

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ ФИЗИКИ ЗЕМЛИ ИМ. О.Ю. ШМИДТА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

А.В. Разин, А.Л. Собисевич

ГЕОАКУСТИКА СЛОИСТЫХ СРЕД

Москва
2012

УДК 530.343, 534.11

ББК 26.21

C55

Рецензент:
член-корреспондент РАН

А.В. Николаев

А.В. Разин, А.Л. Собисевич

C55 Геоакустика слоистых сред. – М.: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта Российской академии наук, 2012. – 210 с.

ISBN 978-5-91682-022-5

В книге изложены основы методов математического моделирования процессов формирования волновых полей в полубезграничных твердых телах, возбуждаемых как поверхностными, так и внутренними источниками различной физической природы. Сформулированы задачи динамической теории упругости для модели среды в виде однородного полупространства, покрытого пачкой однородных слоев, плоские границы которых параллельны, и на которых выполняются граничные условия типа «склейки». Анализируются особенности программной реализации развиваемых методов. Приведены результаты численных расчетов.

Достаточно внимания уделено теории возбуждения, распространения и взаимной трансформации акустических и упругих волн (объемных, поверхностных, боковых, вытекающих) при наличии границ раздела типа однородный газ – однородное изотропное твердое полупространство. Для случая гармонических осесимметричных источников выполнены расчеты мощностей излучения различных типов волн.

Монография предназначена для специалистов, работающих в области геофизики, сейсмологии и акустики, а также для студентов старших курсов и аспирантов соответствующих специальностей.

Содержание

Введение	7
Глава 1. Модельные краевые задачи теории упругости и вязкоупругости в геофизике	11
1.1. Задачи о возбуждении колебаний в изотропной геофизической среде, представляемой в виде многослойного полупространства	11
1.2. Решение вспомогательных краевых задач теории вязкоупругости.....	13
1.2.1. Задачи для изотропного полупространства.....	13
1.2.2. Задачи для изотропного слоя.....	21
1.3. Интегральные уравнения контактных задач, моделирующих взаимодействие поверхностного сейсмического излучателя с геофизической средой.....	24
Глава 2. Методы решения модельных динамических краевых задач геоакустики	27
2.1. Методы решения модельных динамических краевых задач для слоистого полупространства.....	27
2.1.1. Методы решения динамических задач для стратифицированного упругого полупространства.....	27
2.1.2. Решение динамической задачи теории упругости для многослойного полупространства.....	28
2.2. О некоторых особенностях, встречающихся в процессе изучения структуры волновых полей и резонансных свойств геологических структур.....	33
2.3. Плоская модельная задача.....	34
Глава 3. Возбуждение сейсмоакустических волн распределенными силовыми источниками, действующими вблизи границы раздела газ – твердое тело	37
3.1. Действие зависящих от времени сил, распределенных внутри упругой среды по плоскости, параллельной её границе.....	38
3.1.1. Постановка задачи и интегральные выражения для волновых полей.....	39
3.1.2. Мощность излучения волны Стонели, возбуждаемой распределенными гармоническими силовыми подповерхностными источниками.....	46
3.1.3. Возбуждение объемных гармонических упругих волн в твердом полупространстве подповерхностными силовыми источниками.....	51
3.1.4. Поля и мощность излучения поверхностной волны Рэлея, возбуждаемой гармоническими силами, действующими внутри твердого полупространства.....	54
3.2. Действие распределенных силовых источников на поверхность однородного упругого полупространства, граничащего с газом.....	61

3.2.1. Возбуждение волн Стонели распределенными силовыми источниками, действующими на границе раздела твердое тело – газ	61
3.2.2. Акустические волны, излучаемые в газ при действии на его границу с твердой средой гармонических сил	64
3.2.3. Асимптотики полей и энергетические характеристики упругих волн, возбуждаемых в твердом полупространстве распределенными поверхностными силовыми гармоническими источниками	66
3.2.4. Энергия упругих волн, возбуждаемых в твердом полупространстве нестационарными распределенными поверхностными силовыми источниками	71
Глава 4. Осесимметричная задача геоакустики слоистых сред	76
4.1. Осесимметричная модельная задача для многослойной упругой среды	76
4.2. Излучение сейсмоакустических волн источниками, действующими на поверхности контакта газообразной и твердой сред	81
4.2.1. Возбуждение волны Стонели при действии на границу раздела газ – твердое тело перпендикулярной к ней гармонической силы	81
4.2.2. Излучение поверхностной и вытекающей волн на границе газообразного и твердого полупространств	85
4.2.3. Особенности излучения волны Стонели на границе раздела газ – твердое тело	90
4.3. Поля и энергетические характеристики излучения сейсмоакустических волн, возбуждаемых подповерхностными точечными гармоническими источниками	98
4.3.1. Распределение мощности излучения по типам упругих волн, возбуждаемых в твердом полупространстве подповерхностным гармоническим силовым источником	98
4.3.2. Возбуждение акустических волн в атмосфере сейсмическим источником	104
4.4. Энергетические характеристики волн Лява, возбуждаемых в системе упругий слой – упругое полупространство	115
4.5. Возбуждение сейсмоакустических волн гармоническим силовым источником, действующим на границе жидкого слоя и упругого полупространства	120
4.5.1. Интегральные выражения для волновых полей	121
4.5.2. Полные мощности излучения мод в жидком слое и в упругом полупространстве	124
4.5.3. Мощности излучения продольной и поперечной сферических волн в упругом полупространстве	126
4.5.4. Парциальные мощности излучения мод в упругом полупространстве и в жидком слое	128

4.5.5. Численное исследование мощностей излучения сейсмоакустических волн в системе жидкий слой – упругое полупространство	131
Глава 5. Возбуждение сейсмических волн в геофизических средах, содержащих регулярные неоднородности	140
5.1. Вязкоупругое пространство с полостями канонических форм	140
5.1.1. Задача для вязкоупругого пространства с круговой цилиндрической полостью	140
5.1.2. Задача для вязкоупругого пространства со сферической полостью	145
5.2. Слоистое полупространство с полостями канонических форм	148
5.3. Методы решения задач для полостей сложной формы, расположенных в слоистом полупространстве	163
5.3.1. Полость в подстилающем полупространстве	164
5.3.2. Случай относительно сильного заглубления полости	173
5.3.3. Цилиндрическая полость в упругом слое	176
5.3.4. Колебания слоистого полупространства, включающего пакет слоев с цилиндрической неоднородностью	179
5.3.5. Полость на границе раздела сред	183
5.3.6. Особенности реализации метода граничных элементов	186
5.4. Рассеяние поверхностной волны Рэлея на слабоконтрастной неоднородности малых размеров в твердом полупространстве	189
5.4.1. Постановка задачи и качественный анализ эффективных источников рассеянных волновых полей	190
5.4.2. Рассеяние волны Рэлея на точечном подповерхностном возмущении плотности	195
Литература	203

Введение

Моделирование геодинамических процессов, наблюдаемых в реальной геофизической среде при возбуждении сейсмических волн как внешними, так и внутренними источниками различной природы (поверхностными и заглубленными сейсмическими источниками, приливными силами, волновыми явлениями в атмосфере, разнообразными техногенными процессами и др.), связано с необходимостью учета основных особенностей её внутреннего строения. Некоторые из этих особенностей могут быть определяющими с точки зрения распространения и трансформации сейсмической энергии. В этой связи задача моделирования геофизической среды представляется достаточно сложной и требует в каждом отдельном случае нахождения нетрадиционных решений, что связано, в первую очередь, с многообразием внутренних структур изучаемого объекта.

В последние годы в России активно развиваются математические методы моделирования геофизических процессов в литосфере и других геосферах. Одним из основных преимуществ этого нового направления, основанного на разработке и анализе механико-математических моделей, является возможность «индивидуального подхода» при изучении структурных особенностей строения конкретных областей реальной геофизической среды. Это позволяет выявить все эффекты, связанные непосредственно с данной особенностью. Математическое моделирование позволяет по-новому подойти и к постановке сложных экспериментальных работ, связанных с изучением волновых процессов в геофизической среде, дать правильное толкование наблюдаемым физическим процессам и различного рода аномальным сейсмическим явлениям. Последнее особенно важно, если учесть, что в натурном эксперименте регистрируется общая волновая картина в месте приема, где влияние всех элементов, ответственных за структуру результирующего сейсмического поля, сложным образом объединено. Именно поэтому зачастую бывает затруднительно представить однозначное объяснение получаемых результатов без привлечения теоретических методов.

Современные механико-математические модели геофизической среды достаточно многообразны. Они обладают различной степенью сложности и общности, что и определяет круг решаемых задач (см., например, [Селезнев, Собиевич, 1996; Собиевич, 2001]).

Простейшей моделью Земли является однородное изотропное упругое полупространство. Данная модель позволяет ответить на целый ряд фундаментальных вопросов, касающихся возбуждения сейсмических волн источниками различной физической природы, в частности, устанавливаемыми на поверхности грунта сеймовибраторами [Miller, Pursey, 1955; Коган, 1963; Бабешко, Зинченко, 1980; Николаев, 1981; Гуцин, Докучаев и др., 1981; Чичинин, 1984; Заславский, 2007]. К настоящему времени данная модель исследована достаточно подробно, однако, область ее применения ограничена. В первую очередь, имеет место ограничение «сверху» по частоте рассматриваемых сейсмических волн, когда длины волн становятся сравнимыми с характерными толщинами («мощностями») приповерхностных слоев Земли. Весьма существенно также, что модель в виде однородного полупространства не позволяет учесть реальные резонансные свойства геофизической среды. Тем не

менее, однородное полупространство является важной составной частью более реалистичных моделей.

Более сложной моделью Земли является модель в виде горизонтально-стратифицированного полупространства. В основе этой модели лежит предположение, что характерные горизонтальные масштабы изменения важных с точки зрения распространения сейсмических волн свойств Земли значительно превышают вертикальные. Другими словами, под обширными участками земной поверхности параметры вещества Земли существенно меняются с глубиной и незначительно варьируют в горизонтальном направлении. При исследовании распространения сейсмических волн на расстояния, гораздо меньшие радиуса Земли, можно пренебрегать кривизной земной поверхности и считать её локально плоской.

При рассмотрении волн в плоскострых средах традиционно используются две модели. Первая из них представляет среду в виде набора однородных слоев, имеющих разные толщины и характеризующихся различными наборами параметров. В сейсмологии принято располагать такую «пачку» слоев над однородным упругим полупространством. При этом на каждой из границ имеет место жесткий контакт, т. е. выполняются условия «склейки».

Вторая модель — это упругое полупространство, у которого плотность и скорости продольных и поперечных волн непрерывно меняются в направлении, перпендикулярном границе среды.

Выбор той или иной модели горизонтально-стратифицированной среды определяется конкретными целями исследования. Необходимо, однако, отметить, что в сейсмологии, где, как правило, слои имеют резкие границы, первая модель представляется более предпочтительной. Именно поэтому ниже мы будем рассматривать, главным образом, её. Иная ситуация имеет место в гидроакустике, где параметры морской среды могут меняться в пространстве практически непрерывно.

Модель Земли в виде пачки слоев, лежащих на однородном полупространстве, позволяет достаточно достоверно исследовать особенности возбуждения колебаний в геофизической среде поверхностными источниками с учетом резонансных свойств изучаемой структуры, а также исследовать процесс формирования волновых полей в среде (см., например, [Ворович и др., 1974; Бабешко и др., 1989]). В рамках данной модели могут быть исследованы особенности распространения поверхностных, пограничных и объемных (продольных и поперечных) волн, их трансформация и взаимодействие на границах слоев. Указанная модель является достаточно общей, и её дальнейшая разработка и изучение представляют обширное поле деятельности для исследователей. Кроме того, использование данной модели создает возможности для более детальной интерпретации экспериментальных данных, что представляет значительный практический интерес.

Одной из проблем, требующих своего разрешения при развитии методов моделирования геофизической среды, следует считать и весь комплекс задач, связанных с исследованием резонансных особенностей неоднородных слоистых структур. Резонансные свойства, обусловленные слоистостью, при возбуждении колебаний поверхностными источниками могут быть достаточно подробно изучены на основе модели слоистого полупространства. Открытыми при этом остаются вопросы корректного моделирования особенностей возбуждения колебаний заглубленными

источниками, а также изучения влияния имеющихся в реальной геофизической среде неоднородностей и полостей различной формы, природы и положения на процессы формирования тонкой структуры волновых полей и локальных резонансных особенностей. Следует указать, что при моделировании взаимодействия заглубленных источников с окружающей средой иногда описывают источник как сосредоточенную силу. Такой подход обладает недостатками, связанными с тем, что при этом существенно искажается поле смещений в ближней к источнику зоне, а также не учитываются резонансные свойства той полости (выработки), в которой излучающий элемент источника размещен. Представляется, что при моделировании заглубленных источников предпочтение следует отдавать модели слоистого полупространства с заглубленной полостью, на границу которой действует излучающий элемент сейсмоисточника.

По главам материал распределен следующим образом.

В первой главе рассмотрены модельные краевые задачи теории упругости. Сформулирована постановка задачи о вибрации штампа на поверхности полубезграничной упругой среды, представляющей собой набор однородных изотропных вязкоупругих слоев, лежащий на однородном изотропном вязкоупругом полупространстве, на плоскопараллельных границах которых выполняются условия жесткого контакта («склейки»). Подробно рассмотрены вспомогательные задачи о колебаниях однородного твердого полупространства и однородного слоя постоянной толщины. Указаны особенности постановок контактных задач, моделирующих взаимодействие поверхностного сейсмического излучателя с геофизической средой.

Вторая глава посвящена изложению методов решения модельных динамических задач геоакустики, постановки которых были сформулированы в первой главе. Представлена схема решения краевой задачи о возбуждении сейсмических колебаний в системе N упругих слоев, лежащих на однородном полупространстве. Описаны особенности программной реализации данной схемы на ЭВМ.

В третьей главе подробно аналитически исследована простейшая модель геологической среды, когда Земля представляется однородным изотропным идеально упругим полупространством, а атмосфера — однородным газом. Решена задача о распространении сейсмоакустических волн, возбуждаемых в твердом полупространстве и в граничащем с ним газе зависящими от времени силами, произвольно распределенными по некоторой площадке ограниченных размеров, которая расположена внутри твердого тела и ориентирована параллельно границе раздела этих двух сред. Детально проанализировано возбуждение объемных и поверхностных волн различными конфигурациями источников.

В четвертой главе последовательно изложена схема решения осесимметричной задачи о возбуждении сейсмических волн в многослойной геологической среде. Приведены результаты численных расчетов полей смещений для двухслойной и трехслойной полубезграничной сред. Решен ряд задач о распространении сейсмоакустических волн, возбуждаемых в однородном изотропном твердом полупространстве и в граничащем с ним однородном газе точечными гармоническими источниками. Подробно проанализировано возбуждение объемных и поверхностных волн для случаев расположения источников как на плоскости контакта двух сред, так и внутри твердой среды.

В пятой главе представлены решения задач о распространении упругих волн в средах, содержащих полости разных форм. Рассмотрены различные случаи расположения полостей относительно поверхности полубезграничной среды и границ слоев. Для полостей канонических форм выполнены расчеты волновых полей. В заключение пятой главы в борновском приближении метода возмущений исследовано рассеяние гармонической волны Рэлея на слабоконтрастной неоднородности малых по сравнению с длиной волны размеров, находящейся в твердом полупространстве вблизи его границы. Рассмотрен случай, когда материал неоднородности отличается от материала полупространства только плотностью. Получены выражения для полей смещений в рассеянных сферических продольной и поперечных (SV - и SH -поляризации) волнах. Детально исследовано рассеяние рэлеевской волны в рэлеевскую волну. Получены выражения для вертикальных и горизонтальных компонент вектора смещений в рассеянной рэлеевской волне, а также для её мощности излучения.

Модельные краевые задачи теории упругости и вязкоупругости в геофизике

1.1. Задачи о возбуждении колебаний в изотропной геофизической среде, представляемой в виде многослойного полупространства

Рассмотрим механико-математическую модель, представляющую собой пакет изотропных вязкоупругих слоев с плоскопараллельными границами, жестко соединенных между собой и с вязкоупругим подстилающим полупространством.

В рамках каждого изотропного слоя толщины h_j (рис. 1.1) вязкоупругая среда определяется плотностью ρ_j , коэффициентами Ламе λ_j, μ_j или скоростями распространения продольных и поперечных волн в среде

$$V_{pj} = \sqrt{\frac{\lambda_j + 2\mu_j}{\rho_j}}, \quad V - sj = \sqrt{\frac{\mu_j}{\rho_j}}, \quad (j = 2, \dots, n)$$

и тангенсом угла потерь в среде $\text{tg } \gamma$ [Лурье, 1955; Бреховских, 1957; Новацкий, 1975; Купрадзе и др., 1976]. Подстилающее полупространство $x \geq 0$ определяется теми же характеристиками с индексом 3.

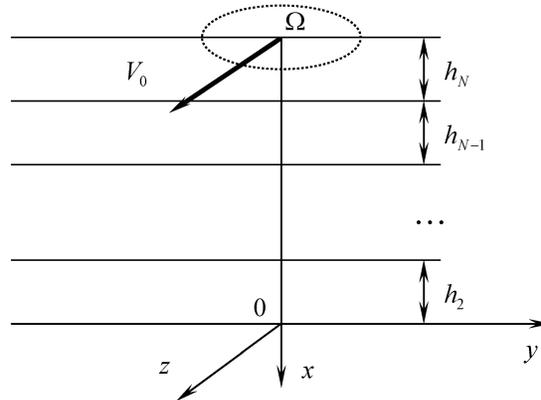


Рис. 1.1. Постановка задачи для многослойного полупространства

Движение среды в рамках каждого из слоев (полупространства) определяется динамическими уравнениями теории вязкоупругости в перемещениях — уравнениями Ламе [Лурье, 1970; Новацкий, 1975; Рекач, 1977]

$$(\lambda_j + 2\mu_j) \text{grad div } \vec{U}_j - \mu_j \text{rot rot } \vec{U}_j = \rho_j \frac{\partial^2 \vec{U}_j}{\partial t^2}. \quad (1.1.1)$$

Здесь $\vec{U}_j = \{u_x^{(j)}(x, y, z, t), u_y^{(j)}(x, y, z, t), u_z^{(j)}(x, y, z, t)\}$ — вектор смещения точек слоя с индексом j .

На поверхности среды $x = -H = -\sum_{i=2}^N h_j$ в некоторой области Ω приложена система распределенных усилий, моделирующая действие излучающего элемента поверхностного сейсмоисточника (излучающей плиты, штампа). Эта система усилий может иметь характер импульса давления, действующего в течение некоторого промежутка времени (модель нестационарного воздействия), а может носить осциллирующий с некоторой частотой ω характер (источник установившихся гармонических колебаний).

Следует отметить, что реально закон распределения напряжений под излучающей плитой поверхностного сейсмоисточника неизвестен и подлежит определению из решения интегрального уравнения (системы) контактной задачи. Отличие постановки контактной задачи от изложенного в данной части заключается в том, что задается закон смещения подошвы штампа (излучающей плиты-источника сейсмических колебаний), а закон распределения контактных напряжений подлежит определению. Однако, для построения интегрального уравнения (системы) контактной задачи необходимо получить решение так называемой однородной задачи, в которой закон распределения напряжений предполагают заданным. Постановка и решение такой задачи приводится ниже. Некоторые особенности решения контактных (смешанных) задач будут обсуждены отдельно.

Итак, при нестационарном воздействии будем иметь

$$\vec{\sigma} = \vec{T}(y, z, t), \quad \vec{\sigma} = \{\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}\}, \quad (1.1.2)$$

где $\vec{\sigma}$ — вектор напряжений на плоской поверхности. $\vec{T}(y, z, t)$ — заданная вектор-функция распределения напряжений в области Ω и во времени. При возбуждении установившихся гармонических колебаний с частотой ω можно записать

$$\vec{T}(y, z, t) = \vec{t}(y, z) \exp(-i\omega t). \quad (1.1.3)$$

Условия жесткого сцепления слоев между собой и с упругим полупространством приводит к непрерывности компонент векторов смещения и напряжения в среде при переходе через плоские границы раздела упругих параметров:

$$x = x_j, \quad j = 1, 2, \dots, N-1, \quad x_j = -\sum_{k=1}^j h_k \quad (h_1 \equiv 0).$$

Связь между компонентами вектора напряжения и перемещения определяется соотношениями закона Гука в декартовой прямоугольной системе координат [Рекач, 1977]:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(j)} = \lambda_j \theta_j + 1\mu_j \frac{\partial u_x^{(j)}}{\partial x}, \quad \sigma_y^{(j)} = \lambda_j \theta_j + 2\mu_j \frac{\partial u_y^{(j)}}{\partial y}, \quad \sigma_z^{(j)} = \lambda_j + \theta_j + 2\mu_j \frac{\partial u_z^{(j)}}{\partial z}, \\ -\tau_{xy}^{(j)} \mu_j \left(\frac{\partial u_x^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial u_y^{(j)}}{\partial x} \right), \quad \tau_{xz}^{(j)} \mu_j \left(\frac{\partial u_x^{(j)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(j)}}{\partial x} \right), \quad \tau_{yz}^{(j)} \mu_j \left(\frac{\partial u_y^{(j)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(j)}}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

Существенную роль в построении решения модельной задачи для полугораниченной среды играют условия, которым решение должно удовлетворять на бесконечности. Постановка вязкоупругой задачи применительно к рассматриваемым моделям требует выполнения условия не возрастания компонент векторов смещения и напряжения на бесконечности. Помимо этого, при рассмотрении уравнений идеальной теории упругости на бесконечности естественным является условие излучения упругих волн [Болотовский, Столяров, 1972; Ворович, Бабешко, 1979], для удовлетворения которого используем принцип предельного поглощения [Тихонов, Самарский, 1972].

Использование этого принципа требует построить решение вязкоупругой задачи для соответствующей области при тех же граничных условиях и в полученном решении совершить равномерный предельный переход при стремлении вязкости (или коэффициента диссипации) к нулю. Требование равномерности предельного перехода включает отсутствие скачка значения решения при предельном переходе. Ниже при построении решений модельных задач этот вопрос будет обсужден более конкретно.

Таким образом, при построении решения задачи для слоистого вязкоупругого полупространства необходимо получить решения краевых задач для вязкоупругого слоя и полупространства при различных типах нагружения, а затем произвести их «сшивку» — с учетом условий, заданных на дневной поверхности и границах раздела слоев между собой и с полупространством. Методика построения решений вспомогательных задач и их вид для конкретных случаев, представляющих практический интерес, будут подробно изложены ниже.

1.2. Решение вспомогательных краевых задач теории вязкоупругости

Остановимся подробнее на решении ряда вспомогательных модельных краевых задач теории упругости и вязкоупругости для различных областей, которые необходимы для решения модельных краевых задач, сформулированных в разделе 1.1. Поскольку решение вспомогательных модельных краевых задач требует привлечения достаточно широкого набора математических методов, изложение проведем первоначально на примере решения более простых задач с подробными промежуточными и вспомогательными выкладками, постепенно усложняя постановку как самой задачи, так и типа исследуемой области.

1.2.1. Задачи для изотропного полупространства

Рассмотрим изотропное полупространство, занимающее в декартовой прямоугольной системе координат область $z \geq 0$ (см. рис. 1.1). На границе полупространства в области $|y| \leq b$ задана система сдвиговых усилий, ориентированных вдоль оси Oz

$$x = 0, \quad |y| \leq b, \quad \tau_{xz} = X(y, t),$$

$$x = 0, \quad |y| > b, \quad \tau_{xz} = 0. \quad (1.2.1)$$

Подобный тип нагружения характерен при постановке сдвиговых (антиплоских) задач теории вязкоупругости, для которых отличны от нуля только компонента вектора смещения u_z и компонента вектора напряжения τ_{xz} .

Уравнения движения (1.1.1) при этом принимают вид:

$$\Delta u_z(x, y, t) = \frac{\rho}{\mu} \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (1.2.2)$$

На бесконечности задаются условия излучения энергии упругих волн. Граничные условия на плоской границе (1.2.1) с использованием соотношений закона Гука (1.1.4) примут вид

$$x = 0: \tau_{xz} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial x} = \begin{cases} X(y, t); & |y| \leq b, \\ 0; & |y| > b. \end{cases}$$

Решение сформулированной краевой задачи теории вязкоупругости строим с использованием метода интегральных преобразований [Диткин, Прудников, 1961; Снеддон, 1955; Уфлянд, 1967].

При постановке нестационарной задачи к уравнениям движения и граничным условиям применяем преобразование Фурье по времени. При этом преобразование Фурье от функции обозначаем чертой вверх. Так, для $u_z(x, y, t)$ получаем

$$\bar{u}_z(x, y, \omega) = \int_0^{+\infty} u_z(x, y, t) \exp(-i\omega t) dt.$$

Уравнение движения (1.2.2) после применения преобразования Фурье по времени принимает вид

$$\Delta \bar{u}_z(x, y, \omega) = -i \frac{\rho \omega^2}{\mu} \bar{u}_z(x, y, \omega). \quad (1.2.3)$$

При исследовании процесса генерации установившихся гармонических колебаний в полупространстве, как правило, используется принцип комплексной амплитуды [Тихонов, Самарский, 1972], заключающийся в том, что вместо гармонических колебаний по закону $\cos(\omega t)$ ($\sin(\omega t)$) рассматривается $\exp(\pm i\omega t)$. Подобный закон переводит решение из вещественного в комплексное. После решения краевой задачи получаем комплекснозначную амплитудную функцию решения. Умножая её на $\exp(\pm i\omega t)$, в результирующем соотношении берем соответственно действительную (мнимую) часть полученного решения.

Предположим, что нагрузка, генерирующая в полупространстве установившиеся гармонические колебания, изменяется во времени по следующему закону:

$$x = 0: \tau_{xz} = X^*(y) \exp(-i\omega t).$$

Тогда смещение точек области будет определяться соотношением

$$u_z(x, y, t) = u_z^*(x, y, \omega) \exp(-i\omega t). \quad (1.2.4)$$

Подставляя последнее соотношение в уравнения движения (1.2.2), приходим к уравнению (1.2.3) с точностью до замены черты вверх, обозначающей преобразование Фурье по времени, на звездочку, характеризующую амплитудную функцию смещения среды при установившихся гармонических колебаниях по закону (1.2.4). Таким образом, преобразование Фурье по времени от функции смещения точки вязкоупругой области при анализе нестационарного процесса и амплитудная функция смещения точки той же области при исследовании режима гармонических установившихся колебаний удовлетворяют одному и тому же уравнению движения, получаемому из уравнений Ламе.

Сделанный вывод справедлив для общей постановки краевых задач теории упругости и вязкоупругости, что легко проверяется практически и лежит в основе методов гармонического анализа, широко используемых на практике.

Остановимся подробнее на исследовании установившихся гармонических колебаний.

Для удобства звездочку, определяющую амплитудную функцию смещения (или черту вверх, обозначающую преобразование Фурье по времени) ниже по тексту опустим. Рассмотрим краевую задачу для уравнения (1.2.3) с граничными условиями

$$\begin{aligned} x = 0: \quad \mu \frac{\partial u_z}{\partial x} &= X(y), \quad |y| \leq b; \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0, \quad |y| > b. \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

На бесконечности амплитудная функция смещения должна убывать (также должны отсутствовать волны, переносящие энергию из бесконечности).

Как уже отмечалось ранее, для идеально упругой среды при удовлетворении условиям излучения на бесконечности используем принцип предельного поглощения [Тихонов, Самарский, 1972; Ворovich, Бабешко, 1979].

Исследуемая область не ограничена по координате y , что позволяет использовать метод интегральных преобразований. Применяя преобразование Фурье по y (β — параметр преобразования) к уравнениям движения (1.2.3) и граничным условиям (1.2.5), получаем

$$\frac{d^2 \tilde{u}_z(x, \beta)}{dx^2} - (\beta^2 - \theta^2) \tilde{u}_z(x, \beta) = 0, \quad \frac{d\tilde{u}_z(x, \beta)}{dx} = \mu^{-1} \tilde{X}(\beta), \quad x = 0.$$

Здесь

$$\tilde{u}_z(x, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} u_z(x, y) \exp(i\beta y) dy, \quad \tilde{X}(\beta) = \int_{-b}^{+b} X(y) \exp(i\beta y) dy,$$

$\theta = \omega a / V_s$, $V_s = \sqrt{\mu / \rho}$ — скорость распространения сдвиговых волн в среде.

Замечание: область приложения нагрузки может быть $b = \infty$.

Все линейные переменные приведены к безразмерному виду. Переход к размерным величинам осуществляется умножением на величину a , которая определяет некоторый характерный линейный параметр, область приложения нагрузки.

Решение полученного волнового уравнения имеет вид

$$\tilde{u}_z(x, \beta) = C_1(\beta) \exp(\sigma x) + C_2(\beta) \exp(-\sigma x).$$

Здесь $\sigma = \sqrt{\beta^2 - \theta^2}$. Учитывая, что решение должно убывать с глубиной (при $x \rightarrow +\infty$), получаем $C_1 = 0$. Для определения C_2 используем граничное условие, удовлетворяя которому получаем

$$C_2(\beta) = (\mu\sigma)^{-1} \tilde{X}(\beta),$$

$$\tilde{u}_z(x, \beta) = \frac{\tilde{X}(\beta)}{\mu\sigma} \exp(-i\sigma x).$$

Для получения решения сформулированной краевой задачи необходимо к последнему соотношению применить обратное преобразование Фурье. В результате имеем

$$u_z(x, y) = (2\pi\mu)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^{-1} \tilde{X}(\beta) \exp[-i(\sigma x - \beta y)] d\beta. \quad (1.2.6)$$

Полученное соотношение является интегральным представлением амплитудной функции смещения, дающим точное решение краевой задачи об установившихся гармонических сдвиговых колебаниях однородного вязкоупругого полупространства. Напомним, что для вязкоупругой среды коэффициенты Ламе являются комплексными величинами. При этом, как легко видеть, подынтегральная функция не имеет особенностей на вещественной оси (оси интегрирования).

Следует отметить, что вид функции, описывающей закон распределения нагрузки на поверхности — $X(y)$, вообще говоря, произволен. Для реализации изложенного алгоритма требуется только, чтобы она принадлежала классу суммируемых функций, что физически приводит к ограниченности энергии, генерируемой этим источником в среде за любой конечный промежуток времени. Это ограничение является естественным при моделировании реальных процессов.

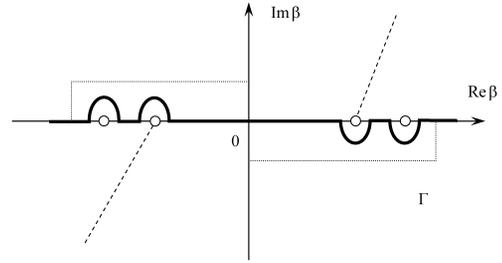
Решение соответствующей задачи для идеально упругого полупространства получаем в соответствии с принципом предельного поглощения [Ворович, Бабешко, 1979; Ваймберг, 1966] из (1.2.6) в результате равномерного предельного перехода при стремлении вязкости к нулю. При этом постоянные Ламе становятся вещественными величинами, и на оси интегрирования появляются точки ветвления $\beta = \pm\theta$, обусловленные радикалом σ (отметим, что в более сложных — плоской, осесимметричной и пространственной — постановках появляется еще и вещественный однократный полюс — полюс Рэлея).

Требование равномерности предельного перехода определяет деформацию контура интегрирования в комплексную плоскость следующим образом [Селезнев, 1975]:

— контур интегрирования Γ обходит все положительные вещественные особенности (полюсы и точки ветвления) подынтегральной функции в нижней полуплоскости, отрицательные — в верхней, а на остальной части совпадает с вещественной осью (рис. 1.2).

Это связано с тем, что при задании гармонических колебаний по закону $\exp(-i\omega t)$ все положительные вещественные особенности выходят при предельном переходе на вещественную ось из верхней полуплоскости комплексной плоскости параметра β , а отрицательные — из нижней.

Рис. 1.2. Выбор контура интегрирования Γ в решении задачи для идеально упругой среды при возбуждении гармонических установившихся колебаний по закону $\exp(-i\omega t)$. Пунктиром нанесен вид контура интегрирования, более удобный в численной реализации. Существенно, что в области между прямоугольным контуром (пунктир) и контуром Γ отсутствуют полюсы подынтегральной функции интегрального представления решения



Таким образом, интегральное представление решения задачи возбуждения установившихся гармонических антиплоских (сдвиговых) колебаний в однородном полупространстве имеет вид (1.2.6), где интегрирование по вещественной оси заменяется интегрированием по комплексному контуру Γ . Последнее не увеличивает сложности практических расчетов, так как в любом случае необходимо использовать процедуры счета комплекснозначных функций комплексного аргумента.

Существенным является однозначное определение ветви радикала σ . При решении дифференциального уравнения (1.2.3) фактически было выбрано положительное вещественное значение радикала при $|\beta| > \theta$. Условие непрерывности функции вдоль контура интегрирования определяет, что при $|\beta| < \theta$ следует положить $\sigma = -i\sqrt{\theta^2 - \beta^2}$.

Изложенная схема практически без изменений переносится на решение задач для слоя или полупространства в более сложной (плоской, осесимметричной и пространственной) постановках. Существенно увеличивается только объем производимых при этом выкладок и сложность подынтегральных функций интегрального представления решения.

Приведем в краткой форме схему построения решения задачи для полупространства в пространственной постановке, обращая внимание на те моменты, которые отличают её от рассмотренной выше.

Пусть вязкоупругая среда занимает в декартовой системе координат область $x \geq 0$. На поверхности области $x = 0$ заданы граничные условия в напряжениях типа (1.1.2). Движение среды описывается динамическими уравнениями Ламе (1.1.1) в пространственной постановке, которые в координатной форме можно записать в виде следующей системы

$$\begin{aligned} \mu_j \Delta u_x^{(j)} + (\lambda_j + \mu_j) \frac{\partial \theta^{(j)}}{\partial x} &= \rho_j \frac{\partial^2 u_x^{(j)}}{\partial t^2}, \\ \mu_j \Delta u_y^{(j)} + (\lambda_j + \mu_j) \frac{\partial \theta^{(j)}}{\partial y} &= \rho_j \frac{\partial^2 u_y^{(j)}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

$$\mu_j \Delta u_z^{(j)} + (\lambda_j + \mu_j) \frac{\partial \theta^{(j)}}{\partial z} = \rho_j \frac{\partial^2 u_z^{(j)}}{\partial t^2},$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — трёхмерный оператор Лапласа в декартовой системе координат, $\theta^{(j)} = \frac{\partial u_x^{(j)}}{\partial x} + \frac{\partial u_y^{(j)}}{\partial y} + \frac{\partial u_z^{(j)}}{\partial z}$.

Граничные условия задачи (1.1.2) применительно к моделированию процесса возбуждения колебаний в геофизической среде поверхностным источником можно описать следующим образом:

$$\begin{aligned} x = 0: \quad & \{y, z\} \subset \Omega, \quad \sigma_x = T_1(z, y) e^{-i\omega t}, \\ & \tau_{xy} = T_2(z, y) e^{-i\omega t}, \quad \tau_{xz} = T_3(z, y) e^{-i\omega t}, \\ & \{y, z\} \notin \Omega, \quad \vec{\sigma}_1 = 0, \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

где $\vec{\sigma}_1 \{ \sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz} \}$ — вектор напряжений на плоской границе.

На бесконечности задаются условия излучения энергии упругих волн. При изучении рассматриваемого класса областей (слой, полупространство), как отмечалось, целесообразно использовать аппарат интегральных преобразований Фурье по координатам, изменяющимся на бесконечном интервале [Снеддон, 1955; Уфлянд, 1967]. Однако применение двумерного преобразования Фурье к трёхмерным уравнениям Ламе (1.1.1), (1.2.7) приводит к сложной системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Этот путь следует признать сложным. В практических приложениях принято в процессе анализа использовать представление решения, аналогичное разбиению решения статической задачи на бигармоническую, вихревую и потенциальную составляющие [Лурье, 1955].

Компоненты вектора смещения точки области u_x, u_y при этом ищем в виде

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y}, \\ u_y &= \frac{\partial a_1}{\partial y} - \frac{\partial a_2}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Делая эту замену, в результате ряда громоздких, но несложных преобразований уравнения Ламе (1.2.7) трансформируются в следующую систему уравнений для определения функций a_1, a_2, u_z

$$(\lambda + 2\mu) \Delta^* a_1 + \mu \frac{\partial^2 a_1}{\partial z^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \rho \frac{\partial^2 a_1}{\partial t^2} = 0,$$

$$\mu \Delta^* a_2 + \mu \frac{\partial^2 a_2}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial^2 a_2}{\partial t^2} = 0,$$

$$(\lambda + \mu) \Delta^* \frac{\partial a_1}{\partial z} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \mu \Delta^* u_z - \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0,$$

где $\Delta^* = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Рассмотрим режим установившихся гармонических колебаний (в соответствии с (1.2.8)) с частотой ω по закону $\exp(-i\omega t)$. Тогда вектор смещения ищем в виде

$$u(x, y, z, t) = \tilde{u}(x, y, z) \exp(-i\omega t).$$

Применяя к уравнениям последней системы двумерное преобразование Фурье по координатам z и y (параметры преобразования соответственно α и β), используя свойства преобразования Фурье [Снеддон, 1955; Уфлянд, 1967] и условия затухания решений на бесконечности, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для определения $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{u}_z$ следующей структуры:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dx^2} - \sigma_1^2 \right) \left(\frac{d^2}{dx^2} - \sigma_2^2 \right) \tilde{a}_1 &= 0, \\ \left(\frac{d^2}{dx^2} - \sigma_2^2 \right) \tilde{a}_2 &= 0, \\ \tilde{u}_z &= [i\alpha(\lambda + \mu)]^{-1} \left\{ (\lambda + 2\mu) \left(\frac{d^2}{dx^2} - \beta^2 \right) \tilde{a}_1 - \mu(\alpha^2 - \theta_2^2) \tilde{a}_1 \right\}. \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\sigma_j^2 = \alpha^2 + \beta^2 - \theta_j^2, \quad \theta_1^2 = \rho\omega^2/(\lambda + 2\mu), \quad \theta_2^2 = \rho\omega^2/\mu,$$

$$\tilde{u}_z = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_z \exp(i(\alpha z + \beta y)) dy dz.$$

Решение первых двух уравнений представляется возможным записать в виде:

$$\tilde{a}_1(\alpha, \beta, x) = C_1 \exp(\sigma_1 x) + C_2 \exp(-\sigma_1 x) + C_3 \exp(\sigma_2 x) + C_4 \exp(-\sigma_2 x),$$

$$\tilde{a}_2(\alpha, \beta, x) = C_5 \exp(\sigma_2 x) + C_6 \exp(-\sigma_2 x).$$

Выражение для $\tilde{u}_z(\alpha, \beta, x)$ определяется третьим соотношением последней системы при подстановке в него $\tilde{a}_n(\alpha, \beta, x)$. Выражения, описывающие \tilde{u}_x, \tilde{u}_y , получаем из (1.2.9) после применения двумерного преобразования Фурье по координатам y, z в виде

$$\tilde{u}_x = \frac{d\tilde{a}_1}{dx} = -i\beta\tilde{a}_2,$$

$$\tilde{u}_y = -i\beta\tilde{a}_1 - \frac{d\tilde{a}_2}{dx}.$$

В результате несложных, но достаточно громоздких выкладок, будем иметь

$$\begin{aligned} \tilde{u}_x(\alpha, \beta, x) &= C_1\sigma_1 \exp(\sigma_1 x) - C_2\sigma_1 \exp(-\sigma_1 x) + (-i\beta C_5 + \sigma_2 C_3) \exp(\sigma_2 x) - \\ &\quad - (i\beta C_6 + \sigma_2 C_4) \exp(-\sigma_2 x), \\ \tilde{u}_y(\alpha, \beta, x) &= -i\beta[C_1 \exp(\sigma_1 x) + C_2 \exp(-\sigma_1 x)] - \\ &\quad - (i\beta C_3 + \sigma_2 C_5) \exp(\sigma_2 x) - (i\beta C_4 - \sigma_2 C_6) \exp(-\sigma_2 x), \quad (1.2.10) \\ \tilde{u}_z(\alpha, \beta, x) &= [i\alpha(\lambda + \mu)]^{-1} \left\{ [(\lambda + \mu)\alpha^2 - \mu\beta^2] [C_1 \exp(\sigma_1 x) + C_2 \exp(-\sigma_1 x)] + \right. \\ &\quad \left. + [(\lambda + \mu)\sigma_2^2 - (\lambda + 2\mu)\beta^2] [C_3 \exp(\sigma_2 x) + C_4 \exp(-\sigma_2 x)] \right\}. \end{aligned}$$

Здесь величины $C_j = C_j(\alpha, \beta)$, $j = 1, 2, \dots, 6$, произвольны и подлежат определению при удовлетворении граничным условиям соответствующей краевой задачи.

Приведенные выше преобразования имеют общий характер и ограничены только тем, что область, занимаемая вязкоупругой средой, не ограничена по координатам y, z . Поэтому приведенные соотношения будут использоваться не только при построении решения краевой задачи для полупространства, но и для задачи возбуждения колебаний в слое.

Остановимся более детально на последнем этапе построения решения о возбуждении колебаний в вязкоупругом полупространстве — определении произвольных функций $C_j(\alpha, \beta)$ из граничных условий (1.2.8).

Анализируя условия убывания решения с глубиной ($x \rightarrow +\infty$) приходим к результату, что $C_j(\alpha, \beta) \equiv 0$, $j = 1, 3, 5$. Для определения оставшихся трех неизвестных функций используем граничные условия (1.2.8) после применения к ним двумерного преобразования Фурье по координатам y, z . В результате таких построений получаем систему трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными. Определитель этой системы $\Delta_1(u)$, $u^2 = \alpha^2 + \beta^2$, описывает дисперсионное уравнение задачи — уравнение Рэлея.

Решение полученной системы линейных алгебраических уравнений позволяет получить выражение преобразования Фурье компонент вектора амплитудной функции смещения точек полупространства типа $\tilde{u}_j(\alpha, \beta, x)$. Отсюда в результате применения обратного преобразования Фурье, приходим к интегральному представлению решения задачи в следующем виде:

$$u_j^{(1)}(x, y, z) = \frac{a}{4\pi^2\mu_1} \iint_{\Gamma} \sum_{l=1}^3 K_{jl}^{(1)}(\alpha, \beta, x) \tilde{T}_j(\alpha, \beta) e^{-i(\alpha z + \beta y)} d\alpha d\beta, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.2.11)$$

где

$$\begin{aligned} u_x &= u_1, \quad u_y = u_2, \quad u_z = u_3, \\ K_{11}^{(1)}(\alpha, \beta, x) &= \sigma_{11}\Delta_1^{-1}(u)\{-(u^2 + \sigma_{12}^2)e^{-\sigma_{11}x} + 2u^2e^{-\sigma_{12}x}\}, \\ K_{12}^{(1)} &= i\beta\Delta_1^{-1}\{-2\sigma_{11}\sigma_{12}e^{-\sigma_{11}x} + (u^2 + \sigma_{12}^2)e^{-\sigma_{12}x}\}, \\ K_{13}^{(1)} &= i\alpha\Delta_1^{-1}(u)\{-2\sigma_{11}\sigma_{12}e^{-\sigma_{11}x} + (u^2 + \sigma_{12}^2)e^{-\sigma_{12}x}\}, \\ K_{21}^{(1)} &= i\beta\Delta_1^{-1}(u)\{-(u^2 + \sigma_{12}^2)e^{-\sigma_{11}x} + 2\sigma_{11}\sigma_{12}e^{-\sigma_{12}x}\}, \\ K_{22}^{(1)} &= \alpha^2\sigma_{12}^{-1}u^{-2}e^{-\sigma_{12}x} - \beta^2\sigma_{12}u^{-2}\Delta_1^{-1}(u)\{-2u^2e^{-\sigma_{12}x} + (u^2 + \sigma_{12}^2)e^{-\sigma_{12}x}\}, \\ K_{31}^{(1)} &= -i\alpha\Delta_1^{-1}(u)\{(\sigma_{12}^2 + u^2)e^{-\sigma_{11}x} - 2\sigma_{11}\sigma_{12}e^{-\sigma_{12}x}\}, \\ K_{32}^{(1)} &= \alpha\beta(u^{-2}\Delta_1^{-1}(u)\{2u^2\sigma_{12}e^{-\sigma_{11}x} - \sigma_{12}(u^2 + \sigma_{12}^2)e^{-\sigma_{12}x}\} + \\ &\quad + \sigma_{12}^{-1}\Delta_1^{-1}(u)u^{-2}e^{-\sigma_{21}x}), \\ K_{33}^{(1)} &= \alpha^2\sigma_{12}u^{-2}\Delta_1^{-1}(u)(-(u^2 + \sigma_{12}^2)e^{-\sigma_{12}x} + 2u^2e^{-\sigma_{11}x}) - \beta^2u^{-2}\sigma_{12}^{-1}e^{-\sigma_{11}x}, \\ \Delta_1(u) &= (u^2 + \sigma_{12}^2)^2 - 4u^2\sigma_{11}\sigma_{12}, \\ \sigma_{1j}^2 &= u^2 - \theta_{j1}^2, \quad \theta_{11}^2 = \rho_1\omega^2a^2(\lambda_1 + 2\mu_1)^{-1}; \quad \theta_{12}^2 = \rho_1\omega^2a^2\mu_1^{-1}. \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

ρ_1, λ_1, μ_1 — соответственно плотность и параметры Ламе полупространства,

$$\tilde{T}_j(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} T_j(y, z) \exp[i(\alpha z + \beta y)] dy dz.$$

Контур интегрирования Γ в представлении (1.2.11) для случая вязкоупругой среды совпадает с вещественной осью по каждому из параметров α, β ($\alpha, \beta \in (-\infty, +\infty)$). В случае идеально упругой среды контур интегрирования имеет вид, представленный на рис. 1.2.

Таким образом, схема построения решения пространственной задачи полностью идентична схеме, реализованной при решении сдвиговой (акустической) задачи. Отличие заключается лишь в громоздкости промежуточных выкладок. Обсуждение вопросов, связанных с практической реализацией полученного решения и особенностями его поведения будет проведено ниже.

1.2.2. Задача для изотропного слоя

При построении решения задачи для изотропного слоя в пространственной постановке используем метод интегральных преобразований и полученные выше соотношения (1.2.10).

Пусть вязкоупругий слой занимает в декартовой системе координат область $x \in [-h, 0]$. На границу области действуют усилия

$$x = 0 : \quad \sigma_x = X_1(y, z) e^{-i\omega t}, \quad \tau_{yx} = X_2(y, z) e^{-i\omega t}, \quad \tau_{zx} = X_3(y, z) e^{-i\omega t}, \quad (1.2.13)$$

$$x = -h : \quad \sigma_x = X_4(y, z) e^{-i\omega t}, \quad \tau_{yx} = X_5(y, z) e^{-i\omega t}, \quad \tau_{zx} = X_6(y, z) e^{-i\omega t}.$$

Вектор смещения точек слоя, как и ранее, обозначаем

$$\vec{U}_2 = \{u_x^{(2)}, u_y^{(2)}, u_z^{(2)}\} = \{u_1^{(2)}(x, y, z), u_2^{(2)}(x, y, z), u_3^{(2)}(x, y, z)\} e^{-i\omega t}.$$

В общем случае вектор смещения точек слоя должен удовлетворять уравнениям движения (1.1.1), (1.2.7) и граничным условиям (1.2.13) (с учетом соотношений закона Гука (1.1.4)).

При построении решения сформулированной краевой задачи используем аппарат интегральных преобразований Фурье и соотношения типа (1.2.10).

Используя закон Гука и применяя к указанным соотношениям двумерное преобразование Фурье по координатам y, z получаем соотношения, которые подставляем в полученные выше выражения для компонент вектора смещения (1.2.10). После ряда преобразований имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_x^{(2)} = & \mu \{f_3(\alpha, \beta)[C_1 \exp(\sigma_1 x) + C_2 \exp(-\sigma_1 x)] + \\ & + [f_4(\alpha, \beta)C_3 - 2i\beta\sigma_2 C_5] \exp(\sigma_2 x) + [f_4(\alpha, \beta)C_4 + 2i\beta\sigma_2 C_6] \exp(-\sigma_2 x)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_{yx}^{(2)} &= \mu\{-2i\beta\sigma_1 C_1 \exp(\sigma_1 x) + 2i\beta\sigma_1 C_2 \exp(-\sigma_1 x) + [-(\beta^2 + \sigma_2^2)C_5 - \\ &\quad - 2i\beta\sigma_2 C_3] \exp(\sigma_2 x) + [(\beta^2 - \sigma_2^2)C_6 + 2i\beta\sigma_2 C_4] \exp(-\sigma_2 x)\}, \\ \tilde{\tau}_{xz}^{(2)} &= \mu\{f_1(\alpha, \beta)[C_1 \exp(\sigma_1 x) - C_2 \exp(-\sigma_1 x)] + [f_2(\alpha, \beta)C_3 - \\ &\quad - \alpha\beta C_5] \exp(\sigma_2 x) - [f_2(\alpha, \beta)C_4 + \alpha\beta C_6] \exp(-\sigma_2 x)\}.\end{aligned}$$

Вид функций $f_j(\alpha, \beta)$ приведен ниже.

Из последних соотношений получаем систему шести линейных алгебраических уравнений для определения шести неизвестных функций $C_j(\alpha, \beta)$, $j = 1, 2, \dots, 6$. Используя граничные условия (1.2.13), в преобразованиях Фурье решение системы можно представить в общем виде

$$\tilde{u}_j^{(2)}(\alpha, \beta, x) = \Delta_2^{-1}(\alpha, \beta) \sum_{k=1}^6 d_{jk}^{(2)}(\alpha, \beta, x) \tilde{X}_k(\alpha, \beta) / \mu, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.2.14)$$

где

$$\begin{aligned}d_{1k}^{(2)}(\alpha, \beta, x) &= (\sigma_2 \Delta_{5k}^{(2)} - i\beta \Delta_{1k}^{(2)}) \exp(\sigma_2 x) - (\sigma_2 \Delta_{6k}^{(2)} + i\beta \Delta_{2k}^{(2)}) \exp(-\sigma_2 x) + \\ &\quad + \sigma_1 \Delta_{3k}^{(2)} \exp(\sigma_1 x) - \sigma_1 \Delta_{4k}^{(2)} \exp(-\sigma_1 x), \\ d_{2k}^{(2)}(\alpha, \beta, x) &= -(i\beta \Delta_{5k}^{(2)} + \sigma_2 \Delta_{1k}^{(2)}) \exp(\sigma_2 x) - (i\beta \Delta_{6k}^{(2)} - \sigma_2 \Delta_{2k}^{(2)}) \exp(-\sigma_2 x) - \\ &\quad - i\beta \Delta_{3k}^{(2)} \exp(\sigma_1 x) - i\beta \Delta_{4k}^{(2)} \exp(-\sigma_1 x), \\ d_{3k}^{(2)}(\alpha, \beta, x) &= [i\alpha(\lambda + \mu)]^{-1} \langle (\alpha^2(\lambda + \mu) - \mu\beta^2) (\Delta_{3k}^{(2)} e^{\sigma_1 x} + \Delta_{4k}^{(2)} e^{-\sigma_1 x}) + \\ &\quad + [(\lambda + \mu)\sigma_2^2 - (\lambda + 2\mu)\beta^2] [\Delta_{5k}^{(2)} e^{\sigma_2 x} + \Delta_{6k}^{(2)} e^{-\sigma_2 x}] \rangle,\end{aligned} \quad (1.2.15)$$

$$\tilde{X}_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} X_k(z, y) \exp[i(\alpha z + \beta y)] dz dy, \quad \Delta_1 = \|b_{ij}\|,$$

$\Delta_{jk}^{(1)}$ получаем из определителя Δ_1 вычеркиванием j -й строки и j -го столбца, $i, j = 1, 2, \dots, 6$. Элементы $b_{ij} = b_{ij}(\alpha, \beta)$ соответственно равны

$$\begin{aligned}b_{11} &= -2i\beta\sigma_2, \quad b_{12} = 2i\beta\sigma_2, \quad b_{13} = f_3(\alpha, \beta), \quad b_{14} = f_3(\alpha, \beta), \quad b_{15} = f_4(\alpha, \beta), \quad b_{16} = f_4(\alpha, \beta), \\ b_{21} &= -(\beta^2 + \sigma_2^2), \quad b_{22} = -\beta^2 - \sigma_2^2, \quad b_{23} = -2i\beta\sigma_1, \quad b_{24} = 2i\beta\sigma_1, \quad b_{25} = -2i\beta\sigma_2, \quad b_{26} = -2i\beta\sigma_2, \\ b_{31} &= -\alpha\beta, \quad b_{32} = -(\beta^2 + \sigma_2^2), \quad b_{33} = f_1(\alpha, \beta), \quad b_{34} = -f_1(\alpha, \beta), \quad b_{35} = f_2(\alpha, \beta), \quad b_{36} = -f_2(\alpha, \beta), \\ &\dots \\ b_{k1} &= b_{j1} e^{-\sigma_2 h}, \quad b_{k2} = b_{j2} e^{\sigma_2 h}, \quad b_{k3} = b_{j3} e^{-\sigma_1 h}, \quad b_{k4} = b_{j4} e^{\sigma_1 h}, \quad b_{k5} = b_{j5} e^{-\sigma_2 h}, \quad b_{k6} = b_{j6} e^{\sigma_2 h},\end{aligned}$$

здесь

$$\begin{aligned}k &= j + 3, \quad j = 1, 2, 3, \\ f_1(\alpha, \beta) &= \frac{\sigma_1}{i\alpha} \left(2\alpha^2 - \frac{\mu\beta^2}{\lambda + \mu} \right), \quad f_2(\alpha, \beta) = \frac{\sigma_2}{i\alpha} \left(\sigma_2^2 + \alpha^2 - \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \beta^2 \right), \\ f_3(\alpha, \beta) &= \alpha^2 + \beta^2 + \sigma_2^2 + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \beta^2, \quad f_4(\alpha, \beta) = 2\sigma_2^2 + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \beta^2, \\ u^2 &= \alpha^2 + \beta^2, \quad \sigma_j^2 = u^2 - \theta_j^2, \quad \theta_1^2 = \frac{\rho\omega^{*2} a^2}{\lambda + 2\mu}, \quad \theta_2^2 = \frac{\omega^{*2} a^2 \rho}{\mu}.\end{aligned}$$

Параметры θ_j имеют физический смысл приведенных частот колебаний [Ворович, Бабешко, 1979]. В общем случае приведенные частоты θ_j пропорциональны волновым числам продольных и поперечных волн для данной сплошной среды

$$\theta_j = \omega a / V_j = 2\pi f a / V_j = 2\pi a / \lambda_j.$$

Здесь λ_j — соответственно длина поперечной ($j = 2$) или продольной ($j = 1$) волны.

Таким образом, приведенная частота колебаний пропорциональна волновому числу или отношению некоторого характерного линейного размера исследуемой области к длине волны в среде.

С целью получения представлений, описывающих компоненты вектора смещения точек слоя, применяем к соотношениям (1.2.14), (1.2.15) обратное преобразование Фурье по параметрам α, β . В результате имеем

$$u_j^{(2)}(x, y, z) = \frac{a}{4\pi^2} \iint_{\Gamma} \tilde{u}_j^{(1)}(\alpha, \beta, x) \exp(-i[\alpha z + \beta y]) d\alpha d\beta. \quad (1.2.16)$$

Контур интегрирования Γ для вязкоупругого слоя совпадает с вещественной осью $(-\infty, +\infty)$, в случае идеально упругой среды он имеет вид, приведенный на рис. 1.2.

В случае необходимости уточнения вида контура интегрирования Γ следует знать распределение особенностей подынтегральной функции интегрального представления решения задачи для идеально упругой среды на вещественной оси. Для этого надо исследовать нули дисперсионного уравнения задачи $\Delta_1(\alpha, \beta) = 0$. Это уравнение является трансцендентным и его корни можно определить только путем использования численных алгоритмов. Исследованию корней дисперсионного уравнения задач для слоя, полупространства и слоистого полупространства посвящено достаточно много работ. Последнее легко объяснить, если учесть, что закон их распределения дает дополнительную информацию о физическом характере поведения волнового поля вблизи поверхности раздела. Много внимания уделяется анализу дисперсионных соотношений в задачах о волноводах, так как каждому вещественному нулю соответствует поверхностная бегущая волна с соответствующей фазовой скоростью [Краснушкин, 1979; Гетман, Устинов, 1993]. Напомним, что если в однородном полупространстве дисперсионное уравнение имеет только один вещественный корень — полюс Релея, то в слое может существовать при фиксированной частоте колебаний конечное число вещественных корней дисперсионного уравнения [Ворович, Александров и др., 1974].

Ниже ограничимся только приведенными свойствами, так как при анализе многослойного полупространства дисперсионное уравнение становится значительно сложнее и включает в качестве элементов дисперсионные уравнения слоев и полупространства. За счет соотношения жесткостей слоев и полупространства в многослойной структуре дисперсионное уравнение может не иметь вещественных нулей вообще или иметь их конечное число для фиксированного значения круговой частоты колебаний. Эти вопросы будут в дальнейшем затронуты.

Отметим только, что задачи о колебаниях слоя и полупространства в плоской и осесимметричной постановках являются частными случаями построенных решений пространственных задач и могут быть получены непосредственно из соотношений (1.2.11), (1.2.12), (1.2.14)–(1.2.16).

1.3. Интегральные уравнения контактных задач, моделирующие взаимодействие поверхностного сейсмического излучателя с геофизической средой

Исследование процесса воздействия излучающего элемента поверхностного сейсмического излучателя на реальную геофизическую среду связано с постановкой и решением контактных задач теории вязкоупругости. Особенностью этого класса задач является то, что известен, как правило, закон смещения подошвы излучающего элемента (его можно моделировать жестким штампом с плоским основанием ввиду большой жесткости).

Основной проблемой при решении контактных задач является нахождение закона распределения контактных напряжений вдоль подошвы штампа. Сложность проблематики исследования контактных задач определила и большое количество публикаций, направленных на разработку методов решения интегральных уравнений, к которым они приводятся.

При выводе интегральных уравнений предполагается, что закон распределения контактных напряжений известен. Известны и соответствующее интегральное представление решения задачи с заданными на плоской поверхности напряжениями, позволяющее произвести расчет поля смещений в среде (включая её поверхность).

Таким образом, полученные выше решения задач для слоистых областей с плоскопараллельными границами раздела упругих параметров определяют интегральные уравнения соответствующих контактных задач, для которых задан вектор смещения поверхности среды в области контакта, а стоящий под знаком интеграла закон распределения контактных напряжений подлежит определению. Следовательно, представления (1.2.6), (1.2.11), (1.2.16) при $x = 0$ являются интегральными уравнениями соответствующих контактных задач.

В настоящей работе основное внимание уделено вопросам, связанным с анализом особенностей решения контактных задач применительно к моделированию системы «поверхностный сейсмический источник – геофизическая (геологическая) среда». В этом случае практически всегда можно считать, что размер излучающего элемента сейсмоисточника (штампа) мал по сравнению с длиной волны, что соответствует принятому понятию «узкого» штампа. При подобном соотношении параметров можно достаточно эффективно использовать аппроксимационный подход и метод коллокаций. Суть этого подхода заключается в следующем. Поскольку при фиксированных значениях параметров задачи все неизвестные функции, входящие в систему интегральных уравнений требуется определить на ограниченном интервале изменения соответствующей координаты, то их можно аппроксимировать с требуемой степенью точности [Березин, Жидков, 1966], с учетом порядка особенности (при её наличии) у соответствующей функции. Так, например, при решении контактной задачи для жесткого полосового штампа ширины $2a$ с плоским основанием контактные напряжения под штампом аппроксимируем функцией следующего вида (область контакта $|y| \leq a$):

$$Z_j(y) \cong \frac{c_j}{(a^2 - y^2)^{1/2}} + \sum_{n=1}^N g_n \varphi_n(y).$$

Здесь c_j, g_n — постоянные величины, определяемые из условия удовлетворения функции $Z_j(y)$ системе интегральных уравнений задачи, $\varphi_n(y)$, $n = 1, 2, \dots, N$, определяются системой ортогональных функций (тригонометрические функции, полиномы Лежандра, Чебышева, степенные функции y^n и т. д. [Сеге, 1962; Титчмарш, 1960]).

Для определения входящих в аппроксимирующие функции постоянных (c_j, g_n) можно использовать метод коллокаций. При выборе узлов коллокации обязательным является совпадение одного из узлов с особой точкой (точкой, в которой искомая функция имеет особенность, — краем штампа). Число точек коллокации должно быть равно числу неизвестных постоянных аппроксимирующей функции. Выбор системы ортогональных многочленов, определяющих аппроксимирующую функцию и число узлов коллокации (числа неизвестных постоянных), требуемых для достижения заданной точности, определяется при численной реализации из условия оптимизации времени и точности счета. Проверка точности счета определяется практически степенью удовлетворения аппроксимирующих функций системе интегральных уравнений в точках, наиболее удаленных от узлов коллокации (в самих узлах коллокации совпадение полное — с точностью проведения счета в зависимости от разрядной сетки применяемой ЭВМ).

Таким образом, представляется возможным с требуемой точностью определить значение искомых функций, описывающих распределение контактных напряжений. Из практических соображений следует, что систему ортогональных функций (полиномов) при введении аппроксимации следует выбирать таким образом, чтобы преобразование Фурье (Ханкеля) можно было бы построить аналитически (то есть целесообразно исключить по возможности численное интегрирование).

В результате реализации изложенного подхода применительно к задачам возбуждения колебаний в слоистом полупространстве целесообразно обратить внимание на следующие особенности. При генерации установившихся гармонических колебаний в среде вибрацией поверхностного штампа функция распределения контактных напряжений является комплекснозначной. Это связано с наличием сдвига фаз между воздействием на среду и её откликом. Важен тот факт, что вещественная и мнимая составляющие функции распределения контактных напряжений не обращаются в нуль при одной и той же частоте. Этот, на первый взгляд, малосущественный факт достаточно важен. Рассмотрим простой пример генерации колебаний в однородном упругом полупространстве колеблющимся штампом. На практике зачастую априори предполагается, что при достаточно низких частотах колебаний закон распределения контактных напряжений под штампом определяется решением статической задачи и может быть записан в виде

$$t(y) = \frac{t_0}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}.$$

В результате имеем вещественнозначную аппроксимацию, не учитывающую реальной комплекснозначности функции.

Использование этого подхода при анализе особенностей распределения полей смещения в среде под штампом дает следующие результаты. Главный член асимптотического разложения амплитудной функции поверхностной (рэлеевской) волны

в дальней от источника колебаний зоне определяется вычетом подынтегральной функции в вещественном нуле дисперсионного уравнения — полюсе Рэлея [Ворович, Бабешко, 1979].

В результате вычислений можно получить, что на фиксированных частотах этот вычет (амплитуда волны) обращается в нуль. А это значит, что на этих частотах вся энергия поверхностного сейсмоисточника расходуется в основном на генерацию внутренних волн, что чрезвычайно важно в задачах, связанных с совершенствованием методов сейсморазведки и геотомографии.

Однако первая частота, на которой получается практическое отсутствие поверхностной волны, достаточно велика. При точном расчете, включающем на первом этапе решение соответствующей контактной задачи, вещественная и мнимая составляющие контактных напряжений на этой частоте близки по величине. Ввиду того, что они не обращаются в нуль одновременно, полученные на основе анализа приближенной модели выводы оказываются и количественно, и качественно неверными. Данный пример наглядно иллюстрирует тот факт, что пользоваться упрощенными моделями следует осторожно, особенно при относительно высоких частотах колебаний.

При уточненном анализе всегда следует разделять решение задачи на два этапа. На первом этапе строится решение соответствующей контактной задачи, а на втором — по известному закону распределения контактных напряжений — производится расчет волновых полей в исследуемой области. При этом существенно, что поле смещений фактически определяется через преобразование Фурье (Ханкеля) от функции распределения контактных напряжений. Последнее позволяет несколько упростить решение задачи, если итоговым результатом исследования является расчёт полей смещения. Решение интегрального уравнения контактной задачи позволяет определить преобразование Фурье (Ханкеля) искомой функции, через которое по соответствующему интегральному представлению возможно произвести расчёт волнового поля в среде.

Следует подчеркнуть, что анализ закона распределения смещений в ближней к источнику зоне требует использования прямых численных методов, учитывающих возможную сильную осцилляцию комплекснозначной подынтегральной функции. В дальней от источника зоне внутри полупространства поле смещений (продольные и поперечные волны) определяется асимптотическими представлениями, получаемыми методом стационарной фазы (или методом перевала) [Евграфов, 1962; Федорюк, 1977].

На поверхности среды (и в приповерхностной области) поле смещений определяется вкладом вычетов в вещественных нулях дисперсионного уравнения (или комплексных с минимальной мнимой составляющей). Эти поверхностные волны имеют амплитуду, экспоненциально убывающую с глубиной.

Методы решения модельных динамических краевых задач геоакустики

В первой главе монографии основное внимание было уделено постановке модельных краевых задач, описывающих процессы возбуждения и распространения волн в геофизической среде, а также решению вспомогательных краевых задач динамической теории вязкоупругости, необходимых для их реализации. Остановимся подробнее на описании методов построения решения основных краевых задач, описывающих различные особенности строения модельной геофизической (геологической) среды.

2.1. Методы решения модельных динамических краевых задач для слоистого полупространства

2.1.1. Методы решения динамических задач для стратифицированного упругого полупространства

Теории возбуждения и распространения упругих волн в слоистых твердых средах посвящено значительное количество работ, и дать их исчерпывающий обзор в рамках настоящей монографии не представляется возможным. В связи с этим укажем лишь основные направления развития методов анализа волновых полей.

Для расчетов дисперсионных характеристик поверхностных волн в средах, представляющих собой пачку однородных упругих слоев, лежащих на однородном упругом полупространстве, обычно используется матричный метод, предложенный в работах [Thomson, 1950, Haskell, 1953]. Используя условия «склейки» на каждой из плоских границ слоев с помощью рекуррентных соотношений можно получить дисперсионные уравнения для волн Рэлея и Лява. Особенности применения матричных методов при наличии большого количества мод в среде рассмотрены в работах [Knopoff, 1964; Schwab, Knopoff, 1970]. Дальнейшее развитие матричный метод получил в работах Л.А. Молоткова, которые обобщены в монографии [Молотков, 1984]. Краткое описание матричного метода в теории упругих волн в слоистых средах, включающее также обзор работ по данной тематике, содержится в книге [Лёвшин и др., 1987].

Метод расчета полей упругих волн в вертикально-неоднородном твердом полупространстве, основанный на комбинировании численных конечно-разностных схем с аналитическими приемами неполного разделения переменных предложен в работе [Алексеев, Михайленко, 1976]. Этими авторами представлено решение задачи Лэмба для целого ряда моделей слоистых сред. Зависимость сейсмоисточника от времени задавалась импульсами конечной длительности. Рассмотрены случаи как волноводного, так и антиволноводного распространения упругих волн. Численное моделирование полного волнового поля выявило существование интенсивных нелучевых волн, которые не подчиняются законам геометрической сейсмологии (эти

волны получили обозначение S^*). Нелучевые эффекты подробно рассмотрены в статье [Hron, Mikhailenko, 1981].

Математически строгая теория распространения упругих волн в средах, состоящих из набора однородных изотропных твердых слоев, изложена в монографии [Петрашень и др., 1982].

Методы решения пространственных динамических смешанных задач теории упругости развиты в работах [Ворович и др., 1974; Бабешко, 1978; Ворович, Бабешко, 1979; Бабешко, 1984; Бабешко и др., 1989]. Эти методы позволяют решать задачи о вибрациях штампов произвольной в плане формы на поверхности полуграниченных слоистых упругих сред при любых условиях контакта.

2.1.2. Решение динамической задачи теории упругости для многослойного полупространства

Вернемся к краевой задаче, которая описывает процесс возбуждения колебаний в слоистом геофизическом вязкоупругом полупространстве и моделирует воздействие поверхностного источника сейсмических колебаний на сплошную среду. Постановка задачи подробно описана в предыдущей главе. Построение её решения достаточно сложно. Отметим, что интегральное представление решения в приемлемом для анализа виде было получено для однородного и двухслойного полупространства в ряде работ российских ученых [Ворович и др., 1974; Ворович, Бабешко, 1979].

Наиболее значительные количественные результаты, касающиеся расчетов полей упругих волн в многослойных твердых средах, получены в работах [Ворович и др., 1974; Бабешко, 1978; Ворович, Бабешко, 1979; Бабешко, 1984; Бабешко и др., 1989]. Поэтому при изложении данного параграфа будем следовать, главным образом, указанным работам.

Увеличение числа слоев приводит к существеннейшему усложнению и громоздкости выкладок. Кроме того, построение решения (сводящееся к получению функции Грина задачи) прямым путем связано с необходимостью точного указания числа слоев в исследуемой структуре. Этот метод практически является аналитико-численным, и при увеличении числа слоев составление алгоритма существенно усложняется.

Рассмотрим схему решения, позволяющую получить результат для многослойного полупространства.

Расчленим многослойное полупространство по границам раздела упругих параметров, введя вдоль границ некоторые функции напряжений $\vec{R}^{(j)}(x, y, z, t)$ (рис. 2.1). Данные напряжения возникают при жестком контакте слоёв.

В результате такого разбиения получаем, что при наличии решений вспомогательных задач о колебании слоя и полупространства мы можем их «сшивать», используя условия контакта — жесткого сцепления между ними. При этом неизвестные контактные напряжения $\vec{R}^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, N$ определяем из условия равенства перемещений на границах контакта слоев и заданных на верхней границе пакета условий. В результате получаем систему N векторных уравнений с N неизвестными ($\vec{R}^{(j)}$).

$j = N$	$\vec{R}^{(N)} = \vec{T}(x, y, z)$
$j = N - 1$	
\dots	
$j = 2$	
$j = 1$ — полупространство	
	$\vec{R}^{(N-1)}$
	\dots
	$\vec{R}^{(2)}$
	$\vec{R}^{(1)}$

Рис. 2.1. К постановке задачи

Решение вспомогательных задач для слоя и полупространства в трехмерной постановке получены выше. Для практического их использования следует в решении задачи для полупространства заменить $\vec{T}(x, y, z, t)$ на $\vec{R}^{(1)} = \{R_1^{(1)}, R_2^{(1)}, R_3^{(1)}\}$, а в решении соответствующей задачи для j -го слоя во все соотношения ввести упругие параметры, соответствующие материалу данного слоя, а также учесть, что

$$\begin{aligned}\vec{R}^{(j-1)} &= \{X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}\}, \\ \vec{R}^{(j)} &= \{X_4^{(j)}, X_5^{(j)}, X_6^{(j)}\}.\end{aligned}$$

Такое задание граничных условий для каждого из слоев обеспечивает автоматическое выполнение условий непрерывности напряжений при переходе через границу раздела.

При определении неизвестных компонент векторов $\vec{R}^{(j)}$, как отмечалось выше, используются условия равенства компонент векторов перемещения точек контактирующих слоев, которые в двумерных преобразованиях Фурье можно записать следующим образом

$$\tilde{u}_j^{(n-1)}(x = -h_{n-1}) = \tilde{u}_j^{(n)}(x = 0), \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.1.1)$$

Эти функциональные уравнения позволяют определить контактные напряжения на границах раздела слоев исследуемой структуры в замкнутом виде при относительно малом количестве слоев. Последнее связано с тем, что с ростом числа слоев громоздкость получаемых представлений затрудняет анализ [Собисевич, 2001].

Схема алгоритма построения решения, на первый взгляд, достаточно проста. Однако её практическая реализация наталкивается на ряд сложностей различного характера, требующих дополнительного обсуждения. Последние обусловлены, с одной стороны, большим количеством параметров задачи, а с другой — сложным поведением подынтегральной функции интегрального представления решения задачи для слоя конечной толщины. Необходимость работать с комплекснозначной функцией в комплексной плоскости порождает чисто технические сложности, усугубляющие ситуацию. Остановимся подробнее на этих проблемах.

Анализируя подынтегральную функцию представления амплитуды поля смещений в бесконечном слое можно убедиться, что при малых и больших значе-

ниях параметра интегрирования u ($u \rightarrow 0$, $u \rightarrow \infty$) подынтегральная функция имеет большую потерю точности, связанную с наличием у некоторых её элементов неопределенностей в предельных выражениях. Этот факт требует кропотливой работы по учету возможной потери точности (выявлению и раскрытию порождающих её неопределенностей) при реализации полученных представлений на ЭВМ.

В случае идеально упругой среды подынтегральная функция может иметь при фиксированной частоте колебаний ω конечное число нулей и полюсов на вещественной оси. Полюса подынтегральной функции определяются дисперсионным уравнением задачи: $\Delta_2(u) = 0$. Анализ дисперсионного уравнения показывает, что все полюса подынтегральной функции однократны, а при наличии сколь угодно малой вязкости в среде все нули дисперсионного уравнения являются комплекснозначными.

Для корректного выбора контура интегрирования Γ требуется определить вещественные нули дисперсионного соотношения и выбрать соответствующий контур интегрирования. Однако ввиду сравнительно слабой сходимости контурного несобственного интеграла (подынтегральная функция при $|u| \rightarrow \infty$ убывает как $c|u|^{-1} \exp(iuR)$, где c есть некоторая постоянная) при расположении контура интегрирования вблизи нуля дисперсионного уравнения (полюса подынтегральной функции) градиентное поведение подынтегральной функции вдоль контура интегрирования вблизи особенности приводит к резкому снижению точности численного счета. Поэтому корректный выбор контура интегрирования Γ имеет определяющее значение для точности вычислений и тесно связан с физичностью полученного численного результата.

Расположение контура интегрирования на большом удалении от особенностей подынтегральной функции может привести к получению вообще некорректного результата. Последнее связано с наличием у подынтегральной функции счетного множества комплексных особенностей (полюсов). Если контур интегрирования сдвинуть с вещественной оси таким образом, что он пересечет один из комплексных полюсов, то численно полученное значение интеграла будет отличаться от истинного на величину, равную вычету подынтегральной функции в точке данного полюса [Лаврентьев, Шабат, 1981]. Поэтому важно выбрать контур интегрирования по возможности проходящим на равном удалении от вещественных и ближайших к ним комплексных особых точек подынтегральной функции. Такое исследование само по себе является сложным и трудоемким.

При анализе решения задачи для вязкоупругой полосы в зависимости от вязкости материала те полюса подынтегральной функции, которые были в идеально упругом случае вещественными, сместятся в комплексную плоскость на некоторое расстояние. Комплексные особенности подынтегральной функции тоже изменят свое положение. Степень смещения особенностей с вещественной оси зависит от величины вязкости неявным образом. Однако, при реальных значениях вязкости для большинства материалов эти полюса располагаются сравнительно близко к положению соответствующих особенностей идеально упругой среды, что также может привести к низкой точности расчетов и определяет необходимость оптимизировать выбор расположения контура интегрирования Γ (рис. 2.2) относительно комплексных особенностей.

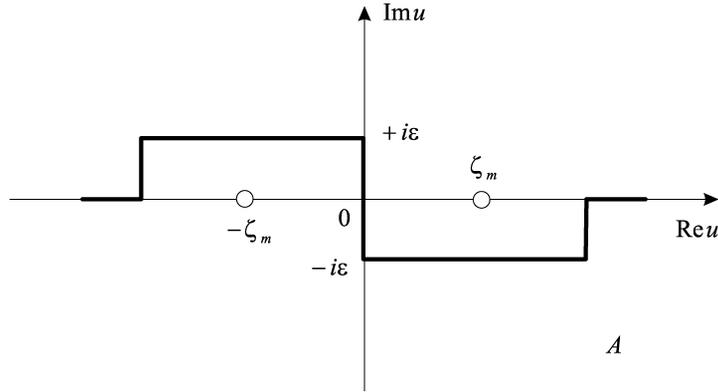


Рис. 2.2. Контур интегрирования

В случае построения решения задачи для многослойного полупространства дисперсионное уравнение для слоистой структуры чрезвычайно сложно, так как включает в себя некоторую суперпозицию дисперсионных уравнений входящих в структуру слоев и полупространства. При этом часть особенностей уничтожается, часть остается.

Детальный анализ дисперсионных уравнений задач для многослойного полупространства позволяет считать близким к оптимальному выбор контура интегрирования на удалении порядка $0,2$ ($\varepsilon = 0,2$) от вещественной оси для идеально упругой среды и $\varepsilon = 0,1-0,15$ для среды с относительно малой или средней вязкостью. При больших значениях вязкости естественно проводить интегрирование непосредственно по вещественной оси. Реально выбираем контур интегрирования следующего вида (см. рис. 2.2). Начало его совпадает с нулевой точкой. Из нее он опускается по мнимой оси в нижнюю полуплоскость комплексной плоскости параметра интегрирования на величину порядка $0,2i$ ($\varepsilon = 0,2$). Далее контур интегрирования идет параллельно вещественной оси, обходя все вещественные особенности, и выходит параллельно мнимой оси на вещественную ось на расстоянии $A = \zeta_m + \delta$ ($\delta = 0,5-1,0$; ζ_m — наибольший из вещественных полюсов подынтегральной функции). Часть контура Γ , расположенная в левой полуплоскости, центрально симметрична правой. При малой вязкости контур интегрирования имеет тот же вид, но расположен, как было отмечено выше, ближе к вещественной оси. В этом случае в расчет берутся только те полюса, которые порождены вещественными особенностями при отсутствии вязкости.

Следует отметить, что используя свойства четности и нечетности составляющих подынтегральной функции по параметру интегрирования всегда можно упростить численный счет и повысить его точность. Это достигается приведением интеграла по всему контуру Γ к его части, лежащей в правой полуплоскости.

При практической реализации алгоритма расчета напряженно-деформированного состояния многослойного полупространства преобразование Фурье амплитудной функции смещения точек k -го слоя целесообразно представить в матричном виде

$$\tilde{\tilde{U}}_k(\alpha, \beta, x) = \vec{\tilde{D}}_k^{(1)} \tilde{\tilde{R}}^{(k-1)} + \vec{\tilde{D}}_k^{(2)} \tilde{\tilde{R}}^{(k)}. \quad (2.1.2)$$

Здесь

$$\vec{D}_k^{(1)} = \frac{d_{mn}^{(k)}}{\mu_k \Delta_k}, \quad \vec{D}_k^{(2)} = \frac{d_{mn+3}^{(k)}}{\mu_k \Delta_k}, \quad m, n = 1, 2, 3.$$

Функции $d_{m_j}^{(k)}$ получаем соответственно из d_{m_j} при подстановке значений упругих параметров k -го слоя и соответствующего значения его толщины.

$$\begin{aligned} \vec{\tilde{R}}^{(k-1)} &= \left\{ \vec{\tilde{R}}_1^{(k-1)}, \vec{\tilde{R}}_2^{(k-1)}, \vec{\tilde{R}}_3^{(k-1)} \right\}, \\ \vec{\tilde{R}}^{(k)} &= \left\{ \vec{\tilde{R}}_1^{(k)}, \vec{\tilde{R}}_2^{(k)}, \vec{\tilde{R}}_3^{(k)} \right\}. \end{aligned}$$

Преобразование Фурье вектора смещений точек полупространства также записываем в векторном виде

$$\vec{\tilde{U}}_1(\alpha, \beta, x) = \vec{K}^{(1)} \vec{\tilde{R}}^{(1)}.$$

Соотношения, определяющие равенство компонент векторов смещения в среде при выходе на границы раздела упругих параметров в векторной форме можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} \vec{\tilde{U}}_1(\alpha, \beta, 0) &= \vec{\tilde{U}}_2(\alpha, \beta, 0), \\ \vec{\tilde{U}}_2(\alpha, \beta, -h_2) &= \vec{\tilde{U}}_3(\alpha, \beta, 0), \\ \vec{\tilde{U}}_3(\alpha, \beta, -h_3) &= \vec{\tilde{U}}_4(\alpha, \beta, 0), \\ &\dots \\ \vec{\tilde{U}}_{N-1}(\alpha, \beta, -h_{N-1}) &= \vec{\tilde{U}}_N(\alpha, \beta, 0). \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

В результате имеем $N - 1$ векторных уравнений с $N - 1$ неизвестными — векторами

$$\vec{R}^{(k)} = \left\{ R_1^{(k)}, R_2^{(k)}, R_3^{(k)} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Разрешая последовательно эти векторные уравнения, с использованием алгебры матриц, получаем рекуррентные соотношения, позволяющие определить неизвестные векторы контактных напряжений вдоль границ слоев через заданные на поверхности напряжения $\vec{T}_j(\alpha, \beta)$. Так, разрешая первое векторное уравнение (2.1.3) относительно $\vec{\tilde{R}}^{(1)}$ будем иметь

$$\vec{\tilde{R}}^{(1)} = \left(\vec{K}^{(1)} - \vec{D}_2^{(1)} \right)^{-1} \vec{D}_2^{(2)} \vec{\tilde{R}}_1^{(2)}.$$

Аналогичным образом, с учетом полученного выражения вектора напряжений $\vec{R}^{(1)}$ через $\vec{R}^{(2)}$, из второго векторного уравнения (2.1.3) получаем выражение вектора $\vec{R}^{(2)}$ через $\vec{R}^{(3)}$. Продолжая исключать последовательно неизвестные векторы из последнего уравнения (2.1.3) получим выражение вектора $\vec{R}^{(1)}$ через заданное на границе напряжение $\vec{T}_j(\alpha, \beta)$. После этого, последовательно используя рекуррентные соотношения, выражающие $\vec{R}^{(n-1)}$ через $\vec{R}^{(n)}$, выразим все неизвестные

векторы контактных напряжений через заданную нагрузку $\tilde{T}_j(\alpha, \beta)$. Все эти соотношения здесь не выписываем ввиду их громоздкости. Отметим, что при реализации же алгоритма на ПЭВМ он реализуется непосредственно в матричном виде. Программа позволяет рассчитать амплитудные функции смещения и напряжения в любом слое при воздействии на его границу как неподвижной, так и движущейся с постоянной скоростью V_0 , осциллирующей с частотой ω нагрузкой.

