

М. Бурша

# ОСНОВЫ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

II

динамическая космическая  
геодезия



М. Бурша

---

ОСНОВЫ  
КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

Часть II

ДИНАМИЧЕСКАЯ КОСМИЧЕСКАЯ ГЕОДЕЗИЯ

Перевод с чешского *А. В. Буткевича* и *В. В. Киричука*

Под редакцией *М. У. Сагитова*



Москва, «НЕДРА» 1975

MINISTERSTVO NÁRODNI OBRANY

Milan Bursá

---

ZÁKLADY  
KOSMICKÉ GEODÉZIE

Díl II

Kosmická geodézie dynamická

P r a h a, 1970

Буриша М. Основы космической геодезии. Ч. II. Динамическая космическая геодезия (перев. с чешского). М., «Недра», 1975, с. 280.

В книге изложены теория гравитационного потенциала Земли во внешнем пространстве, теория шаровых и сферических функций — основного математического аппарата при решении задач динамической космической геодезии, основы теории движения искусственных спутников Земли в неоднородном гравитационном поле и выведены уравнения Лагранжа для возмущений элементов орбиты ИСЗ. По наблюдениям возмущений определены динамические постоянные (Стоксовы постоянные), характеризующие гравитационное поле Земли и ее динамическую фигуру.

Показано решение конкретных задач динамической космической геодезии, основанное на знании динамических постоянных: определение фигуры геоида, распределение силы тяжести во внешнем пространстве Земли и в точках поверхности геоида, определение параметров геодезической референцной системы и др.

Приведены многочисленные числовые данные, графики и схемы. Книга может быть учебным пособием для студентов старших курсов, аспирантов и научных сотрудников, изучающих и использующих методы динамической космической геодезии.

Табл. 18, ил. 34, список лит. — 316 назв.

Предлагаемая вниманию читателей книга М. Бурша «Основы космической геодезии» (ч. II «Динамическая космическая геодезия») отличается от ранее изданных книг по этому вопросу не только содержанием, но и методикой изложения. Она является продолжением уже переведенной на русский язык книги М. Бурша того же названия\*. Достоинство этой книги в полноте и последовательности изложения. Предлагаемая книга охватывает необходимый минимум сведений из математической, небесно-механической и геодезической литературы. Это достоинство делает книгу хорошим учебным пособием для студентов старших курсов, аспирантов и сотрудников, изучающих теорию динамической космической геодезии.

Кроме того, теоретические выводы в этой книге доведены до рабочих формул, удобных для практических расчетов. По многим формулам проведены расчеты, результаты которых представлены в виде многочисленных таблиц, схем и графиков. Это достоинство книги придает ей новое качество — она может служить справочным руководством для лиц, занимающихся практическим использованием методов космической геодезии.

В книге приведены также оригинальные результаты, полученные автором. Это касается вывода уточненных выражений для радиус-вектора геоида, высот геоида, определений характеристик внешних уровенных поверхностей по наблюдениям ИСЗ, вывода основных геодезических параметров Земли (большой полуоси, полярного и экваториального сжатий, направления полуоси экваториального эллипса), вывода уточненных формул для распределения ускорения силы тяжести в точках внешнего земного пространства, в точках уровенной поверхности и, в частности, геоида.

---

\* Milan Bursá, Základy kosmické geodézie. Díl I, Kosmická geodézie geometrická, Praha, 1967. Рус. пер.: М. Бурша. Основы космической геодезии. Ч. I. Геометрическая космическая геодезия, М., «Недра», 1971, с. 129.

Уточнена связь параметров формулы нормальной силы тяжести с динамическими параметрами Земли, линейным масштабным коэффициентом и угловой скоростью суточного вращения Земли; исследованы особенности вычисления и использования аномалий силы тяжести. Рассмотрены вопросы соединения геодезически несвязанных референдных систем с помощью динамических спутниковых методов.

Некоторые термины приведены в соответствие с применяющимися в отечественной литературе. Ряд сносок, для удобства чтения перенесен в текст, а небольшая часть их сокращена.

*М. У. Сагитов*

В I части книги «Основы космической геодезии» рассматриваются геодезические задачи преимущественно геометрического характера, которые можно решать по наблюдениям искусственных спутников Земли. Для разъяснения сущности решения геометрических орбитальных задач, в которых положение спутника считается известным, необходимо изложить и теорию решения задачи двух тел. Эта задача — динамической космической геодезии, рассматриваемой в настоящей книге — II части книги «Основы космической геодезии». Самим задачам нужно было бы предпослать разделы о гравитационном потенциале и потенциале силы тяжести Земли, а также теорию шаровых и сферических функций, которые являются при решении этих задач основным математическим аппаратом. В дополнение к теории решения задачи двух тел требовалось изложить хотя бы важнейшие принципы возмущенного движения, поскольку речь идет о возмущениях элементов орбиты спутника. Эта часть соприкасается с небесной механикой и астродинамикой, приспособленными к практическим потребностям решения геодезических задач, и может считаться некоторым необходимым геодезическим минимумом.

Символика при обозначении величин принята такая же, как и в I части. В ней даны определения ряда величин и понятий.

Считаю приятной обязанностью поблагодарить своего учителя член-корр. АН ЧССР Э. Бухара за многочисленные консультации и обсуждения проблем небесной механики. Эти консультации получены не только в процессе работы над этим пособием непосредственно, но и при научной работе с начала зарождения спутниковой геодезии, т. е. с запуска первых ИСЗ. Тогда, в конце 1957 г. проф. Э. Бухар впервые определил сжатие Земли по движению узла орбиты первого искусственного спутника Земли. Он ввел меня в курс этой проблемы в то время, когда на чешском языке не было еще ни одной публикации.

Глубоко благодарен академику А. Затопеку за консультации по разным проблемам теории потенциала и гравитационного поля, а также за советы по улучшению терминологии.

Пользуясь случаем, выражаю благодарность и своему учителю проф. А. А. Изотову, который приучил меня к научной работе еще в годы обучения в высшей школе. Благодарен своим сотрудникам Л. Кандову и Р. Марановой за помощь при подготовке рукописи.

## ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

<p><math>a</math> — большая полуось орбиты искусственного спутника Земли (ИСЗ),</p> <p><math>\bar{a}</math> — большая полуось общего земного эллипсоида,</p> <p><math>a^\circ</math> — большая полуось урванного эллипсоида,</p> <p><math>a_r</math> — большая полуось референц-эллипсоида,</p> <p><math>a, b, c</math> — направляющие косинусы в системе координат <math>x, y, z</math>,</p> <p><math>a_i, b_i, c_i</math> — направляющие косинусы внешней нормали к внешней урванной поверхности,</p> <p><math>a_e, b_e, c_e</math> — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности эллипсоида,</p> <p><math>a_n^{(k)}, b_n^{(k)}</math> — коэффициенты разложения радиусовекторов эллипсоида в ряд сферических функций,</p> <p><math>A</math> — момент инерции тела Земли относительно оси <math>X</math>,</p> <p><math>\bar{A}</math> — геодезический азимут,</p> <p><math>A, B, C</math> — направляющие косинусы в системе координат <math>X, Y, Z</math>,</p> <p><math>A_n^{(k)}, B_n^{(k)}</math> — коэффициенты разложения радиуса-вектора геоида в ряд сферических функций</p> <p><math>B</math> — геодезическая широта,</p> <p><math>B</math> — момент инерции тела Земли относительно оси <math>Y</math>,</p> <p><math>\bar{B}</math> — геодезическая широта на урванном эллипсоиде,</p> <p><math>C</math> — момент инерции тела Земли относительно оси <math>Z</math>,</p> <p><math>dm</math> — элемент массы Земли,</p> <p><math>d\tau</math> — элементарный объем, который занимает элемент массы,</p> <p><math>D</math> — центробежный момент инерции тела Земли относительно оси <math>x</math>,</p>	<p><math>e</math> — эксцентриситет орбиты ИСЗ,</p> <p><math>e</math> — эксцентриситет урванного эллипсоида,</p> <p><math>\bar{e}</math> — эксцентриситет общего земного эллипсоида,</p> <p><math>e_r</math> — эксцентриситет референц-эллипсоида (эллипсоида вращения),</p> <p><math>e_i</math> (<math>i = 1, 2, \dots, 6</math>) — общее обозначение элементов орбиты,</p> <p><math>e_1</math> — эксцентриситет экваториального эллипса,</p> <p><math>E</math> — эксцентрическая аномалия,</p> <p><math>E</math> — центробежный момент инерции тела Земли относительно оси <math>y</math>,</p> <p><math>E_r</math> — референц-эллипсоид,</p> <p><math>E_k</math> — кинетическая энергия спутника,</p> <p><math>E, F, G</math> — основные Гауссовы коэффициенты в первой квадратической форме,</p> <p><math>f</math> — гравитационная постоянная,</p> <p><math>F</math> — сила,</p> <p><math>F</math> — центробежный момент инерции тела Земли относительно оси <math>z</math>,</p> <p><math>F_x, F_y, F_z</math> — составляющие силы по направлениям осей <math>x, y, z</math>,</p> <p><math>g</math> — ускорение силы тяжести,</p> <p><math>g_n^{(k)}, h_n^{(k)}</math> — коэффициенты разложения ускорения силы тяжести на данной поверхности в ряд сферических функций,</p> <p><math>H</math> — геодезическая высота над эллипсоидом (<math>H = H_q + \xi_q</math>),</p> <p><math>H_q</math> — нормальная высота,</p> <p><math>i</math> — наклон плоскости орбиты ИСЗ к плоскости экватора,</p> <p><math>J</math> — средняя кривизна урванной поверхности,</p> <p><math>J_e</math> — средняя кривизна эллипсоида,</p>
--	---

- $J_n^{(h)}$  — динамический коэффициент (Стоксова постоянная) при сферической функции  $n$ -й степени и  $k$ -го порядка в разложении гравитационного потенциала,
- $(J_n^{(h)})_{\text{C}}$  — динамический коэффициент в разложении гравитационного потенциала Луны,
- $(J_n^{(h)})_{\odot}$  — динамический коэффициент в разложении гравитационного потенциала Солнца,
- $(J_n^{(o)})^{\circ}$  — динамический коэффициент разложения нормального гравитационного потенциала,
- $J_i$  — средняя кривизна внешней уровенной поверхности,
- $k$  — порядок сферических полиномов и функций,
- $K$  — удвоенная секториальная площадная скорость спутника,
- $K$  — Гауссова (общая) кривизна уровенной поверхности,
- $K_e$  — Гауссова (общая) кривизна эллипсоида,
- $K_i$  — Гауссова (общая) кривизна внешней уровенной поверхности,
- $l, m, n$  — направляющие параметры в системе  $x, y, z$ ,
- $L$  — геодезическая долгота,
- $L, M, N$  — направляющие параметры в системе  $X, Y, Z$ ,
- $m_c$  — масса спутника,
- $M$  — средняя аномалия,
- $M_{\oplus}$  — масса Земли,
- $M_{\text{C}}$  — масса Луны,
- $M_{\odot}$  — масса Солнца,
- $n$  — внешняя нормаль к сфере относимости,
- $n$  — степень сферических полиномов и функций,
- $N_n^{(h)}$  — норма сферической функции  $n$ -й степени и  $k$ -го порядка,
- $O$  — центр масс Земли,
- $O_r$  — центр референц-эллипсоида,
- $P$  — точка, в которой рассматривается гравитационное поле (притягиваемая точка),
- $P_n^{(h)}(t)$  — присоединенный полином Лежандра  $n$ -й степени и  $k$ -го порядка,
- $P_n^{(o)}(t)$  — полином Лежандра  $n$ -й степени, зональная сферическая функция,
- $Q$  — потенциал центробежной силы,
- $r$  — расстояние текущей точки притягивающих масс от притягиваемой точки,
- $r$  — радиус-вектор в системе координат  $x, y, z$ ,
- $R$  — возмущающая функция в геодезической референцной системе,
- $\bar{R}$  — возмущающая функция в геоцентрической системе координат,
- $R$  — радиус-вектор в системе координат  $X, Y, Z$ ,
- $S$  — гриничское звездное время,
- $S_n^{(h)}$  — динамический коэффициент (Стоксова постоянная) при сферической функции  $n$ -й степени и  $k$ -го порядка в разложении гравитационного потенциала,
- $(S_n^{(h)})_{\text{C}}$  — динамический коэффициент в разложении гравитационного потенциала Луны,
- $(S_n^{(h)})_{\odot}$  — динамический коэффициент в разложении гравитационного потенциала Солнца,
- $S(\varphi)$  — функция Стокса,
- $t$  — время в уравнениях движения,
- $t_0$  — время прохождения ИСЗ через перигей,
- $t'$  — топоцентрический часовой угол относительного местного

	астрономического меридиана в системе $x', y', z'$ или $x, y, z$ ,	(гринвичского) астрономического меридиана,
$t'$	топоцентрический часовой угол относительно местного геодезического меридиана в системе $X', Y', Z'$ или $X, Y, Z$ ,	$x, y, z$ — геоцентрическая система координат,
$t = \sin \bar{\varphi}$	аргумент сферических функций,	$x', y', z'$ — топоцентрическая система координат с ориентировкой осей $x' \parallel x, y' \parallel y, z' \parallel z$ ,
$T$	возмущающий потенциал в геодезической референцной системе,	$x_C, y_C, z_C$ — геоцентрические координаты Луны (ее центра масс),
$T$	геоцентрический гринвичский часовой угол,	$\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$ — прямоугольные пространственные координаты центра референц-эллипсоида относительно центра масс Земли,
$\bar{T}$	возмущающий потенциал в геоцентрической системе координат,	$(XZ)$ — плоскость основного (гринвичского) геодезического меридиана,
$u$	аргумент склонения ИСЗ,	$X, Y, Z$ — геодезическая референцная система координат,
$U$	нормальный потенциал,	$X', Y', Z'$ — топоцентрическая система координат с ориентировкой осей $X' \parallel X, Y' \parallel Y, Z' \parallel Z$ ,
$U_0$	потенциал на поверхности уровня эллипсоида,	$z$ — средняя ось вращения Земли,
$v$	скорость ИСЗ,	$\bar{z}$ — астрономическое зенитное расстояние,
$v$	истинная аномалия,	$Z$ — ось вращения референц-эллипсоида,
$v_x, v_y, v_z$	составляющие скорости ИСЗ в системе координат $x, y, z$ ,	$\bar{Z}$ — геодезическое зенитное расстояние,
$V$	гравитационный потенциал,	$dS/dt$ — секториальная скорость спутника,
$V_n$	общий сферический полином (шаровая функция) степени $n$ ,	$\alpha$ — полярное сжатие земного эллипсоида,
$V_n^{(k)}$	элементарный сферический полином (шаровая функция) $n$ -й степени и $k$ -го порядка,	$\alpha_0$ — полярное сжатие уровня эллипсоида,
$w$	ускорение,	$\alpha$ — параметр (в теории сферических функций),
$w_x, w_y, w_z$	составляющие ускорения,	$\alpha'$ — топоцентрическое прямое восхождение в системе $x', y', z'$ или $x, y, z$ ,
$W$	потенциал силы тяжести,	$\bar{\alpha}$ — астрономический азимут,
$W_0$	потенциал силы тяжести на поверхности геоида,	$\alpha_1$ — экваториальное сжатие трехосного эллипсоида,
$W_e$	потенциал силы тяжести Земли на поверхности эллипсоида,	$\beta, \beta_1$ — коэффициенты в формуле нормального ус-
$Y_n^{(k)}$	общая сферическая функция $n$ -й степени и $k$ -го порядка,	
$(xz)$	плоскость основного	

	кореня силы тяжести,		оси трехосного земного эллипсоида,
$\Gamma$	— точка весеннего равноденствия,	$\nu$	— силовая линия нормального поля тяготения,
$\gamma$	— нормальное ускорение силы тяжести,	$\rho$	— расстояние переменной точечной массы от центра референц-эллипсоида,
$\gamma_e$	— нормальное ускорение силы тяжести на экваторе,	$\rho$	— радиус-вектор поверхности геоида; геоцентрический радиус-вектор,
$\gamma_n^{(e)}$	— коэффициент в разложении нормально-го ускорения силы тяжести на поверхности эллипсоида в ряд сферических функций,	$\rho_e$	— радиус-вектор поверхности эллипсоида,
$\delta$	— геоцентрическое склонение,	$\rho_0$	— расстояние притягиваемой точки от центра референц-эллипсоида,
$\delta$	— плотность элемента массы,	$\rho_r$	— радиус-вектор поверхности геоида, проведенный из центра референц-эллипсоида,
$\Delta$	— геоцентрическое расстояние,		$\tau$ — объем тела Земли,
$\Delta$	— дифференциальный оператор Лапласа,	$\varphi$	— астрономическая широта,
$\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0$	— углы Эйлера, определяющие взаимную ориентировку осей системы $X, Y, Z$ и $x, y, z$ ,	$\bar{\varphi}$	— угол между радиусом-вектором и плоскостью геодезического экватора,
$\xi_q$	— высота квазигеоида,	$\Phi$	— геоцентрическая широта,
$\lambda$	— астрономическая долгота,	$\Phi_C (\delta_C)$	— геоцентрическая широта (склонение) Луны,
$\bar{\lambda}$	— угол между проекцией вектора $\rho$ на плоскость геодезического экватора ( $XY$ ) и плоскостью исходного (гриничского) меридиана ( $XZ$ ),	$\Phi_{\odot} (\delta_{\odot})$	— геоцентрическая широта (склонение) Солнца,
$\lambda_n^{(h)}$	— сомножитель в теории сферических и шаровых функций,	$\Phi_C$	— селеноцентрическая широта спутника,
$\Lambda$	— геоцентрическая долгота,	$\Phi_{\odot}$	— гелиоцентрическая широта спутника,
$\Lambda_C$	— геоцентрическая долгота Луны,	$\psi$	— угол между вектором переменной элементарной массой и вектором точки притяжения,
$\Lambda_{\odot}$	— геоцентрическая долгота Солнца,	$\omega$	— аргумент перигея орбиты ИСЗ,
$\Lambda_C$	— селеноцентрическая долгота спутника,	$\omega$	— угловая скорость вращения Земли,
$\Lambda_{\odot}$	— гелиоцентрическая долгота спутника,	$\Omega$	— прямое восхождение восходящего узла орбиты ИСЗ,
$\Lambda_a$	— геоцентрическая долгота большой полу-	$\Omega$	— область пространства

ГРАВИТАЦИОННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ЗЕМЛИ  
ВО ВНЕШНЕМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Все элементы массы тела Земли в совокупности создают гравитационный потенциал  $V$ . В дальнейшем, как правило, будем рассматривать гравитационный потенциал во внешнем пространстве, где движутся спутники. Потенциал  $V$  во внешней притягиваемой точке  $P$  выразим как интеграл от элементарных потенциалов  $dV(P)$ , создаваемых элементарными массами  $dm$ . Для элементарного потенциала  $dV$  справедливо выражение (рис. 1):

$$dV(P) = f \frac{dm}{r} = f \frac{dm}{\sqrt{\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho \cos \psi}} = f \frac{\delta(X, Y, Z) d\tau}{\sqrt{\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho \cos \psi}}, \quad (1)$$

где  $\rho_0$  — расстояние точки притяжения  $P$  от начала  $O_r$  прямоугольной системы координат  $X, Y, Z$ , совмещенного с центром референц-эллипсоида;  $\rho$  — расстояние  $dm$  от начала  $O_r$ ;  $r$  — расстояние  $dm$  от точки  $P$ ;  $\psi$  — угол между направлениями  $\overline{O_r dm}$  и  $\overline{O_r P}$ ;  $f$  — гравитационная постоянная;  $\delta = \delta(X, Y, Z)$  — плотность элемента массы  $dm$ , которая является функцией координат  $X, Y, Z$ ;  $d\tau$  — элементарный объем, который занимает элемент массы  $dm$ .

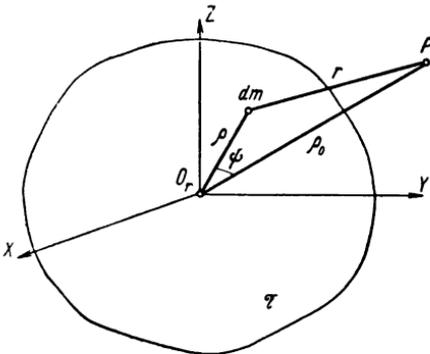


Рис. 1. Схема к выводу потенциала притяжения

Система координат  $X, Y, Z$  может быть произвольной, однако ее выгодно выбирать так, чтобы начало системы было как можно ближе к центру масс Земли, а ось  $Z$  совпадала с осью суточного вращения Земли. В дальнейшем будем применять геодезическую референцную систему.

Интегрируем (1) по всему объему  $\tau$  Земли, тогда

$$V(P) = f \iiint_{\tau} \frac{\delta(X, Y, Z)}{\sqrt{\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho \cos\psi}} d\tau. \quad (2)$$

Для рассматриваемого внешнего потенциала предполагается, что  $\rho_0 > \rho$ , поэтому выполним преобразование

$$V(P) = f \iiint_{\tau} \frac{\delta(X, Y, Z)}{\rho_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 - 2\frac{\rho}{\rho_0} \cos\psi}} d\tau. \quad (3)$$

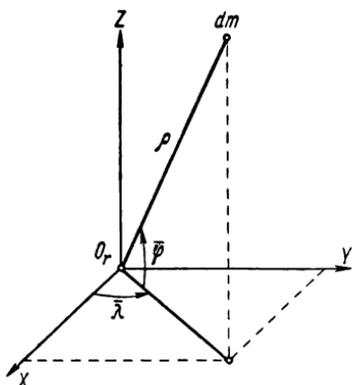


Рис. 2. Прямоугольная и сферическая системы координат

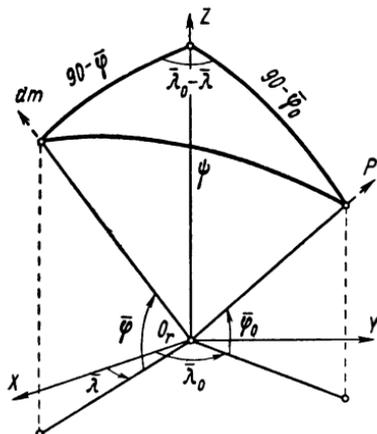


Рис. 3. Полярный сферический треугольник. Прямоугольная и геоцентрическая системы координат

Выражение под корнем в подынтегральной функции последнего равенства можем разложить в равномерно сходящийся ряд

$$\begin{aligned} \left[1 + \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 - 2\frac{\rho}{\rho_0} \cos\psi\right]^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 - 2\frac{\rho}{\rho_0} \cos\psi\right] + \\ &+ \frac{3}{8} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 - 2\frac{\rho}{\rho_0} \cos\psi\right]^2 - \frac{5}{16} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 - 2\frac{\rho}{\rho_0} \cos\psi\right]^3 + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

Аргумент  $\cos\psi$  не удобен для интегрирования (3), поэтому делается переход к сферической системе координат  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{\lambda}$  (рис. 2) или к прямоугольной пространственной (референцной) системе  $X, Y, Z$ \*. Угол  $\bar{\varphi} = \delta^r$ , который образует вектор  $\rho = \Delta^r$  с плоскостью геодезического экватора ( $XY$ ), и угол  $\bar{\lambda} = -T^r$  между его проекцией

\* Определение различных систем координат дано в кн. «Основы космической геодезии», ч. 1, глава 4.

на плоскость  $(XY)$  и осью  $X$ , пусть будут направлениями, определенными так, что

$$\left. \begin{aligned} X &= \rho \cos \bar{\varphi} \cos \bar{\lambda} \\ Y &= \rho \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\lambda} \\ Z &= \rho \sin \bar{\varphi} \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

Если ввести вспомогательную сферу радиуса  $\rho$ , то углы  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{\lambda}$  будут равны сферической широте и долготе. Координаты точки  $P$ , где рассматривается потенциал, будут тогда  $\rho_0$ ,  $\bar{\varphi}_0$ ,  $\bar{\lambda}_0$  или  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $Z_0$ , а текущие координаты элемента массы  $dm$  будут  $\rho$ ,  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{\lambda}$  или  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

Функция  $\cos \psi$  может быть выражена из сферического треугольника на упомянутой вспомогательной единичной сфере, вершинами которого являются точки пересечения направлений  $\overline{O_r Z}$ ,  $\overline{O_r P}$  и  $O_r dm$  со сферой (рис. 3)

$$\cos \psi = \sin \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi}_0 + \cos \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi}_0 \cos (\bar{\lambda}_0 - \bar{\lambda}), \quad (6)$$

или, с учетом уравнений (5),

$$\cos \psi = \frac{1}{\rho \rho_0} (X X_0 + Y Y_0 + Z Z_0). \quad (7)$$

Теперь можно было бы подставить (4) в (3) и выполнить интегрирование. Однако выгоднее сначала использовать интересные и необычайно полезные свойства коэффициентов при степенях  $(\rho/\rho_0)^n$  ряда (4), что в свою очередь требует хотя бы краткого освещения основных понятий и некоторых особенностей гармонических функций. Именно эти функции являются основным математическим средством решения задач динамической космической геодезии.

## § 2. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Функция  $V(X, Y, Z)$  является гармонической функцией в определенной области пространства  $\Omega$ , если она имеет непрерывные первые  $dV/dX$ ,  $dV/dY$ ,  $dV/dZ$  и вторые  $d^2V/dX^2$ ,  $d^2V/dY^2$ ,  $d^2V/dZ^2$  частные производные и удовлетворяет в каждой точке области  $\Omega$  уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} = \Delta V = 0. \quad (8)$$

Символ  $\Delta$  — так называемый дифференциальный оператор Лапласа

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2}. \quad (9)$$

Легко доказать, что при выполнении указанных условий функция  $V(X, Y, Z)$  имеет непрерывные все частные производные, и ряд Тейлора

$$V(X, Y, Z) = V(X_0, Y_0, Z_0) + \frac{\partial V}{\partial X}(X - X_0) + \frac{\partial V}{\partial Y}(Y - Y_0) + \\ + \frac{\partial V}{\partial Z}(Z - Z_0) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(X - X_0, Y - Y_0, Z - Z_0) \quad (10)$$

сходится, и что  $V(X, Y, Z)$ , следовательно, внутри  $\Omega$  есть функция аналитическая.

Гармоническая функция  $V(X, Y, Z)$ , с которой в дальнейшем мы будем оперировать, будет всегда регулярной в бесконечности и для нее справедливы равенства

$$\lim_{X, Y, Z \rightarrow \infty} V(X, Y, Z) = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho V(X, Y, Z) = \text{const.} \quad (11)$$

Гармонической функцией является, например, потенциал точечной массы (1), поэтому для него

$$\Delta [dV(P)] = f dm \Delta \left( \frac{1}{r} \right) = 0.$$

Так как

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{(X_0 - X)^2 + (Y_0 - Y)^2 + (Z_0 - Z)^2} \\ \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial X_0} &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial X_0} = -\frac{1}{r^3} (X_0 - X) \\ \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial Y_0} &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial Y_0} = -\frac{1}{r^3} (Y_0 - Y) \\ \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial Z_0} &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial Z_0} = -\frac{1}{r^3} (Z_0 - Z) \end{aligned} \right\}, \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial X_0^2} &= \frac{3}{r^5} (X_0 - X)^2 - \frac{1}{r^3} \\ \frac{\partial^2 \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial Y_0^2} &= \frac{3}{r^5} (Y_0 - Y)^2 - \frac{1}{r^3} \\ \frac{\partial^2 \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial Z_0^2} &= \frac{3}{r^5} (Z_0 - Z)^2 - \frac{1}{r^3} \end{aligned} \right\}, \quad (13)$$

то, действительно,

$$\Delta \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\partial^2 \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial X_0^2} + \frac{\partial^2 \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial Y_0^2} + \frac{\partial^2 \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial Z_0^2} = \frac{3}{r^5} r^2 - \frac{3}{r^3} = 0. \quad (14)$$

Точка  $P (X_0, Y_0, Z_0)$ , где рассматривается потенциал, должна лежать вне сингулярной точки ( $r = 0$ ), т. е. вне элементарной массы  $dm$ .

Как сказано выше, гармонической функцией является и гравитационный потенциал

$$V(P) = f \iiint_{\tau} \frac{\delta(X, Y, Z)}{r} d\tau, \quad (15)$$

т. е.

$$\Delta V(P) = 0. \quad (16)$$

Это очевидно, если использовать равенство (14); координаты точки  $P (X_0, Y_0, Z_0)$  не зависят от переменных интегрирования и, значит,

$$\Delta V(P) = f \Delta \left[ \iiint_{\tau} \frac{\delta(X, Y, Z)}{r} d\tau \right] = f \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) \Delta \left( \frac{1}{r} \right) d\tau. \quad (17)$$

Здесь также точка  $P$  должна лежать вне пространства  $\tau$ , заполненного притягиваемыми массами.

Напомним, что потенциал силы тяжести Земли  $W(P)$ , в отличие от гравитационного потенциала, гармонической функцией не является. Если обозначить потенциал центробежной силы  $Q(P)$ , то

$$W(P) = V(P) + Q(P) \quad (18)$$

и

$$\Delta W(P) = \Delta V(P) + \Delta Q(P) = \Delta Q(P). \quad (19)$$

При этом подразумевается, что точка  $P$  вращается вместе с телом  $\tau$ .

Если обозначить угловую скорость вращения  $\omega$  и предположить, что ось  $Z$  есть главная ось инерции тела, то потенциал центробежной силы будет равен

$$Q(P) = \frac{1}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2), \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial X} &= \omega^2 X, & \frac{\partial Q}{\partial Y} &= \omega^2 Y, & \frac{\partial Q}{\partial Z} &= 0 \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial X^2} &= \omega^2, & \frac{\partial^2 Q}{\partial Y^2} &= \omega^2, & \frac{\partial^2 Q}{\partial Z^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

и

$$\Delta Q(P) = \frac{\partial^2 Q}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial Z^2} = 2\omega^2 \neq 0, \quad (22)$$

следовательно,

$$\Delta W(P) = 2\omega^2 \neq 0.$$

Это доказывает, что потенциал силы тяжести не является гармонической функцией. Если ось  $Z$  не является главной осью инерции, то потенциал центробежной силы [см. преобразованное отношение между геоцентрической системой  $x, y, z$  и системой референцной  $X, Y, Z$ , ч. I, формула (59)] равен

$$\begin{aligned} Q(P) &= \frac{1}{2} \omega^2 [(X + \Delta x_0 + \omega_0 Y - \psi_0 Z)^2 + (Y + \Delta y_0 - \omega_0 X + \varepsilon_0 Z)^2] = \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2) + \delta Q(P) = \frac{1}{2} \omega^2 \rho^2 \cos^2 \bar{\varphi} + \delta Q(P), \quad (23) \\ \delta Q(P) &\simeq \omega^2 (X \Delta x_0 + Y \Delta y_0 - \psi_0 X Z + \varepsilon_0 Y Z). \end{aligned}$$

В динамической космической геодезии, небесной механике и астродинамике часто речь идет о потенциале в точке, которая не вращается вместе с Землей, а поэтому влияние центробежной силы будет в ней равно нулю ( $Q = 0$ ). В этом случае мы имеем дело с потенциалом притяжения, а не с потенциалом силы тяжести.

### § 3. УРАВНЕНИЕ ЛАПЛАСА В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

В динамической космической геодезии широко используются особые системы гармонических функций, так называемые сферические и шаровые функции. Для их описания прежде всего удобно выразить уравнение Лапласа (8) в сферической системе координат (5). Напомним, что речь идет об ортогональной системе, для которой имеют место следующие уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \bar{\varphi}} \frac{\partial X}{\partial \bar{\lambda}} + \frac{\partial Y}{\partial \bar{\varphi}} \frac{\partial Y}{\partial \bar{\lambda}} + \frac{\partial Z}{\partial \bar{\varphi}} \frac{\partial Z}{\partial \bar{\lambda}} &= 0 \\ \frac{\partial X}{\partial \bar{\lambda}} \frac{\partial X}{\partial \rho} + \frac{\partial Y}{\partial \bar{\lambda}} \frac{\partial Y}{\partial \rho} + \frac{\partial Z}{\partial \bar{\lambda}} \frac{\partial Z}{\partial \rho} &= 0 \\ \frac{\partial X}{\partial \rho} \frac{\partial X}{\partial \bar{\varphi}} + \frac{\partial Y}{\partial \rho} \frac{\partial Y}{\partial \bar{\varphi}} + \frac{\partial Z}{\partial \rho} \frac{\partial Z}{\partial \bar{\varphi}} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (24)$$

Действительно, если подставить в (24) производные функции (5)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial \bar{\varphi}} &= -\rho \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\lambda}, & \frac{\partial Y}{\partial \bar{\varphi}} &= -\rho \sin \bar{\varphi} \sin \bar{\lambda} \\ \frac{\partial X}{\partial \bar{\lambda}} &= -\rho \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\lambda}, & \frac{\partial Y}{\partial \bar{\lambda}} &= -\rho \cos \bar{\varphi} \cos \bar{\lambda} \\ \frac{\partial X}{\partial \rho} &= \cos \bar{\varphi} \cos \bar{\lambda}, & \frac{\partial Y}{\partial \rho} &= \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\lambda} \\ \frac{\partial Z}{\partial \bar{\varphi}} &= \rho \cos \bar{\varphi}, & \frac{\partial Z}{\partial \bar{\lambda}} &= 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial \rho} = \sin \bar{\varphi} \end{aligned} \right\}, \quad (25)$$

то получится

$$\left. \begin{aligned} \rho^2 \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\lambda} \cos \bar{\lambda} - \rho^2 \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\lambda} \cos \bar{\lambda} &= 0 \\ -\rho \cos^2 \bar{\varphi} \sin \bar{\lambda} \cos \bar{\lambda} + \rho \cos^2 \bar{\varphi} \sin \bar{\lambda} \cos \bar{\lambda} &= 0 \\ -\rho \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} \cos^2 \bar{\lambda} - \rho \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} \sin^2 \bar{\lambda} + \rho \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (26)$$

Рассмотрим элемент пространства (рис. 4), ограниченный координатными линиями, и выразим координаты его вершин в системе  $X, Y, Z$

$$\left. \begin{aligned} X(M_1) &= X(M) + \left(\frac{\partial X}{\partial \rho}\right)_M d\rho + \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)_M d\bar{\varphi} + \\ &+ \left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)_M d\bar{\lambda} = X(M) + \left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)_M d\bar{\lambda} \\ Y(M_1) &= Y(M) + \left(\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\right)_M d\bar{\lambda} \\ Z(M_1) &= Z(M) + \left(\frac{\partial Z}{\partial \lambda}\right)_M d\bar{\lambda} \\ X(M_2) &= X(M) + \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)_M d\bar{\varphi} \\ Y(M_2) &= Y(M) + \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\right)_M d\bar{\varphi} \\ Z(M_2) &= Z(M) + \left(\frac{\partial Z}{\partial \varphi}\right)_M d\bar{\varphi} \\ X(M_3) &= X(M) + \left(\frac{\partial X}{\partial \rho}\right)_M d\rho \\ Y(M_3) &= Y(M) + \left(\frac{\partial Y}{\partial \rho}\right)_M d\rho \\ Z(M_3) &= Z(M) + \left(\frac{\partial Z}{\partial \rho}\right)_M d\rho \end{aligned} \right\}. \quad (27)$$

С учетом (25) имеют место (букву  $M$  в дальнейших обозначениях опускаем) равенства

$$\left. \begin{aligned} X_1 - X &= -\rho \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\lambda} d\bar{\lambda} \\ Y_1 - Y &= \rho \cos \bar{\varphi} \cos \bar{\lambda} d\bar{\lambda} \\ Z_1 - Z &= 0 \\ X_2 - X &= -\rho \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\lambda} d\bar{\varphi} \\ Y_2 - Y &= -\rho \sin \bar{\varphi} \sin \bar{\lambda} d\bar{\varphi} \\ Z_2 - Z &= \rho \cos \bar{\varphi} d\bar{\varphi} \\ X_3 - X &= \cos \bar{\varphi} \cos \bar{\lambda} d\rho \\ Y_3 - Y &= \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\lambda} d\rho \\ Z_3 - Z &= \sin \bar{\varphi} d\rho \end{aligned} \right\}. \quad (28)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \overline{MM_1} &= \sqrt{(X_1 - X)^2 + (Y_1 - Y)^2 + (Z_1 - Z)^2} = \rho \cos \varphi d\bar{\lambda} \\ \overline{MM_2} &= \sqrt{(X_2 - X)^2 + (Y_2 - Y)^2 + (Z_2 - Z)^2} = \rho d\bar{\varphi} \\ \overline{MM_3} &= d\rho \end{aligned} \right\}, \quad (29)$$

что вытекает из геометрических соображений (рис. 4—5). Вследствие ортогональности системы  $\rho$ ,  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{\lambda}$  соответствующий элемент объема  $\tau$  можем, очевидно, выразить следующим образом

$$d\tau = \overline{MM_1} \cdot \overline{MM_2} \cdot \overline{MM_3} = \rho^2 \cos \bar{\varphi} d\rho d\bar{\varphi} d\bar{\lambda}. \quad (30)$$

Далее применим к элементарному объему  $d\tau$  вторую теорему Грина, связывающую объемный (тройной) интеграл с двойным (площадным) интегралом

$$\iiint_{\tau} (U \Delta V - V \Delta U) d\tau = \iint_{\sigma} \left( U \frac{\partial V}{\partial n} - V \frac{\partial U}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (31)$$

Здесь  $U$ ,  $V$  — произвольные непрерывные функции трех переменных, имеющие вторые частные производные, ограниченные внутри  $\tau$ ;  $\sigma$  — поверхность, ограничивающая объем  $\tau$ ;  $d\sigma$  — элемент этой поверхности;  $n$  — направление внешней нормали к поверхно-

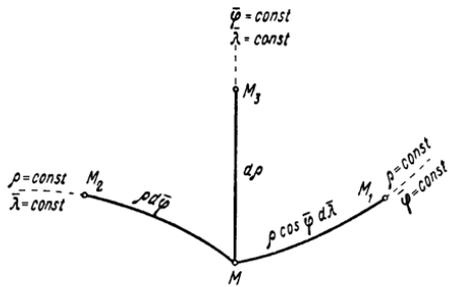
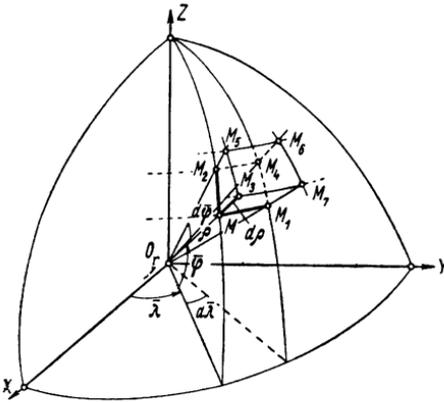


Рис. 4. Координаты элемента объема      Рис. 5. Ортогональная сферическая система координат

сти  $\sigma$ . В нашем случае пусть  $V$  — исследуемый гравитационный потенциал и в дальнейшем положим  $U = \text{const}$ , т. е.  $\Delta U = 0$ .

Далее

$$\iiint_{\tau} U \Delta V d\tau = \iint_{\sigma} U \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma, \quad (32)$$

или

$$\iiint_{\tau} \Delta V d\tau = \iint_{\sigma} \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma, \quad (33)$$

причем  $\Delta V \neq 0$ , так как внутри области  $\tau$  гравитационный потенциал не является гармонической функцией. В случае элементарного объема (конечный объем  $\tau$  в (33) заменим элементом  $d\tau$ ), очевидно, будет иметь место равенство

$$\Delta V d\tau = \sum_{n=1}^6 \left( \frac{\partial V}{\partial n} \right)_i d\sigma_i. \quad (34)$$

В правую часть (34) входит сумма произведений частных производных потенциала  $V$  по внешним нормальям к шести (элементарным) граням элемента  $d\tau$  (см. рис. 4) на площади этих граней.

В соответствии с рис. 4 можно написать

$$\begin{aligned} \Delta V d\tau = & \left( \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma \right)_{MM_1M_4M_2} + \left( \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma \right)_{M_3M_7M_6M_5} + \\ & + \left( \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma \right)_{MM_1M_7M_3} + \left( \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma \right)_{M_2M_4M_6M_8} + \\ & + \left( \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma \right)_{MM_3M_5M_2} + \left( \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma \right)_{M_1M_7M_6M_4}, \end{aligned} \quad (35)$$

причем перечисление вершин в индексах везде обозначает соответствующую элементарную грань. Учитывая, что речь идет об элементарных размерах, можно принять углы, образованные направлениями внешних нормалей с противоположными гранями, близкими к  $180^\circ$ .

Поэтому

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma \right)_{M_3M_7M_6M_5} &= \left( \frac{\partial V}{\partial \rho} d\sigma \right)_{M_3M_7M_6M_5} = \\ &= - \left( \frac{\partial V}{\partial \rho} d\sigma \right)_{MM_1M_4M_2} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\partial V}{\partial \rho} d\sigma \right) d\rho \\ \left( \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma \right)_{M_2M_4M_6M_8} &= \left( \frac{\partial V}{\rho \partial \varphi} d\sigma \right)_{M_2M_4M_6M_8} = \\ &= - \left( \frac{\partial V}{\rho \partial \varphi} d\sigma \right)_{MM_1M_7M_3} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial V}{\rho \partial \varphi} d\sigma \right) d\bar{\varphi} \\ \left( \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma \right)_{M_1M_7M_6M_4} &= \left( \frac{\partial V}{\rho \cos \bar{\varphi} \partial \bar{\lambda}} d\sigma \right)_{M_1M_7M_6M_4} = \\ &= - \left( \frac{\partial V}{\rho \cos \bar{\varphi} \partial \bar{\lambda}} d\sigma \right)_{MM_3M_5M_2} + \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \left( \frac{\partial V}{\rho \cos \bar{\varphi} \partial \bar{\lambda}} d\sigma \right) d\bar{\lambda} \end{aligned} \right\}, \quad (36)$$

и, с учетом выражений (30),

$$\left. \begin{aligned} (d\sigma)_{MM_1M_4M_2} &= \rho^2 \cos \bar{\varphi} d\bar{\varphi} d\bar{\lambda} \\ (d\sigma)_{M_2M_4M_6M_8} &= \rho \cos \bar{\varphi} d\rho d\bar{\lambda} \\ (d\sigma)_{M_1M_7M_6M_4} &= \rho d\rho d\bar{\varphi} \end{aligned} \right\}. \quad (37)$$

Далее

$$\rho^2 \cos \bar{\varphi} d\bar{\rho} d\bar{\varphi} d\bar{\lambda} \Delta V = \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\partial V}{\partial \rho} \rho^2 \cos \bar{\varphi} d\bar{\varphi} d\bar{\lambda} \right) d\rho + \\ + \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} \left( \frac{\partial V}{\partial \bar{\varphi}} \rho \cos \bar{\varphi} d\rho d\bar{\lambda} \right) d\bar{\varphi} + \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \left( \frac{\partial V}{\partial \bar{\lambda}} \rho \cos \bar{\varphi} d\rho d\bar{\varphi} \right) d\bar{\lambda}. \quad (38)$$

Отсюда, с учетом того, что  $\rho$ ,  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{\lambda}$  являются независимыми переменными, получим

$$\Delta V = \frac{1}{\rho^2 \cos \bar{\varphi}} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho^2 \cos \bar{\varphi} \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} \left( \cos \bar{\varphi} \frac{\partial V}{\partial \bar{\varphi}} \right) + \frac{1}{\cos \bar{\varphi}} \frac{\partial}{\partial \bar{\lambda}} \left( \frac{\partial V}{\partial \bar{\lambda}} \right) \right] \quad (39)$$

и, наконец,

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \cos \bar{\varphi}} \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} \left( \cos \bar{\varphi} \frac{\partial V}{\partial \bar{\varphi}} \right) + \frac{1}{\rho^2 \cos^2 \bar{\varphi}} \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{\lambda}^2}, \quad (40)$$

или оператор Лапласа (9) в сферических координатах приобретает вид

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2 \cos \bar{\varphi}} \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} \left( \cos \bar{\varphi} \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} \right) + \frac{1}{\rho^2 \cos^2 \bar{\varphi}} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\lambda}^2}. \quad (41)$$

#### § 4. ШАРОВЫЕ И СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Уравнение Лапласа  $\Delta V = 0$  есть дифференциальное уравнение второго порядка в частных производных и имеет бесконечное множество решений, так как его общий интеграл содержит две произвольные непрерывные функции.

Будем искать его решение в виде однородного полинома  $n$ -й степени, рациональной и целой функции. Обозначим  $V_n(X, Y, Z) = V_n(\rho, \bar{\varphi}, \bar{\lambda})$  и сначала будем искать решение в прямоугольной системе координат  $X, Y, Z$ .

Полином  $V_n(X, Y, Z)$  называется общим сферическим полиномом степени  $n$  или общей шаровой функцией степени  $n^*$ ; он должен удовлетворять двум требованиям:

а) уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 V_n(X, Y, Z)}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_n(X, Y, Z)}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V_n(X, Y, Z)}{\partial Z^2} = \Delta V_n(X, Y, Z) = 0; \quad (42)$$

б) условию однородности

$$V_n(kX, kY, kZ) = k^n V_n(X, Y, Z), \quad (43)$$

\* Здесь мы различаем ее от сферической функции (см. далее), в то время как в литературе часто сферические и шаровые функции не различают.

или уравнению Эйлера

$$X \frac{\partial V_n(X, Y, Z)}{\partial X} + Y \frac{\partial V_n(X, Y, Z)}{\partial Y} + Z \frac{\partial V_n(X, Y, Z)}{\partial Z} = nV_n(X, Y, Z).$$

Прежде всего выясним, сколько решений в форме  $V_n(X, Y, Z)$  имеет уравнение (42), т. е. сколько произвольных (линейно независимых) коэффициентов содержит шаровая функция  $V_n(X, Y, Z)$ .

Представим ее в виде

$$V_n(X, Y, Z) = Z^n Q_0(X, Y) + Z^{n-1} Q_1(X, Y) + \dots + Z Q_{n-1}(X, Y) + Q_n(X, Y) = \sum_{k=0}^{k=n} Z^{n-k} Q_k(X, Y), \quad (44)$$

где  $Q_n(X, Y)$  — однородный полином степени  $n$  переменных  $X, Y$ , т. е.

$$Q_n(X, Y) = a_0^{(n)} Y^n + a_1^{(n)} Y^{n-1} X + a_2^{(n)} Y^{n-2} X^2 + \dots + a_{n-1}^{(n)} Y X^{n-1} + a_n^{(n)} X^n. \quad (45)$$

Полином (45) содержит  $n + 1$  членов; число  $N$  членов сферического полинома (44) поэтому равно

$$N = 1 + 2 + \dots + n + 1 = \frac{1 + (n+1)}{2} (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \quad (46)$$

После двойного дифференцирования выражения (44) по всем переменным и подстановки в уравнение Лапласа, которое является решением  $V_n(X, Y, Z)$ , получим полином степени  $(n - 2)$ . Этот полином будет иметь  $N'$  членов, причем  $N' < N$ , так что

$$N' = 1 + 2 + \dots + n - 1 = \frac{1 + (n-1)}{2} (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (47)$$

Шаровая функция имеет линейно независимых коэффициентов

$$N - N' = \frac{1}{2} [(n+1)(n+2) - n(n-1)] = 2n + 1, \quad (48)$$

а число уравнений, связывающих эти коэффициенты, естественно, равно числу зависимых коэффициентов, т. е.

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - (2n+1) = \frac{n(n-1)}{2} = N', \quad (49)$$

Итак, общая шаровая функция степени  $n$  имеет тогда  $2n + 1$  линейно независимых однородных полиномов степени  $n$ , которые обозначим  $V_n^{(k)}(X, Y, Z)$ ;  $k = 1, 2, \dots, 2n + 1$ ,

$$V_n(X, Y, Z) = \lambda_n^{(1)} V_n^{(1)}(X, Y, Z) + \lambda_n^{(2)} V_n^{(2)}(X, Y, Z) + \dots + \lambda_n^{(2n+1)} V_n^{(2n+1)}(X, Y, Z) = \sum_{k=1}^{2n+1} \lambda_n^{(k)} V_n^{(k)}(X, Y, Z). \quad (50)$$

Коэффициенты  $\lambda_n^{(k)}$  — постоянные величины и полиномы  $V_n^{(k)}(X, Y, Z)$  должны, следовательно, удовлетворять уравнению Лапласа, так же как и общий полином  $V_n(X, Y, Z)$ . Полиномы  $V_n^{(k)}(X, Y, Z)$  поэтому называют элементарными шаровыми функциями или сферическими полиномами степени  $n$ .

Теперь перейдем согласно (5) от переменных  $X, Y, Z$  к сферическим координатам  $\rho, \bar{\varphi}, \bar{\lambda}$ . Обозначим

$$\sin \bar{\varphi} = t, \quad (51)$$

тогда

$$\left. \begin{aligned} X &= \rho \sqrt{1-t^2} \cos \bar{\lambda} \\ Y &= \rho \sqrt{1-t^2} \sin \bar{\lambda} \\ z &= \rho t \end{aligned} \right\}. \quad (52)$$

Общую шаровую функцию степени  $n$  выразим с учетом условия однородности (43) в форме

$$V_n(X, Y, Z) = \rho^n V_n(\sqrt{1-t^2} \cos \bar{\lambda}, \sqrt{1-t^2} \sin \bar{\lambda}, t) = \rho^n Y_n(t, \bar{\lambda}). \quad (53)$$

Здесь

$$Y_n(t, \bar{\lambda}) = V_n(\sqrt{1-t^2} \cos \bar{\lambda}, \sqrt{1-t^2} \sin \bar{\lambda}, t) \quad (54)$$

есть общая сферическая или Лапласова функция степени  $n$ \*

Эта функция сложная, так же как и общая шаровая функция (50), с  $2n + 1$  линейно независимыми элементарными сферическими функциями, которые (при множителях  $\lambda_n^{(k)}$ ) обозначим  $Y_n^{(k)}(t, \bar{\lambda})$ , т. е.

$$Y_n(t, \bar{\lambda}) = \sum_{k=1}^{2n+1} \lambda_n^{(k)} Y_n^{(k)}(t, \bar{\lambda}), \quad (55)$$

причем

$$V_n^{(k)}(X, Y, Z) = \rho^n Y_n^{(k)}(t, \bar{\lambda}). \quad (56)$$

Здесь опять  $n$  обозначает степень, а  $k$  — порядок.

Каждая из функций (56) является решением уравнения Лапласа (линейно независимым, т. е. ни одно из решений не может быть вы-

\* Некоторые авторы отдают предпочтение обозначению «порядок  $n$ », что менее последовательно.

В русской литературе при определении сферических функций употребляются оба термина, но чаще называют  $n$ -го порядка. (Прим. ред.).

ражено линейной комбинацией остальных). Для того чтобы убедиться в этом, найдем частные производные

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_n^{(k)}(X, Y, Z)}{\partial \rho} &= n \rho^{n-1} Y_n^{(k)}(t, \bar{\lambda}), \\ \frac{\partial^2 V_n^{(k)}(X, Y, Z)}{\partial \rho^2} &= n(n-1) \rho^{n-2} Y_n^{(k)}(t, \bar{\lambda}), \\ \frac{\partial V_n^{(k)}(X, Y, Z)}{\partial \bar{\varphi}} &= \rho^n \frac{\partial Y_n^{(k)}(t, \bar{\lambda})}{\partial \bar{\varphi}}, \\ \frac{\partial^2 V_n^{(k)}(X, Y, Z)}{\partial \bar{\varphi}^2} &= \rho^n \frac{\partial^2 Y_n^{(k)}(t, \bar{\lambda})}{\partial \bar{\varphi}^2}, \\ \frac{\partial V_n^{(k)}(X, Y, Z)}{\partial \bar{\lambda}} &= \rho^n \frac{\partial Y_n^{(k)}(t, \bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}}, \\ \frac{\partial^2 V_n^{(k)}(X, Y, Z)}{\partial \bar{\lambda}^2} &= \rho^n \frac{\partial^2 Y_n^{(k)}(t, \bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}^2}.\end{aligned}$$

Тогда с учетом (40) будем иметь

$$\begin{aligned}& n(n-1) \rho^{n-2} Y_n^{(k)}(t, \bar{\lambda}) + \frac{2}{\rho} n \rho^{n-1} Y_n^{(k)}(t, \bar{\lambda}) + \\ & + \frac{1}{\rho^2 \cos \bar{\varphi}} \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} \left[ \cos \bar{\varphi} \rho^n \frac{\partial Y_n^{(k)}(t, \bar{\lambda})}{\partial \bar{\varphi}} \right] + \frac{1}{\rho^2 \cos^2 \bar{\varphi}} \rho^n \frac{\partial^2 Y_n^{(k)}(t, \bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}^2} = 0, \quad (57)\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}& Y_n^{(k)}(t, \bar{\lambda}) \rho^{n-2} [n(n-1) + 2n] + \rho^{n-2} \frac{1}{\cos \bar{\varphi}} \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} \times \\ & \times \left[ \cos \bar{\varphi} \frac{\partial Y_n^{(k)}(t, \bar{\lambda})}{\partial \bar{\varphi}} \right] + \rho^{n-2} \frac{1}{\cos^2 \bar{\varphi}} \frac{\partial^2 Y_n^{(k)}(t, \bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}^2} = 0. \quad (58)\end{aligned}$$

Поскольку в случае, когда точка находится вне притягивающих масс, всегда  $\rho \neq 0$ , то из (58) получим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}& n(n+1) Y_n^{(k)}(t, \bar{\lambda}) + \frac{1}{\cos \bar{\varphi}} \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} \left[ \cos \bar{\varphi} \frac{\partial Y_n^{(k)}(t, \bar{\lambda})}{\partial \bar{\varphi}} \right] + \\ & + \frac{1}{\cos^2 \bar{\varphi}} \frac{\partial^2 Y_n^{(k)}(t, \bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}^2} = 0, \quad (59)\end{aligned}$$

которому должна удовлетворять каждая сферическая функция степени  $n$  и порядка  $k$ .

Из уравнений (56), (53), (50) и (5) очевидно, что каждая сферическая функция  $Y_n^{(k)}$  может быть представлена выражениями, содержащими лишь произведения только следующих тригонометрических функций:  $\sin \bar{\varphi}$ ,  $\sin \bar{\lambda}$ ,  $\cos \bar{\varphi}$ ,  $\cos \bar{\lambda}$ .

Общая структура этих выражений будет такова

$$A \sin^r \bar{\varphi} \cos^{p+q} \bar{\varphi} \sin^p \bar{\lambda} \cos^q \bar{\lambda}, \quad (60)$$

где  $A$  — коэффициент;  $p$ ,  $q$ ,  $r$  — целые положительные числа. Поэтому следует искать решение (59) в форме произведения

$$Y_n^{(k)}(t, \bar{\lambda}) = \Phi(t) \Psi(\bar{\lambda}), \quad (61)$$

где  $\Phi(t)$  — функция лишь аргумента  $t = \sin \bar{\varphi}$ ;  $\Psi(\bar{\lambda})$  — функция лишь аргумента  $\bar{\lambda}$ . Если переменные разделены именно так, то решение дифференциального уравнения (59) облегчается благодаря тому, что оно распадается на два.

Если найти производные

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Y_n^{(k)}(t, \bar{\lambda})}{\partial \bar{\varphi}} &= \Psi(\bar{\lambda}) \frac{\partial \Phi(t)}{\partial \bar{\varphi}} \\ \frac{\partial Y_n^{(k)}(t, \bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}} &= \Phi(\bar{\varphi}) \frac{\partial \Psi(\bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}} \\ \frac{\partial^2 Y_n^{(k)}(t, \bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}^2} &= \Phi(\bar{\varphi}) \frac{\partial^2 \Psi(\bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}^2} \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

и подставить их в (59), то получим

$$\begin{aligned} n(n+1) \Phi(t) \Psi(\bar{\lambda}) + \frac{1}{\cos \bar{\varphi}} \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} \left[ \cos \bar{\varphi} \Psi(\bar{\lambda}) \frac{\partial \Phi(t)}{\partial \bar{\varphi}} \right] + \\ + \frac{1}{\cos^2 \bar{\varphi}} \Phi(\bar{\varphi}) \frac{\partial^2 \Psi(\bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}^2} = 0, \end{aligned} \quad (63)$$

или

$$\begin{aligned} n(n+1) \Phi(t) \Psi(\bar{\lambda}) + \frac{1}{\cos \bar{\varphi}} \Psi(\bar{\lambda}) \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} \left[ \cos \bar{\varphi} \frac{\partial \Phi(t)}{\partial \bar{\varphi}} \right] + \\ + \frac{1}{\cos^2 \bar{\varphi}} \Phi(\bar{\varphi}) \frac{\partial^2 \Psi(\bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}^2} = 0. \end{aligned} \quad (64)$$

Но так как  $\Phi(t) \neq 0$  и  $\bar{\lambda} \neq 0$ , то можно осуществить преобразование

$$\begin{aligned} n(n+1) + \frac{1}{\Phi(t) \cos \bar{\varphi}} \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} \left[ \cos \bar{\varphi} \frac{\partial \Phi(t)}{\partial \bar{\varphi}} \right] + \\ + \frac{1}{\Psi(\bar{\lambda}) \cos^2 \bar{\varphi}} \frac{\partial^2 \Psi(\bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}^2} = 0 \end{aligned} \quad (65)$$

и далее

$$n(n+1) \cos^2 \bar{\varphi} + \frac{\cos \bar{\varphi}}{\Phi(t)} \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} \left[ \cos \bar{\varphi} \frac{\partial \Phi(t)}{\partial \bar{\varphi}} \right] + \frac{1}{\Psi(\bar{\lambda})} \frac{\partial^2 \Psi(\bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}^2} = 0. \quad (66)$$

В дифференциальном уравнении (66) есть часть

$$n(n+1)\cos^2\bar{\varphi} + \frac{\cos\bar{\varphi}}{\Phi(t)} \frac{\partial}{\partial\bar{\varphi}} \left[ \cos\bar{\varphi} \frac{\partial\Phi(t)}{\partial\bar{\varphi}} \right], \quad (67)$$

являющаяся функцией только  $\bar{\varphi}$ , и часть

$$\frac{1}{\Psi(\bar{\lambda})} \frac{\partial^2\Psi(\bar{\lambda})}{\partial\bar{\lambda}^2}, \quad (68)$$

являющаяся функцией только  $\bar{\lambda}$ . Это может быть тогда, и только тогда, когда обе эти части (67) и (68) постоянны.

Если обозначить постоянную  $k^2$  и положить

$$n(n+1)\cos^2\bar{\varphi} + \frac{\cos\bar{\varphi}}{\Phi(t)} \frac{\partial}{\partial\bar{\varphi}} \left[ \cos\bar{\varphi} \frac{\partial\Phi(t)}{\partial\bar{\varphi}} \right] = k^2, \quad (69)$$

то

$$\frac{1}{\Psi(\bar{\lambda})} \frac{\partial^2\Psi(\bar{\lambda})}{\partial\bar{\lambda}^2} = -k^2, \quad (70)$$

или

$$\frac{\partial^2\Psi(\bar{\lambda})}{\partial\bar{\lambda}^2} + k^2\Psi(\bar{\lambda}) = 0, \quad (71)$$

и для искоемых функций  $\Phi(t)$ ,  $\Psi(\bar{\lambda})$  имеем два обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка (69) и (71).

Второе из них (71) имеет постоянные коэффициенты, однородно и его характеристическое уравнение имеет вид

$$r^2 + k^2 = 0,$$

корни которого  $r_{12} = \pm ik$ . Его решением является поэтому функция

$$\Psi(\bar{\lambda}) = \frac{A_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda}}{B_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda}}, \quad (72)$$

где  $A_n^{(k)}$ ,  $B_n^{(k)}$  — произвольные постоянные.

Уравнение (69) является более сложным и его общий интеграл здесь находить точно не будем. Можно доказать, что его решение имеет физический смысл лишь в тех случаях, когда  $k$  — целые числа 0, 1, 2 . . .

Если обозначить  $P_n^{(c)}(t)$  его частный интеграл при  $k = 0$ , то это дифференциальное уравнение примет вид

$$n(n+1)\cos^2\bar{\varphi} + \frac{\cos\bar{\varphi}}{P_n^{(c)}(t)} \frac{\partial}{\partial\bar{\varphi}} \left[ \cos\bar{\varphi} \frac{\partial P_n^{(c)}(t)}{\partial\bar{\varphi}} \right] = 0, \quad (73)$$

или

$$n(n+1)P_n^{(c)}(t) + \frac{1}{\cos\bar{\varphi}} \frac{\partial}{\partial\bar{\varphi}} \left[ \cos\bar{\varphi} \frac{\partial P_n^{(c)}(t)}{\partial\bar{\varphi}} \right] = 0. \quad (74)$$

С учетом замены (51) имеют место равенства

$$\cos \bar{\varphi} d\bar{\varphi} = dt \quad (75)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}} = \cos \bar{\varphi} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (76)$$

Поэтому можем выражение (74) переписать в более удобном виде

$$n(n+1) P_n^{(c)}(t) + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \cos^2 \bar{\varphi} \frac{\partial P_n^{(c)}(t)}{\partial t} \right] = 0, \quad (77)$$

или

$$n(n+1) P_n^{(c)}(t) + \frac{d}{dt} \left[ (1-t^2) \frac{dP_n^{(c)}(t)}{dt} \right] = 0, \quad (78)$$

или

$$n(n+1) P_n^{(c)}(t) - 2t \frac{dP_n^{(c)}(t)}{dt} + (1-t^2) \frac{d^2 P_n^{(c)}(t)}{dt^2} = 0. \quad (79)$$

Общий интеграл уравнения (69) обозначим  $P_n^{(k)}(t)$  и перепишем это уравнение аналогично (74)

$$n(n+1) P_n^{(k)}(t) + \frac{d}{dt} \left[ (1-t^2) \frac{dP_n^{(k)}(t)}{dt} \right] - \frac{k^2}{1-t^2} P_n^{(k)}(t) = 0, \quad (80)$$

или

$$\left[ n(n+1) - \frac{k^2}{1-t^2} \right] P_n^{(k)}(t) + \frac{d}{dt} \left[ (1-t^2) \frac{dP_n^{(k)}(t)}{dt} \right] = 0, \quad (81)$$

или

$$\left[ n(n+1) - \frac{k^2}{1-t^2} \right] P_n^{(k)}(t) - 2t \frac{dP_n^{(k)}(t)}{dt} + (1-t^2) \frac{d^2 P_n^{(k)}(t)}{dt^2} = 0. \quad (82)$$

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка (79), или эквивалентное ему (78), или (77), называется уравнением Лежандра, а функция  $P_n^{(c)}$  — полиномом Лежандра степени  $n$  или функцией Лежандра, а  $P_n^{(k)}$  — присоединенной функцией Лежандра степени  $n$  и порядка  $k$ .

Теперь будем искать решение дифференциального уравнения Лежандра (78); для этого введем вспомогательную функцию

$$w = C (-\cos \bar{\varphi})^{2n} = C (t^2 - 1)^n, \quad (83)$$

где  $C$  — произвольная постоянная. Дифференцируя (83), получаем

$$\frac{dw}{dt} = 2Cnt (t^2 - 1)^{n-1} = \frac{2ntw}{t^2 - 1}, \quad (84)$$

или

$$(1-t^2) \frac{dw}{dt} + 2ntw = 0. \quad (85)$$

Укажем, что если продифференцировать (85)  $n + 1$  раз, то получится уравнение Лежандра (78). Поэтому лучше всего воспользоваться формулой Лейбница для  $n$ -й — производной произведения функций двух переменных  $u$  и  $v$

$$D^n(u, v) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} u^{(n-i)} v^{(i)}. \quad (86)$$

Применяя формулу (86) к (85), после  $(n + 1)$  кратного дифференцирования получаем

$$(1-t^2) \frac{d^{n+2}w}{dt^{n+2}} + (n+1) \frac{d^{n+1}w}{dt^{n+1}} (-2t) + \frac{(n+1)n}{2} \frac{d^n w}{dt^n} (-2) + \\ + 2n \left[ t \frac{d^{n+1}w}{dt^{n+1}} + (n+1) \frac{d^n w}{dt^n} \right] = 0 \quad (87)$$

и после преобразования

$$\frac{d^n w}{dt^n} [2n(n+1) - n(n+1)] + \frac{d^{n+1}w}{dt^{n+1}} [2nt - 2t(n+1)] + \\ + \frac{d^{n+2}w}{dt^{n+2}} (1-t^2) = 0, \quad (88)$$

т. е.

$$n(n+1) \frac{d^n w}{dt^n} - 2t \frac{d^{n+1}w}{dt^{n+1}} + (1-t^2) \frac{d^{n+2}w}{dt^{n+2}} = 0, \quad (89)$$

или

$$n(n+1) \frac{d^n w}{dt^n} + \frac{d}{dt} \left[ (1-t^2) \frac{d^{n+1}w}{dt^{n+1}} \right] = 0. \quad (90)$$

Отсюда видно, что дифференциальное уравнение (90) схоже по своей структуре с уравнением Лежандра (73). Если сравнить их, то для полинома Лежандра получится выражение

$$P_n^{(\sigma)}(t) = \frac{d^n w}{dt^n}, \quad (91)$$

а с учетом (83)

$$P_n^{(\sigma)}(t) = C \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n. \quad (92)$$

Произвольную постоянную  $C$ , с точки зрения дальнейшего применения, выгодно принять равной

$$C = \frac{1}{2^n n!}. \quad (93)$$

Так мы получим известную формулу Родрига для полинома Лежандра

$$P_n^{(\sigma)}(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n. \quad (94)$$

Общий интеграл дифференциального уравнения (82) выразим, используя подстановку

$$P_n^{(k)}(t) = (1-t^2)^{\frac{k}{2}} \zeta. \quad (95)$$

Необходимые производные будут равны

$$\frac{dP_n^{(k)}(t)}{dt} = (1-t^2)^{k/2} \frac{d\zeta}{dt} - kt\zeta (1-t^2)^{k/2-1}, \quad (96)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P_n^{(k)}(t)}{dt^2} &= (1-t^2)^{k/2} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - 2kt (1-t^2)^{\frac{k}{2}-1} \frac{d\zeta}{dt} - \\ &- \left[ k(1-t^2)^{\frac{k}{2}-1} - 2kt^2 \left( \frac{k}{2} - 1 \right) (1-t^2)^{\frac{k}{2}-2} \right] \zeta. \end{aligned} \quad (97)$$

При подстановке (96), (97) и (95) в (82) получим

$$\begin{aligned} \left[ n(n+1) - \frac{k^2}{1-t^2} \right] (1-t^2)^{k/2} \zeta - 2t \left[ (1-t^2)^{k/2} \frac{d\zeta}{dt} - kt\zeta (1-t^2)^{\frac{k}{2}-1} \right] + \\ + (1-t^2) \left\{ (1-t^2)^{k/2} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - 2kt (1-t^2)^{\frac{k}{2}-1} \frac{d\zeta}{dt} - \right. \\ \left. - \left[ k(1-t^2)^{\frac{k}{2}-1} - 2kt^2 \left( \frac{k}{2} - 1 \right) (1-t^2)^{\frac{k}{2}-2} \right] \zeta \right\} = 0, \end{aligned} \quad (98)$$

а после преобразований

$$\begin{aligned} (1-t^2)^{\frac{k}{2}+1} \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - \left[ 2t(1-t^2)^{k/2} + 2kt(1-t^2)^{k/2} \right] \frac{d\zeta}{dt} + \\ + \left\{ \left[ n(n+1) - \frac{k^2}{1-t^2} \right] (1-t^2)^{k/2} + 2kt(1-t^2)^{\frac{k}{2}-1} - \right. \\ \left. - k(1-t^2)^{k/2} + 2kt^2 \left( \frac{k}{2} - 1 \right) (1-t^2)^{\frac{k}{2}-1} \right\} \zeta = 0. \end{aligned} \quad (99)$$

После сокращения на  $(1-t^2)^{\frac{k}{2}} = \cos^k \bar{\varphi}$  (в предположении, что  $\bar{\varphi} \neq 90$ ), уравнение (99) примет вид

$$\begin{aligned} (1-t^2) \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - 2(k+1)t \frac{d\zeta}{dt} + \\ + \left[ n(n+1) - \frac{k^2}{1-t^2} + \frac{2kt^2}{1-t^2} - k + \frac{k^2 t^2}{1-t^2} - \frac{2kt^2}{1-t^2} \right] \zeta = 0, \end{aligned} \quad (100)$$

или

$$(1-t^2) \frac{d^2 \zeta}{dt^2} - 2(k+1)t \frac{d\zeta}{dt} + [n(n+1) - k(k+1)] \zeta = 0. \quad (101)$$

Теперь сравним дифференциальное уравнение (101) с (82) и убедимся, что при  $k=0$ ,  $\zeta = P_n^{(0)}(t)$ . Это приводит нас к уравнению, аналогичному уравнению (79).

Возвратимся к вспомогательной функции (83) и вычислим  $(k+1)$  производную уравнения (85), опять-таки по формуле Лейбница (86). Совершенно аналогично, как и для (87), получим (заменяв  $w$  на  $z$ , чтобы решения отличались)

$$(1-t^2) \frac{d^{k+2}z}{dt^{k+2}} + (k+1) \frac{d^{k+1}z}{dt^{k+1}} (-2t) + \frac{(k+1)k}{2} \frac{d^k z}{dt^k} (-2) + 2n \left[ t \frac{d^{k+1}z}{dt^{k+1}} + (k+1) \frac{d^k z}{dt^k} \right] = 0. \quad (102)$$

а после преобразований

$$(1-t^2) \frac{d^{k+2}z}{dt^{k+2}} + [2nt - 2t(k+1)] \frac{d^{k+1}z}{dt^{k+1}} + [2n(k+1) - k(k+1)] \frac{d^k z}{dt^k} = 0. \quad (103)$$

Убедимся, что равенство коэффициентов  $d\zeta/dt$  и  $d^{k+1}z/dt^{k+1}$ , а также  $\zeta$  и  $d^k z/dt^k$ , в уравнениях (103) и (101) наступит, если заменить число  $k$  в (103) суммой  $(n+k)$ . Поэтому положим для (92)

$$\zeta = C \frac{d^{n+k}(t^2-1)^n}{dt^{n+k}}. \quad (104)$$

Однако из уравнения (95) мы можем выразить

$$\zeta = \frac{P_n^{(k)}(t)}{(1-t^2)^{k/2}} \quad (105)$$

и затем для присоединенной функции Лежандра написать окончательное соотношение

$$P_n^{(k)}(t) = C (1-t^2)^{k/2} \frac{d^{n+k}}{dt^{n+k}} (t^2-1)^n. \quad (106)$$

Если положить постоянную  $C$  опять равной (93), то получим

$$P_n^{(k)}(t) = \frac{1}{2^n n!} (1-t^2)^{k/2} \frac{d^{n+k}}{dt^{n+k}} (t^2-1)^n, \quad (107)$$

а с учетом (94) еще и

$$P_n^{(k)}(t) = (1-t^2)^{k/2} \frac{d^k P_n^{(0)}(t)}{dt^k} = \cos^k \varphi \frac{d^k P_n^{(0)}(t)}{dt^{(k)}}. \quad (108)$$

Присоединенную функцию Лежандра  $P_n^{(k)}(t)$  можно, следовательно, вывести путем дифференцирования полиномов Лежандра  $P_n^{(0)}(t)$ .

Теперь возвратимся к сферической функции  $Y_n^{(k)}(t, \bar{\lambda})$ . С учетом выражений (61), (72) и обозначения

$$\Phi(t) = P_n^{(k)}(t) \quad (109)$$

интегралом дифференциального уравнения (69) будет общая сферическая функция (55), представляющая линейную комбинацию  $(2n + 1)$  элементарных функций вида

$$P_n^{(k)}(t) \frac{\cos k\bar{\lambda}}{\sin k\bar{\lambda}}. \quad (110)$$

Лучше всего ее выразить так \*

$$Y_n(t, \bar{\lambda}) = \sum_{k=0}^n [P_n^{(k)}(t) (A_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda} + B_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda})]. \quad (111)$$

Совершенно аналогично (53) общую шаровую функцию можно представить в виде

$$\begin{aligned} V_n(X, Y, Z) &= \rho^n \sum_{k=0}^n [P_n^{(k)}(t) (A_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda} + B_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda})] = \\ &= A_n^{(*)} \rho^n P_n^{(*)}(t) + \rho^n \sum_{k=1}^n [P_n^{(k)}(t) (A_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda} + B_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda})]. \end{aligned} \quad (112)$$

## § 5. ПОЛИНОМЫ ЛЕЖАНДРА И ПРИСОЕДИНЕННЫЕ ФУНКЦИИ ЛЕЖАНДРА

Полиномы Лежандра  $P_n^{(*)}(t)$  и присоединенные функции Лежандра  $P_n^{(k)}(t)$ , в совокупности называемые функциями Лежандра первого рода, являются интегралами дифференциального уравнения Лежандра (79) или дифференциального уравнения (82).

Выпишем конкретные выражения функций Лежандра для степеней  $n = 0, 1, 2, \dots, 8$  и всех соответствующих им порядков  $k^{**}$ .

$$\left. \begin{aligned} n=0: & P_0^{(*)}(t) = 1 \\ n=1: & P_1^{(*)}(t) = t \\ & P_1^{(1)}(t) = (1-t^2)^{1/2} \\ n=2: & P_2^{(*)}(t) = \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2} \\ & P_2^{(1)}(t) = 3t(1-t^2)^{1/2} \\ & P_2^{(2)}(t) = 3(1-t^2) \\ n=3: & P_3^{(*)}(t) = \frac{5}{2}t^3 - \frac{3}{2}t \\ & P_3^{(1)}(t) = (1-t^2)^{1/2} (\frac{15}{2}t^2 - \frac{3}{2}) \\ & P_3^{(2)}(t) = 15t(1-t^2) \\ & P_3^{(3)}(t) = 15(1-t^2)^{3/2} \end{aligned} \right\}$$

\* Здесь порядок  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  является отличным от порядка  $k = 1, 2, \dots, 2n + 1$  в формуле (55).

\*\* Функции Лежандра 1-го рода табулированы, например, в [1-4].

$$\begin{aligned}
n = 4: & P_4^{(0)}(t) = 35/8 t^4 - 15/4 t^2 + 3/8 \\
& P_4^{(1)}(t) = (1-t^2)^{1/2} (35/2 t^3 - 15/2 t) \\
& P_4^{(2)}(t) = (1-t^2) (105/2 t^2 - 15/2) \\
& P_4^{(3)}(t) = 105t (1-t^2)^{3/2} \\
& P_4^{(4)}(t) = 105 (1-t^2)^2 \\
n = 5: & P_5^{(0)}(t) = 1/8 (63t^5 - 70t^3 + 15t) \\
& P_5^{(1)}(t) = 15/8 (1-t^2)^{1/2} (21t^4 - 14t^2 + 1) \\
& P_5^{(2)}(t) = 15/2 (1-t^2) (21t^3 - 7t) \\
& P_5^{(3)}(t) = 105/2 (1-t^2)^{3/2} (9t^2 - 1) \\
& P_5^{(4)}(t) = 945t (1-t^2)^2 \\
& P_5^{(5)}(t) = 945 (1-t^2)^{5/2} \\
n = 6: & P_6^{(0)}(t) = 1/16 (231t^6 - 315t^4 + 105t^2 - 5) \\
& P_6^{(1)}(t) = 21/8 (1-t^2)^{1/2} (33t^5 - 30t^3 + 5t) \\
& P_6^{(2)}(t) = 15/8 (1-t^2) (231t^4 - 126t^2 + 7) \\
& P_6^{(3)}(t) = 315/2 (1-t^2)^{3/2} (11t^3 - 3t) \\
& P_6^{(4)}(t) = 945/2 (1-t^2)^2 (11t^2 - 1) \\
& P_6^{(5)}(t) = 10\,395t (1-t^2)^{5/2} \\
& P_6^{(6)}(t) = 10\,395 (1-t^2)^3 \\
n = 7: & P_7^{(0)}(t) = 1/16 (429t^7 - 693t^5 + 315t^3 - 35t) \\
& P_7^{(1)}(t) = 7/16 (1-t^2)^{1/2} (429t^6 - 495t^4 + 135t^2 - 5) \\
& P_7^{(2)}(t) = 63/8 (1-t^2) (143t^5 - 110t^3 + 15t) \\
& P_7^{(3)}(t) = 315/8 (1-t^2)^{3/2} (143t^4 - 66t^2 + 3) \\
& P_7^{(4)}(t) = 3465/2 (1-t^2)^2 (13t^3 - 3t) \\
& P_7^{(5)}(t) = 10\,395/2 (1-t^2)^{5/2} (13t^2 - 1) \\
& P_7^{(6)}(t) = 135\,135t (1-t^2)^3 \\
& P_7^{(7)}(t) = 135\,135 (1-t^2)^{7/2} \\
n = 8: & P_8^{(0)}(t) = 1/128 (6435t^8 - 12\,012t^6 + 6930t^4 - 1260t^2 + 35) \\
& P_8^{(1)}(t) = 9/16 (1-t^2)^{1/2} (715t^7 - 1001t^5 + 385t^3 - 35t) \\
& P_8^{(2)}(t) = 315/16 (1-t^2) (143t^6 - 143t^4 + 33t^2 - 1) \\
& P_8^{(3)}(t) = 3465/8 (1-t^2)^{3/2} (39t^5 - 26t^3 + 3t) \\
& P_8^{(4)}(t) = 10\,395/8 (1-t^2)^2 (65t^4 - 26t^2 + 1) \\
& P_8^{(5)}(t) = 135\,135/2 (1-t^2)^{5/2} (5t^3 - t) \\
& P_8^{(6)}(t) = 135\,135/2 (1-t^2)^3 (15t^2 - 1) \\
& P_8^{(7)}(t) = 2\,027\,025t (1-t^2)^{7/2} \\
& P_8^{(8)}(t) = 2\,027\,025 (1-t^2)^4
\end{aligned}
\tag{113}$$

Кроме формулы Родрига, полиномы Лежандра можно определить при помощи ряда Тейлора, используя производящую функцию

$$H(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha t + \alpha^2}}, \quad (114)$$

где  $0 < |\alpha| < 1$  — параметр. Разложение (114) по степеням  $(-2\alpha t + \alpha^2)$  имеет вид

$$\begin{aligned} H(\alpha, t) &= 1 - \frac{1}{2}(-2\alpha t + \alpha^2) + \frac{3}{8}(-2\alpha t + \alpha^2)^2 - \\ &- \frac{5}{16}(-2\alpha t + \alpha^2)^3 + \dots = 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \alpha (2t - \alpha) + \\ &+ \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} \alpha^2 (2t - \alpha)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \alpha^3 (2t - \alpha)^3 + \dots + \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots 2n-1}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \alpha^n (2t - \alpha)^n, \end{aligned} \quad (115)$$

и после преобразований

$$H(\alpha, t) = 1 + \alpha t + \alpha^2 \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} t^2 \right) + \alpha^3 \left( -\frac{3}{2} t + \frac{5}{2} t^3 \right) + \dots \quad (116)$$

С учетом конкретных формул (113) для  $P_0^{(\alpha)}(t)$ ,  $P_1^{(\alpha)}(t)$ ,  $P_2^{(\alpha)}(t)$ ,  $P_3^{(\alpha)}(t)$ , можно (116) переписать следующим образом

$$H(\alpha, t) = P_0^{(\alpha)}(t) + \alpha P_1^{(\alpha)}(t) + \alpha^2 P_2^{(\alpha)}(t) + \alpha^3 P_3^{(\alpha)}(t) + \dots \quad (117)$$

Без доказательства примем, что для всего ряда (116) справедливо равенство

$$H(\alpha, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n^{(\alpha)}(t), \quad (118)$$

а с учетом (115)

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha)}(t) &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n!} \left[ t^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} t^{n-2} + \right. \\ &\left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2^2 \cdot 1 \cdot 2(2n-1)(2n-3)} t^{n-4} - \dots \right]. \end{aligned}$$

Покажем, что ряд (118) сходится, если  $t < 1$ . Положим  $t = \cos \theta$  и по формуле Эйлера напишем

$$\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}).$$

Тогда выражение (114) примет вид

$$H(\alpha, t) = [1 - \alpha(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + \alpha^2]^{-\frac{1}{2}} = [(1 - \alpha e^{i\theta})(1 - \alpha e^{-i\theta})]^{-\frac{1}{2}},$$

а так как

$$(1 - \alpha e^{\pm i\theta})^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \alpha e^{\pm i\theta} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} \alpha^2 e^{\pm 2i\theta} + \dots + \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \dots n} \alpha^n e^{\pm ni\theta} + \dots,$$

то далее будет иметь место равенство [5]

$$P_n^{(\circ)}(t) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} (e^{ni\theta} + e^{-ni\theta}) + \dots + \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-2p-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1)}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \dots (n-p) \cdot 1 \cdot 2 \dots p} (e^{(n-2p)i\theta} + e^{-(n-2p)i\theta}) + \\ + \dots = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \dots n} \cos \theta + \dots + \\ + \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-2p-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1)}{2^{n-1} \cdot 1 \cdot 2 \dots (n-p) \cdot 1 \cdot 2 \dots p} \cos [(n-2p)\theta] + \dots$$

Отсюда вытекает, что при  $\theta = 0$  полиномы  $P_n^{(\circ)}(t) > 0$  и их величины максимальны. Для доказательства сходимости ряда (118), следовательно, достаточно доказать его сходимость при  $\theta = 0$ , т. е. для  $t = 1$ . Учтя (114), имеем

$$H(\alpha, t) = \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha+\alpha^2}} = \frac{1}{1-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n.$$

Поскольку, как показано выше,  $0 < |\alpha| < 1$ , то сходимость этого ряда очевидна.

Кроме выражения (118), в которое входят все полиномы Лежандра, можно из (114) вывести соотношение только между некоторыми из них

$$G(\alpha, t) = \alpha \frac{\partial H(\alpha, t)}{\partial t} - (t - \alpha) \frac{\partial H(\alpha, t)}{\partial t} = 0, \quad (119)$$

в чем легко убедиться. По (118) очевидно, что

$$\frac{\partial H(\alpha, t)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \frac{\partial P_n^{(\circ)}(t)}{\partial t}, \quad (120)$$

$$\frac{\partial H(\alpha, t)}{\partial \alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} n \alpha^{n-1} P_n^{(\circ)}(t). \quad (121)$$

После подстановки (120) и (121) в (119) будем иметь

$$G(\alpha, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n \left[ n P_n^{(\circ)}(t) - t \frac{\partial P_n^{(\circ)}(t)}{\partial t} + \frac{P_{n-1}^{(\circ)}(t)}{\partial t} \right] = 0, \quad (122)$$

а отсюда получим условие

$$nP_n^{(\circ)}(t) - t \frac{\partial P_n^{(\circ)}(t)}{\partial t} + \frac{\partial P_{n-1}^{(\circ)}(t)}{\partial t} = 0. \quad (123)$$

Наиболее выгодна, однако, с точки зрения определения  $P_n^{(\circ)}(t)$ , рекуррентная формула. Она получается аналогично из соотношения, вытекающего из (114),

$$F(\alpha, t) = \frac{1}{H^2(\alpha, t)} \frac{\partial H(\alpha, t)}{\partial \alpha} - (t - \alpha) H(\alpha, t) = 0. \quad (124)$$

Если подставить в (124) ряды (121) и (118), получим после преобразований

$$F(\alpha, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n [(n+1) P_{n+1}^{(\circ)}(t) - (2n+1)t P_n^{(\circ)}(t) + n P_{n-1}^{(\circ)}(t)] = 0, \quad (125)$$

отсюда справедливо равенство

$$(n+1) P_{n+1}^{(\circ)}(t) - (2n+1)t P_n^{(\circ)}(t) + n P_{n-1}^{(\circ)}(t) = 0, \quad (126)$$

или

$$P_{n+1}^{(\circ)}(t) = \frac{2n+1}{n+1} t P_n^{(\circ)}(t) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}^{(\circ)}(t). \quad (127)$$

Существует целый ряд дальнейших интересных соотношений между полиномами Лежандра или между их коэффициентами. Это, однако, выходит за границы данного краткого обзора (см. например, [6]).

## § 6. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Элементарные сферические функции (110) будем считать заданными на вспомогательной единичной сфере, так как аргументами их являются сферические координаты  $\varphi, \lambda$ .

При  $k=0$  имеем функцию  $P_n^{(\circ)}(t)$ , аргументом которой является только  $\varphi$ , т. е. полином Лежандра. Это полином степени  $n$  относительно аргумента  $t = \sin \varphi$ . Он имеет  $n$  действительных корней в интервале  $-1 \leq t \leq +1$  (следовательно,  $-\pi/2 \leq \varphi \leq +\pi/2$ ), изменяя внутри этого интервала знак  $n$  раз.

На сфере можем обозначить сферические параллели  $\overline{\varphi}_i = \text{const}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ; для них, т. е. для величин  $\overline{\varphi}_i$ , имеет место  $P_n^{(\circ)}(t_i) = P_n^{(\circ)}(\sin \overline{\varphi}_i) = 0$ . Этими параллелями поверхность сферы делится на  $n+1$  зон, как наглядно изображено на рис. 6—7; сферические функции нулевого порядка  $P_n^{(\circ)}(t) = P_n^{(\circ)}(\sin \varphi)$  поэтому называются зональными (поясными) сферическими функциями.

