].$$

Используя эти формулы, можно получить группу способов определения проекций в зависимости от заданных свойств.

Рассмотрим два способа определения картографических проекций по заданным их свойствам.

Способ получения проекции с равноотстоящими параллелями, сохраняющей длины вдоль заданной параллели с  $\varphi_0 = 50^\circ$ , был предложен Н. А. Урмаевым\*.

Уравнение

$$k_n = 1/\rho = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots$$

в частном случае примет вид

$$k_n = \frac{1}{a} + \frac{6}{5} \frac{s^2}{a^3}.$$

Учитывая, что  $d\tau/ds = k_n$ , после интегрирования получим

$$\tau = \frac{s}{a} + \frac{2}{5} \left( \frac{s}{a} \right)^3,$$

где  $a = 2R$  (в масштабе 1 : 10 000 000  $a = 127,4223$ );  $s$  — длина дуги параллели.

Приняв для заданной параллели ( $\varphi_0 = 50^\circ$ )  $n = 1$ , Н. А. Урмаев составил таблицу величин  $s$ ,  $k_n$ ,  $\tau$  для точек этой параллели с частотой  $\Delta\lambda$  по долготе.

Используя эти данные и известные соотношения

$$dx/ds = \sin \tau; \quad dy/ds = \cos \tau,$$

определяют численными методами значения интегралов

$$x = \int \sin \tau ds; \quad y = \int \cos \tau ds.$$

В результате получают прямоугольные координаты точек заданной параллели.

Вычисление координат точек остальных параллелей выполняют по формулам

$$x = x_0 + u \cos \tau; \quad y = y_0 - u \sin \tau,$$

где

$$u = R \operatorname{arc} \Delta\lambda; \quad \Delta\lambda = 10^\circ.$$

\* Н. А. Урмаев. — Тр. ЦНИИГАиК. М., Геодиздат, 1956, вып. 98.

Частные масштабы длин по параллели определяют по формуле

$$n = \frac{\cos \Phi_0}{\cos \varphi} [1 - k_n R (\varphi - \Phi_0)],$$

где  $k_n$  — кривизна заданной параллели.

Второй способ — способ получения равноугольных проекций с заданной кривизной изображения меридианов и параллелей.

В равноугольных проекциях

$$k_m = [\ln \mu]'_\lambda / \mu = \left( - \sum_{i=2}^k A_i \tau_i + \sum_{i=1}^k C_i T_i \right) / e^{\left( \sum_{i=0}^k A_i \psi_i + \sum_{i=1}^k C_i \theta_i \right)}; \quad (236)$$

$$k_n = -[\ln \mu]'_q / \mu = - \left( \sum_{i=1}^k A_i T_i + \sum_{i=2}^k C_i \tau_i \right) / e^{\left( \sum_{i=0}^k A_i \psi_i + \sum_{i=1}^k C_i \theta_i \right)}, \quad (237)$$

где  $k_m$ ,  $k_n$  — заданные значения кривизны изображения меридианов и параллелей в точках проекции.

Задача определения проекции сводится к вычислению постоянных коэффициентов уравнения Лапласа (212).

Но найти значения коэффициентов непосредственно из формул (236) и (237) по заданной кривизне меридианов или параллелей трудно, поэтому значения  $A_i$ ,  $C_i$  можно найти методом итерации, используя следующие приближенные формулы:

$$\begin{aligned} 1 + \ln k_m &= - \sum_{i=0}^k A'_i (\psi_i + \tau_i) - \sum_{i=1}^k C'_i (\theta_i - T_i); \\ \Delta \ln k_m &= - \sum_{i=0}^k \Delta A'_i (\psi_i + \tau_i / [\ln \mu]'_\lambda) - \sum_{i=1}^k \Delta C'_i (\theta_i - T_i / [\ln \mu]'_\lambda); \\ 1 + \ln k_n &= - \sum_{i=0}^k A'_i (\psi_i + T_i) - \sum_{i=1}^k C'_i (\theta_i + \tau_i); \end{aligned} \quad (238)$$

$$\begin{aligned} \Delta \ln k_n &= - \sum_{i=0}^k \Delta A'_i (\psi_i + \tau_i / [\ln \mu]'_q) - \\ &- \sum_{i=1}^k \Delta C'_i (\theta_i + T_i / [\ln \mu]'_q). \end{aligned} \quad (239)$$

Последовательность получения равноугольной проекции, например, по заданной кривизне параллелей  $k_n$  будет следующей:

задаем значения кривизны  $k_n$ , составляем и решаем систему уравнений (238) и в результате находим коэффициенты  $A'_i$ ,  $C'_i$  по методу итерации;

используя эти значения, вычисляем производные  $[\ln \mu]'_q$  и по формуле (237) — значения кривизны параллелей  $k'_n$ , а затем

$$\Delta \ln k_n = \ln k_n - \ln k'_n;$$

определяем поправки в коэффициенты  $A'_i, C'_i$  из решения систем (239) и вычисляем уточненные значения коэффициентов

$$A_i = A'_i + \Delta A'_i; \quad C_i = C'_i + \Delta C'_i;$$

используя полученные значения коэффициентов  $A_i$  и  $C_i$ , вновь повторяем все вычисления до тех пор, пока не будет получено  $\Delta \ln k \leq \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  — допустимая величина, определяемая точностью вычислений.

Получив окончательные значения коэффициентов, производим дальнейшие вычисления проекции с использованием известных формул, например (231).

Получение проекций способом аппроксимации эскиза картографической сетки

Задача определения этих проекций решается в два этапа.

На первом, исходя из назначения карт и используя результаты изучения картографических сеток и искажений проекций существующих карт, строят (обычно на миллиметровой бумаге) макет картографической сетки, оптимально удовлетворяющий данному конкретному заданию.

На втором этапе осуществляют сглаживание прямоугольных координат точек пересечения меридианов и параллелей эскиза (как правило, методом коррелат), а затем по этим координатам выполняют аппроксимацию эскиза картографической сетки.

Для этой цели могут быть использованы различные полиномы: при создании карт в проекциях произвольных по характеру искажений — степенные алгебраические полиномы

$$x = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k a_{ij} \varphi^i \lambda^j; \quad y = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k b_{ij} \varphi^i \lambda^j,$$

где  $a_{ij}, b_{ij}$  — постоянные коэффициенты, определяемые по способу наименьших квадратов из решения указанных систем по значениям координат  $x, y, \varphi, \lambda$  точек эскиза;

при создании карт в равноугольных проекциях — гармонические полиномы

$$x = \sum_{i=0}^k a_i \psi_i - \sum_{i=1}^k b_i \theta_i; \quad y = \sum_{i=1}^k a_i \theta_i + \sum_{i=1}^k b_i \psi_i,$$

где по рекуррентным формулам В. П. Морозова

$$\psi_i = q\psi_{i-1} - \lambda\theta_{i-1}; \quad \theta_i = q\theta_{i-1} + \lambda\psi_{i-1};$$

$$\psi_1 = q; \quad \theta_1 = \lambda;$$

$$q = \ln \frac{\operatorname{tg}(45^\circ + \varphi/2)}{\operatorname{tg}^e(45^\circ + \psi/2)};$$

$$\psi = \arcsin(e \sin \varphi).$$

Здесь  $e$  — первый эксцентриситет эллипсоида;  $a_i, b_i$  — постоянные коэффициенты, определяемые аналогично  $a_{ij}, b_{ij}$ .

При создании карт заданного назначения общим формулам придают конкретный вид с учетом поставленных условий изображения полюсов (точкой, отрезками прямой или кривой линий) и характера симметричности картографической сетки относительно линий среднего меридиана и экватора.

## **§ 66. ПРОБЛЕМА ИЗЫСКАНИЯ НАИЛУЧШИХ И ИДЕАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ**

Разработкой этой важнейшей проблемы математической картографии занимались крупнейшие русские ученые П. Л. Чебышев, Д. А. Граве, Н. Я. Цингер, А. А. Марков, В. В. Витковский, советские ученые В. В. Каврайский, Н. А. Урмаев, Л. А. Вахрамеева, Г. А. Мещеряков, Н. А. Виленкин, Л. М. Бугаевский, А. С. Лисичанский, Г. И. Конусова и др.

Наилучшие проекции можно выбрать либо из какой-то их частной совокупности, либо из всего неограниченного множества проекций.

В первом случае необходимо, прежде всего, выяснить, из каких частных совокупностей следует определить наилучшие проекции, какие признаки должны быть приняты за основу при выборе соответствующей совокупности.

С точки зрения обеспечения минимума искажений на картах все наилучшие проекции можно разделить на проекции минимаксного и вариационного типа.

В случае минимаксного типа руководствуются критерием П. Л. Чебышева, согласно которому наилучшей проекцией для заданной территории будет та из них, в которой максимум модуля логарифма масштаба принимает минимальное значение.

В случае вариационного типа определение проекций сводится к решению вариационных задач на условный экстремум. При этом используют критерии, предложенные Эйри, Иорданом, Клингачем, В. В. Каврайским, Г. И. Конусовой и др., позволяющие получить оценку искажений проекции как в отдельной точке, так и во всей изображаемой области.

Однако в картографической практике нередки случаи, когда определяющим фактором выбора картографической проекции является не величина искажений и характер их распределения, а иные факторы или их совокупность. Поэтому, ставя задачу в более широком аспекте, отметим, что наилучшие проекции могут быть двух видов.

1. Наилучшие проекции, обеспечивающие минимум искажений (и наилучшее их распределение): минимаксного или вариационного типов.

2. Наилучшие проекции, обеспечивающие оптимальное выполнение всей совокупности требований к проекциям в соответствии с конкретным назначением создаваемой карты (например, простота сетки и величины искажений и т. п.).

В последнем случае оценка достоинств проекции может осуществляться с использованием обобщенных критериев (гл. XIV).

Перейдем к вопросу об идеальных проекциях. Если говорить только об обеспечении минимума искажений, то в соответствии с определением В. В. Каврайского *идеальными проекциями* можно назвать проекции, получаемые из всего мыслимого их множества, в которых обеспечивается минимум искажений длин в пределах изображаемой области. И в этом случае идеальные проекции могут быть минимаксного и вариационного (среднеквадратического) типов.

Однако, в общем смысле, идеальными проекциями, определяемыми из всего их множества, можно назвать те из них, в которых обеспечивается оптимальное выполнение всех требований, предъявляемых к картографическим проекциям для создания карт конкретного назначения и содержания.

Иначе говоря, если иметь в виду не только обеспечение минимальных искажений на картах, а оптимальное удовлетворение всей совокупности требований, то идеальных проекций, одинаково пригодных для всех случаев практики, не существует.

Чтобы получить наилучшие и идеальные проекции, необходимо, прежде всего:

разработать критерии, позволяющие объективно оценивать достоинства проекций, исходя как из условия обеспечения минимума искажений, так и из оптимального удовлетворения всей совокупности различных по важности требований, которые вытекают из конкретного назначения и содержания создаваемой карты;

решить задачу разработки способов получения наилучших проекций, обеспечивающих минимум искажений или при необходимости оптимальное удовлетворение всей совокупности требований к проекциям.

Из всего многообразия наилучших картографических проекций задача изыскания проекций, обеспечивающих минимум искажений, наиболее полно решена для равноугольных проекций и почти совсем не решена для других по характеру искажений проекций.

Дадим краткий обзор состояния этой проблемы.

### Р а в н о у г о л ь н ы е п р о е к ц и и

Как отмечалось выше, изыскание наилучших равноугольных проекций сводится к получению на основе решения обратной задачи математической картографии проекций П. Л. Чебышева (см. гл. XI), в которых одна из крайних изокл проекции совпадает с контуром картографируемой территории.

Наилучшие равноугольные проекции можно получить и на основе решения прямой задачи математической картографии, например по способам, разработанным Л. А. Вахрамеевой.

### Р а в н о в е л и к и е п р о е к ц и и

Решение задачи изыскания наилучших равновеликих проекций находится в начальной стадии. До сих пор еще отсутствуют работы, в которых было бы дано общее решение этой задачи.

Г. А. Мещеряков рассмотрел частный случай получения наилучших Эйлеровских проекций, т. е. равновеликих проекций с ортогональной картографической сеткой. При этом автор не ставил перед собой задачу определения наилучших Эйлеровских проекций в общем случае, а рассмотрел только вариант определения этих проекций для случая, когда начальные условия были отнесены к прямолинейному среднему (нулевому) меридиану.

Задача решалась на основе метода характеристик с определением оценки модуля логарифма масштаба в произвольной точке области влияния начальных условий Коши, которые были представлены в виде

$$n \big|_{\lambda=0} = f_1(\varphi) \equiv 1; \quad \gamma \big|_{\lambda=0} = f_2(\varphi) \equiv 0.$$

А. С. Лисичанский, используя известное в математической картографии уравнение равновеликих проекций эллипсоида на плоскости

$$x_\varphi y_\lambda - y_\varphi x_\lambda = M r$$

и применяя метод Майера, изложенный в трудах Д. А. Граве и В. В. Витковского, дал дальнейшее развитие этого метода и получил объединенные системы эквивалентных азимутально-цилиндрических и азимутально-конических проекций.

В трудах В. В. Каврайского и Г. А. Мещерякова доказано, что такие проекции еще не являются наилучшими.

**Произвольные проекции, примыкающие к эквивалентным**

Ю. М. Юзефович предложил новый класс картографических проекций, для которых  $m = n^k$ , где  $k$  — постоянная для данного варианта проекции величина.

Для получения этих проекций была рассмотрена основная система Эйлера—Урмаева при условии, что эти проекции являются симметричными относительно среднего меридиана и что в качестве кривой, отражающей начальные условия, принимается средний меридиан.

**Произвольные проекции, примыкающие к равноугольным**

Общего решения этой задачи еще нет. Можно только отметить, что М. А. Топчилов и Ю. М. Юзефович рассмотрели некоторые частные решения задачи получения таких проекций.

**Проекция с ортогональной картографической сеткой**

Г. И. Конусова рассмотрела варианты решения системы уравнений Эйлера—Урмаева, в частности некоторые вопросы определения проекций с ортогональной картографической сеткой на основе ре-

шения дифференциальных уравнений гиперболического, эллиптического и параболического типов, которые могут рассматриваться только как частные случаи общего решения.

Анализ всех известных способов определения наилучших проекций показывает, что в настоящее время наметилось два основных метода решения этой задачи.

В первом из них, использованном при решении задач получения наилучших равноугольных проекций, вначале была сформулирована, а затем доказана теорема об этих проекциях.

Такое решение указало направления исследований, которых надо придерживаться, чтобы разработать практические способы их изыскания. Как известно, Н. А. Урмаеву в 1947 г. впервые удалось разработать первые практические способы вычисления этих проекций.

Во втором использовалась система уравнений Эйлера—Урмаева и задавалась соответствующая доопределяющая система в характеристиках, а затем определялись частные виды наилучших проекций, соответствующие наложенным ограничениям.

Отмечая возможность получения новых видов наилучших проекций этим методом, следует подчеркнуть, что в общем случае решить поставленную задачу таким образом невозможно.

Для решения проблемы изыскания наилучших картографических проекций необходимо сформулировать и доказать теорему о различных по характеру искажений наилучших проекциях, аналогичную теореме П. Л. Чебышева о наилучших равноугольных проекциях, и на этой основе разработать способы их вычисления.

Еще более сложным является решение задачи изыскания наилучших и идеальных проекций, обеспечивающих оптимальное выполнение всей совокупности требований, вытекающих из конкретного назначения и содержания карты.

### **Глава XIII**

## **ОБОСНОВАНИЕ ВЫБОРА ПРОЕКЦИЙ ДЛЯ КОНКРЕТНОГО ЗАДАНИЯ. СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЕКЦИЙ ПО ВИДУ СЕТКИ МЕРИДИАНОВ И ПАРАЛЛЕЛЕЙ**

---

### **§ 67. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ВЫБОРА КАРТОГРАФИЧЕСКОЙ ПРОЕКЦИИ**

При создании любых карт важное значение имеет вопрос о выборе картографических проекций, обеспечивающих оптимальное решение по этим картам различных задач.

Выбор картографических проекций зависит от многих факторов, которые можно разделить на три группы.

К первой отнесем факторы, характеризующие объект картографирования. Это географическое положение изображаемой территории, ее размеры, форма границ (конфигурация), степень показа смежных с картографируемой областью территорий.

Вторая группа включает факторы, характеризующие создаваемую карту, способы и условия ее использования. В эту группу входят назначение и специализация, масштаб и содержание карты, задачи, которые будут решаться по ней (картометрические, навигационные и пр.), и требования к точности их решения, способы использования карты (настольная, настенная), анализа картографической информации (с помощью ЭВМ или без нее), условия работы с картой (отдельно, в комплексе с другими картами, в склейке), условия передачи на них относительных характеристик картографируемых объектов (географического положения одних территорий относительно других, их площадей и форм), требования по отображению коммуникаций и связи территорий и т. п.

К третьей группе отнесем факторы, которые характеризуют получаемую картографическую проекцию. Это ее характер искажений, условия обеспечения минимума искажений и допустимые максимальные искажения длин, углов и площадей, характер их распределения, кривизна изображения геодезической линии, локсодромии, условия изображения других линий положения, стереографичность проекции (степень передачи форм территории), кривизна изображения линий картографической сетки, требования об их ортогональности, обеспечении заданных величин отклонений от прямого угла между изображениями меридианов и параллелей, их равномерности, характер изображения полюсов, условия симметричности картографической сетки относительно среднего меридиана и экватора, условия их изображения (размеры изображения экватора относительно среднего меридиана и полюсов, если они изображаются линиями), условия зрительного восприятия изображения, наличия эффекта сферичности, перекрытий (повторяемости), участков картографического изображения и т. п.

Выбор картографических проекций осуществляется в два этапа: на первом устанавливается совокупность проекций (или их свойства), из которой целесообразно производить их выбор;

на втором определяют искомую проекцию.

Все факторы первой группы, как правило, должны быть твердо заданными. Их учет предполагает, прежде всего, выбор таких проекций, в которых их центральные точки и центральные линии, вблизи которых масштабы мало изменяются, находятся в центре картографируемой территории, а центральные линии расположены, по возможности, по направлению наибольшего протяжения этих территорий.

Поэтому для многих карт выбирают:

цилиндрические проекции — для территорий, расположенных вблизи и симметрично относительно экватора и вытянутых по долготам;

конические проекции — для таких же территорий, но не сим-



метричных относительно экватора или расположенных в средних широтах;

азимутальные проекции — для изображения полярных областей;

поперечные и косые цилиндрические проекции — для изображения территорий, вытянутых вдоль меридианов или вертикалов;

поперечные или косые азимутальные проекции — для показа территорий, очертания которых близки к окружностям, и т. п.

Таким образом, учет факторов этой группы дает возможность предварительно установить совокупность проекций (или их свойств), из которой целесообразно определять искомую проекцию.

Вторая группа факторов является основной при решении поставленной задачи. Именно, исходя из условий этой группы, определяют относительную значимость факторов третьей группы: какие из них являются в конкретном случае наиболее существенными, а какие факторы можно не учитывать. При этом некоторые из требований, например о желаемом характере искажений проекции, максимально допустимых их величинах, изображении полюсов, симметричности или асимметричности картографической сетки, равномерности меридианов и параллелей, наличии перекрывающихся частей изображения и т. п., в определенных случаях подлежат безусловному учету. Это значит, что выбор проекции должен выполняться в данном случае только из совокупности проекций, в которой заданные требования полностью удовлетворяются, например только из равновеликих проекций или только из проекций с ортогональной сеткой и т. п.

Таким образом, факторы, приобретающие в данном конкретном случае безусловную значимость, в дополнение к факторам первой группы позволяют, в основном, решить первую часть задачи — установить совокупность проекций (или их свойств), из состава которой целесообразно определять искомую проекцию.

После выделения всех этих факторов, подлежащих обязательному учету, выполняется ранжирование (иерархия) всех прочих факторов, определяется относительная значимость каждого из них при выборе конкретной проекции.

В настоящее время существуют две основные системы карт: для решения научно-технических задач и для широкого пользования.

Первые предполагают максимально возможную точность и детальность изображения и анализа, достаточно точную локализацию интегральных характеристик на синтетических картах.

При создании карт для широкого потребителя следует иметь в виду многообразие предъявляемых к ним требований, в соответствии с которыми карты могут существенно различаться по детальности, полноте и точности изображения, виду картографической сетки, условиям их зрительного восприятия, наглядности и т. п.

С точки зрения выбора картографических проекций все карты этих двух систем (с определенной степенью условности) можно разделить на пять групп (табл. 9).

Т а б л и ц а 9. Основные характеристики картографических проекций и ориентировочное ранжирование (иерархия)

Системы карт	Группы карт по способам восприятия, оценки и анализа картографической информации	Пределыные величины искажений, влияние которых еще можно не учитывать	Ориентировочная иерархия требований к картографическим проекциям	Ориентировочные масштабы карт и характер искажений проекций
<p>Научно-технические и технические карты</p>	<p>Анализ картографической информации, главным образом с использованием ЭВМ и в меньшей мере на основе ручных картометрических работ</p>	<p>При анализе картографической информации вводят редукции в измеренные величины</p>	<p>Желаемый характер искажений; характер распределения искажений; простота введения редукиций; минимум искажений длин, углов, площадей, кривизны изображения геоэзической и других линий положения (с соответствующим приоритетом тех или иных требований к видам искажений)</p>	<p>1 : 1 000 000 и крупнее: равноугольные проекции; равноугольные проекции; 1 : 2 000 000 — равновеликие, равноугольные и произвольные проекции. Частные масштабы должны быть постоянны (или равны единице) вдоль линий одного направления, изменения масштабов должны происходить главным образом вдоль ортогонального направления</p>
	<p>Анализ картографической информации, главным образом на основе ручных картометрических работ по-</p>	<p>Искажения: длин и площадей до <math>\pm (0,2-0,4) \%</math>; углов до <math>(1/4-1/2)^\circ</math></p>	<p>Желаемый характер искажений: минимум искажений длин, углов, площадей, кривизны изображения линий положе-</p>	<p>1 : 1 000 000 и крупнее: равноугольные проекции 1 : 2 000 000 — равновеликие, произволь-</p>

<p>Карты для широкого пользования</p>	<p>Анализ и использование картографической информации на основе приближенных измерений и зрительной оценки размеров, формы относительного расположения и значимости территории (сюда относятся, например, многие карты в справочных и учебных изданиях, в технических руководствах и пособиях)</p>	<p>Искажения: длин и площадей до <math>\pm (2-3) \%</math>, углов до <math>(2-3)^\circ</math></p>	<p>Желаемый характер искажений; минимум искажений длин, углов, площадей, кривизны изображения линий положения; характер распределения и допустимые величины искажений (с приоритетом тех или иных требований к видам искажений); простота введения редуциций в измеренные величины</p>	<p>ные и равноугольные проекции. Проекция должны принадлежать или быть близкими к так называемым наилучшим. Крайние изоколы равноугольных и близких к ним проекций должны приближаться к контуру изображаемой территории</p>
			<p>Желаемый характер их распределения, допустимые величины искажений (с приоритетом тех или иных требований к видам искажений); простота введения редуциций в измеренные величины</p>	

<p>Системы карт</p>	<p>Группы карт по способам восприятия, оценки и анализа картографической информации</p>	<p>Предельные величины искажений, влияние которых еще можно не учитывать</p>	<p>Ориентировочная иерархия требований к картографическим проекциям</p>	<p>Ориентировочные масштабы карт и характер искажений проекции</p>
<p>Карты для широкого пользования.</p>	<p>Картографическая информация определяется и оценивается преимущественно зрительно, иногда — при помощи очень приближенных измерений (Сюда относятся главным образом настенные карты, некоторые карты в атласах и учебниках, обзорные карты в различных изданиях)</p>	<p>Искажения: длин и площадей до <math>\pm (6-8) \%</math>, углов до <math>(6-8)^\circ</math> (зрительно искажения не ощущаются)</p>	<p>Кривизна изображения меридианов и параллелей, их равномерность и ортогональность; условия изображения полюсов, симметричность сетки, размеры изображения среднего меридиана и экватора; условия зрительного восприятия изображения (эффект сферичности, передача относительности площадей, форм (стереографичность), географического положения территорий, наличие повторяемых участков); характер искажений; минимум искажений длин, углов, площадей; характер их распределения, допустимые величины искажений</p>	<p>1 : 2 000 000—1 : 10 000 000: равновеликие, произвольные, равноугольные проекции; реже масштабы меньше 1 : 10 000 000: произвольные, равноугольные, равноугольные проекции</p>

<p>Картографическая информация воспринимается и оценивается только зрительно, никакие измерения не производятся. (Сюда относятся многие настенные карты, учебные, главным образом школьные карты, ряд обзорных карт в различных изданиях и т. п.)</p>	<p>Искажения: длины и площадей до <math>\pm (10-12) \%</math>, углов до <math>(10-12)^\circ</math> (зрительно искажения мало ощущаются)</p>	<p>Условия зрительного восприятия изображения (эффект сферичности, передача относительности географ. положений территорий, их площадей и форм); наличие повторяемых участков; условия изображения полюсов, симметричность картографической сетки, изображение среднего меридиана и экватора; кривизна изображения линий картографической сетки, их неравномерность и ортогональность; минимум искажений; характер их распределения</p>	<p>Мельче 1 : 10 000 000; произвольные, равноугольные и равноугольные проекции. Реже масштабы 1 : 2 000 000—1 : 10 000 000: равновеликие, произвольные и равноугольные проекции</p>
---	---	--	---

Выбор картографических проекций может осуществляться в автоматическом режиме или традиционными методами, основанными на сравнительном анализе различных картографических проекций, которые могут быть использованы для создания конкретной карты.