2.2. О некоторых особенностях, встречающихся в процессе изучения структуры волновых полей и резонансных свойств геологических структур

Изложенные выше методы позволяют достаточно эффективно строить вычислительные алгоритмы для расчета полей смещений в многослойной геофизической среде. При этом в ближней к источнику колебаний зоне при низких и средних частотах колебаний полученные интегральные представления решения допускают анализ только с использованием прямых численных алгоритмов вычисления несобственных контурных интегралов в комплексной плоскости.

На относительно большом удалении от источника колебаний, а также в высокочастотной области численные алгоритмы теряют свою эффективность (ввиду усиления осцилляции подынтегральной функции интегрального представления) и наиболее целесообразно становится использование асимптотических методов анализа (метод перевала, Лапласа, стационарной фазы, метод пограничного слоя, теория вычетов и др.) [Бабич, Кирпичникова, 1974; Евграфов, 1962; Федорюк, 1977].

Здесь следует отметить, что при исследовании процессов распространения внутренних (продольных и поперечных) волн в слоистой неограниченной структуре в практике достаточно широко используются различные варианты асимптотических подходов (как правило, высокочастотные асимптотики — длина волны в среде много больше толщины слоя), называемые «лучевым методом» (имеющим многочисленные модификации) [Бреховский, 1957].

Остановимся подробнее на особенностях реализации асимптотических методов при анализе волновых полей в слоистом полупространстве.

Использование асимптотических методов при анализе представлений, описывающих волновое поле в многослойной упругой, вязкоупругой или гетерогенной среде, приводит к исследованию несобственных контурных интегралов идентичной структуры, зависящей только от постановки задачи (плоская, осесимметричная или пространственная). Тип постановки задачи определяет вид осциллятора, от которого зависит поведение подынтегральной функции и выбор метода построения главного члена асимптотического разложения. Для пояснения рассмотрим конкретные типовые интегралы, возникающие при анализе поля смещений и напряжений, соответствующих внутренним волнам в многослойном полупространстве.

Для рассматриваемого класса задач интегральное представление решений определяется несобственными контурными интегралами по контуру Γ в комплексной плоскости (см. рис. 4.3). Поведение подынтегральной функции на разных частях

контура интегрирования имеет различный характер и можно четко определить физический смысл вклада каждого из отрезков интегрирования.

Контур интегрирования Γ состоит из прямолинейных отрезков, совпадающих с вещественной осью и полуокружностей (дуг), огибающих точки ветвления и вещественные особенности (нули дисперсионного уравнения). Несложно показать, что интегралы по дугам малого радиуса, обходящим полюса, соответствуют по значению величине вычета в полюсе и определяют в дальней от области приложения нагрузки поверхностные и пограничные распространяющиеся волны, убывающие как $1/\sqrt{r}$, $r = \sqrt{y^2 + x^2}$, в пространственном и осесимметричном случаях (в случае плоской задачи эти волны имеют постоянную амплитуду). Кроме того вычеты определяют главный член разложения волнового поля в дальней зоне слоя в слоистой структуре. В полупространстве, при удалении от границы, амплитуда поверхностной (пограничной) волны убывает экспоненциально.

Рассматривая дугу, обходящую точки ветвления, легко убедиться, что вклад интеграла по ней мал пропорционально малости её радиуса (стремится к нулю при стремлении радиуса дуги к нулю). Следовательно, в рассматриваемых случаях можно не обходить точки ветвления, а только учесть выбор ветвей многозначной функции, связанный с наличием разрезов и описанный выше. Также несложно показать, что вклад интегралов по отрезкам между полудугами, огибающими точки ветвления и полюса (исключая центральную прямолинейную часть контура Γ , включающую начало координат), имеет более высокий порядок малости и их вкладами при построении главных членов асимптотического разложения можно пренебречь.

Остановимся на интеграле по центральной прямолинейной части контура, лежащей между точками ветвления $\pm\theta_1$. На этом отрезке подынтегральная функция непрерывна и её экспоненциальные множители при большом удалении от источника ($r \rightarrow \infty$) возбуждений определяют сильную осцилляцию, приводящую к сложностям использования прямых численных схем интегрирования (низкая точность за счет больших потерь точности). Именно эта особенность и определяет необходимость попытки использовать асимптотические методы при исследовании интеграла по этой части контура.

Учитывая выбор ветви радикалов σ_j и структуру подынтегральной функции, в пространственном (и плоском) случае получаем типовые интегралы, для анализа которых можно использовать метод стационарной фазы [Евграфов, 1962; Федорюк, 1977].

В осесимметричном случае также используется этот метод, но требуется еще дополнительная информация о поведении функций Бесселя [Абрамовиц, Стиган, 1979]. Рассмотрим отдельно возникающие при анализе типовые интегралы.

2.3. Плоская модельная задача

При решении плоской модельной задачи теории вязкоупругости для многослойного полупространства, анализируя поле смещений в подстилающем полупростран-

стве, приходим к необходимости исследования интегралов следующей структуры:

$$F(x, y) = \int_{-\theta_1 + \varepsilon}^{\theta_1 - \varepsilon} f(u, \omega) \exp(-ix\sqrt{\theta_j^2 - u^2} - iuy) du. \quad (2.3.1)$$

Функция $f(u, \omega)$ в (2.3.1) не содержит сильных осцилляторов и обладает достаточной гладкостью на отрезке интегрирования. Для исследования подобного интеграла при

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r \gg H,$$

где h — суммарная толщина приповерхностного пакета слоев, можно эффективно использовать метод стационарной фазы, применение которого определяется поведением фазовой функции — функции, определяющей показатель экспоненты

$$\exp[-ip(\cos \varphi \sqrt{\theta_j^2 - u^2} + iur \sin \varphi)], \quad x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Рассмотрим её отдельно

$$s(u, \varphi) = -(\cos \varphi \sqrt{\theta_j^2 - u^2} + u \sin \varphi). \quad (2.3.2)$$

Легко убедиться, что производная фазовой функции по параметру интегрирования имеет вещественный корень u_0 — стационарную точку, принадлежащий отрезку интегрирования. Существенно, что вторая производная фазовой функции в этой точке в нуль не обращается ($s''(u_0\varphi) \neq 0$). Таким образом, стационарная точка не вырождена. Следуя методу стационарной фазы, получаем

$$F(r, \varphi) \cong \exp\left[irs(u_0\varphi) + \frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} s''(u_0\varphi)\right] \cdot r^{-1/2} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^{-k}.$$

Здесь

$$a_k = \exp\left[\frac{ik\pi}{4} \operatorname{sgn} s''(u_0\varphi)\right] \frac{\Gamma(k + \frac{1}{2})}{2k!} \left(S^{-1}(u, u_0, \varphi) \frac{d}{du}\right)^{2k} (f(u, \omega) S(u, u_0, \varphi)) \Big|_{u=u_0},$$

$$S(u, u_0, \varphi) = \sqrt{2(s(u, \varphi) - s(u_0, \varphi)) \operatorname{sgn} s''(u_0, \varphi) (s'(u, \varphi))^{-1}},$$

$$\operatorname{sgn} z = \begin{cases} +1, & z > 0; \\ -1, & z < 0. \end{cases}$$

Главный член асимптотического разложения в этом случае равен

$$F(r, \varphi) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{r |s''(u_0, \varphi)|}} [f(u_0, \omega) + O(r^{-1})] \exp\left[irs(u_0, \varphi) + \frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} s''(u_0, \varphi)\right]. \quad (2.3.3)$$

Используем приведенные выражения для построения главного члена асимптотического разложения типового интеграла. Для этого необходимо найти стационарную точку — корень уравнения

$$\begin{aligned} s'(u_0, \varphi) = 0, & \rightarrow u_0 \cos \varphi - \sin \varphi \sqrt{\theta_j^2 - u_0^2} = 0, \\ & \rightarrow u_0 = +\theta_j \sin \varphi. \end{aligned}$$

Вторая производная фазовой функции в стационарной точке определяется следующим соотношением

$$s''(u_0) = +\frac{\theta_j}{\cos^3 \varphi}, \quad \text{sgn } s''(u_0) = +1.$$

Подставляя последние соотношения в (2.3.3), получаем главный член асимптотического разложения типового интеграла (2.3.1) в следующей форме:

$$F(r, \varphi) \approx \frac{2\pi \cos \varphi}{r\theta_j} f(u_0, \omega) \cos \varphi \exp \left[-ir\theta_j \cos \varphi (\cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{i\pi}{4} \right] + O(r^{-3/2}).$$

Из полученного соотношения видно, что интеграл с фазовой функцией, определяемой через θ_1 , описывает продольную волну в дальней от источника колебаний зоне. Если фазовая функция определяется приведенной частотой θ_2 , то имеем представление для поперечной (сдвиговой) волны.

Следует отметить, что полученное асимптотическое представление решения в дальней зоне построено в предположении, что $y \neq 0$ $\varphi \neq 0$. Тем не менее, сопоставляя это представление с результатами численного счета, убеждаемся, что оно дает правильный результат и в непосредственной близости к исключаемому направлению. Ввиду непрерывности асимптотического представления, при необходимости анализа поля непосредственно «под» источником, можно использовать значение в точке, отстоящей от исследуемой по оси Oy на малую величину. Вышеприведенное асимптотическое представление описывает объемные волны в полупространстве, и стремится к нулю при приближении к плоской поверхности $x = 0$.

Возбуждение сейсмоакустических волн распределенными силовыми источниками, действующими вблизи границы раздела газ – твердое тело

Задача о возбуждении волн в твердом полупространстве находящимися в нем произвольными силовыми источниками представляет интерес для исследования глобальных геофизических процессов, для разработки методов зондирования грунтов и материалов, для микроэлектроники, а также для оценок уровней шумов и вибраций, создаваемых при работе различных механизмов.

В теории таких источников важное место занимают расчеты полей смещений в упругих волнах на больших расстояниях от излучающей системы, а также исследование энергетических характеристик излучения — диаграммы направленности, полной излучаемой мощности и её распределения по различным типам волн.

В многочисленных работах, посвященных возбуждению и распространению упругих волн в однородном твердом полупространстве (см., например монографии [Ewing et al., 1957; Петрашень, 1978; Гринченко, Мелешко, 1981; Аки, Ричардс, Т. 1, 1983; Чичинин, 1984; Бабешко и др., 1989; Заславский, 2007] и статьи [Miller, Pursey, 1954, 1955; Коган, 1963; Николаев, 1981; Бабешко и др., 1981; Чичинин, Кузьменко, 1981; Гуцин, Докучаев и др., 1981; Гуцин и др., 1981]), рассматриваются источники вполне определенной конфигурации, которая конкретизируется уже на стадии постановки задачи. Кроме того, как в классической работе Г. Лэмба [Lamb, 1904], так и в последующих работах этого направления, рассматривается возбуждение волн в упругой среде, граничащей с вакуумом. В реальных же условиях все твердые тела контактируют с газом или жидкостью, и волновые процессы в двух граничащих средах необходимо рассматривать совместно.

В работе [Бабешко, Зинченко, 1980] рассмотрена задача о создании гибким штампом, вибрирующим на поверхности однородного упругого полупространства, волновых полей с заданными диаграммами направленности. Было показано, что существуют такие формы колебаний штампа, которые обеспечивают заданное направление главного лепестка диаграммы направленности излучения продольных или поперечных волн. Позднее эти результаты были обобщены на случай неоднородного по глубине полупространства [Бабешко и др., 1982].

Частный случай импульсных сил, действующих синфазно по нормали к поверхности однородного изотропного упругого полупространства и распределенных по площадке конечных размеров на этой поверхности, рассмотрен в [McNab et al., 1990]. Форма площадки, распределение сил по ней и зависимость сил от времени предполагались произвольными. Для указанного частного случая в [McNab et al., 1990] предложена процедура численного расчета волновых полей в твердой среде.

В отличие от плоской границы раздела твердое тело – вакуум, на которой существует поверхностная волна Рэлея, вдоль плоскости контакта упругой среды с газом могут распространяться две волны, одна из которых является поверхност-

ной, а другая — вытекающей [Бреховских, 1973; Бреховских, Годин, 1989]. Обычно скорость упругих волн в твердых телах превышает скорость звука в газах и жидкостях, поэтому поверхностной является волна Стонели, а волна Рэлея, распространяясь вдоль поверхности твердого тела, постоянно излучает часть своей энергии в газ, в результате чего её амплитуда экспоненциально спадает вдоль границы. В [Roever et al., 1959] такая волна названа псевдорэлеевской волной.

Следует отметить, что Стонели рассмотрел поверхностные волны, которые распространяются вдоль границы раздела двух твердых полупространств [Stoneley, 1924]. Позднее Шолте рассмотрел волны на границе твердого и жидкого полупространств [Scholte, 1947]. Возможно, поверхностную волну на границе твердого тела и жидкости следовало бы называть волной Шолте. С другой стороны, она представляет собой частный случай волны Стонели (модуль чистого сдвига материала одного из граничащих полупространств равен нулю). В русскоязычной литературе, следуя монографиям [Бреховских, 1973; Бреховских, Годин, 1989], волну на границе твердого тела и жидкости принято называть волной Стонели (см. также [Викторов, 1979; Викторов, 1981]). В работе [Гоголадзе, 1948] показано, что поверхностная волна на границе раздела твердое тело – жидкость существует при любых соотношениях параметров граничащих сред.

В работе [Roever et al., 1959] поверхностная и вытекающая волны на границе твердое тело – жидкость изучались как теоретически, так и экспериментально. Для гармонического и импульсного источников волновые поля (но не мощности излучения) для случая контакта жидкой и твердой сред вычислялись в [Roberts, 1990] путем численных оценок интегралов Фурье.

В настоящей главе дано полное решение задачи о возбуждении упругих волн в однородном изотропном твердом полупространстве и в граничащем с ним однородном газе зависящими от времени силами, произвольно распределенными по некоторой площадке ограниченных размеров, которая параллельна границе раздела этих двух сред. Получены выражения для полей и энергий излучения различных типов сейсмоакустических волн, возбуждаемых как поверхностными, так и подповерхностными источниками.

3.1. Действие зависящих от времени сил, распределенных внутри упругой среды по плоскости, параллельной её границе

В данном разделе методом преобразований Фурье в интегральном виде получено решение задачи о возбуждении упругих волн в однородном изотропном твердом полупространстве и в граничащем с ним газе зависящими от времени силами, произвольно распределенными в твердом теле по плоскости, параллельной границе раздела сред. Выполнен анализ различных конфигураций силовых источников с точки зрения возбуждения тех или иных типов сейсмоакустических волн. Для гармонической зависимости сил от времени получены выражения для средних за период мощностей излучения волны Стонели на границе газ – твердое тело и волны Рэлея на границе твердое тело – вакуум, а также асимптотики полей смещений в объемных продольной и поперечной волнах и в рэлеевской волне на больших расстояниях от источника.

3.1.1. Постановка задачи и интегральные выражения для волновых полей

Пусть плоскость $z = 0$ декартовой системы координат совпадает с границей раздела однородного газа, имеющего плотность ρ_1 и скорость звука c_1 и заполняющего полупространство $z < 0$, и однородного изотропного твердого тела, занимающего полупространство $z > 0$ и характеризуемого плотностью ρ_2 , модулем всестороннего сжатия κ и модулем чистого сдвига μ . Скорости продольной c_l и поперечной c_t волн выражаются через параметры упругости и плотность твердого тела формулами [Ландау, Лифшиц, 1987]:

$$c_l = \left[\left(\kappa + \frac{4}{3} \mu \right) / \rho_2 \right]^{1/2}, \quad c_t = (\mu / \rho_2)^{1/2}.$$

Иногда вместо модуля сжатия вводится параметр Ламэ $\lambda = \kappa - \frac{2}{3} \mu$. Параметр Ламэ λ самостоятельного физического смысла не имеет и вводится в теорию для удобства. Отметим, что модуль чистого сдвига μ также называется параметром Ламэ.

При действии на единицу объема твердого тела силы $\vec{f}_V(x, y, z, t)$, где t — время, малые смещения \vec{u} в нем описываются уравнением Ламэ [Петрашень, 1978; Гринченко, Мелешко, 1981; Партон, Перлин, 1981; Седов, 1970; Демидов, 1979]:

$$\rho_2 \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - \left(\kappa + \frac{1}{3} \mu \right) \text{grad div } \vec{u} - \mu \Delta \vec{u} = \vec{f}_V, \quad (3.1.1)$$

а возмущения плотности ρ'_1 , давления p' и скорости \vec{v}_1 в газе можно описывать системой уравнений гидродинамики, которые после линеаризации принимают вид [Ландау, Лифшиц, 1986]:

$$\frac{\partial \rho'_1}{\partial t} + \rho_1 \text{div } \vec{v}_1 = 0, \quad (3.1.2)$$

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + \frac{\nabla p'}{\rho_1} = 0, \quad (3.1.3)$$

$$p'_1 = c_1^2 \rho'_1. \quad (3.1.4)$$

Необходимо отметить, что для естественных подповерхностных источников с плотностью силы $\vec{f}_V(\vec{R}, t)$ (очагов землетрясений) должны выполняться условия равенства нулю полной действующей силы и полного вращательного момента [Аки, Ричардс, Т. 1, 1983; Докучаев, 1996]:

$$\vec{F} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}_V(\vec{R}, t) d^3 \vec{R} = 0, \quad (3.1.5)$$

$$\vec{M} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} (\vec{R} \times \vec{f}_V) d^3 \vec{R} = 0, \quad (3.1.6)$$

где $\vec{R} = (x, y, z)$ — радиус-вектор.

На границе раздела твердое тело–газ выполняются условия непрерывности перпендикулярных к границе компонент смещений и тензора напряжений, а также равенства нулю тангенциальных компонент тензора напряжений в твердом теле [Бреховских, 1973; Бреховских, Годин, 1989]:

$$u_{1z} = u_{2z}, \quad z = 0, \quad (3.1.7)$$

$$\sigma_{zz}^{(2)} = -p', \quad \sigma_{xz}^{(2)} = \sigma_{yz}^{(2)} = 0, \quad z = 0 \quad (3.1.8)$$

($\sigma_{zz}^{(2)}$ — тензор напряжений, индекс «2» относится к твердому телу). Компоненты тензора напряжений связаны со смещениями формулой

$$\sigma_{ij}^{(2)} = \lambda \operatorname{div} \vec{u}_2 \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_{2i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{2j}}{\partial x_i} \right), \quad (3.1.9)$$

где $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3; \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ — символ Кронекера.

Пусть в твердом теле на единицу площади плоскости $z = h$ действует сила $\vec{f}(x, y, t)$. Таким образом, в (3.1.1)

$$\vec{f}_V(x, y, z, t) = \vec{f}(x, y, t) \delta(z - h), \quad (3.1.10)$$

где δ — дельта-функция Дирака.

На горизонте $z = h$ введем фиктивную границу и будем рассматривать волновые процессы в трех областях: $z \leq 0$ (I), $0 \leq z \leq h$ (II), $z \geq h$ (III). На границе раздела двух твердых тел выполняются условия равенства трех компонент вектора смещений и трех пар компонент тензора напряжений [Бреховских, 1973; Бреховских, Годин, 1989; Ландау, Лифшиц, 1987]:

$$u_{2x} = u_{3x}, \quad u_{2y} = u_{3y}, \quad u_{2z} = u_{3z}, \quad z = h, \quad (3.1.11)$$

$$\sigma_{zx}^{(2)} = \sigma_{zx}^{(3)}, \quad \sigma_{zy}^{(2)} = \sigma_{zy}^{(3)}, \quad \sigma_{zz}^{(2)} = \sigma_{zz}^{(3)}, \quad z = h \quad (3.1.12)$$

(индексы «2» и «3» относятся соответственно к областям II и III).

Нетрудно показать (см., например, [Ландау, Лифшиц, 1986, с. 391]), что интегрируя уравнение (3.1.1) с правой частью вида (3.1.10) по z в пределах от $h - \xi$ до $h + \xi$ и переходя к пределу $\xi \rightarrow 0$, можно получить граничные условия для компонент тензора напряжений на горизонте приложения силы $z = h$:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xz}^{(2)} - \sigma_{xz}^{(3)} &= f_x(x, y, t), \\ \sigma_{yz}^{(2)} - \sigma_{yz}^{(3)} &= f_y(x, y, t), \\ \sigma_{zz}^{(2)} - \sigma_{zz}^{(3)} &= f_z(x, y, t). \end{aligned} \right\} \quad (3.1.13)$$

При этом смещения в твердом теле будут описываться однородным уравнением Ламэ

$$\rho_2 \frac{\partial^2 \vec{u}_{2,3}}{\partial t^2} - \left(\kappa + \frac{1}{3} \mu \right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u}_{2,3} - \mu \Delta \vec{u}_{2,3} = 0. \quad (3.1.14)$$

При решении системы (3.1.2)–(3.1.4), (3.1.14), (3.1.7), (3.1.8), (3.1.11), (3.1.13) необходимо также учесть условия излучения при $|z| \rightarrow \infty$ [Фелсен, Маркувци, Т. 1, 1978].

Возмущения в газе будем описывать с помощью потенциала смещений ψ_1 , а в твердом теле — с помощью скалярных $\psi_{2,3}$ и векторных $\vec{A}_{2,3}$ потенциалов таких, что смещения \vec{u}_1 и давление p' в газе и смещения $\vec{u}_{2,3}$ в твердом теле определяются выражениями

$$\vec{u}_1 = \text{grad } \psi_1, \quad p' = -\rho_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2}, \quad (3.1.15)$$

$$\vec{u}_{2,3} = \text{grad } \psi_{2,3} + \text{rot } \vec{A}_{2,3}, \quad \text{div } \vec{A}_{2,3} = 0. \quad (3.1.16)$$

Для потенциалов можно получить волновые уравнения

$$\begin{aligned} \Delta \psi_1 - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} &= 0, \\ \Delta \psi_{2,3} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \psi_{2,3}}{\partial t^2} &= 0, \\ \Delta \vec{A}_{2,3} - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_{2,3}}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

которые необходимо решать совместно с граничными условиями (3.1.7), (3.1.8), (3.1.11), (3.1.13) и условиями излучения. Поскольку в области Π есть волны, распространяющиеся как в положительном, так и в отрицательном направлении оси z , потенциалы при $0 \leq z \leq h$ представим в виде:

$$\psi_2 = \psi_2^{(+)} + \psi_2^{(-)}, \quad \vec{A}_2 = \vec{A}_2^{(+)} + \vec{A}_2^{(-)}, \quad (3.1.18)$$

где верхний индекс « $(+)$ » означает, что волна распространяется в сторону возрастающих значений z , а индекс « $(-)$ » означает, что волна распространяется в сторону убывающих значений z .

Для решения уравнений (3.1.17) воспользуемся методом преобразований Фурье. Введем интегральное представление источников \vec{f} :

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}(\vec{k}, \omega) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} d\omega d\vec{k} \quad (3.1.19)$$

с формулой обращения

$$\vec{F}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}(\vec{r}, t) e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} dt d\vec{r}. \quad (3.1.20)$$

В (3.1.19), (3.1.20) $\vec{F}(\vec{k}, \omega)$ — пространственно-частотный спектр функции $\vec{f}(\vec{r}, t)$, $\vec{r} = (x, y)$ — двумерный радиус-вектор, а $\vec{k} = (k_x, k_y)$ — двумерный волновой вектор

в плоскости xOy , $\vec{k}\vec{r} = k_x x + k_y y$, $d\vec{k} = dk_x dk_y$, $d\vec{r} = dx dy$. Решения уравнений (3.1.17) будем искать в следующем виде [Разин, 2010a]:

— область I ($z \leq 0$):

$$\psi_1(\vec{r}, z, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_1(\vec{k}, \omega) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r} - i\kappa_1 z} d\omega d\vec{k}; \quad (3.1.21)$$

— область II ($0 \leq z \leq h$):

$$\psi_2^{(+)}(\vec{r}, z, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_2^{(+)}(\vec{k}, \omega) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r} + i\kappa_l z} d\omega d\vec{k}, \quad (3.1.22)$$

$$\vec{A}_2^{(+)}(\vec{r}, z, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}_2^{(+)}(\vec{k}, \omega) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r} + i\kappa_t z} d\omega d\vec{k}, \quad (3.1.23)$$

$$\psi_2^{(-)}(\vec{r}, z, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_2^{(-)}(\vec{k}, \omega) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r} - i\kappa_l(z-h)} d\omega d\vec{k}, \quad (3.1.24)$$

$$\vec{A}_2^{(-)}(\vec{r}, z, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}_2^{(-)}(\vec{k}, \omega) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r} - i\kappa_t(z-h)} d\omega d\vec{k}; \quad (3.1.25)$$

— область III ($z \geq h$):

$$\psi_3(\vec{r}, z, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}_3(\vec{k}, \omega) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r} + i\kappa_l(z-h)} d\omega d\vec{k}, \quad (3.1.26)$$

$$\vec{A}_3(\vec{r}, z, t) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{A}_3(\vec{k}, \omega) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r} + i\kappa_t(z-h)} d\omega d\vec{k}. \quad (3.1.27)$$

В (3.1.21)–(3.1.27) $\kappa_1 = (k_1^2 - k^2)^{1/2}$, $\kappa_{l,t} = (k_{l,t}^2 - k^2)^{1/2}$, $k_1 = \omega/c_1$, $k_{l,t} = \omega/c_{l,t}$ — волновые числа звуковой, продольной и поперечной волн на частоте ω , $k = |\vec{k}|$. Для сходимости интегралов (3.1.21), (3.1.26), (3.1.27) при $|z| \rightarrow \infty$ необходимо определить аналитические функции κ_1 , κ_l и κ_t на комплексной плоскости k следующим образом:

$$(k_\alpha^2 - k^2)^{1/2} = i \left| (k^2 - k_\alpha^2)^{1/2} \right| \quad \text{при } k > \omega/c_\alpha,$$

где индекс « α » принимает значения 1, l и t . Вводя в среды малое затухание волн можно показать, что контур интегрирования по ω должен проходить выше особых точек подынтегральных выражений (например, точек ветвления $k = \pm k_\alpha$ аналитических функций κ_α), т. е. в области $\text{Im } \omega > 0$.

Поля в областях I–III описываются тринадцатью неизвестными величинами: ψ_1 , $\psi_2^{(+)}$, $\vec{A}_2^{(+)}$, $\psi_2^{(-)}$, $\vec{A}_2^{(-)}$, ψ_3 и \vec{A}_3 . Для фурье-образов этих величин из граничных условий (3.1.7), (3.1.8), (3.1.11), (3.1.13), которые также необходимо переписать через фурье-образы, получим десять линейных алгебраических уравнений. Еще три уравнения получим из условий $\text{div } \vec{A}_2^{(+),(-)} = 0$, $\text{div } \vec{A}_3 = 0$, которые позволяют исключить z -компоненты фурье-образов векторных потенциалов. В результате для фурье-образов скалярных потенциалов и горизонтальных компонент векторных потенциалов получаем следующую систему десяти линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} i\kappa_1\tilde{\psi}_1 + i\kappa_l\tilde{\psi}_2^{(+)} - ik_y\tilde{A}_{2x}^{(+)} + ik_x\tilde{A}_{2y}^{(+)} - i\kappa_l e^{i\kappa_l h}\tilde{\psi}_2^{(-)} - \\ - ik_y e^{i\kappa_l h}\tilde{A}_{2x}^{(-)} + ik_x e^{i\kappa_l h}\tilde{A}_{2y}^{(-)} = 0, \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\rho_1}{\rho_2}k_t^2\tilde{\psi}_1 + (k_t^2 - 2k^2)\tilde{\psi}_2^{(+)} - 2\kappa_t k_y\tilde{A}_{2x}^{(+)} + 2\kappa_t k_x\tilde{A}_{2y}^{(+)} + (k_t^2 - 2k^2)e^{i\kappa_l h}\tilde{\psi}_2^{(-)} + \\ + 2\kappa_t k_y e^{i\kappa_l h}\tilde{A}_{2x}^{(-)} - 2\kappa_t k_x e^{i\kappa_l h}\tilde{A}_{2y}^{(-)} = 0, \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

$$\begin{aligned} 2k_x\kappa_l\tilde{\psi}_2^{(+)} - 2k_x k_y\tilde{A}_{2x}^{(+)} + (2k_x^2 - k_t^2)\tilde{A}_{2y}^{(+)} - 2k_x\kappa_l e^{i\kappa_l h}\tilde{\psi}_2^{(-)} - \\ - 2k_x k_y e^{i\kappa_l h}\tilde{A}_{2x}^{(-)} + (2k_x^2 - k_t^2)e^{i\kappa_l h}\tilde{A}_{2y}^{(-)} = 0, \end{aligned} \quad (3.1.30)$$

$$\begin{aligned} 2k_y\kappa_l\tilde{\psi}_2^{(+)} - (2k_y^2 - k_t^2)\tilde{A}_{2x}^{(+)} + 2k_x k_y\tilde{A}_{2y}^{(+)} - 2k_y\kappa_l e^{i\kappa_l h}\tilde{\psi}_2^{(-)} - \\ - (2k_y^2 - k_t^2)e^{i\kappa_l h}\tilde{A}_{2x}^{(-)} + 2k_x k_y e^{i\kappa_l h}\tilde{A}_{2y}^{(-)} = 0, \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

$$\begin{aligned} \kappa_l e^{i\kappa_l h}\tilde{\psi}_2^{(+)} - k_y e^{i\kappa_l h}\tilde{A}_{2x}^{(+)} + k_x e^{i\kappa_l h}\tilde{A}_{2y}^{(+)} - \kappa_l\tilde{\psi}_2^{(-)} - k_y\tilde{A}_{2x}^{(-)} + \\ + k_x\tilde{A}_{2y}^{(-)} - \kappa_l\tilde{\psi}_3 + k_y\tilde{A}_{3x} - k_x\tilde{A}_{3y} = 0, \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

$$\begin{aligned} \kappa_t k_x e^{i\kappa_l h}\tilde{\psi}_2^{(+)} - k_x k_y e^{i\kappa_l h}\tilde{A}_{2x}^{(+)} - (k_y^2 + \kappa_t^2)e^{i\kappa_l h}\tilde{A}_{2y}^{(+)} + \kappa_t k_x\tilde{\psi}_2^{(-)} + k_x k_y\tilde{A}_{2x}^{(-)} + \\ + (k_y^2 + \kappa_t^2)\tilde{A}_{2y}^{(-)} - \kappa_t k_x\tilde{\psi}_3 + k_x k_y\tilde{A}_{3x} + (k_y^2 + \kappa_t^2)\tilde{A}_{3y} = 0, \end{aligned} \quad (3.1.33)$$

$$\begin{aligned} \kappa_t k_y e^{i\kappa_l h}\tilde{\psi}_2^{(+)} + (k_x^2 + \kappa_t^2)e^{i\kappa_l h}\tilde{A}_{2x}^{(+)} + k_x k_y e^{i\kappa_l h}\tilde{A}_{2y}^{(+)} + \kappa_t k_y\tilde{\psi}_2^{(-)} - (k_x^2 + \kappa_t^2)\tilde{A}_{2x}^{(-)} - \\ - k_x k_y\tilde{A}_{2y}^{(-)} - \kappa_t k_y\tilde{\psi}_3 - (k_x^2 + \kappa_t^2)\tilde{A}_{3x} - k_x k_y\tilde{A}_{3y} = 0, \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

$$\begin{aligned} -(k_t^2 - 2k^2)e^{i\kappa_l h}\tilde{\psi}_2^{(+)} + 2\kappa_t k_y e^{i\kappa_l h}\tilde{A}_{2x}^{(+)} - 2\kappa_t k_x e^{i\kappa_l h}\tilde{A}_{2y}^{(+)} - (k_t^2 - 2k^2)\tilde{\psi}_2^{(-)} - \\ - 2\kappa_t k_y\tilde{A}_{2x}^{(-)} + 2\kappa_t k_x\tilde{A}_{2y}^{(-)} + (k_t^2 - 2k^2)\tilde{\psi}_3 - 2\kappa_t k_y\tilde{A}_{3x} + 2\kappa_t k_x\tilde{A}_{3y} = \frac{F_z}{\mu}, \end{aligned} \quad (3.1.35)$$

$$\begin{aligned}
 & -2k_x\kappa_l e^{i\kappa_l h} \tilde{\psi}_2^{(+)} + 2k_x k_y e^{i\kappa_t h} \tilde{A}_{2x}^{(+)} + (k_t^2 - 2k_x^2) e^{i\kappa_t h} \tilde{A}_{2y}^{(+)} + 2k_x \kappa_l \tilde{\psi}_2^{(-)} + 2k_x k_y \tilde{A}_{2x}^{(-)} + \\
 & + (k_t^2 - 2k_x^2) \tilde{A}_{2y}^{(-)} + 2k_x \kappa_l \tilde{\psi}_3 - 2k_x k_y \tilde{A}_{3x} + (2k_x^2 - k_t^2) \tilde{A}_{3y} = \frac{F_x}{\mu}, \quad (3.1.36)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2k_y \kappa_l e^{i\kappa_l h} \tilde{\psi}_2^{(+)} + (2k_y^2 - k_t^2) e^{i\kappa_t h} \tilde{A}_{2x}^{(+)} - 2k_x k_y e^{i\kappa_t h} \tilde{A}_{2y}^{(+)} + 2k_y \kappa_l \tilde{\psi}_2^{(-)} + (2k_y^2 - k_t^2) \tilde{A}_{2x}^{(-)} - \\
 & - 2k_x k_y \tilde{A}_{2y}^{(-)} + 2k_y \kappa_l \tilde{\psi}_3 + (k_t^2 - 2k_y^2) \tilde{A}_{3x} + 2k_x k_y \tilde{A}_{3y} = \frac{F_y}{\mu}. \quad (3.1.37)
 \end{aligned}$$

Решая систему уравнений (3.1.28)–(3.1.37) получим выражения для фурье-образов волновых полей:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\psi}_1(\vec{k}, \omega) &= \frac{1}{\rho_2 c_t^2 \kappa_l S_0(k, \omega)} \left\{ \left[(k_t^2 - 2k^2) e^{i\kappa_l h} - 2\kappa_l \kappa_t e^{i\kappa_t h} \right] (\vec{k}\vec{F}) - \right. \\
 & \left. - \kappa_l \left[(k_t^2 - 2k^2) e^{i\kappa_l h} + 2k^2 e^{i\kappa_t h} \right] F_z \right\}, \quad (3.1.38)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\psi}_2^{(+)}(\vec{k}, \omega) &= -\frac{1}{2\rho_2 c_t^2 k_t^2 \kappa_l S_0(k, \omega)} \left\{ \left[S_{mm}(k) e^{i\kappa_l h} - 4\kappa_l \kappa_t (k_t^2 - 2k^2) e^{i\kappa_t h} \right] (\vec{k}\vec{F}) - \right. \\
 & \left. - \kappa_l \left[S_{mm}(k) e^{i\kappa_l h} + 4k^2 (k_t^2 - 2k^2) e^{i\kappa_t h} \right] F_z \right\}, \quad (3.1.39)
 \end{aligned}$$

$$\tilde{A}_2^{(+)} = \tilde{A}_{2SV}^{(+)} + \tilde{A}_{2SH}^{(+)}, \quad (3.1.40)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_{2SV}^{(+)}(\vec{k}, \omega) &= \frac{(\vec{k} \times \vec{e}_z)}{2\rho_2 c_t^2 k^2 k_t^2 \kappa_t S_0(k, \omega)} \left\{ \kappa_t \left[4k^2 (k_t^2 - 2k^2) e^{i\kappa_l h} + S_{mp}(k) e^{i\kappa_t h} \right] (\vec{k}\vec{F}) - \right. \\
 & \left. - k^2 \left[4\kappa_l \kappa_t (k_t^2 - 2k^2) e^{i\kappa_l h} - S_{mp}(k) e^{i\kappa_t h} \right] F_z \right\}, \quad (3.1.41)
 \end{aligned}$$

$$\tilde{A}_{2SH}^{(+)}(\vec{k}, \omega) = \frac{\kappa_t \vec{k} - k^2 \vec{e}_z}{2\rho_2 c_t^2 k^2 k_t^2 \kappa_t} (k_x F_y - k_y F_x) e^{i\kappa_t h}, \quad (3.1.42)$$

$$\tilde{\psi}_2^{(-)}(\vec{k}, \omega) = \frac{(\vec{k}\vec{F}) - \kappa_l F_z}{2\rho_2 c_t^2 k_t^2 \kappa_l}, \quad (3.1.43)$$

$$\tilde{A}_2^{(-)} = \tilde{A}_{2SV}^{(-)} + \tilde{A}_{2SH}^{(-)}, \quad (3.1.44)$$

$$\tilde{A}_{2SV}^{(-)}(\vec{k}, \omega) = -\frac{\kappa_t (\vec{k}\vec{F}) + k^2 F_z}{2\rho_2 c_t^2 k^2 k_t^2 \kappa_t} (\vec{k} \times \vec{e}_z), \quad (3.1.45)$$

$$\tilde{A}_{2SH}^{(-)}(\vec{k}, \omega) = -\frac{\kappa_t \vec{k} + k^2 \vec{e}_z}{2\rho_2 c_t^2 k^2 k_t^2 \kappa_t} (k_x F_y - k_y F_x), \quad (3.1.46)$$

$$\tilde{\psi}_3(\vec{k}, \omega) = \frac{(\vec{k}\vec{F}) + \kappa_l F_z}{2\rho_2 c_t^2 k_t^2 \kappa_l} + \tilde{\psi}_2^{(+)}(\vec{k}, \omega) e^{i\kappa_l h}, \quad (3.1.47)$$

$$\tilde{A}_3 = \tilde{A}_{3SV} + \tilde{A}_{3SH}, \quad (3.1.48)$$

$$\tilde{A}_{3SV}(\vec{k}, \omega) = \frac{\kappa_t(\vec{k}\vec{F}) - k^2 F_z}{2\rho_2 c_t^2 k^2 \kappa_t^2 \kappa_t} (\vec{k} \times \vec{e}_z) + \tilde{A}_{2SV}^{(+)}(\vec{k}, \omega) e^{i\kappa_t h}, \quad (3.1.49)$$

$$\tilde{A}_{3SH}(\vec{k}, \omega) = \frac{\kappa_t \vec{k} - k^2 \vec{e}_z}{2\rho_2 c_t^2 k^2 \kappa_t^2 \kappa_t} (k_x F_y - k_y F_x) + \tilde{A}_{2SH}^{(+)}(\vec{k}, \omega) e^{i\kappa_t h}. \quad (3.1.50)$$

В (3.1.40), (3.1.44), (3.1.48) учтено, что при наличии в среде плоских границ поперечную волну с произвольным направлением вектора смещений удобно представить в виде суммы волны, в которой вектор смещений параллелен границе (*SH*-волна), и волны, в которой вектор смещений имеет перпендикулярную к границе составляющую (*SV*-волна) [Бреховских, 1973].

В (3.1.38), (3.1.39), (3.1.41) введены обозначения:

$$S_0(k, \omega) = R_0(k, \omega) + \varepsilon k_t^4 \frac{\kappa_l}{\kappa_1},$$

$$R_0(k, \omega) = (k_t^2 - 2k^2)^2 + 4k^2 \kappa_l \kappa_t, \quad \varepsilon = \frac{\rho_1}{\rho_2},$$

$$S_{mm} = (k_t^2 - 2k^2)^2 - 4k^2 \kappa_l \kappa_t - \varepsilon k_t^4 \frac{\kappa_l}{\kappa_1},$$

$$S_{mp} = (k_t^2 - 2k^2)^2 - 4k^2 \kappa_l \kappa_t + \varepsilon k_t^4 \frac{\kappa_l}{\kappa_1},$$

$$\vec{k} \times \vec{e}_z = k_y \vec{e}_x - k_x \vec{e}_y, \quad \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z \text{ — орты координатных осей.}$$

Подстановка выражений (3.1.38)–(3.1.50) в соответствующие интегралы Фурье (3.1.21)–(3.1.27) позволяет записать решение рассматриваемой задачи в интегральном виде. Некоторые из этих интегралов Фурье имеют полюс, определяемый из решения уравнения

$$S_0(k, \omega) = 0, \quad (3.1.51)$$

и связанный с излучением поверхностных волн на границе раздела твердое тело – газ. При условии $c_1 < c_R$, где c_R – скорость рэлеевской волны на границе твердое тело – вакуум (соответствующее ей волновое число k_R определяется из уравнения Рэля $R_0(k) = 0$), уравнение (3.1.51) имеет один действительный корень $k = k_S$, соответствующий поверхностной волне Стонели [Бреховских, 1973; Бреховских, Голдин, 1989].

Полученное интегральное решение задачи позволяет сделать ряд общих выводов о возбуждении тех или иных типов волн источниками различных конфигураций. Если вертикальная составляющая силы отсутствует, $f_z = 0$, а распределение горизонтальных сил $f_{x,y}(\vec{r}, t)$ представляет собой соленоидальное поле ($\text{div } \vec{f} = 0$), то отличны от нуля только потенциалы $\tilde{A}_{2SH}^{+(-)}$, \tilde{A}_{3SH} . Такой источник возбуждает только поперечные волны, вектор смещений в которых лежит в горизонтальной плоскости (*SH*-волны). Акустические волны в газе, продольные волны в твердом теле, а также поверхностная волна Стонели в этом случае не возбуждаются.

Если приложенные к плоскости $z = h$ силы имеют вертикальную составляющую, или, в её отсутствие, и ротор, и дивергенция поля горизонтальных сил отличны от нуля, $\text{rot } \vec{f} \neq 0$, $\text{div } \vec{f} \neq 0$, то возбуждаются акустические волны в газе,

продольные и поперечные (*SV*- и *SH*-поляризаций) волны в твердом теле, а также поверхностная волна Стонели. Потенциальное поле горизонтальных сил ($\text{rot } \vec{f} = 0$) волны *SH*-поляризации не возбуждает.

Отметим, что выражения (3.1.43)–(3.1.46) и первые слагаемые в формулах (3.1.47), (3.1.49), (3.1.50) описывают поля упругих волн, возбуждаемых силовыми источниками, распределенными по плоскости в безграничной твердой среде.

3.1.2. Мощность излучения волны Стонели, возбуждаемой распределенными гармоническими силовыми источниками

Для гармонических силовых воздействий, когда

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = \vec{f}_\omega(\vec{r}) e^{-i\omega_0 t},$$

где ω_0 — циклическая частота и $\vec{f}_\omega(\vec{r})$ — распределение сил по плоскости $z = h$, из соотношения (3.1.20) следует, что

$$\vec{F}(\vec{k}, \omega) = \delta(\omega - \omega_0) \vec{F}_\omega(\vec{k}), \quad (3.1.52)$$

где

$$\vec{F}_\omega(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}_\omega(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r} \quad (3.1.53)$$

— пространственный спектр гармонического источника. Поля акустических и упругих волн, генерируемых таким источником, выражаются в виде двойных интегралов Фурье по x - и y -компонентам волнового вектора.

Рассмотрим случай гармонических силовых источников. Обсуждение различных подходов к вычислению энергии излучения волн содержится, например, в работе [Докучаев, 1996]. В [Докучаев, 1996] отмечено, что в теории волновых процессов существуют два способа расчета волновой энергии, которые приводят к одинаковым результатам. При использовании первого способа следуют методом стационарной фазы вычислить соответствующие интегралы Фурье по горизонтальным компонентам волнового вектора (это даст асимптотики волновых полей на больших по сравнению с длинами излучаемых волн расстояниях от источника), затем вычислить плотность потока энергии, и, наконец, поток энергии через поверхность сферы (в случае безграничной среды) или полусферы (в случае полупространства) большого радиуса. Второй способ вычисления энергии излучения волн связан с расчетом работы сил реакции излучения над источниками волн. В рассматриваемом случае это работа, совершаемая силовым источником над упругой средой.

При действии на плоскость $z = h$ силовых источников мгновенная мощность излучения вычисляется по формуле [Гринченко, Мелешко, 1981; Докучаев, 1996]

$$W(t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}(\vec{r}, t) \dot{\vec{u}}(\vec{r}, z, t) \Big|_{z=h} d\vec{r}, \quad (3.1.54)$$

где точка над символом \vec{u} означает дифференцирование по времени. Формула (3.1.54) описывает суммарную мгновенную мощность излучения всех типов волн, существующих в данной среде. Пользуясь результатами [Гринченко, Мелешко, 1981, с. 38, 39; Исакович, 1973, с. 119] можно показать, что в случае гармонических волн циклической частоты ω_0 , когда $u(\vec{r}, z, t) = u_\omega(\vec{r}, z) e^{-i\omega_0 t}$, средняя за период волны $T = 2\pi/\omega_0$ мощность излучения дается выражением:

$$W_{\text{tot}} = \frac{1}{T} \int_0^T W(t) dt = -\frac{1}{2} \text{Re} \left[i\omega_0 \iint_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}_\omega^*(\vec{r}) \vec{u}_\omega(\vec{r}, z) \Big|_{z=h} d\vec{r} \right], \quad (3.1.55)$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение. В формуле (3.1.55) удобно перейти к спектрам, переписав её в виде

$$W_{\text{tot}} = -2\pi^2\omega_0 \text{Re} \left[i \iint_{-\infty}^{+\infty} \vec{U}_\omega(\vec{k}) \vec{F}_\omega^*(\vec{k}) d\vec{k} \right]. \quad (3.1.56)$$

В (3.1.56) введено обозначение $\vec{U}_\omega(\vec{k})$ для пространственного спектра смещений плоскости $z = h$ в гармонической волне:

$$\vec{U}_\omega(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \vec{u}_\omega(\vec{r}, z) \Big|_{z=h} e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r}. \quad (3.1.57)$$

Выделить из общего выражения (3.1.56) мощности излучения всех типов волн не представляется возможным. Однако сравнительно легко можно получить формулу, описывающую мощность излучения поверхностной волны, поскольку эта мощность определяется вкладом полюса подынтегрального выражения, который соответствует данной поверхностной волне.

Мощность излучения объемных волн (т.е. сферических продольной и поперечной волн в твердом теле и акустической волны в газе) следует вычислять путем подсчета потока энергии через поверхность полусферы большого радиуса.

Отметим, что мощность излучения поверхностной волны можно получить путем вычисления потока энергии через поверхность бесконечного цилиндра, ось которого перпендикулярна границе раздела сред.

Выделим из формулы (3.1.56) для полной мощности излучения слагаемые, в которых имеются полюса подынтегральных выражений. Обозначая эти слагаемые W , запишем их в виде [Разин, 2010а]:

$$W = \frac{\pi^2}{\rho_2\omega_0} \text{Re} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2\kappa_l\kappa_t S_0(k)} \left\{ \kappa_t \alpha(k) (\vec{k}\vec{F}_\omega)(\vec{k}\vec{F}_\omega^*) + \right. \\ \left. + k^2\kappa_l\kappa_t \beta(k) [(\vec{k}\vec{F}_\omega^*)F_{\omega z} - (\vec{k}\vec{F}_\omega)F_{\omega z}^*] - k^2\kappa_l \gamma(k) |F_{\omega z}|^2 \right\} d\vec{k}. \quad (3.1.58)$$

В (3.1.58) введены обозначения: $S_0(k) = S_0(k, \omega_0)$,

$$\alpha(k) = -k^2 S_{mm}(k) e^{2i\kappa_l h} + \kappa_l \kappa_t S_{mp}(k) e^{2i\kappa_t h} + 8k^2 \kappa_l \kappa_t (k_t^2 - 2k^2) e^{i(\kappa_l + \kappa_t)h}, \quad (3.1.59)$$

$$\beta(k) = S_{mm}(k) e^{2i\kappa_l h} + S_{mp}(k) e^{2i\kappa_t h} + 4(k^2 - \kappa_l \kappa_t)(k_t^2 - 2k^2) e^{i(\kappa_l + \kappa_t)h}, \quad (3.1.60)$$

$$\gamma(k) = -\kappa_l \kappa_t S_{mm}(k) e^{2i\kappa_l h} + k^2 S_{mp}(k) e^{2i\kappa_t h} - 8k^2 \kappa_l \kappa_t (k_t^2 - 2k^2) e^{i(\kappa_l + \kappa_t)h}. \quad (3.1.61)$$

Перейдем под интегралом в (3.1.58) к полярным координатам на плоскости $k_x O k_y$ в соответствии с формулами

$$k_x = k \cos \varphi, \quad k_y = k \sin \varphi.$$

Это позволяет представить величину W в виде:

$$W = \frac{\pi^2}{\rho_2 \omega_0} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_l \kappa_t S_0(k)} \times \\ \times \left[\kappa_l \alpha(k) |F_{\omega r}|^2 + k \kappa_l \kappa_t \beta(k) (F_{\omega r}^* F_{\omega z} - F_{\omega r} F_{\omega z}^*) - \kappa_l \gamma(k) |F_{\omega z}|^2 \right] k dk, \quad (3.1.62)$$

где

$$F_{\omega r} = F_{\omega x} \cos \varphi + F_{\omega y} \sin \varphi. \quad (3.1.63)$$

Отметим, что каждая из компонент вектора спектра силы может сложным образом зависеть от переменных интегрирования k и φ в (3.1.62).

Вклад в реальную часть интеграла (3.1.62) дают те области интегрирования, где подынтегральная функция действительна, а также полувычеты в лежащих на действительной оси полюсах подынтегрального выражения. Как отмечено выше, при условии $c_1 < c_R$ уравнение (3.1.51) имеет действительный корень $k = k_S$, соответствующий поверхностной волне Стонели.

Можно показать, что при $c_1 < c_R$, $\varepsilon \ll 1$, для скорости волны Стонели $c_S = \omega_0/k_S$ справедливо выражение [Разин, 2007]

$$c_S \approx c_1 \left\{ 1 - \frac{\varepsilon^2 c_1^8 (c_l^2 - c_1^2)}{2 [c_l (2c_t^2 - c_1^2)^2 - 4c_t^3 (c_l^2 - c_1^2)^{1/2} (c_t^2 - c_1^2)^{1/2}]^2} \right\}. \quad (3.1.64)$$

При $c_1 \lesssim c_R$ формула (3.1.64) неприменима, поскольку при $c_1 = c_R$ знаменатель в ней обращается в нуль. В этом случае даже при $\varepsilon \ll 1$ уравнение (3.1.51) необходимо решать численно. При условии $c_t \gg c_1$ из (3.1.64) следует формула для скорости волны Стонели, приведенная в [Бреховских, 1973; Бреховских, Годин, 1989]:

$$c_S \approx c_1 \left[1 - \frac{\varepsilon^2 c_1^4 c_l^4}{8c_t^4 (c_l^2 - c_t^2)^2} \right]. \quad (3.1.65)$$

Мощность излучения волны Стонели пропорциональна полувычету в полюсе $k = k_S$ в интеграле по k в (3.1.62) [Разин, 2010a]:

$$W_S = -\frac{2\pi^3 k_S}{\rho_2 \omega_0 \sqrt{k_S^2 - k_l^2} S_0'(k_S)} \left\{ a^2(k_S) \int_0^{2\pi} |F_{\omega r}(k_S, \varphi)|^2 d\varphi + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + b^2(k_S) \int_0^{2\pi} |F_{\omega z}(k_S, \varphi)|^2 d\varphi + \\
 & + 2a(k_S) b(k_S) \int_0^{2\pi} \text{Im} [F_{\omega r}^*(k_S, \varphi) F_{\omega z}(k_S, \varphi)] d\varphi \left. \right\}. \quad (3.1.66)
 \end{aligned}$$

В (3.1.66)

$$\begin{aligned}
 S'_0(k_S) & = \left. \frac{dS_0}{dk} \right|_{k=k_S} = 8k_S \left[2k_S^2 - k_t^2 - \sqrt{k_S^2 - k_l^2} \sqrt{k_S^2 - k_t^2} \right] + \\
 & + \frac{4k_S^3(k_l^2 + k_t^2 - 2k_S^2)}{\sqrt{k_S^2 - k_l^2} \sqrt{k_S^2 - k_t^2}} - \varepsilon \frac{k_l^4 k_S (k_1^2 - k_t^2)}{\sqrt{k_S^2 - k_l^2} (k_S^2 - k_1^2)^{3/2}},
 \end{aligned}$$

$$a(k_S) = k_S \left[(k_t^2 - 2k_S^2) e^{-\sqrt{k_S^2 - k_l^2} h} + 2\sqrt{k_S^2 - k_l^2} \sqrt{k_S^2 - k_t^2} e^{-\sqrt{k_S^2 - k_t^2} h} \right], \quad (3.1.67)$$

$$b(k_S) = \sqrt{k_S^2 - k_l^2} \left[(k_t^2 - 2k_S^2) e^{-\sqrt{k_S^2 - k_l^2} h} + 2k_S^2 e^{-\sqrt{k_S^2 - k_t^2} h} \right]. \quad (3.1.68)$$

Рассмотрим частные случаи формулы (3.1.66). Если на глубине $z = h$ действует источник вертикальной силы, $f_{\omega z} \neq 0$, $f_{\omega x} = f_{\omega y} = 0$, то мощность излучения дается выражением:

$$W_S^{(z)} = W_S^{(z)}(0) \zeta_S^{(z)}(h), \quad (3.1.69)$$

где

$$W_S^{(z)}(0) = -\frac{2\pi^3 \omega_0^3 k_S \sqrt{k_S^2 - k_l^2}}{\rho_2 c_t^4 S'_0(k_S)} \int_0^{2\pi} |F_{\omega z}(k_S, \varphi)|^2 d\varphi \quad (3.1.70)$$

— мощность волны Стонели, возбуждаемой поверхностным источником, и функция

$$\zeta_S^{(z)}(h) = \left[\left(2 \frac{k_S^2}{k_t^2} - 1 \right) e^{-\sqrt{k_S^2 - k_l^2} h} - 2 \frac{k_S^2}{k_t^2} e^{-\sqrt{k_S^2 - k_t^2} h} \right]^2 \quad (3.1.71)$$

характеризует зависимость излучаемой мощности от глубины расположения источника.

В случае точечного источника, когда

$$f_{\omega z} = f_0 \delta(x) \delta(y),$$

и

$$F_{\omega z}(k_S) = \frac{f_0}{4\pi^2}$$

(здесь f_0 характеризует амплитуду вертикальной силы), выражение для величины $W_S^{(0)}$ принимает вид:

$$W_S^{(z)}(0) = -\frac{f_0^2 \omega_0^3 k_S \sqrt{k_S^2 - k_l^2}}{4\rho_2 c_t^4 S'_0(k_S)}. \quad (3.1.72)$$

Если на плоскости $z = h$ действует источник горизонтальной силы, т. е. $f_{\omega z} = 0$, $f_{\omega r} \neq 0$, то выражение для мощности излучения волны Стонели имеет вид:

$$W_S^{(r)} = -\frac{2\pi^3 \omega_0^3 k_S^3}{\rho_2 c_t^4 \sqrt{k_S^2 - k_l^2} S_0'(k_S)} \left[\left(1 - 2 \frac{k_S^2}{k_t^2}\right) e^{-\sqrt{k_S^2 - k_l^2} h} + \right. \\ \left. + 2 \sqrt{\frac{k_S^2}{k_t^2} - n^2} \sqrt{\frac{k_S^2}{k_t^2} - 1} e^{-\sqrt{k_S^2 - k_t^2} h} \right]^2 \int_0^{2\pi} |F_{\omega r}(k_S, \varphi)|^2 d\varphi, \quad (3.1.73)$$

где $n = k_l/k_t = c_t/c_l$.

В случае точечного источника горизонтальной силы, действующей, например, вдоль оси x , когда

$$f_{\omega x} = f_0 \delta(x) \delta(y),$$

и

$$F_{\omega x}(k_S) = \frac{f_0}{4\pi^2}, \quad F_{\omega r}(k_S, \varphi) = \frac{f_0}{4\pi^2} \cos \varphi,$$

из (3.1.73) получаем:

$$W_S^{(x)} = -\frac{f_0^2 \omega_0^3 k_S^3}{8\rho_2 c_t^4 \sqrt{k_S^2 - k_l^2} S_0'(k_S)} \times \\ \times \left[\left(1 - 2 \frac{k_S^2}{k_t^2}\right) e^{-\sqrt{k_S^2 - k_l^2} h} + 2 \sqrt{\frac{k_S^2}{k_t^2} - n^2} \sqrt{\frac{k_S^2}{k_t^2} - 1} e^{-\sqrt{k_S^2 - k_t^2} h} \right]^2. \quad (3.1.74)$$

Формулу (3.1.74) можно записать также в виде

$$W_S^{(x)} = W_S^{(x)}(0) \zeta_S^{(x)}(h), \quad (3.1.75)$$

где

$$W_S^{(x)}(0) = -\frac{f_0^2 \omega_0^3 k_S^3}{8\rho_2 c_t^4 \sqrt{k_S^2 - k_l^2} S_0'(k_S)} \left(1 - 2 \frac{k_S^2}{k_t^2} + 2 \sqrt{\frac{k_S^2}{k_t^2} - n^2} \sqrt{\frac{k_S^2}{k_t^2} - 1}\right)^2 \quad (3.1.76)$$

представляет собой мощность излучения волны Стонели, возбуждаемой точечным источником поверхностной горизонтальной силы, и

$$\zeta_S^{(x)}(h) = \left[\left(1 - 2 \frac{k_S^2}{k_t^2}\right) e^{-\sqrt{k_S^2 - k_l^2} h} + 2 \sqrt{\frac{k_S^2}{k_t^2} - n^2} \sqrt{\frac{k_S^2}{k_t^2} - 1} e^{-\sqrt{k_S^2 - k_t^2} h} \right]^2 \times \\ \times \left(1 - 2 \frac{k_S^2}{k_t^2} + 2 \sqrt{\frac{k_S^2}{k_t^2} - n^2} \sqrt{\frac{k_S^2}{k_t^2} - 1}\right)^{-2} \quad (3.1.77)$$

— функция, характеризующая зависимость мощности излучения волны Стонели от глубины расположения источника.

3.1.3. Возбуждение объемных гармонических упругих волн в твердом полупространстве подповерхностными силовыми источниками

В ряде практически важных случаев упругая среда находится в контакте с разреженным газом, плотность которого на три-четыре порядка меньше плотности твердого тела. При этом можно пренебречь волновыми процессами в газе и приближенно считать, что твердая среда граничит с вакуумом.

Выражения для фурье-образов волновых полей, возбуждаемых в упругом полупространстве со свободной границей силовыми источниками, распределенными по плоскости $z = h$, следуют из формул (3.1.39)–(3.1.50) при $\varepsilon = 0$. В случае гармонических сил эти фурье-образы необходимо подставить в двойные интегралы Фурье по горизонтальным компонентам волнового вектора, что позволяет получить решение задачи излучения упругих волн в интегральном виде.

Остановимся на вычислении интегралов Фурье, описывающих волновые поля. Для решения задач, обладающих цилиндрической симметрией, используется преобразование Фурье–Бесселя, позволяющее получить выражения для полей гармонических волн в виде однократных интегралов по модулю волнового числа k в пределах от нуля до бесконечности [Петрашень, 1978; Аки, Ричардс, Т. 1, 1983; Чичинин, 1984; Бреховских, 1973; Бреховских, Годин, 1989]. В этих интегралах следует заменить функции Бесселя на соответствующие функции Ханкеля (это позволяет производить интегрирование в пределах $-\infty < k < \infty$), причем для последних берется асимптотика при больших значениях аргумента. Для точек наблюдения, расположенных на больших по сравнению с длинами волн расстояниях от источника, при вычислении полей объемных волн следует перейти под интегралами к сферической системе координат и воспользоваться методом стационарной фазы.

Двойные интегралы Фурье можно также приближенно вычислить для точек наблюдения, находящихся в волновой зоне. Для этого под интегралами следует перейти к полярным координатам (r, φ) на плоскости xOy и (k, φ') на плоскости k_xOk_y :

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right), \quad k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}, \quad \varphi' = \arctg\left(\frac{k_y}{k_x}\right).$$

Интеграл по полярному углу φ' приближенно вычисляется методом стационарной фазы. Это приводит к выражениям для потенциалов в виде однократных интегралов по модулю волнового вектора. Данное преобразование имеет следующий общий вид:

$$\begin{aligned} & \iint_{-\infty}^{+\infty} \Phi(k_x, k_y) e^{i(\kappa_l t z + \vec{k}\vec{r})} dk_x dk_y \approx \\ & \approx \sqrt{\frac{2\pi}{r}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{\infty e^{i\pi}}^{\infty} \Phi(k \cos \varphi, k \sin \varphi) e^{i(\kappa_l t z + kr)} \sqrt{k} dk, \end{aligned} \quad (3.1.78)$$

где величина Φ обозначает соответствующую часть подынтегральной функции.

В интеграле в правой части (3.1.78) контур интегрирования в области $\text{Re } k < 0$ проходит выше действительной оси (по отрицательной части действительной оси проведен разрез, обеспечивающий однозначность определения аналитической функции \sqrt{k} на комплексной плоскости k). Именно с этим связано задание нижнего предела интегрирования в (3.1.78), в виде $\infty e^{i\pi}$ [Фелсен, Маркувиц, Т. 1, 1978].

Отметим, что точность вычисления интегралов по углу φ' методом стационарной фазы соответствует точности вычисления асимптотики функции Бесселя нулевого порядка $J_0(kr)$ при больших значениях аргумента, $kr \gg 1$. Действительно, известно [Морс, Фешбах, 1960, Т. 2, с. 303], что

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos(\varphi' - \varphi)} d\varphi' = J_0(kr). \quad (3.1.79)$$

Соотношение (3.1.79) следует также из формулы (2.5.27.19) на с. 440 в [Прудников и др., 1981]. Вычисляя интеграл в левой части (3.1.79) методом стационарной фазы при $kr \gg 1$, имеем:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikr \cos(\varphi' - \varphi)} d\varphi' \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \cos\left(kr - \frac{\pi}{4}\right). \quad (3.1.80)$$

Выражение в правой части (3.1.80) представляет собой асимптотику функции Бесселя нулевого порядка $J_0(kr)$ при больших значениях аргумента, $kr \gg 1$ (см., например, формулу (9.2.1) на с. 185 в [Абрамовиц, Стиган, 1979], а также [Прудников и др., 1981, с. 302]).

Таким образом, преобразование (3.1.78) двойного интеграла Фурье в однократный соответствует по точности стандартной процедуре, используемой для оценок однократных интегралов Фурье–Бесселя, описывающих поля осесимметричных источников.

Для вычисления полей объемных волн в оставшемся однократном интеграле по модулю волнового вектора k (см. правую часть (3.1.78)) следует перейти к сферическим координатам (R, θ, φ) :

$$R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad \theta = \arccos(z/R), \quad \varphi = \arctg(y/x).$$

Данный интеграл также следует вычислять методом стационарной фазы. Выражения для смещений получаются с помощью соотношения (3.1.16).

Отметим, что при вычислении полей объемных волн двойные интегралы Фурье могут быть приближенно оценены двумерным методом стационарной фазы [Федорюк, 1977].

Расчет показывает, что, как и следовало ожидать, в волновой зоне смещения в продольной волне (P -волне) имеют только радиальную R -компоненту, а вектора смещений в поперечной волне вертикальной поляризации (SV -волне) и в поперечной волне горизонтальной поляризации (SH -волне) — соответственно лишь θ - и φ -компоненты [Разин, 2010б]:

$$u_P^{(R)} = \frac{\pi}{\rho_2 c_l^2 R_0(k_l \sin \theta)} \frac{e^{ik_l R}}{R} \left\{ \left[R_0(k_l \sin \theta) e^{-ik_l h \cos \theta} - R_m(k_l \sin \theta) e^{ik_l h \cos \theta} + \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + 4k_l \cos \theta (k_t^2 - 2k_l^2 \sin^2 \theta) \sqrt{k_t^2 - k_l^2 \sin^2 \theta} e^{ih\sqrt{k_t^2 - k_l^2 \sin^2 \theta}} \left] F_{\omega r}(\vec{k}_l^{(s)}) \sin \theta + \right. \\
 & + \left[R_0(k_l \sin \theta) e^{-ik_l h \cos \theta} + R_m(k_l \sin \theta) e^{ik_l h \cos \theta} + \right. \\
 & \left. + 4k_l^2 \sin^2 \theta (k_t^2 - 2k_l^2 \sin^2 \theta) e^{ih\sqrt{k_t^2 - k_l^2 \sin^2 \theta}} \right] F_{\omega z}(\vec{k}_l^{(s)}) \cos \theta \left. \right\}, \quad (3.1.81)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u_{SV}^{(\theta)} = & -\frac{\pi}{\rho_2 c_t^2} \frac{e^{ik_t R}}{R_0(k_t \sin \theta)} \frac{e^{ik_t R}}{R} \left\{ \left[R_0(k_t \sin \theta) e^{-ik_t h \cos \theta} + R_m(k_t \sin \theta) e^{ik_t h \cos \theta} + \right. \right. \\
 & + 4k_t^4 \sin^2 \theta (1 - 2 \sin^2 \theta) e^{ih\sqrt{k_t^2 - k_l^2 \sin^2 \theta}} \left. \right] F_{\omega r}(\vec{k}_t^{(s)}) \cos \theta - \\
 & - \left[R_0(k_t \sin \theta) e^{-ik_t h \cos \theta} - R_m(k_t \sin \theta) e^{ik_t h \cos \theta} + \right. \\
 & \left. + 4k_t^3 \cos \theta (1 - 2 \sin^2 \theta) \sqrt{k_t^2 - k_l^2 \sin^2 \theta} e^{ih\sqrt{k_t^2 - k_l^2 \sin^2 \theta}} \right] F_{\omega z}(\vec{k}_t^{(s)}) \sin \theta \left. \right\}, \quad (3.1.82)
 \end{aligned}$$

$$u_{SH}^{(\varphi)} = \frac{2\pi}{\rho_2 c_t^2} \frac{e^{ik_t R}}{R} F_{\omega \varphi}(\vec{k}_t^{(s)}) \cos(k_t h \cos \theta). \quad (3.1.83)$$

В (3.1.81)–(3.1.83) введены обозначения:

$$\begin{aligned}
 R_0(k) &= R_0(k, \omega_0), & R_m(k) &= (k_t^2 - 2k^2)^2 - 4k^2 \kappa_l \kappa_t, \\
 \vec{k}_l^{(s)} &= (k_l \sin \theta \cos \varphi, k_l \sin \theta \sin \varphi), \\
 \vec{k}_t^{(s)} &= (k_t \sin \theta \cos \varphi, k_t \sin \theta \sin \varphi)
 \end{aligned}$$

— волновые вектора, соответствующие точкам стационарной фазы,

$$F_{\omega r}(\vec{k}_{l,t}^{(s)}) = F_{\omega x}(\vec{k}_{l,t}^{(s)}) \cos \varphi + F_{\omega y}(\vec{k}_{l,t}^{(s)}) \sin \varphi \quad (3.1.84)$$

и

$$F_{\omega \varphi}(\vec{k}_t^{(s)}) = F_{\omega y}(\vec{k}_t^{(s)}) \cos \varphi - F_{\omega x}(\vec{k}_t^{(s)}) \sin \varphi \quad (3.1.85)$$

— соответственно горизонтальная радиальная и азимутальная составляющие пространственного спектра вектора силы, R — расстояние до точки наблюдения.

Плотность потока энергии упругих волн \vec{I} вычисляется по формуле [Гринченко, Мелешко, 1981]:

$$I_n = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} (i\omega_0 \sigma_{mn} u_n^*) = \frac{\omega_0}{2} \operatorname{Im} (\sigma_{mn} u_n^*), \quad (3.1.86)$$

где звездочка обозначает комплексное сопряжение, и по дважды повторяющимся индексам производится суммирование от единицы до трех. В сферической системе координат вектор \vec{I} имеет только радиальную составляющую. Выражения для плотностей потоков энергии в продольной волне и в поперечной волне SV -поляризации оказываются довольно громоздкими и здесь не приводятся. В поперечной волне SH -поляризации радиальная компонента вектора плотности потока энергии имеет вид:

$$I_{SH} = \frac{2\pi^2 \omega_0 k_t}{\rho_2 c_t^2 R^2} \left| F_{\omega \varphi}(\vec{k}_t^{(s)}) \cos(k_t h \cos \theta) \right|^2. \quad (3.1.87)$$

Проинтегрировав выражения для плотностей потоков энергии по полусфере радиуса R можно получить формулы для средних за период мощностей излучения, соответствующих данному типу волны:

$$W_{P,SV,SH} = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} I_{P,SV,SH}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta. \quad (3.1.88)$$

В частности, для поперечной SH -волны имеем:

$$W_{SH} = \frac{2\pi^2 \omega_0^2}{\rho_2 c_t^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \left| F_{\omega\varphi}(\vec{k}_t^{(s)}) \cos(k_t h \cos \theta) \right|^2 \sin \theta d\theta. \quad (3.1.89)$$

Для точечного подповерхностного источника горизонтальной силы из (3.1.89) имеем:

$$W_{SH} = \frac{\omega_0^2 f_0^2}{16\pi \rho_2 c_t^3} \left(1 + \frac{\sin 2k_t h}{2k_t h} \right). \quad (3.1.90)$$

Для точечного подповерхностного горизонтального крутоля [Петрашень, 1978] вида

$$\vec{f} = \mathcal{P}_0 \operatorname{rot} [\delta(x) \delta(y) \vec{e}_z], \quad (3.1.91)$$

где величина \mathcal{P}_0 имеет размерность момента силы, из (3.1.89) получаем:

$$W_{SH} = \frac{\omega_0^4 \mathcal{P}_0^2}{4\pi \rho_2 c_t^5} \left[\frac{1}{3} + \frac{\sin 2k_t h}{8(k_t h)^3} - \frac{\cos 2k_t h}{4(k_t h)^2} \right]. \quad (3.1.92)$$

Для некоторых типов источников (например, для точечного силового воздействия, а также для случая силы, равномерно распределенной по круговой области) в формуле (3.1.88) удастся вычислить интегралы по углу φ [Miller, Pursey, 1955; Гуцин, Докучаев и др., 1981], после чего интеграл по углу θ может быть подробно исследован численно [Гуцин и др., 1981]. Следует, однако, отметить, что и в случае сколь угодно сложного распределения гармонических сил по плоскости $z = h$ вычисление двойных интегралов вида (3.1.88) с помощью ЭВМ не вызывает принципиальных затруднений.

3.1.4. Поле и мощность излучения поверхностной волны Рэлея, возбуждаемой гармоническими силами, действующими внутри твердого полупространства

Для ряда приложений представляет интерес вычисление смещений в поверхностной волне Рэлея. Волновое число волны Рэлея находится из решения уравнения:

$$R_0(k) = (2k^2 - k_t^2)^2 + 4k^2 \sqrt{k_t^2 - k^2} \sqrt{k_t^2 - k^2} = 0.$$

Отношение скоростей поперечной и продольной волн $n = c_t/c_l$ фактически меняется для различных веществ в пределах от $1/\sqrt{2}$ (при $\lambda = 0$) до нуля. При этом отношение c_R/c_t лежит в пределах [Бреховских, Годун, 1989]

$$0,8741 < c_R/c_t < 0,9554.$$

Приближенные выражения, справедливые на значительных удалениях от области действия источников, получаются следующим образом. В интегралах, описывающих скалярные потенциалы $\psi_2^{(+)}$, ψ_3 и векторные потенциалы в SV -волне $\vec{A}_{2SV}^{(+)}$, \vec{A}_{3SV} , перейдем к цилиндрическим координатам. Интегралы по полярному углу φ вычислим приближенно методом стационарной фазы, см. (3.1.78). В оставшихся интегралах по модулю волнового вектора k (см. правую часть (3.1.78)) следует взять вычет в рэлеевском полюсе $k = k_R$. Это приводит к аналитическим выражениям для скалярного и векторного потенциалов, соответствующих волне Рэлея, причем выражения для потенциалов в областях II и III совпадают. С учетом соотношений (3.1.16) для смещений в поверхностной рэлеевской волне получаем следующие приближенные выражения, справедливые на больших по сравнению с длинами волн расстояниях от области действия источников [Пазун, 20106]:

$$u_{Rr}(r, \varphi, z) = \frac{1}{q_l} D [i(k_t^2 - 2k_R^2) \nu_x(h) F_{\omega r}(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) + 2k_R q_l \nu_z(h) F_{\omega z}(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi)] \nu_x(z) e^{ik_R r}, \quad (3.1.93)$$

$$u_{Rz}(r, \varphi, z) = -\frac{1}{q_t} D [2k_R q_t \nu_x(h) F_{\omega r}(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) - i(k_t^2 - 2k_R^2) \nu_z(h) F_{\omega z}(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi)] \nu_z(z) e^{ik_R r}. \quad (3.1.94)$$

В (3.1.93), (3.1.94) использованы обозначения

$$\nu_x(h) = 2\xi^2 e^{-k_t h \sqrt{\xi^2 - n^2}} + (1 - 2\xi^2) e^{-k_t h \sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad (3.1.95)$$

$$\nu_z(h) = (1 - 2\xi^2) e^{-k_t h \sqrt{\xi^2 - n^2}} + 2\xi^2 e^{-k_t h \sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad (3.1.96)$$

$$q_{l,t} = \sqrt{k_R^2 - k_{l,t}^2},$$

$$\xi = \frac{k_R}{k_t} = \frac{c_t}{c_R}$$

— отношение скоростей поперечной и рэлеевской волн,

$$D = \frac{\pi k_t^2 (2k_R^2 - k_t^2)}{2\rho_2 c_t^2 k_R R'_0(k_R)} \sqrt{\frac{2\pi}{k_R r}} e^{-i\frac{\pi}{4}}. \quad (3.1.97)$$

Перейдем к вычислению мощности излучения поверхностной волны Рэлея. В случае границы твердого тела с вакуумом в знаменателе подынтегрального выражения в формуле (3.1.62) следует заменить $S_0(k)$ на $R_0(k)$.

Мощность излучения волны Рэлея пропорциональна полувычету в полюсе $k = k_R$ в интеграле, аналогичном (3.1.62) [Разин, 2010а]:

$$W_R = -\frac{2\pi^3 k_R}{\rho_2 \omega_0 R'_0(k_R)} \left\{ \alpha_0^2(k_R) \int_0^{2\pi} |F_{\omega r}(k_R, \varphi)|^2 d\varphi + \beta_0^2(k_R) \int_0^{2\pi} |F_{\omega z}(k_R, \varphi)|^2 d\varphi + 2\alpha_0(k_R) \beta_0(k_R) \int_0^{2\pi} \text{Im} [F_{\omega r}^*(k_R, \varphi) F_{\omega z}(k_R, \varphi)] d\varphi \right\}. \quad (3.1.98)$$

В (3.1.98) введены обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha_0(k_R) &= k_t^2 \sqrt{q_t} \nu_x(h), \\ \beta_0(k_R) &= -k_t^2 \sqrt{q_l} \nu_z(h), \\ R'_0(k_R) &= \left. \frac{dR_0}{dk} \right|_{k=k_R} = \frac{2}{k_R(2k_R^2 - k_t^2)^2} [k_t^6(4k_R^2 - k_t^2) - 8k_R^6(k_t^2 - k_l^2)]. \end{aligned}$$

Рассмотрим частные случаи формулы (3.1.98). Для точечного подповерхностного силового источника, ориентированного вдоль оси x , мощность излучения волны Рэлея дается выражением:

$$W_R^{(x)} = W_R^{(x)}(0) \zeta_R^{(x)}(h), \quad (3.1.99)$$

где

$$W_R^{(x)}(0) = -\frac{f_0^2 \omega_0^3 k_R \sqrt{k_R^2 - k_t^2}}{8\rho_2 c_t^4 R'_0(k_R)} \quad (3.1.100)$$

— мощность излучения рэлеевской волны в случае поверхностного источника, и

$$\zeta_R^{(x)}(h) = \nu_x^2(h). \quad (3.1.101)$$

Функция $\zeta_R^{(x)}(h)$ (3.1.101) описывает зависимость мощности излучения рэлеевской волны от глубины, на которой находится источник.

Если точечный подповерхностный силовой источник ориентирован вертикально, то для мощности излучения волны Рэлея имеем [Разин, 2009]:

$$W_R^{(z)} = W_R^{(z)}(0) \zeta_R^{(z)}(h), \quad (3.1.102)$$

где

$$W_R^{(z)}(0) = -\frac{f_0^2 \omega_0^3 k_R \sqrt{k_R^2 - k_t^2}}{4\rho_2 c_t^4 R'_0(k_R)} \quad (3.1.103)$$

соответствует случаю поверхностного источника, и

$$\zeta_R^{(z)}(h) = \nu_z^2(h) \quad (3.1.104)$$

— функция, описывающая зависимость мощности излучения от глубины расположения источника.

Рассмотрим подробнее зависимости мощности излучения волны Рэлея от глубины расположения источника. Вид функций $\zeta_R^{(x)}(h)$ и $\zeta_R^{(z)}(h)$ соответствует выражениям для горизонтальной и вертикальной компонент смещений в поверхностной волне (см. (3.1.93), (3.1.94)). Мощность излучения источника горизонтальной силы $W_R^{(x)}$ пропорциональна квадрату зависимости горизонтальных смещений в волне Рэлея от глубины, $W_R^{(x)}(h) \sim \nu_x^2(h)$. Мощность излучения источника вертикальной силы $W_R^{(z)}$ пропорциональна, соответственно, квадрату функции, описывающей зависимость вертикальных смещений в рэлеевской волне от глубины, $W_R^{(z)} \sim \nu_z^2(h)$.

Зависимости $\nu_{x,z}(z)$ хорошо известны [Бреховских, 1973]. Здесь лишь отметим, что эти функции нетрудно исследовать аналитически. Например, $\nu_x = 0$ при

$$k_t h_0^{(x)} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - n^2} - \sqrt{\xi^2 - 1}} \ln \frac{2\xi^2}{2\xi^2 - 1}. \quad (3.1.105)$$

Это значит, что гармонический источник горизонтальной силы, расположенный на глубине $h_0^{(x)}$ под поверхностью упругого полупространства, не возбуждает волну Рэлея.

Функции $\nu_x(z)$ и $\nu_z(z)$ достигают своих максимумов соответственно при

$$k_t h_{\max}^{(x)} = \tilde{H} + k_t h_0^{(x)} \quad (3.1.106)$$

и

$$k_t h_{\max}^{(z)} = \tilde{H} - k_t h_0^{(x)}, \quad (3.1.107)$$

где

$$\tilde{H} = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 - n^2} - \sqrt{\xi^2 - 1}} \ln \frac{\sqrt{\xi^2 - n^2}}{\sqrt{\xi^2 - 1}}. \quad (3.1.108)$$

Зависимости безразмерных величин $\tilde{h}_0^{(x)} = h_0^{(x)}/\lambda_t$, $\tilde{h}_{\max}^{(x)}/\lambda_t$ и $\tilde{h}_{\max}^{(z)} = h_{\max}^{(z)}/\lambda_t$ (λ_t — длина поперечной волны) от параметра $n = c_t/c_l$ представлены на рис. 3.1. В частности, для $n = 1/\sqrt{3} \approx 0,577$ (при этом в твердой среде равны параметры Ламэ, $\lambda = \mu$) $h_0^{(x)} \approx 0,1747 \lambda_t \approx 0,19 \lambda_R$, $h_{\max}^{(x)} \approx 0,4243 \lambda_t \approx 0,4615 \lambda_R$, $h_{\max}^{(z)} \approx 0,0736 \lambda_t \approx 0,08 \lambda_R$ [Бреховских, 1973].

Графики функций $\zeta_R^{(x)}$ и $\zeta_R^{(z)}$, характеризующих зависимости мощностей излучения рэлеевской волны, возбуждаемой горизонтальным и вертикальным силовыми воздействиями, от глубины расположения источника, представлены на рис. 3.2. Из рассмотрения рис. 3.2 следует, что мощность излучения волны Рэлея, возбуждаемой горизонтальной гармонической силой, максимальна в случае расположения источника на поверхности упругого полупространства. При увеличении глубины расположения источника мощность излучения рэлеевской волны резко падает и обращается в нуль при $h = h_0^{(x)}$. При дальнейшем удалении источника от поверхности упругой среды, указанная мощность излучения нарастает и достигает относительного максимума при $h = h_{\max}^{(x)}$. При $n = 1/\sqrt{3}$ имеем

$$\zeta_R^{(x)}(\tilde{h}_{\max}^{(x)}) \approx 0,055.$$

При $h > h_{\max}^{(x)}$ мощность излучения волны Рэлея экспоненциально спадает.

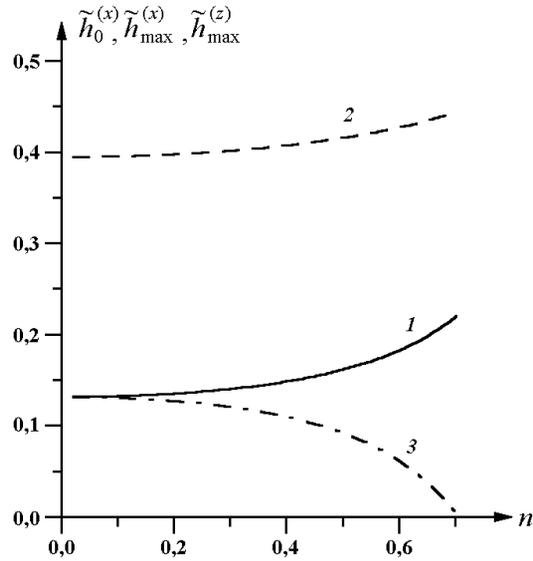


Рис. 3.1. Зависимости величин $\tilde{h}_0^{(x)}$ (1), $\tilde{h}_{\max}^{(x)}$ (2) и $\tilde{h}_{\max}^{(z)}$ (3) от параметра n

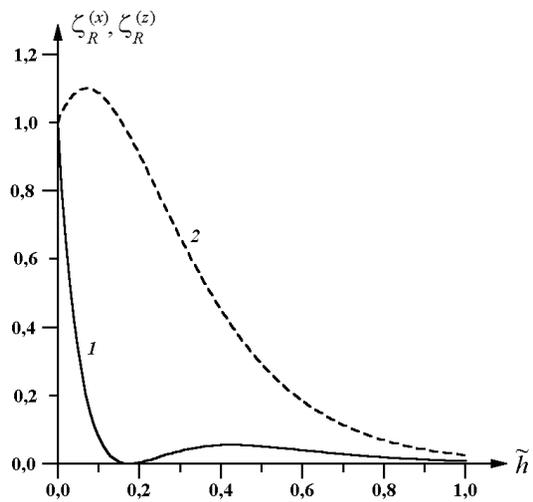


Рис. 3.2. Зависимости величин $\zeta_R^{(x)}$ (1) и $\zeta_R^{(z)}$ (2) от приведенной глубины источника $\tilde{h} = h/\lambda_t$ при $n = 1/\sqrt{3}$

Для вертикального силового воздействия мощность излучения волны Рэлея при удалении источника от поверхности полупространства нарастает, достигает максимума, а затем экспоненциально убывает. При $n = 1/\sqrt{3}$ имеем

$$\zeta_R^{(z)}(\tilde{h}_{\max}^{(z)}) \approx 1,101.$$

Величины абсолютных максимумов функции $\zeta_R^{(z)}$ и относительных максимумов функции $\zeta_R^{(x)}$ в зависимости от параметра n представлены на рис. 3.3.