При  $k = n$  имеем для (110) две функции  $P_n^{(n)}(t) = \cos n\bar{\lambda}$  и  $P_n^{(n)}(t) = \sin n\bar{\lambda}$ ; для них, согласно (107), справедливы равенства

$$P_n^{(n)}(t) \cos n\bar{\lambda} = \cos^n \bar{\varphi} \frac{d^n P_n^{(0)}(t)}{dt^n} \cos n\bar{\lambda} = \cos^n \bar{\varphi} \frac{d^n}{dt^n} \times$$

$$\times \left[ \frac{1}{2^{2n}!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \right] \cos n\bar{\lambda} = \frac{1}{2^{2n}!} \cos^n \bar{\varphi} \left[ \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} (t^2 - 1)^n \right] \cos n\bar{\lambda}, \quad (128)$$

$$P_n^{(n)}(t) \sin n\bar{\lambda} = \cos^n \bar{\varphi} \frac{d^n P_n^{(0)}(t)}{dt^n} \sin n\bar{\lambda} =$$

$$= \frac{1}{2^{2n}!} \cos^n \bar{\varphi} \left[ \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} (t^2 - 1)^n \right] \sin n\bar{\lambda}. \quad (129)$$

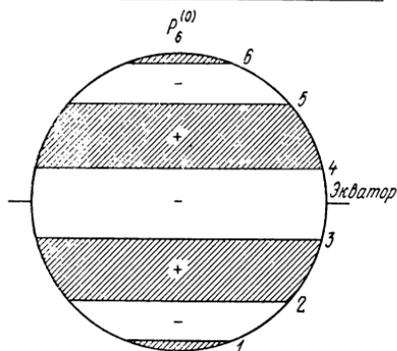
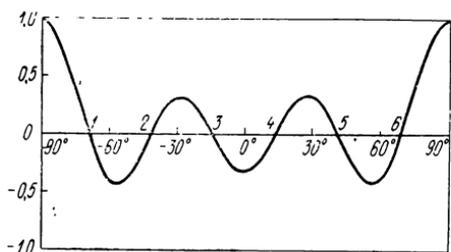


Рис. 6. Изменение зональной сферической функции 6-й степени

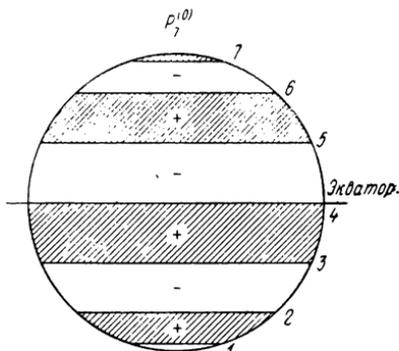
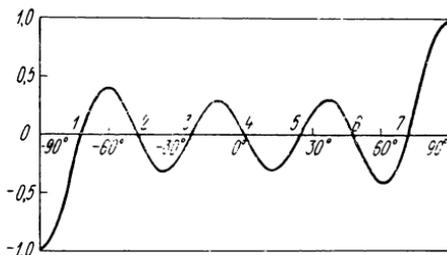


Рис. 7. Изменение зональной сферической функции 7-й степени

Убедимся, что  $(t^2 - 1)^n$  есть функция  $2n$ -й степени и что после ее  $2n$ -кратного дифференцирования получим постоянную.

Обозначим ее  $\bar{C}$ , а (128), (129) перепишем так

$$P_n^{(n)}(t) \cos n\bar{\lambda} = K \cos^n \bar{\varphi} \cos n\bar{\lambda}, \quad (130)$$

$$P_n^{(n)}(t) \sin n\bar{\lambda} = K \cos^n \bar{\varphi} \sin n\bar{\lambda}, \quad (131)$$

причем

$$K = \frac{\bar{C}}{2^{2n}!}.$$

Из (130) вытекает равенство

$$P_n^{(n)}(t) \cos n\bar{\lambda} = 0, \text{ если } \cos^n \bar{\varphi} = 0 \text{ или } \cos n\bar{\lambda} = 0, \\ \text{т. е. если } \bar{\varphi} = \pm \pi/2, \text{ или } n\bar{\lambda} = \pi/2, \pi/2 + \pi, \pi/2 + 2\pi, \\ \pi/2 + 3\pi, \dots, \pi/2 + (2n-1)\pi.$$

Это значит, что функция (128) принимает нулевые значения на  $2n$  сферических меридианах, взаимно удаленных на угловое расстояние  $\pi/n$ ,

$$\bar{\lambda} = \frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{2n} + 2\frac{\pi}{n}, \dots, \frac{\pi}{2n} + (2n-1)\frac{\pi}{n}. \quad (132)$$

Совершенно аналогично выводится для функции (129)  $P_n^{(n)}(t) \sin n\bar{\lambda} = 0$ , если  $\cos^n \bar{\varphi} = 0$  или  $\sin n\bar{\lambda} = 0$ , т. е. если  $\bar{\varphi} = \pm \pi/2$  или  $n\bar{\lambda} = 0, \pi, 2\pi, \dots, (2n-1)\pi$  и эта функция, следовательно, принимает нулевые значения в  $2n$  меридианах

$$\bar{\lambda} = 0, \frac{\pi}{n}, 2\frac{\pi}{n}, \dots, 2n-1\frac{\pi}{n}. \quad (132')$$

На сфере мы можем, следовательно, всегда наметить  $2n$  меридианов, в точках которых функции (128) и (129) равны нулю. Таким образом образуются меридианные пояса или секторы (рис. 8).

Сферические функции (128) и (129) называются поэтому с е к т о р и а л ь н ы м и сферическими функциями; для каждого  $n$  всегда существуют 2 такие функции. Внутри сектора эти функции отличаются от нуля; сектор от сектора отличается знаками.

При  $k = 1, 2, \dots, n-1$  имеем для (110) и (108)  $(n-1)$  функцию

$$P_n^{(k)}(t) \cos k\bar{\lambda} = \cos^k \bar{\varphi} \frac{d^k P_n^{(0)}(t)}{dt^k} \cos k\bar{\lambda}, \quad (133)$$

и  $(n-1)$  функцию

$$P_n^{(k)}(t) \sin k\bar{\lambda} = \cos \bar{\varphi} \frac{d^k P_n^{(0)}(t)}{dt^k} \sin k\bar{\lambda}. \quad (134)$$

Функция (133) равна нулю, если  $\bar{\varphi} = \pm \pi/2$ , или  $[d^k P_n^{(0)}(t)]/dt^k = 0$ , или  $k\bar{\lambda} = \pi/2, \pi/2 + \pi, \dots, \pi/2 + (2k-1)\pi$ .

Поскольку, с учетом выражения (107), имеет место равенство

$$\frac{d^k P_n^{(0)}(t)}{dt^k} = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^{n+k}}{dt^{n+k}} (t^2 - 1)^n, \quad (135)$$

то функция степени

$$2n - (n+k) \quad (136)$$

имеет  $(n-k)$  корней и, следовательно, существует  $(n-k)$  значений  $\bar{\varphi}$  или параллелей на рассматриваемой сфере, для которых функция (135) равна нулю.

Функция (133) поэтому равна нулю в точках  $2k$  меридианов с долготой

$$\bar{\lambda} = \frac{\pi}{2k}, \frac{\pi}{2k} + \frac{\pi}{k}, \dots, \frac{\pi}{2k} + (2k-1) \frac{\pi}{k} \quad (137)$$

и в точках  $(n - k)$  некоторых параллелей, для которых функция (135) равна нулю.

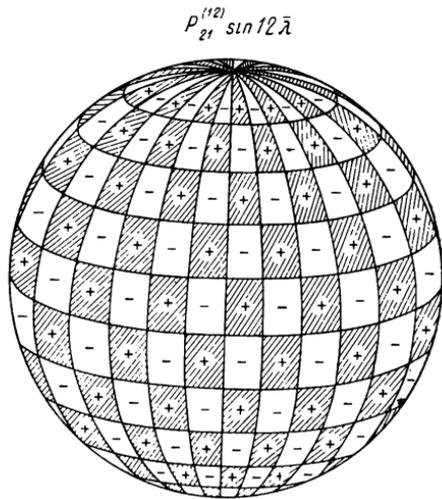
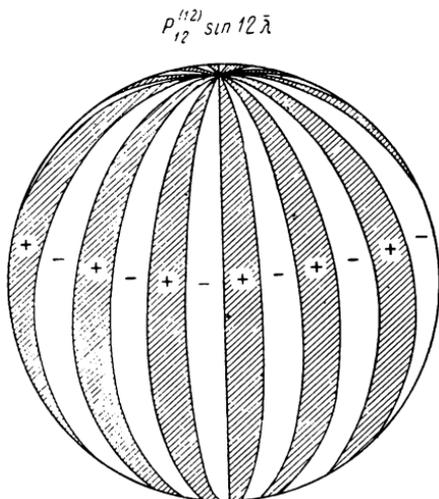


Рис. 8. Знаки секториальной сферической функции 12-й степени

Рис. 9. Знаки тессеральной сферической функции 21-й степени 12-го порядка

Совершенно аналогичное рассуждение проведем и для функции (134), для которой долготы меридианов с нулевыми значениями, числом, опять-таки  $2k$ , задаются условием

$$k\bar{\lambda} = 0, \pi, 2\pi, \dots, (2k-1)\pi, \quad (138)$$

следовательно,

$$\bar{\lambda} = 0, \frac{\pi}{k}, 2 \frac{\pi}{k}, \dots, (2k-1) \frac{\pi}{k}. \quad (139)$$

В обоих случаях можно, следовательно, образовать на сфере  $2(n - k + 1)$  трапеций, в точках сторон которых (дуг соответствующих меридианов и параллелей) существуют нулевые функции (133) или (134), как показано на рис. 9, для  $n = 21$  и  $k = 12$ ; знаки опять-таки чередуются.

Эти функции носят название тессеральных сферических функций. Для каждого  $n$  их имеется всего  $(2n - 2)$ .

По описанной геометрической классификации получается система  $(2n + 1)$  элементарных функций (110).

## § 7. ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К шаровым функциям  $V_n(X, Y, Z)$ , т. е. к сферическим полиномам степени  $n$  (53), применим теперь вторую теорему Грина (31), в которой положим  $V = V_n(X, Y, Z)$ ,  $U = V_m(X, Y, Z)$ ,

$$\begin{aligned} & \iiint_{\tau} [V_m(X, Y, Z) \Delta V_n(X, Y, Z) - V_n(X, Y, Z) \Delta V_m(X, Y, Z)] d\tau = \\ & = \iint_{\sigma} \left[ V_m(X, Y, Z) \frac{\partial V_n(X, Y, Z)}{\partial n} - V_n(X, Y, Z) \frac{\partial V_m(X, Y, Z)}{\partial n} \right] d\sigma. \end{aligned} \quad (140)$$

Но, по определению, сферические полиномы гармонические, следовательно,

$$\Delta V_n(X, Y, Z) = 0, \quad \Delta V_m(X, Y, Z) = 0, \quad (141)$$

а поэтому (141) можно переписать в форме

$$\iint_{\sigma} \left[ V_m(X, Y, Z) \frac{\partial V_n(X, Y, Z)}{\partial n} - V_n(X, Y, Z) \frac{\partial V_m(X, Y, Z)}{\partial n} \right] d\sigma = 0. \quad (142)$$

Здесь  $\tau$  — объем,  $\sigma$  — поверхность сферы относимости,  $n$  — внешняя нормаль к ней.

С учетом (53) будет иметь место

$$V_n(X, Y, Z) = \rho^n Y_n(t, \bar{\lambda}), \quad V_m(X, Y, Z) = \rho^m Y_m(t, \bar{\lambda}) \quad (143)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V_n(X, Y, Z)}{\partial n} &= \frac{\partial V_n(X, Y, Z)}{\partial \rho} = n \rho^{n-1} Y_n(t, \bar{\lambda}) \\ \frac{\partial V_m(X, Y, Z)}{\partial n} &= \frac{\partial V_m(X, Y, Z)}{\partial \rho} = m \rho^{m-1} Y_m(t, \bar{\lambda}) \end{aligned} \right\}. \quad (144)$$

Подставив (143) и (144) в (142), получим

$$\iint_{\sigma} [\rho^m Y_m(t, \bar{\lambda}) n \rho^{n-1} Y_n(t, \bar{\lambda}) - \rho^n Y_n(t, \bar{\lambda}) m \rho^{m-1} Y_m(t, \bar{\lambda})] d\sigma = 0, \quad (145)$$

или

$$\iint_{\sigma} \rho^{n+m-1} [n Y_m(t, \bar{\lambda}) Y_n(t, \bar{\lambda}) - m Y_n(t, \bar{\lambda}) Y_m(t, \bar{\lambda})] d\sigma = 0, \quad (146)$$

т. е.

$$(n - m) \rho^{n+m-1} \iint_{\sigma} Y_n(t, \bar{\lambda}) Y_m(t, \bar{\lambda}) d\sigma = 0.$$

Радиус  $\rho$  рассматриваемого шара является постоянным (например, единичным) и поэтому при  $n \neq m$  должно иметь место равенство

$$\iint_{\sigma} Y_n(t, \bar{\lambda}) Y_m(t, \bar{\lambda}) d\sigma = 0, \quad (147)$$

или после подстановки выражения  $Y_n(i\bar{\lambda})$  через общие сферические функции степеней  $n$ , разложенные согласно (111),

$$\int_{\sigma} \left\{ \sum_{k=0}^n [P_n^{(k)}(t)(A_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda} + B_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda})] \right\} \times \\ \times \left\{ \sum_{j=0}^m [P_m^{(j)}(t)(A_m^{(j)} \cos j\bar{\lambda} + B_m^{(j)} \sin j\bar{\lambda})] \right\} d\sigma = 0, \quad m \neq n. \quad (148)$$

Из (148) вытекают и дальнейшие соотношения. Так, при  $m = 0$   $P_m^{(0)}(t) = 1$  и поэтому

$$\int_{\sigma} \int Y_n(t, \bar{\lambda}) d\sigma = \int_{\sigma} \int \left\{ A_n^{(0)} P_n^{(0)}(t) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^n [P_n^{(k)}(t)(A_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda} + B_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda})] \right\} d\sigma = 0, \quad n \neq 0. \quad (149)$$

При  $j = 0, k = 0$  имеем

$$\int_{\sigma} \int P_n^{(0)}(t) P_m^{(0)}(t) d\sigma = 0, \quad m \neq n \quad (150)$$

или после постановки в (150)

$$d\sigma = \cos \bar{\varphi} d\bar{\varphi} d\bar{\lambda} \quad (151)$$

получим

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} P_n^{(0)}(t) P_m^{(0)}(t) \cos \bar{\varphi} d\bar{\lambda} d\bar{\varphi} = 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} P_n^{(0)}(t) P_m^{(0)}(t) \cos \bar{\varphi} d\bar{\varphi} = 0, \quad m \neq n, \quad (152)$$

а так как  $t = \sin \bar{\varphi}$  и  $\cos \bar{\varphi} d\bar{\varphi} = dt$ , то

$$\int_{-1}^{+1} P_n^{(0)}(t) P_m^{(0)}(t) dt = 0, \quad m \neq n. \quad (153)$$

Если  $m = 0$ , то из (153) получим

$$\int_{-1}^{+1} P_n^{(0)}(t) dt = 0, \quad n \neq 0. \quad (154)$$

При  $j \neq k$  в (148) появляются интегралы

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos j\bar{\lambda} \cos k\bar{\lambda} d\bar{\lambda} &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin j\bar{\lambda} \cos k\bar{\lambda} d\bar{\lambda} &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin j\bar{\lambda} \sin k\bar{\lambda} d\bar{\lambda} &= 0 \\ \int_0^{2\pi} \sin j\bar{\lambda} d\bar{\lambda} &= 0, \quad \int_0^{2\pi} \cos k\bar{\lambda} d\bar{\lambda} = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (155)$$

все обращающиеся в нуль, независимо от  $n, m$ , поэтому должно иметь место равенство

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma} P_n^{(k)}(t) (A_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda} + B_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda}) P_m^{(j)}(t) \times \\ & \times (A_m^{(j)} \cos j\bar{\lambda} + B_m^{(j)} \sin j\bar{\lambda}) d\sigma = 0, \quad j \neq k. \end{aligned} \quad (156)$$

Если  $m = 0$ , то из (156) получим

$$\iint_{\sigma} P_n^{(k)}(t) (A_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda} + B_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda}) d\sigma = 0. \quad (157)$$

При  $j = k$  в (148) появляются интегралы

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 k\bar{\lambda} d\lambda = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 k\bar{\lambda} d\bar{\lambda} = \pi, \quad (k \neq 0), \quad (158)$$

которые, следовательно, не равны нулю, и поэтому при  $m \neq n$  далее должно иметь место

$$\iint_{\sigma} P_n^{(k)}(t) P_m^{(k)}(t) d\sigma = 0, \quad m \neq n, \quad (159)$$

т. е.

$$\begin{aligned} & + \frac{\pi}{2} \\ & \int P_n^{(k)}(t) P_m^{(k)}(t) \cos \bar{\varphi} d\bar{\varphi} = 0, \quad m \neq n. \\ & - \frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (160)$$

Однако обычно

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} P_n^{(k)}(t) P_m^{(j)}(t) \cos \bar{\varphi} d\bar{\varphi} \neq 0, \quad j \neq k, \quad n \neq 0 \text{ или } m \neq 0,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} P_n^{(k)}(t) P_n^{(j)}(t) \cos \bar{\varphi} d\bar{\varphi} \neq 0,$$

конечно

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} P_n^{(k)}(t) P_n^{(j)}(t) \frac{d\bar{\varphi}}{\cos \bar{\varphi}} = 0, \quad j \neq k.$$

Соотношения (147)—(153), (156), (157), (159), (160) являются следствием ортогональности сферических функций.

## § 8. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ $V$ В РЯД СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Допустим, что имеем функцию  $f(\bar{\varphi}, \bar{\lambda})$ , зависящую от координат  $(\bar{\varphi}, \bar{\lambda})$ , однозначную, конечную, непрерывную и интегрируемую в области  $-\pi/2 \leq \bar{\varphi} \leq +\pi/2$ ;  $0 \leq \bar{\lambda} \leq 2\pi$ , т. е. во всех точках референцной сферы.

Будем искать разложение в бесконечный ряд

$$f(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) = Y_0(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) + Y_1(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) + \dots + Y_n(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}), \quad (161)$$

члены которого суть общие сферические функции (111), т. е.

$$Y_n(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) = \sum_{k=0}^n P_n^{(k)}(t) (A_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda} + B_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda}), \quad (162)$$

и который равномерно сходится во всей области поверхности сферы.

Ищем поэтому  $(2n+1)$  коэффициентов каждого члена ряда (161), который, с учетом (162), перепишем в виде

$$f(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n P_n^{(k)}(t) (A_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda} + B_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda}). \quad (163)$$

Опустим доказательство однозначности и существования разложения (163).

При выводе используем ортогональность сферических функций. Умножим обе части равенства (163) на элементарные сферические функции (110), т. е. на

$$P_n^{(h)}(t) \frac{\cos k\bar{\lambda}}{\sin k\bar{\lambda}} \quad (164)$$

и получим

$$f(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) P_n^{(h)}(t) \frac{\cos k\bar{\lambda}}{\sin k\bar{\lambda}} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n [P_n^{(h)}(t) (A_n^{(h)} \cos k\bar{\lambda} + B_n^{(h)} \sin k\bar{\lambda})] \right\} \times \\ \times P_n^{(h)}(t) \frac{\cos k\bar{\lambda}}{\sin k\bar{\lambda}}. \quad (165)$$

Далее проинтегрируем (165) по поверхности сферы, принимая во внимание условие ортогональности сферических функций.

$$\iint_{\sigma} f(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) P_n^{(h)} \frac{\cos k\bar{\lambda}}{\sin k\bar{\lambda}} d\sigma = \iint_{\sigma} [P_n^{(h)}(t)]^2 \times \\ \times \left( A_n^{(h)} \cos k\bar{\lambda} \frac{\cos k\bar{\lambda}}{\sin k\bar{\lambda}} + B_n^{(h)} \sin k\bar{\lambda} \frac{\cos k\bar{\lambda}}{\sin k\bar{\lambda}} \right) d\sigma, \quad (166)$$

или

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) P_n^{(h)}(t) \frac{\cos k\bar{\lambda}}{\sin k\bar{\lambda}} \cos \bar{\varphi} d\bar{\lambda} d\bar{\varphi} = \\ = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} [P_n^{(h)}(t)]^2 \left[ A_n^{(h)} \frac{\cos^2 k\bar{\lambda}}{\cos k\bar{\lambda} \sin k\bar{\lambda}} + B_n^{(h)} \frac{\sin k\bar{\lambda} \cos k\bar{\lambda}}{\sin^2 k\bar{\lambda}} \right] \cos \bar{\varphi} d\bar{\lambda} d\bar{\varphi}. \quad (167)$$

Так как

$$\int_0^{2\pi} \sin k\bar{\lambda} \cos k\bar{\lambda} d\bar{\lambda} = 0, \quad (168)$$

то из (167) получим

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) P_n^{(h)}(t) \frac{\cos k\bar{\lambda}}{\sin k\bar{\lambda}} \cos \bar{\varphi} d\bar{\lambda} d\bar{\varphi} = \\ = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} [P_n^{(h)}(t)]^2 \frac{A_n^{(h)}}{B_n^{(h)}} \frac{\cos^2 k\bar{\lambda}}{\sin^2 k\bar{\lambda}} \cos \bar{\varphi} d\bar{\lambda} d\bar{\varphi}. \quad (169)$$

Из уравнения (169) можем уже однозначно выразить искомые коэффициенты

$$A_n^{(k)} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) P_n^{(k)}(t) \cos k\bar{\lambda} \cos \bar{\varphi} d\bar{\lambda} d\bar{\varphi}}{\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} [P_n^{(k)}(t)]^2 \cos^2 k\bar{\lambda} \cos \bar{\varphi} d\bar{\lambda} d\bar{\varphi}}, \quad (170)$$

$$B_n^{(k)} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) P_n^{(k)}(t) \sin k\bar{\lambda} \cos \bar{\varphi} d\bar{\lambda} d\bar{\varphi}}{\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} [P_n^{(k)}(t)]^2 \sin^2 k\bar{\lambda} \cos \bar{\varphi} d\bar{\lambda} d\bar{\varphi}}. \quad (171)$$

Знаменатели в правых частях (170) и (171) можно преобразовать с учетом соотношений

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 k\bar{\lambda} d\bar{\lambda} = \begin{cases} \pi, & \text{если } k \neq 0 \\ 2\pi, & \text{если } k = 0 \end{cases} \quad (172)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 k\bar{\lambda} d\bar{\lambda} = \begin{cases} \pi, & \text{если } k \neq 0 \\ 0, & \text{если } k = 0 \end{cases} \quad (173)$$

и по (107)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} [P_n^{(k)}(t)]^2 \cos \bar{\varphi} d\bar{\varphi} = \int_{-1}^{+1} \left[ \frac{1}{2^{2n} n!} (1-t^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^{n+k}}{dt^{n+k}} (t^2-1)^n \right]^2 dt. \quad (174)$$

Интегрирование (174) начнем сначала для  $k = 0$ , тогда

$$\int_{-1}^{+1} [P_n^{(0)}(t)]^2 dt = \frac{1}{2^{2n} n!} \int_{-1}^{+1} \frac{d^n}{dt^n} (t^2-1)^n \frac{d^n}{dt^n} (t^2-1)^n dt \quad (175)$$

и после  $n$ -кратного интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} [P_n^{(0)}(t)]^2 dt &= \frac{(-1)^n}{2^{2n} n!} \int_{-1}^{+1} (t^2-1)^n \frac{d^{2n} (t^2-1)}{dt^{2n}} dt = \\ &= \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} n!} \int_{-1}^{+1} (t^2-1)^n dt = \frac{2}{2n+1}, \end{aligned} \quad (176)$$

так как

$$(-1)^n \int_{-1}^{+1} (t^2 - 1)^n dt = \int_{-1}^{+1} (1 - t^2)^n dt = \frac{2^{n+1} n!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}.$$

При  $k \neq 0$  мы получили бы несколько более длинным путем [6]

$$\int_{-1}^{+1} [P_n^{(k)}(t)]^2 dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} [P_n^{(k)}(\sin \bar{\varphi})]^2 \cos \bar{\varphi} d\bar{\varphi} = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{(n+k)!}{(n-k)!}. \quad (177)$$

С учетом выражений (172), (173), (176) и (177) получим для определяемых коэффициентов (170), (171) выражения

$$A_n^{(k)} = \frac{(2n+1)}{2\pi} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) P_n^{(k)}(t) \cos k\bar{\lambda} \cos \bar{\varphi} d\bar{\lambda} d\bar{\varphi},$$

$$k = 1, 2, \dots, n \quad (178)$$

и

$$B_n^{(k)} = \frac{(2n+1)}{2\pi} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) P_n^{(k)}(t) \sin k\bar{\lambda} \cos \bar{\varphi} d\bar{\lambda} d\bar{\varphi},$$

$$k = 1, 2, \dots, n. \quad (179)$$

При  $k = 0$  будем иметь

$$A_n^{(0)} = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \bar{f}(\varphi, \bar{\lambda}) P_n^{(0)}(t) \cos \bar{\varphi} d\bar{\lambda} d\bar{\varphi}, \quad (180)$$

$$B_n^{(0)} = 0. \quad (181)$$

Разложение (163), следовательно, представится так

$$\begin{aligned}
 f(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) = & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{2n+1}{4\pi} P_n^{(*)}(t) \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) P_n^{(*)}(t) \cos \bar{\varphi} d\bar{\lambda} d\bar{\varphi} + \right. \\
 & + \sum_{k=1}^n \left[ \frac{(2n+1)(n-k)!}{2\pi(n+k)!} P_n^{(k)}(t) \cos k\bar{\lambda} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) P_n^{(k)}(t) \cos k\bar{\lambda} \times \right. \\
 & \quad \times \cos \bar{\varphi} d\bar{\lambda} d\bar{\varphi} + \frac{(2n+1)(n-k)!}{2\pi(n+k)!} P_n^{(k)}(t) \times \\
 & \quad \left. \left. \times \sin k\bar{\lambda} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) P_n^{(k)}(t) \sin k\bar{\lambda} \cos \bar{\varphi} d\bar{\lambda} d\bar{\varphi} \right] \right\}. \quad (182)
 \end{aligned}$$

Если обозначить  $\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0$  аргументы функции  $f(\bar{\varphi}, \bar{\lambda})$ , для которой выполняем разложение (182), и положить  $t_0 = \sin \bar{\varphi}_0$ , то можно выражение (182) преобразовать следующим образом

$$\begin{aligned}
 f(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) = & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{2n+1}{4\pi} P_n^{(*)}(t_0) \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) P_n^{(*)}(t) \cos \bar{\varphi} d\bar{\lambda} d\bar{\varphi} + \right. \\
 & + \sum_{k=1}^n \frac{(2n+1)(n-k)!}{2\pi(n+k)!} P_n^{(k)}(t_0) \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) P_n^{(k)}(t) \cos k(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0) \times \\
 & \quad \left. \times \cos \bar{\varphi} d\bar{\lambda} d\bar{\varphi} \right\}. \quad (183)
 \end{aligned}$$

Если учитывать в ряде (161)  $n$  членов, то общее число коэффициентов (178)–(180) будет равно

$$1 + 3 + 5 \dots + (2n+1) = \frac{2n+2}{2} (n+1) = (n+1)^2. \quad (184)$$

Если функция  $f(\bar{\varphi}, \bar{\lambda})$ , разложенная в ряд по сферическим функциям (161), сама тоже сферическая функция, например,

$$f(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0) = Y_n(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0), \quad (185)$$

т. е. общая сферическая функция степени  $n$ , то в правой части выражения (183) останутся только те члены разложения, которые содержат сферические функции также степени  $n$ , всего, следовательно,  $(2n + 1)$  элементарных функций  $P_n^{(k)}(t) \cos k\bar{\lambda}$ ,  $P_n^{(k)}(t) \sin k\lambda$ .

При выполнении соотношения (185) из равенства (183) следует

$$\begin{aligned}
 Y_n(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0) &= \frac{2n+1}{4\pi} P_n^{(0)}(t_0) \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} Y_n(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) P_n^{(0)}(t) \cos \bar{\varphi} d\bar{\lambda} d\bar{\varphi} + \\
 &+ \frac{2n+1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(t_0) \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} Y_n(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) P_n^{(k)}(t) \times \\
 &\quad \times \cos k(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0) \cos \bar{\varphi} d\bar{\lambda} d\bar{\varphi}. \tag{186}
 \end{aligned}$$

Формула (186) опять-таки образует сферическую функцию

$$Y_n(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}).$$

## § 9. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ $1/r$ В РЯД ПО ПОЛИНОМАМ ЛЕЖАНДРА

Если сравним функцию

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 + \rho^2 - 2\rho_0\rho \cos \psi}} = \frac{1}{\rho_0 \sqrt{1 - 2\frac{\rho}{\rho_0} \cos \psi + \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2}}, \tag{187}$$

входящую в выражение (1), с производящей функцией (114), или ряд (4) с рядом (115), то установим, что

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho_0} H(\alpha, t), \tag{188}$$

где обозначим

$$\left. \begin{aligned} t &= \cos \psi \\ \alpha &= \frac{\rho}{\rho_0} \end{aligned} \right\}. \tag{189}$$

Затем с учетом выражений (188), (189) и (117) следует разложение (для  $\rho_0 > \rho$ )

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r} &= \frac{1}{\rho_0} \left[ P_0^{(0)}(\cos \psi) + \frac{\rho}{\rho_0} P_1^{(0)}(\cos \psi) + \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 P_2^{(0)}(\cos \psi) + \dots \right] = \\
 &= \frac{1}{\rho_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n P_n^{(0)}(\cos \psi). \tag{190}
 \end{aligned}$$

Функции  $P_n^{(\circ)}(\cos \psi)$  формально похожи на полиномы Лежандра (зональные сферические функции)  $P_n^{(\circ)}(t)$  (94), только вместо аргумента  $t = \sin \varphi$  здесь нужно подставить  $t = \cos \psi$ . Происходит собственно преобразование прежней системы  $X, Y, Z$  так, что ось  $Z$  проходит после преобразования через точку  $P$ , где рассматривается потенциал.

Теперь можно было бы найти интеграл (3) при помощи подстановки (190). Однако выгоднее перейти сначала от функции

$$P_n^{(\circ)}(\cos \psi) = P_n^{(\circ)}[\sin \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi}_0 + \cos \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi}_0 \cos(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0)] \quad (191)$$

к сферическим функциям с аргументами  $\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0$  (сферические координаты точки  $P$ ) и  $\bar{\varphi}, \bar{\lambda}$  (сферические координаты элементарной массы). Этот переход выполним ниже.

Рассмотрим так называемую теорему сложения для сферических функций  $P_n(\cos \psi)$ . Вывод здесь будет только приближенным, точный вывод можно найти, например, в [6].

Исследуем опять на сфере функцию  $f(\bar{\varphi}, \bar{\lambda})$  (161) и убедимся, что с учетом определения полином

$$P_n^{(\circ)}(\cos \psi) = P_n^{(\circ)}[\sin \bar{\varphi} \sin \bar{\varphi}_0 + \cos \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi}_0 \cos(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0)] \quad (192)$$

представляет сферическую функцию степени  $n$  как по отношению к переменным координатам  $\bar{\varphi}, \bar{\lambda}$ , так и по отношению к  $\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0$  — координатам внешней точки  $P$ . Если проинтегрируем (192) по всей поверхности сферы, т. е. найдем  $\iint_{\sigma} f(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) P_n^{(\circ)}(\cos \psi) d\sigma$ , то в результате будем иметь сферическую функцию степени  $n$  относительно аргументов  $\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0$ , которые в процессе интегрирования остаются постоянными. Поэтому можно положить

$$\iint_{\sigma} f(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) P_n^{(\circ)}(\cos \psi) d\sigma = C' Y_n(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0), \quad (193)$$

где постоянную  $C'$  выгодно выбрать с учетом дальнейшего следующим образом

$$C' = \frac{4\pi}{2n+1}. \quad (194)$$

Если  $f(\bar{\varphi}, \bar{\lambda})$  также сферическая функция  $Y_n(\bar{\varphi}, \bar{\lambda})$  степени  $n$ , то с учетом (193), (194) и (151) получим

$$Y_n(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} Y_n(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) P_n^{(\circ)}(\cos \psi) d\bar{\lambda} d\bar{\varphi}. \quad (195)$$

Сравним теперь (195) и (186), причем (186) еще преобразуем

$$Y_n(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0) = \frac{2n+1}{4\pi} \left[ \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} Y_n(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) P_n^{(e)}(t_0) P_n^{(e)}(t) \cos \bar{\varphi} d\bar{\lambda} d\bar{\varphi} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} Y_n(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}) P_n^{(k)}(t_0) P_n^{(k)}(t) \cos k(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0) \cos \bar{\varphi} d\bar{\lambda} d\bar{\varphi} \right], \quad (196)$$

тогда получим

$$P_n(\cos \psi) = P_n^{(e)}(t_0) P_n^{(e)}(t) + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(t_0) P_n^{(k)}(t) \cos k(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0) \quad (197)$$

или

$$P_n(\cos \psi) = P_n^{(e)}(t_0) P_n^{(e)}(t) + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(t_0) \cos k\bar{\lambda}_0 P_n^{(k)}(t) \times \\ \times \cos k\bar{\lambda} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(t_0) \sin k\bar{\lambda}_0 P_n^{(k)}(t) \sin k\bar{\lambda}, \quad (198)$$

что является искомой формулой для разложения функции  $P_n(\cos \psi)$ .

Этим исчерпывается минимально необходимый обзор основных соотношений в области сферических и шаровых функций. При более подробном изучении динамической космической геодезии нужно, разумеется, обратиться к литературе, например [6].

Теперь выведем формулу гравитационного потенциала в том виде, в котором она будет нам необходима при решении задач динамической космической геодезии.

## § 10. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА В ВИДЕ РЯДА СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ОСНОВНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ (СТОКСОВЫХ) ПОСТОЯННЫХ

С учетом формул (190) и (187) можем теперь гравитационный потенциал во внешней потенциальной точке представить в виде

$$V(P) = f \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{\rho_0^{n+1}} P_n^{(e)}(\cos \psi) d\tau, \quad (199)$$

или с учетом (198)

$$\begin{aligned}
 V(P) = & f \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{\rho_0^{n+1}} \left[ P_n^{(\circ)}(t_0) P_n^{(\circ)}(t) + \right. \\
 & + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(t_0) \cos k\bar{\lambda}_0 P_n^{(k)}(t) \cos k\lambda + \\
 & \left. + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(t_0) \sin k\bar{\lambda}_0 P_n^{(k)}(t) \sin k\lambda \right] d\tau. \quad (200)
 \end{aligned}$$

Благодаря непрерывности производных внешнего потенциала и предполагаемой равномерной сходимости ряда можно выражение (200) интегрировать почленно. Так как координаты внешней точки  $P(\rho_0, \bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0)$  не зависят от переменных интегрирования, то из (200) получим

$$\begin{aligned}
 V(P) = & f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho_0^{n+1}} \left[ P_n^{(\circ)}(t_0) \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) \rho^n P_n^{(\circ)}(t) d\tau + \right. \\
 & + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(t_0) \cos k\lambda_0 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) \rho^n P_n^{(k)}(t) \cos k\lambda d\tau + \\
 & \left. + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(t_0) \sin k\bar{\lambda}_0 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) \rho^n P_n^{(k)}(t) \sin k\lambda d\tau \right]. \quad (201)
 \end{aligned}$$

Обозначим

$$\iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) \rho^n P_n^{(\circ)}(t) d\tau = J_n^{(\circ)}, \quad (202)$$

$$2 \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) \rho^n P_n^{(k)}(t) \cos k\bar{\lambda} d\tau = J_n^{(k)}, \quad (203)$$

$$2 \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) \rho^n P_n^{(k)}(t) \sin k\bar{\lambda} d\tau = S_n^{(k)}. \quad (204)$$

Это не что иное как так называемые динамические (Стоксовы) постоянные или гармонические коэффициенты, характеризующие рассматриваемое тело  $\tau$ , когда речь идет о его динамических свойствах или его внешнем гравитационном поле.

С этими обозначениями выражение (201) принимает вид

$$V(P) = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^{n+1}} \left[ J_n^{(0)} P_n^{(0)}(t_0) + \sum_{k=1}^n (J_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda}_0 + S_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda}_0) P_n^{(k)}(t_0) \right] =$$

$$= f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^{n+1}} \sum_{k=0}^n (J_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda}_0 + S_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda}_0) P_n^{(k)}(t_0). \quad (205)$$

Динамические постоянные (202)—(204) являются важными динамическими характеристиками Земли и их численное определение представляет основную задачу динамической космической геодезии. Численные значения величин (203), (204) могли бы быть определены, если бы было известно точное распределение массы в теле Земли.

Стоксовы постоянные однозначно определяются полной массой земного тела, видом внешней урвонной поверхности и угловой скоростью вращения. Любое перераспределение элементов масс, которое не вызывало бы изменения рассматриваемой урвонной поверхности, не влияет на Стоксовы постоянные. Эти постоянные полностью (вместе с произведением  $fM$ ) однозначно определяют потенциал тела.

Представим хотя бы самые основные из Стоксовых постоянных при помощи моментов инерции различных степеней.

При  $n = 0$  и  $k = 0$ , когда  $P_0^{(0)} = 1$ , для (202) имеет место

$$J_0^{(0)} = \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) d\tau = \iiint_{\tau} dm = M, \quad (206)$$

где  $M$  — полная масса тела Земли, а

$$dm = \delta(X, Y, Z) d\tau \quad (207)$$

— элемент массы.

При  $n = 1$  и  $k = 0$ , когда

$$P_1^{(0)}(t) = t = \sin \bar{\varphi} = \frac{Z}{\rho}, \quad (208)$$

аналогично вытекает из (202)

$$J_1^{(0)} = \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) \rho \frac{Z}{\rho} d\tau = \iiint_M Z dm = -M \Delta z_0. \quad (209)$$

причем

$$\Delta z_0 = - \frac{\iiint_M Z dm}{M} \quad (210)$$

есть координата центра референц-эллипсоида  $O$ , по оси  $z$  относительно центра масс Земли  $O$ .

При  $n = 1$  и  $k = 1$ , когда для (113) справедливо

$$P_1^{(1)}(t) = (1 - t^2)^{1/2} = \cos \bar{\varphi}, \quad (211)$$

имеем из (203), (204) и (5)

$$J_1^{(1)} = \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) \rho \cos \bar{\varphi} \cos \bar{\lambda} d\tau = \iiint_M X dm = -M \Delta x_0, \quad (212)$$

причем

$$\Delta x_0 = -\frac{\iiint_M X dm}{M} \quad (213)$$

координата центра  $O_r$  по отношению к центру масс Земли по оси  $x$ . Аналогично получим

$$S_1^{(1)} = \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) \rho \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\lambda} = \iiint_M Y dm = -M \Delta y_0, \quad (214)$$

$$\Delta y_0 = -\frac{\iiint_M Y dm}{M}. \quad (215)$$

При  $n = 2$  и  $k = 0$ , когда для (113) и (5) имеет место

$$P_2^{(c)}(t) = \frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \sin^2 \bar{\varphi} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \frac{Z^2}{\rho^2} - \frac{1}{2} \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{\rho^2}, \quad (216)$$

из (202) получается

$$\begin{aligned} J_2^{(c)} &= \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) [3Z^2 - (X^2 + Y^2 + Z^2)] d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) [2Z^2 - (X^2 + Y^2)] d\tau, \end{aligned} \quad (217)$$

и при обозначениях

$$\iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) (Y^2 + Z^2) d\tau = A, \quad (218)$$

$$\iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) (X^2 + Z^2) d\tau = B, \quad (219)$$

$$\iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) (X^2 + Y^2) d\tau = C, \quad (220)$$

которые представляют моменты инерции относительно осей референционной системы  $X, Y, Z$ , далее получим

$$J_2^{(c)} = \frac{1}{2} (A + B - 2C) = \frac{A+B}{2} - C. \quad (221)$$

При  $n = 2$  и  $k = 1$  имеем

$$P_2^{(1)}(t) \cos \bar{\lambda} = 3t(1-t^2)^{1/2} \cos \bar{\lambda} = 3 \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} \cos \bar{\lambda} = 3 \frac{Z}{\rho} \frac{X}{\rho}, \quad (222)$$

$$J_2^{(1)} = 1/3 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) 3ZX d\tau = \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) XZ d\tau, \quad (223)$$

$$P_2^{(1)}(t) \sin \bar{\lambda} = 3t(1-t^2)^{1/2} \sin \bar{\lambda} = 3 \frac{YZ}{\rho^2}, \quad (224)$$

$$S_2^{(1)} = \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) YZ d\tau. \quad (225)$$

При  $n = 2$  и  $k = 2$

$$\begin{aligned} P_2^{(2)}(t) \cos 2\bar{\lambda} &= 3(1-t^2)(\cos^2 \bar{\lambda} - \sin^2 \bar{\lambda}) = 3 \cos^2 \bar{\varphi} \cos^2 \bar{\lambda} - \\ &- 3 \cos^2 \bar{\varphi} \sin^2 \bar{\lambda} = 3 \left[ \left( \frac{X}{\rho} \right)^2 - \left( \frac{Y}{\rho} \right)^2 \right] = 3 \frac{1}{\rho^2} (X^2 - Y^2), \end{aligned} \quad (226)$$

$$\begin{aligned} J_2^{(2)} &= 1/12 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) 3(X^2 - Y^2) d\tau = \\ &= \frac{1}{4} \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) (X^2 - Y^2) d\tau = 1/4 (B - A), \end{aligned} \quad (227)$$

$$P_2^{(2)}(t) \sin 2\bar{\lambda} = 3(1-t^2) 2 \sin \bar{\lambda} \cos \bar{\lambda} = 6 \cos^2 \bar{\varphi} \sin \bar{\lambda} \cos \bar{\lambda} = 6 \frac{XY}{\rho^2}, \quad (228)$$

$$S_2^{(2)} = 1/12 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) 6XY d\tau = 1/2 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) XY d\tau. \quad (229)$$

При  $n = 3$  и  $k = 0$

$$\begin{aligned} P_3^{(0)}(t) &= 5/2 t^3 - 3/2 t = 5/2 \sin^3 \bar{\varphi} - 3/2 \sin \bar{\varphi} = \\ &= 5/2 \left( \frac{Z}{\rho} \right)^3 - 3/2 \frac{Z}{\rho} \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{\rho^2} = \frac{(Z)^3}{\rho^3} - 3/2 \frac{Z(X^2 + Y^2)}{\rho^3}, \end{aligned} \quad (230)$$

$$J_3^{(0)} = \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) [Z^3 - 3/2 Z(X^2 + Y^2)] d\tau. \quad (231)$$

При  $n = 3$  и  $k = 1$

$$\begin{aligned} P_3^{(1)}(t) \cos \bar{\lambda} &= (1-t^2)^{1/2} (15/2 t^2 - 3/2) \cos \bar{\lambda} = \\ &= \cos \bar{\varphi} \cos \bar{\lambda} (15/2 \sin^2 \bar{\varphi} - 3/2) = \frac{X}{\rho} \left( 15/2 \frac{Z^2}{\rho^2} - 3/2 \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{\rho^2} \right) = \\ &= \frac{X}{\rho} \left( 6 \frac{Z^2}{\rho^2} - 3/2 \frac{X^2 + Y^2}{\rho^2} \right), \end{aligned} \quad (232)$$

$$J_3^{(1)} = \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) X Z^2 d\tau - 1/4 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) X (X^2 + Y^2) d\tau, \quad (233)$$

$$P_3^{(1)}(t) \sin \bar{\lambda} = \cos \bar{\varphi} \sin \bar{\lambda} ({}^{15/2} \sin^2 \bar{\varphi} - {}^3/2) = \\ = \frac{Y}{\rho} \left( {}^{15/2} \frac{Z^2}{\rho^2} - {}^3/2 \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{\rho^2} \right) = \frac{Y}{\rho} \left( 6 \frac{Z^2}{\rho^2} - {}^3/2 \frac{X^2 + Y^2}{\rho^2} \right), \quad (234)$$

$$S_3^{(1)} = \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) Y Z^2 d\tau - 1/4 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) Y (X^2 + Y^2) d\tau. \quad (235)$$

При  $n=3$  и  $k=2$

$$P_3^{(2)}(t) \cos 2\bar{\lambda} = 15t(1-t^2) \cos 2\bar{\lambda} = 15 \sin \bar{\varphi} \cos^2 \bar{\varphi} \cos^2 \bar{\lambda} - \\ - 15 \sin \bar{\varphi} \cos^2 \bar{\varphi} \sin^2 \bar{\lambda} = 15 \frac{Z}{\rho} \frac{X^2}{\rho^2} - 15 \frac{Z}{\rho} \frac{Y^2}{\rho^2} = 15 \frac{Z}{\rho} \frac{X^2 - Y^2}{\rho^2}, \quad (236)$$

$$J_3^{(2)} = 1/4 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) Z (X^2 - Y^2) d\tau, \quad (237)$$

$$P_3^{(2)}(t) \sin 2\bar{\lambda} = 15t(1-t^2) \sin 2\bar{\lambda} = \\ = 30 \sin \bar{\varphi} \cos^2 \bar{\varphi} \sin \bar{\lambda} \cos \bar{\lambda} = 30 \frac{Z}{\rho} \frac{XY}{\rho^2}, \quad (238)$$

$$S_3^{(2)} = 1/2 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) XYZ d\tau. \quad (239)$$

При  $n=3$  и  $k=3$

$$P_3^{(3)}(t) \cos 3\bar{\lambda} = 15(1-t^2)^{3/2} (4 \cos^3 \bar{\lambda} - 3 \cos \bar{\lambda}) = \\ = 15 \cos^3 \bar{\varphi} (\cos^3 \bar{\lambda} - 3 \cos \bar{\lambda} \sin^2 \bar{\lambda}) = 15 \cos^3 \bar{\varphi} \cos^3 \bar{\lambda} - \\ - 45 \cos^3 \bar{\varphi} \cos \bar{\lambda} \sin^2 \bar{\lambda} = 15 \frac{X^3}{\rho^3} - 45 \frac{X}{\rho} \frac{Y^2}{\rho^2} = 15 \frac{X}{\rho} \left( \frac{X^2}{\rho^2} - 3 \frac{Y^2}{\rho^2} \right), \quad (240)$$

$$J_3^{(3)} = 1/24 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) X (X^2 - 3Y^2) d\tau, \quad (241)$$

$$P_3^{(3)}(t) \sin 3\bar{\lambda} = 15(1-t^2)^{3/2} (3 \sin \bar{\lambda} - 4 \sin^3 \bar{\lambda}) = \\ = 15 \cos^3 \bar{\varphi} (3 \sin \bar{\lambda} \cos^2 \bar{\lambda} - \sin^3 \bar{\lambda}) = 15 \frac{Y}{\rho} \left( 3 \frac{X^2}{\rho^2} - \frac{Y^2}{\rho^2} \right), \quad (242)$$

$$S_3^{(3)} = 1/24 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) Y (3X^2 - Y^2) d\tau. \quad (243)$$

При  $n = 4$  и  $k = 0$

$$P_4^{(0)}(t) = \frac{35}{8}t^4 - \frac{15}{4}t^2 + \frac{3}{8} = \frac{35}{8}\sin^4\bar{\varphi} - \frac{15}{4}\sin^2\bar{\varphi} + \frac{3}{8} = \\ = \frac{35}{8}\left(\frac{Z}{\rho}\right)^4 - \frac{15}{4}\left(\frac{Z}{\rho}\right)^2 \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{\rho^2} + \frac{3}{8}\frac{(X^2 + Y^2 + Z^2)^2}{\rho^4}, \quad (244)$$

$$J_4^{(0)} = \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) \left[ \frac{35}{8}Z^4 - \frac{15}{4}Z^2(X^2 + Y^2 + Z^2) + \right. \\ \left. + \frac{3}{8}(X^2 + Y^2 + Z^2)^2 \right] d\tau = \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) \left[ Z^4 - 3Z^2(X^2 + Y^2) + \right. \\ \left. + \frac{3}{8}(X^2 + Y^2) \right] d\tau. \quad (245)$$

При  $n = 4$  и  $k = 1$

$$P_4^{(1)}(t) \cos \bar{\lambda} = (1 - t^2)^{1/2} \left( \frac{35}{2}t^3 - \frac{15}{2}t \right) \cos \bar{\lambda} = \\ = \cos \bar{\varphi} \left( \frac{35}{2}\sin^3\bar{\varphi} - \frac{15}{2}\sin\bar{\varphi} \right) \cos \bar{\lambda} = \\ = \frac{X}{\rho} \left[ \frac{35}{2}\left(\frac{Z}{\rho}\right)^3 - \frac{15}{2}\frac{Z}{\rho} \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{\rho^2} \right], \quad (246)$$

$$J_4^{(1)} = \frac{1}{4} \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) X \left[ 7Z^3 - 3Z(X^2 + Y^2 + Z^2) \right] d\tau = \\ = \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) X \left[ Z^3 - \frac{3}{4}Z(X^2 + Y^2) \right] d\tau, \quad (247)$$

$$P_4^{(1)}(t) \sin \bar{\lambda} = \cos \bar{\varphi} \left( \frac{35}{2}\sin^3\bar{\varphi} - \frac{15}{2}\sin\bar{\varphi} \right) \sin \bar{\lambda} = \\ = \frac{Y}{\rho} \left[ \frac{35}{2}\left(\frac{Z}{\rho}\right)^3 - \frac{15}{2}\frac{Z}{\rho} \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{\rho^2} \right], \quad (248)$$

$$S_4^{(1)} = \frac{1}{4} \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) Y \left[ 7Z^3 - 3Z(X^2 + Y^2 + Z^2) \right] d\tau = \\ = \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) Y \left[ Z^3 - \frac{3}{4}Z(X^2 + Y^2) \right] d\tau. \quad (249)$$

При  $n = 4$  и  $k = 2$

$$P_4^{(2)} \cos 2\bar{\lambda} = (1 - t^2) \left( \frac{105}{2}t^2 - \frac{15}{2} \right) \cos 2\bar{\lambda} = \\ = \cos^2\bar{\varphi} \left( \frac{105}{2}\sin^2\bar{\varphi} - \frac{15}{2} \right) (\cos^2\bar{\lambda} - \sin^2\bar{\lambda}) = \\ = \left[ \frac{105}{2}\left(\frac{Z}{\rho}\right)^2 - \frac{15}{2}\frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{\rho^2} \right] \frac{X^2 - Y^2}{\rho^2}, \quad (250)$$

$$J_4^{(2)} = \frac{1}{360} \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) \left[ 105Z^2 - 15(X^2 + Y^2 + Z^2) \right] (X^2 - Y^2) d\tau = \\ = \frac{1}{4} \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) \left[ Z^2 - \frac{1}{6}(X^2 + Y^2) \right] (X^2 - Y^2) d\tau, \quad (251)$$

$$\begin{aligned}
P_4^{(2)} \sin 2\bar{\lambda} &= (1-t^2)^{(105/2)t^2-15/2} \sin 2\bar{\lambda} = \\
&= 2 \cos^2 \bar{\varphi} (105/2 \sin^2 \bar{\varphi} - 15/2) \sin \bar{\lambda} \cos \bar{\lambda} = \\
&= \frac{XY}{\rho^2} \left[ 105 \left( \frac{Z}{\rho} \right)^2 - 15 \frac{X^2+Y^2+Z^2}{\rho^2} \right], \quad (252)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_4^{(2)} &= 1/12 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) XY [7Z^2 - (X^2 + Y^2 + Z^2)] d\tau = \\
&= 1/12 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) XY [6Z^2 - (X^2 + Y^2)] d\tau. \quad (253)
\end{aligned}$$

При  $n=4$  и  $k=3$

$$\begin{aligned}
P_4^{(3)} \cos 3\bar{\lambda} &= 105t(1-t^2)^{9/2} \cos 3\bar{\lambda} = \\
&= 105 \sin \bar{\varphi} \cos^3 \bar{\varphi} (\cos^3 \bar{\lambda} - 3 \cos \bar{\lambda} \sin^2 \bar{\lambda}) = 105 \left( \frac{Z}{\rho} \frac{X^3}{\rho^3} - 3 \frac{X}{\rho} \frac{Y^2}{\rho^2} \frac{Z}{\rho} \right), \quad (254)
\end{aligned}$$

$$J_4^{(3)} = 1/24 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) XZ (X^2 - 3Y^2) d\tau, \quad (255)$$

$$\begin{aligned}
P_4^{(3)} \sin 3\bar{\lambda} &= 105t(1-t^2)^{9/2} \sin 3\bar{\lambda} = 105 \sin \bar{\varphi} \cos^3 \bar{\varphi} \times \\
&\times (3 \sin \bar{\lambda} \cos^3 \bar{\lambda} - \sin^3 \bar{\lambda}) = 105 \left( 3 \frac{X^2}{\rho^2} \frac{Y}{\rho} \frac{Z}{\rho} - \frac{Y^3}{\rho^3} \frac{Z}{\rho} \right), \quad (256)
\end{aligned}$$

$$S_4^{(3)} = 1/24 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) YZ (3X^2 - Y^2) d\tau. \quad (257)$$

При  $n=4$  и  $k=4$

$$\begin{aligned}
P_4^{(4)} \cos 4\bar{\lambda} &= 105(1-t^2)^2 \cos 4\bar{\lambda} = 105 \cos^4 \bar{\varphi} (\cos^4 \bar{\lambda} + \sin^4 \bar{\lambda} - \\
&- 6 \sin^2 \bar{\lambda} \cos^2 \bar{\lambda}) = 105 \left( \frac{X^4}{\rho^4} + \frac{Y^4}{\rho^4} - 6 \frac{X^2 Y^2}{\rho^4} \right), \quad (258)
\end{aligned}$$

$$J_4^{(4)} = 1/192 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) (X^4 + Y^4 - 6X^2 Y^2) d\tau, \quad (259)$$

$$\begin{aligned}
P_4^{(4)} \sin 4\bar{\lambda} &= 105(1-t^2)^2 \sin 4\bar{\lambda} = 420 \cos^4 \bar{\varphi} (\sin \bar{\lambda} \cos^3 \bar{\lambda} - \sin^3 \bar{\lambda} \cos \bar{\lambda}) = \\
&= 420 \left( \frac{X^3}{\rho^3} \frac{Y}{\rho} - \frac{X}{\rho} \frac{Y^3}{\rho^3} \right), \quad (260)
\end{aligned}$$

$$S_4^{(4)} = 1/48 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) (X^3 Y - X Y^3) d\tau. \quad (261)$$

Совершенно аналогично, также применяя выражения (202), (204), (113) и (5), можно вывести коэффициенты  $J_n^{(k)}$ ,  $S_n^{(k)}$  для произвольного конечного  $n$  и  $k=1, 2, \dots, n$ .

## § 11. ТОЧНОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА

После подстановки выражений (206), (209), (212), (214), (221), (223), (225), (227), (229), (231), (233), (235), (237), (239), (241), (243), (245), (247), (249), (251), (253), (255), (257), (259) и (261) в (205) получим с учетом (113) формулу

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{f} V(P) = & \frac{M}{\rho_0} - 1/\rho_0^2 [M \Delta z_0 \sin \bar{\varphi}_0 + M \Delta x_0 \cos \bar{\varphi}_0 \cos \bar{\lambda}_0 + \\
 & + M \Delta y_0 \cos \bar{\varphi}_0 \sin \bar{\lambda}_0] + 1/\rho_0^3 \left[ \left( \frac{A+B}{2} - C \right) P_2^{(0)}(t_0) + \right. \\
 & \left. + \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) XZ d\tau \cdot P_2^{(1)}(t_0) \cos \bar{\lambda}_0 + \right. \\
 + \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) YZ d\tau \cdot P_2^{(1)}(t_0) \sin \bar{\lambda}_0 + & 1/4 (B-A) P_2^{(2)}(t_0) \cos 2\bar{\lambda}_0 + \\
 & \left. + 1/2 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) XY \cdot d\tau \cdot P_2^{(2)}(t_0) \sin 2\bar{\lambda}_0 \right] + \\
 & + 1/\rho_0^4 \left\{ \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) [Z^3 - 3/2 Z(X^2 + Y^2)] d\tau \cdot P_3^{(0)}(t_0) + \right. \\
 + \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) [XZ^2 - 1/4 X(X^2 + Y^2)] d\tau \cdot P_3^{(1)}(t_0) \cos \bar{\lambda}_0 + & \\
 + \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) [YZ^2 - 1/4 Y(X^2 + Y^2)] d\tau \cdot P_3^{(1)}(t_0) \sin \bar{\lambda}_0 + & \\
 & + 1/4 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) Z(X^2 - Y^2) d\tau \cdot P_3^{(2)}(t_0) \cos 2\bar{\lambda}_0 + \\
 & + 1/2 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) XYZ d\tau \cdot P_3^{(2)}(t_0) \sin 2\bar{\lambda}_0 + \\
 + 1/24 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) X(X^2 - 3Y^2) d\tau \cdot P_3^{(3)}(t_0) \cos 3\bar{\lambda}_0 + & \\
 + 1/24 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) Y(3X^2 - Y^2) d\tau \cdot P_3^{(3)}(t_0) \sin 3\bar{\lambda}_0 \left. \right\} + & \\
 + 1/\rho_0^5 \left\{ \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) [Z^4 - 3Z^2(X^2 + Y^2) + 3/8 (X^2 + Y^2)^2] \times & \right. \\
 \times d\tau \cdot P_4^{(0)}(t_0) + \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) XZ [Z^2 - 3/4 (X^2 + Y^2)] d\tau P_4^{(1)}(t_0) \cos \bar{\lambda}_0 + &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) YZ [Z^2 - 3/4(X^2 + Y^2)] d\tau \cdot P_4^{(1)}(t_0) \sin \bar{\lambda}_0 + \\
& + 1/4 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) [Z^2 - 1/6(X^2 + Y^2)] (X^2 - Y^2) d\tau \cdot P_4^{(2)}(t_0) \cos 2\bar{\lambda}_0 + \\
& + 1/12 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) XY [6Z^2 - (X^2 + Y^2)] d\tau \cdot P_4^{(2)}(t_0) \sin 2\bar{\lambda}_0 + \\
& + 1/24 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) XZ (X^2 - 3Y^2) d\tau \cdot P_4^{(3)}(t_0) \cos 3\bar{\lambda}_0 + \\
& + 1/24 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) YZ (3X^2 - Y^2) d\tau \cdot P_4^{(3)}(t_0) \sin 3\bar{\lambda}_0 + \\
& + 1/192 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) (X^4 + Y^4 - 6X^2Y^2) d\tau \cdot P_4^{(4)}(t_0) \cos 4\bar{\lambda}_0 + \\
& + 1/48 \iiint_{\tau} \delta(X, Y, Z) XY (X^2 - Y^2) d\tau \cdot P_4^{(4)}(t_0) \sin 4\bar{\lambda}_0 \Big\} + \\
& + \sum_{n=5}^{\infty} 1/\rho_0^{n+1} \left[ J_n^{(o)} P_n^{(o)}(t_0) + \sum_{k=1}^n (J_n^{(k)} \cdot \cos k\bar{\lambda}_0 + S_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda}_0) P_n^{(k)}(t_0) \right]. \quad (262)
\end{aligned}$$

Выражение (262) для гравитационного потенциала точное. Можно также его записать в виде

$$V(P) = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho_0^{n+1}} Y_n(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0). \quad (263)$$

В отдельности общие сферические функции для  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  будут равны

$$Y_0(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0) = M, \quad (264)$$

$$\begin{aligned}
Y_1(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0) &= -M (\Delta x_0 \cos \bar{\varphi}_0 \cos \bar{\lambda}_0 + \Delta y_0 \cos \bar{\varphi}_0 \sin \bar{\lambda}_0 + \Delta z_0 \sin \bar{\varphi}_0) = \\
&= -\frac{M}{\rho_0} (X_0 \Delta x_0 + Y_0 \Delta y_0 + Z_0 \Delta z_0), \quad (265)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_2(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0) &= \left[ \frac{(A+B)}{2} - C \right] P_2^{(o)}(t_0) + \\
&+ \left[ \iiint_M XZ dm \cdot \cos \bar{\lambda}_0 + \iiint_M YZ dm \cdot \sin \bar{\lambda}_0 \right] P_2^{(1)}(t_0) + \\
&+ \left[ 1/4(B-A) \cos 2\bar{\lambda}_0 + 1/2 \iiint_M XY dm \cdot \sin 2\bar{\lambda}_0 \right] P_2^{(2)}(t_0), \quad (266)
\end{aligned}$$

$$Y_3(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0) = \iiint_M [Z^3 - 3/2Z(X^2 + Y^2)] dm \cdot P_3^{(o)}(t_0) +$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \iiint_M X (Z^2 - 1/4 (X^2 + Y^2)) dm \cdot \cos \bar{\lambda}_0 + \right. \\
& + \left. \iiint_M Y [Z^2 - 1/4 (X^2 + Y^2)] dm \cdot \sin \bar{\lambda}_0 \right\} P_3^{(1)}(t_0) + \\
& + 1/4 \left[ \iiint_M Z (X^2 - Y^2) dm \cdot \cos 2\bar{\lambda}_0 + 2 \iiint_M XYZ dm \cdot \sin 2\bar{\lambda}_0 \right] P_3^{(2)}(t_0) + \\
& + 1/24 \left[ \iiint_M X (X^2 - 3Y^2) dm \cdot \cos 3\bar{\lambda}_0 + \right. \\
& + \left. \iiint_M Y (3X^2 - Y^2) dm \cdot \sin 3\bar{\lambda}_0 \right] P_3^{(3)}(t_0), \quad (267)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_4(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0) = & \iiint_M [Z^4 - 3Z^2(X^2 + Y^2) + 3/8(X^2 + Y^2)^2] dm \cdot P_4^{(0)}(t_0) + \\
& + \left\{ \iiint_M XZ [Z^2 - 3/4(X^2 + Y^2)] dm \cdot \cos \bar{\lambda}_0 + \right. \\
& + \left. \iiint_M YZ [Z^2 - 3/4(X^2 + Y^2)] dm \cdot \sin \bar{\lambda}_0 \right\} P_4^{(1)}(t_0) + \\
& + 1/4 \left\{ \iiint_M [Z^2 - 1/6(X^2 + Y^2)] (X^2 - Y^2) dm \cdot \cos 2\bar{\lambda}_0 + \right. \\
& + \left. 2 \iiint_M XY [Z^2 - 1/6(X^2 + Y^2)] dm \cdot \sin 2\bar{\lambda}_0 \right\} P_4^{(2)}(t_0) + \\
& + 1/24 \left\{ \iiint_M XZ (X^2 - 3Y^2) dm \cdot \cos 3\bar{\lambda}_0 + \right. \\
& + \left. \iiint_M YZ (3X^2 - Y^2) dm \cdot \sin 3\bar{\lambda}_0 \right\} P_4^{(3)}(t_0) + \\
& + 1/192 \left\{ \iiint_M (X^4 + Y^4 - 6X^2Y^2) dm \cdot \cos 4\bar{\lambda}_0 + \right. \\
& + \left. 4 \iiint_M XY (X^2 - Y^2) dm \cdot \sin 4\bar{\lambda}_0 \right\} P_4^{(4)}(t_0). \quad (268)
\end{aligned}$$

Отрицательный знак у сферической функции  $Y_1(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0)$  следует из соотношений между геоцентрическими и референцными координатами (при достаточно малых углах  $\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0$ ) (часть I, § 4)

$$\left. \begin{aligned}
x &= X + \Delta x_0 + \omega_0 y - \psi_0 z \\
y &= Y + \Delta y_0 - \omega_0 x + \varepsilon_0 z \\
z &= Z + \Delta z_0 + \psi_0 x - \varepsilon_0 y
\end{aligned} \right\}. \quad (269)$$

Далее

$$\iiint_M x \, dm = 0, \quad \iiint_M y \, dm = 0, \quad \iiint_M z \, dm = 0 \quad (270)$$

И из (210), (213), (215) следует

$$\iiint_M X \, dm = -\Delta x_0 M, \quad \iiint_M Y \, dm = -\Delta y_0 M, \quad \iiint_M Z \, dm = -\Delta z_0 M. \quad (271)$$

Отрицательный знак здесь, следовательно, обуславливается выбором координат центра референц-эллипсоида относительно центра масс Земли.

Функция  $Y_2(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0)$  может быть в дальнейшем преобразована, и некоторые интегралы, т. е. выражения для некоторых динамических постоянных, могут быть упрощены. Из теоретической механики известно, что если ось  $z$  совпадает с так называемой главной осью эллипсоида инерции тела, то центробежные моменты  $D$  и  $E$  равны нулю, т. е.

$$\left. \begin{aligned} D &= \iiint_M yz \, dm = 0 \\ E &= \iiint_M xz \, dm = 0 \end{aligned} \right\} \quad (272)$$

Если ось  $z$  геоцентрической системы  $x, y, z$  (часть I, § 4) определена именно так, то с отбрасыванием квадратов малых ориентирующих углов  $\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0$  и параметров сдвига  $\Delta x_0, \Delta y_0$  и  $\Delta z_0$ , а также их взаимных произведений, с учетом (269) имеют место следующие соотношения

$$\left. \begin{aligned} \iiint_M XY \, dm &\simeq \iiint_M xy \, dm - \Delta x_0 \iiint_M y \, dm - \Delta y_0 \iiint_M x \, dm + \\ &\quad + \omega_0 \iiint_M (x^2 - y^2) \, dm \\ \iiint_M XZ \, dm &\simeq -\Delta x_0 \iiint_M z \, dm - \Delta z_0 \iiint_M x \, dm + \\ &\quad + \psi_0 \iiint_M (z^2 - x^2) \, dm \\ \iiint_M YZ \, dm &\simeq -\Delta y_0 \iiint_M z \, dm - \Delta z_0 \iiint_M y \, dm + \\ &\quad + \varepsilon_0 \iiint_M (y^2 - z^2) \, dm \end{aligned} \right\} \quad (273)$$

Далее, если учесть формулы (218—220), (270) и обозначить третий центробежный момент

$$\iiint_M xy \, dm = F, \quad (274)$$

то получится

$$\left. \begin{aligned} \iiint_M XY \, dm &\simeq F + \omega_0 \iiint_M (x^2 - y^2) \, dm \simeq F + \\ &+ \omega_0 \iiint_M (X^2 - Y^2) \, dm \simeq F + \omega_0 (B - A) \\ \iiint_M XZ \, dm &\simeq \psi_0 \iiint_M (z^2 - x^2) \, dm \simeq \\ &\simeq \psi_0 \iiint_M (Z^2 - X^2) \, dm \simeq \psi_0 (A - C) \\ \iiint_M YZ \, dm &\simeq \varepsilon_0 \iiint_M (y^2 - z^2) \, dm \simeq \\ &\simeq \varepsilon_0 \iiint_M (Y^2 - Z^2) \, dm \simeq \varepsilon_0 (C - B) \end{aligned} \right\} \quad (275)$$

Удерживая только первые степени элементов сдвига, формулы (269), (270) и (272) можем записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \psi_0 \iiint_M (X^2 - Y^2) \, dm &= \omega_0 \iiint_M [x - \Delta x_0 - \omega_0 y + \psi_0 z]^2 - \\ &- (y - \Delta y_0 + \omega_0 x - \varepsilon_0 z)^2] \, dm \simeq \omega_0 \iiint_M (x^2 - y^2) \, dm \\ \psi_0 \iiint_M (Z^2 - X^2) \, dm &= \psi_0 \iiint_M [(z - \Delta z_0 - \psi_0 x + \varepsilon_0 y)^2 - \\ &- (x - \Delta x_0 - \omega_0 y + \psi_0 z)^2] \, dm \simeq \psi_0 \iiint_M (z^2 - x^2) \, dm \\ \varepsilon_0 \iiint_M (Y^2 - Z^2) \, dm &= \varepsilon_0 \iiint_M [(y - \Delta y_0 + \omega_0 x - \varepsilon_0 z)^2 - \\ &- (z - \Delta z_0 - \psi_0 x + \varepsilon_0 y)^2] \, dm \simeq \varepsilon_0 \iiint_M (y^2 - z^2) \, dm \end{aligned} \right\} \quad (276)$$

Аналогично, как и (275), легко доказать, что с рассматриваемой точностью, т. е. пренебрежением квадратами элементов сдвига  $\Delta x_0$ ,

$\Delta y$ ,  $\Delta z_0$  и ориентирующих углов  $\varepsilon_0$ ,  $\psi_0$ ,  $\omega_0$ , имеют место равенства

$$\left. \begin{aligned} \iiint_M (Y^2 + Z^2) dm &\simeq \iiint_M (y^2 + z^2) dm + 2\omega_0 F \\ \iiint_M (X^2 + Z^2) dm &\simeq \iiint_M (x^2 + z^2) dm - 2\omega_0 F \\ \iiint_M (X^2 + Y^2) dm &\simeq \iiint_M (x^2 + y^2) dm \end{aligned} \right\}. \quad (277)$$

Моменты  $A$  и  $B$ , определяемые формулами (218) и (219), следовательно, отличаются (при  $\omega_0 \neq 0$ ,  $F \neq 0$ ) от соответствующих главных моментов тела.

С учетом (275) сферическая функция второй степени (266) примет вид

$$\begin{aligned} Y_2(\bar{\varphi}, \bar{\lambda}_0) = &\left(\frac{A+B}{2} - C\right) P_2^{(0)}(t_0) + [\psi_0(A-C) \cos \bar{\lambda}_0 + \\ &+ \varepsilon_0(C-B) \sin \bar{\lambda}_0] P_2^{(1)}(t_0) + \left\{\frac{1}{4}(B-A) \cos 2\bar{\lambda}_0 + \right. \\ &\left. + \frac{1}{2}[F + \omega_0(B-A)] \sin 2\bar{\lambda}_0\right\} P_2^{(2)}(t_0). \end{aligned} \quad (278)$$

Если бы и оси  $x$ ,  $y$  совпадали с осями эллипсоида инерции, то и третий центробежный момент инерции (274) был бы равен нулю ( $F = 0$ ).

Сферические функции 3-й и 4-й степеней (267) и (268), а также и функции высших степеней можно в дальнейшем преобразовать только при определенных упрощающих предположениях о динамических свойствах тела Земли.

## § 12. ГРАВИТАЦИОННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ЗЕМЛИ ПРИ НЕКОТОРЫХ УПРОЩАЮЩИХ ПРЕДПОСЫЛКАХ

Выражение (262) для внешнего гравитационного потенциала (при  $n \rightarrow \infty$ ) точное. Оно вполне пригодно для тела любой формы и массы любой сложности.

Чем правильнее было бы рассматриваемое тело, тем больше бы это выражение упрощалось. Если реальная Земля заменяется моделью Земли, то гравитационное поле такой модели нельзя отождествлять с действительным полем.

Упрощение также произойдет, если система  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  совпадет с геоцентрической системой.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_0 = 0, & \quad \Delta y_0 = 0, & \quad \Delta z_0 = 0 \\ \varepsilon_0 = 0, & \quad \psi_0 = 0, & \quad \omega_0 = 0 \\ X = x, & \quad Y = y, & \quad Z = z \end{aligned} \right\}, \quad (279)$$

в результате чего для (209), (212), (214), (223), 225) и (275) получится

$$J_1^{(0)} = 0, J_1^{(1)} = 0, J_2^{(1)} = 0, S_1^{(1)} = 0, S_2^{(1)} = 0 \quad (280)$$

и далее для (265) и (278)

$$Y_1(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0) = 0, \quad (281)$$

$$Y_2(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0) = \left( \frac{A+B}{2} - C \right) P_2^{(0)}(t_0) + \\ + \left[ \frac{1}{4} (B-A) \cos 2\bar{\lambda}_0 + F \sin 2\bar{\lambda}_0 \right] P_2^{(2)}(t_0). \quad (282)$$

Отметим, что часто предполагается идеальная геоцентрическая система координат; постоянные (280) и соответствующие им сферические функции в разложении полагаются равными нулю и называются запрещенными.

После этого первого предположения рассмотрим дальнейшие упрощения для тела, симметричного относительно всех трех координатных плоскостей  $(xy), (xz), (yz)$ , например, однородного трехосного эллипсоида. В этом случае

$$\left. \begin{aligned} \iiint_M x^3 dm = 0, \quad \iiint_M y^3 dm = 0, \quad \iiint_M z^3 dm = 0 \\ \iiint_M xy^2 dm = 0, \quad \iiint_M xz^2 dm = 0, \quad \iiint_M yx^2 dm = 0 \\ \iiint_M yz^2 dm = 0, \quad \iiint_M zx^2 dm = 0, \quad \iiint_M zy^2 dm = 0 \\ \iiint_M xyz dm = 0 \end{aligned} \right\} \quad (283)$$

$$\left. \begin{aligned} \iiint_M xy^3 dm = 0, \quad \iiint_M xz^3 dm = 0, \quad \iiint_M x^2yz dm = 0 \\ \iiint_M yx^3 dm = 0, \quad \iiint_M yz^3 dm = 0, \quad \iiint_M y^2xz dm = 0 \\ \iiint_M zx^3 dm = 0, \quad \iiint_M zy^3 dm = 0, \quad \iiint_M z^2xy dm = 0 \end{aligned} \right\} \quad (284)$$

и т. д.

Поэтому для формул (267), (268) и (282)

$$Y_2(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0) = \left( \frac{A+B}{2} - C \right) P_2^{(0)}(t_0) + \frac{1}{4} (B-A) P_2^{(2)}(t_0) \cos 2\bar{\lambda}_0, \quad (285)$$

$$Y_3(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0) = 0, \quad (286)$$

$$\begin{aligned}
Y_4(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0) &= \iiint_M [z^4 - 3z^2(x^2 + y^2) + \frac{3}{8}(x^2 + y^2)^2] dm P_4^{(4)}(t_0) + \\
&+ \frac{1}{4} \iiint_M [z^2 - \frac{1}{6}(x^2 + y^2)](x^2 - y^2) dm P_4^{(2)}(t_0) \cos 2\bar{\lambda}_0 + \\
&+ \frac{1}{192} \iiint_M (x^4 + y^4 - 6x^2y^2) dm P_4^{(4)}(t_0) \cos 4\bar{\lambda}_0. \quad (287)
\end{aligned}$$

Аналогично можно доказать, что при предположении симметричности все дальнейшие нечетные функции разложения (263) равны нулю, т. е.

$$\left. \begin{aligned}
Y_5(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0) &= 0, \quad Y_7(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0) = 0 \\
Y_9(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0), \dots &
\end{aligned} \right\}. \quad (288)$$

Соответствующие преобразования претерпевают и дальнейшие четные функции  $Y_6(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0)$ ,  $Y_8(\varphi_0, \lambda_0)$ ,  $\dots$ , т. е. из них исчезают тессеральные функции нечетных порядков и функции, содержащие  $\sin k\bar{\lambda}_0$

Выполним дальнейшие упрощения, вводя предположения о симметрии тела относительно оси вращения  $z$ . Тогда

$$B = A \quad (289)$$

и, следовательно, для (285) получится

$$Y_2(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0) = (A - C) P_2^{(2)}(t_0). \quad (290)$$

Упростится и выражение (287) для  $Y_4(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0)$  или

$$\begin{aligned}
\iiint_M x^4 dm &= \iiint_M y^4 dm, \quad \iiint_M x^2z^2 dm = \iiint_M y^2z^2 dm, \\
\iiint_M x^6 dm &= \iiint_M y^6 dm, \quad (291)
\end{aligned}$$

следовательно,

$$\iiint_M \left[ z^2 - \frac{1}{6}(x^2 + y^2) \right] (x^2 - y^2) dm = 0. \quad (292)$$

Должно также иметь место равенство

$$\iiint_M (x^4 + y^4 - 6x^2y^2) dm = 0, \quad (293)$$

или

$$\iiint_M (x^2 + y^2)^2 dm = 8 \iiint_M x^2y^2 dm, \quad (294)$$

так как при симметрии относительно оси  $z$  не будут появляться члены, являющиеся функциями долготы.

С учетом (292) и (294) в данном случае будет справедливо равенство

$$Y_4(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0) = \iint_M [z^4 - 3z^2(x^2 + y^2) + 3x^2y^2] dm P_4^{(\circ)}(t_0). \quad (295)$$

Аналогично упрощаются выражения для последующих четных функций  $Y_6(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0)$ ,  $Y_8(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0)$ , которые вновь превращаются только в зональные функции, следовательно, вообще

$$\begin{aligned} Y_6(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0) &= J_6^{(\circ)} P_6^{(\circ)}(t_0), \\ Y_8(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0) &= J_8^{(\circ)} P_8^{(\circ)}(t_0) \end{aligned} \quad (296)$$

и т. д.

Гравитационный потенциал такого правильного тела вращения, симметричного относительно плоскости экватора, следовательно, равен

$$V(P) = f \left[ \frac{M}{\rho_0} + \frac{J_2^{(\circ)}}{\rho_0^3} P_2^{(\circ)}(t_0) + \frac{J_4^{(\circ)}}{\rho_0^5} P_4^{(\circ)}(t_0) + \frac{J_6^{(\circ)}}{\rho_0^7} P_6^{(\circ)}(t_0) + \dots \right] \quad (297)$$

и не содержит никаких присоединенных сферических функций и нечетных зональных функций.

Если тело вращения несимметрично относительно плоскости ( $xy$ ), например, тело вращения грушевидной формы, то разложение гравитационного потенциала содержит, кроме четных, и нечетные зональные функции и имеет вид

$$\begin{aligned} V(P) &= f \left[ \frac{M}{\rho_0} + \frac{J_2^{(\circ)}}{\rho_0^3} P_2^{(\circ)}(t_0) + \frac{J_3^{(\circ)}}{\rho_0^6} P_3^{(\circ)}(t_0) + \frac{J_4^{(\circ)}}{\rho_0^6} P_4^{(\circ)}(t_0) + \dots \right] = \\ &= f \left[ \frac{M}{\rho_0} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{J_n^{(\circ)}}{\rho_0^{n+1}} P_n^{(\circ)}(t_0) \right]. \end{aligned} \quad (298)$$

Нечетные зональные функции появляются, следовательно, у Земли, обладающей несимметричностью северного и южного полушария.

Главным членом рассматриваемых разложений является  $f(M/\rho_0)$ , который представляет потенциал максимально идеализированной модели — шара с таким распределением массы, что его потенциал равен потенциалу точечной массы. Далее следует член

$$f \frac{J_2^{(\circ)}}{\rho_0^3} P_2^{(\circ)}(t_0) = f \frac{A-C}{\rho_0^3} \left( \frac{3}{2} \sin^2 \bar{\varphi}_0 - \frac{1}{2} \right), \quad (299)$$

который приблизительно на три порядка больше членов, следующих за ним. Если ограничимся этими двумя членами, то получим гравитационный потенциал нормального сфероида Клеро

$$V(P) = f \left[ \frac{M}{\rho_0} + \frac{A-C}{\rho_0^3} \left( \frac{3}{2} \sin^2 \bar{\varphi} - \frac{1}{2} \right) \right] = \\ = \frac{fM}{\rho_0} \left[ 1 + \frac{A-C}{M\rho_0^2} \left( \frac{3}{2} \sin^2 \bar{\varphi}_0 - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (300)$$

Если притягиваемая точка  $P(\rho_0, \bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0)$  размещена непосредственно на поверхности сфероида, то, следовательно, она совершает вращательное движение вместе со сфероидом и поэтому нужно рассматривать потенциал силы тяжести  $W(P)$ , а не потенциал притяжения  $V(P)$ .

С учетом (18), (20) и (5) получим

$$W(P) = \frac{fM}{\rho_0} \left[ 1 + \frac{A-C}{M\rho_0^2} \left( \frac{3}{2} \sin^2 \bar{\varphi}_0 - \frac{1}{2} \right) + \frac{\omega^2}{2fM} \rho_0^3 \cos^2 \bar{\varphi}_0 \right], \quad (301)$$

т. е. известную формулу для так называемого нормального потенциала. Подробнее о выборе нормального поля силы тяжести Земли см. § 35.

### § 13. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ ЗАПИСИ ДЛЯ РАЗЛОЖЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА

Разложение гравитационного потенциала по сферическим функциям (205) описано в ряде публикаций в различных вариантах. Неодинаковы также обозначения динамических постоянных и аргументов потенциальной точки.

В последнее время в динамической спутниковой геодезии применяется окончательный вид формулы гравитационного потенциала, в котором динамические постоянные представлены так, что они являются безразмерными параметрами

$$V(P) = \frac{fM}{\rho_0} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{a_0}{\rho_0} \right)^n \sum_{k=0}^n (J_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda}_0 + S_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda}_0) P_n^{(k)}(t_0) \right] \right\}. \quad (302)$$

Здесь  $a_0$  — произвольная линейная величина, выраженная в таких же единицах, как и  $\rho_0$ ; как правило, за  $a_0$  принимается большая полуось земного эллипсоида.

Новые коэффициенты  $J_n^{(k)}$ ,  $S_n^{(k)}$ , для которых оставим старые обозначения, находятся с прежними коэффициентами (202)—(204) в соотношениях

$$1/M a_0^n \cdot J_n^{(k)}, \quad 1/M a_0^n \cdot S_n^{(k)}.$$

Следовательно, например, для  $n = 0, 1$  с учетом (206), (209) и (214) получится

$$\left. \begin{aligned} J_0^{(0)} &= 1, & J_1^{(1)} &= -\frac{\Delta x_0}{a_0} \\ J_1^{(0)} &= -\frac{\Delta z_0}{a_0}, & S_1^{(1)} &= -\frac{\Delta y_0}{a_0} \end{aligned} \right\}, \quad (303)$$

а для  $n = 2$ , согласно формулам (221), (223), (225), (227), (229) и (275),

$$\left. \begin{aligned} J_2^{(0)} &= \frac{A+B-C}{2Ma_0^2}, & S_2^{(1)} &= \varepsilon_0 \frac{C-B}{Ma_0^2} \\ J_2^{(1)} &= \psi_0 \frac{A-C}{Ma_0^2}, & J_2^{(2)} &= \frac{1}{4} \frac{B-A}{Ma_0^2} \\ S_2^{(2)} &= \frac{1}{2} \frac{F + \omega_0(B-A)}{Ma_0^2} \end{aligned} \right\}, \quad (304)$$

причем углы  $\varepsilon_0$ ,  $\psi_0$ ,  $\omega_0$  в (304) выражаются в радианной мере.

В некоторых работах предпочтение отдается такому виду формулы (302)

$$V(P) = \frac{fM}{a_0} \left[ \frac{a_0}{\rho_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left( \frac{a_0}{\rho_0} \right)^{n+1} (J_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda}_0 + S_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda}_0) P_n^{(k)}(t_0) \right]. \quad (305)$$

Обычно всегда функция  $Y_1(\bar{\varphi}_0, \bar{\lambda}_0)$  опускается, т. е. коэффициенты  $J_1^{(0)}$ ,  $J_1^{(1)}$ ,  $S_1^{(1)}$  сферической функции первой степени считаются равными нулю, так что разложение (205), (302) и (305) начинают при  $n = 2$ .

Во многих работах перед двойной суммой  $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n$  стоит отрицательный знак и существует значительный разнобой в обозначениях динамических постоянных.

Иногда выгодно пользоваться выражением

$$J_n^{(k)} \cos k\lambda + S_n^{(k)} \sin k\lambda = J_{nk} \cos k(\lambda - \lambda_{nk}),$$

где

$$\begin{aligned} J_{nk} &= [(J_n^{(k)})^2 + (S_n^{(k)})^2]^{\frac{1}{2}}, \\ k\lambda_{nk} &= \text{arctg} \frac{S_n^{(k)}}{J_n^{(k)}}, \end{aligned}$$

и, наоборот,

$$\begin{aligned} J_n^{(k)} &= J_{nk} \cos k\lambda_{nk} \\ S_n^{(k)} &= J_{nk} \sin k\lambda_{nk}. \end{aligned}$$

Коэффициент  $J_{nk}$  имеет здесь значение амплитуды, а  $\lambda_{nk}$  — фазы.

#### § 14. НОРМИРОВАНИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ДИНАМИЧЕСКИХ ПОСТОЯННЫХ В РАЗЛОЖЕНИИ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА

Из обзора функций (113) видно, как при возрастающем  $n$  растут и числовые значения коэффициентов, особенно при  $k \rightarrow n$ . Практически это неудобно в особенности с точки зрения простоты применения теории ошибок\* к разложению типа (302). Поэтому понятен переход от употребляемых функций, определяемых формулой (107), к функциям, подходящим образом нормированным.

Норма (нормирующий фактор)  $N_n^{(k)}$ , соответствующая функции  $P_n^{(k)}(t)$ , может быть выбрана различным образом. Удобен такой выбор, при котором интегральная средняя величина квадрата нормированной элементарной сферической функции  $P_n^{(k)}(t) \frac{\cos k\bar{\lambda}}{\sin k\bar{\lambda}}$  равна

1 (на референционной сфере).

Тогда имеем условия

$$\begin{aligned} \left[ N_n^{(k)} P_n^{(k)} \frac{\cos k\bar{\lambda}}{\sin k\bar{\lambda}} \right]_m^2 &= [N_n^{(k)}]^2 \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \left[ P_n^{(k)} \frac{\cos k\bar{\lambda}}{\sin k\bar{\lambda}} \right]^2 d\bar{\lambda} dt = \\ &= [N_n^{(k)}]^2 \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left[ P_n^{(k)} \frac{\cos k\bar{\lambda}}{\sin k\bar{\lambda}} \right]^2 \cos \bar{\varphi} d\bar{\lambda} d\bar{\varphi} = 1, \end{aligned} \quad (306)$$

из которых с учетом формул (172), (173), (176) и (177) получаем для нормы следующие выражения:

а) при  $k \neq 0$

$$[N_n^{(k)}]^2 = \frac{4\pi}{\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \left[ P_n^{(k)}(t) \frac{\cos k\bar{\lambda}}{\sin k\bar{\lambda}} \right]^2 d\bar{\lambda} dt} = \frac{2(2n+1)(n-k)!}{(n+k)!}; \quad (307)$$

б) при  $k = 0$

$$[N_n^{(0)}]^2 = 2n + 1, \quad (308)$$

или, вместо (307) и (308),

$$N_n^{(k)} = \sqrt{\frac{(2 - \delta_k)(2n+1)(n-k)!}{(n+k)!}}, \quad (309)$$

где  $\delta_k = \begin{cases} 0 & k \neq 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$ , есть так называемый символ Кронекера.

Обратные величины нормы (309) приведены для  $n = 1, 2, \dots, 10$  в табл. 1.

\* В ЭВМ невозможно использовать без преобразований сферические функции и динамические постоянные высоких степеней и порядков, так как они выражаются числами, число разрядов которых превышает число возможных разрядов ЭВМ (Прим. ред.).