Один из вариантов решения данной задачи первым способом с учетом приведенных общих положений рассмотрен в § 71.

При выборе проекций по второму способу, который в настоящее время пока имеет наибольшее распространение, сравнительный анализ картографических проекций осуществляется на основе учета, в значительной мере субъективного, влияния отдельных указанных выше факторов на выбор проекций.

Как уже отмечалось, учет факторов первой группы позволяет установить совокупность проекций, из состава которой целесообразно определять искомую проекцию.

Влияние на решение данной задачи этих факторов возрастает вместе с увеличением размеров изображаемых областей.

Для уменьшения величин искажений и обеспечения лучшего их распределения, особенно при картографировании крупных территорий, стремятся, кроме учета положения центральных точек и линий проекций и их соответствия географическому положению территорий, добиться, чтобы изоколы совпадали со схематизированными очертаниями изображаемых областей.

Точно так же анализируется влияние назначения, содержания (специализация) карты, способа ее использования, анализа картографической информации (с использованием ЭВМ или без нее), формата издания и т. п.

Такой анализ выполняется в каждом конкретном случае создания карты.

Так, например, при создании школьных карт для учеников среднего возраста стремятся, чтобы на рассматриваемых картах картографические сетки были симметричными относительно среднего меридиана и имели равноразделенные или близкие к ним меридианы и параллели при минимальной кривизне последних.

Поскольку школьные карты не предназначены для выполнения по ним измерений, то не предъявляют строгих требований к характеру, величинам и распределению искажений. Желательно, чтобы при зрительном восприятии карты создавался эффект сферичности, а взаимное размещение изображения материков и океанов было традиционным и привычным; районы оконечности Азии располагались вблизи восточной рамки, а материка Америки — вблизи западной рамки листа.

Рассматривая вопрос о выборе проекций для карт, в которых основная картографическая информация отображена способом изолиний, следует иметь в виду назначение, специализацию карт, какие задачи по ним предполагается решать.

В частности, если предполагается выполнение измерений площадей, заключенных между изобарами, изотермами, изогонами и т. п., следует применять равновеликие или близкие к ним проек-

ции. Если же необходимо определять градиенты различных явлений (магнитного склонения, солености воды и т. п.), выполнять интерполирование значений между изолиниями, необходимо применять равноугольные проекции, в которых частные масштабы длин не зависят от направлений.

В тех случаях, когда изображению подлежат крупные по площади области и, следовательно, искажения длин и площадей будут достигать значительных величин, пренебречь которыми невозможно, следует выбирать не те проекции в которых искажения длин минимальны, а те, в которых проще учитывать влияние этих искажений.

При создании мелкомасштабных карт, предназначенных для зрительного восприятия, существенными факторами являются наиболее правильная передача относительности географического расположения территорий, вид картографической сетки, наличие эффекта сферичности и т. п.

Более подробное изложение некоторых из ряда затронутых общих положений выбора картографических проекций при создании карт дано в § 71, а также в Трудах ЦНИИГАиК (М., Геодизиздат, 1957, вып. 110; М., Недра, 1964, вып. 160).

## **§ 68. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОЕКЦИЙ КАРТ ПО ВИДУ СЕТКИ МЕРИДИАНОВ И ПАРАЛЛЕЛЕЙ**

Математическая основа и, в первую очередь, картографическая проекция придает картам одно из важнейших их свойств — свойство измеримости, поэтому умение определять проекции, характер и распределение искажений в пределах карты является важным и существенным процессом при пользовании картами.

Определение проекций карт по виду сетки меридианов и параллелей является довольно сложной задачей. Желательно, чтобы на картах были даны указания о проекциях, в которых они составлены, так как задача определения этих проекций на изданной карте иногда является неразрешимой. Последнее обстоятельство относится к картам крупного масштаба, поскольку чем крупнее масштаб, тем меньше размеры изображаемой территории на листе карты и тем меньше по абсолютной величине искажения всех видов. Величина этих искажений бывает иногда настолько мала (особенно в проекциях, применяемых как многогранные), что они будут неощутимы и перекроются ошибками, вызванными погрешностями графического построения линий сетки и деформацией бумаги.

Задача по определению проекций карт мелких масштабов в большинстве случаев может быть решена при помощи простейших измерений или при помощи вычисления значений частных масштабов в отдельных точках карты.

Для определения класса проекции необходимо сделать предварительное заключение о том, можно ли по внешнему виду картографической сетки без измерений установить, к какому классу

относится данная проекция — к нормальным коническим, цилиндрическим, азимутальным или иным. Зная класс проекции, можно выполнить измерения и установить группу проекции по характеру искажений. Если же при осмотре сетки сразу трудно установить класс проекции, то следует обратиться к измерениям.

Анализ картографической сетки следует начинать с установления вида меридианов и параллелей и определения характера изменения промежутков между параллелями на осевом меридиане и между меридианами на экваторе или средней параллели; затем следует установить ортогональность сетки, ее симметричность и особенности изображения полюса.

При установлении вида меридианов прежде всего следует выяснить, являются ли все они прямыми или только средний меридиан — прямая линия, а остальные — кривые, симметричные относительно среднего. Если меридианы — прямые линии, то нужно определить, параллельны ли они или пересекаются в одной точке. Все эти определения производятся простыми графическими приемами при помощи линейки.

При установлении вида параллелей возникают те же вопросы, причем симметричность параллелей относится в большинстве случаев к прямолинейному экватору; прямолинейные параллели могут быть только параллельными.

В случаях когда меридианы или параллели являются кривыми, прежде всего нужно установить, не окружности ли они. Это исследование выполняется при помощи несложной «номограммы», изготовленной на кальке. Для этого на кальку переносят с исследуемой кривой (на просвет) три точки, расположенные на равных расстояниях друг от друга, и, ведя восковку вдоль кривой, следят, совпадают ли указанные три точки с этой линией на всем ее протяжении; если совпадают, то кривая является окружностью.

Если установлено, что параллели изображаются окружностями, то необходимо выяснить, концентрические ли они. При концентрических окружностях сохраняются равные расстояния между каждой парой смежных параллелей. В отдельных случаях, когда радиусы окружностей невелики и положение их центров легко установить, дуги окружностей можно проверить циркулем.

Форму более сложных кривых (эллипсов, синусоид и др.) устанавливают обычно визуально. Следует отметить, что эти определения не представляют трудностей, особенно если исследователь знаком с картографической практикой, знает традиционно применяющиеся проекции (в соответствии с масштабами карт, географическим положением изображаемых территорий и конфигурацией их границ).

В некоторых случаях полезно устанавливать вид меридианов и параллелей путем измерения координат точек пересечения линий картографической сетки. Эта задача значительно упрощается при наличии средств автоматизации. Возможность опознавания картографических проекций в автоматическом режиме изложена в § 73.



Установление класса проекции по виду и ориентировке сетки меридианов и параллелей является первым этапом решения задачи по определению проекции.

Второй этап — определение группы проекции по характеру искажений в некоторых случаях можно совместить с определением класса, однако в большинстве случаев исследования этого этапа приходится выполнять с проведением измерений по картам. В равноугольных проекциях обязательно сохраняется ортогональность сетки и промежутки между параллелями (альмукантаратами) возрастают от центральной точки или линии к краям карты, но следует помнить, что эти признаки свойственны и некоторым произвольным проекциям, например цилиндрическим, близким по характеру искажений к равноугольным.

В проекциях равновеликих, наоборот, расстояния между параллелями (альмукантаратами) уменьшаются от центральной точки или линии проекции к краям карты.

Отметим, что в произвольных по характеру искажений внешних перспективных и ортографической проекциях эти расстояния уменьшаются быстрее, чем в равновеликих проекциях. При этом за счет быстрого уменьшения расстояний между линиями картографической сетки, изображение приобретает эффект сферичности и перспективы.

В проекциях равнопромежуточных по меридианам (вертикалам) расстояния между параллелями (альмукантаратами) сохраняются без изменений.

Сохраняются расстояния между параллелями также в тех проекциях, в которых не изменяется длина осевого меридиана, например в псевдоцилиндрических.

Если после изучения вида сетки еще нельзя установить, к какой группе по характеру искажений относится данная проекция, то необходимо провести измерения по карте для определения частных масштабов по меридианам и параллелям. Для этого измеряют по возможности наименьший отрезок меридиана, расположенный симметрично относительно некоторой точки или линии карты, и отрезок параллели, начинающийся в той же точке. Затем определяют по таблицам прил. 6 длины соответствующих отрезков меридиана и параллели на земной поверхности по аргументам  $s_m = (s_2 - s_1)$  и  $\varphi_{cp}$  и выполняют вычисление масштабов  $m$  и  $n$  по формулам

$$m = s'_m / (\mu_0 1000) s_m; \quad n = s'_n / (\mu_0 1000) s_n,$$

где  $s'_m$  и  $s'_n$  — измеренные по карте (в мм с точностью до 0,1 мм) отрезки меридиана и параллели;  $s_m$  и  $s_n$  — длины соответствующих отрезков меридиана и параллели на земной поверхности, выбранные из таблиц;  $\mu_0$  — главный масштаб карты.

Если в результате оказалось, что частные масштабы длин  $m = n$  и углы  $\varepsilon = 0$  (искажения  $\omega = 0$ ), то проекция является равноугольной; если  $p = mn \sin i = 1$ , то равновеликой, если же  $m \neq n$  и  $p \neq 1$ , то произвольной.

Т а б л и ц а 10. Определение класса проекций по виду сетки меридианов и параллелей

Параллели	Меридианы								
	прямые			кривые					
	параллельные неравно-разделенные	параллельные равно-разделенные	пучок	эксцентрические окружности	эллипсы	параболы	синусоиды	сложные кривые	
Прямые параллельные		Нормальные цилиндрические			Эллиптические псевдоцилиндрические (Мольвейде, поперечные, ортографические и др.)		Синусоидальные псевдоцилиндрические (Сансона и др.)		
Концентрические окружности			Нормальные конические и азимутальные (перспективно азимутальные)						Псевдоконические и псевдоазимутальные
Эксцентрические окружности				Стереографические и Лагранжа					Поликонические
Эллипсы			Полиазимутальные и гномонические		Косые ортографические и равноазимутальные		Косые перспективные		Поликонические обобщенные
Гиперболы	Поперечные гномонические								
Параболы							Внешние		
Сложные кривые									Полицилиндрические

Определение частных масштабов следует проводить на некотором расстоянии от центральных точек или линий карты.

Точность вычислений при этом можно ограничить сотыми долями единицы.

Для предварительного установления класса проекции можно использовать специальные таблицы. В качестве примера дана табл. 10.

## **Глава XIV**

### **ОСНОВНЫЕ ПРОБЛЕМЫ И НАПРАВЛЕНИЯ АВТОМАТИЗАЦИИ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КАРТОГРАФИИ**

---

Важнейшей проблемой картографической науки и практики на современном этапе является автоматизация картографического производства.

В настоящей главе рассмотрены основные направления и пути решения этой проблемы применительно к задачам математической картографии.

Электронно-вычислительные машины (ЭВМ) и внешние устройства, входящие в состав создаваемых автоматизированных картографических систем, могут быть использованы для решения следующих основных задач математической картографии: вычисление картографических проекций на ЭВМ; преобразование картографических проекций исходных карт в заданные проекции; автоматизированный выбор картографической проекции, обеспечивающий наиболее полное удовлетворение всех требований, предъявляемых к создаваемой карте; изыскание новых картографических проекций в автоматизированном режиме в соответствии с заданными условиями; автоматическое проектирование главного масштаба и компоновки карт; опознавание картографических проекций в автоматическом режиме; автоматическое определение и введение редуциций в измерения по картам с учетом их математической основы; автоматическое построение элементов математической основы.

#### **§ 69. ВЫЧИСЛЕНИЕ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ЭВМ**

Для обеспечения картосоставительских работ картографические проекции вычисляются либо на основе применения ручного труда (пока основной способ), либо с использованием автоматизированных картографических систем.

В первом случае вычисления могут выполняться при помощи настольных вычислительных средств, если количество определяемых точек мало, формулы сравнительно просты и вычисления носят эпизодический характер, или на основе использования ЭВМ, если необходимо определить значительное количество точек, формулы проекций имеют сложный вид и эти работы периодически повторяются.

Во втором случае, при создании карт с использованием автоматизированных систем, вычисления картографических проекций во всех случаях, вне зависимости от количества определяемых точек, сложности формул и т. п., выполняют при помощи ЭВМ.

Задача вычисления картографических проекций на ЭВМ может быть решена двумя способами.

В первом предполагается создание единых методик, алгоритмов и программ, позволяющих определять конкретные классы и варианты проекций как частные случаи общего решения.

Во втором способе для каждого класса и в ряде случаев для отдельных вариантов картографических проекций создаются свои методики, алгоритмы и программы, т. е. последовательно организуется библиотека программ.

Использование единой программы вычисления различных проекций во многих случаях дает существенный экономический эффект, так как исключает необходимость создавать программу работы на ЭВМ для каждого класса или конкретной проекции.

Однако не для всех множеств проекций представляется возможным разработать единые методики, алгоритмы и программы. Использование таких программ нецелесообразно для определения картографических проекций, прямоугольные координаты и характеристики которых часто вычисляются. В этих случаях более эффективно использовать алгоритмы и программы для вычисления отдельных классов или даже конкретных проекций. При этом создаются библиотеки программ проекций.

Остановимся на особенностях способов вычисления картографических проекций на ЭВМ по единым алгоритмам и программам.

При решении этой задачи, прежде всего, возникает вопрос об определении множеств картографических проекций, для которых возможна разработка единых методик, являющихся теоретической основой создания соответствующих алгоритмов и программ.

Не выполняя общего исследования данного вопроса, в качестве примера рассмотрим разработку единых методик, алгоритмов и программ для вычисления на ЭВМ равноугольных и перспективных проекций, а затем вычисление по этим программам любых проекций, исходя из возможности их представления в виде частных случаев рассматриваемых совокупностей проекций.

Рассмотрим вычисление равноугольных и перспективно-азимутальных проекций шара.

Вычисление перспективно-азимутальных проекций по единой методике

Прямоугольные координаты  $(x, y)$ , частные масштабы длин вдоль вертикалов  $(\mu_1)$  и альмукантаратов  $(\mu_2)$  перспективно-азимутальных проекций шара можно вычислить по формулам

$$x = \frac{(D \pm R) R [\sin \varphi \cos \varphi_0 - \cos \varphi \sin \varphi_0 \cos (\lambda - \lambda_0)]}{D \pm R [\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos (\lambda - \lambda_0)]};$$

$$y = \frac{(D \pm R) R \cos \varphi \sin (\lambda - \lambda_0)}{D \pm R [\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos (\lambda - \lambda_0)]};$$
(240)

$$\mu_1 = \frac{(D \pm R) \{D [\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos (\lambda - \lambda_0)] \pm R\}}{\{D \pm R [\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos (\lambda - \lambda_0)]\}^2};$$
(241)

$$\mu_2 = \frac{D \pm R}{D \pm R [\sin \varphi \sin \varphi_0 + \cos \varphi \cos \varphi_0 \cos (\lambda - \lambda_0)]}.$$

Формулы частных масштабов площадей и наибольших искажений углов имеют вид

$$p = \mu_1 \mu_2; \quad \sin (\omega/2) = (\mu_2 - \mu_1) / (\mu_2 + \mu_1).$$

Приведенные формулы позволяют определить все множество перспективно-азимутальных проекций шара.

Если в этих формулах использовать знак «+» (плюс), то получим совокупность перспективно-азимутальных проекций шара с «негативным» изображением.

В зависимости от значений параметра  $D$  будем иметь разнообразные варианты этих проекций: при  $D = 0$  — гномоническую проекцию, в которой ортодромии изображаются прямыми линиями; при  $D = R$  — стереографическую проекцию, являющуюся равноугольной по характеру искажений, в которой окружности конечных размеров на поверхности сферы также изображаются окружностями; при  $D \rightarrow \infty$  — ортографическую проекцию, сохраняющую длины вдоль альмукантаратов; при  $R < D < \infty$  — внешние перспективно-азимутальные проекции с негативным изображением, свойства которых зависят от значения  $D$ .

Если в формулах использовать знак «-» (минус), то получим совокупность перспективно-азимутальных проекций шара с «позитивным» изображением (проекций горизонтальных аэрокосмофотоснимков).

Таким образом, используя формулы (240) и (241), нетрудно составить единые алгоритмы и программу для вычисления любых перспективно-азимутальных проекций шара с «негативным» и «позитивным» изображением как частных случаев единых алгоритма и программы. Достаточно подробно эти варианты проекций рассмотрены в §§ 27, 29.

## Вычисление проекции Чебышева и любых равноугольных проекций по единой методике

Формулы равноугольной проекции Чебышева, ее свойства и достоинства рассмотрены в § 62.

Отметим только еще раз, что при построении проекции Чебышева одна из ее изокол должна совпадать с контуром картографируемой территории. При этом никаких дополнительных условий в отношении формы контура не ставится. Вместе с тем каждая из равноугольных проекций имеет свое, только ей присущее распределение искажений, т. е. изоколы в каждом случае имеют свою определенную форму.

Поэтому для получения различных равноугольных проекций можно принять за контурные линии, на которых задаются постоянные значения частных масштабов, соответствующие изоколы рассматриваемых проекций, и, следовательно, вычисление всех равноугольных проекций выполнять по единым методике, алгоритму и программе, составленным для вычисления проекции Чебышева.

Все различие будет заключаться в подготовке исходной информации, характеризующей конкретную равноугольную проекцию.

Рассмотрим особенности получения различных равноугольных проекций по единому алгоритму.

В равноугольной цилиндрической проекции (проекции Меркатора) изоколы представляют собой прямые линии, совпадающие с параллелями. Искажений нет только на главной параллели с широтой  $\pm \varphi_0$ .

В соответствии с этим задают широту  $\varphi_0$  главной параллели.

Выбрав на этой параллели достаточное количество точек, записывают их геодезические координаты  $\varphi_0 = \text{const}$  и  $\lambda = \text{arc } \lambda^\circ$ , являющиеся исходной информацией для получения проекции Меркатора по алгоритму и программе, составленной для вычисления проекции Чебышева.

Прямоугольные координаты и частные масштабы рассматриваемой проекции можно получить и по-другому. Проф. Н. А. Урмаев показал, что если в уравнении (212) сохранить при вычислениях только коэффициент  $a_0$  (все остальные коэффициенты приравнять нулю), то получим частное решение, представляющее собой проекцию Меркатора.

В равноугольных конических проекциях частные масштабы равны единице на двух или одной главных параллелях, на которых выбирают достаточное количество точек, и записывают их геодезические координаты

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \text{const}; & \lambda &= \text{arc } \lambda^\circ; \\ \varphi_2 &= \text{const}; & \lambda &= \text{arc } \lambda^\circ.\end{aligned}$$

Эти координаты и служат основной исходной информацией для вычисления конической проекции.

Согласно исследованиям проф. Н. А. Урмаева, если при выполнении вычислений по формуле (212) сохранить только первые два коэффициента  $a_0$  и  $a_1$ , то полученное частное решение уравнения Лапласа представит собой равноугольную коническую проекцию.

Изоколы равноугольных азимутальных (стереографических) проекций в нормальной ориентировке совпадают с параллелями, в ко-сой — с альмукантаратами, имеющими форму окружности.

Пусть  $S$ ,  $N$ ,  $O$  — соответственно самые южная, северная и средняя точки изображаемой области. Приняв точку  $O$  за полюс полярной сфероидической системы координат, получим значение  $z$  — зенитного расстояния точки  $N$  (или  $S$ ) с точностью до членов с  $e^4$  по формуле

$$\cos z = t_5 + e^2 \tau (t_5 \sin \varphi_N - \sin \varphi_0),$$

где

$$t_5 = \sin \varphi_N \sin \varphi_0 + \cos \varphi_N \cos \varphi_0 \cos (\lambda_N - \lambda_0);$$

$$\tau = \sin \varphi_N - \sin \varphi_0,$$

$\varphi_0$ ,  $\lambda_0$  — геодезические координаты точки  $O$ .

Теперь, изменяя через заданные интервалы  $\Delta a$  азимуты  $a$  в данной полярной системе, последовательно найдем широты и долготы точек альмукантарата  $z = \text{const}$ .

$$t_0 = [\sin z \cos a \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 (\cos z - e^2)] / (1 - e^2);$$

$$\sin \varphi = t_0 [1 + e'^2 t_0 (\sin \varphi_0 - t_0)]; \quad (242)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \arcsin [t'_1 (1 - e^2 t'_2)],$$

где

$$t'_1 = \sin z \sin a \sec \varphi;$$

$$t'_2 = \sin \varphi (\sin \varphi - \sin \varphi_0);$$

$e^2$ ,  $e'^2$  — квадраты первого и второго эксцентриситетов эллипсоида.

Полученные значения координат  $\varphi$ ,  $\lambda$  в точках альмукантарата  $z = \text{const}$  являются исходными данными для вычисления равноугольной азимутальной (стереографической) проекции по единому алгоритму.

Изоколы проекции Лагранжа представляют собой овалы, близкие по форме к эллипсу. По карте, составленной в равноугольной проекции (стереографической, конической и т. п.), устанавливают эллипс, наилучшим образом приближающийся к контуру изображаемой области. Затем определяют широты и долготы точек данного эллипса либо на основе вычислений, либо путем их непосредственного измерения по карте. Координаты  $\varphi$ ,  $\lambda$  точек граничного эллипса и будут искомой исходной информацией.

Получаемая по единому алгоритму проекция может быть названа обобщенной проекцией Лагранжа, так как постоянные параметры в данном случае будут определяться не по виду изоколы вблизи центральной точки этой проекции, а по точкам граничной изоколы.

## § 70. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ ИСХОДНЫХ КАРТ В ЗАДАННЫЕ ПРОЕКЦИИ

Эта задача возникает во многих случаях создания карт и выполнения по ним различных исследований.

Пусть уравнения проекции исходной карты

$$x = f_1(\varphi, \lambda); \quad y = f_2(\varphi, \lambda); \quad (243)$$

уравнения проекции создаваемой карты

$$X = F_1(\varphi, \lambda); \quad Y = F_2(\varphi, \lambda). \quad (244)$$

Из уравнений (243)

$$\varphi = f_3(x, y); \quad \lambda = f_4(x, y). \quad (245)$$

Подставив выражение (245) в (244), найдем

$$X = F_1[f_3(x, y), f_4(x, y)] = \Phi_1(x, y); \quad (246)$$

$$Y = F_2[f_3(x, y), f_4(x, y)] = \Phi_2(x, y).$$

Из этих уравнений следует, что существует два основных способа преобразования картографических проекций.