Выполним количественные оценки мощности излучения волны Рэлея, возбуждаемой точечным гармоническим источником горизонтальной силы. Для численных расчетов представим мощность излучения (3.1.100) в виде [Miller, Pursey, 1955]

$$W_R^{(x)}(0) = \frac{f_0^2 \omega_0^2}{4\pi \rho_2 c_l^3} \widetilde{W}_R^{(x)}(0), \quad (3.1.109)$$

где

$$\widetilde{W}_R^{(x)}(0) = -\frac{\pi \xi \sqrt{\xi^2 - 1}}{2n^3 q(\xi)} \quad (3.1.110)$$

— безразмерный численный коэффициент. В (3.1.110) использовано обозначение

$$q(\xi) = \frac{R'_0(k_R)}{k_t^3} = \frac{2}{\xi(2\xi^2 - 1)^2} [4\xi^2 - 1 - 8\xi^6(1 - n^2)].$$

Для $n = 1/\sqrt{3}$ имеем

$$\widetilde{W}_R^{(x)}(0) = 0,7560.$$

При $n = 0,4$ и $n = 0,65$ получаем соответственно

$$\widetilde{W}_R^{(x)}(0) = 1,2562$$

и

$$\widetilde{W}_R^{(x)}(0) = 0,7789.$$

При данной амплитуде силы мощность рэлеевской волны, возбуждаемой вертикальным точечным поверхностным источником, всегда больше соответствующей мощности для горизонтального источника. На рис. 3.4 представлена зависимость величины

$$\delta = \frac{W_R^{(x)}(0)}{W_R^{(z)}(0)} = \frac{\sqrt{\xi^2 - 1}}{2\sqrt{\xi^2 - n^2}} < 1 \quad (3.1.111)$$

от параметра n . Из рассмотрения рис. 3.4 следует, что даже для веществ, у которых значение параметра n близко к 0,7, указанные величины отличаются приблизительно в три раза. Это отличие еще более существенное при меньших значениях n . Например, при $n = 1/\sqrt{3}$ имеем $\delta \approx 0,232$.

Таким образом, в данном разделе получены выражения для мощностей излучения гармонических поверхностных акустических волн: волны Стонели на плоской

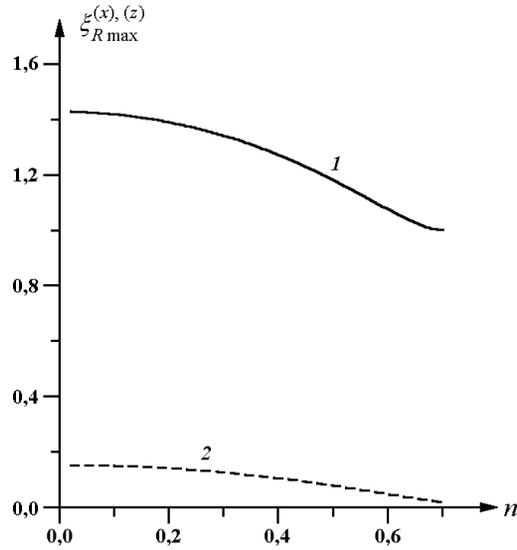


Рис. 3.3. Зависимости величин максимумов функции $\zeta_R^{(z)}$ (1) и $\zeta_R^{(x)}$ (2) от параметра n

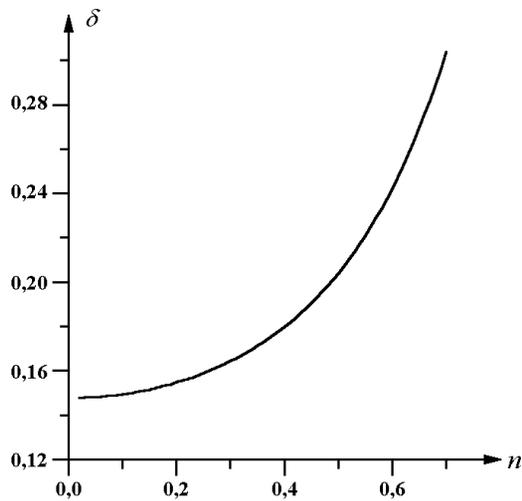


Рис. 3.4. Зависимость отношения мощности излучения волны Рэлея для источников горизонтальной и вертикальной сил от параметра n

границе твердое тело – газ и волны Рэлея на поверхности упругого полупространства, граничащего с вакуумом. Волны возбуждаются силовыми источниками достаточно общего вида, распределенными по некоторой площадке, расположенной в твердом теле и ориентированной параллельно его поверхности. Получены приближенные аналитические выражения для вертикальной и горизонтальной компонент вектора смещений в рэлеевской волне, справедливые на больших расстояниях от источника. Данные результаты значительно расширяют вычислительные возможности при исследованиях сейсмоакустических волновых процессов.

3.2. Действие распределенных силовых источников на поверхность однородного упругого полупространства, граничащего с газом

В данном разделе исследовано возбуждение сейсмоакустических волн силовыми источниками, распределенными по плоской границе раздела газ – твердое тело. Решена как стационарная, так и нестационарная задачи. Для гармонической зависимости сил от времени получены выражения для средних за период мощностей излучения поверхностной волны Стонели и акустической волны в газе. В случае упругого полупространства, граничащего с вакуумом, получены и для некоторых распределений сил численно проанализированы мощности излучения продольной, поперечных (*SH*- и *SV*-поляризаций) и рэлеевской волн. Для произвольной зависимости сил от времени вычислены энергии волны Стонели, а также продольной, поперечных и рэлеевской волн, излученные за всё время действия источников.

3.2.1. Возбуждение волны Стонели распределенными силовыми источниками, действующими на границе раздела твердое тело – газ

Большинство искусственных источников сейсмоизлучения располагаются на земной поверхности. Это могут быть как сеймовибраторы, так и различные технические устройства, вибрации которых создают колебания грунта. В связи с этим целесообразно отдельно рассмотреть возбуждение сейсмоакустических волн поверхностными источниками.

Если силовые источники находятся на поверхности упругого полупространства, $h = 0$, то из (3.1.67), (3.1.68) следует, что

$$a(k_S) = k_S \left(k_t^2 - 2k_S^2 + 2\sqrt{k_S^2 - k_t^2} \sqrt{k_S^2 - k_t^2} \right), \quad (3.2.1)$$

$$b(k_S) = k_t^2 \sqrt{k_S^2 - k_t^2}. \quad (3.2.2)$$

При этом выражение для мощности излучения волны Стонели принимает вид [Pазин, 2007]:

$$\begin{aligned}
 W_S|_{h=0} = & -\frac{2\pi^3 k_S}{\rho_2 \omega_0 \sqrt{k_S^2 - k_l^2} S'_0(k_S)} \left\{ k_S^2 \left(k_t^2 - 2k_S^2 + 2\sqrt{k_S^2 - k_l^2} \sqrt{k_S^2 - k_t^2} \right)^2 \times \right. \\
 & \times \int_0^{2\pi} |F_{\omega r}(k_S, \varphi)|^2 d\varphi + k_t^4 (k_S^2 - k_l^2) \int_0^{2\pi} |F_{\omega z}(k_S, \varphi)|^2 d\varphi + \\
 & + 2k_t^2 k_S \left(k_t^2 - 2k_S^2 + 2\sqrt{k_S^2 - k_l^2} \sqrt{k_S^2 - k_t^2} \right) \times \\
 & \left. \times \sqrt{k_S^2 - k_l^2} \int_0^{2\pi} \text{Im} \left[F_{\omega r}^*(k_S, \varphi) F_{\omega z}(k_S, \varphi) \right] d\varphi \right\}. \quad (3.2.3)
 \end{aligned}$$

Перейдем к рассмотрению генерации волн Стонели импульсными силовыми источниками. Энергия излучения упругих волн, выделенная за всё время действия нагрузки, дается выражением [Докучаев, 1996]

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} W(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \iint_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}(\vec{r}, t) \dot{\vec{u}}(r, t) \Big|_{z=0} d\vec{r}. \quad (3.2.4)$$

Записывая величины \vec{f} и \vec{u} в виде разложений в интеграл Фурье, преобразуем формулу (3.1.24) к виду

$$E = 8\pi^3 \iiint_{-\infty}^{+\infty} \vec{F}^*(\vec{k}, \omega) \dot{\vec{U}}(\vec{k}, \omega) d\omega d\vec{k}, \quad (3.2.5)$$

где

$$\dot{\vec{U}}(\vec{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \dot{\vec{u}}(\vec{r}, t) e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r} dt. \quad (3.2.6)$$

Подставляя спектры смещений при $z = 0$ и переходя на плоскости $k_x 0 k_y$ к полярным координатам, получим следующее выражение для полной излучаемой энергии:

$$\begin{aligned}
 E = & \frac{8\pi^3}{\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} \frac{1}{\kappa_1 S_0(\omega, k)} \left\{ k_t^2 [\kappa_1 \kappa_t + \varepsilon(k^2 + \kappa_l \kappa_t)] |F_r|^2 + \right. \\
 & \left. + \kappa_1 k_t^2 \kappa_l |F_z|^2 + k \kappa_1 (k_t^2 - 2k^2 - 2\kappa_l \kappa_t) (F_z F_r^* - F_z^* F_r) \right\} k dk, \quad (3.2.7)
 \end{aligned}$$

где $F_r = F_x \cos \varphi + F_y \sin \varphi$. Отметим, что

$$\vec{F}^*(\vec{k}, \omega) = \vec{F}(-\vec{k}, -\omega).$$

При исследовании интеграла (3.2.7) области интегрирования $\omega > 0$ и $\omega < 0$ следует рассматривать отдельно. При $\omega > 0$ контур интегрирования по k в (3.2.7)

проходит ниже оси $\text{Re } k$ и обходит полюс $k = k_S$ снизу, а при $\omega < 0$ путь интегрирования по k лежит в области $\text{Re } k > 0$ и обходит полюс $k = k_S$ сверху. Результат обхода полюса снизу равен полувычету в этом полюсе, а результат обхода полюса сверху — полувычету, взятому со знаком «минус» (см., например, [Коган, 1963]).

При $\omega > 0$ аналитические функции $(k_{1,l,t}^2 - k^2)^{1/2}$ соответственно при $k < k_{1,l,t}$ определены как положительные величины, а при $\omega < 0$ — как отрицательные величины. В областях $k > k_{1,l,t}$ аналитические функции $(k_{1,l,t}^2 - k^2)^{1/2}$ определены как мнимая единица, умноженная на положительное число и при $\omega < 0$, и при $\omega > 0$.

Вычисляя вклад полюса $k = k_S$ при интегрировании по k в (3.2.7), получаем выражение для энергии излучения волны Стонели [Разин, 2007]:

$$\begin{aligned}
 E_S = & -\frac{16\pi^4}{\rho_2 c_t^2 c_S} \int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{(k_S^2 - k_1^2)^{1/2} S_0'(k_S)} \int_0^{2\pi} \left\{ k_t^2 \left[\sqrt{k_S^2 - k_1^2} \sqrt{k_S^2 - k_t^2} - \right. \right. \\
 & - \varepsilon \left(k_S^2 - \sqrt{k_S^2 - k_t^2} \sqrt{k_S^2 - k_t^2} \right) \left. \right] |F_r(\omega, \vec{k}_S)|^2 + \\
 & + k_t^2 \sqrt{k_S^2 - k_1^2} \sqrt{k_S^2 - k_t^2} |F_z(\omega, \vec{k}_S)|^2 + \\
 & + 2k_S \sqrt{k_S^2 - k_1^2} \left(k_t^2 - 2k_S^2 + 2\sqrt{k_S^2 - k_t^2} \sqrt{k_S^2 - k_t^2} \right) \times \\
 & \times \text{Im} [F_z(\omega, \vec{k}_S) F_r^*(\omega, \vec{k}_S)] \left. \right\} d\varphi, \tag{3.2.8}
 \end{aligned}$$

где $c_S = \omega/k_S$ — скорость волны Стонели.

В частном случае вертикальной нагрузки формула (3.2.8) примет вид

$$E_S = -\frac{16\pi^4 (c_t^2 - c_S^2)^{1/2}}{\rho_2 c_l c_t^4 c_S^2 \sigma'} \int_0^\infty \omega^2 d\omega \int_0^{2\pi} |F_z(\omega, \vec{k}_S)|^2 d\varphi. \tag{3.2.9}$$

В (3.2.9) использовано обозначение

$$\begin{aligned}
 \sigma' = & \frac{S_0'(k_S)}{\omega^3} = \frac{8}{c_l c_t^2 c_S^3} \left[c_l (2c_t^2 - c_S^2) - c_t (c_t^2 - c_S^2)^{1/2} (c_t^2 - c_S^2)^{1/2} \right] + \\
 & + \frac{4(c_t^2 c_S^2 + c_t^2 c_S^2 - 2c_t^2 c_t^2)}{c_l c_t c_S^3 (c_t^2 - c_S^2)^{1/2} (c_t^2 - c_S^2)^{1/2}} - \varepsilon \frac{c_1 c_S^3 (c_t^2 - c_1^2)}{c_l c_t^4 (c_t^2 - c_S^2)^{1/2} (c_1^2 - c_S^2)^{3/2}}.
 \end{aligned}$$

Если нагрузка обладает осевой симметрией, то энергия волны Стонели дается выражением

$$E_S = -\frac{32\pi^5 (c_t^2 - c_S^2)^{1/2}}{\rho_2 c_l c_t^4 c_S^2 \sigma'} \int_0^\infty |F_z(\omega, \omega/c_S)|^2 \omega^2 d\omega. \tag{3.2.10}$$

В случае точечного источника, когда

$$f_z(\vec{r}, t) = f_0 p(t) \delta(x) \delta(y)$$

($p(t)$ характеризует зависимость нагрузки от времени), пространственно-частотный спектр силы имеет вид

$$F_z(\omega, k_S) = \frac{f_0}{4\pi^2} \mathcal{P}(\omega),$$

где

$$\mathcal{P}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} p(t) e^{i\omega t} dt$$

— частотный спектр силы. Величина E_S при этом описывается формулой

$$E_S = -\frac{2\pi f_0^2 (c_t^2 - c_S^2)^{1/2}}{\rho_2 c_t^4 c_S^2 \sigma'} \int_0^{\infty} |\mathcal{P}(\omega)|^2 \omega^2 d\omega. \quad (3.2.11)$$

3.2.2. Акустические волны, излучаемые в газ при действии на его границу с твердой средой гармонических сил

В настоящее время экспериментально установлено, что при работе мощных сейсмодвигателей возникают достаточно интенсивные акустические волны в атмосфере, которые могут распространяться до ионосферных высот [Алексеев и др., 1996; Кузнецов и др., 1999; Кузнецов и др., 2000; Гуляев и др., 2001; Гуляев и др., 2002; Ковалевский, 2005]. В связи с этим возникает необходимость оценок акустических полей, возникающих при действии на поверхность Земли силовых источников.

Из общей формулы (3.1.38) для случая гармонических поверхностных источников, $h = 0$, получаем следующее интегральное выражение для потенциала смещений в газе (временной фактор $\exp(-i\omega_0 t)$ опущен):

$$\psi_1 = \frac{1}{\rho_2 c_t^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{(k_t^2 - 2k^2 - 2\kappa_l \kappa_t) \vec{k} \vec{F}_{\omega r} - \kappa_0 k_t^2 F_{\omega z}}{\kappa_1 S_0(k)} \exp[i(\vec{k} \vec{r} - \kappa_1 z)] d\vec{k}. \quad (3.2.12)$$

С помощью преобразования (3.1.78) представим потенциал ψ_1 в виде однократного интеграла:

$$\psi_1 \approx \frac{1}{\rho_2 c_t^2} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{\infty e^{i\pi}}^{\infty} \frac{k_t^2 - 2k^2 - 2\kappa_l \kappa_t}{\kappa_1 S_0(k)} k F_{\omega r} - \kappa_l k_t F_{\omega z} e^{i(kr - \kappa_1 z)} \sqrt{k} dk. \quad (3.2.13)$$

При вычислении интеграла (3.2.13) методом стационарной фазы следует иметь в виду, что подынтегральная функция имеет резкий максимум вблизи точки $k = k_R$. Точка стационарной фазы $k_1^{(0)} = k_1 \sin \theta_1$ (угол θ_1 отсчитывается от отрицательной полуоси z , $\theta_1 = \arccos(|z|/R)$) может совпадать с указанным максимумом подынтегральной функции; при этом метод стационарной фазы может приводить к неверным количественным результатам.

Формально применяя метод стационарной фазы получаем выражение для потенциала смещений в газе, справедливое на больших расстояниях R от источника:

$$\begin{aligned}
 \psi_1 = & -\frac{2\pi i}{\rho_2 c_t^2 S_0(k_1 \sin \theta_1)} \frac{e^{ik_1 R}}{R} \times \\
 & \times \left[\left(k_t^2 - 2k_1^2 \sin^2 \theta_1 - 2\sqrt{k_t^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1} \sqrt{k_t^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1} \right) k_1 \sin \theta_1 F_{\omega r}(\vec{k}_1^{(s)}) - \right. \\
 & \left. - k_t^2 \sqrt{k_t^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1} F_{\omega z}(\vec{k}_1^{(s)}) \right], \tag{3.2.14}
 \end{aligned}$$

где

$$\vec{k}_1^{(s)} = (k_1 \sin \theta_1 \cos \varphi, k_1 \sin \theta_1 \sin \varphi).$$

Акустическое давление в газе связано с потенциалом (3.2.14) соотношением (3.1.15).

Перейдем к вычислению мощности излучения акустических волн. Плотность потока энергии связана с потенциалом смещений в газе соотношением:

$$I_1 = \frac{\rho_1 \omega_0^4}{2c_1} |\psi_1|^2. \tag{3.2.15}$$

Из структуры выражения (3.2.14) очевидно, что необходимо отдельно вычислять величину I_1 для трех интервалов углов θ_1 : $0 \leq \theta_1 < \arcsin \frac{c_1}{c_l}$ (область I), $\arcsin \frac{c_1}{c_l} \leq \theta_1 < \arcsin \frac{c_1}{c_t}$ (область II) и $\arcsin \frac{c_1}{c_t} \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$ (область III).

Для перечисленных областей получаем следующие выражения для плотности потока энергии в акустической волне:

$$\begin{aligned}
 I_1^{(I)} = & \frac{2\pi^2 \rho_1 \omega_0^4}{\rho_2^2 c_1 c_t^4 S_0^2(k_1 \sin \theta_1) R^2} \times \\
 & \times \left\{ \left(k_t^2 - 2k_1^2 \sin^2 \theta_1 - 2\sqrt{k_t^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1} \sqrt{k_t^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1} \right)^2 \times \right. \\
 & \times k_1^2 \sin^2 \theta_1 \left| F_{\omega r}(\vec{k}_1^{(s)}) \right|^2 + k_t^4 (k_t^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1) \left| F_{\omega z}(\vec{k}_1^{(s)}) \right|^2 - \\
 & - 2k_1 k_t^2 \left(k_t^2 - 2k_1^2 \sin^2 \theta_1 - 2\sqrt{k_t^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1} \sqrt{k_t^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1} \right) \times \\
 & \left. \times \sqrt{k_t^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1} \sin \theta_1 \operatorname{Re} \left[F_{\omega r}(\vec{k}_1^{(s)}) F_{\omega z}^*(\vec{k}_1^{(s)}) \right] \right\}, \tag{3.2.16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_1^{(II)} = & \frac{2\pi^2 \rho_1 \omega_0^4}{\rho_2^2 c_1 c_t^4 |S_0^2(k_1 \sin \theta_1)|^2 R^2} \left\{ (k_t^4 - 4k_t^2 k_1^2 + 4k_1^2 k_t^2 \sin^2 \theta_1) k_1^2 \sin^2 \theta_1 \left| F_{\omega r}(\vec{k}_1^{(s)}) \right|^2 + \right. \\
 & + k_t^4 (k_1^2 \sin^2 \theta_1 - k_t^2) \left| F_{\omega z}(\vec{k}_1^{(s)}) \right|^2 + 4k_1 k_t^2 (k_1^2 \sin^2 \theta_1 - k_t^2) \times \\
 & \times \sqrt{k_t^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1} \sin \theta_1 \operatorname{Re} \left[F_{\omega r}(\vec{k}_1^{(s)}) F_{\omega z}^*(\vec{k}_1^{(s)}) \right] - 2k_1 k_t^2 (k_t^2 - 2k_1^2 \sin^2 \theta_1) \times \\
 & \left. \times \sqrt{k_1^2 \sin^2 \theta_1 - k_t^2} \sin \theta_1 \operatorname{Im} \left[F_{\omega r}(\vec{k}_1^{(s)}) F_{\omega z}^*(\vec{k}_1^{(s)}) \right] \right\}, \tag{3.2.17}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_1^{(\text{III})} = & \frac{2\pi^2 \rho_1 \omega_0^4}{\rho_2^2 c_1 c_t^4 |S_0^2(k_1 \sin \theta_1)|^2 R^2} \times \\
 & \times \left\{ \left(k_t^2 - 2k_1^2 \sin^2 \theta_1 + 2\sqrt{k_1^2 \sin^2 \theta_1 - k_t^2} \sqrt{k_1^2 \sin^2 \theta_1 - k_t^2} \right)^2 \times \right. \\
 & \times k_1^2 \sin^2 \theta_1 \left| F_{\omega r}(\vec{k}_1^{(s)}) \right|^2 + k_t^4 (k_1^2 \sin^2 \theta_1 - k_t^2) \left| F_{\omega z}(\vec{k}_1^{(s)}) \right|^2 - \\
 & - 2k_1 k_t^2 \left(k_t^2 - 2k_1^2 \sin^2 \theta_1 + 2\sqrt{k_1^2 \sin^2 \theta_1 - k_t^2} \sqrt{k_1^2 \sin^2 \theta_1 - k_t^2} \right) \times \\
 & \left. \times \sqrt{k_1^2 \sin^2 \theta_1 - k_t^2} \sin \theta_1 \operatorname{Im} \left[F_{\omega r}(\vec{k}_1^{(s)}) F_{\omega z}^*(\vec{k}_1^{(s)}) \right] \right\}. \quad (3.2.18)
 \end{aligned}$$

Мощности излучения акустической волны в областях I–III получаем путем интегрирования выражений для плотности потока энергии по соответствующему интервалу углов:

$$W_1^{(\text{I})} = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\arcsin(c_1/c_t)} I_1^{(\text{I})}(\theta_1, \varphi) \sin \theta_1 d\theta_1, \quad (3.2.19)$$

$$W_1^{(\text{II})} = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arcsin(c_1/c_t)}^{\arcsin(c_1/c_t)} I_1^{(\text{II})}(\theta_1, \varphi) \sin \theta_1 d\theta_1, \quad (3.2.20)$$

$$W_1^{(\text{III})} = R^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} I_1^{(\text{III})}(\theta_1, \varphi) \sin \theta_1 d\theta_1. \quad (3.2.21)$$

Полученные в данном параграфе формулы позволяют рассчитывать поля и мощности излучения акустических волн, возбуждаемых в атмосфере при работе наземных вибрационных источников сейсмических волн. Потоки акустической энергии в направлениях, близких к вертикали, и соответствующие им мощности излучения даются выражениями (3.2.16), (3.2.17), (3.2.19), (3.2.20). Эти выражения позволяют оценивать акустическую мощность, передаваемую в высокие слои атмосферы для различных конфигураций силовых источников.

Формула (3.2.21), как будет показано ниже на примере точечного источника вертикальной силы, описывает как часть мощности акустической волны, так и мощность излучения вытекающей волны.

3.2.3. Асимптотики полей и энергетические характеристики упругих волн, возбуждаемых в твердом полупространстве распределенными поверхностными силовыми гармоническими источниками

Расчеты полей и энергетических характеристик сейсмических волн, возбуждаемых источниками, действующими на поверхности Земли, необходимы для решения

ряда задач сейсморазведки, в частности для создания сейсмических антенн с требуемыми диаграммами направленности и с заданным распределением мощности излучения по различным типам волн. В настоящем параграфе рассмотрено излучение упругих волн гармоническими силовыми источниками, распределенными по поверхности упругого полупространства, граничащего с вакуумом.

Из общих формул (3.1.82)–(3.1.83) в случае поверхностного источника $h = 0$, получаем следующие асимптотики полей смещений в P - SV - и SH - волнах в волновой зоне [Дожухаев, Разин, 1990]:

$$u_P^{(R)} = \frac{2\pi \cos \theta}{\rho_2 c_t^2} \frac{e^{ik_t R}}{R} \times \frac{2n \sin \theta (1 - n^2 \sin^2 \theta)^{1/2} F_{\omega r}(\vec{k}_l^{(s)}) + (1 - 2n^2 \sin^2 \theta) F_{\omega z}(\vec{k}_l^{(s)})}{(1 - 2n^2 \sin^2 \theta)^2 + 4n^3 \cos \theta \sin^2 \theta (1 - n^2 \sin^2 \theta)^{1/2}}, \quad (3.2.22)$$

$$u_{SV}^{(\theta)} = -\frac{2\pi \cos \theta}{\rho_2 c_t^2} \frac{e^{ik_t R}}{R} \times \frac{\cos 2\theta F_{\omega r}(\vec{k}_t^{(s)}) - 2(n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2} \sin \theta F_{\omega z}(\vec{k}_t^{(s)})}{\cos^2 2\theta + 4 \cos \theta \sin^2 \theta (n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}}, \quad (3.2.23)$$

$$u_{SH}^{(\varphi)} = \frac{2\pi F_{\omega \varphi}(\vec{k}_t^{(s)})}{\rho_2 c_t^2 R} e^{ik_t R}. \quad (3.2.24)$$

Плотность потока энергии \vec{I} в упругих волнах следует вычислять по формуле (3.1.86). В сферической системе координат вектор \vec{I} имеет только радиальную составляющую, и выражения для нее в продольных, SV - и SH - волнах имеют соответственно вид:

$$I_P = \frac{2\pi^2 \omega_0^2 \cos^2 \theta}{\rho_2 c_t^3 R^2 \left[(1 - 2n^2 \sin^2 \theta)^2 + 4n^3 \cos \theta \sin^2 \theta (1 - n^2 \sin^2 \theta)^{1/2} \right]^2} \times \left| 2F_{\omega r}(\vec{k}_l^{(s)}) n \sin \theta (1 - n^2 \sin^2 \theta)^{1/2} + (1 - 2n^2 \sin^2 \theta) F_{\omega z}(\vec{k}_l^{(s)}) \right|^2, \quad (3.2.25)$$

$$I_{SV} = \frac{2\pi^2 \omega_0^2 \cos^2 \theta}{\rho_2 c_t^3 R^2 \left| \cos^2 2\theta + 4 \cos \theta \sin^2 \theta (n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2} \right|^2} \times \left| \cos 2\theta F_{\omega r}(\vec{k}_t^{(s)}) - 2(n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2} \sin \theta F_{\omega z}(\vec{k}_t^{(s)}) \right|^2, \quad (3.2.26)$$

$$I_{SH} = \frac{2\pi^2 \omega_0^2}{\rho_2 c_t^3 R^2} \left| F_{\omega \varphi}(\vec{k}_t^{(s)}) \right|^2. \quad (3.2.27)$$

Для получения средней за период волны мощности излучения необходимо проинтегрировать выражения (3.2.25)–(3.2.27) по полусфере радиуса R в соответствии с формулой (3.1.88).

Перейдем к рассмотрению поля и энергетических характеристик поверхностной волны Рэлея. Из общих выражений (3.1.93), (3.1.94) при $h = 0$ получаем:

$$u_{Rr}(r, \varphi, z) = \frac{1}{q_l} D [i(k_t^2 - 2k_R^2) F_r(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) + 2k_R q_l F_z(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi)] \nu_x(z) e^{ik_R r}, \quad (3.2.28)$$

$$u_{Rz}(r, \varphi, z) = -\frac{1}{q_t} D [2k_R q_t F_r(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) - i(k_t^2 - 2k_R^2) F_z(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi)] \nu_z(z) e^{ik_R r}. \quad (3.2.29)$$

Выражения (3.1.86), (3.2.27), (3.2.28) позволяют вычислить поток энергии в рэлеевской волне. Вектор потока энергии имеет только горизонтальную радиальную компоненту, которая описывается формулой [Докучаев, Разин, 1990]:

$$\begin{aligned} I_R = & \frac{4\pi^3 \omega_0^3 \xi^2}{\rho_2 c_t^4 r q^2(\xi)} \left\{ \left[4\xi^2(\xi^2 - 1) |F_{\omega r}|^2 + (2\xi^2 - 1)^2 |F_{\omega z}|^2 \right] [1 + 4(\xi^2 - n^2)] \times \right. \\ & \times \exp\left(-2k_t z \sqrt{\xi^2 - n^2}\right) + \left[(2\xi^2 - 1)^2 |F_{\omega r}|^2 + 4\xi^2(\xi^2 - n^2) |F_{\omega z}|^2 \right] \times \\ & \times (4\xi^2 - 3) \exp\left(-2k_t z \sqrt{\xi^2 - n^2}\right) - \\ & - 2(2\xi^2 - 1) \left(\sqrt{\xi^2 - n^2} |F_{\omega z}|^2 + \sqrt{\xi^2 - 1} |F_{\omega r}|^2 \right) \times \\ & \times \left[(1 + 4\xi^2 - 2n^2) \sqrt{\xi^2 - 1} + (4\xi^2 - 1) \sqrt{\xi^2 - n^2} \right] \times \\ & \times \exp\left[-k_t z \left(\sqrt{\xi^2 - n^2} + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)\right] \left. \right\} + \frac{8\pi^3 \omega_0^3 \xi}{\rho_2 c_t^4 r q^2(\xi)} (2\xi^2 - 1) \operatorname{Im}(F_{\omega r} F_{\omega z}^*) \times \\ & \times \left\{ 2\xi^2 \left[\sqrt{\xi^2 - 1} (1 + 4\xi^2 - 4n^2) \exp\left(-2k_t z \sqrt{\xi^2 - n^2}\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \sqrt{\xi^2 - n^2} (4\xi^2 - 3) \exp\left(-2k_t z \sqrt{\xi^2 - 1}\right) \right] - \right. \\ & - (2\xi^2 - 1) \left[(1 + 4\xi^2 - 2n^2) \sqrt{\xi^2 - 1} + (4\xi^2 - 1) \sqrt{\xi^2 - n^2} \right] \times \\ & \left. \times \exp\left[-k_t z \left(\sqrt{\xi^2 - n^2} + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)\right] \right\}. \quad (3.2.30) \end{aligned}$$

Для вычисления мощности излучения W_R , соответствующего рэлеевской волне, необходимо подсчитать поток энергии через поверхность полубесконечного цилиндра радиуса r , ось которого совпадает с координатной осью $0z$. Более удобно, однако, вычислять мощность излучения волны Рэлея методом реакции излучения.

Из общей формулы (3.1.98) при $h = 0$ получаем [Разин, 2010a]:

$$\begin{aligned} W_R = & -\frac{2\pi^3 k_R k_z^4}{\rho_2 \omega_0 R'_0(k_R)} \left\{ q_t \int_0^{2\pi} |F_{\omega r}(k_R, \varphi)|^2 d\varphi + q_l \int_0^{2\pi} |F_{\omega z}(k_R, \varphi)|^2 d\varphi - \right. \\ & \left. - 2\sqrt{q_l q_t} \int_0^{2\pi} \operatorname{Im}[F_{\omega r}^*(k_R, \varphi) F_{\omega z}(k_R, \varphi)] d\varphi \right\}. \quad (3.2.31) \end{aligned}$$

Формулы (3.2.22)–(3.2.24), (3.2.28), (3.2.29) позволяют вычислять поля смещений в продольной P -волне, поперечных SV - и SH -волнах и в поверхностной волне Рэлея в волновой зоне при достаточно произвольных распределениях гармонических поверхностных сил. Диаграммы направленности излучения определяются на основе формул для плотностей потоков энергии в соответствующих типах волн (3.2.25)–(3.2.27), (3.2.30). Мощности излучения определяются путем численного интегрирования в соответствии с формулами (3.1.88), (3.2.31).

Отметим, что вычисление мощности излучения волны Рэлея методом реакции излучения и путем подсчета потока энергии через поверхность вертикального полубесконечного цилиндра приводят, разумеется, к одинаковым результатам.

Рассмотрим примеры использования полученных выше выражений для мощностей излучения упругих волн. Пусть на поверхность упругого полупространства действует периодическая с циклической частотой ω_0 вертикальная нагрузка f_0 , равномерно распределенная по тонкому кольцу радиуса a , так что напряжения, создаваемые источником на поверхности полупространства, даются выражением:

$$\sigma_{zz} \Big|_{z=0} = \frac{f_0 \delta(r-a)}{2\pi r}, \quad (3.2.32)$$

где δ — символ дельта-функции Дирака. Согласно (3.1.53) пространственный спектр такой нагрузки имеет вид:

$$F_{\omega z}(k) = \frac{f_0}{4\pi^2} J_0(ka). \quad (3.2.33)$$

При подстановке (3.2.33) в (3.1.88), (3.2.31) удобно представить мощности излучения в виде:

$$W_{P,SV,R} = \frac{f_0^2 \omega_0^2}{4\pi \rho_2 c_l^3} \tilde{W}_{P,SV,R},$$

где $\tilde{W}_{P,SV,R}$ — безразмерные коэффициенты. Значения этих коэффициентов, вычисленные по формулам (3.1.86), (3.2.31), приведены на рис. 3.5. Из рассмотрения рис. 3.5 следует, что при $ka \ll 1$ (точечный источник) $\tilde{W}_P \approx 0,333$; $\tilde{W}_{SV} \approx 1,246$; $\tilde{W}_R \approx 3,257$. Те же значения $\tilde{W}_{P,SV,R}$ были получены в [Miller, Pursey, 1955] для случая, когда вертикальная нагрузка равномерно распределена по круговой области малого радиуса.

В отличие от излучателя в виде вибрирующего диска, при увеличении радиуса которого эффективность возбуждения поперечных и рэлеевских волн резко падает [Гуцин, Докучаев и др., 1981; Гуцин и др., 1981], в случае вертикальной силы, распределенной по тонкому кольцу, мощность излучения поперечных волн превышает мощность продольных волн. Зависимость мощности излучения волны Рэлея от радиуса диска имеет осцилляторный характер, причем размах осцилляций в несколько раз превышает значения мощностей продольных и поперечных волн [Докучаев, Разин, 1990].

В качестве второго примера рассмотрим возбуждение упругих волн вибрирующей вертикальной нагрузкой f , распределенной по поверхности полупространства

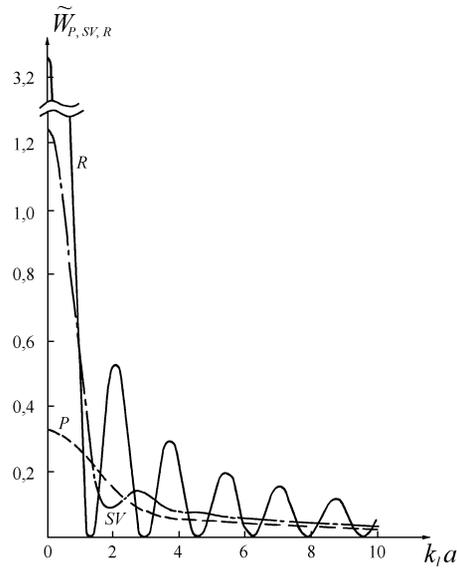


Рис. 3.5. Зависимости численных коэффициентов $\tilde{W}_{P,SV,R}$ от безразмерного параметра $k_1 a$ для источника в виде вертикальной силы, равномерно распределенной по тонкому кольцу. Отношение скоростей поперечной и продольной волн $n = 1/\sqrt{3}$

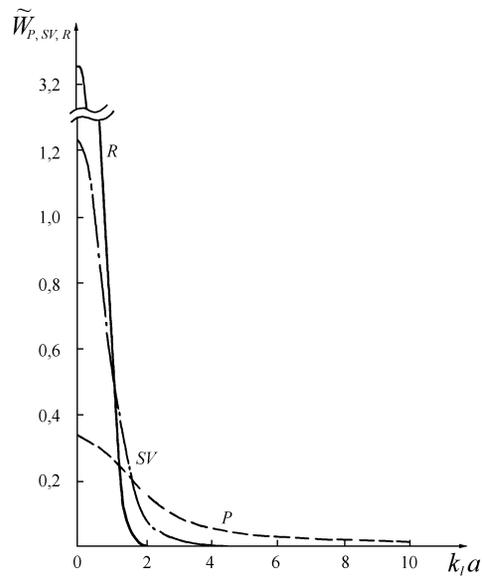


Рис. 3.6. Зависимости численных коэффициентов $\tilde{W}_{P,SV,R}$ от безразмерного параметра $k_1 a$ для гауссова распределения нагрузки по поверхности полупространства. Отношение скоростей поперечной и продольной волн $n = 1/\sqrt{3}$

по гауссову закону:

$$\sigma_{zz} \Big|_{z=0} = \frac{f_0}{\pi a^2} e^{-r^2/a^2}, \quad (3.2.34)$$

где a — характерный размер источника.

Соответствующий давлению (3.2.34) пространственный спектр силы имеет вид:

$$F_{\omega z}(k) = \frac{f_0}{4\pi^2} e^{-k^2 a^2/4}. \quad (3.2.35)$$

Результаты расчетов мощностей излучения упругих волн для источника вида (3.2.34) приведены на рис. 3.6. Для источника с малым характерным размером $k_l a \ll 1$ зависимости $\tilde{W}_{P,SV,R}(k_l a)$ практически совпадают с аналогичными зависимостями для излучателя в виде кольца. При $k_l a > 1$ преобладает излучение продольных волн. Эффективность генерации поперечных и, в особенности, рэлеевских волн резко падает при увеличении характерного размера излучателя [Докучаев, Разин, 1990].

Сравнение результатов расчетов для нагрузки, приложенной к кольцу, и гауссова распределения нагрузки позволяет сделать вывод, что поперечные и поверхностные волны эффективно генерируются источниками, имеющими резкие края, а также распределениями сил по таким площадкам, у которых хотя бы по одной координате характерный размер много меньше длин упругих волн. Продольные волны генерируются источниками вертикальной силы, распределенной по участку поверхности с характерными размерами больше длины волны, причем давление на поверхность полупространства должно убывать от центра площадки к краям.

3.2.4. Энергия упругих волн, возбуждаемых в твердом полупространстве нестационарными распределенными поверхностными силовыми источниками

Большинство реальных процессов, в результате которых излучаются упругие волны, ограничены во времени (подземные толчки при землетрясениях, импульсное сейсмическое зондирование твердых сред и материалов). В связи с этим представляет интерес исследование излучения сейсмических волн импульсными источниками.

В данном параграфе методом реакции излучения получены интегральные выражения для энергий излучения продольной, поперечной (SV - и SH -поляризаций) и поверхностной рэлеевской волн, возбуждаемых в однородном изотропном упругом полупространстве силовыми источниками, произвольным образом распределенными по его поверхности и во времени.

Из общих формул (3.1.26), (3.1.27), (3.1.47)–(3.1.50) в случае сил, действующих на границе твердого полупространства с вакуумом, для скалярного ψ и векторных \vec{A}_{SV} и \vec{A}_{SH} потенциалов получаем следующие интегральные выражения:

$$\psi = \frac{1}{\rho_2 c_t^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\kappa_t \vec{k} \vec{F} + (k_t^2 - 2k^2) F_z}{R_0(k, \omega)} \exp[-i\omega t + i(\vec{k} \vec{r} + \kappa_l z)] d\omega d\vec{k}, \quad (3.2.36)$$

$$\vec{A}_{SV} = \frac{1}{\rho_2 c_t^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{(k_t^2 - 2k^2) \vec{k} \vec{F} - 2\kappa_t k^2 F_z}{R_0(k, \omega)} (\vec{k} \times \vec{e}_z) \exp[-i\omega t + i(\vec{k} \vec{r} + \kappa_t z)] d\omega d\vec{k}, \quad (3.2.37)$$

$$\vec{A}_{SH} = \frac{1}{\rho_2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\kappa_t \vec{k} - k^2 \vec{e}_z)(k_x F_y - k_y F_x)}{\omega^2 \kappa_t k^2} \exp[-i\omega t + i(\vec{k} \vec{r} + \kappa_t z)] d\omega d\vec{k}. \quad (3.2.38)$$

Для распределенного поверхностного источника, действие которого ограничено во времени, энергия излучения упругих волн дается выражением (3.2.4) или, в спектрах, (3.2.5).

Рассмотрим вначале энергию излучения поперечной SH -волны. Смещения в этой волне вычислим по формуле (3.1.16). Подставляя полученные выражения в (3.2.5) и переходя на плоскости $k_x Ok_y$ к полярным координатам посредством формул $k_x = k \cos \varphi$, $k_y = k \sin \varphi$, получим следующее выражение для энергии излучения SH -волны:

$$E_{SH} = \frac{8\pi^3}{\rho_2 c_t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{F_\varphi F_\varphi^*}{\kappa_t} k dk. \quad (3.2.39)$$

При исследовании интеграла (3.2.39) участки интегрирования $\omega > 0$ и $\omega < 0$ следует рассматривать отдельно. Анализ, аналогичный проведенному в [Коган, 1963], показывает, что при $\omega > 0$ контур интегрирования по k проходит ниже оси $\text{Re } k$, причем квадратный корень $(k_t^2 - k^2)^{1/2}$ при $k < k_t$, определен как положительное число. При $\omega < 0$ контур интегрирования по k проходит в области $\text{Re } k > 0$ и корень $(k_t^2 - k^2)^{1/2}$ определен как отрицательная величина. В области $k > k_t$ аналитическая функция $(k_t^2 - k^2)^{1/2}$ определена как мнимая единица, умноженная на положительное число, как при $\omega < 0$, так и при $\omega > 0$. С учетом этого после несложных преобразований получаем выражение для энергии излучения SH -волны [Орлов, Разин, 1993]:

$$E_{SH} = \frac{16\pi^3}{\rho_2 c_t^2} \int_0^{\infty} \omega d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int \frac{|F_\varphi(k \cos \varphi, k \sin \varphi, \omega)|^2}{(k_t^2 - k^2)^{1/2}} k dk. \quad (3.2.40)$$

Путем замены переменной $k = k_t \sin \theta$ формулу (3.2.40) можно привести к виду

$$E_{SH} = \frac{16\pi^3}{\rho_2 c_t^3} \int_0^{\infty} \omega^2 d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} |F_\varphi(k_t \sin \theta \cos \varphi, k_t \sin \theta \sin \varphi, \omega)|^2 \sin \theta d\theta. \quad (3.2.41)$$

Выражение (3.2.41) можно также получить, вычисляя поток энергии через поверхность полусферы, которая охватывает источник и имеет центром начало координат.

Перейдем к вычислению энергий излучения продольных (P), поперечных SV -поляризации и рэлеевских (R) волн. Для суммарной энергии этих волн нетрудно

получить формулу

$$\begin{aligned}
 E = & \frac{8\pi^3}{\rho_2 c_t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{k}{R_0(k, \omega)} \left[k_t^2 \kappa_t |F_r|^2 + k_t^2 \kappa_l |F_z|^2 + \right. \\
 & \left. + k(k_t^2 - 2k^2 - 2\kappa_l \kappa_t)(F_z F_r^* - F_z^* F_r) \right] dk, \quad (3.2.42)
 \end{aligned}$$

где $F_r = F_x \cos \varphi + F_y \sin \varphi$ — радиальная компонента спектра силы. Аналитическая функция $(k_l^2 - k^2)^{1/2}$ определена на комплексной плоскости k при $\omega > 0$ и $\omega < 0$ так же, как выше была определена функция $(k_t^2 - k^2)^{1/2}$.

При $\omega > 0$ контур интегрирования по k в (3.2.42) проходит ниже оси $\text{Re } k$ и обходит определяемый из решения уравнения

$$R_0(k_R, \omega) = 0$$

рэлеевский полюс $k = k_R$ снизу, а при $\omega < 0$ путь интегрирования по k лежит в области $\text{Re } k > 0$ и обходит полюс $k = k_R$ сверху. Результат обхода полюса снизу равен полувычету в этом полюсе, а результат обхода полюса сверху — полувычету, взятому со знаком минус. С учетом этого интеграл (3.2.42) преобразуем к виду

$$E = E_V + E_R,$$

где

$$\begin{aligned}
 E_V = & \frac{16\pi^3}{\rho_2 c_t^4} \int_0^{\infty} \omega^3 d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{k_l} \frac{1}{R_0(k, \omega)} \left[(k_t^2 - k^2)^{1/2} |F_r|^2 + \right. \\
 & \left. + (k_l^2 - k^2)^{1/2} |F_z|^2 \right] k dk + \frac{16\pi^3}{\rho_2 c_t^4} \int_0^{\infty} \omega^3 d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{k_t} \frac{(k_t^2 - k^2)^{1/2}}{|R_0(k, \omega)|^2} \times \\
 & \times \left[(k_t^2 - 2k^2)^2 |F_r|^2 + 4k^2(k^2 - k_l^2) |F_z|^2 - \right. \\
 & \left. - 2ik(k^2 - k_l^2)^{1/2} (k_t^2 - 2k^2)(F_z F_r^* - F_z^* F_r) \right] k dk \quad (3.2.43)
 \end{aligned}$$

— суммарная энергия излучения продольных и поперечных SV -волн,

$$\begin{aligned}
 E_R = & -\frac{16\pi^4}{\rho_2 c_t^2 c_R} \int_0^{\infty} \omega^2 d\omega \int_0^{2\pi} \frac{1}{R'_0(k_R, \omega)} \times \\
 & \times \left\{ k_t^2 (k_R^2 - k_t^2)^{1/2} |F_r|^2 + k_t^2 (k_R^2 - k_l^2)^{1/2} |F_z|^2 + \right. \\
 & \left. + 2k_R \left[k_t^2 - 2k_R^2 + 2(k_R^2 - k_l^2)^{1/2} (k_R^2 - k_t^2)^{1/2} \right] \text{Im}(F_z F_r^*) \right\} d\varphi \quad (3.2.44)
 \end{aligned}$$

— энергия излучения рэлеевской волны. В (3.2.43) $F_{r,z} = F_{r,z}(k \cos \varphi, k \sin \varphi, \omega)$, а в (3.2.44) $F_{r,z} = F_{r,z}(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi, \omega)$.

Выделим в (3.2.43) выражения, описывающие энергии излучения P - и SV -волн. Рассмотрим первый из входящих в эту формулу интегралов. Избавляясь от иррациональности в знаменателе, а затем прибавляя и вычитая из подынтегрального выражения величину

$$\zeta = 2k(k_l^2 - k^2)^{1/2}(k_t^2 - k^2)^{1/2}(k_t^2 - 2k^2)(F_z F_r^* + F_z^* F_r),$$

преобразуем этот интеграл к виду

$$\begin{aligned} E(0, k_l) = E_P + \frac{16\pi^3}{\rho_2 c_t^4} \int_0^\infty \omega^3 d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{k_l} \frac{(k_t^2 - k^2)^{1/2}}{R_0^2(k, \omega)} \times \\ \times \left[(k_t^2 - 2k^2)^2 |F_r|^2 + 4k^2(k_t^2 - k^2) |F_z|^2 - \right. \\ \left. - 2k(k_t^2 - k^2)^{1/2}(k_t^2 - 2k^2)(F_z F_r^* + F_z^* F_r) \right] k dk, \end{aligned} \quad (3.2.45)$$

где

$$\begin{aligned} E_P = \frac{16\pi^3}{\rho_2 c_t^4} \int_0^\infty \omega^3 d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{k_l} \frac{(k_l - k^2)^{1/2}}{R_0^2(k, \omega)} \left[4k^2(k_t^2 - k^2) |F_r|^2 + (k_t^2 - 2k^2)^2 |F_z|^2 + \right. \\ \left. + 2k(k_t^2 - k^2)^{1/2}(k_t^2 - 2k^2)(F_z F_r^* + F_z^* F_r) \right] k dk \end{aligned} \quad (3.2.46)$$

— энергия продольной волны [Орлов, Разин, 1993]. Объединяя интегральный член в (3.2.45) со вторым из входящих в (3.2.43) интегралов, получаем выражение для энергии излучения SV -волны [Орлов, Разин, 1993]:

$$\begin{aligned} E_{SV} = \frac{16\pi^3}{\rho_2 c_t^4} \int_0^\infty \omega^3 d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{k_l} \frac{(k_t^2 - k^2)^{1/2}}{R_0^2(k, \omega)} \left[(k_t^2 - 2k^2)^2 |F_r|^2 + 4k^2(k_t^2 - k^2) |F_z|^2 - \right. \\ \left. - 2k(k_t^2 - k^2)^{1/2}(k_t^2 - 2k^2)(F_z F_r^* + F_z^* F_r) \right] k dk + \\ + \frac{16\pi^3}{\rho_2 c_t^4} \int_0^\infty \omega^3 d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{k_l}^{k_t} \frac{(k_t^2 - k^2)^{1/2}}{|R_0(k, \omega)|^2} \left[(k_t^2 - 2k^2)^2 |F_r|^2 - 4k^2(k_l - k^2) |F_z|^2 - \right. \\ \left. - 2ik(k_l^2 - k^2)^{1/2}(k_t^2 - 2k^2)(F_z F_r^* - F_z^* F_r) \right] k dk. \end{aligned} \quad (3.2.47)$$

Формулы (3.2.46), (3.2.47) можно записать в более компактном виде:

$$E_P = \frac{16\pi^3}{\rho_2 c_t^4} \int_0^\infty \omega^3 d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{k_l} \frac{(k_l^2 - k^2)^{1/2}}{R_0^2(k, \omega)} \left| 2k(k_t^2 - k^2)^{1/2} F_r + (k_t^2 - 2k^2) F_z \right|^2 k dk, \quad (3.2.48)$$

$$E_{SV} = \frac{16\pi^3}{\rho_2 c_t^4} \int_0^\infty \omega^3 d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{k_t} \frac{(k_t^2 - k^2)^{1/2}}{|R_0(k, \omega)|^2} \left| (k_t^2 - 2k^2)F_r - 2k(k_t^2 - k^2)^{1/2} F_z^2 \right|^2 k dk. \quad (3.2.49)$$

Делая в (3.2.48), (3.2.49) соответственно замены $k = k_l \sin \theta$, $k = k_t \sin \theta$, получим следующие представления для энергии излучения P - и SV -волн:

$$E_P = \frac{16\pi^3}{\rho_2 c_l^3} \int_0^\infty \omega^2 d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \times \\ \times \int_0^{\pi/2} \left| 2n \sin \theta (1 - n^2 \sin^2 \theta)^{1/2} F_r(\vec{k}_l^{(s)}, \omega) + (1 - 2n^2 \sin^2 \theta) F_z(\vec{k}_l^{(s)}, \omega) \right|^2 \times \\ \times \left[(1 - 2n^2 \sin^2 \theta)^2 + 4n^3 \sin^2 \theta \cos \theta (1 - n^2 \sin^2 \theta)^{1/2} \right]^{-2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta, \quad (3.2.50)$$

$$E_{SV} = \frac{16\pi^3}{\rho_2 c_t^3} \int_0^\infty \omega^2 d\omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \left| \cos 2\theta F_r(\vec{k}_t^{(s)}, \omega) - 2 \sin \theta (n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2} F_z(\vec{k}_t^{(s)}, \omega) \right|^2 \times \\ \times \left| \cos^2 2\theta + 4 \sin^2 \theta \cos \theta (n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2} \right|^{-2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta. \quad (3.2.51)$$

В (3.2.50), (3.2.51) введены обозначения:

$$n = \frac{c_t}{c_l}, \quad \vec{k}_l^{(s)} = k_l \sin \theta (\vec{e}_x \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \varphi),$$

$$\vec{k}_t^{(s)} = k_t \sin \theta (\vec{e}_x \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \varphi).$$

Формулы (3.2.50), (3.2.51) можно также получить путем вычисления потока энергии в упругих волнах.

Из общих формул (3.2.44), (3.2.48), (3.2.49) в случае осесимметричной вертикальной нагрузки следуют известные [Коган, 1963] результаты.

Полученные в данном параграфе результаты могут быть использованы при расчетах распределения по типам волн энергии излучения сейсмических антенн различных конфигураций.

Осесимметричная задача геоакустики слоистых сред

4.1. Осесимметричная модельная задача для многослойной упругой среды

При анализе интегрального представления, описывающего напряженно-деформированное состояние многослойного полупространства при воздействии поверхностной нагрузки, получаем однотипные (с точки зрения использования асимптотических методов) интегралы. Волновое поле в дальней от источника колебаний зоне упругого полупространства вблизи свободной поверхности определяет поверхностную волну типа рэлеевской (описываемой вычетом в вещественных полюсах подынтегральной функции интегрального представления волнового поля). Главные члены асимптотических представлений волнового поля на удалении от границы определяют объемные волны. На построении этих разложений и остановимся подробнее.

Волновое поле в полупространстве описывается следующими интегралами:

$$\begin{aligned}
 u_R(R, z) &= \int_{\gamma} \tilde{u}_R(u, z) J_1(uR) u \, du, \\
 u_z(R, z) &= \int_{\gamma} \tilde{u}_z(u, z) J_0(uR) u \, du, \\
 V_R(R, z) &= \int_{\gamma} \tilde{V}_R(u, z) J_1(uR) u \, du \\
 V_z(R, z) &= \int_{\gamma} \tilde{V}_z(u, z) J_0(uR) u \, du,
 \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

где

$$\begin{aligned}
 \tilde{U}_z(u, z) &= \tilde{q}(u) \Delta^{-1} [\Delta_{11} \sigma_1 e^{\sigma_1 z} + \Delta_{21} \sigma_2 e^{\sigma_2 z} + u \Delta_{31} e^{\sigma_3 z}], \\
 \tilde{U}_R(u, z) &= -\tilde{q}(u) \Delta^{-1} [\Delta_{11} u e^{\sigma_1 z} + u \Delta_{21} e^{\sigma_2 z} + \sigma_3 \Delta_{31} e^{\sigma_3 z}], \\
 \tilde{V}_z(u, z) &= \tilde{q}(u) \Delta^{-1} \left[m_1 u \Delta_{11} \sigma_1 e^{\sigma_1 z} + m_2 \Delta_{21} \sigma_2 e^{\sigma_2 z} + u \Delta_{31} \frac{(i\omega b - \omega^2 \rho_{12})}{(\omega^2 \rho_{22} + i\omega b)} \right], \\
 \tilde{V}_R(u, z) &= \tilde{q}(u) \Delta^{-1} \left[m_1 u \Delta_{11} e^{\sigma_1 z} + m_2 u \Delta_{21} e^{\sigma_2 z} + \sigma_3 \Delta_{31} \frac{(i\omega b - \omega^2 \rho_{12})}{(\omega^2 \rho_{22} + i\omega b)} e^{\sigma_3 z} \right].
 \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Как видно из приведенных соотношений, возникает необходимость построения асимптотических разложений несобственных контурных интегралов следующего типа:

$$F_{nj}(R, z) = \int_{\gamma} f(u) e^{\sigma_j z} J_n(uR) u \, du.$$

Переходя к полярной системе координат (ρ, φ)

$$R = \rho \sin \varphi, \quad z = -\rho \cos \varphi$$

получаем

$$F_{nj} = \int_{\Gamma} f(u) e^{-\sigma_j \rho \cos \varphi} J_n(u \rho \sin \varphi) du. \quad (4.1.3)$$

Исключая из рассмотрения малые окрестности направлений $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ (поверхностные волны типа рэлеевских и объемные волны, распространяющиеся прямо «вниз» от источника) можем при построении главного члена асимптотического разложения F_{nj} при $\rho \rightarrow \infty$ заменить $J_n(\rho u \sin \varphi)$ главным членом асимптотического разложения для параметра много больше аргумента. Это правомерно в случае, если при оценке интеграла стационарная точка не стремится к нулю. В противном случае следует заменять функцию Бесселя её интегральным представлением и применять двумерный метод стационарной фазы [Федорюк, 1977]. Как будет показано ниже, при принятых ограничениях на параметр φ замена подынтегральной функции главным членом её асимптотического разложения правомерна. Итак, при $\rho \rightarrow \infty$, $u \neq 0$, имеем

$$J_n(\zeta) \approx \sqrt{2(\pi\zeta)^{-1}} \cos\left(\zeta - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \left(e^{i(\zeta - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} + e^{-i(\zeta - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \right).$$

Подставляя последнее приближенное выражение в подынтегральную функцию (4.1.3), имеем

$$F_{nj} = F_{nj}^+ + F_{nj}^-,$$

$$F_{nj}^{\pm} = \int_{\Gamma} \frac{f_j(u)}{\sqrt{2\pi u \zeta \sin \varphi}} e^{\pm i(\zeta u \sin \varphi - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) + i\sqrt{\theta_j^2 - u^2} \zeta \cos \varphi} du.$$

Обозначим

$$S_{\pm}(u, \varphi) = \sqrt{\theta_j^2 - u^2} \cos \varphi \pm u \sin \varphi.$$

Оценим интеграл F_{nj}^+ методом стационарной фазы. Обозначим через u_j корень уравнения

$$S'_{ju} = -\frac{u \cos \varphi}{\sqrt{\theta_j^2 - u^2}} + \sin \varphi = 0 \longrightarrow u_j = \theta_j \sin \varphi.$$

Для применения метода стационарной фазы необходимо также получить значения следующих функций в стационарной точке $u = u_j$

$$S''_{ju}(u_j) = -\frac{\theta_j^2 \cos \varphi}{(\theta_j^2 - u^2)^{3/2}}, \quad \text{sgn } S''_{ju} = -1, \quad S_j(u_j) = \theta_j.$$

Тогда главный член асимптотического разложения $F_{nj}^+(\rho, \varphi)$ принимает следующий вид:

$$F_{nj}^+ = f(u_j) \cos \varphi (\rho \theta_j^{3/2} \sin \varphi) \exp \left[i \left(\rho \theta_j - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) - i \frac{\pi}{4} \right] + O(\rho^{-2}).$$

Аналогичным образом легко получить, что главный член асимптотического разложения F_{nj}^- имеет более высокий порядок малости, так как подынтегральная функция не имеет стационарных точек на отрезке интегрирования.

Используя полученные представления, окончательно имеем для $\rho \rightarrow \infty$ главные члены асимптотического разложения амплитудных функций смещения точек области:

$$\begin{aligned} U_z(\rho, \varphi) &= \rho^{-1} \sum_{k=1}^3 \theta_j \tilde{q}(\theta_j \sin \varphi) \Delta_{k1}(\theta_j \sin \varphi) \Delta^{-1}(\theta_j \sin \varphi) g_k e^{i(\rho \theta_j - \frac{\pi}{2})} + O(\rho^{-2}), \\ U_R(\rho, \varphi) &= -\rho^{-1} \sum_{k=1}^3 d_k \theta_j \tilde{q}(\theta_j \sin \varphi) \Delta_{k1}(\theta_j \sin \varphi) \Delta^{-1}(\theta_j \sin \varphi) + O(\rho^{-2}). \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

Здесь $g_k = -i \cos^2 \varphi (\sin \varphi)^{-1}$, $k = 1, 2$, $g_3 = \cos \varphi$, $d_k = \cos \varphi$, $k = 1, 2$, $d_3 = -i \cos^2 \varphi (\sin \varphi)^{-1}$.

Полученные выражения могут быть использованы для расчета амплитудных характеристик волнового поля в дальней от источника зоне, во внутренней области полупространства, исключая направление прямо «вниз» под источником колебаний. Однако, как показывает опыт использования аналогичных представлений для упругого полупространства, формулы дают адекватные результаты и в непосредственной близости от вертикального направления.

Следует отметить, что в случае упругой осесимметричной постановки задачи, всё, изложенное выше, правомерно. Общая схема и основные результаты асимптотического анализа интегралов сохраняются. Остановимся кратко на особенностях использования метода стационарной фазы применительно к анализу интегральных представлений решения задачи в пространственном случае.

Типовые интегралы в представлениях волнового поля при постановке пространственной задачи имеют следующую структуру

$$F(x, y, z) = \iint_{\Gamma} f(\alpha, \beta) \exp \left[-i \left(x \sqrt{\theta_j^2 - \alpha^2 - \beta^2} - \alpha z - \beta y \right) \right] d\alpha d\beta.$$

При анализе поведения объемных волн в дальней зоне [Федорюк, 1977] необходимо использовать двумерный метод стационарной фазы на отрезке $[-\theta_j + \varepsilon, \theta_j - \varepsilon]$ контура интегрирования. Свойства подынтегральной функции таковы, что результат применения многомерного метода стационарной фазы эквивалентен последовательному применению одномерного метода стационарной фазы для подынтегральной функции, зависящей от параметра. При таком подходе мы получаем типовые интегралы, идентичные рассмотренным при анализе решения плоской задачи, что позволяет просто использовать полученные ранее представления.

Аналогично предыдущему, отрезки контура интегрирования, огибающие полюса, определяют поверхностные (пограничные) волны, описываемые вычетами в вещественных полюсах. Полуоси контура интегрирования, лежащие вне полюсов $\alpha, \beta > \max\{\zeta_j\}$ (ζ_j — вещественные полюса, корни дисперсионного уравнения) подынтегральной функции, определяют вклад более высокого порядка малости, поэтому при анализе их можно не учитывать.



Рис. 4.1. Модели двухслойного (*a, б*) и трехслойного (*в*) полупространств. Результаты расчета амплитудно-частотных характеристик штампа, расположенного на поверхности слоистого полупространства приведены на рис. 4.2–4.4 соответственно

Значительный интерес представляют вопросы, связанные с резонансами в геофизической среде. Важную информацию в этом случае можно получить из анализа дисперсионного уравнения задачи.

В изолированном идеально упругом слое возникающие математические (неограниченные по амплитуде) резонансы легко определяются непосредственно из дисперсионного уравнения как его кратные корни. В случае наличия ограниченных резонансов (вязкоупругая среда, слоистое полупространство) целесообразнее получить эту информацию из непосредственного расчета амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) для соответствующей области.

Частоты, на которых все точки данного слоя имеют максимум амплитуд, могут быть названы частотами ограниченных резонансов. Подобным образом относительно легко определить резонансные частоты глобального характера (например, резонансные частоты излучающей плиты (штампа) на поверхности многослойной среды). Выделение частот локальных резонансов требует более тонкого анализа.

На рис. 4.2–4.4 приведены примеры расчета амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) излучающей плиты сейсмоисточника, расположенного на поверхности соответственно двухслойного и трехслойного полупространств. На всех трех рисунках кружочками помечена вещественная составляющая амплитудной функции, квадратиками — мнимая, треугольниками — модуль. По оси ординат отложены характеристики амплитудной функции вертикального смещения штампа, отнесенные к модулю сдвига поверхностного слоя и умноженные на отношение радиуса штампа к толщине поверхностного слоя среды. Соответствующие модели среды показаны на рис. 4.1, *a, б, в*.

Как видно из приведенных графиков, АЧХ двухслойного и трехслойного полупространств (рис. 4.3 и 4.4) для взятых расчетных характеристик практически совпадают (расхождение в низкочастотном диапазоне составляет до 30% и быстро убывает с ростом частоты). Таким образом, АЧХ излучающей плиты сейсмоисточника практически определяется строением и свойствами достаточно тонкой поверхностной зоны разреза.

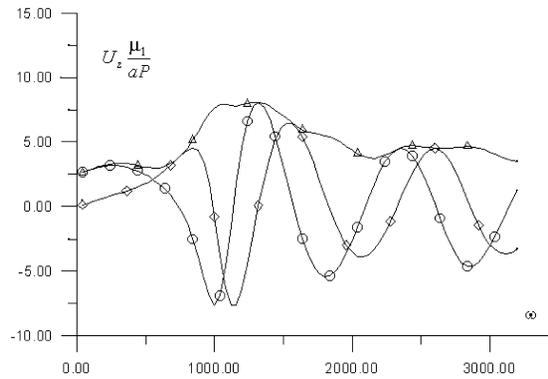


Рис. 4.2. АЧХ штампа, расположенного на поверхности двухслойной структуры (см. рис. 4.1,а) со следующими характеристиками: слой: $h = 0,5$ м, $\rho = 3,5$ т/м³, $V_{s1} = 200$ м/с, $V_{p1} = 400$ м/с; полупространство: $\rho = 4$ т/м³; $V_{s2} = 400$ м/с; $V_{p2} = 800$ м/с.

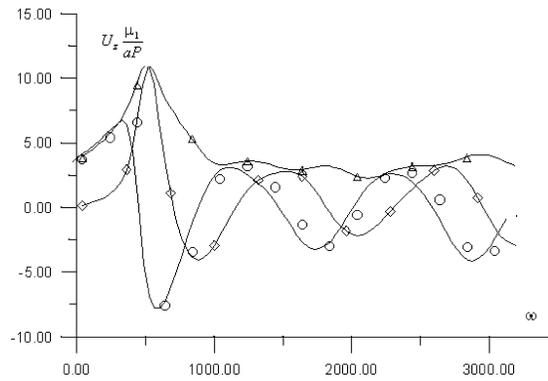


Рис. 4.3. АЧХ штампа, расположенного на поверхности двухслойной структуры (см. рис. 4.1,б) со следующими характеристиками: слой: $h = 1,0$ м, $\rho = 3,5$ т/м³, $V_{s1} = 200$ м/с, $V_{p1} = 400$ м/с; полупространство: $\rho = 4$ т/м³; $V_{s2} = 400$ м/с; $V_{p2} = 800$ м/с.

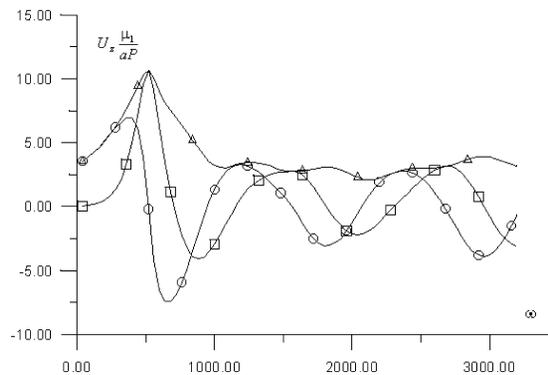


Рис. 4.4. АЧХ штампа для случая структуры (см. рис. 4.1,в): слой 1: $h = 1,0$ м, $\rho = 3,5$ т/м³, $V_{s1} = 200$ м/с, $V_{p1} = 400$ м/с; слой 2: $h = 2,0$ м, $\rho = 4$ т/м³; $V_{s2} = 400$ м/с; $V_{p2} = 800$ м/с; полупространство: $\rho = 4,5$ т/м³; $V_{s3} = 500$ м/с; $V_{p3} = 1000$ м/с.

Следует отметить, что все приведенные графики соответствуют «нормальному» строению геофизической среды, которая характеризуется слоями с нарастающими по глубине скоростями распространения упругих волн. В подобной среде всегда существуют поверхностные волны (волны Рэлея).

В среде «аномального» строения (верхний слой или отдельные слои имеет большую скорость распространения упругих волн) поверхностные волны отсутствуют (равно как и ограниченные резонансы).

При анализе дисперсионных уравнений идеально упругого слоистого полупространства в «нормальном» случае всегда имеем хотя бы один вещественный нуль, в «аномальном» случае вещественные нули практически отсутствуют. Они могут иметь место на очень низких частотах (в случае наличия очень тонких поверхностных жестких слоев), а с ростом частоты они уходят в комплексную плоскость.

4.2. Излучение сейсмоакустических волн источниками, действующими на поверхности контакта газообразной и твердой сред

В данном разделе рассмотрено возбуждение сейсмоакустических волн точечным гармоническим силовым источником, расположенным на границе раздела газ (жидкость) – твердое тело и действующим вдоль нормали к ней. Количественно исследована мощность излучения поверхностной волны Стонели при различных соотношениях между плотностями граничащих сред и скоростями упругих волн в них. Проанализированы парциальные мощности излучения волны Стонели в газе (жидкости) и в твердом теле. Рассмотрено излучение объемных продольной и поперечной упругих волн в твердом полупространстве и акустической волны в газе, а также вытекающей псевдорэлеевской волны.

4.2.1. Возбуждение волны Стонели при действии на границу газ – твердое тело перпендикулярной к ней гармонической силы

Рассмотрим действие на границу газ – твердое тело точечного гармонического силового источника. При расчете полной мощности излучения, а также той её части, которая связана с поверхностной волной Стонели, воспользуемся методом реакции излучения (см., например, [Докучаев, 1996]). Для гармонического источника частоты ω_0 среднее за период волны значение излучаемой мощности равно:

$$W = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[i\omega_0 \iint_{-\infty}^{+\infty} \vec{f}_\omega^*(x, y) \vec{u} \Big|_{z=0} d\vec{r} \right], \quad (4.2.1)$$

где звездочка означает комплексное сопряжение и Re — символ реальной части выражения. Рассмотрим вертикально ориентированный источник $\vec{f}_\omega(x, y) = f_0 \vec{e}_z \delta(x) \delta(y)$, где f_0 — полная приложенная сила и δ — дельта-функция Дирака.

Воспользовавшись результатами §3.1.2 перепишем формулу (4.2.1) в виде:

$$W = \frac{\omega_0^3 f_0^2}{4\pi\rho_2 c_t^4} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\kappa_l}{S_0(k)} k dk. \quad (4.2.2)$$

Вклад в реальную часть интеграла (4.2.2) дают те участки пути интегрирования, где функция $\frac{\kappa_l}{S_0(k)}$ действительна, а также полувычет в лежащем на действительной оси полюсе $k = k_S$, соответствующем поверхностной волне Стонели (как и выше, предполагаем, что $c_1 < c_R$).

Действительная часть подынтегральной функции в (4.2.2) отлична от нуля только на участке $0 < k < k_1$, интегрирование по которому дает сумму мощностей излучения акустической волны, продольной и поперечной упругих волн и вытекающей поверхностной волны W_Σ :

$$W_\Sigma = \frac{\omega_0^3 f_0^2}{4\pi\rho_2 c_t^4} \operatorname{Re} \int_0^{k_1} \frac{\kappa_l}{S_0(k)} k dk. \quad (4.2.3)$$

Мощность излучения поверхностной волны Стонели W_S пропорциональна полувычету в полюсе $k = k_S$ и описывается формулой (3.1.72). Полная излучаемая мощность представляет собой сумму $W_{\text{полн}} = W_\Sigma + W_S$.

При стремлении плотности газа к нулю из (4.2.2) следуют выражения для мощностей излучения упругих волн, возбуждаемых поверхностным источником в твердом полупространстве, граничащем с вакуумом. Интегрирование в пределах от нуля до $k = k_t$ дает сумму мощностей излучения объемных продольной волны W_P и поперечной волны SV -поляризации W_{SV} [Пазин, 1991; Пазин, 2002]:

$$W_P + W_{SV} = W_V = \frac{\omega_0^3 f_0^2}{4\pi\rho_2 c_t^4} \operatorname{Re} \int_0^{k_t} \frac{\kappa_l}{R_0(k)} k dk. \quad (4.2.4)$$

Мощность излучения поверхностной волны Рэлея W_R пропорциональна полувычету в рэлеевском полюсе $k = k_R$ (см. (3.1.103)).

Полная мощность W_0 , излучаемая источником нормальной к границе вакуум–твердое тело периодической силы, равна сумме мощностей объемных волн и рэлеевской волны: $W_0 = W_V + W_R$.

При проведении численных расчетов удобно представить выражения для мощностей излучения волн различных типов и полной излучаемой мощности в виде:

$$\begin{aligned} W_\Sigma &= G\widetilde{W}_\Sigma, & W_S &= G\widetilde{W}_S, & W_{\text{полн}} &= G\widetilde{W}_{\text{полн}}, \\ W_V &= G\widetilde{W}_V, & W_R &= G\widetilde{W}_R, & W_0 &= G\widetilde{W}_0, \end{aligned}$$

где $G = \frac{f_0^2 \omega_0^2}{4\pi\rho_2 c_l^3}$ — размерный множитель, а \widetilde{W}_Σ , \widetilde{W}_S , $\widetilde{W}_{\text{полн}}$, \widetilde{W}_V , \widetilde{W}_R и \widetilde{W}_0 —

численные коэффициенты, имеющие соответственно вид:

$$\widetilde{W}_\Sigma = \frac{1}{n^3} \operatorname{Re} \int_0^{\nu_1} \frac{(n^2 - x^2)^{1/2} x dx}{(1 - 2x^2)^2 + 4x^2(n^2 - x^2)^{1/2}(1 - x^2)^{1/2} + \varepsilon \frac{(n^2 - x^2)^{1/2}}{(\nu_1^2 - x^2)^{1/2}}}, \quad (4.2.5)$$

$$\widetilde{W}_S = -\frac{\pi \nu_S \sqrt{\nu_S^2 - n^2}}{n^3 \sigma(\nu_S)}, \quad \widetilde{W}_{\text{полн}} = \widetilde{W}_\Sigma + \widetilde{W}_S, \quad (4.2.6)$$

$$\widetilde{W}_V = \frac{1}{n^3} \operatorname{Re} \int_0^1 \frac{(n^2 - x^2)^{1/2} x dx}{(1 - 2x^2)^2 + 4x^2(n^2 - x^2)^{1/2}(1 - x^2)^{1/2}}, \quad (4.2.7)$$

$$\widetilde{W}_R = -\frac{\pi \xi (\xi^2 - n^2)^{1/2}}{n^3 q(\xi)}, \quad \widetilde{W}_0 = \widetilde{W}_V + \widetilde{W}_R. \quad (4.2.8)$$

В (4.2.5)–(4.2.8) введены следующие обозначения: $\nu_1 = c_t/c_1$, $\nu_S = c_t/c_S$,

$$\begin{aligned} \sigma(\nu_S) = S'_0(k_S)/k_t^3 = 8\nu_S \left(2\nu_S^2 - 1 - \sqrt{\nu_S^2} \sqrt{\nu_S^2 - n^2} \right) + \frac{4\nu_S^3 (n^2 + 1 - 2\nu_S^2)}{\sqrt{\nu_S^2 - 1} \sqrt{\nu_S^2 - n^2}} - \\ - \frac{\varepsilon \nu_S (\nu_1^2 - n^2)}{\sqrt{\nu_S^2 - n^2} (\nu_S^2 - \nu_1^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим численные примеры. Пусть плотность упругого полупространства составляет $\rho_2 = 2000 \text{ кг/м}^3$, а скорость поперечных и продольных упругих волн равны соответственно $c_t = 1000 \text{ м/с}$ и $c_l = \sqrt{3} c_t \approx 1732 \text{ м/с}$. Тогда при плотности воздуха $\rho_1 = 1,29 \text{ кг/м}^3$ ($\varepsilon = 6,5 \cdot 10^{-4}$) и скорости звука $c_1 = 340 \text{ м/с}$ из (4.2.5), (4.2.6) для точечного источника имеем [Разин, 1991]:

$$\widetilde{W}_\Sigma = 4,837, \quad \widetilde{W}_S \approx 1,45 \cdot 10^{-7}, \quad \widetilde{W}_{\text{полн}} \approx \widetilde{W}_\Sigma.$$

В отсутствие газа над упругим полупространством полная излучаемая мощность характеризуется значением $\widetilde{W}_0 = 4,836$ [Miller, Pursey, 1955]. При тех же плотностях сред и скорости звука в газе, но при вдвое меньших скоростях упругих волн в твердом теле, равных $c_t = 500 \text{ м/с}$, $c_l \approx 866 \text{ м/с}$, для энергий излучения получаем:

$$\widetilde{W}_\Sigma = 4,838, \quad \widetilde{W}_S \approx 4,55 \cdot 10^{-6}.$$

Следует отметить, что уменьшение вдвое скоростей упругих волн практически не меняет безразмерную величину \widetilde{W}_Σ , характеризующую мощность излучения объемных акустических волн, P - и SV -волн и вытекающей поверхностной волны. В то же время величина \widetilde{W}_S , связанная с мощностью излучения волны Стонели, возросла приблизительно в 30 раз.

При дальнейшем уменьшении скоростей упругих волн величина \widetilde{W}_S быстро возрастает. Например, при $c_t = 375 \text{ м/с}$, $c_l \approx 649,5 \text{ м/с}$ мощность излучения волны

Стонели характеризуется значением $\widetilde{W}_S = 1,39 \cdot 10^{-2}$, что составляет 0,3% полной излучаемой мощности.

Если скорость рэлеевской волны на границе твердое тело – вакуум сравнима со скоростью звука в газе, $c_R \gtrsim c_1$, например, при $c_t = 370$ м/с, $c_l = 640,9$ м/с, $c_R = 340,2$ м/с (тогда скорость волны Стонели $c_S = 339,5$ м/с), то $\widetilde{W}_\Sigma = 2,88$; $\widetilde{W}_S = 1,957$; $\widetilde{W}_{\text{полн}} = 4,837$. На долю поверхностной волны Стонели приходится 40,5% излучаемой мощности, а объемные и вытекающая волны уносят 59,5% полной мощности излучения [Разин, 1991].

Расчеты, проведенные при несколько меньшем отношении плотностей, $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-4}$, показали, что при $c_t = 370$ м/с $\widetilde{W}_S = 1,901$, что составляет 39,3% всей излучаемой мощности.

Эффект относительного увеличения мощности волны Стонели при приближении скорости рэлеевской волны к скорости звука в газе наблюдается для различных соотношений между скоростями продольных и поперечных волн в твердом теле. Например, при $c_t = 365$ м/с, $c_l = c_t/0,4 = 912,5$ м/с (при этом $c_R \approx 344,1$ м/с) расчеты по формулам (4.2.5), (4.2.6) дают $\widetilde{W}_\Sigma = 11,5$; $\widetilde{W}_S = 2,77 \cdot 10^{-2}$. Если же $c_t = 361$ м/с, $c_l = 902,5$ м/с, $c_R \approx 340,4$ м/с, то $\widetilde{W}_\Sigma = 8,242$; $\widetilde{W}_S = 3,294$, т.е. мощность излучения волны Стонели составляет 28,5% полной излучаемой мощности.

Выясним, каким образом происходит перераспределение излучаемой мощности между различными типами волн при изменении соотношения между c_1 и c_R . Для этого представим величину \widetilde{W}_Σ в виде $\widetilde{W}_\Sigma = W_1 + W_2$, где

$$W_1 = \frac{1}{n^3} \operatorname{Re} \int_0^1 \frac{(n^2 - x^2)^{1/2} x dx}{(1-2x^2)^2 + 4x^2(n^2 - x^2)^{1/2}(1-x^2)^{1/2} + \varepsilon(n^2 - x^2)^{1/2}(\nu_1^2 - x^2)^{-1/2}}, \quad (4.2.9)$$

$$W_2 = \frac{1}{n^3} \operatorname{Re} \int_1^{\nu_1} \frac{(n^2 - x^2)^{1/2} x dx}{(1-2x^2)^2 + 4x^2(n^2 - x^2)^{1/2}(1-x^2)^{1/2} + \varepsilon(n^2 - x^2)^{1/2}(\nu_1^2 - x^2)^{-1/2}}. \quad (4.2.10)$$

При стремлении плотности газа к нулю формула (4.2.9) переходит в выражение (4.2.7) для величины \widetilde{W}_V , характеризующей суммарную мощность излучения объемных P - и SV -волн, а реальная часть интеграла (4.2.10) будет даваться полувычетом в рэлеевском полюсе и описываться соотношением (4.2.8) для \widetilde{W}_R :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_1 = \widetilde{W}_V, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} W_2 = \widetilde{W}_R.$$

Если отношение скоростей упругих волн $n = c_t/c_l = 1/\sqrt{3}$, то, как дают вычисления по формулам (4.2.7), (4.2.8), $\widetilde{W}_V = 1,578$; $\widetilde{W}_R = 3,258$. Эти же значения мощностей излучения упругих волн источником в виде периодической вертикальной силы, равномерно распределенной по круговой области малого по сравнению с длинами волн радиуса на границе раздела твердое тело – вакуум, были получены в работе [Miller, Pursey, 1955] методом подсчета потока энергии через поверхности волновых фронтов.

При $c_t = 1000$ м/с, $c_l = \sqrt{3} c_t$, $\varepsilon = 6,5 \cdot 10^{-4}$ из (4.2.9), (4.2.10) получаем $W_1 = 1,578$; $W_2 = 3,259$, что с точностью до сотых долей процента совпадает с \widetilde{W}_V и \widetilde{W}_R . При $c_t = 375$ м/с $W_1 = 1,578$; $W_2 = 3,245$, что также близко к значениям \widetilde{W}_V и \widetilde{W}_R . Незначительные отличия между W_2 и \widetilde{W}_R связаны с тем, что W_Σ описывает кроме упругих и вытекающей волн также объемную акустическую волну в газе, относительная мощность излучения которой мала.

Таким образом, можно сделать вывод, что величина W_1 с высокой точностью описывает мощность излучения объемных P - и SV -волн, а величина W_2 — мощность излучения вытекающей волны.