$n$	$k=0$	$k=1$	$k=2$
0	1,000 000 0000		
1	0,577 350 2693	0,577 350 269	
2	0,447 213 5956	0,774 596 669	1,549 193 338
3	0,377 964 4731	0,925 820 100	2,927 700 219
4	0,333 333 3334	1,054 092 554	4,472 135 955
5	0,301 511 3446	1,167 748 416	6,179 143 805
6	0,277 350 0982	1,270 977 818	8,038 369 525
7	0,258 198 8898	1,366 260 102	10,039 920 32
8	0,242 535 6251	1,455 213 750	12,175 191 75
9	0,229 415 7340 *	1,538 967 528	14,436 795 10
10	0,218 217 8903	1,618 347 188	16,818 357 32
$n$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
3	7,171 371 655		
4	16,733 200 53	47,328 638 26	
5	30,271 498 74	128,431 092 2	406,134 773 8
6	48,230 217 15	264,167 778 8	1 239,056 713
7	70,992 957 40	470,914 004 9	2 825,484 030
8	98,911 725 35	766,166 930 0	5 524,908 305
9	132,315 412 65	1168,578 084	9 777,025 700
10	171,514 264 30	1697,904 591	16 107,737 27
$n$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
6	4 292,218 362		
7	14 407,198 20	53 906,799 55	
8	35 805,498 10	196 114,789 9	784 459,159 5
9	75 732,515 45	524 690,258 0	3 059 443,654
10	144 071,982 0	1 188 047,999	8 730 334,366
$n$	$k=9$	$k=10$	
9	12 980 120,13		
10	53 817 394,15	240 678 703,4	

\* Исправленное по сравнению с оригиналом значение (Прим. ред.).

Функции Лежандра  $P_n^{(k)}(t)$ , умноженные на норму  $N_n^{(k)}$ , называются нормированными и обычно помечаются черточкой сверху

$$\overline{P}_n^{(k)}(t) = N_n^{(k)} P_n^{(k)}(t). \quad (310)$$

Согласно условию (306), тогда имеет место

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \left[ \frac{\overline{P}_n^{(k)}(t) \cos k\bar{\lambda}}{\sin k\bar{\lambda}} \right]^2 d\bar{\lambda} dt = 1. \quad (311)$$

Например, при  $n = 2$  и  $k = 2$  получим действительно

$$\begin{aligned} & \frac{5}{48\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{3\cos^2\bar{\varphi} \cos 2\bar{\lambda}}{\sin 2\bar{\lambda}} \right]^2 \cos^2\bar{\varphi} d\bar{\lambda} d\bar{\varphi} = \\ & = \frac{15}{16\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4\bar{\varphi} \cos^2 2\bar{\lambda}}{\sin^2 2\bar{\lambda}} d\bar{\lambda} d\bar{\varphi} = \frac{15}{16\pi} 2 \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 5} \pi = 1. \end{aligned}$$

Некоторые авторы оперируют с функциями Лежандра, нормированными, как говорят, частично (обозначим их для отличия двумя черточками), например, согласно условию

$$\int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \left[ \frac{\overline{\overline{P}}_n^{(k)}(t) \cos k\bar{\lambda}}{\sin k\bar{\lambda}} \right]^2 d\bar{\lambda} dt = \frac{4\pi}{2n+1}. \quad (312)$$

Эти функции мы не будем здесь использовать.

Если применять нормированные функции, то, разумеется, в разложениях типа (302) нужно динамические постоянные  $J_n^{(k)}$ ,  $S_n^{(k)}$  разделить на ту норму  $N_n^{(k)}$ , на которую были умножены функции  $P_n^{(k)}$ . Если обозначить их также черточкой сверху, то

$$\overline{J}_n^{(k)} = \frac{1}{N_n^{(k)}} J_n^{(k)}, \quad (313)$$

$$\overline{S}_n^{(k)} = \frac{1}{N_n^{(k)}} S_n^{(k)},$$

т. е. при нормировании

$$\left. \begin{aligned} \overline{J}_n^{(k)} &= \sqrt{\frac{(n+k)!}{(2-\delta_k)(2n+1)(n-k)!}} J_n^{(k)} \\ \overline{S}_n^{(k)} &= \sqrt{\frac{(n+k)!}{(2-\delta_k)(2n+1)(n-k)!}} S_n^{(k)} \end{aligned} \right\}. \quad (314)$$

Разложение (302), следовательно (если динамические постоянные суть безразмерные параметры, см. § 13), примет вид

$$V(P) = \frac{fM}{\rho_0} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_0}{\rho_0} \right)^n \sum_{k=0}^n (\bar{J}_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda}_0 + \bar{S}_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda}_0) \bar{P}_n^{(k)}(t_0) \right\}. \quad (315)$$

Иногда зональные функции не нормируют, так как величины их коэффициентов возрастают, но не так быстро; интегральная средняя величина их квадрата, согласно (176), равна

$$[P_n^{(\circ)}(t)]_m^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} [P_n^{(\circ)}(t)]^2 dt + \frac{1}{2n+1}. \quad (316)$$

Если нормируются только функции тессеральные и секториальные, то разложение (315) принимает вид

$$V(P) = \frac{fM}{\rho_0} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_0}{\rho_0} \right)^n \left[ J_n^{(\circ)} P_n^{(\circ)}(t_0) + \sum_{k=1}^n (\bar{J}_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda}_0 + \bar{S}_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda}_0) \bar{P}_n^{(k)}(t_0) \right] \right\}. \quad (317)$$

## § 15. ВОЗМУЩАЮЩИЙ ПОТЕНЦИАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

В динамической космической геодезии, как и в динамической геодезии вообще, выгодно оперировать с разностью действительного потенциала Земли и потенциала определенной модели, заменяющей Землю. Эта разность называется возмущающим потенциалом.

Для потенциала Земли во внешней притягиваемой точке  $P(\rho, \varphi, \bar{\lambda})$ , совершающей общее с Землей вращательное движение, имеет место, с учетом формул (302), (18) и (23), выражение (нижний индекс «0» при координатах потенциальной точки здесь и в дальнейшем опускаем)

$$W = \frac{fM}{\rho} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^n \sum_{k=0}^n (J_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda} + S_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda}) P_n^{(k)}(\sin \bar{\varphi}) \right] \right\} + \frac{1}{2} \omega^2 \rho^2 \cos^2 \bar{\varphi} + \omega^2 (X \Delta x_0 + Y \Delta y_0 - \psi_0 XZ + \varepsilon_0 YZ). \quad (318)$$

Модель Земли, т. е. так называемое нормальное или референцное тело, вводится так, чтобы ее центр тяжести совпадал с началом системы  $X, Y, Z$ , в которой выражен потенциал (318). Нормальной Земле приписывается такая же угловая скорость вращения  $\omega$ , какую имеет действительная Земля.

Само собой разумеется, что вращение ее происходит вокруг оси  $Z$  референционной системы координат.

Потенциал силы тяжести  $U$  такой модели в той же внешней притягиваемой точке  $P$  ( $\rho$ ,  $\bar{\varphi}$ ,  $\bar{\lambda}$ ) называется нормальным потенциалом и он равен

$$U = \frac{f\tilde{M}}{\rho} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^N \left[ \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^n \sum_{k=0}^n (\tilde{J}_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda} + \tilde{S}_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda}) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times P_n^{(k)}(\sin \bar{\varphi}) \right] \right\} + \frac{1}{2} \omega^2 \rho^2 \cos^2 \bar{\varphi}, \quad (319)$$

где  $N$  — конечное число.

Общая сферическая функция 1-й степени

$$\sum_{k=0}^1 (\tilde{J}_1^{(k)} \cos k\bar{\lambda} + \tilde{S}_1^{(k)} \sin k\bar{\lambda}) P_1^{(k)}(\sin \bar{\varphi}) \quad (320)$$

в формуле (319) отсутствует в результате совмещения центра тяжести нормальной Земли с началом рассматриваемой системы координат. Волнистой линией сверху отметим динамические коэффициенты (Стоксовы постоянные)  $\tilde{M}$ ,  $\tilde{J}_n^{(k)}$ ,  $\tilde{S}_n^{(k)}$ , соответствующие модели Земли.

С учетом (318) и (319) можно возмущающий потенциал выразить в виде

$$T = W - U = \frac{fM - f\tilde{M}}{\rho} + \frac{fM}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^n \sum_{k=0}^n (J_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda} + S_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda}) \times \right. \\ \left. \times P_n^{(k)}(\sin \bar{\varphi}) \right] - \frac{f\tilde{M}}{\rho} \sum_{n=2}^N \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^n \sum_{k=0}^n (\tilde{J}_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda} + \tilde{S}_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda}) P_n^{(k)}(\sin \bar{\varphi}) + \\ + \omega^2 (X \Delta x_0^n + Y \Delta y_0 - \psi_0 XZ + \varepsilon_0 YZ). \quad (321)$$

Далее предположим, что

$$f\tilde{M} = fM, \quad (322)$$

т. е. что геоцентрическая постоянная нормального тела равна геоцентрической постоянной действительного тела. Тогда формула (321) примет вид

$$T = \frac{fM}{\rho} \left\{ \left( \frac{a_0}{\rho} \right) \sum_{k=0}^1 (J_1^{(k)} \cos k\bar{\lambda} + S_1^{(k)} \sin k\bar{\lambda}) P_1^{(k)}(\sin \bar{\varphi}) + \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^N \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^n \sum_{k=0}^n [(J_n^{(k)} - \tilde{J}_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda} + (S_n^{(k)} - \tilde{S}_n^{(k)}) \sin k\bar{\lambda}] P_n^{(k)}(\sin \bar{\varphi}) + \right.$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} \left( \frac{a_0}{\rho} \right) \sum_{k=0}^n \left( J_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda} + S_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda} \right) P_n^{(k)}(\sin \bar{\varphi}) \Big\} + \\ + \omega^2 (X \Delta x_0 + Y \Delta y_0 - \psi_0 XZ + \varepsilon_0 YZ). \quad (323)$$

В динамической космической геодезии применяется решение задачи, частично основанное на данных о силе тяжести на земной поверхности, которые определяются гравиметрическими методами. В этом решении нормальный потенциал обычно определяется при помощи параметров уровня эллипсоида (см. § 33).

Возмущающий потенциал (321) и (323) обладает свойствами гравитационного потенциала, вплоть до малого члена  $\delta Q(P)$ , представляющего разность потенциалов центробежных сил (23) обоих тел (т. е. действительного и нормального земного тела). Поскольку справедливы равенства

$$\frac{\partial \delta Q(P)}{\partial X} = \omega^2 (\Delta x_0 - \psi_0 Z), \quad (324)$$

$$\frac{\partial \delta Q(P)}{\partial Y} = \omega^2 (\Delta y_0 + \varepsilon_0 Z), \quad (325)$$

$$\frac{\partial \delta Q(P)}{\partial Z} = \omega^2 (-\psi_0 X + \varepsilon_0 Y), \quad (326)$$

то

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \delta Q(P)}{\partial X^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \delta Q(P)}{\partial Y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 \delta Q(P)}{\partial Z^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (327)$$

и

$$\Delta \delta Q(P) = 0 \quad (328)$$

и, следовательно, всегда

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} = \Delta T = 0. \quad (329)$$

Поэтому возмущающий потенциал есть гармоническая функция во всем внешнем пространстве; это имеет место и при  $\Delta x_0 \neq 0$ ,  $\Delta y_0 \neq 0$ ,  $\Delta z_0 \neq 0$ ,  $\varepsilon_0 \neq 0$ ,  $\psi_0 \neq 0$ ,  $\nu_0 \neq 0$  — пока, разумеется, квадраты этих элементов переноса и вращения можно не учитывать.

Если

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_0 &= 0, & \Delta y_0 &= 0 \\ \varepsilon_0 &= 0, & \psi_0 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (330)$$

т. е. если оси вращения обоих тел тождественны, то, согласно (23)

$$\delta Q(P) = 0, \quad (331)$$

а возмущающий потенциал является:

а) функцией непрерывной и ограниченной во всем внешнем пространстве;

б) функцией с непрерывными и ограниченными производными всех порядков в любом направлении во всем внешнем пространстве;

в) функцией регулярной в бесконечности, т. е.

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} T = 0. \quad (332)$$

Если далее, кроме условий (330), имеет место

$$\Delta z_0 = 0, \quad (333)$$

то, кроме того,

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho T) = fM - f\tilde{M} = \text{const} \quad (334)$$

и при условии (322) получим

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho T) = 0. \quad (335)$$

При условиях (322) и (330) выполняется также равенство

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} (\rho^2 T) = 0. \quad (336)$$

Из приведенных соотношений вытекает следующее. Если ось вращения нормального тела совпадает с осью вращения Земли, то возмущающий потенциал убывает по крайней мере как  $1/\rho$ ; если, кроме того, геоцентрические постоянные обоих тел равны, т. е. если имеет место условие (322), то возмущающий потенциал убывает по крайней мере как  $1/\rho^2$ ; если и центры тяжести обоих тел совпадают, то возмущающий потенциал убывает по закону  $1/\rho^3$ .

В небесной механике возмущающий потенциал рассматривается, как правило, в ином виде, так как за референсное (нормальное) тело принимается обычно сфера с геоцентрической постоянной, равной геоцентрической постоянной реальной Земли. Кроме того, не учитывается потенциал центробежной силы, так как притягивающие точки так удалены от земной поверхности, что общего вращательного движения их с Землей не происходит. Тогда в этих точках влияет только сила притяжения и, согласно (319),

$$U = \frac{fM}{\rho}, \quad (337)$$

а согласно (323)

$$T = \frac{fM}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^n \sum_{k=0}^n (J_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda} + S_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda}) P_n^{(k)}(\sin \bar{\varphi}) \right]. \quad (338)$$

Часто рассматривается система, имеющая начало в центре масс Земли, так как движение спутников является геоцентрическим, т. е. оскулирующие плоскости их орбит (см. § 18) проходят через центр масс.

Тогда

$$\text{и} \quad \Delta x_0 = 0, \quad \Delta y_0 = 0, \quad \Delta z_0 = 0$$

$$\bar{T} = \frac{fM}{\rho} \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^n \sum_{k=0}^n (J_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda} + S_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda}) P_n^{(k)}(\sin \bar{\varphi}) \right]. \quad (339)$$

Возмущающий потенциал (339) отметим чертой сверху для отличия от (338).

**ДВИЖЕНИЕ СПУТНИКА  
В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ЗЕМЛИ**

**§ 16. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ НЬЮТОНА И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ  
ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА**

В части I книги мы привели элементарные сведения о проблеме двух тел, которые нужно было предпослать для объяснения сущности определения геоцентрических положений искусственного спутника Земли. Здесь будем заниматься динамикой спутника с точки зрения его использования для решения геодезических задач. Динамикой спутника занимается небесная механика, ей в настоящее время посвящено достаточно много учебников и монографий (например, [7—23]). Здесь рассматривается только минимум сведений, без которых нельзя приступить к решению задач динамической космической геодезии.

**1. Уравнения движения в геоцентрической системе**

Будем рассматривать спутник в виде точечной массы  $S_c$  с массой

$$m_c = 1, \quad (340)$$

а поле, в котором движется спутник, будем считать полем исключительно гравитационным с потенциалом  $V$ . Будем исходить из кинетической энергии спутника  $E_k$ , которая равна

$$E_k = \frac{1}{2} v^2 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 \right], \quad (341)$$

где  $v$  — скорость движения спутника, а  $(dx/dt)$ ,  $(dy/dt)$ ,  $(dz/dt)$  — составляющие скорости по координатным осям геоцентрической системы координат  $(x, y, z)$ \*.

Составляющие движения (при  $m_c = 1$ ), численно равные составляющим скорости, тогда будут равны

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial E_k}{\partial \frac{dx}{dt}}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial E_k}{\partial \frac{dy}{dt}}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial E_k}{\partial \frac{dz}{dt}}. \quad (342)$$

\* Определение систем координат дано в части I, главе 4.

Если  $V$  — гравитационный потенциал в точке  $S_c$ , а составляющие действующей силы равны

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial V}{\partial z}, \quad (343)$$

то Ньютоновы уравнения движения запишутся в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = F_z. \quad (344)$$

Теперь выведем уравнения движения Лагранжа второго ряда для случая одной точечной массы в геоцентрических экваториальных координатах, для которых справедливы соотношения

$$\left. \begin{aligned} x &= \Delta \cos \delta \cos T \\ y &= -\Delta \cos \delta \sin T \\ z &= \Delta \sin \delta \end{aligned} \right\}. \quad (345)$$

Кинетическая энергия (341), выраженная в этих координатах, равна

$$E_k = 1/2 \left[ \left( \frac{d\Delta}{dt} \right)^2 + \Delta^2 \left( \frac{d\delta}{dt} \right)^2 + \Delta^2 \left( \frac{dT}{dt} \right)^2 \cos^2 \delta \right], \quad (346)$$

а составляющие (342)

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial \Delta} \frac{d\Delta}{dt} + \frac{\partial x}{\partial \delta} \frac{d\delta}{dt} + \frac{\partial x}{\partial T} \frac{dT}{dt} = \cos \delta \cos T \frac{d\Delta}{dt} - \\ &\quad - \Delta \sin \delta \cos T \frac{d\delta}{dt} - \Delta \cos \delta \sin T \frac{dT}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial \Delta} \frac{d\Delta}{dt} + \frac{\partial y}{\partial \delta} \frac{d\delta}{dt} + \frac{\partial y}{\partial T} \frac{dT}{dt} = -\cos \delta \sin T \frac{d\Delta}{dt} + \\ &\quad + \Delta \sin \delta \sin T \frac{d\delta}{dt} - \Delta \cos \delta \cos T \frac{dT}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial \Delta} \frac{d\Delta}{dt} + \frac{\partial z}{\partial \delta} \frac{d\delta}{dt} + \frac{\partial z}{\partial T} \frac{dT}{dt} = \sin \delta \frac{d\Delta}{dt} + \Delta \cos \delta \frac{d\delta}{dt} \end{aligned} \right\}, \quad (347)$$

Из соотношения (347) вытекают равенства

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{\partial x}{\partial \Delta} = \cos \delta \cos T, & \frac{\partial}{\partial t} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial \delta} = -\Delta \sin \delta \cos T \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{d\Delta}{dt} & & \frac{\partial}{\partial t} \frac{d\delta}{dt} & \\ & & \frac{\partial}{\partial t} \frac{dT}{dt} & \\ & & \frac{\partial}{\partial t} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial T} = -\Delta \cos \delta \sin T \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial \Delta} = -\cos \delta \sin T, & \frac{\partial}{\partial t} \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial \delta} = \Delta \sin \delta \sin T \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{d\Delta}{dt} & & \frac{\partial}{\partial t} \frac{d\delta}{dt} & \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial} \frac{\frac{\partial y}{\partial t}}{\frac{dT}{dt}} &= \frac{\partial y}{\partial T} = -\Delta \cos \delta \cos T \\ \frac{\partial}{\partial} \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{d\Delta}{dt}} &= \frac{\partial z}{\partial \Delta} = \sin \delta, \quad \frac{\partial}{\partial} \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{d\delta}{dt}} = \frac{\partial z}{\partial \delta} = \Delta \cos \delta \\ \frac{\partial}{\partial} \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dT}{dt}} &= \frac{\partial z}{\partial T} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (348)$$

Далее выразим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial} \frac{d\Delta}{dt} &= \frac{\partial E_k}{\partial} \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial} \frac{dx}{d\Delta} + \frac{\partial E_k}{\partial} \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial} \frac{dy}{d\Delta} + \frac{\partial E_k}{\partial} \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial} \frac{dz}{d\Delta} \\ \frac{\partial E_k}{\partial} \frac{d\delta}{dt} &= \frac{\partial E_k}{\partial} \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial} \frac{dx}{d\delta} + \frac{\partial E_k}{\partial} \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial} \frac{dy}{d\delta} + \frac{\partial E_k}{\partial} \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial} \frac{dz}{d\delta} \\ \frac{\partial E_k}{\partial} \frac{dT}{dt} &= \frac{\partial E_k}{\partial} \frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial} \frac{dx}{dT} + \frac{\partial E_k}{\partial} \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial} \frac{dy}{dT} + \frac{\partial E_k}{\partial} \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial} \frac{dz}{dT} \end{aligned} \right\} \quad (349)$$

или, с учетом уравнений (342) и (348),

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial} \frac{d\Delta}{dt} &= \frac{dx}{dt} \frac{\partial x}{\partial \Delta} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial y}{\partial \Delta} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial z}{\partial \Delta} \\ \frac{\partial E_k}{\partial} \frac{d\delta}{dt} &= \frac{dx}{dt} \frac{\partial x}{\partial \delta} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial y}{\partial \delta} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial z}{\partial \delta} \\ \frac{\partial E_k}{\partial} \frac{dT}{dt} &= \frac{dx}{dt} \frac{\partial x}{\partial T} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial y}{\partial T} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial z}{\partial T} \end{aligned} \right\} \quad (350)$$

Отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial} \frac{d\Delta}{dt} \right) &= \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial \Delta} + \frac{dx}{dt} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial \Delta} \right) + \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{\partial y}{\partial \Delta} + \\ &+ \frac{dy}{dt} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y}{\partial \Delta} \right) + \frac{d^2 z}{dt^2} \frac{\partial z}{\partial \Delta} + \frac{dz}{dt} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial z}{\partial \Delta} \right) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial} \frac{d\delta}{dt} \right) &= \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial \delta} + \frac{dx}{dt} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial \delta} \right) + \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{\partial y}{\partial \delta} + \end{aligned} \right\} \quad (351)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{dy}{dt} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y}{\partial \delta} \right) + \frac{d^2 z}{dt^2} \frac{\partial z}{\partial \delta} + \frac{dz}{dt} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial z}{\partial \delta} \right) \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \frac{dT}{dt}} \right) &= \frac{d^2 x}{dt^2} \frac{\partial x}{\partial T} + \frac{dx}{dt} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial T} \right) + \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{\partial y}{\partial T} + \\
 & + \frac{dy}{dt} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y}{\partial T} \right) + \frac{d^2 z}{dt^2} \frac{\partial z}{\partial T} + \frac{dz}{dt} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial z}{\partial T} \right)
 \end{aligned}$$

или, с учетом выражений (344),

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \frac{d\Delta}{dt}} \right) &= F_x \frac{\partial x}{\partial \Delta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \Delta} + F_z \frac{\partial z}{\partial \Delta} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial \Delta} \left( \frac{dx}{dt} \right) + \\
 & + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial \Delta} \left( \frac{dy}{dt} \right) + \frac{dz}{dt} \frac{\partial}{\partial \Delta} \left( \frac{dz}{dt} \right) \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \frac{d\delta}{dt}} \right) &= F_x \frac{\partial x}{\partial \delta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \delta} + F_z \frac{\partial z}{\partial \delta} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial \delta} \left( \frac{dx}{dt} \right) + \\
 & + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial \delta} \left( \frac{dy}{dt} \right) + \frac{dz}{dt} \frac{\partial}{\partial \delta} \left( \frac{dz}{dt} \right) \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \frac{dT}{dt}} \right) &= F_x \frac{\partial x}{\partial T} + F_y \frac{\partial y}{\partial T} + F_z \frac{\partial z}{\partial T} + \\
 & + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{dx}{dt} \right) + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{dy}{dt} \right) + \frac{dz}{dt} \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{dz}{dt} \right)
 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{d}{dt}} \right\} (352)$$

так как, согласно уравнениям (348) и (347),

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial \Delta} \right) &= \frac{d}{dt} (\cos \delta \cos T) = -\sin \delta \cos T \frac{d\delta}{dt} - \\
 & - \cos \delta \sin T \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial \Delta} \left( \frac{dx}{dt} \right) \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y}{\partial \Delta} \right) &= \frac{d}{dt} (-\cos \delta \sin T) = \sin \delta \sin T \frac{d\delta}{dt} - \\
 & - \cos \delta \cos T \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial \Delta} \left( \frac{dy}{dt} \right) \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial z}{\partial \Delta} \right) &= \frac{d}{dt} (\sin \delta) = \cos \delta \frac{d\delta}{dt} = \frac{\partial}{\partial \Delta} \left( \frac{dz}{dt} \right) \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial \delta} \right) &= \frac{d}{dt} (-\Delta \sin \delta \cos T) = \\
 & = -\sin \delta \cos T \frac{d\Delta}{dt} - \Delta \cos \delta \cos T \frac{d\delta}{dt} + \\
 & + \Delta \sin \delta \sin T \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial \delta} \left( \frac{dx}{dt} \right) \\
 \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y}{\partial \delta} \right) &= \frac{d}{dt} (\Delta \sin \delta \sin T) = \sin \delta \sin T \frac{d\Delta}{dt} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\Delta \cos \delta \sin T \frac{d\delta}{dt} + \Delta \sin \delta \cos T \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial \delta} \left( \frac{dy}{dt} \right) \quad (353) \\
& \left. \begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial z}{\partial \delta} \right) &= \frac{d}{dt} (\Delta \cos \delta) = \cos \delta \frac{d\Delta}{dt} - \\
& - \Delta \sin \delta \frac{d\delta}{dt} = \frac{\partial}{\partial \delta} \left( \frac{dz}{dt} \right) \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial T} \right) &= \frac{d}{dt} (-\Delta \cos \delta \sin T) = \\
& = -\cos \delta \sin T \frac{d\Delta}{dt} + \Delta \sin \delta \sin T \frac{d\delta}{dt} - \\
& - \Delta \cos \delta \cos T \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{dx}{dt} \right) \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y}{\partial T} \right) &= \frac{d}{dt} (-\Delta \cos \delta \cos T) = -\cos \delta \cos T \times \\
& \times \frac{d\Delta}{dt} + \Delta \sin \delta \cos T \frac{d\delta}{dt} + \Delta \cos \delta \sin T \frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{dy}{dt} \right) \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial z}{\partial T} \right) &= \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{dz}{dt} \right) = 0
\end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

Теперь убедимся, что, согласно (341), имеют место равенства

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial E_k}{\partial \Delta} &= \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial \Delta} \left( \frac{dx}{dt} \right) + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial \Delta} \left( \frac{dy}{dt} \right) + \frac{dz}{dt} \frac{\partial}{\partial \Delta} \left( \frac{dz}{dt} \right) \\
\frac{\partial E_k}{\partial \delta} &= \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial \delta} \left( \frac{dx}{dt} \right) + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial \delta} \left( \frac{dy}{dt} \right) + \frac{dz}{dt} \frac{\partial}{\partial \delta} \left( \frac{dz}{dt} \right) \\
\frac{\partial E_k}{\partial T} &= \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{dx}{dt} \right) + \frac{dy}{dt} \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{dy}{dt} \right) + \frac{dz}{dt} \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{dz}{dt} \right)
\end{aligned} \right\} \quad (354)$$

а согласно основному определению потенциала и уравнению (343) справедливы соотношения

$$\left. \begin{aligned}
F_x \frac{\partial x}{\partial \Delta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \Delta} + F_z \frac{\partial z}{\partial \Delta} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \Delta} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \Delta} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \Delta} = \frac{\partial V}{\partial \Delta} \\
F_x \frac{\partial x}{\partial \delta} + F_y \frac{\partial y}{\partial \delta} + F_z \frac{\partial z}{\partial \delta} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \delta} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \delta} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \delta} = \frac{\partial V}{\partial \delta} \\
F_x \frac{\partial x}{\partial T} + F_y \frac{\partial y}{\partial T} + F_z \frac{\partial z}{\partial T} &= \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial T} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial T} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial T} = \frac{\partial V}{\partial T}
\end{aligned} \right\} \quad (355)$$

Тогда уравнения (352) можно переписать в виде

$$\left. \begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \frac{d\Delta}{dt}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \Delta} &= \frac{\partial V}{\partial \Delta} \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \frac{d\delta}{dt}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \delta} &= \frac{\partial V}{\partial \delta} \\
\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \frac{dT}{dt}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial T} &= \frac{\partial V}{\partial T}
\end{aligned} \right\} \quad (356)$$

что является обычной формой уравнений движения Лагранжа второго рода в геоцентрических экваториальных координатах  $\Delta, \delta, T$ .

Общий вид этих уравнений для системы  $n$  точечных масс (неподверженных сцеплению)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \frac{dq_r}{dt}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_r} = Q_r, \quad r = 1, 2, \dots, s; \quad (357)$$

здесь  $s = 3n$  — число степеней свободы,  $q_1, q_2, \dots, q_r$  — обобщенные координаты;  $Q_r$  — обобщенная действующая сила. Уравнения (356) представляют частный случай уравнений (357) для

$$n = 1, \quad q_1 = \Delta, \quad q_2 = \delta, \quad q_3 = T, \quad Q_1 = \frac{\partial V}{\partial \Delta}, \quad Q_2 = \frac{\partial V}{\partial \delta} \quad \text{и} \quad Q_3 = \frac{\partial V}{\partial T}.$$

Из уравнений Лагранжа (357) тотчас же вытекают уравнения Ньютона, если подставить в них

$$n = 1, \quad q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z, \quad Q_1 = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Q_2 = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Q_3 = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Они получатся в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \frac{\partial x}{\partial t}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial x} &= \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \frac{\partial y}{\partial t}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial y} &= \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \frac{\partial z}{\partial t}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial z} &= \frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned} \right\}. \quad (358)$$

Отсюда, с учетом соотношений (342) и равенств  $dE_k/dx = dE_k/dy = dE_k/dz = 0$ , тотчас же получаются уравнения (344).

Если подставим в уравнение (356) выражение для кинетической энергии в сферических координатах (346), причем учтя, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial \frac{d\Delta}{dt}} &= \frac{d\Delta}{dt} \\ \frac{\partial E_k}{\partial \frac{d\delta}{dt}} &= \Delta^2 \frac{d\delta}{dt} \\ \frac{\partial E_k}{\partial \frac{dT}{dt}} &= \Delta^2 \cos^2 \delta \frac{dT}{dt} \end{aligned} \right\}, \quad (359)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial \Delta} &= \Delta \left[ \left( \frac{d\delta}{dt} \right)^2 + \cos^2 \delta \left( \frac{dT}{dt} \right)^2 \right] \\ \frac{\partial E_k}{\partial \delta} &= -\Delta^2 \sin \delta \cos \delta \left( \frac{dT}{dt} \right)^2 \\ \frac{\partial E_k}{\partial T} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (360)$$

то получим уравнения движения в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \Delta}{dt^2} - \Delta \left( \frac{d\delta}{dt} \right)^2 - \Delta \cos^2 \delta \left( \frac{dT}{dt} \right)^2 &= \frac{\partial V}{\partial \Delta} \\ \Delta^2 \frac{d^2 \delta}{dt^2} + 2\Delta \frac{d\Delta}{dt} \frac{d\delta}{dt} + \Delta^2 \sin \delta \cos \delta \left( \frac{dT}{dt} \right)^2 &= \frac{\partial V}{\partial \delta} \\ \Delta^2 \cos^2 \delta \frac{d^2 T}{dt^2} + 2\Delta \cos^2 \delta \frac{d\Delta}{dt} \frac{dT}{dt} - \Delta^2 \sin 2\delta \frac{d\delta}{dt} \frac{dT}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial T} \end{aligned} \right\}. \quad (361)$$

Эти уравнения можно также получить путем подстановки (345) в уравнения движения Ньютона.

## 2. Уравнения движения в геодезической референционной системе

Идеальная геоцентрическая система координат в настоящее время еще не может быть реализована, а как раз некоторые задачи космической геодезии (орбитальные задачи геометрической космической геодезии) формулируются именно в этой системе. Поэтому может оказаться нужным исследовать движение спутников в известной геодезической референционной системе  $X, Y, Z^*$  или  $\rho, \bar{\varphi}, \bar{\lambda}$  (см. уравнения (5)).

Уравнения движения Ньютона совершенно аналогичны уравнениям (344), т. е. имеют вид

$$\left. \frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial X}, \quad \frac{d^2 Y}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial Y}, \quad \frac{d^2 Z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial Z} \right\}, \quad (362)$$

а уравнения Лагранжа второго рода, вытекающие из (357) при  $n = 1$ ,

$$q_1 = \rho, \quad q_2 = \bar{\varphi}, \quad q_3 = \bar{\lambda},$$

имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \frac{d\rho}{dt}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \rho} &= \frac{\partial V}{\partial \rho} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \frac{d\bar{\varphi}}{dt}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \bar{\varphi}} &= \frac{\partial V}{\partial \bar{\varphi}} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \frac{d\bar{\lambda}}{dt}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \bar{\lambda}} &= \frac{\partial V}{\partial \bar{\lambda}} \end{aligned} \right\}. \quad (363)$$

\* Определение геодезической референционной системы дано в ч. I, главе 4.

С учетом уравнений (5), кинетическая энергия будет равна

$$E_k = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{dX}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dY}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dZ}{dt} \right)^2 \right] = \\ = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\rho}{dt} \right)^2 + \rho^2 \left( \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \right)^2 + \rho^2 \cos^2 \bar{\varphi} \left( \frac{d\bar{\lambda}}{dt} \right)^2 \right] \quad (364)$$

и, следовательно, из уравнения (363) получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \left( \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \right)^2 - \rho \cos^2 \bar{\varphi} \left( \frac{d\bar{\lambda}}{dt} \right)^2 &= \frac{\partial V}{\partial \rho} \\ \rho^2 \left( \frac{d^2\bar{\varphi}}{dt^2} \right) + 2\rho \frac{d\rho}{dt} \frac{d\bar{\varphi}}{dt} + \rho^2 \sin \bar{\varphi} \cos \bar{\varphi} \left( \frac{d\bar{\lambda}}{dt} \right)^2 &= \frac{\partial V}{\partial \bar{\varphi}} \\ \rho^2 \cos^2 \bar{\varphi} \frac{d^2\bar{\lambda}}{dt^2} + 2\rho \cos^2 \bar{\varphi} \frac{d\rho}{dt} \frac{d\bar{\lambda}}{dt} - \rho^2 \sin 2\bar{\varphi} \frac{d\bar{\varphi}}{dt} \frac{d\bar{\lambda}}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial \bar{\lambda}} \end{aligned} \right\} \quad (364a)$$

В эти зависимости введем еще соотношения между  $d^2X/dt^2$  и  $d^2x/dt^2$ ,  $d^2Y/dt^2$  и  $d^2y/dt^2$ ,  $d^2Z/dt^2$  и  $d^2z/dt^2$ . Будем исходить из уравнений, связывающих геоцентрические и референсные координаты (см. часть I, § 4), откуда вытекают (при удержании только первых степеней) трансформационные элементы.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dX}{dt} + \omega_0 \frac{dY}{dt} - \psi_0 \frac{dZ}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dY}{dt} - \omega_0 \frac{dX}{dt} + \varepsilon_0 \frac{dZ}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{dZ}{dt} + \psi_0 \frac{dX}{dt} - \varepsilon_0 \frac{dY}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (365)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \frac{dx}{dt} - \omega_0 \frac{dy}{dt} + \psi_0 \frac{dz}{dt} \\ \frac{dY}{dt} &= \frac{dy}{dt} + \omega_0 \frac{dx}{dt} - \varepsilon_0 \frac{dz}{dt} \\ \frac{dZ}{dt} &= \frac{dz}{dt} - \psi_0 \frac{dx}{dt} + \varepsilon_0 \frac{dy}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (366)$$

и далее

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2X}{dt^2} + \omega_0 \frac{d^2Y}{dt^2} - \psi_0 \frac{d^2Z}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2Y}{dt^2} - \omega_0 \frac{d^2X}{dt^2} + \varepsilon_0 \frac{d^2Z}{dt^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d^2Z}{dt^2} + \psi_0 \frac{d^2X}{dt^2} - \varepsilon_0 \frac{d^2Y}{dt^2} \end{aligned} \right\} \quad (367)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2X}{dt^2} &= \frac{d^2x}{dt^2} - \omega_0 \frac{d^2y}{dt^2} + \psi_0 \frac{d^2z}{dt^2} \\ \frac{d^2Y}{dt^2} &= \frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0 \frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon_0 \frac{d^2z}{dt^2} \\ \frac{d^2Z}{dt^2} &= \frac{d^2z}{dt^2} - \psi_0 \frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon_0 \frac{d^2y}{dt^2} \end{aligned} \right\} \quad (368)$$

Элементы сдвига  $\Delta x_0$ ,  $\Delta y_0$ ,  $\Delta z_0$  и направляющие углы  $\varepsilon_0$ ,  $\psi_0$ ,  $\omega_0$  являются постоянными во времени, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d \Delta x_0}{dt} = 0, \quad \frac{d \Delta y_0}{dt} = 0, \quad \frac{d \Delta z_0}{dt} = 0, \\ \frac{d \varepsilon_0}{dt} = 0, \quad \frac{d \psi_0}{dt} = 0, \quad \frac{d \omega_0}{dt} = 0. \end{aligned}$$

## § 17. ВОЗМУЩАЮЩАЯ ФУНКЦИЯ

В правых частях уравнений (344), (361) фигурируют составляющие действующей силы. Если предположить, что действуют только гравитационные силы\*, т. е. силы консервативные, имеющие однозначные потенциалы, то эти составляющие равны соответствующим частным производным общего потенциала, который равен сумме гравитационных потенциалов всех тел, гравитационное воздействие которых влияет на исследуемое движение. Потенциалы как величины скалярные можно суммировать алгебраически.

В случае ИСЗ принимается во внимание, кроме потенциала Земли, потенциал Луны  $V_{\zeta}$  и Солнца  $V_{\odot}$  (возмущения  $R_{\zeta}$  и  $R_{\odot}$ ) и уравнения движения Ньютона (344) с учетом уравнений (205), (302) могут быть записаны в виде:

а) в геодезической референционной системе  $X, Y, Z$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 X}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial X} \left\{ \frac{fM}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^n \sum_{k=0}^n (J_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + S_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda} \right) P_n^{(k)}(\sin \bar{\varphi}) \right] + R_{\zeta} + R_{\odot} \right\} \\ \frac{d^2 Y}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial Y} \left\{ \frac{fM}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^n \sum_{k=0}^n (J_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + S_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda} \right) P_n^{(k)}(\sin \bar{\varphi}) \right] + R_{\zeta} + R_{\odot} \right\} \\ \frac{d^2 Z}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ \frac{fM}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^n \sum_{k=0}^n (J_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + S_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda} \right) P_n^{(k)}(\sin \bar{\varphi}) \right] + R_{\zeta} + R_{\odot} \right\} \end{aligned} \right\}; \quad (369)$$

\* Предполагаем, что поправка за влияние атмосферы, за световое давление, за эффект теории относительности Эйнштейна и др. уже учтены, так что исследуемая орбита спутника свободна от этих влияний.

б) в геоцентрической системе

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{fM}{\Delta} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a_0}{\Delta} \right)^n \sum_{k=0}^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + S_n^{(k)} \sin k\lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right] + \bar{R}_C + \bar{R}_\odot \right\} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{fM}{\Delta} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a_0}{\Delta} \right)^n \sum_{k=0}^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + S_n^{(k)} \sin k\lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right] + \bar{R}_C + \bar{R}_\odot \right\} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{fM}{\Delta} \left[ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{a_0}{\Delta} \right)^n \sum_{k=0}^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + S_n^{(k)} \sin k\lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right] + \bar{R}_C + \bar{R}_\odot \right\} \end{aligned} \right\}. \quad (370)$$

В формулах (370) приняты обозначения:  $\Phi = \delta$ ,  $\Lambda = -T^*$ ,  $\bar{R}_C$  и  $\bar{R}_\odot$  — возмущения, вызываемые Луной и Солнцем; сферическая функция 1-й степени здесь отсутствует, так как  $J_1^{(0)} = J_1^{(1)} = S_1^{(1)} = 0$ ; в случае геоцентрической системы точно так же  $\Delta x_0 = \Delta y_0 = \Delta z_0 = 0$  (см. § 12).

Уравнения движения (369) и (370) можно переписать следующим образом:

а) в геодезической референционной системе

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2X}{dt^2} &= fM \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial X} + \frac{\partial R}{\partial X} \\ \frac{d^2Y}{dt^2} &= fM \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial Y} + \frac{\partial R}{\partial Y} \\ \frac{d^2Z}{dt^2} &= fM \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial Z} + \frac{\partial R}{\partial Z} \end{aligned} \right\}; \quad (371)$$

\* Определение геоцентрических экваториальных координат см. часть I, глава 4.

б) в геоцентрической системе

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= fM \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= fM \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial y} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= fM \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial z} \end{aligned} \right\}, \quad (372)$$

или, с учетом соотношений,

$$\rho = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial X} = -\frac{X}{\rho^3}, \quad \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial Y} = -\frac{Y}{\rho^3}, \quad \frac{\partial \frac{1}{\rho}}{\partial Z} = -\frac{Z}{\rho^3}, \quad (373)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial x} &= -\frac{x}{\Delta^3}, \quad \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial y} = -\frac{y}{\Delta^3} \\ \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial z} &= -\frac{z}{\Delta^3} \end{aligned} \right\}, \quad (374)$$

можно написать:

а) в геодезической референцной системе

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2X}{dt^2} + fM \frac{X}{\rho^3} &= \frac{\partial R}{\partial X} \\ \frac{d^2Y}{dt^2} + fM \frac{Y}{\rho^3} &= \frac{\partial R}{\partial Y} \\ \frac{d^2Z}{dt^2} + fM \frac{Z}{\rho^3} &= \frac{\partial R}{\partial Z} \end{aligned} \right\}; \quad (375)$$

б) в геоцентрической системе

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + fM \frac{x}{\Delta^3} &= \frac{\partial \bar{R}}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} + fM \frac{y}{\Delta^3} &= \frac{\partial \bar{R}}{\partial y} \\ \frac{d^2z}{dt^2} + fM \frac{z}{\Delta^3} &= \frac{\partial \bar{R}}{\partial z} \end{aligned} \right\}, \quad (376)$$

где с учетом (302)

$$R = \frac{fM}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^n \sum_{k=0}^n (J_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda} + S_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda}) P_n^{(k)}(\sin \bar{\varphi}) \right] + R_c + R_{\odot} \quad (377)$$

и

$$\bar{R} = \frac{fM}{\Delta} \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \left( \frac{a_0}{\Delta} \right)^n \sum_{k=0}^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + S_n^{(k)} \sin k\Lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right] + \bar{R}_c + \bar{R}_\odot. \quad (378)$$

Функции  $R$  и  $\bar{R}$  суть так называемые возмущающие (пертурбационные) функции. Их части

$$\frac{fM}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^n \sum_{k=0}^n (J_n^{(k)} \cos k\bar{\lambda} + S_n^{(k)} \sin k\bar{\lambda}) P_n^{(k)}(\sin \bar{\varphi}) \right] = T \quad (379)$$

и

$$\frac{fM}{\Delta} \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \left( \frac{a_0}{\Delta} \right)^n \sum_{k=0}^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + S_n^{(k)} \sin k\Lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right] = \bar{T} \quad (380)$$

представляют возмущающий потенциал Земли, который остается после выделения из действительного потенциала Земли потенциала однородного шара с массой, равной массе Земли.

Возмущающие потенциалы  $T$  и  $\bar{T}$  можно определять и иначе, например, как в физической геодезии, где из полного потенциала выделяют потенциал сфероида вращения или уровенного эллипсоида вращения. Вообще можно из рядов (379), (380) выделить любое число членов, поскольку соответствующие динамические постоянные  $J_n^{(k)}$ ,  $S_n^{(k)}$  известны, и за возмущающий потенциал принять оставшиеся члены.

Интегрирование полученных таким образом дифференциальных уравнений, разумеется, более сложно, чем в том случае, если оставлен только потенциал однородного шара (см. уравнения (375) и (376)).

Именно тогда можно использовать общие интегралы соответствующих однородных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2X}{dt^2} + fM \frac{X}{\rho^3} &= 0 \\ \frac{d^2Y}{dt^2} + fM \frac{Y}{\rho^3} &= 0 \\ \frac{d^2Z}{dt^2} + fM \frac{Z}{\rho^3} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (381)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + fM \frac{x}{\Delta^3} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + fM \frac{y}{\Delta^3} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} + fM \frac{z}{\Delta^3} = 0, \quad (382)$$

соответствующих проблеме двух тел (часть I, уравнение (249)).

Общие интегралы являются общими функциями времени и шести интегральных постоянных, называемых элементами орбиты, как

правило,  $\Omega$ ,  $i$ ,  $a$ ,  $e$ ,  $\omega$ ,  $M_0$  (см. часть I, § 19)\*. В геоцентрической системе, например:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t; \Omega, i, \omega, a, e, M_0) \\ y &= f_2(t; \Omega, i, \omega, a, e, M_0) \\ z &= f_3(t; \Omega, i, \omega, a, e, M_0) \end{aligned} \right\}. \quad (383)$$

Для краткости будем в дальнейшем изложении все рассуждения и математические формулировки связывать только с геоцентрической системой.

## § 18. ПОНЯТИЕ О МГНОВЕННЫХ И ОСКУЛИРУЮЩИХ ЭЛЕМЕНТАХ ОРБИТЫ

Возмущающие функции, обусловленные аномальностью формы и внутреннего строения Земли, а также притяжением Солнца и Луны, вызывают отклонения в движении спутника от идеального кеплеровского движения, определяемого уравнениями (382).

Действительное движение спутника описывают общие интегралы системы дифференциальных уравнений шестого порядка (376). Эти уравнения можно решать различными способами. Вероятно, лучше всего учитывать тот факт, что составляющие  $\partial \bar{R}/\partial x$ ,  $\partial \bar{R}/\partial y$ ,  $\partial \bar{R}/\partial z$ , сообщаемые спутнику возмущающие ускорения, на несколько порядков меньше, чем ускорения  $fM(x/\Delta^3)$ ,  $fM(y/\Delta^3)$ ,  $fM(z/\Delta^3)$ , т. е. ускорения от идеальной шарообразной Земли.

В этом случае выгоден метод Лагранжа — метод вариации постоянных, в котором общие интегралы однородных уравнений (376) ищутся в таком виде, как и (383), но интегральные постоянные считаются функциями времени. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1[t; \Omega(t), i(t), \omega(t), a(t), e(t), M_0(t)] \\ y &= f_2[t; \Omega(t), i(t), \omega(t), a(t), e(t), M_0(t)] \\ z &= f_3[t; \Omega(t), i(t), \omega(t), a(t), e(t), M_0(t)] \end{aligned} \right\}. \quad (384)$$

Тогда, очевидно, функции  $\Omega(t)$ ,  $i(t)$ ,  $\omega(t)$ ,  $a(t)$ ,  $e(t)$ ,  $M_0(t)$  должны удовлетворять определенным условиям. Три из них вытекают из подстановки общих интегралов (384) в уравнения (376), которые являются их решением. Имеют место соотношения

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial t} + F_1(t) \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial t} + F_2(t) \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial t} + F_3(t) \end{aligned} \right\}, \quad (385)$$

\* Вместо момента прохождения через перигей  $t_0$  будем здесь в качестве шестого элемента использовать среднюю аномалию  $M_0$ , причем  $M = M_0 + \sqrt{fM} a^{-3/2} (t - t_0)$ .

где

$$F_1(t) = \frac{\partial x}{\partial \Omega(t)} \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{\partial x}{\partial i(t)} \frac{di(t)}{dt} + \frac{\partial x}{\partial \omega(t)} \frac{d\omega(t)}{dt} +$$

$$+ \frac{\partial x}{\partial a(t)} \frac{da(t)}{dt} + \frac{\partial x}{\partial e(t)} \frac{de(t)}{dt} + \frac{\partial x}{\partial M_0(t)} \frac{dM_0(t)}{dt}, \quad (386)$$

$$F_2(t) = \frac{\partial y}{\partial \Omega(t)} \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{\partial y}{\partial i(t)} \frac{di(t)}{dt} + \frac{\partial y}{\partial \omega(t)} \frac{d\omega(t)}{dt} +$$

$$+ \frac{\partial y}{\partial a(t)} \frac{da(t)}{dt} + \frac{\partial y}{\partial e(t)} \frac{de(t)}{dt} + \frac{\partial y}{\partial M_0(t)} \frac{dM_0(t)}{dt}, \quad (387)$$

$$F_3(t) = \frac{\partial z}{\partial \Omega(t)} \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{\partial z}{\partial i(t)} \frac{di(t)}{dt} + \frac{\partial z}{\partial \omega(t)} \frac{d\omega(t)}{dt} +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial a(t)} \frac{da(t)}{dt} + \frac{\partial z}{\partial e(t)} \frac{de(t)}{dt} + \frac{\partial z}{\partial M_0(t)} \frac{dM_0(t)}{dt}. \quad (388)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) + \frac{dF_1}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{dF_2}{dt} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) + \frac{dF_3}{dt} \end{aligned} \right\}, \quad (389)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial \Omega(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial i(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{di(t)}{dt} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \omega(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial a(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{da(t)}{dt} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial e(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{de(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial M_0(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{dM_0(t)}{dt} + \frac{dF_1}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial \Omega(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial i(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{di(t)}{dt} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \omega(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial a(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{da(t)}{dt} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial e(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{de(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial M_0(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{dM_0(t)}{dt} + \frac{dF_2}{dt} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial \Omega(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial i(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{di(t)}{dt} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \omega(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial a(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{da(t)}{dt} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial e(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{de(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial M_0(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{dM_0(t)}{dt} + \frac{dF_3}{dt} \end{aligned} \right\}. \quad (390)$$

Если подставим выражения (390) в уравнения движения (376), то получим

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + fM \frac{x}{\Delta^3} + \frac{\partial}{\partial \Omega(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial i(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{di(t)}{dt} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial \omega(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial a(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{da(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial e(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{de(t)}{dt} + \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial M_0(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{dM_0(t)}{dt} + \frac{dF_1}{dt} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial x} \\
 & \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + fM \frac{y}{\Delta^3} + \frac{\partial}{\partial \Omega(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial i(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{di(t)}{dt} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial \omega(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial a(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{da(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial e(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{de(t)}{dt} + \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial M_0(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{dM_0(t)}{dt} + \frac{dF_2}{dt} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial y} \\
 & \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + fM \frac{z}{\Delta^3} + \frac{\partial}{\partial \Omega(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial i(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{di(t)}{dt} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial \omega(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial a(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{da(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial e(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{de(t)}{dt} + \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial M_0(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{dM_0(t)}{dt} + \frac{dF_3}{dt} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial z}
 \end{aligned} \right\} (391)$$

Теперь убедимся, что при постоянных элементах  $\Omega(t) = \text{const}$ ,  $i(t) = \text{const}$  и т. д. общие интегралы (384) должны удовлетворять уравнениям невозмущенного движения (382), т. е. что в (391) должно иметь место

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + fM \frac{x}{\Delta^3} = 0 \\
 & \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + fM \frac{y}{\Delta^3} = 0 \\
 & \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + fM \frac{z}{\Delta^3} = 0
 \end{aligned} \right\} (392)$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \Omega(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial i(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{di(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial \omega(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{d\omega(t)}{dt} + \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial a(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{da(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial e(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{de(t)}{dt} + \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial M_0(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{dM_0(t)}{dt} + \frac{dF_1}{dt} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial x} \\
 & \frac{\partial}{\partial \Omega(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial i(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{di(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial \omega(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{d\omega(t)}{dt} + \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial a(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{da(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial e(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{de(t)}{dt} +
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & + \frac{\partial}{\partial M_0(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{dM_0(t)}{dt} + \frac{dF_2}{dt} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial y} \\
 & \frac{\partial}{\partial \Omega(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial i(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{di(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial \omega(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{d\omega(t)}{dt} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial a(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{da(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial e(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{de(t)}{dt} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial M_0(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{dM_0(t)}{dt} + \frac{dF_3}{dt} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial z}
 \end{aligned} \right\} \quad (393)$$

поэтому имеем три условия для шести неизвестных функций  $\Omega(t)$ ,  $i(t)$ ,  $\dots$ ,  $M_0(t)$ .

Для однозначности решения требуются еще три условия. Их можно выбрать так:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial x}{\partial \Omega(t)} \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{\partial x}{\partial i(t)} \frac{di(t)}{dt} + \frac{\partial x}{\partial \omega(t)} \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{\partial x}{\partial a(t)} \frac{da(t)}{dt} + \\
 & + \frac{\partial x}{\partial e(t)} \frac{de(t)}{dt} + \frac{\partial x}{\partial M_0(t)} \frac{dM_0(t)}{dt} = F_1 = 0,
 \end{aligned} \quad (394)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial y}{\partial \Omega(t)} \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{\partial y}{\partial i(t)} \frac{di(t)}{dt} + \frac{\partial y}{\partial \omega(t)} \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{\partial y}{\partial a(t)} \frac{da(t)}{dt} + \\
 & + \frac{\partial y}{\partial e(t)} \frac{de(t)}{dt} + \frac{\partial y}{\partial M_0(t)} \frac{dM_0(t)}{dt} = F_2 = 0,
 \end{aligned} \quad (395)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial z}{\partial \Omega(t)} \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{\partial z}{\partial i(t)} \frac{di(t)}{dt} + \frac{\partial z}{\partial \omega(t)} \frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{\partial z}{\partial a(t)} \frac{da(t)}{dt} + \\
 & + \frac{\partial z}{\partial e(t)} \frac{de(t)}{dt} + \frac{\partial z}{\partial M_0(t)} \frac{dM_0(t)}{dt} = F_3 = 0.
 \end{aligned} \quad (396)$$

Если подставим выражения (394)–(396) в (385), получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial t}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial f_2}{\partial t}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial f_3}{\partial t}.$$

Это значит, что составляющие скорости спутника, вычисленные по общим интегралам путем дифференцирования по времени, идентичны составляющим, вычисленным при невозмущенном движении (в проблеме двух тел) на данный момент времени (эпоху)  $t$ .

При этих условиях по наблюдаемым положениям ИСЗ и составляющим скорости спутника  $dx/dt$ ,  $dy/dt$ ,  $dz/dt$  в тот же момент  $t$  при помощи теории невозмущенного движения определяют действительное движение и, наоборот, по совокупности функций  $\Omega(t)$ ,  $i(t)$ ,  $\dots$ ,  $M_0(t)$  вычисляют для данного момента положение и составляющие скорости, которые действительно имел спутник.

При справедливости дополнительных условий (394)—(396) упрощаются основные условия (393), так как

$$\frac{dF_1}{dt} = 0, \quad \frac{dF_2}{dt} = 0, \quad \frac{dF_3}{dt} = 0$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Omega(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial i(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{di(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial \omega(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{d\omega(t)}{dt} + \\ + \frac{\partial}{\partial a(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{da(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial e(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{de(t)}{dt} + \\ + \frac{\partial}{\partial M_0(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{dM_0(t)}{dt} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial x}, \end{aligned} \quad (397)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Omega(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial i(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{di(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial \omega(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{d\omega(t)}{dt} + \\ + \frac{\partial}{\partial a(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{da(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial e(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{de(t)}{dt} + \\ + \frac{\partial}{\partial M_0(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{dM_0(t)}{dt} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial y}, \end{aligned} \quad (398)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \Omega(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{d\Omega(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial i(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{di(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial \omega(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{d\omega(t)}{dt} + \\ + \frac{\partial}{\partial a(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{da(t)}{dt} + \frac{\partial}{\partial e(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{de(t)}{dt} + \\ + \frac{\partial}{\partial M_0(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{dM_0(t)}{dt} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (399)$$

Элементы  $\Omega(t)$ ,  $i(t)$ ,  $\dots$ ,  $t_0(t)$ , удовлетворяющие условиям (393) или эквивалентным им условиям, называются **мгновенными**. Они дают возможность, применяя теорию невозмущенного движения, вычислить действительное положение спутника, т. е. его координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Элементы  $\Omega(t)$ ,  $i(t)$ ,  $\dots$ ,  $t_0(t)$ , удовлетворяющие, кроме условий (393) и последующим трем условиям (394)—(396), или преобразованным шести условиям (394)—(399), или эквивалентным им условиям, называются **оскулирующими\***, а  $t$  — **моментом (эпохой) оскулирования**. Эти определения являются однозначными.

Они для момента  $t$  определяют движение по эллипсу (вообще по коническому сечению), которое совершал бы спутник в предположении, что возмущающая функция  $\bar{R}$  стала точно равной нулю. Они дают возможность, применяя теорию невозмущенного движения, вычислить как координаты действительного положения спутника

\* Содержание понятия «оскулирующие элементы» является, следовательно, более узким, чем содержание понятия «мгновенные элементы». Иногда, однако, эти понятия путают.

$x, y, z$ , так и составляющие скорости  $dx/dt, dy/dt, dz/dt$  в момент оскуляции  $t$ . Система оскулирующих элементов дает возможность, следовательно, просто и при этом точно описать реальное, т. е. возмущенное движение спутника.

## § 19. ВОЗМУЩЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ

### 1. Скобки Лагранжа

Величины  $d\Omega(t)/dt, di(t)/dt, \dots, dM_0(t)/dt$ , называемые возмущениями элементов орбиты, определяются уравнениями (394)—(399), хотя и однозначно, но для практического применения эти соотношения неудобны. Найдем более удобные подробные выражения, повторяя выводы Лагранжа [8].

Умножив уравнения (394)—(399) последовательно в их очередности на выражения

$$-\frac{\partial}{\partial\Omega(t)}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right), \quad -\frac{\partial}{\partial\Omega(t)}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right), \quad -\frac{\partial}{\partial\Omega(t)}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right), \\ \frac{\partial x}{\partial\Omega(t)}, \quad +\frac{\partial y}{\partial\Omega(t)}, \quad +\frac{\partial z}{\partial\Omega(t)}$$

и сложив их, получим уравнение

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial}{\partial i(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial x}{\partial\Omega(t)} - \frac{\partial x}{\partial i(t)} \frac{\partial}{\partial\Omega(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right] \frac{di(t)}{dt} + \\ & + \left[ \frac{\partial}{\partial\omega(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial x}{\partial\Omega(t)} - \frac{\partial x}{\partial\omega(t)} \frac{\partial}{\partial\Omega(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right] \frac{d\omega(t)}{dt} + \\ & + \left[ \frac{\partial}{\partial a(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial x}{\partial\Omega(t)} - \frac{\partial x}{\partial a(t)} \frac{\partial}{\partial\Omega(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right] \frac{da(t)}{dt} + \\ & + \left[ \frac{\partial}{\partial e(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial x}{\partial\Omega(t)} - \frac{\partial x}{\partial e(t)} \frac{\partial}{\partial\Omega(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right] \frac{de(t)}{dt} + \\ & + \left[ \frac{\partial}{\partial M_0(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \frac{\partial x}{\partial\Omega(t)} - \frac{\partial x}{\partial M_0(t)} \frac{\partial}{\partial\Omega(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right] \frac{dM_0(t)}{dt} + \\ & + \left[ \frac{\partial}{\partial i(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial y}{\partial\Omega(t)} - \frac{\partial y}{\partial i(t)} \frac{\partial}{\partial\Omega(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right] \frac{di(t)}{dt} + \\ & + \left[ \frac{\partial}{\partial\omega(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial y}{\partial\Omega(t)} - \frac{\partial y}{\partial\omega(t)} \frac{\partial}{\partial\Omega(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right] \frac{d\omega(t)}{dt} + \\ & + \left[ \frac{\partial}{\partial a(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial y}{\partial\Omega(t)} - \frac{\partial y}{\partial a(t)} \frac{\partial}{\partial\Omega(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right] \frac{da(t)}{dt} + \\ & + \left[ \frac{\partial}{\partial e(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial y}{\partial\Omega(t)} - \frac{\partial y}{\partial e(t)} \frac{\partial}{\partial\Omega(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right] \frac{de(t)}{dt} + \\ & + \left[ \frac{\partial}{\partial M_0(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \frac{\partial y}{\partial\Omega(t)} - \frac{\partial y}{\partial M_0(t)} \frac{\partial}{\partial\Omega(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right] \frac{dM_0(t)}{dt} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{\partial}{\partial i(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{\partial z}{\partial \Omega(t)} - \frac{\partial z}{\partial i(t)} \frac{\partial}{\partial \Omega(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right] \frac{di(t)}{dt} + \\
& + \left[ \frac{\partial}{\partial \omega(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{\partial z}{\partial \Omega(t)} - \frac{\partial z}{\partial \omega(t)} \frac{\partial}{\partial \Omega(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right] \frac{d\omega(t)}{dt} + \\
& + \left[ \frac{\partial}{\partial a(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{\partial z}{\partial \Omega(t)} - \frac{\partial z}{\partial a(t)} \frac{\partial}{\partial \Omega(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right] \frac{da(t)}{dt} + \\
& + \left[ \frac{\partial}{\partial e(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{\partial z}{\partial \Omega(t)} - \frac{\partial z}{\partial e(t)} \frac{\partial}{\partial \Omega(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right] \frac{de(t)}{dt} + \\
& + \left[ \frac{\partial}{\partial M_0(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \frac{\partial z}{\partial \Omega(t)} - \frac{\partial z}{\partial M_0(t)} \frac{\partial}{\partial \Omega(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right] \frac{dM_0(t)}{dt} = \\
& = \frac{\partial \bar{R}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \Omega(t)} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \Omega(t)} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \Omega(t)} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \Omega(t)}, \quad (400)
\end{aligned}$$

представляющее собой частную производную возмущающей функции по элементу  $\Omega(t)$ .

Аналогично представим частную производную  $d\bar{R}/di(t)$  путем умножения уравнений (394)–(399) последовательно на выражения

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial}{\partial i(t)} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right), \quad - \frac{\partial}{\partial i(t)} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right), \quad - \frac{\partial}{\partial i(t)} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right), \\
& + \frac{\partial x}{\partial i(t)}, \quad + \frac{\partial y}{\partial i(t)}, \quad + \frac{\partial z}{\partial i(t)}
\end{aligned}$$

и последующего сложения. В дальнейшем таким же образом получим и частные производные по остальным элементам  $dR/d\omega(t)$ ,  $dR/da(t)$ ,  $dR/de(t)$ ,  $dR/dM_0(t)$ .

Если ввести для элементов  $\Omega(t)$ ,  $i(t)$ ,  $\dots$ ,  $M_0(t)$  более экономные обозначения  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $\dots$ ,  $e_6$ , то можно вместо (400) записать

$$\begin{aligned}
& \frac{de_2}{dt} \left[ \frac{\partial x}{\partial e_1} \frac{\partial}{\partial e_2} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) - \frac{\partial x}{\partial e_2} \frac{\partial}{\partial e_1} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) + \frac{\partial y}{\partial e_1} \frac{\partial}{\partial e_2} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial y}{\partial e_2} \frac{\partial}{\partial e_1} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{\partial z}{\partial e_1} \frac{\partial}{\partial e_2} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) - \frac{\partial z}{\partial e_2} \frac{\partial}{\partial e_1} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right] + \\
& + \frac{de_3}{dt} \left[ \frac{\partial x}{\partial e_1} \frac{\partial}{\partial e_3} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) - \frac{\partial x}{\partial e_3} \frac{\partial}{\partial e_1} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) + \frac{\partial y}{\partial e_1} \frac{\partial}{\partial e_3} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial y}{\partial e_3} \frac{\partial}{\partial e_1} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{\partial z}{\partial e_1} \frac{\partial}{\partial e_3} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) - \frac{\partial z}{\partial e_3} \frac{\partial}{\partial e_1} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right] + \\
& + \frac{de_4}{dt} \left[ \frac{\partial x}{\partial e_1} \frac{\partial}{\partial e_4} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) - \frac{\partial x}{\partial e_4} \frac{\partial}{\partial e_1} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) + \frac{\partial y}{\partial e_1} \frac{\partial}{\partial e_4} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial y}{\partial e_4} \frac{\partial}{\partial e_1} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{\partial z}{\partial e_1} \frac{\partial}{\partial e_4} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) - \frac{\partial z}{\partial e_4} \frac{\partial}{\partial e_1} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right] + \\
& + \frac{de_5}{dt} \left[ \frac{\partial x}{\partial e_1} \frac{\partial}{\partial e_5} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) - \frac{\partial x}{\partial e_5} \frac{\partial}{\partial e_1} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) + \frac{\partial y}{\partial e_1} \frac{\partial}{\partial e_5} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial y}{\partial e_5} \frac{\partial}{\partial e_1} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{\partial z}{\partial e_1} \frac{\partial}{\partial e_5} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) - \frac{\partial z}{\partial e_5} \frac{\partial}{\partial e_1} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{de_6}{dt} \left[ \frac{\partial x}{\partial e_1} \frac{\partial}{\partial e_6} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) - \frac{\partial x}{\partial e_6} \frac{\partial}{\partial e_1} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) + \right. \\
& + \frac{\partial y}{\partial e_1} \frac{\partial}{\partial e_6} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) - \frac{\partial y}{\partial e_6} \frac{\partial}{\partial e_1} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{\partial z}{\partial e_1} \frac{\partial}{\partial e_6} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) - \\
& \left. - \frac{\partial z}{\partial e_6} \frac{\partial}{\partial e_1} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right] = \frac{\partial \bar{R}}{\partial e_1}
\end{aligned} \tag{401}$$

и аналогично следующие пять уравнений для  $\partial \bar{R}/\partial e_2$ ,  $\partial \bar{R}/\partial e_3$ , . . . ,  $\partial \bar{R}/\partial e_6$ .

Для выражений в квадратных скобках, на которые умножаются неизвестные  $de_1/dt$ , . . . ,  $de_6/dt$ , можно для удобства использовать символы, называемые скобками Лагранжа

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial x}{\partial e_i} \frac{\partial}{\partial e_k} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) - \frac{\partial x}{\partial e_k} \frac{\partial}{\partial e_i} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) + \frac{\partial y}{\partial e_i} \frac{\partial}{\partial e_k} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) - \frac{\partial y}{\partial e_k} \frac{\partial}{\partial e_i} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \\
& + \frac{\partial z}{\partial e_i} \frac{\partial}{\partial e_k} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) - \frac{\partial z}{\partial e_k} \frac{\partial}{\partial e_i} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) = [e_i, e_k].
\end{aligned} \tag{402}$$

Используя названные символы, можно затем написать

$$\begin{aligned}
[e_1, e_2] \frac{de_2}{dt} + [e_1, e_3] \frac{de_3}{dt} + [e_1, e_4] \frac{de_4}{dt} + [e_1, e_5] \frac{de_5}{dt} + \\
+ [e_1, e_6] \frac{de_6}{dt} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial e_1},
\end{aligned} \tag{403}$$

$$\begin{aligned}
[e_2, e_1] \frac{de_1}{dt} + [e_2, e_3] \frac{de_3}{dt} + [e_2, e_4] \frac{de_4}{dt} + [e_2, e_5] \frac{de_5}{dt} + \\
+ [e_2, e_6] \frac{de_6}{dt} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial e_2},
\end{aligned} \tag{404}$$

$$\begin{aligned}
[e_3, e_1] \frac{de_1}{dt} + [e_3, e_2] \frac{de_2}{dt} + [e_3, e_4] \frac{de_4}{dt} + \\
+ [e_3, e_5] \frac{de_5}{dt} + [e_3, e_6] \frac{de_6}{dt} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial e_3},
\end{aligned} \tag{405}$$

$$\begin{aligned}
[e_4, e_1] \frac{de_1}{dt} + [e_4, e_2] \frac{de_2}{dt} + [e_4, e_3] \frac{de_3}{dt} + \\
+ [e_4, e_5] \frac{de_5}{dt} + [e_4, e_6] \frac{de_6}{dt} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial e_4},
\end{aligned} \tag{406}$$

$$\begin{aligned}
[e_5, e_1] \frac{de_1}{dt} + [e_5, e_2] \frac{de_2}{dt} + [e_5, e_3] \frac{de_3}{dt} + \\
+ [e_5, e_4] \frac{de_4}{dt} + [e_5, e_6] \frac{de_6}{dt} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial e_5},
\end{aligned} \tag{407}$$

$$\begin{aligned}
[e_6, e_1] \frac{de_1}{dt} + [e_6, e_2] \frac{de_2}{dt} + [e_6, e_3] \frac{de_3}{dt} + \\
+ [e_6, e_4] \frac{de_4}{dt} + [e_6, e_5] \frac{de_5}{dt} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial e_6}.
\end{aligned} \tag{408}$$

В системе шести уравнений (403)—(408) с шестью неизвестными  $de_i/dt$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, 6$  встречается всего 30 скобок Лагранжа.

Согласно соотношению

$$[c_i, c_k] = -[c_k, c_i], \quad (409)$$

вытекающему из их определения (402), скобок Лагранжа с разными абсолютными величинами будет всего только 15.

Уравнения (403)—(408) в матричной форме поэтому можем наглядно записать в виде

$$\begin{bmatrix} 0 & [e_1, e_2] & [e_1, e_3] & [e_1, e_4] & [e_1, e_5] & [e_1, e_6] \\ -[e_1, e_2] & 0 & [e_2, e_3] & [e_2, e_4] & [e_2, e_5] & [e_2, e_6] \\ -[e_1, e_3] & -[e_2, e_3] & 0 & [e_3, e_4] & [e_3, e_5] & [e_3, e_6] \\ -[e_1, e_4] & -[e_2, e_4] & -[e_3, e_4] & 0 & [e_4, e_5] & [e_4, e_6] \\ -[e_1, e_5] & -[e_2, e_5] & -[e_3, e_5] & -[e_4, e_5] & 0 & [e_5, e_6] \\ -[e_1, e_6] & -[e_2, e_6] & -[e_3, e_6] & -[e_4, e_6] & -[e_5, e_6] & 0 \end{bmatrix} \times \begin{matrix} \left[ \begin{array}{c} \frac{de_1}{dt} \\ \frac{de_2}{dt} \\ \frac{de_3}{dt} \\ \frac{de_4}{dt} \\ \frac{de_5}{dt} \\ \frac{de_6}{dt} \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial \bar{R}}{\partial e_1} \\ \frac{\partial \bar{R}}{\partial e_2} \\ \frac{\partial \bar{R}}{\partial e_3} \\ \frac{\partial \bar{R}}{\partial e_4} \\ \frac{\partial \bar{R}}{\partial e_5} \\ \frac{\partial \bar{R}}{\partial e_6} \end{array} \right] \end{matrix} \quad (410)$$

Скобки Лагранжа являются функциями частных производных координат  $x, y, z$  и составляющих скорости  $dx/dt, dy/dt, dz/dt$  по отдельным элементам невозмущенного движения. Для их вычисления, следовательно, достаточно соотношений, входящих в решение проблемы двух тел.

Замечательным свойством скобок Лагранжа является их инвариантность по отношению ко времени, т. е. условие

$$\frac{\partial}{\partial t} [e_i, e_k] = 0. \quad (411)$$

Докажем это

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [e_i, e_k] &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x}{\partial e_i} \right) \frac{\partial}{\partial e_k} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) + \frac{\partial x}{\partial e_i} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial e_k} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right] - \\ &- \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x}{\partial e_k} \right) \frac{\partial}{\partial e_i} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) - \frac{\partial x}{\partial e_k} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial e_i} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial y}{\partial e_i} \right) \frac{\partial}{\partial e_k} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{\partial y}{\partial e_i} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial e_k} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right] - \\
& - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial y}{\partial e_k} \right) \frac{\partial}{\partial e_i} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) - \frac{\partial y}{\partial e_k} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial e_i} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial z}{\partial e_i} \right) \frac{\partial}{\partial e_k} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) + \\
& + \frac{\partial z}{\partial e_i} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial e_k} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial z}{\partial e_k} \right) \frac{\partial}{\partial e_i} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) - \frac{\partial z}{\partial e_k} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial}{\partial e_i} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right] = \\
& = \frac{\partial}{\partial e_i} \left[ \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial e_k} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) - \frac{\partial x}{\partial e_k} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial e_k} \left[ \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial e_i} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial x}{\partial e_i} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial e_i} \left[ \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial e_k} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) - \frac{\partial y}{\partial e_k} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right] - \\
& - \frac{\partial}{\partial e_k} \left[ \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial e_i} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) - \frac{\partial y}{\partial e_i} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial e_i} \left[ \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial e_k} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial z}{\partial e_k} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial e_k} \left[ \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial e_i} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) - \frac{\partial z}{\partial e_i} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right]. \quad (412)
\end{aligned}$$

Убедимся, что с учетом условий (394)–(396) должно для (385) иметь место

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{dx}{dt}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{dz}{dt}.$$

Следовательно,

$$\left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 = 2E_k, \quad (413)$$

поэтому

$$\frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial}{\partial e_\nu} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial}{\partial e_\nu} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) + \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial e_\nu} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) = \frac{\partial E_k}{\partial e_\nu}, \quad \nu = i, k. \quad (414)$$

Перепишем уравнения (392) в виде

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} &= -fM \frac{x}{\Delta^3} = fM \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\Delta} \right) \\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -fM \frac{y}{\Delta^3} = fM \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\Delta} \right) \\
\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= -fM \frac{z}{\Delta^3} = fM \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\Delta} \right)
\end{aligned} \right\}. \quad (415)$$

С учетом (414) и (415) вместо (412) будем иметь

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial e_i} \left[ \frac{\partial E_k}{\partial e_k} - \frac{\partial x}{\partial e_k} fM \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\Delta} \right) - \frac{\partial y}{\partial e_k} fM \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\Delta} \right) - \right. \\
& - \frac{\partial z}{\partial e_k} fM \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\Delta} \right) \left. \right] - \frac{\partial}{\partial e_k} \left[ \frac{\partial E_k}{\partial e_i} - \frac{\partial x}{\partial e_i} fM \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\Delta} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\partial y}{\partial e_i} fM \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\Delta} \right) - \frac{\partial z}{\partial e_i} fM \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\Delta} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial t} [e_i \cdot e_k] \quad (416)
\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 E_k}{\partial e_k \partial e_l} - \frac{\partial^2 E_k}{\partial e_l \partial e_k} + fM \frac{\partial}{\partial e_k} \left[ \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial e_l} + \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial e_l} + \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial e_l} \right] - \\ & - fM \frac{\partial}{\partial e_l} \left[ \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial e_k} + \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial e_k} + \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial e_k} \right] = 0. \end{aligned} \quad (417)$$

На основании формул (411) следует, что скобки Лагранжа равны постоянным величинам, которые вычисляются для любой точки орбиты. Следовательно, они могут быть рассчитаны и для точек, удобно выбранных, например, для перигея.