Первый, предполагающий предварительное определение географических координат по прямоугольным, имеет ряд преимуществ по сравнению со вторым, выражаемым уравнениями (246), так как свободен от всяких ограничений.

Во втором способе, в котором устанавливается непосредственная связь прямоугольных систем координат, для осуществления преобразований, как правило, используются различного вида полиномы.

При этом возникают ограничения, связанные с различиями в характере искажений рассматриваемых проекций, в отображении географических полюсов и характера симметричности картографических сеток относительно среднего меридиана и экватора.

Эти способы обеспечивают необходимую точность преобразований в пределах локальных участков, но не позволяют осуществить общее преобразование в пределах всей карты.

Создание приборов, решающих задачу преобразования картографического изображения без ограничений, а также автоматизированных картографических систем требует разработки способов общего преобразования картографических проекций, т. е. способов строгого аналитического решения данной задачи.

Рассмотрим оба указанных способа.

### Аналитическое преобразование картографических проекций

Данный способ предусматривает использование аналитических комплексов, включающих ЭВМ и внешние устройства ввода и вывода изображения, а также разработку соответствующих методик, алгоритмов и программ, обеспечивающих строгое решение данной задачи.



Поскольку формулы проекций (244), в которых создаются карты, известны, то задача преобразования заключается в том, чтобы найти геодезические координаты (245) точек исходной проекции по их прямоугольным координатам, а затем в соответствии с составленными алгоритмами (программами) вычислить координаты получаемой проекции.

Приведем без вывода строгие формулы для определения геодезических координат точек по их прямоугольным координатам для большинства из наиболее широко использующихся проекций эллипсоида.

Как будет показано ниже, в большинстве случаев исходными величинами для определения искомых геодезических координат являются либо изометрические широты  $q = \ln U$ , либо длины дуг меридианов  $s$  от экватора до заданных параллелей.

### Р а в н о у г о л ь н а я   ц и л и н д р и ч е с к а я п р о е к ц и я   М е р к а т о р а

Исходя из формул прямоугольных координат этой проекции, получим долготы точек и изометрические широты

$$\lambda = y_0/r_0; \quad q = \ln U = x/r_0,$$

где  $x, y$  — прямоугольные координаты точек проекции;  $r_0$  — радиус кривизны заданной параллели с широтой  $\varphi_0$ .

Обозначим

$$\sin \varphi' = \operatorname{th} q = (e^q - e^{-q}) / (e^q + e^{-q}) = (U^2 - 1) / (U^2 + 1), \quad (247)$$

где

$$U = \operatorname{tg}(45^\circ + \varphi/2) / \operatorname{tg}^{\epsilon_3}(45^\circ + \psi/2);$$

$$\psi = \arcsin(e_3 \sin \varphi); \quad e_3^2 = (a^2 - b^2) / a^2,$$

$a, b$  — полуоси эллипсоида вращения,  $e$  — основание натуральных логарифмов,  $e_3$  — первый эксцентриситет эллипсоида.

Разложив в ряд Тейлора формулу изометрической широты  $\ln U$ , получим

$$\begin{aligned} \varphi = & \varphi' + c_2 \sin 2\varphi' + c_4 \sin 4\varphi' + c_6 \sin 6\varphi' + \\ & + c_8 \sin 8\varphi' + \dots, \end{aligned} \quad (248)$$

где  $c_2, c_4, c_6, c_8$  — постоянные коэффициенты,

$$c_2 = \frac{e^2}{2} + \frac{5}{24} e^4 + \frac{e^6}{12} + \frac{13}{360} e^8 + \dots;$$

$$c_4 = \frac{7}{48} e^4 + \frac{29}{240} e^6 + \frac{811}{11520} e^8 + \dots; \quad (249)$$

$$c_6 = \frac{7}{120} e^6 + \frac{81}{1120} e^8 + \dots;$$

$$c_8 = \frac{4279}{161280} e^8 + \dots$$

Учитывая эти формулы, можно записать

$$\sin \varphi = \sin \varphi' (b_0 + b_2 \cos 2\varphi' + b_4 \cos 4\varphi' + \dots), \quad (250)$$

где

$$b_0 = 1 + \frac{e^2}{2} + \frac{21}{96} e^4 + \frac{115}{480} e^6 + \dots; \quad (251)$$

$$b_2 = \frac{e^2}{2} + \frac{10}{24} e^4 + \frac{7}{64} e^6 + \dots;$$

$$b_4 = \frac{7}{192} e^4 + \frac{237}{960} e^6 + \dots$$

### Равноугольная коническая проекция

Используя формулы прямоугольных координат этой проекции, запишем

$$\lambda = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} [y/(\rho_{ю} - x)]; \quad (252)$$

$$q = \ln U = \frac{1}{\alpha} \ln (c/\sqrt{(\rho_{ю} - x)^2 + y^2}) \quad (253)$$

или

$$U = (c/\sqrt{(\rho_{ю} - x)^2 + y^2})^{1/\alpha}, \quad (254)$$

где  $\alpha$ ,  $c$  — параметры проекции,  $\rho_{ю}$  — полярное расстояние южной параллели картографируемой территории.

Вычислив с учетом формул (253) или (254) значения  $\sin \varphi'$  по (247), определяем широты искомых точек по (248), (249) или (250), (251).

Долготы точек находим по формуле (252).

### Равноугольная проекция Лагранжа

Исходя из формул прямоугольных координат этой проекции, получим долготы искомых точек и изометрические широты

$$\lambda = \frac{1}{\alpha} \arcsin \left\{ \frac{2ky}{[(x^2 - k^2) + y^2 (y^2 + 2x^2 + 2k^2)]^{1/2}} \right\}; \quad (255)$$

$$q = \ln U = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{(x+k)^2 + y^2}{(x-k)^2 + y^2} - \ln \beta \right] \quad (256)$$

или

$$U = \left[ \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{(x+k)^2 + y^2}{(x-k)^2 + y^2}} \right]^{1/\alpha}, \quad (257)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $k$  — параметры проекции.

С учетом выражения (256) или (257), найдя значения  $\sin \varphi'$  по (247), определяем широты  $\varphi$  точек по формулам (248), (249) или (250), (251).

**С т е р е о г р а ф и ч е с к а я п р о е к ц и я ш а р а**  
Для этой проекции

$$z = 2 \operatorname{arctg} \left[ \frac{1}{2R \cos^2(z_k/2)} (x^2 + y^2)^{1/2} \right]; \quad a = \operatorname{arctg} \frac{y}{x};$$

$$\varphi = \arcsin(\sin z \cos a \cos \varphi_0 + \cos z \sin \varphi_0);$$

$$\lambda = \lambda_0 + \arcsin(\sin z \sin a \sec \varphi),$$

где  $z$ ,  $a$  — полярные сферические координаты с полюсом в заданной точке  $(\varphi_0, \lambda_0)$ ;  $z_k$  — зенитное расстояние альмукуantarата, на котором частные масштабы равны единице;  $R$  — радиус шара. Часто принимают

$$R = \sqrt{M_0 N_0} = a(1 - e^2)^{1/2} / (1 - e^2 \sin^2 \varphi_0).$$

**Р а в н о у г о л ь н а я а з и м у т а л ь н а я п р о е к ц и я**  
**э л л и п с о и д а**

Для этой проекции параметр  $\alpha = 1$ .

Геодезические координаты точек могут быть определены: при изображении только полярных областей по формулам (252) — (254); при изображении любых областей, кроме полярных, по формулам (255) — (257).

**Р а в н о у г о л ь н а я п р о е к ц и я Г а у с с а — К р ю г е р а**

Применительно к эллипсоиду Красовского формулам для определения геодезических координат можно придать следующий вид:

$$\varphi = \varphi_x + \{[(a_{28} - a_{26}) z'^2 + a_{24}] z'^2 - 1\} z'^2 a_{22};$$

$$l = \lambda - \lambda_0 = \{[(b_{17} z'^2 + b_{15}) z'^2 + b_{13}] z'^2 + 1\} z',$$

где

$$\varphi_x = [(2\ 382 \cos^2 \beta + 293\ 609) \cos^2 \beta + 50\ 221\ 747] \times$$

$$\times \sin \beta \cos \beta 10^{-10} + \beta;$$

$$N_x = [(0,605 \sin^2 \varphi_x + 107,155) \sin^2 \varphi_x + 21\ 346,142] \times$$

$$\times \sin^2 \varphi_x + 6\ 378\ 245;$$

$$a_{22} = (0,003\ 369\ 263 \cos^2 \varphi_x + 0,5) \sin \varphi_x \cos \varphi_x;$$

$$a_{24} = [0,005\ 615\ 4 - 0,000\ 015\ 1 \cos^2 \varphi_x] \cos^2 \varphi_x + 0,161\ 612\ 8] \times$$

$$\times \cos^2 \varphi_x + 0,25;$$

$$a_{26} = [(0,003\ 89 \cos^2 \varphi_x + 0,043\ 10) \cos^2 \varphi_x - 0,001\ 68] \cos^2 \varphi_x + 0,125;$$

$$\begin{aligned}
 a_{28} &= [(0,013 \cos^2 \varphi_x + 0,008) \cos^2 \varphi_x - 0,031] \cos^2 \varphi_x + 0,078; \\
 b_{13} &= (0,166\,666\,67 - 0,001\,123\,09 \cos^2 \varphi_x) \cos^2 \varphi_x - 0,333\,333\,33; \\
 b_{15} &= [(0,008\,783 - 0,000\,112 \cos^2 \varphi_x) \cos^2 \varphi_x - 0,166\,667] \times \\
 &\quad \times \cos^2 \varphi_x + 0,2; \\
 b_{17} &= (0,1667 - 0,0361 \cos^2 \varphi_x) \cos^2 \varphi_x - 0,1429; \\
 \beta &= x/636\,755\,8,497; \quad z' = y/N_x \cos \varphi_x.
 \end{aligned}$$

Точность вычисления геодезических координат (при разности долгот  $l = 9^\circ$ ) составляет  $0,0001''$ .

Р а в н о у г о л ь н а я п о п е р е ч н о -  
 ц и л и н д р и ч е с к а я п р о е к ц и я ( ш а р а )  
 Г а у с с а — Л а м б е р т а

Из формул прямоугольных координат получаем

$$\varphi = \arctg \left[ 2e^{y/R} \operatorname{tg} \frac{x}{R} / T \right]; \quad \lambda = \arccos \left[ 2e^{y/R} / T \right],$$

где

$$T = [(1 + e^{2y/R})^2 + (1 - e^{2y/R})^2 \operatorname{tg}^2(x/R)]^{1,2},$$

$R$  — радиус шара (во многих случаях принимают  $R = \sqrt{M_0 N_0}$ ).

Р а в н о п р о м е ж у т о ч н а я в д о л ь м е р и д и а н о в  
 ц и л и н д р и ч е с к а я п р о е к ц и я э л л и п с о и д а

В этой проекции долготы точек и длины дуг меридианов от экватора по данной параллели определяют по формулам

$$\begin{aligned}
 \lambda &= y/r_0; \quad s = x; \\
 s &= \frac{a}{1+n'} \left[ \left( 1 + \frac{n'^2}{4} + \frac{n'^4}{64} + \dots \right) \varphi - \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{3}{2} n' - \frac{3}{16} n'^3 + \dots \right) \sin 2\varphi + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{15}{16} n'^2 - \frac{15}{64} n'^4 + \dots \right) \sin 4\varphi - \right. \\
 &\quad \left. - \left( \frac{35}{48} n'^3 + \dots \right) \sin 6\varphi + \dots \right], \quad (258)
 \end{aligned}$$

где  $r_0 = N_0 \cos \varphi_0$  — радиус кривизны параллели с заданной широтой  $\varphi_0$ ;  $a, b$  — полуоси эллипсоида вращения;  $n' = (a-b)/(a+b)$ .

При обращении выражения (258) применительно к эллипсоиду Красовского получим

$$\begin{aligned}
 \varphi &= \tau + 10^{-10} \{ 50\,221\,746 + [293\,622 + (2\,350 + 22 \cos^2 \tau) \cos^2 \tau] \times \\
 &\quad \times \cos^2 \tau \} \sin \tau \cos \tau, \quad (259)
 \end{aligned}$$

где

$$\tau = \frac{s}{R} \rho; \quad R = \frac{a}{1+n'} \left( 1 + \frac{n'^2}{4} + \frac{n'^4}{64} + \dots \right) = 6\,367\,558,496\,9 \text{ м}, \quad (260)$$

$\rho$  — в минутах.

Для равнопромежуточной вдоль вертикалов поперечно-цилиндрической проекции шара (проекция Кассини-Зольднера)

$$\varphi = \arccos \{ \cos(x/R) [1 + \operatorname{tg}^2(x/R) \sin^2(y/R)]^{1/2} \};$$

$$\lambda = \arcsin \left\{ \frac{\sin(y/R) \sec(x/R)}{[1 + \operatorname{tg}^2(x/R) \sin^2(y/R)]^{1/2}} \right\},$$

где  $R$  — вычисляется по формуле (260).

Равнопромежуточные вдоль меридианов конические проекции эллипсоида

Исходя из формул этой проекции получаем долготы ( $\lambda$ ) точек проекций и длины дуг меридианов ( $s$ ) от экватора до данной параллели

$$\lambda = \frac{1}{\alpha} \operatorname{arctg} [y/(\rho_{\text{ю}} - x)]; \quad s = c - \sqrt{y^2 + (\rho_{\text{ю}} - x)^2}, \quad (261)$$

где  $\alpha$ ,  $c$  — параметры проекции,  $\rho_{\text{ю}}$  — полярное расстояние южной параллели.

Используя значения  $s$ , вычисленные по формуле (261), определяем по (260) значения  $\tau$  и затем из выражения (259) широты искоемых точек.

Равнопромежуточные вдоль меридианов (вертикалов) азимутальные проекции шара

В этой проекции

$$z = \frac{1}{R} (x^2 + y^2)^{1/2}; \quad a = \operatorname{arctg} (y/x),$$

где

$$R = \frac{a}{1+n'} \left( 1 + \frac{n'^2}{4} + \frac{n'^4}{64} + \dots \right).$$

Для эллипсоида Красовского  $R = 6\,367\,558,496\,9$  м.

Используя значения ( $z$ ,  $a$ ), находим широты и долготы точек проекции по формулам (242).

Равнопромежуточная вдоль меридианов азимутальная проекция эллипсоида

Для этой проекции справедливы формулы (261) и методика, рассмотренная для вычисления равнопромежуточной конической проекции, но при условии, что постоянная  $\alpha = 1$ .

## Псевдоцилиндрическая трапециевидная проекция

Из формул прямоугольных координат находим

$$\lambda = y/a_1(a_2 - x); \quad s = x/k,$$

где  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $k$  — параметры проекции.

Используя значения  $s$ , определяем по формуле (260) значения  $\tau$  и по (259) широты  $\varphi$  точек.

## Псевдоконическая равновеликая проекция Бонна

Для этой проекции

$$\lambda = \operatorname{arctg} [y/(\rho_{ю} - x)] \cdot [\sqrt{(\rho_{ю} - x)^2 + y^2} / N \cos \varphi]; \quad (262)$$

$$s = s_0 + N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0 - \sqrt{(\rho_{ю} - x)^2 + y^2}, \quad (263)$$

где  $\rho_{ю}$ ,  $\varphi_0$  заданы.

Получив значения  $s$ , находим по формуле (260) величины  $\tau$  и по (259) широты  $\varphi$  искомых точек. После этого по (262) определяем долготы точек.

## Простая поликоническая проекция

Преобразуем прямоугольные координаты  $x_n$ ,  $y_n$  простой поликонической проекции в координаты проекции Гаусса—Крюгера

$$x_r = x_n + \frac{z'^4}{24} a \sin \nu \cos \nu [\alpha_0 + (\alpha_2 + \alpha_4 \sin^2 \nu) \sin^2 \nu] + \dots;$$

$$y_r = y_n + \frac{z'^3}{6} a \cos^3 \nu \left[ \beta_0 + \beta_1 \sin^2 \nu + \frac{z'^2}{20} (5 - \sin^2 \nu) + \right. \\ \left. + \frac{e'^2}{4} (133 - 115 \sin^2 \nu) \right],$$

где

$$z' = \frac{y_n}{a \cos \nu}; \quad \nu = \frac{x_n}{R} \rho;$$

$a$  — большая полуось эллипсоида,  $R = 6\,367\,558,5$  (для эллипсоида Красовского),  $\rho$  — радиан (в мин).

Используя  $x_r$ ,  $y_r$ , вычисляем геодезические координаты точек по формулам проекции Гаусса—Крюгера.

В заключение отметим следующее. Библиотека программ для решения задачи аналитического преобразования картографических проекций должна обеспечивать, в зависимости от наличия исходной информации, возможность вычисления геодезических координат точек поверхности эллипсоида по прямоугольным координатам проекций и наоборот.

При использовании для преобразований в качестве исходных прямоугольных координат, измеренных по тиражным оттискам карт, необходимо ввести в них поправки за деформацию бумаги, поворот и смещение плоских систем координат. Эти поправки могут быть определены на основе использования аппроксимирующих зависимостей, в частности путем установления аффинного соответствия.

### Способы преобразования картографических проекций на основе использования полиномов

Составим обобщенный полином, включающий в качестве составных частей гармонический и степенной алгебраический полиномы,

$$T = \sum_{i=0}^{k_1} a_i \psi_i - \sum_{i=1}^{k_1} a'_i \theta_i + \sum_{i=0}^{k_2} \sum_{j=0}^{k_2} a''_{ij} \xi^i \eta^j + v; \quad (264)$$

$$Q = \sum_{i=1}^{k_1} a_i \theta_i + \sum_{i=1}^{k_1} a'_i \psi_i + \sum_{i=0}^{k_3} \sum_{j=0}^{k_3} a'''_{ij} \xi^i \eta^j + v.$$

Здесь  $v$  — члены, отличающие полиномы от функциональных зависимостей;  $\psi_i$ ,  $\theta_i$  — члены полиномов, определяемые по формулам

$$\psi_i = \xi \psi_{i-1} - \eta \theta_{i-1}; \quad \theta_i = \xi \theta_{i-1} + \eta \psi_{i-1};$$

$$\psi_1 = \xi; \quad \theta_1 = \eta;$$

$T$ ,  $Q$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  принимают различные значения в зависимости от решаемых задач

$$T = \frac{1}{\mu_1} X \quad \text{или} \quad T = \frac{1}{\mu_1} \varphi, \quad \text{или} \quad T = \frac{1}{\mu_1} q;$$

$$Q = \frac{1}{\mu_2} Y \quad \text{или} \quad Q = \frac{1}{\mu_2} \lambda;$$

$X$ ,  $Y$ ,  $\varphi$ ,  $\lambda$ ,  $q$  — прямоугольные, геодезические или изометрические координаты получаемой проекции;

$$\xi = \frac{1}{\mu_3} x \quad \text{или} \quad \xi = \frac{1}{\mu_3} \varphi', \quad \text{или} \quad \xi = \frac{1}{\mu_3} q';$$

$$\eta = \frac{1}{\mu_4} y \quad \text{или} \quad \eta = \frac{1}{\mu_4} \lambda';$$

$x$ ,  $y$ ;  $\varphi'$ ,  $\lambda'$ ,  $q'$  — прямоугольные, геодезические или изометрические координаты исходной проекции;  $\mu_1$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$ ,  $\mu_4$  — масштабные коэффициенты, которые выбираются из расчета, чтобы максимальные значения  $T$ ,  $Q$ ,  $\xi$ ,  $\eta$  были не больше единицы. При этом часто полагают, что  $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_0$ ;  $a_i$ ,  $a'_i$ ,  $a''_{ij}$ ,  $a'''_{ij}$  — постоянные коэффициенты, которые определяются по способу наименьших квад-

ратов из решения систем уравнений вида (264), составленных для достаточного количества опорных точек, координаты которых определены в обеих системах координат.

Для вычисления коэффициентов выражение (264) удобно представить в матричной форме

$$\Phi A - L = V, \quad (265)$$

где

$$\Phi = \begin{bmatrix} \psi_0^{(1)} \psi_1^{(1)} \dots \psi_k^{(1)} & -\theta_1^{(1)} - \theta_2^{(1)} \dots - \theta_{k_1}^{(1)} & \xi^{(1)} \eta^{(1)} \dots \xi^{(1)k_2} \eta^{(1)k_2} \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_0^{(n)} \psi_1^{(n)} \dots \psi_k^{(n)} & -\theta_1^{(n)} - \theta_2^{(n)} \dots - \theta_{k_1}^{(n)} & \xi^{(n)} \eta^{(n)} \dots \xi^{(n)k_2} \eta^{(n)k_2} \dots \\ \theta_1^{(1)} \dots \theta_k^{(1)} & \psi_1^{(1)} \psi_2^{(1)} \dots \psi_{k_1}^{(1)} & \xi^{(1)} \eta^{(1)} \dots \xi^{(1)k_2} \eta^{(1)k_2} \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \theta_1^{(n)} \dots \theta_k^{(n)} & \psi_1^{(n)} \psi_2^{(n)} \dots \psi_{k_1}^{(n)} & \xi^{(n)} \eta^{(n)} \dots \xi^{(n)k_2} \eta^{(n)k_2} \dots \end{bmatrix};$$

$$A = {}^t [a_0 a_1 \dots a_{k_1}, a'_1 a'_2 \dots a'_{k_1}, a''_{00} a''_{10} a''_{01} \dots a''_{k_2 k_2}, a'''_{00} a'''_{10} a'''_{01} \dots a'''_{k_2 k_2}];$$

$$L = {}^t [T_1 T_2 T_3 \dots T_n, Q_1 Q_2 \dots Q_n];$$

$$n \geq k_{1/2} + k_2 + 1.$$

Тогда искомые коэффициенты равны

$$A = ({}^t \Phi \Phi)^{-1} {}^t \Phi L,$$

где  ${}^t \Phi$  — транспонированная матрица к матрице  $\Phi$ .

В случае когда преобразование картографических проекций (геодезических координат в прямоугольные или наоборот) осуществляется с помощью аналитических комплексов, представляется возможным осуществлять общее преобразование на основе использования аппроксимирующих зависимостей, например полиномов (264).

При выполнении этих преобразований необходимо учитывать различия проекций по характеру искажений, по виду изображения географических полюсов на картах (точками, отрезками прямых или кривых линий), по характеру симметричности картографической сетки относительно среднего меридиана и экватора.

Так, например, при преобразованиях одних равноугольных проекций в другие или любых проекций в равноугольные следует использовать гармонические полиномы. Поэтому при выполнении этих преобразований следует предположить в выражениях (264), (265), что все коэффициенты  $a''_{ij} = a'''_{ij} = 0$ .

При выполнении преобразований иных по характеру искажений проекций в полиномах сохраняются все виды коэффициентов, од-



нако эти полиномы не обеспечивают строгого учета характера искажений получаемых проекций.

Для проекций, картографическая сетка которых симметрична относительно среднего меридиана, необходимо сохранить в правой части первого выражения (264) члены, четные относительно ординат (долгот) первой проекции, и в правой части второго выражения — нечетные.

Точность преобразований на аналитических комплексах с использованием аппроксимирующих зависимостей будет ниже, чем при использовании соответствующих строгих формул и зависит от многих факторов: количества опорных точек, их взаимного расположения, конкретного вида используемых полиномов, количества сохраняемых в них членов и т. п.

Однако во многих случаях эта точность будет вполне удовлетворять потребности практики, а получаемые математические зависимости и алгоритм преобразования проекций будут проще.

Преобразование проекций с использованием строгих аналитических формул или аппроксимирующих зависимостей выполняют для каркасной сетки точек, выбираемых так, чтобы преобразования в промежутках между ними можно было проводить методом линейного интерполирования.

В тех случаях, когда отсутствуют аналитические комплексы, преобразования проекций (изображений) могут выполняться на основе использования существующей техники: дифференциальных, электронных и оптико-механических трансформаторов, оптических камер, механических устройств и др.

В этом случае общее преобразование, выражаемое формулами (264), заменяется соответствующим частным преобразованием и выполняется последовательно по малым участкам, площади которых устанавливаются из расчета обеспечения заданной точности преобразований.