Расчеты, проведенные при $c_t = 370$ м/с, показали, что, как и прежде, $W_1 = 1,578$, но $W_2 = 1,303$. Следовательно, изменение суммарной мощности излучения объемных и вытекающей волн W_Σ при уменьшении скорости поперечной волны c_t происходит за счет уменьшения мощности излучения вытекающей волны. Можно сказать, что при приближении скорости рэлеевской волны к скорости звука в газе мощность излучения волны Стонели увеличивается на столько, на сколько уменьшается мощность излучения вытекающей волны.

Перейдем к рассмотрению генерации упругих волн точечным силовым источником, действующим на границе раздела твердое тело – жидкость. Пусть плотность твердого тела $\rho_2 = 2860$ кг/м³, а скорости поперечных и продольных волн равны соответственно $c_t = 3000$ м/с и $c_l \approx 5196$ м/с. Тогда при плотности жидкости $\rho_1 = 1000$ кг/м³ ($\varepsilon = 0,35$) и при скорости звука в ней $c_1 = 1500$ м/с из (4.2.5), (4.2.6) получаем:

$$\widetilde{W}_\Sigma = 5,293, \quad \widetilde{W}_S = 0,203, \quad \widetilde{W}_{\text{полн}} = 5,496,$$

т. е. на долю волны Стонели приходится 3,7% мощности излучения. Полная излучаемая мощность заметно отличается от величин $\widetilde{W}_0 \approx \widetilde{W}_{\text{полн}} = 4,837$, соответствующих случаю возбуждения упругих волн в твердом теле, граничащем с вакуумом или газом. Это связано с более эффективной генерацией акустических волн в жидкости, чем в газе, поскольку отличие импедансов твердого тела и жидкости не столь велико, как твердого тела и газа.

Итак, на величину относительной мощности излучения волны Стонели значительно больше влияют соотношения между скоростью звука в газе и скоростями упругих волн в твердом теле, чем отношение плотностей этих двух сред.

4.2.2. Излучение поверхностной и вытекающей волн на границе газообразного и твердого полупространств

Хорошо известно [Miller, Pursey, 1955], что при действии на поверхность граничащего с вакуумом однородного изотропного твердого полупространства перпендикулярной к ней гармонической точечной нагрузки более половины всей излучаемой мощности приходится на долю поверхностной волны Рэлея (конкретное значение определяется соотношением скоростей продольной и поперечной волн). Данное обстоятельство позволяет использовать рэлеевские волны в многочисленных приложениях (см., например, [Викторов, 1981; Бирюков, Гуляев и др., 1991]). В связи

с этим представляет интерес исследование возбуждения вытекающей псевдорэле-евской волны и акустической волны в системе газ – твердое тело, что и составляет цель настоящего параграфа.

В случае точечного гармонического источника с амплитудой силы f_0 , который действует на границе газ – твердое тело и ориентирован перпендикулярно к ней, из общих формул (3.1.38), (3.1.47), (3.1.49) получаем следующие интегральные выражения для потенциалов смещений в газе (ψ_1) и в твердом теле (ψ_2, A) [Разин, 2002]:

$$\psi_1 = -\frac{f_0 k_t^2}{2\pi \rho_2 c_t^2} \int_0^\infty \frac{\kappa_l \exp(-i\kappa_l z)}{\kappa_1 S_0(k)} J_0(kr) k dk, \quad (4.2.11)$$

$$\psi_2 = \frac{f_0}{2\pi \rho_2 c_t^2} \int_0^\infty \frac{(k_t^2 - 2k^2) \exp(i\kappa_l z)}{S_0(k)} J_0(kr) k dk, \quad (4.2.12)$$

$$A = \frac{if_0}{\pi \rho_2 c_t^2} \int_0^\infty \frac{\kappa_l \exp(i\kappa_l z)}{S_0(k)} J_1(kr) k^2 dk. \quad (4.2.13)$$

В (4.2.11)–(4.2.13) k – горизонтальное волновое число, J_0 и J_1 – функции Бесселя нулевого и первого порядка соответственно.

При записи векторного потенциала (4.2.13) учтено, что в случае цилиндрической симметрии он имеет вид $\vec{A} = A \vec{e}_\varphi$, где \vec{e}_φ – орт оси φ .

Расчет мощности сейсмоакустических волн проведем методом реакции излучения. Он позволяет избежать применения каких-либо приближений, поскольку для его использования достаточно знать выражения для смещений в виде интегралов Фурье. Среднее за период значение полной излучаемой во все типы волн мощности дается выражением (4.2.2). При этом выражение (4.2.3) описывает суммарную мощность излучения сферической акустической волны в газе, сферических продольной и поперечной упругих волн и вытекающей волны.

Проанализируем выражение (4.2.3). Поскольку в рассматриваемом случае $k_t < k_1$, то, очевидно, участок интегрирования от $k = k_t$ до $k = k_1$ не может описывать мощности излучения продольной и поперечной волн. Данный участок интегрирования дает вклад в мощности излучения акустической волны в газе и вытекающей псевдорэле-евской волны. Аналогично, участок интегрирования от $k = k_l$ до $k = k_t$ не может описывать мощность излучения продольной волны, поэтому вклад его соответствует поперечной и акустической волнам. Наконец, участок от $k = 0$ до $k = k_l$ дает вклад в мощности излучения всех трех объемных волн.

Выделяя в интеграле (4.2.3) реальную часть, для интервала $[k_t, k_1]$ имеем:

$$W_1(k_t, k_1) = \frac{\omega^3 f_0^2 \varepsilon k_t^4}{4\pi \rho_2 c_t^4} \int_{k_t}^{k_1} \frac{(k^2 - k_t^2) k dk}{\sqrt{k_1^2 - k^2} |S_0(k)|^2}. \quad (4.2.14)$$

Аналогичный вид должны иметь выражения для мощности излучения акустической волны на участках интегрирования $k_l < k < k_t$ и $0 < k < k_l$.

Рассмотрим интервал интегрирования $k_l < k < k_t$. Выделяя в (4.2.3) конструкцию вида (4.2.14) получаем:

$$W_1(k_l, k_t) = \frac{\omega^3 f_0^2 \varepsilon k_t^4}{4\pi\rho_2 c_t^4} \int_{k_l}^{k_t} \frac{(k^2 - k_l^2) k dk}{\sqrt{k_1^2 - k^2} |S_0(k)|^2}, \quad (4.2.15)$$

$$W_t(k_l, k_t) = \frac{\omega^3 f_0^2}{\pi\rho_2 c_t^4} \int_{k_l}^{k_t} \frac{(k^2 - k_l^2) \sqrt{k_t^2 - k^2} k^3 dk}{|S_0(k)|^2}, \quad (4.2.16)$$

где выражение (4.2.16) описывает часть мощности излучения поперечной волны.

Наконец, рассмотрим участок интегрирования $0 < k < k_l$. На этом участке для мощности излучения акустической волны необходимо выделить выражение, аналогичное (4.2.14), (4.2.15), а для мощности излучения поперечной волны — выражение типа (4.2.16). Оставшаяся часть мощности относится к продольной упругой волне. Выпишем соответствующие выражения [Разин, 2002]:

$$W_l = \frac{\omega^3 f_0^2}{4\pi\rho_2 c_t^4} \int_0^{k_l} \frac{(k_t^2 - 2k^2)^2 \sqrt{k_l^2 - k^2} k dk}{S_0^2(k)}, \quad (4.2.17)$$

$$W_t(0, k_l) = \frac{\omega^3 f_0^2}{\pi\rho_2 c_t^4} \int_0^{k_l} \frac{(k_l^2 - k^2) \sqrt{k_t^2 - k^2} k^3 dk}{S_0^2(k)}, \quad (4.2.18)$$

$$W_1(0, k_l) = \frac{\omega^3 f_0^2 \varepsilon k_t^4}{4\pi\rho_2 c_t^4} \int_0^{k_l} \frac{(k_l^2 - k^2) k dk}{\sqrt{k_1^2 - k^2} S_0^2(k)}. \quad (4.2.19)$$

Выражение (4.2.17) полностью описывает мощность излучения продольной волны. Мощность излучения поперечной волны, как следует из (4.2.16), (4.2.18), описывается формулой [Разин, 2002]

$$W_t = \frac{\omega^3 f_0^2}{\pi\rho_2 c_t^4} \int_0^{k_t} \frac{|k^2 - k_l^2| \sqrt{k_t^2 - k^2} k^3 dk}{|S_0(k)|^2}. \quad (4.2.20)$$

Выражения (4.2.14), (4.2.15) и (4.2.19) требуют дополнительного исследования.

Очевидно, что в предельном случае стремления плотности газа к нулю мощность излучения акустической волны также должна стремиться к нулю. Подынтегральные выражения в (4.2.15) и (4.2.16) не имеют особенностей, поэтому $W_1(0, k_l) \rightarrow 0$, $W_1(k_l, k_t) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Выражение для мощности излучения на участке интегрирования $k_t < k < k_1$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ приводится к виду:

$$W_1(k_t, k_1) = \frac{\omega^3 f_0^2}{4\pi\rho_2 c_t^4} \operatorname{Re} \left\{ i \int_{k_t}^{k_1} \frac{\sqrt{k^2 - k_l^2} k dk}{R_0(k)} \right\}, \quad (4.2.21)$$

и вклад в его реальную часть дает только полувычет в полюсе $k = k_R$. Это выражение соответствует мощности излучения поверхностной волны Рэлея, возбуждаемой на границе твердое тело – вакуум (см. (3.1.103)).

Таким образом, можно сделать вывод, что выражение (4.2.14) описывает как некоторую часть мощности излучения акустической волны, так и мощность излучения вытекающей псевдорэлеевской волны. Разделить эти мощности не представляется возможным, поскольку распространяющаяся вдоль границы волна постоянно передает энергию акустической волне. При этом их суммарная мощность остается постоянной. Более подробно смысл выражений (4.2.14), (4.2.15) и (4.2.19) будет обсуждаться ниже.

Приведенные выше выражения для мощностей излучения различных типов волн, распространяющихся вблизи границы раздела газ, – твердое тело, были получены без использования каких-либо приближений. Аналогичные выражения можно получить путем вычисления потока энергии через поверхность сферы большого по сравнению с длиной волны радиуса, содержащей источник внутри себя. Для этого необходимо предварительно получить приближенные выражения для смещений в волновой зоне, для чего обычно используется метод перевала. Указанная процедура подробно описана в многочисленных работах (см., например, [Miller, Pursey, 1955; Гуцин, Докучаев и др., 1981]). Применим её здесь для вычисления мощности излучения акустической волны.

В интеграле (4.2.11) заменим функцию Бесселя на функцию Ханкеля, причем для последней воспользуемся асимптотикой при больших значениях аргумента. Переходя под интегралом к сферической системе координат $R = (r^2 + z^2)^{1/2}$, $\theta = \arccos(|z|/R)$ и применяя формально метод перевала, получим выражение для потенциала смещений в газе в волновой зоне:

$$\psi_1 = \frac{i f_0 k_t^2 \sqrt{k_t^2 - k_1^2 \sin^2 \theta} e^{ik_1 R}}{2\pi \rho_2 c_t^2 S_0(k_1 \sin \theta) R}. \quad (4.2.22)$$

Соответствующее потенциалу (4.2.22) выражение для мощности излучения имеет вид:

$$W_1 = \frac{\omega^2 f_0^2 \varepsilon c_1^5}{4\pi \rho_2 c_t^8} \int_0^{\pi/2} \frac{|(c_1/c_t)^2 - \sin^2 \theta| \sin \theta d\theta}{|S_1(\theta)|^2}, \quad (4.2.23)$$

где

$$S_1(\theta) = \left(\frac{c_1^2}{c_t^2} - 2 \sin^2 \theta \right)^2 + 4 \sin^2 \theta \sqrt{\frac{c_1^2}{c_t^2} - \sin^2 \theta} \sqrt{\frac{c_1^2}{c_t^2} - \sin^2 \theta} + \varepsilon \left(\frac{c_1}{c_t} \right)^4 \sqrt{\frac{c_1^2}{c_t^2} - \sin^2 \theta} \frac{1}{\cos \theta}.$$

Выражение (4.2.23) было ранее получено в [Заславский, 1982]. Отметим, что если объединить выражения (4.2.14), (4.2.15) и (4.2.19) и записать их сумму в виде

$$W_1 = \frac{\omega^3 f_0^2 \varepsilon k_t^4}{4\pi \rho_2 c_t^4} \int_0^{k_1} \frac{|k^2 - k_t^2| k dk}{\sqrt{k_1^2 - k^2} |S_0(k)|^2}, \quad (4.2.24)$$

то заменой переменной интегрирования $k = k_1 \sin \theta$ формула (4.2.24) переводится в (4.2.23).

Проанализируем формулу (4.2.23). Интегрирование по зенитному углу θ от $\theta = 0$ до $\theta = \arcsin(c_1/c_l)$ соответствует выражению (4.2.19) и описывает ту часть мощности акустической волны в газе, которая излучается в указанном интервале углов. Аналогично интегрирование от $\theta = \arcsin(c_1/c_l)$ до $\theta = \arcsin(c_1/c_t)$ соответствует выражению (4.2.15) и дает мощность, излученную в диапазоне углов $\arcsin(c_1/c_l) < \theta < \arcsin(c_1/c_t)$. Интегрирование от $\theta = \arcsin(c_1/c_t)$ до $\theta = \pi/2$ соответствует выражению (4.2.14), которое, как показано выше, описывает как некоторую часть мощности излучения акустической волны, так и мощность излучения вытекающей псевдорэлеевской волны. В этой области углов происходит перекачка энергии вытекающей волны в акустическую волну, поэтому нельзя провести количественное разделение мощностей излучения акустической и вытекающей волн. Поле вытекающей волны экспоненциально спадает при движении вдоль границы за счет передачи части энергии звуковой волне. Их суммарная мощность при этом остается постоянной.

Перейдем к количественным оценкам. При проведении численных расчетов удобно представить выражения для мощностей излучения волн различных типов в виде

$$W_i = \frac{f_0^2 \omega^2}{4\pi \rho_2 c_l^3} \widetilde{W}_i,$$

где \widetilde{W}_i — безразмерные численные коэффициенты (индекс i принимает значения 1, l , t и т. д. и обозначает тип волны).

Рассмотрим сначала случай, когда твердое тело граничит с вакуумом ($\rho_1 = 0$). Численные коэффициенты $\widetilde{W}_l^{(0)}$, $\widetilde{W}_t^{(0)}$ и \widetilde{W}_R , относящиеся соответственно к продольной, поперечной и рэлеевской волнам на свободной поверхности упругого полупространства, имеют следующие значения (рассматривается случай равенства параметров Ламэ λ и μ , когда $c_l = \sqrt{3} c_t$):

$$\widetilde{W}_l^{(0)} = 0,333; \quad \widetilde{W}_t^{(0)} = 1,2455; \quad \widetilde{W}_R = 3,2578.$$

При этом полная излучаемая мощность

$$\widetilde{W}_{\text{tot}}^{(0)} = \widetilde{W}_l^{(0)} + \widetilde{W}_t^{(0)} + \widetilde{W}_R$$

характеризуется величиной $\widetilde{W}_{\text{tot}}^{(0)} = 4,8363$. Полученные численные значения совпадают с известными классическими результатами [Miller, Pursey, 1955].

Перейдем к рассмотрению случая, когда твердое тело граничит с газом. Пусть плотность упругого полупространства составляет $\rho_2 = 2000 \text{ кг/м}^3$, а скорости поперечных и продольных упругих волн равны соответственно $c_t = 1000 \text{ м/с}$ и $c_l = \sqrt{3} \approx 1732 \text{ м/с}$. Тогда при плотности воздуха $\rho_1 = 1,29 \text{ кг/м}^3$ ($\varepsilon = 6,45 \cdot 10^{-4}$) и скорости звука $c_1 = 340 \text{ м/с}$ для мощностей излучения продольной и поперечной волн получаем численные значения $\widetilde{W}_l = 0,3329$, $\widetilde{W}_t = 1,2455$. Эти значения почти не отличаются от величин $\widetilde{W}_l^{(0)}$ и $\widetilde{W}_t^{(0)}$. Мощность поверхностной волны Стонели, вычисленная по формуле (3.1.72), оказывается весьма малой: $\widetilde{W}_S = 1,5 \cdot 10^{-7}$.

Численные значения мощностей акустической волны $\widetilde{W}_1(0, k_l)$ и $\widetilde{W}_1(k_l, k_t)$, излучаемых соответственно в области пространства $0 \leq \theta < \arcsin(c_1/c_l)$ и $\arcsin(c_1/c_l) \leq \theta < \arcsin(c_1/c_t)$, равны: $\widetilde{W}_1(0, k_l) = 6,22 \cdot 10^{-5}$, $\widetilde{W}_1(k_l, k_t) = 1,94 \cdot 10^{-4}$. Как и следовало ожидать, эти мощности на несколько порядков меньше мощностей излучения объемных волн в твердом теле. Данные результаты могут быть использованы для оценок возмущений, возникающих в ионосфере вследствие воздействия акустической волны, возбуждаемой мощными наземными сейсмическими источниками.

При вычислении величины $\widetilde{W}_1(k_t, k_l)$ необходимо учитывать, что подинтегральная функция в (4.2.14) имеет резкий максимум при $k \approx k_R$. Именно область этого максимума дает определяющий вклад в результат интегрирования, $\widetilde{W}_1(k_t, k_l) = 3,2591$. Полученное значение очень близко к значению \widetilde{W}_R , соответствующему поверхностной волне Рэлея на свободной границе упругого полупространства. Следовательно, основной вклад в величину $\widetilde{W}_1(k_l, k_t)$ дает вытекающая волна.

Таким образом, здесь без применения каких-либо приближений получены выражения для средних за период волны мощностей излучения продольной и поперечной сферических волн и поверхностной волны Стонели. Для области пространства, соответствующей зенитным углам, превышающим арксинус отношения скорости звука в газе к скорости поперечных волн в упругой среде, где происходит перекачка энергии вытекающей волны в акустическую волну, получено выражение для их суммарной мощности. Показано, что в данной области метод перевала приводит к некорректным результатам для поля акустической волны. Установлено, что мощность излучения вытекающей волны полностью описывается потенциалом смещений в газе.

4.2.3. Особенности излучения волны Стонели на границе раздела газ – твердое тело

В §4.2.1 исследованы зависимости мощности излучения волны Стонели от отношений плотностей сред и скоростей волн в них. При этом вычислялась полная мощность волны Стонели в обеих средах. Данное обстоятельство связано с тем, что для полной мощности поверхностной волны удастся получить относительно простое аналитическое выражение (см. (3.1.72)). Это выражение, однако, не позволяет выяснить, какая часть мощности поверхностной волны излучается в каждую из граничащих сред.

При действии на границу раздела твердое тело – газ (жидкость) силового источника большая часть мощности объемных волн излучается в упругое полупространство. Поле волны Стонели в обеих средах убывает при удалении от границы [Бреховских, 1973; Бреховских, Годин, 1989; Бирюков, Гуляев и др., 1991], причем в твердом теле это убывание оказывается гораздо более быстрым, чем в жидкости, и, особенно, в газе. Таким образом, поверхностная волна захватывает «толстый» слой в разреженном газе и «тонкий» слой в плотном твердом теле, поэтому заранее не очевидно, в какую из этих сред излучается большая часть мощности волны Стонели. Рассмотрению данного вопроса посвящен настоящий параграф.

Для вычисления мощностей излучения волны Стонели в каждой из граничащих сред необходимо найти плотности потоков мощности излучения и проинтегрировать их по поверхности бесконечного цилиндра, ось которого совпадает с осью z .

В интегралах (4.2.11)–(4.2.13) заменим функции Бесселя на функции Ханкеля, причем для последних воспользуемся асимптотиками при больших значениях аргумента. Выражения для потенциалов при этом принимают вид:

$$\psi_1 \approx -\frac{f_0 k_t^2 e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\pi \rho_2 c_t^2 \sqrt{2\pi r}} \int_{\infty e^{i\pi}}^{\infty} \frac{\kappa_l e^{-i\kappa_1 z + ikr}}{\kappa_1 S_0(k)} \sqrt{k} dk, \quad (4.2.25)$$

$$\psi_2 \approx \frac{f_0 e^{-i\frac{\pi}{4}}}{2\pi \rho_2 c_t^2 \sqrt{2\pi r}} \int_{\infty e^{i\pi}}^{\infty} \frac{(k_t^2 - 2k^2) e^{i\kappa_1 z + ikr}}{S_0(k)} \sqrt{k} dk, \quad (4.2.26)$$

$$A \approx \frac{f_0 e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\pi \rho_2 c_t^2 \sqrt{2\pi r}} \int_{\infty e^{i\pi}}^{\infty} \frac{\kappa_l e^{i\kappa_t z + ikr}}{S_0(k)} k \sqrt{k} dk. \quad (4.2.27)$$

В интегралах (4.2.25)–(4.2.27) контур интегрирования в области $\text{Re } k < 0$ проходит выше действительной оси. По отрицательной части действительной оси проведен разрез, обеспечивающий однозначность определения аналитической функции \sqrt{k} на комплексной плоскости k .

Для дальнейшего рассмотрения необходимо задать соотношения между скоростью звука в газе и скоростями упругих волн в твердом теле. Как и выше, будем считать, что выполняется условие $c_R > c_1$.

Потенциалы, соответствующие поверхностной волне Стонели, пропорциональны вычету в полюсе $k = k_S$, где k_S – волновое число этой волны, определяемое как действительное решение уравнения $S_0(k) = 0$, лежащее в области $k > k_1$ [Пазин, 2008]:

$$\psi_{1S} = -\frac{f_0 k_t^2}{\rho_2 c_t^2} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\sqrt{k_S} \sqrt{k_S^2 - k_t^2}}{\sqrt{k_S^2 - k_1^2} S'_0(k_S)} e^{ik_S r + z \sqrt{k_S^2 - k_1^2}}, \quad (4.2.28)$$

$$\psi_{2S} = \frac{f_0}{\rho_2 c_t^2} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\sqrt{k_S}}{S'_0(k_S)} (k_t^2 - 2k_S^2) e^{ik_S r - z \sqrt{k_S^2 - k_t^2}}, \quad (4.2.29)$$

$$A_S = -\frac{2f_0}{\rho_2 c_t^2} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{k_S^{3/2} \sqrt{k_S^2 - k_t^2}}{S'_0(k_S)} e^{ik_S r - z \sqrt{k_S^2 - k_t^2}}. \quad (4.2.30)$$

Соответствующие потенциалу (4.2.28) вертикальные и горизонтальные смещения в газе согласно (3.1.15) имеют вид:

$$u_{z1}^{(S)} = \sqrt{k_S^2 - k_1^2} \psi_{1S}, \quad (4.2.31)$$

$$u_{r1}^{(S)} = ik_S \psi_{1S}. \quad (4.2.32)$$

По известным компонентам смещений (4.2.31), (4.2.32) вычисляем плотность потока мощности в волне Стонели в газе:

$$I_{r1} = \frac{\rho_1 \omega^3 f_0^2}{4\pi \rho_2^2 c_t^4 r} \frac{k_t^4 k_S^2 (k_S^2 - k_t^2)}{(k_S^2 - k_t^2) [S'_0(k_S)]^2} e^{2z \sqrt{k_S^2 - k_t^2}}. \quad (4.2.33)$$

Часть мощности волны Стонели, излучаемая в газ, описывается при этом формулой:

$$W_{S1} = 2\pi r \int_{-\infty}^0 I_{r1} dz = \frac{\rho_1 \omega^3 f_0^2 k_t^4 k_S^2 (k_S^2 - k_t^2)}{4\rho_2^2 c_t^4 (k_S^2 - k_t^2)^{3/2} [S'_0(k_S)]^2}. \quad (4.2.34)$$

Аналогично для смещений в твердом теле из (3.1.16), (4.2.29), (4.2.30) получаем:

$$u_{z2}^{(S)} = -\sqrt{k_S^2 - k_t^2} \psi_{2S} + ik_S A_{2S}, \quad (4.2.35)$$

$$u_{r2}^{(S)} = ik_S \psi_{2S} + \sqrt{k_S^2 - k_t^2} A_{2S}. \quad (4.2.36)$$

Соответствующая смещениям (4.2.35), (4.2.36) плотность потока мощности излучения волны Стонели дается выражением:

$$\begin{aligned} I_{r2} = & \frac{\omega^3 f_0^2}{4\pi \rho_2 c_t^4 r} \frac{k_S^2}{[S'_0(k_S)]^2} \left\{ (2k_S^2 - k_t^2)^2 \left(1 + 4 \frac{k_S^2 - k_t^2}{k_t^2} \right) e^{-2z \sqrt{k_S^2 - k_t^2}} + \right. \\ & + 4k_S^2 \left(4 \frac{k_S^2}{k_t^2} - 3 \right) (k_S^2 - k_t^2) e^{-2z \sqrt{k_S^2 - k_t^2}} - 2(2k_S^2 - k_t^2) \sqrt{k_S^2 - k_t^2} \times \\ & \times \left[\left(1 + 4 \frac{k_S^2}{k_t^2} - 2 \frac{k_t^2}{k_t^2} \right) \sqrt{k_S^2 - k_t^2} + \left(4 \frac{k_S^2}{k_t^2} - 1 \right) \sqrt{k_S^2 - k_t^2} \right] \times \\ & \left. \times e^{-z(\sqrt{k_S^2 - k_t^2} + \sqrt{k_S^2 - k_t^2})} \right\}. \quad (4.2.37) \end{aligned}$$

Часть мощности волны Стонели, излучаемая в твердое тело, дается выражением:

$$\begin{aligned} W_{S2} = 2\pi r \int_0^\infty I_{r2} dz = & \frac{\omega^3 f_0^2}{2\rho_2 c_t^4} \frac{k_S^2}{[S'_0(k_S)]^2} \left\{ \frac{1}{2\sqrt{k_S^2 - k_t^2}} (2k_S^2 - k_t^2)^2 \left(1 + 4 \frac{k_S^2 - k_t^2}{k_t^2} \right) + \right. \\ & + \frac{2}{\sqrt{k_S^2 - k_t^2}} k_S^2 \left(4 \frac{k_S^2}{k_t^2} - 3 \right) (k_S^2 - k_t^2) - \\ & - \frac{2}{\sqrt{k_S^2 - k_t^2} + \sqrt{k_S^2 - k_t^2}} (2k_S^2 - k_t^2) \sqrt{k_S^2 - k_t^2} \times \\ & \left. \times \left[\left(1 + 4 \frac{k_S^2}{k_t^2} - 2 \frac{k_t^2}{k_t^2} \right) \sqrt{k_S^2 - k_t^2} + \left(4 \frac{k_S^2}{k_t^2} - 1 \right) \sqrt{k_S^2 - k_t^2} \right] \right\}. \quad (4.2.38) \end{aligned}$$

Для количественных оценок удобно представить мощности излучения в виде:

$$W_{S1} = \frac{f_0^2 \omega^2}{4\pi \rho_2 c_t^3} \widetilde{W}_{S1}, \quad W_{S2} = \frac{f_0^2 \omega^2}{4\pi \rho_2 c_t^3} \widetilde{W}_{S2},$$

где \widetilde{W}_{S1} и \widetilde{W}_{S2} — безразмерные величины (будем называть их приведенными мощностями). Из (4.2.34), (4.2.38) следует, что

$$\widetilde{W}_{S1} = \frac{\pi}{n^3} \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{\nu_S^2(\nu_S^2 - n^2)}{\sigma^2(\nu_S) (\nu_S^2 - c_t^2/c_l^2)^{3/2}}, \quad (4.2.39)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{S2} = \frac{2\pi}{n^3} \frac{\nu_S^2}{\sigma^2(\nu_S)} & \left\{ \frac{2\nu_S^2(4\nu_S^2 - 3)(\nu_S^2 - n^2)}{\sqrt{\nu_S^2 - 1}} + \frac{(2\nu_S^2 - 1)^2[1 + 4(\nu_S^2 - n^2)]}{2\sqrt{\nu_S^2 - n^2}} - \right. \\ & \left. - \frac{2(2\nu_S^2 - 1)\sqrt{\nu_S^2 - n^2} [(1 + 4\nu_S^2 - 2n^2)\sqrt{\nu_S^2 - 1} + (4\nu_S^2 - 1)\sqrt{\nu_S^2 - n^2}]}{\sqrt{\nu_S^2 - 1} + \sqrt{\nu_S^2 - n^2}} \right\}. \quad (4.2.40) \end{aligned}$$

Полная мощность излучения волны Стонели в обеих средах дается выражением (3.1.72). Для мощности излучения волны Стонели должно выполняться равенство

$$W_S = W_{S1} + W_{S2}. \quad (4.2.41)$$

Следовательно, путем алгебраических преобразований суммы $W_{S1} + W_{S2}$ её можно привести к выражению (3.1.72) для W_S . Однако выражения для мощностей излучения волны Стонели в твердом теле (4.2.38) и в газе (4.2.34) оказываются довольно громоздкими, и убедиться аналитически в справедливости формулы (4.2.41) сложно. Однако это нетрудно сделать численно. Расчеты, проведенные при различных соотношениях между параметрами граничащих сред и для разных значений величины $n = c_t/c_l$, подтверждают справедливость формулы (4.2.41).

Пусть твердое тело граничит с воздухом, плотность которого составляет $\rho_1 = 1,29 \text{ кг/м}^3$, и скорость звука в котором $c_1 = 340 \text{ м/с}$. Будем полагать, что скорости продольной и поперечной волн связаны соотношением $c_l = \sqrt{3} c_t$ (при этом в твердой среде равны параметры Ламэ). Плотность твердого тела положим равной $\rho_2 = 2000 \text{ кг/м}^3$.

Результаты расчетов приведенной мощности излучения волны Стонели, а также величин

$$\eta_{1,2} = (W_{S1,S2}/W_S) \cdot 100\%,$$

выражающих доли мощностей, излучаемых в газ и в твердое тело при различных скоростях упругих волн, приведены в табл. 4.1 [Разин, 2008]. Величины, для которых расчет давал значения меньше, чем 10^{-13} , приближенно считались равными нулю.

Анализ данных табл. 4.1 показывает, что если выполняется условие $c_R \gtrsim c_1$ (значению $c_t = 369,85 \text{ м/с}$ соответствует величина $c_R \approx 340,04 \text{ м/с}$), то большая часть мощности волны Стонели излучается в твердое тело. Эффе́ктивность излучения волны Стонели быстро падает с ростом скоростей упругих волн в твердом теле. При этом всё бо́льшая часть мощности волны Стонели излучается в газ. Если скорости упругих волн значительно превышают скорость звука, то практически вся излучаемая в волну Стонели мощность сосредоточена в газе (величина W_{S1} превышает W_{S2} на шесть–восемь порядков).

Таблица 4.1

c_t , м/с	\widetilde{W}_S	\widetilde{W}_{S1}	\widetilde{W}_{S2}	η_1 , %	η_2 , %
369,85	2,148	0,7538	1,3942	35,1	64,9
370	1,9551	0,8017	1,1534	41,0	59,0
371	0,5909	0,4871	0,1038	82,4	17,6
372	0,1493	0,1428	0,0065	95,65	4,35
373	0,0538	0,0530	$8 \cdot 10^{-4}$	98,5	1,5
374	$2,499 \cdot 10^{-2}$	$2,482 \cdot 10^{-2}$	$1,7 \cdot 10^{-4}$	99,3	0,7
375	$1,365 \cdot 10^{-2}$	$1,360 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-5}$	99,63	0,37
400	$1,23 \cdot 10^{-4}$	$1,23 \cdot 10^{-4}$	$2,8 \cdot 10^{-9}$	≈ 100	≈ 0
500	$4,44 \cdot 10^{-6}$	$4,44 \cdot 10^{-6}$	$1,8 \cdot 10^{-12}$	≈ 100	≈ 0
700	$6,2 \cdot 10^{-7}$	$6,2 \cdot 10^{-7}$	0	100	0
1000	$1,5 \cdot 10^{-7}$	$1,5 \cdot 10^{-7}$	0	100	0
2000	$1,5 \cdot 10^{-8}$	$1,5 \cdot 10^{-8}$	0	100	0

Для данных табл. 4.1 отношение плотностей газа и твердого тела мало, $\rho_1/\rho_2 = 6,45 \cdot 10^{-4}$. При этом полная приведенная мощность, излучаемая во все типы волн, составляет $\widetilde{W}_{\text{tot}} = 4,8379$ при $c_t = 370$ м/с, медленно спадает с ростом величины c_t и достигает значения $\widetilde{W}_{\text{tot}} = 4,8370$ при $c_t = 2000$ м/с. Величина $\widetilde{W}_{\text{tot}}$ вычислялась по формулам (4.2.17), (4.2.20), (4.2.24), (3.1.72).

Результаты аналогичных расчетов при $n = c_t/c_l = 0,4$ и $n = 0,65$ приведены соответственно в таблицах 4.2 и 4.3. Эти результаты демонстрируют те же характерные особенности.

Таблица 4.2

c_t , м/с	$\widetilde{W}_{\text{tot}}$	\widetilde{W}_S	\widetilde{W}_{S1}	\widetilde{W}_{S2}	η_1 , %	η_2 , %
360,65	11,534	4,5849	1,6261	2,9588	35,47	64,53
361,0	11,5333	3,2794	1,7731	1,5063	54,07	45,93
365,0	11,5333	0,0271	0,0270	$9,25 \cdot 10^{-5}$	99,66	0,34
370,0	11,5333	$3,337 \cdot 10^{-3}$	$3,336 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-6}$	99,96	0,04

Таблица 4.3

c_t , м/с	$\widetilde{W}_{\text{tot}}$	\widetilde{W}_S	\widetilde{W}_{S1}	\widetilde{W}_{S2}	η_1 , %	η_2 , %
378,2	4,0386	1,7991	0,6969	1,1022	38,74	61,26
378,5	4,0386	1,4647	0,7361	0,7286	50,26	49,74
385,0	4,0386	$7,68 \cdot 10^{-3}$	$7,66 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-5}$	99,77	0,23
390,0	4,0386	$1,70 \cdot 10^{-3}$	$1,70 \cdot 10^{-3}$	$8 \cdot 10^{-7}$	99,95	0,05

Перейдем к рассмотрению генерации волны Стонели источником, действующим на границе раздела твердое тело – жидкость. Пусть плотность жидкости $\rho_1 = 1000$ кг/м³ и скорость звука в ней $c_1 = 1470$ м/с. Вновь полагая $c_l = \sqrt{3}c_t$ проведем расчеты для двух значений плотности твердого тела: $\rho_2 = 2000$ кг/м³ (табл. 4.4) и $\rho_2 = 2500$ кг/м³ (табл. 4.5). В указанных таблицах показана также полная приведенная мощность излучения $\widetilde{W}_{\text{tot}}$.

Таблица 4.4

c_t , м/с	$\widetilde{W}_{\text{tot}}$	\widetilde{W}_S	\widetilde{W}_{S1}	\widetilde{W}_{S2}	η_1 , %	η_2 , %
1600	5,9607	4,5444	1,9173	2,6271	42,2	57,8
2000	5,8952	2,4863	1,9068	0,5795	76,7	23,3
2500	5,8239	0,8542	0,8073	0,0469	94,5	5,5
3000	5,7612	0,3707	0,3640	0,0067	98,2	1,8

Таблица 4.5

c_t , м/с	$\widetilde{W}_{\text{tot}}$	\widetilde{W}_S	\widetilde{W}_{S1}	\widetilde{W}_{S2}	η_1 , %	η_2 , %
1600	5,7491	4,2196	1,7497	2,4699	41,5	58,5
2000	5,6941	1,9381	1,5721	0,3660	81,1	18,9
2500	5,6343	0,5742	0,5528	0,0214	96,3	3,7
3000	5,5830	0,2411	0,2383	0,0028	98,8	1,2

Как следует из данных таблиц 4.4, 4.5 при выполнении условия $c_R \gtrsim c_1$ (значению $c_t = 1600$ м/с соответствует скорость рэлеевской волны $c_R \approx 1471,04$ м/с) большая часть мощности волны Стонели, как и в случае границы упругой среды с газом, излучается в твердое тело. С ростом скоростей упругих волн в твердом теле приведенная мощность волны Стонели падает, и всё большая её часть излучается в жидкость. То же происходит и при увеличении плотности упругой среды. Сравнение данных таблиц 4.4, 4.5 позволяет также отметить, что чем больше плотность твердого тела (при постоянной плотности жидкости), тем быстрее убывает доля мощности волны Стонели, излучаемая в твердое тело, с ростом скоростей упругих волн.

Результаты расчетов полной мощности излучения волны Стонели, а также её парциальных мощностей в твердом теле и в жидкости при $\rho_2 = 2500$ кг/м³ для случаев $n = 0,4$ и $n = 0,65$ приведены соответственно в таблицах 4.6 и 4.7. При данных параметрах сред также с ростом скоростей упругих волн всё большая часть мощности волны Стонели излучается в жидкость.

Таблица 4.6

c_t , м/с	$\widetilde{W}_{\text{tot}}$	\widetilde{W}_S	\widetilde{W}_{S1}	\widetilde{W}_{S2}	η_1 , %	η_2 , %
1600	13,2628	8,7677	4,0646	4,7031	46,36	53,64
1650	13,2488	8,0804	4,2684	3,8120	52,82	47,18
2000	13,1573	3,0573	2,6806	0,3767	87,68	12,32
2500	13,0431	0,8414	0,8225	0,0189	97,75	2,25
3000	12,9451	0,3547	0,3521	0,0026	99,28	0,72

Рассмотрим возбуждение волны Стонели на границе раздела вода–лёд. Для расчетов приближенно примем, что при температуре $t = 0^\circ\text{C}$ плотность воды

Таблица 4.7

c_t , м/с	$\widetilde{W}_{\text{tot}}$	\widetilde{W}_S	\widetilde{W}_{S1}	\widetilde{W}_{S2}	η_1 , %	η_2 , %
1650	4,8595	3,6276	1,5433	2,0843	42,54	57,46
2000	4,8175	2,0485	1,5421	0,5064	75,28	24,72
2500	4,7647	0,6493	0,6149	0,0344	94,71	5,29
3000	4,7190	0,2703	0,2658	0,0045	98,35	1,65

$\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$, а скорость звука в ней $c_1 = 1420,7 \text{ м/с}$. Плотность льда $\rho_2 = 917 \text{ кг/м}^3$, а скорости продольных и поперечных волн в нем равны соответственно $c_l = 3980 \text{ м/с}$ и $c_t = 1990 \text{ м/с}$ [Кошкин, Ширкевич, 1964] (при этом $n = 0,5$, $c_R \approx 1855,73 \text{ м/с}$, $c_S \approx 1269,67 \text{ м/с}$). Для данной пары веществ полная приведенная мощность излучения есть $\widetilde{W}_{\text{tot}} = 9,2058$. Приведенная мощность излучения волны Стонели составляет $\widetilde{W}_S = 5,5480$, а её парциальные мощности в воде и во льду равны соответственно $\widetilde{W}_{S1} = 3,8405$ и $\widetilde{W}_{S2} = 1,7075$. Таким образом волна Стонели уносит 60,27% всей излучаемой мощности, причем по воде передается 69,22%, а по льду — 30,78% мощности этой поверхностной волны. Парциальная мощность волны Стонели в воде составляет 41,72% всей излучаемой мощности.

Рассмотрим границу некоторых твердых веществ с водой и ртутью. Сравнение этих двух жидкостей удобно тем, что скорости звука в них близки (при температуре $t = 20^\circ \text{ C}$ в воде $c_1 \approx 1482,7 \text{ м/с}$, а в ртути $c_1 \approx 1450 \text{ м/с}$), а плотности сильно отличаются (плотность ртути $\rho_1 \approx 13550 \text{ кг/м}^3$) [Кошкин, Ширкевич, 1964].

В табл. 4.8 приведены взятые из справочника [Кошкин, Ширкевич, 1964] характеристики веществ и вычисленные скорости рэлееских волн на границах соответствующих твердых полупространств с вакуумом, а также скорости поверхностных волн Стонели на границах веществ с водой c_{S1} и с ртутью c_{S2} . Результаты расчетов относительных парциальных мощностей волны Стонели в двух граничащих средах, а также относительной суммарной мощности поверхностной волны приведены в табл. 4.9. Список твердых веществ в таблицах 4.8 и 4.9 отсортирован в порядке возрастания относительной парциальной мощности волны Стонели в жидкости. Для границ рассмотренных твердых веществ с водой и с ртутью эти порядки совпали (для других твердых тел они могут не совпадать).

Таблица 4.8

Вещество	Плотность, кг/м ³	c_l , м/с	c_t , м/с	$n = c_l/c_t$	c_R , м/с	c_{1S} , м/с	c_{2S} , м/с
Свинец	11350	3600	1590	0,441667	1493,34	1426,89	1118,63
Олово	7290	3320	1670	0,503012	1556,64	1431,81	1034,78
Слюда	3000	7760	2160	0,27835	2052,01	1468,97	1042,26
Фарфор	2400	5340	3120	0,58427	2863,82	1477,12	1130,04
Латунь	8600	4430	2123	0,47923	1985,33	1479,76	1255,86
Стекло кварцевое	2200	5570	3515	0,63106	3183,24	1478,15	1154,64
Цинк	7150	4170	2410	0,57794	2215,46	1480,16	1257,04
Титан	4505	6330	3110	0,49131	2903,69	1481,49	1319,79
Сталь	7800	6100	3300	0,54098	3056,91	1482,35	1401,11

Таблица 4.9

Вещество	Граница вода – вещество			Граница ртуть – вещество		
	Вода: $\eta_1, \%$	Вещество: $\eta_2, \%$	$W_S, \%$	Ртуть: $\eta_1, \%$	Вещество: $\eta_2, \%$	$W_S, \%$
Свинец	41,39	58,61	51,64	46,92	53,08	83,28
Олово	59,73	40,27	43,58	49,48	50,52	87,83
Слюда	95,66	4,34	9,48	58,51	41,49	86,13
Фарфор	98,90	1,10	4,17	67,27	32,74	79,68
Латунь	98,92	1,08	2,36	67,80	32,20	66,39
Стекло кварцевое	99,17	0,83	3,57	69,51	30,49	77,37
Цинк	99,28	0,72	1,96	71,10	28,90	65,43
Титан	99,76	0,24	0,98	81,32	18,68	52,34
Сталь	99,93	0,07	0,30	91,80	8,20	27,30

Из рассмотрения таблиц 4.8, 4.9 следует, что парциальная мощность волны Стонели в жидкости тем меньше, чем ближе скорость звука к скорости рэлеевской волны на границе твердой среды с вакуумом. Если скорость звука заметно меньше скорости рэлеевской волны, то большая доля мощности волны Стонели излучается в жидкость. С ростом плотности жидкости эта доля уменьшается.

В заключение рассмотрим нетипичную ситуацию — возбуждение волн на границе раздела ртуть – лёд. Для расчетов приближенно примем, что при $t = 0^\circ\text{C}$ плотность ртути $\rho_1 \approx 13595 \text{ кг/м}^3$, а скорость звука в ней $c_1 \approx 1456 \text{ м/с}$ [Кошкин, Ширкевич, 1964]. Отметим, что незначительные температурные изменения плотностей сред и скоростей упругих волн в них практически не влияют на перераспределение мощности излучения по типам волн. Для пары веществ ртуть – лёд полная приведенная мощность излучения составляет $\widetilde{W}_{\text{tot}} = 26,4902$. Приведенная мощность излучения волны Стонели равна $\widetilde{W}_S = 26,0663$. Таким образом, волна Стонели уносит 98,40% всей излучаемой мощности. При этом парциальные мощности излучения поверхностной волны в граничащих средах приблизительно одинаковы: 48,9% мощности передается по льду и 51,1% мощности — по ртути. Скорость волны Стонели на границе раздела ртуть – лёд оказывается весьма низкой: $c_S \approx 585,72 \text{ м/с}$, что почти в два с половиной раза меньше скорости звука в жидкости (другими словами, величина скорости волны Стонели составляет всего 40% от значения скорости звука в жидкости). Данный пример показывает, что возможно создание слоистых структур, в которых поверхностная волна Стонели возбуждается весьма эффективно и при этом имеет очень низкую скорость, что может быть использовано при разработке устройств твердотельной микроэлектроники.

Таким образом, в данном параграфе показано, что если газ (жидкость) граничит с высокоскоростным твердым телом (что обычно имеет место на практике), то большая часть мощности поверхностной волны Стонели излучается именно в газ (жидкость). На границе твердого тела с газом почти вся мощность волны Стонели сосредоточена в газе, однако сама мощность волны Стонели составляет незначительную часть всей излучаемой мощности. На границе твердого тела с жидкостью большая часть мощности волны Стонели переносится жидкостью, и при этом мощность волны Стонели составляет значительную долю всей излучаемой мощности.

Данное обстоятельство необходимо учитывать, в частности, в гидроакустике, где вклад волны Стонели в общую мощность излучения, создаваемого донным источником, может быть существенным.

4.3. Поля и энергетические характеристики излучения сейсмоакустических волн, возбуждаемых подповерхностными точечными гармоническими источниками

В данном разделе рассмотрено возбуждение сейсмоакустических волн гармоническими источниками, действующими вблизи границы раздела двух однородных полупространств. Проанализировано распределение мощности излучения по различным типам сейсмических волн в случае, когда точечный силовой источник действует внутри упругого полупространства со свободной границей. Исследовано возбуждение акустической, вытекающей и поверхностной волн силовым источником, находящимся внутри упругого полупространства, граничащего с газом.

4.3.1. Распределение мощности излучения по типам упругих волн, возбуждаемых в твердом полупространстве подповерхностным гармоническим силовым источником

Очевидно, что находящиеся на поверхности твердого тела и расположенные на некоторой глубине под ней сейсмические источники будут значительно отличаться по характеристикам создаваемого ими излучения. Главным образом, это касается возбуждения поверхностных волн Рэлея.

Энергетические характеристики упругих волн, возбуждаемых в однородном твердом полупространстве гармоническими поверхностными осесимметричными силовыми источниками, изучены в настоящее время достаточно полно [Miller, Pursey, 1955; Гуцин, Докучаев и др., 1981; Гуцин и др., 1981]. В качестве подповерхностного источника обычно рассматривается центр расширения (центр давления). Распределение мощности излучения по типам упругих волн в твердом полупространстве для гармонического центра расширения рассмотрено в [Авербах, Заславский, 1998]. В работе [Максимов, 1996] вычислены энергии излучения продольных, поперечных и рэлеевских волн для импульсного монополюсного источника в полуограниченной упругой среде. Случай точечного импульсного источника, обладающего произвольной диаграммой направленности исследован в статье [Максимов и др., 2003]. Гармонические силовые источники, действующие в упругом полупространстве, ранее не рассматривались.

В этом параграфе решена задача о возбуждении упругих волн точечным гармоническим силовым источником, расположенным в однородном изотропном твердом полупространстве и действующим вдоль нормали к его поверхности. Без применения каких-либо приближений методом реакции излучения получены выражения для средних за период волны мощностей излучения продольной, поперечной и поверхностной рэлеевской волн. Проанализированы особенности распределения

мощности излучения по различным типам волн в зависимости от глубины расположения источника и соотношения между скоростями продольной и поперечной волн [Разин, 2009].

Итак, пусть плоскость $z = 0$ цилиндрической системы координат r, φ, z совпадает с поверхностью однородного изотропного твердого тела, занимающего полупространство $z > 0$ и характеризуемого плотностью ρ_2 и скоростями продольной c_l и поперечной c_t волн. На глубине $z = h$ под началом координат действует точечная гармоническая сила циклической частоты ω_0 , направленная вдоль оси z .

Нас будут интересовать мощности излучения продольных, поперечных и рэлеевских волн. Для гармонического осесимметричного источника среднее за период волны значение полной излучаемой мощности дается следующим выражением, получаемым из общей формулы (3.1.61):

$$W = \frac{f_0^2}{8\pi\rho\omega} \operatorname{Re} \int_0^\infty \left\{ (k^2 + \kappa_l \kappa_t) R_0(k) - 8k^2 \kappa_l \kappa_t (2k^2 - k_t^2) e^{i(\kappa_l + \kappa_t)h} + \right. \\ \left. + \left[(2k^2 - k_t^2)^2 - 4k^2 \kappa_l \kappa_t \right] \left(\kappa_l \kappa_t e^{2i\kappa_l h} - k^2 e^{2i\kappa_t h} \right) \right\} \frac{k dk}{\kappa_t R_0(k)}. \quad (4.3.1)$$

Вклад в реальную часть интеграла (4.3.1) дают те участки пути интегрирования, где подынтегральная функция действительна, а также полувычет в лежащем на действительной оси полюсе подынтегрального выражения. Этот полюс определяется из решения уравнения $R_0(k) = 0$ и соответствует поверхностной волне Рэлея.

Нетрудно видеть, что при $k > k_t$ подынтегральная функция в (4.3.1) чисто мнимая, причем в этой области лежит рэлеевский полюс $k = k_R$. Интегрирование в (4.3.1) от $k = 0$ до $k = k_t$ дает суммарную мощность излучения продольной и поперечной волн. Мощность поверхностной волны Рэлея W_R пропорциональна полувычету в полюсе $k = k_R$ и описывается формулой (3.1.102).

Перейдем к вычислению мощности излучения объемных волн. Поскольку $k_l < k_t$, то, очевидно, интегрирование в (4.3.1) по k от k_l до k_t не может описывать мощность излучения продольной волны. Интегрирование по данному интервалу дает часть мощности излучения поперечной волны. Выделяя в интеграле (4.3.1) реальную часть для интервала $k_l < k < k_t$, имеем:

$$W_t^{(2)} = \frac{f_0^2}{4\pi\rho_2\omega_0} \int_{k_l}^{k_t} \frac{k^3}{\kappa_t |R_0(k)|^2} \left\{ (2k^2 - k_t^2)^4 \sin^2 \kappa_t h + 16k^4 q_l^2 \kappa_t^2 \cos^2 \kappa_t h + \right. \\ \left. + 4q_l \kappa_t (2k^2 - k_t^2)^2 (q_l \kappa_t e^{-2q_l h} - k^2 \sin 2\kappa_t h) + \right. \\ \left. + 4q_l \kappa_t (2k^2 - k_t^2)^2 e^{-q_l h} \left[(2k^2 - k_t^2)^2 \sin \kappa_l h - 4k^2 q_l \kappa_t \cos \kappa_t h \right] \right\} dk. \quad (4.3.2)$$

В (4.3.2)

$$|R_0(k)|^2 = (2k^2 - k_t^2)^4 + 16k^4 q_l^2 \kappa_t^2.$$

Аналогичный (4.3.2) вид должно иметь выражение для мощности излучения поперечной волны на участке интегрирования $0 < k < k_l$. Выделяя в (4.3.1) конструкцию, соответствующую (4.3.2), получаем:

$$W_t^{(1)} = \frac{f_0^2}{4\pi\rho_2\omega_0} \int_0^{k_l} \frac{k^3}{\kappa_t R_0^2(k)} \left\{ (2k^2 - k_t^2)^4 \sin^2 \kappa_t h + 16k^4 \kappa_l^2 \kappa_t^2 \cos^2 \kappa_t h + \right. \\ \left. + 4(2k^2 - k_t^2)^2 \kappa_l^2 \kappa_t^2 + 4(2k^2 - k_t^2)^3 \kappa_l \kappa_t \sin \kappa_l h \sin \kappa_t h - \right. \\ \left. - 16(2k^2 - k_t^2) k^2 \kappa_l^2 \kappa_t^2 \cos \kappa_l h \cos \kappa_t h \right\} dk. \quad (4.3.3)$$

Оставшаяся часть мощности на участке интегрирования $0 < k < k_l$ относится к продольной волне:

$$W_l = \frac{f_0}{4\pi\rho_2\omega_0} \int_0^{k_l} \frac{k\kappa_l}{R_0^2(k)} \left\{ (2k^2 - k_t^2)^4 \cos^2 \kappa_l h + 16k^4 \kappa_l^2 \kappa_t^2 \sin^2 \kappa_l h + 4(2k^2 - k_t^2)^2 k^4 + \right. \\ \left. + 4(k_t^2 - 2k^2) k^2 \left[(2k^2 - k_t^2)^2 \cos \kappa_l h \cos \kappa_t h - 4k^2 \kappa_l \kappa_t \sin \kappa_l h \sin \kappa_t h \right] \right\} dk. \quad (4.3.4)$$

Выражения (4.3.4), (4.3.3) и (4.3.2) для мощностей излучения продольной и поперечной волн получены без использования каких-либо приближений [Раэвин, 2009]. Эти же выражения можно получить путем вычисления потока мощности через поверхность полусферы большого по сравнению с длиной волны радиуса, содержащей источник внутри себя. Для этого необходимо предварительно получить приближенные выражения для смещений в волновой зоне из общих формул (3.1.81), (3.1.82). Эти выражения позволяют вычислить плотности потоков мощности излучения в продольных и поперечных волнах. Мощности излучения W_l и W_t даются интегралами от плотностей потоков мощности по углу θ в пределах от $\theta = 0$ до $\theta = \pi/2$. Для поперечной волны указанный интервал интегрирования разбивается на две части точкой $\theta_0 = \arcsin c_t/c_l$, так что $W_t = W_t^{(1)} + W_t^{(2)}$.

Заменой переменной интегрирования $k = k_l \sin \theta$ выражение для W_l переводится в (4.3.4). Заменой $k = k_t \sin \theta$ выражения для $W_t^{(1)}$ и $W_t^{(2)}$ переводятся соответственно в (4.3.3), (4.3.2). Таким образом, формула (4.3.3) описывает мощность излучения поперечной волны в области пространства $0 < \theta < \theta_0$, а формула (4.3.2) — в области $\theta_0 < \theta < \pi/2$.

При нулевой глубине источника, $h \rightarrow 0$, формулы (4.3.2)–(4.3.4) переходят в известные [Miller, Pursey, 1955] выражения.

Перейдем к количественным оценкам. При проведении численных расчетов представим выражения для мощностей излучения волн различных типов в виде [Miller, Pursey, 1955]

$$W_i = \frac{f_0^2 \omega_0^2}{4\pi\rho_2 c_l^3} \widetilde{W}_i,$$

где \widetilde{W}_i — безразмерные численные коэффициенты (индекс « i » принимает значения l, t, R и обозначает тип волны). Зависимости численных коэффициентов \widetilde{W}_i ,

\widetilde{W}_t , \widetilde{W}_R и

$$\widetilde{W}_{\text{tot}} = \widetilde{W}_l + \widetilde{W}_t + \widetilde{W}_R,$$

относящихся соответственно к продольной, поперечной, рэлеевской волнам и к полной излучаемой мощности, от приведенной глубины источника $\tilde{h} = h/\lambda_t$ (λ_t — длина поперечной волны) представлены на рис. 4.5. Расчеты выполнены для случая $n = c_t/c_l = 1/\sqrt{3}$ (при этом в твердой среде равны параметры Ламэ λ и μ). Для поверхностного источника имеем

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_l(0) &= 0,333; & \widetilde{W}_t(0) &= 1,2455; \\ \widetilde{W}_R(0) &= 3,2578, & \widetilde{W}_{\text{tot}}(0) &= 4,8363, \end{aligned}$$

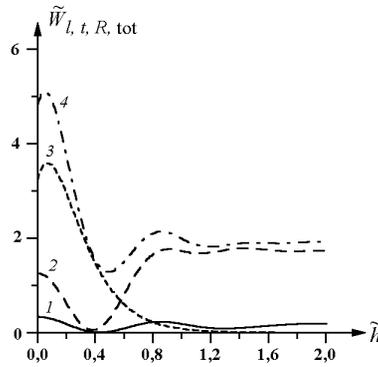


Рис. 4.5. Зависимости мощностей излучения продольной (1), поперечной (2), рэлеевской (3) волн и полной излучаемой мощности (4) от глубины расположения источника при $n = c_t/c_l = 1/\sqrt{3}$

что совпадает с известными результатами [Miller, Pursey, 1955]. При этом на долю волны Рэля приходится $\eta_R \approx 67,4\%$ всей излучаемой мощности, а на доли продольной и поперечной волн — соответственно $\eta_l \approx 6,9\%$ и $\eta_t \approx 25,7\%$. Зависимости мощностей излучения упругих волн от глубины расположения источника являются немонотонными. Мощность излучения волны Рэля при удалении источника от поверхности нарастает, достигает максимума, а затем экспоненциально убывает, что определяется видом функции $\zeta_R(h)$ (см. (3.1.102), (3.1.96), (3.1.104)). Мощности излучения продольной и поперечной волн сначала уменьшаются с ростом глубины источника и достигают минимумов на глубинах, равных приблизительно половине длины поперечной волны. Затем после нескольких осцилляций их значения приближаются к численным величинам

$$\widetilde{W}_l^* = \frac{1}{6}, \quad \widetilde{W}_t^* = \frac{c_l^3}{3c_t^3},$$

соответствующим формулам

$$W_l^* = \frac{f_0^2 \omega_0^2}{24\pi \rho_2 c_l^3}, \quad W_t^* = \frac{f_0^2 \omega_0^2}{12\pi \rho_2 c_t^3}$$

для мощности излучения продольных и поперечных волн в безграничной упругой среде. При этом величина \widetilde{W}_l в полупространстве осциллирует вблизи уровня, который чуть ниже, чем значение \widetilde{W}_l^* в безграничной среде. Величина \widetilde{W}_t при $h \gg \lambda_t$ всегда превышает \widetilde{W}_t^* .

Отметим, что для данной модели источника численное значение мощности излучения продольной волны, возбуждаемой поверхностным источником в упругом полупространстве, всегда больше значения мощности излучения в безграничной среде. Для поперечной волны имеет место обратное соотношение.

Аналогичный вид имеют зависимости приведенных мощностей излучения \widetilde{W}_l , \widetilde{W}_t и \widetilde{W}_R при других значениях отношения скоростей продольных и поперечных волн (рис. 4.6, 4.7). При этом графики $\widetilde{W}_l(\tilde{h})$ имеют довольно сложный осцилляционный характер (рис. 4.8). Значения величин \widetilde{W}_l , \widetilde{W}_R и полной приведенной мощности $\widetilde{W}_{\text{tot}}$ всюду возрастают при уменьшении параметра n (рис. 4.9–4.11).

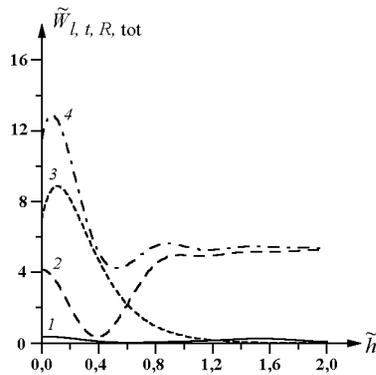


Рис. 4.6. Зависимости мощностей излучения продольной (1), поперечной (2), рэлеевской (3) волн и полной излучаемой мощности (4) от глубины расположения источника при $n = c_t/c_l = 0,4$

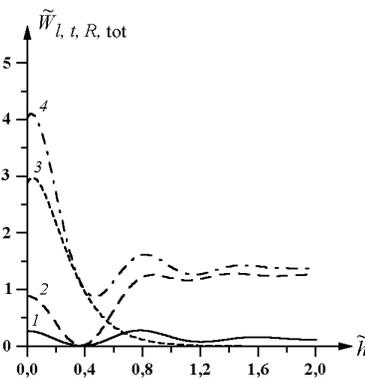


Рис. 4.7. Зависимости мощностей излучения продольной (1), поперечной (2), рэлеевской (3) волн и полной излучаемой мощности (4) от глубины расположения источника при $n = c_t/c_l = 0,65$

Как отмечалось выше (см. § 3.1.4), зависимость мощности излучения рэлеевской волны от глубины источника всегда имеет максимум (обозначим его $\widetilde{W}_R^{(\max)}$). Этот максимум соответствует приведенной глубине источника $\tilde{h}_{\max} \approx 0,125$ для сред, у которых между параметрами Ламэ имеет место соотношение $\lambda \gg \mu$ (это характерно для некоторых видов резины), и глубине $\tilde{h}_{\max} \approx 0,01$, если $\lambda \ll \mu$ (см. кривую 3 на рис. 3.1). Зависимость относительной высоты этого максимума, т. е. отношения $\widetilde{W}_R^{(\max)}/\widetilde{W}_R(0)$, от параметра $n = c_t/c_l$ приведена на рис. 3.3 (см. кривую 1). В случае $\lambda \gg \mu$ значение $\widetilde{W}_R^{(\max)}$ превышает величину $\widetilde{W}_R(0)$ приблизительно на 40%. Если же $\lambda \ll \mu$, то относительная высота максимума составляет несколько процентов. Для большинства твердых тел параметры Ламэ имеют одинаковый порядок величины, и значение величины n лежит приблизительно в пределах от 0,4 до 0,6. Из рассмотрения кривой 1 на рис. 3.3 следует, что при этом превышение $W_R^{(\max)}$ над $W_R(0)$ составляет около 10–25%. Данное обстоятельство следует учитывать, в частности, при разработке устройств для сейсмического зондирования грунта и

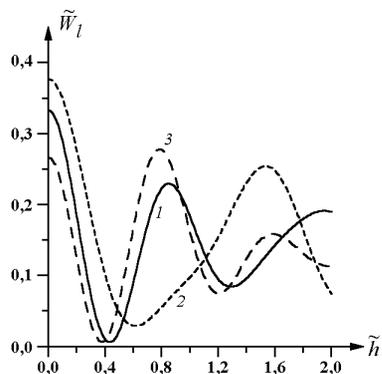


Рис. 4.8. Зависимости мощностей излучения продольной волны от глубины расположения источника при различных значениях параметра $n = c_t/c_l$. 1 — $n = 1/\sqrt{3}$; 2 — $n = 0,4$; 3 — $n = 0,65$

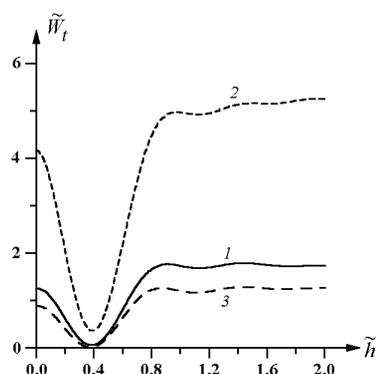


Рис. 4.9. Зависимости мощностей излучения поперечной волны от глубины расположения источника при различных значениях параметра $n = c_t/c_l$. 1 — $n = 1/\sqrt{3}$; 2 — $n = 0,4$; 3 — $n = 0,65$

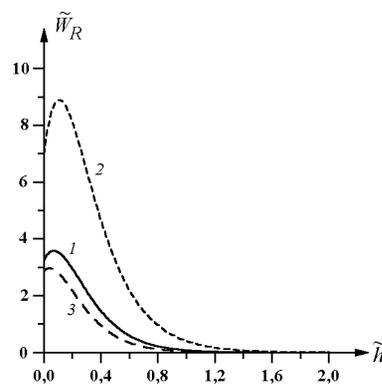


Рис. 4.10. Зависимости мощностей излучения поверхностной волны Рэлея от глубины расположения источника при различных значениях параметра $n = c_t/c_l$. 1 — $n = 1/\sqrt{3}$; 2 — $n = 0,4$; 3 — $n = 0,65$

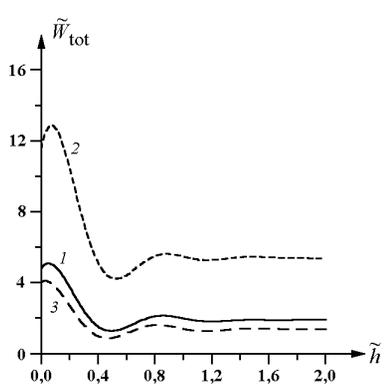


Рис. 4.11. Зависимости полной излучаемой мощности от глубины расположения источника при различных значениях параметра $n = c_t/c_l$. 1 — $n = 1/\sqrt{3}$; 2 — $n = 0,4$; 3 — $n = 0,65$

неразрушающего контроля материалов, когда необходимо излучить максимальную мощность в рэлеевскую волну.

Другой важной особенностью распределения мощности излучения по типам волн является то, что при некоторой глубине источника (обозначим её \tilde{h}^*) из-за немонотонности зависимостей $\widetilde{W}_l(\tilde{h})$, $\widetilde{W}_t(\tilde{h})$ и $\widetilde{W}_R(\tilde{h})$ в рэлеевскую волну уходит более 90% всей излучаемой мощности (см. табл. 4.10). Из данных таблицы следует, что приведенная глубина источника, соответствующая максимальной доле мощности излучения волны Рэля, составляет $\tilde{h}^* \lesssim 0,4$. Отметим также, что доля мощности излучения рэлеевской волны возрастает с увеличением отношения $n = c_t/c_l$. Абсолютное значение приведенной мощности $\widetilde{W}_R(\tilde{h}^*)$ меньше, чем для поверхностного источника, причем отношение $\widetilde{W}_R(\tilde{h}^*)/\widetilde{W}_R(0)$ убывает с ростом параметра n .

Таблица 4.10

n	\tilde{h}^*	$\eta_l, \%$	$\eta_t, \%$	$\eta_R, \%$	$\frac{\widetilde{W}_R(\tilde{h}^*)}{\widetilde{W}_R(0)}$
0,4	0,382	2,1	6,6	91,3	0,71
0,5	0,388	1,6	5,4	93	0,58
$1/\sqrt{3}$	0,386	0,9	3,4	95,7	0,48
0,65	0,373	0,6	1,4	98	0,38

Таким образом, в данном параграфе без применения каких-либо приближений получены выражения для средних за период волны мощностей излучения продольной и поперечной сферических волн и поверхностной волны Рэля, возбуждаемых в полупространстве силовым гармоническим источником. На основе численных расчетов исследовано распределение мощности излучения по типам сейсмических волн при различных значениях отношения скоростей поперечной и продольной волн.

4.3.2. Возбуждение акустической волны в атмосфере сейсмическим источником

Возбуждение сейсмоакустических волн при действии на границу раздела газ–твердое тело перпендикулярной к ней гармонической силы рассмотрено в разделе 4.2. Вычислены мощности излучения поверхностной волны Стонели, продольной и поперечной сферических волн, а также исследованы особенности возбуждения акустической и вытекающей волн.

Данный параграф обобщает результаты раздела 4.2 на случай источника, находящегося внутри упругого полупространства на некоторой глубине под его границей с газом. Сила действует в направлении нормали к поверхности раздела двух сред. Получены выражения для средних за период мощностей излучения сферических продольной и поперечной упругих волн, а также поверхностной волны Стонели. Вычислена суммарная мощность излучения акустической волны в газе и вытекающей псевдорэлеевской волны. Исследованы особенности вариаций мощностей излучения волн различных типов и изменение эффективности переизлучения вы-

текающей волны в акустическую волну в атмосфере в зависимости от глубины источника.

Задача о возбуждении волн силовыми источниками, находящимися внутри упругого полупространства, покрытого жидким слоем, который граничит с газом (модель подводного землетрясения), рассматривалась в [Вдовиченко, Заславский, 1985]. В указанной работе, однако, при анализе акустического излучения в газе не принималась во внимание сложная система поверхностных и вытекающих волн, существующая в такой слоистой среде, что затрудняет использование результатов [Вдовиченко, Заславский, 1985] для практических оценок.

Пусть плоскость $z = 0$ цилиндрической системы координат r, φ, z совпадает с границей раздела однородного газа, имеющего плотность ρ_1 и скорость звука c_1 и заполняющего полупространство $z < 0$, и однородного изотропного твердого тела, занимающего полупространство $z > 0$ и характеризуемого плотностью ρ_2 и скоростями продольной и поперечной волн соответственно c_ℓ и c_t . В упругой среде на глубине $z = h$ действует точечная гармоническая сила циклической частоты ω_0 , направленная вдоль оси z .

В газе введем скалярный потенциал смещений ψ_1 . В твердом теле в области $0 \leq z \leq h$ введем скалярный $\psi_2^{(+)}$ и векторный $\vec{A}_2^{(+)}$ потенциалы, соответствующие волнам, распространяющимся в положительном направлении оси z . Волны, распространяющиеся против оси z , будем описывать потенциалами $\psi_2^{(-)}$ и $\vec{A}_2^{(-)}$. При $z \geq h$ смещения определяются потенциалами ψ_3 и \vec{A}_3 . С учетом цилиндрической симметрии задачи векторные потенциалы запишем в виде $\vec{A}_2^{(+),(-)} = A_2^{(+),(-)} \vec{e}_\varphi$, $\vec{A}_3 = A_3 \vec{e}_\varphi$, где \vec{e}_φ — орт оси φ . Смещения частиц \vec{u}_1 и звуковое давление p в газе связаны с потенциалом ψ_1 соотношениями (3.1.15). В твердой среде выполняются равенства (3.1.16). Пользуясь результатами § 3.1.1 и учитывая цилиндрическую симметрию задачи, представим потенциалы в виде (временной фактор $\exp(-i\omega_0 t)$ опущен) [Разин, 2006]:

$$\psi_1 = \int_0^\infty R_s(k) e^{-i\kappa_1 z} J_0(kr) k dk, \quad (4.3.5)$$

$$\psi_2^{(+)} = \int_0^\infty \tilde{\psi}_2^{(+)}(k) e^{i\kappa_1 z} J_0(kr) k dk, \quad (4.3.6)$$

$$\psi_2^{(-)} = \int_0^\infty \tilde{\psi}_2^{(-)}(k) e^{-i\kappa_1(z-h)} J_0(kr) k dk, \quad (4.3.7)$$

$$A_2^{(+)} = \int_0^\infty \tilde{A}_2^{(+)}(k) e^{i\kappa_t z} J_1(kr) k dk, \quad (4.3.8)$$

$$A_2^{(-)} = \int_0^\infty \tilde{A}_2^{(-)}(k) e^{-i\kappa_t(z-h)} J_1(kr) k dk, \quad (4.3.9)$$

$$\psi_3 = \int_0^{\infty} T_l(k) e^{i\kappa_l(z-h)} J_0(kr) k dk, \quad (4.3.10)$$

$$A_3 = \int_0^{\infty} T_t(k) e^{i\kappa_t(z-h)} J_1(kr) k dk, \quad (4.3.11)$$

где

$$R_s(k) = \frac{f_0 \kappa_l [(2k^2 - k_t^2) e^{i\kappa_l h} - 2k^2 e^{i\kappa_t h}]}{2\pi \rho_2 c_t^2 \kappa_1 S_0(k)}, \quad (4.3.12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_2^{(+)}(k) &= \frac{f_0}{4\pi \rho_2 \omega_0^2 S_0(k)} \left\{ \left[\frac{(2k^2 - k_t^2)^2 - 4k^2 \kappa_l \kappa_t - \varepsilon k_t^4 \kappa_l}{\kappa_1} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times e^{i\kappa_l h} - 4k^2 (2k^2 - k_t^2) e^{i\kappa_t h} \right\}, \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

$$\tilde{\psi}_2^{(-)} = -\frac{f_0}{4\pi \rho_2 \omega_0^2}, \quad (4.3.14)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_2^{(+)}(k) &= -\frac{ik f_0}{4\pi \rho_2 \omega_0^2 \kappa_t S_0(k)} \left\{ \left[(2k^2 - k_t^2)^2 - 4k^2 \kappa_l \kappa_t + \varepsilon k_t^4 \frac{\kappa_l}{\kappa_1} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times e^{i\kappa_t h} + 4\kappa_l \kappa_t (2k^2 - k_t^2) e^{i\kappa_l h} \right\}, \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

$$\tilde{A}_2^{(-)}(k) = \frac{ik f_0}{4\pi \rho_2 \omega_0^2 \kappa_t}, \quad (4.3.16)$$

$$T_l(k) = \frac{f_0}{4\pi \rho_2 \omega_0^2} + \tilde{\psi}_2^{(+)}(k) e^{i\kappa_l h}, \quad (4.3.17)$$

$$T_t(k) = \frac{ik f_0}{4\pi \rho_2 \omega_0^2 \kappa_t} + \tilde{A}_2^{(+)}(k) e^{i\kappa_t h}. \quad (4.3.18)$$

Здесь k — горизонтальное волновое число, $J_0(kr)$ и $J_1(kr)$ — функции Бесселя соответственно нулевого и первого порядков.

В дальнейшем нас будут интересовать мощности излучения волн различных типов. В рассматриваемой системе газ–твердое тело это сферическая акустическая волна в газе, сферические продольные и поперечные волны в упругом полупространстве и поверхностная и вытекающая волны на границе раздела сред.

Из формулы (3.1.62) следует, что для гармонического осесимметричного источника среднее за период волны значение полной излучаемой мощности дается выражением:

$$W = \frac{f_0^2}{8\pi \rho_2 \omega_0} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \left\{ (\kappa_l \kappa_t + k^2) S_0(k) - 8k^2 \kappa_l \kappa_t (2k^2 - k_t^2) e^{i(\kappa_l + \kappa_t)h} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & +\kappa_l\kappa_t \left[(2k^2 - k_t^2)^2 - 4k^2\kappa_l\kappa_t - \varepsilon k_t^4 \frac{\kappa_l}{\kappa_1} \right] e^{2i\kappa_l h} - \\
 & - k^2 \left[(2k^2 - k_t^2)^2 - 4k^2\kappa_l\kappa_t + \varepsilon k_t^4 \frac{\kappa_l}{\kappa_1} \right] e^{2i\kappa_t h} \left. \vphantom{\left[(2k^2 - k_t^2)^2 - 4k^2\kappa_l\kappa_t - \varepsilon k_t^4 \frac{\kappa_l}{\kappa_1} \right]} \right\} \frac{k dk}{\kappa_t S_0(k)}. \quad (4.3.19)
 \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при $k > k_1$ подынтегральная функция в (4.3.19) чисто мнимая, причем в этой области лежит полюс $k = k_S \gtrsim k_1$. Интегрирование в пределах от нуля до $k = k_1$ в (4.3.19) дает суммарную мощность излучения сферической акустической волны в газе, сферических продольной и поперечной упругих волн и вытекающей волны. Мощность излучения поверхностной волны Стонели W_S пропорциональна полувычету в полюсе $k = k_S$ и описывается формулами (3.1.69), (3.1.71), (3.1.72).

Выделяя в интеграле (4.3.19) реальную часть для интервала $k_t < k < k_1$ имеем:

$$W_1^{(3)} = \frac{\varepsilon f_0^2 \omega_0^3}{4\pi \rho_2 c_t^4} \int_{k_t}^{k_1} \frac{(k^2 - k_t^2) [(2k^2 - k_t^2) e^{-q_l h} - 2k^2 e^{-q_t h}]^2 k dk}{\sqrt{k_1^2 - k^2} |S_0(k)|^2}, \quad (4.3.20)$$

где $q_{l,t} = \sqrt{k^2 - k_{l,t}^2}$. Из результатов § 4.2.2 следует, что выражение (4.3.20) описывает как некоторую часть мощности акустической волны (данная мощность излучается в диапазоне углов $\arcsin(c_1/c_t) < \theta_1 < \pi/2$, где $\theta_1 = \arccos|z|/R$), так и мощность излучения вытекающей псевдорэлеевской волны. В этой области углов не представляется возможным количественное разделение мощностей излучения акустической и вытекающей волн.

В предельном случае стремления плотности газа к нулю (4.3.19) переходит в выражение, описывающее суммарную мощность излучения продольной, поперечной и рэлеевской волн. При этом мощность излучения волны Рэлея определяется полувычетом в полюсе $k = k_R$ (данный полюс лежит в области $k > k_t$) и описывается формулами (3.1.102)–(3.1.104), (3.1.96).

Из общего выражения (4.3.19) с помощью процедуры, использованной в параграфе § 4.2.2 для случая поверхностного источника, можно получить формулы для мощностей излучения всех типов волн. Однако для подповерхностного источника данная процедура связана с громоздкими выкладками. Поэтому мощности излучения продольной и поперечной сферических волн в твердом теле, а также акустической волны в газе в области $0 < \theta_1 < \arcsin(c_1/c_t)$ целесообразно вычислять путем подсчета потока энергии через поверхность сферы большого по сравнению с длиной волны радиуса, содержащей источник внутри себя. Для этого необходимо предварительно получить приближенные выражения для полей в волновой зоне.

В интегралах (4.3.5), (4.3.10) и (4.3.11) заменим функции Бесселя $J_0(kr)$ и $J_1(kr)$ соответственно на функции Ханкеля $H_0^{(1)}(kr)$ и $H_1^{(1)}(kr)$, причем для последних воспользуемся асимптотиками при больших значениях аргумента [Аки, Ричардс, Т. 1, 1983; Бреховских, 1973; Бреховских, Годин, 1989]. Переходя под интегралами к сферической системе координат $R = (r^2 + z^2)^{1/2}$, $\theta = \arccos(z/R)$ и применяя

метод перевала получим выражения для потенциалов смещений в волновой зоне:

$$\begin{aligned} \psi_1 \approx & \frac{if_0 \sqrt{k_l^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1}}{2\pi \rho_2 c_l^2 S_0(k_1 \sin \theta_1)} \frac{e^{ik_1 R}}{R} \times \\ & \times \left[(k_t^2 - 2k_1^2 \sin^2 \theta_1) e^{i\sqrt{k_l^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1} h} + 2k_1^2 \sin^2 \theta_1 e^{i\sqrt{k_t^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_1} h} \right], \end{aligned} \quad (4.3.21)$$

$$\begin{aligned} \psi_3 \approx & -\frac{if_0 k_l \cos \theta}{4\pi \rho_2 \omega_0^2} \frac{e^{ik_l R}}{R} \left\{ e^{-ik_l h \cos \theta} + S_0^{-1}(k_l \sin \theta) \times \right. \\ & \times \left. \left\{ \left[(2k^2 - k_t^2)^2 - 4k^2 \kappa_l \kappa_t - \varepsilon k_t^4 \frac{\kappa_l}{\kappa_1} \right] e^{i\kappa_l h} - 4k^2 (2k^2 - k_t^2) e^{i\kappa_t h} \right\} \Big|_{k=k_l \sin \theta} \right\}, \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

$$\begin{aligned} A_3 \approx & -\frac{if_0 \sin \theta}{4\pi \rho_2 c_t \omega_0} \frac{e^{ik_t R}}{R} \left\{ e^{-ik_t h \cos \theta} - S_0^{-1}(k_t \sin \theta) \times \right. \\ & \times \left. \left\{ \left[(2k^2 - k_t^2)^2 - 4k^2 \kappa_l \kappa_t + \varepsilon k_t^4 \frac{\kappa_l}{\kappa_1} \right] e^{i\kappa_t h} - 4\kappa_l \kappa_t (2k^2 - k_t^2) e^{i\kappa_l h} \right\} \Big|_{k=k_t \sin \theta} \right\}. \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

Рассмотрим сначала мощности излучения продольной и поперечной волн в твердой среде. Из (4.3.22), (4.3.23) соответственно следует, что в волновой зоне смещения в продольной волне имеют только радиальную R -компоненту, а вектор смещений в поперечной волне — лишь θ -компоненту. Потоки мощности излучения имеют в сферической системе координат только радиальные составляющие, интегрируя которые по полусфере большого радиуса получим формулы для мощностей излучения, соответствующих данному типу волны [Разин, 2006]:

$$\begin{aligned} W_l = & \frac{f_0^2 \omega_0^2}{4\pi \rho_2 c_l^3} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{S_l^2(\theta)} \left\{ (1 - 2n^2 \sin^2 \theta)^4 \cos^2(k_t h n \cos \theta) + \right. \\ & + \left(4n^3 \sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta} + \frac{\varepsilon n \cos \theta}{\sqrt{\nu^2 - n^2 \sin^2 \theta}} \right)^2 \sin^2(k_t h n \cos \theta) + \\ & + 4n^4 \sin^4 \theta (1 - 2n^2 \sin^2 \theta)^2 + 4n^2 (1 - 2n^2 \sin^2 \theta) \sin^2 \theta \times \\ & \times \left[(1 - 2n^2 \sin^2 \theta)^2 \cos(k_t h n \cos \theta) \cos(k_t h \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta}) - \right. \\ & - \left. \left(4n^3 \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta} \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{\varepsilon n \cos \theta}{\sqrt{\nu^2 - n^2 \sin^2 \theta}} \right) \times \right. \\ & \left. \left. \times \sin(k_t h n \cos \theta) \sin(k_t h \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta}) \right] \right\} d\theta, \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

$$W_t = W_t^{(1)} + W_t^{(2)}, \quad (4.3.25)$$

$$\begin{aligned}
 W_t^{(1)} = & \frac{f_0^2 \omega_0^2}{4\pi \rho_2 c_l^3} \frac{1}{n^3} \int_0^{\arcsin n} \frac{\sin^3 \theta}{S_t^{(1)^2}(\theta)} \times \\
 & \times \left\{ \left[(1 - 2 \sin^2 \theta)^2 + \varepsilon \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{\sqrt{\nu^2 - \sin^2 \theta}} \right]^2 \sin^2(k_t h \cos \theta) + \right. \\
 & + 16(n^2 - \sin^2 \theta) \sin^4 \theta \cos^2 \theta \cos^2(k_t h \cos \theta) + \\
 & + 4(1 - 2 \sin^2 \theta)^2 (n^2 - \sin^2 \theta) \cos^2 \theta - 4(1 - 2 \sin^2 \theta) \times \\
 & \times \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} \cos \theta \left[(1 - 2 \sin^2 \theta)^2 + \varepsilon \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{\sqrt{\nu^2 - \sin^2 \theta}} \right] \times \\
 & \times \sin(k_t h \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}) \sin(k_t h \cos \theta) + \\
 & + 16(1 - 2 \sin^2 \theta)(n^2 - \sin^2 \theta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \times \\
 & \left. \times \cos(k_t h \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}) \cos(k_t h \cos \theta) \right\} d\theta, \tag{4.3.26}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_t^{(2)} = & \frac{f_0^2 \omega_0^2}{4\pi \rho_2 c_l^3} \frac{1}{n^3} \int_{\arcsin n}^{\pi/2} \frac{\sin^3 \theta}{|S_t^{(2)}(\theta)|^2} \times \\
 & \times \left\{ \left[(1 - 2 \sin^2 \theta)^4 + \varepsilon^2 \frac{\sin^2 \theta - n^2}{\nu^2 - \sin^2 \theta} \right] \sin^2(k_t h \cos \theta) + \right. \\
 & + 16(\sin^2 \theta - n^2) \sin^4 \theta \cos^2 \theta \cos^2(k_t h \cos \theta) + 4(1 - 2 \sin^2 \theta)^2 \sqrt{\sin^2 \theta - n^2} \cos \theta \times \\
 & \times \left[\sqrt{\sin^2 \theta - n^2} \cos \theta e^{-2k_t h \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}} - \sin^2 \theta \sin(2k_t h \cos \theta) \right] - \\
 & - 4(1 - 2 \sin^2 \theta) \sqrt{\sin^2 \theta - n^2} \cos \theta e^{-k_t h \sqrt{\sin^2 \theta - n^2}} \times \\
 & \left. \times \left[(1 - 2 \sin^2 \theta)^2 \sin(k_t h \cos \theta) 4 \sqrt{\sin^2 \theta - n^2} \sin^2 \theta \cos \theta \cos(k_t h \cos \theta) \right] \right\} d\theta. \tag{4.3.27}
 \end{aligned}$$

В (4.3.24)–(4.3.27) введены обозначения:

$$\begin{aligned}
 S_l(\theta) &= (1 - 2n^2 \sin^2 \theta)^2 + 4n^3 \sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta} + \frac{\varepsilon n \cos \theta}{\sqrt{\nu^2 - n^2 \sin^2 \theta}}, \\
 S_t^{(1)}(\theta) &= (1 - 2 \sin^2 \theta)^2 + 4 \sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} + \frac{\varepsilon \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{\sqrt{\nu^2 - \sin^2 \theta}}, \\
 |S_t^{(2)}(\theta)|^2 &= (1 - 2 \sin^2 \theta)^4 + (\sin^2 \theta - n^2) \left(4 \sin^2 \theta \cos \theta + \frac{\varepsilon}{\sqrt{\nu^2 - \sin^2 \theta}} \right)^2,
 \end{aligned}$$

$$n = c_t/c_l, \quad \nu = c_t/c_1.$$

В случае поверхностного источника ($h \rightarrow 0$), действующего на границе твердого тела с вакуумом ($\varepsilon \rightarrow 0$), выражения (4.3.24)–(4.3.27) переходят в известные [Miller,

Pursey, 1955; Гуцин, Докучаев и др., 1981] формулы. Если $\varepsilon \rightarrow 0$ при конечной глубине источника, то (4.3.24)–(4.3.27) переходят соответственно в формулы (4.3.4), (4.3.3), (4.3.2).