## 2. Производные по элементам орбиты от общих интегралов однородных уравнений движения и их изменения во времени

В пятнадцати скобках Лагранжа, которые необходимо выразить как функции шести элементов орбиты  $e_i$ , содержатся производные

$$\frac{\partial x}{\partial e_i}, \quad \frac{\partial y}{\partial e_i}, \quad \frac{\partial z}{\partial e_i}, \quad \frac{\partial}{\partial e_i} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial}{\partial e_i} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial}{\partial e_i} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right).$$

С учетом условий (394)—(396) эти производные можно вычислить из известных общих интегралов однородных уравнений, определяющих невозмущенное движение. Учитывая выражение (411), можно производные вычислить для отдельного конкретного положения, например, перигея, где

$$E = M = \bar{v} = 0. \quad (418)$$

Из решения однородных уравнений (проблемы двух тел) получается (см. часть I, главу 8, § 19)

$$\left. \begin{aligned} x &= \Delta [\cos u \cos (\Omega - S) - \sin u \sin (\Omega - S) \cos i] \\ y &= \Delta [\cos u \sin (\Omega - S) + \sin u \cos (\Omega - S) \cos i] \\ z &= \Delta \sin u \sin i \end{aligned} \right\}, \quad (419)$$

$$\Delta = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v} = a(1-e \cos E), \quad (420)$$

$$u = \omega + v, \quad (421)$$

$$M = E - e \sin E = M_0 + \frac{2\pi}{T} (t - t_0) = M_0 + \sqrt{fM} a^{-3/2} (t - t_0); \quad (422)$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{v}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{E}{2} \\ \cos v &= \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} \\ \cos E &= \frac{1 - e^2}{1 + e \cos v} \cos v + e = \frac{\Delta}{a} \cos v + e \\ \sin E &= \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 + e \cos v} \sin v = \frac{\Delta}{a \sqrt{1 - e^2}} \sin v \end{aligned} \right\} \quad (423)$$

Далее имеют место соотношения, которые содержат первые производные переменных по времени,

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 = fM \left( \frac{2}{\Delta} - \frac{1}{a} \right), \quad (424)$$

$$\left. \begin{aligned} x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} &= \sqrt{fM} \sqrt{a(1 - e^2)} \cos i \\ y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} &= \sqrt{fM} \sqrt{a(1 - e^2)} \sin(\Omega - S) \sin i \\ z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} &= -\sqrt{fM} \sqrt{a(1 - e^2)} \cos(\Omega - S) \sin i \end{aligned} \right\} \quad (425)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d\Delta}{dt} \frac{x}{\Delta} + \Delta \frac{dv}{dt} [-\sin u \cos(\Omega - S) - \cos u \sin(\Omega - S) \cos i] \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{d\Delta}{dt} \frac{y}{\Delta} + \Delta \frac{dv}{dt} [-\sin u \sin(\Omega - S) + \cos u \cos(\Omega - S) \cos i] \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{d\Delta}{dt} \frac{z}{\Delta} + \Delta \frac{dv}{dt} \cos u \sin i \end{aligned} \right\}, \quad (426)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{du}{dt} = \sqrt{fM} \sqrt{a(1 - e^2)} \frac{1}{\Delta^2}, \quad (427)$$

$$\frac{d\Delta}{dt} = \frac{ae(1 - e^2)}{(1 + e \cos v)^2} \sin v \frac{dv}{dt} = \sqrt{fM} \frac{e \cdot \sin v}{\sqrt{a(1 - e^2)}}. \quad (428)$$

В перигее, где выполняется условие (418), будет

$$\Delta_P = a(1 - e), \quad (429)$$

$$U_P = \omega, \quad (430)$$

$$M_P = M_0 = 0, \quad (431)$$

$$\left( \frac{dv}{dt} \right)_P = \sqrt{fM} a^{-3/2} \frac{\sqrt{1 - e^2}}{(1 - e)^2}, \quad (432)$$

$$\left( \frac{d\Delta}{dt} \right)_P = 0, \quad (433)$$

$$\left( \frac{\partial M}{\partial \Omega} \right)_P = \left( \frac{\partial E}{\partial \Omega} \right)_P = \left( \frac{\partial v}{\partial \Omega} \right)_P = \left( \frac{\partial u}{\partial \Omega} \right)_P = \left( \frac{\partial \Delta}{\partial \Omega} \right)_P = 0, \quad (434)$$

$$\left( \frac{\partial M}{\partial i} \right)_P = \left( \frac{\partial E}{\partial i} \right)_P = \left( \frac{\partial v}{\partial i} \right)_P = \left( \frac{\partial u}{\partial i} \right)_P = \left( \frac{\partial \Delta}{\partial i} \right)_P = 0, \quad (435)$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \omega}\right)_P = \left(\frac{\partial E}{\partial \omega}\right)_P = \left(\frac{\partial v}{\partial \omega}\right)_P = \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \omega}\right)_P = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial \omega}\right)_P = 1, \quad (436)$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial a}\right)_P = \left(\frac{\partial E}{\partial a}\right)_P = \left(\frac{\partial v}{\partial a}\right)_P = \left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)_P = 0, \quad \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_P = 1 - e, \quad (437)$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial e}\right)_P = \left(\frac{\partial E}{\partial e}\right)_P = \left(\frac{\partial v}{\partial e}\right)_P = \left(\frac{\partial u}{\partial e}\right)_P = 0, \quad \left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_P = -a, \quad (438)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial M}{\partial M_0}\right)_P &= 1, \quad \left(\frac{\partial E}{\partial M_0}\right)_P = (1-e)^{-1} \\ \left(\frac{\partial v}{\partial M_0}\right)_P &= \left(\frac{\partial u}{\partial M_0}\right)_P = \frac{\sqrt{1+e}}{(1-e)^{3/2}} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e)^2}, \quad \left(\frac{\partial \Delta}{\partial M_0}\right)_P = 0 \end{aligned} \right\} (439)$$

Производные, содержащиеся в скобках Лагранжа, можно затем выразить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial \Omega}\right)_P &= \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \Omega}\right)_P [\cos u \cos(\Omega - S) - \sin u \sin(\Omega - S) \cos i]_P + \\ &+ \Delta_P [-\cos u \sin(\Omega - S) - \sin u \cos(\Omega - S) \cos i]_P + \\ &+ \Delta_P [-\sin u \cos(\Omega - S) - \cos u \sin(\Omega - S) \cos i]_P \left(\frac{\partial u}{\partial \Omega}\right)_P = \\ &= -a(1-e) [\cos \omega \sin(\Omega - S) + \sin \omega \cos(\Omega - S) \cos i] \\ \left(\frac{\partial y}{\partial \Omega}\right)_P &= a(1-e) [\cos \omega \cos(\Omega - S) - \\ &- \sin \omega \sin(\Omega - S) \cos i], \quad \left(\frac{\partial z}{\partial \Omega}\right)_P = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (440)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial i}\right)_P &= \left(\frac{\partial \Delta}{\partial i}\right)_P [\cos u \cos(\Omega - S) - \sin u \sin(\Omega - S) \cos i]_P + \\ &+ \Delta_P [\sin u \sin(\Omega - S) \sin i]_P + \Delta_P [-\sin u \cos(\Omega - S) - \\ &- \cos u \sin(\Omega - S) \cos i]_P \left(\frac{\partial u}{\partial i}\right)_P = \\ &= a(1-e) \sin \omega \sin(\Omega - S) \sin i \\ \left(\frac{\partial y}{\partial i}\right)_P &= -a(1-e) \sin \omega \cos(\Omega - S) \sin i \\ \left(\frac{\partial z}{\partial i}\right)_P &= a(1-e) \sin \omega \cos i \end{aligned} \right\}, \quad (441)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)_P &= \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \omega}\right)_P [\cos u \cos(\Omega - S) - \sin u \sin(\Omega - S) \cos i]_P + \\ &+ \Delta_P [-\sin u \cos(\Omega - S) - \cos u \sin(\Omega - S) \cos i]_P \left(\frac{\partial u}{\partial \omega}\right)_P = \\ &= -a(1-e) [\sin \omega \cos(\Omega - S) + \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] \\ \left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)_P &= -a(1-e) [\sin \omega \sin(\Omega - S) - \cos \omega \cos(\Omega - S) \cos i] \\ \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)_P &= a(1-e) \cos \omega \sin i \end{aligned} \right\}, \quad (442)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_P &= \left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_P [\cos u \cos(\Omega - S) - \sin u \sin(\Omega - S) \cos i]_P + \\ &+ \Delta_P [-\sin u \cos(\Omega - S) - \cos u \sin(\Omega - S) \cos i]_P \left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)_P = \\ &= (1 - e) [\cos \omega \cos(\Omega - S) - \sin \omega \sin(\Omega - S) \cos i] \\ \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)_P &= (1 - e) [\cos \omega \sin(\Omega - S) + \sin \omega \cos(\Omega - S) \cos i] \\ \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)_P &= (1 - e) \sin \omega \sin i \end{aligned} \right\} \quad (443)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial e}\right)_P &= \left(\frac{\partial \Delta}{\partial e}\right)_P [\cos u \cos(\Omega - S) - \sin u \sin(\Omega - S) \cos i]_P + \\ &+ \Delta_P [-\sin u \cos(\Omega - S) - \cos u \sin(\Omega - S) \cos i]_P \left(\frac{\partial u}{\partial e}\right)_P = \\ &= -a [\cos \omega \cos(\Omega - S) - \sin \omega \sin(\Omega - S) \cos i] \\ \left(\frac{\partial y}{\partial e}\right)_P &= -a [\cos \omega \sin(\Omega - S) + \sin \omega \cos(\Omega - S) \cos i] \\ \left(\frac{\partial z}{\partial e}\right)_P &= -a \sin \omega \sin i \end{aligned} \right\} \quad (444)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial M_0}\right)_P &= \left(\frac{\partial \Delta}{\partial M_0}\right)_P [\cos u \cos(\Omega - S) - \sin u \sin(\Omega - S) \cos i]_P + \\ &+ \Delta_P [-\sin u \cos(\Omega - S) - \cos u \sin(\Omega - S) \cos i]_P \left(\frac{\partial u}{\partial M_0}\right)_P = \\ &= -a \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \cos(\Omega - S) + \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] \\ \left(\frac{\partial y}{\partial M_0}\right)_P &= -a \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \sin(\Omega - S) - \cos \omega \cos(\Omega - S) \cos i] \\ \left(\frac{\partial z}{\partial M_0}\right)_P &= a \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \cdot \sin i \end{aligned} \right\} \quad (445)$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial \Omega} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right]_P = \left[ \frac{\partial}{\partial \Omega} \left( \sqrt{fM} \frac{e \cdot \sin v}{V a (1 - e^2)} \right) \right]_P [\cos u \cos(\Omega - S) - \sin u \sin(\Omega - S) \cos i]_P + \sqrt{fM} \left( \frac{e \sin v}{V a (1 - e^2)} \right)_P \times \\ \times \left\{ [-\cos u \sin(\Omega - S) - \sin u \cos(\Omega - S) \cos i]_P - [\sin u \cos(\Omega - S) + \cos u \sin(\Omega - S) \cos i]_P \left( \frac{\partial u}{\partial \Omega} \right)_P \right\} + \\ + \left( \frac{\partial \Delta}{\partial \Omega} \right)_P \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_{P_s} [-\sin u \cos(\Omega - S) - \cos u \sin(\Omega - S) \cos i]_P +$$

$$\begin{aligned}
& + \Delta_P \sqrt{fM} \sqrt{a(1-e^2)} \left[ \frac{\partial}{\partial \Omega} \left( \frac{1}{\Delta^2} \right) \right]_P [-\sin u \cos(\Omega - S) - \\
& - \cos u \sin(\Omega - S) \cos i]_P + \Delta_P \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_P \left\{ [\sin u \sin(\Omega - S) - \right. \\
& \quad \left. - \cos u \cos(\Omega - S) \cos i]_P + [-\cos u \cos(\Omega - S) + \right. \\
& \quad \left. + \sin u \sin(\Omega - S) \cos i]_P \left( \frac{\partial u}{\partial \Omega} \right)_P \right\} = \quad (446) \\
& = \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \sin(\Omega - S) - \cos \omega \cos(\Omega - S) \cos i] \\
& \left[ \frac{\partial}{\partial \Omega} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right]_P = -\sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \cos(\Omega - S) + \\
& \quad + \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] \\
& \left[ \frac{\partial}{\partial \Omega} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right]_P = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{\partial}{\partial i} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right]_P &= \left[ \frac{\partial}{\partial i} \left( \sqrt{fM} \frac{e \sin v}{\sqrt{a(1-e^2)}} \right) \right]_P [\cos u \cos(\Omega - S) - \\
& \quad - \sin u \sin(\Omega - S) \cos i]_P + \sqrt{fM} \left( \frac{e \sin v}{\sqrt{a(1-e^2)}} \right)_P \times \\
& \quad \times \left\{ [\sin u \sin(\Omega - S) \sin i]_P + [-\sin u \cos(\Omega - S) - \right. \\
& \quad \left. - \cos u \sin(\Omega - S) \cos i]_P \left( \frac{\partial u}{\partial i} \right)_P \right\} + \left( \frac{\partial \Delta}{\partial i} \right)_P \left( \frac{dv}{dt} \right)_P \times \\
& \quad \times [-\sin u \cos(\Omega - S) - \cos u \sin(\Omega - S) \cos i]_P + \\
& \quad + \Delta_P \sqrt{fM} \sqrt{a(1-e^2)} \left[ \frac{\partial}{\partial i} \left( \frac{1}{\Delta^2} \right) \right]_P [-\sin u \cos(\Omega - S) - \\
& \quad - \cos u \sin(\Omega - S) \cos i]_P + \Delta_P \left( \frac{dv}{dt} \right)_P [\cos u \sin(\Omega - S) \sin i]_P + \\
& \quad + [-\cos u \cos(\Omega - S) + \sin u \sin(\Omega - S) \cos i]_P \left( \frac{\partial u}{\partial i} \right)_P = \quad (447) \\
& = \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \sin(\Omega - S) \sin i \\
\left[ \frac{\partial}{\partial i} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right]_P &= -\sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \cos(\Omega - S) \sin i \\
\left[ \frac{\partial}{\partial i} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right]_P &= \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \cos i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right]_P &= \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \sqrt{fM} \frac{e \sin v}{\sqrt{a(1-e^2)}} \right) \right]_P [\cos u \cos(\Omega - S) - \\
& \quad - \sin u \sin(\Omega - S) \cos i]_P + \sqrt{fM} \frac{e}{\sqrt{a(1-e^2)}} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sin v_P [-\sin u \cos(\Omega - S) - \cos u \sin(\Omega - S) \cos i]_P \left( \frac{\partial u}{\partial \omega} \right)_P + \\
& + \left( \frac{\partial \Delta}{\partial \omega} \right)_P \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_P [-\sin u \cos(\Omega - S) - \cos u \sin(\Omega - S) \cos i]_P + \\
& + \Delta_P \sqrt{fM} \sqrt{a(1-e^2)} \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{1}{\Delta^2} \right) \right]_P [-\sin u \cos(\Omega - S) - \\
& - \cos u \sin(\Omega - S) \cos i]_P + \Delta_P \left( \frac{dv}{dt} \right)_P [-\cos u \cos(\Omega - S) + \\
& + \sin u \sin(\Omega - S) \cos i]_P \left( \frac{\partial u}{\partial \omega} \right)_P = \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \times \\
& \quad \times [-\cos \omega \cos(\Omega - S) + \sin \omega \sin(\Omega - S) \cos i] \\
& \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right]_P = -\sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\cos \omega \sin(\Omega - S) + \\
& \quad + \sin \omega \cos(\Omega - S) \cos i] \\
& \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right]_P = -\sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \sin \omega \sin i
\end{aligned} \tag{448}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right]_P = \left[ \frac{\partial}{\partial a} \left( \sqrt{fM} \frac{e \sin v}{\sqrt{a(1-e^2)}} \right) \right]_P [\cos u \cos(\Omega - S) - \\
& \quad - \sin u \sin(\Omega - S) \cos i]_P + \sqrt{fM} \left( \frac{e \sin v}{\sqrt{a(1-e^2)}} \right)_P \times \\
& \quad \times [-\sin u \cos(\Omega - S) - \cos u \sin(\Omega - S) \cos i]_P \left( \frac{\partial u}{\partial a} \right)_P + \\
& + \left( \frac{\partial \Delta}{\partial a} \right)_P \left( \frac{dv}{dt} \right)_P [-\sin u \cos(\Omega - S) - \cos u \sin(\Omega - S) \cos i]_P + \\
& + \Delta_P \left[ \frac{\partial}{\partial a} \left( \sqrt{fM} \sqrt{a(1-e^2)} \frac{1}{\Delta^2} \right) \right]_P [-\sin u \cos(\Omega - S) - \\
& - \cos u \sin(\Omega - S) \cos i]_P + \Delta_P \left( \frac{dv}{dt} \right)_P [-\cos u \cos(\Omega - S) + \\
& + \sin u \sin(\Omega - S) \cos i]_P \left( \frac{\partial u}{\partial a} \right)_P = \sqrt{fM} a^{-3/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \times \\
& \quad \times [-\sin \omega \cos(\Omega - S) - \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] + \\
& + \sqrt{fM} a(1-e) \sqrt{1-e^2} \left[ \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\sqrt{a}}{\Delta^2} \right) \right]_P [-\sin \omega \cos(\Omega - S) - \\
& \quad - \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] = \sqrt{fM} a^{-3/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \times \\
& \times [-\sin \omega \cos(\Omega - S) - \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] - 3/2 \sqrt{fM} a^{-3/2} \times \\
& \quad \times \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e} [-\sin \omega \cos(\Omega - S) - \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] =
\end{aligned} \tag{449}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sqrt{fM} a^{-3/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \cos(\Omega - S) + \\
&\quad + \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] \\
\left[ \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right]_P &= \frac{1}{2} \sqrt{fM} a^{-3/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \sin(\Omega - S) - \\
&\quad - \cos \omega \cos(\Omega - S) \cos i] \\
\left[ \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right]_P &= -\frac{1}{2} \sqrt{fM} a^{-3/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \sin i \\
\left[ \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right]_P &= \left[ \frac{\partial}{\partial e} \left( \sqrt{fM} \frac{e \sin v}{\sqrt{a(1-e^2)}} \right) \right]_P [\cos u \cos(\Omega - S) - \\
&\quad - \sin u \sin(\Omega - S) \cos i]_P + \sqrt{fM} \left( \frac{e \sin v}{\sqrt{a(1-e^2)}} \right)_P \times \\
&\quad \times [-\sin u \cos(\Omega - S) - \cos u \sin(\Omega - S) \cos i]_P \left( \frac{\partial u}{\partial e} \right)_P + \\
&\quad + \left( \frac{\partial \Delta}{\partial e} \right)_P \left( \frac{dv}{dt} \right)_P [-\sin u \cos(\Omega - S) - \cos u \sin(\Omega - S) \cos i]_P + \\
&\quad + \Delta_P \left[ \frac{\partial}{\partial e} \left( \sqrt{fM} \sqrt{a(1-e^2)} \frac{1}{\Delta^2} \right) \right]_P [-\sin u \cos(\Omega - S) - \\
&\quad - \cos u \sin(\Omega - S) \cos i]_P + \Delta_P \left( \frac{dv}{dt} \right)_P [-\cos u \cos(\Omega - S) + \\
&\quad + \sin u \sin(\Omega - S) \cos i]_P \left( \frac{\partial u}{\partial e} \right)_P = -\sqrt{fM} \sqrt{a(1-e^2)} \times \\
&\quad \times \frac{1}{a(1-e)^2} [-\sin \omega \cos(\Omega - S) - \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] + \\
&\quad + \sqrt{fM} a^{3/2} (1-e) \left[ \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{\Delta^2} \right) \right]_P [-\sin \omega \cos(\Omega - S) - \\
&\quad - \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] = -\sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e)^2} \times \\
&\quad \times [-\sin \omega \cos(\Omega - S) - \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] + \\
&\quad + \sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{1}{(1-e)^2} \left[ 2\sqrt{1-e^2} - e \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \right] \times \\
&\quad \times [-\sin \omega \cos(\Omega - S) - \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] = \\
&= \sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{1}{1-e} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} [-\sin \omega \cos(\Omega - S) - \\
&\quad - \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] \\
\left[ \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right]_P &= \sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{1}{1-e} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} [-\sin \omega \sin(\Omega - S) + \\
&\quad + \cos \omega \cos(\Omega - S) \cos i] \\
\left[ \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right]_P &= \sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{1}{1-e} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \cos \omega \sin i
\end{aligned} \tag{450}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{\partial}{\partial M_0} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right]_P = \left[ \frac{\partial}{\partial M_0} \left( \sqrt{fM} \frac{e \sin v}{\sqrt{a(1-e^2)}} \right) \right]_P \times \\
& \times [\cos u \cos(\Omega - S) - \sin u \sin(\Omega - S) \cos i]_P + \sqrt{fM} \times \\
& \times \left( \frac{e \sin v}{\sqrt{a(1-e^2)}} \right)_P [-\sin u \cos(\Omega - S) - \cos u \sin(\Omega - S) \cos i]_P \times \\
& \times \left( \frac{\partial u}{\partial M_0} \right)_P + \left( \frac{\partial \Delta}{\partial M_0} \right)_P \left( \frac{dv}{dt} \right)_P [-\sin u \cos(\Omega - S) - \\
& - \cos u \sin(\Omega - S) \cos i]_P + \Delta_P \left[ \frac{\partial}{\partial M_0} \left( \sqrt{fM} \sqrt{a(1-e^2)} \frac{1}{\Delta^2} \right) \right]_P \times \\
& \times [-\sin u \cos(\Omega - S) - \cos u \sin(\Omega - S) \cos i]_P + \Delta_P \left( \frac{dv}{dt} \right)_P \times \\
& \times [-\cos u \cos(\Omega - S) + \sin u \sin(\Omega - S) \cos i]_P \left( \frac{\partial u}{\partial M_0} \right)_P = \\
& = \sqrt{fM} \frac{e}{\sqrt{a(1-e^2)^2}} \cos v_P \left( \frac{\partial v}{\partial M_0} \right)_P [\cos \omega \cos(\Omega - S) - \\
& - \sin \omega \sin(\Omega - S) \cos i] + \sqrt{fM} a(1-e) \sqrt{a(1-e^2)} \frac{1}{a^2(1-e)^2} \times \\
& \times \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1-e)^2} [-\cos \omega \cos(\Omega - S) + \sin \omega \sin(\Omega - S) \cos i] = \\
& = \sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{e}{(1-e)^2} [\cos \omega \cos(\Omega - S) - \sin \omega \sin(\Omega - S) \cos i] + \\
& + \sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{1+e}{(1-e)^2} [-\cos \omega \cos(\Omega - S) + \sin \omega \sin(\Omega - S) \cos i] = \\
& = -\sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{1}{(1-e)^2} [\cos \omega \cos(\Omega - S) - \sin \omega \sin(\Omega - S) \cos i] \\
& \left[ \frac{\partial}{\partial M_0} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right]_P = -\sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{1}{(1-e)^2} [\cos \omega \sin(\Omega - S) + \\
& + \sin \omega \cos(\Omega - S) \cos i] \\
& \left[ \frac{\partial}{\partial M_0} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right]_P = -\sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{1}{(1-e)^2} \sin \omega \sin i
\end{aligned} \tag{451}$$

### 3. Вычисление скобок Лагранжа

Теперь можем приступить к вычислению скобок Лагранжа (402), придерживаясь такой последовательности:

$$\text{Тогда } e_1 = \Omega, \quad e_2 = i, \quad e_3 = \omega, \quad e_4 = a, \quad e_5 = e, \quad e_6 = M_0. \tag{452}$$

$$\begin{aligned}
[\Omega, i] &= \left( \frac{\partial x}{\partial \Omega} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial i} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial x}{\partial i} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial \Omega} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right]_P + \\
&+ \left( \frac{\partial y}{\partial \Omega} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial i} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial y}{\partial i} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial \Omega} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right]_P +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{\partial z}{\partial \Omega} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial z}{\partial i} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial \Omega} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right]_P = \\
& = -a(1-e) [\cos \omega \sin(\Omega - S) + \sin \omega \cos(\Omega - S) \cos i] \times \\
& \times \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \sin(\Omega - S) \sin i - a(1-e) \sin \omega \times \\
& \times \sin(\Omega - S) \sin i \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \sin(\Omega - S) - \\
& - \cos \omega \cos(\Omega - S) \cos i] - a(1-e) [\cos \omega \cos(\Omega - S) - \sin \omega \times \\
& \times \sin(\Omega - S) \cos i] \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \cos(\Omega - S) \sin i - \\
& - a(1-e) \sin \omega \cos(\Omega - S) \sin i \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \times \\
& \times [\sin \omega \cos(\Omega - S) + \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] = \\
& = -\sqrt{fM} \sqrt{a(1-e^2)} \sin i
\end{aligned} \tag{453}$$

$$\begin{aligned}
[\Omega, \omega] & = \left( \frac{\partial x}{\partial \Omega} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial x}{\partial \omega} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial \Omega} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right]_P + \\
& + \left( \frac{\partial y}{\partial \Omega} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial y}{\partial \omega} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial \Omega} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right]_P + \\
& + \left( \frac{\partial z}{\partial \Omega} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial z}{\partial \omega} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial \Omega} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right]_P = \\
& = -a(1-e) [\cos \omega \sin(\Omega - S) + \sin \omega \cos(\Omega - S) \cos i] \times \sqrt{fM} \times \\
& \times a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [-\cos \omega \cos(\Omega - S) + \sin \omega \sin(\Omega - S) \cos i] + \\
& + a(1-e) [\sin \omega \cos(\Omega - S) + \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] \sqrt{fM} \times \\
& \times a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \sin(\Omega - S) - \cos \omega \cos(\Omega - S) \cos i] - \\
& - a(1-e) [\cos \omega \cos(\Omega - S) - \sin \omega \sin(\Omega - S) \cos i] \sqrt{fM} \times \\
& \times a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\cos \omega \sin(\Omega - S) + \sin \omega \cos(\Omega - S) \cos i] - \\
& - a(1-e) [\sin \omega \sin(\Omega - S) - \cos \omega \cos(\Omega - S) \cos i] \sqrt{fM} \times \\
& \times a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \cos(\Omega - S) + \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] = 0
\end{aligned} \tag{454}$$

$$\begin{aligned}
[\Omega, a] & = \left( \frac{\partial x}{\partial \Omega} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial x}{\partial a} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial \Omega} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right]_P + \\
& + \left( \frac{\partial y}{\partial \Omega} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial y}{\partial a} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial \Omega} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right]_P + \\
& + \left( \frac{\partial z}{\partial \Omega} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial z}{\partial a} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial \Omega} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right]_P =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -a(1-e)[\cos \omega \sin(\Omega-S) + \sin \omega \cos(\Omega-S) \cos i]^{1/2} \sqrt{fM} \times \\
&\quad \times a^{-3/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \cos(\Omega-S) + \cos \omega \sin(\Omega-S) \cos i] - \\
&\quad - (1-e)[\cos \omega \cos(\Omega-S) - \sin \omega \sin(\Omega-S) \cos i] \sqrt{fM} \times \\
&\quad \times a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \sin(\Omega-S) - \cos \omega \cos(\Omega-S) \cos i] + \\
&+ a(1-e)[\cos \omega \cos(\Omega-S) - \sin \omega \sin(\Omega-S) \cos i]^{1/2} \sqrt{fM} \times \\
&\quad \times a^{-3/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \sin(\Omega-S) - \cos \omega \cos(\Omega-S) \cos i] + \\
&\quad + (1-e)[\cos \omega \sin(\Omega-S) + \sin \omega \cos(\Omega-S) \cos i] \sqrt{fM} \times \\
&\quad \times a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \cos(\Omega-S) + \cos \omega \sin(\Omega-S) \cos i] = \\
&\quad = {}^{1/2} \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{1-e^2} \cos i
\end{aligned} \tag{455}$$

$$\begin{aligned}
[\Omega, e] &= \left( \frac{\partial x}{\partial \Omega} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial x}{\partial e} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial \Omega} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right]_P + \\
&\quad + \left( \frac{\partial y}{\partial \Omega} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial y}{\partial e} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial \Omega} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right]_P + \\
&\quad + \left( \frac{\partial z}{\partial \Omega} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial e} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial z}{\partial e} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial \Omega} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right]_P = \\
&= -a(1-e)[\cos \omega \sin(\Omega-S) + \sin \omega \cos(\Omega-S) \cos i] \sqrt{fM} \times \\
&\quad \times a^{-1/2} \frac{1}{1-e} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} [\sin \omega \cos(\Omega-S) + \cos \omega \sin(\Omega-S) \cos i] + \\
&\quad + a[\cos \omega \cos(\Omega-S) - \sin \omega \sin(\Omega-S) \cos i] \sqrt{fM} \times \\
&\quad \times a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \sin(\Omega-S) - \cos \omega \cos(\Omega-S) \cos i] + \\
&\quad + a(1-e)[\cos \omega \cos(\Omega-S) - \sin \omega \sin(\Omega-S) \cos i] \sqrt{fM} \times \\
&\quad \times a^{-1/2} \frac{1}{1-e} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} [-\sin \omega \sin(\Omega-S) + \cos \omega \cos(\Omega-S) \cos i] + \\
&\quad + a[\cos \omega \sin(\Omega-S) + \sin \omega \cos(\Omega-S) \cos i] \sqrt{fM} \times \\
&\quad \times a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [-\sin \omega \cos(\Omega-S) - \cos \omega \sin(\Omega-S) \cos i] = \\
&\quad = -\sqrt{fM} \sqrt{a} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \cos i
\end{aligned} \tag{456}$$

$$\begin{aligned}
[\Omega, M_0] &= \left( \frac{\partial x}{\partial \Omega} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial M_0} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial x}{\partial M_0} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial \Omega} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right]_P + \\
&\quad + \left( \frac{\partial y}{\partial \Omega} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial M_0} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial y}{\partial M_0} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial \Omega} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right]_P +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{\partial z}{\partial \Omega} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial M_0} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial z}{\partial M_0} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial \Omega} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right]_P = \\
& = a(1-e) [\cos \omega \sin(\Omega - S) + \sin \omega \cos(\Omega - S) \cos i] \sqrt{fM} \times \\
& \quad \times a^{1/2} \frac{1}{(1-e)^2} [\cos \omega \cos(\Omega - S) - \sin \omega \sin(\Omega - S) \cos i] + \\
& + a \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \cos(\Omega - S) + \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] \sqrt{fM} \times \\
& \quad \times a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \sin(\Omega - S) - \cos \omega \cos(\Omega - S) \cos i] - \\
& - a(1-e) [\cos \omega \cos(\Omega - S) - \sin \omega \sin(\Omega - S) \cos i] \sqrt{fM} \times \\
& \quad \times a^{-1/2} \frac{1}{(1-e)^2} [\cos \omega \sin(\Omega - S) + \sin \omega \cos(\Omega - S) \cos i] - \\
& - a \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \sin(\Omega - S) - \cos \omega \cos(\Omega - S) \cos i] \sqrt{fM} \times \\
& \quad \times a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \cos(\Omega - S) + \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] = 0, \quad (457)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[i, \omega] & = \left( \frac{\partial x}{\partial i} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial x}{\partial \omega} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial i} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right]_P + \\
& + \left( \frac{\partial y}{\partial i} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial y}{\partial \omega} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial i} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right]_P + \\
& + \left( \frac{\partial z}{\partial i} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial z}{\partial \omega} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial i} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right]_P = \\
& = a(1-e) \sin \omega \sin(\Omega - S) \sin i \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \times \\
& \quad \times [-\cos \omega \cos(\Omega - S) + \sin \omega \sin(\Omega - S) \cos i] + \\
& + a(1-e) [\sin \omega \cos(\Omega - S) + \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] \sqrt{fM} \times \\
& \quad \times a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \sin(\Omega - S) \sin i + a(1-e) \sin \omega \times \\
& \quad \times \cos(\Omega - S) \sin i \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\cos \omega \sin(\Omega - S) + \\
& + \sin \omega \cos(\Omega - S) \cos i] - a(1-e) [\sin \omega \sin(\Omega - S) - \cos \omega \times \\
& \times \cos(\Omega - S) \cos i] \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \cos(\Omega - S) \sin i - \\
& - a(1-e) \sin \omega \cos i \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \sin \omega \sin i - \\
& - a(1-e) \cos \omega \sin i \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \cos i = 0, \quad (458)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[i, a] &= \left(\frac{\partial x}{\partial i}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\right]_P - \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\right]_P + \\
&+ \left(\frac{\partial y}{\partial i}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right]_P - \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right]_P + \\
&+ \left(\frac{\partial z}{\partial i}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\right]_P - \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\right]_P = \\
&= a(1-e) \sin \omega \sin(\Omega-S) \sin i \frac{1}{2} \sqrt{fM} a^{-3/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \cos(\Omega-S) + \\
&+ \cos \omega \sin(\Omega-S) \cos i] - (1-e) [\cos \omega \cos(\Omega-S) - \\
&- \sin \omega \sin(\Omega-S) \cos i] \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \sin(\Omega-S) \sin i - \\
&- a(1-e) \sin \omega \cos(\Omega-S) \sin i \frac{1}{2} \sqrt{fM} a^{-3/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \sin(\Omega-S) - \\
&- \cos \omega \cos(\Omega-S) \cos i] + (1-e) [\cos \omega \sin(\Omega-S) + \\
&+ \sin \omega \cos(\Omega-S) \cos i] \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \cos(\Omega-S) \sin i - \\
&- a(1-e) \sin \omega \cos i \frac{1}{2} \sqrt{fM} a^{-3/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \sin i - \\
&- (1-e) \sin \omega \sin i \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \cos i = 0, \quad (459)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[i, e] &= \left(\frac{\partial x}{\partial i}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\right]_P - \left(\frac{\partial x}{\partial e}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\right]_P + \\
&+ \left(\frac{\partial y}{\partial i}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right]_P - \left(\frac{\partial y}{\partial e}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right]_P + \\
&+ \left(\frac{\partial z}{\partial i}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\right]_P - \left(\frac{\partial z}{\partial e}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\right]_P = \\
&= a(1-e) \sin \omega \sin(\Omega-S) \sin i \sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{1}{1-e} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \times \\
&\times [-\sin \omega \cos(\Omega-S) - \cos \omega \sin(\Omega-S) \cos i] + a [\cos \omega \cos(\Omega-S) - \\
&- \sin \omega \sin(\Omega-S) \cos i] \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \sin(\Omega-S) \sin i + \\
&+ a(1-e) \sin \omega \cos(\Omega-S) \sin i \sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{1}{1-e} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \times \\
&\times [\sin \omega \sin(\Omega-S) - \cos \omega \cos(\Omega-S) \cos i] - a [\cos \omega \sin(\Omega-S) + \\
&+ \sin \omega \cos(\Omega-S) \cos i] \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \cos(\Omega-S) \sin i +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a(1-e) \sin \omega \cos i \sqrt{fM} \sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{1}{1-e} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \cos \omega \sin i + \\
& + a \sin \omega \sin i \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \cos i = 0, \quad (460)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[i, M_0] &= \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial M_0} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial x}{\partial M_0} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right]_P + \\
& + \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial M_0} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial y}{\partial M_0} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right]_P + \\
& + \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial M_0} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial z}{\partial M_0} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right]_P = \\
& = -a(1-e) \sin \omega \sin(\Omega - S) \sin i \sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{1}{(1-e)^2} [\cos \omega \cos(\Omega - S) - \\
& - \sin \omega \sin(\Omega - S) \cos i] + a \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \cos(\Omega - S) + \\
& + \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \sin(\Omega - S) \sin i + \\
& + a(1-e) \sin \omega \cos(\Omega - S) \sin i \sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{1}{(1-e)^2} [\cos \omega \sin(\Omega - S) + \\
& + \sin \omega \cos(\Omega - S) \cos i] - a \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \sin(\Omega - S) - \\
& - \cos \omega \cos(\Omega - S) \cos i] \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \cos(\Omega - S) \sin i - \\
& - a(1-e) \sin \omega \cos i \sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{1}{(1-e)^2} \sin \omega \sin i - \\
& - a \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \sin i \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \cos i = 0, \quad (461)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\omega, a] &= \left( \frac{\partial x}{\partial \omega} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial x}{\partial a} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right]_P + \\
& + \left( \frac{\partial y}{\partial \omega} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial y}{\partial a} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right]_P + \\
& + \left( \frac{\partial z}{\partial \omega} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial z}{\partial a} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right]_P = \\
& = -a(1-e) [\sin \omega \cos(\Omega - S) + \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i]^{1/2} \sqrt{fM} \times \\
& \times a^{-3/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \cos(\Omega - S) + \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] - \\
& - (1-e) [\cos \omega \cos(\Omega - S) - \sin \omega \sin(\Omega - S) \cos i] \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \times \\
& \times [-\cos \omega \cos(\Omega - S) + \sin \omega \sin(\Omega - S) \cos i] -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a(1-e)[\sin \omega \sin (\Omega-S)-\cos \omega \cos (\Omega-S) \cos i]^{1/2} \sqrt{f M} \times \\
& \quad \times a^{-3/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}[\sin \omega \sin (\Omega-S)-\cos \omega \cos (\Omega-S) \cos i]+ \\
& + (1-e)[\cos \omega \sin (\Omega-S)+\sin \omega \cos (\Omega-S) \cos i] \sqrt{f M} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \times \\
& \quad \times [\cos \omega \sin (\Omega-S)+\sin \omega \cos (\Omega-S) \cos i]-a(1-e) \cos \omega \sin i \times \\
& \quad \times^{1/2} \sqrt{f M} a^{-3/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \sin i+(1-e) \sin \omega \sin i \sqrt{f M} \times \\
& \quad \times a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \sin \omega \sin i=^{1/2} \sqrt{f M} a^{-1/2} \sqrt{1-e^2}, \quad (462) \\
& [\omega, e]=\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)_P\left[\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\right]_P-\left(\frac{\partial x}{\partial e}\right)_P\left[\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\right]_P+ \\
& \quad +\left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)_P\left[\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right]_P-\left(\frac{\partial y}{\partial e}\right)_P\left[\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right]_P+ \\
& \quad +\left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)_P\left[\frac{\partial}{\partial e}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\right]_P-\left(\frac{\partial z}{\partial e}\right)_P\left[\frac{\partial}{\partial \omega}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\right]_P= \\
& =a(1-e)[\sin \omega \cos (\Omega-S)+\cos \omega \sin (\Omega-S) \cos i] \sqrt{f M} a^{-1/2} \frac{1}{1-e} \times \\
& \quad \times \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}[\sin \omega \cos (\Omega-S)+\cos \omega \sin (\Omega-S) \cos i]+ \\
& +a[\cos \omega \cos (\Omega-S)-\sin \omega \sin (\Omega-S) \cos i] \sqrt{f M} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \times \\
& \quad \times[-\cos \omega \cos (\Omega-S)+\sin \omega \sin (\Omega-S) \cos i]-a(1-e) \times \\
& \quad \times[\sin \omega \sin (\Omega-S)-\cos \omega \cos (\Omega-S) \cos i] \sqrt{f M} a^{-1/2} \frac{1}{1-e} \times \\
& \quad \times \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}[-\sin \omega \sin (\Omega-S)+\cos \omega \cos (\Omega-S) \cos i]- \\
& -a[\cos \omega \sin (\Omega-S)+\sin \omega \cos (\Omega-S) \cos i] \sqrt{f M} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \times \\
& \quad \times[\cos \omega \sin (\Omega-S)+\sin \omega \cos (\Omega-S) \cos i]+a(1-e) \cos \omega \sin i \sqrt{f M} \times \\
& \quad \times a^{-1/2} \frac{1}{1-e} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \cos \omega \sin i-a \sin \omega \sin i \sqrt{f M} \times \\
& \quad \times a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \sin \omega \sin i=-\sqrt{f M} \sqrt{a} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}}, \quad (463)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\omega, M_0] &= \left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial M_0} \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\right]_P - \left(\frac{\partial x}{\partial M_0}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\right]_P + \\
&+ \left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial M_0} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right]_P - \left(\frac{\partial y}{\partial M_0}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right]_P + \\
&+ \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial M_0} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\right]_P - \left(\frac{\partial z}{\partial M_0}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\right]_P = \\
&= a(1-e) [\sin \omega \cos(\Omega - S) + \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] \sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{1}{(1-e)^2} \times \\
&\quad \times [\cos \omega \cos(\Omega - S) - \sin \omega \sin(\Omega - S) \cos i] + \\
&+ a \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \cos(\Omega - S) - \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] \sqrt{fM} \times \\
&\quad \times a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [-\cos \omega \cos(\Omega - S) + \sin \omega \sin(\Omega - S) \cos i] + \\
&+ a(1-e) [\sin \omega \sin(\Omega - S) - \cos \omega \cos(\Omega - S) \cos i] \sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{1}{(1-e)^2} \times \\
&\quad \times [\cos \omega \sin(\Omega - S) + \sin \omega \cos(\Omega - S) \cos i] - \\
&- a \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \sin(\Omega - S) - \cos \omega \cos(\Omega - S) \cos i] \sqrt{fM} \times \\
&\quad \times a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\cos \omega \sin(\Omega - S) + \sin \omega \cos(\Omega - S) \cos i] - \\
&\quad - a(1-e) \cos \omega \sin i \sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{1}{(1-e)^2} \sin \omega \sin i + \\
&+ a \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \sin i \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \sin \omega \sin i = 0, \quad (464)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[a, e] &= \left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\right]_P - \left(\frac{\partial x}{\partial e}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\right]_P + \\
&+ \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right]_P - \left(\frac{\partial y}{\partial e}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right]_P + \\
&+ \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\right]_P - \left(\frac{\partial z}{\partial e}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\right]_P + = \\
&= (1-e) [\cos \omega \cos(\Omega - S) - \sin \omega \sin(\Omega - S) \cos i] \sqrt{fM} \cdot a^{-1/2} \frac{1}{1-e} \times \\
&\quad \times \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} [-\sin \omega \cos(\Omega - S) - \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] + \\
&\quad + a [\cos \omega \cos(\Omega - S) - \sin \omega \sin(\Omega - S) \cos i] \times \\
&\quad \times^{1/2} \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \cos(\Omega - S) + \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1-e) [\cos \omega \sin (\Omega-S) + \sin \omega \cos (\Omega-S) \cos i] \sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{1}{1-e} \times \\
& \quad \times \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} [-\sin \omega \sin (\Omega-S) + \cos \omega \cos (\Omega-S) \cos i] + \\
& \quad + a [\cos \omega \sin (\Omega-S) + \sin \omega \cos (\Omega-S) \cos i] \times \\
& \times 1/2 \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \sin (\Omega-S) - \cos \omega \cos (\Omega-S) \cos i] + \\
& \quad + (1-e) \sin \omega \sin i \sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{1}{1-e} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \cos \omega \sin i - \\
& \quad - a \sin \omega \sin i \cdot 1/2 \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \sin i = 0, \quad (465)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[a, M_0] &= \left( \frac{\partial x}{\partial a} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial M_0} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial x}{\partial M_0} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right) \right]_P + \\
& \quad + \left( \frac{\partial y}{\partial a} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial M_0} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial y}{\partial M_0} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right]_P + \\
& \quad + \left( \frac{\partial z}{\partial a} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial M_0} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right]_P - \left( \frac{\partial z}{\partial M_0} \right)_P \left[ \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) \right]_P = \\
& = (1-e) [\cos \omega \cos (\Omega-S) - \sin \omega \sin (\Omega-S) \cos i] \sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{1}{(1-e)^2} \times \\
& \quad \times [-\cos \omega \cos (\Omega-S) + \sin \omega \sin (\Omega-S) \cos i] + a \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \times \\
& \times [\sin \omega \cos (\Omega-S) + \cos \omega \sin (\Omega-S) \cos i] \cdot 1/2 \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \times \\
& \quad \times [\sin \omega \cos (\Omega-S) + \cos \omega \sin (\Omega-S) \cos i] + \\
& \quad + (1-e) [\cos \omega \sin (\Omega-S) + \sin \omega \cos (\Omega-S) \cos i] \sqrt{fM} a^{-1/2} \times \\
& \quad \times \frac{1}{(1-e)^2} [-\cos \omega \sin (\Omega-S) - \sin \omega \cos (\Omega-S) \cos i] + \\
& \quad + a \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \sin (\Omega-S) - \cos \omega \cos (\Omega-S) \cos i] \times \\
& \times 1/2 \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \sin (\Omega-S) - \cos \omega \cos (\Omega-S) \cos i] - \\
& \quad - (1-e) \sin \omega \sin i \sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{1}{(1-e)^2} \sin \omega \sin i + \\
& \quad + a \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \sin i \cdot 1/2 \sqrt{fM} a^{-1/2} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \times \\
& \quad \times \cos \omega \sin i = -1/2 \sqrt{fM} a^{-1/2}, \quad (466)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{e}, M_0] &= \left(\frac{\partial x}{\partial e}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial M_0} \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\right]_P - \left(\frac{\partial x}{\partial M_0}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)\right]_P + \\
&+ \left(\frac{\partial y}{\partial e}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial M_0} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right]_P - \left(\frac{\partial y}{\partial M_0}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\right]_P + \\
&+ \left(\frac{\partial z}{\partial e}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial M_0} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\right]_P - \left(\frac{\partial z}{\partial M_0}\right)_P \left[\frac{\partial}{\partial e} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)\right]_P = \\
&= a [-\cos \omega \cos(\Omega - S) + \sin \omega \sin(\Omega - S) \cos i] \sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{1}{(1-e)^2} \times \\
&\times [-\cos \omega \cos(\Omega - S) + \sin \omega \sin(\Omega - S) \cos i] + a \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \times \\
&\times [\sin \omega \cos(\Omega - S) + \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] \sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{1}{1-e} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \times \\
&\times [-\sin \omega \cos(\Omega - S) - \cos \omega \sin(\Omega - S) \cos i] + a [\cos \omega \sin(\Omega - S) + \\
&+ \sin \omega \cos(\Omega - S) \cos i] \sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{1}{(1-e)^2} [\cos \omega \sin(\Omega - S) + \\
&+ \sin \omega \cos(\Omega - S) \cos i] + a \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} [\sin \omega \sin(\Omega - S) - \\
&- \cos \omega \cos(\Omega - S) \cos i] \sqrt{fM} \frac{1}{1-e} \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} a^{1/2} \times \\
&\times [-\sin \omega \sin(\Omega - S) + \cos \omega \cos(\Omega - S) \cos i] + \\
&+ a \sin \omega \sin i \sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{1}{(1-e)^2} \sin \omega \sin i - \\
&- a \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \cos \omega \sin i \sqrt{fM} a^{-1/2} \frac{1}{1-e} \times \\
&\times \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \cos \omega \sin i = 0. \tag{467}
\end{aligned}$$

#### 4. Уравнения Лагранжа для возмущений элементов орбиты

Если подставим выражения для скобок Лагранжа (453)–(467) в систему уравнений (410), то, с учетом обозначений (452), можем записать

$$\begin{bmatrix}
 0 & -\sqrt{fM} \sqrt{a(1-e^2)} \sin i & 0 & \frac{1}{2} \sqrt{fM} \sqrt{\frac{1-e^2}{a}} \cos i & -\sqrt{fM} \sqrt{a} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \cos i & 0 \\
 \sqrt{fM} \sqrt{a(1-e^2)} \sin i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \sqrt{fM} \sqrt{\frac{1-e^2}{a}} & -\sqrt{fM} \sqrt{a} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} & 0 \\
 -\frac{1}{2} \sqrt{fM} \sqrt{\frac{1-e^2}{a}} \cos i & 0 & -\frac{1}{2} \sqrt{fM} \sqrt{\frac{1-e^2}{a}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \sqrt{fM} \frac{1}{\sqrt{a}} \\
 \sqrt{fM} \sqrt{a} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \cos i & 0 & \sqrt{fM} \sqrt{a} \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \sqrt{fM} \frac{1}{\sqrt{a}} & 0 & 0
 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{d\Omega}{dt} \\ \frac{di}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} \\ \frac{da}{dt} \\ \frac{de}{dt} \\ \frac{dM_0}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \Omega} \\ \frac{\partial \bar{R}}{\partial i} \\ \frac{\partial \bar{R}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial \bar{R}}{\partial a} \\ \frac{\partial \bar{R}}{\partial e} \\ \frac{\partial \bar{R}}{\partial M_0} \end{bmatrix}$$

(468)

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{fM} \sqrt{a(1-e^2)}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{fM} \sqrt{a(1-e^2)}} & 0 & \frac{\operatorname{ctg} i}{\sqrt{fM} \sqrt{a(1-e^2)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\operatorname{ctg} i}{\sqrt{fM} \sqrt{a(1-e^2)}} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{fM} \sqrt{a} e} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{fM}} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{fM} \sqrt{a} e} & 0 & 0 & \frac{1-e^2}{\sqrt{fM} \sqrt{a} e} \\ 0 & 0 & 0 & -2\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{fM}} & -\frac{1-e^2}{\sqrt{fM} \sqrt{a} e} & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \Omega} \\ \frac{\partial \bar{R}}{\partial i} \\ \frac{\partial \bar{R}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial \bar{R}}{\partial a} \\ \frac{\partial \bar{R}}{\partial e} \\ \frac{\partial \bar{R}}{\partial M_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\Omega}{dt} \\ \frac{di}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} \\ \frac{da}{dt} \\ \frac{de}{dt} \\ \frac{dM_0}{dt} \end{bmatrix} \quad (469)$$

Определитель системы (468) всегда отличен от нуля.

Квадратичные матрицы как (468), так и (469) имеют по главной диагонали нули и являются асимметричными, следовательно, справедливо равенство  $a_{ij} = -a_{ji}$ .

Вывод уравнений Лагранжа (469), которые имеют общий вид

$$\frac{de_i}{dt} = f \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial \Omega}, \frac{\partial \bar{R}}{\partial i}, \frac{\partial \bar{R}}{\partial \omega}, \frac{\partial \bar{R}}{\partial a}, \frac{\partial \bar{R}}{\partial e}, \frac{\partial \bar{R}}{\partial M_0} \right), \quad (470)$$

может быть произведен другими способами, которые мы здесь разбирать не будем. С математической стороны эти выводы иногда более интересны, чем только что описанный способ. Однако мы его выбрали потому, что он является наиболее простым, хотя несколько и более длинным.

В учебниках по небесной механике можно найти также и различные модификации уравнений для возмущения элементов.

В § 18 мы опустили уравнения движения в референционной геодезической системе  $X, Y, Z$  и для краткости все выводы выполняли последовательно в идеальной геоцентрической системе координат  $x, y, z$ . Можно доказать, однако, что в референционной системе мы получили бы уравнения для возмущений в элементах  $de_i/dt$ , формально

сходные с (469), только возмущающая функция была бы несколько иной ( $R$  вместо  $\bar{R}$ ).

Элементы  $a$ ,  $e$ , входящие в коэффициенты в  $d\bar{R}/de_i$ , являются инвариантными относительно любых переносов и поворотов системы и определяют размеры и форму кеплеровского эллипса, фокус которого всегда находится в центре Земли. Наклон  $i$  плоскости орбиты к плоскости экватора зависит от ориентировки плоскости экватора и поэтому, вообще говоря, является различным в системе  $x, y, z$  (обозначим его  $i$ ) и в системе  $X, Y, Z$  (обозначим его  $i^r$ ).

Из первого интеграла площадей (425) следует, например,

$$-\sin i \sqrt{fM} \sqrt{a(1-e^2)} di = dx \frac{dy}{dt} + xd \left( \frac{dy}{dt} \right) - dy \frac{dx}{dt} - yd \left( \frac{dx}{dt} \right), \quad (471)$$

где изменение угла наклона плоскости орбиты

$$di = i - i^r. \quad (472)$$

Примем во внимание (ч. I, глава 5, § 4), что

$$\left. \begin{aligned} dx &= \omega_0 y - \psi_0 z \\ dy &= -\omega_0 x + \varepsilon_0 z \\ dz &= \psi_0 x - \varepsilon_0 y \end{aligned} \right\}, \quad (473)$$

$$\left. \begin{aligned} d \left( \frac{dx}{dt} \right) &= \omega_0 \frac{dy}{dt} - \psi_0 \frac{dz}{dt} \\ d \left( \frac{dy}{dt} \right) &= -\omega_0 \frac{dx}{dt} + \varepsilon_0 \frac{dz}{dt} \\ d \left( \frac{dz}{dt} \right) &= \psi_0 \frac{dx}{dt} - \varepsilon_0 \frac{dy}{dt} \end{aligned} \right\}, \quad (474)$$

последние представляют собой изменения составляющих скорости в результате несовпадения осей геодезической референцной системы  $X, Y, Z$  и геоцентрической системы  $x, y, z$ .

Если мы подставим выражения (472)—(474) в (471), то получим с учетом (425)

$$\begin{aligned} i - i^r &= - \frac{1}{\sqrt{fM} \sqrt{a(1-e^2)} \sin i} \left[ \varepsilon_0 \left( x \frac{dz}{dt} - z \frac{dx}{dt} \right) + \right. \\ &\left. + \psi_0 \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) \right] = -\varepsilon_0 \cos(\Omega - S) - \psi_0 \sin(\Omega - S). \quad (475) \end{aligned}$$

Аналогично можно вывести и разность прямых восхождений восходящего узла в системе  $x, y, z$  (обозначим ее  $\Omega$ ) и в системе  $X, Y, Z$

$Y, Z$  (обозначим ее  $\bar{\Omega}$ ). Будем исходить опять-таки из интегралов площадей (425)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2(\Omega - S)} d\Omega = & - \left[ \left( dy \frac{dz}{dt} + yd \frac{dz}{dt} - dz \frac{dy}{dt} - zd \frac{dy}{dt} \right) \times \right. \\ & \times \left( z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) - \left( dz \frac{dx}{dt} + zd \frac{dx}{dt} - dx \frac{dz}{dt} - \right. \\ & \left. \left. - xd \frac{dz}{dt} \right) \left( y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} \right) \right] \left( z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right)^{-2}. \end{aligned} \quad (476)$$

После подстановки (473) и (474), а также выражения

$$d\Omega = \Omega - \bar{\Omega} \quad (477)$$

в уравнение (476) получим с учетом (425)

$$\Omega - \bar{\Omega} = -\omega_0 + \varepsilon_0 \sin(\Omega - S) \operatorname{ctg} i - \psi_0 \cos(\Omega - S) \operatorname{ctg} i. \quad (478)$$

Однако главные отклонения в возмущениях элементов орбиты  $de_i/dt$ , вызываемые несовпадениями геодезической референцной системы с геоцентрической системой, являются функциями разностей

$$\left. \begin{aligned} & \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial \Omega} - \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right), \quad \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial i} - \frac{\partial R}{\partial i} \right), \quad \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial \omega} - \frac{\partial R}{\partial \omega} \right) \\ & \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial a} - \frac{\partial R}{\partial a} \right), \quad \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial e} - \frac{\partial R}{\partial e} \right), \quad \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial M_0} - \frac{\partial R}{\partial M_0} \right) \end{aligned} \right\}. \quad (479)$$

При интегрировании изменений по времени элементов орбит часто выгодно использовать в качестве независимого переменного вместо времени  $t$  истинную аномалию  $v$ , т. е. определять  $de_i/dv$ . Преобразуем нужное нам выражение

$$\frac{de_i}{dt} = \frac{de_i}{dv} \cdot \frac{dv}{dt}, \quad (480)$$

причем из интегралов площадей в полярных координатах имеем (427)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\Delta^2} \sqrt{fM} \cdot \sqrt{a(1-e^2)}. \quad (481)$$

Составим еще представление об отклонениях истинной орбиты спутника от кеплеровской в момент, удаленный по времени от момента оскулирования  $t$  на интервал времени  $\Delta t$  [8]. Пусть положение спутника в момент оскулирования есть  $(x_0, y_0, z_0)$ , а в момент  $t + \Delta t$  есть  $(x, y, z)$ , и фиктивное положение на оскулирующем эллипсе в тот же момент  $(x_e, y_e, z_e)$ .

Для достаточно малого  $\Delta t$  с помощью ряда Тейлора можем записать

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 (\Delta t)^2 + \dots \\ y &= y_0 + \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_0 (\Delta t)^2 + \dots \\ z &= z_0 + \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_0 (\Delta t)^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (482)$$

и аналогично

$$\left. \begin{aligned} x_e &= x_0 + \left(\frac{dx_e}{dt}\right)_0 \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2x_e}{dt^2}\right)_0 (\Delta t)^2 + \dots \\ y_e &= y_0 + \left(\frac{dy_e}{dt}\right)_0 \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2y_e}{dt^2}\right)_0 (\Delta t)^2 + \dots \\ z_e &= z_0 + \left(\frac{dz_e}{dt}\right)_0 \Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2z_e}{dt^2}\right)_0 (\Delta t)^2 + \dots \end{aligned} \right\}. \quad (483)$$

В момент оскулирования, однако, справедливы равенства

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dx_e}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dy_e}{dt}\right)_0, \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = \left(\frac{dz_e}{dt}\right)_0$$

и поэтому расстояние между двумя положениями  $(x, y, z)$  и  $(x_e, y_e, z_e)$  в первом приближении будет равно

$$\begin{aligned} d &= [(x - x_e)^2 + (y - y_e)^2 + (z - z_e)^2]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \times \\ &\times \left\{ \left[ \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 - \left(\frac{d^2x_e}{dt^2}\right)_0 \right]^2 + \left[ \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_0 - \left(\frac{d^2y_e}{dt^2}\right)_0 \right]^2 + \right. \\ &\left. + \left[ \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_0 - \left(\frac{d^2z_e}{dt^2}\right)_0 \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (484)$$

Однако, согласно (376), имеют место следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 &= -fM \left(\frac{x}{\Delta^3}\right)_0 + \left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial x}\right)_0 \\ \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_0 &= -fM \left(\frac{y}{\Delta^3}\right)_0 + \left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial y}\right)_0 \\ \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_0 &= -fM \left(\frac{z}{\Delta^3}\right)_0 + \left(\frac{\partial \bar{R}}{\partial z}\right)_0 \end{aligned} \right\}, \quad (485)$$

а согласно (382),

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d^2x_e}{dt^2}\right)_0 &= -fM \left(\frac{x}{\Delta^3}\right)_0 \\ \left(\frac{d^2y_e}{dt^2}\right)_0 &= -fM \left(\frac{y}{\Delta^3}\right)_0 \\ \left(\frac{d^2z_e}{dt^2}\right)_0 &= -fM \left(\frac{z}{\Delta^3}\right)_0 \end{aligned} \right\}, \quad (486)$$

поэтому

$$d \simeq \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \left[ \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial x} \right)_0^2 + \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial y} \right)_0^2 + \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial z} \right)_0^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (487)$$

Для спутников, обращающихся близко к центру Земли, практически

$$d \simeq \frac{1}{2} (\Delta t)^2 \left| \left( \frac{\partial \bar{R}}{\partial \Delta} \right)_0 \right| \simeq \frac{3}{2} (\Delta t)^2 \frac{fM}{\Delta_0^3} \left( \frac{a_0}{\Delta_0} \right)^2 J_2^{(0)} P_2^{(0)} (\sin \Phi_0), \quad (488)$$

где  $\Delta_0$ ,  $\Phi_0$  — сферические координаты положения спутника в моменты оскулирования.

## § 20. ПРОИЗВОДНЫЕ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ПО ЭЛЕМЕНТАМ ОРБИТЫ

Возмущения

$$\frac{d\Omega}{dt}, \quad \frac{di}{dt}, \quad \frac{d\omega}{dt}, \quad \frac{da}{dt}, \quad \frac{de}{dt}, \quad \frac{dM_0}{dt}$$

в I главе были выведены как функции производных

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial \Omega}, \quad \frac{\partial \bar{R}}{\partial i}, \quad \frac{\partial \bar{R}}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial \bar{R}}{\partial a}, \quad \frac{\partial \bar{R}}{\partial e}, \quad \frac{\partial \bar{R}}{\partial M_0}.$$

Эти производные необходимо теперь представить так, чтобы можно было непосредственно воспользоваться возмущающим потенциалом в виде (380), т. е. в сферических или экваториальных координатах  $\Delta = \rho$ ,  $\Phi = \delta$ ,  $\Lambda = -T$ .

Вообще для производной по произвольному элементу имеет место равенство

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial e_i} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial e_i} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial e_i} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial e_i}, \quad (489)$$

причем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial e_i} &= \frac{\partial \Delta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial e_i} + \frac{\partial \Delta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial e_i} + \frac{\partial \Delta}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial e_i} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial e_i} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial e_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial e_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial e_i} \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial e_i} &= \frac{\partial \Lambda}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial e_i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial e_i} + \frac{\partial \Lambda}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial e_i} \end{aligned} \right\}, \quad (490)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \Phi &= \arctg \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \Lambda &= \arctg \frac{y}{x} \end{aligned} \right\}, \quad (491)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial x} &= \frac{x}{\Delta} = \cos \Phi \cos \Lambda \\ \frac{\partial \Delta}{\partial y} &= \frac{y}{\Delta} = \cos \Phi \sin \Lambda \\ \frac{\partial \Delta}{\partial z} &= \frac{z}{\Delta} = \sin \Phi \end{aligned} \right\}, \quad (492)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= -\frac{1}{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2}} \cdot \frac{xz}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = -\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \\ &= -\frac{x}{\Delta^2} \operatorname{tg} \Phi = -\frac{1}{\Delta} \sin \Phi \cos \Lambda \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= -\frac{1}{\Delta} \sin \Phi \sin \Lambda \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \frac{1}{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{\Delta} \cos \Phi \end{aligned} \right\}, \quad (493)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial x} &= -\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = \\ &= -\frac{\Delta \cos \Phi \sin \Lambda}{\Delta^2 \cos^2 \Phi} = -\frac{1}{\Delta \cos \Phi} \sin \Lambda \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial y} &= \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \\ &= \frac{\Delta \cos \Phi \cos \Lambda}{\Delta^2 \cos^2 \Phi} = \frac{1}{\Delta \cos \Phi} \cos \Lambda \\ \frac{\partial \Lambda}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (494)$$

Теперь можно было бы найти производные  $\partial x/\partial e_i$ ,  $\partial y/\partial e_i$ ,  $\partial z/\partial e_i$ , которые мы уже использовали в § 18 при вычислении скобок Лагранжа. Этот путь, однако, сравнительно долг и поэтому будем искать прямой вывод производных  $\partial \Delta/\partial e_i$ ,  $\partial \Phi/\partial e_i$ ,  $\partial \Lambda/\partial e_i$  с целью непосредственного применения соотношения (489).

Кроме того, здесь, для краткости, ограничимся только возмущениями прямого восхождения узла и аргумента перигея, т. е. будем рассматривать только первое и третье уравнения Лагранжа (469)

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{fM} \cdot \sqrt{a(1-e^2)}} \cdot \frac{\partial \bar{R}}{\partial i}, \quad (495)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\operatorname{ctg} i}{\sqrt{fM} \cdot \sqrt{a(1-e^2)}} \cdot \frac{\partial \bar{R}}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{fM} \sqrt{a} e} \cdot \frac{\partial \bar{R}}{\partial e}, \quad (496)$$

или, с учетом (480) и (481),

$$\frac{d\Omega}{dv} = \frac{\Delta^2 \operatorname{cosec} i}{fMa(1-e^2)} \cdot \frac{\partial \bar{R}}{\partial i}, \quad (497)$$

$$\frac{d\omega}{dv} = -\frac{\Delta^2 \operatorname{ctg} i}{fMa(1-e^2)} \cdot \frac{\partial \bar{R}}{\partial i} + \frac{\Delta^2}{fMa e} \cdot \frac{\partial \bar{R}}{\partial e}. \quad (498)$$

Способ вывода уравнений для  $di/dt$ ,  $da/dt$ ,  $de/dt$ ,  $dM_0/dt$  аналогичный.

Из соотношений, встречающихся при решении задачи двух тел (419)–(423), следует

$$\frac{\partial \Delta}{\partial i} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial i} = \frac{\partial v}{\partial i} = 0, \quad (499)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial e} &= -a \cos E + ae \sin E \frac{\partial E}{\partial e} \\ \frac{\partial M}{\partial e} = 0 &= \frac{\partial E}{\partial e} - e \cos E \frac{\partial E}{\partial e} - \sin E \\ \frac{\partial E}{\partial e} &= \frac{\sin E}{1 - e \cos E} = \frac{a}{\Delta} \sin E = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \sin v \end{aligned} \right\} \quad (500)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial e} &= -a \cos E + \frac{a^2 e}{\Delta} \sin^2 E = -\Delta \cos v - ae + \\ &+ \Delta e \frac{1}{1-e^2} \sin^2 v = -\frac{a(1-e^2)}{1+e \cos v} \cos v - ae + \\ &+ \frac{ae}{1+e \cos v} \sin^2 v = \frac{-a \cos v - ae + ae \sin^2 v}{1+e \cos v} = -a \cos v \\ &\quad \frac{\Delta}{a} \cos v = \cos E - e \\ \frac{\partial \Delta}{\partial e} \frac{1}{a} \cos v - \frac{\Delta}{a} \sin v \frac{\partial v}{\partial e} &= -\sin E \frac{\partial E}{\partial e} - 1 \\ -\cos^2 v - \frac{\Delta}{a} \sin v \frac{\partial v}{\partial e} &= -\frac{\Delta}{a(1-e^2)} \sin^2 v - 1 \\ \frac{\Delta}{a} \frac{\partial v}{\partial e} &= \sin v + \frac{\Delta}{a(1-e^2)} \sin v \\ \frac{\partial v}{\partial e} &= \sin v \left( \frac{a}{\Delta} + \frac{1}{1-e^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial e}. \end{aligned} \right\} \quad (501)$$

Для вывода необходимых в уравнениях (497) и (498) производных

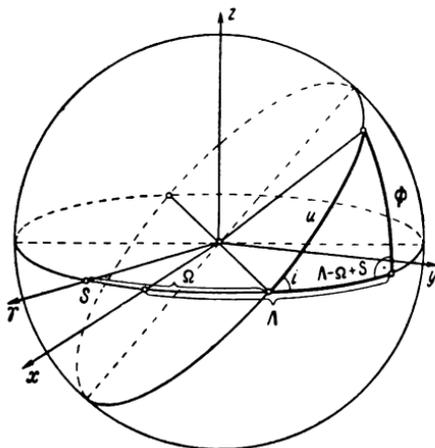
$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial i} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial i} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial i} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial i}, \quad (503)$$

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial e} = \frac{\partial \bar{R}}{\partial \Delta} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial e} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \Phi} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial e} + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \Lambda} \cdot \frac{\partial \Lambda}{\partial e} \quad (504)$$

мы должны иметь в распоряжении производные  $\partial\Phi/\partial i$ ,  $\partial\Lambda/\partial i$ ,  $\partial\Phi/\partial e$ ,  $\partial\Lambda/\partial e$ . Эти выражения вычислим из соотношений, связывающих  $\Phi$  и  $\Lambda$  и функцию элементов орбиты.

Ими могут быть, например, выражения для направляющих косинусов вектора спутника, в которых  $\delta$  — опять-таки геоцентрическое

Рис. 10. Элементы орбиты ИСЗ



склонение спутника, а  $T$  — геоцентрический гринвичский часовой угол

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\Delta} &= \cos \Phi \cos \Lambda = \cos \delta \cos T = \cos u \cos (\Omega - S) - \\ &\quad - \sin u \sin (\Omega - S) \cos i \\ \frac{y}{\Delta} &= \cos \Phi \sin \Lambda = -\cos \delta \sin T = \\ &= \cos u \sin (\Omega - S) + \sin u \cos (\Omega - S) \cos i \\ \frac{z}{\Delta} &= \sin \Phi = \sin \delta = \sin u \sin i \end{aligned} \right\} \quad (505)$$

или соотношения между геоцентрическими величинами, исходящие из рис. 10,

$$\left. \begin{aligned} \sin u &= \frac{\sin \Phi}{\sin i} \\ \sin u \cos i &= -\cos \Phi \sin (\Omega - S - \Lambda) \\ \operatorname{ctg} i &= -\operatorname{ctg} \Phi \sin (\Omega - S - \Lambda) \\ \cos u \operatorname{tg} i &= -\sin \Phi \operatorname{ctg} (\Omega - S - \Lambda) \\ \operatorname{tg} (\Omega - S - \Lambda) &= -\operatorname{tg} u \cos i \\ \cos u &= \cos \Phi \cos (\Omega - S - \Lambda) \\ \cos \Phi &= \cos u \cos (\Omega - S - \Lambda) - \\ &\quad - \sin u \sin (\Omega - S - \Lambda) \cos i \end{aligned} \right\} \quad (506)$$

Продифференцируем первое и пятое из уравнений (506) и с учетом (499)—(502) получим

$$\left. \begin{aligned} \cos \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial i} &= \sin u \cos i + \cos u \sin i \frac{\partial u}{\partial i} = \sin u \cos i \\ \frac{\partial \Phi}{\partial i} &= \frac{1}{\cos \Phi} \sin u \cos i = -\sin(\Omega - S - \Lambda) \\ \cos \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial e} &= \cos u \sin i \frac{\partial u}{\partial e} = \\ &= \cos u \sin i \sin v \left( \frac{a}{\Delta} + \frac{1}{1-e^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (507)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial e} &= \sec \Phi \cos u \sin i \sin v \left( \frac{a}{\Delta} + \frac{1}{1-e^2} \right) = \\ &= \sin i \cos(\Omega - S - \Lambda) \sin v \left( \frac{a}{\Delta} + \frac{1}{1-e^2} \right) \\ - \frac{1}{\cos^2(\Omega - S - \Lambda)} \frac{\partial \Lambda}{\partial i} &= \operatorname{tg} u \sin i - \frac{1}{\cos^2 u} \frac{\partial u}{\partial i} \cos i = \operatorname{tg} u \sin i \end{aligned} \right\} \quad (508)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial i} &= -\cos^2(\Omega - S - \Lambda) \operatorname{tg} u \sin i = \\ &= \sin(\Omega - S - \Lambda) \cos(\Omega - S - \Lambda) \operatorname{tg} i \\ - \frac{1}{\cos^2(\Omega - S - \Lambda)} \frac{\partial \Lambda}{\partial e} &= -\frac{1}{\cos^2 u} \frac{\partial u}{\partial e} \cos i \end{aligned} \right\} \quad (509)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\Lambda}}{\partial e} &= \cos^2(\Omega - S - \Lambda) \cos i \frac{\sin v}{\cos^2 u} \left( \frac{a}{\Delta} + \frac{1}{1-e^2} \right) = \\ &= \frac{\cos i \sin v}{\cos^2 \Phi} \left( \frac{a}{\Delta} + \frac{1}{1-e^2} \right). \end{aligned} \quad (510)$$

Если подставить соотношения (499), (502), (507)—(510) в (503) и (504), то получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{R}}{\partial i} &= -\frac{\partial \bar{R}}{\partial \Phi} \sin(\Omega - S - \Lambda) + \\ &+ \frac{\partial \bar{R}}{\partial \Lambda} \sin(\Omega - S - \Lambda) \cos(\Omega - S - \Lambda) \operatorname{tg} i \\ \frac{\partial \bar{R}}{\partial e} &= -\frac{\partial \bar{R}}{\partial \Lambda} a \cos v + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \Phi} \sin i \cos(\Omega - S - \Lambda) \times \\ &\times \sin v \left( \frac{a}{\Delta} + \frac{1}{1-e^2} \right) + \frac{\partial \bar{R}}{\partial \Lambda} \frac{\cos i \sin v}{\cos^2 \Phi} \left( \frac{a}{\Delta} + \frac{1}{1-e^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (511)$$

Совершенно аналогично можно было бы вывести производные возмущающей функции по всем другим элементам орбит, но они излишни, так как мы ограничились рассмотрением только движений узла и перигея.

§ 21. ПРОИЗВОДНЫЕ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ПО СФЕРИЧЕСКИМ  
КООРДИНАТАМ

Найдем производные  $\partial \bar{R}/\partial \Delta$ ,  $\partial \bar{R}/\partial \Phi$ ,  $\partial \bar{R}/\partial \Lambda$  возмущающей функции (378)

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial \Delta} = -\frac{fM}{\Delta^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left[ (n+1) \left(\frac{a_0}{\Delta}\right)^n \sum_{k=0}^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + S_n^{(k)} \sin k\Lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right] + \frac{\partial \bar{R}_{\zeta}}{\partial \Delta} + \frac{\partial \bar{R}_{\odot}}{\partial \Delta}, \quad (512)$$

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial \Phi} = \frac{fM}{\Delta} \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \left(\frac{a_0}{\Delta}\right)^n \sum_{k=0}^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + S_n^{(k)} \sin k\Lambda) \times \right. \\ \left. \times \frac{dP_n^{(k)}(\sin \Phi)}{d\Phi} \right] + \frac{\partial \bar{R}_{\zeta}}{\partial \Phi} + \frac{\partial \bar{R}_{\odot}}{\partial \Phi}, \quad (513)$$

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial \Lambda} = \frac{fM}{\Delta} \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \left(\frac{a_0}{\Delta}\right)^n \sum_{k=0}^n k (-J_n^{(k)} \sin k\Lambda + S_n^{(k)} \cos k\Lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right] + \frac{\partial \bar{R}_{\zeta}}{\partial \Lambda} + \frac{\partial \bar{R}_{\odot}}{\partial \Lambda}. \quad (514)$$

Производную (513) преобразуем следующим образом

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial \Phi} = \frac{fM}{\Delta} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_0}{\Delta}\right)^n J_n^{(0)} \frac{dP_n^{(0)}(\sin \Phi)}{d\Phi} + \frac{fM}{\Delta} \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \left(\frac{a_0}{\Delta}\right)^n \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + S_n^{(k)} \sin k\Lambda) \frac{dP_n^{(k)}(\sin \Phi)}{d\Phi} \right] + \frac{\partial \bar{R}_{\zeta}}{\partial \Phi} + \frac{\partial \bar{R}_{\odot}}{\partial \Phi}, \quad (515)$$

а так как, согласно (108), при  $k=1$

$$\cos \Phi \frac{dP_n^{(0)}(\sin \Phi)}{d \sin \Phi} = P_n^{(1)}(\sin \Phi) = \frac{dP_n^{(0)}(\sin \Phi)}{d\Phi}, \quad (516)$$

то далее преобразуем  $\partial \bar{R}/\partial \Phi$  к виду

$$\frac{\partial \bar{R}}{\partial \Phi} = \frac{fM}{\Delta} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_0}{\Delta}\right)^n J_n^{(0)} P_n^{(1)}(\sin \Phi) + \frac{fM}{\Delta} \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \left(\frac{a_0}{\Delta}\right)^n \times \right. \\ \left. \times \sum_{k=1}^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + S_n^{(k)} \sin k\Lambda) \frac{dP_n^{(k)}(\sin \Phi)}{d\Phi} \right] + \frac{\partial \bar{R}_{\zeta}}{\partial \Phi} + \frac{\partial \bar{R}_{\odot}}{\partial \Phi}. \quad (517)$$

Первые производные присоединенных функций  $\frac{dP_n^{(k)}(\sin \Phi)}{\partial \Phi}$  можно получить из формулы (108)

$$\begin{aligned} \frac{dP_n^{(k)}(\sin \Phi)}{d\Phi} = & -k \sin \Phi \cos^{k-1} \Phi \frac{d^k P_n^{(0)}(\sin \Phi)}{d(\sin \Phi)^k} + \\ & + \mu \cos^k \Phi \frac{d^{k+1} P_n^{(0)}(\sin \Phi)}{d(\sin \Phi)^{k+1}} \cos \Phi, \end{aligned} \quad (518)$$

причем

$$\begin{aligned} \mu = 1, & \text{ если } k \leq n-1, \\ \mu = 0, & \text{ если } k = n, \end{aligned}$$

а так как, согласно (108), имеет место

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^k P_n^{(0)}(\sin \Phi)}{d(\sin \Phi)^k} &= \frac{P_n^{(k)}(\sin \Phi)}{\cos^k \Phi} \\ \frac{d^{k+1} P_n^{(0)}(\sin \Phi)}{d(\sin \Phi)^{k+1}} &= \frac{P_n^{(k+1)}(\sin \Phi)}{\cos^{k+1} \Phi} \end{aligned} \right\}, \quad (519)$$

то далее можно написать

$$\frac{dP_n^{(k)}(\sin \Phi)}{d\Phi} = -k \operatorname{tg} \Phi P_n^{(k)}(\sin \Phi) + \mu P_n^{(k+1)}(\sin \Phi). \quad (520)$$

Если подставить теперь (520) в (517), то получим в окончательном виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{R}}{\partial \Phi} = & \frac{fM}{\Delta} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_0}{\Delta}\right)^n J_n^{(0)} P_n^{(1)}(\sin \Phi) - \frac{fM}{\Delta} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \left(\frac{a_0}{\Delta}\right)^n \sum_{k=1}^n (J_n^k \cos k\Lambda + \right. \\ & \left. + S_n^{(k)} \sin k\Lambda) [k \operatorname{tg} \Phi P_n^k(\sin \Phi) - \mu P_n^{(k+1)}(\sin \Phi)] \right\} + \frac{\partial \bar{R}_{\zeta}}{\partial \Phi} + \frac{\partial \bar{R}_{\odot}}{\partial \Phi}. \end{aligned} \quad (521)$$

Для функции  $P_n^{(k)}(\sin \Phi)$  имеются таблицы, например, в [1—4]

## § 22. ВЛИЯНИЕ ПРИТЯЖЕНИЯ ЛУНЫ И СОЛНЦА

Гравитационный потенциал Луны  $V_{\zeta}$  и Солнца  $V_{\odot}$  можно выразить аналогично гравитационному потенциалу Земли, например, в виде (рис. 11—12)

$$V_{\zeta} = \frac{fM_{\zeta}}{\Delta_{\zeta}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{a_{\zeta}}{\Delta_{\zeta}}\right)^n [(J_n^k)_{\zeta} \cos k\Lambda^{\zeta} + (S_n^{(k)})_{\zeta} \sin k\Lambda^{\zeta}] P_n^{(k)}(\sin \Phi^{\zeta}), \quad (522)$$

$$V_{\odot} = \frac{fM_{\odot}}{\Delta_{\odot}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{a_{\odot}}{\Delta_{\odot}}\right)^n [(J_n^k)_{\odot} \cos k\Lambda^{\odot} + (S_n^{(k)})_{\odot} \sin k\Lambda^{\odot}] P_n^{(k)}(\sin \Phi^{\odot}), \quad (523)$$

где  $M_{\text{л}}, M_{\odot}$  — массы Луны и Солнца,  $a_{\text{л}}, a_{\odot}$  — линейные масштабные коэффициенты (например, средние значения радиуса-вектора, используемые при вычислении динамических коэффициентов  $(J_n^{(h)})_{\text{л}}, (S_n^{(h)})_{\text{л}}$  и  $(J_n^{(h)})_{\odot}, (S_n^{(h)})_{\odot}$ ),  $\Delta_{\text{л}}, \Delta_{\odot}$  — селеноцентрическое и гелиоцентрическое расстояния до ИСЗ;  $\varphi^{\text{л}}, \Lambda^{\text{л}}$  — селеноцентрические



Рис. 11. Схема к выводу  
возмущающего действия  
Луны



Рис. 12. Схема к выводу  
возмущающего действия  
Солнца

широта и долгота спутника (координаты относительно лунного экватора);  $\Phi^{\odot}, \Lambda^{\odot}$  — гелиоцентрические широта и долгота спутника.

Влияние  $V_{\text{л}}$  и  $V_{\odot}$  на движение спутников, близких к Земле, является все-таки сравнительно малым, приблизительно в  $10^4$  раз меньшим, чем влияние полярного сжатия (динамического коэффициента  $J_2^{(\odot)}$ ) Земли. Влияние остальных тел солнечной системы по крайней мере еще на 3 порядка меньше и поэтому пренебрегается. Поэтому обычно достаточно вместо точных выражений (522) и (523) использовать упрощенные

$$V_{\text{л}} = \frac{fM_{\text{л}}}{\Delta_{\text{л}}}, \quad (524)$$

$$V_{\odot} = \frac{fM_{\odot}}{\Delta_{\odot}}, \quad (525)$$

соответствующие точечным центральным полям.

Принимая во внимание в выражениях (512)—(514) производные по  $\Delta, \Phi, \Lambda$ , величины  $1/\Delta_{\text{л}}$  и  $1/\Delta_{\odot}$  можно представить в виде функ-

ций  $\Delta$ ,  $\Phi$  и  $\Lambda$ . Очевидно, что разложение в ряд сферических функций будет аналогичным выражению (190). Если обозначить (рис. 11—12):  $\Delta_{\oplus\zeta}$ ,  $\Delta_{\oplus\odot}$  — расстояния центров масс Земли и соответственно Луны и Солнца, а  $S_{\zeta}(S_{\odot})$  — угол между геоцентрическим вектором спутника и Луной (Солнцем), то получим

$$\frac{1}{\Delta_{\zeta}} = \frac{1}{\Delta_{\oplus\zeta}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\Delta}{\Delta_{\oplus\zeta}} \right)^n P_n^{(0)}(\cos S_{\zeta}), \quad (526)$$

$$\frac{1}{\Delta_{\odot}} = \frac{1}{\Delta_{\oplus\odot}} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\Delta}{\Delta_{\oplus\odot}} \right)^n P_n^{(0)}(\cos S_{\odot}), \quad (527)$$

причем

$$\begin{aligned} \cos S_{\zeta} &= \frac{1}{\Delta_{\oplus\zeta}} (xx_{\zeta} + yy_{\zeta} + zz_{\zeta}) = \\ &= \sin \Phi \sin \Phi_{\zeta} + \cos \Phi \cos \Phi_{\zeta} \cos (\Lambda - \Lambda_{\zeta}), \end{aligned} \quad (528)$$

где  $x_{\zeta}$ ,  $y_{\zeta}$ ,  $z_{\zeta}$  — геоцентрические координаты центра масс Луны,  $\Phi_{\zeta}$ ,  $(\delta_{\zeta})$  — геоцентрическая широта (склонение) центра масс Луны,  $\Lambda_{\zeta}$  — геоцентрическая долгота центра масс Луны.

Если ограничиться в разложении (526) степенью  $n = 4$  (см. функцию (113)), а в (527) степенью  $n = 2$ , то формулы (524) и (525) примут вид

$$\begin{aligned} V_{\zeta} \simeq \frac{fM}{\Delta_{\oplus\zeta}} \left[ 1 + \frac{\Delta}{\Delta_{\oplus\zeta}} \cos S_{\zeta} + \left( \frac{\Delta}{\Delta_{\oplus\zeta}} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \cos^2 S_{\zeta} - \frac{1}{2} \right) + \right. \\ \left. + \left( \frac{\Delta}{\Delta_{\oplus\zeta}} \right)^3 \left( \frac{5}{2} \cos^3 S_{\zeta} - \frac{3}{2} \cos S_{\zeta} \right) + \right. \\ \left. + \left( \frac{\Delta}{\Delta_{\oplus\zeta}} \right)^4 \left( \frac{35}{8} \cos^4 S_{\zeta} - \frac{15}{4} \cos^2 S_{\zeta} + \frac{3}{8} \right) \right], \end{aligned} \quad (529)$$

$$V_{\odot} \simeq \frac{fM_{\odot}}{\Delta_{\oplus\odot}} \left[ 1 + \frac{\Delta}{\Delta_{\oplus\odot}} \cos S_{\odot} + \left( \frac{\Delta}{\Delta_{\oplus\odot}} \right)^2 \left( \frac{3}{2} \cos^2 S_{\odot} - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (530)$$

Соотношения (529) и (530), однако, не могут быть еще подставлены в выражения для производной возмущающей функции  $\bar{R}$ , так как не содержат так называемых косвенных воздействий третьего тела. Эти воздействия вытекают из основных соотношений проблемы  $n$  тел, которые здесь освещены вкратце для случая спутника Земли (масса  $m_{\zeta}$ ), Земли ( $M$ ), Луны ( $M_{\zeta}$ ) и Солнца ( $M_{\odot}$ ).

Все эти четыре тела будем рассматривать здесь в произвольной неподвижной системе  $\underline{x}$ ,  $\underline{y}$ ,  $\underline{z}$ .

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \bar{x}_c}{dt^2} &= \frac{fM}{\Delta^3} (\bar{x}_\oplus - \bar{x}_c) + \frac{fM_\zeta}{\Delta_\zeta^3} (\bar{x}_\zeta - \bar{x}_c) + \frac{fM_\odot}{\Delta_\odot^3} (\bar{x}_\odot - \bar{x}_c) \\ \frac{d^2 \bar{y}_c}{dt^2} &= \frac{fM}{\Delta^3} (\bar{y}_\oplus - \bar{y}_c) + \frac{fM_\zeta}{\Delta_\zeta^3} (\bar{y}_\zeta - \bar{y}_c) + \frac{fM_\odot}{\Delta_\odot^3} (\bar{y}_\odot - \bar{y}_c) \\ \frac{d^2 \bar{z}_c}{dt^2} &= \frac{fM}{\Delta^3} (\bar{z}_\oplus - \bar{z}_c) + \frac{fM_\zeta}{\Delta_\zeta^3} (\bar{z}_\zeta - \bar{z}_c) + \frac{fM_\odot}{\Delta_\odot^3} (\bar{z}_\odot - \bar{z}_c) \end{aligned} \right\}, \quad (531)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \bar{x}_\oplus}{dt^2} &= \frac{fM_\odot}{\Delta_\odot^3} (\bar{x}_\odot - \bar{x}_\oplus) + \frac{fM_\zeta}{\Delta_\zeta^3} (\bar{x}_\zeta - \bar{x}_\oplus) + \frac{f m_c}{\Delta^3} (\bar{x}_c - \bar{x}_\oplus) \\ \frac{d^2 \bar{y}_\oplus}{dt^2} &= \frac{fM_\odot}{\Delta_\odot^3} (\bar{y}_\odot - \bar{y}_\oplus) + \frac{fM_\zeta}{\Delta_\zeta^3} (\bar{y}_\zeta - \bar{y}_\oplus) + \frac{f m_c}{\Delta^3} (\bar{y}_c - \bar{y}_\oplus) \\ \frac{d^2 \bar{z}_\oplus}{dt^2} &= \frac{fM_\odot}{\Delta_\odot^3} (\bar{z}_\odot - \bar{z}_\oplus) + \frac{fM_\zeta}{\Delta_\zeta^3} (\bar{z}_\zeta - \bar{z}_\oplus) + \frac{f m_c}{\Delta^3} (\bar{z}_c - \bar{z}_\oplus) \end{aligned} \right\} \quad (532)$$

и аналогично  $d^2 \bar{x}_\zeta / dt^2$  и т. д., причем здесь

$\bar{x}_c, \bar{y}_c, \bar{z}_c$  — координаты спутника,

$\bar{x}_\oplus, \bar{y}_\oplus, \bar{z}_\oplus$  — координаты центра масс Земли,

$\bar{x}_\odot, \bar{y}_\odot, \bar{z}_\odot$  — координаты центра масс Солнца,

$\bar{x}_\zeta, \bar{y}_\zeta, \bar{z}_\zeta$  — координаты центра масс Луны,

$\Delta_{\oplus\odot}$  — расстояние между центрами масс Земли и Солнца.

Теперь предположим, что  $\bar{x} \parallel x, \bar{y} \parallel y, \bar{z} \parallel z$  и выполним перенос системы  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  к центру масс Земли. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \bar{x}_\oplus + x \\ \bar{y} &= \bar{y}_\oplus + y \\ \bar{z} &= \bar{z}_\oplus + z \end{aligned} \right\}, \quad (533)$$

а поэтому, с учетом (531),

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{fM}{\Delta^3} x + \frac{fM_\zeta}{\Delta_\zeta^3} (x_\zeta - x) + \frac{fM_\odot}{\Delta_\odot^3} (x_\odot - x) - \\ &\quad - \frac{fM_\odot}{\Delta_{\oplus\odot}^3} x_\odot - \frac{fM_\zeta}{\Delta_{\oplus\zeta}^3} x_\zeta - \frac{f m_c}{\Delta^3} x \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{fM}{\Delta^3} y + \frac{fM_\zeta}{\Delta_\zeta^3} (y_\zeta - y) + \frac{fM_\odot}{\Delta_\odot^3} (y_\odot - y) - \\ &\quad - \frac{fM_\odot}{\Delta_{\oplus\odot}^3} y_\odot - \frac{fM_\zeta}{\Delta_{\oplus\zeta}^3} y_\zeta - \frac{f m_c}{\Delta^3} y \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -\frac{fM}{\Delta^3} z + \frac{fM_\zeta}{\Delta_\zeta^3} (z_\zeta - z) + \frac{fM_\odot}{\Delta_\odot^3} (z_\odot - z) - \\ &\quad - \frac{fM_\odot}{\Delta_{\oplus\odot}^3} z_\odot - \frac{fM_\zeta}{\Delta_{\oplus\zeta}^3} z_\zeta - \frac{f m_c}{\Delta^3} z \end{aligned} \right\}, \quad (534)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d^2x}{dt^2} &= -f(M+m_c) \frac{x}{\Delta^3} + fM_c \left( \frac{x_c - x}{\Delta_c^3} - \frac{x_c}{\Delta_{\oplus c}^3} \right) + \\
 &\quad + fM_{\odot} \left( \frac{x_{\odot} - x}{\Delta_{\odot}^3} - \frac{x_{\odot}}{\Delta_{\oplus \odot}^3} \right) \\
 \frac{d^2y}{dt^2} &= -f(M+m_c) \frac{y}{\Delta^3} + fM_c \left( \frac{y_c - y}{\Delta_c^3} - \frac{y_c}{\Delta_{\odot c}^3} \right) + \\
 &\quad + fM_{\odot} \left( \frac{y_{\odot} - y}{\Delta_{\odot}^3} - \frac{y_{\odot}}{\Delta_{\oplus \odot}^3} \right) \\
 \frac{d^2z}{dt^2} &= -f(M+m_c) \frac{z}{\Delta^3} + fM_c \left( \frac{z_c - z}{\Delta_c^3} - \frac{z_c}{\Delta_{\odot c}^3} \right) + \\
 &\quad + fM_{\odot} \left( \frac{z_{\odot} - z}{\Delta_{\odot}^3} - \frac{z_{\odot}}{\Delta_{\oplus \odot}^3} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (535)$$

Если далее учтем, что

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\Delta_c} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} [(x_c - x)^2 + (y_c - y)^2 + \\
 &\quad + (z_c - z)^2]^{-1/2} = \frac{1}{\Delta_c^3} (x_c - x) \\
 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\Delta_c} \right) &= \frac{1}{\Delta_c^3} (y_c - y), \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\Delta_c} \right) = \frac{1}{\Delta_c^3} (z_c - z)
 \end{aligned} \right\}, \quad (536)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\Delta_{\odot}} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} [(x_{\odot} - x)^2 + (y_{\odot} - y)^2 + \\
 &\quad + (z_{\odot} - z)^2]^{-1/2} = \frac{1}{\Delta_{\odot}^3} (x_{\odot} - x) \\
 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\Delta_{\odot}} \right) &= \frac{1}{\Delta_{\odot}^3} (y_{\odot} - y), \quad \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\Delta_{\odot}} \right) = \frac{1}{\Delta_{\odot}^3} (z_{\odot} - z)
 \end{aligned} \right\}, \quad (537)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \frac{xx_c + yy_c + zz_c}{\Delta_{\oplus c}^3} &= \frac{x_c}{\Delta_{\oplus c}^3} \\
 \frac{\partial}{\partial y} \frac{xx_c + yy_c + zz_c}{\Delta_{\oplus c}^3} &= \frac{y_c}{\Delta_{\oplus c}^3} \\
 \frac{\partial}{\partial z} \frac{xx_c + yy_c + zz_c}{\Delta_{\oplus c}^3} &= \frac{z_c}{\Delta_{\oplus c}^3}
 \end{aligned} \right\}, \quad (538)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \frac{xx_{\odot} + yy_{\odot} + zz_{\odot}}{\Delta_{\oplus \odot}^3} &= \frac{x_{\odot}}{\Delta_{\oplus \odot}^3} \\
 \frac{\partial}{\partial y} \frac{xx_{\odot} + yy_{\odot} + zz_{\odot}}{\Delta_{\oplus \odot}^3} &= \frac{y_{\odot}}{\Delta_{\oplus \odot}^3} \\
 \frac{\partial}{\partial z} \frac{xx_{\odot} + yy_{\odot} + zz_{\odot}}{\Delta_{\oplus \odot}^3} &= \frac{z_{\odot}}{\Delta_{\oplus \odot}^3}
 \end{aligned} \right\}, \quad (539)$$

то сможем уравнения движения спутника в геоцентрической системе  $x, y, z$  (535) преобразовать следующим образом

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d^2x}{dt^2} + f(M + m_c) \frac{x}{\Delta^3} &= fM_{\zeta} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\Delta_{\zeta}} - \frac{xx_{\zeta} + yy_{\zeta} + zz_{\zeta}}{\Delta_{\oplus\zeta}^3} \right] + \\
 &+ fM_{\odot} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\Delta_{\odot}} - \frac{xx_{\odot} + yy_{\odot} + zz_{\odot}}{\Delta_{\oplus\odot}^3} \right] \\
 \frac{d^2y}{dt^2} + f(M + m_c) \frac{y}{\Delta^3} &= fM_{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{\Delta_{\zeta}} - \frac{xx_{\zeta} + yy_{\zeta} + zz_{\zeta}}{\Delta_{\oplus\zeta}^3} \right] + \\
 &+ fM_{\odot} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{\Delta_{\odot}} - \frac{xx_{\odot} + yy_{\odot} + zz_{\odot}}{\Delta_{\oplus\odot}^3} \right] \\
 \frac{d^2z}{dt^2} + f(M + m_c) \frac{z}{\Delta^3} &= fM_{\zeta} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\Delta_{\zeta}} - \frac{xx_{\zeta} + yy_{\zeta} + zz_{\zeta}}{\Delta_{\oplus\zeta}^3} \right] + \\
 &+ fM_{\odot} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{\Delta_{\odot}} - \frac{xx_{\odot} + yy_{\odot} + zz_{\odot}}{\Delta_{\oplus\odot}^3} \right]
 \end{aligned} \right\} (540)$$

или, наконец, с учетом соотношения (528)

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d^2x}{dt^2} + f(M + m_c) \frac{x}{\Delta^3} &= fM_{\zeta} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\Delta_{\zeta}} - \frac{\Delta}{\Delta_{\oplus\zeta}^2} \cos S_{\zeta} \right) + \\
 &+ fM_{\odot} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\Delta_{\odot}} - \frac{\Delta}{\Delta_{\oplus\odot}^2} \cos S_{\odot} \right) \\
 \frac{d^2y}{dt^2} + f(M + m_c) \frac{y}{\Delta^3} &= fM_{\zeta} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\Delta_{\zeta}} - \frac{\Delta}{\Delta_{\oplus\zeta}^2} \cos S_{\zeta} \right) + \\
 &+ fM_{\odot} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\Delta_{\odot}} - \frac{\Delta}{\Delta_{\oplus\odot}^2} \cos S_{\odot} \right) \\
 \frac{d^2z}{dt^2} + f(M + m_c) \frac{z}{\Delta^3} &= fM_{\zeta} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\Delta_{\zeta}} - \frac{\Delta}{\Delta_{\oplus\zeta}^2} \cos S_{\zeta} \right) + \\
 &+ fM_{\odot} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{\Delta_{\odot}} - \frac{\Delta}{\Delta_{\oplus\odot}^2} \cos S_{\odot} \right)
 \end{aligned} \right\} (541)$$

Из этих уравнений следует, что части возмущающей функции, обусловленные влиянием Луны и Солнца, имеют вид [24]

$$\bar{R}_{\zeta} = fM_{\zeta} \left( \frac{1}{\Delta_{\zeta}} - \frac{\Delta}{\Delta_{\oplus\zeta}^2} \cos S_{\zeta} \right), \quad (542)$$

$$\bar{R}_{\odot} = fM_{\odot} \left( \frac{1}{\Delta_{\odot}} - \frac{\Delta}{\Delta_{\oplus\odot}^2} \cos S_{\odot} \right), \quad (543)$$

или, с учетом формул (526), (527) и (529), (530),

$$\bar{R}_{\odot} = \frac{fM_{\odot}}{\Delta_{\oplus\odot}} \left[ 1 + \left( \frac{\Delta}{\Delta_{\oplus\odot}} \right)^2 ({}^{3/2} \cos^2 S_{\odot} - {}^{1/2}) + \left( \frac{\Delta}{\Delta_{\oplus\odot}} \right)^3 \times \right. \\ \left. \times ({}^{5/2} \cos^3 S_{\odot} - {}^{3/2} \cos S_{\odot}) + \left( \frac{\Delta}{\Delta_{\oplus\odot}} \right)^4 ({}^{35/8} \cos^4 S_{\odot} - {}^{15/4} \cos^2 S_{\odot} + {}^{3/8}) \right], \quad (544)$$

$$\bar{R}_{\odot} = \frac{fM_{\odot}}{\Delta_{\oplus\odot}} \left[ 1 + \left( \frac{\Delta}{\Delta_{\oplus\odot}} \right)^2 ({}^{3/2} \cos^2 S_{\odot} - {}^{1/2}) \right]. \quad (545)$$

Искомые частные производные  $\partial \bar{R}_{\odot} / \partial \Delta$ ,  $\partial \bar{R}_{\odot} / \partial \Phi$ ,  $\partial \bar{R}_{\odot} / \partial \Lambda$ ,  $\partial \bar{R} / \partial \Delta$ ,  $\partial \bar{R} / \partial \Phi$ ,  $\partial \bar{R} / \partial \Lambda$  по сферическим координатам  $\Delta$ ,  $\Phi$ ,  $\Lambda$  легко теперь получить из выражений (544) и (545) с учетом равенств

$$\left. \begin{aligned} \frac{d \cos S_{\odot}}{d \Delta} &= 0 \\ \frac{d \cos S_{\odot}}{d \Phi} &= \cos \Phi \sin \Phi_{\odot} - \sin \Phi \cos \Phi_{\odot} \cos (\Lambda - \Lambda_{\odot}) \\ \frac{d \cos S_{\odot}}{d \Lambda} &= -\cos \Phi \cos \Phi_{\odot} \sin (\Lambda - \Lambda_{\odot}) \end{aligned} \right\} \quad (546)$$

и совершенно аналогично соотношения, содержащие  $S_{\oplus}$ .