Например, при использовании фототрансформаторов (типа ФТБ, ФТМ, Seq I и др.) представляется возможным осуществлять следующие преобразования.

Преобразования подобия

$$X = ax; \quad Y = ay.$$

Аффинные преобразования

$$X = a_0 + a_1x + a_2y; \quad Y = b_0 + b_1x + b_2y.$$

Гомографические преобразования

$$X = \frac{a_0 + a_1x + a_2y}{c_0 + c_1x + c_2y}; \quad Y = \frac{b_0 + b_1x + b_2y}{c_0 + c_1x + c_2y}.$$

## § 71. АВТОМАТИЗИРОВАННЫЙ ВЫБОР КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

Автоматизированный выбор картографических проекций в основном осуществляется в соответствии с общими положениями, которые были рассмотрены в § 66.

Определяющее значение при установлении совокупности проекции, из которой следует выбрать конкретную проекцию, имеет группа факторов, характеризующих объект картографирования, и факторы, имеющие безусловное значение для создаваемой карты.

После выделения факторов, подлежащих обязательному учету, выполняется ранжирование значимости (иерархия) остальных факторов. На основе ранжирования формируется обобщенный критерий оценки достоинства картографических проекций, который может быть вариационного или минимаксного типов.

Определим наилучшие проекции вариационного типа. Для этого предварительно запишем частные критерии  $\varepsilon_i$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= a/b - 1; & \varepsilon_2 &= ab - 1; & \varepsilon_3 &= \sqrt{[(a-1)^2 + (b-1)^2]/2}; \\ \varepsilon_4 &= K_{\text{ср}}/K_{\text{срmax}} - 1; & \varepsilon_5 &= \Delta d/\Delta d_{\text{max}} - 1; & \varepsilon_6 &= \Delta K_{\text{м}}/\Delta K_{\text{мmax}} - 1; \\ \varepsilon_7 &= \Delta K_{\text{п}}/\Delta K_{\text{пmax}} - 1; & \varepsilon_8 &= \text{Ст}/\text{Ст}_{\text{max}} - 1; & \varepsilon_9 &= \Delta \varepsilon/\Delta \varepsilon_{\text{max}} - 1 \text{ и др.} \end{aligned}$$

Здесь обозначено:  $a, b$  — экстремальные частные масштабы длин;  $K_{\text{ср}}$  — средняя кривизна геодезической линии (вдоль меридианов и параллелей);  $\Delta d$  — величина, характеризующая отклонение локсодромии от прямой;  $\Delta K_{\text{м}} = K_{\text{м}j} - K'_{\text{м}}$  — разность кривизны меридиана в  $j$ -й точке проекции и заданного ее значения;  $\Delta K_{\text{п}} = K_{\text{п}j} - K_{\text{п}}$  — разность кривизны параллели в  $j$ -й точке проекции и заданного ее значения;  $\text{Ст}$  — величина, характеризующая стереографичность проекции, т. е. степень передачи на ней форм изображаемых территорий;  $\Delta \varepsilon = \varepsilon_j - \varepsilon'$  — разность угла отклонения  $\varepsilon$  в  $j$ -й точке проекции и заданного ее значения. При вычислении этих величин могут быть использованы формулы общей теории картографических проекций.

Каждый из этих частных критериев дает характеристику проекции в каждой ее точке.

Если рассматривать получение или выбор проекции с точки зрения наиболее полного удовлетворения того или иного из указанных критериев, то в целом для данной карты лучшей проекцией будет та, в которой принимает наименьшее значение (в пределах изображаемой области) функционал вида

$$E_i^2 = \frac{1}{S} \int_S \varepsilon_i^2 dS,$$

где  $\varepsilon_i^2$  — указанные выше частные критерии.

Для определения функционалов  $E_i^2$  достаточно разбить изображаемую область на малые участки, в средних точках каждого из них вычислить значения частных критериев  $\varepsilon_i^2$  и найти их средние арифметические значения

$$E_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon_{ik}^2,$$

где  $n$  — количество участков,  $k$  — номера участков, в которых вычислены значения  $\varepsilon_i^2$ .

Теперь запишем обобщенный критерий в виде

$$E_{\text{об}}^2 = \sum_{i=1}^m P_i E_i^2 / \sum_{i=1}^m P_i, \quad (266)$$

где  $P_i$  — веса значимости факторов (частных критериев).

Предлагаемый обобщенный критерий учитывает большинство из возможных требований к картографическим проекциям. При этом они представлены в формализованном виде и в относительных величинах, что дает возможность сопоставить разнообразные требования к проекциям.

В каждом конкретном случае значимость факторов будет меняться и в обобщенный критерий, формируемый для выбора проекции создаваемой карты, будет, как правило, включаться меньшее количество требований. Например, для карт, по которым картографическая информация определяется и оценивается преимущественно визуально, значимость факторов  $P_1, P_2, P_4, P_5, P_9, P_{10}$  может быть принята равной нулю (в отдельных случаях создания карт коэффициенты значимости  $P_9, P_{10}$  могут отличаться от нуля), и обобщенный критерий с измененной соответственно ранжировкой принимает вид

$$E_{\text{об}}^2 = \sum_{i=1}^5 P_i E_i^2 / \sum_{i=1}^5 P_i.$$

Вопрос об объективном определении значимости факторов и их строгой ранжировке при выборе проекций для создания конкретных карт требует дальнейших исследований.

Используя обобщенный критерий, вычисляют для всех картографических проекций установленной совокупности значения  $E_{\text{об}}^2$  и на основе сравнения этих значений определяют проекцию, в которой  $E_{\text{об}}^2$  имеет наименьшее значение.

Эта проекция, как правило, и будет искомой.

Для решения задачи автоматизированного выбора картографических проекций с помощью ЭВМ необходимо:

иметь алгоритмы и программы (их библиотеки) для вычисления картографических проекций, как применявшихся ранее для создания карт, так и не применявшихся, но имеющих определенные достоинства;

задать исходную информацию об объекте картографирования и о факторах, характеризующих создаваемую карту, выделив те из них, которые для данного случая приобретают безусловную значимость, например, заданный характер искажений, ортогональность сетки и т. д., позволяющие однозначно установить совокупность проекций, из состава которой целесообразно выбрать искомую проекцию;

установить коэффициенты значимости оставшихся факторов, характеризующих создаваемую карту, и требования к ее математической основе, условия ранжирования этих факторов и формирования обобщенного критерия оценки достоинств картографических проекций (для решения этой задачи необходимы дальнейшие исследования);

здать в исходной информации сведения о проекциях, которые ранее применялись для создания аналогичных карт и рекомендуемых для этих целей в атласах для выбора картографических проекций;

на основании заданных требований и полученного обобщенного критерия вычислить желаемое значение функционала  $E_0^2$ .

Первый из указанных пунктов выполняют заблаговременно, три последующих задают в исходной информации.

Выбор картографических проекций, как и других элементов математической основы, следует начинать с анализа картографических проекций ранее созданных аналогичных карт. Вычислив для всех вариантов ранее применявшихся проекций значения  $E_{i_{об}}^2$ , используя обобщенный критерий  $E_{об}^2$ , выбирают из них  $\min E_{i_{об}}^2$  и сравнивают с величиной желаемого значения функционала  $E_0^2$ .

Если при этом значение  $\min E_{i_{об}}^2 \leq E_0^2$ , то картографическая проекция, в которой получено  $\min E_{i_{об}}^2$ , и является искомой.

В том случае, когда  $E_{i_{об}}^2 > E_0^2$  (в некоторых случаях, с целью выявления оптимального варианта, и когда  $\min E_{i_{об}}^2 \leq E_0^2$ ), определяют значения  $E_{об}^2$  по формуле (266), установленной для исследования совокупности проекций. Из полученных значений  $E_{об}^2$  выбирают наименьшее и сравнивают его с желаемым значением. Если наименьшее значение больше желаемого, то ни одна рассмотренная картографическая проекция не может в достаточной мере удовлетворить предъявленным требованиям и следует провести изыскания новой проекции. При этом предварительно необходимо выяснить возможность существования подобной проекции (см. § 72).

В случае если анализ показал невозможность получения желаемой проекции, то в качестве искомой принимается та проекция из совокупности, в которой значение  $E_{об}^2 = \min$ .

Для окончательного решения вопроса о выборе проекции может быть построен макет картографической сетки этой проекции с помощью устройств вывода информации (см. § 76).

Построение макета приобретает особое значение, когда в результате указанного анализа получено несколько вариантов проекций, для которых значения функционала близки по своим значениям.

## **§ 72. ИЗЫСКАНИЕ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ В АВТОМАТИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ В СООТВЕТСТВИИ С ЗАДАННЫМИ ТРЕБОВАНИЯМИ**

Автоматическое изыскание картографических проекций непосредственно связано с решением следующих задач:

разработкой общих методов изыскания картографических проекций, в том числе наилучших и идеальных проекций как с точки зрения обеспечения минимума искажений, так и всей совокупности требований к оптимальным проекциям для создания конкретной карты;

разработкой обобщенных критериев оценки достоинств картографических проекций с целью оптимального учета факторов, влияющих на решение указанных задач при создании данной карты;

разработкой методов выделения из всей заданной совокупности требований основных из них, которым должны удовлетворять картографические проекции создаваемых карт, разработкой методов формализации этих требований;

разработкой методики и выполнением анализа возможности существования желаемой проекции, при необходимости — с уточнением пределов требований, которым может удовлетворять желаемая проекция;

разработкой методов непосредственного определения картографической проекции, оптимально удовлетворяющей основным требованиям;

разработкой соответствующих алгоритмов, программ, их библиотек для вычисления различных классов проекций и их вариантов в соответствии с разработанными методами их изыскания.

Важным вопросом для автоматизированного изыскания картографических проекций является подготовка исходных данных, что включает четкое определение всех факторов трех групп, указанных в § 66 и влияющих на выбор картографических проекций.

Прежде всего необходимо дать формализованное описание факторов первой группы, характеризующих объект картографирования, и части факторов второй группы, приобретающих безусловную значимость.

Именно на основе этих факторов, как было сказано выше, устанавливаются основные свойства, которым должна удовлетворять определяемая проекция (выделяется совокупность проекций, из состава которой следует получить искомую проекцию).

Выделив из второй группы факторы, получившие безусловную значимость, осуществляют ранжирование оставшихся факторов этой группы и факторов третьей группы, характеризующих получаемую проекцию, а затем определяют обобщенный критерий оценки достоинств картографических проекций, как было рассмотрено в предыдущих параграфах.

Установив на основании заданных требований и обобщенного критерия желаемое значение функционала  $E_0^2$ , следует убедиться в возможности существования подобной проекции.

Для этого можно воспользоваться методом проф. В. В. Каврайского и аналогиями этого метода.

Предварительно заметим, что для территорий, имеющих очертания в виде окружностей, лучшими проекциями с точки зрения обеспечения минимальных искажений являются азимутальные с полюсом в центре изображаемой области; для территорий значительно вытянутых по долготе (вдоль альмукантаратов), в которых их границы совпадают с параллелями (альмукантаратами), — либо конические, либо цилиндрические проекции, определяемые в соответствующей по ориентировке системе координат.

Пусть, например, изображаемая область имеет форму, близкую к квадрату.

Если из центра территории провести вписанную и описанную окружности, то по формулам соответствующей по характеру искажений проекций можно вычислить для областей, ограниченных вписанной и описанной окружностями, значения частных масштабов и других характеристик проекции и определить величины критериев  $\varepsilon^2$  и затем  $E^2$  для обеих областей.

Тогда для искомой проекции, с точки зрения обеспечения минимума искажений, возможное значение критерия  $E_v^2$  будет находиться в пределах  $E_1^2 < E_v^2 < E_2^2$ , где  $E_1^2$  — определено для области с вписанной окружностью,  $E_2^2$  — для области с описанной окружностью.

Аналогично можно поступить при определении  $E_v^2$ , но с учетом факторов, влияющих не только на возможные величины искажений, но и на другие параметры проекций. Этот вопрос требует исследований.

Можно предложить два способа автоматизированного изыскания картографических проекций.

Первый из них аналогичен рассмотренному способу автоматизированного выбора картографических проекций.

Второй способ является более предпочтительным, так как исходит из возможности получения проекции непосредственно по заданным основным требованиям к картографической проекции для создания конкретной карты.

Как и в первом способе, вначале на основе учета факторов первой группы и части факторов второй группы, получивших безусловную значимость, устанавливают основные исходные данные и свойства, которым должна удовлетворять искомая проекция.

В некоторых случаях эти данные являются вполне достаточными для определения проекции создаваемой карты.

Например, ставится задача изыскания наилучшей равноугольной проекции, обеспечивающей минимум искажений в пределах заданной территории. В этом случае условие равноугольности и факторы первой группы, определяющие географическое расположение и конфигурацию картографируемой территории, обеспечивают однозначное решение — искомая проекция будет являться

проекцией А. Л. Чебышева, получаемой при условии, что на контуре заданной для картографирования территории частный масштаб длин сохраняет постоянное значение.

### **§ 73. ОПОЗНАВАНИЕ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ В АВТОМАТИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ**

При выполнении картометрических работ, решении навигационных задач, проведении различных исследований по картам и т. п. желательно знать, в какой проекции составлена используемая карта.

Опознавание (определение) принятой для составления данной карты проекции включает решение четырех задач:

- установление системы сфероидических (сферических) координат, которая использовалась для вычисления данной проекции;
- определение класса проекции;
- установление характера ее искажений;
- определение параметров проекции.

Решение этих задач возможно только в случае изображения на карте крупных по площади регионов.

На вид картографической сетки большое влияние оказывает система координат, в которой составлена карта: нормальная, косая или поперечная. Наиболее просто опознавание проекций осуществляется в нормальной системе координат.

При решении первой задачи прежде всего следует обратить внимание на изображение географического полюса. Для случая нормальной картографической сетки географический полюс будет показан: в центре изображаемой области — для азимутальных проекций; у северной (южной) рамки — при использовании псевдоконических проекций; не будет показан в пределах карты при использовании прочих проекций.

Если в результате предварительного просмотра было установлено, что карта составлена в нормальной системе координат, то для определения ее класса нет необходимости использовать автоматические средства, достаточно воспользоваться определениями, которые даны в их классификациях.

При решении второй задачи необходимо помнить, что в проекциях с ортогональной нормальной картографической сеткой длины дуг меридианов между смежными параллелями при удалении от своих центральных линий или точек (линий или точек экстремальных масштабов) возрастают для равноугольных (или близких к ним) проекций, уменьшаются — для равновеликих (или близких к ним) проекций, остаются неизменными — для равнопромежуточных вдоль меридианов проекций.

Точное решение задачи определения характера искажений проекции возможно на основе определения частных масштабов длин в узлах картографической сетки проекции, что может быть выполнено методами численного дифференцирования.

Для этого в произвольной системе прямоугольных координат необходимо измерить прямоугольные координаты этих узлов  $\Pi$ ,

используя результаты их измерений отдельно вдоль меридианов и отдельно вдоль параллелей, вычислить частные масштабы длин.

Эта задача может быть решена путем составления для каждой параллели и каждого меридиана интерполяционных таблиц, вычисления производных и затем частных масштабов по известным формулам Ньютона, Стирлинга и др., а также формулам общей теории картографических проекций.

Однако частные производные, а затем частные масштабы длин для любого произвольного узла  $k$  сетки можно (с достаточной точностью) вычислить без составления интерполяционных таблиц, используя формулу

$$f'_t = -[(f_{k+2} - f_{k-2}) - 8(f_{k+1} - f_{k-1})]/12\omega,$$

где  $f_{k-2}$ ,  $f_{k-1}$ ,  $f_{k+1}$ ,  $f_{k+2}$  — значения исходной функции (измеренные величины абсцисс или ординат) соответственно в двух, одной точках раньше точки  $k$  и в одной, двух точках после точки  $k$  (отдельно вдоль меридианов и параллелей);  $\omega$  — интервал аргумента (соответственно по широте или долготе) в радианах между смежными точками.

Найдя таким образом значения производных  $x_\varphi$ ,  $x_\lambda$ ;  $y_\varphi$ ,  $y_\lambda$  в узлах  $k$  картографической сетки, вычисляют частные масштабы длин и площадей, углы между изображениями меридианов и параллелей и другие характеристики в этих точках по формулам общей теории картографических проекций (см. гл. I). Очевидно, что определение частных производных, масштабов и других характеристик проекций целесообразнее выполнять с помощью ЭВМ.

После определения класса и характера искажений опознаваемой проекции (решение третьей задачи) нахождение постоянных параметров без особых трудностей осуществляют, используя формулы данной проекции.

Сложнее решается задача опознавания картографической проекции для случаев, когда при ее вычислении использовались косая или экваториальная системы координат или когда для создания соответствующей карты была применена какая-то производная или другая сложная проекция. В этих случаях данную задачу целесообразно решать с использованием автоматических средств в диалоговом режиме человек — машина с помощью дисплея и пульта управления либо полностью в автоматическом режиме.

При этом выполняют следующие операции:

ввод исходной информации в память ЭВМ (географических и прямоугольных координат узлов картографической сетки и прямоугольных координат географического полюса);

вычисление частных производных, масштабов и других характеристик проекции;

определение геометрической формы изокол;

определение географических координат точки полюса косоугольной или экваториальной системы координат;

определение класса проекции и ее параметров или установле-



ние, при необходимости, аналитических зависимостей между прямоугольными координатами проекции и географическими координатами отображаемой поверхности.

#### § 74. АВТОМАТИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГЛАВНОГО МАСШТАБА И КОМПОНОВОК КАРТ

Главный масштаб карты обуславливает размеры картографического изображения и зависит от многих факторов. Кратко рассмотрим решение этой задачи с учетом только тех из них, которые учитывают геометрические свойства создаваемых карт.

Как известно, изучение и анализ содержания карт могут осуществляться или с использованием автоматических средств, или на основе зрительного восприятия. В последнем случае могут одновременно с той или иной точностью выполняться различные измерения.

Искажения измеренных величин, как и искажения длин, площадей и углов проекции, возрастают по мере удаления участков измерения от центральных точек или линий проекции, по мере увеличения длин измеряемых отрезков, зависят от свойств картографических проекций.\*

Исходя из этого, приведем формулы для следующих двух случаев проектирования главных масштабов.

**О п р е д е л е н и е г л а в н ы х м а с ш т а б о в к а р т с у ч е т о м д о п у с т и м ы х о ш и б о к о п р е д е л е н и я к о о р д и н а т и л и д л и н о т р е з к о в**

Введем обозначения:  $\mu_0$  — главный масштаб,  $m_{\Delta k}$  — средние ошибки в положении на карте контуров и объектов за счет точности составления (главным образом генерализации) и издания (согласно исследованиям различных ученых  $0,5 \leq m_{\Delta k} \leq 1,2$  мм для карт разных масштабов);  $m_k$ ,  $m_s$  — допустимые средние ошибки в определении координат отдельных точек и расстояний между ними по картам (в метрах).

Тогда получим следующие приближенные формулы для определения главных масштабов:

$$\mu_0 = \sqrt{2} m_{\Delta k} / m_s$$

или, приведя числитель (мм) и знаменатель (м) к единой размерности,

$$\mu_0 = m_{\Delta k} / 707 m_s.$$

Эти формулы пригодны для определения главных масштабов при составлении крупномасштабных карт, когда картографируемые территории занимают малые площади, в пределах которых можно пренебречь величинами искажений проекции.

\* На точность измерения влияют также деформация и ошибки при тиражировании карт, которые не будем учитывать, полагая, что эти искажения учтены заблаговременно.

В случаях создания мелкомасштабных карт при выборе главного масштаба необходимо учитывать свойства картографических проекций, что требует выполнения специальных исследований.

### Определение главных масштабов карт с учетом допустимых искажений площадей проекции

Обозначим:  $S$  — минимальная площадка на местности (в  $m^2$ ),  $s$  — соответствующая ей минимальная площадка на карте (в  $mm^2$ ),  $n_0$  — целесообразная нагрузка карты точечными объектами (число объектов на  $100 mm^2$  карты),  $N_0$  — число соответствующих объектов на  $100 m^2$  местности.

Тогда при создании крупномасштабных карт в любых картографических проекциях, когда изображаемые области имеют малые размеры и можно пренебречь искажениями площадей, и при создании мелкомасштабных карт в равновеликих проекциях, в которых отсутствуют искажения площадей, проектирование главного масштаба карты (при отсутствии деформации бумаги и ошибок издания) можно выполнить по формулам

$$\mu_0 = 10^{-3} \sqrt{s/S}; \quad \mu_0 = 10^{-3} \sqrt{n_0/N_0}.$$

Поскольку в картометрических исследованиях наиболее часто используют равноугольные проекции, возникает необходимость проектирования главных масштабов карт, составленных в этих проекциях, но исходя из заданных искажений площадей.

### Проектирование компоновки карты

*Компоновкой карты* называется определение положения рамок карт, основного (внутреннего) содержания и зарамочного оформления, легенд, врезных (дополнительных) карт и графиков относительно картографической сетки, решение вопросов разграфки карты, т. е. ее деление на листы.

Рамкой карты является линия или система параллельных линий. При этом различают внутреннюю и внешние рамки. Внутренняя рамка ограничивает картографическое изображение. На ней могут быть нанесены дополнительные деления на отрезки, соответствующие линейным величинам градусов, минут или их долей. Внешние рамки несут, главным образом, декоративный характер. Рамки могут быть прямоугольные, трапециевидные, эллиптические (овальные) и круглые.

Проектирование компоновки зависит от многих факторов, к числу которых относятся назначение карты, предполагаемое ее содержание; картографическая проекция и главный масштаб создаваемой карты, выбранные, как правило, еще до начала проектирования компоновки карты; условия применения карты (настольная или настенная: многостраничная или однолистная; в склейке на ре-

гион или отдельными листами; в атласе, комплексно или отдельно); условия анализа картографической информации (визуально или с помощью ЭВМ; с применением картометрических или других методов исследования по картам); требования об экономической эффективности (обеспечение заданных размеров карты и ее листов, наиболее полное использование полезной площади печатных форм при ее издании, использование картографической бумаги стандартных размеров, обеспечение изготовления многолистовой карты при минимально возможном количестве листов и т. п.); эстетические требования (зрительная уравновешенность восприятия всей карты, компактность, сочетаемость чтения и восприятия содержания основной и дополнительных карт с учетом их относительного положения и т. п.).

Последовательность проектирования компоновки может быть следующей.

Определяют исходные данные, а именно: устанавливают, с учетом назначения карты и ее содержания, какая территория подлежит картографированию, какие смежные области и коммуникационные связи (крайние точки территории) должны быть на ней показаны; какие и сколько желательно показать на карте дополнительных (врезных) карт (обычно их должно быть не более двух-трех); уточняют требования по обеспечению эффективности создания карты: желательные размеры всей карты, размеры отдельных листов, данные по зарамочному оформлению и т. п. Эти задачи решаются, как правило, одновременно с выбором главного масштаба карты.

Вычисляют, используя формулы и программы (ранее выбранные) картографической проекции, координаты угловых (крайних) точек основной карты, координаты разреженной картографической сетки. При этом за величину среднего меридиана создаваемой карты вначале принимают среднее арифметическое из значений долгот самых крайних (восточных и западных) точек изображаемой области.

На основе выполненных вычислений устанавливают области наибольших искажений, положение и возможную площадь врезных карт, целесообразный их масштаб, а также примерные координаты угловых точек этих врезных карт и графиков.

Строят с использованием устройств вывода изображения по полученным координатам макет компоновки, на котором указывают рамки карты, положение врезных карт, графиков, легенд, зарамочного оформления или выводят эти элементы на дисплей системы. По этой основе выясняют соответствие компоновки заданным условиям. Если при этом не соблюдаются отмеченные выше требования, то вносятся изменения в компоновку карты.

Уточняют долготу среднего меридиана. При этом обращается внимание на следующие вопросы: обеспечивается ли в пределах заданного формата карты возможность размещения всего содержания карты, в какой мере меняется ориентировка карты относительно севера (это положение особенно важно для настенных карт); насколько существенно увеличиваются искажения проекции на

участках карты, для которых возросли разности долгот из-за изменения положения среднего меридиана.