Перейдем к вычислению мощности излучения акустической волны в газе. Вычисленная на основе выражения (4.3.21) для потенциала ψ_1 звуковая мощность в областях $0 < \theta_1 < \theta_l = \arcsin(c_1/c_l)$ и $\theta_l < \theta_1 < \theta_t = \arcsin(c_1/c_t)$ дается выражениями:

$$W_1^{(1)} = \frac{f_0^2 \omega_0^2}{4\pi \rho_2 c_l^3} \frac{\varepsilon n_t}{n^3} \int_0^{\theta_l} \frac{(n_l^2 - \sin^2 \theta_1)}{[S_1^{(1)}(\theta_1)]^2} (n_t^4 - 8n_t^2 \sin^2 \theta_1 \sin^2 \alpha) \sin \theta_1 d\theta_1, \quad (4.3.28)$$

$$\begin{aligned} W_1^{(2)} &= \frac{f_0^2 \omega_0^2}{4\pi \rho_2 c_l^2} \frac{\varepsilon n_t}{n^3} \int_{\theta_l}^{\theta_t} \frac{(\sin^2 \theta_1 - n_l^2)}{|S_1^{(2)}(\theta_1)|^2} \times \\ &\times \left\{ \left[(n_t^2 - 2 \sin^2 \theta_1) \exp\left(-k_1 h \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_l^2}\right) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. 2 \sin^2 \theta_1 \cos\left(k_1 h \sqrt{n_t^2 - \sin^2 \theta_1}\right) \right]^2 + \right. \\ &\left. + 4 \sin^4 \theta_1 \sin^2\left(k_1 h \sqrt{n_t^2 - \sin^2 \theta_1}\right) \right\} \sin \theta_1 d\theta_1. \quad (4.3.29) \end{aligned}$$

В (4.3.28), (4.3.29) введены обозначения:

$$\begin{aligned} S_1^{(1)}(\theta_1) &= (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta_1)^2 + 4 \sin^2 \theta_1 \sqrt{n_l^2 - \sin^2 \theta_1} \sqrt{n_t^2 - \sin^2 \theta_1} + \\ &+ \varepsilon n_t^4 \frac{1}{\cos \theta_1} \sqrt{n_l^2 - \sin^2 \theta_1}, \end{aligned}$$

$$|S_1^{(2)}(\theta_1)|^2 = (n_t^2 - 2 \sin^2 \theta_1)^4 + \left(4 \sin^2 \theta_1 \sqrt{n_l^2 - \sin^2 \theta_1} + \varepsilon n_t^4 \frac{1}{\cos \theta_1} \right)^2 (\sin^2 \theta_1 - n_l^2),$$

$$\alpha = \frac{1}{2n_t} \left(\sqrt{n_l^2 - \sin^2 \theta_1} - \sqrt{n_t^2 - \sin^2 \theta_1} \right) k_t h, \quad n_{l,t} = c_1/c_{l,t}.$$

В области пространства, соответствующей углам $\theta_t < \theta_1 < \pi/2$, определяемая потенциалом ψ_1 (4.3.21) мощность излучения представляет собой сумму мощностей вытекающей псевдорэлеевской волны и части мощности акустической волны:

$$\begin{aligned} W_1^{(3)} &= \frac{f_0^2 \omega_0^2}{4\pi \rho_2 c_l^3} \frac{\varepsilon n_t}{n^3} \int_{\theta_t}^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta_1 - n_l^2}{|S_1^{(3)}(\theta_1)|^2} \left[(n_t^2 - 2 \sin^2 \theta_1) \exp\left(-k_1 h \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_l^2}\right) + \right. \\ &+ \left. 2 \sin^2 \theta_1 \exp\left(-k_1 h \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_t^2}\right) \right]^2 \sin \theta_1 d\theta_1, \quad (4.3.30) \end{aligned}$$

где

$$\left| S_1^{(3)}(\theta_1) \right|^2 = \left[(2 \sin^2 \theta_1 - n_t^2)^2 - 4 \sin^2 \theta_1 \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_t^2} \sqrt{\sin^2 \theta_1 - n_l^2} \right]^2 + \varepsilon \frac{\sin^2 \theta_1 - n_l^2}{\cos^2 \theta_1}.$$

С помощью замены переменной $k = k_1 \sin \theta_1$ формула (4.3.30) переводится в (4.3.20).

Отметим, что в предельном случае стремления плотности газа к нулю мощность излучения акустической волны также должна стремиться к нулю. Подынтегральные выражения в (4.3.28) и (4.3.29) не имеют особенностей, поэтому $W_1^{(1)} \rightarrow 0$, $W_1^{(2)} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В подынтегральном выражении в (4.3.30) при $\varepsilon \rightarrow 0$ возникает особенность. Можно показать, что из формул (4.3.30), (4.3.20) при $\varepsilon \rightarrow 0$ получается выражение (3.1.102) для мощности излучения поверхностной волны Рэлея, однако проще устанавливать связь между соответствующими формулами анализируя исходное выражение (4.3.19) для полной мощности излучения.

Перейдем к количественным оценкам. При проведении численных расчетов удобно представить выражения для мощностей излучения волн различных типов в виде:

$$W_i = \frac{f_0^2 \omega_0^2}{4\pi \rho_2 c_l^3} \widetilde{W}_i,$$

где \widetilde{W}_i — безразмерные численные коэффициенты (индекс i принимает значения 1, l , t и т. д. и обозначает тип волны).

Пусть твердое тело граничит с газом (воздухом), плотность которого составляет $\rho_1 = 1,29$ кг/м³, и скорость звука в котором $c_1 = 340$ м/с. Если скорости упругих волн c_l и c_t значительно превышают скорость звука в газе c_1 , то мощность излучения поверхностной волны Стонели оказывается весьма малой (рис. 4.12). Эффективность излучения волны Стонели быстро нарастает с уменьшением плотности твердого тела, и, особенно, скоростей упругих волн в нем. Так, при уменьшении скорости поперечных волн в твердом теле с 2000–3000 м/с до 600–1000 м/с мощность излучения волны Стонели возрастает приблизительно на два порядка. Снижение мощности излучения волны Стонели при увеличении глубины расположения источника оказывается монотонным и тем более резким, чем сильнее отличаются акустические импедансы граничащих сред.

Если скорость поперечной волны в упругом полупространстве имеет одинаковый порядок величины со скоростью звука в газе (при этом мы требуем выполнения условия $c_R > c_1$, где c_R — соответствующая значениям c_l и c_t скорость рэлеевской волны на границе упругой среды с вакуумом), то мощность излучения волны Стонели сравнима с мощностями других типов волн (рис. 4.13). Зависимость $\widetilde{W}_S(\tilde{h})$ становится немонотонной: она имеет максимум при глубине источника $\tilde{h} \approx 0,07$.

Наличие над упругим полупространством разреженного газа практически не влияет на мощность излучения продольных и поперечных волн. Полная излучаемая мощность также меняется незначительно. Величины $\widetilde{W}_{l,t,tot}$ для свободной поверхности твердого тела отличаются от соответствующих величин $\widetilde{W}_{l,t,tot}$ для случая контакта упругой среды с газом на десятые или сотые доли процента (рис. 4.5, 4.14). При изменении параметров сред мощность волны Стонели увеличивается за

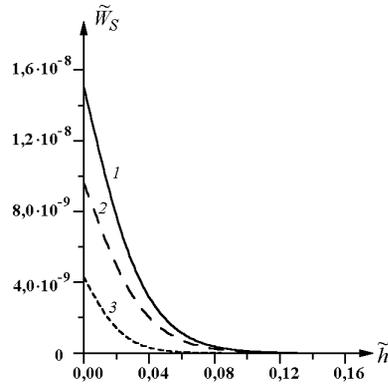


Рис. 4.12. Зависимость мощности излучения волны Стоунели от глубины расположения источника при $\rho_1 = 1,29 \text{ кг/м}^3$, $c_1 = 340 \text{ м/с}$, $c_l = \sqrt{3} c_t$: 1 — $c_t = 2000 \text{ м/с}$, $\rho_2 = 2000 \text{ кг/м}^3$; 2 — $c_t = 2000 \text{ м/с}$, $\rho_2 = 2500 \text{ кг/м}^3$; 3 — $c_t = 3000 \text{ м/с}$, $\rho_2 = 2000 \text{ кг/м}^3$

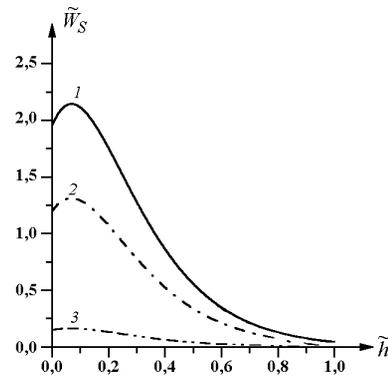


Рис. 4.13. Зависимость мощности излучения волны Стоунели от глубины расположения источника при $\rho_1 = 1,29 \text{ кг/м}^3$, $c_1 = 340 \text{ м/с}$, $\rho_2 = 2000 \text{ кг/м}^3$, $c_l = \sqrt{3} c_t$: 1 — $c_t = 370 \text{ м/с}$; 2 — $c_t = 370,5 \text{ м/с}$; 3 — $c_t = 372 \text{ м/с}$;

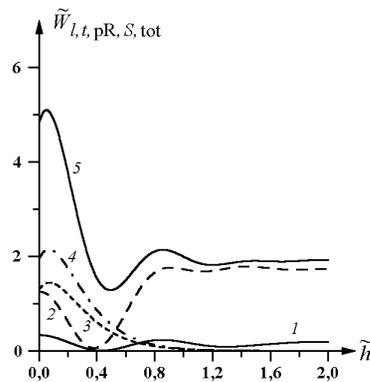


Рис. 4.14. Зависимость мощностей излучения продольной (1), поперечной (2), вытекающей (совместно с частью акустической) (3) волн, волны Стоунели (4) и полной излучаемой мощности (5) от глубины расположения источника при $c_1 = 340 \text{ м/с}$, $c_t = 370 \text{ м/с}$, $c_l = \sqrt{3} c_t$, $\rho_1 = 1,29 \text{ кг/м}^3$, $\rho_2 = 2000 \text{ кг/м}^3$

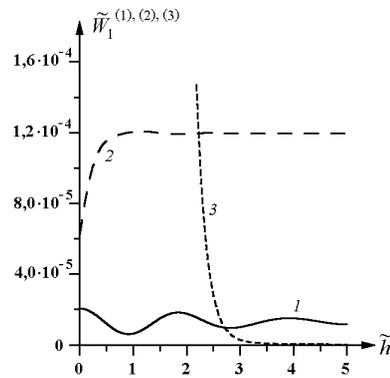


Рис. 4.15. Зависимость мощности излучения акустической волны в области I (1), области II (2), и суммарной мощности вытекающей и акустической волн в области III (3) от глубины расположения источника при $c_1 = 340 \text{ м/с}$, $c_t = 3000 \text{ м/с}$, $c_l = \sqrt{3} c_t$, $\rho_1 = 1,29 \text{ кг/м}^3$, $\rho_2 = 2000 \text{ кг/м}^3$

счет соответствующего уменьшения мощности вытекающей волны (рис. 4.14). При этом суммарная мощность поверхностной волны Стонели и вытекающей псевдорэлеевской волны (вместе с частью мощности акустической волны в интервале углов $\theta_t < \theta_1 < \pi/2$) с точностью до десятых долей процента равна мощности волны Рэлея на границе твердое тело – вакуум.

В случае $c_R \gtrsim c_1$ мощность волны Стонели может составлять значительную часть полной излучаемой мощности. Например, при $c_t = 370$ м/с, $c_l = \sqrt{3}c_t \approx 640,86$ м/с (тогда $c_R \approx 340,18$ м/с и $c_S \approx 339,53$ м/с) доля поверхностной волны Стонели в полной излучаемой мощности составляет 40,41% при $\tilde{h} = 0$ (см. также § 4.2.1) и 56,19% при $\tilde{h} = 0,384$.

Для объяснения эффективного возбуждения волны Стонели при указанном соотношении между параметрами сред можно привести следующие соображения. Известно [Miller, Pursey, 1955], что при действии на свободную поверхность упругого полупространства точечного гармонического источника около 67% всей излучаемой мощности уносятся рэлеевской волной. При $c_1 > c_R$ поверхностная волна, распространяющаяся по границе раздела твердое тело – газ, представляет собой модифицированную по сравнению со случаем границы упругого полупространства с вакуумом волну Рэлея (отметим, что для обозначения поверхностных волн на границе раздела твердое тело – газ при различных соотношениях между акустическими импедансами этих сред, по-видимому, нет единой терминологии). Эта волна уже не будет вытекающей, и её мощность излучения не должна значительно отличаться от мощности рэлеевской волны на свободной поверхности упругой среды. По-видимому, свойства поверхностной волны при $c_R \gtrsim c_1$ (волна Стонели по терминологии [Бреховских, 1973]) и при $c_1 \gtrsim c_R$ (модифицированная поверхностная волна Рэлея) не должны резко отличаться. Поэтому мощность излучения волны Стонели при $c_R \gtrsim c_1$ (большая её часть переносится по упругой среде) имеет одинаковый порядок величины с мощностью излучения волны Рэлея на свободной поверхности твердого полупространства.

Отметим, что в приповерхностном рыхлом слое почвы даже скорость продольной волны может быть меньше, чем скорость звука в воздухе (см. экспериментальные данные, приведенные в работах [Sabatier et al., 1986a; Sabatier et al., 1986b]). Однако из-за наличия пористости и значительной неоднородности грунта в таких случаях, по-видимому, целесообразно говорить лишь о некоторых средних («эффективных») параметрах упругой среды.

Случай, когда соответствующая данным значениям c_l и c_t скорость рэлеевской волны становится меньше скорости звука в газе, требует отдельного рассмотрения и выходит за рамки настоящего исследования.

Перейдем к анализу мощности излучения акустической волны в газе. В полупространстве $z < 0$ необходимо рассмотреть три области: $0 < \theta_1 < \theta_l$ (I), $\theta_l < \theta_1 < \theta_t$ (II) и $\theta_t < \theta_1 < \pi/2$ (III). В областях I и II существует преломленная акустическая волна. В области III существует как преломленная акустическая волна, так и вытекающая псевдорэлеевская волна. В этой области пространства происходит перекачка энергии вытекающей волны в акустическую волну, поэтому не представляется возможным провести количественное разделение их мощностей излучения. Поле вытекающей волны экспоненциально спадает при движении вдоль границы

за счет передачи части энергии звуковой волне [Бреховских, Годин, 1989]. Их суммарная мощность (она описывается формулами (4.3.20), (4.3.30)) при этом остается постоянной. С ростом глубины расположения источника эффективность генерации псевдорэлеевской волны экспоненциально убывает, и, следовательно, можно предположить, что возмущения в области III соответствуют практически только преломленной акустической волне.

Результаты расчетов мощностей излучения акустической волны при различных соотношениях между параметрами газа и твердого тела приведены на рис. 4.15. Как и следовало ожидать, эти мощности на несколько порядков меньше мощностей излучения объемных волн в твердом теле. Мощность акустической волны возрастает по мере уменьшения разницы акустических импедансов граничащих сред. Так, при уменьшении скоростей упругих волн c_l и c_t вдвое (при неизменных плотностях сред) мощность излучения акустической волны в областях I и II увеличивается приблизительно в два раза.

Зависимость доли мощности излучения акустической волны, приходящейся на область I, от глубины расположения источника имеет осцилляторный характер. Размах осцилляций уменьшается по мере удаления источника от границы раздела сред, и мощность излучения стремится к некоторой постоянной величине. В области II доля мощности излучения акустической волны нарастает при удалении источника от границы и при $\tilde{h} > 1$ остается практически постоянной (осцилляции у зависимости $\widetilde{W}_1^{(2)}(\tilde{h})$ существуют, однако они ничтожно малы).

В области III значения $\widetilde{W}_1^{(3)}$ очень близки к значениям \widetilde{W}_R , соответствующим поверхностной волне Рэлея на свободной границе упругого полупространства. Следовательно, основной вклад в величину $\widetilde{W}_1^{(3)}$ дает вытекающая волна, большая часть мощности которой сосредоточена в твердой среде. В области III мощность излучения акустической волны можно, по-видимому, оценить только в том случае, когда источник находится достаточно далеко от границы, и эффективность возбуждения вытекающей волны мала. Для параметров сред, соответствующих рис. 4.15, а также более низким скоростям упругих волн в твердой среде, необходимо рассматривать глубины источника $\tilde{h} > 2 \div 3$, где экспоненциальный спад мощности излучения, характерный для поверхностной волны, сменяется на гораздо более плавный (хотя и тоже экспоненциальный), соответствующий акустической волне.

Из рассмотрения рис. 4.15 и анализа результатов расчетов при меньших скоростях упругих волн следует, что в область II всегда излучается большая мощность, чем в область I.

Отметим также, что для данной модели источника в области II мощность звуковой волны в случае заглубленного излучателя всегда больше, чем в случае поверхностного излучателя. Если приведенная глубина источника $\tilde{h} > 1$, то соответствующие значения мощности отличаются приблизительно в два раза.

Если $\tilde{h} > 2$, то суммарная мощность излучения вытекающей и преломленной акустической волн в области III мала,

$$W_1^{(3)} \ll W_1^{(1)} + W_1^{(2)}. \quad (4.3.31)$$

Таким образом, если в качестве источника рассматривать землетрясение, фокус которого находится на глубине нескольких десятков километров, то при скорости поперечных волн $c_t = 3000$ м/с и частоте более нескольких десятых герца выполняется условие $\tilde{h} > 2$, и мощность акустической волны, которая может быть передана в высокие слои атмосферы, составляет менее 0,01% всей излучаемой на данной частоте мощности. Указанная акустическая мощность излучается в довольно узкий конус, $0 < \theta < \arcsin(c_1/c_t) \approx 6^\circ 30'$ (области I и II). Для глубокофокусных землетрясений (очаг находится на глубине в несколько сотен километров) во многих случаях будет справедливо соотношение (4.3.31) и для вычисления мощности акустической волны в атмосфере достаточно будет воспользоваться формулами (4.3.28), (4.3.29).

4.4. Энергетические характеристики волн Лява, возбуждаемых в системе упругий слой – упругое полупространство

В предыдущих разделах были рассмотрены поля и энергетические характеристики упругих волн, возбуждаемых в однородном твердом полупространстве. Значительно более сложным является описание распространения упругих волн в слоистых средах.

Большинство работ, в которых рассматриваются колебания твердых слоистых сред, посвящено исследованию дисперсионных характеристик упругих волн [Ewing et al., 1957; Аки, Ричардс, Т. 1, 1983; Кейлис-Борок, 1960; Андрианова и др., 1965; Лёвшин, 1973]. Однако, значительно больший интерес представляют поля и энергетические характеристики излучения, расчет которых представляет сложную проблему [Бабешко и др., 1989; Kennett, 1983; Молотков, 1984; Бабич и др., 1984].

В работах [Бабешко и др., 1989; Глушков, 1983; Бабешко и др., 1986] энергетические характеристики упругих волн в системах слой (несколько слоев) – полупространство исследовались путем вычисления потока энергии через поверхность нижней полусферы для объемных волн и через поверхность полубесконечного цилиндра для волн Рэлея и Лява. При этом было необходимо рассчитывать поля смещений и тензор напряжений в упругой слоистой среде, что является непростой задачей.

В этом параграфе энергетические характеристики SH -волн и волн Лява, возбуждаемых поверхностным источником в системе однородный упругий слой – однородное упругое полупространство, исследованы методом реакции излучения [Pazin, 1990].

Пусть однородный слой толщины H , характеризуемый плотностью ρ_c и модулем чистого сдвига μ_c , лежит на однородном упругом полупространстве с плотностью ρ_{Π} и модулем сдвига μ_{Π} , причем скорость поперечной волны в слое $c_c = (\mu_c/\rho_c)^{1/2}$ меньше, чем скорость поперечной волны в полупространстве $c_{\Pi} = (\mu_{\Pi}/\rho_{\Pi})^{1/2}$. На верхней границе слоя $z = 0$ (ось z декартовой системы координат направлена вертикально вниз) действует силовой источник вида

$$\vec{f} = \text{rot} (m\vec{e}_z), \quad (4.4.1)$$

где \vec{e}_z — орт оси z и $m(x, y, t)$ — соленоидальный потенциал. Такой источник возбуждает только поперечные волны SH -поляризации, поэтому для описания поля смещений \vec{u} достаточно ввести в слое и в полупространстве векторные потенциалы \vec{A}_1 и \vec{A}_2 , причем выбрать их можно в виде $\vec{A}_{1,2} = A_{1,2} \vec{e}_z$.

Величины A_1 и A_2 подчиняются скалярным волновым уравнениям, которые необходимо решать с граничными условиями

$$\sigma_{xz} = -f_x, \quad \sigma_{yz} = -f_y, \quad \sigma_{zz} = 0 \quad (4.4.2)$$

на верхней границе слоя $z = 0$ и условиями равенства всех компонент тензора напряжений и вектора смещений на границе слоя и полупространства $z = H$.

Использование метода преобразований Фурье по горизонтальным координатам x, y и времени t приводит к следующим интегральным выражениям для смещений в слое и в полупространстве:

$$u_{x,y}^{(c)} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\kappa_c \mu_c + \kappa_{\Pi} \mu_{\Pi}) e^{i\kappa_c(z-H)} + (\kappa_c \mu_c - \kappa_{\Pi} \mu_{\Pi}) e^{-i\kappa_c(z-H)}}{2\kappa_c \mu_c (\kappa_{\Pi} \mu_{\Pi} \cos \kappa_c H - i\kappa_c \mu_c \sin \kappa_c H)} \times \\ \times (\vec{e}_z \times \vec{k}) M(\omega, \vec{k}) \exp(-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}) d\omega d\vec{k}, \quad (4.4.3)$$

$$u_{x,y}^{(n)} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\vec{e}_z \times \vec{k}) M(\omega, \vec{k}) e^{i\kappa_{\Pi}(z-H) - i\omega t + i\vec{k}\vec{r}}}{\kappa_{\Pi} \mu_{\Pi} \cos \kappa_c H - i\kappa_c \mu_c \sin \kappa_c H} d\omega d\vec{k}. \quad (4.4.4)$$

В (4.4.3), (4.4.4) введены обозначения:

$$M(\omega, \vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} m(\vec{r}, t) e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} dt d\vec{r} \quad (4.4.5)$$

— фурье-образ соленоидального потенциала, $\kappa_{c,\Pi} = (k_{c,\Pi}^2 - k^2)^{1/2}$, $k_c = \omega/c_c$ и $k_{\Pi} = \omega/c_{\Pi}$ — волновые числа поперечных волн соответственно в слое и в полупространстве. При $k > |\omega|/c_{c,\Pi}$

$$(k_{c,\Pi}^2 - k^2)^{1/2} = i \left| (k^2 - k_{c,\Pi}^2)^{1/2} \right|.$$

Для гармонического источника

$$m(\vec{r}, t) = m_0(\vec{r}) \exp(-i\omega_0 t) \quad (4.4.6)$$

среднее за период $T = 2\pi/\omega_0$ значение мощности излучения вычислим по формуле (3.1.55), которую с учетом (4.4.3) запишем в виде:

$$\overline{W} = \frac{2\pi^2 \omega_0}{\mu_c} \operatorname{Re} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^2 |M_0(\vec{k})|^2 (\kappa_c \mu_c \cos \kappa_c H - i\kappa_{\Pi} \mu_{\Pi} \sin \kappa_c H)}{\kappa_c (\kappa_{\Pi} \mu_{\Pi} \cos \kappa_c H - i\kappa_c \mu_c \sin \kappa_c H)} d\vec{k}, \quad (4.4.7)$$

где

$$M_0(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} m_0(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r} \quad (4.4.8)$$

— фурье-образ распределения по поверхности $z = 0$ вращательного момента $m_0(\vec{r})$. Из (4.4.7) следует, что средняя за период волны излучаемая мощность может быть представлена в виде интеграла, соответствующего излучению объемной SH -волны, и суммы полувычетов, соответствующих дискретным модам поверхностных волн Лява.

Как частный случай из (4.4.7) следует формула для мощности излучения SH -волн, возбуждаемых поверхностным источником в однородном полупространстве:

$$\overline{W} = \frac{2\pi^2\omega_0}{\mu_{с,п}} \operatorname{Re} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{k^2 |M_0(\vec{k})|^2}{\kappa_{с,п}} d\vec{k}. \quad (4.4.9)$$

В (4.4.9) индексы «с» в знаменателях соответствуют предельному переходу $H \rightarrow \infty$, а индексы «п» — переходу $H \rightarrow 0$.

Если характерные размеры источника много меньше длины излучаемой волны, то можно считать его точечным. Тогда $m_0(\vec{r}) = \mathcal{P}_0 \delta(x) \delta(y)$, где \mathcal{P}_0 — постоянная величина с размерностью пары сил. Для точечного источника из (4.4.9) получается простое выражение для излучаемой мощности:

$$\overline{W} = \frac{\mathcal{P}_0^2 \omega_0^4}{6\pi\mu_c c_c^3}. \quad (4.4.10)$$

Результат (4.4.10) получается также путем вычисления потока энергии через поверхность волнового фронта по формуле (3.1.88). Такой расчет выполнен в параграфе 3.1.3 для подповерхностного источника (см. формулу (3.1.92)). В предельном случае $h \rightarrow 0$ из (3.1.92) следует выражение (4.4.10).

Подробный анализ соотношения (4.4.7) проведем для случая точечного источника, когда мощность излучения дается выражением:

$$\overline{W} = \frac{\omega_0 \mathcal{P}_0^2}{4\pi\mu_c} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{k^3 (\mu_c \kappa_c \cos \kappa_c H - i\mu_{п} \kappa_{п} \sin \kappa_c H)}{\kappa_c (\mu_{п} \kappa_{п} \cos \kappa_c H - i\mu_c \kappa_c \sin \kappa_c H)} dk. \quad (4.4.11)$$

При выделении реальной части в (4.4.11) необходимо определить те участки пути интегрирования, где подынтегральная функция действительна, а также учесть вклад лежащих на оси интегрирования полюсов, определяемых из решений дисперсионного уравнения для поверхностных волн Лява [Викторов, 1981; Бреховских, Гончаров, 1982]

$$\mu_{п} \kappa_{п} \cos \kappa_c H - i\mu_c \kappa_c \sin \kappa_c H = 0. \quad (4.4.12)$$

Таким образом, средняя за период волны излучаемая мощность представляется в виде интеграла, соответствующего излучению объемной SH -волны, и суммы полу-

вычетов, соответствующих дискретным модам поверхностных волн Лява:

$$\begin{aligned} \bar{W} = & \frac{\omega_0 \mathcal{P}_0^2 \mu_{\Pi}}{4\pi} \int_0^{k_{\Pi}} \frac{k^3 (k_{\Pi}^2 - k^2)^{1/2} dk}{\mu_{\Pi}^2 (k_{\Pi}^2 - k^2) \cos^2 \gamma_c + \mu_c^2 (k_c^2 - k^2) \sin^2 \gamma_c} + \\ & + \frac{\omega_0 \mathcal{P}_0^2}{4\mu_c} \sum_{i=1}^N \operatorname{Res} \left[\frac{k^3 (\mu_c \kappa_c \cos \gamma_c + \mu_{\Pi} q_{\Pi} \sin \gamma_c)}{\kappa_c (\mu_{\Pi} q_{\Pi} \cos \gamma_c - \mu_c \kappa_c \sin \gamma_c)}, \quad k = k_i \right]. \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

В (4.4.13) $q_{\Pi} = (k^2 - k_{\Pi}^2)^{1/2}$ ($k > k_{\Pi}$), $\gamma_c = H(k_c^2 - k^2)^{1/2}$, k_i — волновое число i -й моды Лява, определяемое из уравнения (4.4.12), n — число мод при данной толщине слоя H и частоте волны ω_0 .

Для численного исследования удобно ввести следующие безразмерные параметры: $\tilde{H} = H/\lambda_c$ — отношение толщины слоя к длине поперечной волны в слое, $\eta = c_c/c_{\Pi}$ — отношение скоростей SH -волн в слое и в полупространстве, $\varepsilon = \rho_c/\rho_{\Pi}$ — отношение плотностей, $x = c_c/c_{\text{ф}}$, где $c_{\text{ф}}$ — фазовая скорость волны Лява, причем, как известно, $c_c < c_{\text{ф}} < c_{\Pi}$ [Викторов, 1981; Бреховских, Гончаров, 1982]. Дисперсионное уравнение для волн Лява (4.4.12) представим в безразмерном виде:

$$(x^2 - \eta^2)^{1/2} \cos \left(2\pi \tilde{H} \sqrt{1 - x^2} \right) - \varepsilon \eta^2 (1 - x^2)^{1/2} \sin \left(2\pi \tilde{H} \sqrt{1 - x^2} \right) = 0. \quad (4.4.14)$$

Излучаемую мощность запишем в виде произведения размерного множителя на численный коэффициент W_{tot} :

$$\bar{W} = \frac{\omega_0^4 \mathcal{P}_0^2}{4\pi \mu_{\Pi} c_c^3} W_{\text{tot}},$$

где

$$W_{\text{tot}} = W_{SH} + \sum_{i=1}^N W_{Li}, \quad (4.4.15)$$

причем безразмерная величина W_{SH} характеризует мощность излучения объемной SH -волны,

$$W_{SH} = \int_0^{\eta} \frac{x^3 (\eta^2 - x^2)^{1/2} dx}{(\eta^2 - x^2) \cos^2 (2\pi \tilde{H} \sqrt{1 - x^2}) + \varepsilon^2 \eta^4 (1 - x^2) \sin^2 (2\pi \tilde{H} \sqrt{1 - x^2})}, \quad (4.4.16)$$

а численные коэффициенты W_{Li} характеризуют мощность мод волн Лява с номерами i (κ_i — определяющий данную моду корень уравнения (4.4.14)):

$$W_{Li} = \pi \frac{(x_i^2 - \eta^2)^{1/2} [1 - x_i^2 + (x_i^2 - \eta^2)/(\varepsilon^2 \eta^4)]}{(1 - x_i^2)(1 + \varepsilon \eta^2 2\pi \tilde{H} \sqrt{x_i^2 - \eta^2}) + (x_i^2 - \eta^2)(1 + 2\pi \tilde{H} \sqrt{x_i^2 - \eta^2}/(\varepsilon \eta^2))}. \quad (4.4.17)$$

Ниже величины W_{tot} , W_{SH} и W_{Li} будем называть приведенной мощностью излучения.

На рис. 4.16 представлены зависимости приведенной мощности, излучаемой в первые шесть мод Лява: от численного коэффициента \tilde{H} . Из рассмотрения рис. 4.16 следует, что наиболее эффективно возбуждается первая мода. Толщина слоя, соответствующая максимальной мощности первой моды, составляет приблизительно половину длины поперечной волны в слое. С увеличением номера моды её мощность уменьшается: приведенная мощность моды с номером n всегда выше, чем моды с номером $n + 1$. С ростом параметра \tilde{H} приведенная мощность каждой отдельной моды падает.

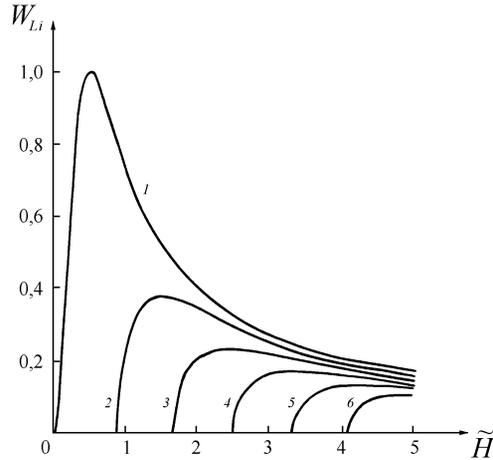


Рис. 4.16. Зависимости приведенной мощности W_{Li} , излучаемой в первые шесть мод волны Лява от безразмерного параметра \tilde{H} при $\varepsilon = 0,9$; $\eta = 0,8$. Цифры у кривых соответствуют номерам мод

На рис. 4.17 представлены зависимости от величины \tilde{H} приведенной мощности излучения объемной SH -волны W_{SH} , суммарной мощности поверхностных волн Лява $W_L = \sum_{i=1}^N W_{Li}$ и полной излучаемой мощности W_{tot} . Из рис. 4.17 видно, что мощность поверхностных волн превышает мощность объемной волны (обратное соотношение справедливо только при $\tilde{H} \rightarrow 0$). Зависимости $W_{SH}(\tilde{H})$ и $W_L(\tilde{H})$ имеют осцилляторный характер. При увеличении параметра \tilde{H} от некоторого его значения, соответствующего локальному минимуму W_{SH} , мощность объемной волны нарастает до момента появления очередной моды Лява. Вновь возникающая мода уносит определенную часть энергии, в результате чего мощность объемной волны падает, а суммарная мощность поверхностных волн возрастает. При дальнейшем росте величины \tilde{H} мощность поверхностных мод уменьшается, а мощность объемной волны вновь начинает возрастать. Размах осцилляций уровней излучаемой мощности W_L , W_{SH} уменьшается с увеличением \tilde{H} , эти уровни стремятся к величинам, получаемым из (4.4.15) при $\tilde{H} \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$.

Если параметр \tilde{H} мал (это соответствует малым толщинам слоя при фиксированной частоте или низким частотам при заданной толщине слоя), мощность волн Лява W_L стремится к нулю, а мощность объемной волны W_{SH} — к величине, опре-

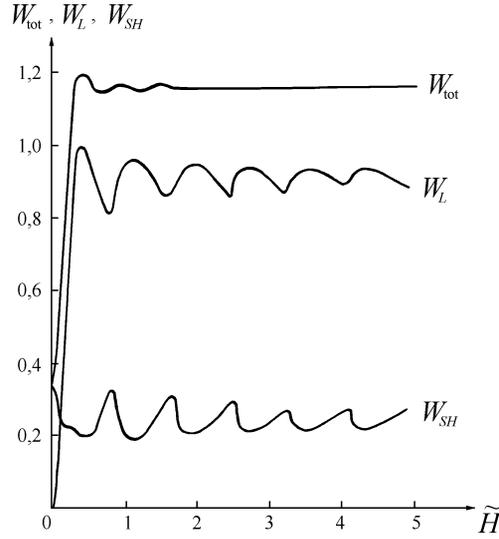


Рис. 4.17. Зависимости численных коэффициентов, характеризующих мощность объемной волны W_{SH} , суммарную мощность волны Лява W_L и полную излучаемую мощность W_{tot} от безразмерного параметра \tilde{H} при $\varepsilon = 0,9$; $\eta = 0,8$

деляемой из (4.4.16) при $\tilde{H} \rightarrow 0$. Для отношения скоростей поперечных волн в слое и в полупространстве $\eta = 0,8$ получаем $W_{SH}(\tilde{H} \rightarrow 0) \approx 0,341$.

Полная излучаемая мощность уже при толщинах слоя $H \gtrsim \lambda_c$ практически не меняется и соответствует величине мощности объемной SH -волны, излучаемой точечным источником в однородное полупространство с параметрами ρ_c , μ_c . Действительно, из (4.4.10) следует, что в отсутствие вертикальной неоднородности среды

$$\overline{W} = \frac{\omega_0^4 \mathcal{P}_0^2}{4\pi\mu_{\Pi} c_c^3} \left(\frac{2\mu_{\Pi}}{3\mu_c} \right) \approx 1,16 \frac{\omega_0^4 \mathcal{P}_0^2}{4\pi\mu_{\Pi} c_c^3}$$

при выбранных значениях $\varepsilon = 0,9$ и $\eta = 0,8$. Из рассмотрения рис. 4.17 следует, что

$$\lim_{\tilde{H} \rightarrow 0} W_{SH} = 0,341, \quad \lim_{\tilde{H} \rightarrow \infty} W_{tot} = 1,16.$$

Эти соотношения находятся в соответствии с приведенными выше аналитическими оценками и подтверждают правильность численных результатов.

4.5. Возбуждение сейсмоакустических волн гармоническим силовым источником, действующим на границе жидкого слоя и упругого полупространства

В данном разделе исследовано возбуждение сейсмоакустических волн в системе однородное изотропное упругое полупространство, покрытое жидким слоем, при

действию на поверхность упругой среды перпендикулярного к ней точечного гармонического силового источника. Получены интегральные выражения для средних за период волны мощностей излучения продольной и поперечной волн в твердом теле. Проанализировано возбуждение мод. Получены выражения, описывающие части мощностей мод, излучаемые в жидкий слой и в упругую среду. Выполнен численный анализ мощностей излучения сферических продольной и поперечной упругих волн, а также мощностей излучения сейсмоакустических мод в твердом полупространстве и в жидком слое.

4.5.1. Интегральные выражения для волновых полей

В настоящее время значительный интерес представляет изучение волн низких частот в задачах гидроакустики. Это связано с особенностями их распространения: начиная с определенного соотношения между длиной упругой волны и глубиной бассейна волны распространяются не только в водной толще океана, но и в его поддонных слоях. При этом часть излучаемой волновой энергии уносится поверхностными волнами на границе раздела этих сред. Увеличение числа исследуемых типов волн, характеризующихся разными скоростями распространения, существенно расширяет возможности дистанционного акустического мониторинга как характеристик источников излучения, так и параметров водного и поддонных слоев. На практике это необходимо для решения многих задач, таких, как сейсмическая разведка и предсказание землетрясений и цунами. В первую очередь, значительный интерес представляет исследование возбуждения сейсмическими источниками акустических волн в океане с целью выявления на основе анализа волновых полей признаков готовящегося подводного землетрясения.

Важные для практики вопросы теории взаимодействия акустических и сейсмических волн возникают уже в рамках простых моделей, например, когда океан представляется однородным жидким слоем, покрывающим однородное изотропное упругое полупространство. Рассмотрение таких моделей позволяет детально изучить возбуждение и распространение различных типов объемных и поверхностных волн и получить относительно простые аналитические выражения для волновых полей и энергетических характеристик сейсмоакустического излучения.

Задача о распространении волн в жидком слое, лежащем на упругом полупространстве, для случаев гармонических монополюсного (типа пульсирующей сферы) и дипольного (две близко расположенные пульсирующие в противофазе сферы) звуковых источников решалась соответственно в работах [Ланин, 1992а] и [Ланин, 1992б]. В указанных работах рассмотрена ситуация, когда толщина слоя очень мала по сравнению с длинами излучаемых волн. Для данного предельного случая вычислены мощности излучения продольной и поперечной волн в твердой среде, а также поверхностной волны Рэлея, в которую при малой толщине слоя переходит фундаментальная мода.

Более подробно задача о поле звукового гармонического источника, находящегося в однородном акустически тонком жидком слое, покрывающем однородное упругое полупространство (простейшая модель мелкого моря), рассмотрена в работах [Borodina, Petukhov, 1997; Borodina, Петухов, 1999], где исследованы

частотные и пространственные зависимости амплитуд поверхностной волны (нулевой (фундаментальной) моды), а также боковых волн, связанных с продольными и сдвиговыми волнами в твердом теле. В этих работах не исследовалась мощность излучения мод и сферических продольных и поперечных волн в дне.

В данном разделе задача о возбуждении сейсмоакустических волн в системе однородное изотропное упругое полупространство, покрытое однородным жидким слоем, при действии на поверхность упругой среды перпендикулярного к ней точечного гармонического силового источника исследована в полном объеме [Петухов и др., 2009].

Пусть плоскость $z = 0$ цилиндрической системы координат (r, φ, z) совпадает с границей однородного изотропного твердого тела, занимающего полупространство $z > 0$ и характеризуемого плотностью ρ и скоростями продольной и поперечной волн соответственно c_l и c_t . Упругое полупространство покрыто однородным жидким слоем $-H < z < 0$, имеющим плотность ρ_0 и скорость звука c_0 . Будем считать обе среды идеальными, т. е. полагать, что их вязкость равна нулю. Кроме того, будем пренебрегать действием силы тяжести. На поверхность твердого тела по нормали к ней действует точечная гармоническая нагрузка, т. е. при $z = 0$ выполняются следующие граничные условия для вектора смещений \vec{u} и тензора напряжений (индекс «0» относится к жидкости):

$$u_{z0} = u_z, \quad \sigma_{zr} = 0, \quad \sigma_{zz0} - \sigma_{zz} = p = f_0 \frac{\delta(r)}{2\pi r} e^{-i\omega t}, \quad (4.5.1)$$

выражающие соответственно равенство нормальных к границе смещений в обеих средах, отсутствие касательных напряжений на поверхности твердого тела и равенство разности вертикальных компонент напряжений в жидкости и в твердом теле при $z = 0$ давлению p , создаваемому источником. В (4.5.1) f_0 — амплитуда приложенной силы, ω — частота, δ — дельта-функция Дирака. На свободной поверхности жидкости выполняется условие равенства нулю акустического давления:

$$p_0 = 0 \quad \text{при} \quad z = -H. \quad (4.5.2)$$

Смещения в твердом теле описываются уравнением Ламэ, а возмущения в жидкости — системой уравнений гидродинамики, которые для решения рассматриваемой задачи могут быть линеаризованы. В жидкости введем потенциал смещений ψ_0 , а в твердом теле — скалярный ψ и векторный $\vec{A} = A \vec{e}_\varphi$ (\vec{e}_φ — орт оси φ) потенциалы. Смещения частиц \vec{u}_0 и давление p_0 в акустической волне и смещения \vec{u} в упругих волнах связаны с потенциалами соотношениями:

$$\begin{aligned} \vec{u}_0 &= \text{grad } \psi_0, & p_0 &= -\rho_0 \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial t^2}, \\ \vec{u} &= \text{grad } \psi + \text{rot } \vec{A}, & \text{div } \vec{A} &= 0. \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

Для потенциалов получаются следующие волновые уравнения:

$$\Delta \psi_0 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta \psi - \frac{1}{c_l^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad \Delta A - \frac{1}{c_t^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0. \quad (4.5.4)$$

Решая уравнения (4.5.4) с граничными условиями (4.5.1), (4.5.2) методом преобразований Фурье и учитывая цилиндрическую симметрию задачи, представим потенциалы в виде:

$$\psi_0(r, z) = \int_0^{\infty} R_p(k) e^{i\kappa_0(z+H)} J_0(kr) k dk + \int_0^{\infty} R_m(k) e^{-i\kappa_0 z} J_0(kr) k dk, \quad (4.5.5)$$

$$\psi(r, z) = \int_0^{\infty} T_l(k) e^{i\kappa_l z} J_0(kr) k dk, \quad (4.5.6)$$

$$A(r, z) = \int_0^{\infty} T_t(k) e^{i\kappa_t z} J_1(kr) k dk. \quad (4.5.7)$$

В (4.5.5)–(4.5.7) k — горизонтальное волновое число, J_0 и J_1 — функции Бесселя соответственно нулевого и первого порядков,

$$\begin{aligned} R_p(k) &= \frac{f_0 \kappa_l k_t^2}{2\pi \rho c_t^2 \kappa_0 D(k)} \frac{e^{i\kappa_0 H}}{1 + e^{2i\kappa_0 H}}, \\ R_m(k) &= -\frac{f_0 \kappa_l k_t^2}{2\pi \rho c_t^2 \kappa_0 D(k)} \frac{1}{1 + e^{2i\kappa_0 H}}, \\ T_l(k) &= \frac{f_0(k_t^2 - 2k^2)}{2\pi \rho c_t^2 D(k)}, \quad T_t(k) = \frac{i f_0 \kappa_l k}{\pi \rho c_t^2 D(k)}, \\ D(k) &= R_0(k) + \frac{1 - e^{2i\kappa_0 H}}{1 + e^{2i\kappa_0 H}} \frac{\rho_0}{\rho} k_t^4 \frac{\kappa_l}{\kappa_0}, \\ R_0(k) &= (2k^2 - k_t^2)^2 + 4k^2 \kappa_l \kappa_t, \quad \kappa_{0,l,t} = (k_{0,l,t}^2 - k^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

$k_{0,l,t} = \omega/c_{0,l,t}$ — волновые числа акустической волны в жидкости и продольной и поперечной волн в твердом теле.

Для сходимости интегралов (4.5.6), (4.5.7) при $z \rightarrow \infty$ необходимо считать, что

$$(k_{0,l,t}^2 - k^2)^{1/2} = i|k^2 - k_{0,l,t}^2|^{1/2} \quad \text{при } k > k_{0,l,t}.$$

Уравнение

$$D(k) = 0 \quad (4.5.8)$$

представляет собой дисперсионное уравнение для мод в системе жидкий слой — упругое полупространство.

Дисперсионное уравнение (4.5.8) было, в частности, получено в работах [Лавин, 1992а] и [Лавин, 1992б]. Это уравнение всегда имеет хотя бы один действительный корень, соответствующий фундаментальной, или нулевой моде [Шерман, 1945]. Нетрудно видеть, что при $H \rightarrow 0$ уравнение (4.5.8) переходит в $R_0(k) = 0$ и определяет скорость рэлеевской волны c_R на свободной границе упругого полупространства, а при $H \rightarrow \infty$ — в уравнение

$$S_0(k) = R_0(k) + \frac{\rho_0}{\rho} k_t^4 \frac{\kappa_l}{\kappa_0} = 0, \quad (4.5.9)$$

решением которого является скорость волны Стонели c_S на границе твердое тело – жидкость [Бреховских, 1973; Бреховских, Годин, 1989].

4.5.2. Полные мощности излучения мод в жидком слое и в упругом полупространстве

Для дальнейшего исследования необходимо задать соотношения между акустическими параметрами сред. Ниже будем рассматривать случай, когда скорость звука в жидком слое меньше скорости волны Рэлея, распространяющейся по свободной границе упругого полупространства, характеризующегося скоростями продольной c_l и поперечной c_t волн. При этом с ростом толщины слоя скорость фундаментальной моды c_F убывает и лежит в пределах $c_R > c_F > c_S$.

Помимо фундаментальной (нулевой) моды, которая всегда существует в системе жидкий слой – упругое полупространство, при увеличении толщины слоя будут возникать моды более высоких номеров. При возникновении моды на соответствующей ей критической частоте её скорость равна скорости поперечной волны (а не рэлеевской, как у фундаментальной моды), а затем убывает с ростом параметра $k_0 H$ до скорости звука в жидкости [Шерман, 1945].

Отметим, что в дисперсионном уравнении (4.5.8) удобно избавиться от комплексных величин и записать его в виде

$$D_1(k) = (2k^2 - k_t^2)^2 - 4k^2 q_l q_t + \frac{\rho_0}{\rho} k_t^4 \frac{q_l}{\kappa_0} \operatorname{tg} \kappa_0 H = 0 \quad (4.5.10)$$

при $k_t < k < k_0$ и в виде

$$D_2(k) = (2k^2 - k_t^2)^2 - 4k^2 q_l q_t + \frac{\rho_0}{\rho} k_t^4 \frac{q_l}{q_0} \operatorname{th} q_0 H = 0 \quad (4.5.11)$$

при $k > k_0$. В (4.5.10), (4.5.11) введены обозначения

$$q_{0,l,t} = \sqrt{k^2 - k_{0,l,t}}.$$

В дальнейшем нас будут интересовать мощности излучения волн различных типов. В рассматриваемой системе жидкий слой – упругое полупространство это сферические продольные и поперечные волны в упругой среде и моды.

Для расчета мощности излучения воспользуемся способом, который связан с вычислением работы, произведенной силовым источником над упругой средой. Данный способ называют также методом реакции излучения [Докучаев, 1996]. Из общего выражения (3.1.54) следует, что для гармонического осесимметричного источника среднее за период волны значение полной излучаемой мощности дается выражением:

$$W = -\pi \operatorname{Re} \left[i\omega \int_0^\infty p^* u_z(r, 0) r dr \right], \quad (4.5.12)$$

где звездочка означает комплексное сопряжение. Подставим в (4.5.12) давление p^* и вертикальные смещения границы раздела $u_z(r, 0)$ в виде интегралов Фурье–Бесселя. Это позволит провести интегрирование по r и записать излучаемую мощность в виде интеграла по волновому числу k :

$$W = \frac{\omega^3 f_0^2}{4\pi \rho c_t^4} \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\kappa_l k dk}{D(k)}. \quad (4.5.13)$$

Вклад в реальную часть интеграла (4.5.13) дают те участки пути интегрирования, где функция $\kappa_l/D(k)$ действительна. Кроме того, следует учесть вклад лежащих на действительной оси полюсов $k = k_{mj}$ (j – номер моды) подынтегрального выражения. Эти полюса определяются из решения дисперсионного уравнения (4.5.8) и лежат в области $k > k_R$. Отметим, что при $k > k_t$ подынтегральная функция чисто мнимая.

Выражение для полной мощности излучения представим в виде

$$W = W_V + W_{\text{mod}}, \quad (4.5.14)$$

где

$$W_V = \frac{\omega^3 f_0^2}{4\pi \rho c_t^4} \operatorname{Re} \int_0^{k_t} \frac{\kappa_l k dk}{D(k)} \quad (4.5.15)$$

– мощность излучения объемных, т. е. сферических продольной и поперечной волн в твердом теле, и

$$W_{\text{mod}} = \sum_{j=0}^N W_{mj} \quad (4.5.16)$$

– сумма мощностей мод.

В (4.5.16) $N + 1$ – число мод при заданном значении безразмерной величины $k_0 H$. Номер $j = 0$ соответствует фундаментальной моде.

Для мод с волновыми числами k_{mj} , лежащими в интервале $k_t < k_{mj} < k_0$, имеем:

$$W_{mj} = -\frac{\omega^3 f_0^2}{4\rho c_t^4} \frac{k_{mj} \sqrt{k_{mj}^2 - k_t^2}}{D_1'(k_{mj})}, \quad (4.5.17)$$

где

$$\begin{aligned} D_1'(k_{mj}) = & \left[8k \left(2k^2 - k_t^2 - \sqrt{k^2 - k_l^2} \sqrt{k^2 - k_t^2} \right) - \frac{4k^3 (2k^2 - k_l^2 - k_t^2)}{\sqrt{k^2 - k_l^2} \sqrt{k^2 - k_t^2}} + \right. \\ & + \frac{\rho_0}{\rho} k_t^4 \frac{k(k_0^2 - k_l^2)}{\sqrt{k^2 - k_l^2} (k_0^2 - k^2)^{3/2}} \operatorname{tg} (H \sqrt{k_0^2 - k^2}) - \\ & \left. - \frac{\rho_0}{\rho} k_t^4 \frac{kH \sqrt{k^2 - k_l^2}}{k_0^2 - k^2} \frac{1}{\cos^2 (H \sqrt{k_0^2 - k^2})} \right] \Big|_{k=k_{mj}}. \quad (4.5.18) \end{aligned}$$

Мощность фундаментальной моды при достаточно большой толщине слоя, $k_0 H \gg 1$, когда $c_F < c_0$, или $k_{m0} > k_0$, дается выражением:

$$W_{m0} = -\frac{\omega^3 f_0^2}{4\rho c_t^4} \frac{k_{m0} \sqrt{k_{m0}^2 - k_l^2}}{D'_2(k_{m0})}, \quad (4.5.19)$$

где

$$\begin{aligned} D'_2(k_{m0}) = & \left[8k \left(2k^2 - k_t^2 - \sqrt{k^2 - k_l^2} \sqrt{k^2 - k_t^2} \right) - \frac{4k^3 (2k^2 - k_l^2 - k_t^2)}{\sqrt{k^2 - k_l^2} \sqrt{k^2 - k_t^2}} + \right. \\ & + \frac{\rho_0}{\rho} k_t^4 \frac{k(k_l^2 - k_0^2)}{\sqrt{k^2 - k_l^2} (k^2 - k_0^2)^{3/2}} \operatorname{th} \left(H \sqrt{k^2 - k_0^2} \right) + \\ & \left. + \frac{\rho_0}{\rho} k_t^4 \frac{kH \sqrt{k^2 - k_l^2}}{k^2 - k_0^2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \left(H \sqrt{k^2 - k_0^2} \right)} \right] \Big|_{k=k_{m0}}. \end{aligned} \quad (4.5.20)$$

Каждое из выражений (4.5.17), (4.5.19) можно представить в виде суммы

$$W_{mj} = W_{mj}^{(\text{ж})} + W_{mj}^{(\text{тв})}, \quad (4.5.21)$$

где $W_{mj}^{(\text{ж})}$ и $W_{mj}^{(\text{тв})}$ — мощности излучения, переносимые соответственно по жидкому слою и по твердому полупространству. Их выделение из формул (4.5.17), (4.5.19) не представляется возможным. Для вычисления величин $W_{mj}^{(\text{ж})}$ и $W_{mj}^{(\text{тв})}$ необходимо найти плотности потоков мощности излучения мод в каждой из сред и проинтегрировать их по поверхности цилиндра большого по сравнению с длинами волн радиуса, вдоль оси которого действует силовой источник.

4.5.3. Мощности излучения продольной и поперечной сферических волн в упругом полупространстве

Вернемся к выражению (4.5.15) для суммарной мощности излучения продольных и поперечных волн в упругом полупространстве. Поскольку для упругих волн всегда $c_l > c_t$, участок интегрирования от $k = k_l$ до $k = k_t$ не может описывать мощность излучения продольной волны, и, следовательно, соответствует мощности излучения поперечной волны. Участок интегрирования от $k = 0$ до $k = k_l$ дает сумму некоторой части мощности излучения поперечной волны и полной мощности излучения продольной волны. Разделение мощностей излучения продольной и поперечной волн также представляется затруднительным. Для их вычисления следует найти потоки мощности излучения в каждой из волн и затем проинтегрировать их по поверхности полусферы большого радиуса с центром в точке расположения источника.

В интегралах (4.5.6), (4.5.7) заменим функции Бесселя на функции Ханкеля, причем для последних воспользуемся асимптотиками при больших значениях аргумента. Выражения для потенциалов при этом принимают вид:

$$\psi = \frac{f_0}{4\pi\rho c_t^2} \sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{-i\pi/4} \int_{\infty e^{i\pi}}^{\infty} \frac{k_t^2 - 2k^2}{D(k)} e^{i(\kappa_l z + kr)} \sqrt{k} dk, \quad (4.5.22)$$

$$A = \frac{if_0}{2\pi\rho c_t^2} \sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{-i3\pi/4} \int_{\infty e^{i\pi}}^{\infty} \frac{\kappa_l}{D(k)} e^{i(\kappa_l z + kr)} k \sqrt{k} dk. \quad (4.5.23)$$

В интегралах (4.5.22), (4.5.23) контур интегрирования в области $\text{Re } k < 0$ проходит выше действительной оси. По отрицательной части действительной оси проведен разрез, обеспечивающий однозначность определения аналитической функции \sqrt{k} на комплексной плоскости k .

Рассмотрим сначала мощность излучения в продольной и поперечной упругих волнах. Переходя к сферической системе координат $R = (r^2 + z^2)^{1/2}$, $\theta = \arccos(z/R)$, вычисляя интегралы (4.5.22), (4.5.23) методом перевала и пользуясь соотношениями (4.5.3) получаем, что в волновой зоне смещения в продольной волне имеют только радиальную R -компоненту, а вектор смещений в поперечной волне — лишь θ -компоненту:

$$u_R = \frac{f_0 k_l^2 \cos \theta (k_t^2 - 2k_l^2 \sin^2 \theta)}{2\pi\rho c_t^2 D(k_l \sin \theta)} \frac{e^{ik_l R}}{R}, \quad (4.5.24)$$

$$u_\theta = -\frac{f_0 k_t^3 \sin \theta \cos \theta \sqrt{k_l^2 - k_t^2 \sin^2 \theta}}{\pi\rho c_t^2 D(k_t \sin \theta)} \frac{e^{ik_l R}}{R}. \quad (4.5.25)$$

Поток мощности излучения имеет в сферической системе координат только радиальную составляющую, и выражения для нее в продольной и поперечной волнах имеют соответственно вид:

$$I_l = \frac{f_0^2 \omega^4 k_l^2 (k_t^2 - 2k_l^2 \sin^2 \theta)^2 \cos^2 \theta}{8\pi^2 \rho c_t^4 c_l R^2 |D(k_l \sin \theta)|^2}, \quad (4.5.26)$$

$$I_t = \frac{f_0^2 \omega^4 k_t^4 |k_l^2 - k_t^2 \sin^2 \theta| \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{2\pi^2 \rho c_t^5 R^2 |D(k_t \sin \theta)|^2}. \quad (4.5.27)$$

Проинтегрировав выражения (4.5.26), (4.5.27) по поверхности полусферы радиуса R получим формулы для мощностей излучения, соответствующих данному типу волны:

$$W_l = \frac{f_0^2 \omega^2}{4\pi\rho c_l^3} \widetilde{W}_l, \quad W_t = \frac{f_0^2 \omega^2}{4\pi\rho c_t^3} \widetilde{W}_t. \quad (4.5.28)$$

Входящие в (4.5.28) безразмерные величины \widetilde{W}_l , \widetilde{W}_t даются выражениями:

$$\widetilde{W}_l = \int_0^{\pi/2} (1 - 2n^2 \sin^2 \theta)^2 \left\{ R_l^2(\theta) + \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \frac{n^2 \cos^2 \theta}{c_t^2/c_0^2 - n^2 \sin^2 \theta} \right\} \times$$

$$\times \operatorname{tg}^2 \left[\frac{c_0}{c_t} (k_0 H) \sqrt{\frac{c_t^2}{c_0^2} - n^2 \sin^2 \theta} \right]^{-1} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta, \quad (4.5.29)$$

$$R_l(\theta) = (1 - 2n^2 \sin^2 \theta)^2 + 4n^3 \sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta}, \quad n = \frac{c_t}{c_l},$$

$$\widetilde{W}_t = \widetilde{W}_t^{(1)} + \widetilde{W}_t^{(2)}, \quad (4.5.30)$$

$$\widetilde{W}_t^{(1)} = \frac{4}{n^3} \int_0^{\arcsin n} \frac{(n^2 - \sin^2 \theta) \cos^2 \theta \sin^3 \theta d\theta}{|D_t^{(1)}(\theta)|^2}, \quad (4.5.31)$$

$$\widetilde{W}_t^{(2)} = \frac{4}{n^3} \int_{\arcsin n}^{\pi/2} \frac{(\sin^2 \theta - n^2) \cos^2 \theta \sin^3 \theta d\theta}{|D_t^{(2)}(\theta)|^2}, \quad (4.5.32)$$

$$|D_t^{(1)}(\theta)|^2 = R_t^2(\theta) + \frac{\rho_0^2}{\rho^2} \frac{n^2 - \sin^2 \theta}{c_t^2/c_0^2 - \sin^2 \theta} \operatorname{tg}^2 \left[\frac{c_0}{c_t} (k_0 H) \sqrt{\frac{c_t^2}{c_0^2} - \sin^2 \theta} \right],$$

$$R_t(\theta) = (1 - 2 \sin^2 \theta)^2 + 4 \sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta},$$

$$|D_t^{(2)}(\theta)|^2 = \left\{ (1 - 2 \sin^2 \theta)^2 + \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sqrt{\sin^2 \theta - n^2}}{\sqrt{c_t^2/c_0^2 - \sin^2 \theta}} \operatorname{tg} \left[\frac{c_0}{c_t} (k_0 H) \sqrt{\frac{c_t^2}{c_0^2} - \sin^2 \theta} \right] \right\}^2 + 16 \sin^4 \theta \cos^2 \theta (\sin^2 \theta - n^2).$$

В отсутствие жидкого слоя над упругим полупространством ($\rho_0 = 0$, или $H = 0$) выражения (4.5.29)–(4.5.32) переходят в известные [Miller, Pursey, 1955; Гуцин, Докучаев и др., 1981] формулы, описывающие мощности излучения продольных и поперечных сферических волн, возбуждаемых при действии точечного гармонического силового источника на границу твердое тело – вакуум.

4.5.4. Парциальные мощности излучения мод в упругом полупространстве и в жидком слое

Перейдем к вычислению мощности излучения мод в упругом полупространстве. Скалярный и векторный потенциалы, соответствующие моде с номером j , пропорциональны вычетам в полюсах подынтегральных выражений в (4.5.22), (4.5.23):

$$\psi_j = \frac{f_0}{\rho c_t^2} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\sqrt{k_{mj}}}{D'(k_{mj})} (k_t^2 - 2k_{mj}^2) e^{-z\sqrt{k_{mj}^2 - k_t^2}} e^{ik_{mj}r}, \quad (4.5.33)$$

$$A_j = \frac{2f_0}{\rho c_t^2} \frac{ie^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{k_{mj} \sqrt{k_{mj}}}{D'(k_{mj})} \sqrt{k_{mj}^2 - k_t^2} e^{-z\sqrt{k_{mj}^2 - k_t^2}} e^{ik_{mj}r}. \quad (4.5.34)$$

Соответствующие потенциалам (4.5.33), (4.5.34) вертикальные и горизонтальные компоненты смещений имеют вид:

$$u_{zj} = \frac{f_0}{\rho c_t^2} \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\sqrt{k_{mj}}}{D'(k_{mj})} \sqrt{k_{mj}^2 - k_t^2} \times \\ \times \left[(2k_{mj}^2 - k_t^2) e^{-z\sqrt{k_{mj}^2 - k_t^2}} - 2k_{mj}^2 e^{-z\sqrt{k_{mj}^2 - k_t^2}} \right] e^{ik_{mj}r}, \quad (4.5.35)$$

$$u_{rj} = \frac{f_0}{\rho c_t^2} \frac{ie^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{k_{mj}\sqrt{k_{mj}}}{D'(k_{mj})} \times \\ \times \left[(k_t^2 - 2k_{mj}^2) e^{-z\sqrt{k_{mj}^2 - k_t^2}} + 2\sqrt{k_{mj}^2 - k_t^2} \sqrt{k_{mj}^2 - k_t^2} e^{-z\sqrt{k_{mj}^2 - k_t^2}} \right]. \quad (4.5.36)$$

Вектор плотности потока мощности в поверхностных модах в упругом полупространстве имеет только горизонтальную компоненту $I_{rj}^{(TB)}$, которая дается выражением:

$$I_{rj}^{(TB)} = \frac{f_0^2 \omega^7}{2\rho c_t^8} \frac{k_{mj}^2}{[D'_{1,2}(k_{mj})]^2} \frac{1}{2\pi r} \left\{ (2\xi_j^2 - 1)^2 [1 + 4(\xi_j^2 - n^2)] e^{-2k_t z \sqrt{\xi_j^2 - n^2}} + \right. \\ + 4\xi_j^2 (4\xi_j^2 - 3)(\xi_j^2 - n^2) e^{-2k_t z \sqrt{\xi_j^2 - 1}} - 2(2\xi_j^2 - 1) \sqrt{\xi_j^2 - n^2} \times \\ \times \left[(1 + 4\xi_j^2 - 2n^2) \sqrt{\xi_j^2 - 1} + (4\xi_j^2 - 1) \sqrt{\xi_j^2 - n^2} \right] \times \\ \left. \times e^{-k_t z \sqrt{\xi_j^2 - n^2}} e^{-k_t z \sqrt{\xi_j^2 - 1}} \right\}. \quad (4.5.37)$$

В (4.5.37) введено обозначение $\xi_j = k_{mj}/k_t > 1$, и следует использовать $D'_1(k_{mj})$ (4.5.18), если $k_t < k_{mj} < k_0$, и $D'_2(k_{m0})$ (4.5.20), если $k_{m0} > k_0$.

Интегрируя $I_{rj}^{(TB)}$ по поверхности полубесконечного цилиндра, ось которого совпадает с осью z , получаем выражение для мощности излучения моды с номером j :

$$W_{mj}^{(TB)} = 2\pi r \int_0^\infty I_{rj}^{(TB)} dz = \frac{f_0^2 \omega^6 k_{mj}^2}{2\rho c_t^7 [D'_{1,2}(k_{mj})]^2} F(\xi_j), \quad (4.5.38)$$

где

$$F(\xi) = \frac{2\xi^2 (4\xi^2 - 3)(\xi^2 - n^2)}{\sqrt{\xi^2 - 1}} + \frac{(2\xi^2 - 1)^2 [1 + 4(\xi^2 - n^2)]}{2\sqrt{\xi^2 - n^2}} - \\ - \frac{2(2\xi^2 - 1) \sqrt{\xi^2 - n^2} [(1 + 4\xi^2 - 2n^2) \sqrt{\xi^2 - 1} + (4\xi^2 - 1) \sqrt{\xi^2 - n^2}]}{\sqrt{\xi^2 - n^2} + \sqrt{\xi^2 - 1}}. \quad (4.5.39)$$

В отсутствие жидкого слоя формула (4.5.38) описывает мощность излучения волны Рэлея, распространяющейся по свободной поверхности упругого полупространства (при этом $\xi_j = k_R/k_t$) [Miller, Pursey, 1955; Гуцин, Докучаев и др., 1981].

Для вычисления мощности излучения мод в жидком слое запишем для звукового давления выражение в виде интеграла с бесконечными пределами, в котором используем асимптотику функции Ханкеля при больших значениях аргумента:

$$p = \frac{i\rho_0\omega^4 f_0}{4\pi\rho c_t^4} \sqrt{\frac{2}{\pi r}} e^{-i\pi/4} \int_{\infty e^{i\pi}}^{+\infty} \frac{\kappa_l \sin \kappa_0(H+z)}{\kappa_0 D(k) \cos \kappa_0 H} e^{ikr} \sqrt{k} dk. \quad (4.5.40)$$

Поле моды с номером j пропорционально вычету в соответствующем полюсе подынтегрального выражения в (4.5.40). Для мод, скорости которых превышают скорость звука в жидкости, имеем:

$$p_j = \frac{\rho_0\omega^4 f_0}{\rho c_t^4} \frac{\sqrt{k_{mj}}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\sqrt{k_{mj}^2 - k_l^2} \sin \left[(z+H) \sqrt{k_0^2 - k_{mj}^2} \right]}{\sqrt{k_0^2 - k_{mj}^2} \cos \left(H \sqrt{k_0^2 - k_{mj}^2} \right)} \frac{1}{D'_1(k_{mj})} e^{-i3\pi/4} e^{ik_{mj}r}. \quad (4.5.41)$$

При достаточно большой толщине слоя скорость фундаментальной моды становится меньше скорости звука в воде. Поле медленной фундаментальной моды описывается формулой:

$$p_0 = \frac{\rho_0\omega^4 f_0}{\rho c_t^4} \frac{\sqrt{k_{m0}}}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\sqrt{k_{m0}^2 - k_l^2} \operatorname{sh} \left[(z+H) \sqrt{k_{m0}^2 - k_0^2} \right]}{\sqrt{k_{m0}^2 - k_0^2} \operatorname{ch} \left(H \sqrt{k_{m0}^2 - k_0^2} \right)} \frac{1}{D'_2(k_{m0})} e^{-i3\pi/4} e^{ik_{m0}r}. \quad (4.5.42)$$

Соответствующие акустическим давлениям (4.5.41), (4.5.42) r -компоненты потоков мощности излучения имеют вид:

$$I_{rj}^{(ж)} = \frac{p_j p_j^*}{2\rho_0 c_{mj}} = \frac{\rho_0 f_0^2 \omega^7 k_{mj}^2}{4\pi r \rho^2 c_t^8} \frac{(k_{mj}^2 - k_l^2) \sin^2 \left[(z+H) \sqrt{k_0^2 - k_{mj}^2} \right]}{(k_0^2 - k_{mj}^2) \cos^2 \left(H \sqrt{k_0^2 - k_{mj}^2} \right)} \frac{1}{[D'_1(k_{mj})]^2}, \quad (4.5.43)$$

$$I_{r0}^{(ж)} = \frac{\rho_0 f_0^2 \omega^7 k_{m0}^2}{4\pi r \rho^2 c_t^8} \frac{(k_{m0}^2 - k_l^2) \operatorname{sh}^2 \left[(z+H) \sqrt{k_{m0}^2 - k_0^2} \right]}{(k_{m0}^2 - k_0^2) \operatorname{ch}^2 \left(H \sqrt{k_{m0}^2 - k_0^2} \right)} \frac{1}{[D'_2(k_{m0})]^2}. \quad (4.5.44)$$

Интегрируя (4.5.43), (4.5.44) по поверхности цилиндра с высотой, равной толщине жидкого слоя, получаем мощности излучения мод:

$$W_{mj}^{(ж)} = 2\pi r \int_{-H}^0 I_{rj}^{(ж)} dz = \frac{\rho_0 f_0^2 \omega^7}{8\rho^2 c_t^8} \frac{k_{mj}^2 (k_{mj}^2 - k_l^2)}{(k_0^2 - k_{mj}^2)^{3/2} [D'_1(k_{mj})]^2} \times \frac{2H \sqrt{k_0^2 - k_{mj}^2} - \sin \left(2H \sqrt{k_0^2 - k_{mj}^2} \right)}{\cos^2 \left(H \sqrt{k_0^2 - k_{mj}^2} \right)}, \quad (4.5.45)$$

$$W_{m0}^{(ж)} = \frac{\rho_0 f_0^2 \omega^7}{8\rho^2 c_t^8} \frac{k_{m0}^2 (k_{m0}^2 - k_l^2)}{(k_{m0}^2 - k_0^2)^{3/2} [D'_2(k_{m0})]^2} \frac{\operatorname{sh} \left(2H \sqrt{k_{m0}^2 - k_0^2} \right) - 2H \sqrt{k_{m0}^2 - k_0^2}}{\operatorname{ch}^2 \left(H \sqrt{k_{m0}^2 - k_0^2} \right)}. \quad (4.5.46)$$

Выражения (4.5.38) и (4.5.45), (4.5.46) для мощностей излучения мод в твердом теле и в жидкости оказываются довольно громоздкими, и убедиться в справедливости формулы (4.5.21) аналитически довольно сложно. Однако это нетрудно сделать численно.

4.5.5. Численное исследование мощностей излучения сейсмоакустических волн в системе жидкий слой – упругое полупространство

Перейдем к количественным оценкам. При проведении численных расчетов удобно представить выражения для мощностей излучения волн различных типов в виде [Miller, Pursey, 1955]

$$W_\alpha = \frac{\omega^2 f_0^2}{4\pi\rho c_l^3} \widetilde{W}_\alpha, \quad (4.5.47)$$

где \widetilde{W}_α – численные коэффициенты (будем называть их приведенными мощностями), а индекс α обозначает тип волны. Из (4.5.17), (4.5.19) следует, что

$$\widetilde{W}_{mj} = -\frac{\pi n_l}{n^4} \frac{x \sqrt{x^2 - n_l^2}}{d'_1(x)}, \quad \text{при } n_t < x = \frac{k_{mj}}{k_0} < 1, \quad (4.5.48)$$

$$\begin{aligned} d'_1(x) = & 8x \left(2x^2 - n_t^2 - \sqrt{x^2 - n_l^2} \sqrt{x^2 - n_t^2} \right) - \frac{4x^3 (2x^2 - n_l^2 - n_t^2)}{\sqrt{x^2 - n_l^2} \sqrt{x^2 - n_t^2}} + \\ & + \frac{\rho_0}{\rho} n_l^4 \left[\frac{x(1 - n_l^2)}{\sqrt{x^2 - n_l^2} (1 - x^2)^{3/2}} \operatorname{tg} \left(k_0 H \sqrt{1 - x^2} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{(k_0 H) x \sqrt{x^2 - n_l^2}}{1 - x^2} \frac{1}{\cos^2 \left((k_0 H) \sqrt{1 - x^2} \right)} \right], \quad (4.5.49) \end{aligned}$$

$$n_l = \frac{c_0}{c_l}, \quad n_t = \frac{c_0}{c_t},$$

$$\widetilde{W}_{m0} = -\frac{\pi n_l}{n^4} \frac{x \sqrt{x^2 - n_l^2}}{d'_2(x)}, \quad \text{при } x = \frac{k_{m0}}{k_0} > 1, \quad (4.5.50)$$

$$\begin{aligned} d'_2(x) = & 8x \left(2x^2 - n_t^2 - \sqrt{x^2 - n_l^2} \sqrt{x^2 - n_t^2} \right) - \frac{4x^3 (2x^2 - n_l^2 - n_t^2)}{\sqrt{x^2 - n_l^2} \sqrt{x^2 - n_t^2}} + \\ & + \frac{\rho_0}{\rho} n_l^4 \left[\frac{x(n_l^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - n_l^2} (x^2 - 1)^{3/2}} \operatorname{th} \left(k_0 H \sqrt{x^2 - 1} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{(k_0 H) x \sqrt{x^2 - n_l^2}}{x^2 - 1} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \left((k_0 H) \sqrt{x^2 - 1} \right)} \right]. \quad (4.5.51) \end{aligned}$$

Из (4.5.38), (4.5.45), (4.5.46) следует, что в обозначениях (4.5.47), (4.5.49), (4.5.51) приведенные мощности мод в упругом полупространстве и в жидком слое запишутся в виде

$$\widetilde{W}_{mj}^{(тв)} = \frac{2\pi}{n^3} \frac{\xi_j^2 n_t^6}{[d'_{1,2}(x)]^2} F(\xi_j), \quad (4.5.52)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{mj}^{(ж)} &= \frac{\pi}{2n^3} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) \frac{x^2 n_t^5}{[d'_1(x)]^2} \frac{x^2 - n_t^2}{(1 - x^2)^{3/2}} \times \\ &\times \frac{2(k_0 H) \sqrt{1 - x^2} - \sin \left[2(k_0 H) \sqrt{1 - x^2} \right]}{\cos^2 \left[(k_0 H) \sqrt{1 - x^2} \right]}, \end{aligned} \quad (4.5.53)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{W}_{m0}^{(ж)} &= \frac{\pi}{2n^3} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) \frac{x^2 n_t^5}{[d'_2(x)]^2} \frac{x^2 - n_t^2}{(x^2 - 1)^{3/2}} \times \\ &\times \frac{\text{sh} \left[2(k_0 H) \sqrt{x^2 - 1} \right] - 2(k_0 H) \sqrt{x^2 - 1}}{\text{ch}^2 \left[(k_0 H) \sqrt{x^2 - 1} \right]}. \end{aligned} \quad (4.5.54)$$

Пусть плотность упругого полупространства составляет $\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$, а скорости поперечных и продольных волн в нем равны соответственно $c_t = 2000 \text{ м/с}$ и $c_l = \sqrt{3} c_t \approx 3464,1 \text{ м/с}$. Плотность жидкого слоя и скорость звука в нем составляют $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$ и $c_0 = 1470 \text{ м/с}$. Результаты расчетов приведенных мощностей мод с номерами 0, 2, 4, 6, 8 и 10 в зависимости от отношения $\tilde{H} = H/\lambda_0$ толщины жидкого слоя H к длине звуковой волны λ_0 в нем представлены на рис. 4.18. Мощности излучения мод с номерами 1, 3, 5 и т. д. равны нулю, т. е. моды с нечетными номерами не возбуждаются точечным вертикальным силовым источником, действующим на дне бассейна.

Из рассмотрения рис. 4.18 следует, что при данных параметрах сред мощность излучения фундаментальной моды всегда заметно выше мощностей излучения мод более высоких номеров. При $H = 0$ (жидкий слой отсутствует) получаем $\widetilde{W}_{m0} = 3,2578$, что соответствует хорошо известному [Miller, Pursey, 1955; Гуцин, Докучаев и др., 1981] значению мощности излучения рэлеевской волны, возбуждаемой силовым источником на границе твердое тело – вакуум. Когда толщина слоя составляет более трех длин звуковой волны, мощность излучения фундаментальной моды перестает зависеть от параметра \tilde{H} и принимает значение $\widetilde{W}_{m0} = 2,7655$, соответствующее мощности излучения волны Стонели на границе раздела твердого и жидкого полупространств (см. формулу (3.1.72)).

Зависимость мощности излучения фундаментальной моды от параметра \tilde{H} имеет резкий максимум. Толщина жидкого слоя, соответствующая этому максимуму, составляет при выбранных значениях параметров сред примерно третью часть длины звуковой волны в слое. Моды более высоких номеров при данной величине \tilde{H} не существуют, следовательно, возможно весьма эффективное возбуждение единственной моды — фундаментальной.

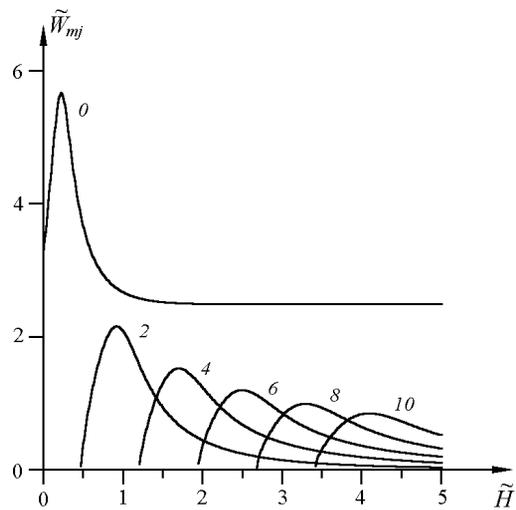


Рис. 4.18. Зависимости полной приведенной мощности мод от приведенной толщины жидкого слоя. Цифры у кривых — номера мод

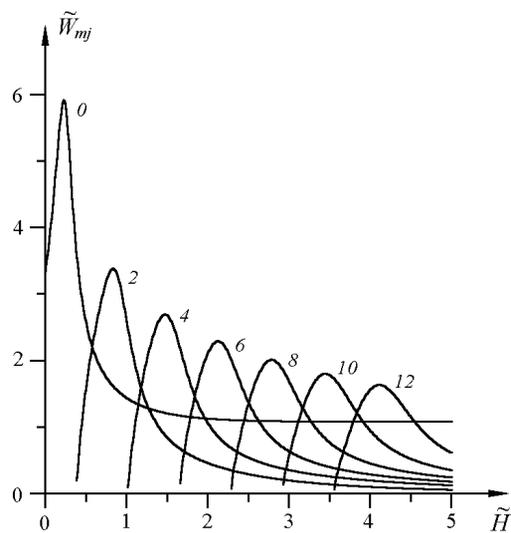


Рис. 4.19. Зависимости полной приведенной мощности излучения мод от приведенной толщины жидкого слоя \tilde{H} . Цифры у кривых — номера мод. Параметры сред соответствуют Южно-Китайскому морю

Мощности излучения мод более высоких номеров при их появлении на соответствующей критической частоте близки к нулю. С ростом параметра \tilde{H} мощность возникшей моды данного номера быстро нарастает, достигает максимума, а затем плавно спадает. Максимальное значение мощности моды последующего номера всегда ниже, чем моды предыдущего номера, а сам этот максимум с ростом номера моды становится менее резким: при увеличении \tilde{H} мощность моды более высокого номера более плавно растёт и, пройдя максимум, ещё более плавно спадает.

На рис. 4.19 приведены результаты расчетов мощностей излучения мод для параметров сред $\rho_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$, $c_0 = 1480 \text{ м/с}$, $\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$, $c_l = 4200 \text{ м/с}$, $c_t = 2400 \text{ м/с}$, соответствующих акватории Южно-Китайского моря [Borodina, Petukhov, 1997; Borodina, Петухов, 1999]. При данных параметрах сред мощность излучения фундаментальной моды (в отличие от результатов рис. 4.18) превышает мощности излучения мод более высоких номеров только на низких частотах. Это связано с тем, что с ростом частоты мощность фундаментальной моды приближается к величине, равной мощности излучения волны Стонели на границе раздела жидкого и твердого полупространств. Эта величина падает с уменьшением отношений плотностей жидкой и твердой сред, а также скоростей акустической и упругих волн (см. § 4.2.1). Таким образом, в зависимости от соотношений между сейсмоакустическими параметрами жидкой и твердой сред мощность фундаментальной моды в области высоких частот может быть как выше, так и ниже мощностей излучения других мод. В остальном рис. 4.19 демонстрирует те же характерные особенности, которые были отмечены для графиков на рис. 4.18. Глубина моря в данном районе Южно-Китайского моря $H = 45 \text{ м}$ [Borodina, Petukhov, 1997; Borodina, Петухов, 1999]. При этом фундаментальная мода наиболее эффективно возбуждается при длине волны $\lambda_0 \approx 150 \text{ м}$, т. е. на частоте $f \approx 10 \text{ Гц}$.