Функцию координат спутника  $\Phi$ ,  $\Lambda$  можем представить еще при помощи элементов его орбиты, например, с использованием соотношения (506). Отметим, что влияние главных возмущающих членов  $fM_{\odot} / \Delta_{\oplus\odot}$ ,  $fM_{\oplus} / \Delta_{\oplus\oplus}$  на движение спутника равно нулю (так как производные по  $\Delta$ ,  $\Phi$  и  $\Lambda$  равны нулю).

### § 23. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ УЗЛА И ПЕРИГЕЯ КАК ФУНКЦИИ СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТ СПУТНИКА, ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ И ДИНАМИЧЕСКИХ ПОСТОЯННЫХ ЗЕМЛИ

После подстановки выражений (512) и (514), (521) в (511) и затем полученных таким образом соотношений в (495) и (496) получаются уравнения движения (возмущения) узла и перигея в виде

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\sqrt{fM} \frac{\operatorname{cosec} i}{V a (1-e^2)} \sin (\Omega - S - \Lambda) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_0^n}{\Delta^{n+1}} J_n^{(0)} P_n^{(1)} (\sin \Phi) - \\ - \sqrt{fM} \frac{\operatorname{cosec} i}{V a (1-e^2)} \sin (\Omega - S - \Lambda) \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{a_0^n}{\Delta^{n+1}} \sum_{k=1}^n (J_n^{(k)} \cos k \Lambda + \right. \\ \left. + S_n^{(k)} \sin k \Lambda [-k \operatorname{tg} \Phi P_n^{(k)} (\sin \Phi) + \mu P_n^{(k+1)} (\sin \Phi)] \right\} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\sqrt{fM}} \frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{a(1-e^2)}} \sin(\Omega-S-\Lambda) \left( \frac{\partial \bar{R}_{\mathcal{C}}}{\partial \Phi} + \frac{\partial \bar{R}_{\odot}}{\partial \Phi} \right) + \\
& + \sqrt{fM} \frac{\sec i}{\sqrt{a(1-e^2)}} \sin(\Omega-S-\Lambda) \cos(\Omega-S-\Lambda) \times \\
& \times \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{a_0^n}{\Delta^{n+1}} \sum_{k=0}^n k (-J_n^{(k)} \sin k\Lambda + S_n^{(k)} \cos k\Lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{fM} \left[ \frac{\partial \bar{R}_{\mathcal{C}}}{\partial \Lambda} + \frac{\partial \bar{R}_{\odot}}{\partial \Lambda} \right] \right\}, \tag{547}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dt} &= \sqrt{fM} \frac{\operatorname{ctg} i}{\sqrt{a(1-e^2)}} \sin(\Omega-S-\Lambda) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_0^n}{\Delta^{n+1}} J_n^{(0)} P_n^{(1)}(\sin \Phi) + \\
& + \sqrt{fM} \frac{\operatorname{ctg} i}{\sqrt{a(1-e^2)}} \sin(\Omega-S-\Lambda) \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{a_0^n}{\Delta^{n+1}} \sum_{k=1}^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + \right. \\
& \quad \left. + S_n^{(k)} \sin k\Lambda) [-k \operatorname{tg} \Phi P_n^{(k)}(\sin \Phi) + \mu P_n^{(k+1)}(\sin \Phi)] \right\} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{fM}} \frac{\operatorname{ctg} i}{\sqrt{a(1-e^2)}} \sin(\Omega-S-\Lambda) \left( \frac{\partial \bar{R}_{\mathcal{C}}}{\partial \Phi} + \frac{\partial \bar{R}_{\odot}}{\partial \Phi} \right) - \\
& - \sqrt{fM} \frac{1}{\sqrt{a(1-e^2)}} \sin(\Omega-S-\Lambda) \cos(\Omega-S-\Lambda) \times \\
& \times \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{a_0^n}{\Delta^{n+1}} \sum_{k=0}^n k (-J_n^{(k)} \sin k\Lambda + S_n^{(k)} \cos k\Lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{fM} \left[ \frac{\partial \bar{R}_{\mathcal{C}}}{\partial \Lambda} + \frac{\partial \bar{R}_{\odot}}{\partial \Lambda} \right] \right\} + \sqrt{fM} \frac{\sqrt{a(1-e^2)}}{e} \cos v \times \\
& \times \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \left[ (n+1) \frac{a_0^n}{\Delta^{n+2}} \sum_{k=0}^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + S_n^{(k)} \sin k\Lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{fM} \left[ \frac{\partial \bar{R}_{\mathcal{C}}}{\partial \Delta} + \frac{\partial \bar{R}_{\odot}}{\partial \Delta} \right] \right\} + \sqrt{fM} \frac{\sqrt{a(1-e^2)}}{e} \frac{\sin i \cos(\omega+v) \sin v}{\cos \Phi} \times \\
& \times \left( \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{a(1-e^2)} \right) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_0^n}{\Delta^{n+1}} J_n^{(0)} P_n^{(1)}(\sin \Phi) - \sqrt{fM} \frac{\sqrt{a(1-e^2)}}{e} \times \\
& \times \frac{\sin i \cos(\omega+v) \sin v}{\cos \Phi} \left( \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{a(1-e^2)} \right) \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{a_0^n}{\Delta^{n+1}} \sum_{k=1}^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + S_n^{(k)} \sin k\Lambda [k \operatorname{tg} \Phi P_n^{(k)}(\sin \Phi) - \mu P_n^{(k+1)}(\sin \Phi)] \Big\} + \\
& + \frac{1}{\sqrt{fM}} \frac{V a \sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\sin i \cos(\omega + \nu) \sin \nu}{\cos \Phi} \left( \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{a(1-e^2)} \right) \times \\
& \times \left( \frac{\partial \bar{R}_\zeta}{\partial \Phi} + \frac{\partial \bar{R}_\odot}{\partial \Phi} \right) + \sqrt{fM} \frac{V a \sqrt{1-e^2}}{e} \frac{\cos i \sin \nu}{\cos^2 \Phi} \left( \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{a(1-e^2)} \right) \times \\
& \times \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{\alpha_n^n}{\Delta^{n+1}} \sum_{k=0}^n k (-J_n^{(k)} \sin k\Lambda + S_n^{(k)} \cos k\Lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{fM} \left[ \frac{\partial \bar{R}_\zeta}{\partial \Lambda} + \frac{\partial \bar{R}_\odot}{\partial \Lambda} \right] \right\}. \tag{548}
\end{aligned}$$

При выводе уравнений (547) и (548) мы считали элементы  $a$ ,  $e$ ,  $i$  постоянными. Они, однако, являются функциями времени и поэтому необходимо учитывать члены 2-го порядка. Если  $(d\Omega/dt)_0$ ,  $(d\omega/dt)_0$  — значения в момент оскулирования, то для момента  $t = t_0 + dt$  можем написать

$$\left. \begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} &= \left( \frac{d\Omega}{dt} \right)_0 + \sum_i \left( \frac{\partial}{\partial e_i} \frac{d\Omega}{dt} \right)_0 de_i = \\
&= \left( \frac{d\Omega}{dt} \right)_0 + \sum_i \left( \frac{\partial}{\partial e_i} \frac{d\Omega}{dt} \right)_0 \left( \frac{de_i}{dt} \right)_0 dt \\
\frac{d\omega}{dt} &= \left( \frac{d\omega}{dt} \right)_0 + \sum_i \left( \frac{\partial}{\partial e_i} \frac{d\omega}{dt} \right)_0 de_i = \\
&= \left( \frac{d\omega}{dt} \right)_0 + \sum_i \left( \frac{\partial}{\partial e_i} \frac{d\omega}{dt} \right)_0 \left( \frac{de_i}{dt} \right)_0 dt
\end{aligned} \right\}. \tag{549}$$

При их определении, однако, необходимо иметь выражения для  $di/dt$ ,  $d\omega/dt$ ,  $da/dt$ ,  $de/dt$ , вывод которых мы опустили. С этой целью совершенно достаточен приближенный вывод, с учетом влияния первого четного зонального динамического коэффициента  $J_2^{(0)}$ , который, по крайней мере, на три порядка больше влияния любого из остальных динамических коэффициентов  $J_n^{(k)}$  и  $S_n^{(k)}$ .

С этим ограничением для возмущающей функции получим простое соотношение

$$\ddot{R} = \frac{fM}{\Delta} \left( \frac{a_0}{\Delta} \right)^2 J_2^{(0)} P_2^{(0)}(\sin \Phi). \quad (550)$$

При использовании уравнений Лагранжа нужно подставить его производные по элементам орбиты

$$\frac{\partial \ddot{R}}{\partial e_i} = \frac{\partial \ddot{R}}{\partial \Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial e_i} + \frac{\partial \ddot{R}}{\partial \Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial e_i}, \quad (551)$$

причем

$$\frac{\partial \ddot{R}}{\partial \Delta} = -3/2 \frac{fM}{\Delta^2} \left( \frac{a_0}{\Delta} \right)^2 J_2^{(0)} [3 \sin^2 i \sin^2(\omega + \nu) - 1], \quad (552)$$

$$\frac{\partial \ddot{R}}{\partial \Phi} = 3 \frac{fM}{\Delta} \left( \frac{a_0}{\Delta} \right)^2 J_2^{(0)} \sin i \sin(\omega + \nu) [1 - \sin^2 i \sin^2(\omega + \nu)]^{1/2}. \quad (553)$$

Производные  $\partial \Delta / \partial e_i$ ,  $\partial \Phi / \partial e_i$  можно вывести способом, уже примененным для элементов  $e_i = i$  и  $e_i = e$  (см. уравнение (490) и последующие), а производные  $\partial \left( \frac{d\Omega}{dt} \right) / \partial e_i$ ,  $\partial (d\omega/dt) / \partial e_i$  — прямо из (547), (548).

Из-за громоздкости этого вывода здесь их не приводим. Убедимся только, что выражения

$$\frac{\partial \frac{d\Omega}{dt}}{\partial e_i} \cdot \frac{de_i}{dt}, \quad \frac{\partial \frac{d\omega}{dt}}{\partial e_i} \cdot \frac{de_i}{dt}$$

будут содержать квадраты первого четного зонального динамического коэффициента, т. е.  $(J_2^{(0)})^2$ . В последующем тексте будем соответствующие выражения считать членами второго порядка малости [25—27].

ЗАДАЧИ  
ДИНАМИЧЕСКОЙ КОСМИЧЕСКОЙ ГЕОДЕЗИИ

§ 24. ХАРАКТЕР ВОЗМУЩЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ

Решение задач динамической космической геодезии основывается на исследовании динамических параметров  $J_n^{(h)}$ ,  $S_n^{(h)}$  Земли, определяемых по наблюдениям изменений элементов  $\frac{de_i}{dt}$  орбиты спутника, который обращается вокруг Земли. Практически вывод динамических коэффициентов производится по наблюдениям изменений  $d\Omega/dt$ ,  $d\omega/dt$ ,  $de/dt$  (см. (547), (548)) и, конечно, речь идет об интегралах этих изменений.

Коэффициенты  $J_n^{(h)}$ ,  $S_n^{(h)}$  используются в решении ряда геодезических задач, а именно в определении:

- 1) потенциала силы тяжести регуляризованного геоида и линейного масштабного коэффициента  $R_0 = fM/W_0$ ,
- 2) высот регуляризованного геоида,
- 3) характеристик внешних уровней поверхностей Земли,
- 4) основных геодезических параметров Земли,
- 5) ускорения силы тяжести в точках земной поверхности и во внешнем пространстве,
- 6) аномалий силы тяжести и в преобразовании геодезических несвязанных референчных систем с использованием параметров  $W_0$ ,  $R_0$ .

Прежде всего необходимо описать теорию определения динамических параметров  $J_n^{(h)}$ ,  $S_n^{(h)}$ . Впервые эти задачи были решены в работах [28]—[31].

Уравнения (547) и (548) будут нас в дальнейшем интересовать с точки зрения определения динамических параметров  $J_n^{(h)}$ ,  $S_n^{(h)}$ , отражающих влияние аномалий фигуры и распределения масс тела Земли. Эти уравнения влияние аномалий учитывали бы точно, если бы в разложении возмущающего потенциала для сферических функций (380) было  $n \rightarrow \infty$ .

Каждая элементарная сферическая функция

$$\begin{aligned} J_n^{(k)} \cos k\Lambda \\ S_n^{(k)} \sin k\Lambda \end{aligned} P_n^{(k)}(\sin \Phi) \quad (554)$$

вызывает частные возмущения в движении спутника и нас будет интересовать их характер.

Эти возмущения или вариации по характеру можно разделить на периодические и вековые. Периодические возмущения разделяются по величине периода на короткопериодические и долгопериодические (рис. 13, кривые 1 и 2). Вековые возмущения (кривая 3) вызывают изменения систематического характера, т. е. являются линейными относительно  $t$ .

Короткопериодические изменения являются периодическими функциями истинной аномалии  $v$ , а долгопериодические изменения — периодическими функциями аргумента перигея  $\omega$  (соответствующие члены не содержат функций  $v$ ). Вековые члены являются функциями только элементов орбиты  $i, a, e, \Omega$ , а также параметров  $J_n^{(k)}, S_n^{(k)}$ , и не содержат аргументов  $\omega$  и  $v$ .

Чтобы учесть в уравнениях (547) и (548) члены, вызывающие вековые и долгопериодические возмущения, которые нас с точки зрения решения задач динамической космической геодезии будут интересовать прежде всего, нужно выразить величины, зависящие от времени, как явные функции времени. Ими являются не только величины  $\Delta, \Phi, \Lambda$ , но и элементы орбиты. Однако по сравнению с изменениями  $\Delta, \Phi, \Lambda$  изменения во времени элементов орбиты  $de_i/dt$  малы, и их влияние может быть выражено членами другого ряда (см. § 23), упрощенными так, что они содержат только  $(J_2^{(0)})^2$ .

Координаты  $\Delta, \Phi, \Lambda$  лучше всего выразить как функции истинной аномалии. Из формулы (506), например, следует

$$\left. \begin{aligned} \sin \Phi &= \sin(\omega + v) \sin i \\ \sin(\Omega - S - \Lambda) &= -\frac{\sin(\omega + v) \cos i}{\cos \Phi} \\ \cos(\Omega - S - \Lambda) &= \frac{\cos(\omega + v)}{\cos \Phi} \end{aligned} \right\}, \quad (555)$$

и по (420)

$$\begin{aligned} \Delta^{-n} &= [a(1 - e^2)]^{-n} (1 + e \cos v)^n = \\ &= [a(1 - e^2)]^{-n} \left[ 1 + \binom{n}{1} e \cos v + \binom{n}{2} e^2 \cos^2 v + \dots + e^n \cos^n v \right]. \end{aligned} \quad (556)$$

Подставим теперь выражения (555) и (556) в (547) и (548) и при помощи формул (480), (481) перейдем к производным по  $v$ . Сделаем это, учитывая отдельно:

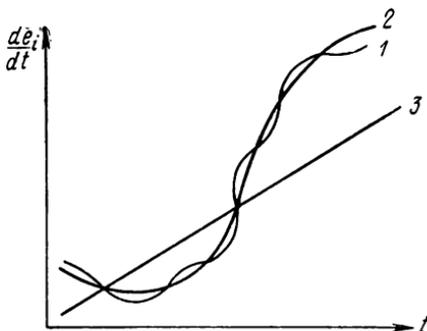


Рис. 13. Вековые, долгопериодические и короткопериодические изменения элементов орбиты ИСЗ

1) возмущения, вызываемые динамическим параметром  $J_n^{(0)}$  при зональных сферических функциях, обозначим их

$$\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)_{k=0}, \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_{k=0} \text{ и } \left(\frac{d\Omega}{dv}\right)_{k=0} \left(\frac{d\omega}{dv}\right)_{k=0};$$

2) возмущения, вызываемые динамическими параметрами  $J_n^{(k)}$ ,  $S_n^{(k)}$  при тессеральных и секториальных функциях  $\left[ P_n^{(k)}(\sin \Phi) \frac{\cos k \Lambda}{\sin k \Lambda} \right]$ , которые обозначим  $(d\Omega/dt)_{k \neq 0}$ ,  $(d\omega/dt)_{k \neq 0}$  и  $(d\Omega/dt)_{k \neq 0}$ ,  $(d\omega/dt)_{k \neq 0}$ ;  
 3) возмущения, вызываемые влиянием притяжения Солнца и Луны, которые обозначим  $(d\Omega/dt)_{\odot}$ ,  $(d\omega/dt)_{\odot}$  и  $(d\Omega/dv)_{\odot}$ ,  $(d\omega/dv)_{\odot}$ .

Для краткости будем в дальнейшем выводить и преобразовывать только уравнения движения узла. Путь решения в случае уравнений для движения перигея будет аналогичен.

## § 25. ДВИЖЕНИЕ УЗЛА, ЗАВИСЯЩЕЕ ОТ ДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЗЕМЛИ ПРИ ЗОНАЛЬНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

Если ограничимся степенями  $n \leq 10$  и исключим сферические функции  $P_n^{(1)}/(\sin \Phi)$  из выражений (113), а потом подставим (555) и (556) в (547) и преобразуем его согласно (480) и (481), то получим (без членов второго порядка):

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Omega}{dv}\right)_{k=0} &= \frac{\operatorname{ctg} i}{a(1-e^2)} \frac{\sin(\omega+v)}{\cos \Phi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_0^n}{\Delta^{n-1}} J_n^{(0)} P_n^{(1)}(\sin \Phi) = \\ &= \frac{\operatorname{ctg} i}{a(1-e^2)} \frac{\sin(\omega+v)}{\cos \Phi} \sum_{n=2}^{\infty} \{[a(1-e^2)]^{-n+1} (1+e \cos v)^{n-1} \times \\ &\times a_0^n J_n^{(0)} P_n^{(1)}(\sin \Phi)\} = 3 \frac{\cos i}{(1-e^2)^2} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 J_2^{(0)} \sin^2(\omega+v) \times \\ &\times (1+e \cos v) + \frac{3}{2} \frac{\operatorname{ctg} i}{(1-e^2)^3} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 J_3^{(0)} \times \\ &\times [5 \sin^3(\omega+v) \sin^2 i - \sin(\omega+v)] (1+2e \cos v + \\ &+ e^2 \cos^2 v) + \frac{5}{2} \frac{\cos i}{(1-e^2)^4} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 J_4^{(0)} [7 \sin^4(\omega+v) \sin^2 i - \\ &- 3 \sin^2(\omega+v)] (1+3e \cos v + 3e \cos^2 v + e^3 \cos^3 v) + \\ &+ \frac{15}{8} \frac{\operatorname{ctg} i}{(1-e^2)^5} \left(\frac{a_0}{a}\right)^5 J_5^{(0)} [21 \sin^5(\omega+v) \sin^4 i - \\ &- 14 \sin^3(\omega+v) \sin^2 i + \sin(\omega+v)] (1+4e \cos v + \\ &+ 6e^2 \cos^2 v + 4e^3 \cos^3 v + e^4 \cos^4 v) + \frac{21}{8} \frac{\cos i}{(1-e^2)^6} \left(\frac{a_0}{a}\right)^6 J_6^{(0)} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times [33 \sin^6(\omega + \nu) \sin^4 i - 30 \sin^4(\omega + \nu) \sin^2 i + \\
& + 5 \sin^2(\omega + \nu)](1 + 5e \cos \nu + 10e^2 \cos^2 \nu + 10e^3 \cos^3 \nu + \\
& + 5e^4 \cos^4 \nu + e^5 \cos^5 \nu) + \frac{7}{16} \frac{\operatorname{ctg} i}{(1-e^2)^7} \left(\frac{a_0}{a}\right)^7 J_7^{(0)} \times \\
& \times [429 \sin^7(\omega + \nu) \sin^6 i - 495 \sin^5(\omega + \nu) \sin^4 i + \\
& + 135 \sin^3(\omega + \nu) \sin^2 i - 5 \sin(\omega + \nu)](1 + 6e \cos \nu + \\
& + 15e^2 \cos^2 \nu + 20e^3 \cos^3 \nu + 15e^4 \cos^4 \nu + 6e^5 \cos^5 \nu + e^6 \cos^6 \nu) + \\
& + \frac{9}{16} \frac{\cos i}{(1-e^2)^8} \left(\frac{a_0}{a}\right)^8 J_8^{(0)} [715 \sin^8(\omega + \nu) \sin^6 i - \\
& - 1001 \sin^6(\omega + \nu) \sin^4 i + 385 \sin^4(\omega + \nu) \sin^2 i - \\
& - 35 \sin^2(\omega + \nu)](1 + 7e \cos \nu + 21e^2 \cos^2 \nu + 35e^3 \cos^3 \nu + \\
& + 35e^4 \cos^4 \nu + 21e^5 \cos^5 \nu + 7e^6 \cos^6 \nu + e^7 \cos^7 \nu) + \\
& + \frac{45}{128} \frac{\operatorname{ctg} i}{(1-e^2)^9} \left(\frac{a_0}{a}\right)^9 J_9^{(0)} [2431 \sin^9(\omega + \nu) \sin^8 i - \\
& - 4004 \sin^7(\omega + \nu) \sin^6 i + 2002 \sin^5(\omega + \nu) \sin^4 i - \\
& - 308 \sin^3(\omega + \nu) \sin^2 i + 7 \sin(\omega + \nu)](1 + 8e \cos \nu + \\
& + 28e^2 \cos^2 \nu + 56e^3 \cos^3 \nu + 70e^4 \cos^4 \nu + 56e^5 \cos^5 \nu + \\
& + 28e^6 \cos^6 \nu + 8e^7 \cos^7 \nu + e^8 \cos^8 \nu) + \frac{5}{128} \frac{\cos i}{(1-e^2)^{10}} \times \\
& \times \left(\frac{a_0}{a}\right)^{10} J_{10}^{(0)} [46\,189 \sin^{10}(\omega + \nu) \sin^8 i - \\
& - 87\,516 \sin^8(\omega + \nu) \sin^6 i + 54\,054 \sin^6(\omega + \nu) \sin^4 i - \\
& - 12\,012 \sin^4(\omega + \nu) \sin^2 i + 693 \sin^2(\omega + \nu)] \times \\
& \times (1 + 9e \cos \nu + 36e^2 \cos^2 \nu + 84e^3 \cos^3 \nu + 126e^4 \cos^4 \nu + \\
& + 126e^5 \cos^5 \nu + 84e^6 \cos^6 \nu + 36e^7 \cos^7 \nu + \\
& + 9e^8 \cos^8 \nu + e^9 \cos^9 \nu). \tag{557}
\end{aligned}$$

Уравнение (557) содержит в качестве слагаемых как вековые, так и долгопериодические и короткопериодические члены. С точки зрения определения неизвестных зональных коэффициентов  $J_n^{(0)}$  существенными являются вековые и долгопериодические члены. Вековые члены, не содержащие периодических функций от  $\nu$  или  $\omega$ , можно легко отделить, например при помощи подстановок:

$$\left. \begin{aligned}
\sin^{2n}(\omega + \nu) = & \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \left[ \cos 2n(\omega + \nu) - \right. \\
& - \binom{2n}{1} \cos 2(n-1)(\omega + \nu) + \\
& + \left. \binom{2n}{2} \cos 2(n-2)(\omega + \nu) - \dots + (-1)^n \frac{1}{2} \binom{2n}{2} \right]
\end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\sin^{2n+1}(\omega + v) &= \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \left[ \sin(2n+1)(\omega + v) - \right. \\
&\quad - \binom{2n+1}{1} \sin(2n-1)(\omega - v) + \\
&\quad + \binom{2n+1}{2} \sin(2n-3)(\omega + v) - \dots + \\
&\quad \left. + (-1)^n \binom{2n+1}{n} \sin(\omega + v) \right] \quad (558) \\
\cos^{2n} v &= \frac{1}{2^{2n-1}} \left[ \cos 2nv + \binom{2n}{1} \cos 2(n-2)v + \dots + \right. \\
&\quad \left. + \binom{2n}{n-1} \cos 2nv + \frac{1}{2} \binom{2n}{2} \right] \\
\cos^{2n+1} v &= \frac{1}{2^{2n}} \left[ \cos(2n+1)v + \binom{2n+1}{1} \times \right. \\
&\quad \times \cos(2n-1)v + \binom{2n+1}{2} \cos(2n-3)v + \dots + \\
&\quad \left. + \dots + \binom{2n+1}{n} \cos v \right]
\end{aligned}$$

Труднее отделить долгопериодические возмущения, которые являются периодическими функциями только аргумента  $\omega$ , от короткопериодических возмущений, содержащих периодические функции  $v$ . Это можно сделать, определив интегральные средние значения отдельных функций  $f_i(\omega, v)$  в пределах от  $v = 0$  до  $v = 2\pi$ , т. е.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_i(\omega, v) dv = [f_i(\omega, v)]_m. \quad (559)$$

Здесь появляются интегралы

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \sin^2(\omega + v) \cos^{2i+1} v dv = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \\
&\int_0^{2\pi} \sin^2(\omega + v) dv = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [1 - \cos 2(\omega + v)] dv = \pi \\
&\int_0^{2\pi} \sin^2(\omega + v) \cos^2 v dv = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [1 - \cos 2(\omega + v)] \cos^2 v dv = \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2(\omega + v) \cos^2 v dv = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \times \\
&\times \cos 2(\omega + v) dv - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos 2(\omega + v) \cos 2v dv =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \cos 2\omega \right)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\omega + v) \cos^4 v \, dv = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} [1 - \cos 2(\omega + v)] \times \\ \times \left( \frac{3}{4} + \cos 2v + \frac{1}{4} \cos 4v \right) dv = \frac{3}{8} \pi \left( 1 - \frac{2}{3} \cos 2\omega \right)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\omega + v) \cos^6 v \, dv = \frac{1}{32} \int_0^{2\pi} [1 - \cos 2(\omega + v)] \times \\ \times \left( 5 + \frac{15}{2} \cos 2v + 3 \cos 4v + \frac{1}{2} \cos 6v \right) dv = \\ = \frac{5}{16} \pi \left( 1 - \frac{3}{4} \cos 2\omega \right)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\omega + v) \cos^8 v \, dv = \frac{1}{32} \int_0^{2\pi} [1 - \cos 2(\omega + v)] \times \\ \times \left( \frac{35}{8} + 7 \cos 2v + \frac{7}{2} \cos 4v + \cos 6v + \frac{1}{8} \cos 8v \right) dv = \quad (560) \\ = \frac{35}{128} \pi \left( 1 - \frac{4}{5} \cos 2\omega \right)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^4(\omega + v) \cos^{2i+1} v \, dv = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^4(\omega + v) \, dv = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} [\cos 4(\omega + v) - 4 \cos 2(\omega + v) + \\ + 3] \, dv = \frac{3}{4} \pi$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^4(\omega + v) \cos^2 v \, dv = \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} [\cos 4(\omega + v) - \\ - 4 \cos 2(\omega + v) + 3] (1 + \cos 2v) \, dv = \frac{3}{8} \pi \left( 1 - \frac{2}{3} \cos 2\omega \right)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^4(\omega + v) \cos^4 v \, dv = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} [\cos 4(\omega + v) - \\ - 4 \cos 2(\omega + v) + 3] \left( \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2v + \frac{1}{8} \cos 4v \right) dv = \\ = \frac{9}{32} \pi \left( 1 - \frac{8}{9} \cos 2\omega + \frac{1}{18} \cos 4\omega \right)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^4(\omega + v) \cos^6 v \, dv = \frac{1}{128} \int_0^{2\pi} [\cos 4(\omega + v) -$$

$$\begin{aligned}
& -4 \cos 2(\omega + v) + 3] \left( 5 + \frac{15}{2} \cos 2v + 3 \cos 4v + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \cos 6v \right) dv = \frac{15}{64} \pi \left( 1 - \cos 2\omega + \frac{1}{10} \cos 4\omega \right) \\
& \int_0^{2\pi} \sin^4(\omega + v) \cos^8 v dv = \frac{1}{128} \int_0^{2\pi} [\cos 4(\omega + v) - \\
& -4 \cos 2(\omega + v) + 3] \left( \frac{35}{8} + 7 \cos 2v + \frac{7}{2} \cos 4v + \cos 6v + \right. \\
& \left. + \frac{1}{8} \cos 8v \right) dv = \frac{105}{512} \pi \left( 1 - \frac{16}{15} \cos 2\omega + \frac{2}{15} \cos 4\omega \right), \\
& \int_0^{2\pi} \sin^6(\omega + v) dv = -\frac{1}{32} \int_0^{2\pi} [\cos 6(\omega + v) - \\
& -6 \cos 4(\omega + v) + 15 \cos 2(\omega + v) - 10] dv = \frac{5}{8} \pi \\
& \int_0^{2\pi} \sin^6(\omega + v) \cos^{2i+1} v = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \\
& \int_0^{2\pi} \sin^6(\omega + v) \cos^2 v dv = -\frac{1}{64} \int_0^{2\pi} [\cos 6(\omega + v) - \\
& -6 \cos 4(\omega + v) + 15 \cos 2(\omega + v) - 10] (1 + \cos 2v) = \\
& = \frac{5}{16} \pi \left( 1 - \frac{3}{4} \cos 2\omega \right) \\
& \int_0^{2\pi} \sin^6(\omega + v) \cos^4 v dv = -\frac{1}{64} \int_0^{2\pi} [\cos 6(\omega + v) - \\
& -6 \cos 4(\omega + v) + 15 \cos 2(\omega + v) - 10] \left( \frac{3}{4} + \cos 2v + \right. \\
& \left. + \frac{1}{4} \cos 4v \right) dv = \frac{15}{64} \pi \left( 1 - \cos 2\omega + \frac{1}{10} \cos 4\omega \right) \\
& \int_0^{2\pi} \sin^6(\omega + v) \cos^6 v dv = -\frac{1}{512} \int_0^{2\pi} [\cos 6(\omega + v) - \\
& -6 \cos 4(\omega + v) + 15 \cos 2(\omega + v) - 10] \left( 5 + \frac{15}{2} \cos 2v + \right. \\
& \left. + 3 \cos 4v + \frac{1}{2} \cos 6v \right) dv = \frac{25}{128} \pi \left( 1 - \frac{9}{8} \cos 2\omega + \right. \\
& \left. + \frac{9}{50} \cos 4\omega - \frac{1}{400} \cos 6\omega \right) \\
& \int_0^{2\pi} \sin^6(\omega + v) \cos^8 v dv = -\frac{1}{512} \int_0^{2\pi} [\cos 6(\omega + v) -
\end{aligned}$$

(560)

$$\begin{aligned}
& -6 \cos 4(\omega + v) + 15 \cos 2(\omega + v) - 10] \left( \frac{35}{8} + 7 \cos 2v + \right. \\
& \left. + \frac{7}{2} \cos 4v + \cos 6v + \frac{1}{8} \cos 8v \right) dv = \frac{175}{1024} \pi \left( 1 - \frac{6}{5} \cos 2\omega + \right. \\
& \quad \left. + \frac{6}{25} \cos 4\omega - \frac{2}{175} \cos 6\omega \right) \\
\int_0^{2\pi} \sin^8(\omega + v) dv &= \frac{1}{128} \int_0^{2\pi} [\cos 8(\omega + v) - 8 \cos 6(\omega + v) + \\
& + 28 \cos 4(\omega + v) - 56 \cos 2(\omega + v) + 35] dv = \frac{35}{64} \pi \\
\int_0^{2\pi} \sin^8(\omega + v) \cos^{2i+1} v dv &= 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \\
\int_0^{2\pi} \sin^8(\omega + v) \cos^2 v dv &= \frac{1}{256} \int_0^{2\pi} [\cos 8(\omega + v) - \\
& - 8 \cos 6(\omega + v) + 28 \cos 4(\omega + v) - 56 \cos 2(\omega + v) + \\
& + 35] (1 + \cos 2v) dv = \frac{35}{128} \pi \left( 1 - \frac{4}{5} \cos 2\omega \right) \\
\int_0^{2\pi} \sin^8(\omega + v) \cos^4 v dv &= \frac{1}{256} \int_0^{2\pi} [\cos 8(\omega + v) - \\
& - 8 \cos 6(\omega + v) + 28 \cos 4(\omega + v) - 56 \cos 2(\omega + v) + \\
& + 35] \left( \frac{3}{4} + \cos 2v + \frac{1}{4} \cos 4v \right) dv = \\
& = \frac{105}{512} \pi \left( 1 - \frac{16}{15} \cos 2\omega + \frac{2}{15} \cos 4\omega \right) \\
\int_0^{2\pi} \sin^8(\omega + v) \cos^6 v dv &= \frac{1}{2048} \int_0^{2\pi} [\cos 8(\omega + v) - \\
& - 8 \cos 6(\omega + v) + 28 \cos 4(\omega + v) - 56 \cos 2(\omega + v) + \\
& + 35] \left( 5 + \frac{15}{2} \cos 2v + 3 \cos 4v + \frac{1}{2} \cos 6v \right) dv = \\
& = \frac{175}{1024} \pi \left( 1 - \frac{6}{5} \cos 2\omega + \frac{6}{25} \cos 4\omega - \frac{2}{175} \cos 6\omega \right) \\
\int_0^{2\pi} \sin^8(\omega + v) \cos^8 v dv &= \frac{1}{2048} \int_0^{2\pi} [\cos 8(\omega + v) - \\
& - 8 \cos 6(\omega + v) + 28 \cos 4(\omega + v) - 56 \cos 2(\omega + v) + \\
& + 35] \left( \frac{35}{8} + 7 \cos 2v + \frac{7}{2} \cos 4v + \cos 6v + \frac{1}{8} \cos 8v \right) dv =
\end{aligned} \tag{560}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1225}{8192} \pi \left( 1 - \frac{32}{25} \cos 2\omega + \frac{8}{25} \cos 4\omega - \frac{32}{1225} \cos 6\omega + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2450} \cos 8\omega \right) \\
&\int_0^{2\pi} \sin^{10}(\omega + v) dv = -\frac{1}{512} \int_0^{2\pi} [\cos 10(\omega + v) - \\
&- 10 \cos 8(\omega + v) + 45 \cos 6(\omega + v) - 120 \cos 4(\omega + v) + \\
&\quad + 210 \cos 2(\omega + v) - 126] dv = \frac{63}{128} \pi \\
&\int_0^{2\pi} \sin^{10}(\omega + v) \cos^{2i+1} v dv = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \\
&\int_0^{2\pi} \sin^{10}(\omega + v) \cos^2 v dv = -\frac{1}{1024} \int_0^{2\pi} [\cos 10(\omega + v) - \\
&- 10 \cos 8(\omega + v) + 45 \cos 6(\omega + v) - 120 \cos 4(\omega + v) + \\
&\quad + 210 \cos 2(\omega + v) - 126] (1 + \cos 2v) dv = \\
&\quad = \frac{63}{256} \pi \left( 1 - \frac{5}{6} \cos 2\omega \right) \\
&\int_0^{2\pi} \sin^{10}(\omega + v) \cos^4 v dv = -\frac{1}{1024} \int_0^{2\pi} [\cos 10(\omega + v) - \\
&- 10 \cos 8(\omega + v) + 45 \cos 6(\omega + v) - 120 \cos 4(\omega + v) + \\
&\quad + 210 \cos 2(\omega + v) - 126] \left( \frac{3}{4} + \cos 2v + \frac{1}{4} \cos 4v \right) dv = \\
&\quad = \frac{189}{1024} \pi \left( 1 - \frac{10}{9} \cos 2\omega + \frac{10}{63} \cos 4\omega \right) \\
&\int_0^{2\pi} \sin^{10}(\omega + v) \cos^6 v dv = -\frac{1}{8192} \int_0^{2\pi} [\cos 10(\omega + v) - \\
&- 10 \cos 8(\omega + v) + 45 \cos 6(\omega + v) - 120 \cos 4(\omega + v) + \\
&\quad + 210 \cos 2(\omega + v) - 126] \left( 5 + \frac{15}{2} \cos 2v + 3 \cos 4v + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \cos 6v \right) dv = \frac{315}{2048} \pi \left( 1 - \frac{5}{4} \cos 2\omega + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{7} \cos 4\omega - \frac{1}{56} \cos 6\omega \right). \\
&\int_0^{2\pi} \sin^{10}(\omega + v) \cos^8 v dv = -\frac{1}{8192} \int_0^{2\pi} [\cos 10(\omega + v) - \\
&- 10 \cos 8(\omega + v) + 45 \cos 6(\omega + v) - 120 \cos 4(\omega + v) +
\end{aligned}
\tag{560}$$

$$\begin{aligned}
& + 210 \cos(\omega + \nu) - 126] \left( \frac{35}{8} + 7 \cos 2\nu + \frac{7}{2} \cos 4\nu + \right. \\
& \left. + \cos 6\nu + \frac{1}{8} \cos 8\nu \right) d\nu = \frac{2205}{16384} \pi \left( 1 - \frac{4}{3} \cos 2\omega + \right. \\
& \left. + \frac{8}{21} \cos 4\omega - \frac{2}{49} \cos 6\omega + \frac{1}{882} \cos 8\omega \right) \\
& \int_0^{2\pi} \sin(\omega + \nu) \cos^{2i} \nu d\nu = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \\
& \int_0^{2\pi} \sin(\omega + \nu) \cos \nu d\nu = \pi \sin \omega \\
& \int_0^{2\pi} \sin(\omega + \nu) \cos^3 \nu d\nu = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin(\omega + \nu) (3 \cos \nu + \\
& \quad + \cos 3\nu) d\nu = \frac{3}{4} \pi \sin \omega \\
& \int_0^{2\pi} \sin(\omega + \nu) \cos^5 \nu d\nu = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \sin(\omega + \nu) \left( 5 \cos \nu + \right. \\
& \quad \left. + \frac{5}{2} \cos 3\nu + \frac{1}{2} \cos 5\nu \right) d\nu = \frac{5}{8} \pi \sin \omega \\
& \int_0^{2\pi} \sin(\omega + \nu) \cos^7 \nu d\nu = \frac{1}{64} \int_0^{2\pi} \sin(\omega + \nu) (35 \cos \nu + \\
& \quad + 21 \cos 3\nu + 7 \cos 5\nu + \cos 7\nu) d\nu = \frac{35}{64} \pi \sin \omega \\
& \int_0^{2\pi} \sin^3(\omega + \nu) \cos^{2i} \nu d\nu = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \\
& \int_0^{2\pi} \sin^3(\omega + \nu) \cos \nu d\nu = -\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} [\sin 3(\omega + \nu) - \\
& \quad - 3 \sin(\omega + \nu)] \cos \nu d\nu = \frac{3}{4} \pi \sin \omega \\
& \int_0^{2\pi} \sin^3(\omega + \nu) \cos^3 \nu d\nu = -\frac{1}{16} \int_0^{2\pi} [\sin 3(\omega + \nu) - \\
& \quad - 3 \sin(\omega + \nu)] (3 \cos \nu + \cos 3\nu) d\nu = \\
& \quad = \frac{9}{16} \pi \left( \sin \omega - \frac{1}{9} \sin 3\omega \right)
\end{aligned} \tag{560}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin^3(\omega + v) \cos^5 v \, dv &= -\frac{1}{32} \int_0^{2\pi} [\sin 3(\omega + v) - \\
- 3 \sin(\omega + v)] \left( 5 \cos v + \frac{5}{2} \cos 3v + \frac{1}{2} \cos 5v \right) dv &= \\
= \frac{15}{32} \pi \left( \sin \omega - \frac{1}{6} \sin 3\omega \right) \\
\int_0^{2\pi} \sin^3(\omega + v) \cos^7 v \, dv &= -\frac{1}{256} \int_0^{2\pi} [\sin 3(\omega + v) - \\
- 3 \sin(\omega + v)] (35 \cos v + 21 \cos 3v + 7 \cos 5v + \cos 7v) &= \\
= \frac{105}{256} \pi \left( \sin \omega - \frac{1}{5} \sin 3\omega \right) \\
\int_0^{2\pi} \sin^5(\omega + v) \cos^{2i} v \, dv &= 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \\
\int_0^{2\pi} \sin^5(\omega + v) \cos v \, dv &= \frac{1}{16} \int_0^{2\pi} [\sin 5(\omega + v) - \\
- 5 \sin 3(\omega + v) + 10 \sin(\omega + v)] \cos v \, dv &= \frac{5}{8} \pi \sin \omega \\
\int_0^{2\pi} \sin^5(\omega + v) \cos^3 v \, dv &= \frac{1}{64} \int_0^{2\pi} [\sin 5(\omega + v) - \\
- 5 \sin 3(\omega + v) + 10 \sin(\omega + v)] (3 \cos v + \cos 3v) \, dv &= \\
= \frac{15}{32} \pi \left( \sin \omega - \frac{1}{6} \sin 3\omega \right) \\
\int_0^{2\pi} \sin^5(\omega + v) \cos^5 v \, dv &= \frac{1}{256} \int_0^{2\pi} [\sin 5(\omega + v) - \\
- 5 \sin 3(\omega + v) + 10 \sin(\omega + v)] (10 \cos v + 5 \cos 3v + \\
+ \cos 5v) \, dv &= \frac{25}{64} \pi \left( \sin \omega - \frac{1}{4} \sin 3\omega + \frac{1}{100} \sin 5\omega \right) \\
\int_0^{2\pi} \sin^5(\omega + v) \cos^7 v \, dv &= \frac{1}{1024} \int_0^{2\pi} [\sin 5(\omega + v) - \\
- 5 \sin 3(\omega + v) + 10 \sin(\omega + v)] (35 \cos v + 21 \cos 3v + \\
+ 7 \cos 5v + \cos 7v) \, dv &= \\
= \frac{175}{512} \pi \left( \sin \omega - \frac{3}{10} \sin 3\omega + \frac{1}{50} \sin 5\omega \right) \\
\int_0^{2\pi} \sin^7(\omega + v) \cos^{2i} v \, dv &= 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned} \tag{560}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin^7(\omega + v) \cos v \, dv &= -\frac{1}{64} \int_0^{2\pi} [\sin 7(\omega + v) - \\
&- 7 \sin 5(\omega + v) + 21 \sin 3(\omega + v) - 35 \sin(\omega + v)] \times \\
&\quad \times \cos v \, dv = \frac{35}{64} \pi \sin \omega \\
\int_0^{2\pi} \sin^7(\omega + v) \cos^3 v \, dv &= -\frac{1}{256} \int_0^{2\pi} [\sin 7(\omega + v) - \\
&- 7 \sin 5(\omega + v) + 21 \sin 3(\omega + v) - 35 \sin(\omega + v)] \times \\
&\quad \times (3 \cos v + \cos 3v) \, dv = \frac{105}{256} \pi \left( \sin \omega - \frac{1}{5} \sin 3\omega \right) \\
\int_0^{2\pi} \sin^7(\omega + v) \cos^5 v \, dv &= -\frac{1}{512} \int_0^{2\pi} [\sin 7(\omega + v) - \\
&- 7 \sin 5(\omega + v) + 21 \sin 3(\omega + v) - 35 \sin(\omega + v)] \times \\
&\quad \times \left( 5 \cos v + \frac{5}{2} \cos 3v + \frac{1}{2} \cos 5v \right) \, dv = \\
&= \frac{175}{512} \pi \left( \sin \omega - \frac{3}{10} \sin 3\omega + \frac{1}{50} \sin 5\omega \right) \\
\int_0^{2\pi} \sin^7(\omega + v) \cos^7 v \, dv &= -\frac{1}{4096} \int_0^{2\pi} [\sin 7(\omega + v) - \\
&- 7 \sin 5(\omega + v) + 21 \sin 3(\omega + v) - 35 \sin(\omega + v)] \times \\
&\quad \times (35 \cos v + 21 \cos 3v + 7 \cos 5v + \cos 7v) \, dv = \\
&= \frac{1225}{4096} \pi \left( \sin \omega - \frac{9}{25} \sin 3\omega + \frac{1}{25} \sin 5\omega - \frac{1}{1225} \sin 7\omega \right) \\
\int_0^{2\pi} \sin^9(\omega + v) \cos^{2i} v \, dv &= 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \\
\int_0^{2\pi} \sin^9(\omega + v) \cos v \, dv &= \frac{1}{256} \int_0^{2\pi} [\sin 9(\omega + v) - \\
&- 9 \sin 7(\omega + v) + 36 \sin 5(\omega + v) - 84 \sin 3(\omega + v) + \\
&\quad + 126 \sin(\omega + v)] \cos v \, dv = \frac{63}{128} \pi \sin \omega \\
\int_0^{2\pi} \sin^9(\omega + v) \cos^3 v \, dv &= \frac{1}{1024} \int_0^{2\pi} [\sin 9(\omega + v) - \\
&- 9 \sin 7(\omega + v) + 36 \sin 5(\omega + v) - 84 \sin 3(\omega + v) + \\
&\quad + 126 \sin(\omega + v)] (3 \cos v + \cos 3v) \, dv = \\
&= \frac{189}{512} \pi \sin \omega - \frac{2}{9} \sin 3\omega
\end{aligned} \tag{560}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin^9(\omega + v) \cos^5 v \, dv &= \frac{1}{2048} \int_0^{2\pi} [\sin 9(\omega + v) - \\
&- 9 \sin 7(\omega + v) + 36 \sin 5(\omega + v) - 84 \sin 3(\omega + v) + \\
&+ 126 \sin(\omega + v)] \left( 5 \cos v + \frac{5}{2} \cos 3v + \frac{1}{2} \cos 5v \right) dv = \\
&= \frac{315}{1024} \pi \left( \sin \omega - \frac{1}{3} \sin 3\omega + \frac{1}{35} \sin 5\omega \right) \\
\int_0^{2\pi} \sin^9(\omega + v) \cos^7 v \, dv &= \frac{1}{16384} \int_0^{2\pi} [\sin 9(\omega + v) - \\
&- 9 \sin 7(\omega + v) + 36 \sin 5(\omega + v) - 84 \sin 3(\omega + v) + \\
&+ 126 \sin(\omega + v)] (35 \cos v + 21 \cos 3v + 7 \cos 5v + \\
&+ \cos 7v) \, dv = \frac{2205}{8192} \pi \left( \sin \omega - \frac{2}{5} \sin 3\omega + \right. \\
&\left. + \frac{2}{35} \sin 5\omega - \frac{1}{490} \sin 7\omega \right)
\end{aligned} \tag{560}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos n(\omega + v) \cos mv \, dv &= \left\{ \frac{1}{2(n-m)} \sin[(n-m)v + \right. \\
&+ n\omega] + \frac{1}{2(n+m)} \sin[(n+m)v + n\omega] \left. \right\}_0^{2\pi} = 0, \quad n \neq m \\
\int_0^{2\pi} \cos n(\omega + v) \cos nv \, dv &= \left[ \frac{v}{2} \cos n\omega + \frac{1}{4n} \sin(2nv + \right. \\
&\left. + n\omega) \right]_0^{2\pi} = \pi \cos n\omega, \quad n \neq 0 \\
\int_0^{2\pi} \sin n(\omega + v) \cos mv \, dv &= - \left\{ \frac{1}{2(n-m)} \cos[(n-m)v + \right. \\
&+ n\omega] + \frac{1}{2(n+m)} \cos[(n+m)v + n\omega] \left. \right\}_0^{2\pi} = 0, \quad n \neq m \\
\int_0^{2\pi} \sin n(\omega + v) \cos nv \, dv &= \left[ \frac{v}{2} \sin n\omega - \frac{1}{4n} \cos(2nv + \right. \\
&\left. + n\omega) \right]_0^{2\pi} = \pi \sin n\omega
\end{aligned} \tag{561}$$

После подстановки средних интегральных значений  $d\bar{\Omega}/dt$  в пределах  $0 \leq v \leq 2\pi$  (557) получим

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\bar{\Omega}}{dv}\right)_{k=0} &= \frac{3}{2} \frac{\cos i}{(1-e^2)^2} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 J_2^{(0)} - \frac{3}{2} \frac{\text{ctg } i}{(1-e^2)^3} \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \times \\
&\times J_3^{(0)} e \left(1 - \frac{15}{4} \sin^2 i\right) \sin \omega - \frac{15}{4} \frac{\cos i}{(1-e^2)^4} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 J_4^{(0)} \times \\
&\times \left[ \left(1 - \frac{7}{4} \sin^2 i\right) \left(1 + \frac{3}{2} e^2\right) - \frac{3}{4} e^2 \left(1 - \frac{7}{3} \sin^2 i\right) \times \right. \\
&\times \left. \cos 2\omega \right] + \frac{15}{4} \frac{\text{ctg } i}{(1-e^2)^5} \left(\frac{a_0}{a}\right)^5 J_5^{(0)} \left[ e \left(1 + \frac{3}{4} e^2\right) \left(1 - \right. \right. \\
&\left. \left. - \frac{21}{2} \sin^2 i + \frac{105}{8} \sin^4 i\right) \sin \omega + \frac{7}{8} e^3 \left(1 - \frac{15}{8} \sin^2 i\right) \times \right. \\
&\times \left. \sin^2 i \sin 3\omega \right] + \frac{105}{16} \frac{\cos i}{(1-e^2)^6} \left(\frac{a_0}{a}\right)^6 J_6^{(0)} \left[ 1 - \frac{9}{2} \sin^2 i + \right. \\
&\left. + \frac{33}{8} \sin^4 i \right] \left(1 + 5e^2 + \frac{15}{8} e^4\right) - \frac{5}{2} e^2 \left(1 + \frac{1}{2} e^2\right) \times \\
&\times \left(1 - 6 \sin^2 i + \frac{99}{16} \sin^4 i\right) \cos 2\omega - \frac{15}{32} e^4 \left(1 - \right. \\
&\left. - \frac{33}{20} \sin^2 i\right) \sin^2 i \cos 4\omega \left. \right] - \frac{105}{16} \frac{\text{ctg } i}{(1-e^2)^7} \left(\frac{a_0}{a}\right)^7 J_7^{(0)} \times \\
&\times \left[ e \left(1 + \frac{5}{2} e^2 + \frac{5}{8} e^4\right) \left(1 - \frac{81}{4} \sin^2 i + \frac{495}{8} \sin^4 i - \right. \right. \\
&\left. \left. - \frac{3003}{64} \sin^6 i\right) \sin \omega + \frac{45}{8} e^3 \left(1 + \frac{3}{8} e^2\right) \left(1 - \frac{55}{12} \sin^2 i + \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{1001}{240} \sin^4 i\right) \sin^2 i \sin 3\omega + \frac{99}{256} e^5 \left(1 - \frac{91}{60} \sin^2 i\right) \times \right. \\
&\times \left. \sin^4 i \sin 5\omega \right] + \frac{315}{32} \frac{\cos i}{(1-e^2)^8} \left(\frac{a_0}{a}\right)^8 J_8^{(0)} \left[ - \left(1 - \right. \right. \\
&\left. \left. - \frac{33}{4} \sin^2 i + \frac{143}{8} \sin^4 i - \frac{715}{64} \sin^6 i\right) \left(1 + \frac{21}{2} e^2 + \right. \right. \\
&\left. \left. + \frac{105}{8} e^4 + \frac{35}{16} e^6\right) + \frac{21}{4} e^2 \left(1 - 11 \sin^2 i + \frac{429}{16} \sin^4 i - \right. \right. \\
&\left. \left. - \frac{143}{8} \sin^6 i\right) \left(1 + \frac{5}{3} e^2 + \frac{5}{16} e^4\right) \cos 2\omega + \frac{385}{64} e^4 \left(1 - \right. \right. \\
&\left. \left. - \frac{39}{10} \sin^2 i + \frac{39}{12} \sin^4 i\right) \left(1 + \frac{3}{10} e^2\right) \sin^2 i \cos 4\omega + \right. \\
&\left. + \frac{1001}{10 \cdot 240} e^6 \left(1 - \frac{260}{91} \sin^2 i\right) \sin^4 i \cos 6\omega \right] + \\
&+ \frac{315}{32} \frac{\text{ctg } i}{(1-e^2)^9} \left(\frac{a_0}{a}\right)^9 J_9^{(0)} \left[ \left(1 - 33 \sin^2 i + \frac{715}{4} \sin^4 i - \right. \right. \\
&\left. \left. - \frac{5005}{16} \sin^6 i + \frac{21 \cdot 879}{128} \sin^8 i\right) \left(1 + \frac{21}{4} e^2 + \frac{35}{8} e^4 + \frac{35}{64} e^6\right) \times \right. \\
&\times \left. e \sin \omega + \frac{77}{4} \sin^2 i \left(1 - \frac{65}{8} \sin^2 i + \frac{273}{16} \sin^4 i - \frac{663}{64} \times \right. \right. \\
&\times \left. \left. \sin^6 i\right) \left(1 + \frac{15}{12} e^2 + \frac{3}{16} e^4\right) e^3 \sin 3\omega + \frac{1001}{128} \sin^4 i \times \right.
\end{aligned} \tag{562}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( 1 - \frac{7}{2} \sin^2 i + \frac{1989}{728} \sin^4 i \right) \left( 1 + \frac{1}{4} e^2 \right) e^5 \sin 5\omega + \\
& \quad + \frac{143}{1024} \sin^6 i \left( 1 - \frac{153}{112} \sin^2 i \right) e^7 \sin 7\omega \Big] + \\
& \quad + \frac{3465}{256} \frac{\cos i}{(1-e^2)^{10}} \left( \frac{a_0}{a} \right)^{10} J_{10}^{(0)} \left[ \left( 1 - 13 \sin^2 i + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{195}{4} \sin^4 i - \frac{1105}{16} \sin^6 i + \frac{4199}{128} \sin^8 i \right) \times \right. \\
& \quad \times \left( 1 + 18e^2 + \frac{189}{4} e^4 + \frac{105}{4} e^6 + \frac{315}{128} e^8 \right) - \\
& \quad - 9e^2 \left( 1 - \frac{52}{3} \sin^2 i + \frac{585}{8} \sin^4 i - \frac{221}{2} \sin^6 i + \right. \\
& \quad \left. + \frac{20995}{384} \sin^8 i \right) \left( 1 + \frac{7}{2} e^2 + \frac{35}{16} e^4 + \frac{7}{32} e^6 \right) \cos 2\omega - \\
& \quad - \frac{273}{8} e^4 \sin^2 i \left( 1 - \frac{351}{52} \sin^2 i + \frac{51}{4} \sin^4 i - \right. \\
& \quad \left. - \frac{20995}{2912} \sin^6 i \right) \left( 1 + e^2 + \frac{1}{8} e^4 \right) \cos 4\omega - \\
& \quad - \frac{819}{256} e^6 \sin^4 i \left( 1 - \frac{1768}{273} \sin^2 i + \frac{20995}{4368} \sin^4 i \right) \times \\
& \quad \times \left( 1 + \frac{3}{7} e^2 \right) \cos 6\omega - \frac{1989}{28672} e^8 \sin^6 i \times \\
& \quad \times \left( 1 - \frac{20995}{5967} \sin^2 i \right) \cos 8\omega \Big]. \tag{562}
\end{aligned}$$

Из уравнений (562) следует, что возмущение векового характера вызывается только четными зональными функциями; оно равно

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{d\bar{\Omega}}{dt} \right)_{k=0}^{\text{сек}} = \cos i \left\{ \frac{3}{2} \frac{1}{(1-e^2)^2} \left( \frac{a_0}{a} \right)^2 J_2^{(0)} - \frac{15}{4} \frac{1}{(1-e^2)^4} \left( \frac{a_0}{a} \right)^4 J_4^{(0)} \times \right. \\
& \times \left( 1 - \frac{7}{4} \sin^2 i \right) \left( 1 + \frac{3}{2} e^2 \right) + \frac{105}{16} \frac{1}{(1-e^2)^6} \left( \frac{a_0}{a} \right)^6 J_6^{(0)} \left( 1 - \frac{9}{2} \sin^2 i + \right. \\
& \quad \left. + \frac{33}{8} \sin^4 i \right) \left( 1 + 5e^2 + \frac{15}{8} e^4 \right) + \frac{315}{32} \frac{1}{(1-e^2)^8} \left( \frac{a_0}{a} \right)^8 J_8^{(0)} \times \\
& \times \left[ - \left( 1 - \frac{33}{4} \sin^2 i + \frac{143}{8} \sin^4 i - \frac{715}{64} \sin^6 i \right) \left( 1 + \frac{21}{2} e^2 + \frac{105}{8} e^4 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{35}{16} e^6 \right) \right] + \frac{3465}{256} \frac{1}{(1-e^2)^{10}} \left( \frac{a_0}{a} \right)^{10} J_{10}^{(0)} \left( 1 - 13 \sin^2 i + \frac{195}{4} \sin^4 i - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1105}{16} \sin^6 i + \frac{4199}{128} \sin^8 i \right) \left( 1 + 18e^2 + \frac{189}{4} e^4 + \frac{105}{4} e^6 + \frac{315}{128} e^8 \right) \Big]. \tag{563}
\end{aligned}$$

Возмущение векового характера выводится однозначно, совершенно независимо от характера получения средних интегральных

значений типа (559); его можно было бы вычислять относительно другой функции времени, чем истинная аномалия, например, по средней аномалии  $M$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_i(\omega, v) dM = [f_i(\omega, v)]_M, \quad (564)$$

причем

$$[f_i(\omega, v)]_M \neq [f_i(\omega, v)]_m.$$

Связь между средними значениями (559) и (564) можно вывести с использованием известных формул из задачи двух тел (420)—(423)

$$\left. \begin{aligned} dM &= (1 - e \cos E) dE = \frac{\Delta}{a} dE \\ 1 - e \cos E &= \frac{1 - e^2}{1 + e \cos v} \\ \sin E dE &= \frac{\Delta^2}{a^2(1 - e^2)} \sin v dv \\ dE &= \frac{\Delta}{a\sqrt{1 - e^2}} dv \\ dM &= \frac{\Delta^2}{a^2\sqrt{1 - e^2}} dv \end{aligned} \right\}. \quad (565)$$

Значит

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f_i(\omega, v) dM &= \frac{1}{a^2\sqrt{1 - e^2}} \int_0^{2\pi} \Delta^2 f_i(\omega, v) dv = \sqrt{1 - e^2} \times \\ &\times \int_0^{2\pi} \frac{f_i(\omega, v)}{(1 + e \cos v)^2} dv. \end{aligned} \quad (566)$$

Различие возникает за счет долгопериодических членов, а не вековых. В качестве примера сравним осредненные значения по  $v$  и по  $M$  в случае первого четного зонального динамического коэффициента  $J_2^{(0)}$ . Из (557) имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \frac{3a_0^2 \cos i}{a(1 - e^2)} J_2^{(0)} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(\omega + v)}{\Delta} dv &= \frac{3}{2\pi} \frac{a_0^2 \cos i}{a^2(1 - e^2)^2} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \sin^2(\omega + v) (1 + e \cos v) dv &= \frac{3}{2} \frac{\cos i}{(1 - e^2)^2} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 J_2^{(0)}. \end{aligned} \quad (567)$$

Между тем, с учетом (565) получим

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \frac{3a_0^2 \cos i}{a(1-e^2)} J_2^{(0)} \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(\omega+v)}{\Delta} dM &= \frac{3}{2\pi} \frac{a_0^2 \cos i}{a^3(1-e^2)^{1/2}} J_2^{(0)} \int_0^{2\pi} \Delta \sin^2(\omega + \\
 + v) dv &= \frac{3}{2\pi} \frac{a_0^2 \cos i}{a^2(1-e^2)^{1/2}} J_2^{(0)} \int_0^{2\pi} \sin^2(\omega+v)(1+e \cos v)^{-1} dv = \\
 &= \frac{3}{2\pi} \frac{\cos i}{(1-e^2)^{1/2}} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 J_2^{(0)} \left[ 1 + \frac{1}{2} e^2 \left(1 - \frac{1}{2} \cos 2\omega\right) + \right. \\
 &+ \frac{3}{8} e^4 \left(1 - \frac{2}{3} \cos 2\omega\right) + \frac{5}{16} e^6 \left(1 - \frac{3}{4} \cos 2\omega\right) + \\
 &+ \left. \frac{35}{128} e^8 \left(1 - \frac{4}{5} \cos 2\omega\right) + \dots \right]. \quad (568)
 \end{aligned}$$

Сравнивая (567) и (568), видим, что два описанных способа выделения короткопериодических слагаемых приводят к результатам, которые различаются на величины порядка квадрата эксцентриситета орбиты ( $e^2$ ). Возможны и иные подходы к выделению короткопериодических членов, которые опять-таки дают несколько отличные результаты.

## § 26. ДВИЖЕНИЕ УЗЛА, ЗАВИСЯЩЕЕ ОТ ДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЗЕМЛИ ПРИ СФЕРИЧЕСКИХ ТЕССЕРАЛЬНЫХ И СЕКТОРИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЯХ

Будем поступать так же, как в § 25. При выводе возмущений в движении узла, обусловленного незоональными функциями из-за их большого числа (при  $n = 10$  их будет 108) при выводе ограничимся лишь методической стороной. Из основного уравнения (547) при помощи (480), (481) и с использованием (555) получим

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d\Omega}{dv}\right)_{k=0} &= \frac{\operatorname{ctg} i}{a(1-e^2)} \frac{\sin(\omega+v)}{\cos \Phi} \sum_{n=2}^{\infty} \left\{ \frac{a_0^n}{\Delta^{n-1}} \sum_{k=1}^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + \right. \\
 &+ S_n^{(k)} \sin k\Lambda) [-k \operatorname{tg} \Phi P_n^{(k)}(\sin \Phi) + \mu P_n^{(k+1)}(\sin \Phi)] \left. \right\} + \\
 &+ \frac{1}{a(1-e^2)} \frac{\sin(\omega+v) \cos(\omega+v)}{\cos^2 \Phi} \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{a_0^n}{\Delta^{n-1}} \sum_{k=1}^n k (J_n^{(k)} \sin k\Lambda - \right. \\
 &+ \left. S_n^{(k)} \cos k\Lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right]. \quad (569)
 \end{aligned}$$

Теперь нужно было бы выразить функции от  $\Phi$ ,  $\Lambda$  через элементы орбиты и истинную аномалию, чтобы можно было вычислить интегральные средние значения величин (559). Для этого можно использовать, например, следующие выражения (см. рис. 10):

$$\left. \begin{aligned} \sin \Lambda &= \sin(\Omega - S) \cos(\Omega - S - \Lambda) - \cos(\Omega - S) \sin(\Omega - S - \Lambda) = \\ &= \sin(\Omega - S) \frac{\cos(\omega + \nu)}{\cos \Phi} + \cos(\Omega - S) \frac{\sin(\omega + \nu) \cos i}{\cos \Phi} \\ \cos \Lambda &= \cos(\Omega - S) \cos(\Omega - S - \Lambda) + \sin(\Omega - S) \times \\ &\times \sin(\Omega - S - \Lambda) = \cos(\Omega - S) \frac{\cos(\omega + \nu)}{\cos \Phi} - \\ &- \sin(\Omega - S) \frac{\sin(\omega + \nu) \cos i}{\cos \Phi} \end{aligned} \right\}, \quad (570)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin k\Lambda &= \sin k(\Omega - S) \cos k(\Omega - S - \Lambda) - \\ &- \cos k(\Omega - S) \sin k(\Omega - S - \Lambda) \\ \cos k\Lambda &= \cos k(\Omega - S) \cos k(\Omega - S - \Lambda) + \\ &+ \sin k(\Omega - S) \sin k(\Omega - S - \Lambda) \end{aligned} \right\}. \quad (571)$$

Однако такой способ все же громоздок, особенно он усложняется при высоких степенях  $n$  и соответствующем порядке  $k$ . Намного эффективнее путь, предложенный В. Каулой [32, 33], где возмущающий потенциал  $\bar{T}$  он прежде всего преобразовал как функцию только элементов орбиты, а не  $\Delta$ ,  $\Phi$ ,  $\Lambda$ , затем непосредственно использовал уравнение Лагранжа (469).

Трансформированная возмущающая функция В. Каулы имеет вид [32, 33]

$$\bar{T} = \frac{fM}{a} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_0}{a}\right)^n \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^n F_{\text{п кр}(i)} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} G_{npq}(e) S_{nkpq}(\omega, M, \Omega, S), \quad (572)$$

где  $F_{\text{п кр}}$  — символическое обозначение тригонометрического полинома  $n$ -й степени относительно функций  $\sin i$  и  $\cos i$ ;  $G_{npq}(e)$  — функция для ряда значений эксцентриситета орбиты;

$$\begin{aligned} S_{nkpq} &= \frac{[J_n^{(k)}(n-k)_{\text{четн}}]}{[-S_n^{(k)}(n-k)_{\text{нечетн}}]} \cos [(n-2p)\omega + (n-2p+q)M + k(\Omega - S) + \\ &+ [S_n^{(k)}(n-k)_{\text{четн}}] \sin [(n-2p)\omega + (n-2p+q)M + k(\Omega - S)]. \end{aligned}$$

На основании выражения (572) можно прямо найти производные возмущающего потенциала по элементам орбиты, которые входят в уравнение Лагранжа.

Возмущениями элементов орбиты от незональных членов мы далее заниматься не будем; подробнее о них см. в работах [34—39].

## § 27. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ПОСТОЯННЫХ ЗЕМЛИ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ ВОЗМУЩЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ ОРБИТЫ

Предыдущие два раздела посвящены именно выводу вековых и долгопериодических возмущений,  $d\Omega/dv$  как функции элементов орбиты и динамических постоянных Земли  $J_n^{(k)}$ ,  $S_n^{(k)}$ . Подобным способом можно было бы вывести  $d\omega/dv$  и  $de/dv$ , а также изменения остальных элементов орбиты.

Надлежащие формулы с учетом зональных функций до  $n = 6$  можно найти, например, в исчерпывающем обзоре [26]. Выводы сделаны с учетом членов порядка  $(J_2^{(0)})^2$ .

Если имеем в распоряжении значения элементов орбиты по наблюдениям в достаточно большом интервале времени, то интегрируя вековые и долгопериодические члены, можно определить совокупность постоянных  $J_n^{(k)}$ ,  $S_n^{(k)}$ .

Четные зональные постоянные лучше определять, интегрируя вековые и долгопериодические изменения узла и перигея [40—40], и долгопериодические изменения эксцентриситета [47—50].

При определении тессеральных и секториальных динамических постоянных существенное значение имеют внутрисуточные вариации и именно с периодом  $24^h : k$ . Одновременно необходимо определять и координаты станций, так как их ошибки вызывают периодические вариации такого же характера. Поэтому, в отличие от определения постоянных зональных, здесь исходными являются соотношения непосредственно для положений спутников, а не возмущений амплитуды [34—39]. При этом требуется достаточно большое число спутниковых станций, удачно расположенных на поверхности, Земли.

В общем виде возмущения в элементах орбит можно написать в виде

$$\frac{de_i}{dt} = \sum_{n=2}^N K_n^{(0)} J_n^{(0)} + \sum_{n=2}^N \sum_{k=1}^n K_n^{(k)} J_n^{(k)} + \sum K_{nm} J_n^{(0)} J_m^{(0)}, \quad (573)$$

причем из квадратических членов  $J_n^{(0)}$ ,  $J_m^{(0)}$  затем принимаем во внимание лишь член  $J_2^{(0)} J_2^{(0)}$ . Коэффициенты  $K_n^{(0)}$ ,  $K_n^{(k)}$ ,  $K_{n,m}$  — функции элементов орбиты. Проблема — в большом числе постоянных  $J_n^{(k)}$ ,  $S_n^{(k)}$ , которые являются искомыми неизвестными. Поэтому желательна хотя бы частичная сепарация неизвестных. Для определения постоянных низких степеней  $n$  используются далекие спутники, движение которых мало искажено влиянием высших гармоник

Т а б л и ц а 2

$J_2^{(0)} = -1082,639 \cdot 10^{-6}$	$J_3^{(0)} = 2,565 \cdot 10^{-6}$	$J_4^{(0)} = 1,608 \cdot 10^{-6}$	$J_5^{(0)} = 0,174 \cdot 10^{-6}$
$J_6^{(0)} = -0,542$	$J_7^{(0)} = 0,419$	$J_8^{(0)} = 0,128$	$J_9^{(0)} = 0,022$
$J_{10}^{(0)} = 0,338$	$J_{11}^{(0)} = -0,176$	$J_{12}^{(0)} = -0,053$	$J_{13}^{(0)} = 0,146$
$J_{14}^{(0)} = 0,174$	$J_{15}^{(0)} = 0,065$	$J_{16}^{(0)} = -0,449$	$J_{17}^{(0)} = 0,052$
$J_{18}^{(0)} = 0,324$	$J_{19}^{(0)} = 0,075$	$J_{20}^{(0)} = -0,334$	

Таблица 3

$n$	$k$	$\bar{J}_n^{(k)} \cdot 10^*$	$\bar{S}_n^{(k)} \cdot 10^*$	$n$	$k$	$\bar{J}_n^{(k)} \cdot 10^*$	$\bar{S}_n^{(k)} \cdot 10^*$
2	2	2,38	-1,35	10	1	0,10	-0,07
	3	1	1,71		0,23	2	-0,08
2		0,84	-0,51		3	-0,08	-0,05
3		0,66	1,43		4	-0,06	-0,08
4	1	-0,47	-0,39		5	0,02	-0,02
	2	0,35	0,48		6	-0,04	-0,01
	3	0,92	-0,24		7	0,04	-0,05
	4	0,04	0,30		8	0,04	-0,05
5	1	-0,06	-0,05		9	0,05	-0,04
	2	0,53	-0,21		10	0,03	-0,02
	3	-0,40	0,07	11	1	-0,03	0,02
	4	-0,20	0,02		2	0,05	-0,05
	5	0,18	-0,56		3	0,01	-0,08
6	1	-0,08	0,01		4	-0,03	0,00
	2	0,01	-0,27		5	0,03	0,02
	3	-0,04	0,03		6	-0,03	-0,02
	4	-0,08	-0,48		7	0,03	-0,03
	5	-0,26	-0,46		8	0,04	-0,02
	6	-0,02	-0,16		9	0,03	0,01
7	1	0,17	0,11		10	-0,03	-0,01
	2	0,32	0,16		11	0,10	0,06
	3	0,18	0,00	12	1	-0,09	-0,07
	4	-0,16	-0,04		2	-0,06	0,02
	5	0,07	-0,01		3	0,03	0,02
	6	-0,23	0,10		4	-0,05	0,01
	7	0,07	0,06		5	0,02	0,01
8	1	-0,01	-0,01		6	-0,01	0,01
	2	0,04	0,04		7	-0,04	-0,02
	3	-0,03	0,00		8	0,00	0,01
	4	-0,17	-0,02		9	-0,01	0,02
	5	-0,09	0,09		10	-0,01	0,00
	6	-0,01	0,30		11	-0,05	-0,02
	7	0,02	0,04		12	-0,01	-0,01
	8	-0,18	0,03	13	1	0,00	0,04
9	1	0,11	0,00		2	-0,03	0,01
	2	0,03	0,05		3	0,00	0,03
	3	-0,03	-0,01		4	-0,01	-0,02
	4	0,07	0,02		5	0,03	-0,02
	5	-0,04	0,04		6	-0,03	0,05
	6	0,04	0,01		7	-0,02	0,00
	7	0,04	-0,02		8	-0,02	-0,01
	8	0,13	0,00		9	0,02	0,05
	9	0,08	0,04		10	0,04	-0,02
			11		-0,02	0,01	
			12		-0,02	0,06	
			13		-0,07	0,00	

$n$	$k$	$\bar{J}_n^{(k)} \cdot 10^6$	$\bar{S}_n^{(k)} \cdot 10^6$	$n$	$k$	$\bar{J}_n^{(k)} \cdot 10^6$	$\bar{S}_n^{(k)} \cdot 10^6$
14	1	-0,01	0,02	15	1	0,01	-0,01
	2	-0,01	-0,04		2	-0,02	-0,03
	3	0,06	-0,03		3	0,02	0,03
	4	0,00	0,00		4	0,00	0,01
	5	0,05	-0,03		5	0,03	-0,02
	6	0,01	-0,03		6	0,03	-0,05
	7	0,03	0,02		7	0,03	0,04
	8	-0,03	-0,03		8	-0,06	0,00
	9	0,03	0,07		9	0,00	0,04
	10	0,04	0,01		10	0,02	0,01
	11	0,04	0,01		11	0,01	0,01
	12	0,05	-0,03		12	-0,07	0,05
	13	0,01	0,04		13	-0,05	-0,03
	14	-0,04	0,02		14	0,01	-0,03
				15	-0,02	-0,01	

гравитационного поля. Некоторая дальнейшая сепарация возможна при оптимальной комбинации орбит с разнообразными элементами.

Теоретически хотя бы некоторая частичная сепарация была бы в некоторых конкретных случаях возможна с использованием ортогональных сферических функций, прежде всего в предположении, что орбита спутника детально известна и имеются известные дискретные значения  $de_i/dt$ , а не интегралы их изменений [77].

В заключение приведем числовые значения динамических постоянных Земли согласно [51, 52].

Динамические постоянные  $J_n^{(0)}$  Земли при зональных сферических функциях [51] приведены в табл. 2.

Динамические постоянные  $\bar{J}_n^{(k)} = J_n^{(k)}/N_n^{(k)}$ ,  $S_n^{(k)} = J_n^{(k)}/N_n^{(k)}$  Земли при сферических функциях тессеральных и секториальных [52] (норма  $N_n^{(k)}$  по (309) и по табл. 1) приведены в табл. 3.

Тессеральные постоянные  $J_2^{(1)} = 0$ ,  $S_2^{(1)} = 0$ , а priori специальным выбором ориентации оси  $z$  (278), (280). Отметим, что вопрос о реальной точности значений динамических постоянных является еще открытой проблемой, особенно для высоких степеней  $n$  и соответствующих порядков  $k$ .

## § 28. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ПРИТЯЖЕНИЯ РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО ГЕОИДА И ЛИНЕЙНОГО МАСШТАБНОГО КОЭФФИЦИЕНТА ПО НАБЛЮДЕНИЯМ СПУТНИКОВ

Если имеем в распоряжении достаточно точный набор динамических постоянных  $J_n^{(k)}$ ,  $S_n^{(k)}$  Земли, то можно приступить к решению собственно геодезических задач. Некоторые из них были практи-

чески недоступны для спутниковой геодезии, либо были решены с низкой точностью.

Первая задача, которой будем заниматься — это определение величины потенциала притяжения  $W_0$  на поверхности регуляризованного геоида и значения линейного масштабного коэффициента  $R_0$ , который выразим, согласно (53), в форме

$$R_0 = \frac{fM}{W_0}. \quad (574)$$

Здесь  $fM$  — геосферическая гравитационная постоянная, которую в этой задаче и в дальнейших разделах будем считать известной; практически будем использовать величину

$$fM = 398\,603 \cdot 10^9 \cdot m^3 c^{-2}, \quad (575)$$

которая была принята на XIV Генеральной ассамблее Международной ассоциации геодезии и геофизики (1967). Задача была впервые решена в [64], [78].

Под термином «регуляризованный геоид» понимаем поверхность  $W = W_0$ , совпадающую на морях и океанах с геоидом Листинга, а в областях континентов (и островов) расположенную так, будто все ее внешние массы смещены в тело Земли, но так, что внешний потенциал остался неизменным.

Ввиду того что точно известны динамические постоянные  $J_n^{(k)} S_n^{(k)}$  для небольших степеней  $n$ , то и геоид можно определить только приближенно. Речь пойдет о поверхности геоида сильно сглаженной, следовательно, о так называемом планетарном геоиде С л у д с к о г о [5].

Потенциал силы тяжести  $W_0$  в точке геоида  $M_i$  с координатами

$$x_i = \rho_i \cos \Phi_i \cos \Lambda_i; \quad y_i = \rho_i \cos \Phi_i \sin \Lambda_i; \quad z_i = \rho_i \sin \Phi_i, \quad (576)$$

согласно (18) и (302), будет равен

$$W_0 = \frac{fM}{\rho_i} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \left( \frac{\alpha_0}{\rho_i} \right)^n \sum_{k=0}^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda_i + S_n^{(k)} \sin k\Lambda_i) P_n^{(k)}(\sin \Phi_i) \right] \right\} + \frac{1}{2} \omega^2 \rho_i^2 \cos^2 \Phi_i. \quad (577)$$

Будем предполагать, что ряд сферических функций в (577) сходится в области всей поверхности геоида, а также и в местах, где геоид пересекает массу Земли. Это предположение, по-видимому, в общем не выполняется. Это обстоятельство обсуждается в § 29, а также об этом свидетельствуют данные табл. 9. Точное решение потребовало бы исправления динамических постоянных за влияние внешних масс.

Далее будем предполагать, что имеем геосферические координаты точек геоида. Это предположение также нельзя точно

выполнить, однако наблюдения ИСЗ со станций Смитсоновской астрономической обсерватории (SAO) [52] образовали координатную систему (обозначенную С7), у которой степень геоцентричности довольно высока\*. Автор оценивает ошибку равной  $\pm 15$  м. Используем ее как идеальную геоцентрическую систему.

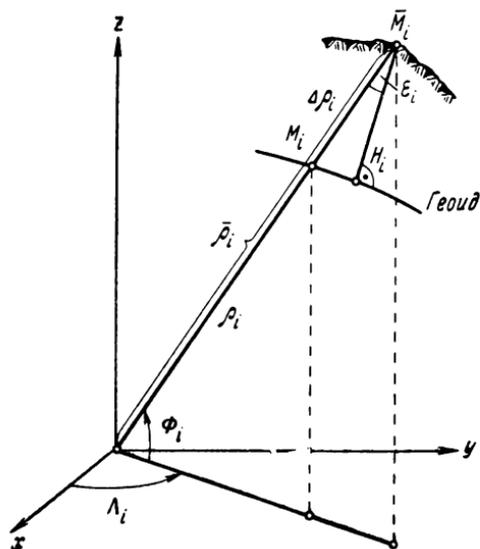


Рис. 14. Схема к выводу линейного масштабного коэффициента

Геоцентрические координаты спутниковых станций САО (система С7) [52] приведены в табл. 4.

По координатам  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ ,  $\bar{z}$  определим

$$\bar{\rho}_i = \sqrt{\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2 + \bar{z}_i^2}; \quad \bar{\Phi}_i = \arctg \frac{\bar{z}_i}{\sqrt{\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2}}; \quad \bar{\Lambda}_i = \arctg \frac{\bar{y}_i}{\bar{x}_i}. \quad (579)$$

Далее будем связывать точку  $M_i$  ( $\rho_i$ ,  $\Phi_i$ ,  $\Lambda_i$ ) на геоиде с точкой  $M_i$  ( $\bar{\rho}_i$ ,  $\bar{\Phi}_i$ ,  $\bar{\Lambda}_i$ ), соответствующей станции наблюдения на земной поверхности, считая, что ее радиус-вектор  $\rho_i$  по направлению совпадает с радиусом-вектором  $\bar{\rho}_i$ , т. е., что имеют место равенства

$$\Phi_i = \bar{\Phi}_i; \quad \Lambda_i = \bar{\Lambda}_i. \quad (580)$$

Кроме того, предполагается (см. рис. 14)

$$\rho_i = \bar{\rho}_i - \Delta\rho_i \simeq \bar{\rho}_i - H_i \sec \epsilon_i, \quad (581)$$

\* На Генеральной ассамблее КОСПАР (1969) была использована система СВ, у которой степень геоцентричности может быть еще выше [54]. Однако внутреннее согласие результатов определения  $W_0, R_0$  по данным этой системы (см. далее) было существенно хуже.

где  $H_i$  — высота станции над уровнем моря, а  $\varepsilon_i$  — угол между направлением  $\rho_i$  и отвесной линией в точке  $\overline{M}_i$ . Довольствуясь точностью  $\pm 0,5$  м, можем угол  $\varepsilon_i$  не учитывать и практически положить

$$\Delta\rho_i = H_i. \quad (582)$$

Таблица 4

Станции наблюдений ИСЗ	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$
9001	-1 535 758 м	-5 166 993 м	3 401 040 м
9002	5 056 124	2 716 484	-2 775 815
9003	-3 983 748	3 743 099	-3 275 592
9004	5 105 591	- 555 232	3 769 672
9005	-3 946 695	3 366 285	3 698 841
9006	1 018 205	5 471 098	3 109 613
9007	1 942 768	-5 804 075	-1 796 960
9008	3 376 881	4 403 983	3 136 253
9009	2 251 819	-5 816 912	1 327 163
9010	976 282	-5 601 387	2 880 241
9011	2 280 574	-4 914 567	-3 355 456
9012	-5 466 053	-2 404 274	2 242 169
9114	-1 264 838	-3 466 890	5 185 473
9115	3 121 274	592 628	5 512 693
9117	-6 007 402	-1 111 873	1 825 725

Таблица 5

Станции наблюдений ИСЗ	$\bar{\rho}$ , м	$\bar{\Phi} = \Phi$	$\bar{\Lambda} = \Lambda$	$H$ , м	$\rho$ , м
9001	6 373 652	+32° 14' 58",72	253° 26' 48",30	1651	6 372 001
9002	6 375 643	-25 48 33,67	28 14 51,47	1544	6 374 099
9003	6 372 640	-30 55 52,37	136 47 01,94	162	6 372 478
9004	6 370 696	+36 16 45,12	353 47 36,55	26	6 370 670
9005	6 371 005	+35 29 27,38	139 32 16,39	60	6 370 945
9006	6 374 900	+29 11 43,56	79 27 27,05	1927	6 372 973
9007	6 378 926	-16 21 42,65	288 30 24,02	2451	6 376 475
9008	6 374 518	+29 28 19,28	52 31 11,18	1596	6 372 922
9009	6 377 187	+12 00 42,04	291 09 43,96	7	6 377 180
9010	6 373 731	+26 51 54,60	279 53 12,95	15	6 373 716
9011	6 372 838	-31 46 15,36	294 53 36,10	598	6 372 241
9012	6 378 526	+20 34 48,77	203 44 33,22	3034	6 375 492
9114	6 364 611	+54 33 40,30	249 57 22,79	708	6 363 903
9115	6 362 652	+60 02 40,55	10 45 02,27	576	6 362 076
9117	6 376 395	+16 38 17,17	190 29 09,10	5	6 376 390

Имея координаты  $\rho_i$ ,  $\bar{\Phi}_i$ ,  $\Lambda_i$  точек  $M_i$  на поверхности геоида (табл. 4—5), достаточно большую совокупность динамических постоянных  $J_n^{(k)}$ ,  $S_n^{(k)}$  (табл. 2—3) и значения (575), (578), можем по (577) вычислить потенциал геоида  $W_0$  для каждой станции наблюдений спутников (табл. 6). Средняя величина  $\bar{W}_0$  для всех станций получилась равной

$$\bar{W}_0 = 62\,637,23 \cdot 10^3 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \pm 0,08 \cdot 10^3 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-2}. \quad (583)$$

Т а б л и ц а 6

Станции наблюдений ИСЗ	$W_0, 10^3 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$	$\nu W_0, 10^3 \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$	$R_0, \text{ м}$	$\nu R_0, \text{ м}$	$\frac{\nu R_0}{R_0}, 10^{-6}$
9001	62 637,26	3,1	6 363 673	-2,3	-0,36
9002	12	-10,9	687	11,7	1,84
9003	19	-3,9	679	3,7	0,58
9004	32	9,1	667	-8,3	-1,30
9005	14	-8,9	684	8,7	1,37
9006	31	8,1	667	-8,3	-1,30
9007	10	-12,9	688	12,7	2,00
9008	31	8,1	667	-8,3	-1,30
9009	30	7,1	668	-7,3	-1,15
9010	29	6,1	669	-6,3	-0,99
9012	22	-0,9	676	0,7	0,11
9114	23	0,1	675	-0,3	-0,05
9117	19	-3,9	679	3,7	0,58
Среднее	62 637,229		6 363 675,3		

Уклонения  $W_0$  от среднего  $\bar{W}_0$ , обозначенные  $\nu W_0$ , приведены в табл. 6. Подчеркиваем, что вычисление  $W_0$  не зависит от выбора линейной величины  $a_0$  в (577) (точно такая же величина в выражениях для  $J_n^{(k)}$ ,  $S_n^{(k)}$ ), см. § 13.

Линейный масштабный коэффициент (574) при помощи (577) можно получить так

$$R_0 = \rho_i \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \left( \frac{a_0}{\rho_i} \right)^n \sum_{k=0}^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda_i + S_n^{(k)} \sin k\Lambda_i) P_n^{(k)}(\sin \Phi_i) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} q \left( \frac{a_0}{\rho_i} \right)^{-3} [1 - P_2^{(0)}(\sin \Phi_i)] \right\}^{-1}, \quad (584)$$

где 
$$q = \frac{w^2 a_0^3}{fM}. \quad (585)$$

Представим радиус шара с таким же потенциалом, как и на поверхности геоида. Его среднее значение мало зависит от значения

геоцентрической постоянной  $fM$ , если вспомним зависимость  $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i$  от этих постоянных при их выводе по вариациям элементов орбит. Зависимость от  $fM$ , вызываемая влиянием коэффициента  $q$ , относительно слаба (см. уравнение (585) и табл. 7).

Таблица 7

$fM, 10^8 \text{ м}^2 \text{ с}^{-2}$	$q, 10^{-8}$	$W_0, 10^8 \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$	$R_0, \text{ м}$
398 600,0	3 461,433	62 636,76	6 363 675,26
0,5	,429	6,84	,12
1,0	,425	6,91	,98
1,5	,420	6,99	,84
2,0	,416	7,07	,70
2,5	,412	7,15	,55
3,0	,407	7,23	,40

Значения  $R_0$ , вычисленные по положениям отдельных спутниковых станций, приведены в табл. 6 ( $\nu_{R_0}$  означает уклонение от среднего). Средняя величина равна

$$R_0 = 6\,363\,675 \pm 10 \text{ м} \quad (586)$$

(средняя квадратическая ошибка вычисления по внутренней сходимости отдельных результатов получилась  $\pm 2,3$  м). Результат (586), конечно, искажен влиянием размеров, использованных в системе С7, в которых были вычислены координаты станций, так что приведенная средняя квадратическая ошибка не показательна.