Если внесенные изменения не дали желаемых результатов, то исследуется вопрос о возможности изменения формата создаваемой карты. Если такое изменение допустимо, то одновременно решается вопрос о долготе среднего меридиана, чтобы обеспечить желаемую ориентировку карты относительно севера и минимум искажений.

В случае когда недопустимы изменения формата карты (например при компоновке атласных карт), исследуется вопрос о возможности изменения главного масштаба карты в допустимых пределах и с учетом обеспечения возможной преемственности и согласованности (кратности) масштабов однотипных карт, обеспечения системы масштабов карт атласов, уменьшения их разнообразия в собраниях карт и т. п.

При сравнительном анализе вариантов компоновки, выведенных на дисплей или представленных в графической форме, одновременно решается вопрос о возможности изменения коммуникационных связей изображаемых территорий, перекрытий изображения, уменьшения показа сопредельных территорий, площади рамочного оформления, но без существенного нарушения требований об изображении важных в географическом или других отношениях объектов или явлений, вытекающих из назначения карты.

Замена или видоизменение картографической проекции в процессе проектирования компоновки карты относится к числу наименее желательных изменений, так как выбор проекции осуществляется еще до решения задач установления компоновки с учетом многих факторов, влияющих на создание оптимальных условий решения практических задач по карте данного назначения, например, анализа картографической информации, выполнения картометрических работ и т. п.

Важным вопросом проектирования компоновки карты является решение вопросов ее разграфки.

Наиболее известны три системы деления карты на листы: по линиям картографической сетки, по линиям координатной сетки, по линиям, параллельным и перпендикулярным к среднему меридиану.

Первая система нашла широкое использование при создании топографических и обзорно-топографических карт. Рамками листов в них служат линии меридианов и параллелей.

Вторая система применяется сравнительно редко.

Третья система, в которой рамки представляют собою прямоугольники, широко используется при создании различных мелко-масштабных карт — так называемая прямоугольная разграфка.

При делении карты на листы стремятся выбрать такие их размеры, чтобы этих листов было по возможности меньше, чтобы их размеры наилучшим образом соответствовали полезной площади печатных форм и стандартным размерам листов бумаги и чтобы линии рамок отдельных листов не пересекали важных с точки зрения назначения карты объектов.

Все эти вопросы удобно решать путём вывода изображения на экран дисплея.

В случаях когда рамки имеют форму окружности или различного вида овалов, карты, как правило, издаются на одном листе.

#### **§ 75. АВТОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ВВЕДЕНИЕ РЕДУКЦИЙ В РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ ПО КАРТАМ С УЧЕТОМ ИХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОСНОВЫ**

Количественные характеристики находят по картам, главным образом на основе выполнения картометрических работ.

Применение этого метода позволяет определить по картам следующие величины: координаты точек, длины линий и расстояния между точками, азимуты и дирекционные углы направлений, площади плоских и выпуклых (вогнутых) участков, объемы горных или иных массивов, углы наклонов скатов и т. п.

Картометрические работы могут выполняться по крупномасштабным и мелкомасштабным картам, с помощью ручных средств и в автоматическом режиме.

Результаты картометрических измерений могут быть основой для аналитического определения различных количественных характеристик и используются в качестве конечных показателей или уточняются путем введения в эти результаты различных редукций (поправок).

В настоящем параграфе рассмотрим вопрос использования мелкомасштабных карт при определении и введении редукций.

**Измерение координат точек и их использование для аналитического решения картометрических задач**

Прямоугольные координаты точек можно измерять по любой мелкомасштабной карте с точностью, зависящей от точности изображения объектов на этих картах и точности измерений.

В автоматическом режиме прямоугольные координаты точек измеряют, используя метод сканирования или метод прослеживания линейных объектов. Прямоугольные координаты объектов, заблаговременно маркированных на карте, определяют по специальной программе.

Следует отметить, что в автоматическом режиме могут определяться и географические координаты. Однако точность таких определений ниже, чем при определении прямоугольных координат.

Для повышения точности определения географических координат можно использовать два способа.

Первый из них основан на интерполяции измеренных прямоугольных координат точек и введении в память ЭВМ массивов прямоугольных и географических координат узлов картографических сеток.

Наиболее точным является второй способ, основанный на преобразовании прямоугольных координат в географические с учетом свойств данной проекции.

Задача определения географических координат сводится к нахождению уравнений параллелей и меридианов

$$\varphi = F_1(x, y); \quad \lambda = F_2(x, y).$$

Конкретные формулы вычисления геодезических (географических) координат по прямоугольным для большинства из наиболее широко применяющихся проекций даны в § 70.

Используя полученные геодезические координаты точек, можно аналитически решать разнообразные задачи, используя формулы сферической геодезии: определять длины линий, азимуты, координаты точек и т. п.

Например, если Землю принять за шар, то расстояния между точками и азимут с первой точки на вторую легко определить по формулам, аналогичным (269) и (270):

$$\sigma = \arccos [\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos (\lambda_2 - \lambda_1)];$$

$$\sigma_m = \sigma R; \quad R = \sqrt{M_0 N_0};$$

$$a = \arctg [\operatorname{tg} \varphi \cos \varphi_1 \operatorname{cosec} (\lambda_2 - \lambda_1) - \sin \varphi_1 \operatorname{ctg} (\lambda_2 - \lambda_1)],$$

где  $M_0$ ,  $N_0$  — радиусы кривизны меридианного сечения и сечения первого вертикала в средней точке.

### Определение расстояний, дирекционных углов и азимутов по картам

Эти задачи, если не использовать аналитических методов, наиболее удобно решать по картам, составленным в равноугольных проекциях, так как в этих проекциях частные масштабы длин не зависят от направлений.

На точность измерений длин и азимутов влияют изменения масштабов в точках проекции и кривизна геодезических линий.

Пусть необходимо измерить расстояние между точками 1 и 2.

Из определения частного масштаба длин  $\mu = ds'/ds$ , следовательно, для определения длин линий необходимо взять интеграл

$$s = \int_0^{\varphi} (ds'/\mu),$$

что на практике выполнить довольно сложно.

Заменяв в формуле частного масштаба (2) дифференциалы на приращения и определив значение частного масштаба в средней точке отрезка, получим

$$\Delta s = \Delta s' / \mu_{\text{ср}}. \quad (271)$$

Разобьем отрезок между точками 1 и 2 на  $n$  частей. Тогда для каждой части можно записать выражение (271), а общая длина отрезка будет равна

$$s = \sum_{i=1}^n (\Delta s'_i / \mu_{cp_i}) \quad (272)$$

или с учетом формулы Симпсона

$$s = \frac{\Delta s'}{2n} \left[ \frac{1}{\mu_{cp_0}} + \frac{1}{\mu_{cp_n}} + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\mu_i} \right]. \quad (273)$$

Последняя формула позволяет увеличить точность вычислений.

Основная сложность использования формул (272) или (273) заключается в определении частных масштабов в средней точке каждого участка отрезка 1—2.

При использовании автоматических средств задача может быть решена следующим образом.

Весь отрезок, координаты конечных точек 1 и 2 которого введены в память ЭВМ, делится на  $n$  частей и вычисляются прямоугольные координаты средней точки каждого участка отрезка. После этого по одной из методик, рассмотренных выше, определяются их географические координаты  $\varphi_i$ ,  $\lambda_i$ , а затем по формулам проекции — значения частных масштабов длин в средних точках.

Дальнейшие вычисления длин отрезков с учетом формул (272) или (273) осуществляются на ЭВМ достаточно просто.

Очевидно, что с увеличением количества частей  $n$ , на которые делятся измеряемые отрезки, точность определения расстояний увеличивается. Однако чрезмерное увеличение этого количества приведет к существенному повышению объема вычислений и точность вычисленных величин может оказаться несоизмеримой с точностью исходных данных.

Перейдем к вопросу об измерениях дирекционных углов и азимутов, а также об учете кривизны изображения геодезической линии.

Из рис. 69 можно записать

$$A = \alpha_{\partial} + \gamma - \delta, \quad (274)$$

где  $A$  — азимут направления с точки 1 на точку 2,  $\alpha_{\partial}$  — дирекционный угол того же направления,  $\gamma$  — сближение меридианов в данной точке,  $\delta$  — поправка в азимут за кривизну изображения геодезической линии,  $\sigma$  — длина геодезической линии.

Дирекционный угол  $\alpha_{\partial}$  с точки 1 на 2 легко определить измерением непосредственно по карте с помощью угломерного инструмента (например транспорта).

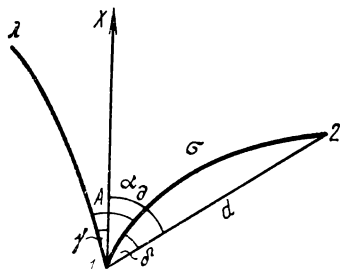


РИС. 69. Связь азимутов и дирекционных углов в проекции

Более точно этот угол может быть найден по координатам точек из выражения

$$\alpha_{\partial} = \operatorname{arctg} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Сближение меридианов можно вычислить по формуле

$$\gamma = \operatorname{arctg} \frac{y_{\varphi}}{x_{\varphi}},$$

которая в каждой проекции принимает конкретный вид.

Частные производные можно определить по формулам, рассмотренным в § 73.

Наибольшие трудности возникают при определении значений  $\delta$  — поправок в азимуты за кривизну изображения геодезической линии, а также поправок в измеренные длины.

По формулам сфероидической геодезии

$$\delta = \frac{1}{2} k_1 \sigma + \frac{1}{6} \left( \frac{dk}{d\sigma} \right)_1 \sigma^2 + \dots; \quad (275)$$

$$\sigma = d + \frac{1}{24} k_1^2 d^3 + \dots, \quad (276)$$

где  $k_1$ ,  $(dk/d\sigma)$  — соответственно кривизна геодезической линии в равноугольном изображении и ее производная в точке 1.

Общая формула кривизны равноугольного изображения геодезической линии может быть представлена в виде

$$k = \frac{1}{rm} \left( \frac{\partial \ln m}{\partial q} \sin \alpha - \frac{\partial \ln m}{\partial \lambda} \cos \alpha \right). \quad (277)$$

Эта формула принимает в каждой проекции конкретный вид.

Использование выражения (277) или его вариантов позволяет по формуле (275) найти поправки и по (274) — азимуты искоемых направлений.

Для определения поправок в длины за кривизну изображения геодезической линии можно воспользоваться формулами (276), (277).

Для решения картографических задач точность вычислений по формулам (275) и (276) в большинстве случаев является достаточной, несмотря на то, что в них удержаны только первые члены (т. е. эти формулы являются приближенными), и деление отрезка на части следовало выполнять не по прямой 1—2, а по кривой  $\sigma$  и на ней определять частные масштабы длин.

В практике картометрических работ нередко ограничиваются измерением дирекционных углов транспортиром, принимая их за азимуты, а в измерения длины вводят поправки, поделив их значения на частные масштабы длин в средних точках.



## Определение площадей по мелкомасштабным картам

Для решения данной задачи необходимо использовать карты, составленные в равновеликих проекциях, в которых отсутствуют искажения площадей.

Обычно площади измеряют по тем же картам, по которым измерялись углы и расстояния, т. е. составленным в равноугольных проекциях. В этом случае в измеренные значения площадей необходимо вводить редукции.

Из определения частного масштаба площадей

$$\rho = d\Sigma/ds, \quad (278)$$

где  $d\Sigma$  и  $ds$  — бесконечно малые площади соответственно на карте и на поверхности эллипсоида.

Следовательно, площадь  $s$  области  $\Sigma$  можно определить, взяв двойной интеграл,

$$s = \int \int_{\Sigma} \frac{d\Sigma}{\rho},$$

что выполнить, как правило, сложно.

На практике обычно используют формулу

$$s = \sum_{i=1}^n (\Delta\Sigma_i / \rho_{\text{ср}i}) = \sum_{i=1}^n (\Delta\Sigma_i / \mu_{\text{ср}i}^2),$$

где  $\rho = \mu^2$ .

Площади элементарных участков  $\Delta\Sigma_i$  могут быть измерены по карте или вычислены, методика определения частных масштабов длин рассмотрена выше.

Составив соответствующую программу, вычисление площадей длин и азимутов можно осуществлять автоматически.

## § 76. АВТОМАТИЧЕСКОЕ ПОСТРОЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОСНОВЫ

К числу элементов математической основы, которые необходимо нанести на карты, относятся картографические сетки, рамки, линии разграфки, а также линии, ограничивающие врезные карты и легенды. Кроме того, на некоторых картах показываются элементы геодезической основы — тригонометрические пункты и связанные с ними координатные сетки.

Существует два основных способа решения данной задачи. В первом из них элементы математической и геодезических основ наносятся на карты одновременно в процессе автоматического отображения всей преобразованной картографической информации, составляющей содержание карты нового назначения; во втором — элементы математической основы наносятся до показа других элементов.

Задачи автоматического вывода информации решаются с помощью инструментальных средств, соединенных с ЭВМ, и средств программного обеспечения.

К числу инструментальных средств автоматического вывода информации относятся: алфавитно-цифровые печатающие устройства (АЦПУ), устройства вывода информации барабанного типа, автоматические координатографы, графопостроители, видеоэкраны с дополнительными (в некоторых случаях) устройствами, устройства для передачи отображения информации на носители, расположенные на удалении от автоматизированных картографических систем (АКС).

## О ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Вычисления являются существенной частью математической картографии. Они должны проводиться по определенной системе и в соответствии с требованиями, предъявляемыми к результатам решения научных или производственных задач.

Процесс выполнения вычислений должен быть организован таким образом, чтобы получить необходимые результаты с наименьшей затратой времени и сил и при этом с достаточной точностью. Для достижения указанных требований желательно иметь пособия, дающие рекомендации по выполнению вычислений и их контролю.

С развитием техники и созданием компактных быстродействующих мини-ЭВМ (настольных вычислительных средств) процесс вычислений значительно ускоряется. Применение мини-ЭВМ исключает необходимость использования логарифмических таблиц и таблиц натуральных значений тригонометрических функций.

Часто вычислители спрашивают, каким числом знаков следует ограничивать значения величин, выбираемых ими из таблиц или получаемых при помощи мини-ЭВМ. При пользовании логарифмическими таблицами нужно брать столько десятичных знаков, сколько имеют сами числа. При использовании таблиц натуральных значений тригонометрических функций следует помнить, что выбираемая в них величина может быть надежно определена лишь числом значащих цифр (независимо от того, на каком месте они стоят).

Необходимо сказать несколько слов о принятых правилах округления. Правило округления чисел заключается в том, что при отбрасывании лишних цифр последнюю оставленную в числе цифру либо увеличивают на единицу, если отбрасываемая часть числа больше половины единицы последнего оставляемого разряда, либо оставляют без изменения, если эта часть меньше указанной величины. В случае когда отбрасываемая часть равна половине единицы последнего разряда, последнюю цифру оставляют без изменения, если она четная, и увеличивают на единицу, если нечетная, т. е. всегда округляют до четной.

Таким образом, независимо от того, использует ли вычислитель таблицы или выполняет вычислительные действия при помощи мини-ЭВМ, ошибки округления не будут превышать 0,5 единицы последнего знака.

В процессе вычислений постепенно накапливаются ошибки округлений, что вызывает необходимость удержания запасных знаков (одного или двух — в зависимости от сложности вычисляемых функций), которые обеспечивают получение результата вычислений с точностью не меньшей, чем точность наименее точного компонента вычислений.

Большинство вычислений в математической картографии проводится для получения прямоугольных координат картографических проекций или с целью определения масштабов и искажений этих проекций.

Обязательным условием выполнения вычислений является их контроль, поэтому вычисления следует проводить двум вычислителям независимо друг от друга или дважды одним вычислителем, но второй раз — по измененным формулам. Результаты же вычислений (координаты, масштабы и искажения углов) следует контролировать по изменению разностей неодинакового порядка.

При вычислении прямоугольных координат картографических проекций необходимо учитывать точность приборов, при помощи которых выполняется построение картографической сетки.

В настоящее время построение сетки обычно осуществляют на координатографе с точностью до 0,005 см, а поэтому вычисление прямоугольных

координат принято выполнять (для обеспечения правильности построения) с точностью до 0,0005—0,001 см.

Прямоугольные координаты конических и азимутальных проекций, которые наиболее часто используют при создании карт масштабов 1 : 1 000 000 и мельче, получают по формулам

$$x = \rho \cos \delta \quad \text{или} \quad x = q - \rho \cos \delta;$$

$$y = \rho \sin \delta,$$

где  $\rho$  — радиус параллелей в проекции,  $\delta$  — полярный угол,  $q = \text{const}$  — обцисса центра параллелей (величина постоянная).

В указанных проекциях

$$\delta = \lambda \quad \text{или} \quad \delta = \alpha \lambda;$$

$$\rho = f(\varphi, \alpha, C),$$

где  $\varphi, \lambda$  — географические координаты,  $\alpha$  и  $C$  — параметры проекции, причем  $0 < \alpha \leq 1$ .

Для того чтобы обеспечить получение прямоугольных координат с точностью до 0,0005 см, значения плоских полярных координат  $\rho$  и  $\delta$  следует вычислять с точностью до шести-семи значащих цифр (при условии, что  $\rho < 100$  см и значения  $\delta$  определены с точностью до 1'). Исключение составляют настенные карты, для которых радиусы параллелей  $\rho > 100$  см, при этом необходимо отметить, что точность построения картографической сетки подобных карт обычно бывает понижена.

Приведем пример точности вычислений равноугольной конической проекции.

1. Вычисление параметров проекции по формулам

$$\alpha = (\lg r_1 - \lg r_2) / (\lg U_2 - \lg U_1);$$

$$C = r_1 U_1^\alpha / \alpha = r_2 U_2^\alpha / \alpha,$$

где  $r$  — радиус параллелей на эллипсоиде;

$$U = \frac{\text{tg}(45^\circ + \varphi/2)}{\text{tg}^\epsilon(45^\circ + \psi/2)}; \quad \sin \psi = e \sin \varphi;$$

$e$  — эксцентриситет эллипсоида вращения.

Вычисления можно выполнить на миниЭВМ, обеспечивающих семь значащих цифр.

2. Вычисление плоских полярных и прямоугольных координат осуществляется по формулам

$$\rho = C/U^\alpha, \quad \delta = \alpha \lambda;$$

$$x = q - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta.$$

В этих случаях достаточно, чтобы миниЭВМ обеспечивала шесть значащих цифр.

3. Вычисление частных масштабов длин и площадей выполняется по формулам

$$m = n = \alpha \rho / r = \alpha C / r U^\alpha; \quad p = m^2$$

с использованием миниЭВМ, дающих пять значащих цифр.

При вычислении проекций, в прямоугольные координаты которых не входят плоские полярные координаты  $\rho, \delta$  (цилиндрические и псевдоцилиндрические), уменьшается количество вычислительных операций и, как следствие, уменьшается необходимое количество значащих цифр. Для определения прямоугольных координат карт с длиной сторон рамок  $d < 100$  см бывает достаточно пяти значащих цифр, для карт с размерами рамок  $d > 100$  см — шести значащих цифр. В этих случаях и табличные величины следует ограничивать соответствующим числом значащих цифр.

Точность определения частных масштабов и искажений углов устанавливается в зависимости от скорости их изменений, практикой установлено, что масштабы длин и площадей для анализа свойств проекции целесообразно вычислять с точностью до трех знаков после запятой, а искажения углов — до  $0,1''$ .

При получении косых и поперечных проекций требуется переход от географических координат к координатам косой или поперечной системы (зенитному расстоянию  $z$  и азимуту  $a$ ). При этом предусматривается использование Картографических таблиц,\* если значение  $\varphi_0$  и частота картографической сетки кратны  $5^\circ$ , или выполнение вычислений по формулам (59), (61) с точностью до шести значащих цифр, которые обеспечат определение координат ( $z, a$ ) с точностью до  $1''$ .

## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

### ЗАДАЧИ И ПРИМЕРЫ ПО ВЫЧИСЛЕНИЮ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

#### 1. Задачи по общей теории картографических проекций

По заданным уравнениям проекции:

- 1) определить вид сетки меридианов и параллелей;
- 2) исследовать проекцию на ортогональность сетки;
- 3) определить частные масштабы длин, площадей и наибольшее искажение углов;
- 4) определить группу проекций по характеру искажений.

Рассмотрим решение задачи для случая, когда проекция определяется уравнениями

$$x = R \cos \varphi \cos \lambda; \quad y = R \cos \varphi \sin \lambda,$$

где  $R$  — радиус шара.

1. Определение вида сетки меридианов и параллелей.

Если абсцисса  $x$  является функцией только широты, а ордината  $y$  — только долготы, например:  $x = R\varphi$ ,  $y = R\lambda$ , то уравнения проекции являются уравнениями параллелей и меридианов. Если же  $x$  и  $y$  являются функциями и широты, и долготы, то для получения уравнения меридианов нужно решить исходные уравнения так, чтобы исключить  $\varphi$ , а для получения уравнения параллелей — исключить  $\lambda$ . Тогда

$$F_1(x, y, \lambda) = 0$$

и уравнение параллелей

$$F_2(x, y, \varphi) = 0.$$

В нашем случае после деления второго уравнения на первое получим уравнение меридианов

$$y = x \operatorname{tg} \lambda$$

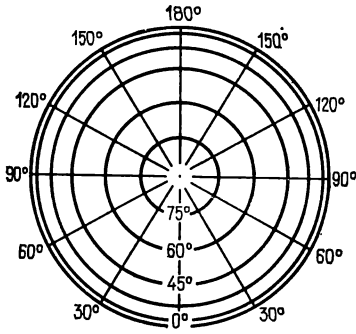
— уравнение прямых линий, проходящих через начало прямоугольных координат (географический полюс) и пересекающихся под углами, равными разности долгот  $\lambda$  (рис. 70).

Если же обе части каждого из уравнений возвести в квадрат и полученные выражения почленно сложить, то получим уравнение параллелей

$$x^2 + y^2 = R^2 \cos^2 \varphi$$

\* Картографические таблицы.— Тр. ЦНИИГАиК. М., Геодизиздат, 1960. вып. 132.

РИС. 70. Нормальная ортографическая проекция



— уравнение концентрических окружностей с центром в точке схода меридианов (географический полюс). При удалении от полюса к экватору, т. е. при уменьшении широты от  $90^\circ$  до  $0^\circ$ , радиусы параллелей увеличиваются пропорционально  $\cos \varphi$ , а расстояния между параллелями уменьшаются пропорционально  $(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)$ , где  $\varphi_2$  и  $\varphi_1$  — широты соседних параллелей. Так как величина радиуса экватора в проекции максимальна ( $\cos 0 = 1$ ), то наи-

большей территорией, которую можно изобразить в рассматриваемой проекции, будет полушарие.

2. Исследование проекции на ортогональность сетки меридианов и параллелей.

Условие ортогональности сетки

$$f = x_\varphi x_\lambda + y_\varphi y_\lambda = 0.$$

В нашем случае

$$x_\varphi = -R \sin \varphi \cos \lambda; \quad y_\varphi = -R \sin \varphi \sin \lambda;$$

$$x_\lambda = -R \cos \varphi \sin \lambda; \quad y_\lambda = R \cos \varphi \cos \lambda.$$

Тогда  $f = 0$ , т. е. сетка меридианов и параллелей ортогональна.

3. Определение масштабов длин ( $m$ ,  $n$ ,  $a$ ,  $b$ ), масштаба площадей  $p$  и наибольшего искажения углов  $\omega$ .

Масштаб по меридианам

$$m = \sqrt{e} / R,$$

где

$$e = x_\varphi^2 + y_\varphi^2 = R^2 \sin^2 \varphi,$$

тогда  $m = \sin \varphi$ .

В точке полюса  $m = 1$ , а с удалением от него уменьшается до 0 на экваторе.

Масштаб по параллелям

$$n = \sqrt{g} / R \cos \varphi,$$

где

$$g = x_\lambda^2 + y_\lambda^2 = R^2 \cos^2 \varphi,$$

тогда  $n = 1$ , т. е. длины параллелей не искажаются.