Результаты расчетов величин $\tilde{W}_{mj}^{(тв)}$ и $\tilde{W}_{mj}^{(ж)}$ при параметрах сред, соответствующих рис. 4.18, представлены на рис. 4.20, 4.21. Видно, что часть мощности фундаментальной моды, распространяющейся по твердой среде, в зависимости от толщины слоя может быть как выше, так и ниже максимальных значений мощностей, соответствующих модам с более высокими номерами. Часть мощности фундаментальной моды, передающаяся по жидкому слою, значительно превышает части мощностей других мод.

Для фундаментальной (нулевой) и второй мод максимальное значение мощности излучения, передаваемой по твердой среде, превышает максимальное значение мощности в жидкости (рис. 4.22, 4.23). Для мод более высоких номеров имеет место обратное соотношение, причем с ростом номера моды всё большая часть её мощности распространяется по жидкому слою (рис. 4.24). На высоких частотах для выбранных акустических параметров сред приблизительно две трети мощности фундаментальной моды уходит в жидкость (рис. 4.22). Отметим, что данное соотношение сильно зависит от свойств сред. Так, если увеличить плотность твердого тела до $\rho = 2500 \text{ кг/м}^3$, то при значительной толщине слоя величина $\tilde{W}_{m0}^{(ж)}$ превышает $\tilde{W}_{m0}^{(тв)}$ приблизительно в три раза. Это превышение становится особенно существенным с ростом скоростей упругих волн в твердой среде.

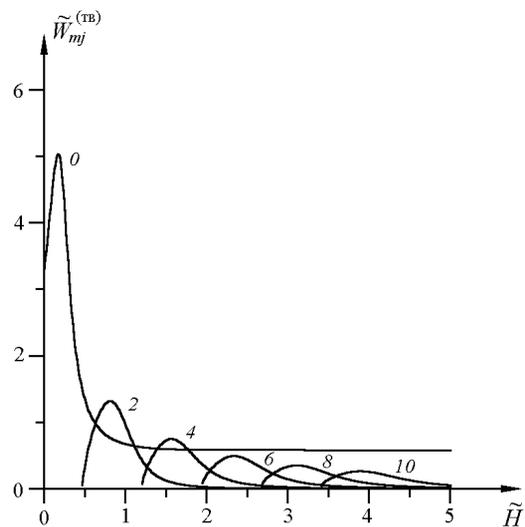


Рис. 4.20. Зависимости приведенных мощностей мод, излучаемых в упругое полупространство, от параметра \tilde{H} . Цифры у кривых — номера мод

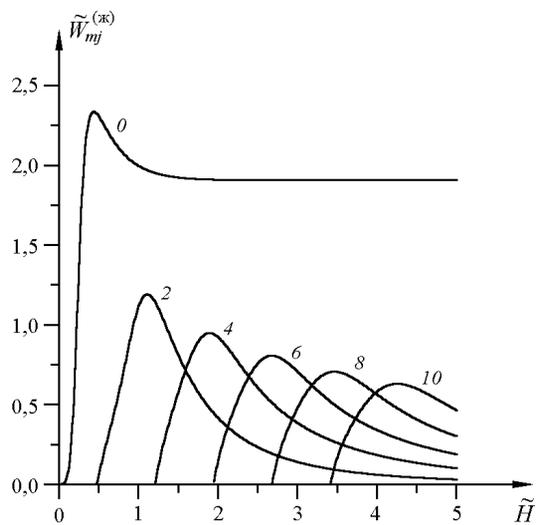


Рис. 4.21. Зависимости приведенных мощностей мод, излучаемых в жидкий слой, от параметра \tilde{H} . Цифры у кривых — номера мод

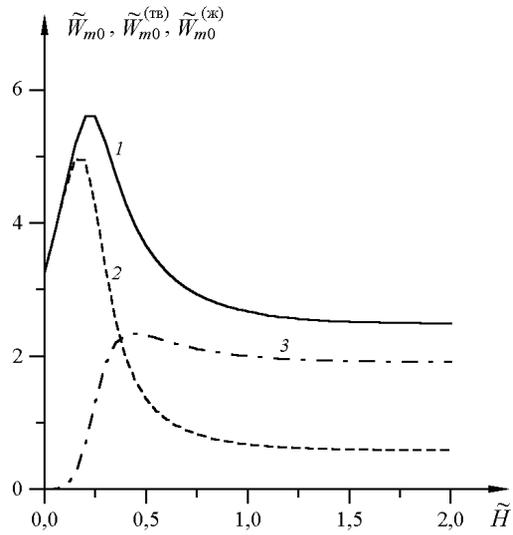


Рис. 4.22. Зависимости полной приведенной мощности фундаментальной моды (1) и её частей, излучаемых в упругое полупространство (2) и в жидкий слой (3), от параметра \tilde{H}

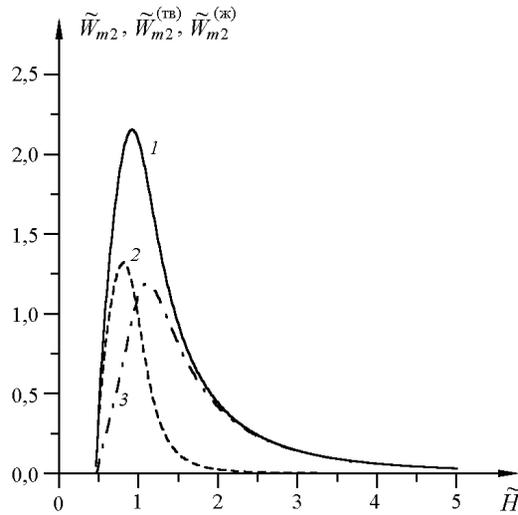


Рис. 4.23. Зависимости полной приведенной мощности второй моды (1) и её частей, излучаемых в упругое полупространство (2) и в жидкий слой (3), от параметра \tilde{H}

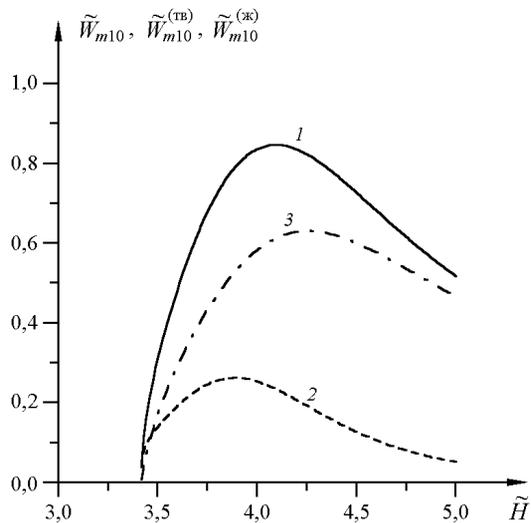


Рис. 4.24. Зависимости полной приведенной мощности десятой моды (1) и её частей, излучаемых в упругое полупространство (2) и в жидкий слой (3), от параметра \tilde{H}

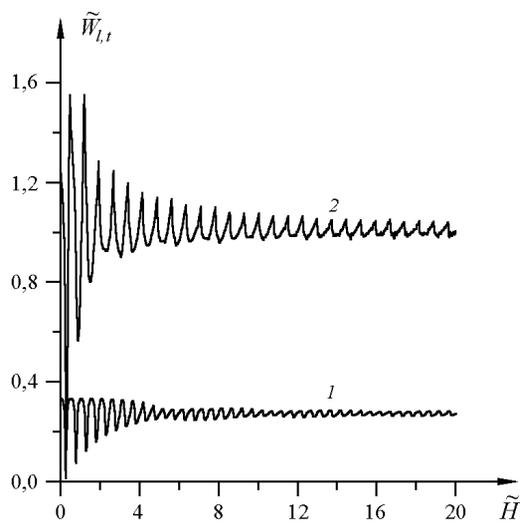


Рис. 4.25. Зависимости приведенных мощностей излучения продольной (1) и поперечной (2) волн в упругом полупространстве от параметра \tilde{H}

Перейдем к анализу мощности излучения объемных волн в упругом полупространстве. Результаты расчетов по формулам (4.5.29)–(4.5.32) представлены на рис. 4.25. В отсутствие жидкого слоя имеем

$$\widetilde{W}_l^{(0)} = 0,333, \quad \widetilde{W}_t^{(0)} = 1,2455,$$

что совпадает с известными результатами [Miller, Pursey, 1955; Гуцин, Докучаев и др., 1981]. Зависимости мощностей излучения от глубины жидкости являются немонотонными. Величины \widetilde{W}_l и \widetilde{W}_t сначала резко уменьшаются с ростом толщины жидкого слоя и достигают своих абсолютных минимумов, когда она равна приблизительно четверти длины звуковой волны. Затем после нескольких сильных колебаний они слабо осциллируют вблизи некоторых постоянных значений. Эти значения при $\widetilde{H} \gg 1$ равны приблизительно $\langle \widetilde{W}_l \rangle = 0,27$ и $\langle \widetilde{W}_t \rangle = 1,01$. Отметим, что $\langle \widetilde{W}_l \rangle$ в 1,2 раза превышает величину $\widetilde{W}_l^{(\infty)} = 0,2234$, соответствующую случаю, когда силовой источник действует на границе твердого и жидкого полупространств с соответствующими параметрами. Для поперечных волн $\langle \widetilde{W}_t \rangle$ в 1,35 раза превышает значение $\widetilde{W}_t^{(\infty)} = 0,7487$. Величины $\widetilde{W}_{l,t}^{(\infty)}$ вычислены по формулам, полученным в § 4.2.2.

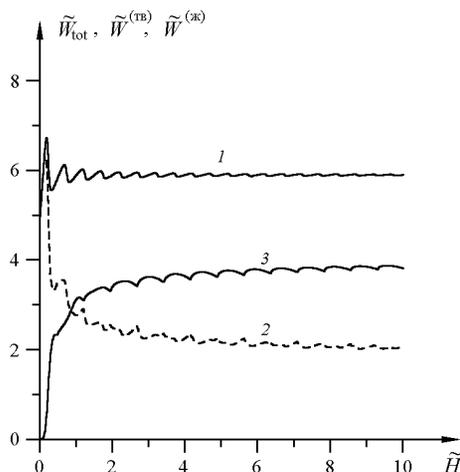


Рис. 4.26. Зависимости полной мощности излучения (1) и суммарных мощностей, излучаемых в упругое полупространство (2) и в жидкий слой (3) от параметра \widetilde{H}

Результаты расчетов суммарных мощностей, излучаемых в твердое тело и в жидкость, представлены на рис. 4.26. Из рассмотрения рис. 4.26 следует, что при малой толщине слоя большая часть мощности излучается в упругое полупространство. При $\widetilde{H} \gtrsim 1$ в обе среды излучаются приблизительно одинаковые мощности. Начиная с $\widetilde{H} \gtrsim 2$ большая часть мощности излучается в жидкий слой. При $\widetilde{H} \gg 1$ около 65% всей мощности излучения уходит в жидкость, а 35% — в твердое тело. Суммарная мощность мод в жидком слое приблизительно в пять раз превышает мощность мод в упругом полупространстве. При этом в упругой среде распределение мощности излучения между сферическими продольными и поперечными

волнами и суммой мод имеет следующий вид:

$$\widetilde{W}_l : \widetilde{W}_t : \widetilde{W}_{\text{mod}}^{(\text{TB})} = 13\% : 51\% : 36\%.$$

Зависимость полной излучаемой мощности

$$\widetilde{W}_{\text{tot}} = \widetilde{W}^{(\text{TB})} + \widetilde{W}^{(\text{ж})}$$

от толщины жидкого слоя также имеет осцилляторный характер, однако при $\tilde{H} \gg \gg 1$ размах этих осцилляций мал и величина $\widetilde{W}_{\text{tot}}$ близка к значению $\widetilde{W}_{\text{tot}}^{(\infty)} = 5,895$, получаемому для случая граничащих жидкого и упругого полупространств.

Аналогичные расчеты, проведенные при параметрах сред, характерных для Южно-Китайского моря, показали, что на высоких частотах ($\tilde{H} \gg 1$) около 67% мощности излучается в воду и, соответственно, 33% — в дно. Распределение мощности излучения по типам волн в дне имеет вид:

$$\widetilde{W}_l : \widetilde{W}_t : \widetilde{W}_{\text{mod}}^{(\text{TB})} = 15\% : 56\% : 29\%.$$

Таким образом, основные результаты выполненных здесь исследований можно сформулировать в следующем виде.

Получены выражения для мощностей излучения мод, а также продольных и сдвиговых волн, возбуждаемых в модельной системе, состоящей из изоскоростного слоя, лежащего на однородном упругом полупространстве, на поверхность которого воздействует точечный гармонический источник вертикальной силы.

Анализ этих выражений позволил установить, что при толщине водного слоя, заметно превышающей длину волны в жидкости, почти 70% излучаемой источником мощности приходится на гидроакустические волны, которые по этой причине могут быть использованы при получении соответствующей информации о параметрах готовящегося подводного землетрясения [Петухов, Хилько, 1985].

Возбуждение сейсмических волн в геофизических средах, содержащих регулярные неоднородности

5.1. Вязкоупругое пространство с полостями канонических форм

5.1.1. Задача для вязкоупругого пространства с круговой цилиндрической полостью

Решение задачи об установившихся гармонических колебаниях вязкоупругого пространства с полостью канонической формы (круговой цилиндр, эллиптический цилиндр, сфера, эллипсоид) оказывается довольно сложным. В этой связи изложим сначала алгоритм построения решения на примере исследования задачи в антиплоской постановке, когда рассматриваются чисто сдвиговые деформации.

Пусть вязкоупругая среда характеризуется плотностью ρ и модулем сдвига μ (или скоростью распространения сдвиговых волн V_s) и занимает в цилиндрической системе координат $\{R, \varphi, z\}$ область $R \geq a$. На границе цилиндрической полости задана система сдвиговых усилий

$$R = a: \quad \tau_{Rz} = \mu \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial R} = Y(\varphi). \quad (5.1.1)$$

На бесконечности задаются условия излучения энергии упругих волн. Движение точек вязкоупругой области описывается уравнениями Ламе (1.1.1), (1.2.7), которые для случая деформации чистого сдвига принимают вид (1.2.2). Отличие заключается в том, что оператор Лапласа, определяющий уравнение (1.2.2), должен быть представлен в цилиндрических координатах [Корн, 1970; Рекач, 1977]. Тогда уравнение движения будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial^2 u_z^{(2)}}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_z^{(2)}}{\partial \varphi^2} + \theta^2 u_z^{(2)} = 0, \quad \theta = \omega a / V_s, \quad (5.1.2)$$

и его решение строим методом разделения переменных

$$u_z^{(2)}(R, \varphi) = \Phi(R)\Psi(\varphi).$$

Подставляя это представление в (5.1.2) и разделяя переменные, получим для определения $\Phi(R)$ и $\Psi(\varphi)$ следующие уравнения

$$R^2 \frac{d^2 \Phi}{dR^2} + R \frac{d\Phi}{dR} + (\theta^2 R^2 - m^2)\Phi = 0,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi^2} - m^2 \Psi = 0,$$

где m — постоянная разделения.

Решение первого дифференциального уравнения приводит к функциям Бесселя или Ханкеля [Абрамовиц, Стиган, 1979; Ватсон, 1949]

$$\Phi(R) = C_{1m}H_m^{(1)}(\theta R) + C_{2m}H_m^{(2)}(\theta R).$$

Здесь $H_m^{(1)}(\zeta)$ — функции Ханкеля первого рода, $H_m^{(2)}$ — функции Ханкеля второго рода.

Решение второго уравнения имеет вид

$$\Psi(\varphi) = C_m e^{im\varphi}.$$

Учитываем, что при $R \rightarrow \infty$ функции Ханкеля первого и второго рода убывают на бесконечности, но описывают волны с фазовыми скоростями противоположных знаков. В частности, при временном множителе $\exp(-i\omega t)$ функции Ханкеля первого рода описывают волны, уходящие от границ цилиндрической полости на бесконечность, в чем легко убедиться, рассмотрев волновое поле в дальней от источника зоне, при описании которого используется главный член асимптотического разложения функций Ханкеля первого рода. Тогда полагаем $C_{2m} = 0$ и общее решение уравнения (5.1.2) в цилиндрической системе координат описывается следующим выражением

$$u_z^{(2)}(R, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m H_m^{(1)}(\theta R) e^{im\varphi}. \quad (5.1.3)$$

Неопределенные постоянные A_m в этом представлении определяем из граничных условий (5.1.1). Для этого раскладываем функцию $Y(\varphi)$ в ряд Фурье [Корн, 1970] и, приравнявая соответствующие множители рядов (в правой и левой частях), получаем следующие представления для неопределенных постоянных

$$\begin{aligned} A_m &= a\mu^{-1}\Delta_m^{-1}Y_m, \\ Y_m &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\varphi) e^{-im\varphi} d\varphi, \\ \Delta_m &= mH_m^{(1)}(\theta) - \theta H_{m+1}^{(1)}(\theta). \end{aligned}$$

Таким образом, получено решение сформулированной задачи, позволяющее проводить анализ волновых полей в среде при заданной функции $Y(\varphi)$, характеризующей распределение напряжений на границе цилиндрической полости.

Заметим, что при построении решения аналогичной задачи в пространственной постановке используется преобразование Фурье по осевой координате z , после чего общая схема построения решения полностью аналогична изложенной. Ввиду чрезвычайной громоздкости выкладок, сопровождающих построение решения задачи для пространства с цилиндрической полостью в трехмерном пространстве, приведем только итоговые соотношения, опуская промежуточные преобразования.

Итак, обратимся к постановке пространственной задачи (рис. 5.1). Вязкоупругая среда с плотностью ρ и параметрами Ламе λ , μ занимает в цилиндрической системе координат область $R \geq a$.

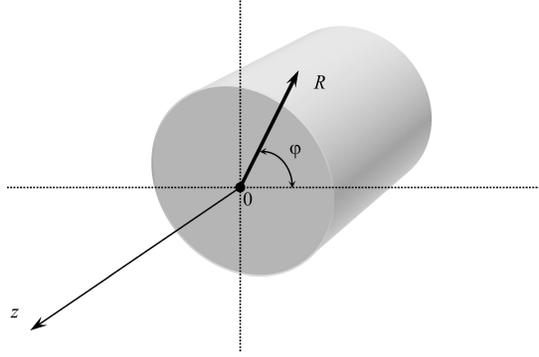


Рис. 5.1. Постановка пространственной задачи

Возбуждение колебаний осуществляется осциллирующей с частотой ω системой распределенных усилий, приложенных к границе цилиндрической полости $R = a$:

$$\vec{\sigma} = \{\sigma_R, \tau_{R\varphi}, \tau_{Rz}\} = \begin{cases} \vec{Y}(R, \varphi, z) \exp(-i\omega t), & |z| \leq d, \\ 0, & |z| > d, \end{cases}$$

$$\vec{Y} = \{Y_1(R, \varphi, z), Y_2(R, \varphi, z), Y_3(R, \varphi, z)\}.$$

На бесконечности задаются условия излучения энергии упругих волн.

Движение среды описывается динамическими уравнениями Ламе, которые в цилиндрических координатах записываются в виде [Рекач, 1977]:

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu)R \frac{\partial \theta}{\partial R} - 2\mu \left[\frac{\partial \omega_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z} (R\omega_\varphi) \right] = \rho \frac{\partial^2 u_R}{\partial t^2} \\ (\lambda + 2\mu)R^{-1} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - 2\mu \left(\frac{\partial \omega_R}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial R} \right) = \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} \\ (\lambda + 2\mu)R \frac{\partial \theta}{\partial z} - 2\mu \left[\frac{\partial}{\partial R} (R\omega_\varphi) - \frac{\partial \omega_R}{\partial \varphi} \right] = \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \end{cases},$$

где

$$\begin{aligned} \theta &= R^{-1} \left[\frac{\partial (Ru_R)}{\partial R} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \omega_R &= (2R)^{-1} \left[\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} - R \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right], \quad \omega_\varphi = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_R}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial R} \right], \\ \omega_z &= (2R)^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial R} (Ru_\varphi) - \frac{\partial u_R}{\partial \varphi} \right]. \end{aligned}$$

Закона Гука в цилиндрических координатах имеет вид

$$\sigma_R = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u_R}{\partial R}, \quad \tau_{R\varphi} = \mu \left[R^{-1} \frac{\partial u_R}{\partial \varphi} + R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{u_\varphi}{R} \right) \right], \quad \tau_{Rz} = \mu \left[\frac{\partial u_z}{\partial R} + \frac{\partial u_R}{\partial z} \right].$$

Применяя к уравнениям движения и к граничным условиям преобразование Фурье по координате z , реализуем схему разделения переменных в системе уравнений Ламе и строим общее решение, удовлетворяя заданным на цилиндрической поверхности граничным условиям. В результате представляется возможным получить образ

Фурье решения задачи. Интегральное представление решения получаем, применяя обратное преобразование Фурье.

Замечание. Того же результата можно добиться иным путем. Для этого используется замена (1.2.9) при решении системы уравнений Ламе (1.2.7), в результате система разбивается на гармоническое и бигармоническое уравнения для определения функций a_1 , a_2 . Используя известное представление оператора Лапласа в цилиндрической системе координат [Корн, 1970] и соотношения, выражающие декартовы координаты через цилиндрические, приходим к тому же общему решению в преобразовании Фурье по осевой координате. Последнее всегда возможно в связи с инвариантностью уравнений Ламе и представлений оператора Лапласа в ортогональных криволинейных системах координат.

Реализуя изложенную схему, приходим к следующему интегральному представлению компонент вектора смещения точек области в цилиндрических координатах $\vec{u}(R, \varphi, z) = \{u_R, u_\varphi, u_z\} = \{u_1, u_2, u_3\}$, связанных с её центром

$$u_k(R, \varphi, z) = \frac{a}{2\pi\mu} \int_{\Gamma} \left\{ \sum_{j=1}^3 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^3 \Delta_n^{-1} f_{jn}^k(\alpha, R) Y_{ln}(\alpha) E_{jl}^n \exp[in\varphi - i\alpha z] \right\} d\alpha, \quad (5.1.4)$$

где

$$\begin{aligned} f_{mn}^{(1)}(\alpha, R) &= [H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_m R)]_R, & f_{3n}^{(1)} &= \frac{in}{R} H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_2 R), & f_{mn}^{(2)} &= \frac{in}{R} H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_m R), \\ f_{3n}^{(2)} &= -[H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_2 R)]_R, & m &= 1, 2, \\ f_{1n}^{(3)} &= -\alpha H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_1 R), & f_{2n}^{(3)} &= \frac{\bar{\sigma}_2^2}{i\alpha} H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_2 R), & f_{3n}^{(3)} &= 0, \end{aligned}$$

$H_n^{(1)}(\zeta)$ — функция Ханкеля первого рода [Абрамовиц, Стиган, 1979],

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_m^2 &= -\sigma_m^2 = \theta_m^2 - \alpha^2, \\ \theta_1 &= \frac{\omega a}{V_p}, & \theta_2 &= \frac{\omega a}{V_s}, \\ Y_{jn}(\alpha) &= (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y_j(\varphi, z) \exp[-i(n\varphi - \alpha z)] dx d\varphi, \\ \Delta_n &= F_{31}^{(n)} E_{13}^{(n)} + F_{32}^{(n)} E_{23}^{(n)} + F_{33}^{(n)} E_{33}^{(n)}, \\ F_{31}^{(n)}(\alpha) &= -2i\alpha (H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_1 R))_R \Big|_{R=1}, \\ F_{32}^{(n)}(\alpha) &= \frac{\alpha^2 - \bar{\sigma}_2^2}{i\alpha} (H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_2 R))_R \Big|_{R=1}, \\ F_{33}^{(n)}(\alpha) &= \alpha n H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_2), \end{aligned}$$

$$E_{11}^{(n)}(\alpha) = \frac{2}{i\alpha} \left\{ -\alpha^2 n^2 H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_2) [\{2(n^2 - n) - \bar{\sigma}_2^2\} H_n(1)(\bar{\sigma}_2) + 2\bar{\sigma}_2 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_2)] \right\},$$

$$\begin{aligned}
 E_{12}^{(n)}(\alpha) &= \frac{2}{\alpha} \left\{ n(\alpha^2 - \bar{\sigma}_2^2) [nH_n^{(1)}(\bar{\sigma}_2) - \bar{\sigma}_2 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_2)] [(n-1)H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_2) - \right. \\
 &\quad \left. - \bar{\sigma}_2 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_2)] - \alpha^2 n H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_2) [\{n^2 - n - \bar{\sigma}_2^2\} H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_2) + \bar{\sigma}_2 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_2)] \right\}, \\
 E_{13}^{(n)}(\alpha) &= - \left\{ 2(n^2 - n - \bar{\sigma}_2^2) H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_2) + 2\bar{\sigma}_2 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_2) \right\} \left\{ [2(n^2 - n) - \bar{\sigma}_2^2] H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_2) + \right. \\
 &\quad \left. + 2\bar{\sigma}_2 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_2) \right\} - 4n^2 \left\{ (n-1)H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_2) - \bar{\sigma}_2 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_2) \right\}, \\
 E_{21}^{(n)}(\alpha) &= \left\{ 2i\alpha [nH_n^{(1)}(\bar{\sigma}_1) - \bar{\sigma}_1 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_1)] \left[(2(n^2 - n) - \bar{\sigma}_2^2) H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_2) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2\bar{\sigma}_2 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_2) \right] - 2in^2 \alpha H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_2) [(n-1)H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_1) - \bar{\sigma}_1 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_1)] \right\}, \\
 E_{23}^{(n)}(\alpha) &= \left\{ -4n^2 [(n-1)H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_1) - \bar{\sigma}_1 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_1)] [(n-1)H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_2) - \bar{\sigma}_2 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_2)] + \right. \\
 &\quad \left. + [(2(n^2 - n) - \bar{\sigma}_2^2) H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_2) + 2\bar{\sigma}_2 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_2)] [2\{(n^2 - n - \bar{\sigma}_1^2) H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_1) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \bar{\sigma}_1 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_1)\} - \frac{\lambda}{\mu} (\alpha^2 + \bar{\sigma}_1^2) H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_1)] \right\}, \\
 E_{22}^{(n)}(\alpha) &= \left\{ \alpha n H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_2) \left[2(H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_1)(n^2 - n - \bar{\sigma}_1^2) + \bar{\sigma}_1 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_1)) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{\lambda}{\mu} (\alpha^2 + \bar{\sigma}_1^2) H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_1) \right] - 4\alpha n [H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_2)(n-1) - \bar{\sigma}_2 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_2)] \times \right. \\
 &\quad \left. \times [nH_n^{(1)}(\bar{\sigma}_1) - \bar{\sigma}_1 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_1)] \right\}, \\
 E_{31}^{(n)}(\alpha) &= \alpha^{-1} \left\{ 2n(\alpha^2 - \bar{\sigma}_2^2) [nH_n^{(1)}(\bar{\sigma}_2) - \bar{\sigma}_2 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_2)] \times \right. \\
 &\quad \times [H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_1)(n-1) - \bar{\sigma}_1 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_1)] - 4n\alpha^2 [nH_n^{(1)}(\bar{\sigma}_1) - \bar{\sigma}_1 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_1)] \times \\
 &\quad \left. \times [H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_2)(n-1) - \bar{\sigma}_2 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_2)] \right\}, \\
 E_{32}^{(n)}(\alpha) &= \left\{ -4i\alpha^2 [nH_n^{(1)}(\bar{\sigma}_1) - \bar{\sigma}_1 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_1)] [H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_2)(n^2 - n - \bar{\sigma}_2^2) + \right. \\
 &\quad \left. + \bar{\sigma}_2 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_2)] + \frac{i(\alpha^2 - \bar{\sigma}_{12}^2)}{\alpha} [nH_n^{(1)}(\bar{\sigma}_2) - \bar{\sigma}_2 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_2)] \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left[2\{H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_1)(n^2 - n - \bar{\sigma}_1^2) + \bar{\sigma}_1 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_1)\} - \frac{\lambda}{\mu} (\alpha^2 + \bar{\sigma}_1^2) H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_1) \right] \right\}, \\
 E_{33}^{(n)}(\alpha) &= 2in \left\{ 2H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_1)(n^2 - n - \bar{\sigma}_1^2) + \bar{\sigma}_1 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_1) - \frac{\lambda}{\mu} (\alpha^2 + \bar{\sigma}_1^2) H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_1) \right\} \times \\
 &\quad \times [H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_2)(n-1) - \bar{\sigma}_2 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_2)] - 2[H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_1)(n-1) - \bar{\sigma}_1 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_1)] \times \\
 &\quad \times [H_n^{(1)}(\bar{\sigma}_2)(n^2 - n - \bar{\sigma}_2^2) + \bar{\sigma}_2 H_{n+1}^{(1)}(\bar{\sigma}_2)].
 \end{aligned}$$

В приведенных соотношениях фигурируют функции Ханкеля первого рода $H_m^{(1)}(\zeta)$. Выбор указанных функций обусловлен тем, что при заданном законе гармонических колебаний ($\exp(-i\omega t)$) эти функции описывают волны, уходящие на бесконечность, т. е. удовлетворяют условиям излучения энергии. Вид контура интегрирования Γ обусловлен критериями, изложенными выше, совпадает с вещественной осью для вязкоупругой среды и полностью идентичен контуру интегрирования Γ , приведенному выше для идеально упругого случая.

При исследовании аналогичной задачи в плоской постановке естественно положить в граничных условиях и приведенных выше соотношениях $Y_3 \equiv 0$. Вектор смещения

$$\vec{u}(R, \varphi) = \{u_R(R, \varphi), u_\varphi(R, \varphi)\} = \{u_1, u_2\}$$

определяется приведенными выше соотношениями, где суммирование ведется до индекса 2 ($k = 1, 2$), $\alpha = 0$. При предельном переходе ($\alpha \rightarrow 0$) следует обратить внимание на раскрытие неопределенностей в некоторых определяющих соотношениях.

В случае задачи об антиплоских установившихся колебаниях пространства с круговой цилиндрической полостью имеем

$$\begin{aligned} Y_1 &= Y_2 = 0, \\ Y_3 &= Y_3(\varphi) \exp(-i\omega t), \\ u_R &= u_\varphi = 0, \\ u_z(R, \varphi) &= \frac{a}{\mu} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n \Delta_n^{-1} H_n^{(1)}(\theta_2 R) \exp(in\varphi), \\ Y_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Y(\xi) \exp(-in\xi) d\xi, \\ \Delta_n &= nH_n^{(1)}(\theta_2) - \theta H_{n+1}^{(1)}(\theta_2). \end{aligned}$$

Приведенные соотношения позволяют произвести расчет амплитудных функций компонент вектора смещения точек пространства с круговой цилиндрической полостью при возбуждении колебаний нагрузкой, распределенной на поверхности полости.

Основной целью построения решения данной задачи является его дальнейшее использование при решении задачи о колебаниях слоистого полупространства с заглубленной цилиндрической полостью.

5.1.2. Задача для вязкоупругого пространства со сферической полостью

Рассмотрим пространственную задачу о возбуждении установившихся гармонических колебаний в вязкоупругом пространстве со сферической полостью.

Пусть вязкоупругая среда занимает в сферической системе координат $\{r, \varphi, \psi\}$, связанной с центром сферической полости, область $r \geq a$ (рис. 5.2).

На сферической границе области $r = a$ заданы осциллирующие напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= Y_1(\varphi, \psi) \exp(-i\omega t), \\ \tau_{r\varphi} &= Y_2(\varphi, \psi) \exp(-i\omega t), \\ \tau_{r\psi} &= Y_3(\varphi, \psi) \exp(-i\omega t). \end{aligned}$$

На бесконечности задаются условия излучения энергии упругих волн.

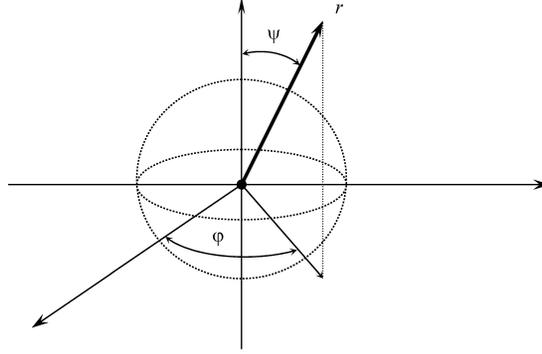


Рис. 5.2. Вязкоупругое пространство со сферической полостью

Уравнения движения такой модельной геофизической среды — пространственные уравнения Ламе (1.1.1) в сферической системе координат [Рекач, 1977] — имеют вид

$$(\lambda + 2\mu) r \sin \psi \frac{\partial \theta}{\partial r} - 2\mu \left[\frac{\partial \omega_\psi}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \psi} (\omega_\varphi \sin \psi) \right] = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2},$$

$$(\lambda + 2\mu) \frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} - 2\mu \left[\frac{\partial \omega_r}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial r} (r \omega_\psi) \right] = \rho \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2},$$

$$(\lambda + 2\mu) \sin \psi \frac{\partial \theta}{\partial \psi} - 2\mu \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \omega_\varphi \sin \psi) - \frac{\partial \omega_r}{\partial \varphi} \right] = \rho \frac{\partial^2 u_\psi}{\partial t^2},$$

где

$$\theta = r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (u_\varphi \sin \varphi) + \frac{\partial u_\psi}{\partial \psi} \right],$$

$$\omega_r = \frac{1}{2r \sin \psi} \left[\frac{\partial u_\psi}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \psi} (u_\varphi \sin \psi) \right],$$

$$\omega_\varphi = \frac{1}{2r} \left[\frac{\partial u_r}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial r} (r u_\varphi) \right],$$

$$\omega_\psi = \frac{1}{2r \sin \psi} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r u_\varphi \sin \psi) - \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right].$$

Следует отметить, что при построении решения этой системы с использованием замены типа (1.2.9) требуется представление оператора Лапласа скалярной функции в сферических координатах [Корн, 1970]

$$\Delta = r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}.$$

Соотношения закона Гука, необходимые для удовлетворения граничным условиям на сферической поверхности в сферических координатах, имеют вид:

$$\sigma_r = \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r},$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{\mu}{r} \left[\frac{1}{\sin \psi} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\varphi}{r} \right) \right],$$

$$\tau_{r\psi} = \frac{\mu}{r} \left[r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\psi}{r} \right) + \frac{\partial u_r}{\partial \psi} \right].$$

Решение сформулированной краевой задачи о возбуждении установившихся гармонических колебаний в пространстве со сферической полостью, позволяющее произвести расчет амплитудной функции вектора смещения точки области $u(r, \varphi, \psi) = \{u_r, u_\varphi, u_\psi\}$, определяются как

$$\begin{aligned} u_r(r, \varphi, \psi) &= \frac{a}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \Delta_n^{-1} \{ [a_{22}^{(n)} u_{n1}^{(m)}(r, \varphi, \psi) - a_{21}^{(n)} u_{n2}^{(m)}(r, \varphi, \psi)] Y_{1n}^{(m)} + \\ &\quad + [-a_{12}^{(n)} u_{n1}^{(m)}(r, \varphi, \psi) + a_{11}^{(n)} u_{n2}^{(m)}(r, \varphi, \psi)] Y_{2n}^{(m)} \}, \\ u_\varphi(r, \varphi, \psi) &= \frac{a}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\langle \Delta_n^{-1} \{ [a_{22}^{(n)} v_{n1}^{(m)}(r, \varphi, \psi) - a_{21}^{(n)} v_{n2}^{(m)}(r, \varphi, \psi)] Y_{1n}^{(m)} + \right. \\ &\quad \left. + [-a_{12}^{(n)} v_{n1}^{(m)}(r, \varphi, \psi) + a_{11}^{(n)} v_{n2}^{(m)}(r, \varphi, \psi)] Y_{2n}^{(m)} \right\} + \frac{v_{n3}^{(m)}(r, \varphi, \psi)}{a_{31}^{(n)}} Y_{3n}^{(m)} \rangle, \\ u_\psi(r, \varphi, \psi) &= \frac{a}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left\langle \Delta_n^{-1} \{ [a_{22}^{(n)} w_{n1}^{(m)}(r, \varphi, \psi) - a_{21}^{(n)} w_{n2}^{(m)}(r, \varphi, \psi)] Y_{1n}^{(m)} + \right. \\ &\quad \left. + [-a_{12}^{(n)} w_{n1}^{(m)}(r, \varphi, \psi) + a_{11}^{(n)} w_{n2}^{(m)}(r, \varphi, \psi)] Y_{2n}^{(m)} \right\} + \frac{w_{n3}^{(m)}(r, \varphi, \psi)}{a_{31}^{(n)}} Y_{3n}^{(m)} \rangle. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} u_{n1}^{(m)} &= [\theta_1^2 \sqrt{r}]^{-1} \left[\frac{n}{r} H_{n+1/2}^{(1)}(\theta, r) - \theta_1 H_{n+3/2}^{(1)}(\theta, r) \right] S_n^{(m)}(\varphi, \psi), \\ u_{n2}^{(m)} &= [\theta_2^2 \sqrt{r^3}]^{-1} H_{n+1/2}^{(1)}(\theta_2, r) S_n^{(m)}(\varphi, \psi), \\ v_{n1}^{(m)} &= [\theta_1^2 \sqrt{r^3}]^{-1} H_{n+1/2}^{(1)}(\theta, r) \frac{\partial S_n^{(m)}(\varphi, \psi)}{\partial \varphi}, \\ v_{n2}^{(m)} &= \frac{(\sqrt{r})^{-1}}{n(n+1)\theta_2^2} \left[\frac{n+1}{r} H_{n+1/2}^{(1)}(\theta_2 r) - \theta_2 H_{n+3/2}^{(1)}(\theta_2 r) \right] \frac{\partial S_n^{(m)}(\varphi, \psi)}{\partial \varphi}, \\ v_{n3}^{(m)} &= \frac{(\sqrt{r})^{-1}}{n(n+1)\theta_2^2 \sin \varphi} H_{n+1/2}^{(1)}(\theta_2 r) \frac{\partial S_n^{(m)}(\varphi, \psi)}{\partial \psi}, \\ w_{n1}^{(m)} &= [\theta_1^2 \sqrt{r^3}]^{-1} H_{n+1/2}^{(1)}(\theta_1 r) (\sin \varphi)^{-1} \frac{\partial S_n^{(m)}(\varphi, \psi)}{\partial \psi}, \\ w_{n2}^{(m)} &= \frac{(\sqrt{r})^{-1}}{n(n+1)\theta_2^2 \sin \varphi} \left[\frac{n+1}{r} H_{n+1/2}^{(1)}(\theta_2 r) - \theta_2 H_{n+3/2}^{(1)}(\theta_2 r) \right] \frac{\partial S_n^{(m)}(\varphi, \psi)}{\partial \psi}, \\ w_{n3}^{(m)} &= -\frac{(\sqrt{r})^{-1}}{n(n+1)\theta_2^2} H_{n+1/2}^{(1)}(\theta_2 r) \frac{\partial S_n^{(m)}(\varphi, \psi)}{\partial \varphi}, \end{aligned}$$

$$Y_{1n}^{(k)} = 0, 5 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi Y_1(\varphi, \psi) \bar{S}_n^{(k)}(\varphi, \psi) \sin \varphi d\varphi,$$

$$Y_{2n}^{(k)} = 0, 5 \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi \left[Y_2(\varphi, \psi) \frac{\partial}{\partial \varphi} \bar{S}_n^{(k)}(\varphi, \psi) + (\sin \varphi)^{-1} Y_3(\varphi, \psi) \frac{\partial}{\partial \psi} \bar{S}_n^{(k)}(\varphi, \psi) \right] \sin \varphi d\varphi,$$

$$Y_{3n}^{(k)} = \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^\pi (\sin \varphi)^{-1} \left[Y_2(\varphi, \psi) \frac{\partial}{\partial \psi} \bar{S}_n^{(k)}(\varphi, \psi) - Y_3(\varphi, \psi) \partial \varphi \bar{S}_n^{(k)}(\varphi, \psi) \right] \sin \varphi d\varphi,$$

$$S_n^{(k)}(\varphi, \psi) = \left[\frac{(2n+1)(n-k)!}{4\pi(n+k)!} \right]^{1/2} P_n^{|k|}(\cos \varphi) \exp(ik\varphi).$$

$\bar{S}_n^{(k)}(\varphi, \psi)$ — функции, комплексно сопряженные $S_n^{(k)}$,

$P_n^{|k|}(\cos \varphi)$ — присоединенные функции Лежандра [Абрамович, Стиган, 1979],

$$a_{11}^{(n)} = \left[-0, 5 \left(\frac{\theta_2}{\theta_1} \right)^2 + \frac{n(n-1)}{\theta_1^2} \right] H_{n+1/2}^{(1)}(\theta_1) + \frac{2}{\theta_1} H_{n+3/2}^{(1)}(\theta_1),$$

$$a_{12}^{(n)} = \theta_2^{-2} [(n-1) H_{n+1/2}^{(1)}(\theta_2) - \theta_2 H_{n+3/2}^{(1)}(\theta_2)],$$

$$a_{21}^{(n)} = \frac{n(n+1)}{\theta_2^2} [(n-1) H_{n+1/2}^{(1)}(\theta_1) - \theta_1 H_{n+3/2}^{(1)}(\theta_1)],$$

$$a_{22}^{(n)} = \theta_2^{-2} \langle [n^2 - 1 - 0, 5 t_2^2] H_{n+1/2}^{(1)}(\theta_2) + \theta_2 H_{n+3/2}^{(1)}(\theta_2) \rangle.$$

Из приведенных соотношений как частный случай несложно получить решение задачи об осесимметричных колебаниях модельной геофизической среды.

В общем случае приведенные соотношения необходимы для исследования задачи о колебаниях вязкоупругого полупространства (слоистого полупространства) со сферической полостью.

5.2. Слоистое полупространство с полостями канонических форм

Пусть среда занимает в декартовой системе координат область

$$x \geq 0 \cup R = \sqrt{y^2 + (x-h)^2} \geq a.$$

Колебания в среде возбуждаются осциллирующими нагрузками, приложенными к границе области

$$\begin{aligned} x = 0 : \quad \tau_{xz} &= t(y) e^{-i\omega t}, \\ R = a : \quad \tau_{Rz} &= \tau(\varphi) e^{-i\omega t}. \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

Условия на границе соответствуют случаю возбуждения чисто сдвиговых колебаний в упругой среде. Колебания предполагаются установившимися гармоническими, ω — круговая частота колебаний.

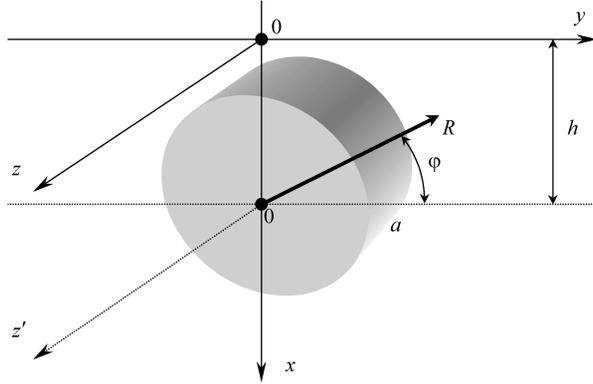


Рис. 5.3. К задаче о полупространстве с заглублённой цилиндрической полостью

Для указанных задач движение сплошной среды описывается уравнениями (1.2.2). На рис. 5.3 показана постановка данной модельной задачи.

Связь между декартовыми (x, y) и цилиндрическими (R, φ) координатами определяется следующими соотношениями

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon^{-1} - R \cos \varphi, & y &= -R \sin \varphi, & \varepsilon &= \frac{a}{h}, \\ R &= \sqrt{y^2 + (x - \varepsilon^{-1})^2}, & \varphi &= \arctg \left[\frac{y}{(x - \varepsilon^{-1})} \right]. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

В случае установившихся гармонических колебаний инициируемых нагрузками, изменяющимися во времени по закону $\exp(-i\omega t)$, решение также ищем в виде

$$U_z(x, y, t) = u_z(x, y) \exp(-i\omega t).$$

Для решения задачи используется принцип суперпозиции, справедливый как для вязкоупругих, так и для акустических колебаний. В соответствии с ним уравнение движения точек среды (уравнение Гельмгольца) и определяющий его оператор Лапласа Δ инвариантны в ортогональных криволинейных системах координат. Тогда решение уравнения Гельмгольца при заданных граничных условиях в области, представляющей собой пересечение подобластей, ограниченных координатными поверхностями различных ортогональных систем координат (декартовой и цилиндрической), может быть определено как сумма решений более простых задач для однородного полупространства и пространства с цилиндрической полостью.

Поясним это на рассматриваемом примере. Область, занимаемая упругой средой, на плоскости представляет собой пересечение подобластей $x \geq 0$ (полуплоскость, граница которой описывается в декартовой системе координат) и $R \geq a$ (плоскость с круговым вырезом, граница которой $R = a$) описывается координатной поверхностью в цилиндрической системе координат R, φ, z . Существенно, что решение уравнения Гельмгольца для каждой из описанных подобластей при произвольных граничных условиях строится достаточно просто. Тогда решение исходной краевой задачи целесообразно искать в виде суммы

$$u_z(x, y) = u_z^{(1)}(x, y) + u_z^{(2)}(x, y), \quad (5.2.3)$$

где $u_z^{(1)}(x, y)$ есть решение уравнения движения для однородного полупространства, на границу которого действуют системы распределенных усилий; $x = 0$, $\tau_{xz} = X(y) e^{-i\omega t}$; $u_z^{(2)}(x, y)$ — решение задачи об установившихся гармонических колебаниях в пространстве с круговой цилиндрической полостью радиусом a , на границе которой заданы осциллирующие сдвиговые усилия вида $R = a$; $\tau_{Rz} = Y(\varphi) e^{-i\omega t}$.

Единственным ограничением на вид функций $X(y)$ и $Y(\varphi)$, описывающих закон распределения напряжений на границах подобластей, является конечность энергии, генерируемой ими за любой конечный промежуток времени. Эти ограничения вполне естественные и не влияют на общность последующих рассуждений. Конкретный вид этих функций неизвестен и подлежит определению при удовлетворении граничным условиям исходной задачи (5.2.1).

Основным моментом, используемым здесь, является тот факт, что сумма решений уравнения (5.2.3), записанных в различных системах координат, удовлетворяет исходному уравнению в заданной области.

Решение требуемой вспомогательной краевой задачи об установившихся антиплоских колебаниях полупространства и пространства с цилиндрической полостью было получено выше.

Таким образом, получено общее решение (5.2.3), зависящее от двух неизвестных функций $X(y)$ и $Y(\varphi)$. Для их определения используем условия, заданные на границе полупространства и цилиндрической полости (5.2.1), а также соотношения, связывающие цилиндрические и декартовы координаты (5.2.2) и представления закона Гука в цилиндрической и декартовой системах координат

$$\tau_{xz} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \tau_{Rz} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial R}.$$

В результате для удовлетворения граничным условиям (5.2.1) на плоской границе $x = 0$ получаем

$$\tau_{xz} = \mu \left[\frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial u_z^{(2)}}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial u_z^{(1)}}{\partial x} \right]_{x=0} = X(y) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\eta) K_1(y, \eta) d\eta = t(y). \quad (5.2.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} K_1(y, \eta) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} K_{1m}(y, \eta), \\ K_{1m}(y, \eta) &= K_1^{(m)}(y) e^{-im\eta}, \\ K_1^{(m)}(y) &= \Delta_m^{-1} \exp(im\varphi_0) \left\{ \left[\frac{m}{R_0} H_m^{(1)}(\theta R_0) - \theta H_{m+1}(\theta R_0) \right] \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 y^2}} + \right. \\ &\quad \left. + im H_m^{(1)}(\theta R_0) \varepsilon^2 y^2 \frac{1}{1 + \varepsilon^2 y^2} \right\}, \\ \varphi_0 &= -\arctg(\varepsilon y), \\ R_0 &= \varepsilon^{-1} \sqrt{1 + \varepsilon^2 y^2}. \end{aligned}$$

Аналогично, удовлетворяя граничным условиям (5.2.1) на цилиндрической поверхности $R = a$, и используя выражения закона Гука в цилиндрических координатах и соотношения, связывающие декартовы и цилиндрические координаты (5.2.2), получаем

$$\begin{aligned} \tau_{RZ} &= \mu \left. \frac{\partial u_Z}{\partial R} \right|_{R=a} = \mu \left[\frac{\partial u_Z^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial R} + \frac{\partial u_Z^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial y}{R} + \frac{\partial u_Z^{(2)}}{\partial R} \right]_{R=a} = \\ &= Y(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\eta) K_2(\varphi, \eta, \alpha) d\eta d\alpha = \tau(\varphi), \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

где

$$\begin{aligned} K_2(\varphi, \eta, \alpha) &= K_2^{(0)}(\varphi, \alpha) \exp[-\sigma(\varepsilon^{-1} - \cos \varphi) + i\alpha(\eta + \sin \varphi)], \\ K_2^{(0)}(\varphi, \alpha) &= \cos \varphi + \frac{i\alpha}{\sigma} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Здесь были использованы свойства цилиндрических функций [Янке, Эмде, Лёш, 1964; Абрамовиц, Стиган, 1979].

В результате, решение краевой задачи, описывающей процесс возбуждения и распространения колебаний в полупространстве с круговой цилиндрической полостью, имеем в виде (5.2.3), где функции $X(y)$ и $Y(\varphi)$ определяются из системы интегральных уравнений (5.2.4), (5.2.5)

$$\begin{aligned} X(y) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\eta) K_1(y, \eta) d\eta &= t(y), \\ Y(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\eta) K_2(\varphi, \eta, \alpha) d\eta d\alpha &= \tau(\varphi). \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

Основную сложность представляет построение решения системы (5.2.6) при произвольных соотношениях параметров. Существуют различные способы построения решения для различных геометрических и механических параметров задачи в общем случае. Однако можно построить эффективное решение в замкнутом виде при некоторых ограничениях на параметры, характеризующие исследуемую область. В частности, если предположить, что центр цилиндрической полости заглублен на величину, значительно превышающую радиус цилиндра a , то оказывается, что можно при исследовании системы (5.2.6) эффективно использовать асимптотические методы и получить решение задачи с требуемой степенью точности в достаточно простом виде, удобном для анализа [Бабешко, Селезнев, и др., 1983].

Остановимся подробнее на исследовании свойств системы в предположении малости параметра $\varepsilon = a/h$. Для $\varepsilon \ll 1$ можно показать, что интегралы, стоящие в левой части уравнений системы (5.2.6), также оказываются малыми в случае ограниченности интегралов, включающих неизвестные функции $X(y)$ и $Y(\varphi)$

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} Y(\varphi) \exp(-im\varphi) d\varphi \right| < B < \infty, \quad \left| \int_{-\infty}^{+\infty} X(y) \exp(i\alpha y) dy \right| < D < \infty.$$

Это условие можно считать выполненным, так как оно соответствует введенным ранее предположениям, что генерируемая действием нагрузки на сплошную среду энергия ограничена на любом конечном промежутке времени. Малые значения интегралов в этом случае определяется наличием в первом уравнении системы множителя $H_m^{(1)}(\theta\varepsilon^{-1}\sqrt{1+\varepsilon^2y^2})$, а во втором уравнении — сильного осциллятора $\exp(-\sigma\varepsilon^{-1})$. В частности, учитывая, что [Абрамовиц, Стигман, 1979]

$$H_m^{(1)}(\theta\varepsilon^{-1}\sqrt{1+\varepsilon^2y^2}) \approx \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\theta\pi\sqrt{1+\varepsilon^2y^2}}} \exp\left[i\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\sqrt{1+\varepsilon^2y^2} - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} Y(\eta)K_1(y, \eta) d\eta = O(\sqrt{\varepsilon/\theta}).$$

Интеграл, стоящий во втором уравнении, содержит экспоненту с чисто мнимым показателем, имеющим большой по модулю множитель. В этом случае оценку интеграла следует проводить, используя асимптотические методы [Евграфов, 1962; Федорюк, 1977], конкретно — метод стационарной фазы. В результате имеем

$$\int_{\Gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\eta)K_2(\varphi, \eta, \alpha) d\eta d\alpha = O\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{\theta}}\right).$$

В обоих случаях относительная малая величина интегралов имеет место не только при малом ε , но и при малом ε/θ . Таким образом, условие применимости асимптотических методов определяется соотношением

$$\varepsilon\theta^{-1} = \frac{aV_s}{h\omega a} = \frac{V_s}{h\omega} = \frac{V_s}{2\pi fh} = \frac{\lambda_s}{2\pi h} \ll 1.$$

Полученные формулы показывают, что интегралы, стоящие в левой части системы (5.2.6), малы в случае, когда заглубление полости меньше длины упругой (геоакустической) волны λ_s . Отмеченные свойства операторов системы позволяют строить (при указанных ограничениях на параметры задачи) решение системы методом последовательных приближений с асимптотической оценкой интегралов.

Для иллюстрации применения метода последовательных приближений перепишем систему (5.2.6) в более удобном виде

$$\begin{aligned} X(y) &= t(y) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\eta)K_1(y, \eta) d\eta, \\ Y(\varphi) &= \tau(\varphi) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\eta)K_2(\varphi, \eta, \alpha) d\eta d\alpha. \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

В качестве начального приближения, учитывая свойства интегральных операторов системы, целесообразно принять

$$X_0(y) = t(y), \quad Y_0(\varphi) = \tau(\varphi).$$

Это соответствует случаю, когда не учитывается взаимодействие плоской и цилиндрической границ.

Подставляя начальное приближение системы в правые части соотношений (5.2.7) и вычисляя интегралы методом стационарной фазы, получим в первом приближении

$$\begin{aligned}
 X(y) &= t(y) - \sqrt{\frac{2\varepsilon\theta}{\pi}} (1 + \varepsilon^2 y^2)^{-3/4} \exp(i\theta\varepsilon^{-1} \sqrt{1 + \varepsilon^2 y^2}) \times \\
 &\quad \times \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Delta_k^{-1} \exp\left[i\left(k \operatorname{arctg}(-\varepsilon y) - \frac{k\pi}{2} - \frac{3\pi}{4}\right)\right] \times \\
 &\quad \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tau(\xi) \exp(-ik\xi) dxi + O(\varepsilon\theta^{-1}), \\
 Y(\varphi) &= \tau(\varphi) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \int_{-\infty}^{+\infty} t(\eta) K_2(\varphi, \eta, \alpha) d\eta d\alpha.
 \end{aligned}$$

Остановимся подробнее на вычислении интеграла, стоящего в правой части последнего равенства. Функция $K_2(\varphi, \eta, \alpha)$ имеет на вещественной оси две точки ветвления: $\alpha = \pm\theta$. Учитывая, что при

$$|\alpha| < \theta, \quad \sigma = -i\sqrt{\theta^2 - \alpha^2},$$

получаем

$$\begin{aligned}
 Y(\varphi) &= \tau(\varphi) + \cos\varphi \exp\left[i\left(\theta\varepsilon^{-1} - \frac{\pi}{4} - \theta \cos\varphi\right)\right] \sqrt{\frac{\varepsilon\theta}{\pi}} \left[\bar{t}(0) - \exp\left(\frac{i\theta}{\varepsilon}\right)\right] \times \\
 &\quad \times \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Delta_m^{-1} \exp\left[-i(m+1)\frac{\pi}{2}\right] \int_{-\pi}^{\pi} \tau(\xi) \exp(-im\xi) d\xi + O(\varepsilon\theta^{-1}).
 \end{aligned}$$

Здесь $\bar{t}(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} t(\eta) \exp(i\alpha\eta) d\eta$.

Повторяя процедуру построения последовательных приближений, можно убедиться, что поправочные слагаемые имеют более высокий порядок малости по сравнению с предыдущими приближениями. Кроме того, слагаемые, соответствующие предыдущим приближениям, трансформации не претерпевают.

Для исследования особенностей распределения волновых полей в среде используем полученные соотношения (5.2.3) и другие, приведенные в работе [Собисевич, 2001]. Выражения, определяющие функции $u_z^{(1)}(x, y)$ и $u_z^{(2)}(R, \varphi)$, после вычисления с соответствующей точностью интегралов, получаем в виде

$$u_z^{(1)}(x, y) = -\frac{a}{2\pi\mu} \int_{\Gamma} \bar{t}(\alpha) \sigma^{-1} e^{-\sigma x - i\alpha y} d\alpha + \frac{a}{\mu} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\pi\theta} \left[(1 + \varepsilon x)^2 + (\varepsilon y)^2\right]^{-1/4}} \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left\{ \frac{\tau_0 \exp(-i\pi/4)}{\Delta_0} \sqrt{\theta} + \frac{\sqrt{\varepsilon\theta}}{(2\pi)^{3/2}} [\bar{t}(0) + \tau_0 \bar{K}_{10}(0)] \exp \left[i \left(\theta \varepsilon^{-1} - \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} \times \\
 & \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \Delta_m^{-1} \exp \left[-i \left(m \frac{\pi}{2} + m \operatorname{arctg} \frac{\varepsilon y}{1 + \varepsilon x} \right) \right] \times \\
 & \times \exp \left[i \frac{\theta}{\varepsilon} \sqrt{(1 + \varepsilon x)^2 + (\varepsilon y)^2} \right], \\
 \\
 & u_z^{(2)}(R, \varphi) = \frac{a}{\mu} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y_n H_n^{(1)}(\theta R) \Delta_{1n}^{-1} \exp(in\varphi).
 \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\begin{aligned}
 f_m &= (-1)^{m-1} \pi [J_{m-1}(\theta) - J_{m+1}(\theta)], \\
 f_0 &= -2\pi i J_1(\theta), \\
 Y_0 &= \tau_0 + f_0 [\bar{t}(0) + \tau_0 \bar{K}_{10}(0)] \sqrt{\frac{\varepsilon\theta_1}{2\pi}} \exp \left[i \left(\theta_1 \varepsilon^{-1} - \frac{\pi}{4} \right) \right], \\
 Y_n &= [\bar{t}(0) + \tau_0 \bar{K}_{10}(0)] \sqrt{\frac{\varepsilon\theta}{2\pi}} \exp \left[i \left(\theta \varepsilon^{-1} - \frac{\pi}{4} \right) \right] f_n, \\
 \bar{K}_{1m}(\alpha) &= \frac{2i}{\Delta_m} \exp \left[i \left(m \operatorname{arctg}(\alpha \bar{\sigma}^{-1}) + \varepsilon^{-1} \bar{\sigma} - \frac{m\pi}{2} \right) \right], \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\theta^2 - \alpha^2}.
 \end{aligned}$$

Полученные выше представления описывают волновое поле в среде. Следует отметить, что эти представления записаны в общем виде. Для конкретных граничных условий они существенно упрощаются.

При построении решения задачи о колебаниях слоистого полупространства с относительно сильно заглубленной полостью методика претерпевает незначительные изменения [Селезнев, Ляпин, 1993; Ляпин, Селезнев, Собисевич, 1996].

Реализация развиваемого метода на ЭВМ позволила провести анализ решений ряда конкретных задач о возбуждении колебаний в слоистом полупространстве с полостью. Полость может располагаться в слое или вблизи границы полупространства.

Остановимся подробнее на некоторых особенностях реализации приведенной методики на примере решения задачи в осесимметричной постановке.

Пусть область D представляет собой упругую полуограниченную структуру $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_N$, состоящую из N слоёв и описываемую в цилиндрической системе координат (R, z, θ) следующим образом

$$D_1 = \{z < 0, R > 0, \theta \in (-\pi, \pi)\} \text{ — полупространство,}$$

$$D_j = \{z \in (z_{j-1}, z_j), R > 0, \theta \in (-\pi, \pi)\},$$

$$z_j = \sum_{i=2}^j h_i, \quad (h_1 = 0) \text{ — } j\text{-й слой } (j = 2, \dots, N).$$

Для слоя k величина $r = \sqrt{(z - z_{k-1} - h)^2 + R^2}$ имеет ограничение: $r > a$, где a — радиус сферической полости, $a < h$ — расстояние от нижней кромки k -го слоя до центра полости.

В дальнейшем все параметры, имеющие размерность длины, будут отнесены к радиусу полости a без изменения их обозначений. Упругие свойства в пределах каждого слоя предполагаются изотропными и определяются значениями скоростей упругих волн V_{pj} , V_{sj} и плотностью ρ_j .

Дневная поверхность среды считается нагруженной осциллирующими с частотой ω по закону $\exp(-i\omega t)$ усилиями в ограниченной круговой области Ω

$$\vec{t} = \{\sigma_Z, \tau_{RZ}\} = \vec{T}, \quad z = z_N, \quad R \in \Omega. \quad (5.2.8)$$

На поверхности полости в сферических координатах (r, φ, θ) задано осциллирующее нормальное равномерное усилие

$$\sigma_r = p_0 P_l(\cos(\varphi)), \quad r = 1, \quad \varphi \in (0, \pi), \quad l = 0, 1, \dots \quad (5.2.9)$$

Все соотношения здесь выписаны в амплитудных функциях, временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен.

Вдоль границ раздела слоев между собой и с полупространством заданы условия жесткого сцепления, определяющие равенство компонент векторов смещения и напряжения при переходе через плоскую границу раздела упругих параметров.

При $z = z_j$, $j = 2, \dots, N - 1$, $X_j(R, \theta)$ — закон распределения контактных напряжений вдоль границ раздела упругих параметров. Вектор смещений в области D_k представим в виде суперпозиции цилиндрических и сферических волн

$$\vec{u}_k = \vec{u}_k^{(1)} + \vec{u}_k^{(2)}, \quad (5.2.10)$$

где $\mathbf{u}_k^{(1)}$ соответствует решению задачи для слоя без полости при заданных усилиях на его границах

$$\begin{aligned} t_k^- &= X_1(R, \theta), \quad z = z_{k-1}, \\ t_k^+ &= X_2(R, \theta), \quad z = z_k, \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

при выполнении условий излучения энергии на бесконечности, $\vec{u}_k^{(2)}$ определяется решением задачи для безграничного пространства с полостью, граница которой нагружена осциллирующими усилиями

$$r = 1: \quad \sigma_r = Y_1(\varphi), \quad \tau_{r\varphi} = Y_2(\varphi), \quad \varphi \in (0, \pi). \quad (5.2.12)$$

Функции $X_i(R, \theta)$, $Y_i(\varphi)$ ($i = 1, 2$), должны быть определены из граничных условий исходной краевой задачи. Для этого необходимо использовать соотношения закона Гука в соответствующей системе координат и выражения, связывающие цилиндрические и сферические координаты, в соответствии с геометрией области (положением полости в слоистой структуре).

Поле смещений в D_k представим в виде

$$\vec{u}_k = \nabla\varphi + \nabla \times (\phi \vec{e}_\theta),$$

где φ, ϕ — удовлетворяют уравнениям Гельмгольца $\Delta\varphi + \theta_{pk}^2\varphi = 0$, $\theta_{pk} = \omega a/V_{pk}$, $\Delta\phi + \theta_{sk}^2\phi = 0$, $\theta_{sk} = \omega a/V_{sk}$.

Соответственно разложению (5.2.10) представляются волновые потенциалы в (5.2.11)

$$\varphi = \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)}, \quad \phi = \phi^{(1)} + \phi^{(2)}.$$

Используя интегральные преобразования Фурье–Бесселя, определяющее соответствие оригиналов и образов Фурье в виде

$$H_j[f(R)] = \int_0^\infty J_j(uR) f(R) R dR = \bar{f}(u),$$

$$H_j^{-1}[\bar{f}(u)] = \int_\Gamma J_j(uR) \bar{f}(u) u du = f(R),$$

представим

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= H_j^{(-1)} [\bar{f}_1^{(1)} \operatorname{sh}(\sigma_{j+1}(z - z_{k-1})) + \bar{f}_2^{(1)} \operatorname{ch}(\sigma_{j+1}(z - z_{k-1}))] = \\ &= H_j^{-1} [\bar{f}_+^{(1)} \exp(\sigma_{j+1}(z - z_{k-1})) + \bar{f}_-^{(1)} \exp(-\sigma_{j+1}(z - z_{k-1}))], \end{aligned}$$

где \bar{f} соответственно φ или ϕ , $\sigma_1 = \sqrt{u^2 - \theta_{pk}^2}$, $\sigma_2 = \sqrt{u^2 - \theta_{sk}^2}$.

Контур Γ задается для идеально упругой среды в соответствии с принципом предельного поглощения [Ворович, Бабешко, 1979].

Используя граничное условие (5.2.8), функции $\bar{\varphi}_\pm^{(1)}$, $\bar{\varphi}_m^{(1)}$ можно выразить через трансформанты заданных усилий $\bar{X}_j(u)$

$$\bar{\varphi}_\pm^{(1)} = \sum_{j=1}^4 \Phi_{\pm j} \bar{X}_j(u), \quad \bar{\varphi}_m^{(1)} = \sum_{j=1}^4 \Phi_{mj} \bar{X}_j(u).$$

Функции $\Phi_{\pm j}$, Φ_{kj} имеют достаточно громоздкий вид и здесь полностью не приводятся. В качестве примера, иллюстрирующего структуру и свойства этих функций, приведем одну из них

$$\Phi_{\pm 1} = \frac{-\zeta^2}{2\sigma_1\sigma_2\Delta} [4u^2\sigma_1\sigma_2(1 - \operatorname{ch}\sigma_2h_k \exp(\pm\sigma_1h_k)) \pm \zeta^4 \operatorname{sh}\sigma_2h_k \exp(\pm\sigma_1h_k)].$$

Используя модифицированные в рамках данной работы формулы перерасложения решений уравнения Гельмгольца в цилиндрической и сферической системах координат [Ляпин, Селезнев, Собисевич, 1996], запишем

$$\begin{aligned} \exp(\pm\sigma(z - z_{k-1})) J_m(uR) &= \\ &= \exp(\pm\sigma h) \sum_{n=m}^\infty (\mp i)^{n-m} \frac{(2n+1)(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m\left(\frac{i\sigma}{\theta}\right) j_n(\theta r) P_n^m(\cos\varphi), \\ z &\in [z_{k-1}, z_k], \quad R > 0, \quad \sigma = \sqrt{u^2 - \theta^2}, \end{aligned}$$

где $j_n(x)$ — сферические функции Бесселя, $P_n^m(\cos \varphi)$ — функции Лежандра с аргументом на отрезке $[-1, 1]$, $P_n^m(i\sigma/\theta)$ — функции Лежандра с аргументом в комплексной плоскости [Абрамовиц, Стиган, 1979].

В результате получим

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{(1)} j_n(\theta_{pk}r) P_n(\cos \varphi), \\ \phi^{(1)} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^{(1)} j_n(\theta_{sk}r) P_n^1(\cos \varphi),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\varphi_n^{(1)} &= i^n(2n+1) \int_{\Gamma} u P_n(i\sigma_1/\theta_{pk}) [(-1)^n \bar{\varphi}_+^{(1)}(u) \exp(\sigma_1 h) + \bar{\varphi}_-^{(1)}(u) \exp(-\sigma_1 h)] du, \\ \phi_n^{(1)} &= - \frac{i^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)} \int_{\Gamma} u P_n^1(i\sigma_2/\theta_{sk}) [(-1)^{n-1} \bar{\phi}_+^{(1)}(u) \exp(\sigma_2 h) + \bar{\phi}_-^{(1)}(u) \exp(\sigma_2 h)] du.\end{aligned}$$

При этом $\bar{\varphi}_{\pm}^{(1)}$, $\bar{\phi}_{\pm}^{(1)}$ имеют следующее асимптотическое поведение когда $u \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_+^{(1)} &\approx \exp[-\sigma_1(h_k + h)], & \bar{\varphi}_-^{(1)} &\approx \exp[-\sigma_1(h_k - h)], \\ \bar{\phi}_+^{(1)} &\approx \exp[-\sigma_2(h_k + h)], & \bar{\phi}_-^{(1)} &\approx \exp[-\sigma_2(h_k - h)],\end{aligned}$$

что обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость контурных интегралов по Γ при определении оригиналов $\varphi^{(1)}$, $\phi^{(1)}$.

Соответственно в сферической системе координат волновые потенциалы могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}\varphi^{(2)}(r, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^{(2)} h_n^{(1)}(\theta_{pk}r) P_n(\cos \varphi), \\ \phi^{(2)}(r, \varphi) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n^{(2)} h_n^{(1)}(\theta_{sk}r) P_n^1(\cos \varphi).\end{aligned}\tag{5.2.13}$$

Коэффициенты $\varphi_n^{(2)}$, $\phi_n^{(2)}$ однозначно определяются через разложение напряжений на полости Y_i , $i = 1, 2$, по функциям Лежандра. Разложение (5.2.10) удобно также записать с использованием соответствующих формул переразложения в виде суперпозиции цилиндрических волн:

$$\begin{aligned}\varphi^{(2)} &= H_0^{-1} \left[\frac{\exp(-|(z-z_{k-1})-h|\sigma_1)}{\theta_{pk}\sigma_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sign}^n((z-z_{k-1})-h)}{i^{n+1}} \varphi_n^{(2)} P_n(i\sigma_1/\theta_{pk}) \right], \\ \phi^{(2)} &= H_1^{-1} \left[\frac{\exp(-|(z-z_{k-1})-h|\sigma_2)}{\theta_{sk}\sigma_2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sign}^{n-1}((z-z_{k-1})-h)}{i^{n+1}} \phi_n^{(2)} P_n^1(i\sigma_2/\theta_{sk}) \right].\end{aligned}$$

Для отыскания неизвестных функций X_i , $Y(i = k-1, k)$ воспользуемся граничными условиями (5.2.8) и условиями контакта слоев между собой и с полупространством. Считаем, что истинные напряжения на гранях слоя с дефектом равны

$$\{\sigma_Z, \tau_{RZ}\} = \mathbf{R}_i, \quad z = z_i, \quad i = k-1, k.\tag{5.2.14}$$

Тогда использование граничных условий (5.2.8) с учетом соотношений (5.2.10) и условий сцепления слоев приводит к системе интегро-функциональных уравнений вида:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}}_i(u) &= \bar{\mathbf{X}}_i(u) + \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbf{A}_{in}(u)\varphi_n^{(2)}(Y_{jn}) + \mathbf{B}_{in}(u)\phi_n^{(2)}(Y_{jn})], \\ \{\sigma_r, 0\} &= \mathbf{Y}(\varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\Gamma} [\varphi_n^{(1)}(\bar{\mathbf{X}}_i(u)) \mathbf{F}_n(u) + \phi_n^{(1)}(\bar{\mathbf{X}}_i(u)) \mathbf{G}_n(u)] du. \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

Выражения для $\mathbf{A}_{in}(u)$, $\mathbf{B}_{in}(u)$, $\mathbf{F}_n(u)$, $\mathbf{G}_n(u)$ представляются в квадратурах.

К системе (5.2.15) должны быть добавлены условия сцепления слоев, определённые в пространстве преобразований Фурье–Бесселя и позволяющие связать неизвестные $\bar{\mathbf{R}}_i(u)$ через трансформанты заданных усилий на дневной поверхности среды $\bar{\mathbf{T}}(u)$. Такая процедура осуществлена на основе одного из вариантов матричного метода. Раскрытие неопределенностей приводит к малому накоплению вычислительной погрешности при большом числе слоев. В общем случае оператор матричных (алгебраических) преобразований может быть представлен в виде:

$$\bar{\mathbf{R}}_i(u) = \mathbf{W}_i[\bar{\mathbf{T}}(u)]. \quad (5.2.16)$$

Последовательно исключив из системы (5.2.15), с учетом соотношения (5.2.16), функции $\bar{\mathbf{R}}_i$, $\bar{\mathbf{X}}_i$, и разлагая полученное выражение по функциям Лежандра, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов \mathbf{Y}_n

$$\mathbf{Y}_n + \sum_{m=0}^{\infty} \int_{\Gamma} \mathbf{K}_{nm}(u) \cdot \mathbf{Y}_m du = \{p_0\delta_{nl}, 0\}. \quad (5.2.17)$$

Линейные алгебраические уравнения (5.2.17) (при условии расположения полости целиком в одном из слоев) являются системой с вполне непрерывной формой, что позволяет при её исследовании эффективно использовать метод редукции с практической оценкой его сходимости. Коэффициенты системы вычисляются в виде однократных контурных интегралов по Γ , а соответствующие подынтегральные функции имеют экспоненциальное убывание при $|u| \rightarrow \infty$ с показателем, соответствующим расстоянию между плоской и сферической границами слоя l .

Таким образом, исходная краевая задача сведена к системе линейных алгебраических уравнений вида (5.2.17). После решения этой системы волновые поля в среде определяются однозначно.

Приведённая схема исследования краевой задачи реализована на ЭВМ.

В качестве примера расчета деформированного состояния слоистой среды приводятся результаты численного анализа волновых полей в трехслойном полупространстве со сферической полостью. Источник колебаний представляет собой равномерно распределенное по границе сферической полости и осциллирующее с частотой ω давление. Полость расположена в верхнем слое.

На рис. 5.4–5.6 приведены модули амплитуд вертикальных перемещений точек с координатами $(R, z) = (3, 0)$ для рис. 5.4, 5.5 и $(R, z) = (3, 6)$ для рис. 5.6. Свойства среды определяются следующими значениями скоростей упругих волн $V_{S0} = 1300$ м/с; $V_{P0} = 2500$ м/с; $V_{S1} = 800$ м/с; $V_{P1} = 1500$ м/с; $V_{S2} = 300$ м/с; $V_{P2} = 600$ м/с — рис. 5.5, 5.6 («мягкие» слои) и соответственно $V_{S0} = 300$ м/с; $V_{P0} = 600$ м/с; $V_{S1} = 800$ м/с; $V_{P1} = 1500$ м/с; $V_{S2} = 1300$ м/с; $V_{P2} = 2500$ м/с — рис. 5.6 («жесткие» слои).

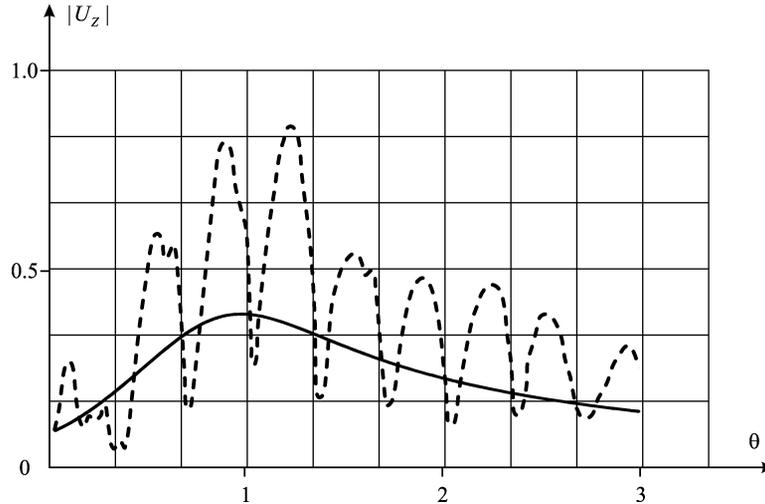


Рис. 5.4. Модули амплитуд вертикальных перемещений точек с координатами $(R, z) = (3, 0)$. Свойства среды определяются следующими значениями скоростей упругих волн: $V_{S0} = 1300$ м/с; $V_{P0} = 2500$ м/с; $V_{S1} = 800$ м/с; $V_{P1} = 1500$ м/с; $V_{S2} = 300$ м/с; $V_{P2} = 600$ м/с («мягкие» слои)

Кривая, помеченная звездочками, соответствует смещению соответствующей точки бесконечного пространства с параметрами слоя 1 («прямое» поле источника). Величина θ соответствует приведенной частоте для продольных волн первого слоя. Амплитуды W отнесены к величине $a \cdot 10^{-6}$.

Из сравнения приведенных графиков видны общие закономерности поведения амплитудно-частотных характеристик точек среды, которые сводятся к следующему:

1. При возбуждении установившихся колебаний с поверхностью полости существенно соотношение упругих параметров составляющих слоистой структуры. При увеличении скоростей упругих волн со смещением вглубь полупространства амплитуды точек слоистой структуры колеблются вокруг кривой, представляющей собой амплитудно-частотную характеристику для прямого поля источника. В случае приближении полости к поверхности среды, происходит усиление сигнала от источника тем большее, чем выше контрастность упругих свойств слоистой структуры.

2. При уменьшении скоростей распространения упругих волн с глубиной амплитуда сейсмического поля трансформируется. В этом случае слоистая структура работает как низкочастотный фильтр. Предлагаемая методика исследования

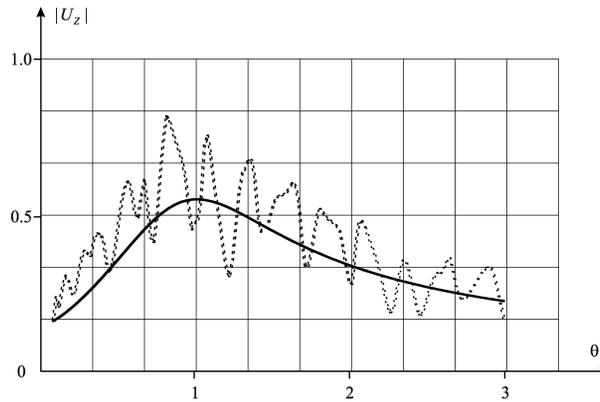


Рис. 5.5. Модули амплитуд вертикальных перемещений точек с координатами $(R, z) = (3, 0)$. Свойства среды определяются следующими значениями скоростей упругих волн: $V_{S0} = 1300$ м/с; $V_{P0} = 2500$ м/с; $V_{S1} = 800$ м/с; $V_{P1} = 1500$ м/с; $V_{S2} = 300$ м/с; $V_{P2} = 600$ м/с («мягкие» слои)

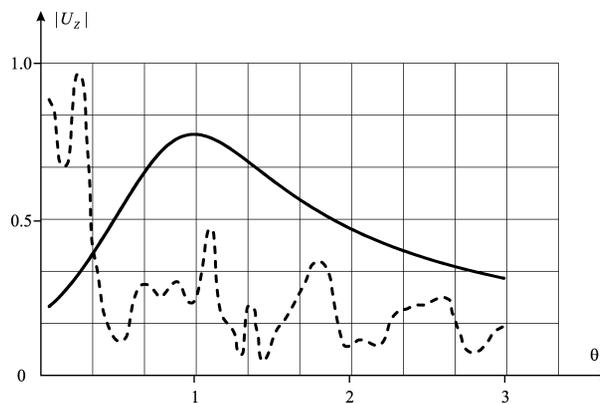


Рис. 5.6. Модули амплитуд вертикальных перемещений точек с координатами $(R, z) = (3, 6)$. Значения скоростей упругих волн: $V_{S0} = 300$ м/с; $V_{P0} = 600$ м/с; $V_{S1} = 800$ м/с; $V_{P1} = 1500$ м/с; $V_{S2} = 1300$ м/с; $V_{P2} = 2500$ м/с («жесткие» слои)

позволяет также выявить особенности возбуждения и распространения волн в зависимости от характера распределения усилий по поверхности полости, а также проследить эффекты, связанные с многократным отражением волн.

Остановимся подробнее на результатах анализа особенностей характеристик волновых структур в среде, обусловленных местоположением полости. Определение резонансных частот проводилось сопоставлением АЧХ большого числа точек границы полости, чтобы исключить из рассмотрения рост амплитуды, определяемый взаимодействием прямых, отраженных и переотраженных волн. Полученные результаты аналогичны тем, которые имеют место для полости, сильно заглубленной в полупространство. Однако, в этом случае выраженность локализованных резонансных явлений в большей степени зависит от механических свойств близлежащего слоя. Если его жесткость выше жесткости среды, включающей полость, то выраженность резонанса существенно меньше и наоборот. Для волн, определяющих локальные резонансы в среде, в этом случае более выражен эффект асимметрии (который может быть трактован как появление направленности за счет расположения вблизи полости более мягкого или более жесткого слоя).

Следует также отметить, что при наличии в слоистой среде распространяющихся пограничных волн, выраженность резонанса полости, расположенной вблизи границы раздела, существенно меняется. Особенно интересен случай, когда частота первого резонанса полости в упругой среде близка к частоте распространяющейся пограничной волны. Количественные же характеристики локального резонирования в окрестности полости существенно зависят от конкретного строения изучаемой геологической структуры.

Рассмотрим в качестве примера задачу о возбуждении колебаний в слоистом геофизическом полупространстве с заглубленной сферической полостью. Пусть упругая геофизическая среда занимает в декартовой системе координат $\{x, y, z\}$ некую область (см. рис. 5.3).

Нестационарное воздействие по заданному закону $t(y, z, t)$ может быть приложено к поверхности полупространства и к границе сферической полости $\tau(\varphi, \psi, t)$, целиком расположенной в одном из слоев или в полупространстве. При расположении полости в полупространстве использование принципа суперпозиции позволяет свести краевую задачу к системе интегро-функциональных уравнений следующей структуры [Бабешко, Селезнев и др., 1983; Ляпин, 1991; Собисевич, 2001]

$$\begin{aligned} \vec{X}(y, z, t) + \int_0^\pi \int_{\Gamma-\infty}^{+\infty} \vec{K}(y, z, \omega, \psi, \varphi) \vec{Y}(\psi, \varphi, \omega) e^{i\omega t} d\omega d\psi, d\varphi &= \vec{T}(y, z, t), \\ \vec{Y}(\varphi, \psi, t) + \int_\Gamma \int_\Gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{L}(\varphi, \psi, \beta, \gamma, \omega) \vec{\vec{X}}(\beta, \gamma, \omega) e^{i\omega t} d\omega d\beta d\gamma &= \vec{\tau}(\varphi, \psi, t). \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

Здесь

$$\vec{\vec{X}}(\beta, \gamma, \omega) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{X}(y, z, t) \exp[i(\beta y + \gamma z - \omega t)] dy dz dt,$$

$$\bar{Y}(\varphi, \psi, \omega) = \int_0^{+\infty} \vec{Y}(\varphi, \psi, t) \exp(-i\omega t) dt,$$

$$T(y, z, t) = L(y, z, t) t(y, z, t),$$

$L(y, z, t)$ — некоторый функционал, определяемый структурой и свойствами пакета слоев, лежащего на упругом полупространстве с полостью, $\vec{X}(y, z, t)$, $\vec{Y}(\varphi, \psi, t)$ — функции распределения напряжений, через которые определяется напряженно-деформированное состояние исследуемой структуры.