Постоянные  $W_0, R_0$  можно определить по относительным высотам геоида  $\zeta_r$  в геодезической референционной системе, если известны элементы сдвига  $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$  (см. ч. I, § 4) этой системы и если пренебречь влиянием малых углов  $\varepsilon_0, \omega_0, \psi_0$ .

Далее геоцентрические координаты точки на геоиде могут быть выражены так

$$\left. \begin{aligned} x &= \Delta x_0 + (N_r + \zeta_r) \cos B \cos L \\ y &= \Delta y_0 + (N_r + \zeta_r) \cos B \sin L \\ z &= \Delta z_0 + [N_r (1 - e_r^2) + \zeta_r] \sin B \end{aligned} \right\}, \quad (587)$$

$$N_r = \frac{a_r}{\sqrt{1 - e_r^2 \sin^2 B}}$$

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \Phi = \arctg \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \lambda &= \arctg \frac{y}{x} \end{aligned} \right\}, \quad (588)$$

где  $a_r, e_r^2$  — параметры использованного геодезического референционного эллипсоида.

Дальнейший путь сходен с тем, который применяли в случае использования геоцентрических положений спутниковых станций,

где положения на геоиде выводили относительно физической поверхности Земли, т. е. с использованием высот спутниковых станций над уровнем моря.

Таким же способом можно для определения постоянных  $W_0$ ,  $R_0$  использовать относительные высоты геоида, если они отнесены к референцному эллипсоиду, элементы сдвига которого  $\Delta x_0$ ,  $\Delta y_0$ ,  $\Delta z_0$  известны (табл. 8 [52]) \*.

Таблица 8

Геодезическая референцная система	Используемый референц-эллипсоид			
	название	параметры		
		$a_r$ , м	$1 : \alpha_r$	$e_r^2$
Европейская (EUR)	Хейфорда	6 378 388	297,00	0,066 722 670
Североамериканская (NAD)	Кларка 1866	6 378 206	294,98	0,006 768 658
Южноамериканская (SAD)	Хейфорда	6 378 388	297,00	0,006 722 670
Африканская (ARC)	Кларка 1880	6 378 249	293,47	0,006 803 481
Австралийская (AND)	Австралийский национальный	6 378 160	298,25	0,006 694 542
Японская (JAP)	Бесселя	6 377 397	299,15	0,006 674 372
Индийская (IND)	Эвереста	6 377 276	300,80	0,006 637 847
Аргентинская (ARG)	Хейфорда	6 378 388	297,00	0,006 722 670
Гавайская (HAW)	Кларка 1866	6 378 206	294,98	0,006 768 658

Продолжение табл. 8

№ по пор.	Геодезическая референцная система	Исходный пункт
1	Европейская	Потсдам
2	Североамериканская	Мидс-Ренч
3	Южноамериканская	Ла Канеа
4	Африканская	
5	Австралийская	Джонстон
6	Японская	Токио
7	Индийская	Калианпур
8	Аргентинская	Кампе-Инхауспе
9	Гавайская	Диамонд-Хид

\* Положения центров референцных эллипсоидов систем EUR, NAD и AND уточнены на основе вычисления потенциала  $W_0$  при помощи относительных высот геоида [55]. После исправления получилось:

$$\begin{aligned} \text{EUR} : \Delta x_0 &= -80 \text{ м}, \quad \Delta y_0 = -101 \text{ м}, \quad \Delta z_0 = -119 \text{ м}, \\ \text{NAD} : \Delta x_0 &= -10 \text{ м}, \quad \Delta y_0 = +182 \text{ м}, \quad \Delta z_0 = +202 \text{ м}, \\ \text{AND} : \Delta x_0 &= -108 \text{ м}, \quad \Delta y_0 = -70 \text{ м}, \quad \Delta z_0 = +76 \text{ м}. \end{aligned}$$

Этот путь, однако, лишь приближенный.

№ по нор.	Геодезические координаты исходного пункта		Координаты центра референц-эллипсоида относительно центра масс		
	<i>B</i>	<i>L</i>	$\Delta x_0$	$\Delta y_0$	$\Delta z_0$
1	+52° 22' 55"	13° 04' 02"	-90 м	-133 м	-140 м
2	+39 13 27	261 27 29	-30	+152	+176
3	+8 34 17	296 08 25	-288	+112	-392
4			-128	-146	-348
5	-25 56 55	133 12 30	-89	-34	+86
6	+35 39 16	139 44 41	-143	+512	+683
7	+24 07 11	77 39 18	+293	+699	+229
8	-35 58 17	297 49 48	-166	+126	+24
9	+21° 15' 46"	202° 11' 08"	+67	-263	-202

**§ 29. ПРОБЛЕМА СХОДИМОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА ЗЕМЛИ В РЯД СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ**

Сходимость разложения гравитационного поля в ряд по сферическим функциям доказана только для того случая, когда все тело Земли с массой  $M$  находится внутри сферы, радиус  $\rho$  которой меньше

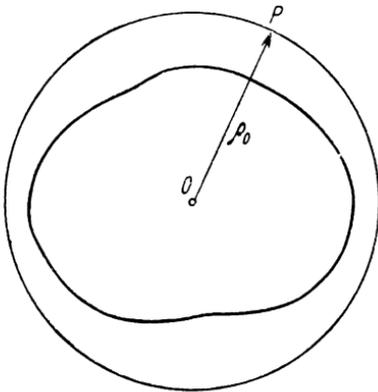


Рис. 15. Схема Земли и ее внешнего пространства. К пояснению сходимости разложения.

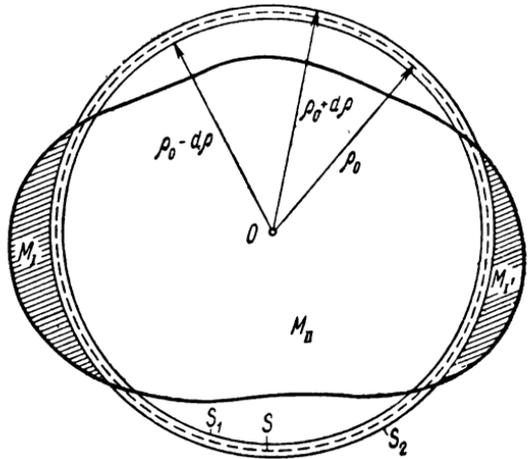


Рис. 16. Геоид и секущая сфера

геоцентрического расстояния  $\rho_0$  точки  $P$ , где рассматривается гравитационное поле (рис. 15). При этом чем больше  $\rho_0$ , тем лучше ряд сходится.

Если внешняя потенциальная точка  $P$  занимает такое положение, что сфера  $S$  пересекает тело (рис. 16), то ситуация значительно осложняется. Для ее пояснения проведем геоцентрические сферы  $S_1$  и  $S_2$  с радиусами  $\rho_0 + d\rho$  и  $\rho_0 - d\rho$ , которые разделят массу Земли на 4 части:

$M_I$  и  $M_{I'}$  — внешние по отношению к сфере  $S$ ;  $M_{II}$  — внутреннюю по отношению к сфере  $S$ ;  $M_{III}$  — массу в пространстве между дифференциально близкими сферами  $S_1$  и  $S_2$ .

Полный потенциал  $V_{(P)}$  равен сумме

$$V_{(P)} = V_I + V_{I'} + V_{II} + V_{III}, \quad (589)$$

где составляющие потенциала соответствуют частям массы, причем величина  $V_{III}$  мала и может не учитываться.

Только потенциал  $V_{II}$  может быть выражен при помощи разложения (577); радиус  $\rho$  произвольного элемента только масс  $M_{II}$  удовлетворяет тогда всюду условию

$$\rho/\rho_0 < 1, \quad (590)$$

на котором основано разложение (577), см. § 1.

Потенциал  $(V_I + V_{I'})$  разложением (577) выразить не может. Потенциальная точка в этом случае будет везде внутренней по отношению к массам  $M_I$  и  $M_{I'}$ , следовательно,

$$\rho/\rho_0 > 1, \quad (591)$$

и основное выражение (2) нужно поэтому выразить так

$$V_I + V_{I'} = f \iiint_{M_I + M_{I'}} \frac{1}{\rho \sqrt{1 + (\rho_0/\rho)^2 - 2(\rho_0/\rho) \cos \psi}} dm. \quad (592)$$

Если в (117) положим  $\alpha = \rho_0/\rho$ , то, как и в (190), получим сходящийся ряд

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^n P_n^{(0)}(\cos \psi). \quad (593)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} V_I + V_{I'} &= f \iiint_{M_I + M_{I'}} \frac{\rho^n}{\rho^{n+1}} P_n^{(0)}(\cos \psi) dm = \\ &= \frac{fM}{\rho_0} \left( \frac{\rho_0}{a_0} \right)^{n+1} M^{-1} \iiint_{M_I + M_{I'}} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{n+1} P_n^{(0)}(\cos \psi) dm, \end{aligned} \quad (594)$$

а с учетом (198), обозначая, как и (577), геоцентрические сферические координаты потенциальной точки  $(\rho_i, \Phi_i, \Lambda_i)$ ,

$$\begin{aligned} V_I + V_{I'} &= \frac{fM}{\rho_i} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left( \frac{\rho_i}{a_0} \right)^{n+1} \cdot [(J_n^k)_{I+I'} \cdot \cos \Lambda_i + \right. \\ &\quad \left. + (S_n^{(k)})_{I+I'} \sin k \Lambda_i] P_n^{(k)}(\sin \Phi_i) \right\}. \end{aligned} \quad (595)$$

Динамические постоянные  $(J_n^{(k)})_{I+I'}$ ,  $(S_n^{(k)})_{I-I'}$  выражены опять так, чтобы они были безразмерными (так же, как  $J_n^{(k)}$ ,  $S_n^{(k)}$ ), и будут теперь равны

$$\left. \begin{aligned} (J_n^{(0)})_{I+I'} &= \frac{1}{M} \iiint_{M_I+M_{I'}} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{n+1} P_n^{(0)}(\sin \Phi) dm \\ (J_n^{(k)})_{I+I'} &= 2 \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \frac{1}{M} \iiint_{M_I+M_{I'}} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{n+1} P_n^{(k)}(\sin \Phi) \cos k\Lambda dm \\ (S_n^{(k)})_{I+I'} &= 2 \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \frac{1}{M} \iiint_{M_I+M_{I'}} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{n+1} P_n^{(k)}(\sin \Phi) \sin k\Lambda dm \end{aligned} \right\} (596)$$

В формулах (595) удержаны сферические функции степени  $n = 1$ , так как притягивающая масса  $M_I + M_{I'}$  не может вообще совпадать с центром масс Земли.

Потенциал  $V_{II}$  выразим так

$$V_{II} = \frac{fM}{\rho_i} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_0}{\rho_i}\right)^n [(J_n^{(k)} - \delta J_n^{(k)}) \cos k\Lambda_i + (S_n^{(k)} - \delta S_n^{(k)}) \sin k\Lambda_i] F_n^{(k)}(\sin \Phi_i) \right\}, \quad (597)$$

где  $J_n^{(k)}$ ,  $S_n^{(k)}$  — динамические постоянные всего тела Земли, которые получены по вариациям элементов орбит спутников, а  $\delta J_n^{(k)}$ ,  $\delta S_n^{(k)}$  — поправки за влияние масс  $(M_I + M_{I'})$ ; их влияние выражает именно потенциал  $(V_I + V_{I'})$ . Эти поправки, с учетом (202)—(204), будут равны

$$\left. \begin{aligned} \delta J_n^{(0)} &= \frac{1}{M} \iiint_{M_I+M_{I'}} \left(\frac{\rho}{a_0}\right)^n P_n^{(0)}(\sin \Phi) dm \\ \delta J_n^{(k)} &= 2 \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \frac{1}{M} \iiint_{M_I+M_{I'}} \left(\frac{\rho}{a_0}\right)^n P_n^{(0)}(\sin \Phi) \cos k\Lambda dm \\ \delta S_n^{(k)} &= 2 \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \frac{1}{M} \iiint_{M_I+M_{I'}} \left(\frac{\rho}{a_0}\right)^n P_n^{(0)}(\sin \Phi) \sin k\Lambda dm \end{aligned} \right\} (598)$$

Вычисление постоянных (596) и (598) нужно было бы провести для каждой точки, в которой вычисляется потенциал и в которой сфера пересекает земную массу. Оба ряда, т. е. (595) и (597), как известно из теории потенциала, сходятся.

Было бы выгоднее вычислять сразу же разности

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\rho_i}{a_0}\right)^{2n+1} (J_n^{(0)})_{I+I'} - \delta J_n^{(k)} = \Delta J_n^{(k)} = \\ &= \frac{1}{M} \iiint_{M_I+M_{I'}} \left[ \left(\frac{\rho_i}{\rho}\right)^{n+1} \left(\frac{\rho_i}{a_0}\right)^n - \left(\frac{\rho}{a_0}\right)^n \right] P_n^{(0)}(\sin \Phi) dm, \end{aligned} \quad (599)$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \left( \frac{\rho_i}{a_0} \right)^{2n+1} (J_n^{(k)})_{I+I'} - \delta J_n^{(k)} = \\
 & = 2 \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \frac{1}{M} \iiint_{M_{I+M_{I'}}} \left[ \left( \frac{\rho_i}{\rho} \right)^{n+1} \left( \frac{\rho_i}{a_0} \right)^n - \left( \frac{\rho_i}{a_0} \right)^n \right] \times \\
 & \quad \times P_n^{(k)}(\sin \Phi) \cos k\Lambda \, dm \\
 & \left( \frac{\rho_i}{a_0} \right)^{2n+1} (S_n^{(k)})_{I+I'} - \delta S_n^{(k)} = \\
 & = 2 \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \frac{1}{M} \iiint_{M_{I+M_{I'}}} \left[ \left( \frac{\rho_i}{\rho} \right)^{n+1} \left( \frac{\rho_i}{a_0} \right)^n - \left( \frac{\rho_i}{a_0} \right)^n \right] \times \\
 & \quad \times P_n^{(k)}(\sin \Phi) \sin k\Lambda \, dm
 \end{aligned} \right\} (600)$$

Станции ИСЗ	Значения								
	N=2	N=3	N=4	N=5	N=6	N=7	N=8	N=9	N=10
6363									
9001	667	678	680	683	675	674	668	669	670
9002	700	680	682	686	686	689	687	688	688
9003	667	657	668	669	673	678	675	677	676
9004	691	674	662	666	665	671	675	673	671
9005	693	686	692	690	692	687	685	684	685
9006	638	670	675	673	678	671	667	668	665
9007	730	720	701	704	698	693	692	690	691
9008	668	682	691	679	667	665	671	668	669
9009	660	669	668	667	667	675	671	672	672
9010	651	657	671	663	666	664	666	667	668
9012	675	691	695	691	688	684	679	678	677
9114	666	681	672	684	681	679	678	677	676
9117	769	675	685	688	682	680	678	677	677
Среднее	675,0	678,5	680,2	680,2	678,3	677,7	676,3	676,0	675,8
Средняя квадратическая ошибка $m$ единичного определения	$\pm 23,6$	$\pm 16,0$	$\pm 12,0$	$\pm 12,1$	$\pm 10,7$	$\pm 8,9$	$\pm 8,0$	$\pm 7,6$	$\pm 8,0$
Средняя квадратическая ошибка определения среднего $R_0$ $M = \frac{m}{\sqrt{n}}$	$\pm 6,6$	$\pm 4,4$	$\pm 3,3$	$\pm 3,4$	$\pm 3,0$	$\pm 2,5$	$\pm 2,2$	$\pm 2,1$	$\pm 2,2$

Поправки  $\Delta J_n^{(k)}$ ,  $\Delta S_n^{(k)}$ , вычисленные для каждой потенциальной точки, должны быть прибавлены к  $J_n^{(k)}$ ,  $S_n^{(k)}$ , вычисленным по вариациям элементов орбит спутников. Вычисления эти все же сравнительно длительны и точно неосуществимы, если мы не знаем распределения плотности масс  $M_1$  и  $M_1'$ . Кроме того, можно ожидать по теории Стокса, что для сходимости должно быть достаточно нормальной регуляризированной Земли, т. е. устранения или учета влияния тех масс, которые считаются внешними к поверхности, являющейся предметом изучения, — геоиду. Проблеме регуляризации Земли посвящена обширная геодезическая литература, включая основные классические учебники и монографии. К ней мы и отсылаем читателя.

Таблица 9

$$R_0 = \frac{GM}{W_0}, \text{ м}$$

$N=11$	$N=12$	$N=13$	$N=14$	$N=15$	$N=16$	$N=17$	$N=18$	$N=19$	$N=20$
6363									
670	671	671	673	674	673	673	673	673	673
688	685	686	688	687	687	687	687	687	687
677	676	677	678	680	680	680	679	679	679
669	668	667	667	666	666	666	666	666	667
686	686	686	684	684	684	684	684	684	684
665	666	666	667	668	668	668	668	668	667
691	691	690	690	688	688	687	688	688	688
669	667	667	667	668	668	668	667	667	667
671	672	671	671	670	669	669	669	669	668
669	670	669	670	670	670	670	669	669	669
677	675	676	676	674	675	675	676	676	676
676	677	677	677	675	675	675	675	675	675
678	677	676	677	677	677	677	677	677	679
675,8	675,5	675,3	675,8	675,5	675,4	675,3	675,2	675,2	675,3
±8,2	±7,8	±7,9	±7,8	±7,4	±7,4	±7,3	±7,6	±7,6	±7,7
±2,3	±2,2	±2,2	±2,2	±2,0	±2,0	±2,0	±2,1	±2,1	±2,1

Для случая реальной Земли проблема остается пока открытой в подповерхностных областях. Сформулированные выводы нужно считать за действительные лишь в смысле регуляризованного геоида по § 18. В [56] сходимость предполагается существующей для любой точки физической поверхности реальной Земли, а в [5] — для всех точек поверхности регуляризованного геоида. В [9] сходимость доказана для случая, в котором тело состоит из однородных эллипсоидальных слоев.

Покуда речь идет об абсолютной сходимости ряда сферических функций, определяющих функцию  $1/r$ , которая будет иметь место везде, где  $\rho_0 > \rho$  ( $\rho/\rho_0 < 1$ ), или везде  $\rho > \rho_0$  ( $\rho_0/\rho < 1$ ).

Кроме абсолютной сходимости, в некоторых задачах, где нужно интегрировать ряд, нас интересуют и сходимость равномерная, и величина остаточного члена  $R_m$  ряда. Если [57]

$$\rho/\rho_0 \ll \varepsilon \ll 1, \quad (601)$$

то ряд равномерно сходится для всех внешних потенциальных точек, и остаточный член равен

$$R_m = \frac{1}{\rho_0} \sum_{n=m}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n P_n^{(0)}(\cos \psi), \quad (602)$$

а после выполнения замены [57]

$$|R_m| < \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{\rho_0} = \frac{1}{\rho_0} \varepsilon^m \frac{-1}{\varepsilon - 1} = \frac{\varepsilon^m}{\rho_0(1 - \varepsilon)}.$$

Аналогично, если

$$\rho_0/\rho < \varepsilon' < 1,$$

то

$$|R'_m| < \frac{\varepsilon'^m}{\rho(1 - \varepsilon')}.$$

Бесспорно, можно поставить вопрос о сходимости величин  $W_0$ ,  $R_0$ , определяемых рядом вида (584), но с разными степенями сферических функций, т. е. при учете разного числа членов ряда, также с учетом ошибок  $m_{W_0}$  и  $m_{R_0}$ , вычисленных по внутренней сходимости по всем 13 станциям [58]. Численные значения их при разных степенях  $N$  ряда сферических функций приведены в табл. 9.

### § 30. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ГЕОЦЕНТРИЧЕСКОГО РАДИУСА-ВЕКТОРА ПОВЕРХНОСТИ РЕГУЛЯРИЗОВАННОГО ГЕОИДА

Если имеем величину  $R_0$ , полученную по (584), то можем легко определить геоцентрический радиус-вектор поверхности регуляризованного геоида из (577) как функцию

$$\rho = \rho(\Phi, \Lambda). \quad (603)$$

Будем предполагать, что разложение (577) ограничено степенью  $n = N$ . С точки зрения дальнейших применений представим  $\rho$  в виде разложения в ряд по сферическим функциям

$$\rho = A_0^{(0)} + \sum_{n=2}^n \sum_{k=0}^n (A_n^{(k)} \cos k\Lambda + B_n^{(k)} \sin k\Lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi), \quad (604)$$

где коэффициенты  $A_n^{(k)}$ ,  $B_n^{(k)}$  являются функциями  $J_n^{(k)}$ ,  $S_n^{(k)}$ ,  $q$ ,  $R_0$ . Пренебрегая выражениями, содержащими  $(J_2^{(0)})^3 \cong 10^{-9}$ ,

$$(J_2^{(0)})^2 q \cong 3 \cdot 10^{-9}, \quad \bar{J}_n^{(k)} J_2^{(0)} (< 3 \cdot 10^{-9}), \quad \bar{S}_n^{(k)} J_2^{(0)} (< 3 \cdot 10^{-9}),$$

$$\bar{J}_n^{(k)} q (< 10^{-8}), \quad \bar{S}_n^{(k)} q (< 10^{-8})$$

при  $n > 2$  или  $n = 2$ ,  $k = 2$ , однако, удерживая члены с  $q^3 \cong 4 \cdot 10^{-8}$  и  $J_2^{(0)} q^2 \cong 10^{-8}$ , получаем

$$\begin{aligned} \rho = & R_0 \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-3} q [1 - P_2^{(0)}(\sin \Phi)] + \right. \\ & + \frac{1}{3} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-6} q^2 [1 - P_2^{(0)}(\sin \Phi)]^2 + \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-1} J_2^{(0)} q P_2^{(0)}(\sin \Phi) \times \\ & \times [1 - P_2^{(0)}(\sin \Phi)] + \frac{4}{9} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-9} q^3 [1 - P_2^{(0)}(\sin \Phi)]^3 + \\ & \left. + \frac{2}{3} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-4} J_2^{(0)} q^2 P_2^{(0)}(\sin \Phi) [1 - P_2^{(0)}(\sin \Phi)]^2 \right\} + \\ & + R_0 \sum_{n=2}^N \left\{ \left( 1 - \frac{1}{3} n \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-3} q [1 - P_2^{(0)}(\sin \Phi)] - \right. \right. \\ & \left. \left. - n \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^2 J_2^{(0)} P_2^{(0)}(\sin \Phi) \right) \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^n \sum_{k=0}^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + S_n^{(k)} \sin k\Lambda) \times \right. \\ & \left. \times P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right\}. \quad (605) \end{aligned}$$

Здесь, особенно в дальнейшем, будут необходимы некоторые соотношения между тригонометрическими и сферическими функциями. Приведем их ниже

$$\begin{aligned}
[P_2^{(0)}(\sin \varphi)]^2 &= \frac{1}{5} + \frac{2}{7} P_2^{(0)}(\sin \varphi) + \frac{18}{35} P_4^{(0)}(\sin \varphi) \\
[P_2^{(0)}(\sin \varphi)]^3 &= \frac{2}{35} + \frac{3}{7} P_2^{(0)}(\sin \varphi) + \\
&+ \frac{108}{385} P_4^{(0)}(\sin \varphi) + \frac{18}{77} P_6^{(0)}(\sin \varphi) \\
[P_2^{(0)}(\sin \varphi)]^4 &= \frac{3}{35} + \frac{20}{77} P_2^{(0)}(\sin \varphi) + \\
+ \frac{1836}{5005} P_4^{(0)}(\sin \varphi) + \frac{72}{385} P_6^{(0)}(\sin \varphi) + \frac{72}{715} P_8^{(0)}(\sin \varphi) \\
P_2^{(0)}(\sin \varphi) P_4^{(0)}(\sin \varphi) &= -\frac{3}{16} + \frac{39}{16} \sin^2 \varphi - \\
- \frac{125}{16} \sin^4 \varphi + \frac{105}{16} \sin^6 \varphi &= \frac{2}{7} P_2^{(0)}(\sin \varphi) + \\
+ \frac{20}{77} P_4^{(0)}(\sin \varphi) + \frac{5}{11} P_6^{(0)}(\sin \varphi) \\
P_2^{(0)}(\sin \varphi) P_6^{(0)}(\sin \varphi) &= \frac{5}{32} - \frac{120}{32} \sin^2 \varphi + \\
+ \frac{315}{16} \sin^4 \varphi - \frac{147}{4} \sin^6 \varphi + \frac{693}{32} \sin^8 \varphi &= \\
= \frac{45}{143} P_4^{(0)}(\sin \varphi) + \frac{14}{55} P_6^{(0)}(\sin \varphi) + \frac{28}{65} P_8^{(0)}(\sin \varphi) \\
[1 - P_2^{(0)}(\sin \varphi)]^2 &= \frac{6}{5} - \frac{12}{7} P_2^{(0)}(\sin \varphi) + \frac{18}{35} P_4^{(0)}(\sin \varphi) \\
[1 - P_2^{(0)}(\sin \varphi)]^3 &= \frac{54}{35} - \frac{18}{7} P_2^{(0)}(\sin \varphi) + \\
+ \frac{486}{385} P_4^{(0)}(\sin \varphi) - \frac{18}{77} P_6^{(0)}(\sin \varphi) \\
P_2^{(0)}(\sin \varphi) [1 - P_2^{(0)}(\sin \varphi)] &= \frac{-1}{5} + \frac{5}{7} P_2^{(0)}(\sin \varphi) - \\
- \frac{18}{35} P_4^{(0)}(\sin \varphi) \\
P_2^{(0)}(\sin \varphi) [1 - P_2^{(0)}(\sin \varphi)]^2 &= -\frac{12}{35} + \frac{6}{7} \times \\
\times P_2^{(0)}(\sin \varphi) - \frac{288}{385} P_4^{(0)}(\sin \varphi) + \frac{18}{77} P_6^{(0)}(\sin \varphi) \\
[P_2^{(0)}(\sin \varphi)]^2 [1 - P_2^{(0)}(\sin \varphi)] &= \frac{1}{7} - \frac{1}{7} P_2^{(0)}(\sin \varphi) + \\
+ \frac{18}{77} P_4^{(0)}(\sin \varphi) - \frac{18}{77} P_6^{(0)}(\sin \varphi) \\
P_4^{(0)}(\sin \varphi) [1 - P_2^{(0)}(\sin \varphi)] &= -\frac{2}{7} P_2^{(0)}(\sin \varphi) + \\
+ \frac{57}{77} P_4^{(0)}(\sin \varphi) - \frac{5}{11} P_6^{(0)}(\sin \varphi)
\end{aligned} \tag{606}$$

$$\begin{aligned}
[P_4^{(0)}(\sin \varphi)]^2 &= \frac{1}{9} + \frac{100}{693} P_2^{(0)}(\sin \varphi) + \frac{162}{1001} P_4^{(0)} \times \\
&\times (\sin \varphi) + \frac{220}{1089} P_6^{(0)}(\sin \varphi) + \frac{490}{1287} P_8^{(0)}(\sin \varphi) \\
\sin^2 \varphi &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} P_2^{(0)}(\sin \varphi) \\
\sin^4 \varphi &= \frac{1}{5} + \frac{4}{7} P_2^{(0)}(\sin \varphi) + \frac{8}{35} P_4^{(0)}(\sin \varphi) \\
\sin^6 \varphi &= \frac{1}{7} + \frac{10}{21} P_2^{(0)}(\sin \varphi) + \frac{24}{77} P_4^{(0)}(\sin \varphi) + \\
&+ \frac{16}{231} P_6^{(0)}(\sin \varphi) \\
\sin^8 \varphi &= \frac{1}{9} + \frac{40}{99} P_2^{(0)}(\sin \varphi) + \frac{48}{143} P_4^{(0)}(\sin \varphi) + \\
&+ \frac{64}{495} P_6^{(0)}(\sin \varphi) + \frac{128}{6435} P_8^{(0)}(\sin \varphi) \\
\sin^{10} \varphi &= \frac{1}{11} + \frac{16150}{46189} P_2^{(0)}(\sin \varphi) + \frac{15504}{46189} P_4^{(0)}(\sin \varphi) + \\
&+ \frac{7904}{46189} P_6^{(0)}(\sin \varphi) + \frac{2176}{46189} P_8^{(0)}(\sin \varphi) + \\
&+ \frac{256}{46189} P_{10}^{(0)}(\sin \varphi) \\
\cos^2 \varphi &= \frac{2}{3} - \frac{2}{3} P_2^{(0)}(\sin \varphi) = \frac{2}{3} [1 - P_2^{(0)}(\sin \varphi)] \\
\cos^4 \varphi &= \frac{8}{15} - \frac{16}{21} P_2^{(0)}(\sin \varphi) + \frac{8}{35} P_4^{(0)}(\sin \varphi) \\
\cos^6 \varphi &= \frac{16}{35} - \frac{16}{21} P_2^{(0)}(\sin \varphi) + \frac{144}{385} P_4^{(0)}(\sin \varphi) - \\
&- \frac{16}{231} P_6^{(0)}(\sin \varphi) \\
\cos^8 \varphi &= \frac{128}{315} - \frac{512}{693} P_2^{(0)}(\sin \varphi) + \frac{2304}{5005} P_4^{(0)}(\sin \varphi) - \\
&- \frac{512}{3465} P_6^{(0)}(\sin \varphi) + \frac{128}{6435} P_8^{(0)}(\sin \varphi) \\
\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi &= \frac{2}{15} + \frac{2}{21} P_2^{(0)}(\sin \varphi) - \frac{8}{35} P_4^{(0)}(\sin \varphi) \\
\sin^2 \varphi \cos^4 \varphi &= \frac{8}{105} - \frac{8}{55} P_4^{(0)}(\sin \varphi) + \frac{16}{231} P_6^{(0)}(\sin \varphi) \\
\sin^2 \varphi \cos^6 \varphi &= \frac{16}{315} - \frac{16}{693} P_2^{(0)}(\sin \varphi) - \frac{432}{5005} \times \\
&\times P_4^{(0)}(\sin \varphi) + \frac{272}{3465} P_6^{(0)}(\sin \varphi) - \frac{128}{6435} P_8^{(0)}(\sin \varphi) \\
\sin^4 \varphi \cos^2 \varphi &= \frac{2}{35} + \frac{2}{21} P_2^{(0)}(\sin \varphi) - \frac{32}{385} P_4^{(0)}(\sin \varphi) -
\end{aligned}
\tag{606}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{16}{231} P_6^{(0)}(\sin \varphi) \\
\sin^2 \varphi &= 1 - \frac{1}{3} P_2^{(2)}(\sin \varphi) \\
\sin^4 \varphi &= 1 - \frac{8}{21} P_2^{(2)}(\sin \varphi) - \frac{2}{105} P_4^{(2)}(\sin \varphi) \\
\sin^6 \varphi &= 1 - \frac{25}{63} P_2^{(2)}(\sin \varphi) - \frac{34}{1155} P_4^{(2)}(\sin \varphi) - \\
& \quad - \frac{8}{3465} P_6^{(2)}(\sin \varphi) \\
\sin^8 \varphi &= 1 - \frac{40}{99} P_2^{(2)}(\sin \varphi) - \frac{76}{2145} P_4^{(2)}(\sin \varphi) - \\
& \quad - \frac{16}{3465} P_6^{(2)}(\sin \varphi) - \frac{16}{45045} P_8^{(2)}(\sin \varphi) \\
\cos^2 \varphi &= \frac{1}{3} P_2^{(2)}(\sin \varphi) \\
\cos^4 \varphi &= \frac{2}{7} P_2^{(2)}(\sin \varphi) - \frac{2}{105} P_4^{(2)}(\sin \varphi) \\
\cos^6 \varphi &= \frac{16}{63} P_2^{(2)}(\sin \varphi) - \frac{32}{1155} P_4^{(2)}(\sin \varphi) + \\
& \quad + \frac{8}{3465} P_6^{(2)}(\sin \varphi) \\
\cos^8 \varphi &= \frac{160}{693} P_2^{(2)}(\sin \varphi) - \frac{32}{1001} P_4^{(2)}(\sin \varphi) + \\
& \quad + \frac{16}{3465} P_6^{(2)}(\sin \varphi) - \frac{16}{45045} P_8^{(2)}(\sin \varphi) \\
\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi &= \frac{1}{21} P_2^{(2)}(\sin \varphi) + \frac{2}{105} P_4^{(2)}(\sin \varphi) \\
\sin^2 \varphi \cos^4 \varphi &= \frac{2}{63} P_2^{(2)}(\sin \varphi) + \frac{2}{231} P_4^{(2)}(\sin \varphi) - \\
& \quad - \frac{8}{3465} P_6^{(2)}(\sin \varphi) \\
\sin^4 \varphi \cos^2 \varphi &= \frac{1}{63} P_2^{(2)}(\sin \varphi) + \frac{4}{385} P_4^{(2)}(\sin \varphi) - \\
& \quad - \frac{8}{3465} P_6^{(2)}(\sin \varphi) \\
\cos^4 \varphi &= \frac{1}{105} P_4^{(4)}(\sin \varphi) \\
\cos^6 \varphi &= \frac{2}{231} P_4^{(4)}(\sin \varphi) - \frac{2}{10395} P_6^{(4)}(\sin \varphi) \\
[P_2^{(1)}(\sin \varphi)]^2 &= \frac{6}{5} + \frac{6}{7} P_2^{(0)}(\sin \varphi) - \frac{72}{35} P_4^{(0)}(\sin \varphi)
\end{aligned} \tag{606}$$

$$\begin{aligned}
 [P_2^{(1)}(\sin \varphi)]^2 [1 - P_2^{(0)}(\sin \varphi)] &= \frac{36}{35} - \frac{108}{55} \times \\
 &\times P_4^{(0)}(\sin \varphi) + \frac{72}{77} P_6^{(0)}(\sin \varphi) \\
 [P_2^{(1)}(\sin \varphi)]^2 P_2^{(0)}(\sin \varphi) &= \frac{6}{35} + \frac{6}{7} P_2^{(0)}(\sin \varphi) - \\
 &- \frac{36}{385} P_4^{(0)}(\sin \varphi) - \frac{72}{77} P_6^{(0)}(\sin \varphi)
 \end{aligned} \tag{606}$$

Можно их вывести с учетом (113).

Для коэффициентов  $A_n^{(k)}$ ,  $B_n^{(k)}$  с указанной выше точностью получим

$$\begin{aligned}
 A_0^{(0)} &= R_0 \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-3} q + \frac{2}{5} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-6} q^2 - \frac{1}{15} \times \right. \\
 &\times \left. \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-1} J_2^{(0)} q - \frac{2}{5} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^4 (J_2^{(0)})^2 + \frac{24}{35} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-9} q^3 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{8}{35} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-4} J_2^{(0)} q^2 \right] \\
 A_2^{(0)} &= R_0 \left[ \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^2 J_2^{(0)} - \frac{1}{3} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-3} q - \frac{4}{7} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-6} q^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{5}{21} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-1} J_2^{(0)} q - \frac{4}{7} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^4 (J_2^{(0)})^2 - \frac{8}{7} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-9} q^3 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{4}{7} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-4} J_2^{(0)} q^2 \right] \\
 A_2^{(1)} &= 0; \quad B_2^{(1)} = 0 \\
 A_2^{(2)} &= R_0 \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^2 J_2^{(2)}; \quad B_2^{(2)} = R_0 \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^2 S_2^{(2)} \\
 A_4^{(0)} &= R_0 \left[ \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^4 J_4^{(0)} + \frac{6}{35} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-6} q^2 - \frac{6}{35} \times \right. \\
 &\times \left. \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-1} J_2^{(0)} q - \frac{36}{35} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^4 (J_2^{(0)})^2 + \frac{216}{385} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-9} q^3 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{192}{385} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-4} J_2^{(0)} q^2 \right] \\
 A_6^{(0)} &= R_0 \left[ \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^6 J_6^{(0)} - \frac{8}{77} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-9} q^3 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{12}{77} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-4} J_2^{(0)} q^2 \right] \\
 A_n^{(0)} &= R_0 \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^n J_n^{(0)}, \quad n = 3, 5, 7, 8, 9, \dots, N \\
 A_n^{(k)} &= R_0 \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^n J_n^{(k)}, \quad n = 3, 4, 5, \dots, N \\
 B_n^{(k)} &= R_0 \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^n S_n^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n
 \end{aligned} \tag{607}$$

В качестве примера приведем численные значения этих коэффициентов, вычисленных по совокупности динамических постоянных

Таблица 10

$n$	$A_n^{(0)}, \text{ м}$						
0	6 370 996,67	6	-3,53	11	-1,15	16	-2,96
2	-14 266,76	7	2,71	12	-0,35	17	0,34
3	16,44	8	0,83	13	0,96	18	2,15
4	19,74	9	0,14	14	1,14	19	0,50
5	1,12	10	2,20	15	0,43	20	-2,22

Таблица 11

$n$	$k$	$\bar{A}_n^{(k)}, \text{ м}$	$\bar{B}_n^{(k)}, \text{ м}$	$n$	$k$	$\bar{A}_n^{(k)}, \text{ м}$	$\bar{B}_n^{(k)}, \text{ м}$
2	2	15,22	-8,63		6	-0,06	1,94
					7	0,13	0,26
					8	-1,17	0,19
3	1	10,96	1,47	9	1	0,71	0,00
	2	5,38	-3,27		2	0,19	0,32
	3	4,23	9,16		3	-0,19	-0,06
4	1	-3,02	-2,50		4	0,45	0,13
					5	-0,26	0,26
					6	0,26	0,06
					7	0,26	-0,13
5	2	2,25	3,08		8	0,84	0,00
					9	0,52	0,26
					1	0,65	-0,46
					2	-0,52	-0,39
6	3	-0,52	0,06	10	3	-0,52	-0,33
					4	-0,39	-0,52
					5	0,13	-0,13
					6	-0,26	-0,07
					7	-0,26	-0,33
					8	-0,26	-0,33
7	4	-0,52	-3,10		9	0,33	-0,26
					10	0,20	-0,13
					1	-0,20	0,13
					2	0,33	-0,33
					3	-0,07	0,52
					4	-0,20	0,00
					5	0,20	0,13
8	5	-1,68	-2,97		6	-0,20	-0,13
					7	0,20	-0,20
					8	0,26	-0,13
					9	0,20	0,07
					10	-0,20	-0,07
					11	0,65	0,39
					9	6	-0,13
2	0,33	-0,33					
3	-0,07	0,52					
4	-0,20	0,00					
5	0,20	0,13					
10	7	0,45	-0,06		6	-0,20	-0,13
					7	0,20	-0,20
					8	0,26	-0,13
					9	0,20	0,07
					10	-0,20	-0,07
11	8	-1,49	0,65		11	0,65	0,39
					1	-0,59	-0,46
					2	-0,39	0,13
					3	0,20	0,13
					4	-1,10	-0,13
12	9	-0,58	0,58		5	-0,58	0,58

$n$	$h$	$\bar{A}_n^{(h)}, \text{ м}$	$\bar{B}_n^{(h)}, \text{ м}$	$n$	$h$	$\bar{A}_n^{(h)}, \text{ м}$	$\bar{B}_n^{(h)}, \text{ м}$	
12	4	-0,33	0,07	14	4	0,00	0,00	
	5	0,13	0,07		5	0,33	-0,20	
	6	-0,07	0,07		6	0,07	-0,20	
	7	-0,26	-0,13		7	0,20	0,13	
	8	0,00	0,07		8	-0,20	-0,20	
	9	-0,07	0,13		9	0,20	0,46	
	10	-0,07	0,00		10	0,26	0,07	
	11	-0,33	-0,13		11	0,26	0,07	
	12	-0,07	-0,07		12	0,33	-0,20	
	13	1	0,00		0,26	13	0,07	0,26
		2	-0,20		0,07	14	-0,26	0,13
		3	0,00		0,20	15	1	0,07
4		-0,07	-0,13		2		-0,13	-0,20
5		0,20	-0,13		3		0,13	0,20
6		-0,20	0,33	4	0,00		0,07	
7		0,13	0,00	5	0,20		-0,13	
8		0,13	-0,07	6	0,20		-0,33	
9		0,13	-0,33	7	0,20		0,26	
10		0,26	-0,13	8	-0,40		0,00	
11		-0,13	0,07	9	0,00		0,26	
12		-0,13	0,39	10	0,13		0,07	
13		-0,46	0,00	11	0,07		0,07	
14	1	-0,07	0,13	12	-0,46		0,33	
	2	-0,07	-0,26	13	-0,33		-0,20	
	3	0,39	-0,20	14	0,07		-0,20	
				15	-0,13		-0,07	

$J_n^{(h)}, S_n^{(h)}$  до  $N = 20$  в зональных и  $N = 15$  в тессеральных и секториальных функциях (см. табл. 10 и 11). Численные значения  $J_n^{(h)}, S_n^{(h)}$  взяты из табл. 2—3.

Постоянные  $A_n^{(h)}$  и  $B_n^{(h)}$  нормированы; при этом использованы формулы (313).

По (605) можем вычислить как функцию  $\varphi$ ,  $\Lambda$  не только радиус-вектор регуляризованного геоида, но и радиус-вектор произвольной уровневой поверхности, точнее говоря, для внешней поверхности, охватывающей все массы Земли, так как тогда аргюги его сходимость доказана. Нужно только определить соответствующую величину линейного масштабного коэффициента  $R_i$ . Обычно берут

$$R_i = \frac{iM}{W_i} \quad (608)$$

где  $W_i$  — потенциал на  $i$ -й уровневой поверхности.

В случае уровневых поверхностей в пространстве, когда центробежной силой можно пренебречь, нужно принять  $q = 0$ .

Далее можем определить среднюю интегральную величину  $\bar{\rho}$  радиуса-вектора геоида

$$\bar{\rho} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \rho \cos \Phi \, d\Lambda \, d\Phi. \quad (609)$$

Из ортогональности сферических функций (см. § 7) также вытекает

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + S_n^{(k)} \sin k\Lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) \cos \Phi \, d\Lambda \, d\Phi = 0, \quad (610)$$

если  $n \neq 0$  и, следовательно,

$$\bar{\rho} = A_0^0. \quad (611)$$

### § 31. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫСОТ РЕГУЛЯРИЗИРОВАННОГО ГЕОИДА

Форму геоида в геодезии обычно задают при помощи высот относительно эллипсоида, наилучшим способом размещенного в теле Земли. Здесь рассмотрим трехосный эллипсоид с центром в центре масс и с плоскостью экватора, точно перпендикулярной к оси  $z$ . В геоцентрической системе  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  уравнение этого эллипсоида будет

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2(1-e_1^2)} + \frac{z'^2}{a^2(1-e^2)} = 1, \quad (612)$$

где  $a$  — большая полуось экваториального эллипса,  $e_1$  — его эксцентриситет,  $e$  — эксцентриситет меридионального эллипса, полученного в плоскости  $(x'z)$ .

Для определения отступлений геоида относительно эллипсоида используем радиус-вектор эллипсоида  $\rho_e$ . Из (612) имеем

$$\rho_e^2 = a^2(1-e^2)(1-e_1^2) + e^2(x'^2 + y'^2) + e_1^2(x'^2 + z'^2) - e^2e_1^2x'^2. \quad (613)$$

Если обозначить  $\Lambda_a$  долготу меридиана  $(x'z)$ , в котором лежит наибольшая полуось, то

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \Lambda_a + y \sin \Lambda_a \\ y' &= y \cos \Lambda_a - x \sin \Lambda_a \\ x'^2 &= \rho_e^2 \cos^2 \Phi \cos^2 (\Lambda - \Lambda_a) \\ y'^2 &= \rho_e^2 \cos^2 \Phi \sin^2 (\Lambda - \Lambda_a) \\ x'^2 + y'^2 &= x^2 + y^2 = \rho_e^2 \cos^2 \Phi \\ z^2 &= \rho_e^2 \sin^2 \Phi \end{aligned} \right\} \quad (614)$$

и отсюда

$$\rho_e^2 = a^2 (1 - e^2)(1 - e_1^2) + e^2 \rho_e^2 \cos^2 \Phi + e_1^2 \rho_e^2 [\cos^2 \Phi \cos^2(\Lambda - \Lambda_a) + \sin^2 \Phi] - e^2 e_1^2 \rho_e^2 \cos^2 \Phi \cos^2(\Lambda - \Lambda_a), \quad (615)$$

или

$$\rho_e = \frac{a \sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 - e_1^2}}{[1 - e^2 \cos^2 \Phi - e_1^2 \sin^2 \Phi - e_1^2 (1 - e^2) \cos^2 \Phi \cos^2(\Lambda - \Lambda_a)]^{1/2}}. \quad (616)$$

Далее выполним разложение в ряд, удерживая члены, содержащие  $e^8, e^6 e_1^2, e^2 e_1^4$ . Из (616) получим

$$\left. \begin{aligned} \rho_e = a \sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 - e_1^2} & \left[ 1 + \frac{1}{2} e^2 \cos^2 \Phi + \frac{1}{2} e_1^2 \sin^2 \Phi + \right. \\ & + \frac{1}{2} e_1^2 (1 - e^2) \cos^2 \Phi \cos^2(\Lambda - \Lambda_a) + \frac{3}{8} e^4 \cos^4 \Phi + \frac{3}{8} e_1^4 \sin^4 \Phi + \\ & + \frac{3}{8} e_1^4 (1 - 2e^2) \cos^4 \Phi \cos^4(\Lambda - \Lambda_a) + \frac{3}{4} e^2 e_1^2 \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi + \\ & \quad + \frac{3}{4} e^2 e_1^2 (1 - e^2) \cos^4 \Phi \cos^2(\Lambda - \Lambda_a) + \\ & + \frac{3}{4} e_1^4 (1 - e^2) \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi \cos^2(\Lambda - \Lambda_a) + \frac{5}{16} e^6 \cos^6 \Phi + \\ & + \frac{15}{16} e^4 e_1^2 \sin^2 \Phi \cos^4 \Phi + \frac{15}{16} e^4 e_1^2 (1 - e^2) \cos^6 \Phi \cos^2(\Lambda - \Lambda_a) + \\ & + \frac{15}{16} e^2 e_1^4 \sin^4 \Phi \cos^2 \Phi + \frac{15}{16} e^2 e_1^4 \cos^6 \Phi \cos^4(\Lambda - \Lambda_a) + \\ & + \frac{15}{8} e^2 e_1^4 \sin^2 \Phi \cos^4 \Phi \cos^2(\Lambda - \Lambda_a) + \frac{35}{128} e^8 \cos^8 \Phi + \\ & \left. + \frac{35}{32} e^6 e_1^2 \sin^2 \Phi \cos^6 \Phi + \frac{35}{32} e^6 e_1^2 \cos^8 \Phi \cos^2(\Lambda - \Lambda_a) \right] \end{aligned} \right\}. \quad (617)$$

Если учесть, кроме того, равенства

$$\left. \begin{aligned} \cos^2(\Lambda - \Lambda_a) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\Lambda - \Lambda_a) \\ \cos^4(\Lambda - \Lambda_a) &= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2(\Lambda - \Lambda_a) + \frac{1}{8} \cos 4(\Lambda - \Lambda_a) \end{aligned} \right\}, \quad (618)$$

произведя перегруппировку членов, вместо (617) получим

$$\begin{aligned} \rho_e = a \sqrt{1 - e^2} \sqrt{1 - e_1^2} & \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( e^2 + \frac{1}{2} e_1^2 - \frac{1}{2} e^2 e_1^2 \right) \cos^2 \Phi + \right. \\ & + \frac{3}{8} \left( e^4 + \frac{3}{8} e_1^4 - \frac{3}{4} e^2 e_1^4 + e^2 e_1^2 - e^4 e_1^2 \right) \cos^4 \Phi + \frac{15}{16} \left( e^6 + \frac{3}{2} e^4 e_1^2 - \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} e^6 e_1^2 + \frac{9}{8} e^2 e_1^4 \right) \cos^6 \Phi + \frac{35}{64} \left( \frac{1}{2} e^8 + e^6 e_1^2 \right) \cos^8 \Phi + \frac{1}{2} e_1^2 \sin^2 \Phi + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{8} e_1^4 \sin^4 \Phi + \frac{3}{4} \left( e^2 e_1^2 + \frac{1}{2} e_1^4 - \frac{1}{2} e^2 e_1^4 \right) \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi + \\
& + \frac{15}{16} (e^4 e_1^2 + e^2 e_1^4) \sin^2 \Phi \cos^4 \Phi + \frac{35}{32} e^6 e_1^2 \sin^2 \Phi \cos^6 \Phi + \\
& + \frac{15}{16} e^2 e_1^4 \sin^4 \Phi \cos^2 \Phi + \frac{1}{4} (e_1^2 - e^2 e_1^2) \cos^2 \Phi \cos 2(\Lambda - \Lambda_a) + \\
& + \frac{1}{8} \left( 3e^2 e_1^2 + \frac{3}{2} e_1^4 - 3e^2 e_1^4 - 3e^4 e_1^4 \right) \cos^4 \Phi \cos 2(\Lambda - \Lambda_a) + \\
& + \frac{3}{32} \left( \frac{1}{2} e_1^4 - e^2 e_1^4 \right) \cos^4 \Phi \cos 4(\Lambda - \Lambda_a) + \\
& + \frac{3}{8} (e_1^4 - e^2 e_1^4) \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi \cos 2(\Lambda - \Lambda_a) + \frac{15}{32} (e^4 e_1^2 - e^6 e_1^2 + e^2 e_1^4) \times \\
& \times \cos^6 \Phi \cos 2(\Lambda - \Lambda_a) + \frac{15}{128} e^2 e_1^4 \cos^6 \Phi \cos 4(\Lambda - \Lambda_a) + \\
& + \frac{15}{16} e^2 e_1^4 \sin^2 \Phi \cos^2 \Phi \cos 2(\Lambda - \Lambda_a) + \\
& + \frac{35}{64} e^6 e_1^2 \cos^8 \Phi \cos 2(\Lambda - \Lambda_a) \Big]. \tag{619}
\end{aligned}$$

Теперь заменим тригонометрические функции сферическими функциями по (606) и получим ряд

$$\begin{aligned}
\rho_e = & a_0^{(0)} + a_2^{(0)} P_2^{(0)}(\sin \Phi) + (a_2^{(2)} \cos 2\Lambda + b_2^{(2)} \sin 2\Lambda) P_2^{(2)}(\sin \Phi) + \\
& + a_4^{(0)} P_4^{(0)}(\sin \Phi) + (a_4^{(2)} \cos 2\Lambda + b_4^{(2)} \sin 2\Lambda) P_4^{(2)}(\sin \Phi) + (a_4^{(4)} \cos 4\Lambda + \\
& + b_4^{(4)} \sin 4\Lambda) P_4^{(4)}(\sin \Phi) + a_6^{(0)} P_6^{(0)}(\sin \Phi) + (a_6^{(2)} \cos 2\Lambda + \\
& + b_6^{(2)} \sin 2\Lambda) P_6^{(2)}(\sin \Phi) + (a_6^{(4)} \cos 4\Lambda + b_6^{(4)} \sin 4\Lambda) P_6^{(4)}(\sin \Phi) + \\
& + a_8^{(0)} P_8^{(0)}(\sin \Phi) + (a_8^{(2)} \cos 2\Lambda + b_8^{(2)} \sin 2\Lambda) P_8^{(2)}(\sin \Phi), \tag{620}
\end{aligned}$$

коэффициенты которого равны [59]

$$\left. \begin{aligned}
a_0^{(0)} = & a \sqrt{1-e^2} \sqrt{1-e_1^2} \left( 1 + \frac{1}{3} e^2 + \frac{1}{5} e^4 + \frac{1}{3} e_1^2 + \frac{1}{7} e^6 + \right. \\
& + \frac{2}{15} e^2 e_1^2 + \frac{1}{9} e^8 + \frac{1}{5} e_1^4 + \frac{3}{35} e^4 e_1^2 + \frac{3}{35} e^2 e_1^4 + \frac{4}{63} e^6 e_1^2 \Big) = \\
& = a \left( 1 - \frac{1}{6} e^2 - \frac{11}{120} e^4 - \frac{1}{6} e_1^2 - \frac{103}{1680} e^6 + \frac{1}{20} e^2 e_1^2 - \right. \\
& \left. - \frac{1823}{40320} e^8 - \frac{11}{120} e_1^4 + \frac{13}{560} e^4 e_1^2 + \frac{13}{560} e^2 e_1^4 + \frac{139}{40080} e^6 e_1^2 \right) \\
a_2^{(0)} = & a \sqrt{1-e^2} \sqrt{1-e_1^2} \left( -\frac{1}{3} e^2 - \frac{2}{7} e^4 + \frac{1}{6} e_1^2 - \frac{5}{21} e^6 - \right. \\
& \left. - \frac{1}{21} e^2 e_1^2 - \frac{20}{99} e^8 + \frac{1}{7} e_1^4 - \frac{1}{14} e^4 e_1^2 - \frac{50}{693} e^6 e_1^2 \right) =
\end{aligned} \right|$$

$$\begin{aligned}
&= a \left( -\frac{1}{3} e^2 - \frac{5}{42} e^4 + \frac{1}{6} e_1^2 - \frac{3}{56} e^6 + \frac{1}{28} e^2 e_1^4 - \frac{293}{11088} e^8 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{5}{84} e_1^4 - \frac{1}{112} e^4 e_1^2 + \frac{1}{28} e^2 e_1^4 - \frac{313}{22176} e^6 e_1^2 \right) \\
a_4^{(0)} &= a \sqrt{1-e^2} \sqrt{1-e_1^2} \left( \frac{3}{35} e^4 + \frac{9}{77} e^6 - \frac{3}{35} e^2 e_1^2 + \frac{18}{143} e^8 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{9}{280} e_1^4 - \frac{18}{385} e^4 e_1^2 - \frac{27}{440} e^2 e_1^4 - \frac{18}{1001} e^6 e_1^2 \right) = a \left( \frac{3}{35} e^4 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{57}{770} e^6 - \frac{3}{35} e^2 e_1^2 + \frac{2271}{40040} e^8 + \frac{9}{280} e_1^4 - \frac{18}{385} e^4 e_1^2 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{213}{6160} e^2 e_1^4 - \frac{837}{40040} e^6 e_1^2 \right) \\
a_6^{(0)} &= a \sqrt{1-e^2} \sqrt{1-e_1^2} \left( -\frac{5}{231} e^6 - \frac{4}{99} e^8 + \frac{5}{154} e^4 e_1^2 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{15}{616} e^2 e_1^4 + \frac{26}{693} e^6 e_1^2 \right) = a \left( -\frac{5}{231} e^6 - \frac{41}{1386} e^8 + \frac{5}{154} e^4 e_1^2 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{15}{616} e^2 e_1^4 + \frac{89}{2772} e^6 e_1^2 \right) \\
a_8^{(0)} &= a \sqrt{1-e^2} \sqrt{1-e_1^2} \left( \frac{7}{1287} e^8 - \frac{14}{1287} e^6 e_1^2 \right) = \\
&= a \left( \frac{7}{1287} e^8 - \frac{14}{1287} e^6 e_1^2 \right) \tag{621} \\
a_3^{(2)} &= a \sqrt{1-e^2} \sqrt{1-e_1^2} \left( \frac{1}{12} e_1^2 + \frac{1}{42} e^2 e_1^2 + \frac{1}{14} e_1^4 + \frac{1}{84} e^4 e_1^2 + \right. \\
b_2^{(2)} &\quad \left. + \frac{1}{42} e^2 e_1^4 + \frac{5}{693} e^6 e_1^2 \right) \frac{\cos 2\Lambda_a}{\sin 2\Lambda_a} = a \left( \frac{1}{12} e_1^2 - \frac{1}{56} e^2 e_1^2 + \frac{5}{168} e_1^4 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{96} e^4 e_1^2 - \frac{1}{336} e^2 e_1^4 - \frac{307}{44352} e^6 e_1^2 \right) \frac{\cos 2\Lambda_a}{\sin 2\Lambda_a} \\
a_4^{(2)} &= a \sqrt{1-e^2} \sqrt{1-e_1^2} \left( -\frac{1}{140} e^2 e_1^2 + \frac{1}{280} e_1^4 - \frac{9}{1540} e^4 e_1^2 - \right. \\
b_4^{(2)} &\quad \left. - \frac{3}{616} e^2 e_1^4 - \frac{9}{2002} e^6 e_1^2 \right) \frac{\cos 2\Lambda_a}{\sin 2\Lambda_a} = a \left( -\frac{1}{140} e^2 e_1^2 + \frac{1}{280} e_1^4 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{440} e^4 e_1^2 - \frac{19}{6160} e^2 e_1^4 - \frac{109}{160160} e^6 e_1^2 \right) \frac{\cos 2\Lambda_a}{\sin 2\Lambda_a} \\
a_6^{(2)} &= a \sqrt{1-e^2} \sqrt{1-e_1^2} \left( \frac{1}{924} e^4 e_1^2 - \frac{1}{924} e^2 e_1^4 + \right. \\
b_6^{(2)} &\quad \left. + \frac{1}{693} e^6 e_1^2 \right) \frac{\cos 2\Lambda_a}{\sin 2\Lambda_a} = a \left( \frac{1}{924} e^4 e_1^2 - \frac{1}{924} e^2 e_1^4 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{5}{5544} e^6 e_1^2 \Big) \frac{\cos 2\Lambda_a}{\sin 2\Lambda_a} \\
 a_8^{(2)} &= -a \sqrt{1-e^2} \sqrt{1-e_1^2} \left( \frac{1}{5148} e^6 e_1^2 \right) \frac{\cos 2\Lambda_a}{\sin 2\Lambda_a} = \\
 &= -a \frac{1}{5148} e^6 e_1^2 \frac{\cos 2\Lambda_a}{\sin 2\Lambda_a} \\
 a_4^{(4)} &= a \sqrt{1-e^2} \sqrt{1-e_1^2} \left( \frac{1}{2240} e_1^4 + \frac{3}{24640} e^2 e_1^4 \right) \frac{\cos 4\Lambda_a}{\sin 4\Lambda_a} = \\
 b_4^{(4)} &= a \left( \frac{1}{2240} e_1^4 - \frac{1}{9856} e^2 e_1^4 \right) \frac{\cos 4\Lambda_a}{\sin 4\Lambda_a} \\
 a_6^{(4)} &= -a \sqrt{1-e^2} \sqrt{1-e_1^2} \left( \frac{1}{44352} e^2 e_1^4 \right) \frac{\cos 4\Lambda_a}{\sin 4\Lambda_a} = \\
 b_6^{(4)} &= -a \frac{1}{44352} e^2 e_1^4 \frac{\cos 4\Lambda_a}{\sin 4\Lambda_a}
 \end{aligned} \quad (621)$$

Если имеем радиусы-векторы геоида и эллипсоида, полученные путем разложения в ряды сферических функций, то можем при помощи такого разложения легко определить и их разность  $\rho - \rho_e$

$$\begin{aligned}
 \rho - \rho_e &= (A_0^{(0)} - a_0^{(0)}) + \sum_{n=2}^N \left\{ \sum_{k=0}^n [(A_n^{(k)} - a_n^{(k)}) \cos k\Lambda + \right. \\
 &\quad \left. + (B_n^{(k)} - b_n^{(k)}) \sin k\Lambda] P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right\}. \quad (622)
 \end{aligned}$$

Величины  $\rho - \rho_e$  неточно равны высотам геоида  $\zeta$ , так как  $\zeta$  измеряются по нормали к эллипсоиду. Но отличие это очень мало, так как

$$\zeta = (\rho - \rho_e) \cos \varepsilon, \quad (623)$$

где  $\varepsilon$  — малый угол между  $\rho$  ( $\rho_e$ ) и отвесной линией в соответствующей точке геоида (см. также (581)). Поскольку  $(\rho - \rho_e) < 200$  м, а  $\varepsilon < 0,3^\circ$ , то можно в (623) положить  $\cos \varepsilon \approx 1$  с ошибкой  $< 1$  см.

Если бы мы хотели установить высоты геоида относительно эллипсоида вращения, то нужно было бы в (622) принять

$$e_1 = 0. \quad (624)$$

Если рассматриваемый эллипсоид относимости должен быть некоторым из применяемых геодезических референц-эллипсоидов, то нужно учесть и влияние  $\delta\rho$  несовпадения его центра с центром масс Земли, т. е. влияние элементов сдвига

$$\begin{aligned}
 \delta\rho \approx \delta\zeta &= \frac{x}{\rho} \Delta x_0 + \frac{y}{\rho} \Delta y_0 + \frac{z}{\rho} \Delta z_0 = \cos \Phi \cos \Lambda \Delta x_0 + \\
 &+ \cos \Phi \sin \Lambda \Delta y_0 + \sin \Phi \Delta z_0. \quad (625)
 \end{aligned}$$

Поведение геоида можно было бы легко установить относительно нормального сфероида, определенного, например, так, что для его радиуса справедливо равенство

$$\rho_{c\Phi} = A_0^{(0)} + A_2^{(0)} P_2^{(0)}(\sin \Phi). \quad (626)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \rho - \rho_{c\Phi} = & (A_2^{(2)} \cos 2\Lambda + B_2^{(2)} \sin 2\Lambda) P_2^{(2)}(\sin \Phi) + \\ & + \sum_{n=3}^N \left[ \sum_{k=0}^n (A_n^{(k)} \cos k\Lambda + B_n^{(k)} \sin k\Lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right]. \end{aligned} \quad (627)$$

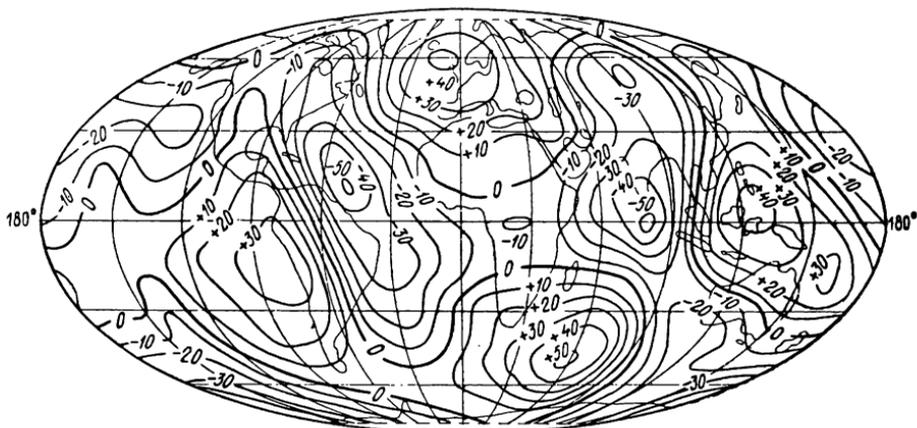


Рис. 17. Карта высот геоида в м относительно трехосного эллипсоида Бурши, 1967 [59]

Средняя интегральная величина  $\overline{\rho - \rho_{c\Phi}}$  так определенных отступлений геоида везде равна нулю

$$(\overline{\rho - \rho_{c\Phi}}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\rho - \rho_{c\Phi}) \cos \Phi \, d\Lambda \, d\Phi = 0, \quad (628)$$

где средняя интегральная величина  $\overline{\rho - \rho_e}$  равна

$$(\overline{\rho - \rho_e}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\rho - \rho_e) \cos \Phi \, d\Lambda \, d\Phi = A_0^{(0)} - a_0^{(0)} \quad (629)$$

и равна нулю, если потребовать для произвольных параметров эллипсоида выполнения условия

$$a_0^{(0)} = A_0^{(0)}. \quad (630)$$

В качестве примера приведем отступления геоида  $\rho - \rho_e$  относительно геоцентрического трехосного эллипсоида с параметрами [59]:  $a = 6\,378\,173$  м (большая полуось экватора),  $\alpha_1 =$

$= 1 : 298,25$  (среднее полярное сжатие),  $\alpha_1 = 1 : 94\,000$  (сжатие экваториального эллипса),  $\Lambda_a = 14^\circ$  (долгота меридиана, по которому располагается большая полуось  $a$ ) (рис. 17) и относительно геоцентрического эллипсоида вращения МГА (Международной геодезической ассоциации) 1967 г. с параметрами:  $a = 6\,378\,160$  м;  $\alpha = 1 : 298,247$  (рис. 18).

Использована была совокупность динамических постоянных SAO [52], определенных по наблюдениям ИСЗ (табл. 2—3) без введения каких бы то ни было поправок.

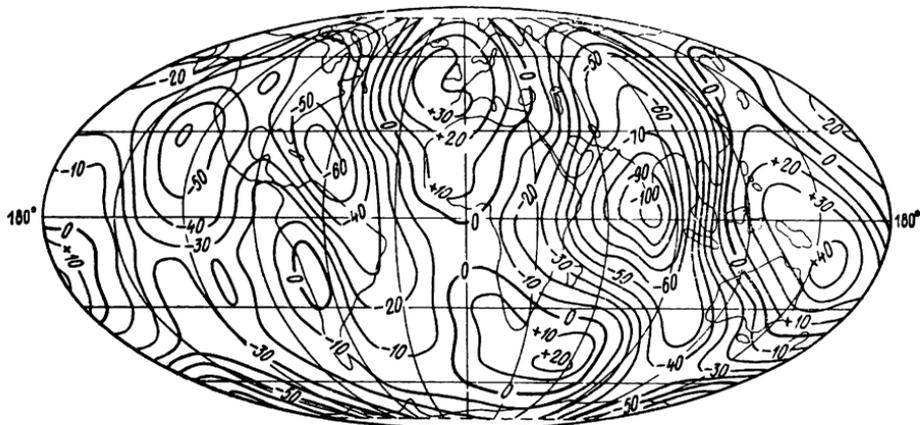


Рис. 18. Карта высот геоида в м относительно эллипсоида вращения 1967 МГА

Высоты геоида, полученные по наблюдениям ИСЗ описанным способом, обычно отличаются от относительных высот геоида, вычисленных из астрономо-геодезического или астрономо-гравиметрического нивелирования, вследствие

а) несовпадения поверхности референц-эллипсоида с поверхностью использованного геоцентрического эллипсоида;

б) неучета влияния внешних масс.

Первую причину можно компенсировать путем элементарной трансформации согласно (625); при различных параметрах эллипсоида нужно добавить еще дополнительные поправки по известным дифференциальным формулам [см. ч. 1, формулу (200)].

Кроме этого пути получения высот геоида, можно идти и иным путем при помощи возмущающего потенциала, что, однако, требует концепции нормального поля тяготения, к которому приступим только в § 35 при определении аномалий силы тяжести.

### § 32. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ВНЕШНИХ УРОВЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ СПУТНИКОВ

Подобно тому как определили радиус-вектор  $\rho$  поверхности регуляризованного геоида, можем определить радиус-вектор  $\rho_i$  произвольной внешней уровенной поверхности с потенциалом  $W_i$  и линейным масштабным коэффициентом

$$R_i = \frac{fM}{W_i}. \quad (631)$$

По аналогии с (604) будем иметь

$$\rho_i = (A_0^{(0)})_i + \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n [(A_n^{(k)})_i \cos k\lambda + (B_n^{(k)})_i \sin k\lambda] P_n^{(k)}(\sin \Phi), \quad (632)$$

где коэффициенты  $(A_0^{(0)})_i$ ,  $(A_n^{(k)})_i$ ,  $(B_n^{(k)})_i$  имеют такую же структуру, как в (607), если подставить  $R_i$  вместо  $R_0$ .

Если геоцентрическая сфера, проведенная через какую-либо точку исследуемой уровенной поверхности, проходит вне земных масс, т. е. охватывает тело Земли, то проблема сходимости ряда сферических функций отпадает. Так как (632) имеет свойства сферической функции, то можем легко вычислить геометрические характеристики поверхности, которые нас интересуют.

Можем, например, вычислить Гауссову (общую) кривизну  $K_i$  этой поверхности, для которой обычно служит формула [60]

$$K_i = \frac{DD'' - D'^2}{H^4}, \quad (633)$$

где

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \Phi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \Phi^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial \Phi^2} \\ \frac{\partial x}{\partial \Phi} & \frac{\partial y}{\partial \Phi} & \frac{\partial z}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial x}{\partial \Lambda} & \frac{\partial y}{\partial \Lambda} & \frac{\partial z}{\partial \Lambda} \end{vmatrix},$$

$$D' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \Phi \partial \Lambda} & \frac{\partial^2 y}{\partial \Phi \partial \Lambda} & \frac{\partial^2 z}{\partial \Phi \partial \Lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial \Phi} & \frac{\partial y}{\partial \Phi} & \frac{\partial z}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial x}{\partial \Lambda} & \frac{\partial y}{\partial \Lambda} & \frac{\partial z}{\partial \Lambda} \end{vmatrix}, \quad (634)$$

$$D'' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \Lambda^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \Lambda^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial \Lambda^2} \\ \frac{\partial x}{\partial \Phi} & \frac{\partial y}{\partial \Phi} & \frac{\partial z}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial x}{\partial \Lambda} & \frac{\partial y}{\partial \Lambda} & \frac{\partial z}{\partial \Lambda} \end{vmatrix}$$

$$H = \sqrt{EG - F^2}, \quad (635)$$

причем  $E, F, G$  суть фундаментальные Гауссовы величины первого рода в первой квадратической форме

$$\left. \begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial \Phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \Phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \Phi}\right)^2 \\ F &= \frac{\partial x}{\partial \Phi} \frac{\partial x}{\partial \Lambda} + \frac{\partial y}{\partial \Phi} \frac{\partial y}{\partial \Lambda} + \frac{\partial z}{\partial \Phi} \frac{\partial z}{\partial \Lambda} \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial \Lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \Lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \Lambda}\right)^2 \end{aligned} \right\}. \quad (636)$$

В нашем случае, где исследуемая поверхность определяется уравнением (632), т. е. в общем виде

$$\rho_i = \rho_i(\Phi, \Lambda), \quad (637)$$

подставим в предыдущие выражения формулы

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \Phi \cos \Lambda \\ y &= \rho \cos \Phi \sin \Lambda \\ z &= \rho \sin \Phi \end{aligned} \right\} \quad (638)$$

и получим

$$E = \rho_i^2 + \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi}\right)^2, \quad (639)$$

$$F = \frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi} \frac{\partial \rho_i}{\partial \Lambda}, \quad G = \rho_i^2 \cos^2 \Phi + \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial \Lambda}\right)^2,$$

$$\left. \begin{aligned} D &= \rho_i^2 \cos \Phi - \rho_i \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \Phi^2} \cos \Phi + 2\rho_i \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi}\right)^2 \cos \Phi \\ D' &= -\rho_i^2 \frac{\partial \rho_i}{\partial \Lambda} \sin \Phi - \rho_i^2 \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \Phi \partial \Lambda} \cos \Phi + 2\rho_i \frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi} \frac{\partial \rho_i}{\partial \Lambda} \cos \Phi \\ D'' &= \rho_i^2 \cos^3 \Phi - \rho_i^2 \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \Lambda^2} \cos \Phi + \rho_i^2 \frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi} \sin \Phi \cos^2 \Phi + \\ &\quad + 2\rho_i \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial \Lambda}\right)^2 \cos \Phi \end{aligned} \right\}, \quad (640)$$

$$H = \rho_i^2 \cos \Phi \left[ 1 + \frac{1}{\rho_i^2} \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi}\right)^2 + \frac{1}{\rho_i^2 \cos^2 \Phi} \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial \Lambda}\right)^2 \right]^{1/2}. \quad (641)$$

Напомним, что семейства кривых  $\Phi = \text{const}$ ,  $\Lambda = \text{const}$  на исследуемой поверхности (632) не ортогональны, и угол  $\theta$  между касательными к этим кривым в общей точке определяется формулой

$$\cos \theta = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad (642)$$

поэтому

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi} \frac{\partial \rho_i}{\partial \Lambda} \left[ \rho_i^4 \cos^2 \Phi + \rho_i^2 \cos^2 \Phi \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi}\right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \rho_i^2 \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial \Lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi}\right)^2 \left(\frac{\partial \rho_i}{\partial \Lambda}\right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (643)$$

Подставим (640) и (641) в (633) и получим точное выражение

$$\begin{aligned}
 K_i = & \frac{1}{\rho_i^2} \left[ 1 + \frac{1}{\rho_i} \operatorname{tg} \Phi \frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi} + \frac{2}{\rho_i^2} \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi} \right)^2 - \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \Phi^2} + \frac{2}{\rho_i^3} \operatorname{tg} \Phi \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi} \right)^3 - \right. \\
 & - \frac{1}{\rho_i^2} \operatorname{tg} \Phi \frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi} \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \Phi^2} + \frac{1}{\rho_i^2 \cos^2 \Phi} (2 - \operatorname{tg}^2 \Phi) \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial \Lambda} \right)^2 + \\
 & + \frac{4}{\rho_i^3 \cos^3 \Phi} \sin \Phi \frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi} \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial \Lambda} \right)^2 - \frac{2}{\rho_i^2 \cos^2 \Phi} \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \Phi^2} \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial \Lambda} \right)^2 - \\
 & - \frac{1}{\rho_i \cos^2 \Phi} \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \Lambda^2} - \frac{2}{\rho_i^2 \cos^2 \Phi} \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi} \right)^2 \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \Lambda^2} + \frac{1}{\rho_i^2 \cos^2 \Phi} \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \Phi^2} \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \Lambda^2} - \\
 & - \frac{1}{\rho_i^2 \cos^2 \Phi} \left( \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \Phi \partial \Lambda} \right)^2 - \frac{2}{\rho_i^2 \cos^2 \Phi} \operatorname{tg} \Phi \frac{\partial \rho_i}{\partial \Lambda} \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \Phi \partial \Lambda} + \frac{4}{\rho_i^3 \cos^2 \Phi} \frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi} \times \\
 & \times \frac{\partial \rho_i}{\partial \Lambda} \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \Phi \partial \Lambda} \left. \right] \left[ 1 + \frac{2}{\rho_i^2} \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi} \right)^2 + \frac{2}{\rho_i^2 \cos^2 \Phi} \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial \Lambda} \right)^2 + \frac{1}{\rho_i^4} \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi} \right)^4 + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\rho_i^4 \cos^4 \Phi} \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial \Lambda} \right)^4 + \frac{2}{\rho_i^4 \cos^2 \Phi} \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi} \right)^2 \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial \Lambda} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (644)
 \end{aligned}$$

В нем частные производные получим прямо из (632)

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi} = \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n [(A_n^{(k)})_i \cos k\Lambda + (B_n^{(k)})_i \sin k\Lambda] \frac{dP_n^{(k)}(\sin \Phi)}{d\Phi}, \quad (645)$$

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial \Lambda} = \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n k [- (A_n^{(k)})_i \sin k\Lambda + (B_n^{(k)})_i \cos k\Lambda] P_n^{(k)}(\sin \Phi), \quad (646)$$

$$\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \Phi^2} = \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n [(A_n^{(k)})_i \cos k\Lambda + (B_n^{(k)})_i \sin k\Lambda] \frac{d^2 P_n^{(k)}(\sin \Phi)}{d\Phi^2}, \quad (647)$$

$$\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \Lambda^2} = \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n k^2 [- (A_n^{(k)})_i \cos k\Lambda - (B_n^{(k)})_i \sin k\Lambda] P_n^{(k)}(\sin \Phi), \quad (648)$$

$$\frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \Phi \partial \Lambda} = \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \Lambda \partial \Phi} = \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n k [- (A_n^{(k)})_i \sin k\Lambda + (B_n^{(k)})_i \cos k\Lambda] \frac{dP_n(\sin \Phi)}{d\Phi}. \quad (649)$$

Выражения для производных функций Лежандра получим прямо из определяющей формулы (108)

$$P_n^k(\sin \varphi) = \cos^k \varphi \frac{d^k P_n^{(0)}(\sin \varphi)}{d(\sin \varphi)^k}. \quad (650)$$

Отсюда вытекает

$$\frac{dP_n^{(k)}(\sin \varphi)}{d\varphi} = -k \sin \varphi \cos^{k-1} \varphi \frac{d^k P_n^{(0)}(\sin \varphi)}{d(\sin \varphi)^k} + \mu_1 \cos^{k+1} \varphi \frac{d^{k+1} P_n^{(0)}(\sin \varphi)}{d(\sin \varphi)^{k+1}}, \quad (651)$$

или

$$\frac{dP_n^{(k)}(\sin \varphi)}{d\varphi} = -k \operatorname{tg} \varphi P_n^{(k)}(\sin \varphi) + \mu_1 P_n^{(k+1)}(\sin \varphi), \quad (652)$$

$$\begin{aligned} & 1 \text{ при } k \leq n-1 \\ \mu_1 &= 0 \text{ при } k=n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P_n^{(k)}(\sin \varphi)}{d\varphi^2} &= -k \sec^2 \varphi P_n^{(k)}(\sin \varphi) - k \operatorname{tg} \varphi \frac{dP_n^{(k)}(\sin \varphi)}{d\varphi} + \\ &+ \mu_1 \frac{dP_n^{(k+1)}(\sin \varphi)}{d\varphi}, \end{aligned} \quad (653)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 P_n^{(k)}(\sin \varphi)}{d\varphi^2} &= k \sec^2 \varphi (k \sin^2 \varphi - 1) P_n^{(k)}(\sin \varphi) - \\ &- \mu_1 (2k+1) \operatorname{tg} \varphi P_n^{(k+1)}(\sin \varphi) + \mu_2 P_n^{(k+2)}(\sin \varphi). \end{aligned} \quad (654)$$

$$\begin{aligned} & 1 \text{ при } k \leq n-2 \\ \mu_2 &= 0 \text{ при } k=n; \quad n-1. \end{aligned}$$

В случае зональных функций ( $k=0$ )

$$\frac{dP_n^{(0)}(\sin \varphi)}{d\varphi} = P_n^{(1)}(\sin \varphi), \quad n \neq 0, \quad (655)$$

$$\frac{d^2 P_n^{(0)}(\sin \varphi)}{d\varphi^2} = -\mu_1 \operatorname{tg} \varphi P_n^{(1)}(\sin \varphi) + \mu_2 P_n^{(2)}(\sin \varphi). \quad (656)$$

Можно было бы еще выполнить преобразование формулы (644) после подстановки (645)—(649) так, чтобы кривизна уральной поверхности была определена в форме ряда сферических функций непосредственно при помощи динамических постоянных  $J_n^{(k)}$ ,  $S_n^{(k)}$ . Из-за сложности вывода все же его здесь опустим.

Совершенно аналогично можно было бы определить среднюю кривизну  $J_i$  поверхности (632), определяемую соотношением

$$J_i = \frac{ED'' - 2FD' + GD}{H^3}. \quad (657)$$

Далее можно было бы таким же способом определить, например, кривизну меридианов, секущих изучаемую поверхность, кривизну в плоскости первого вертикала и т. д.