Экстремальные масштабы

$$a = (A + B)/2; \quad b = (A - B)/2,$$

где

$$A = \sqrt{m^2 + n^2 + 2mn \sin i};$$

$$B = \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \sin i},$$

причем

$$\sin i = h / \sqrt{eg}; \quad h = x_\varphi y_\lambda - x_\lambda y_\varphi.$$

Если сетка ортогональна ( $i = 90^\circ$ ), то главные направления совпадут с меридианами и параллелями, следовательно,

$$a = n = 1; b = m = \sin \varphi.$$

Масштаб площадей

$$\rho = ab = mn \sin i.$$

В нашем случае

$$\rho = ab = mn,$$

причем на полюсе  $\rho = 1$ , а на экваторе  $\rho = 0$ .

Наибольшее искажение углов  $\omega$  вычисляется по формулам

$$\sin(\omega/2) = (a - b)/(a + b) \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}(45^\circ + \omega/4) = \sqrt{a/b}$$

В нашем случае удобно использовать первую формулу:

$$\operatorname{tg}(\omega/2) = (1 - \sin \varphi)/(1 + \sin \varphi) = \operatorname{tg}^2(45^\circ - \varphi/2).$$

Если  $\rho = ab = 1$  (равновеликие проекции), то лучше использовать вторую формулу, так как она упрощается:

$$\operatorname{tg}(45^\circ + \omega/4) = a.$$

4. Определение группы проекций по характеру искажений.

Условия равноугольности:

$$f = 0, \quad m = n, \quad \omega = 0.$$

В нашем случае  $f = 0$ ,  $m \neq n$ ,  $\omega \neq 0$ , т. е. проекция не равноугольная.

Условия равновеликости:  $\rho = 1$  или  $h = R^2 \cos \varphi$ . В нашем случае  $\rho \neq 1$ ,  $h \neq R^2 \cos \varphi$ , т. е. проекция не равновеликая.

Следовательно, проекция произвольная, равнопромежуточная по параллелям, так как  $n = a = 1$ .

## II. Вычисление нормальной равноугольной конической проекции

Территория ограничена параллелями  $\varphi_{\text{ю}} = 30^\circ$ ;  $\varphi_{\text{с}} = 70^\circ$  и меридианами  $\lambda_{\text{з}} = 70^\circ$  и  $\lambda_{\text{в}} = 130^\circ$ . Частота сетки  $\Delta\varphi = \Delta\lambda = 10^\circ$ . Земная поверхность принимается за эллипсоид. Параметры проекции  $\alpha$  и  $C$  определяют из условия, что на двух главных параллелях  $\varphi_1 = 40^\circ$  и  $\varphi_2 = 60^\circ$  масштаб длин равен единице. Масштаб  $\mu_0 = 1 : 50\,000\,000$ .

1. Вычисление параметров  $\alpha$  и  $C$ .

$$\alpha = (\lg r_1 - \lg r_2)/(\lg U_2 - \lg U_1); \quad \sin \varphi_0 = \alpha,$$

где  $\varphi_0$  — широта параллели с минимальным масштабом длин.

Величины  $r$ ,  $\lg r$ ,  $\lg U$  даются в прил. 4, 5, 7.

	$\varphi_1 = 40^\circ$	$\varphi_2 = 60^\circ$		$\varphi_1 = 40^\circ$	$\varphi_2 = 60^\circ$
$\lg r$	6.689 556 5	6.504 764 0	$\alpha \lg U$	0,253 704 8	0,438 497 2
$\lg U$	0.329 457 2	0.569 425 9	$U^\alpha$	1,793 513	2,744 714
$\alpha$	0,770 069 1		$(\mu_0/100) \text{ г}$	9,785 580	6,394 316
$\varphi_0$ , градус	50,4		$C$ , см	22,790 9	22,790 9

$$C = \rho_{\text{экв}} = \text{const.}$$

$$C = r_1 U_1^\alpha / \alpha = r_2 U_2^\alpha / \alpha;$$

2. Вычисление полярных координат  $\rho$  и  $\delta$ .

$$\rho = C/U^\alpha; \quad C = 22,7909 \text{ см}; \quad \alpha = 0,7700691.$$

Ф. градус	$\lg U$	$U^\alpha$	$\rho$ , см	$\Delta\rho$
30	0,237 106 4	1,522 608	14,968 3	2,260 9
40	0,329 457 2	1,793 513	12,707 4	2,200 6
50	0,436 704 4	2,169 164	10,5068	2,203 2
60	0,569 425 9	2,744 714	8,303 6	2,285 2
70	0,750 944 2	3,786 856	6,018 4	

$$\delta = \alpha\lambda; \quad \lambda_{\text{ср}} = 100^\circ.$$

$\lambda$ , градус	$\lambda = \lambda - \lambda_{\text{ср}}$ , градус	$\delta$ , градус
110	10	7,7007
120	20	15,401 4
130	30	23,102 1

3. Вычисление прямоугольных координат  $x$  и  $y$ .

$$x = \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$

$q = 15$  см — расстояние между полюсом полярных и началом прямоугольных координат.

$$\rho_{30^\circ} = 14,9683; \quad \rho_{40^\circ} = 12,7074.$$

$\lambda$ , градус	100	110	120	130
$\delta$ , градус	0,0	7,700 70	15,401 40	23,102 10
$\sin \delta$	0,0	0,134 00	0,265 58	0,392 37
$\cos \delta$	1,0	0,990 98	0,964 09	0,919 81
$x$	0,032	0,167	0,570	1,232
$\varphi=30^\circ$ $y$	0,0	2,006	3,975	5,873
$x$	2,293	2,407	2,749	3,312
$\varphi=40^\circ$ $y$	0,0	1,703	3,375	4,986

Вычисленные значения  $x$  и  $y$

Ф. градус	Координаты, см	$\lambda$ , градус			
		100	110	120	130
30	$x$	0,032	0,167	0,570	1,232
	$y$	0,000	2,006	3,975	5,873
40	$x$	2,293	2,407	2,749	3,312
	$y$	0,000	1,703	3,375	4,986
50	$x$	4,493	4,588	4,870	5,336
	$y$	0,000	1,408	2,790	4,123
60	$x$	6,696	6,771	6,994	7,362
	$y$	0,000	1,113	2,205	3,258
70	$x$	8,982	9,036	9,198	9,456
	$y$	0,000	0,806	1,598	2,361



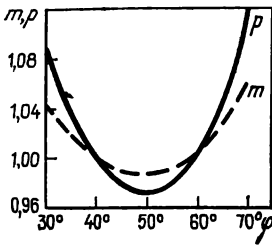


РИС. 71. График масштабов длин и площадей в нормальной равноугольной конической проекции

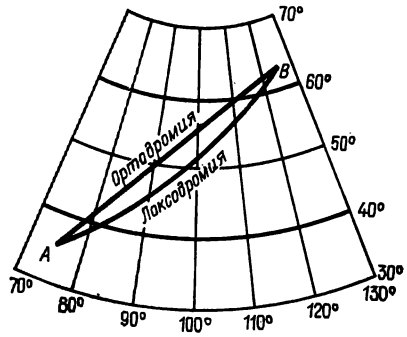


РИС. 72. Нормальная равноугольная коническая проекция с двумя главными параллелями  $\varphi_1 = 40^\circ$ ,  $\varphi_2 = 60^\circ$

4. Вычисление масштабов  $m$  и  $n$ .

$$m = n = \alpha \rho / (\mu_0 100) r; \quad p = m^2; \quad \omega = 0; \quad \alpha = 0,77007.$$

φ, градус	30	40	50	60	70
$\alpha \rho$	11,527	9,786	8,091	6,394	4,634
$(\mu_0 100)r$	11,057	9,786	8,216	6,394	4,376
$m = n$	1,042	1,000	0,985	1,000	1,059
$P$	1,086	1,000	0,970	1,000	1,121

По вычисленным значениям масштабов длин и площадей строится график изменения  $m$  и  $p$  (рис. 71).

Построенная по координатам сетка меридианов и параллелей дана на рис. 72. На сетку нанесены локсодромия и ортодромия; вычисления широт точек пересечения локсодромии и ортодромии с промежуточными меридианами приведены ниже.

### III. Вычисление нормальной равноугольной цилиндрической проекции Меркатора

Территория ограничена параллелями  $\varphi_{ю} = 30^\circ$ ;  $\varphi_{с} = 70^\circ$  и меридианами  $\lambda_з = 70^\circ$  и  $\lambda_в = 130^\circ$ . Частота сетки  $\Delta\varphi = \Delta\lambda = 10^\circ$ . Земная поверхность принимается за эллипсоид. Параметр проекции  $\beta$  определяется из условия, что на двух главных параллелях с широтами  $\varphi_k = \pm 50^\circ$  масштаб длин равен единице. Масштаб  $\mu_0 = 1 : 50\,000\,000$ .

1. Вычисление  $x$  и  $y$  (см):

$$x = \frac{(\mu_0 100) r_k}{\text{mod}} \lg U = A \lg U;$$

$$y = \frac{\beta}{\rho} \lambda = \frac{(\mu_0 100) r_k}{\rho} \lambda = B \lambda;$$

$$A = \frac{4\,107\,933}{500\,000 \cdot 0,434\,294} = 18,9178 \text{ см};$$

$$B = \frac{4\,107\,933 \cdot 0,017\,453}{500\,000} = 0,14339 \text{ см},$$

где  $\rho$  — в градусах; величины  $\lg U$  выбираются из таблиц прил. 7.

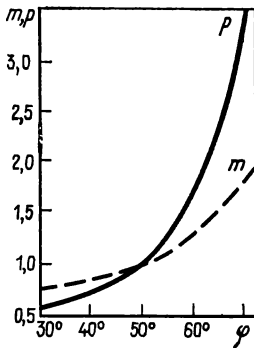


РИС. 73. График масштабов длин и площадей в проекции Меркатора

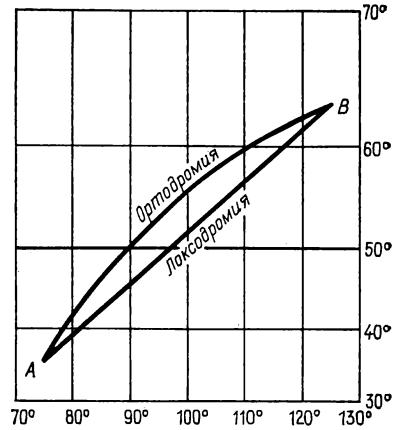


РИС. 74. Нормальная равноугольная цилиндрическая проекция Меркатора с главными параллелями  $\varphi_k = \pm 50^\circ$

$\varphi$ , градус	$\lg U$	$x$ , см	$\Delta x$ , см	$\lambda$ , градус	$\lambda - \lambda_n$	$y$ , см	$\Delta y$ , см
30	0,237 11	4,486		70	0	0,000	
40	0,329 46	6,233	1,747	80	10	1,434	1,434
50	0,436 70	8,261	2,028	90	20	2,868	1,434
60	0,569 43	10,772	2,511	100	30	4,302	1,434
70	0,750 94	14,206	3,434	110	40	5,736	1,434

2. Вычисление  $m = n$ ;  $p$ :

$$m = n = \beta/r = r_k/r; \quad p = m^2; \quad \omega = 0; \quad r_k = 4108 \text{ км.}$$

Величины  $r$  даны в прил. 4.

$\varphi$ , градус	$r$ , км	$m = n$	$p$
30	5528	0,743	0,552
40	4893	0,840	0,706
50	4108	1,000	1,000
60	3197	1,285	1,651
70	2188	1,878	3,527

По вычисленным значениям масштабов длин и площадей строится график изменения  $m$  и  $p$  (рис. 73).

Вычисленные значения  $x$

$\varphi$ , градус	30	40	50	60	70
$x$ , см	0,000	1,747	3,775	6,286	9,720

Вычисленные значения  $y$

$\varphi$ , градус	70	80	90	100	110	120	130
$y$ , см	0,000	1,434	2,868	4,302	5,736	7,170	8,604

Построенная по координатам сетка меридианов и параллелей с нанесенными локсодромией и ортодромией дана на рис. 74.

#### IV. Вычисление промежуточных точек ортодромии и локсодромии, азимутов этих линий, ортодромической поправки

Вычислить широты точек пересечения ортодромии и локсодромии, проходящих через начальный и конечный пункты ( $A$  и  $B$ ), с промежуточными меридианами.

Координаты пунктов :  $\varphi_A = 35^\circ$ ,  $\lambda_A = 75^\circ$ ,  $\varphi_B = 63^\circ$ ,  $\lambda_B = 125^\circ$ .

1. Вычисление широт промежуточных точек ортодромии и азимута в ее начальной точке ( $A$ ).

$$\operatorname{tg} \varphi_i = \operatorname{tg} \varphi_A \operatorname{cosec} u \sin [(u - \lambda_A) + \lambda_i],$$

где

$$\operatorname{ctg} u = \operatorname{ctg} \varphi_A \operatorname{tg} \varphi_B \operatorname{cosec} (\lambda_B - \lambda_A) - \operatorname{ctg} (\lambda_B - \lambda_A);$$

$$\operatorname{ctg} \alpha_{\text{орт}} = \operatorname{ctg} u \sin \varphi_A.$$

$\sin \varphi_A$	0,573 57	$\lambda_B - \lambda_A$	50,00°
$\operatorname{tg} \varphi_A$	0,700 20	$\operatorname{cosec} (\lambda_B - \lambda_A)$	1,305 40
$\operatorname{tg} \varphi_B$	1,962 61	$\operatorname{ctg} (\lambda_B - \lambda_A)$	0,839 09
		$\operatorname{ctg} u$ ,	2,819 79
		$u$ , градус	19,53
		$\operatorname{ctg} \alpha_{\text{орт}}$	1,617 34
		$\alpha_{\text{орт}}$ , градус	31,72

$$\operatorname{cosec} u = 2,991 81$$

$\lambda_i$ , градус	90	100	110
$[(u - \lambda_A) + \lambda_i]$ , градус	34,53	44,53	54,53
$\sin [(u - \lambda_A) + \lambda_i]$	0,566 79	0,701 24	0,814 39
$\operatorname{tg} \varphi_i$	1,187 74	1,469 01	1,706 03
$\varphi_i$ , градус	49,9	55,8	59,6

2. Вычисление широт промежуточных точек локсодромии и ее азимута  $\alpha_{\text{лок}}$ .

$$\operatorname{tg} \alpha_{\text{лок}} = (\lambda_B - \lambda_A) / (D_B - D_A) = 3\ 000' / 2\ 653' = 1,1308;$$

$$\alpha_{\text{лок}} = 48,51^\circ;$$

$$D_i = D_A + (\lambda_i - \lambda_A) \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$D_A = 2231'; \quad \operatorname{ctg} \alpha = 0,884\ 34.$$

$D$ , мин — меридиональные части (даются в прил. 9).

Значения  $\varphi_i$  определяются по значениям  $D_i$  интерполированием.

$\lambda_i$ , градус	90	100	110
$(\lambda_i - \lambda_A)$ , мин	900	1500	2100
$(\lambda_i - \lambda_A) \operatorname{ctg} \alpha$	796	1326	1857
$D_i$ , мин	3027	3557	4088
$\varphi_i$ , градус	45,2	51,1	56,3

3. Определение угла между локсодромией и ортодромией (ортодромическая поправка) в проекции Меркатора.

Ортодромическая поправка для начального пункта ортодромии вычисляется по формуле

$$\delta = \frac{1}{2} (\lambda_B - \lambda_A) \sin \varphi_m,$$

где

$$\varphi_m = \frac{1}{2} (\varphi_A + \varphi_B) = 49^\circ; \quad \delta = 25^\circ \cdot 0,75471 = 18,9^\circ.$$

Тогда азимут ортодромии в начальном пункте

$$\alpha_{орт} = \alpha_{лок} - \delta = 48,5^\circ - 18,9^\circ = 29,6^\circ,$$

где  $\alpha_{лок}$  — измеренный транспортиром азимут локсодромии.

#### V. Определение расстояний между пунктами по ортодромии и локсодромии

Вычислить и измерить расстояния по ортодромии и локсодромии между пунктами  $A$  и  $B$  с координатами:  $\varphi_A = 35^\circ$ ,  $\lambda_A = 75^\circ$ ;  $\varphi_B = 63^\circ$ ,  $\lambda_B = 125^\circ$ .

1. Расстояние по ортодромии  $\sigma$  в минутах дуги вычисляется для сферы по формуле

$$\cos \sigma = \sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \cos (\lambda_B - \lambda_A),$$

тогда расстояние по ортодромии в километрах ( $\rho$  в мин.)

$$s_{орт} = \frac{R}{\rho} \sigma,$$

где средний радиус кривизны  $R$  выбирают из таблиц прил. 3.

$$\varphi_0 = (\varphi_A + \varphi_B)/2 = 49,0^\circ.$$

$\sin \varphi_A$	0,573 58	$\cos \sigma$	0,750 10
$\cos \varphi_A$	0,819 15	$\sigma$	2484,0°
$\sin \varphi_B$	0,891 01	$1/\rho$	0,000 29
$\cos \varphi_B$	0,453 99	$R$	6381,2 км
$\cos (\lambda_B - \lambda_A)$	0,642 79	$S_{орт}$	4610,8 км

2. Вычисление расстояния по локсодромии.

Для эллипсоида — по формуле

$$s_{лок} = (s_B - s_A) \sec \alpha_{лок},$$

где  $s_A$ ,  $s_B$  — длины дуг меридианов от экватора до параллелей с широтами  $\varphi_A$ ,  $\varphi_B$  (выбирают из прил. 6).

Для сферы —

$$s_{лок} = R \sec \alpha_{лок} \frac{\varphi_B - \varphi_A}{\rho^\circ};$$

$s_B$	6988,5 км	$R$	6381,2 км
$s_A$	3374,7 км	$\alpha_{лок}$	48,51°
$\alpha_{лок}$	48,51°	$(\varphi_B - \varphi_A)$	28,0°
$S_{лок}$	4700,4 км	$1/\rho^\circ$	0,017 45
		$S_{лок}$	4707,1 км

В проекции Меркатора —

$$s_{лок} = (x_B - x_A) \sec \alpha_{лок} = (y_B - y_A) \operatorname{cosec} \alpha_{лок}.$$

$r_n/\text{mod}$	9 458,9	$r_n/\rho^\circ$	716 695
$\lg U_B$	0,617 05	$y_B$	8961,8 км
$\lg U_A$	0,281 85	$y_A$	5377,2 км
$x_B$	5 836,6 км	$\alpha_{лок}$	48,51°
$x_A$	2 666,0 км	$s_{лок}$	4785,4 км
$\alpha_{лок}$	48,51°		
$S_{лок}$	4 785,8 км		

3. Определение расстояний по ортодромии и локсодромии путем измерений.

В нормальной равноугольной цилиндрической проекции Меркатора (с учетом частных масштабов длин для каждого измеренного участка)

$$s_{\text{орт}} = \sum \frac{\Delta s_{\text{орт}}}{(\mu_0 10^6) m} = 4595 \text{ км};$$

$$s_{\text{лок}} = \sum \frac{\Delta s_{\text{лок}}}{(\mu_0 10^6) m} = 4710 \text{ км},$$

где  $\Delta s_{\text{орт}}$ ,  $\Delta s_{\text{лок}}$  (мм) — измеренные отрезки ортодромии и локсодромии;  $m$  — масштаб длин, соответствующий средней широте каждого отрезка.

В нормальной равноугольной конической проекции (без учета частных масштабов длин)

$$s_{\text{орт}} = 4670 \text{ км}; \quad s_{\text{лок}} = 4750 \text{ км}.$$

## VI. Вычисление нормальной равнопромежуточной конической проекции

Вычислить и построить сетку нормальной равнопромежуточной по меридианам конической проекции для территории, ограниченной параллелями  $\varphi_{\text{ю}} = 30^\circ$ ;  $\varphi_{\text{с}} = 70^\circ$  и меридианами  $\lambda_{\text{з}} = 70^\circ$ ;  $\lambda_{\text{в}} = 130^\circ$ . Частота сетки  $\Delta\varphi = \Delta\lambda = 10^\circ$ . Земная поверхность принимается за эллипсоид. Параметры  $\alpha$  и  $C$  определяются из условия, что на двух главных параллелях  $\varphi_A = 40^\circ$  и  $\varphi_B = 60^\circ$  частные масштабы длин равны единице. Масштаб  $\mu_0 = 1 : 50\,000\,000$ .

1. Вычисление параметров  $\alpha$  и  $C$ .

$$\alpha = (r_A - r_B) / (s_B - s_A); \quad C = s_A + r_A / \alpha = s_B + r_B / \alpha.$$

Величины  $r$  и  $s$  даются в прил. 4 и 6.