В случае установившихся гармонических колебаний система (5.2.18) сохраняет свой вид для амплитудных функций напряжения. Однако, все функции и функционалы, определяющие её элементы не зависят от времени t . Соответственно, отсутствует интегрирование по параметру ω , имеющему смысл круговой частоты вынужденных установившихся колебаний.

Если полость целиком расположена в одном из слоев, система интегральных уравнений будет состоять из трех векторных уравнений, два из которых имеют вид, аналогичный первому уравнению (5.2.18). Их также можно привести к одному векторному уравнению, но его оператор приобретет очень громоздкий вид, затрудняющий его практическое использование. Поэтому удобнее рассматривать большее число векторных уравнений, тем более что их структура соответствует структуре, приведенной выше.

В общем случае функции, определяющие ядра интегральных операторов системы, имеют достаточно громоздкий вид и определяются конкретной рассматриваемой краевой задачей. Однако, для всех типов рассмотренных задач структура интегро-функциональных уравнений остается одинаковой, и операторы системы имеют общие свойства, определяющие оптимальную методику построения решения.

Для областей типа слоистого полупространства с заглубленной полостью канонической формы положение полости в среде по отношению к границам раздела слоев определяет свойства операторов системы. В том случае, когда границы полости и слоев (полупространства) не пересекаются и не соприкасаются, однозначно удастся доказать, что операторы системы (5.2.18) вполне непрерывны в пространстве суммируемых функций. Данный факт имеет следующее физическое объяснение: оператор первого векторного уравнения системы описывает напряжения, возбуждаемые нагрузкой, распределенной по границе полости на плоской поверхности слоистой среды. Решения задач для слоистых областей показывают, что напряжения и перемещения в среде непрерывны вдоль любой замкнутой криволинейной поверхности, не пересекающей границу области. Аналогично интегральный оператор второго уравнения определяет напряжения, возбуждаемые поверхностной нагрузкой в слоистом полупространстве без полости по сферической поверхности. Если полость касается (пересекает) плоской границы слоя (полупространства), операторы системы (5.2.18) теряют свойство непрерывности и при её решении требуется регуляризовать систему. Для этого исследуется порядок особенности её решения вблизи линии пересечения плоской и сферической (цилиндрической, эллиптической, эллипсоидальной) границ области. Это существенно усложняет процесс по-

строения решения. Если полость канонической формы приближается к границе полупространства или расположена полностью в слое, то асимптотический метод теряет свою эффективность. В этом случае целесообразно применять прямой метод решения системы интегро-функциональных уравнений задачи путём её сведения к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений с использованием формул переразложения [Селезнев, Собисевич, 1996; Собисевич, 2001].

Отметим, что эффективность методов прямого сведения краевой задачи к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений посредством представления решений в виде разложения по системам ортогональных функций (полиномов) существенно зависит от выбора системы функций и приводит к оптимальной сходимости только при разложении решения по системе собственных функций задачи. Предлагаемый подход включает решения, опирающиеся на собственные функции составляющих задач, а известные формулы переразложения [Ерофеевко, 1973] позволяют связать системы собственных функций, определяемых сферической, цилиндрической и плоской границами.

5.3. Методы решения задач для полостей сложной формы, расположенных в слоистом полупространстве

Для полостей, форма которых существенно отличается от канонической, методы, изложенные выше, не позволяют получить решение задачи. Для их исследования наиболее приемлемым оказывается метод граничных интегральных уравнений и реализующий его на ЭВМ метод граничных элементов. Развитие этого направления позволяет эффективно использовать аналитические методы и уже полученные результаты. Изложение особенностей его реализации можно найти, например, в ряде работ российских ученых [см., например, Угодчиков, Хуторянский, 1986].

Здесь мы остановимся на классе задач для слоистого полупространства с горизонтально расположенной цилиндрической полостью. Расположение оси полости по отношению к границам раздела физических параметров среды может быть произвольным. Полость может быть целиком заглубленной в одной из компонент слоистой структуры — слое или полупространстве, пересекать границы раздела слоев, либо выходить на дневную поверхность среды (рис. 5.7).

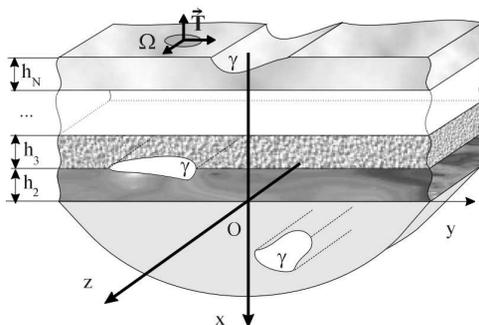


Рис. 5.7. Многослойное полупространство с цилиндрическими полостями произвольной в плане формы и расположения

Пусть рассматриваемая упругая область D состоит из подобластей D_1, \dots, D_N . Подобласть D_1 — полупространство, описываемое в декартовой системе координат (x, y, z) следующим образом

$$D_1 = \{x > 0, y, z \in (-\infty, +\infty)\},$$

подобласть D_j — слой с номером j с плоскопараллельными границами толщины h_j

$$D_j = \{x \in (-x_j, -x_{j-1}), y, z \in (-\infty, +\infty)\},$$

$$x_j = \sum_{i=2}^j h_i \quad (h_1 = 0), \quad (j = 2, \dots, N).$$

При этом считаем, что в области D_k ($k = 1, 2, \dots$ или N) расположена целиком заглубленная полость S , либо дневная поверхность области D_N содержит дефект цилиндрической формы (локальное возмущение), направляющая которого определяется замкнутой непрерывной кусочно-гладкой кривой γ .

Упругие свойства среды в D_j определяются плотностью ρ_j и скоростями распространения продольных V_{Pj} и поперечных V_{Sj} волн в среде (или параметрами Ламе λ_j, μ_j). Движение точек среды будем описывать уравнениями Ламе. Считаем далее, что на поверхности слоистого полупространства, включая границу полости, в некоторой ограниченной области Ω заданы напряжения

$$\vec{t}|_{\partial D} = \vec{T} = \text{col} \{t_1, t_2, t_3\}.$$

Здесь и далее символ \vec{t} обозначает вектор напряжений на поверхности ∂D . Условия стыковки сред соответствуют жесткому сцеплению и непрерывности векторов смещений и напряжений при переходе через соответствующую границу. Решение краевых задач будем строить с использованием принципа предельного поглощения.

5.3.1. Полость в подстилающем полупространстве

Не ограничивая общности задачи, рассмотрим, прежде всего, колебания многослойного полупространства, когда полость целиком расположена в одном из слоев.

Для вывода системы граничных интегральных уравнений (ГИУ) приведем в качестве вспомогательных соотношения матрицы фундаментальных решений для безграничной среды, записанные в виде сферических, цилиндрических волн, а также в преобразованном по Фурье виде (плоские волны).

Пусть в точке (x_0, y_0, z_0) упругого пространства действует сосредоточенное усилие

$$\vec{q} = \text{col} \{q_1, q_2, q_3\} = \text{col} \{q_x, q_y, q_z\}.$$

Тогда смещения точки с координатами (x, y, z) , удовлетворяющие уравнению

$$\frac{\theta_{12}^2}{\theta_{11}^2} \nabla \nabla \cdot \vec{u} - \nabla \times \nabla \times \vec{u} + \vec{q} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) + \theta_{12}^2 \vec{u} = 0, \quad (5.3.1)$$

$$\vec{r} = \text{col} \{x, y, z\}, \quad \vec{r}_0 = \text{col} \{x_0, y_0, z_0\},$$

представляют собой [Новацкий, 1975]

$$u_k(\vec{r}_0, \vec{r}) = \sum_{j=1}^3 U_{jk}(\vec{r}_0, \vec{r}) q_j(\vec{r}_0), \quad k = 1, 2, 3, \quad (5.3.2)$$

$$U_{jk}(\vec{r}_0, \vec{r}) = \frac{a}{4\pi\mu_1} \left[\delta_{jk} \frac{\exp(i\theta_{12}\rho)}{\rho} - \frac{1}{\theta_{12}^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} \left(\frac{\exp(i\theta_{11}\rho)}{\rho} - \frac{\exp(i\theta_{12}\rho)}{\rho} \right) \right]. \quad (5.3.3)$$

Здесь $\theta_{11} = \frac{\omega a}{V_{Pl}}$, $\theta_{12} = \frac{\omega a}{V_{Sl}}$, $\rho = |\vec{r} - \vec{r}_0|$ — безразмерные параметры, отнесенные к характерному размеру направляющей цилиндрической полости a .

Используя связь сферических волн с суперпозицией цилиндрических

$$\begin{aligned} \frac{\exp(i\theta\rho)}{\rho} &= \frac{i}{2} \int_{\Gamma_2} \exp(-i\alpha z) H_0^{(1)}(\xi R) d\alpha, \\ \xi &= \sqrt{\theta^2 - \alpha^2}, \quad \operatorname{Re} \xi \geq 0, \quad \operatorname{Im} \xi \geq 0, \\ \rho &= \sqrt{R^2 + z^2}, \quad \theta, R > 0, \quad z \in (-\infty, +\infty) \end{aligned}$$

получаем

$$U_{jk}(\vec{r}_0, \vec{r}) = \frac{a}{2\pi\mu_1} \int_{\Gamma_2} \exp(-i\alpha(z - z_0)) \bar{U}_{jk}(R, \varphi, \alpha) d\alpha, \quad j, k = 1, 2, 3, \quad (5.3.4)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_{11} &= B \left[-\sin^2 \varphi N_2(R, \alpha) + \theta_{12}^2 H_0^{(1)}(\xi_{12} R) + N_1(R, \alpha)/R \right], \\ \bar{U}_{22} &= B \left[-\cos^2 \varphi N_2(R, \alpha) + \theta_{12}^2 H_0^{(1)}(\xi_{12} R) + N_1(R, \alpha)/R \right], \\ \bar{U}_{12} &= \bar{U}_{21} = -0,5 B \sin 2\varphi N_2(R, \alpha), \\ \bar{U}_{23} &= \bar{U}_{32} = i\alpha B \cos \varphi N_1(R, \alpha), \\ \bar{U}_{13} &= \bar{U}_{31} = i\alpha B \sin \varphi N_1(R, \alpha), \\ \bar{U}_{33} &+ B \left[\alpha^2 H_0^{(1)}(\xi_{11} R) + \xi_{12}^2 H_0^{(1)}(\xi_{12} R) \right], \\ N_m(R, \alpha) &= \xi_{11}^m H_m^{(1)}(\xi_{11} R) - \xi_{12}^m H_m^{(1)}(\xi_{12} R), \quad m = 0, 1, 2, 3, \\ B &= \frac{1}{4\theta_{12}^2}, \quad \sin \varphi = (x_0 - x)/R, \quad \cos \varphi = (y_0 - y)/R, \\ R &= \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2}. \end{aligned}$$

Контур Γ_2 определяется принципом предельного поглощения.

Для определения отраженных от горизонтальных границ раздела сред волн выражения (5.3.4) необходимо представить в преобразованном по Фурье по координате y виде. Для этого используются формулы связи цилиндрических волн с суперпозицией плоских:

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(\xi R) &= -\frac{i}{\pi} \int_{\Gamma_1} \exp(-i\beta(y - y_0) - \sigma|x - x_0|) \sigma^{-1} d\beta, \\ \sigma &= \sqrt{\beta^2 - \xi^2}, \quad \operatorname{Re} \sigma \geq 0, \quad \operatorname{Im} \sigma \leq 0. \end{aligned}$$

В итоге получим

$$U_{jk}(\vec{r}_0, \vec{r}) = \frac{a}{4\pi^2\mu_1} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \exp(-i\beta(y-y_0) - i\alpha(z-z_0)) \bar{U}_{jk}(x, x_0, \alpha, \beta) d\alpha d\beta, \quad (5.3.5)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{U}_{11} &= A[-\sigma_{11}E_{11}^- + u^2E_{22}^-/\sigma_{12}], \\ \bar{U}_{12} &= \bar{U}_{21} = -iA\beta[E_{11}^- - E_{22}^-], \\ \bar{U}_{13} &= \bar{U}_{31} = -iA\alpha[E_{11}^- - E_{22}^-], \\ \bar{U}_{23} &= \bar{U}_{32} = A\alpha\beta[E_{11}^-/\sigma_{11} - E_{22}^-/\sigma_{12}], \\ \bar{U}_{22} &= A[\beta^2E_{11}^-/\sigma_{11} - (\beta^2 - \theta_{12}^2)E_{22}^-/\sigma_{11}], \\ \bar{U}_{33} &= A[\alpha^2E_{11}^-/\sigma_{11} - (\alpha^2 - \theta_{12}^2)E_{22}^-/\sigma_{11}], \\ A &= \frac{1}{2\theta_{12}^2}, \quad u^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad E_{kk}^- = \exp(-\sigma_{1k}|x-x_0|), \\ \sigma_{1k} &= \sqrt{u^2 - \theta_{1k}^2}, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

Выражения (5.3.6) действительны для $x_0 - x < 0$. В случае $x_0 - x > 0$ у функций \bar{U}_{12} , \bar{U}_{21} , \bar{U}_{13} , \bar{U}_{31} следует поменять знак на противоположный.

В соответствии с этим определяются фундаментальные решения для напряженного состояния пространства

$$\begin{aligned} \sigma_{jk}(\vec{r}_0, \vec{r}) &= \sum_{l=1}^3 T_{ljk}(\vec{r}_0, \vec{r}) q_l(\vec{r}_0), \\ T_{ljk}(\vec{r}_0, \vec{r}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_2} \exp(-i\alpha(z-z_0)) \bar{T}_{ljk}(R, \varphi, \alpha) d\alpha, \\ T_{lkj} &= T_{ljk}, \quad l, j, k = 1, 2, 3; \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

$$\begin{aligned} \bar{T}_{111} &= B \sin \varphi \left[-\frac{2N_2}{R} + 2 \cos^2 \varphi N_3 - 2\alpha^2 N_1 + \xi_{11} \theta_{12}^2 H_1^{(1)}(\xi_{11}R) \right], \\ \bar{T}_{211} &= B \cos \varphi \left[\frac{2N_2}{R} - 2 \sin^2 \varphi N_3 + \xi_{11} H_1^{(1)}(\xi_{11}R)(\theta_{12}^2 - 2\theta_{11}^2) \right], \\ \bar{T}_{311} &= -i\alpha B \left[\frac{2N_1}{R} - 2 \sin^2 \varphi N_2 + H_0^{(1)}(\xi_{11}R)(\theta_{12}^2 - 2\theta_{11}^2) \right], \\ \bar{T}_{112} &= B \cos \varphi \left[\frac{2N_2}{R} - 2 \sin^2 \varphi N_3 + \xi_{12} \theta_{12}^2 H_1^{(1)}(\xi_{12}R) \right], \\ \bar{T}_{212} &= B \sin \varphi \left[\frac{2N_2}{R} - 2 \cos^2 \varphi N_3 + \xi_{12} \theta_{12}^2 H_1^{(1)}(\xi_{12}R) \right], \\ \bar{T}_{321} &= \bar{T}_{213} = \bar{T}_{123} = i\alpha B \sin 2\varphi N_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{T}_{122} &= B \sin \varphi \left[\frac{2N_2}{R} - 2 \cos^2 \varphi N_3 + \xi_{11} H_1^{(1)}(\xi_{11} R)(\theta_{12}^2 - 2\theta_{11}^2) \right], \\
 \bar{T}_{222} &= B \cos \varphi \left[-\frac{2N_2}{R} + 2 \sin^2 \varphi N_3 - 2\alpha^2 N_1 + \xi_{11} \theta_{12}^2 H_1^{(1)}(\xi_{11} R) \right], \\
 \bar{T}_{322} &= -i\alpha B \left[\frac{2N_1}{R} - 2 \cos^2 \varphi N_2 + H_0^{(1)}(\xi_{11} R)(\theta_{12}^2 - 2\theta_{11}^2) \right], \\
 \bar{T}_{113} &= -i\alpha B \left[\frac{2N_1}{R} - 2 \sin^2 \varphi N_2 + \theta_{12}^2 H_0^{(1)}(\xi_{12} R) \right], \\
 \bar{T}_{313} &= B \sin \varphi [2\alpha^2 \xi_{11} H_1^{(1)}(\xi_{11} R) - \xi_{12}(\alpha^2 - \xi_{12}^2) H_1^{(1)}(\xi_{12} R)], \\
 \bar{T}_{223} &= -i\alpha B \left[\frac{2N_1}{R} - 2 \cos^2 \varphi N_2 + \theta_{12}^2 H_0^{(1)}(\xi_{12} R) \right], \\
 \bar{T}_{323} &= B \cos \varphi [\alpha^2 N_1 + \alpha^2 \xi_{11} H_1^{(1)}(\xi_{11} R) + \xi_{12}^3 H_1^{(1)}(\xi_{12} R)], \\
 \bar{T}_{133} &= B \sin \varphi [2\alpha^2 N_1 + \xi_{11}(\theta_{12}^2 - 2\theta_{11}^2) H_1^{(1)}(\xi_{11} R)], \\
 \bar{T}_{233} &= B \cos \varphi [2\alpha^2 N_1 + \xi_{11}(\theta_{12}^2 - 2\theta_{11}^2) H_1^{(1)}(\xi_{11} R)], \\
 \bar{T}_{333} &= -i\alpha B \left[-\frac{4N_1}{R} + 2N_2 + \theta_{12}^2 H_0^{(1)}(\xi_{11} R) \right].
 \end{aligned}$$

Аналогично для представления функций напряжений в виде двойного преобразования Фурье, имеем:

$$T_{ljk}(\vec{r}_0, \vec{r}) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \exp(-i\beta(y - y_0) - i\alpha(z - z_0)) \bar{\bar{T}}_{ljk}(x, x_0, \alpha, \beta) d\alpha d\beta,$$

$l, j, k = 1, 2, 3.$

При этом для вывода системы граничных интегральных уравнений нам понадобятся лишь следующие:

$$\begin{aligned}
 \bar{\bar{T}}_{111} &= A[-\zeta^2 E_{11}^- + 2u^2 E_{22}^-], \\
 \bar{\bar{T}}_{313} &= A[2\alpha^2 E_{11}^- - (2\alpha^2 - \theta_{12}^2) E_{22}^-], \\
 \bar{\bar{T}}_{211} &= -A \frac{i\beta}{\sigma_{11}} [-\zeta^2 E_{11}^- + 2\sigma_{11}\sigma_{12} E_{22}^-], \\
 \bar{\bar{T}}_{311} &= -A \frac{i\alpha}{\sigma_{11}} [-\zeta^2 E_{11}^- + 2\sigma_{11}\sigma_{12} E_{22}^0], \\
 \bar{\bar{T}}_{112} &= A \frac{i\beta}{\sigma_{12}} [-2\sigma_{11}\sigma_{12} E_{11}^- + \zeta^2 E_{22}^-], \\
 \bar{\bar{T}}_{212} &= A[2u^2 E_{11}^- - \zeta^2 E_{22}^- - 2\beta^2(E_{11}^- - E_{22}^-)], \\
 \bar{\bar{T}}_{312} &= \bar{\bar{T}}_{213} = 2A\alpha\beta[E_{11}^- - E_{22}^-], \\
 \bar{\bar{T}}_{113} &= -A \frac{i\alpha}{\sigma_{12}} [-2\sigma_{11}\sigma_{12} E_{11}^- + \zeta^2 E_{22}^-], \\
 \zeta^2 &= 2u^2 - \theta_{12}^2.
 \end{aligned}$$

В качестве фундаментальных решений при исследовании поставленной задачи для области D_1 используем

$$\vec{u}^*(\vec{R}_0, \vec{r}) = \vec{u}(\vec{r}_0, \vec{r}) + \vec{u}^+(\vec{r}_0, \vec{r}) + \vec{u}^-(\vec{r}_0, \vec{r}), \quad (5.3.8)$$

где $\vec{u}^+(\vec{r}_0, \vec{r})$ представляет собой поле симметрично относительно плоскости $x = 0$ расположенного источника колебаний интенсивности $\vec{q}^+ = (-q_1, q_2, q_3)$, поле $\vec{u}^-(\vec{r}_0, \vec{r})$ — поле отраженных относительно $x = 0$ волн и волну Рэлея и служит для выполнения условий свободной границы на поверхности полупространства.

Соответствующее напряженно-деформированное состояние для поля \vec{u}^+ описывается соотношениями (5.3.4), (5.3.7), где функции U_{ij}^+ , T_{kij}^+ получаются из U_{ij} , T_{kij} заменой

$$\begin{aligned} \sin \varphi \rightarrow \sin \varphi^+ &= \frac{-x_0 - x}{R_0}, \quad \cos \varphi \rightarrow \cos \varphi^+ = \frac{y_0 - y}{R_0}, \\ R_0 &= \sqrt{(x_0 + x)^2 + (y_0 - y)^2}, \end{aligned}$$

а также изменением знака на противоположный для $j = 1$.

Поле \vec{u}^- выписывается в виде двойного контурного интеграла Фурье (5.3.5) с использованием результатов решения краевой задачи для однородного полупространства при заданном на его поверхности векторе напряжений. А именно (в образах Фурье)

$$\overline{\overline{U}}_{jk}^-(x, x_0, \alpha, \beta) = K_{k1}^{(1)}(\alpha, \beta, x) f_j(\alpha, \beta, x_0), \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (5.3.9)$$

Здесь функции $k_{k1}^{(1)}$ определены соотношениями [см. Собисевич, 2001]

$$\begin{aligned} f_1(\alpha, \beta, x_0) &= A[2\zeta^2 E_{11}^0 - 4u^2 E_{22}^0], \\ f_2(\alpha, \beta, x_0) &= -\frac{iA\beta}{\sigma_{11}} [2\zeta^2 E_{11}^0 - 4\sigma_{11}\sigma_{12} E_{22}^0], \\ f_3(\alpha, \beta, x_0) &= -\frac{iA\alpha}{\sigma_{12}} [2\zeta^2 E_{11}^0 - 4\sigma_{11}\sigma_{12} E_{22}^0], \\ E_{ii}^0 &= E_{ii}^-|_{x=0}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Аналогично для функций напряжений, соответствующих полю отраженных волн, можем записать:

$$\overline{\overline{T}}_{ljk}^- = W_{jk}(\alpha, \beta, x) f_l(\alpha, \beta, x_0), \quad l, j, k = 1, 2, 3. \quad (5.3.10)$$

$$\begin{aligned} W_{11} &= \frac{[\zeta^4 \exp(-\sigma_{11}x) - 4u^2 \sigma_{11}\sigma_{12} \exp(-\sigma_{12}x)]}{\Delta_0}, \\ W_{12} = W_{21} &= \frac{2i\beta\sigma_{11}\zeta^2}{\Delta_0} [\exp(-\sigma_{11}x) - \exp(-\sigma_{12}x)]/\Delta_0, \\ W_{13} = W_{31} &= \frac{2i\alpha\sigma_{11}\zeta^2}{\Delta_0} [\exp(-\sigma_{11}x) - \exp(-\sigma_{12}x)]/\Delta_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 w_{22} &= \frac{[-\zeta^2 \xi^2(\beta) \exp(-\sigma_{11}x) + 4\beta^2 \sigma_{11} \sigma_{12} \exp(-\sigma_{12}x)]}{\Delta_0}, \\
 W_{23} = W_{32} &= \frac{2\alpha\beta[-\zeta^2 \exp(-\sigma_{11}x) + 2\sigma_{11} \sigma_{12} \exp(-\sigma_{12}x)]}{\Delta_0}, \\
 W_{33} &= \frac{[-\zeta^2 \xi^2(\alpha) \exp(-\sigma_{11}x) + 4\alpha^2 \sigma_{11} \sigma_{12} \exp(-\sigma_{12}x)]}{\Delta_0}, \\
 \xi^2(z) &= 2z^2 - 2\theta_{11}^2 + \theta_{12}^2.
 \end{aligned}$$

Используя динамическую теорему взаимности [Бенерджи, Баттерфилд, 1984] получим интегральное представление перемещений точек области D_1 через распределение смещений на поверхности полости

$$\begin{aligned}
 u_l^{(1)}(\vec{r}_0) &= - \iint_S \sum_{k=1}^3 \left\{ \sum_{j=1}^3 T_{ljk}^*(\vec{r}_0, \vec{r}) n_j(\vec{r}) \right\} u_k^{(1)}(\vec{r}) ds + \iint_S \sum_{j=1}^3 U_{lj}^*(\vec{r}_0, \vec{r}) \tau_j(\vec{r}) ds - \\
 &- \int_{(x=0)} \sum_{j=1}^3 U_{lj}^*(\vec{r}_0, \vec{r}) R_j^{(1)}(y, z) dy dz, \quad l = 1, 2, 3, \quad \vec{r}_0 \in D_1. \quad (5.3.11)
 \end{aligned}$$

Здесь $\tau_j(\vec{r})$ — компоненты вектора напряжений, заданного на поверхности полости, $R_j^{(1)}(y, z)$ — компоненты вектора контактных напряжений на границе раздела полупространства и вышележащего слоя, n_j — составляющие вектора внешней нормали к S .

При выводе выражения (5.3.11) использовано свойство обращения в нуль на границе $x = 0$ функций T_{ljk}^* , $j, k = 1, 2, 3$, а также предельное соотношение

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi R \left[- \sum_{k=1}^3 \left\{ \sum_{j=1}^3 T_{ljk}^*(\vec{r}_0, \vec{r}) n_j \right\} u_k^{(1)}(\vec{r}) + \sum_{j=1}^3 U_{lj}^*(\vec{r}_0, \vec{r}) \tau_j(\vec{r}) - \right. \\
 \left. - \int_{(x=0)} \sum_{j=1}^3 U_{lj}^*(\vec{r}_0, \vec{r}) R_j^{(1)}(y, z) dy dz \right] \rightarrow 0, \quad \text{при } R + \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Здесь $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, $\vec{r}_0 \in \gamma$.

Применив к (5.3.11) преобразование Фурье по координате z_0 , получим интегральные соотношения для трансформант Фурье $\tilde{u}_l^{(1)}(\vec{\rho}_0, \alpha)$ перемещений точек в области D_1 через трансформанты Фурье перемещений на границе дефекта. Интегрирование осуществляется по направляющей цилиндра γ

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_l^{(1)}(\vec{\rho}_0, \alpha) &= - \int_{\gamma} \sum_{k=1}^3 \left\{ \sum_{j=1}^3 \bar{T}_{ljk}^*(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) n_j(\vec{\rho}) \right\} \tilde{u}_k^{(1)}(\vec{\rho}, \alpha) d\gamma + \\
 &+ \frac{a}{\mu_1} \int_{\gamma} \sum_{j=1}^3 \bar{U}_{lj}^*(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) \tilde{\tau}_j(\vec{\rho}, \alpha) d\gamma -
 \end{aligned}$$

$$-\frac{a}{\mu_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^3 \bar{U}_{lj}^*(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) \tilde{R}_j^{(1)}(y, \alpha) dy, \quad l = 1, 2, 3. \quad (5.3.12)$$

$$\vec{\rho}_0 = \text{col} \{x_0, y_0\}, \quad \vec{\rho} = \text{col} \{x, y\}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{U}_{lj}^*(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, \alpha) &= \bar{U}_{lj}(R, \varphi, \alpha) + \bar{U}_{lj}^*(r_0, \varphi^+, \alpha) + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \bar{\bar{U}}_{lj}^-(x, x_0, \alpha, \beta) \exp(-i\beta(y - y_0)) d\beta, \\ \bar{T}_{lj}^*(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, \alpha) &= \bar{T}_{lj}(R, \varphi, \alpha) + \bar{T}_{lj}^+(R_0, \varphi^+, \alpha) = \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \bar{\bar{T}}_{lj}^-(x, x_0, \alpha, \beta) \exp(-i\beta(y - y_0)) d\beta, \\ \tilde{R}_j^{(1)}(y, \alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_j^{(1)}(y, z) \exp[i\alpha z] dx, \\ \tilde{\tau}_j(\vec{\rho}, \alpha) &= \int_{-\infty}^{\infty} \tau_j(\vec{r}) \exp[i\alpha z] dx. \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

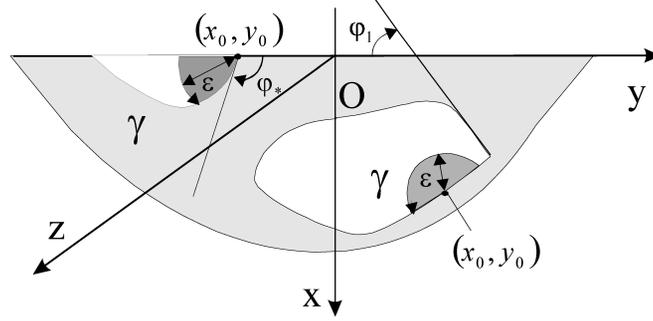
Сходимость интегралов по β в (5.3.13) при $\vec{\rho} \neq \vec{\rho}_0$ абсолютная и равномерная по параметрам задачи.

Устремляя далее в соотношении (5.3.12) $\vec{\rho}_0$ к границе γ , с учетом скачка интеграла в правой части, получим граничные интегральные уравнения относительно трансформант Фурье смещений на дефекте со свободным параметром α :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \zeta_{kl}(\vec{\rho}_0) \tilde{u}_l^{(1)}(\vec{\rho}_0, \alpha) + \int_{\gamma} \sum_{k=1}^3 \left\{ \sum_{j=1}^3 \bar{T}_{lj}^*(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) n_j(\vec{\rho}) \right\} \tilde{u}_k^{(1)}(\vec{\rho}, \alpha) d\gamma = \\ = \frac{a}{\mu_1} \int_{\gamma} \sum_{j=1}^3 \bar{U}_{lj}^*(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) \tilde{\tau}_j(\vec{\rho}, \alpha) d\gamma - \\ - \frac{a}{\mu_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^3 \bar{U}_{lj}^*(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) \tilde{R}_j^{(1)}(y, \alpha) dy, \quad l = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (5.3.14)$$

Функции координат $\zeta_{kl}(\vec{\rho}_0)$ определяются путем дополнения области D_1 цилиндрическими областями D_ε , окружающими в плане точку $\vec{\rho}_0$ дугой радиуса ε , целиком лежащей в области $x > 0$, с последующим стремлением величины ε к нулю (рис. 5.8).

В результате для $\zeta_{kl}(\vec{\rho}_0)$ получены следующие соотношения. Для точек направляющей γ с непрерывным изменением угла наклона касательной $\zeta_{kl} = 0,5 \delta_{kl}$,


 Рис. 5.8. Пространственная область D_1 , дополненная областями D_ε , в плане

$k, l = 1, 2, 3$. Для точек кривой γ , где наблюдается её излом и удовлетворяющих условию $x_0 > 0$, матрица функций $\vec{\zeta} = (\zeta_{kl})$ имеет вид:

$$\vec{\zeta} = \begin{pmatrix} \frac{\varphi_*}{2\pi} - \zeta \frac{\sin 2\varphi}{4\pi} \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_1+\varphi_*} & -\frac{\zeta \cos 2\varphi}{4\pi} \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_1+\varphi_*} & 0 \\ -\frac{\zeta \cos 2\varphi}{4\pi} \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_1+\varphi_*} & \frac{\varphi_*}{2\pi} + \zeta \frac{\sin 2\varphi}{4\pi} \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_1+\varphi_*} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varphi_*}{2\pi} \end{pmatrix}.$$

В случае выхода точки с радиус-вектором на границу матрица приобретает вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\varphi_*}{2\pi} - \frac{\sin 2\varphi_*}{4\pi} & \frac{1 - \cos 2\varphi_*}{4\pi} & 0 \\ \frac{1 - \cos 2\varphi_*}{4\pi} & \frac{\varphi_*}{2\pi} + \frac{\sin 2\varphi_*}{4\pi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\varphi_*}{2\pi} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\xi = \theta_{12}^2 - \theta_{11}^2$, φ_* — угол между касательными плоскостями в точке излома направляющей цилиндрической полости, φ_1 — угол, образованный касательной плоскостью в точке с радиус-вектором $\vec{\rho}_0$ при обходе границы γ против часовой стрелки с плоскостью $x = 0$ и откладываемый от отрицательного направления оси Oy против часовой стрелки (см. рис. 5.8).

Для вывода значений матрицы $\vec{\zeta}$, а также для изучения свойств системы (5.3.14) было рассмотрено асимптотическое поведение фундаментальных решений при $R \rightarrow 0$ (или $\vec{\rho} \rightarrow \vec{\rho}_0$) и $x_0 > 0$, имеющее вид:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{lj}^*(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, \alpha) &\sim \bar{U}_{lj}(R, \varphi, \alpha) \\ \bar{T}_{ljk}^*(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, \alpha) &\sim \bar{T}_{ljk}(R, \varphi, \alpha), \\ \bar{U}_{11}^* &\sim \bar{u}_{22}^* \sim \frac{i(\theta_{11}^2 + \theta_{12}^2) \ln R}{\pi}, \\ \bar{U}_{33}^* &\sim \frac{2i\theta_{12}^2 \ln R}{\pi}, \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

$$\begin{aligned}
 \bar{U}_{12}^* &\sim \bar{U}_{21}^* \sim \frac{i \sin 2\varphi (\theta_{12}^2 - \theta_{11}^2) (\xi_{12}^2 + \xi_{11}^2)}{8\pi} R^2 \ln R, \\
 \bar{U}_{13}^* &\sim \bar{U}_{31}^* \sim \frac{\alpha \sin \varphi (\theta_{12}^2 - \theta_{11}^2)}{\pi} R \ln R, \\
 \bar{U}_{23}^* &\sim \bar{U}_{32}^* \sim \frac{\alpha \cos \varphi (\theta_{12}^2 - \theta_{11}^2)}{\pi} R \ln R, \\
 \bar{T}_{111}^* &\sim \frac{2iB \sin \varphi}{\pi R} \{ (\theta_{12}^2 - \theta_{11}^2) \cos 2\varphi - \theta_{12}^2 \}, \\
 \bar{T}_{211}^* &\sim \frac{2iB \cos \varphi}{\pi R} \{ (\theta_{12}^2 - \theta_{11}^2) \cos 2\varphi + 2\theta_{11}^2 - \theta_{12}^2 \}, \\
 \bar{T}_{112}^* &\sim \frac{2iB \cos \varphi}{\pi R} \{ (\theta_{12}^2 - \theta_{11}^2) \cos 2\varphi - \theta_{12}^2 \}, \\
 \bar{T}_{212}^* &\sim \frac{2iB \sin \varphi}{\pi R} \{ -(\theta_{12}^2 - \theta_{11}^2) \cos 2\varphi - \theta_{12}^2 \}, \\
 \bar{T}_{123}^* &\sim \bar{T}_{213}^* \sim \bar{T}_{312}^* \sim \frac{-\alpha B \sin 2\varphi}{\pi} \{ \theta_{12}^2 - \theta_{11}^2 \}, \\
 \bar{T}_{122}^* &\sim \frac{2iB \sin \varphi}{\pi R} \{ -(\theta_{12}^2 - \theta_{11}^2) \cos \varphi + 2\theta_{11}^2 - \theta_{12}^2 \}, \\
 \bar{T}_{222}^* &\sim \frac{2iB \cos \varphi}{\pi R} \{ -(\theta_{12}^2 - \theta_{11}^2) \cos 2\varphi - \theta_{12}^2 \}, \\
 \bar{T}_{311}^* &\sim \bar{T}_{322}^* \sim -\bar{T}_{113}^* \sim -\bar{T}_{223}^* \sim -\frac{2\alpha \theta_{11}^2}{\pi} \ln R, \\
 \bar{T}_{313}^* &\sim -\frac{2iB \sin \varphi \theta_{12}^2}{\pi R}, \\
 \bar{T}_{323}^* &\sim -\frac{2iB \cos \varphi \theta_{12}^2}{\pi R}.
 \end{aligned}$$

В результате поведение подынтегральных выражений в уравнениях (5.3.14), при $\vec{\rho} \rightarrow \vec{\rho}_0$ и $x_0 > 0$, определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
 \bar{K}_{lk}(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) &= \sum_{j=1}^2 \bar{T}_{ljk}^*(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) n_j(\vec{\rho}) \quad (n_3 \equiv 0), \\
 \bar{K}_{129}(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) &\sim -\bar{K}_{21}(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) \sim \frac{2iB\delta}{\pi R} \theta_{11}^2, \\
 \bar{K}_{13}(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) &\sim -\bar{K}_{31}(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) \sim \frac{1\alpha B \delta \theta_{11}^2 \cos \varphi}{\pi} \ln R, \\
 \bar{K}_{23}(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) &\sim -\bar{K}_{32}(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) \sim -\frac{2\alpha B \delta \theta_{11}^2 \sin \varphi}{\pi} \ln R, \\
 |\bar{K}_{ll}(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha)| &< \text{const}, \quad l = 1, 2, 3.
 \end{aligned}$$

Здесь $\delta = 1$ для участка контура γ до точки с радиус-вектором $\vec{\rho}_0$; $\delta = -1$ для участка за указанной точкой.

При интегрировании вдоль контура γ интегралы, соответствующие элементам ядра \bar{K}_{12} и \bar{K}_{21} , стоящие в левой части выражения (5.3.14), понимаются в смысле главного значения по Коши.

В случае выхода точки наблюдения с радиус-вектором $\vec{\rho}_0$ на границу $x = 0$ все интегралы в (5.3.14) являются регулярными.

Таким образом, рассматриваемая краевая задача сведена к системе граничных интегральных уравнений (5.3.14) относительно трансформант Фурье по координате вдоль образующей цилиндра для амплитудных функций вектора перемещений. Интегрирование в ГИУ проводится лишь по направляющей цилиндрической полости. Восстановление функций, определяющих напряженно-деформированное состояние упругой среды, осуществляется обратным преобразованием Фурье вида

$$u_l^{(1)}(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_2} \exp(-i\alpha z) \tilde{u}_l^{(1)}(\vec{\rho}, \alpha) d\alpha \quad (5.3.16)$$

с учетом соотношений, аналогичных (5.3.12).

5.3.2. Случай относительно сильного заглубления полости

В данном разделе рассматриваемый круг проблем связан с корректным построением и исследованием граничных интегральных уравнений для задачи о стационарных колебаниях упругой слоистой среды с относительно сильно заглубленной цилиндрической полостью в подстилающем полупространстве. При этом построенные ранее фундаментальные решения, соответствующие действию сосредоточенного усилия в полупространстве, а также полученные на их основе ГИУ, модифицируются при условии наложения ограничения на параметры задачи:

$$\frac{2\pi h}{\lambda_P} \gg 1, \quad (5.3.17)$$

здесь h — минимальное расстояние между точками плоской поверхности $x = 0$ и границы полости, λ_P — длина продольной волны в полупространстве.

На остальные независимые линейные параметры (характерный размер дефекта a и т. д.) в общем случае не делается никаких ограничений. Будут лишь оговорены диапазоны изменения этих параметров, соответствующих наиболее эффективной реализации метода граничных интегральных уравнений на основе граничных элементов. Отметим, что условие (5.3.17) связано с областью параметров, в которой возбуждаемые внутренним источником поверхностные волны Рэлея – Лэмба имеют малую интенсивность по отношению к отраженным от плоской границы объемным волнам или их влияние не существенно в области расположения полости.

Будем исходить из соотношений метода граничных интегральных уравнений (МГИУ) (5.3.12), (5.3.14) относительно представления трансформант Фурье смещений в среде. Практическое вычисление функций $\bar{U}_{lj}(R, \varphi, \alpha)$, $\bar{U}_{lj}^+(R, \varphi, \alpha)$ и $\bar{T}_{ljk}(R, \varphi, \alpha)$, $\bar{T}_{ljk}^+(R, \varphi, \alpha)$, соответствующих действию источника в плоскости не вызывает сложностей, так как они представляют собой суперпозицию цилиндрических волн (функций Ханкеля). Поле же $\bar{U}_{lj}^-(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, \alpha)$ выписывается в виде контурного интеграла Фурье (5.3.13). При этом в силу условия (5.3.17) $2\pi x/\lambda_P \gg 1$, ($2\pi x_0/\lambda_P \gg 1$ — для ГИУ) у подынтегральной функции появляются быстро осциллирующие множители E_{jj}^- , что затрудняет применение к вычислению контурных

интегралов численных схем, но позволяет провести их оценку асимптотическими методами анализа.

Представим функции $\bar{U}_{lj}^-(x, x_0, \alpha, \beta)$, $\bar{T}_{ljk}^-(x, x_0, \alpha, \beta)$ в соответствии с выражениями (5.3.9), (5.3.10) в виде

$$\bar{U}_{lj}^-(x, x_0, \alpha, \beta) = \sum_{p,q=1}^2 \bar{U}_{ljpq}^-(\alpha, \beta) E_{pq}(x, x_0, \alpha, \beta),$$

$$\bar{T}_{ljk}^-(x, x_0, \alpha, \beta) = \sum_{p,q=1}^2 \bar{T}_{ljkpq}^-(\alpha, \beta) E_{pq}(x, x_0, \alpha, \beta),$$

$$E_{pq}(x, x_0, \alpha, \beta) = \exp(-\sigma_{1p}x_0 - \sigma_{1q}x).$$

В качестве большого параметра примем величину

$$\lambda = \theta_{11} \sqrt{(y - y_0)^2 + x^2 + x_0^2}.$$

Интегралы Фурье, определяющие поле отраженных от плоской границы волн, могут быть записаны как

$$\bar{U}_{lj}^-(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, \alpha) = \sum_{p,q=1}^2 \bar{U}_{ljpq}^-(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, \alpha) = \sum_{p,q=1}^2 \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \bar{U}_{ljpq}^-(\alpha, \beta) \exp(i\lambda S_{pq}(\alpha, \beta)) d\beta,$$

$$S_{pq}(\alpha, \beta) = \cos \delta_1 \beta + \cos \delta_1 \bar{\sigma}_{1p} + \cos \delta_3 \bar{\sigma}_{1q},$$

$$\bar{\sigma}_{1p} = \sqrt{\theta_{1p}^2 - u^2}, \quad \cos \delta_1 = (y_0 - y)/\lambda, \quad \cos \delta_2 = x_0/\lambda, \quad \cos \delta_3 = x/\lambda.$$

В условиях $\lambda\theta_{11} \gg 1$ можно показать, что

$$\left. \frac{\partial S_{pq}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \right|_{|\beta| \gg 1} \neq 0 \quad \text{для всех } \alpha, \delta_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad |\alpha| < \theta_{11}.$$

Следовательно, в формирование значения контурного интеграла основной вклад вносит лишь конечная часть контура Γ (поведение подынтегральной функции на конечной части Γ между точками ветвления)

$$F(\lambda) = \int_{\Gamma_1} f(\beta, \lambda) d\beta \sim \int_{-M}^M f(\beta, \lambda) d\beta + O(\lambda^{-\infty}) \quad \text{при } |\alpha| < \theta_{11}.$$

Оценка $\int_{-M}^M f(\beta, \lambda) d\beta$ может быть осуществлена по методу стационарной фазы [Федорюк, 1977]:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{ljpq}^-(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, \alpha) &= \exp\left(i\lambda S_{pq}(\alpha, \beta_{pq}) + \frac{i\pi\delta_0}{4}\right) \times \\ &\times \sqrt{\frac{1}{2\pi |S''_{pq}(\alpha, \beta_{pq})|}} \bar{U}_{ljpq}^-(\alpha, \beta_{pq} + o(\lambda^{-1})), \end{aligned} \quad (5.3.18)$$

где $\delta_0 = \text{sign}(S''_{pq}(\alpha, \beta_{pq}))$ — функция знака второй частной производной фазовой функции $\partial^2 S / \partial \beta^2$.

В нашем случае

$$S''_{pq}(\alpha, \beta) = -\frac{\xi_{1p}^2 \cos \delta_2}{\bar{\sigma}_{1p}^3} - \frac{\xi_{1q}^2 \cos \delta_3}{\bar{\sigma}_{1q}^3} < 0 \quad \text{при } |\alpha|, |\beta| < \theta_{11}.$$

При этом β_{pq} вычисляется для $p \neq q$ в качестве корня трансцендентного уравнения

$$\frac{\partial S_{pq}(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = \cos \delta_1 - \cos \delta_2 \beta / \bar{\sigma}_{1p} - \cos \delta_3 \beta / \bar{\sigma}_{1q} = 0,$$

имеет знак выражения $(y - y_0)$ и соответствует обменным волнам, возникающим при отражении от плоской границы области.

Для $p = q$ величина $\beta_{pp} = \frac{\xi_{1p} \cos \delta_1}{\sqrt{1 + 2 \cos \delta_2 \cos \delta_3}}$ и определяет отраженные волны без изменения по типу движения.

Аналогично (5.3.18) могут быть представлены компоненты тензора напряжений для фундаментального решения исследуемой задачи.

Таким образом, в рассматриваемом случае ядра системы граничных интегральных уравнений представлены в аналитическом виде через трансцендентные функции. Если же к предположению (5.3.17) добавляется условие малости характерных размеров направляющей цилиндрической полости по отношению к заглублению $|y - y_0| \ll x + x_0$ для всех x, x_0, y, y_0 , то формулы, определяющие поле отраженных от плоской границы волн, приобретают еще более простой вид. В последнем случае можно считать, что $\beta_{pq} \approx 0$, $p, q = 1, 2$. И, следовательно, в матрице фундаментальных решений отраженного поля преобладающими являются компоненты $\bar{U}_{11}^-, \bar{U}_{13}^-, \bar{U}_{31}^-, \bar{U}_{33}^-$, имеющие порядок малости $\underline{O}(\lambda^{-0.5})$. Аналогично для функций напряжений главный вклад вносят элементы $\bar{T}_{111}^-, \bar{T}_{113}^-, \bar{T}_{122}^-, \bar{T}_{311}^-, \bar{T}_{313}^-, \bar{T}_{322}^-$. В частности,

$$\begin{aligned} \bar{U}_{1111}^-(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, \alpha) &= 2iAE \sqrt{\frac{\xi_{11}^3}{2\pi\lambda(\cos \delta_2 + \cos \delta_3)}} \frac{(2\alpha^2 - \theta_{12}^2)^2}{\Delta_0(\alpha)} [1 + \underline{O}(\lambda^{-1})], \\ \bar{T}_{11111}^-(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, \alpha) &= E \sqrt{\frac{\xi_{11}}{2\pi\lambda(\cos \delta_2 + \cos \delta_3)}} \frac{(2\alpha^2 - \theta_{12}^2)^3}{\theta_{12}^2 \Delta_0(\alpha)} [1 + \underline{O}(\lambda^{-1})], \\ \bar{T}_{12211}^-(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, \alpha) &= E \sqrt{\frac{\xi_{11}}{2\pi\lambda(\cos \delta_2 + \cos \delta_3)}} \frac{(2\alpha^2 - \theta_{12}^2)^2 (2\theta_{11}^2 - \theta_{12}^2)}{\theta_{12}^2 \Delta_0(\alpha)} [1 + \underline{O}(\lambda^{-1})], \end{aligned} \quad (5.3.19)$$

$$E = \exp(i\xi_{11}(x + x_0) - i\pi/4).$$

Решения (5.3.19) представляют собой цилиндрическую волну, фронт которой при взаимодействии с заглубленной полостью является локально плоским.

Заметим, что в рассматриваемом случае нагружения величины, соответствующие полю отраженных от плоских границ волн, имеют одинаковый порядок малости по параметру λ . В случае же реализации плоской деформации ($\partial/\partial z \equiv 0$)

преобладающими являются компоненты, приведенные в формулах (5.3.19) и соответствующие продольному типу волнового движения.

Остановимся подробнее на особенностях использования метода граничных интегральных уравнений и соответственно МГЭ в случае сильного заглубления полости. Поскольку линейные размеры полости не влияют на построение фундаментальных решений по методу стационарной фазы при условии (5.3.17), то следует отметить, что увеличение параметра $\theta_{11}h$ можно рассматривать в двух направлениях. А именно, в первом направлении как процесс увеличения расстояния между границами $x = 0$ и полости при фиксированной частоте колебаний. Последнее приводит к тому, что стационарные точки β_{pq} стягиваются к нулю, и механизм передачи волнового движения при переотражении от плоских границ области основывается на исключении компонент перемещений в направлении оси Oy . Здесь методика использования асимптотических методов анализа для построения решения задачи весьма близка к методике, предложенной ранее [Колодяжная, Селезнев и др., 1987]. Второе направление связано с ростом частоты колебаний. В этом случае полученные асимптотики сохраняют свою силу.

Существуют и практические ограничения на реализацию МГЭ, присущие именно этому методу (необходимость увеличения числа граничных элементов с ростом частоты колебаний). Участок границы области в одну длину волны при этом разбивается не менее чем на 5–10 элементов, а сами точки участка направляющей цилиндра не могут быть расположены ближе 1–2 длин продольной волны к дневной поверхности среды. С ростом частоты ω стационарные точки расходятся в абсолютном значении, что приводит к выраженным явлениям трансформации волн по типу при отражении как от плоской границы среды, так и от поверхности цилиндра. В этом случае должны использоваться асимптотические соотношения вида (5.3.18).

Введенные в (5.3.18) ограничения на параметр преобразования Фурье α : $|\alpha| < \theta_{11}$ обосновываются возможностью асимптотической оценки контурного интеграла (5.3.16) для отраженного поля при определении оригиналов напряженно-деформированного состояния среды. При этом точка наблюдения должна быть расположена на расстояниях вдоль оси Oz порядка величины h и менее от области приложения нагрузки Ω , а линейные размеры Ω много менее h .

5.3.3. Цилиндрическая полость в упругом слое

Рассмотрим деформацию упругого слоя, содержащего цилиндрическую полость или возмущение дневной поверхности произвольной в плане формы. Геометрия области, описанная в разделе 4.3, соответствует D_2 .

Считаем, что на поверхности слоя заданы осциллирующие усилия, выраженные в амплитудных функциях:

$$\begin{aligned} \vec{t}|_{\gamma} &= \vec{\tau}(\vec{r}), \\ \vec{t}|_{x=0} &= \vec{R}^{(1)}(y, z), \\ \vec{t}|_{x=-h_2} &= \vec{R}^{(2)}(y, z). \end{aligned} \tag{5.3.20}$$

Представим фундаментальные решения, соответствующие действию сосредоточенного источника в упругом слое со свободными гранями, в виде

$$\vec{u}^*(\vec{r}_0, \vec{r}) = \vec{u}(\vec{r}_0, \vec{r}) + \vec{u}^-(\vec{r}_0, \vec{r}).$$

Здесь $\vec{u}(\vec{r}_0, \vec{r})$ — набор цилиндрических волн вида (5.3.4), уходящих от источника колебаний в упругом пространстве, $\vec{u}^-(\vec{r}_0, \vec{r})$ — суперпозиция отраженных от границ слоя волн. Удовлетворение нулевым условиям в напряжениях на гранях слоя $x = 0$ и $x = -h_2$ приводит к соотношениям для отраженного поля в виде двойного преобразования Фурье. В общем случае эти выражения достаточно громоздки, поэтому приведем их для случая плоской деформации среды ($\alpha = 0$):

$$\begin{aligned} \bar{\bar{U}}_{11}^+ (x, x_0, 0, \beta) = & \frac{A}{\Delta_2(\beta)} \{ \beta^4 \zeta^2 \sigma_{21} (E_{SC1} + E_{cS2}) - \beta^2 \zeta^6 \sigma_{21}^{-1} (E_{SC2} + E_{CS1}) + \\ & + \beta^2 \zeta^4 \sigma_{21} C_{21} - \beta^4 \zeta^4 \sigma_{22}^{-1} C_{C2} - D_-^8 \sigma_{22}^{-1} (C_{h1} + \beta^2 \sigma_{21}^{-1} \sigma_{22}^{-1} C_{h2}) - \\ & - D_+^8 \sigma_{22}^{-1} (C_{01} - \beta^2 \sigma_{21}^{-1} \sigma_{22}^{-1} C_{02}) \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{U}}_{12}^+ = & \frac{i\beta A}{\Delta_2(\beta)} \{ \beta^2 \zeta^2 \sigma_{21}^{-1} \sigma_{22}^{-1} (\sigma_{21}^2 \sigma_{22}^2 E_{SS1} - \zeta^4 E_{SS2}) + \zeta^2 (-\zeta^4 E_{CC1} + \beta^4 E_{CC2}) + \\ & + \beta^2 \zeta^4 (-C_{S1} + C_{S2}) + D_-^8 \sigma_{21}^{-1} \sigma_{22}^{-1} (S_{h1} + S_{h2} + D_+^8 \sigma_{21}^{-1} \sigma_{22}^{-1} (S_{01} - S_{02})) \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{U}}_{21}^+ = & \frac{i\beta A}{\Delta_2(\beta)} \{ \beta^2 \zeta^2 \sigma_{21}^{-1} \sigma_{22}^{-1} (\zeta^4 E_{SS1} - \sigma_{21}^2 \sigma_{22}^2 E_{SS2}) + \zeta^2 (-\beta^4 E_{CC1} + \zeta^4 E_{CC2}) + \\ & + \beta^2 \zeta^4 (-C_{S1} + C_{S2}) + D_-^8 \sigma_{21}^{-1} \sigma_{22}^{-1} (S_{h1} + S_{h2}) + D_+^8 \sigma_{21}^{-1} \sigma_{22}^{-1} (S_{01} - S_{02}) \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{U}}_{22}^+ = & \frac{A}{\Delta_2(\beta)} \{ -\beta^2 \zeta^6 \sigma_{21}^{-1} (E_{SC1} + E_{CS2}) + \beta^4 \zeta^2 \sigma_{21} (E_{SC2} + E_{CS1}) + \\ & + \beta^2 \zeta^4 \sigma_{22} C_{C2} - \beta^4 \zeta^4 \sigma_{21}^{-1} C_{C1} - D_-^8 \sigma_{21}^{-1} (C_{h2} + \beta^2 \sigma_{21}^{-1} \sigma_{22}^{-1} C_{h1}) - \\ & - D_+^8 \sigma_{21}^{-1} (C_{02} - \beta^2 \sigma_{21}^{-1} \sigma_{22}^{-1} C_{01}) \}, \end{aligned}$$

$$D_{\pm}^8 = 0,5 (\zeta^8 \pm \beta^4 \sigma_{21}^2 \sigma_{22}^2), \quad \Delta_2 = D_+^8 \frac{\text{sh } \sigma_{21} h_2 \text{ sh } \sigma_{22} h_2}{\sigma_{21} \sigma_{22}} + \beta^2 \zeta^4 (1 - \text{ch } \sigma_{21} h_2 \text{ ch } \sigma_{22} h_2).$$

Для компонент напряжений имеем:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{T}}_{111}^+ = & \frac{A}{\Delta_2(\beta)} \{ -\beta^2 \zeta^8 \sigma_{21}^{-1} \sigma_{22}^{-1} E_{SS1} + \beta^4 \zeta^2 \sigma_{21} \sigma_{22} E_{SS2} + \beta^4 \zeta^4 (E_{CC1} - C_{S2}) - \\ & - \beta^2 \zeta^6 (E_{CC2} - C_{S1}) - D_-^8 \sigma_{21}^{-1} \sigma_{22}^{-1} (\zeta^2 S_{h1} + \beta^2 S_{h2}) - \\ & - D_+^8 \sigma_{21}^{-1} \sigma_{22}^{-1} (\zeta^2 S_{01} - \beta^2 S_{02}) \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{T}}_{112}^+ = & \frac{2i\beta A}{\Delta_2(\beta)} \{ -\zeta^8 \sigma_{21}^{-1} E_{SC1} + \beta^4 \zeta^2 \sigma_{22} E_{SC2} + \beta^2 \zeta^4 \sigma_{22} (E_{CS1} + C_{C2}) - \\ & - \beta^2 \zeta^6 \sigma_{21}^{-1} (E_{CS2} + C_{C1}) - D_-^8 \sigma_{21}^{-1} (\zeta^2 \sigma_{21}^{-1} \sigma_{22}^{-1} C_{h1} + C_{h2}) - \\ & - D_+^8 \sigma_{21}^{-1} (-\zeta^2 \sigma_{21}^{-1} \sigma_{22}^{-1} C_{01} + C_{02}) \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{T}_{121}^+ &= \frac{2i\beta A}{\Delta_2(\beta)} \left\{ -\beta^4 \zeta^2 \sigma_{21} E_{Sc1} + \zeta^8 \sigma_{22}^{-1} E_{Sc2} + \beta^2 \zeta^6 \sigma_{22}^{-1} (E_{CS1} + C_{C2}) - \right. \\
 &\quad \left. -\beta^2 \zeta^4 \sigma_{21} (E_{CS2} + C_{C1}) + D_-^8 \sigma_{22}^{-1} (C_{h1} + \zeta^2 \sigma_{21}^{-1} \sigma_{22}^{-1} C_{h2}) - \right. \\
 &\quad \left. -D_+^8 \sigma_{22}^{-1} (-C_{01} + \zeta^2 \sigma_{21}^{-1} \sigma_{22}^{-1} C_{02}) \right\}, \\
 \bar{T}_{122}^+ &= \frac{2A}{\Delta_2(\beta)} \left\{ \beta^4 \zeta^2 \sigma_{21} \sigma_{22} E_{SS1} - \beta^2 \zeta^8 \sigma_{21}^{-1} \sigma_{22}^{-1} E_{SS2} - \beta^2 \zeta^6 (E_{CC1} - C_{S2}) + \right. \\
 &\quad \left. +\beta^4 \zeta^4 (E_{CC2} - C_{S1}) - D_-^8 \sigma_{21}^{-1} \sigma_{22}^{-1} (\beta^2 S_{h1} + \zeta^2 S_{h2}) + \right. \\
 &\quad \left. +D_+^8 \sigma_{21}^{-1} \sigma_{22}^{-1} (\beta^2 S_{01} - \zeta^2 S_{02}) \right\}, \\
 \bar{T}_{221}^+ &= \frac{2A}{\Delta_2(\beta)} \left\{ \beta^2 \zeta^6 \xi^2 \sigma_{21}^{-1} \sigma_{22}^{-1} E_{SS1} - \beta^4 \zeta^2 \sigma_{21} \sigma_{22} E_{SS2} - \beta^4 \zeta^2 (\xi^2 E_{CC1} - \zeta^2 C_{S2}) + \right. \\
 &\quad \left. +\beta^2 \zeta^4 (\zeta^2 E_{CC2} - \xi^2 C_{S1}) + D_-^8 \sigma_{21}^{-1} \sigma_{22}^{-1} (\xi^2 S_{h1} + \beta^2 S_{h2}) + \right. \\
 &\quad \left. +D_+^8 \sigma_{21}^{-1} \sigma_{22}^{-1} (\xi^2 S_{01} - \beta^2 S_{02}) \right\}, \\
 \bar{T}_{222}^+ &= \frac{2i\beta A}{\Delta_2(\beta)} \left\{ \zeta^6 \xi^2 \sigma_{21}^{-1} E_{Sc1} - \beta^4 \zeta^2 \sigma_{22} E_{Sc2} - \beta^2 \zeta^2 \sigma_{22} (\xi^2 E_{CS1} + \zeta^2 C_{C2}) + \right. \\
 &\quad \left. +\beta^2 \zeta^4 \sigma_{21}^{-1} (\zeta^2 E_{CS2} + \xi^2 C_{C1}) + D_-^8 \sigma_{21}^{-1} (\xi^2 \sigma_{21}^{-1} \sigma_{22}^{-1} C_{h1} + C_{h2}) + \right. \\
 &\quad \left. +D_+^8 \sigma_{21}^{-1} (-\xi^2 \sigma_{21}^{-1} \sigma_{22}^{-1} C_{01} + C_{02}) \right\}.
 \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}
 C_{0j} &= \operatorname{ch} \sigma_{2j}(x - x_0) \operatorname{sh} \sigma_{2j}^* h_2, \quad C_{hj} + \operatorname{ch} \sigma_{2j}(x + x_0 + h_2) \operatorname{sh} \sigma_{2j}^* H_2, \\
 S_{0j} &= \operatorname{sh} \sigma_{2j}(x - x_0) \operatorname{sh} \sigma_{2j}^* h_2 \exp(-\sigma_{2j} h_2), \quad S_{hj} = \operatorname{sh} \sigma_{2j}(x + x_0 + h_2) \operatorname{sh} \sigma_{2j}^* h_2, \\
 S_j &= 1 - \operatorname{ch} \sigma_{2j}^* h_2 \exp(-\sigma_{2j} h_2), \quad j = 1, 2; \quad \sigma_{21}^* \sigma_{22}, \quad \sigma_{22}^* = \sigma_{21}, \\
 E_{FGj} &= F(\sigma_{2j} x) G(\sigma_{2j}^* x_0) - F(\sigma_{2j}(x + h_2)) G(\sigma_{2j}^*(x_0 + h_2)).
 \end{aligned}$$

$C_{Fj} = F(\sigma_{2j}(x - x_0)) S_j$ — индексу C соответствует функциональная зависимость $\operatorname{sh}(\dots)$, индексу S соответствует функциональная зависимость $\operatorname{ch}(\dots)$.

Основываясь на формулах Сомильяны [Бенерджи, Баттерфилд, 1984], можно получить интегральное представление трансформант Фурье перемещений точек области D_2 через распределение аналогичной характеристики на кривой γ в зависимости от параметра α

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_l^{(2)}(\vec{\rho}_0, \alpha) &= - \int_{\gamma} \sum_{k=1}^3 \left\{ \sum_{j=1}^3 \bar{T}_{ljk}^*(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) n_j(\vec{\rho}) \right\} \tilde{u}_k^{(2)}(\vec{\rho}, \alpha) d\gamma + \\
 &\quad + \frac{a}{\mu_2} \int_{\gamma} \sum_{j=1}^3 \bar{U}_{lj}^*(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) \tilde{\tau}_j(\vec{\rho}, \alpha) d\gamma - \\
 &\quad - \frac{a}{\mu_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^3 \bar{U}_{lj}^*(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) \tilde{R}_j^{(2)}(y, \alpha) dy + \\
 &\quad + \frac{a}{\mu_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^3 \bar{U}_{lj}^*(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) \tilde{R}_j^{(1)}(y, \alpha) dy, \quad l = 1, 2, 3. \quad (5.3.21)
 \end{aligned}$$

Устремляя далее в соотношении (5.3.21) (x_0, y_0) к γ с учетом скачка интеграла в правой части, получим граничные интегральные уравнения относительно трансформант смещений на цилиндрической полости

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^3 \zeta_{kl}(\vec{\rho}_0) \tilde{u}_l^{(2)}(\vec{\rho}_0, \alpha) + \int_{\gamma} \sum_{k=1}^3 \left\{ \sum_{j=1}^3 \bar{T}_{ljk}^*(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) n_j(\vec{\rho}) \right\} \tilde{u}_k^{(2)}(\vec{\rho}, \alpha) dy = \\
 & = \frac{a}{\mu_2} \int_{\gamma} \sum_{j=1}^3 \bar{U}_{lj}^*(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) \tilde{\tau}_j(\vec{\rho}, \alpha) d\gamma - \frac{a}{\mu_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^3 \bar{U}_{lj}^*(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) \tilde{R}_j^{(2)}(y, \alpha) dy + \\
 & + \frac{a}{\mu_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{j=1}^3 \bar{U}_{lj}^*(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) \tilde{R}_j^{(1)}(y, \alpha) dy, \quad l = 1, 2, 3. \quad (5.3.22)
 \end{aligned}$$

Функции ζ_{kl} аналогичны случаю расположения полости в полупространстве.

5.3.4. Колебания слоистого полупространства, включающего пакет слоев с цилиндрической неоднородностью

Рассмотрим процесс возбуждения и распространения установившихся гармонических колебаний в слоистом полупространстве, содержащем цилиндрическую полость произвольной в плане формы в одной из компонент D_k многослойной структуры. Колебания возбуждаются источником, распределенным как по дневной поверхности среды, так и по границе цилиндрической неоднородности (полости, дефекта). Расчет волновых полей в исследуемой упругой среде проведем с использованием технологии, развиваемой в работе [Собисевич, 2001] и соотношений (5.3.12) или (5.3.21). На границах стыковки сред зададим условия непрерывности векторов смещений и напряжений, выраженные в пространстве преобразований Фурье соотношениями вида

$$\tilde{t}_l^{(n)} = \tilde{t}_l^{(n+1)}, \quad \tilde{u}_l^{(n)} = \tilde{u}_l^{(n+1)}, \quad x = x_n; \quad n = 1, \dots, N-1, \quad l = 1, 2, 3. \quad (5.3.23)$$

В результате для определения волновых полей в среде, необходимо знать распределение трансформант Фурье полей смещений на дефекте и контактных напряжений на плоских границах раздела сред $\tilde{R}_l^{(n)}(y, \alpha)$; $l = 1, 2, 3$; $n = 1, 2, \dots, N-1$. Для этого проводится процесс исключения функций $\tilde{R}_l^{(k-1)}(y, \alpha)$, $\tilde{R}_l^{(k)}(y, \alpha)$ из уравнения (5.3.21) с использованием условий контакта разнородных сред (5.3.23). В отличие от изложенного в разделе 2.1 для многослойного полупространства без полости его отличают два направления хода исключения: от границы раздела полупространства со слоем и от дневной поверхности среды к области с полостью.

С использованием свойств матриц-функций, определяющих решение 1-й краевой задачи для однородного слоя [Собисевич, 2001], соотношения (5.3.23) можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^2 \vec{D}_{1m}^{(n)}(\alpha, \beta, -h_n) \cdot \vec{\tilde{R}}^{(n-1)}(\alpha, \beta) \exp[-\sigma_{nm}h_n] + \vec{D}_2^{(n)}(\alpha, \beta, -h_n) \cdot \vec{\tilde{R}}^{(n)}(\alpha, \beta) = \\
 & = \vec{B}_1^{(n+1)}(\alpha, \beta, 0) \cdot \vec{\tilde{R}}^{(n)}(\alpha, \beta) + \\
 & + \sum_{m=1}^2 \vec{B}_{2m}^{(n+1)}(\alpha, \beta, 0) \cdot \vec{\tilde{R}}^{(n+1)}(\alpha, \beta) \exp[-\sigma_{n+1,m}h_{n+1}], \tag{5.3.24}
 \end{aligned}$$

$$\left| \{B_{lm}^{(p)}\}_{ij} \right| \sim O(|u|^{-1}), \quad \left| \{B_{lm}^{(p)}\}_{ij} \right| \sim O(|u|^{-1}),$$

$$|u| \rightarrow \infty; \quad l, m = 1, 2; \quad i, j = 1, 2, 3; \quad p = n, n+1.$$

Здесь в соответствии с (2.1.2) проведено разбиение

$$\vec{D}_k^{(n)}(\alpha, \beta, x) = \sum_{m=1}^2 \vec{D}_{km}^{(n)}(\alpha, \beta, x) \exp[-\sigma_{nm}h_n].$$

Выражения (5.3.24) имеют матричный аналог трехслойной краевой задачи, решение которой эффективно строится методом матричной прогонки. Для этого соотношения (5.3.24) приводятся к форме двучленных выражений, а именно:

$$\begin{aligned}
 \vec{\tilde{R}}^{(n)} & = \sum_{m=1}^2 \vec{A}_m^{(n)}(\alpha, \beta) \cdot \vec{\tilde{R}}^{(n+1)} \exp[-\sigma_{mn+1}h_{n+1}] - \\
 & - \sum_{m=1}^2 \vec{B}_m^{(n)}(\alpha, \beta) \cdot \vec{\tilde{R}}^{(n-1)} \exp[-\sigma_{mn}h_n] \equiv \\
 & \equiv \vec{A}^{(n)}(\alpha, \beta) \cdot \vec{\tilde{R}}^{(n+1)} + \vec{B}^{(n)}(\alpha, \beta) \cdot \vec{\tilde{R}}^{(n-1)}, \tag{5.3.25}
 \end{aligned}$$

$$\vec{A}_m^{(n)}(\alpha, \beta) = \vec{D}_{2m}^{(n+1)}(\alpha, \beta, 0) \cdot [\vec{D}_2^{(n)}(\alpha, \beta, -h_n) - \vec{D}_1^{(n+1)}(\alpha, \beta, 0)]^{-1},$$

$$\vec{B}_m^{(n)}(\alpha, \beta) = \vec{D}_{1m}^{(n+1)}(\alpha, \beta, -h_n) \cdot [\vec{D}_2^{(n)}(\alpha, \beta, -h_n) - \vec{D}_1^{(n+1)}(\alpha, \beta, 0)]^{-1},$$

Отсюда из соотношений для сред выше слоя с неоднородностью имеем

$$\vec{\tilde{R}}^{(n)} = \vec{A}_*^{(n)}(\alpha, \beta) \cdot \vec{\tilde{R}}^{(n-1)} + \prod_{q=n}^N \vec{B}_*^{(q)}(\alpha, \beta) \cdot \vec{\tilde{T}}, \quad n = k+1, k+2, \dots, N_1. \tag{5.3.26}$$

Здесь матрицы $\vec{A}_*^{(n)}(\alpha, \beta)$, $\vec{B}_*^{(n)}(\alpha, \beta)$ определяются рекуррентным образом

$$\begin{aligned}
 \vec{A}_*^{(n)}(\alpha, \beta) & = [\vec{E} - \vec{B}^{(n)} \cdot \vec{A}_*^{(n+1)}]^{-1} \cdot \vec{A}^{(n)}, \\
 \vec{B}_*^{(n)}(\alpha, \beta) & = [\vec{E} - \vec{B}^{(n)} \cdot \vec{A}_*^{(n+1)}]^{-1} \cdot \vec{B}^{(n)}, \\
 \vec{A}_*^{(N)} & = \vec{A}^{(N)}, \quad \vec{B}_*^{(N)} = \vec{B}^{(N)}.
 \end{aligned} \tag{5.3.27}$$

Аналогично — ниже слоя с неоднородностью при движении от полупространства

$$\tilde{\vec{R}}^{(n)} = \vec{B}_{**}^{(n)}(\alpha, \beta) \cdot \tilde{\vec{R}}_1^{(n+1)}, \quad n = 2, 3, \dots, k-2, \quad (5.3.28)$$

$$\vec{B}_{**}^{(n)}(\alpha, \beta) = [\vec{E} - \vec{A}^{(n)} \cdot \vec{B}_{**}^{(n-1)}]^{-1} \cdot \vec{B}^{(n)}.$$

Таким образом, получаем связь функций контактных напряжений на границах раздела сред непосредственно вблизи слоя с цилиндрической полостью:

$$\tilde{\vec{R}}^{(k+1)}(\alpha, \beta) = \vec{A}_*^{(k+1)}(\alpha, \beta) \cdot \tilde{\vec{R}}_1^{(k)}(\alpha, \beta) + \prod_{q=k+1}^N \vec{B}_*^{(q)}(\alpha, \beta) \cdot \tilde{\vec{T}}, \quad (5.3.29)$$

$$\vec{A}_*^{(k+1)}(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^2 \vec{A}_{*m}^{(k+1)}(\alpha, \beta) \exp[-\sigma_{k+2,m} h_{k+2}],$$

$$\left\| \vec{A}_{*m}^{(k+1)}(\alpha, \beta) \right\| \leq \frac{\text{const}}{|u|}, \quad |u| \rightarrow \infty,$$

$$\vec{B}_*^{(q)}(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^2 \vec{B}_{*m}^{(q)}(\alpha, \beta) \exp[-\sigma_{q,m} h_q],$$

$$\left\| \vec{B}_{*m}^{(q)}(\alpha, \beta) \right\| \leq \frac{\text{const}}{|u|}, \quad |u| \rightarrow \infty,$$

$$\tilde{\vec{R}}^{(k-2)}(\alpha, \beta) = \vec{B}_{**}^{(k-2)}(\alpha, \beta) \cdot \tilde{\vec{R}}^{(k-1)}(\alpha, \beta), \quad (5.3.30)$$

$$\vec{B}_{**}^{(k-2)}(\alpha, \beta) = \sum_{m=1}^2 \vec{B}_{**m}^{(k-2)}(\alpha, \beta) \exp[-\sigma_{k-2,m} h_{k-2}],$$

$$\left\| \vec{B}_{**m}^{(k-2)}(\alpha, \beta) \right\| \leq \frac{\text{const}}{|u|}, \quad |u| \rightarrow \infty.$$

При расположении полости в подстилающем полупространстве соотношения (5.3.30) не используются.

Заметим, что определение обратных матриц, предусматриваемое изложенным методом, является корректным при расположении параметров α , β на контурах Γ_2 , Γ_1 . При этом, Γ_1 , Γ_2 должны выходить на действительную ось за максимальным значением приведенной частоты θ_{n2} , $n = 1, 2, \dots, N$.

В результате исключения из соотношений (5.3.21) неизвестных контактных усилий на границах раздела сред получим граничные интегральные уравнения для трансформант Фурье смещений на направляющей цилиндра в слоистой среде, через которые после их определения находятся волновые поля во всей исследуемой области, включая границу вне цилиндрической полости:

$$\sum_{p=1}^3 \zeta_{pl}(\vec{\rho}_0) \tilde{u}_l^{(k)}(\vec{\rho}_0 \alpha) + \int_{\gamma} \sum_{p=1}^3 \left\{ \sum_{j=1}^3 \vec{T}_{ljp}^{**}(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) n_j(\vec{\rho}) \right\} \tilde{u}_p^{(k)}(\vec{\rho}, \alpha) d\gamma =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{a}{\mu_k} \int_{\gamma} \sum_{j=1}^3 \bar{U}_{lj}^{**}(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) \tilde{\tau}(\vec{\rho}, \alpha) d\gamma - \\
 &\quad - \frac{a}{2\pi\mu_1} \int_{\Gamma_1} \exp[-i\beta y_0] \sum_{j,m=1}^3 \vec{H}_{2lj}(x_0, \alpha, \beta) \vec{V}_{jm}^{(k+1)}(\alpha, \beta) \tilde{T}_m d\beta, \quad (5.3.31)
 \end{aligned}$$

$$\vec{\rho}_0 \in \gamma, \quad l = 1, 2, 3.$$

Полученные здесь фундаментальные решения $\bar{U}_{lj}^{**}(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, \alpha)$ и соответствующие им компоненты напряжений $\bar{T}_{ljp}^{**}(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, \alpha)$ являются решениями специального вида, удовлетворяющими нулевым условиям в напряжениях на дневной поверхности слоистой среды и условиям жесткой стыковки компонент структуры, и имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \bar{U}_{lj}^{**}(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, \alpha) &= \bar{U}_{lj}^*(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, \alpha) + \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \exp[-i\beta(y_0 - y)] \sum_{m=1}^3 \{H_{1lm}(x_0, \alpha, \beta) \bar{U}_{mj}^*(x, 0, \alpha, -\beta) + \\
 &\quad + H_{2lm}(x_0, \alpha, \beta) \bar{U}_{mj}^*(x, -h_k, \alpha, -\beta)\} d\beta, \quad (5.3.32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{T}_{ljp}^{**}(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, \alpha) &= \bar{T}_{ljp}^*(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, \alpha) + \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \exp[-i\beta(y_0 - y)] \sum_{m=1}^3 \{H_{1lm}(x_0, \alpha, \beta) \bar{T}_{mip}^*(x, 0, \alpha, -\beta), + \\
 &\quad + H_{2lm}(x_0, \alpha, \beta) \bar{T}_{mjp}^*(x, -h_k, \alpha, -\beta)\} d\beta.
 \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}
 \vec{H}_1 &= \{H_{1ij}\} = \bar{\bar{U}}^*(0, x_0, \alpha, -\beta) \cdot \vec{\bar{\Delta}}_k^{-1} + \bar{\bar{U}}^*(-h_k, x_0, \alpha, -\beta) \cdot \vec{\bar{\Delta}}_{k+1}^{-1} \cdot \vec{\bar{A}}_{21} \cdot \vec{\bar{A}}_{11}^{-1}, \\
 \vec{H}_2 &= \{H_{2ij}\} = -\bar{\bar{U}}^*(0, x_0, \alpha, -\beta) \cdot \vec{\bar{\Delta}}_k^{-1} \cdot \vec{\bar{A}}_{12} \cdot \vec{\bar{A}}_{22}^{-1} - \bar{\bar{U}}^*(-h_k, x_0, \alpha, -\beta) \cdot \vec{\bar{\Delta}}_{k+1}^{-1}, \\
 \vec{A}(\alpha, \beta) &= \vec{G}^{(k-1)}(\alpha, \beta) - \bar{\bar{U}}^*(0, 0, \alpha, -\beta), \quad \vec{A}_{12}(\alpha, \beta) = \bar{\bar{U}}^*(-h_k, 0, \alpha, -\beta), \\
 \vec{A}_{21}(\alpha, \beta) &= -\bar{\bar{U}}^*(0, -h_k, \alpha, -\beta), \\
 \vec{A}_{22}(\alpha, \beta) &= \vec{G}^{(k+1)}(\alpha, \beta) + \bar{\bar{U}}^*(-h_k, -h_k, \alpha, -\beta), \\
 \vec{\bar{\Delta}}_k^{-1}(\alpha, \beta) &= [\vec{\bar{A}}_{11}(\alpha, \beta) - \vec{\bar{A}}_{12}(\alpha, \beta) \cdot \vec{\bar{A}}_{22}^{-1}(\alpha, \beta) \cdot \vec{\bar{A}}_{21}(\alpha, \beta)]^{-1}, \\
 \vec{\bar{\Delta}}_{k+1}^{-1}(\alpha, \beta) &= [\vec{\bar{A}}_{11}(\alpha, \beta) \cdot \vec{\bar{A}}_{12}^{-1}(\alpha, \beta) \cdot \vec{\bar{A}}_{22}(\alpha, \beta) - \vec{\bar{A}}_{21}(\alpha, \beta)]^{-1} \\
 \vec{\bar{\Delta}}_{k+1}^{-1}(\alpha, \beta) &= [\vec{\bar{A}}_{21}(\alpha, \beta) \cdot \vec{\bar{A}}_{11}^{-1}(\alpha, \beta) \cdot \vec{\bar{A}}_{12}(\alpha, \beta) - \vec{\bar{A}}_{22}(\alpha, \beta)]^{-1}, \\
 \vec{V}^{(k+1)} &= \bar{\bar{D}}_2^{(k+1)} \prod_{q=k+2}^N \vec{B}_*^{(q)}, \\
 \vec{G}^{(k-1)} &= \bar{\bar{D}}_1^{(k-1)} \cdot \vec{\bar{B}}_{**}^{(k-1)} + \bar{\bar{D}}_2^{(k-1)}, \quad \vec{G}^{(k+1)} = \bar{\bar{D}}_1^{(k+1)} + \bar{\bar{D}}_2^{(k+1)} \cdot \vec{\bar{A}}_*^{(k+2)}.
 \end{aligned}$$

Вторые слагаемые в формулах (5.3.32) представляют собой поле отраженных волн от плоских границ раздела слоистой структуры и несут в себе полную информацию о свойствах волновых полей в среде. В частности фазовые скорости распространения поверхностных и пограничных волн типа Рэлея–Лэмба, локализованных вблизи плоских границ, соответствуют аналогичным характеристикам в среде без полости.

5.3.5. Пещера на границе раздела сред

Не ограничивая общности постановки задачи, рассмотрим случай пересечения границей цилиндрической полости плоскости раздела двух упругих слоев с различными физико-механическими свойствами (рис. 5.9). Такая задача типична для практической сейсмологии.

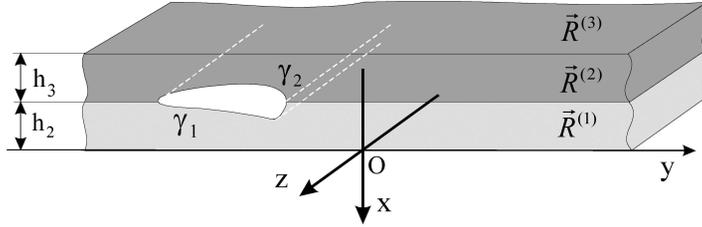


Рис. 5.9. Пещера на стыке двух слоев

На поверхности среды считаем заданными векторы напряжений

$$\vec{t}^{(2)}|_{x=0} = \vec{R}^{(1)}, \quad \vec{t}^{(3)}|_{x=-h_2-h_3} = \vec{R}^{(3)}, \quad \vec{t}^{(j)}|_{\gamma_{j-1} \times (-\infty, \infty)} = \vec{\tau}_{j-1}, \quad j = 2, 3.$$

Контакт слоев — жесткий с выполнением условий (5.3.23) для $n = 2$.