Следующей характеристикой уральной поверхности, часто применяемой в геодезии, является, например, направление внешней

нормали к ней. Его можно легко определить при помощи направляющих косинусов  $a_i, b_i, c_i$ , для которых справедливы формулы [60]

$$a = -\frac{1}{H} \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial \Phi} & \frac{\partial z}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \Lambda} & \frac{\partial z}{\partial \Lambda} \end{vmatrix}, \quad (658)$$

$$b = \frac{1}{H} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \Phi} & \frac{\partial z}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial x}{\partial \Lambda} & \frac{\partial z}{\partial \Lambda} \end{vmatrix}, \quad (659)$$

$$c = -\frac{1}{H} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \Phi} & \frac{\partial y}{\partial \Phi} \\ \frac{\partial x}{\partial \Lambda} & \frac{\partial y}{\partial \Lambda} \end{vmatrix}. \quad (660)$$

С учетом (635) и (638) получим точные формулы

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \left( \cos \Phi \cos \Lambda + \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi} \sin \Phi \cos \Lambda + \frac{1}{\rho_i \cos \Phi} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\partial \rho_i}{\partial \Lambda} \sin \Lambda \right) T_i \\ b_i &= \left( \cos \Phi \sin \Lambda + \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi} \sin \Phi \sin \Lambda - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\rho_i \cos \Phi} \frac{\partial \rho_i}{\partial \Lambda} \cos \Lambda \right) T_i \\ c_i &= \left( \sin \Phi - \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi} \cos \Phi \right) T_i \\ T_i &= \left[ 1 + \frac{1}{\rho_i^2} \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi} \right)^2 + \frac{1}{\rho_i^2 \cos^2 \Phi} \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial \Lambda} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (661)$$

Из (661) можно далее вычислить угол  $\Phi$  между нормалью к поверхности (632) и плоскостью экватора и угол  $\lambda$  между проекцией нормали на плоскость экватора и плоскостью исходного меридиана ( $xz$ ), так как имеют место формулы

$$a_i = \cos \Phi \cos \Lambda; \quad b_i = \cos \Phi \sin \Lambda, \quad c_i = \sin \Phi. \quad (662)$$

Тогда, например,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Phi_i &= c_i (a_i^2 + b_i^2)^{-\frac{1}{2}} = \operatorname{tg} \Phi \left( 1 - \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi} \operatorname{ctg} \Phi \right) \times \\ &\times \left[ 1 + \frac{2 \partial \rho_i}{\rho_i \partial \Phi} \operatorname{tg} \Phi + \frac{1}{\rho_i^2} \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \Phi + \frac{1}{\rho_i^2 \cos^4 \Phi} \left( \frac{\partial \rho_i}{\partial \Lambda} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (663) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \lambda_i &= a^{-1} b = \operatorname{tg} \Lambda \left( 1 + \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi} \operatorname{tg} \Phi - \frac{1}{\rho_i \cos^2 \Phi} \frac{\partial \rho_i}{\partial \Lambda} \operatorname{ctg} \Lambda \right) \times \\ &\times \left( 1 + \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial \rho_i}{\partial \Phi} \operatorname{tg} \Phi + \frac{1}{\rho_i \cos^2 \Phi} \frac{\partial \rho_i}{\partial \Lambda} \operatorname{tg} \Lambda \right)^{-1}. \quad (664) \end{aligned}$$

Углы  $\varphi_i$  и  $\lambda_i$  были бы равны астрономическим координатам в случае, если бы использованное разложение по сферическим функциям было точным и если бы плоскость  $(xz)$  была точно параллельна плоскости исходного (гринвичского) астрономического меридиана. При ограничении ряда конечной степенью  $N$  гармонических функций речь пойдет о нормали к  $i$ -й уровневой поверхности, более или менее сглаженной в зависимости от числа  $N$ . Характеристики уровневой поверхности  $K_i(J_i)$ ,  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $\varphi_i$ ,  $\lambda_i$  можно было бы далее разделить на часть «нормальную», вычисленную, например, для описанной нормальной референцной поверхности эллипсоида, и на часть «аномальную». Если примем за референцную поверхность трехосный эллипсоид (612) \*, то из (616) получим производные

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho_e}{\partial \Phi} = & -\frac{1}{2} \rho_e \sin 2\Phi S_1 Q^{-2} \simeq \frac{1}{2} \rho_e \sin 2\Phi \times \\ & \times [e^2 + e^4 (1 + e^2 \cos^2 \Phi) \cos^2 \Phi - \\ & - e_1^2 (1 + e^2 \cos 2\Phi) \sin^2 (\Lambda - \Lambda_a)] . \\ S_1 = & e^2 - e_1^2 \sin^2 (\Lambda - \Lambda_a) - \\ & - e^2 e_1^2 \cos^2 (\Lambda - \Lambda_a) \\ Q = & \{1 - e^2 \cos^2 \Phi - e_1^2 \times \\ & \times [\sin^2 \Phi + \cos^2 \Phi \cos^2 (\Lambda - \Lambda_a)] + \end{aligned} \right\} , \quad (665)$$

$$\begin{aligned} & + e^2 e_1^2 \cos^2 \Phi \cos^2 (\Lambda - \Lambda_a) \}^{1/2} \simeq 1 - \frac{1}{2} e^2 \cos^2 \Phi - \frac{1}{8} e^4 \cos^4 \Phi + \\ & - \frac{1}{2} e_1^2 [1 - \cos^2 \Phi \sin^2 (\Lambda - \Lambda_a)] + \frac{1}{4} e^2 e_1^2 \cos^2 \Phi [\cos^2 (\Lambda - \Lambda_a) - \\ & = \sin^2 \Phi \sin^2 (\Lambda - \Lambda_a)] - \frac{1}{16} e^6 \cos^6 \Phi , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho_e}{\partial \Phi^2} = & -\rho_e Q^{-2} S_1 \left( \cos 2\Phi - \frac{3}{4} \sin^2 2\Phi Q^{-2} S_1 \right) \simeq \\ \simeq & -\rho_e \left[ e^2 \cos 2\Phi + e^4 \cos^2 \Phi (1 - 5 \sin^2 \Phi) - e_1^2 \cos 2\Phi \sin^2 (\Lambda - \Lambda_a) + \right. \\ & \left. + e^2 e_1^2 \sin^2 (\Lambda - \Lambda_a) \left( \frac{5}{2} \sin^2 2\Phi - 1 \right) + e^6 \cos^4 \Phi (\cos 2\Phi - 6 \sin^2 \Phi) \right] , \end{aligned} \quad (666)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_e}{\partial \Lambda} = & -\frac{1}{2} \rho_e e_1^2 (1 - e^2) \cos^2 \Phi \sin 2(\Lambda - \Lambda_a) Q^{-2} \simeq \\ \simeq & -\frac{1}{2} \rho_e S_2 \sin 2(\Lambda - \Lambda_a) , \end{aligned} \quad (667)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho_e}{\partial \Lambda^2} = & -\rho_e e_1^2 (1 - e^2) \cos^2 \Phi \left[ \cos 2(\Lambda - \Lambda_a) Q^{-2} - \frac{3}{4} e_1^2 (1 - e^2) \times \right. \\ & \left. \times \cos^2 \Phi \sin^2 2(\Lambda - \Lambda_a) Q^{-4} \right] \simeq -\rho_e S_2 \cos 2(\Lambda - \Lambda_a) , \end{aligned} \quad (668)$$

$$\frac{\partial^2 \rho_e}{\partial \Phi \partial \Lambda} = \frac{1}{2} \rho_e e_1^2 (1 - e^2) \left[ \sin 2\Phi \sin 2(\Lambda - \Lambda_a) Q^{-2} + \frac{3}{2} \sin 2\Phi \times \right.$$

\* Параметры  $a$ ,  $e^2 e_1^2$ ,  $\Lambda_a$ , и особенно  $a$ , здесь выберем так, чтобы поверхность эллипсоида проходила достаточно близко к изучаемой внешней уровневой поверхности.

$$\begin{aligned} \times \cos^2 \Phi \sin 2(\Lambda - \Lambda_a) S Q^{-4}] \simeq \frac{1}{2} \rho_e \left( e_1^2 + \frac{5}{2} e^2 e_1^2 \cos^2 \Phi \right) \times \\ \times (1 - e^2) \sin 2\Phi \sin(\Lambda - \Lambda_a), \end{aligned} \quad (669)$$

и далее, согласно (634)—(636), получим

$$\left. \begin{aligned} E_e \simeq \rho_e^2 \left\{ 1 + \frac{1}{2} e^2 \left[ \frac{1}{2} e^2 + e^4 \cos^2 \Phi - e_1^2 \sin^2(\Lambda - \Lambda_a) \right] \sin^2 2\Phi \right\} \\ F_e \simeq \frac{1}{4} \rho_e^2 e^2 e_1^2 (1 - e^2) \sin 2\Phi \cos^2 \Phi \sin 2(\Lambda - \Lambda_a) \\ G_e \simeq \rho_e^2 \cos^2 \Phi \end{aligned} \right\}, \quad (670)$$

$$\begin{aligned} D_e \simeq \rho_e^3 \cos \Phi \left[ 1 + e^2 \cos 2\Phi + e^4 \cos^2 \Phi (1 - 3 \sin^2 \Phi) - \right. \\ \left. - e_1^2 \cos 2\Phi \sin^2(\Lambda - \Lambda_a) - e^2 e_1^2 \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 2\Phi \right) \times \right. \\ \left. \times \sin^2(\Lambda - \Lambda_a) + e^6 \cos^4(1 - 4 \sin^2 \Phi) \right], \end{aligned} \quad (671)$$

$$\begin{aligned} D'_e \simeq -\frac{1}{4} \rho_e^3 e_1^2 (1 - e^2) (1 + 2e^2 \cos^2 \Phi) \sin 2\Phi \cos \Phi \sin 2(\Lambda - \Lambda_a), \\ D''_e \simeq \rho_e^3 \cos^3 \Phi \left\{ 1 - e^2 \sin^2 \Phi - \frac{1}{4} e^4 \sin 2\Phi + e_1^2 [(1 - e^2) \cos 2(\Lambda - \Lambda_a) + \right. \\ \left. + \sin^2 \Phi \sin^2(\Lambda - \Lambda_a)] + e^2 e_1^2 [(1 - e^2) \cos^2 \Phi \cos 2(\Lambda - \Lambda_a) + \right. \\ \left. + \sin^2 \Phi \cos 2\Phi \sin^2(\Lambda - \Lambda_a) - e^6 \sin^2 \Phi \cos^4 \Phi \right\}, \\ H_e \simeq \rho_e^2 \cos \Phi \left\{ 1 + \frac{1}{8} e^2 \sin^2 2\Phi [e^2 - 2e_1^2 \sin^2(\Lambda - \Lambda_a) + \right. \\ \left. + e^4 \cos^2 \Phi] \right\} \\ \cos \theta_e \simeq \frac{1}{4} e^2 e_1^2 (1 - e^2) \sin 2\Phi \cos \Phi \sin 2(\Lambda - \Lambda_a) \end{aligned} \quad (672)$$

Выражения в (665)—(669) совершенно точны; при дальнейших преобразованиях пренебрегаем членами, порядок которых  $e^3$ ,  $e_1^4$ ,  $e^4 e_1^2$ , и такова же точность полученных выражений (670)—(672). С учетом формул (665)—(672) получают окончательные выражения для Гауссовой кривизны трехосного эллипсоида (с отбрасыванием членов порядка  $e^3$  и выше)

$$\begin{aligned} K_e \simeq \rho_e^{-2} \{ 1 + e^2 (1 - 3 \sin^2 \Phi) + e^4 (1 - 2 \sin^2 2\Phi) + \\ + e_1^2 [1 - 3 \cos^2 \Phi \sin^2(\Lambda - \Lambda_a)] + e^2 e_1^2 \times \\ \times [1 - 3 \sin^2 \Phi - \cos^2 \Phi (3 - 16 \sin^2 \Phi) \sin^2(\Lambda - \Lambda_a)] + \\ + e^6 \cos^2 \Phi (1 - 14 \sin^2 \Phi + 20 \sin^4 \Phi) \}. \end{aligned} \quad (673)$$

Аналогично для направляющих косинусов нормали к поверхности трехосного эллипсоида

$$\begin{aligned} a_e \simeq \cos \Phi \cos \Lambda \left\{ 1 - e^2 \sin^2 \Phi - \frac{3}{8} e^4 \sin^2 2\Phi + \right. \\ \left. + e_1^2 \sin(\Lambda - \Lambda_a) [\sin^2 \Phi \sin(\Lambda - \Lambda_a) - \operatorname{tg} \Lambda \cos(\Lambda - \Lambda_a)] + \right. \\ \left. + e^2 e_1^2 \sin^2 \Phi \sin(\Lambda - \Lambda_a) [\sin(\Lambda - \Lambda_a) (3 \cos^2 \Phi - 1) + \right. \\ \left. + \operatorname{tg} \Lambda \cos(\Lambda - \Lambda_a) + \frac{1}{8} e^6 \sin^2 2\Phi (1 - 5 \cos^2 \Phi) \right\}, \end{aligned} \quad (674)$$

$$\begin{aligned}
b_e &\simeq \cos \Phi \sin \Lambda \left\{ 1 - e^2 \sin^2 \Phi - \frac{3}{8} e^4 \sin^2 2\Phi + \right. \\
&+ e_1^2 \sin(\Lambda - \Lambda_a) [\sin^2 \Phi \sin(\Lambda - \Lambda_a) + \operatorname{ctg} \Lambda \cos(\Lambda - \Lambda_a)] + \\
&+ e^2 e_1^2 \sin^2 \Phi \sin(\Lambda - \Lambda_a) [\sin(\Lambda - \Lambda_a) (3 \cos^2 \Phi - 1) - \\
&\quad \left. - \operatorname{ctg} \Lambda \cos(\Lambda - \Lambda_a)] + \frac{1}{8} e^6 \sin^2 2\Phi (1 - 5 \cos^2 \Phi) \right\}, \\
c_e &\simeq \sin \Phi \left[ 1 + e^2 \cos \Phi + e^4 \cos^2 \Phi \left( 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \Phi \right) - \right. \\
&- e_1^2 \cos^2 \Phi \sin^2(\Lambda - \Lambda_a) - e^2 e_1^2 \cos^2 \Phi (1 - 3 \sin^2 \Phi) \sin^2(\Lambda - \Lambda_a) + \\
&\quad \left. + e^6 \cos^4 \Phi \left( 1 - \frac{5}{2} \sin^2 \Phi \right) \right]
\end{aligned}$$

и для геодезической широты  $B$  и долготы  $L$  точки на трехосном эллипсоиде с координатами  $\Phi, \Lambda$

$$\left. \begin{aligned}
\operatorname{tg} B &\simeq \operatorname{tg} \Phi [(1 - e^2)^{-1} - e_1^2 (1 - e^2) \sin^2(\Lambda - \Lambda_a)] \\
\operatorname{tg} L &\simeq \operatorname{tg} \Lambda [1 + e_1^2 \sin 2(\Lambda - \Lambda_a) \operatorname{cosec} 2\Lambda]
\end{aligned} \right\}. \quad (675)$$

Можно найти аномалии Гауссовой и средней кривизн, аномалий направляющих косинусов внешней нормали, аномалий широты и долготы как разность этих характеристик для внешней  $i$ -й уровневой поверхности и трехосного эллипсоида

$$K_i - K_e, J_i - J_e, \quad (676)$$

$$a_i - a_e, b_i - b_e, c_i - c_e, \quad (677)$$

$$\varphi_i - B, \lambda_i - L. \quad (678)$$

Вместо (678) можно ввести составляющие угла между двумя нормальными в плоскости меридиана и первого вертикала, т. е. перейти к слагающим  $\bar{\xi}, \bar{\eta}$  отвеса

$$\left. \begin{aligned}
\bar{\xi}'' &\simeq \rho'' (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} B) \cos B \cos \varphi \\
\bar{\eta}'' &\simeq \rho'' (\operatorname{tg} \lambda - \operatorname{tg} L) \cos B \cos L \cos \lambda
\end{aligned} \right\}. \quad (679)$$

Нужно обратить внимание на то, что соответствующие точки на обеих поверхностях, в которых проведены нормали, лежат здесь (в отличие от привычной концепции) на общем радиусе-векторе, но не на общей нормали.

Составляющие  $\bar{\xi}, \bar{\eta}$  можем очень легко определить и прямо вывести из (622)

$$\bar{\xi}'' = -\frac{\rho''}{M} \frac{\partial(\rho - \rho_e)}{\partial \Phi} \frac{d\Phi}{dB}, \quad \bar{\eta}'' = -\frac{\rho''}{N \cos B} \frac{\partial(\rho - \rho_e)}{\partial \Lambda},$$

где 
$$M = \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{3/2}}; \quad N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 B)^{1/2}},$$

и с учетом (675)

$$\frac{d\Phi}{dB} \simeq 1 - e^2 + 2e^2 \sin^2 \Phi + e^4 \sin^2 \Phi + \dots,$$

если поверхностью относимости является эллипсоид вращения с параметрами  $a, e^2$ .

Поскольку обычно центр референц-эллипсоида не совпадает с центром масс Земли, то нужно в выражении (622) для  $(\rho - \rho_e)$  предположить наличие сферической функции первой степени

$$\Delta x_0 \cos \Phi \cos \Lambda + \Delta y_0 \cos \Phi \sin \Lambda + \Delta z_0 \sin \Phi.$$

С учетом формул

$$\sin^2 B \simeq \sin^2 \Phi [1 + 2e^2 \cos^2 \Phi (1 - 2e^2 \sin^2 \Phi) + 3e^4 \cos^2 \Phi + \dots],$$

$$\cos^2 B \simeq \cos^2 \Phi [1 - 2e^2 \sin^2 \Phi (1 + 2e^2 \cos^2 \Phi) + e^4 \sin^2 \Phi + \dots],$$



Рис. 19. Изолинии составляющих  $\xi''$  в секундах дуги относительно эллипсоида. 1967 МГА

получаемых из (675) при отбрасывании выражений, содержащих

$$e^2 \frac{\Delta x_0}{a}, \quad e^2 \frac{\Delta y_0}{a}, \quad e^2 \frac{\Delta z_0}{a}, \quad e^4 J_2^{(0)}, \quad e^4 q, \quad e^2 J_n^{(k)} (n > 2), \quad e^2 S_n^{(k)},$$

и т. д., и выражений

$$\frac{a}{M} \simeq 1 + e^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 \Phi\right) + e^4 \left(1 - \frac{9}{2} \sin^2 \Phi + \frac{27}{8} \sin^4 \Phi\right),$$

$$\frac{a}{N} \simeq 1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \Phi - e^4 \sin^2 \Phi \left(1 - \frac{7}{8} \sin^2 \Phi\right),$$

получим для составляющих  $\bar{\xi}$ ,  $\bar{\eta}$  формулы

$$\begin{aligned} \bar{\xi}'' &= -\rho'' \frac{\Delta x_0}{a} \sin \Phi \cos \Lambda - \rho'' \frac{\Delta y_0}{a} \sin \Phi \sin \Lambda + \rho'' \frac{\Delta z_0}{a} \cos \Phi - \\ &- \frac{\rho''}{a} \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n \left\{ [(A_n^{(k)} - a_n^{(k)}) \cos k\Lambda + (B_n^{(k)} - b_n^{(k)}) \sin k\Lambda] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \Phi + \frac{3}{8} e^4 \sin^4 \Phi\right) \frac{dP_n^{(k)}(\sin \Phi)}{d\Phi} \right\}, \\ \bar{\eta}'' &= \rho'' \frac{\Delta x_0}{a} \cos \Phi \sin \Lambda - \rho'' \frac{\Delta y_0}{a} \cos \Phi \cos \Lambda + \end{aligned}$$

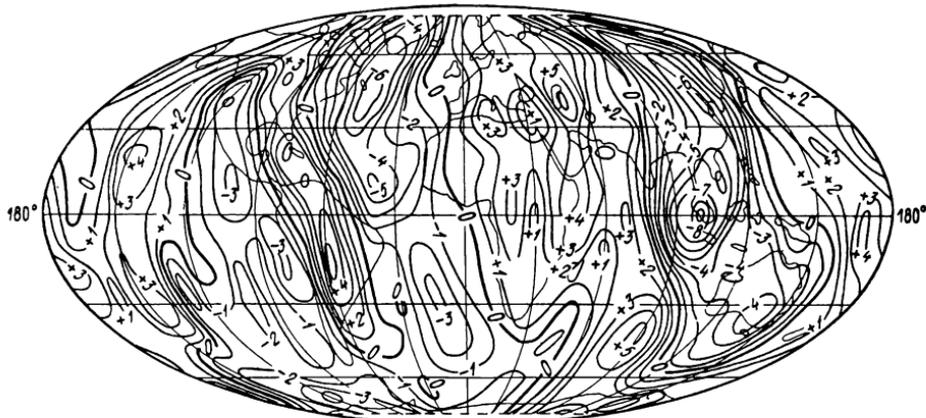


Рис. 20. Изолинии составляющих  $\bar{\eta}''$  в секундах дуги относительно эллипсоида 1967 МГА

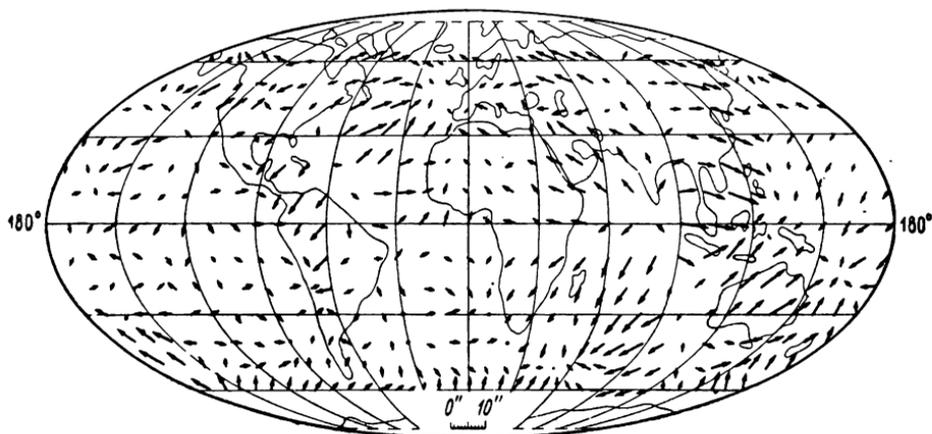


Рис. 21. Схема векторов полных уклонений отвеса  $\sqrt{\bar{\xi}''^2 + \bar{\eta}''^2}$  относительно эллипсоида 1967 МГА

$$+ \frac{\rho''}{a} \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n \left\{ k [(A_n^{(k)} - a_n^{(k)}) \sin k\Lambda - (B_n^{(k)} - b_n^{(k)}) \cos k\Lambda] \times \right. \\ \left. \times \sec \Phi P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right\},$$

причем для производной  $[dP_n^{(k)}(\sin \Phi)]/d\Phi$  имеется формула (652).

В качестве примера приведем карты величин  $\bar{\xi}''$ ,  $\bar{\eta}''$  (рис. 19—21), вычисленные при помощи динамических постоянных из табл. 2—3 для случая, когда поверхностью относимости является геоцентрический эллипсоид вращения МГА 1967 ( $a = 6\,378\,160$  м,  $e^2 = 0,006\,694\,604\,5$ ,  $\Delta x_0 = 0$ ,  $\Delta y_0 = 0$ ,  $\Delta z_0 = 0$ ) [79].

### § 33. УСТАНОВЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЗЕМЛИ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ СПУТНИКОВ

Решение этой задачи неоднозначно и зависит собственно от определения геодезических параметров формы и размеров Земли. Тут можно, например, принимать условие, чтобы референчный земной эллипсоид был уровенной поверхностью в смысле Пицетти [61, 62], применяемой в геодезической гравиметрии. В качестве основных параметров тела Земли принимают параметры эллипсоида (большая полуось, полярное сжатие, в случае надобности сжатие экватора и направление полуоси экваториального эллипса). Однако можно геодезические параметры Земли определять из условия, что параметры формы и размеров принимаемого эллипсоида «лучше всего соответствуют» поверхности геоида.

Здесь выберем другой путь. Хотя совокупность динамических постоянных  $J_n^{(k)}$ ,  $S_n^{(k)}$  при высших степенях  $n$ , очевидно, определяется неуверенно, все же в основных чертах она правильно представляет генерализованную фигуру поверхности регуляризованного геоида. Поэтому для вычисления геодезических параметров Земли по этому второму пути используется совокупность величин  $J_n^{(k)}$ ,  $S_n^{(k)}$ , которые определены надежно. Речь может идти о динамических постоянных

$$J_2^{(0)}, J_4^{(0)}, J_2^{(2)}, S_2^{(2)}, J_4^{(2)}, S_4^{(2)}, J_6^{(0)}, J_6^{(2)}, S_6^{(2)}, J_8^{(4)}, S_8^{(4)}.$$

Содержание понятия «лучше всего соответствует» можно в этом втором определении геодезических параметров тела Земли определить по-разному, например, из следующих математических условий:

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\rho - \rho_e)^2 \cos \Phi \, d\Lambda \, d\Phi = \min, \quad (680)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (W - W_e)^2 \cos \Phi \, d\Lambda \, d\Phi = \min, \quad (681)$$

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (K - K_e)^2 \cos \Phi \, d\Lambda \, d\Phi = \min \\ \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (J - J_e)^2 \cos \Phi \, d\Lambda \, d\Phi = \min \end{aligned} \right\}, \quad (682)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (g - g_e)^2 \cos \Phi d\Lambda d\Phi = \min, \quad (683)$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\xi^2 + \eta^2) \cos \Phi d\Lambda d\Phi = \min. \quad (684)$$

Здесь обозначено:

- $\rho$  — радиус-вектор поверхности геоида,
- $\rho_e$  — радиус-вектор земного эллипсоида,
- $W$  — потенциал силы тяжести на геоиде,
- $W_e$  — потенциал силы тяжести на поверхности эллипсоида,
- $K$  — Гауссова (полная) кривизна геоида,
- $K_e$  — Гауссова (полная) кривизна эллипсоида,
- $J$  — средняя кривизна геоида,
- $J_e$  — средняя кривизна эллипсоида,
- $g$  — ускорение силы тяжести на поверхности геоида,
- $g_e$  — ускорение силы тяжести на поверхности эллипсоида,
- $\xi, \eta$  — составляющие уклонений отвеса (углов между нормальями к обеим поверхностям в точках эллипсоида).

Можно выбрать и другие условия.

Условие (680) сформулировал еще Ф. Слудский [5], а для случая заменяющего эллипсоида вращения его разработал И. Жонголо-вич [53]. Здесь будем применять это условие для трехосного эллипсоида согласно [59] с учетом ортогональности сферических функций (§ 7) и формулы

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ P_n^{(k)}(\sin \Phi) \frac{\cos k\Lambda}{\sin k\Lambda} \right]^2 \cos \Phi d\Lambda d\Phi = \\ & = \frac{4\pi (n+k)!}{\delta_k (2n+1)(n-k)!} \cdot \delta_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k \neq 0 \\ 2, & \text{если } k = 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (685)$$

Из нее вытекают здесь 4 уравнения ( $k \leq n$ )

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{n=0, 2, 4, 6} \frac{1}{2n+1} (A_n^{(0)} - a_n^{(0)}) \frac{\partial a_n^{(0)}}{\partial a} + \\ & + \sum_{n=2, 4, 6} \sum_{k=2, 4} \frac{(n+k)!}{2(2n+1)(n-k)!} \left[ (A_n^{(k)} - a_n^{(k)}) \frac{\partial a_n^{(k)}}{\partial a} + \right. \\ & \left. + (B_n^{(k)} - b_n^{(k)}) \frac{\partial b_n^{(k)}}{\partial a} \right] = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0,2,4,6} \frac{1}{2n+1} (A_n^{(0)} - a_n^{(0)}) \frac{\partial a_n^{(0)}}{\partial e} + \\
& + \sum_{n=2,4,6} \sum_{k=2,4} \frac{(n+k)!}{2(2n+1)(n-k)!} \left[ (A_n^{(k)} - a_n^{(k)}) \frac{\partial a_n^{(k)}}{\partial e^2} + \right. \\
& \quad \left. + (B_n^{(k)} - b_n^{(k)}) \frac{\partial b_n^{(k)}}{\partial e^2} \right] = 0 \\
& \sum_{n=0,2,4,6} \frac{1}{2n+1} (A_n^{(0)} - a_n^{(0)}) \frac{\partial a_n^{(0)}}{\partial e_1} + \\
& + \sum_{n=2,4,6} \sum_{k=2,4} \frac{(n+k)!}{2(2n+1)(n-k)!} \left[ (A_n^{(k)} - a_n^{(k)}) \frac{\partial a_n^{(k)}}{\partial e_1} + \right. \\
& \quad \left. + (B_n^{(k)} - b_n^{(k)}) \frac{\partial b_n^{(k)}}{\partial e_1^2} \right] = 0 \\
& \sum_{n=0,2,4,6} \frac{1}{2n+1} (A_n^{(0)} - a_n^{(0)}) \frac{\partial a_n^{(0)}}{\partial \Lambda_a} + \\
& + \sum_{n=2,4,6} \sum_{k=2,4} \frac{(n+k)!}{2(2n+1)(n-k)!} \left[ (A_n^{(k)} - a_n^{(k)}) \frac{\partial a_n^{(k)}}{\partial \Lambda_a} + \right. \\
& \quad \left. + (B_n^{(k)} - b_n^{(k)}) \frac{\partial b_n^{(k)}}{\partial \Lambda_a} \right] = 0
\end{aligned} \tag{686}$$

которые однозначно определяют искомые параметры  $a$ ,  $e^2$ ,  $e_1^2$ ,  $\Lambda_a$ .

Определим конкретные выражения приведенных частных производных как функции параметров эллипсоида

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial a_n^{(0)}}{\partial a} = \frac{a_n^{(0)}}{a}, \quad \frac{\partial a_n^{(k)}}{\partial a} = \frac{a_n^{(k)}}{a} \\
& \frac{\partial a_0^{(0)}}{\partial e^2} = a \left( -\frac{1}{6} - \frac{11}{60} e^2 - \frac{103}{560} e^4 + \frac{1}{20} e_1^2 - \frac{1823}{10080} e^6 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{13}{280} e^2 e_1^2 + \frac{13}{560} e_1^4 + \frac{139}{3360} e^4 e_1^2 \right) \\
& \frac{\partial a_2^{(0)}}{\partial e^2} = a \left( -\frac{1}{3} - \frac{5}{21} e^2 - \frac{9}{56} e^4 + \frac{1}{28} e_1^2 - \frac{293}{2772} e^6 - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{56} e^2 e_1^2 + \frac{1}{28} e_1^4 - \frac{343}{7392} e^4 e_1^2 \right) \\
& \frac{\partial a_4^{(0)}}{\partial e^2} = a \left( \frac{6}{35} e^2 + \frac{171}{770} e^4 - \frac{3}{35} e_1^2 + \frac{2271}{10010} e^6 - \right. \\
& \quad \left. - \frac{36}{385} e^2 e_1^2 - \frac{213}{6160} e_1^4 - \frac{2511}{40040} e^4 e_1^2 \right) \\
& \frac{\partial a_6^{(0)}}{\partial e^2} = a \left( -\frac{5}{77} e^4 - \frac{82}{693} e^6 + \frac{5}{77} e^2 e_1^2 - \frac{15}{616} e_1^4 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{89}{924} e^4 e_1^2 \right)
\end{aligned} \tag{687}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_8^{(0)}}{\partial e^2} &= a \left( \frac{28}{1287} e^6 - \frac{14}{429} e^4 e_1^2 \right) \\
\frac{\partial a_2^{(2)}}{\partial e^2} \sec 2\Lambda_a &= \frac{\partial b_2^{(2)}}{\partial e^2} \operatorname{cosec} 2\Lambda_a = a \left( -\frac{1}{56} e_1^2 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{48} e^2 e_1^2 - \frac{1}{336} e_1^4 - \frac{307}{14784} e^4 e_1^2 \right) \\
\frac{\partial a_4^{(2)}}{\partial e^2} \sec 2\Lambda_a &= \frac{\partial b_4^{(2)}}{\partial e^2} \operatorname{cosec} 2\Lambda_a = a \left( -\frac{1}{140} e_1^2 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{220} e^2 e_1^2 - \frac{19}{6160} e_1^4 - \frac{327}{160160} e^4 e_1^2 \right) \\
\frac{\partial a_4^{(4)}}{\partial e^2} \sec 4\Lambda_a &= \frac{\partial b_4^{(4)}}{\partial e^2} \operatorname{cosec} 4\Lambda_a = -a \frac{1}{9856} e_1^4 \\
\frac{\partial a_6^{(2)}}{\partial e^2} \sec 2\Lambda_a &= \frac{\partial b_6^{(2)}}{\partial e^2} \operatorname{cosec} 2\Lambda_a = a \left( \frac{1}{462} e^2 e_1^2 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{924} e_1^4 + \frac{5}{1848} e^4 e_1^2 \right) \\
\frac{\partial a_6^{(4)}}{\partial e^2} \sec 4\Lambda_a &= \frac{\partial b_6^{(4)}}{\partial e^2} \operatorname{cosec} 4\Lambda_a = -a \frac{1}{44352} e_1^4 \\
\frac{\partial a_8^{(2)}}{\partial e^2} \sec 2\Lambda_a &= \frac{\partial b_8^{(2)}}{\partial e^2} \operatorname{cosec} 2\Lambda_a = -a \frac{1}{1716} e^4 e_1^2 \\
\frac{\partial a_0^{(0)}}{\partial e_1^2} &= a \left( -\frac{1}{6} + \frac{1}{20} e^2 - \frac{11}{60} e_1^2 + \frac{13}{560} e^4 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{13}{280} e^2 e_1^2 + \frac{139}{10080} e^6 \right) \\
\frac{\partial a_2^{(0)}}{\partial e_1^2} &= a \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{28} e^2 + \frac{5}{42} e_1^2 - \frac{1}{112} e^4 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{14} e^2 e_1^2 - \frac{313}{22176} e^6 \right) \\
\frac{\partial a_4^{(0)}}{\partial e_1^2} &= a \left( -\frac{3}{35} e^2 + \frac{9}{140} e_1^2 - \frac{18}{385} e^4 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{213}{3080} e^2 e_1^2 - \frac{837}{40040} e^6 \right) \\
\frac{\partial a_6^{(0)}}{\partial e_1^2} &= a \left( \frac{5}{154} e^4 - \frac{15}{308} e^2 e_1^2 + \frac{89}{2772} e^6 \right) \\
\frac{\partial a_8^{(0)}}{\partial e_1^2} &= -a \frac{14}{1287} e^6 \\
\frac{\partial a_2^{(2)}}{\partial e_1^2} \sec 2\Lambda_a &= \frac{\partial b_2^{(2)}}{\partial e_1^2} \operatorname{cosec} 2\Lambda_a = a \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{56} e^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{5}{84} e_1^2 - \frac{1}{96} e^4 - \frac{1}{168} e^2 e_1^2 - \frac{307}{44352} e^6 \right)
\end{aligned} \tag{687}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a_4^{(2)}}{\partial e_1^2} \sec 2\Lambda_a &= \frac{\partial b_4^{(2)}}{\partial e_1^2} \operatorname{cosec} 2\Lambda_a = a \left( -\frac{1}{140} e^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{140} e_1^2 - \frac{1}{440} e^4 - \frac{19}{3080} e^2 e_1^2 - \frac{109}{160160} e^6 \right) \\
\frac{\partial a_4^{(4)}}{\partial e_1^2} \sec 4\Lambda_a &= \frac{\partial b_4^{(4)}}{\partial e_1^2} \operatorname{cosec} 4\Lambda_a = a \times \\
&\quad \times \left( \frac{1}{1120} e_1^2 - \frac{1}{4928} e^2 e_1^2 \right) \\
\frac{\partial a_6^{(2)}}{\partial e_1^2} \sec 2\Lambda_a &= \frac{\partial b_6^{(2)}}{\partial e_1^2} \operatorname{cosec} 2\Lambda_a = a \left( \frac{1}{924} e^4 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{462} e^2 e_1^2 + \frac{5}{5544} e^6 \right) \\
\frac{\partial a_6^{(4)}}{\partial e_1^2} \sec 4\Lambda_a &= \frac{\partial b_6^{(4)}}{\partial e_1^2} \operatorname{cosec} 4\Lambda_a = -a \frac{1}{22176} e^2 e_1^2 \\
\frac{\partial a_8^{(2)}}{\partial e_1^2} \sec 2\Lambda_a &= \frac{\partial b_8^{(2)}}{\partial e_1^2} \operatorname{cosec} 2\Lambda_a = -a \frac{1}{5148} e^6 \\
\frac{\partial a_n^{(c)}}{\partial \Lambda_a} &= \frac{\partial b_n^{(c)}}{\partial \Lambda_a} = 0 \\
\frac{\partial a_2^{(2)}}{\partial \Lambda_a} (-\operatorname{cosec} 2\Lambda_a) &= \frac{\partial b_2^{(2)}}{\partial \Lambda_a} \sec 2\Lambda_a = a \left( \frac{1}{6} e_1^2 - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{28} e^2 e_1^2 + \frac{5}{84} e_1^4 - \frac{1}{48} e^4 e_1^2 - \frac{1}{168} e^2 e_1^4 - \frac{307}{22176} e^6 e_1^2 \right) \\
\frac{\partial a_4^{(2)}}{\partial \Lambda_a} (-\operatorname{cosec} 2\Lambda_a) &= \frac{\partial b_4^{(2)}}{\partial \Lambda_a} \sec 2\Lambda_a = a \left( -\frac{1}{70} e^2 e_1^2 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{140} e_1^4 - \frac{1}{220} e^4 e_1^2 - \frac{19}{3080} e^2 e_1^4 - \frac{109}{80080} e^6 e_1^2 \right) \\
\frac{\partial a_4^{(4)}}{\partial \Lambda_a} (-\operatorname{cosec} 4\Lambda_a) &= \frac{\partial b_4^{(4)}}{\partial \Lambda_a} \sec 4\Lambda_a = a \times \\
&\quad \times \left( \frac{1}{560} e_1^4 - \frac{1}{2464} e^2 e_1^4 \right) \\
\frac{\partial a_6^{(2)}}{\partial \Lambda_a} (-\operatorname{cosec} 2\Lambda_a) &= \frac{\partial b_6^{(2)}}{\partial \Lambda_a} \sec 2\Lambda_a = a \times \\
&\quad \times \left( \frac{1}{462} e^4 e_1^2 - \frac{1}{462} e^2 e_1^4 + \frac{5}{2772} e^6 e_1^2 \right) \\
\frac{\partial a_6^{(4)}}{\partial \Lambda_a} (-\operatorname{cosec} 4\Lambda_a) &= \frac{\partial b_6^{(4)}}{\partial \Lambda_a} \sec 4\Lambda_a = -a \frac{1}{11088} e^2 e_1^4 \\
\frac{\partial a_8^{(2)}}{\partial \Lambda_a} (-\operatorname{cosec} 2\Lambda_a) &= \frac{\partial b_8^{(2)}}{\partial \Lambda_a} \sec 2\Lambda_a = \\
&= -a \frac{1}{2574} e^6 e_1^2
\end{aligned} \tag{687}$$

Тогда можно (686) переписать в виде

$$\begin{aligned}
 & A_0^{(\circ)} \left( 1 - \frac{1}{6} e^2 - \frac{11}{120} e^4 - \frac{1}{6} e_1^2 - \frac{103}{1680} e^6 + \frac{1}{20} e^2 e_1^2 - \right. \\
 & \left. - \frac{1823}{40320} e^8 \right) + A_2^{(\circ)} \left( -\frac{1}{15} e^2 - \frac{1}{42} e^4 + \frac{1}{30} e_1^2 - \frac{3}{280} e^6 + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{140} e^2 e_1^2 \right) + A_4^{(\circ)} \left( \frac{1}{105} e^4 + \frac{79}{6930} e^6 \right) - \frac{5}{3003} A_6^{(\circ)} e^6 - \\
 & - a \left( 1 - \frac{1}{3} e^2 - \frac{2}{15} e^4 - \frac{1}{3} e_1^2 - \frac{8}{105} e^6 + \right. \\
 & \left. + \frac{2}{15} e^2 e_1^2 - \frac{16}{315} e^8 \right) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_0^{(\circ)} \left( -\frac{1}{6} - \frac{11}{60} e^2 - \frac{103}{560} e^4 + \frac{1}{20} e_1^2 - \frac{1823}{10080} e^6 + \right. \\
 & \left. + \frac{13}{280} e^2 e_1^2 \right) + A_2^{(\circ)} \left( -\frac{1}{15} - \frac{1}{21} e^2 - \frac{9}{280} e^4 + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{140} e_1^2 - \frac{293}{13860} e^6 \right) + A_4^{(\circ)} \left( \frac{2}{105} e^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{171}{6930} e^4 - \frac{1}{105} e_1^2 \right) - \frac{5}{1001} A_6^{(\circ)} e^4 - a \times \\
 & \times \left( -\frac{1}{6} - \frac{2}{15} e^2 - \frac{4}{35} e^4 + \frac{1}{15} e_1^2 - \right. \\
 & \left. - \frac{1156}{11025} e^6 - \frac{1}{21} e^2 e_1^2 \right) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_0^{(\circ)} \left( -\frac{1}{6} - \frac{1}{20} e^2 + \frac{13}{560} e^4 - \frac{11}{60} e_1^2 + \frac{139}{10080} e^6 + \right. \\
 & \left. + \frac{13}{280} e^2 e_1^2 \right) + A_2^{(\circ)} \left( \frac{1}{30} + \frac{1}{140} e^2 - \frac{1}{560} e^4 - \frac{1}{42} e_1^2 \right) + \\
 & + A_4^{(\circ)} \left( -\frac{1}{105} e^2 - \frac{2}{385} e^4 \right) + \frac{5}{2002} A_6^{(\circ)} e^4 - a \times \\
 & \times \left( -\frac{1}{6} + \frac{1}{15} e^2 + \frac{1}{42} e^4 - \frac{2}{15} e_1^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{13}{315} e^6 + \frac{1}{21} e^2 e_1^2 \right) + \left( A_2^{(2)} \cos 2\Lambda_a + B_2^{(2)} \sin 2\Lambda_a \right) \times \\
 & \times \left( \frac{1}{5} - \frac{3}{70} e^2 \right) - \frac{1}{7} e^2 \left( A_4^{(2)} \cos 2\Lambda_a + B_4^{(2)} \sin 2\Lambda_a \right) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left( A_2^{(2)} \sin 2\Lambda_a - B_2^{(2)} \cos 2\Lambda_a \right) \left( -\frac{2}{5} + \frac{3}{35} e^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{20} e^4 - \frac{1}{7} e_1^2 + \frac{307}{9240} e^6 + \frac{1}{70} e^2 e_1^2 \right) + \\
 & + \left( A_4^{(2)} \sin 2\Lambda_a - B_4^{(2)} \cos 2\Lambda_a \right) \left( \frac{2}{7} e^2 + \frac{1}{11} e^4 - \frac{1}{7} e_1^2 \right) - \\
 & - 4e_1^2 \left( A_4^{(4)} \sin 4\Lambda_a - B_4^{(4)} \cos 4\Lambda_a \right) - \frac{20}{143} e^4 \times
 \end{aligned}$$

(688)

$$\begin{aligned}
& \times (A_6^{(2)} \sin 2\Lambda_a - B_6^{(2)} \cos 2\Lambda_a) + \\
& + \frac{900}{143} e^2 e_1^2 (A_6^{(4)} \sin 4\Lambda_a - B_6^{(4)} \cos 4\Lambda_a) = 0 \\
a - A_0^{(c)} & \left( 1 + \frac{1}{6} e^2 + \frac{7}{72} e^4 + \frac{1}{6} e_1^2 + \frac{35}{504} e^6 + \frac{1}{36} e^2 e_1^2 \right) - \\
& - A_2^{(c)} \left( -\frac{1}{15} e^2 - \frac{29}{630} e^4 + \frac{1}{30} e_1^2 - \frac{1321}{37800} e^6 - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{252} e^2 e_1^2 \right) - A_4^{(c)} \left( \frac{1}{105} e^4 + \frac{101}{6930} e^6 \right) + \\
& \quad + \frac{5}{3003} A_6^{(c)} e^6 = 0 \\
A_0^{(c)} & \left( -\frac{1}{45} e^2 - \frac{59}{1890} e^4 + \frac{1}{90} e_1^2 - \frac{1079}{30240} e^6 + \right. \\
& + \frac{11}{756} e^2 e_1^2 \left. \right) + A_2^{(c)} \left( -\frac{1}{15} - \frac{37}{630} e^2 - \frac{263}{5400} e^4 + \frac{4}{315} e_1^2 - \right. \\
& \quad \left. - \frac{14513}{356400} e^6 + \frac{22}{4725} e^2 e_1^2 \right) + A_4^{(c)} \left( \frac{2}{105} e^2 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{13}{495} e^4 - \frac{1}{105} e_1^2 \right) - \frac{5}{1001} A_6^{(c)} e^4 = 0 \\
A_0^{(c)} & \left( \frac{1}{90} e^2 + \frac{17}{3780} e^4 - \frac{1}{45} e_1^2 + \frac{67}{30240} e^6 + \right. \\
& + \frac{11}{756} e^2 e_1^2 \left. \right) + A_2^{(c)} \left( \frac{1}{30} - \frac{1}{252} e^2 - \frac{379}{75600} e^4 + \right. \\
& + \frac{37}{1260} e_1^2 + \frac{1}{900} e^2 e_1^2 \left. \right) + A_4^{(c)} \left( -\frac{1}{105} e^2 - \frac{35}{9702} e^4 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{140} e_1^2 \right) + \frac{5}{2002} A_6^{(c)} e^4 + \\
& + \left( A_2^{(2)} \cos 2\Lambda_a + B_2^{(2)} \sin 2\Lambda_a \right) \left( \frac{1}{5} - \frac{3}{70} e^2 \right) - \\
& \quad - \frac{1}{7} e^2 \left( A_4^{(2)} \cos 2\Lambda_a + B_4^{(2)} \sin 2\Lambda_a \right) = 0 \\
\sin 2\Lambda_a & \left[ A_2^{(2)} \left( -\frac{2}{5} + \frac{3}{35} e^2 + \frac{1}{20} e^4 - \frac{1}{7} e_1^2 + \right. \right. \\
& + \frac{307}{9240} e^6 + \frac{1}{70} e^2 e_1^2 \left. \right) + A_4^{(2)} \left( \frac{2}{7} e^2 + \frac{1}{11} e^4 - \frac{1}{7} e_1^2 + \right. \\
& + \frac{109}{4004} e^6 + \frac{19}{154} e^2 e_1^2 \left. \right) + A_6^{(2)} \left( -\frac{20}{143} e^4 - \frac{50}{429} e^6 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{20}{143} e^2 e_1^2 \right) \left. \right] + \cos 2\Lambda_a \left[ B_2^{(2)} \left( \frac{2}{5} - \frac{3}{35} e^2 - \frac{1}{20} e^4 + \right. \right. \\
& + \frac{1}{7} e_1^2 - \frac{307}{9240} e^6 - \frac{1}{70} e^2 e_1^2 \left. \right) + B_4^{(2)} \left( -\frac{2}{7} e^2 - \frac{1}{11} e^4 + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{7} e_1^2 - \frac{109}{4004} e^6 - \frac{19}{154} e^2 e_1^2 \right) + B_6^{(2)} \left( \frac{20}{143} e^4 + \right.
\end{aligned} \tag{689}$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}
& + \frac{50}{429} e^6 - \frac{20}{143} e^2 e_1^2 \Big] + \sin 4\Lambda_a \left[ A_4^{(4)} \left( -4e_1^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{10}{11} e^2 e_1^2 \right) + \frac{900}{143} A_6^{(4)} e^2 e_1^2 \right] + \cos 4\Lambda_a \times \\
& \quad \times \left[ B_4^{(4)} \left( 4e_1^2 - \frac{10}{11} e^2 e_1^2 \right) - \frac{900}{143} B_6^{(4)} e^2 e_1^2 \right] = 0 \\
& a - A_0^{(c)} - e^2 \left( \frac{1}{6} A_0^{(c)} - \frac{1}{15} A_2^{(c)} \right) - e^4 \left( \frac{7}{72} A_0^{(c)} - \right. \\
& - \frac{29}{630} A_2^{(c)} + \frac{1}{105} A_4^{(c)} \Big) - e^6 \left( \frac{35}{504} A_0^{(c)} - \frac{1321}{37800} A_2^{(c)} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{101}{6930} A_4^{(c)} - \frac{5}{3003} A_6^{(c)} - e_1^2 \left[ \frac{1}{6} A_0^{(c)} + \frac{1}{30} A_2^{(c)} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + e^2 \left( \frac{1}{36} A_0^{(c)} - \frac{1}{252} A_2^{(c)} \right) \right] \right) = 0 \\
& e^2 \left( -\frac{1}{45} A_0^{(c)} - \frac{37}{630} A_2^{(c)} + \frac{2}{105} A_4^{(c)} \right) + e^4 \times \\
& \times \left( -\frac{59}{1890} A_0^{(c)} - \frac{263}{5400} A_2^{(c)} + \frac{13}{495} A_4^{(c)} - \frac{5}{1001} A_6^{(c)} \right) - \\
& - \frac{1079}{30240} A_0^{(c)} e^6 + e_1^2 \left[ \frac{1}{90} A_0^{(c)} + \frac{4}{315} A_2^{(c)} - \frac{1}{105} A_4^{(c)} + \right. \\
& \quad \left. + e^2 \left( \frac{11}{756} A_0^{(c)} + \frac{22}{4725} A_2^{(c)} \right) \right] - \frac{1}{15} A_2^{(c)} = 0 \\
& e^2 \left[ \frac{1}{90} - \frac{1}{252} \frac{A_2^{(c)}}{A_0^{(c)}} - \frac{1}{105} \frac{A_4^{(c)}}{A_0^{(c)}} - \frac{3}{70} \left( \frac{A_2^{(2)}}{A_0^{(c)}} \cos 2\Lambda_a + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{B_2^{(2)}}{A_0^{(c)}} \sin 2\Lambda_a \right) \right] + e^4 \left( \frac{17}{3780} - \frac{379}{75600} \frac{A_2^{(c)}}{A_0^{(c)}} - \right. \\
& - \frac{35}{9702} \frac{A_4^{(c)}}{A_0^{(c)}} \Big) + \frac{67}{30240} e^6 + e_1^2 \left( -\frac{1}{45} + \frac{37}{1260} \frac{A_2^{(c)}}{A_0^{(c)}} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{140} \frac{A_4^{(c)}}{A_0^{(c)}} + e^2 \frac{11}{756} \right) + \frac{1}{30} \frac{A_2^{(c)}}{A_0^{(c)}} + \frac{1}{5} \times \\
& \quad \times \left( \frac{A_2^{(2)}}{A_0^{(c)}} \cos 2\Lambda_a + \frac{B_2^{(2)}}{A_0^{(c)}} \sin 2\Lambda_a \right) = 0 \\
& \operatorname{tg} 2\Lambda_a \left[ A_2^{(2)} \left( -\frac{2}{5} + \frac{3}{35} e^2 + \frac{1}{20} e^4 - \frac{1}{7} e_1^2 + \frac{307}{9240} e^6 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{1}{70} e^2 e_1^2 \right) + A_4^{(2)} \left( \frac{2}{7} e^2 + \frac{1}{11} e^4 - \frac{1}{7} e_1^2 + \frac{109}{4004} e^6 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{19}{154} e^2 e_1^2 \right) + A_6^{(2)} \left( -\frac{20}{143} e^4 - \frac{50}{429} e^6 + \frac{20}{143} e^2 e_1^2 \right) \right] + \\
& \quad + \left[ B_2^{(2)} \left( \frac{2}{5} - \frac{3}{35} e^2 - \frac{1}{20} e^4 + \frac{1}{7} e_1^2 - \frac{307}{9240} e^6 - \right. \right.
\end{aligned}
\tag{690}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{70} e^2 e_1^2) + B_4^{(2)} \left( -\frac{2}{7} e^2 - \frac{1}{11} e^4 + \frac{1}{7} e_1^2 - \frac{109}{4004} e^6 - \right. \\
& \left. - \frac{19}{154} e^2 e_1^2 \right) + B_6^{(2)} \left( \frac{20}{143} e^4 + \frac{50}{429} e^6 - \frac{20}{143} e^2 e_1^2 \right) \Big] + \\
& + \frac{\sin 4\Lambda_a}{\cos 4\Lambda_a} \cdot \left[ A_4^{(4)} \left( -4e_1^2 + \frac{10}{11} e^2 e_1^2 \right) + \frac{900}{143} A_6^{(4)} e^2 e_1^2 \right] + \\
& + \frac{\cos 4\Lambda_a}{\sin 4\Lambda_a} \left[ B_4^{(4)} \left( 4e_1^2 - \frac{10}{11} e^2 e_1^2 \right) - \frac{900}{143} B_6^{(4)} e^2 e_1^2 \right] = 0
\end{aligned} \quad (690)$$

**ИЛИ,** НАКОНЕЦ,

$$\begin{aligned}
e_1^2 &= \left[ \frac{1}{3} e^2 + \frac{59}{126} e^4 + \frac{1079}{2016} e^6 + \frac{A_2^{(c)}}{A_0^{(c)}} \times \right. \\
& \times \left( 1 + \frac{37}{42} e^2 + \frac{263}{360} e^4 \right) + \frac{A_4^{(c)}}{A_0^{(c)}} \left( -\frac{2}{7} e^2 - \frac{13}{33} e^4 \right) + \\
& \left. + \frac{75}{1001} \frac{A_6^{(c)}}{A_0^{(c)}} e^4 \right] \left[ \frac{1}{6} + \frac{4}{21} \frac{A_2^{(c)}}{A_0^{(c)}} - \frac{1}{7} \frac{A_4^{(c)}}{A_0^{(c)}} + e^2 \times \right. \\
& \left. \times \left( \frac{55}{252} + \frac{22}{315} \frac{A_2^{(c)}}{A_0^{(c)}} \right) \right]^{-1} \\
a &= A_0^{(c)} + e^2 \left( \frac{1}{6} A_0^{(c)} - \frac{1}{15} A_2^{(c)} \right) + e^4 \left( \frac{7}{72} A_0^{(c)} - \right. \\
& - \frac{29}{630} A_2^{(c)} + \frac{1}{105} A_4^{(c)} \Big) + e^6 \left( \frac{5}{72} A_0^{(c)} - \frac{1321}{37800} A_2^{(c)} + \right. \\
& + \frac{101}{6930} A_4^{(c)} - \frac{5}{3003} A_6^{(c)} \Big) + e_1^2 \left[ \frac{1}{6} A_0^{(c)} + \frac{1}{30} A_2^{(c)} + \right. \\
& \left. + e^2 \left( \frac{1}{36} A_0^{(c)} - \frac{1}{252} A_2^{(c)} \right) \right] \\
e^2 &= - \left\{ 3 \frac{A_2^{(c)}}{A_0^{(c)}} + e^4 \left( \frac{17}{42} - \frac{379}{840} \frac{A_2^{(c)}}{A_0^{(c)}} - \frac{175}{539} \frac{A_4^{(c)}}{A_0^{(c)}} \right) + \right. \\
& + \frac{67}{336} e^6 + e_1^2 \left( -2 + \frac{37}{14} \frac{A_2^{(c)}}{A_0^{(c)}} + \frac{9}{14} \frac{A_4^{(c)}}{A_0^{(c)}} + e^2 \frac{55}{42} \right) + \\
& + 18 \frac{[(A_2^{(2)})^2 + (B_2^{(2)})^2]^{\frac{1}{2}}}{A_0^{(c)}} \Big\} \left\{ 1 - \frac{5}{14} \frac{A_2^{(c)}}{A_0^{(c)}} - \frac{6}{7} \frac{A_4^{(c)}}{A_0^{(c)}} - \right. \\
& \left. - \frac{27}{7} \frac{[(A_2^{(2)})^2 + (B_2^{(2)})^2]^{\frac{1}{2}}}{A_0^{(c)}} \right\}^{-1} \\
\operatorname{tg} 2\Lambda_a &= (k_2^{(2)} B_2^{(2)} + k_4^{(2)} B_4^{(2)} + k_6^{(2)} B_6^{(2)}) (k_2^{(2)} A_2^{(2)} +
\end{aligned} \quad (691)$$

$$\begin{aligned}
 & + k_4^{(2)} A_4^{(2)} + k_6^{(2)} A_6^{(2)} - 1, \\
 k_2^{(2)} &= \frac{2}{5} - \frac{3}{35} e^2 - \frac{1}{20} e^4 + \frac{1}{7} e_1^2 - \frac{307}{9240} e^6 - \frac{1}{70} e^2 e_1^2 \\
 k_4^{(2)} &= -\frac{2}{7} e^2 - \frac{1}{11} e^4 + \frac{1}{7} e_1^2 - \frac{109}{4004} e^6 - \frac{19}{154} e^2 e_1^2 \\
 k_6^{(2)} &= \frac{20}{143} e^4 + \frac{50}{429} e^6 - \frac{20}{143} e^2 e_1^2
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} k_2^{(2)} \\ k_4^{(2)} \\ k_6^{(2)} \end{aligned}} \right\} .$$

Уравнения (691) можно сравнительно легко решить последовательными приближениями.

Здесь возникает практическая необходимость знать коэффициенты

$$A_0^{(0)}, A_2^{(0)}, A_4^{(0)}, A_6^{(0)}, A_2^{(2)}, B_2^{(2)}, A_4^{(2)}, B_4^{(2)}, A_6^{(2)}, B_6^{(2)}.$$

Эти коэффициенты при помощи формул (607) выражены через динамические коэффициенты  $J_n^{(k)}$  и  $S_n^{(k)}$ , линейный масштабный коэффициент  $R_0$  и угловую скорость суточного вращения Земли.

Детальные характеристики геоида локального характера неопределимы, и при выводе геодезических параметров, определяющих тело Земли в целом, следовательно, учитываться не должны.

Кроме этого аналитического решения можно задачу решать, используя совокупность достаточно большого числа разностей  $(\rho - \rho_e)$  при условии  $\sum v^2 \cos \Phi = \min$ , где уравнения ошибок имеют вид

$$\begin{aligned}
 v &= \sum_{i=1}^4 \left[ \sum_{n=0,2,4,6} \sum_{k=0,2,4} \left( \frac{\partial a_n^k}{\partial p_i} \cos k\Lambda + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\partial b_n^k}{\partial p_i} \sin k\Lambda \right) P_n^{(k)}(\sin \Phi) dp_i \right] + (\rho_e)_0 - \rho, \quad (692)
 \end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, 4; k \leq n; p_1 = a; p_2 = e^2; p_3 = e_1^2; p_4 = \Lambda_a; dp_i = p_i - (p_i)_0.$$

$(p_i)_0$  — приближенное значение искомого параметра, при помощи которого была вычислена величина  $(\rho_e)_0$  в свободном члене.

Можно также написать упрощенно

$$\begin{aligned}
 v &\simeq \frac{(\rho_e)_0}{(a)_0} da - \frac{1}{2} (a)_0 \sin^2 \Phi de^2 - \frac{1}{2} (a)_0 \cos^2 \Phi \sin^2 [\Lambda - (\Lambda_a)_0] de_1^2 + \\
 & + \frac{1}{2} (a)_0 (e_1^2)_0 \cos^2 \Phi \sin [\Lambda - (\Lambda_a)_0] d\Lambda_a + (\rho_e)_0 - \rho. \quad (693)
 \end{aligned}$$

Для примера применения условия (680) используем совокупность динамических постоянных [52] (вариант 1) и [51, 63], (вариант 2). За линейный масштабный коэффициент  $R_0$  примем величину (586), соответствующую значению потенциала на геоиде (583). Результаты приведены в табл. 12.

Результаты варианта 1 мы посчитали исходными при определении высот геоида в § 31 (см. рис. 17).

Параметры	Вариант 1	Вариант 2	Средняя ошибка
$a$ (максимальное)	6 378 173 м	6 378 173 м	$\pm 10$ м
$\bar{a}$ (среднее)	6 378 139 м	6 378 139 м	$\pm 10$ м
$e^2$ (максимальное полярное)	0,006 704 953	0,006 704 904	$\pm 3 \cdot 10^{-7}$
$1/\alpha$ (максимальное полярное)	297,786	297,788	$\pm 1,4 \cdot 10^{-2}$
$\bar{e}^2$ (среднее полярное)	0,006 694 385	0,006 694 375	$\pm 3 \cdot 10^{-7}$
$1/\bar{\alpha}$ (среднее полярное)	298,257	298,257	$\pm 1,4 \cdot 10^{-2}$
$e_1^2$ (экваториальное)	0,000 021 275	0,000 021 198	$\pm 4 \cdot 10^{-6}$
$1/\alpha_1$ (экваториальное)	940000	94350	$\pm 2 \cdot 10^4$
$\Lambda_a$	14,8 ° W	14,8 ° W	$\pm 5^\circ$

Аналогично, как и в случае условия (680), можно было бы поступить при разработке решения, основанного на условиях (681), (682) и (684). Все эти другие решения, однако, сложнее, и к их помощи мы не прибегали.

Предметом особого исследования могут, однако, быть параметры экваториального сечения геоида, т. е.  $a$ ,  $e_1^2$ ,  $\Lambda_a$ , которые можно значительно проще определить отдельно, т. е. без учета полярного сжатия. Это экваториальное сечение определяется уравнением

$$\rho_{\Phi=0} = \bar{a} + R_0 \sum_{j=1}^N a_j \cos j\Lambda + R_0 \sum_{j=1}^N b_j \sin j\Lambda, \quad (694)$$

которое получается из (604) при  $\Phi = 0$ , и коэффициенты которого равны [64], [78], а члены, содержащие  $J_2^{(0)} q^2$ , здесь отброшены

$$\left. \begin{aligned} \bar{a} &= R_0 \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-3} q + \frac{3}{4} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-6} q^2 - \frac{3}{4} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-1} J_2^{(0)} q + \right. \\ &+ \frac{3}{16} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-9} q^3 - \frac{1}{2} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^2 J_2^{(0)} \left[ 1 + \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^2 J_2^{(0)} - \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{-3} q \right] + \\ &+ \left. \frac{3}{8} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^4 J_4^{(0)} - \frac{5}{16} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^6 J_6^{(0)} + \frac{35}{128} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^8 J_8^{(0)} - \frac{63}{256} \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^{10} J_{10}^{(0)} \right\} \\ a_1 &= -1,620 \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^3 \frac{\bar{J}_3^{(1)}}{\bar{S}_3^{(1)}} + 1,606 \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^5 \frac{\bar{J}_5^{(1)}}{\bar{S}_5^{(1)}} - 1,601 \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^7 \frac{\bar{J}_7^{(1)}}{\bar{S}_7^{(1)}} \\ a_2 &= 1,936 \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^2 \frac{\bar{J}_2^{(2)}}{\bar{S}_2^{(2)}} - 1,677 \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^4 \frac{\bar{J}_4^{(2)}}{\bar{S}_4^{(2)}} + 1,633 \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^6 \frac{\bar{J}_6^{(2)}}{\bar{S}_6^{(2)}} - \\ &- 1,617 \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^8 \frac{\bar{J}_8^{(2)}}{\bar{S}_8^{(2)}} \\ a_3 &= 2,092 \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^3 \frac{\bar{J}_3^{(3)}}{\bar{S}_3^{(3)}} - 1,734 \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^5 \frac{\bar{J}_5^{(3)}}{\bar{S}_5^{(3)}} + 1,664 \left( \frac{a_0}{R_0} \right)^7 \frac{\bar{J}_7^{(3)}}{\bar{S}_7^{(3)}} \end{aligned} \right\} \quad (695)$$

$$\begin{aligned}
 a_4 &= 2,219 \left(\frac{a_0}{R_0}\right)^4 \frac{\bar{J}_4^{(4)}}{\bar{S}_4^{(4)}} - 1,789 \left(\frac{a_0}{R_0}\right)^6 \frac{\bar{J}_6^{(4)}}{\bar{S}_6^{(4)}} + 1,696 \left(\frac{a_0}{R_0}\right)^8 \frac{\bar{J}_8^{(4)}}{\bar{S}_8^{(4)}} \\
 b_4 &= 2,327 \left(\frac{a_0}{R_0}\right)^5 \frac{\bar{J}_5^{(5)}}{\bar{S}_5^{(5)}} - 1,840 \left(\frac{a_0}{R_0}\right)^7 \frac{\bar{J}_7^{(5)}}{\bar{S}_7^{(5)}} \\
 a_6 &= 2,422 \left(\frac{a_0}{R_0}\right)^6 \frac{\bar{J}_6^{(6)}}{\bar{S}_6^{(6)}} - 1,887 \left(\frac{a_0}{R_0}\right)^8 \frac{\bar{J}_8^{(6)}}{\bar{S}_8^{(6)}} \\
 a_7 &= 2,507 \left(\frac{a_0}{R_0}\right)^7 \frac{\bar{J}_7^{(7)}}{\bar{S}_7^{(7)}}, & a_8 &= 2,584 \left(\frac{a_0}{R_0}\right)^8 \frac{\bar{J}_8^{(8)}}{\bar{S}_8^{(8)}} \\
 b_7 & & b_8 &
 \end{aligned}$$

и т. д.

Значения экваториального радиуса-вектора геоида  $\rho_{\Phi=0^\circ}$  при использовании динамических постоянных тела Земли из [52] до  $N = 10$  включительно приведены в табл. 13.

Таблица 13

$\Lambda$	$\rho_{\Phi=0^\circ}$ , м	$\Lambda$	$\rho_{\Phi=0^\circ}$ , м	$\Lambda$	$\rho_{\Phi=0^\circ}$ , м
$0^\circ$	6 378 158	$120^\circ$	6 378 185	$240^\circ$	6 378 116
20	143	140	197	260	129
40	114	160	192	280	149
60	078	180	162	300	128
80	056	200	154	320	117
100	119	220	133	340	152

Среднее интегральное значение  $\bar{a}$  в этом случае равно

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho_{\Phi=0^\circ} d\Lambda = \bar{a} = 6378137,8 \text{ м.} \quad (696)$$

Если мы хотим кривую (694) заменить лучше всего подходящим эллипсом с параметрами  $a$ ,  $e_1^2$ ,  $\Lambda_a$

$$(\rho_e)_{\Phi=0^\circ} = a(1 - e_1^2)^{1/2} [1 - e_1^2 \cos^2(\Lambda - \Lambda_a)]^{-1/2}, \quad (697)$$

то нужно поставить условие

$$I = \int_0^{2\pi} [\rho_{\Phi=0^\circ} - (\rho_e)_{\Phi=0^\circ}]^2 d\Lambda = \min. \quad (698)$$

Из него следует

$$\frac{\partial I}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial I}{\partial e_1^2} = 0; \quad \frac{\partial I}{\partial \Lambda_a} = 0, \quad (699)$$

$$\left. \begin{aligned}
 a &= \bar{a} \left\{ 1 - \frac{1}{4} e_1^2 \left[ 1 - \frac{1}{2} \frac{R_0}{a} (a_2 \cos 2\Lambda_a + b_2 \sin 2\Lambda_a) \right] \right\} \times \\
 &\quad \times \left[ 1 - \frac{1}{2} e_1^2 \left( 1 - \frac{3}{16} e_1^2 \right) \right]^{-1} \\
 e_1^2 &= \frac{8}{3} \frac{a - \bar{a}}{a} + \frac{4}{3} \frac{R_0}{a} (a_2 \cos 2\Lambda_a + b_2 \sin 2\Lambda_a) \\
 \operatorname{tg} 2\Lambda_a &= \frac{b_2}{a_2}; \quad a_2 \cos 2\Lambda_a + b_2 \sin 2\Lambda_a = (a_2^2 + b_2^2)^{1/2}
 \end{aligned} \right\} \cdot (700)$$

Если отбросить члены, содержащие  $e_1^4$ ,  $(J_2^{(2)})^2$ ,  $(S_2^{(2)})^2$  и т. д., то первые два уравнения в (700) упростятся так:

$$a - \bar{a} \simeq R_0 (a_2^2 + b_2^2)^{1/2}; \quad e_1^2 \simeq \frac{4R_0}{a} (a_2^2 + b_2^2)^{1/2}. \quad (701)$$

Большая полуось экваториального эллипса также зависит от линейного размерного фактора (584), от динамических коэффициентов

$$\bar{J}_2^{(2)}, \bar{J}_4^{(2)}, \bar{J}_6^{(2)}, \bar{J}_8^{(2)}, \dots; \quad \bar{S}_2^{(2)}, \bar{S}_4^{(2)}, \bar{S}_6^{(2)}, \dots$$

и от постоянной  $q$ . Сжатие и ориентировка этого эллипса зависят только от  $\bar{J}_2^{(2)}, \bar{J}_4^{(2)}, \bar{J}_6^{(2)}, \dots; \bar{S}_2^{(2)}, \bar{S}_4^{(2)}, \bar{S}_6^{(2)}, \dots$ . Приняв значения динамических коэффициентов из [52], при  $N = 10$  получим

$$a = 6\,378\,173,6 \text{ м}, \quad (702)$$

$$e_1^2 = 22,4 \cdot 10^{-6}; \quad \alpha_1^{-1} = 89 \cdot 10^3; \quad \Lambda_a = 22^\circ \text{W}. \quad (703)$$

Вместо аналитического решения (698) можно также положить  $\sum v v = \min$ , причем

$$\left. \begin{aligned}
 v &= -da \left\{ 1 - \frac{1}{2} (e_1^2)_0 \sin^2 [\Lambda - (\Lambda_a)_0] \right\} - \frac{1}{2} de_1^2(a)_0 \times \\
 &\quad \times \sin^2 [\Lambda - (\Lambda_a)_0] + \frac{1}{2} d\Lambda_a(a)_0 (e_1^2)_0 \sin 2[\Lambda - (\Lambda_a)_0] + l \\
 l &= \bar{a} - (a)_0 + \sum_{j=1}^N a_j \cos j\Lambda + \sum_{j=1}^N b_j \sin j\Lambda + \\
 &\quad + \frac{1}{2} (a)_0 (e_1^2)_0 \sin^2 [\Lambda - (\Lambda_a)_0]
 \end{aligned} \right\} \cdot (704)$$

где уравнение (697) приведено к линейному виду с отбрасыванием величин, содержащих  $e_1^4$ , а величины  $(a)_0$ ,  $(e_1^2)_0$ ,  $(\Lambda_a)_0$  представляют приближенные значения неизвестных, выбранные достаточно близко, чтобы вторыми дифференциалами можно было пренебречь.

Используя интервал дискретных значений  $d\Lambda = 10^\circ$ , получаем по (704) параметры, практически совпадающие с (702) и (703)

$$a = 6\,378\,173,3 \text{ м} \pm 7,4 \text{ м}; \quad e_1^2 = 22,3 \cdot 10^{-6} \pm 3,8 \cdot 10^{-6};$$

$$\alpha_1^{-1} = 90 \cdot 10^3 \pm 16 \cdot 10^3; \quad \Lambda_a = 21^\circ W \pm 2,3^\circ. \quad (705)$$

Напомним, что обычно  $a \neq (\rho_{\Phi=0^\circ})_{\max}$ ;  $a(1 - e_1^2)^{1/2} \neq (\rho_{\Phi=0^\circ})_{\min}$ . В нашем случае по (694)  $(\rho_{\Phi=0^\circ})_{\max} \simeq 6\,378\,198 \text{ м}$  при  $\Lambda \simeq 150^\circ$ ;  $(\rho_{\Phi=0^\circ})_{\min} \simeq 6\,378\,056 \text{ м}$  при  $\Lambda = 70^\circ$ , а  $1/a [(\rho_{\Phi=0^\circ})_{\max} - (\rho_{\Phi=0^\circ})_{\min}] \simeq 1 : 44\,900$ , и что эти значения отличны от (702), (703).

Для иллюстрации приведем экваториальный профиль геоида (рис. 22), кривую разностей  $\rho_{\Phi=0^\circ} - \bar{a}$  (рис. 23) и разностей  $d = \rho_{\Phi=0^\circ, \Lambda} + \rho_{\Phi=0^\circ, \Lambda+180^\circ} - 2a$  (рис. 24).

Вполне аналогично можно было бы отдельно изучать меридиональное сечение. Меридиональный профиль геоида по сечению эллипса плоскостью, содержащей большую полуось, дан на рис. 25 и 26 по сечению плоскостью, содержащей малую полуось.

Описанным способом, каким были получены параметры соответствующего экваториального эллипса, можно было бы определить и параметры  $a_\mu$ ,  $(e_1)_\mu$ ,  $(\Lambda_a)_\mu$  эллипса, соответствующего разрезу геоида при  $\Phi = \text{const} = \Phi_\mu$ , т. е.

$$\rho_\mu = A_0^{(\circ)} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n (A_n^{(k)} \cos k\Lambda + B_n^{(k)} \sin k\Lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi_\mu) =$$

$$= (\rho_0)_\mu + \sum_k c_\mu^{(k)} \cos k\Lambda + \sum_k d_\mu^{(k)} \sin k\Lambda,$$

$$(\rho_0)_\mu = A_0^{(\circ)} + \sum_{n=2}^{\infty} A_n^{(\circ)} P_n^{(\circ)}(\sin \Phi_\mu),$$

$$c_\mu^{(2)} = R_0 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a_0}{R_0}\right)^n J_n^{(2)} S_n^{(2)} = P_n^{(2)}(\sin \Phi_\mu),$$

$$d_\mu^{(k)} = R_0 \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{a_0}{R_0}\right)^n J_n^{(k)} S_n^{(k)} P_n^{(k)}(\sin \Phi_\mu).$$

Уравнение этого искомого эллипса при  $\Phi = \Phi_\mu$  имеет вид [79]

$$r_\mu = a_\mu [1 - (e_1)_\mu^2]^{1/2} \{1 - (e_1)_\mu^2 \cos^2[\Lambda - \Lambda_a]\}^{-1/2} \simeq (r_0)_\mu^e +$$

$$+ (c_\mu^{(2)})_e \cos 2\Lambda + (d_\mu^{(2)})_e \sin 2\Lambda + (c_\mu^{(4)})_e \cos 4\Lambda + (d_\mu^{(4)})_e \sin 4\Lambda,$$

$$(r_0)_\mu^e = a_\mu \left[1 - \frac{1}{4}(e_1)_\mu^2 - \frac{7}{64}(e_1)_\mu^4\right],$$

$$(c_\mu^{(2)})_e = a_\mu \left[\frac{1}{4}(e_1)_\mu^2 + \frac{1}{16}(e_1)_\mu^4\right] \cos 2(\Lambda_a)_\mu,$$

$$(d_\mu^{(2)})_e = a_\mu \left[\frac{1}{4}(e_1)_\mu^2 + \frac{1}{16}(e_1)_\mu^4\right] \sin 2(\Lambda_a)_\mu,$$

$$(c_\mu^{(4)})_e = a_\mu \left[\frac{3}{64}(e_1)_\mu^4\right] \cos 4(\Lambda_a)_\mu,$$

$$(d_\mu^{(4)})_e = a_\mu \left[\frac{3}{64}(e_1)_\mu^4\right] \sin 4(\Lambda_a)_\mu,$$

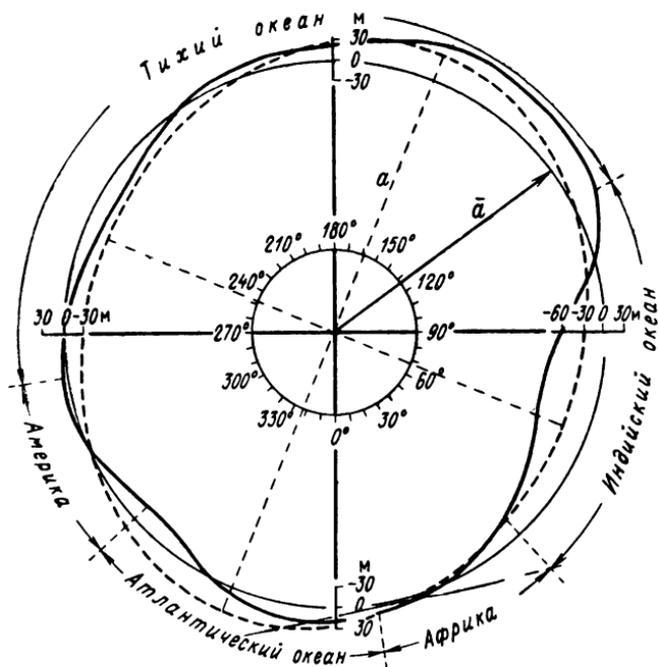


Рис. 22. Экваториальный профиль высот геоида

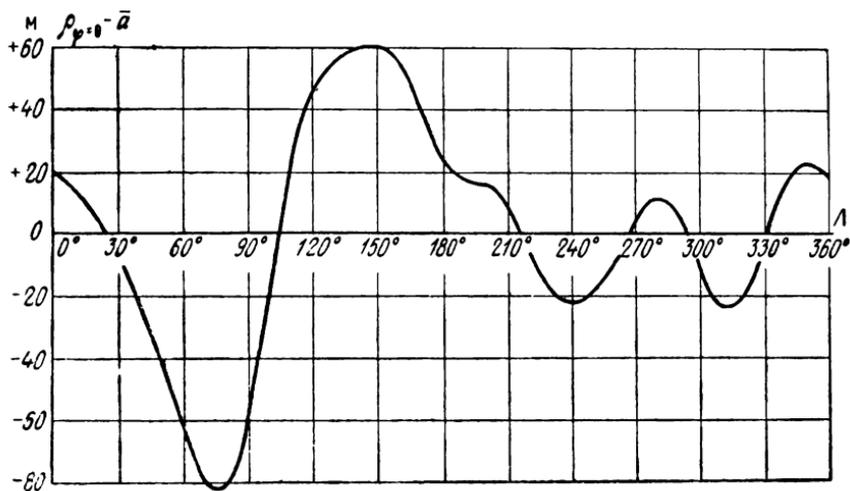


Рис. 23. Изменение разностей  $\rho_{\Phi=0^\circ} - \bar{a}$  в м вдоль экватора

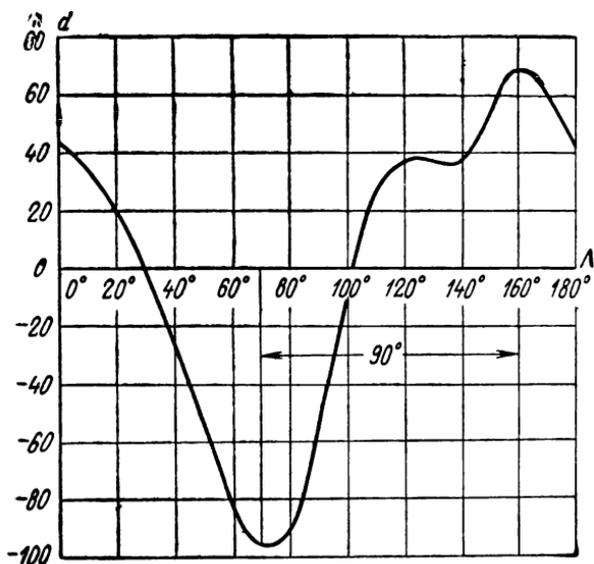


Рис. 24. Ход разностей  $d = \rho_{\Phi=0, \Lambda} + \rho_{\Phi=0, \Lambda+180} - 2\bar{a}$  в м вдоль экватора

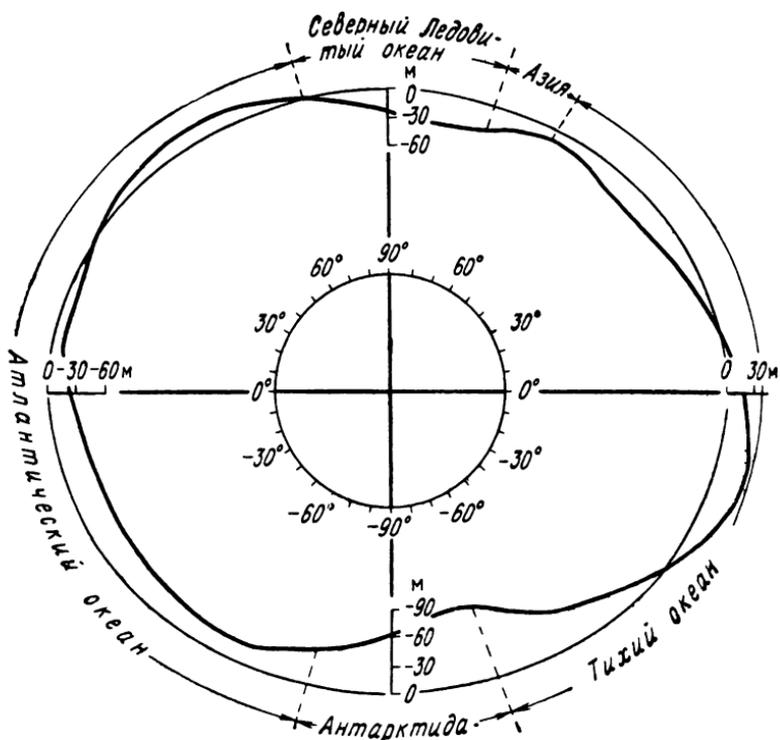


Рис. 25. Меридиональный профиль высот геоида по сечению плоскостью, содержащей большую полуось

а условие для определения его параметров  $a_\mu$ ,  $(e_1)_\mu$ ,  $(\Lambda_a)_\mu$

$$I = \int_0^{2\pi} (\rho_\mu \cos \Phi_\mu - r_\mu)^2 d\Lambda = \min,$$

ИЛИ

$$\frac{\partial I}{\partial p} = 0; \quad p = a_\mu, \quad (e_1)_\mu; \quad (\Lambda_a)_\mu,$$

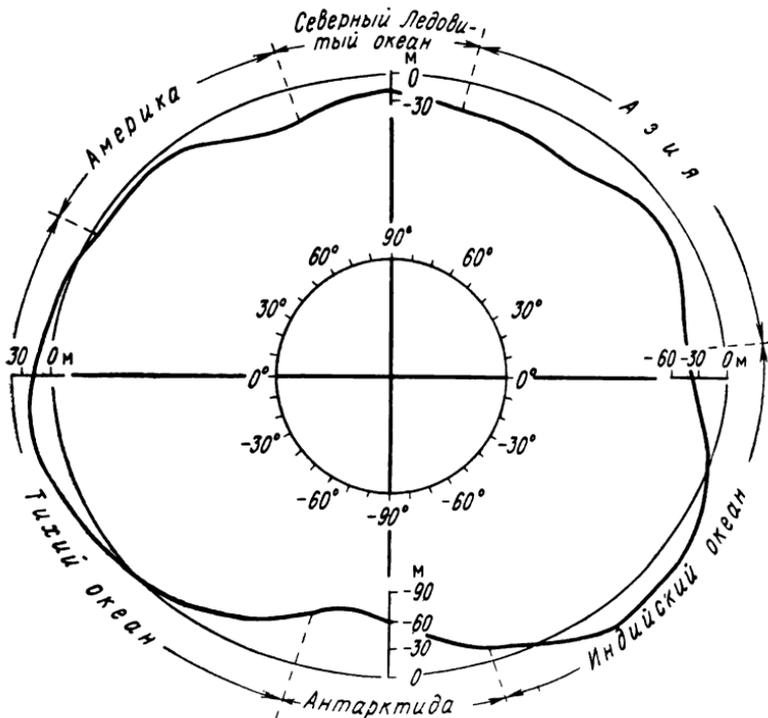


Рис. 26. Меридиональный профиль высот геоида по сечению плоскостью, содержащей малую экваториальную полуось

а поскольку  $\int_0^{2\pi} \sin k\Lambda \cos m\Lambda d\Lambda = 0$

и  $\int_0^{2\pi} \cos k\Lambda \cos m\Lambda d\Lambda = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin k\Lambda \sin m\Lambda d\Lambda = 0,$

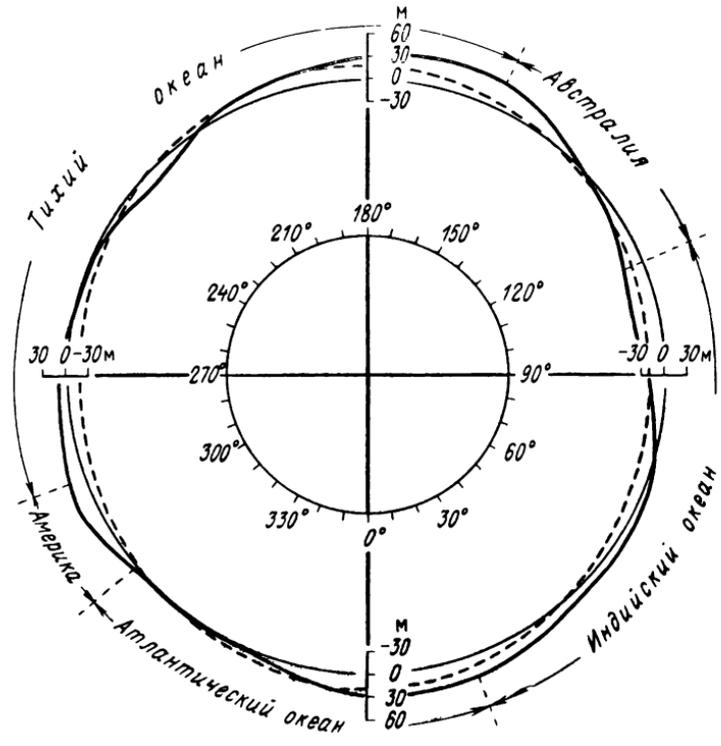
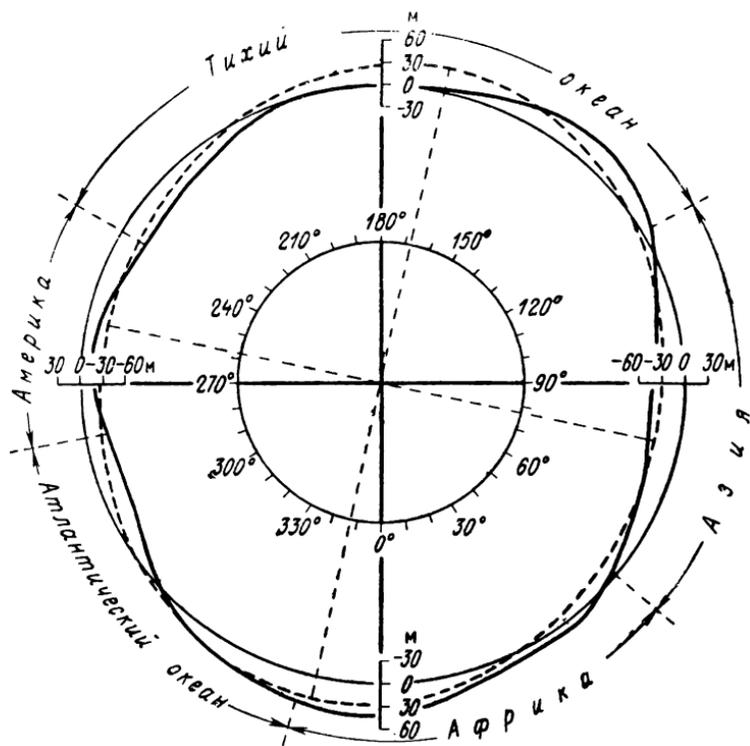


Рис. 27. Профиль геоида относительно эллипса ( $\Phi = 30^\circ$ )    Рис. 28. Профиль геоида относительно эллипса ( $\Phi = -30^\circ$ )

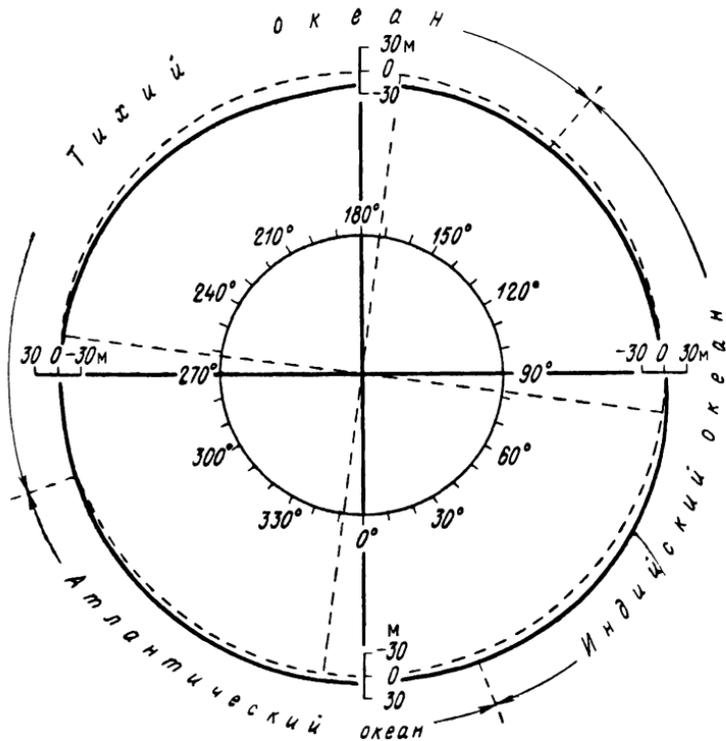
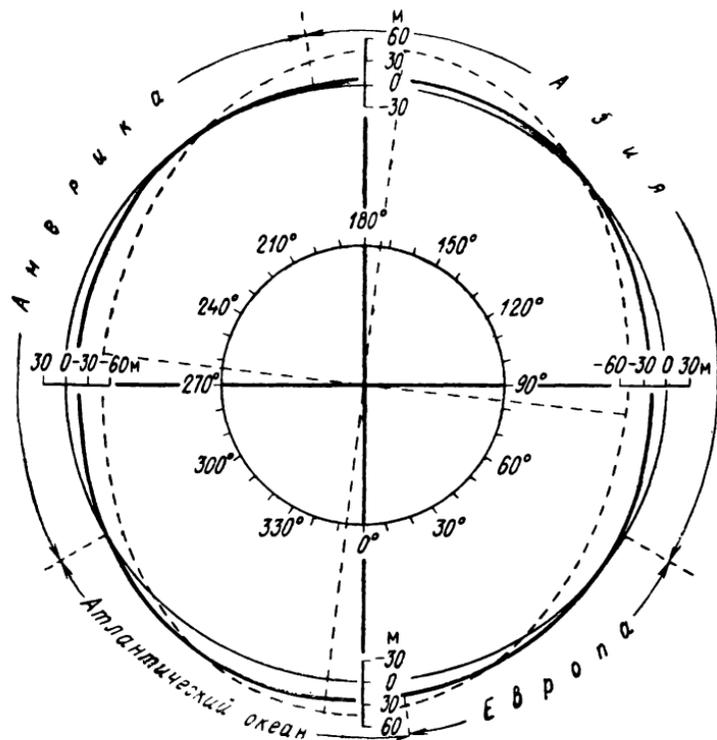


Рис. 29. Профиль геоида относительно эллипса ( $\Phi = 60^\circ$ ) Рис. 30. Профиль геоида относительно эллипса ( $\Phi = -60^\circ$ )

если  $k \neq m$ , то далее

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial p} \int_0^{2\pi} \{ (r_0)_\mu^2 + (c_\mu^{(2)})_e^2 \cos^2 2\Lambda + (d_\mu^{(2)})_e^2 \sin^2 2\Lambda + (c_\mu^{(4)})_e^2 \cos^2 4\Lambda + \\ & + (d_\mu^{(4)})_e^2 \sin^2 4\Lambda - 2(r_0)_\mu (\rho_0)_\mu \cos \Phi_\mu - 2(c_\mu^{(2)})_e c_\mu^{(2)} \cos \Phi_\mu \cos^2 2\Lambda - \\ & - 2(d_\mu^{(2)})_e d_\mu^{(2)} \cos \Phi_\mu \sin^2 2\Lambda - 2(c_\mu^{(4)})_e c_\mu^{(4)} \cos \Phi_\mu \cos^2 4\Lambda - \\ & - 2(d_\mu^{(4)})_e d_\mu^{(4)} \cos \Phi_\mu \sin^2 4\Lambda \} d\Lambda = 0. \end{aligned}$$

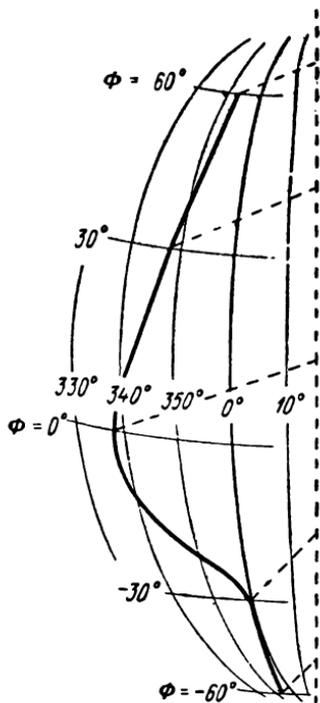


Рис. 31. Ориентация больших полуосей различных эллипсов в сравнении с ориентировкой полуоси экваториального эллипса

Тогда, пренебрегая членами, порядок малости которых выше  $e_1^4$ , получаем

$$\begin{aligned} & 2 \left\{ a_\mu \left[ 1 - \frac{1}{4} (e_1)_\mu^2 \right] - (\rho_0)_\mu \cos \Phi_\mu \right\} \left[ 1 - \frac{1}{4} (e_1)_\mu^2 \right] = 0, \\ & \frac{1}{4} a_\mu (e_1)_\mu^2 - [c_\mu^{(2)} \cos 2(\Lambda_a)_\mu + d_\mu^{(2)} \sin 2(\Lambda_a)_\mu] \times \\ & \times \left[ 1 + \frac{1}{2} (e_1)_\mu^2 \right] \cos \Phi_\mu - 2 \left\{ a_\mu \left[ 1 - \frac{1}{4} (e_1)_\mu^2 \right] - (\rho_0)_\mu \cos \Phi_\mu \right\} \times \\ & \times \left[ 1 + \frac{7}{8} (e_1)_\mu^2 \right] = 0; \quad c_\mu^{(2)} \sin 2(\Lambda_a)_\mu - d_\mu^{(2)} \cos 2(\Lambda_a)_\mu = 0. \end{aligned}$$