	$\varphi_A = 40^\circ$	$\varphi_B = 60^\circ$
$r$	4 892 790	3 197 158
$r_A - r_B$		1 695 632
$S$	4 429 607	6 654 189
$s_B - s_A$		2 224 582
$\alpha$		0,762 225

$$C, \text{ см} = (\mu_0 100) s_A + (\mu_0 100) r_A / \alpha = (\mu_0 100) s_B + (\mu_0 100) r_B / \alpha;$$

$$C, \text{ см} = A s_A + B r_A = A s_B + B r_B;$$

$$A = \frac{1}{500\,000}; \quad B = \frac{100}{50\,000\,000\alpha} \cdot \frac{1}{500\,000\alpha} = \frac{1}{381\,112}$$

	$\varphi_A=40^\circ$	$\varphi_B=60^\circ$
$As$	8,8592	13,3084
$Br$	12,8382	8,3890
$C, \text{ см}$	21,6974	21,6974

## 2. Вычисление полярных координат $\rho$ и $\delta$ .

$$\rho = C - (\mu_0 100) s.$$

$\varphi$ , градус	$Bs$	$\rho$ , см	$\Delta\rho$
30	6,6403	15,0571	
40	8,8592	12,8382	2,219
50	11,0818	10,6156	2,223
60	13,3084	8,3890	2,226
70	15,5382	6,1592	2,230

$$\delta = \alpha\lambda; \quad \lambda = \lambda_i - \lambda_{\text{ср.}}$$

$\lambda$ , градус	$\delta$ , градус
10	7,6222
20	15,2445
30	22,8668

## 3. Вычисление $x$ и $y$ .

$$x = q - \rho \cos \delta; \quad y = \rho \sin \delta;$$

$$q = 20 \text{ см}, \quad \rho_{30^\circ} = 15,057, \quad \rho_{40^\circ} = 12,838.$$

$\lambda$ , градус	100	110	120	130
$\delta$ , градус	0	7,622 2	15,244 5	22,866 8
$\sin \delta$	0	0,132 64	0,262 94	0,388 59
$\cos \delta$	1,0	0,991 16	0,964 81	0,921 4
$\varphi = 30^\circ$				
$x$	4,943	5,076	5,473	6,126
$y$	0	1,997	3,959	5,851
$\varphi = 40^\circ$				
$x$	7,162	7,275	7,614	8,171
$y$	0	1,703	3,376	4,989

## 4. Вычисление $n$ , $p$ , $\omega$ .

$$n = \alpha\rho / (\mu_0 100) r; \quad p = n; \quad \sin(\omega/2) =$$

$$= (a - b) / (a + b); \quad \alpha = 0,762 225.$$

φ, градус	30	40	50	60	70
$\rho$	15,057	12,838	10,615	8,389	6,159
$\alpha\rho$	11,477	9,785	8,091	6,394	4,694
$(\mu_0 100)r$	11,057	9,785	8,216	6,394	4,3/6
$n = \rho$	1,038	1,000	0,985	1,000	1,073
$\sin(\omega/2)$	0,018 65	0	0,007 65	0	0,035 21
$\omega$ , градус	2,13	0	0,87	0	4,03

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3

#### СРЕДНИЕ РАДИУСЫ КРИВИЗНЫ R, м

φ	R	φ	R	φ	R
0° 0'	6 356 863	17° 0'	6 360 502	34° 0'	6 370 196
30	6 356 866	30	6 360 713	30	6 370 543
1 0	6 356 876	18 0	6 360 929	35 0	6 370 892
30	6 356 892	30	6 361 150	30	6 371 244
2 0	6 356 915	19 0	6 361 376	36 0	6 371 597
30	6 356 944	30	6 361 608	30	6 371 953
3 0	6 356 980	20 0	6 361 844	37 0	6 372 311
30	6 357 022	30	6 362 086	30	6 372 671
4 0	6 357 070	21 0	6 362 332	38 0	6 373 032
30	6 357 125	30	6 362 583	30	6 373 395
5 0	6 357 186	22 0	6 362 840	39 0	6 373 759
30	6 357 254	30	6 363 100	30	6 374 125
6 0	6 357 328	23 0	6 363 366	40 0	6 374 492
30	6 357 408	30	6 363 636	30	6 374 860
7 0	6 357 495	24 0	6 363 910	41 0	6 375 230
30	6 357 588	30	6 364 189	30	6 375 600
8 0	6 357 687	25 0	6 364 472	42 0	6 375 971
30	6 357 793	30	6 364 759	30	6 376 343
9 0	6 357 904	26 0	6 365 050	43 0	6 376 715
30	6 358 022	30	6 365 346	30	6 377 088
10 0	6 358 146	27 0	6 365 645	44 0	6 377 462
30	6 358 276	30	6 365 948	30	6 377 835
11 0	6 358 412	28 0	6 366 255	45 0	6 378 209
30	6 358 555	30	6 366 566	30	6 378 583
12 0	6 358 703	29 0	6 366 879	46 0	6 378 957
30	6 358 857	30	6 367 197	30	6 379 330
13 0	6 359 017	30 0	6 367 518	47 0	6 379 703
30	6 359 183	30	6 367 843	30	6 380 076
14 0	6 359 354	31 0	6 367 170	48 0	6 380 449
30	6 359 532	30	6 368 500	30	6 380 820
15 0	6 359 714	32 0	6 368 834	49 0	6 381 191
30	6 359 903	30	6 369 170	30	6 381 561
16 0	6 360 097	33 0	6 369 510	50 0	6 381 930
30	6 360 297	30	6 369 851	30	6 382 298

$\varphi$	$R$	$\varphi$	$R$	$\varphi$	$R$
51° 0'	6 382 665	65° 0'	6 392 006	79° 0'	6 398 129
30	6 383 031	30	6 392 291	30	6 398 267
52 0	6 383 395	66 0	6 392 572	80 0	6 398 399
30	6 383 757	30	6 392 849	30	6 398 524
53 0	6 384 118	67 0	6 393 122	81 0	6 398 644
30	6 384 477	30	6 393 390	30	6 398 757
54 0	6 384 834	68 0	6 393 653	82 0	6 398 864
30	6 385 190	30	6 393 911	30	6 398 964
55 0	6 385 543	69 0	6 394 165	83 0	6 399 058
30	6 385 894	30	6 394 414	30	6 399 146
56 0	6 386 242	70 0	6 394 658	84 0	6 399 228
30	6 386 589	30	6 394 897	30	6 399 303
57 0	6 386 932	71 0	6 395 131	85 0	6 399 371
30	6 387 273	30	6 395 360	30	6 399 433
58 0	6 387 612	72 0	6 395 584	86 0	6 399 489
30	6 387 947	30	6 395 802	30	6 399 538
59 0	6 388 280	73 0	6 396 014	87 0	6 399 581
30	6 388 609	30	6 396 222	30	6 399 617
60 0	6 388 936	74 0	6 396 424	88 0	6 399 646
30	6 389 259	30	6 396 621	30	6 399 669
61 0	6 389 579	75 0	6 396 811	89 0	6 399 686
30	6 389 895	30	6 396 997	30	6 399 696
62 0	6 390 208	76 0	6 397 176	90 0	6 399 699
30	6 390 517	30	6 397 350		
63 0	6 390 823	77 0	6 397 518		
30	6 391 125	30	6 397 679		
64 0	6 391 422	78 0	6 397 835		
30	6 391 716	30	6 397 985		

## ПРИЛОЖЕНИЕ 4

РАДИУСЫ ПАРАЛЛЕЛЕЙ  $r$ , м

$\varphi$	$r$	$\varphi$	$r$	$\varphi$	$r$
0° 0'	6 378 245	8° 0'	6 316 582	16° 0'	6 132 722
30	6 378 004	30	6 308 647	30	6 117 239
1 0	6 377 280	9 0	6 300 234	17 0	6 101 292
30	6 376 074	30	6 291 345	30	6 084 882
2 0	6 374 385	10 0	6 281 979	18 0	6 068 011
30	6 372 215	30	6 272 138	30	6 050 680
3 0	6 369 562	11 0	6 261 822	19 0	6 032 890
30	6 366 428	30	6 251 031	30	6 014 642
4 0	6 362 812	12 0	6 239 768	20 0	5 995 938
30	6 358 714	30	6 228 032	30	5 976 778
5 0	6 354 135	13 0	6 215 824	21 0	5 957 166
30	6 349 076	30	6 203 145	30	5 937 101
6 0	6 343 536	14 0	6 189 996	22 0	5 916 585
30	6 337 516	30	6 176 379	30	5 895 620
7 0	6 331 017	15 0	6 162 293	23 0	5 874 208
30	6 324 039	30	6 147 740	30	5 852 349



φ	г	φ	г	φ	г
24° 0'	5 830 046	47° 0'	4 357 760	70° 0'	2 187 964
30	5 807 299	30	4 316 940	30	2 135 462
25 0	5 784 112	48 0	4 275 789	71 0	2 082 794
30	5 760 484	30	4 234 309	30	2 029 966
26 0	5 736 419	49 0	4 192 505	72 0	1 976 980
30	5 711 918	30	4 150 378	30	1 923 841
27 0	5 686 982	50 0	4 107 933	73 0	1 870 552
30	5 661 614	30	4 065 171	30	1 817 119
28 0	5 635 815	51 0	4 022 098	74 0	1 763 545
30	5 609 587	30	3 978 715	30	1 709 834
29 0	5 582 932	52 0	3 935 026	75 0	1 655 990
30	5 555 852	30	3 891 034	30	1 602 018
30 0	5 528 349	53 0	3 846 744	76 0	1 547 922
30	5 500 426	30	3 802 157	30	1 493 706
31 0	5 472 083	54 0	3 757 278	77 0	1 439 374
30	5 443 324	30	3 712 109	30	1 384 930
32 0	5 414 149	55 0	3 666 654	78 0	1 330 378
30	5 384 562	30	3 620 918	30	1 275 724
33 0	5 354 565	56 0	3 574 902	79 0	1 220 970
30	5 324 159	30	3 528 611	30	1 166 122
34 0	5 293 347	57 0	3 482 047	80 0	1 111 183
30	5 262 132	30	3 435 216	30	1 056 158
35 0	5 230 514	58 0	3 388 120	81 0	1 001 051
30	5 198 498	30	3 340 762	30	945 866
36 0	5 166 085	59 0	3 293 147	82 0	890 608
30	5 133 278	30	3 245 277	30	835 280
37 0	5 100 079	60 0	3 197 158	83 0	779 888
30	5 066 490	30	3 148 791	30	724 435
38 0	5 032 514	61 0	3 100 182	84 0	668 926
30	4 998 153	30	3 051 333	30	613 365
39 0	4 963 410	62 0	3 002 248	85 0	557 756
30	4 928 288	30	2 952 932	30	502 104
40 0	4 892 790	63 0	2 903 387	86 0	446 413
30	4 856 916	30	2 853 618	30	390 687
41 0	4 820 671	64 0	2 803 629	87 0	334 931
30	4 784 058	30	2 753 423	30	279 149
42 0	4 747 078	65 0	2 703 003	88 0	223 345
30	4 709 735	30	2 652 376	30	167 524
43 0	4 672 031	66 0	2 601 542	89 0	111 690
30	4 633 970	30	2 550 508	30	55 847
44 0	4 595 553	67 0	2 499 276	90 0	0
30	4 556 784	30	2 447 851		
45 0	4 517 666	68 0	2 396 237		
30	4 478 202	30	2 344 437		
46 0	4 438 394	69 0	2 292 455		
30	4 398 246	30	2 240 296		

ВЕЛИЧИНЫ  $\lg r$

$\varphi$	$\lg r$	$\varphi$	$\lg r$	$\varphi$	$\lg r$
0° 0'	6.804 7012	26° 0'	6.758 6409	52° 0'	6.594 9476
30	6.804 6848	30	6.756 7819	30	6.590 0651
1 0	6.804 6355	27 0	6.754 8818	53 0	6.585 0932
30	6.804 5533	30	6.752 9402	30	6.580 0300
2 0	6.804 4383	28 0	6.750 9567	54 0	6.574 8733
30	6.804 2904	30	6.748 9309	30	6.569 6207
3 0	6.804 1096	29 0	6.746 8623	55 0	6.564 2700
30	6.803 8958	30	6.744 7507	30	6.558 8186
4 0	6.803 6491	30 0	6.742 5955	56 0	6.553 2641
30	6.803 3693	30	6.740 3963	30	6.547 6037
5 0	6.803 0565	31 0	6.738 1527	57 0	6.541 8347
30	6.802 7105	30	6.735 8642	30	6.535 9540
6 0	6.802 3314	32 0	6.733 5302	58 0	6.529 9587
30	6.801 9191	30	6.731 1504	30	6.523 8455
7 0	6.801 4735	33 0	6.728 7242	59 0	6.517 6111
30	6.800 9945	30	6.726 2510	30	6.511 2518
8 0	6.800 4821	34 0	6.723 7304	60 0	6.504 7640
30	6.799 9362	30	6.721 1617	30	6.498 1438
9 0	6.799 3567	35 0	6.718 5444	61 0	6.491 3871
30	6.798 7435	30	6.715 8779	30	6.484 4895
10 0	6.798 0965	36 0	6.713 1616	62 0	6.477 4466
30	6.797 4156	30	6.710 3948	30	6.470 2534
11 0	6.796 7007	37 0	6.707 5769	63 0	6.462 9049
30	6.795 9517	30	6.704 7072	30	6.455 3958
12 0	6.795 1684	38 0	6.701 7850	64 0	6.447 7201
30	6.794 3508	30	6.698 8096	30	6.439 8729
13 0	6.793 4987	39 0	6.695 7802	65 0	6.431 8466
30	6.792 6119	30	6.692 6961	30	6.423 6350
14 0	6.791 6904	40 0	6.689 5565	66 0	6.415 2309
30	6.790 7339	30	6.686 3606	30	6.406 6267
15 0	6.789 7424	41 0	6.683 1075	67 0	6.397 8143
30	6.788 7155	30	6.679 7964	30	6.388 7850
16 0	6.787 6533	42 0	6.676 4264	68 0	6.379 5297
30	6.786 5554	30	6.672 9965	30	6.370 0385
17 0	6.785 4218	43 0	6.669 5057	69 0	6.360 3009
30	6.784 2522	30	6.665 9532	30	6.350 3055
18 0	6.783 0464	44 0	6.662 3378	70 0	6.340 0401
30	6.781 8042	30	6.658 6585	30	6.329 4918
19 0	6.780 5254	45 0	6.654 9141	71 0	6.318 6464
30	6.779 2098	30	6.651 1037	30	6.307 4887
20 0	6.777 8571	46 0	6.647 2259	72 0	6.296 0022
30	6.776 4672	30	6.643 2795	30	6.284 1691
21 0	6.775 0397	47 0	6.639 2633	73 0	6.271 9698
30	6.773 5744	30	6.635 1760	30	6.259 3833
22 0	6.772 0711	48 0	6.631 0163	74 0	6.246 3865
30	6.770 5295	30	6.626 7826	30	6.232 9539
23 0	6.768 9493	49 0	6.622 4736	75 0	6.219 0578
30	6.767 3302	30	6.618 0877	30	6.204 6675
24 0	6.765 6719	50 0	6.613 6233	76 0	6.189 7491
30	6.763 9742	30	6.609 0788	30	6.174 2651
25 0	6.762 2367	51 0	6.604 4526		
30	6.760 4590	30	6.599 7428		

$\varphi$	$\lg r$	$\varphi$	$\lg r$	$\varphi$	$\lg r$
77° 0'	6.158 1735	82° 0'	5.949 6865	87° 0'	5.524 9557
30	6.141 4278	30	5.921 8323	30	5.445 8363
78 0	6.123 9752	83 0	5.892 0323	88 0	5.348 9769
30	6.105 7567	30	5.859 9996	30	5.224 0776
79 0	6.086 7051	84 0	5.825 3781	89 0	5.048 0144
30	6.066 7440	30	5.787 7190	30	4.747 0013
80 0	6.045 7856	85 0	5.746 4444	90 0	— $\infty$
30	6.023 7289	30	5.700 7938		
81 0	6.000 4562	86 0	5.649 7369		
30	5.975 8297	30	5.591 8294		

## ПРИЛОЖЕНИЕ 6

ДЛИНЫ ДУГ МЕРИДИАНОВ  $s_m$  ОТ ЭКВАТОРА ДО ШИРОТЫ  $\varphi$   
И ПАРАЛЛЕЛЕЙ  $s_n$  В 1°, м

$\varphi$	$s_m$	$s_n$	$\varphi$	$s_m$	$s_n$
0°00'	0	111 321	16°00'	1 769 675	107 036
30	55 288		30	1 825 006	
1 00	110 576	111 305	17 00	1 880 341	106 488
30	165 865		30	1 935 678	
2 00	221 153	111 254	18 00	1 991 017	105 907
30	276 442		30	2 046 360	
3 00	331 732	111 170	19 00	2 101 706	105 294
30	387 022		30	2 157 054	
4 00	442 312	111 052	20 00	2 212 406	104 649
30	497 603		30	2 267 760	
5 00	552 895	110 901	21 00	2 323 118	103 972
30	608 188		30	2 378 479	
6 00	663 482	110 716	22 00	2 433 844	103 264
30	718 777		30	2 489 212	
7 00	774 072	110 497	23 00	2 544 583	102 524
30	829 369		30	2 599 958	
8 00	884 668	110 245	24 00	2 655 336	101 753
30	939 967		30	2 710 718	
9 00	995 268	109 960	25 00	2 766 103	100 952
30	1 050 571		30	2 821 493	
10 00	1 105 875	109 641	26 00	2 876 886	100 119
30	1 161 180		30	2 932 283	
11 00	1 216 488	109 289	27 00	2 987 683	99 257
30	1 271 797		30	3 043 088	
12 00	1 327 108	108 904	28 00	3 098 497	98 364
30	1 382 421		30	3 153 910	
13 00	1 437 737	108 487	29 00	3 209 326	97 441
30	1 493 054		30	3 264 747	
14 00	1 548 373	108 036	30 00	3 320 172	96 488
30	1 603 695		30	3 375 602	
15 00	1 659 019	107 552	31 00	3 431 035	95,506
30	1 714 346		30	3 486 473	

$\varphi$	$s_m$	$s_n$	$\varphi$	$s_m$	$s_n$
32°00'	3 541 915	94 495	59°00'	6 542 783	57 476
30	3 597 362		30	6 598 484	
33 00	3 652 813	93 455	60 00	6 654 189	55 801
30	3 708 268		30	6 709 898	
34 00	3 763 728	92 386	61 00	6 765 612	54 108
30	3 819 193		30	6 821 329	
35 00	3 874 662	91 290	62 00	6 877 051	52 399
30	3 930 135		30	6 932 777	
36 00	3 985 613	90 165	63 00	6 988 506	50 674
30	4 041 096		30	7 044 240	
37 00	4 096 584	89 013	64 00	7 099 978	48 933
30	4 152 076		30	7 155 719	
38 00	4 207 573	87 834	65 00	7 211 465	47 176
30	4 263 074		30	7 267 214	
39 00	4 318 580	86 628	66 00	7 322 967	45 405
30	4 374 091		30	7 378 723	
40 00	4 429 607	85 395	67 00	7 434 483	43 621
30	4 485 128		30	7 490 247	
41 00	4 540 654	84 137	68 00	7 546 014	41 822
30	4 596 184		30	7 601 784	
42 00	4 651 719	82 852	69 00	7 657 558	40 011
30	4 707 259		30	7 713 335	
43 00	4 762 804	81 542	70 00	7 769 116	38 187
30	4 818 354		30	7 824 899	
44 00	4 873 908	80 208	71 00	7 880 686	36 352
30	4 929 468		30	7 936 475	
45 00	4 985 032	78 848	72 00	7 992 268	34 505
30	5 040 602		30	8 048 063	
46 00	5 096 176	77 465	73 00	8 103 862	32 647
30	5 151 755		30	8 159 663	
47 00	5 207 339	76 057	74 00	8 215 467	30 780
30	5 262 928		30	8 271 273	
48 00	5 318 521	74 627	75 00	8 327 082	28 902
30	5 374 120		30	8 382 893	
49 00	5 429 723	73 173	76 00	8 438 707	27 016
30	5 485 331		30	8 494 523	
50 00	5 540 944	71 697	77 00	8 550 341	25 122
30	5 596 562		30	8 606 162	
51 00	5 652 185	70 199	78 00	8 661 984	23 219
30	5 707 813		30	8 717 809	
52 00	5 763 445	68 679	79 00	8 773 635	21 310
30	5 819 082		30	8 829 463	
53 00	5 874 723	67 138	80 00	8 885 293	19 394
30	5 930 370		30	8 941 125	
54 00	5 986 021	65 577	81 00	8 996 958	17 472
30	6 041 677		30	9 052 793	
55 00	6 097 337	63 995	82 00	9 108 629	15 544
30	6 153 002		30	9 164 467	
56 00	6 208 672	62 394	83 00	9 220 306	13 612
30	6 264 346		30	9 276 146	
57 00	6 320 025	60 773	84 00	9 331 987	11 675
30	6 375 708		30	9 387 830	
58 00	6 431 395	59 134	85 00	9 443 673	9 735
30	6 487 087		30	9 499 517	

$\varphi$	$s_m$	$s_n$	$\varphi$	$s_m$	$s_n$
86°00'	9 555 362	7 791	89°00'	9 890 442	1 949
30	9 611 207		30	9 946 290	
87 00	9 667 053	5 846	90 00	10 002 137	0
30	9 722 900				
88 00	9 778 747	3 898			
30	9 834 594				

Полярный круг:  $s_m = 7\,385\,495$ ,  $s_n = 44\,407$  м.

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

ВЕЛИЧИНЫ  $\lg U$

$\varphi$	$\lg U$	$\varphi$	$\lg U$	$\varphi$	$\lg U$
0° 0'	0.000 0000	18° 0'	0.137 8405	36° 0'	0.291 1242
30	0.003 7646	30	0.141 8071	30	0.295 8032
1 0	0.007 5295	19 0	0.145 7854	37 0	0.300 5129
30	0.011 2950	30	0.149 7758	30	0.305 2539
2 0	0.015 0614	20 0	0.153 7787	38 0	0.310 0270
30	0.018 8289	30	0.157 7946	30	0.314 8331
3 0	0.022 5979	21 0	0.161 8236	39 0'	0.319 6729
30	0.026 3686	30	0.165 8664	30	0.324 5473
4 0	0.030 1414	22 0	0.169 9233	40 0	0.329 4572
30	0.033 9165	30	0.173 9946	30	0.334 4035
5 0	0.037 6942	23 0	0.178 0809	41 0	0.339 3870
30	0.041 4748	30	0.182 1825	30	0.344 4088
6 0	0.045 2587	24 0	0.186 2999	42 0	0.349 4698
30	0.049 0461	30	0.190 4334	30	0.354 5710
7 0	0.052 8373	25 0	0.194 5837	43 0	0.359 7135
30	0.056 6326	30	0.198 7510	30	0.364 8983
8 0	0.060 4324	26 0	0.202 9359	44 0	0.370 1266
30	0.064 2368	30	0.207 1389	30	0.375 3994
9 0	0.068 0463	27 0	0.211 3604	45 0	0.380 7179
30	0.071 8612	30	0.215 6009	30	0.386 0833
10 0	0.075 6817	28 0	0.219 8609	46 0	0.391 4970
30	0.079 5081	30	0.224 1409	30	0.396 9601
11 0	0.083 3408	29 0	0.228 4415	47 0	0.402 4739
30	0.087 1801	30	0.232 7631	30	0.408 0400
12 0	0.091 0264	30 0	0.237 1064	48 0	0.413 6596
30	0.094 8798	30	0.241 4718	30	0.419 3344
13 0'	0.098 7408	31 0	0.245 8599	49 0	0.425 0657
30	0.102 6097	30	0.250 2713	30	0.430 8551
14 0	0.106 4868	32 0	0.254 7066	50 0	0.436 7044
30	0.110 3725	30	0.259 1664	30	0.442 6151
15 0	0.114 2670	33 0	0.263 6513	51 0	0.448 5891
30	0.118 1708	30	0.268 1620	30	0.454 6282
16 0	0.122 0842	34 0	0.272 6990	52 0	0.460 7343
30	0.126 0075	30	0.277 2630	30	0.466 9093
17 0	0.129 9411	35 0	0.281 8548	53 0	0.473 1553
30	0.133 8853	30	0.286 4749	30	0.479 4744

$\varphi$	$\lg U$	$\varphi$	$\lg U$	$\varphi$	$\lg U$
54° 0'	0.485 8688	67° 0'	0.688 8565	80° 0'	1.055 1792
30	0.492 3408	30	0.698 6474	30	1.077 5592
55 0	0.498 8929	68 0	0.708 6473	81 0	1.101 1384
30	0.505 5275	30	0.718 8659	30	1.126 0549
56 0	0.512 2473	69 0	0.729 3139	82 0	1.152 4713
30	0.519 0550	30	0.740 0026	30	1.180 5822
57 0	0.525 9534	70 0	0.750 9442	83 0	1.210 6223
30	0.532 9455	30	0.762 1518	30	1.242 8785
58 0	0.540 0344	71 0	0.773 6394	84 0	1.277 7068
30	0.547 2234	30	0.785 4224	30	1.315 5563
59 0	0.554 5159	72 0	0.797 5172	85 0	1.357 0046
30	0.561 9155	30	0.809 9418	30	1.402 8124
60 0	0.569 4259	73 0	0.822 7156	86 0	1.454 0099
30	0.577 0510	30	0.835 8597	30	1.512 0415
61 0	0.584 7952	74 0	0.849 3974	87 0	1.579 0227
30	0.592 6625	30	0.863 3539	30	1.658 2331
62 0	0.600 6578	75 0	0.877 7572	88 0	1.755 1669
30	0.608 7858	30	0.892 6378	30	1.880 1241
63 0	0.617 0516	76 0	0.908 0297	89 0	2.056 2286
30	0.625 4606	30	0.923 9705	30	2.357 2666
64 0	0.634 0185	77 0	0.940 5021	90 0	$\infty$
30	0.642 7313	30	0.957 6712		
65 0	0.651 6054	78 0	0.975 5303		
30	0.660 6475	30	0.994 1387		
66 0	0.669 8649	79 0	1.013 5634		
30	0.679 2652	30	1.033 8811		

ПРИЛОЖЕНИЕ 8

ВЕЛИЧИНЫ  $N \operatorname{ctg} \varphi$

$\varphi$	$N \operatorname{ctg} \varphi$	$\varphi$	$N \operatorname{ctg} \varphi$	$\varphi$	$N \operatorname{ctg} \varphi$
0° 0'	$\infty$	9° 0'	40 273,95	18° 0'	19 636,50
30	730 874,7	30	38 118,36	30	19 068,99
1 10	365 409,8	10 0	36 176,48	19 0	18 530,34
30	243 575,9	30	34 417,76	30	18 018,33
2 0	182 649,8	11 0	32 817,22	20 0	17 530,95
30	146 086,8	30	31 354,25	30	17 066,40
3 0	121 705,3	12 0	30 011,63	21 0	16 623,04
30	104 284,7	30	28 774,92	30	16 199,40
4 0	91 214,64	13 0	27 631,89	22 0	15 794,13
30	81 044,96	30	26 572,15	30	15 406,00
5 0	72 905,53	14 0	25 586,76	23 0	15 033,89
30	66 242,74	30	24 668,02	30	14 676,77
6 0	60 687,17	15 0	23 809,27	24 0	14 333,71
30	55 983,54	30	23 004,71	30	14 033,84
7 0	51 949,22	16 0	22 249,24	25 0	13 686,37
30	48 450,34	30	21 538,41	30	13 380,57
8 0	45 386,51	17 0	20 868,27	26 0	13 085,76
30	42 680,95	30	20 235,33	30	12 801,31