Представим поле смещений в каждой из областей D_j в локальной системе координат j -го слоя: $x \in (-h_j, 0)$, $y, z \in (-\infty, \infty)$ в виде (5.3.21):

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(j)}(\vec{\rho}_0, \alpha) = & - \int_{\gamma_{j-1}} \vec{K}_j^*(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) \cdot \tilde{u}^{(j)}(\vec{\rho}, \alpha) d\gamma + \\ & + \frac{a}{\mu_j} \int_{\gamma_j} \vec{U}_j^*(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) \cdot \tilde{\tau}_{j-1}(\vec{\rho}, \alpha) d\gamma - \\ & - \frac{a}{\mu_j} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{U}_j^*(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) \cdot \vec{R}^{(j)}(y, \alpha) dy + \\ & + \frac{a}{\mu_j} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{U}_j^*(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) \cdot \vec{R}^{(j-1)}(y, \alpha) dy, \quad j = 2, 3. \end{aligned} \quad (5.3.33)$$

Применим к (5.3.33) преобразование Фурье

$$F_y[\dots] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \dots \exp(i\beta y) dy$$

по координате y_0 с учетом соотношений

$$F_{y_0} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}_1(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) \tilde{f}_2(y, \alpha) d\alpha \right] = \bar{f}_1(x, x_0, -a, -\beta) \tilde{f}_2(\alpha, \beta),$$

$$F_{y_0} \left[\int_{\gamma} \bar{f}_1(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, -\alpha) \tilde{f}_2(\vec{\rho}, \alpha) d\gamma \right] = \int_{\gamma} \exp[i\beta y] \bar{f}_1(x, x_0, -\alpha, -\beta) \tilde{f}_2(\vec{\rho}, \alpha) d\gamma.$$

В итоге получим:

$$\begin{aligned} \tilde{u}^{(j)}(x_0, \alpha, \beta) = & - \int_{\gamma_{j-1}} \bar{\bar{K}}_j^*(x, x_0, -\alpha, -\beta) \cdot \tilde{u}^{(j)}(\vec{\rho}, \alpha) \exp(i\beta y) d\gamma + \\ & + \frac{a}{\mu_j} \int_{\gamma_j} \bar{\bar{U}}_j^*(x, x_0, -\alpha, -\beta) \cdot \tilde{\tau}_{j-1}(\vec{\rho}, \alpha) \exp(i\beta y) dy - \\ & - \frac{a}{\mu_j} \bar{\bar{U}}_j^*(-h_j, x_0, -\alpha, -\beta) \cdot \tilde{\bar{R}}^{(j)}(\alpha, \beta) + \\ & + \frac{a}{\mu_j} \bar{\bar{U}}_j^*(0, x_0, -\alpha, -\beta) \cdot \tilde{\bar{R}}^{(j-1)}(\alpha, \beta), \quad x \in [-h_j, 0], \quad j = 2, 3. \end{aligned} \quad (5.3.34)$$

Удовлетворение условий стыковки по перемещениям в форме (5.3.23) позволяет исключить трансформанты Фурье контактных напряжений на границе раздела слоев $\tilde{\bar{R}}_1^{(2)}$ и перейти к следующему представлению относительно преобразований Фурье полей смещений в составной области $D_2 \cup D_3$

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x_0, \alpha, \beta) = & - \int_{\gamma} \bar{\bar{K}}^{**}(x, x_0, -\alpha, -\beta) \cdot \tilde{u}(\vec{\rho}, \alpha) \exp(i\beta y) d\gamma + \\ & + \sum_{j=2}^3 \frac{a}{\mu_j} \int_{\gamma_j} \bar{\bar{U}}^{**}(x, x_0, -\alpha, -\beta) \cdot \tilde{\tau}_{j-1}(\vec{\rho}, \alpha) \exp(i\beta y) d\gamma + \\ & + \frac{a}{\mu_2} \bar{\bar{U}}^{**}(0, x_0, -\alpha, -\beta) \cdot \tilde{\bar{R}}^{(1)}(\alpha, \beta) - \\ & - \frac{a}{\mu_3} \bar{\bar{U}}^{**}(-h_2 - h_3, x_0, -\alpha, -\beta) \cdot \tilde{\bar{R}}^{(3)}(\alpha, \beta), \quad x_0 \in [-h_2 - h_3, 0]. \end{aligned} \quad (5.3.35)$$

Здесь $\bar{\bar{K}}^{**}(x, x_0, \alpha, \beta)$, $\bar{\bar{U}}^{**}(x, x_0, \alpha, \beta)$ — фундаментальные решения, удовлетворяющие нулевым условиям по напряжениям на внешних гранях составной области и условиям жесткой стыковки на линии раздела сред, имеющие следующий вид: при $\vec{\rho} \in D_2$, $\vec{\rho}_0 \in D_2$

$$\begin{aligned} \bar{\bar{K}}^{**}(x, x_0, \alpha, \beta) &= \bar{\bar{K}}_2^*(x, x_0, \alpha, \beta) - \bar{\bar{U}}_2^*(-h_2, x_0, \alpha, \beta) \cdot \vec{A}^{-1} \cdot \bar{\bar{K}}_2^*(x, -h_2, \alpha, \beta), \\ \bar{\bar{U}}^{**}(x, x_0, \alpha, \beta) &= \bar{\bar{U}}_2^*(x, x_0, \alpha, \beta) - \bar{\bar{U}}_2^*(-h_2, x_0, \alpha, \beta) \cdot \vec{A}^{-1} \cdot \bar{\bar{U}}_2^*(x, -h_2, \alpha, \beta), \end{aligned}$$

при $\vec{\rho} \in D_3$, $\vec{\rho}_0 \in D_2$

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\vec{K}}}^{**}(x, x_0, \alpha, \beta) &= \overline{\overline{\vec{U}}}_2^*(-h_2, x_0, \alpha, \beta) \cdot \overline{\overline{\vec{A}}}^{-1} \cdot \overline{\overline{\vec{K}}}_3^*(x + h_2, 0, \alpha, \beta), \\ \overline{\overline{\vec{U}}}^{**}(x, x_0, \alpha, \beta) &= \overline{\overline{\vec{U}}}_2^*(-h_2, x_0, \alpha, \beta) \cdot \overline{\overline{\vec{A}}}^{-1} \cdot \overline{\overline{\vec{U}}}_3^*(x + h_2, 0, \alpha, \beta),\end{aligned}$$

при $\vec{\rho} \in D_2$, $\vec{\rho}_0 \in D_3$

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\vec{K}}}^{**}(x, x_0, \alpha, \beta) &= \chi \overline{\overline{\vec{U}}}_3^*(0, x_0 + h_2, \alpha, \beta) \cdot \overline{\overline{\vec{A}}}^{-1} \cdot \overline{\overline{\vec{K}}}_2^*(x, -h_2, \alpha, \beta), \\ \overline{\overline{\vec{U}}}^{**}(x, x_0, \alpha, \beta) &= \chi \overline{\overline{\vec{U}}}_3^*(0, x_0 + h_2, \alpha, \beta) \cdot \overline{\overline{\vec{A}}}^{-1} \cdot \overline{\overline{\vec{U}}}_2^*(x, -h_2, \alpha, \beta),\end{aligned}$$

при $\vec{\rho} \in D_3$, $\vec{\rho}_0 \in D_3$

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\vec{K}}}^{**}(x, x_0, \alpha, \beta) &= \overline{\overline{\vec{K}}}_3^*(x + h_2, x_0 + h_2, \alpha, \beta) - \\ &\quad - \chi \overline{\overline{\vec{U}}}_3^*(0, x_0 + h_2, \alpha, \beta) \cdot \overline{\overline{\vec{A}}}^{-1} \cdot \overline{\overline{\vec{K}}}_3^*(x + h, 0, \alpha, \beta), \\ \overline{\overline{\vec{U}}}^{**}(x, x_0, \alpha, \beta) &= \overline{\overline{\vec{U}}}_3^*(x + h_2, x_0 + h_2, \alpha, \beta) - \\ &\quad - \chi \overline{\overline{\vec{U}}}_3^*(0, x_0 + h_2, \alpha, \beta) \cdot \overline{\overline{\vec{A}}}^{-1} \cdot \overline{\overline{\vec{U}}}_3^*(x + h, 0, \alpha, \beta), \\ \overline{\overline{\vec{A}}} &= \overline{\overline{\vec{U}}}_2^*(-h_2, -h_2, \alpha, \beta) + \chi \overline{\overline{\vec{U}}}_3^*(0, 0, \alpha, \beta), \quad \chi = \mu_2/\mu_3.\end{aligned}$$

Соответственно

$$\begin{aligned}\overline{\overline{U}}_{lj}^{**}(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, \alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \overline{\overline{U}}_{lj}^*(x, x_0, \alpha, \beta) \exp(-i\beta(y - y_0)) d\beta, \\ \overline{\overline{T}}_{ljk}^{**}(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, \alpha) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \overline{\overline{T}}_{ljk}^*(x, x_0, \alpha, \beta) \exp(-i\beta(y - y_0)) d\beta,\end{aligned}$$

что позволяет преобразовать представление (5.3.35) к виду (5.3.33) и получить граничные интегральные уравнения, аналогичные (5.3.14).

При расположении полости, пересекающей границу раздела сред в многослойной структуре, пакет из двух слоев может быть рассмотрен как единый слой с неоднородностью.

В качестве примера было рассмотрено динамическое поведение двухслойного полупространства с цилиндрической полостью на стыке при возбуждении среды сосредоточенным источником колебаний на дневной поверхности $\vec{q} = \{P\delta(y - 7,3)\delta(z), 0, 0\}$ при следующих параметрах задачи: $h_2 = 4$, $\theta_{11} = 0,5$, $\theta_{12} = 1$, $\theta_{2k} = \sqrt{\chi}\theta_{1k}$, $\chi = \mu_1/\mu_2$.

Дефект представляет собой полость кругового сечения единичного радиуса, расположенную симметрично относительно плоскости $x = 0$.

На рис. 5.10 отражена зависимость от координаты y амплитудной функции вертикального смещения точки $(-4, y, 0)$ дневной поверхности среды для различных

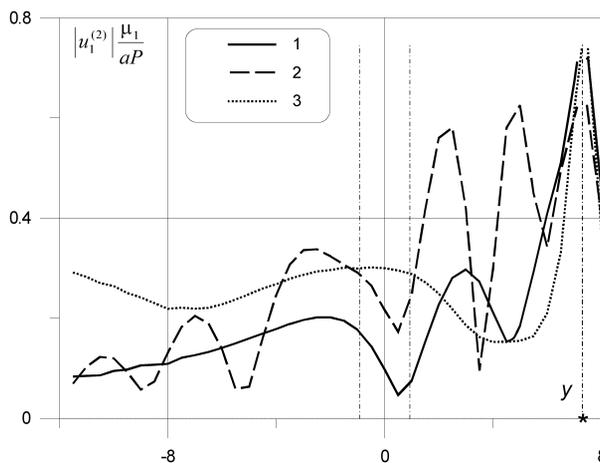


Рис. 5.10. Амплитудные функции смещений дневной поверхности среды для различных соотношений упругих параметров слоя и полупространства:

- 1 — полость в среде с равными физическими параметрами ($\chi = 1$), 2 — слой большей жесткости ($\chi < 1$), 3 — слой меньшей жесткости ($\chi > 1$)

соотношений упругих параметров слоя и полупространства: 1 — полость в среде с равными физическими параметрами ($\chi = 1$), 2 — слой большей жесткости ($\chi < 1$) и 3 — слой меньшей жесткости ($\chi > 1$).

В случае мягкого верхнего слоя при возбуждении волн с его дневной поверхности наличие дефекта на данной частоте колебаний практически не отражается на смещениях поверхности. Для случая равных упругих параметров среды картина волнового взаимодействия с учетом отраженных от дефекта волн наблюдается лишь в зоне между источником колебаний и полостью. При слое большей жесткости такая картина видна по всему направлению от источника перпендикулярно образующей полости.

5.3.6. Особенности реализации метода граничных элементов

В классическом варианте использование соотношений Сомильяны приводит к двумерным сингулярным интегральным уравнениям, решение которых чрезвычайно трудоемко. Известны способы преобразования сингулярных интегралов или их непосредственного вычисления для простейших элементов граничной поверхности, развиваемые в исследованиях В. Д. Купрадзе, А. Я. Александрова, П. И. Перлина, Ю. В. Верюжского, Ю. Л. Бормота и других российских ученых. Однако цилиндрическая форма рассматриваемой поверхности позволяет понизить порядок особенности фундаментальных решений при рассмотрении ГИУ, а также существенно уменьшить размерность системы линейных алгебраических уравнений при решении ГИУ методом граничных элементов.

Разработанная методика расчета волновых полей в слоистой среде с цилиндрической полостью предполагает численный анализ интеграла Фурье (5.3.16) по параметру α . Для каждого значения α на контуре Γ_2 необходимо решить систему граничных интегральных уравнений вида (5.3.14) с неизвестными, заданными

только по границе направляющей цилиндра. При этом основные особенности ГИУ аналогичны задаче в плоской постановке, которая может быть реализована в частном случае $\alpha = 0$. Для $\alpha \neq 0$ решение системы ГИУ соответствует отысканию амплитудных функций бегущих вдоль оси цилиндра волн с волновым числом α .

Решение системы ГИУ реализуется методом криволинейных граничных элементов. Для замкнутой кривой γ вводится параметризация

$$x = x(\vartheta), \quad y = y(\vartheta), \quad \vartheta \in (0, 2\pi),$$

где ϑ — угол, откладываемый от оси Oy против часовой стрелки.

Кривая разбивается на N граничных элементов сетью точек

$$\vartheta_k = \left\{ \vartheta_k = kh, \quad h = \frac{2\pi}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N \right\}.$$

Проводится аппроксимация границы кубическими сплайнами. На каждом элементе вводится локальная система координат по параметру t :

$$x = \sum_{m=0}^3 a_m t^m, \quad y = \sum_{m=0}^3 b_m t^m, \quad t \in [-1, 1].$$

Значения трансформант Фурье перемещений на каждом элементе считаются функциями только параметра α . Точка наблюдения соответствует центру элемента ($t = 0$). В результате интегралы в соотношении (5.3.14) разбиваются на сумму составляющих по отдельным элементам границы с известным заданием подынтегральной функции. При этом все интегралы в соответствии с асимптотическим поведением фундаментальных решений (5.3.15) можно разбить на три группы: с непрерывным поведением подынтегральной функции; интегралы, понимаемые в смысле главного значения по Коши; интегралы с логарифмической особенностью. Интегралы с особенностями преобразуются в сумму двух интегралов: с непрерывной подынтегральной функцией и особого, вычисляемого аналитически. Во всех случаях, когда подынтегральные функции являются непрерывными, численное интегрирование можно вести на основе четырёхточечных квадратурных формул Гаусса или любых других, для которых узлы аппроксимации не совпадают с центром граничного элемента.

Для интегралов в смысле главного значения по Коши имеем:

$$I = \int_{\gamma_m} K(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, \alpha) d\gamma = \int_{\gamma_m} [K(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, \alpha) - K_0(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, \alpha)] d\gamma + \int_{\gamma_m} K_0(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, \alpha) d\gamma,$$

$$I_0 = \int_{\gamma_m} K_0(\vec{\rho}_0, \vec{\rho}, \alpha) d\gamma = C \int_{\gamma_m} \frac{\delta d\gamma}{R} = C \int_{-1}^1 \frac{(R_* - S_1)}{tR_*} dt, \quad C = \text{const}, \quad (5.3.36)$$

$$R_* = \sqrt{(a_1 + a_2 t + a_3 t^2)^2 + (b_1 + b_2 t + b_3 t^2)^2},$$

$$S_1 = \sqrt{(a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2)^2 + (b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2)^2}.$$

Отсюда точка $t = 0$ является точкой устранимого разрыва. Интеграл I_0 отыскивается численно.

Для интегралов с логарифмической особенностью представим:

$$\begin{aligned}
 I_0 &= C \int_{\gamma_m} \frac{\delta \ln R}{R} \left\{ \begin{array}{c} x_0 - x \\ y_0 - y \\ \delta R \end{array} \right\} d\gamma = \\
 &= C \int_{-1}^1 \left\{ \begin{array}{c} S_1 x_* R_*^{-1} \ln(R_* |t|) - a_1 \ln(R_*^{(0)} |t|) \\ S_1 y_* R_*^{-1} \ln(R_* |t|) - b_1 \ln(R_*^{(0)} |t|) \\ S_1 \ln(R_* |t|) - R_*^{(0)} \ln(R_*^{(0)} |t|) \end{array} \right\} dt + 2C [\ln R_*^{(0)} - 1] \left\{ \begin{array}{c} a_1 \\ b_1 \\ R_*^{(0)} \end{array} \right\}, \\
 x_* &= a_1 + a_2 t + a_3 t^2, \quad y_* = b_1 + b_2 t + b_3 t^2, \quad R_*^{(0)} = R_*|_{t=0} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}.
 \end{aligned} \tag{5.3.37}$$

Оставшиеся в (5.3.37) интегралы не содержат особенностей и их можно рассчитывать на основе численных схем.

Практическая реализация рассмотренной методики показывает, что для интегралов с сильной особенностью разделение вида (5.3.36) не является обязательным. Прямое применение численных схем интегрирования по Гауссу к интегралам с сильной особенностью не приводит к накоплению погрешностей при условии ограничения на величину граничного элемента. Участок кривой γ в одну длину продольной волны в среде должен быть разбит при этом не менее чем на 10 элементов. Для интегралов с логарифмической особенностью представление (5.3.36) является необходимым.

Таким образом, система ГИУ (5.3.14) сводится к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений трансформант Фурье перемещений на N граничных элементах направляющей кривой γ порядка $3N$:

$$\sum_{m=1}^{3N} A - nm(\alpha) \tilde{u}_m(\alpha) = g_n(\alpha), \quad n = 1, \dots, 3N, \tag{5.3.38}$$

$$\vec{\tilde{u}} = \text{col} \{ \tilde{u}_{11}^{(1)}, \tilde{u}_{12}^{(1)}, \dots, \tilde{u}_{1N}^{(1)}, \tilde{u}_{21}^{(1)}, \tilde{u}_{22}^{(1)}, \dots, \tilde{u}_{3N}^{(1)} \},$$

$$\tilde{u}_{km}^{(1)} = \tilde{u}_k^{(1)}|_{\rho \in \gamma_m}; \quad k = 1, 2, 3; \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Так как разбиение кривой γ не зависит от параметра Фурье α , при каждом фиксированном α на контуре интегрирования Γ_2 проводится исследование сходимости полученной СЛАУ с ростом числа элементов. Установлено, что максимальное число граничных элементов для различных α , необходимое для удовлетворения заданной погрешности, достигается при значении $\alpha = 0$ либо для параметра α с ненулевой мнимой частью на контуре.

При восстановлении оригиналов волновых полей по найденным трансформантам Фурье для близких точек наблюдения имеет смысл накопление массивов решений СЛАУ вида (5.3.38) для различных α с последующим использованием процедур параллельного численного интегрирования по контуру Γ_2 .

В целом же для различных точек наблюдения требуется решать СЛАУ (5.3.38) для набора значений параметра α .

Вид контура Γ_2 , определяемый принципом предельного поглощения, предполагает обход особенностей подынтегральной функции путем смещения пути интегрирования в комплексную область. Выход на вещественную ось совершается за точкой 2θ , $\theta = \max(\theta_{2k})$. При этом, если проводить решение системы (5.3.38) для вещественных частот колебаний θ_{ij} , двигаясь в сторону увеличения частоты, обнаружатся точки численной неустойчивости решения СЛАУ.

Данные значения, обходимые в общем случае контуром Γ_2 , соответствуют волновым числам распространяющихся вдоль оси цилиндра поверхностных волн. Описанная процедура может быть использована для расчета характеристик поверхностных волн для цилиндрической поверхности с произвольной формой направляющей с учетом упругих свойств окружающей полость многослойной среды. Ещё более сложные процессы происходят при резонировании полостей специальной формы, таких как приведенная, например, на рис. 5.11,Б. По результатам анализа решений задач для полостей неканонической формы можно констатировать, что локальные резонансные эффекты, связанные с наличием полости неправильной формы, имеют место. Они носят сложный характер и существенно зависят от формы и относительных размеров полости. Их исследование очень трудоемко и связано с большим объемом вычислений в каждом конкретном случае.

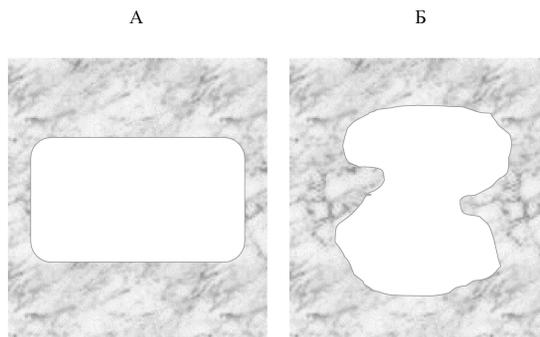


Рис. 5.11. Полости различной формы

Следует отметить, что основные качественные результаты проведенных расчетов соответствуют выводам, сделанным в данной работе для полостей канонической формы. Многие вопросы могут быть разрешены при исследовании задачи о поведении полости специальной конфигурации в безграничной среде.

5.4. Рассеяние поверхностной акустической волны Рэлея на неоднородности малых размеров в твердом полупространстве

В настоящем разделе в борновском приближении решена задача о рассеянии гармонической поверхностной волны Рэлея на слабоконтрастной подповерхностной неоднородности малых по сравнению с длиной волны размеров (подповерхностном включении). Для точек наблюдения, находящихся на больших расстояниях от рассеивателя, получены приближенные аналитические выражения для полей смеще-

ний рассеянных продольной, поперечных (SV - и SH -поляризаций) и рэлеевской волн. Подробно исследована мощность излучения рассеянной волны Рэлея.

5.4.1. Постановка задачи и качественный анализ эффективных источников рассеянных волновых полей

Исследование рассеяния волн различной физической природы на локализованных неоднородностях среды представляет значительный теоретический и практический интерес. Данная тематика охватывает весьма широкий круг явлений, и ей посвящено большое количество литературы. Наряду с электромагнитными и акустическими волнами интенсивно изучается распространение поверхностных акустических волн. Это необходимо для решения задач сейсмологии и сейсморазведки [Аки, Ричардс, Т. 1, Т. 2, 1983; Шерифф, Гелдарт, Т. 1, Т. 2, 1987].

Простейшим видом поверхностных акустических волн является волна Рэлея, которая может распространяться вдоль границы однородного изотропного упругого полупространства с вакуумом. Соответствующие рэлеевской волне возмущения захватывают приповерхностный слой толщиной порядка длины волны. В случае источника ограниченных размеров амплитуда рэлеевской волны убывает с горизонтальным расстоянием r как $r^{-1/2}$ [Аки, Ричардс, Т. 1, 1983] (см. также ((3.1.93)–(3.1.97)), то есть по закону цилиндрической, а не сферической геометрической расходимости. Таким образом, волна данного типа может эффективно распространяться на значительные расстояния от источника.

К настоящему времени в ряде работ рассмотрено рассеяние волн Рэлея на неровностях поверхности упругой среды, причем как регулярных, так и случайных. Результаты этих исследований обобщены в монографии [Бирюков, Гуляев и др., 1991]. Между тем, при решении задач подповерхностной сейсмической локации и неразрушающего контроля материалов возникает необходимость исследования процессов распространения упругих волн вблизи границы твердого полупространства при наличии в нем подповерхностной неоднородности ограниченных размеров (подповерхностного включения). Представляет интерес рассмотрение процессов взаимодействия зондирующих сигналов с неоднородностью и возбуждения рассеянных упругих волн. Для решения обратной задачи, т. е. определения местоположения и восстановления размеров, формы и физических характеристик неоднородности, необходимо предварительно детально проанализировать решение прямой задачи.

Рассеяние упругих волн в полубезграничных твердых средах изучено недостаточно полно. В частности, не решены задачи, связанные с расчетами полей и энергетических характеристик волн, рассеянных подповерхностными неоднородностями, находящимися на глубинах меньше длины поверхностной волны Рэлея, когда влияние границы среды наиболее существенно.

Важные для практики вопросы, связанные с обнаружением и идентификацией подповерхностных объектов, возникают уже в рамках наиболее простой модели, когда исследуемая «фоновая» среда моделируется однородным изотропным упругим полупространством, а лоцируемая неоднородность является слабоконтрастной, т. е. её акустические свойства мало отличаются от свойств «фоновой» среды. При этом

целесообразно ограничиться первым (борновским) приближением метода возмущений (см., например, [Чернов, 1975; Бирюков, Гуляев и др., 1991]). Данное приближение позволяет считать, что рассеянное поле возбуждается силовыми источниками, распределенными по занятой неоднородностью области твердого тела, причем конфигурация источников и их зависимость от времени определяется формой и внутренним строением неоднородности, а также пространственным распределением поля падающей волны. Задача рассеяния, таким образом, сводится к задаче о возбуждении упругих волн в твердом полупространстве зависящими от времени силами, произвольно распределенными внутри твердого тела.

Распространение плоских продольной и поперечной волн в безграничной слабо-неоднородной твердой среде в борновском приближении метода возмущений рассмотрено в [Аки, Ричардс, Т. 2, 1983].

При действии вибрационных источников на границу упругой среды сферические продольные и поперечные волны (объемные волны) распространяются преимущественно вглубь [Miller, Pursey, 1955; Гуцин, Докучаев и др., 1981]. Их использование для зондирования целесообразно в тех случаях, когда предполагается, что неоднородность находится на значительных по сравнению с длинами волн удалениях от поверхности полупространства.

Если неоднородность располагается вблизи границы среды и на относительно больших горизонтальных расстояниях от источника, более эффективным представляется применение для сейсмолокации и неразрушающего контроля материалов поверхностных волн Рэлея.

При прохождении рэлеевской волны лоцируемая неоднородность совершает сложные колебания, то есть представляет собой некоторый подповерхностный источник упругих волн достаточно общего вида. Зондирующий сигнал (падающая волна Рэлея) при этом рассеивается как в рэлеевскую волну, так и в объемные продольную и поперечные (SV - и SH -поляризации) волны. Наибольший интерес представляют рассеянные рэлеевские волны, поскольку они могут быть легко зарегистрированы на поверхности упругой среды. В связи с этим в данном параграфе основное внимание будет уделено рассеянию рэлеевской волны в рэлеевскую волну.

Наиболее эффективно волна Рэлея рассеивается, по-видимому, на протяженных по вертикали объектах (геологических разломах, основаниях фундаментов, поверхностях склейки двух материалов в микроэлектронике), которые тянутся от поверхности до глубин, значительно превышающих длину волны. Поскольку амплитуды вертикальных и горизонтальных смещений частиц среды в поверхностной волне имеют достаточно сложную зависимость от глубины [Петрашень, 1978, с. 232; Аки, Ричардс, Т. 2, 1983, с. 157; Бреховских, 1973, с. 31], представляет интерес выяснить, какие именно участки неоднородности вносят определяющий вклад в формирование рассеянного поля. Для этого необходимо рассмотреть рассеиватель, вертикальные размеры которого много меньше длины волны Рэлея. Если и горизонтальные размеры рассеивателя малы, то его можно приближенно считать точечным объектом. Данное приближение является весьма удобным, поскольку позволяет сравнительно просто произвести все необходимые вычисления.

В связи с использованием приближения точечного рассеивателя необходимо сделать следующее замечание. Точечный объект не может эффективно рассеивать

акустические волны. Хорошо известна задача о рассеянии звука на диске малых размеров [Шендеров, 1989]. Учитывая связь между задачами излучения и рассеяния можно представить рассеивающий диск как силовой источник, действующий в среде. Направленное действие сосредоточенной силы на какую-либо точку, находящуюся на поверхности или внутри идеальной жидкости, не приводит к возбуждению акустических волн. Эффективно возбуждать акустические волны в жидкости или в газе может только точечный источник типа центра расширения (центра давления). Если же сила приложена к какой-либо точке в упругой среде, то возбуждаются продольные и поперечные сферические волны (объемные волны), и, если точка приложения силы находится вблизи поверхности упругой среды (или на самой поверхности), то и поверхностную волну Рэлея [Johnson, 1974; Разин, 2009]. В связи с этим можно предположить, что объект малых по сравнению с длинами упругих волн размеров в твердой среде будет достаточно эффективным рассеивателем.

Пусть плоскость $z = 0$ декартовой системы координат совпадает с поверхностью изотропного твердого тела, занимающего полупространство $z \geq 0$ и характеризуемого плотностью ρ , модулем всестороннего сжатия κ и модулем чистого сдвига μ . Внутри твердого тела находится неоднородность (подповерхностное включение), геометрический центр которой располагается на глубине $z = h$ под началом координат.

В общем случае лоцируемая неоднородность отличается от фоновой среды плотностью, а также модулями упругости, которые являются функциями пространственных координат.

Уравнение, описывающее гармонические волновые возмущения с циклической частотой ω в неоднородной упругой среде [Петрашень, 1978; Аки, Ричардс, Т. 2, 1983], после некоторых преобразований можно представить в виде (временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен):

$$\begin{aligned} \rho\omega^2 u_j + \left(\kappa + \frac{1}{3}\mu \right) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial \kappa}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \frac{2}{3} \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \\ + \frac{\partial \mu}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) = -f_{Vj}. \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

В (5.4.1) индексы j и k принимают значения 1, 2, 3, которые нумеруют соответственно декартовы координаты x , y , z , причем по дважды повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3. В правой части (5.4.1) стоит соответствующая компонента периодической силы $\vec{f}_V(x, y, z)$, действующей на единицу объема твердого тела. Уравнение (5.4.1) необходимо решать с учетом условий излучения [Фелсен, Маркувиц, Т. 1, 1978] и граничных условий на поверхности полупространства, которые будут указаны ниже.

Плотность среды и модули сжатия и сдвига представим в виде:

$$\rho = \rho_0 + \rho'(x, y, z) \quad \kappa = \kappa_0 + \kappa'(x, y, z), \quad \mu = \mu_0 + \mu'(x, y, z). \quad (5.4.2)$$

Здесь ρ_0 , κ_0 и μ_0 — постоянные «фоновые» значения параметров твердого тела, а ρ' , κ' и μ' — малые по сравнению с фоновыми значениями величины (слабокон-

трастные неоднородности):

$$|\rho'| \ll \rho_0, \quad |\kappa'| \ll \kappa_0, \quad |\mu'| \ll \mu_0.$$

Смещения частиц среды \vec{u} представим суммой некоторого поля \vec{u}_0 , которое существовало бы в однородной упругой среде с параметрами ρ_0 , κ_0 и μ_0 (поле падающей зондирующей волны), и рассеянного поля \vec{u}_1 , связанного с наличием в среде неоднородностей:

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}_1.$$

Учитывая малость изменения параметров среды будем считать, что $|\vec{u}_1| \ll |\vec{u}_0|$. Для зондирующего волнового поля \vec{u}_0 справедливо уравнение Ламэ

$$\rho_0 \omega^2 u_{0j} + \left(\kappa_0 + \frac{1}{3} \mu_0 \right) \frac{\partial^2 u_{0k}}{\partial x_j \partial x_k} + \mu_0 \frac{\partial^2 u_{0j}}{\partial x_k \partial x_k} = -f_{Vj}. \quad (5.4.3)$$

Уравнение для рассеянного поля \vec{u}_1 получим вычитая (5.4.3) из (5.4.1) с учетом (5.4.2) и пренебрегая затем в соответствии с борновским приближением [Чернов, 1975; Бирюков, Гуляев и др., 1991] членами второго порядка малости:

$$\rho_0 \omega^2 u_{1j} + \left(\kappa_0 + \frac{1}{3} \mu_0 \right) \frac{\partial^2 u_{1k}}{\partial x_j \partial x_k} + \mu_0 \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial x_k \partial x_k} = -f_{Vj}^{\text{eff}}, \quad (5.4.4)$$

где

$$\begin{aligned} f_{Vj}^{\text{eff}} = & \rho' \omega^2 u_{0j} + \left(\kappa' + \frac{1}{3} \mu' \right) \frac{\partial^2 u_{0k}}{\partial x_j \partial x_k} + \mu' \frac{\partial^2 u_{0j}}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial \kappa'}{\partial x_j} \frac{\partial u_{0k}}{\partial x_k} - \\ & - \frac{2}{3} \frac{\partial \mu'}{\partial x_j} \frac{\partial u_{0k}}{\partial x_k} + \frac{\partial \mu'}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_{0k}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{0j}}{\partial x_k} \right). \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

Для рассеянного поля \vec{u}_1 на поверхности упругого полупространства выполняются условия, соответствующие свободной границе, то есть условия отсутствия касательных и нормальных напряжений:

$$\sigma_{xz}^{(1)} = \sigma_{yz}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{zz}^{(1)} = 0, \quad (5.4.6)$$

где $\sigma_{ij}^{(1)}$ — тензор напряжений, соответствующий смещениям \vec{u}_1 .

Правая часть (5.4.5) уравнения (5.4.4) имеет размерность силы, отнесенной к единице объема, и представляет собой некоторый эффективный силовой источник, параметры которого определяются характеристиками неоднородности ρ' , κ' и μ' и конфигурацией падающего поля \vec{u}_0 .

Проанализируем вклад неоднородностей параметров упругой среды в эффективность возбуждения рассеянных волн. Пусть источник зондирующего сигнала находится на значительном горизонтальном расстоянии от области, занятой подповерхностной неоднородностью. Падающую волну Рэлея, распространяющуюся в положительном направлении оси x , при этом можно считать локально плоской и представить соответствующие данной волне смещения в следующем общем виде:

$$u_{0x} = D_x \nu_x(z) \exp(ik_R x), \quad u_{0y} = 0, \quad u_{0z} = D_z \nu_z(z) \exp(ik_R x). \quad (5.4.7)$$

В (5.4.7) k_R — волновое число рэлеевской волны, функции $\nu_x(z)$ (3.1.95) и $\nu_z(z)$ (3.1.96) описывают соответственно зависимости горизонтальных и вертикальных смещений от координаты z , величины D_x и D_z определяются параметрами упругой среды и конфигурацией источника зондирующего сигнала. Их явный вид очевиден из (3.1.93), (3.1.94).

Подставляя смещения (5.4.7) в формулу (5.4.5) получаем выражение для эффективной силы. При этом оказывается, что данную силу удобно представить в виде суммы трех слагаемых [Разин, 2010б]:

$$\vec{f}_V^{\text{eff}} = \vec{f}^{\text{inh}} + \vec{f}^{\text{mon}} + \vec{f}^\mu. \quad (5.4.8)$$

Часть \vec{f}^{inh} связана непосредственно с величинами ρ' , κ' , и μ' , часть \vec{f}^{mon} определяется пространственными изменениями (т.е. производными по координатам) как модуля всестороннего сжатия κ' , так и модуля чистого сдвига μ' , наконец, слагаемое \vec{f}^μ отражает лишь пространственные вариации параметра μ' .

Эффективные силовые источники сейсмоизлучения имеют следующий явный вид:

$$\begin{aligned} f_x^{\text{inh}} = & \left\{ \rho' \omega^2 D_x \nu_x(z) + \left(\kappa' + \frac{1}{3} \mu' \right) \left[-k_R^2 D_x \nu_x(z) + ik_R D_z \frac{d\nu_x}{dz} \right] + \right. \\ & \left. + \mu' \left[-k_R^2 D_x \nu_x(z) + D_x \frac{d^2 \nu_x}{dz^2} \right] \right\} \exp(ik_R x), \end{aligned} \quad (5.4.9)$$

$$\begin{aligned} f_z^{\text{inh}} = & \left\{ \rho' \omega^2 D_z \nu_z(z) + \left(\kappa' + \frac{1}{3} \mu' \right) \left(ik_R D_x \frac{d\nu_x}{dz} + D_z \frac{d^2 \nu_z}{dz^2} \right) + \right. \\ & \left. + \mu' D_z \left[\frac{d^2 \nu_z}{dz^2} - k_R^2 \nu_z(z) \right] \right\} \exp(ik_R x), \end{aligned} \quad (5.4.10)$$

$$\vec{f}^{\text{mon}} = \left[\text{grad} \left(\kappa' - \frac{2}{3} \mu' \right) \right] \left[ik_R D_x \nu_x(z) + D_z \frac{d\nu_z}{dz} \right] \exp(ik_R x), \quad (5.4.11)$$

$$f_x^\mu = \left\{ 2 \frac{\partial \mu'}{\partial x} ik_R D_x \nu_x(z) + \frac{\partial \mu'}{\partial z} \left[D_x \frac{d\nu_x}{dz} + ik_R D_z \nu_z(z) \right] \right\} \exp(ik_R x), \quad (5.4.12)$$

$$f_z^\mu = \left\{ \frac{\partial \mu'}{\partial x} \left[D_x \frac{d\nu_x}{dz} + ik_R D_z \nu_z(z) \right] + 2 \frac{\partial \mu'}{\partial z} D_z \frac{d\nu_z}{dz} \right\} \exp(ik_R x) \quad (5.4.13)$$

У векторов \vec{f}^{inh} и \vec{f}^μ отсутствует y -компонента, однако $\vec{f}_y^{\text{mon}} \neq 0$.

Как следует из выражений (5.4.9)–(5.4.13) при произвольных зависимостях величин ρ' , κ' и μ' от пространственных координат эффективные силовые источники имеют достаточно общий вид.

Рассмотрим неоднородность малых по сравнению с длиной волны размеров. Тогда \vec{f}^{inh} представляет собой сосредоточенную силу, а \vec{f}^{mon} — точечный монополюсный источник. Такой источник называется центром давления. Математически источник типа центра давления описывается градиентом трехмерной пространственной дельта-функции Дирака [Петрашень, 1978].

Источник типа центра давления, называемый иногда также центром расширения, возбуждает в твердом теле только продольные волны. Источники такого типа изучены как для случая безграничной упругой среды [Докучаев, 1996; Докучаев, 1999], так и для случая твердого полупространства [Максимов, 1996; Авербах, Заславский, 1998; Максимов и др., 2003; Заславский, 2004].

Эффективный силовой источник \vec{f}^μ (5.4.12), (5.4.13) представляет собой некоторую комбинацию пар сил. Нетрудно видеть, что этот источник имеет и потенциальную, и вихревую части, и, следовательно, возбуждает как продольную, так и поперечную волны.

5.4.2. Рассеяние волны Рэлея на точечном подповерхностном возмущении плотности

В связи со сложностью эффективных силовых источников (5.4.8)–(5.4.13) в дальнейшем рассмотрении целесообразно ограничиться случаем, когда имеют место только неоднородности плотности, $\rho'(x, y, z) \neq 0$, а модули упругости среды постоянны: $\kappa' = \mu' = 0$. Данное предположение позволяет значительно упростить расчеты, поскольку производные плотности по координатам не входят (в отличие от производных модулей упругости) в уравнение (5.4.1), описывающее волновые движения упругой среды, и, в то же время, проанализировать основные закономерности процесса рассеяния, в частности, детально исследовать поля и энергетические характеристики рассеянных сигналов [Разин, 2010б].

Для определения рассеянного поля \vec{u}_1 необходимо задать падающее зондирующее поле (на практике это поле определяется имеющимися в наличии сейсмовибраторами), а также указать сейсмоакустические свойства неоднородности.

Если вертикальные размеры неоднородности малы по сравнению с длиной волны, то добавочную плотность $\rho'(x, y, z)$ можно представить в виде

$$\rho'(x, y, z) = m(x, y) \delta(z - h), \quad (5.4.14)$$

где $m(x, y)$ — избыточная масса неоднородности, приходящаяся на единицу площади плоскости $z = h$, и δ — символ дельта-функции Дирака.

Пусть зондирующий сигнал представляет собой гармоническую поверхностную волну Рэлея циклической частоты ω , распространяющуюся вдоль границы упругого полупространства в направлении оси x . Глубина расположения лоцируемой неоднородности h не должна превышать длины λ_R рэлеевской волны (в противном случае рассеянный сигнал будет экспоненциально малым). При этом рассеянные волновые поля будут возбуждаться эффективным гармоническим источником, действующим на единицу площади плоскости $z = h$ с силой

$$\vec{f}^{\text{eff}} = m(x, y) \omega^2 \vec{u}_0(x, y, h). \quad (5.4.15)$$

В формуле (5.4.15) $\vec{u}_0(x, y, h)$ представляет собой вектор смещений в зондирующей поверхностной волне Рэлея. Выражения для компонент этого вектора будут приведены ниже.

Таким образом, для решения задачи рассеяния необходимо предварительно решить задачу о возбуждении упругих волн в твердом полупространстве со свободной границей гармоническими силами, произвольно распределенными по плоскости $z = h$.

Решение данной задачи получено выше в §§ 3.1.3, 3.1.4. Выражения (3.1.81)–(1.1.83), (3.1.93), (3.1.94) позволяют вычислять поля смещений продольных, поперечных и поверхностных рэлеевских волн, возбуждаемых в упругом полупространстве гармоническими силовыми источниками, произвольно распределенными по плоскости $z = h$.

Для получения выражений для смещений в упругих волнах, рассеянных неоднородностью вида (5.4.14), в выражения (3.1.81)–(3.1.83), (3.1.93), (3.1.94) необходимо подставить пространственный спектр эффективного силового источника

$$\vec{F}^{\text{eff}}(\vec{k}) = \frac{\omega^2}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} m(x, y) \vec{u}_0(x, y, h) \exp(-i\vec{k}\vec{r}) d\vec{r}. \quad (5.4.16)$$

Если и горизонтальные размеры неоднородности малы, то в (5.4.14) можно приближенно считать, что

$$m(x, y) = \Delta m \delta(x) \delta(y), \quad (5.4.17)$$

где Δm — избыточная масса неоднородности (точечная неоднородность). Из (5.4.15)–(5.4.17) следует, что в случае точечной неоднородности компоненты вектора пространственного спектра эффективного силового источника имеют вид:

$$F_x(k_x, k_y) = \frac{\omega^2}{(2\pi)^2} \Delta m u_{0x}(0, 0, h), \quad (5.4.18)$$

$$F_z(k_x, k_y) = \frac{\omega^2}{(2\pi)^2} \Delta m u_{0z}(0, 0, h). \quad (5.4.19)$$

Из геометрии задачи очевидно, что при распространении зондирующей волны вдоль оси x в области неоднородности y -компонента вектора смещений в падающей волне равна нулю, и

$$F_r(\vec{k}_{l,t}^{(s)}) = F_x(\vec{k}_{l,t}^{(s)}) \cos \varphi, \quad (5.4.20)$$

$$F_r(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) = F_x(k_R \cos \varphi, k_R \sin \varphi) \cos \varphi. \quad (5.4.21)$$

Для того, чтобы конкретизировать вид спектров (5.4.18), (5.4.19), необходимо задать конфигурацию падающей волны.

Остановимся подробнее на выборе зондирующего сигнала. Пусть для определенности падающая на неоднородность рэлеевская волна возбуждается точечным гармоническим поверхностным силовым источником, действующим по нормали к поверхности упругой среды. Источник расположен в точке с координатами $(-x_0, 0, 0)$ и имеет амплитуду силы f_0 . Как следует из общих выражений (3.1.93), (3.1.94) (см. также [Miller, Pursey, 1955; Гуцин, Докучаев и др., 1981]) в точке расположения неоднородности $(0, 0, h)$ компоненты вектора смещений в зондирующей

волне Рэлея имеют вид:

$$u_x(0, 0, h) = D_0 \frac{k_t^2 - 2k_R^2}{2k_R} \nu_x(h) \exp(ik_R x_0), \quad (5.4.22)$$

$$u_z(0, 0, h) = D_0 \sqrt{k_R^2 - k_t^2} \nu_z(h) \exp[i(k_R x_0 + \pi/2)], \quad (5.4.23)$$

где

$$D_0 = \frac{f_0}{\rho_0 c_t^2} \sqrt{\frac{k_R}{2\pi x_0}} \frac{k_t^2}{R'_0(k_R)} \exp(i3\pi/4). \quad (5.4.24)$$

Подставляя в формулы (3.1.81)–(3.1.83), (3.1.93), (3.1.94) пространственные спектры эффективных силовых источников (5.4.18)–(5.4.21) с учетом (5.4.22), (5.4.23) получаем выражения для полей рассеянных объемных и поверхностной рэлеевской волн.

Аналитическое исследование выражений для смещений (3.1.81)–(3.1.83) в объемных волнах оказывается затруднительным из-за их громоздкости. Относительно простыми являются выражения для горизонтальной и вертикальной компонент вектора смещений в рассеянной волне Рэлея. Из выражений (3.1.93), (3.1.94), (5.4.18), (5.4.19), (5.4.21)–(5.4.23) получаем [Пазун, 2010б]:

$$u_{Rr}^{\text{scat}}(r, \varphi, z) = -\frac{2k_R^2 - k_t^2}{4\pi\rho_0^2 c_t^2 q^2(\xi)} \Delta m f_0 \frac{\exp(ik_R x_0)}{\sqrt{x_0}} \times \quad (5.4.25)$$

$$\times \left[\sqrt{k_R^2 - k_t^2} \nu_x^2(h) \cos \varphi + \sqrt{k_R^2 - k_t^2} \nu_z^2(h) \right] \nu_x(z) \frac{\exp(ik_R r)}{\sqrt{r}},$$

$$u_{Rz}^{\text{scat}}(r, \varphi, z) = \frac{k_R \sqrt{k_R^2 - k_t^2}}{2\pi\rho_0^2 c_t^2 q^2(\xi)} \Delta m f_0 \frac{\exp(ik_R x_0)}{\sqrt{x_0}} \left[\sqrt{k_R^2 - k_t^2} \nu_x^2(h) \cos \varphi + \right. \quad (5.4.26)$$

$$\left. + \sqrt{k_R^2 - k_t^2} \nu_z^2(h) \right] \nu_z(z) \frac{\exp[i(k_R r + \pi/2)]}{\sqrt{r}}.$$

Воспользовавшись соотношением

$$2k_R^2 - k_t^2 = 2k_R \sqrt{q_l} \sqrt{q_t},$$

выражения (5.4.25), (5.4.26) можно переписать в виде:

$$u_{Rr}^{\text{scat}}(r, \varphi, z) = -Q \sqrt{q_t} \nu_x(z) \frac{\exp(ik_R r)}{\sqrt{r}}, \quad (5.4.27)$$

$$u_{Rz}^{\text{scat}}(r, \varphi, z) = Q \sqrt{q_l} \nu_z(z) \frac{\exp[i(k_R r + \pi/2)]}{\sqrt{r}}, \quad (5.4.28)$$

где

$$Q = \frac{k_R \sqrt{q_l}}{2\pi\rho_0^2 c_t^2 q^2(\xi)} \Delta m f_0 \frac{\exp(ik_R x_0)}{\sqrt{x_0}} [q_t \nu_x^2(h) \cos \varphi + q_l \nu_z^2(h)]. \quad (5.4.29)$$

Входящие в (3.1.93), (3.1.94), (5.4.22), (5.4.23), (5.4.25), (5.4.26) и (5.4.27), (5.4.28) функции $\nu_x(z)$ (3.1.95) и $\nu_z(z)$ (3.1.96) описывают зависимости соответствующих компонент смещений в волне Рэлея от вертикальной координаты.

Первое слагаемое в квадратных скобках в (5.4.25), (5.4.26) описывает те части смещений в рассеянной волне Рэлея, которые связаны с горизонтальными движениями неоднородности в поле зондирующей волны. Наличие в данном слагаемом множителя $\cos \varphi$ показывает, что величина этой части смещений зависит от направления в горизонтальной плоскости. Второе слагаемое в указанных квадратных скобках определяется вертикальными колебаниями неоднородности. Соответствующая им часть смещений в поле рассеянной волны Рэлея обладает цилиндрической симметрией в горизонтальной плоскости.

Функции $\nu_x^2(h) = \zeta_x(h)$ и $\nu_z^2(h) = \zeta_z(h)$ описывают зависимости амплитуд частей смещений, связанных соответственно с горизонтальными и вертикальными движениями неоднородности в поле зондирующей волны, от глубины расположения этой неоднородности. Функции $\zeta_{x,z}(h)$ исследованы в § 3.1.4. Там показано, что всегда $\zeta_z(z) > \zeta_x(h)$; кроме того, $q_l > q_t$, и, следовательно, определяющий вклад в поле рассеянной волны Рэлея дают вертикальные колебания неоднородности.

Наряду с вычислением волновых полей значительный интерес представляют также расчеты энергетических характеристик различных типов рассеянных волн — плотностей потоков энергии излучения и мощностей излучения. Выражения для смещений (3.1.81)–(3.1.83), (3.1.93), (3.1.94) позволяют вычислить потоки энергии излучения. Мощности излучения получаются путем интегрирования этих потоков через поверхность полусферы большого радиуса с центром в начале координат для объемных волн и через поверхность полубесконечного цилиндра с осью, совпадающей с координатной осью z , для поверхностной волны Рэлея. Однако для рэлеевской волны мощность излучения удобнее получить методом реакции излучения. Для произвольного распределения гармонических сил по плоскости $z = h$ мощность излучения волны Рэлея дается выражением (3.1.98).

Подставляя в (3.1.98) пространственные спектры эффективных силовых источников (5.4.18), (5.4.19), (5.4.21) получаем выражение для мощности излучения рассеянной поверхностной волны Рэлея [Разин, 2010б]:

$$W_R^{\text{scat}} = -\frac{\Delta m^2 \omega^3 f_0^2 k_t^8 k_R^2 q_l}{16\pi \rho_0^3 c_t^4 [R'_0(k_R)]^3 x_0} [q_t^2 \nu_x^4(h) + 2q_l^2 \nu_z^4(h)]. \quad (5.4.30)$$

Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести отношение γ_R мощности излучения рассеянной волны W_R^{scat} к мощности излучения зондирующей рэлеевской волны $W_R^{(z)}(0)$, которая дается выражением (3.1.103). Для γ_R из (5.4.30), (3.1.103) получаем формулу:

$$\gamma_R = \frac{\Delta m^2 \omega^5}{\rho_0^2 c_t^5 x_0} \frac{\xi(\xi^2 - n^2)}{2\pi q^2(\xi)} \left[\frac{\xi^2 - 1}{2(\xi^2 - n^2)} \nu_x^4(h) + \nu_z^4(h) \right]. \quad (5.4.31)$$

Отметим, что величина γ_R , которая характеризует эффективность рассеяния рэлеевской волны в рэлеевскую волну на точечном подповерхностном включении, пропорциональна пятой степени частоты, $\gamma_R \sim \omega^5$. Такая частотная зависимость

характерна для коэффициента затухания поверхностной волны Рэлея вследствие рассеяния на мелкомасштабных трехмерных шероховатостях поверхности упругого полупространства [Уразаков, Фальковский, 1972; Maradudin, Mills, 1976] (см. также [Бирюков, Гуляев и др., 1991, § 13.4]).

В выражение (5.4.31) для γ_R входит горизонтальное расстояние x_0 между источником зондирующей волны и неоднородностью. Если в качестве падающего поля рассмотреть плоскую волну (такая идеализация широко используется в задачах, связанных с рассеянием волн различной физической природы), то величина γ_R не будет зависеть от расстояния между источником волн и рассеивателем.

Выражения (5.4.25), (5.4.26), (5.4.30) для полей смещений и мощности излучения, соответствующих рассеянной поверхностной волне Рэлея, можно обобщить на случаи неоднородностей в виде лежащих в горизонтальной плоскости отрезка нити, прямоугольника или круга. Для этого необходимо вычислить пространственный спектр эффективного силового источника с помощью формулы (5.4.16). Полученные результаты применимы также для случая, когда неоднородность находится на поверхности упругого полупространства. Частный случай рассеяния рэлеевской волны на тонком диске, который находится на поверхности твердой среды, рассмотрен в работе [Заславский, 1989].

Если выразить расстояние x_0 в единицах длины поперечной волны λ_t и считать, что подповерхностное включение представляет собой однородный шар весьма малого радиуса $L \ll \lambda_t$, то величину γ_R можно также записать в виде:

$$\gamma_R = \gamma_1 \cdot \gamma_2, \quad (5.4.32)$$

где

$$\gamma_1 = (2\pi)^4 \left(\frac{4}{3}\pi\right)^2 \left(\frac{\rho'}{\rho_0}\right)^2 \left(\frac{L}{\lambda_t}\right)^6 \frac{\lambda_t}{x_0}, \quad (5.4.33)$$

$$\gamma_2 = \frac{\xi(\xi^2 - n^2)}{q^2(\xi)} \gamma_3, \quad (5.4.34)$$

$$\gamma_3 = \tilde{\sigma}_x(h) + \sigma_z(h), \quad (5.4.35)$$

$$\tilde{\sigma}_x(h) = \frac{\xi^2 - 1}{2(\xi^2 - n^2)} \sigma_x(h), \quad (5.4.36)$$

$$\sigma_{x,z}(h) = \zeta_{x,z}^2(h) = \nu_{x,z}^4(h). \quad (5.4.37)$$

Перейдем к количественным оценкам. Пусть радиус включения L в десять раз меньше длины поперечной волны λ_t , избыточная плотность ρ' составляет двадцать процентов от величины ρ_0 , а включение находится на расстоянии $x_0 = 10 \lambda_t$ от сейсмодвижителя. Тогда по порядку величины $\gamma_1 \approx 10^{-4}$. Данная оценка является «оптимистической», поскольку коэффициент γ_1 существенным образом зависит от избыточной плотности включения и весьма существенным — от его характерного размера (напомним, что полученный результат справедлив при $|\rho'| \ll \rho_0$ и $L \ll \lambda_t$). При уменьшении значений ρ' и L величина γ_1 может уменьшиться на несколько порядков. Действительно, если $\rho'/\rho_0 = 0,1$, $L/\lambda_t = 0,05$, то $\gamma_1 \approx 4 \cdot 10^{-7}$.

В выражении (5.4.35) для γ_3 первое и второе слагаемые связаны соответственно с горизонтальными и вертикальными движениями неоднородности в поле падающей волны. Каждое из этих слагаемых пропорционально четвертой степени функций, описывающих зависимости соответствующих компонент вектора смещений в рэлеевской волне от глубины (см. (5.4.37), (3.1.93), (3.1.94)). Зависимости величин σ_x , σ_z и $\bar{\sigma}_x$ от приведенной глубины расположения рассеивателя представлены на рис. 5.12. Из рассмотрения рис. 5.12 следует, что определяющий вклад в мощность излучения рассеянной волны Рэлея дают вертикальные колебания малой неоднородности в поле зондирующего сигнала. Связанная с горизонтальными колебаниями неоднородности мощность излучения рэлеевской волны резко падает при увеличении глубины расположения рассеивателя.

Зависимости величины γ_2 (5.4.34) от приведенной глубины расположения рассеивателя при различных значениях параметра n представлены на рис. 5.13. Из рассмотрения рис. 5.13 следует, что при относительно малых значениях величины n функция $\gamma_2(\tilde{h})$ имеет максимум при $\tilde{h} \gtrsim 0,1$ (кривая 2). С ростом n этот максимум становится всё менее выраженным, и, затем, функция $\gamma_2(\tilde{h})$ становится монотонно убывающей (см. кривую 3). Численное значение величины γ_2 всегда существенно меньше единицы. Таким образом, отношение мощностей рассеянной и падающей волн Рэлея для случаев неоднородности малых размеров, плотность которой незначительно отличается от плотности фоновой среды, имеет порядок величины 10^{-6} и менее. Рассеяние рэлеевской волны в рэлеевскую волну оказывается относительно эффективным лишь в тех случаях, когда рассеиватель находится на глубине, не превышающей приблизительно одной третьей части длины поперечной волны.

Данные рис. 5.13 для γ_2 и выражение (5.4.33) для γ_1 позволяют выполнять практические оценки мощности излучения рэлеевской волны, рассеянной подповерхностным включением малых размеров.

Покажем, что выражения (5.4.25), (5.4.26) могут быть использованы для определения координат подповерхностной неоднородности. Действительно, измерения горизонтальной компоненты смещений в рассеянной волне Рэлея в какой-либо точке поверхности упругой среды укажут направление на данную неоднородность. Измерения этих компонент в ряде точек (теоретически минимум в двух точках) позволяют определить горизонтальные координаты неоднородности (проекцию неоднородности на поверхность среды). В реальных условиях из-за сложной (случайно-неоднородной) структуры среды будет указана не точка, а некоторая область поверхности, под которой находится неоднородность. После того, как неоднородность будет локализована по горизонтальным координатам, необходимо провести измерения рассеянного поля рэлеевской волны в ряде точек поверхности, равноудаленных от центра области проекции неоднородности на границу твердой среды. Из-за наличия множителя $\cos \varphi$ в квадратных скобках в выражениях (5.4.25), (5.4.26) минимальное значение рассеянного поля на данном расстоянии от проекции неоднородности на поверхность будет на прямой между источником зондирующего сигнала и областью локализации неоднородности. Соответственно, максимальное значение рассеянного поля будет на продолжении данной прямой («за» неоднородностью). Это показывает, что преобладает рассеяние рэлеевской волны «вперед». Функция

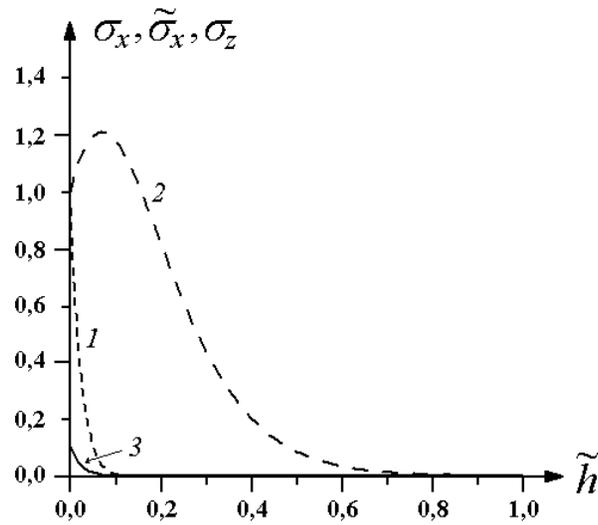


Рис. 5.12. Зависимости величин σ_x (1), σ_z (2) и $\tilde{\sigma}_x$ (3) от приведенной глубины расположения рассеивателя $\tilde{h} = h/\lambda_t$ при $n = c_t/c_l = 1/\sqrt{3}$

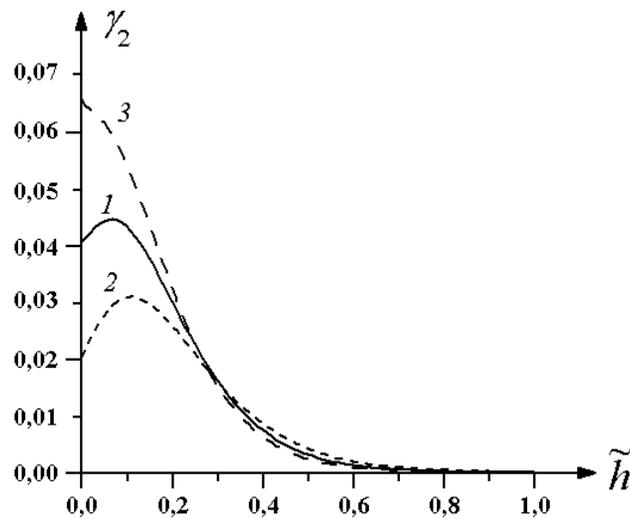


Рис. 5.13. Зависимости $\gamma_2(\tilde{h})$: 1 — $n = 1/\sqrt{3}$; 2 — $n = 0,4$; 3 — $n = 0,65$

$\nu_x(h)$, стоящая множителем при $\cos \varphi$, обращается в нуль приблизительно при $h \sim \sim 0,2 \lambda_R$ (см. рис. 3.2 с учетом (3.1.101)), то есть при указанном соотношении между глубиной расположения неоднородности и длиной волны Рэлея рассеянное поле на поверхности будет обладать круговой симметрией. Таким образом, добиваясь круговой симметрии рассеянного поля путем перестройки частоты зондирующего сигнала можно определить глубину расположения неоднородности.

Таким образом, в данном параграфе получены выражения для поля смещений и мощности излучения рассеянной поверхностной акустической волны Рэлея, возникающей при взаимодействии зондирующей волны Рэлея с подповерхностной неоднородностью малых размеров. Выполнены количественные оценки мощности излучения рассеянной рэлеевской волны, позволяющие установить возможность использования волны данного типа для локации неоднородностей, находящихся вблизи поверхности упругой среды. Установлена возможность определения координат подповерхностной неоднородности по измерениям поля рассеянной волны Рэлея.

Литература

- Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. / Пер с англ. под ред. Диткина В. А. и Кармазиной Л. Н. — М.: Наука, 1979. 832 с.
- Авербах В. С., Заславский Ю. М.* Пространственно-угловые характеристики и энергетический баланс упругих волн, генерируемых заглубленным источником типа центр расширения // Физика Земли. 1998. № 1. С. 49–53.
- Андреанова З. С., Кейлис-Борок В. И., Лёвшин А. Л., Нейгауз М. Г.* Поверхностные волны Лява. — М.: Наука, 1965. 108 с.
- Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. Т. 1 / Пер. с англ. А. Л. Левшина. — М.: Мир, 1983. 520 с.
- Аки К., Ричардс П.* Количественная сейсмология. Т. 2 / Пер. с англ. А. В. Калинина — М.: Мир, 1983. 360 с.
- Алексеев А. С., Глинский Б. М., Дряхлов С. И., Ковалевский В. В., Михайленко Б. Г., Пушиной Б. М., Фатъянов А. Г., Хайретдинов М. С., Шорохов М. Н.* Эффект акусто-сейсмической индукции при вибросейсмическом зондировании // Докл. РАН. 1996. Т. 346, № 5. С. 664–667.
- Алексеев А. С., Михайленко Б. Г.* Решение задачи Лэмба для вертикально-неоднородного полупространства // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1976. № 12. С. 11–25.
- Бабешко В. А.* Новый метод в теории пространственных динамических смешанных задач // Докл. АН СССР. 1978. Т. 242, № 1. С. 62–65.
- Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. — М.: Наука, 1984. 256 с.
- Бабешко В. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В.* Анализ волновых полей, возбуждаемых в упругом стратифицированном полупространстве поверхностными источниками // Акуст. журн. 1986. Т. 32, № 3. С. 366–371.
- Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* К расчету сейсмического источника с заданной направленностью излучения // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262, № 4. С. 831–834.
- Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. — М.: Наука, 1989. 344 с.
- Бабешко В. А., Зинченко Ж. Ф.* К теории направленных сейсмических антенн // Докл. АН СССР. 1980. Т. 251, № 6. С. 1350–1353.
- Бабешко В. А., Калинин В. В., Селезнев М. Г.* Обзор методов излучения волновых полей, возбуждаемых в упругих средах вибрирующими штампами. В кн.: Исследование Земли невзрывными сейсмическими источниками / Под ред. Николаева А. В. — М.: Наука, 1981. С. 126–132.
- Бабешко В. А., Селезнев М. Г.* и др. Об одном методе исследования установившихся колебаний упругого полупространства, содержащего сферическую или горизонтальную цилиндрическую полость // ПММ. 1983. Вып. 1. Т. 47. С. 115–121.
- Бабич В. М., Кирпичникова Н. Я.* Метод пограничного слоя в задачах дифракции коротких волн. — Л.: ЛГУ. 1974. 125 с.
- Бабич В. М., Крауклис П. В., Молотков Л. А.* Динамические задачи геоакустики // Акуст. журн. 1984. Т. 30, № 5. С. 694–695.
- Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. — М.: Мир, 1984. 250 с.
- Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений. Т. 1, 2. — М.: Наука, 1966.
- Бирюков С. В., Гуляев Ю. В., Крылов В. В., Плесский В. П.* Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. — М.: Наука, 1991. 416 с.
- Болотовский Б. М., Столяров С. Н.* О принципах излучения в среде с дисперсией // Проблемы теоретической физики (Сб. памяти В. Е. Тамма). — М., 1972. С. 267–280.

- Бородина Е. Л., Петухов Ю. В. Влияние боковых волн на формирование интерференционной структуры широкополосного звука в мелком море // Акуст. журн. 1999. Т. 45, № 3. С. 313–320.
- Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Изд-во АН СССР, 1957. 502 с.
- Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973. 343 с.
- Бреховских Л. М., Годин О. А. Акустика слоистых сред. — М.: Наука, 1989. 416 с.
- Бреховских Л. М., Гончаров В. В. Введение в механику сплошных сред. — М.: Наука, 1982. 335 с.
- Вайнберг Б. Г. Принципы излучения, предельного поглощения и предельной амплитуды в общей теории уравнений с частными производными // Успехи математических наук. 1966. Т. 21, № 3. С. 115–194.
- Ватсон Г. Р. Теория Бесселевых функций. — М.: Иноиздат, 1949. 798 с.
- Вдовиченко С. П., Заславский Ю. М. Излучение звука в атмосферу при подводном землетрясении // Изв. АН СССР. ФАО. 1985. Т. 21, № 7. С. 714–719.
- Викторов И. А. Типы звуковых поверхностных волн в твердых телах (обзор) // Акуст. журн. 1979. Т. 25, № 1. С. 1–17.
- Викторов И. А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах — М.: Наука, 1981. 287 с.
- Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. — М.: Наука, 1974.
- Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. — М.: Наука, 1979. 319 с.
- Гетман И. П., Устинов Ю. А. Математическая теория нерегулярных твердых волноводов. — Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1993. 143 с.
- Глушков Е. В. Распределение энергии поверхностного источника в неоднородном полупространстве // ПММ. 1983. Т. 47, № 1. С. 94–100.
- Гоголадзе В. П. Волны Рэлея на границе сжимаемой жидкой среды и твердого упругого полупространства // Тр. сейсмол. ин-та АН СССР. 1948. № 127. 87 с.
- Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. — Киев: Наукова думка, 1981. 284 с.
- Гуляев В. Т., Кузнецов В. В., Плоткин В. В., Хомутов С. Ю. Генерация и распространение инфразвука в атмосфере при работе мощных сейсмодвибраторов // Изв. АН. ФАО. 2001. Т. 37, № 3. С. 303–312.
- Гуляев В. Т., Кузнецов В. В., Плоткин В. В., Хомутов С. Ю. Тропосферные и стратосферные отражения акустических сигналов мощных сейсмодвибраторов // Изв. РАН. ФАО. 2002. Т. 38, № 4. С. 457–470.
- Гуцын В. В., Докучаев В. П., Заславский Ю. М., Конюхова И. Д. О распределении мощности между различными типами излучаемых волн в полубезграничной упругой среде. В кн.: Исследование Земли невзрывными сейсмическими источниками / Под ред. Николаева А. В. — М.: Наука, 1981. С. 113–118.
- Гуцын В. В., Заславский Ю. М., Разин А. В. О перераспределении энергии упругого излучения по разным типам волн при изменении состояния среды. В кн.: Волны и дифракция / 8-й Всес. симпоз. по дифракции и распространению волн. — М.: Наука, 1981. Т. 2. С. 38–41.
- Демидов С. П. Теория упругости. — М.: Высшая школа, 1979. 432 с.
- Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. — М.: Физматгиз, 1961. 367 с.
- Докучаев В. П. Энергетические характеристики излучения упругих волн сейсмическими силовыми источниками // Физика Земли. 1996. № 1. С. 75–80.
- Докучаев В. П. Энергетические спектры сейсмических волн при подземных взрывах // Физика Земли. 1999. № 4. С. 94–96.

- Докучаев В. П., Разин А. В.* Возбуждение упругих волн в однородном полупространстве поверхностными источниками // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1990. № 10. С. 81–87.
- Евграфов М. А.* Асимптотические оценки и целые функции. — М.: Физматгиз, 1962.
- Ерофеев В. Т.* Связь между основными решениями в цилиндрических и сферических координатах (с одинаковыми началами координат) для некоторых уравнений математической физики // Дифференциальные уравнения. 1973. Т. 9. С. 1310–1317.
- Заславский Ю. М.* К оценке мощности инфразвука, побочно излучаемого в атмосферу при вибрационном просвечивании Земли // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1982. № 9. С. 86–89.
- Заславский Ю. М.* Энергетика рассеянных упругих полей, возникающих при дифракции волны Рэлея на поверхностном возмущении полугораниченной среды // Препринт № 267. — Горький: Н.-и. радиофиз. ин-т, 1989. 15 с.
- Заславский Ю. М.* Параметрическое рассеяние высокочастотных упругих волн на сферической полости малых размеров, колеблющейся в поле рэлеевской волны // Акуст. журн. 2004. Т. 50, № 1. С. 55–61.
- Заславский Ю. М.* Излучение сейсмических волн вибрационными источниками. — Н. Новгород: ИПФ РАН, 2007. 200 с.
- Исакович М. А.* Общая акустика. — М.: Наука, 1973. 496 с.
- Кейлис-Борок В. И.* Интерференционные поверхностные волны. — М.: АН СССР, 1960. 196 с.
- Ковалевский В. В.* Исследование акустических волновых полей, генерируемых поверхностными сейсмическими вибраторами // Акуст. журн. 2005. Т. 51. Приложение. С. 92–102.
- Коган С. Я.* О сейсмической энергии, возбуждаемой источником, находящимся на поверхности // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1963. № 7. С. 1000–1013.
- Колодяжная Г. Е., Селезнев М. Г., Селезнева Т. Н.* Задача о воздействии равномерно движущейся осциллирующей нагрузки на упругое полупространство, содержащее заглубленную цилиндрическую полость // МТТ. Изв. АН СССР. 1987. № 6. С. 83–88.
- Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. — М.: Наука, 1970. 871 с.
- Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г.* Справочник по элементарной физике. — М.: Наука, 1964. 248 с.
- Краснушкин П. Е.* О возбуждении нормальных и присоединенных волн в бесконечной слоистой упругой полосе // ПММ. 1979. Т. 43, № 5. С. 877–886.
- Кузнецов В. В., Плоткин В. В., Хомутов С. Ю., Грехов О. М., Павлов А. Ф., Федоров А. Н., Струминский В. И.* Исследование геофизических возмущений при вибросейсмическом зондировании // Геология и геофизика. 1999. Т. 40, № 3. С. 442–456.
- Кузнецов В. В., Плоткин В. В., Хомутов С. Ю.* Акустические и электромагнитные явления в атмосфере при вибросейсмическом зондировании // Докл. РАН. 2000. Т. 370, № 2. С. 243–248.
- Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башейлешвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. — М.: Наука, 1976. 603 с.
- Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1981. 688 с.
- Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Гидродинамика. — М.: Наука, 1986. 736 с.
- Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.* Теория упругости. — М.: Наука, 1987. 248 с.
- Латин А. Д.* Волны в твердом полупространстве, покрытом жидким слоем // Акуст. журн. 1992. Т. 38, № 2. С. 364–367.
- Латин А. Д.* Возбуждение волн в упругом полупространстве дипольным источником, расположенным в покрывающем слое жидкости // Акуст. журн. 1992. Т. 38, № 3. С. 559–562.
- Лёвшин А. Л.* Поверхностные и каналовые сейсмические волны. — М.: Наука, 1973. 176 с.

- Лёвшин А. Л., Яновская Т. Б., Ландер А. В., Бужчин Б. Г., Бармин М. П., Ратникова Л. И., Итс Е. Н. Поверхностные сейсмические волны в горизонтально-неоднородной Земле. — М.: Наука, 1987. 279 с.
- Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. — М.: Гостехиздат, 1955. 491 с.
- Лурье А. И. Теория упругости. — М.: Наука, 1970. 940 с.
- Ляпин А. А. Возбуждение волн в слоистом полупространстве со сферической полостью // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 3. С. 76–81.
- Ляпин А. А., Селезнев М. Г., Собисевич А. Л. Локальное резонирование среды в окрестности полостей в слоистом полупространстве // Развитие методов и средств экспериментальной геофизики. Вып. 2. — М.: ОИФЗ РАН. ГНИЦ ПГК Минобразования России, 1996. С. 313–329.
- Максимов Г. А. Распределение энергии между различными типами сейсмических волн, излучаемых при подземном взрыве в однородном полупространстве // Физика Земли. 1996. № 11. С. 31–48.
- Максимов Г. А., Меркулов М. Е., Кудрявцев В. Ю. Распределение энергии между различными типами сейсмических волн, излучаемых источником с произвольной диаграммой направленности в упругом полупространстве // Акуст. журн. 2003. Т. 49, № 3. С. 389–399.
- Молотков Л. А. Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах — Л.: Наука (ленинград. отд-е), 1984. 201 с.
- Морс Ф. М., Фейсбах Г. Методы теоретической физики. Т. 2. / Пер с англ. под ред. Аллилуева С. П., Кошлякова Н. С., Мышкиса А. Д., Свешникова А. Г. — М.: Изд-во Иностранной литературы, 1960. 886 с.
- Николаев А. В. Изучение Земли невзрывными сейсмическими источниками. В кн.: Исследование Земли невзрывными сейсмическими источниками / Под ред. Николаева А. В. — М.: Наука, 1981. С. 5–29.
- Новацкий В. Теория упругости. — М.: Мир, 1975.
- Орлов А. Л., Разин А. В. Возбуждение упругих волн в полупространстве нестационарными поверхностными источниками // Изв. РАН. Физика Земли. 1993. № 2. С. 78–82.
- Партон В. З., Перлин П. И. Методы математической теории упругости. — М.: Наука, 1981. 688 с.
- Петрашень Г. И. Основы математической теории распространения упругих волн. В кн.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Вып. 18. — Л.: Наука (ленинград. отд-е), 1978. С. 1–248.
- Петрашень Г. И., Молотков Л. А., Крауклис П. В. Волны в слоисто-однородных изотропных упругих средах (метод контурных интегралов в нестационарных задачах динамики). — Л.: Наука (ленинград. отд-е), 1982. 288 с.
- Петухов Ю. В., Разин А. В., Разин В. А. Возбуждение сейсмоакустических волн гармоническим силовым источником, действующим на границе жидкого слоя и упругого полупространства // Акуст. журн. 2009. Т. 55, № 3. С. 415–422.
- Петухов Ю. В., Хилько А. И. О возможности оценки размеров очагов цунами по пространственной когерентности сейсмических и гидроакустических волн. В кн.: Теоретические и экспериментальные исследования длинноволновых процессов. — Владивосток: ДВНЦ СССР, 1985. С. 37–50.
- Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции. — М.: Наука, 1981. 800 с.
- Разин А. В. Энергетические характеристики волн Лява, возбуждаемых в системе упругий слой–упругое полупространство // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1990. № 6. С. 71–76.

- Разин А. В.* Об излучении волны Стонели нормальным к границе газ–твердое тело гармоническим силовым источником // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1991. № 12. С. 100–104.
- Разин А. В.* Излучение поверхностной и вытекающей волн на границе раздела твердое тело–газ // Изв. вузов. Радиофизика. 2002. Т. 45, № 4. С. 354–360.
- Разин А. В.* Возбуждение акустической и вытекающей волн в атмосфере подповерхностным сейсмическим источником // Изв. вузов. Радиофизика. 2006. Т. 49, № 7. С. 577–592.
- Разин А. В.* Излучение поверхностных волн Стонели распределенными силовыми источниками, действующими на границе раздела Земля–атмосфера // Изв. вузов. Радиофизика. 2007. Т. 50, № 7. С. 624–637.
- Разин А. В.* Особенности излучения поверхностной волны Стонели, возбуждаемой гармоническим силовым источником на границе раздела твердое тело–газ // Изв. вузов. Радиофизика. 2008. Т. 51, № 4. С. 304–313.
- Разин А. В.* Мощность излучения упругих волн, возбуждаемых в твердом полупространстве подповерхностным гармоническим силовым источником // Акуст. журн. 2009. Т. 55, № 2. С. 226–231.
- Разин А. В.* Возбуждение поверхностных акустических волн Рэлея и Стонели распределенными сейсмическими источниками // Изв. вузов. Радиофизика. 2010. Т. 53, № 2. С. 91–109.
- Разин А. В.* Рассеяние поверхностной акустической волны Рэлея на неоднородности малых размеров в твердом полупространстве // Изв. вузов. Радиофизика. 2010. Т. 53, № 7. С. 464–480.
- Рекач В. Г.* Руководство к решению задач теории упругости. — М.: Высшая шк., 1977. 215 с.
- Сеге П.* Ортогональные многочлены. — М.: Физматгиз, 1962. 500 с.
- Седов Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 2. — М.: Наука, 1970. 568 с.
- Селезнев М. Г.* Возбуждение волн в двухслойной среде колеблющимся штампом // ПММ. 1975. Т. 39, вып. 2. С. 381–384.
- Селезнев М. Г., Ляпин А. А.* Возбуждение колебаний в слоистом многосвязном полупространстве // Научные труды программы ГК РФ по ВО. Фундаментальные и прикладные проблемы механики деформируемых сред и конструкций. 1993. Вып. 1. Н. Новгород. С. 30–35.
- Селезнев М. Г., Собисевич А. Л.* Современные методы механико-математического моделирования геофизической среды. ГНТП «Глобальные изменения природной среды и климата». Монография. ГНИЦ ПГК (МФ). 1996. 140 с.
- Снеддон И.* Преобразование Фурье. — М.: Иностранная литература, 1955. 214 с.
- Собисевич А. Л.* Мониторинг слоистых неоднородных сред. Монография. — М.: ОИФЗ РАН, 2001. 354 с.
- Титчмарш Е.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. — М.: ИЛ, 1960. 234 с.
- Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972. 520 с.
- Угодчиков А. Г., Хуторянский Н. М.* Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. 296 с.
- Уразаков Е. И., Фальковский Л. А.* О распространении рэлеевской волны по шероховатой поверхности // ЖЭТФ. 1972. Т. 63, вып. 6 (12). С. 2297–2303.
- Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. — М.: Наука, 1967. 420 с.
- Федорюк М. В.* Метод перевала. — М.: Наука, 1977. 368 с.
- Федорюк М. В.* Асимптотика: интегралы и ряды. — М.: Наука, 1987. 544 с.

- Фелсен С., Марквуиц Н.* Излучение и рассеяние волн. Т. 1 / Пер. с англ. под ред. Левина М. Л. — М.: Мир, 1978. 551 с.
- Чернов Л. А.* Волны в случайно-неоднородных средах. — М.: Наука, 1975. 171 с.
- Чичинин И. С.* Вибрационное излучение сейсмических волн. — М.: Недра, 1984. 224 с.
- Чичинин И. С., Кузьменко А. П.* Теоретические модели сферических источников сейсмических волн. В кн.: Исследование Земли невзрывными сейсмическими источниками / Под ред. Николаева А. В. — М.: Наука, 1981. С. 94–112.
- Шендеров Е. Л.* Излучение и рассеяние звука. — Л.: Судостроение, 1989. 304 с.
- Шерифф Р. Е., Гелдарт Л. П.* Сейсморазведка. Т. 1 / Пер. с англ. Ефимовой Е. А. под ред. Калининна А. В. — М.: Мир, 1987. 448 с.
- Шерифф Р. Е., Гелдарт Л. П.* Сейсморазведка. Т. 2 / Пер. с англ. Ефимовой Е. А. и Стор М. А. под ред. Калининна А. В. — М.: Мир, 1987. 400 с.
- Шерман Д. И.* О распространении волн в жидком слое, лежащим на упругом полупространстве // Труды Сейсмологического ин-та АН СССР. 1945. № 115.
- Янке Э., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции (формулы, графики, таблицы). — М.: Наука, 1964.
- Borodina E. L., Petukhov Yu. V.* Effect of lateral waves on the broadband interference structure in the shallow sea // Acoustics Letters. 1997. V. 21, № 1. P. 1–6.
- Ewing W. M., Jardetsky W. S., Press F.* Elastic waves in layered media. — New York: McGraw-Hill Book Co., Inc., 1957. 380 p.
- Haskell N. A.* The dispersion of surface waves in multilayered solid media // Bull Seismol. Soc. Amer. 1953. V. 43, № 1. P. 17–34.
- Hron F., Mikhailenko B. G.* Numerical modeling of nongeometrical effects by the Alekseev–Mikhailenko method // Bull Seismol. Soc. Amer. 1981. V. 71. № 4. P. 1011–1029.
- Johnson L. R.* Green's function for Lamb's problem // Geophys. Journ. Roy. Astr. Soc. 1974. V. 37, № 1. P. 99–131.
- Kennett B. L. N.* Seismic wave propagation in stratified media. — Cambridge: Cambridge University Press, 1983. 342 p.
- Knopoff L.* A matrix method for elastic wave problems // Bull Seismol. Soc. Amer. 1964. V. 54. P. 431–438.
- Lamb H.* On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid // Philos. Trans. Roy. Soc. London. 1904. V. A203. P. 1–42.
- Maradudin A. A., Mills D. L.* Attenuation of Rayleigh surface waves by surface roughness // Appl. Phys. Lett. 1976. V. 28, № 10. P. 573–575.
- McNab A., Cochran A., Campbell M. A.* The calculation of acoustic fields in solids for transient normal sources of arbitrary geometry and apodization // J. Acoust. Soc. Amer. 1990. V. 87, № 4. P. 1455–1465.
- Miller G. F., Pursey H.* The field and radiation impedance of mechanical radiators on the free surface of a semi-infinite isotropic solid // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1954. V. 223, № 1155. P. 521–541.
- Miller G. F., Pursey H.* On the partition of energy between elastic waves in a semi-infinite solid // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1955. V. 233, № 1192. P. 55–69.
- Roberts R. A.* Elastodynamic response of contacting fluid and solid half-spaces to a three-dimensional point load // Wave Motion. 1990. V. 12, № 6. P. 583–593.
- Roever W. L., Vining T. F., Strick E.* Propagation of elastic wave motion from an impulsive source along a fluid/solid interface // Philos. Trans. Roy. Soc. London. 1959. V. 251, № 1000. P. 455–523.
- Sabatier J. M., Bass H. E., Bolen L. N., Attenborough K., Sastry V. S.* The interaction of airborne sound with the porous ground: the theoretical formulation // J. Acoust. Soc. Amer. 1986. V. 79, № 5. P. 1345–1352.

- Sabatier J. M., Bass H. E., Bolen L. N.* Acoustically induced seismic waves // J. Acoust. Soc. Amer. 1986. V. 80, № 2. P. 646–649.
- Scholte J. G. J.* The range of existence of Rayleigh and Stoneley waves // Monthly Notices Roy. Astron. Soc. Geophysical Supplement. 1947. V. 5, № 3. P. 120–126.
- Stoneley R.* The elastic waves at the interface of separation of two solids // Proc. Roy. Soc. London. 1924. Ser. A. V. 106. P. 416–428.
- Schwab F., Knopoff L.* Surface wave dispersion computations // Bull Seismol. Soc. Amer. 1970. V. 60. P. 321–344.
- Thomson W. T.* Transmission of elastic waves through a stratified solid // J. Appl. Phys. 1950. V. 21. P. 89–93.

Научное издание

Андрей Владимирович Разин
Алексей Леонидович Собисевич

ГЕОАКУСТИКА СЛОИСТЫХ СРЕД

Печатается по решению Научного совета
Программы фундаментальных исследований № 4 Президиума РАН

Технический редактор *В.И. Горбенко*

Подписано в печать 15.12.12. Формат 84×108/8

Гарнитура Таймс. Бумага офсетная.

Уч. изд. л. 26,25. Тираж 150 экз.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта Российской академии наук
123995, ГСП-5, Москва, ул. Б. Грузинская, 10, стр. 1

ООО Сам Полиграфист
Москва, Протопоповский переулок, д. 6