φ	N ctg φ	φ	N ctg φ	φ	N ctg φ
27° 0'	12 526,65	49° 0'	5 555,123	71° 0'	2 202,806
30	12 261,25	30	5 458,108	30	2 140,583
28 0	12 004,59	50 0	5 362,525	72 0	2 078,720
30	11 756,23	30	5 268,328	30	2 017,203
29° 0'	11 515,72	51 0	5 175,473	73 0	1 956,021
30	11 282,67	30	5 083,917	30	1 895,162
30 0	11 056,70	52 0	4 993,620	74 0	1 834,615
30	10 837,46	30	4 904,542	30	1 774,367
31 0	10 624,62	53 0	4 816,645	75 0	1 714,407
30	10 417,87	30	4 729,893	30	1 654,725
32 0	10 216,93	54 0	4 644,250	76 0	1 595,310
30	10 021,53	30	4 559,683	30	1 536,150
33 0	9 831,401	55 0	4 476,159	77 0	1 477,235
30	9 646,317	30	4 393,645	30	1 418,555
34 0	9 466,048	56 0	4 312,111	78 0	1 360,100
30	9 290,384	30	4 231,527	30	1 301,859
35 0	9 119,124	57 0	4 151,866	79 0	1 243,823
30	8 952,079	30	4 073,098	30	1 185,981
36 0	8 789,069	58 0	3 995,197	80 0	1 128,325
30	8 629,928	30	3 918,138	30	1 070,844
37 0	8 474,495	59 0	3 841,895	81 0	1 013,529
30	8 322,619	30	3 766,443	30	956,371
38 0	8 174,157	60 0	3 691,759	82 0	899,360
30	8 028,973	30	3 617,821	30	842,488
39 0	7 886,937	61 0	3 544,605	83 0	785,745
30	7 747,928	30	3 472,090	30	729,122
40 0	7 611,829	62 0	3 400,256	84 0	672,611
30	7 478,529	30	3 329,082	30	616,202
41 0	7 347,924	63 0	3 258,547	85 0	559,887
30	7 219,911	30	3 188,634	30	503,657
42 0	7 094,397	64 0	3 119,323	86 0	447,503
30	6 971,290	30	3 050,595	30	391,417
43 0	6 850,502	65 0	2 982,434	87 0	335,391
30	6 731,951	30	2 914,822	30	279,415
44 0	6 615,559	66 0	2 847,743	88 0	223,481
30	6 501,247	30	2 781,179	30	167,582
45 0	6 388,945	67 0	2 715,115	89 0	111,707
30	6 278,583	30	2 649,535	30	55,849
46 0	6 170,094	68 0	2 584,425	90 0	0
30	6 063,415	30	2 519,768		
47 0	5 958,485	69 0	2 455,552		
30	5 855,246	30	2 391,761		
48 0	5 753,642	70 0	2 328,382		
30	5 653,816	30	2 265,402		

ЗНАЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА

Эллипсоид	$a$	$b$	$d = (a - b) \cdot a$
Красовского	6 378 245	6,356 863	1 : 298,3
Бесселя	6 377 397	6 356 079	1 : 299,2
Хейфорда	6 378 388	6 356 912	1 : 297,0
Кларка II	6 378 249	6 356 515	1 : 293,5
Кларка I	6 378 206	6 356 584	1 : 295,0
Эри	6 377 491	6 356 185	1 : 299,3
Эвереста	6 377 276	6 356 075	1 : 300,8

	$e^2$	$e'^2$
Эллипсоид Красовского	0,006 693 4	0,006 738 5
Эллипсоид Бесселя	0,006 674 3	0,006 719 2

ВЕЛИЧИНА РАДИУСА  $R$  СФЕРЫ ПРИ ОТОБРАЖЕНИИ НА НЕЙ  
ЗЕМНОГО ЭЛЛИПСОИДА

Изображение	Широта на сфере	Радиус сферы $R$ , м
Равноугольное	$\varphi'$	6 378 245
Равновеликое	$\varphi''$	6 371 116
Равнопромежуточное по меридианам	$\varphi'''$	6 367 558

ШИРОТЫ ТРОПИКОВ И ПОЛЯРНЫХ КРУГОВ  
НА ЭПОХУ 2000-го г.:

тропики . . . . .	$\pm 23^\circ 26' 21,4$
полярные круги	$\pm 66^\circ 33' 38,6$

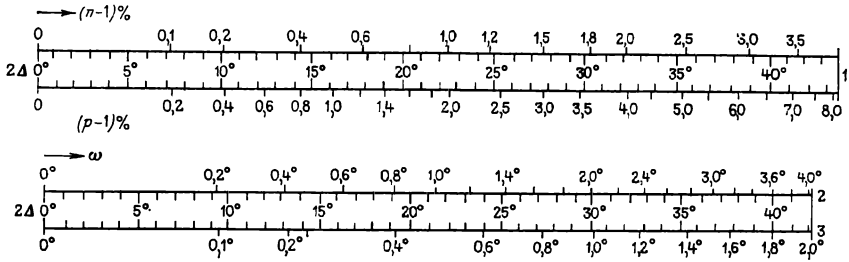
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ, НЕОБХОДИМЫЕ  
ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ

$\pi = 3,141\ 592\ 65$ ;  $e = 2,718\ 281\ 83$ ;  
 $\text{mod} = \lg e = 0,434\ 294\ 48$ ;  $1/\text{mod} = \ln 10 = 2,302\ 585\ 09$ ;  
 $\rho^\circ = 360/2\pi = 57,295\ 779\ 5^\circ$ ;  $\rho' = (360 \cdot 60)/2\pi = 3\ 437,746\ 8'$ ;  
 $\rho'' = (360 \cdot 60 \cdot 60)/2\pi = 206\ 264,81''$ ;  
 $\arcs 1^\circ = 1/\rho^\circ = 0,017\ 453\ 3$ ;  $\arcs 1' = 1/\rho' = 0,000\ 290\ 888\ 21$ ;  
 $\arcs 1'' = 1/\rho'' = 0,000\ 004\ 848\ 137$ .



ПРИЛОЖЕНИЕ 11

НОМОГРАММА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ  $(n-1)\%$ ,  
 $(p-1)\%$ ,  $\omega$  В КОНИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЯХ

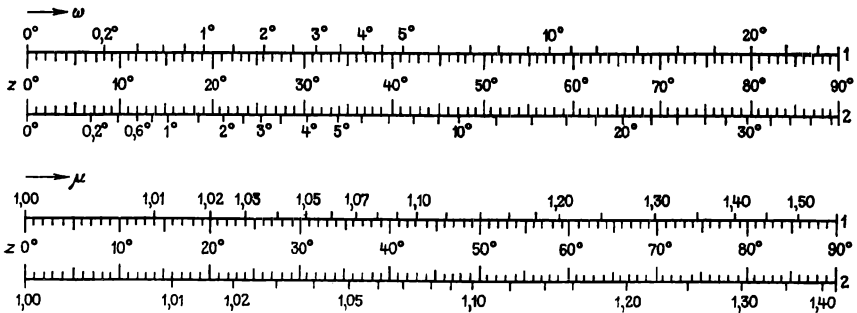


Номограммы для определения  $(n-1)\%$ ,  $(p-1)\%$ ,  $\omega$  в конических проекциях:

1 — равноугольных, 2 — равновеликих, 3 — равнопромежуточных

ПРИЛОЖЕНИЕ 12

НОМОГРАММА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ  $\omega$  и  $\mu_2$   
 В АЗИМУТАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЯХ



Номограммы для определения  $\omega$  и  $\mu_2$  в азимутальных проекциях:

1 — равнопромежуточных, 2 — равновеликих

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

---

1. *Асланикашвили А. Ф.* Метакартография. Основные проблемы, Тбилиси, Мецниерева, 1974.
2. *Беспалов Н. А.* Методы решения задач сферонической геодезии. М., Недра, 1980.
3. *Бугаевский Л. М.* Внешние перспективные азимутальные картографические проекции эллипсоида с позитивным изображением (проекции космических фотоснимков поверхностей небесных тел). — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1980, № 2, с. 85—92.
4. *Бугаевский Л. М.* Критерии оценки при выборе картографических проекций. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1982, № 3, с. 92—96.
5. *Васмут А. С.* Моделирование в картографии с применением ЭВМ. М., Недра, 1983.
6. *Вахрамеева Л. А.* Картография. М., Недра, 1981.
7. *Гинзбург Г. А., Салманова Т. Д.* Атлас для выбора картографических проекций. — Тр. ЦНИИГАиК, М., 1957. вып. 110.
8. *Картография.* (Сб. в серии «Итоги науки»), М., Наука, вып. 4—8.
9. *ГОСТ 21667—76.* — *Картография.* Термины и определения — Изд. Госкомитета стандартов СМ СССР, М., 1976.
10. *Конусова Г. И.* К вопросу о наилучших картографических проекциях. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1975, вып. 4, с. 105—110.
11. *Конусова Г. И.* О классификации картографических проекций по характеру искажений. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1975, вып. 3, с. 129—134.
12. *Соловьев М. Д.* Математическая картография. М., Недра, 1969.
13. *Старостин Ф. А., Вахрамеева Л. А., Бугаевский Л. М.* Обобщенная классификация картографических проекций по виду изображения меридианов и параллелей. — Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1981, № 6, с. 111—116.
14. *Урмаев Н. А.* Теория гомографического преобразования и ее применение к математической картографии и составлению карт. — Тр. ЦНИИГАиК, М., 1956, вып. 113.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

---

- Автоматизация**  
в математической картографии 225  
Автоматический координатограф 256  
Азимут 57  
Альмукантары 58  
Атлас Кирилова 6  
— Российский 6
- Большой чертеж** 6
- Вертикалы** 57  
Выбор проекций 213
- Главные направления** 26  
Главный масштаб 12
- Депо карт** 7
- Зенитное расстояние** 58
- Изображение эллипсоида на плоскости**  
равноугольное 33  
— равновеликое 33  
Изображение эллипсоида на поверхности шара 34  
— равноугольное 36, 43  
— равновеликое 38  
— равнопромежуточное 40  
— перспективное 44, 47  
Изоколы 30  
Изыскание наилучших и идеальных проекций 210  
Искажение длин 13  
— площадей 13  
— углов 14
- Картинная плоскость** 83  
Карта масштаба 1 : 1 000 000 155  
— масштаба 1 : 2 500 000 160  
— «столистая» 7  
— топографическая 166  
— Шуберта 7  
Классификация картографических проекций 48  
Коэффициенты Гаусса 22  
Критерий Иордана 30  
— Эйри 30  
Кривизна сечения первого вертикала 14  
— меридианного сечения 14
- Локсодромия 101
- Максимальное искажение углов 14, 31  
Масштаб по меридианам 13, 23  
— по параллелям 13, 23  
Математическая картография 4
- Номенклатура топографических карт** 170  
Нормальная сетка 50, 57
- Обратная задача математической картографии** 190  
Ортодромия 86  
Опознавание проекций 221
- Проекции картографические** 4  
— азимутальные 51, 75  
— Бонна 7, 129  
— Брауна 112  
— внешние 83, 92  
— видоизмененная простая поликоническая 155  
— Гаусса—Крюгера 9, 166  
— Гаусса—Крюгера для широкой полосы 172  
— Гаусса—Ламберта 108  
— гномоническая 83, 85  
— Голла 112  
— изоцилиндрическая 104  
— Каврайского 71  
— Кассини—Зольднера 108  
— Красовского 9, 71  
— конические 50, 60  
— косые 81  
— Лагранжа 6, 151  
— Ламберта 6, 82  
— Меркатора 5, 100  
— Мольвейде 122  
— Мюффлинга 7, 9  
— ортографическая 87, 92  
— перспективно-азимутальные сферы 83  
— — эллипсоида 88  
— — с негативным изображением 83, 88  
— — с позитивным изображением 83, 88  
— перспективно-цилиндрические 109  
— полиазимутальные 56  
— поликонические 53, 136  
— — получаемые по эскизам секток 142

- полицилиндрические 57
- поперечные 57
- Постеля 83
- производные 53
- произвольные 49
- простая поликоническая 138
- псевдоазимутальные 53, 135
- псевдоконические 52, 128
  
- псевдоцилиндрические 52, 113
- равновеликие 33, 48
- равнопромежуточные 49
- равноугольные 33, 48
- —, получаемые при помощи рядов 167
- — — при помощи эллиптических координат 181
- — с приспособляемой изоколой 176
- Сансона 5, 117
- Соловьева 113
- стереографическая 83, 86
- Урмаева 104
- Уэтча 111
- цилиндрические 50, 98
- Чебышева 185
- Эйлера 6
- Эккерта 120

Прямая задача математической картографии 189

Система координат географическая 11, 14

- геоцентрическая 14
- полярная геодезическая 17
- полярная сферическая 17, 57
- полярная сфероидическая 17
- прямоугольная 11
- эллиптическая 17, 181
- топоцентрическая горизонтальная 15
- трехосного эллипсоида 19
- изометрическая 37

Способ Гуда 127

Способы изыскания картографических проекций 189

Теорема Чебышева 8, 185

Уравнения меридианов 12

- параллелей 12
- Эйлера—Урмаева 190
- Тиссо—Урмаева 191

Условие ортогональности сетки 25

Характеристика проекции 167, 198

Частный масштаб длин 13, 22

— площадей 13, 30

Чертежная книга Сибири 6

Экстремальные масштабы длин 27

Эллипс искажений 27

## ОГЛАВЛЕНИЕ

---

Предисловие . . . . .	3
Введение . . . . .	4
<b>Глава I. Общая теория картографических проекций. Изображение эллипсоида вращения на плоскости . . . . .</b>	<b>11</b>
§ 1. Основные понятия об отображении эллипсоида (сферы) на плоскости . . . . .	11
§ 2. Основные системы координат, используемые в математической картографии . . . . .	14
§ 3. Вывод общей формулы частного масштаба. Масштабы по меридианам и параллелям . . . . .	22
§ 4. Вывод формулы азимута в проекции. Угол между меридианами и параллелями. Условие ортогональности сетки . . . . .	23
§ 5. Исследование изменения масштаба длин в данной точке. Главные направления . . . . .	26
§ 6. Эллипс искажений. Экстремальные масштабы. Меры искажения длин . . . . .	27
§ 7. Частный масштаб площадей . . . . .	30
§ 8. Максимальное искажение углов . . . . .	31
§ 9. Равноугольное и равновеликое отображение эллипсоида на плоскости . . . . .	33
<b>Глава II. Изображение эллипсоида вращения на поверхности шара . . . . .</b>	<b>34</b>
§ 10. Основные понятия об изображении эллипсоида вращения на поверхности шара . . . . .	34
§ 11. Равноугольное отображение эллипсоида на поверхности шара . . . . .	36
§ 12. Равновеликое и равнопромежуточное отображения эллипсоида на поверхности шара . . . . .	38
§ 13. Некоторые способы отображения, в которых меридианы и параллели эллипсоида не совпадают с их изображениями на сфере . . . . .	43
<b>Глава III. Классификация картографических проекций . . . . .</b>	<b>48</b>
§ 14. Классификация картографических проекций по характеру искажений . . . . .	48
§ 15. Классификация проекций по виду нормальной сетки меридианов и параллелей . . . . .	50
§ 16. Классификация проекций по ориентировке картографической сетки. Переход от географических координат к сферическим координатам косоугольной и поперечной систем; выбор полюсов этих систем . . . . .	57
<b>Глава IV. Конические проекции . . . . .</b>	<b>60</b>
§ 17. Основные положения и общие формулы конических проекций . . . . .	60
§ 18. Равноугольные нормальные конические проекции . . . . .	62
§ 19. Равновеликие нормальные конические проекции . . . . .	66
§ 20. Равнопромежуточные по меридианам нормальные конические проекции . . . . .	69
§ 21. О косых и поперечных конических проекциях/ . . . . .	73
<b>Глава V. Азимутальные и перспективно-азимутальные проекции . . . . .</b>	<b>75</b>
§ 22. Основные положения и общие формулы азимутальных проекций . . . . .	75

§ 23. Равноугольные азимутальные проекции . . . . .	77
§ 24. Равноугольные азимутальные проекции эллипсоида . . . . .	78
§ 25. Равновеликие азимутальные проекции . . . . .	80
§ 26. Равнопромежуточные по меридианам (меридианам) азимутальные проекции . . . . .	82
§ 27. Общая теория перспективно-азимутальных проекций сферы . . . . .	83
§ 28. Гномонические, стереографические и ортографические проекции . . . . .	85
§ 29. Перспективно-азимутальные проекции эллипсоида . . . . .	88
§ 30. Обобщенные формулы азимутальных проекций . . . . .	97
<b>Глава VI. Цилиндрические проекции . . . . .</b>	<b>98</b>
§ 31. Основные положения и общие формулы цилиндрических проекций . . . . .	98
§ 32. Нормальные равноугольные цилиндрические проекции, их свойства и применение . . . . .	100
§ 33. Нормальные равновеликие и равнопромежуточные по меридианам цилиндрические проекции . . . . .	103
§ 34. Произвольные цилиндрические проекции с заданным распределением искажений . . . . .	104
§ 35. Косые и поперечные цилиндрические проекции . . . . .	106
§ 36. Перспективно-цилиндрические проекции . . . . .	109
<b>Глава VII. Псевдоцилиндрические проекции . . . . .</b>	<b>113</b>
§ 37. Основные положения и общие формулы . . . . .	113
§ 38. Равновеликие псевдоцилиндрические проекции . . . . .	116
§ 39. Равновеликая синусоидальная псевдоцилиндрическая проекция с полюсами в виде точек . . . . .	117
§ 40. Равновеликая синусоидальная псевдоцилиндрическая проекция с полярными линиями . . . . .	118
§ 41. Равновеликая синусоидальная псевдоцилиндрическая проекция Каврайского . . . . .	120
§ 42. Равновеликая эллиптическая псевдоцилиндрическая проекция с полюсами в виде точек . . . . .	122
§ 43. Произвольная эллиптическая псевдоцилиндрическая проекция Каврайского . . . . .	124
§ 44. Применение способа Гуда в псевдоцилиндрических проекциях . . . . .	127
<b>Глава VIII. Псевдоконические и псевдоазимутальные проекции . . . . .</b>	<b>128</b>
§ 45. Основные положения и общие формулы псевдоконических проекций . . . . .	128
§ 46. Равновеликие псевдоконические проекции. Проекция Бонна . . . . .	129
§ 47. Картографические проекции с равноразделенными параллелями . . . . .	133
§ 48. Понятие о псевдоазимутальных проекциях . . . . .	135
<b>Глава IX. Поликонические проекции . . . . .</b>	<b>136</b>
§ 49. Общая теория поликонических проекций . . . . .	136
§ 50. Простая поликоническая проекция . . . . .	138
§ 51. Простая поликоническая проекция для узкой меридианной зоны . . . . .	140
§ 52. Произвольные поликонические проекции для карт мира, получаемые по эскизам картографических сеток . . . . .	142
§ 53. Проекция Лагранжа . . . . .	151
<b>Глава X. Проекции номенклатурных карт масштабов 1 : 1 000 000 и 1 : 2 500 000 . . . . .</b>	<b>155</b>
§ 54. Видоизмененная простая поликоническая проекция и ее применение для карты масштаба 1 : 1 000 000 . . . . .	155

§ 55. Проекция, используемые для создания карты мира масштаба 1 : 2 500 000 . . . . .	160
<b>Глава XI. Равноугольные проекции эллипсоида вращения на плоскости . . . . .</b>	<b>163</b>
§ 56. Общие сведения . . . . .	163
§ 57. Проекция Гаусса—Крюгера и ее применение для советских топографических карт . . . . .	166
§ 58. Разграфка и номенклатура советских топографических карт . . . . .	170
§ 59. Проекция Гаусса—Крюгера для широкой полосы . . . . .	172
§ 60. Равноугольные проекции с приспособляемой изоколой . . . . .	176
§ 61. Равноугольные проекции, получаемые при помощи эллиптических координат . . . . .	181
§ 62. Проекция Чебышева . . . . .	185
<b>Глава XII. Способы изыскания картографических проекций . . . . .</b>	<b>189</b>
§ 63. Понятия о прямой и обратной задачах математической картографии . . . . .	189
§ 64. Изыскание картографических проекций на основе решения прямой задачи математической картографии . . . . .	192
§ 65. Изыскание картографических проекций на основе решения обратной задачи математической картографии . . . . .	203
§ 66. Проблема изыскания наилучших и идеальных проекций . . . . .	210
<b>Глава XIII. Обоснование выбора проекций для конкретного задания. Способы определения проекций по виду сетки меридианов и параллелей . . . . .</b>	<b>213</b>
§ 67. Теоретические основы выбора картографической проекции . . . . .	213
§ 68. Определение проекций карт по виду сетки меридианов и параллелей . . . . .	221
<b>Глава XIV. Основные проблемы и направления автоматизации в математической картографии . . . . .</b>	<b>225</b>
§ 69. Вычисление картографических проекций с помощью ЭВМ . . . . .	225
§ 70. Преобразование картографических проекций исходных карт в заданные проекции . . . . .	230
§ 71. Автоматизированный выбор картографических проекций . . . . .	239
§ 72. Изыскание картографических проекций в автоматическом режиме в соответствии с заданными требованиями . . . . .	243
§ 73. Опознавание картографических проекций в автоматическом режиме . . . . .	245
§ 74. Автоматическое проектирование главного масштаба и компоновок карт . . . . .	247
§ 75. Автоматическое определение и введение редуций в результаты измерений по картам с учетом их математической основы . . . . .	251
§ 76. Автоматическое построение элементов математической основы . . . . .	255
Приложение 1. О точности вычислений . . . . .	257
Приложение 2. Задачи и примеры по вычислению картографических проекций . . . . .	259
Приложение 3. Средние радиусы кривизны $R$ , м . . . . .	269
Приложение 4. Радиусы параллелей $r$ , м . . . . .	270
Приложение 5. Величины $\lg r$ . . . . .	272
Приложение 6. Длины дуг меридианов $s_m$ от экватора до широты $\varphi$ и параллелей $s_n$ в $1^\circ$ , м . . . . .	273
Приложение 7. Величины $\lg U$ . . . . .	275
Приложение 8. Величины $N \operatorname{ctg} \varphi$ . . . . .	276
Приложение 9. Значения элементов земного эллипсоида. Величина радиуса $R$ сферы при отображении на ней земного эллипсоида. Широты тропи-	

пиков и полярных кругов на эпоху 2000-го г. . . . .	278
Приложение 10. Математические величины, необходимые для вычислений . . . . .	278
Приложение 11. Номограмма для определения $(n-1) \%$ , $(p-1) \%$ , $\omega$ в конических проекциях . . . . .	279
Приложение 12. Номограмма для определения $\omega$ и $\mu_2$ в азимутальных проекциях . . . . .	279
Список литературы . . . . .	280
Предметный указатель . . . . .	281



**Любовь Альвиановна Вахрамеева**  
**Лев Моисеевич Бугаевский**  
**Зоя Леонидовна Казакова**

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ КАРТОГРАФИЯ**

---

Редактор издательства **О. А. Селеннова**  
Художественный редактор **Г. Н. Юрчевская**  
Технический редактор **Л. А. Мурашова**  
Корректор **М. Е. Лукина**

**ИБ № 5922**

---

Сдано в набор 12.07.85. Подписано в печать 10.12.85. Т-22571.  
Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бумага тип. № 2. Гарнитура Литературная. Печать высокая. Усл.-печ. л. 18,0. Усл. кр.-отт. 18,0.  
Уч.-изд. л. 17,60. Тираж 5100 экз. Заказ 1389/201—15. Цена 90 коп.

---

Ордена «Знак Почета» издательство «Недра»,  
103633, Москва, К-12, Третьяковский проезд, 1/19

Ленинградская типография № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 191126, Ленинград, Социалистическая ул., 14.