Результаты численного решения при  $\varphi = 0, \pm 30^\circ, \pm 60^\circ$  приведены в табл. 14 и для наглядности на рис. 27—30. Интересно, что сжатие

эллипсов северного полушария ( $\Phi = +30^\circ, +60^\circ$ ) больше, чем сжатие эллипса южного полушария ( $\Phi = -30^\circ, -60^\circ$ ). Кроме того, различна и ориентировка больших полуосей между собой, а также по сравнению с ориентировкой полуоси экваториального эллипса (рис. 31). Сжатие эллипса южного полушария, однако, достаточно хорошо соответствует сжатию плоских сечений «трехосного эллипсоида», т. е. «нормальному значению», которое обозначим  $(\alpha_1)^\circ$  и для которого имеет место равенство [79]

$$(\alpha_1)^\circ \simeq \frac{1}{2} \frac{e_1^2 (1 - e^2) \cos^2 \Phi_\mu}{1 - e^2 \cos^2 \Phi_\mu - e_1^2 \sin^2 \Phi_\mu}.$$

Таблица 14

$\Phi$	$\Lambda_a$	$e_1^2 \cdot 10^4$	$(1 : \alpha_1) \cdot 10^{-2}$	$1 : (\alpha_1)^\circ \cdot 10^{-2}$
$60^\circ N$	$6,6^\circ W$	19,5	102	377
$30^\circ N$	$11,6 W$	20,3	99	126
$0^\circ$	$22,5 W$	22,4	89	94
$30^\circ S$	$0,2 W$	11,8	169	126
$60^\circ S$	$8,0 W$	4,2	474	377

#### § 34. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ В ТОЧКАХ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ВО ВНЕШНЕМ ПРОСТРАНСТВЕ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ СПУТНИКОВ

Во внешнем пространстве, где сходимость ряда (577) доказана, можно определить ускорение силы тяжести так

$$g = \sqrt{\left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial W}{\partial \Phi}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2 \cos^2 \Phi} \left(\frac{\partial W}{\partial \Lambda}\right)^2}, \quad (706)$$

причем из (577) имеем с учетом (652) и (585)

$$\frac{\partial W}{\partial \rho} = -\frac{fM}{\rho^2} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[ (n+1) \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^n \sum_{k=0}^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + S_n^{(k)} \sin k\Lambda) P_n^k(\sin \Phi) \right] - \frac{2}{3} q \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{-3} [1 - P_2^{(0)}(\sin \Phi)] \right\}, \quad (707)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \Phi} = \frac{fM}{\rho} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2}^n \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + S_n^{(k)} \sin k\Lambda) [-k \times$$

$$\times \operatorname{tg} \Phi P_n^{(k)}(\sin \Phi) + \mu_1 P_n^{(k+1)}(\sin \Phi)] - \frac{1}{3} q \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{-3} P_2^{(1)}(\sin \Phi) \right\}, \quad (708)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \Lambda} = \frac{fM}{\rho} \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^n \sum_{k=1}^n k (-J_n^{(k)} \sin k\Lambda + S_n^{(k)} \cos k\Lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right]. \quad (709)$$

Если пренебречь членами, содержащими квадраты и произведения динамических коэффициентов, т. е.  $(J_n^{(k)})^2$ ,  $(S_n^{(k)})^2$ ,  $J_n^{(k)}$ ,  $S_n^{(k)}$ ,

а также  $J_n^{(k)} q$ ,  $S_n^{(k)} q$  для всех  $n$  и  $k$ , кроме  $n = 2$ ,  $k = 0$ , и удержать члены с  $(J_2^{(0)})^3$ ,  $q^3$ ,  $J_2^{(0)} q^2$ ,  $(J_2^{(0)})^2 q$ ,  $J_2^{(0)} J_4^{(0)}$ ,  $J_4^{(0)} q$ , то получим

$$g = \frac{fM}{\rho^2} \left[ \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n (n+1) \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + S_n^{(k)} \sin k\Lambda) \times \right. \right. \\ \left. \times P_n^{(k)}(\sin \Phi) - \frac{2}{3} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{-3} q [1 - P_2^{(0)}(\sin \Phi)] \right\}^2 + \\ \left. + \left\{ \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^2 J_2^{(0)} P_2^{(1)}(\sin \Phi) + \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^4 J_4^{(0)} P_4^{(1)}(\sin \Phi) - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{-3} q P_2^{(1)}(\sin \Phi) \right\}^2 \right]^{1/2} \quad (710)$$

или

$$g = \frac{fM}{\rho^2} \left[ \left\{ 1 + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n (n+1) \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + S_n^{(k)} \sin k\Lambda) \times \right. \right. \\ \left. \times P_n^{(k)}(\sin \Phi) - \frac{4}{3} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{-3} q [1 - P_2^{(0)}(\sin \Phi)] + \right. \\ \left. + \left\{ 3 \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^2 J_2^{(0)} P_2^{(0)}(\sin \Phi) + 5 \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^4 J_4^{(0)} P_4^{(0)}(\sin \Phi) - \right. \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{-3} q [1 - P_2^{(0)}(\sin \Phi)] \right\}^2 + \left\{ \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^2 J_2^{(0)} P_2^{(1)}(\sin \Phi) + \right. \\ \left. + \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^4 J_4^{(0)} P_4^{(1)}(\sin \Phi) - \frac{1}{3} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{-3} q P_2^{(1)}(\sin \Phi) \right\}^2 \right]^{1/2} \quad (711)$$

$$g = \frac{fM}{\rho^2} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n (n+1) \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + S_n^{(k)} \sin k\Lambda) \times \right. \\ \left. \times P_n^{(k)}(\sin \Phi) - \frac{4}{3} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{-3} q [1 - P_2^{(0)}(\sin \Phi)] + \right. \\ \left. + \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^4 (J_2^{(0)})^2 (9 [P_2^{(0)}(\sin \Phi)]^2 + [P_2^{(1)}(\sin \Phi)]^2) + \right. \\ \left. + \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{-6} q^2 \left( \frac{4}{9} [1 - P_2^{(0)}(\sin \Phi)]^2 + \frac{1}{9} [P_2^{(1)}(\sin \Phi)]^2 \right) + \right. \\ \left. + \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{-1} J_2^{(0)} q (-4 P_2^{(0)}(\sin \Phi) [1 - P_2^{(0)}(\sin \Phi)] - \right. \\ \left. - \frac{2}{3} [P_2^{(1)}(\sin \Phi)]^2) + \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^6 J_2^{(0)} J_4^{(0)} (30 [P_2^{(0)}(\sin \Phi)] [P_4^{(0)}(\sin \Phi)] + \right. \\ \left. + 2 [P_2^{(1)}(\sin \Phi)] [P_4^{(1)}(\sin \Phi)] + \left( \frac{a_0}{\rho} \right) J_4^{(0)} q \times \right. \\ \left. \times \left( -\frac{20}{3} [1 - P_2^{(0)}(\sin \Phi)] [P_4^{(0)}(\sin \Phi)] - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{3} [P_2^{(1)}(\sin \Phi)] [P_4^{(1)}(\sin \Phi)] \right) \right\}^{1/2} \quad (712)$$

и далее

$$\begin{aligned}
 g = \frac{fM}{\rho^2} & \left\{ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{-3} q [1 - P_2^{(\circ)}(\sin \Phi)] + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n (n+1) \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^n \times \right. \\
 & \times (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + S_n^{(k)} \sin k\Lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) + \frac{1}{2} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^4 (J_2^{(\circ)})^2 [P_2^{(1)}(\sin \Phi)]^2 + \\
 & + \frac{1}{18} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{-6} q^2 [P_2^{(1)}(\sin \Phi)]^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{-1} J_2^{(\circ)} q [P_2^{(1)}(\sin \Phi)]^2 + \\
 & + \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{-4} J_{21}^{(\circ)} q^2 \left( -\frac{1}{6} P_2^{(\circ)}(\sin \Phi) [P_2^{(1)}(\sin \Phi)]^2 - \frac{2}{9} [P_2^{(1)}(\sin \Phi)]^2 \times \right. \\
 & \times [1 - P_2^{(\circ)}(\sin \Phi)] + \frac{1}{27} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{-9} q^3 [1 - P_2^{(\circ)}(\sin \Phi)] [P_2^{(1)}(\sin \Phi)]^2 + \\
 & + \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^6 J_2^{(\circ)} J_4^{(\circ)} [P_2^{(1)}(\sin \Phi)] [P_4^{(1)}(\sin \Phi)] - \\
 & - \frac{1}{3} \left( \frac{a_0}{\rho} \right) J_4^{(\circ)} q [P_2^{(1)}(\sin \Phi)] [P_4^{(1)}(\sin \Phi)] - \\
 & - \frac{3}{2} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^6 (J_2^{(\circ)})^3 [P_2^{(1)}(\sin \Phi)]^2 [P_2^{(\circ)}(\sin \Phi)] + \left. \left( \frac{a_0}{\rho} \right) (J_2^{(\circ)})^2 q \times \right. \\
 & \times \left. \left( \frac{1}{3} [1 - P_2^{(\circ)}(\sin \Phi)] [P_2^{(1)}(\sin \Phi)]^2 + [P_2^{(1)}(\sin \Phi)]^2 [P_2^{(\circ)}(\sin \Phi)] \right) \right\}. \quad (713)
 \end{aligned}$$

Если учесть связь между сферическими функциями (606), то можно (713) переписать в виде

$$g = \frac{fM}{\rho^2} \left\{ C_0^{(\circ)} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=0}^n (C_n^{(k)} \cos k\Lambda + D_n^{(k)} \sin k\Lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right\}, \quad (714)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 C_0^{(\circ)} &= 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{-3} q + \frac{3}{5} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^4 (J_2^{(\circ)})^2 + \frac{1}{15} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{-6} q^2 - \\
 & - \frac{2}{5} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{-1} J_2^{(\circ)} q + \frac{4}{105} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{-9} q^3 - \frac{9}{35} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{-4} J_2^{(\circ)} q^2 - \\
 & - \frac{9}{35} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^6 (J_2^{(\circ)})^3 + \frac{18}{35} \left( \frac{a_0}{\rho} \right) (J_2^{(\circ)})^2 q \\
 C_2^{(\circ)} &= \frac{2}{3} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{-3} q + 3 \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^2 J_2^{(\circ)} + \frac{3}{7} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^4 (J_2^{(\circ)})^2 + \\
 & + \frac{1}{21} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{-6} q^2 - \frac{2}{7} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{-1} J_2^{(\circ)} q - \frac{1}{7} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{-4} J_2^{(\circ)} q^2 + \\
 & + \frac{20}{7} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^6 J_2^{(\circ)} J_4^{(\circ)} - \frac{20}{21} \left( \frac{a_0}{\rho} \right) J_4^{(\circ)} q - \\
 & - \frac{9}{7} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^6 (J_2^{(\circ)})^3 + \frac{6}{7} \left( \frac{a_0}{\rho} \right) (J_2^{(\circ)})^2 q,
 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
C_4^{(0)} &= 5 \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^4 J_4^{(0)} - \frac{36}{35} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^4 (J_2^{(0)})^2 - \frac{4}{35} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{-6} q^2 + \\
&+ \frac{24}{35} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{-1} J_2^{(0)} q + \frac{174}{385} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{-4} J_2^{(0)} q^2 - \frac{4}{55} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{-9} q^3 + \\
&+ \frac{60}{77} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^6 J_2^{(0)} J_4^{(0)} - \frac{20}{77} \left(\frac{a_0}{\rho}\right) J_4^{(0)} q + \\
&+ \frac{54}{385} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^6 J_2^{(0)3} - \frac{288}{385} \left(\frac{a_0}{\rho}\right) (J_2^{(0)})^2 q \\
C_8^{(0)} &= 7 \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^6 J_8^{(0)} - \frac{4}{77} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{-4} J_2^{(0)} q^2 + \frac{8}{231} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{-9} q^3 - \\
&- \frac{40}{11} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^6 J_2^{(0)} J_4^{(0)} + \frac{40}{33} \left(\frac{a_0}{\rho}\right) J_4^{(0)} q + \\
&+ \frac{108}{77} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^6 (J_2^{(0)})^3 - \frac{48}{77} \left(\frac{a_0}{\rho}\right) (J_2^{(0)})^2 q \\
C_n^{(0)} &= (n+1) \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^n J_n^{(0)}, \quad n = 3, 5, 7, 8, \dots, N \\
C_2^{(1)} &= 0, \quad D_2^{(1)} = 0 \\
C_2^{(2)} &= 3 \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^2 J_2^{(2)} \\
D_2^{(2)} &= S_2^{(2)} \\
C_n^{(k)} &= (n+1) \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^n J_n^{(k)}, \quad n = 3, 4, \dots, N, \quad k \neq 0 \\
D_n^{(k)} &= S_n^{(k)}
\end{aligned} \tag{715}$$

При помощи формул (714) можно вычислить ускорение силы тяжести в произвольной точке внешнего пространства с координатами  $\rho$ ,  $\Phi$ ,  $\Lambda$ . Если не учитывается составляющая центробежной силы и речь идет только об ускорении притяжения, нужно в (714) принять  $q = 0$ . Результат, конечно, не учитывает влияние массы атмосферы и гравитационного действия Луны и Солнца.

Во внешнем пространстве можно из (714) определить также градиенты силы тяжести, например радиальный градиент силы тяжести

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial \rho} &= -\frac{2fM}{\rho^3} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{-3} q + \left[ 6 \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^2 J_2^{(0)} - \right. \right. \\
&\left. \left. - \frac{1}{3} \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^{-3} q \right] P_2^{(0)}(\sin \Phi) + \text{члены 2-го и высшего порядков} \right\}. \tag{716}
\end{aligned}$$

Если подставить в (714) вместо радиуса-вектора функцию

$$\rho = \rho(\Phi, \Lambda), \tag{717}$$

которая обычно определяет поверхность, то получим формулы для ускорения силы тяжести непосредственно на этой поверхности как функцию координат  $\Phi$ ,  $\Lambda$ .

Прежде всего рассмотрим внешнюю уровенную поверхность с потенциалом  $W_i$  и линейным масштабным коэффициентом

$$R_l = \frac{fM}{W_i}. \quad (718)$$

Ее уравнение с точки зрения дальнейшего использования лучше рассмотреть в виде

$$\rho = R_l \left\{ 1 + (A_0^{(\circ)})_i + \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n [(A_n^{(k)})_i \cos k\Lambda + (B_n^{(k)})_i \sin k\Lambda] P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right\}, \quad (719)$$

где выражения для коэффициентов  $(A_n^{(k)})_i$ ,  $(B_n^{(k)})_i$  задаются равенствами вида (607)

$$\left. \begin{aligned} (A_0^{(\circ)})_i &= \frac{1}{3} \left( \frac{a_0}{R_l} \right)^{-3} q + \frac{2}{5} \left( \frac{a_0}{R_l} \right)^{-6} q^2 - \frac{1}{15} \left( \frac{a_0}{R_l} \right)^{-1} J_2^{(\circ)} q - \\ &\quad - \frac{2}{5} \left( \frac{a_0}{R_l} \right)^4 (J_2^{(\circ)})^2 + \frac{24}{35} \left( \frac{a_0}{R_l} \right)^{-9} q^3 - \frac{8}{35} \left( \frac{a_0}{R_l} \right)^{-4} J_2^{(\circ)} q^2 \\ (A_2^{(\circ)})_i &= \left( \frac{a_0}{R_l} \right)^2 J_2^{(\circ)} - \frac{1}{3} \left( \frac{a_0}{R_l} \right)^{-3} q - \frac{4}{7} \left( \frac{a_0}{R_l} \right)^{-6} q^2 + \\ &\quad + \frac{5}{21} \left( \frac{a_0}{R_l} \right)^{-1} J_2^{(\circ)} q - \frac{4}{7} \left( \frac{a_0}{R_l} \right)^4 (J_2^{(\circ)})^2 - \frac{8}{7} \left( \frac{a_0}{R_l} \right)^{-9} q^3 + \\ &\quad + \frac{4}{7} \left( \frac{a_0}{R_l} \right)^{-4} J_2^{(\circ)} q^2 \\ (A_4^{(\circ)})_i &= \left( \frac{a_0}{R_l} \right) J_4^{(\circ)} + \frac{6}{35} \left( \frac{a_0}{R_l} \right)^{-6} q^2 - \frac{6}{35} \left( \frac{a_0}{R_l} \right)^{-1} J_2^{(\circ)} q - \\ &\quad - \frac{36}{35} \left( \frac{a_0}{R_l} \right)^4 (J_2^{(\circ)})^2 + \frac{216}{385} \left( \frac{a_0}{R_l} \right)^{-9} q^3 - \frac{192}{385} \left( \frac{a_0}{R_l} \right)^{-4} J_2^{(\circ)} q^2 \\ (A_6^{(\circ)})_i &= \left( \frac{a_0}{R_l} \right)^6 J_6^{(\circ)} - \frac{8}{77} \left( \frac{a_0}{R_l} \right)^{-9} q^3 + \frac{12}{77} \left( \frac{a_0}{R_l} \right)^{-4} J_2^{(\circ)} q^2 \\ (A_n^{(\circ)})_i &= \left( \frac{a_0}{R_l} \right)^n J_n^{(\circ)}, \quad n = 3, 5, 7, 8, \dots, N \\ (A_2^{(1)})_i &= 0, \quad (B_2^{(1)})_i = 0 \\ (A_2^{(2)})_i &= \left( \frac{a_0}{R_l} \right)^2 J_2^{(2)}, \quad (A_n^{(k)})_i = \left( \frac{a_0}{R_l} \right)^n J_n^{(k)}, \quad n = 3, 4, \dots, N \\ (B_2^{(2)})_i &= \left( \frac{a_0}{R_l} \right)^2 S_2^{(2)}, \quad (B_n^{(k)})_i = \left( \frac{a_0}{R_l} \right)^n S_n^{(k)}, \quad k \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (720)$$

Если подставим (719), (720) в (714), то получим, отбрасывая члены  $(J_2^{(\circ)})^2 q$ ,  $(J_2^{(\circ)})^3$ ,  $J_2^{(\circ)} J_4^{(\circ)}$ ,  $J_4^{(\circ)} q$ , следующее уравнение для силы тяжести

$$\begin{aligned}
g = & \frac{fM}{R_i^3} \left\{ 1 + (A_0^{(c)})_i + \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n [(A_n^{(k)})_i \cos k\Lambda + \right. \\
& \left. + (B_n^{(k)})_i (\sin k\Lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi)] \right\}^{-2} \left\{ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-3} q \left[ 1 + \right. \right. \\
& \left. \left. + (A_0^{(c)})_i + (A_2^{(c)})_i P_2^{(c)}(\sin \Phi) + (A_4^{(c)})_i P_4^{(c)}(\sin \Phi) \right]^3 + \right. \\
& \left. + \frac{3}{5} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^4 (J_2^{(c)})^2 + \frac{1}{15} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-6} q^2 \left[ 1 + (A_0^{(c)})_i + \right. \right. \\
& \left. \left. + (A_2^{(c)})_i P_2^{(c)}(\sin \Phi) \right]^6 - \frac{2}{5} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-1} J_2^{(c)} q \left[ 1 + (A_0^{(c)})_i + \right. \right. \\
& \left. \left. + (A_2^{(c)})_i P_2^{(c)}(\sin \Phi) \right] - \frac{9}{35} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-4} J_2^{(c)} q^2 + \frac{4}{105} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-9} q^3 + \right. \\
& \left. + P_2^{(c)}(\sin \Phi) \left( \frac{2}{3} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-3} q \left[ 1 + (A_0^{(c)})_i + (A_2^{(c)})_i P_2^{(c)}(\sin \Phi) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + (A_4^{(c)})_i P_4^{(c)}(\sin \Phi) \right]^3 + 3 \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^2 J_2^{(c)} \left[ 1 + (A_0^{(c)})_i + (A_2^{(c)})_i P_2^{(c)}(\sin \Phi) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + (A_4^{(c)})_i P_4^{(c)}(\sin \Phi) \right]^{-2} + \frac{3}{7} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^4 (J_2^{(c)})^2 + \frac{1}{21} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-6} q^2 \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \left[ 1 + (A_0^{(c)})_i + (A_2^{(c)})_i P_2^{(c)}(\sin \Phi) \right]^6 - \frac{2}{7} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-1} J_2^{(c)} q \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \left[ 1 + (A_0^{(c)})_i + (A_2^{(c)})_i P_2^{(c)}(\sin \Phi) \right] - \frac{1}{7} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-4} J_2^{(c)} q^2 \right) + \right. \\
& \left. \left. + P_4^{(c)}(\sin \Phi) \left( 5 \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^4 J_4^{(c)} - \frac{36}{35} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^4 (J_2^{(c)})^2 - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{4}{35} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-6} q^2 \left[ 1 + (A_0^{(c)})_i + (A_2^{(c)})_i P_2^{(c)}(\sin \Phi) \right]^6 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{24}{35} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-1} J_2^{(c)} q \left[ 1 + (A_0^{(c)})_i + (A_2^{(c)})_i P_2^{(c)}(\sin \Phi) \right] - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - \frac{4}{55} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-9} q^3 + \frac{174}{385} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-4} J_2^{(c)} q^2 \right) + P_6^{(c)}(\sin \Phi) \times \right. \right. \\
& \left. \left. \times \left( 7 \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^6 J_6^{(c)} + \frac{8}{231} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-9} q^3 - \frac{4}{77} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-4} J_2^{(c)} q^2 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + 3 \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^2 (J_2^{(2)} \cos 2\Lambda + S_2^{(2)} \sin 2\Lambda) P_2^{(2)}(\sin \Phi) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \sum_{n=3}^N \sum_{k=1}^n (n+1) \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + S_n^{(k)} \sin k\Lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \sum_{n=3, 5, 7, 8, \dots, N} (n+1) \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^n J_n^{(c)} P_n^{(c)}(\sin \Phi) \right. \right. \right.
\end{aligned} \tag{721}$$

ИЛИ

$$g = (g_0^{(c)})_i + \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n [(g_n^{(k)})_i \cos k\Lambda + (h_n^{(k)})_i \sin k\Lambda] P_n^{(k)}(\sin \Phi), \tag{722}$$

где

$$\begin{aligned}
 (g_0^{(c)})_i &= \frac{fM}{R_i^2} \left[ 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-3} q - \frac{3}{5} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-6} q^2 + \right. \\
 &+ \frac{4}{15} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-1} J_2^{(c)} q - \frac{2}{5} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^4 (J_2^{(c)})^2 - \frac{4}{5} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-9} q^3 + \\
 &\quad \left. + \frac{1}{5} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-4} J_2^{(c)} q^2 \right] \\
 (g_2^{(c)})_i &= \frac{fM}{R_i^2} \left[ \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^2 J_2^{(c)} + \frac{4}{3} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-3} q + \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-6} q^2 - \right. \\
 &- \frac{8}{3} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-1} J_2^{(c)} q - \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^4 (J_2^{(c)})^2 + \frac{8}{7} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-9} q^3 - \\
 &\quad \left. - \frac{5}{7} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-4} J_2^{(c)} q^2 \right] \\
 (g_4^{(c)})_i &= \frac{fM}{R_i^2} \left[ 3 \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^4 J_4^{(c)} - \frac{2}{5} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-6} q^2 + \frac{12}{5} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-1} J_2^{(c)} q - \right. \\
 &- \frac{18}{5} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^4 (J_2^{(c)})^2 - \frac{372}{385} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-9} q^3 + \frac{338}{385} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-4} J_2^{(c)} q^2 \left. \right] \quad (723) \\
 (g_6^{(c)})_i &= \frac{fM}{R_i^2} \left[ 5 \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^6 J_6^{(c)} - \frac{4}{11} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-4} J_2^{(c)} q^2 + \frac{8}{33} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-9} q^3 \right] \\
 (g_n^{(c)})_i &= \frac{fM}{R_i^2} (n-1) \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^n J_n^{(c)}, \quad n = 3; 5; 7; 8, \dots, N \\
 (g_2^{(1)})_i &= 0, \quad (g_2^{(2)})_i = \frac{fM}{R_i^2} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^2 J_2^{(2)} \\
 (h_2^{(1)})_i &= 0, \quad (h_2^{(2)})_i = \frac{fM}{R_i^2} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^2 S_2^{(2)} \\
 (g_n^{(h)})_i &= \frac{fM}{R_i^2} (n-1) \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^n (J_n^{(h)}) \quad n = 3, 4, \dots, N \\
 (h_n^{(h)})_i &= \frac{fM}{R_i^2} (n-1) \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^n (S_n^{(h)}) \quad k \neq 0
 \end{aligned}$$

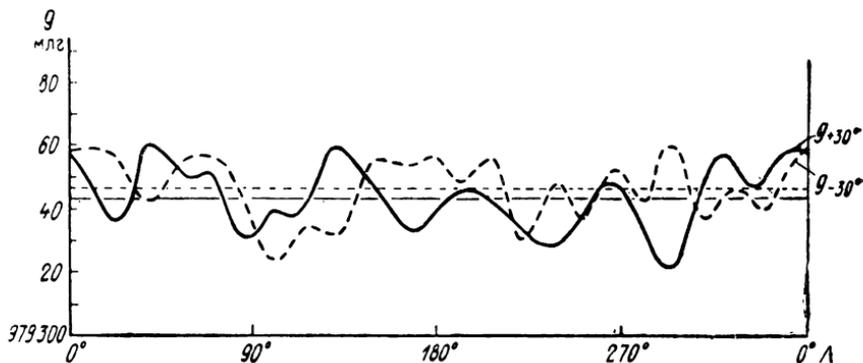


Рис. 32. Профили ускорений силы тяжести на геоиде при  $\Phi = 30^\circ$  и  $\Phi = -30^\circ$

Численные значения нормированных коэффициентов (723), соответствующих совокупности динамических постоянных [51], [52]  $R_i = R_0 = 6\,363\,675$  м и  $W_i = W_0 = 62637,23 \cdot 10^3$  м<sup>2</sup> с<sup>-2</sup>, т. е. для поверхности геоида (см. (586), (583), приводятся в табл. 15–16. Для иллюстрации приводим схематическую карту изменения силы тяжести по сечениям геоида  $\Phi = 30^\circ$  и  $\Phi = -30^\circ$  (рис. 32).

$n$	$g_n^{(0)}$ , млг	$n$	$g_n^{(0)}$ , млг
0	979 773,11	11	-1,77
2	3 461,69	12	-0,58
3	5,08	13	1,77
4	-12,93	14	2,30
5	0,69	15	0,92
6	-2,69	16	-6,88
7	2,52	17	0,85
8	0,90	18	5,66
9	0,17	19	1,38
10	3,07	20	-6,55

Используя формулу (722), можно легко получить выражения для горизонтальных градиентов силы тяжести  $\frac{dg}{d\Phi}$ ,  $\frac{dg}{d\Lambda}$ , а также производные  $\frac{d^2g}{d\Phi^2}$ ,  $\frac{d^2g}{d\Phi d\Lambda}$ ,  $\frac{d^2g}{d\Lambda^2}$  и т. п.

С учетом формул (652), (654) можно написать

$$\frac{\partial g}{\partial \Phi} = \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n \{[(g_n^{(k)})_i \cos k\Lambda + (h_n^{(k)})_i \sin k\Lambda] \times \\ \times [-k \operatorname{tg} \Phi P_n^{(k)}(\sin \Phi) + \mu_1 P_n^{(k+1)}(\sin \Phi)]\}, \quad (724)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \Phi^2} = \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n \{[(g_n^{(k)})_i \cos k\Lambda + (h_n^{(k)})_i \sin k\Lambda] [k \sec^2 \Phi (k \sin^2 \Phi - 1) \times \\ \times P_n^{(k)}(\sin \Phi) - \mu_1 (2k+1) \operatorname{tg} \Phi P_n^{(k+1)}(\sin \Phi) + \mu_2 P_n^{(k+2)}(\sin \Phi)]\}, \quad (725)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \Lambda} = \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n k [-(g_n^{(k)})_i \sin k\Lambda + (h_n^{(k)})_i \cos k\Lambda] P_n^{(k)}(\sin \Phi), \quad (726)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \Lambda^2} = \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n k^2 [-(g_n^{(k)})_i \cos k\Lambda - (h_n^{(k)})_i \sin k\Lambda] P_n^{(k)}(\sin \Phi), \quad (727)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \Phi \partial \Lambda} = \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n \{k [-(g_n^{(k)})_i \sin k\Lambda + (h_n^{(k)})_i \cos k\Lambda] \times \\ \times [-k \operatorname{tg} \Phi P_n^{(k)}(\sin \Phi) + \mu_1 P_n^{(k+1)}(\sin \Phi)]\}. \quad (728)$$

Приближенно вертикальный градиент силы тяжести на поверхности  $W = W_i$  получим после подстановки (719) в уравнение (716)

$$\frac{\partial g}{\partial \rho} = -\frac{2fM}{R_t^2} \left\{ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{a_0}{R_t} \right)^{-3} q + \right. \\ \left. + \left[ 3 \left( \frac{a_0}{R_t} \right)^2 J_2^{(0)} + \frac{2}{3} \left( \frac{a_0}{R_t} \right)^{-3} q \right] P_2^{(0)}(\sin \Phi) \right\}. \quad (729)$$

Таблица 16

$n$	$k$	$\bar{g}_n^{(k)}$ , МЛГ	$\bar{h}_n^{(k)}$ , МЛГ	$n$	$k$	$\bar{g}_n^{(k)}$ , МЛГ	$\bar{h}_n^{(k)}$ , МЛГ
2	2	2,35	-1,33	10	7	0,36	-0,45
3	1	3,39	0,46	8	0,36	-0,45	
	2	1,66	-1,01	9	0,45	-0,36	
	3	1,31	2,83	10	0,27	-0,18	
4	1	-1,40	-1,16	11	1	-0,30	0,20
	2	1,04	1,43		2	0,50	-0,50
	3	2,74	-0,72		3	0,10	-0,81
	4	0,11	0,89		4	-0,30	0,00
5	1	-0,24	-0,20		5	0,30	0,20
	2	2,11	-0,84	6	-0,30	-0,20	
	3	-1,59	0,28	7	0,30	-0,30	
	4	-0,80	0,08	8	0,40	-0,20	
	5	0,72	-2,23	9	0,30	0,10	
6	1	-0,40	0,05	10	-0,30	-0,10	
	2	0,05	-1,35	11	1,01	0,61	
	3	-0,20	0,15	12	1	-1,00	-0,78
	4	-0,40	-2,39		2	-0,67	0,22
	5	-1,30	-2,29		3	0,33	0,22
	6	-0,10	-0,80		4	-0,56	0,11
7	1	1,02	0,66		5	0,22	0,11
	2	1,92	0,96		6	-0,11	0,11
	3	1,08	0,00	7	-0,45	-0,22	
	4	-0,96	-0,24	8	0,00	0,11	
	5	0,42	-0,06	9	-0,11	0,22	
	6	-1,38	0,60	10	-0,11	0,00	
	7	0,42	0,36	11	-0,56	-0,22	
8	1	-0,07	-0,07	12	-0,11	-0,11	
	2	0,28	0,28	13	1	0,00	0,49
	3	-0,21	0,00		2	-0,36	0,12
	4	-1,19	-0,14		3	0,00	0,36
	5	-0,63	0,63		4	0,12	-0,24
	6	-0,07	2,10		5	0,36	-0,24
	7	0,14	0,28		6	-0,36	0,61
	8	-1,26	0,21		7	-0,24	0,00
9	1	0,88	0,00		8	-0,24	-0,12
	2	0,24	0,40	9	0,24	0,61	
	3	-0,24	-0,08	10	0,49	-0,24	
	4	0,56	0,16	11	-0,24	0,12	
	5	-0,32	0,32	12	-0,24	0,73	
	6	0,32	0,08	13	-0,85	0,00	
	7	0,32	-0,16	14	1	-0,13	0,26
	8	1,04	0,00		2	-0,13	-0,53
	9	0,64	0,32		3	0,79	-0,40
10	1	0,91	-0,63		4	0,00	0,00
	2	-0,72	-0,54		5	0,66	-0,40
	3	-0,72	-0,45		6	0,13	-0,40
	4	-0,54	-0,72		7	0,40	0,26
	5	0,18	-0,18	8	-0,40	-0,40	
	6	-0,36	-0,09	9	0,40	0,92	
				10	0,53	0,13	
				11	0,53	0,13	

$n$	$k$	$\bar{g}_n^{(k)}$ , мЛГ	$\bar{h}_n^{(k)}$ , мЛГ	$n$	$k$	$\bar{g}_n^{(k)}$ , мЛГ	$\bar{h}_n^{(k)}$ , мЛГ
15	12	0,66	-0,40	15	7	0,43	0,57
	13	0,13	0,53		8	-0,86	0,00
	14	-0,53	0,26		9	0,00	0,57
	1	0,14	-0,14		10	0,29	0,14
	2	-0,29	-0,43		11	0,14	0,14
	3	0,29	0,43		12	-1,00	0,71
	4	0,00	0,14		13	-0,71	-0,43
	5	0,43	-0,29		14	0,14	-0,43
	6	0,43	0,71		15	-0,29	-0,14

Аналогично формуле (722) выведем формулу для ускорения силы тяжести  $g_e$  на поверхности трехосного эллипсоида

$$g_e = g_e(\Phi, \Lambda). \quad (730)$$

Выражения для радиус-вектора  $\rho_e$  уже получены в виде разложения по сферическим функциям в § 31. Здесь используем выражение

$$\rho_e = a_i \left\{ 1 + (a_0^{(0)})_i + \sum_n \sum_k [(a_n^{(k)})_i \cos k\Lambda + (b_n^{(k)})_i \sin k\Lambda] P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right\}, \quad (731)$$

где  $a_i$  — большая полуось экваториального эллипса рассматриваемого  $i$ -го внешнего эллипсоида. Коэффициенты  $(a_n^{(k)})_i$ ,  $(b_n^{(k)})_i$ , согласно (621), равны

$$(a_0^{(0)})_i = \frac{a_0^{(0)}}{a} - 1; \quad (a_n^{(k)})_i = \frac{a_n^{(k)}}{a}; \quad (b_n^{(k)})_i = \frac{b_n^{(k)}}{a}. \quad (732)$$

Предположим, что параметры этого эллипсоида  $a_i$ ,  $e^2$ ,  $e_1^2$ ,  $\Lambda_a$  близки к параметрам соответствующего земного эллипсоида.

Если подставим (731) в (714), то, пренебрегая членами порядка  $10^{-9}$ , получим

$$g_e = \frac{fM}{a_i^2} \left\{ 1 + (a_0^{(0)})_i + (a_2^{(0)})_i P_2^{(0)}(\sin \Phi) + [(a_2^{(2)})_i \cos 2\Lambda + (b_2^{(2)})_i \sin 2\Lambda] P_2^{(2)}(\sin \Phi) + (a_4^{(0)})_i P_4^{(0)}(\sin \Phi) + [(a_4^{(2)})_i \cos 2\Lambda + (b_4^{(2)})_i \sin 2\Lambda] P_4^{(2)}(\sin \Phi) + (a_6^{(0)})_i P_6^{(0)}(\sin \Phi) \right\}^{-2} \times \\ \times \left\{ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-3} q [1 + (a_0^{(0)})_i + (a_2^{(0)})_i P_2^{(0)}(\sin \Phi) + (a_4^{(0)})_i P_4^{(0)}(\sin \Phi)]^3 + \frac{3}{5} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^4 (J_2^{(0)})^2 + \frac{1}{15} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-6} q^2 - \frac{2}{5} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-1} J_2^{(0)} q + P_2^{(0)}(\sin \Phi) \left( \frac{2}{3} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-3} q [1 + (a_0^{(0)})_i + (a_2^{(0)})_i P_2^{(0)}(\sin \Phi) + (a_4^{(0)})_i P_4^{(0)}(\sin \Phi)]^3 + 3 \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^2 \times \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times J_2^{(\circ)} [1 + (a_0^{(\circ)})_i + (a_2^{(\circ)})_i P_2^{(\circ)}(\sin \Phi) + (a_4^{(\circ)}) P_4^{(\circ)}(\sin \Phi)]^{-2} + \\
& + \frac{3}{7} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^4 (J_2^{(\circ)})^2 + \frac{1}{21} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-6} q^2 - \frac{2}{7} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-1} J_2^{(\circ)} q \Big) + \\
& + P_4^{(\circ)}(\sin \Phi) \left[ 5 \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^4 J_4^{(\circ)} - \frac{36}{35} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^4 (J_2^{(\circ)})^2 - \frac{4}{35} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-6} q^2 + \right. \\
& \left. + \frac{24}{35} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-1} J_2^{(\circ)} q \right] + 3 \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^2 (J_2^{(2)} \cos 2\Lambda + S_2^{(2)} \sin 2\Lambda) \times \\
& \times P_2^{(2)}(\sin \varphi) + \sum_{n=3}^N \sum_{k=1}^n (n+1) \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + S_n^{(k)} \sin k\Lambda) \times \\
& \times P_n^{(k)}(\sin \Phi) + \sum_{n=3;5,6,\dots,N} (n+1) \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^n J_n^{(\circ)} P_n^{(\circ)}(\sin \Phi) \Big\} \quad (733)
\end{aligned}$$

ИЛИ

$$g_\varepsilon = (g_0^{(\circ)})_\varepsilon + \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n [(g_n^{(k)})_\varepsilon \cos k\Lambda + (h_n^{(k)})_\varepsilon \sin k\Lambda] P_n^{(k)}(\sin \Phi), \quad (734)$$

где

$$\begin{aligned}
(g_0^{(\circ)})_\varepsilon &= \frac{fM}{a_i^2} \left\{ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-3} q - 2(a_0^{(\circ)})_i - \frac{2}{3} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-3} q \left[ (a_0^{(\circ)})_i - \right. \right. \\
& - \left. \frac{1}{5} (a_2^{(\circ)})_i \right] - \frac{12}{5} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^2 J_2^{(\circ)} (a_2^{(\circ)})_i + 3(a_0^{(\circ)})_i^2 + \frac{3}{5} (a_2^{(\circ)})_i^2 + \\
& + \frac{1}{15} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-6} q^2 - \frac{2}{5} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-1} J_2^{(\circ)} q + \frac{3}{5} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^4 (J_2^{(\circ)})^2 + \\
& + \frac{4}{105} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-9} q^3 - \frac{8}{35} (a_2^{(\circ)})_i^3 - \frac{9}{35} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^6 (J_2^{(\circ)})^3 - 4(a_0^{(\circ)})_i^3 - \\
& - \frac{9}{35} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-4} J_2^{(\circ)} q^2 + \frac{4}{15} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-6} q^2 (a_0^{(\circ)})_i - \frac{18}{5} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^4 \times \\
& \times (J_2^{(\circ)})^2 (a_0^{(\circ)})_i + \frac{2}{5} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-1} J_2^{(\circ)} q (a_0^{(\circ)})_i + \frac{18}{35} \left( \frac{a_0}{a_i} \right) (J_2^{(\circ)})^2 q + \\
& + 12 \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^2 J_2^{(\circ)} (a_0^{(\circ)})_i (a_2^{(\circ)})_i - \frac{18}{35} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^4 (J_2^{(\circ)})^2 (a_2^{(\circ)})_i + \\
& + \frac{4}{105} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-6} q^2 (a_2^{(\circ)})_i + \frac{2}{35} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-1} J_2^{(\circ)} q (a_2^{(\circ)})_i + \\
& \left. + \frac{12}{7} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^2 J_2^{(\circ)} (a_2^{(\circ)})_i^2 - \frac{12}{5} (a_0^{(\circ)})_i (a_2^{(\circ)})_i^2 \right\}, \\
(g_2^{(\circ)})_\varepsilon &= \frac{fM}{a_i^2} \left\{ \frac{2}{3} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-3} q + 3 \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^2 J_2^{(\circ)} - 2(a_2^{(\circ)})_i + \right. \\
& + \frac{2}{3} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-3} q \left[ (a_0^{(\circ)})_i - \frac{5}{7} (a_2^{(\circ)})_i \right] - 12 \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^2 J_2^{(\circ)} \left[ (a_0^{(\circ)})_i + \right. \\
& \left. + \frac{2}{7} (a_2^{(\circ)})_i \right] + 6(a_0^{(\circ)})_i (a_2^{(\circ)})_i + \frac{6}{7} (a_2^{(\circ)})_i^2 + \frac{1}{21} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-6} q^2 - \\
& \left. - \frac{2}{7} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-1} J_2^{(\circ)} q + \frac{3}{7} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^4 (J_2^{(\circ)})^2 - \frac{9}{7} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^6 (J_2^{(\circ)})^3 - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{12}{7}(a_2^{(c)})_i^3 - \frac{1}{7}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-4} J_2^{(c)2} q^2 + \frac{4}{21}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-6} q^2 (a_0^{(c)})_i - \\
& -\frac{18}{7}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 (J_2^{(c)})^2 (a_0^{(c)})_i + \frac{2}{7}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-1} J_2^{(c)} q (a_0^{(c)})_i + \\
& + \frac{6}{7}\left(\frac{a_0}{a_i}\right) (J_2^{(c)})^2 q + \frac{120}{7}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} (a_0^{(c)})_i (a_2^{(c)})_i - \frac{18}{7}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 \times \\
& \times (J_2^{(c)})^2 (a_2^{(c)})_i + \frac{4}{21}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-6} q^2 (a_2^{(c)})_i + \frac{2}{7}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-1} J_2^{(c)} q (a_2^{(c)})_i + \\
& + \frac{90}{7}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} (a_2^{(c)})_i^2 - \frac{24}{7}(a_0^{(c)})_i (a_2^{(c)})_i^2 + 30\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} (a_0^{(c)})_i^2 + \\
& + \frac{20}{7}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^6 J_2^{(c)} J_4^{(c)} - \frac{20}{21}\left(\frac{a_0}{a_i}\right) J_4^{(c)} q - \frac{24}{7}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} (a_4^{(c)})_i + \\
& + \frac{4}{21}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q (a_4^{(c)})_i - \frac{20}{7}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 J_4^{(c)} (a_2^{(c)})_i - 12(a_0^{(c)})_i^2 (a_2^{(c)})_i + \\
& + \frac{12}{7}(a_2^{(c)})_i (a_4^{(c)})_i - \frac{40}{7}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 J_4^{(c)} (a_2^{(c)})_i \Big\}, \\
(g_4^{(c)})_i^2 = & \frac{fM}{a_i^2} \left[ 5\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 J_4^{(c)} - 2(a_4^{(c)})_i - \frac{216}{35}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} (a_2^{(c)})_i + \right. \\
& + \frac{54}{35}(a_2^{(c)})_i^2 + \frac{12}{35}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q (a_2^{(c)})_i - \frac{4}{35}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-6} q^2 + \\
& + \frac{24}{35}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-1} J_2^{(c)} q - \frac{36}{35}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 (J_2^{(c)})^2 - \frac{4}{55}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-9} q^3 + \\
& + \frac{54}{385}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^6 (J_2^{(c)})^3 - \frac{432}{385}(a_2^{(c)})_i^3 + \frac{174}{385}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-4} J_2^{(c)} q^2 - \\
& - \frac{16}{35}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-6} q^2 (a_0^{(c)})_i + \frac{216}{35}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 (J_2^{(0)})^2 (a_0^{(0)})_i - \frac{24}{35}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-1} \times \\
& \times J_2^{(0)} q (a_0^{(0)})_i - \frac{288}{385}\left(\frac{a_0}{a_i}\right) (J_2^{(0)})^2 q + \frac{216}{7}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(0)} (a_0^{(0)})_i (a_2^{(0)})_i + \\
& + \frac{108}{385}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 (J_2^{(0)})^2 (a_2^{(0)})_i - \frac{8}{385}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-6} q^2 (a_2^{(0)})_i - \frac{12}{385}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-1} \times \\
& \times J_2^{(c)} q (a_2^{(c)})_i + \frac{648}{77}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} (a_2^{(c)})_i^2 - \frac{216}{35}(a_0^{(c)})_i (a_2^{(c)})_i^2 - \frac{38}{77} \times \\
& \times \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q (a_4^{(c)})_i + \frac{60}{77}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^6 J_2^{(c)} J_4^{(c)} - \frac{20}{77}\left(\frac{a_0}{a_i}\right) J_4^{(c)} q - 30 \times \\
& \times \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 J_4^{(c)} (a_0^{(c)})_i - \frac{240}{77}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} (a_4^{(c)})_i - \frac{200}{77}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 J_4^{(c)} (a_2^{(c)})_i - \\
& - \frac{60}{143}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q (a_0^{(c)})_i + 6(a_0^{(c)})_i (a_4^{(c)})_i + \frac{120}{77}(a_2^{(c)})_i (a_4^{(c)})_i - \\
& \left. - \frac{400}{77}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 J_4^{(c)} (a_2^{(c)})_i \right], \\
(g_6^{(c)})_i^2 = & \frac{fM}{a_i^2} \left[ 7\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^6 J_6^{(c)} - 2(a_6^{(c)})_i + \frac{8}{231}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-9} q^3 + \right. \\
& + \frac{108}{77}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^6 (J_2^{(c)})^3 - \frac{72}{77}(a_2^{(c)})_i^3 - \frac{4}{77}\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-4} J_2^{(c)} q^2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{48}{77} \left(\frac{a_0}{a_i}\right) (J_2^{(\circ)})^2 q + \frac{216}{77} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 (J_2^{(\circ)})^2 (a_2^{(\circ)})_i - \\
& -\frac{16}{77} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-6} q^2 (a_2^{(\circ)})_i - \frac{24}{77} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-1} J_2^{(\circ)} q (a_2^{(\circ)})_i + \\
& + \frac{540}{77} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(\circ)} (a_2^{(\circ)})_i^2 - \frac{40}{11} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^6 J_2^{(\circ)} J_4^{(\circ)} + \frac{40}{33} \left(\frac{a_0}{a_i}\right) J_4^{(\circ)} q - \\
& - \frac{60}{11} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(\circ)} (a_4^{(\circ)})_i + \frac{10}{33} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q (a_4^{(\circ)})_i - \\
& - \frac{150}{11} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 J_4^{(\circ)} (a_2^{(\circ)})_i + \frac{30}{11} (a_2^{(\circ)})_i (a_4^{(\circ)})_i \Big] \\
& (g_n^{(\circ)})_i^{\circ} = \frac{fM}{a_i^2} \left\{ (n+1) \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^n J_n^{(\circ)} - (2a_n^{(\circ)})_i \right\}
\end{aligned}$$

$$n = 8, 10, 12, \dots$$

$$(g_n^{(\circ)})_i^{\circ} = \frac{fM}{a_i^2} (n+1) \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^n J_n^{(\circ)}, \quad n = 3, 5, 7, \dots$$

$$\begin{aligned}
(g_n^{(k)})_i^{\circ} &= \frac{fM}{a_i^2} \left\{ (n+1) \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^n J_n^{(k)} - 2 (a_n^{(k)})_i \right\}, \quad k \neq 0 \\
(h_n^{(k)})_i^{\circ} &= \frac{fM}{a_i^2} \left\{ (n+1) \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^n S_n^{(k)} - 2 (b_n^{(k)})_i \right\}, \quad k \neq 0
\end{aligned}$$

или с учетом (621)

$$\begin{aligned}
(g_0^{(0)})_i^{\circ} &= \frac{fM}{a_i^2} \left[ 1 + \frac{1}{3} e^2 - \frac{2}{3} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q + \frac{1}{3} e^4 + \frac{1}{3} e_1^2 + \right. \\
& + \frac{1}{15} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q e^2 + \frac{1}{15} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-6} q^2 + \frac{4}{5} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(\circ)} e^2 - \\
& - \frac{2}{5} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-1} J_2^{(\circ)} q + \frac{3}{5} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 (J_2^{(\circ)})^2 + \frac{19}{420} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q e^4 + \frac{1}{3} e^6 + \\
& + \frac{8}{7} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(\circ)} e^4 + \frac{2}{15} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q e_1^2 - \frac{2}{5} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(\circ)} e_1^2 + \\
& + \frac{27}{35} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 (J_2^{(\circ)})^2 e^2 - \frac{2}{35} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-6} q^2 e^2 - \frac{3}{35} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-1} J_2^{(\circ)} q e^2 - \\
& - \frac{9}{35} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^6 (J_2^{(\circ)})^3 - \frac{9}{35} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-4} J_2^{(\circ)} q^2 + \frac{18}{35} \left(\frac{a_0}{a_i}\right) (J_2^{(\circ)})^2 q + \\
& + \frac{4}{105} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-9} q^3 - \frac{1}{30} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q e^2 e_1^2 + \frac{18}{35} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 (J_2^{(\circ)})^2 e_1^2 \Big], \\
(g_2^{(\circ)})_i^{\circ} &= \frac{fM}{a_i^2} \left[ 3 \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(\circ)} + \frac{2}{3} e^2 + \frac{2}{3} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q + \frac{2}{3} e^4 - \right. \\
& - \frac{1}{3} e_1^2 + \frac{1}{21} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-6} q^2 + \frac{1}{21} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q e^2 + \frac{22}{7} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(\circ)} e^2 - \\
& - \frac{2}{7} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-1} J_2^{(\circ)} q + \frac{3}{7} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 (J_2^{(\circ)})^2 + \frac{2}{3} e^6 + 0 e^2 e_1^2 + \\
& + \frac{1}{84} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q e^4 + \frac{31}{7} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(\circ)} e^4 - \frac{4}{21} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q e_1^2 + \\
& + \frac{10}{7} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(\circ)} e_1^2 + \frac{9}{7} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 (J_2^{(\circ)})^2 e^2 - \frac{2}{21} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-6} q^2 e^2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{7} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-1} J_2^{(c)} q e^2 + \frac{20}{7} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^8 J_2^{(c)} J_4^{(c)} - \frac{20}{21} \left(\frac{a_0}{a_i}\right) J_4^{(c)} q - \\
& -\frac{9}{7} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^6 (J_2^{(c)})^3 - \frac{1}{7} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-4} J_2^{(c)} q^2 + \frac{6}{7} \left(\frac{a_0}{a_i}\right) (J_2^{(c)})^2 q + \\
& \quad + \frac{20}{7} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 J_4^{(c)} e^2 \Big], \\
(g_4^{(c)})_i^e &= \frac{fM}{a_i^2} \left[ 5 \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 J_4^{(c)} + 0e^4 - \frac{4}{35} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q e^2 - \right. \\
& - \frac{4}{35} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-6} q^2 + \frac{72}{35} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} e^2 + \frac{24}{35} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-1} J_2^{(c)} q - \\
& - \frac{36}{35} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 (J_2^{(c)})^2 + 0e^6 - \frac{32}{385} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q e^4 + \frac{240}{77} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} e^4 + \\
& \quad + \frac{2}{35} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q e_1^2 - \frac{36}{35} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} e_1^2 + 0e_1^2 e^2 - \\
& - \frac{432}{385} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 (J_2^{(c)})^2 e^2 + \frac{32}{385} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-6} q^2 e^2 + \frac{48}{385} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-1} J_2^{(c)} q e^2 + \\
& \quad + \frac{60}{77} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^6 J_2^{(c)} J_4^{(c)} - \frac{20}{77} \left(\frac{a_0}{a_i}\right) J_4^{(c)} q + \frac{54}{385} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^6 (J_2^{(c)})^3 + \\
& \quad + \frac{174}{385} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-4} J_2^{(c)} q^2 - \frac{288}{385} \left(\frac{a_0}{a_i}\right) (J_2^{(c)})^2 q - \\
& \quad - \frac{4}{55} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-9} q^3 + \frac{585}{77} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 J_4^{(c)} e^2 \Big], \\
(g_8^{(c)})_i^e &= \frac{fM}{a_i^2} \left[ 7 \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^8 J_8^{(c)} + 0e^8 - \frac{40}{11} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^6 J_2^{(c)} J_4^{(c)} + \right. \\
& + \frac{40}{33} \left(\frac{a_0}{a_i}\right) J_4^{(c)} q + \frac{108}{77} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^6 (J_2^{(c)})^3 - \frac{4}{77} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-4} J_2^{(c)} q^2 - \\
& - \frac{48}{77} \left(\frac{a_0}{a_i}\right) (J_2^{(c)})^2 q + \frac{8}{231} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-9} q^3 + \frac{24}{77} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} e^4 + \\
& + \frac{2}{77} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q e^4 - \frac{72}{77} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 (J_2^{(c)})^2 e^2 + \frac{16}{231} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-6} q^2 e^2 + \\
& \quad + \frac{8}{77} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-1} J_2^{(c)} q e^2 + \frac{50}{11} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 J_4^{(c)} e^2 \Big] \\
(h_2^{(2)})_i^e &= \frac{fM}{a_i^2} \left\{ 3 \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 \frac{J_2^{(2)}}{S_2^{(2)}} - \left( \frac{1}{6} e_1^2 - \frac{1}{28} e^2 e_1^2 \right) \frac{\cos 2\Lambda_\alpha}{\sin 2\Lambda_\alpha} \right\} \\
(h_4^{(2)})_i^e &= \frac{fM}{a_i^2} \left\{ 5 \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 \frac{J_4^{(2)}}{S_4^{(2)}} + \frac{1}{70} e^2 e_1^2 \frac{\cos 2\Lambda_\alpha}{\sin 2\Lambda_\alpha} \right\} \text{ и т. д.}
\end{aligned} \tag{736}$$

Если речь идет об эллипсоиде вращения, то нужно положить  $e_1 = 0$ , а если учитывается сила притяжения, но не учитывается центробежная сила,  $q = 0$ . Если речь идет о геоцентрической сфере, то  $e = 0$ .

Подчеркнем, что используемые эллипсоиды не являются уровнями поверхностями для силового поля реальной Земли. Для уро-

венного эллипсоида нужно было бы подставить в качестве  $J_n^{(h)}$ ,  $S_n^{(h)}$  значения динамических постоянных, определяющих нормальное поле по теории Пицетти [61], [62], и получили бы при этом нормальное ускорение силы тяжести  $\gamma$  (см. § 35).

Из формулы (711) можно было бы вывести выражение для ускорения силы тяжести в точках произвольной пространственной поверхности, записанное в параметрической форме. Если  $\rho$ ,  $\Phi$ ,  $\Lambda$  определим при помощи параметра  $t$

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho(t); & \Phi &= \Phi(t) \\ \Lambda &= \Lambda(t) \end{aligned} \right\}, \quad (737)$$

а затем (737) подставим в (714), получим выражение

$$g = g(t). \quad (738)$$

По формулам (722), (733) можно легко вычислить средние интегральные значения  $\bar{g}$ ,  $\bar{g}_e$  на внешней уровенной поверхности с потенциалом  $W_i$  и на внешнем трехосном эллипсоиде с параметрами  $a_i$ ,  $e^2$ ,  $e_1^2$ ,  $\Lambda_a$ . С учетом ортогональности сферических функций (см. § 7) сразу же получим

$$\bar{g} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g \cos \Phi d\Lambda d\Phi = (g_0^{(e)})_i, \quad (739)$$

$$\bar{g}_0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g_0 \cos \Phi d\Lambda d\Phi = (g_0^{(e)})_i. \quad (740)$$

Средние интегральные значения (739), (740) функций  $g$ ,  $g_e$  здесь вычислялись на поверхности единичной сферы с элементом поверхности

$$dS = \cos \Phi d\Lambda d\Phi. \quad (741)$$

Однако это не совсем точно. Рассмотрим, как точнее вычислить среднее интегральное значение на некоторой поверхности (на уровенной поверхности, эллипсоиде), на которой заданы величины  $g$ ,  $g_e$ . Если уравнение этой поверхности задано в виде  $\rho = \rho(\Phi, \Lambda)$ , то элемент ее поверхности равен (см. § 32)

$$dS = \sqrt{EG - F^2} d\Lambda d\Phi = \sqrt{\left[ \rho^2 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial \Phi} \right)^2 \right] \cos^2 \Phi + \left( \frac{\partial \rho}{\partial \Lambda} \right)^2} \rho d\Lambda d\Phi. \quad (742)$$

При интегрировании теперь нужно выражение (741) заменить выражением (742). Если пренебречь членами, содержащими  $(J_n^{(h)})^2$ ,

$J_n^{(k)}$   $J_2^{(o)}$ ,  $(J_2^{(o)})_2^3$ ,  $q^3$  и т. д., то элемент уровневой поверхности (719) будет равен

$$dS = R_0^2 \left\{ 1 + 2(A_0^{(o)})_i + (A_0^{(o)})_i^2 + \frac{4}{5}(A_2^{(o)})_i^2 + \right. \\ \left. + \left[ 2(A_2^{(o)})_i + 2(A_0^{(o)})_i(A_2^{(o)})_i + \frac{5}{7}(A_2^{(o)})_i^2 \right] P_2^{(o)}(\sin \Phi) + \right. \\ \left. + \left[ 2(A_4^{(o)})_i - \frac{18}{35}(A_2^{(o)})_i^2 \right] P_4^{(o)}(\sin \Phi) + 2 \sum_{n'} (A_n^{(o)})_i P_n^{(o)}(\sin \Phi) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n [(A_n^{(k)})_i \cos k\Lambda + (B_n^{(k)})_i \sin k\Lambda] P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right\} \times \\ \times \cos \Phi d\Lambda d\Phi, \quad n' = 3, 5, 6, 7, \dots, N \quad (743)$$

а элемент поверхности эллипсоида (731)

$$dS = a_i^2 \left\{ 1 + 2(a_0^{(o)})_i + (a_0^{(o)})_i^2 + \frac{4}{5}(a_2^{(o)})_i^2 + \right. \\ \left. + \left[ 2(a_2^{(o)})_i + 2(a_0^{(o)})_i(a_2^{(o)})_i + \frac{5}{7}(a_2^{(o)})_i^2 \right] P_2^{(o)}(\sin \Phi) + \right. \\ \left. + \left[ 2(a_4^{(o)})_i - \frac{18}{35}(a_2^{(o)})_i^2 \right] P_4^{(o)}(\sin \Phi) + 2 \sum_n \sum_k [(a_n^{(k)})_i \cos k\Lambda + \right. \\ \left. + (b_n^{(k)})_i \sin k\Lambda] P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right\} \cos \Phi d\Lambda d\Phi \quad (744)$$

Средние интегральные значения будут равны

$$\bar{g} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} g \left\{ 1 + 2(A_0^{(o)})_i + (A_0^{(o)})_i^2 + \frac{4}{5}(A_2^{(o)})_i^2 + \left[ 2(A_2^{(o)})_i + 2(A_0^{(o)})_i(A_2^{(o)})_i + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{5}{7}(A_2^{(o)})_i^2 \right] P_2^{(o)}(\sin \Phi) + \dots \right\} \cos \Phi d\Lambda d\Phi}{4\pi \left[ 1 + 2(A_0^{(o)})_i + (A_0^{(o)})_i^2 + \frac{4}{5}(A_2^{(o)})_i^2 \right]}, \quad (745)$$

$$\bar{g}_e = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} g \left\{ 1 + 2(a_0^{(o)})_i + (a_0^{(o)})_i^2 + \frac{4}{5}(a_2^{(o)})_i^2 + \right. \\ \left. + \left[ 2(a_2^{(o)})_i + 2(a_0^{(o)})_i(a_2^{(o)})_i + \frac{5}{7}(a_2^{(o)})_i^2 \right] P_2^{(o)}(\sin \Phi) + \dots \right\} \cos \Phi d\Lambda d\Phi}{4\pi \left[ 1 + 2(a_0^{(o)})_i + (a_0^{(o)})_i^2 + \frac{4}{5}(a_2^{(o)})_i^2 \right]}. \quad (746)$$

Тогда с учетом ортогональности сферических функций с уже упомянутой точностью получим

$$\bar{g} \cong (g_0^{(c)})_i + \frac{2}{5} (A_2^{(c)})_i (g_2^{(c)})_i = \frac{fM}{R_i^2} \left[ 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-3} - \frac{7}{9} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-6} q^2 + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-1} J_2^{(c)} q + 0 (J_2^{(c)})^2 - \frac{26}{21} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-9} q^3 + \frac{206}{63} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-4} J_2^{(c)} q^2 \right], \quad (747)$$

$$\bar{g}_e = (g_0^{(c)})_i^e + \frac{2}{5} (g_2^{(c)})_i^e (a_2^{(c)})_i = \frac{fM}{a_i^2} \left[ 1 + \frac{1}{3} e^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-3} q + \right. \\ \left. + \frac{11}{45} e^4 + \frac{1}{3} e_1^2 - \frac{1}{45} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-3} q e^2 + \frac{1}{15} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-6} q^2 + \frac{2}{5} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^2 J_2^{(c)} e^2 - \right. \\ \left. - \frac{2}{5} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-1} J_2^{(c)} q + \frac{3}{5} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^4 (J_2^{(c)})^2 + \frac{1}{140} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-8} q e^4 + \frac{67}{315} e^6 + \right. \\ \left. + \frac{4}{45} e^2 e_1^2 + \frac{61}{105} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^2 J_2^{(c)} e^4 + \frac{8}{45} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-3} q e_1^2 + \frac{1}{105} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^2 J_2^{(c)} e_1^2 - \right. \\ \left. - \frac{4}{63} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-6} q^2 e^2 - \frac{1}{21} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-1} J_2^{(c)} q e^2 + \frac{5}{7} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^4 (J_2^{(c)})^2 e^2 \right]. \quad (748)$$

Отсюда видно, что среднее значение  $\bar{g}$  зависит практически только от постоянных  $fM$ ,  $R_i$ ,  $J_2^{(c)}$ ,  $q$ , а величина  $\bar{g}_e$  — от  $fM$ ,  $J_2^{(c)}$ ,  $q$  и параметров эллипсоида  $a_i$ ,  $e^2$ ,  $e_1^2$ ,  $\Lambda_a$ . В табл. 17 приведены значения  $\bar{g}$  для ряда уровневых поверхностей с величиной

$$G_i = \frac{fM}{R_i^2} = \frac{W_i^2}{fM}. \quad (749)$$

Таблица 17

$fM$ , $10^8 \text{м}^2 \text{с}^{-2}$	$W_i$ , $10^8 \text{м}^2 \text{с}^{-2}$	$R_i$ , м	$G_i$ , млг	$\bar{g}$ , млг	$\bar{g}^{\text{ЭРБ}}$ , млг
398 600	62 637,01	6 363 650	984 293,7	979 770,4	978 033,9
601	,17		296,2	772,8	036,4
602	,32		298,7	775,3	038,9
603	,48		301,2	777,7	041,4
398 600	62 636,76	6 363 675	984 286,0	979 762,6	978 026,2
601	,92		288,5	765,1	028,7
602	637,08		291,0	767,5	031,2
603	,23		293,4	770,0	033,6
398 600	62 636,52	6 363 700	984 278,3	979 754,9	978 018,5
601	,67		280,7	757,3	020,9
602	,83		283,2	759,8	023,4
603	,99		285,7	762,2	025,8

Влияние случайных изменений  $J_2^{(c)}$  на  $\bar{g}$  и  $\bar{g}^{\text{ЭКВ}}$  ничтожно и проявляется в сотых долях мГ. Значения  $R_i = 6\,363\,675$  м и  $W_i = 62637,23 \cdot 10^3 \text{ м}^2 \text{ с}^{-2}$  соответствуют поверхности геоида, конечно, в предположении о сходимости использованных рядов.

Из формул (722), (734) можно равным образом получить средние интегральные значения ускорения силы тяжести на экваторе внешних уровневых поверхностей и на внешнем трехосном эллипсоиде. Если принять  $\varphi = 0$ , то получим, согласно (113)

$$\begin{aligned} g^{\text{ЭКВ}} = & (g_0^{(c)})_i - \frac{1}{2} (g_2^{(c)})_i + \frac{3}{8} (g_4^{(c)})_i - \frac{5}{16} (g_6^{(c)})_i + \frac{35}{128} (g_8^{(c)})_i - \\ & - \frac{63}{256} (g_{10}^{(c)})_i + \dots + 3 [(g_2^{(2)})_i \cos 2\Lambda + (h_2^{(2)})_i \sin 2\Lambda] - \\ & - \frac{3}{2} [(g_3^{(1)})_i \cos \Lambda + (h_3^{(1)})_i \sin \Lambda] + 15 [(g_3^{(3)})_i \cos 3\Lambda + (h_3^{(3)})_i \sin 3\Lambda] - \\ & - \frac{15}{2} [(g_4^{(2)})_i \cos 2\Lambda + (h_4^{(2)})_i \sin 2\Lambda] + 105 [(g_4^{(4)})_i \cos 4\Lambda + (h_4^{(4)})_i \sin 4\Lambda] - \dots \end{aligned} \quad (750)$$

$$\begin{aligned} g_e^{\text{ЭКВ}} = & (g_0^{(c)})_i^e - \frac{1}{2} (g_2^{(c)})_i^e + \frac{3}{8} (g_4^{(c)})_i^e - \frac{5}{16} (g_6^{(c)})_i^e + \\ & + \frac{35}{128} (g_8^{(c)})_i^e - \frac{63}{256} (g_{10}^{(c)})_i^e + \dots, \end{aligned} \quad (751)$$

а отсюда искомые интегральные средние значения  $\bar{g}^{\text{ЭКВ}}$ ,  $\bar{g}_e^{\text{ЭКВ}}$  будут равны (ограничиваясь 20-й степенью сферических функций)

$$\begin{aligned} \bar{g}^{\text{ЭКВ}} = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g^{\text{ЭКВ}} d\Lambda = (g_0^{(c)})_i - \frac{1}{2} (g_2^{(c)})_i + \frac{3}{8} (g_4^{(c)})_i - \frac{5}{16} (g_6^{(c)})_i + \\ & + \frac{35}{128} (g_8^{(c)})_i - \frac{63}{256} (g_{10}^{(c)})_i + \frac{231}{1024} (g_{12}^{(c)})_i - \frac{429}{2048} (g_{14}^{(c)})_i + \frac{6435}{32\,768} (g_{16}^{(c)})_i - \\ & - \frac{12\,155}{65\,536} (g_{18}^{(c)})_i + \frac{46\,189}{262\,144} (g_{20}^{(c)})_i = \frac{fM}{R_i^2} \left[ 1 - 2 \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-3} q - \right. \\ & - \frac{1}{2} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^2 J_2^{(c)} - \frac{5}{4} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-6} q^2 + \frac{5}{2} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-1} J_2^{(c)} q - \frac{5}{4} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^4 (J_2^{(c)})^2 - \\ & - \frac{38}{21} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-9} q^3 + \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{-4} J_2^{(c)} q^2 + \frac{9}{8} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^4 J_4^{(c)} - \frac{25}{16} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^6 J_6^{(c)} + \\ & + \frac{245}{128} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^8 J_8^{(c)} - \frac{567}{256} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{10} J_{10}^{(c)} + \frac{2541}{1024} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{12} J_{12}^{(c)} - \\ & - \frac{5577}{2048} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{14} J_{14}^{(c)} + \frac{96\,525}{32\,768} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{16} J_{16}^{(c)} - \\ & \left. - \frac{206\,635}{65\,536} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{18} J_{18}^{(c)} + \frac{877\,591}{262\,144} \left( \frac{a_0}{R_i} \right)^{20} J_{20}^{(c)} \right], \end{aligned} \quad (752)$$

$$\begin{aligned}
\bar{g}^{\text{ЭКВ}} = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g_i^{\text{ЭКВ}} d\Lambda = (g_0^{(\circ)})_i^2 - \frac{1}{2} (g_2^{(\circ)})_i^2 + \frac{3}{8} (g_4^{(\circ)})_i^2 - \frac{5}{16} (g_6^{(\circ)})_i^2 + \\
& + \frac{35}{128} (g_8^{(\circ)})_i^2 - \frac{63}{256} (g_{10}^{(\circ)})_i^2 + \frac{231}{1024} (g_{12}^{(\circ)})_i^2 - \frac{429}{2048} (g_{14}^{(\circ)})_i^2 + \frac{6435}{32768} (g_{16}^{(\circ)})_i^2 - \\
& - \frac{12155}{65536} (g_{18}^{(\circ)})_i^2 + \frac{46189}{262144} (g_{20}^{(\circ)})_i^2 = \frac{fM}{a_i^2} \left[ 1 - \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-3} q - \frac{3}{2} \left( \frac{a_0}{a_i} \right) J_2^{(\circ)} + \right. \\
& + \frac{15}{8} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^4 J_4^{(\circ)} - \frac{35}{16} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^6 J_6^0 + \frac{315}{128} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^8 J_8^{(\circ)} - \\
& - \frac{693}{296} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{10} J_{10}^{(\circ)} + \frac{3003}{1024} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{12} J_{12}^{(\circ)} - \frac{6435}{2048} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{14} J_{14}^{(\circ)} + \\
& + \frac{109395}{32768} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{16} J_{16}^{(\circ)} - \frac{230945}{65536} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{18} J_{18}^{(\circ)} + \frac{969969}{262144} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{20} J_{20}^{(\circ)}. \quad (753)
\end{aligned}$$

Значения  $\bar{g}^{\text{ЭКВ}}$ , вычисленные по совокупности динамических постоянных  $J_n^{(0)}$  (табл. 2) и при разных значениях (749), приведены в табл. 17.

Если мы хотим определить ускорение силы тяжести в точках земной поверхности, то достаточно подставить в (714) геоцентрические сферические координаты этих точек ( $\rho$ ,  $\Phi$ ,  $\Lambda$ ), конечно, опять в предположении о сходимости использованных рядов. Координаты  $\rho$ ,  $\Phi$ ,  $\Lambda$  вычислим по геодезическим координатам  $B$ ,  $L$  нормальным высотам  $H_q$  и высотам квазигеоида  $\zeta_q$ , если известны элементы сдвига  $\Delta x_0$ ,  $\Delta y_0$ ,  $\Delta z_0$  референционной геодезической системы координат (см. ч. I, главу 4).

$$\left. \begin{aligned}
\rho &= \{ [(N + H_q + \zeta_q) \cos B \cos L + \Delta x_0]^2 + [(N + H_q + \zeta_q) \times \\
&\times \cos B \sin L + \Delta y_0]^2 + [(N - Ne_r^2 + H_q + \zeta_q) \sin B + \Delta z_0]^2 \}^{1/2} \\
\text{tg } \Phi &= \frac{(N - Ne_r^2 + H_q + \zeta_q) \sin B + \Delta z_0}{\{ [(N + H_q + \zeta_q) \cos B \cos L + \Delta x_0]^2 + \\
&+ [(N + H_q + \zeta_q) \cos B \sin L + \Delta y_0]^2 \}^{1/2}} \\
\text{tg } \Lambda &= \frac{(N + H_q + \zeta_q) \cos B \sin L + \Delta y_0}{(N + H_q + \zeta_q) \cos B \cos L + \Delta x_0} \\
N &= \frac{a_r (1 - e_r^2)}{\sqrt{1 - e_r^2 \sin^2 B}}
\end{aligned} \right\}, \quad (754)$$

$a_r$ ,  $e_r$  — параметры используемого геодезического референционного эллипсоида.

Элементы сдвига  $\Delta x_0$ ,  $\Delta y_0$ ,  $\Delta z_0$  теперь приблизительно известны для большинства мировых используемых референционных геодезических систем; они были определены по наблюдениям ИСЗ как геометрическим (см. ч. I, главу 9), так и динамическим [52] методами.

Ускорение силы тяжести, полученное только по наблюдениям ИСЗ, будет, конечно, соответствовать сглаженному гравитационному

полю, так как оно представляется ограниченным рядом сферических функций, т. е., в целом, без локального влияния.

Одновременно с определением ускорения силы тяжести на поверхностях эллипсоидов (731) получаем и потенциал силы тяжести на них. Подчеркнем, что речь идет не о нормальном потенциале  $a$  о потенциале действительной Земли.

Потенциал силы тяжести во внешней точке  $(\rho, \Phi, \Lambda)$ , согласно (18) и (302), равен

$$W = \frac{fM}{\rho} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^N \sum_{k=2}^N \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + S_n^{(k)} \sin k\Lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} q \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{-3} [1 - P_2^*(\sin \Phi)] \right\}. \quad (755)$$

Если подставим так же, как  $n$  для ускорения силы тяжести (714), вместо радиуса-вектора  $\rho$  функцию  $\rho_e$  согласно (731), то получим потенциал силы тяжести Земли на поверхности внешнего трехосного эллипсоида с параметрами  $a_i, e^2, e_1^2, \Lambda_a$ .

Пренебрегая членами порядка  $10^{-9}$ , можем написать

$$W_e = \frac{fM}{a_i} \left\{ (W_0^{(c)})_i + \sum_{n=2}^8 \sum_{k=0}^n [(W_n^{(k)})_i \cos k\Lambda + (V_n^{(k)})_i \sin k\Lambda] P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right\}$$

где (756)

$$\left. \begin{aligned} (W_0^{(c)})_i &= 1 - (a_0^{(c)})_i + \frac{1}{3} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-3} q + \frac{2}{3} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-3} q \left[ (a_0^{(c)})_i - \right. \\ &\left. - \frac{1}{5} (a_2^{(c)})_i \right] + (a_0^{(c)})_i^2 + \frac{1}{5} (a_2^{(c)})_i^2 - \frac{3}{5} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^2 J_2^{(c)}(a_0^{(c)})_i - (a_0^{(c)})_i^3 + \\ &+ \frac{1}{3} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-3} q (a_0^{(c)})_i^2 - \frac{3}{5} (a_0^{(c)})_i (a_2^{(c)})_i^2 + \frac{12}{5} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^2 J_2^{(c)}(a_0^{(c)})_i \times \\ &\quad \times (a_2^{(c)})_i - \frac{2}{35} (a_2^{(c)})_i^3 + \frac{12}{35} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^2 J_2^{(c)}(a_2^{(c)})_i^2 - \\ &\quad - \frac{2}{15} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-3} q (a_0^{(c)})_i (a_2^{(c)})_i + \frac{1}{21} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-3} q (a_2^{(c)})_i^2 \\ (W_2^{(c)})_i &= \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^2 J_2^{(c)} - (a_2^{(c)})_i - \frac{1}{3} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-3} q - 3 \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^2 J_2^{(c)}(a_0^{(c)})_i - \\ &\quad - \frac{2}{3} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-3} q (a_0^{(c)})_i + \frac{10}{21} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-3} q (a_2^{(c)})_i - \\ &\quad - \frac{6}{7} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^2 J_2^{(c)}(a_2^{(c)})_i + \frac{2}{7} (a_2^{(c)})_i^2 + 2 (a_0^{(c)})_i (a_2^{(c)})_i - \\ &\quad - \frac{3}{7} (a_2^{(c)})_i^3 + \frac{18}{7} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^2 J_2^{(c)}(a_2^{(c)})_i^2 - \frac{1}{3} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-3} q (a_0^{(c)})_i^2 - \\ &\quad - 3 (a_0^{(c)})_i^2 (a_2^{(c)})_i + 6 \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^2 J_2^{(c)}(a_0^{(c)})_i^2 - \frac{6}{7} (a_0^{(c)})_i (a_2^{(c)})_i^2 + \\ &\quad + \frac{24}{7} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^2 J_2^{(c)}(a_0^{(c)})_i (a_2^{(c)})_i + \frac{10}{21} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-3} q (a_0^{(c)})_i (a_2^{(c)})_i - \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{24} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q (a_2^{(c)})_i^2 + \frac{4}{7} (a_2^{(c)})_i (a_4^{(c)})_i - \frac{6}{7} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} (a_4^{(c)})_i - \\
& \quad - \frac{4}{21} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q (a_4^{(c)})_i - \frac{10}{7} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 J_4^{(c)} (a_2^{(c)})_i \\
(W_4^{(c)})_i = & \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 J_4^{(c)} - (a_4^{(c)})_i - \frac{54}{35} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} (a_2^{(c)})_i + \frac{18}{35} (a_2^{(c)})_i^2 - \\
& - \frac{12}{35} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q (a_2^{(c)})_i - \frac{54}{35} (a_0^{(c)})_i (a_2^{(c)})_i^2 + \frac{216}{35} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} \times \\
& \quad \times (a_0^{(c)})_i (a_2^{(c)})_i - \frac{108}{385} (a_2^{(c)})_i^3 + \frac{648}{385} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} (a_2^{(c)})_i^2 - \\
& \quad - \frac{12}{35} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q (a_0^{(c)})_i (a_2^{(c)})_i + \frac{6}{77} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q (a_2^{(c)})_i^2 + \\
& \quad + 2 (a_0^{(c)})_i (a_4^{(c)})_i + \frac{40}{77} (a_2^{(c)})_i (a_4^{(c)})_i - 5 \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 J_4^{(c)} (a_0^{(c)})_i - \\
& \quad - \frac{60}{77} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} (a_4^{(c)})_i - \frac{100}{77} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 J_4^{(c)} (a_2^{(c)})_i + \\
& \quad + \frac{38}{77} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q (a_4^{(c)})_i \\
(W_6^{(c)})_i = & \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^6 J_6^{(c)} - (a_6^{(c)})_i + \frac{108}{77} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} (a_2^{(c)})_i^2 - \\
& - \frac{6}{77} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q (a_2^{(c)})_i^2 - \frac{18}{77} (a_2^{(c)})_i^3 + \frac{10}{11} (a_2^{(c)})_i (a_4^{(c)})_i - \\
& - \frac{15}{11} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} (a_4^{(c)})_i - \frac{25}{11} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 J_4^{(c)} (a_2^{(c)})_i - \\
& - \frac{10}{33} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q (a_4^{(c)})_i \\
(W_8^{(c)})_i = & \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^8 J_8^{(c)} - (a_8^{(c)})_i \\
(W_{2n}^{(c)})_i = & \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{2n} J_{2n}^{(c)} - (a_{2n}^{(c)})_i, \quad n > 4 \\
(W_{2n+1}^{(c)})_i = & \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{2n+1} J_{2n+1}^{(c)} \quad n = 1, 2, \dots, N \\
(W_n^{(k)})_i = & \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^n J_n^k - (a_n^{(k)})_i, \quad k \neq 0 \\
(V_n^{(k)})_i = & \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^n S_n^{(k)} - (b_n^{(k)})_i, \quad n = 2, 3, \dots, N
\end{aligned} \tag{757}$$

Коэффициенты (757) можно определить как функции только параметров эллипсиса  $a_i$ ,  $e^2$ ,  $e_1^2$ ,  $\Lambda_a$ , динамических постоянных тела Земли  $J_n^{(k)}$ ,  $S_n^{(k)}$  и коэффициента  $q$ . С учетом формул (732) и (621) имеем

$$\begin{aligned}
(W_0^{(c)})_i = & 1 + \frac{1}{6} e^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q + \frac{17}{120} e^4 - \frac{1}{15} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q e^2 + \\
& + \frac{1}{6} e_1^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} e^2 + \frac{211}{1680} e^6 - \frac{4}{105} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q e^4 - \\
& - \frac{1}{60} e^2 e_1^2 - \frac{2}{15} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q e_1^2 + \frac{17}{70} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} e^4 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{10} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} e_1^2 \\
(W_2^{(c)})_i &= \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} + \frac{1}{3} e^2 - \frac{1}{3} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q + \frac{11}{42} e^4 - \\
& -\frac{1}{21} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q e^2 - \frac{1}{6} e_1^2 + \frac{11}{14} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} e^2 + \frac{37}{168} e^6 - \\
& -\frac{1}{84} e^2 e_1^2 + \frac{4}{21} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q e_1^2 + \frac{53}{56} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} e^4 + \\
& + \frac{5}{14} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} e_1^2 + \frac{10}{21} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 J_4^{(c)} e^2 \\
(W_4^{(c)})_i &= \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 J_4^{(c)} - \frac{1}{35} e^4 + \frac{4}{35} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q e^2 + \frac{18}{35} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} e^2 - \\
& -\frac{29}{770} e^6 + \frac{4}{55} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q e^4 + \frac{1}{35} e^2 e_1^2 - \frac{2}{35} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q e_1^2 + \\
& + \frac{249}{385} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} e^4 - \frac{9}{35} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} e_1^2 + \frac{195}{154} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 J_4^{(c)} e^2 \\
(W_6^{(c)})_i &= \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^6 J_6^{(c)} + \frac{1}{231} e^6 - \frac{8}{231} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{-3} q e^4 + \\
& + \frac{3}{77} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(c)} e^4 + \frac{25}{33} \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 J_4^{(c)} e^2 \\
(W_2^{(2)})_i &= \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 J_2^{(2)} + \left(\frac{1}{12} e_1^2 + \frac{1}{56} e^2 e_1^2\right) \cos 2\Lambda_a \\
(V_2^{(2)})_i &= \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^2 S_2^{(2)} + \left(\frac{1}{12} e_1^2 + \frac{1}{56} e^2 e_1^2\right) \sin 2\Lambda_a \\
(W_4^{(2)})_i &= \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 J_4^{(2)} + \left(\frac{1}{140} e^2 e_1^2\right) \cos 2\Lambda_a \\
(V_4^{(2)})_i &= \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 S_4^{(2)} + \left(\frac{1}{140} e^2 e_1^2\right) \sin 2\Lambda_a \\
(W_n^{(c)})_i &= \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^n J_n^{(c)}, \quad n > 6 \\
(W_{2n+1}^{(c)})_i &= \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{2n+1} J_{2n+1}^{(c)}, \quad n = 1, 2, \dots \\
(W_4^{(k)})_i &= \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^4 J_4^{(k)}, \quad k = 1, 3, 4 \\
(V_n^{(k)})_i &= \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^n S_n^{(k)}, \quad k = 1, 3, 4 \\
(W_n^{(k)})_i &= \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^n J_n^{(k)}, \quad n = 3, 5, 6, 7 \dots \\
(V_n^{(k)})_i &= \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^n S_n^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, n
\end{aligned} \tag{758}$$

Среднее интегральное значение  $\bar{W}_e$  потенциала силы тяжести тела Земли на поверхности трехосного эллипсоида получается из (756) с учетом ортогональности сферических функций

$$\bar{W}_e = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} W_e \cos\Phi d\Lambda d\Phi = \frac{fM}{a_i} (W_0^{(c)})_i, \tag{759}$$

или, точнее, с учетом (744)

$$\begin{aligned} \bar{W}_e = \frac{fM}{a_i} \left[ (W_0^{(c)})_i + \frac{2}{5} (W_2^{(c)})_i a_2^{(c)} \right] = \frac{fM}{a_i} \left[ 1 + \frac{1}{6} e^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-3} q + \frac{7}{72} e^4 - \frac{1}{45} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-3} q e^2 + \frac{1}{6} e_1^2 + \frac{1}{15} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^2 J_2^{(c)} e^2 + \right. \\ \left. + \frac{377}{5040} e^6 - \frac{1}{63} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-3} q e^4 + \frac{1}{36} e^2 e_1^2 - \frac{7}{45} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^{-3} q e_1^2 + \right. \\ \left. + \frac{19}{210} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^2 J_2^{(c)} e^4 - \frac{1}{30} \left( \frac{a_0}{a_i} \right)^2 J_2^{(c)} e_1^2 \right]. \quad (760) \end{aligned}$$

### § 35. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АНОМАЛИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ ИЗ

Если предметом изучения являются аномалии силы тяжести, то неизбежно придем к определению нормального поля силы тяжести, с которой аномалии всегда связаны.

Выбор нормального поля может быть разный. Если, например, использовать в разложении потенциала (755) только зональные сферические функции 2-й степени, то нормальный потенциал  $U$  будет равен (301)

$$U = \frac{fM}{\rho} \left\{ 1 + J_2^{(c)} P_2^{(c)}(\sin \Phi) + \frac{1}{3} q \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{-3} \left[ 1 - P_2^{(c)}(\sin \Phi) \right] \right\}, \quad (761)$$

а нормальное ускорение силы тяжести  $\gamma$ , согласно (714),

$$\gamma = \frac{fM}{\rho^2} \left[ C_0^{(c)} + C_2^{(c)} P_2^{(c)}(\sin \Phi) \right]. \quad (762)$$

Можно было бы добавить и следующий четный зональный член с функцией  $P_4^{(c)}(\sin \Phi)$  и, если нужно, секториальные члены 2-й степени и 2-го порядка с функциями  $P_2^{(2)}(\sin \Phi) \cos 2\Lambda$  и  $P_2^{(2)}(\sin \Phi) \sin 2\Lambda$  или следующие надежно известные члены разложения. При таком определении нормального поля, которое использовал, например, Гельмерт (с удержанием зональных членов степени  $n = 2$  и  $n = 4$ ), уровенные поверхности являются поверхностями сфероида, близкими к поверхностям эллипсоида, однако обычно с ними несовпадающими.

Пицетти [61, 62] выдвинул иную концепцию, вытекающую из теоремы Стокса. В ней априори задается вид одной из уровенных поверхностей нормального потенциала (обычно поверхности эллипсоида вращения), а также масса  $M^\circ$  и угловая скорость вращения  $\omega^\circ$  «нормальной Земли». При этом полагают

$$\left. \begin{aligned} M^\circ &= M \\ fM^\circ &= fM \end{aligned} \right\} \quad (763)$$

и

$$\omega^\circ = \omega, \quad (764)$$

т. е. что нормальная Земля имеет такую же массу и угловую скорость вращения, как и действительная Земля. Заданная урovenная поверхность является урovenным эллипсоидом, его параметры: большую полуось и эксцентриситет обозначим  $a^\circ$ ,  $e^\circ$ . Нормальное поле в этом случае определится параметрами

$$fM, q^\circ, a^\circ, e^\circ \quad (765)$$

или другими, им эквивалентными четырьмя параметрами. При этом предполагается, что

$$\Delta x_0 = \Delta y_0 = \Delta z_0 = \varepsilon_0 = \psi_0 = \omega_0 = 0.$$

Формулы для нормального потенциала приведены в замкнутом виде (в эллипсоидальных координатах) в [61, 62]. Здесь нам, однако, будет удобнее использовать представление в виде ряда сферических функций, потому что такие разложения были построены для  $W$  и  $g$ .

$$\begin{aligned} U &= \frac{fM}{\rho} \left\{ 1 + \left( \frac{a^\circ}{\rho} \right)^2 (J_2^{(\circ)})^\circ P_2^{(\circ)}(\sin \Phi) + \right. \\ &+ \left( \frac{a^\circ}{\rho} \right)^4 (J_4^{(\circ)})^\circ P_4^{(\circ)}(\sin \Phi) + \left( \frac{a^\circ}{\rho} \right)^6 (J_6^{(\circ)})^\circ P_6^{(\circ)}(\sin \Phi) + \dots + \\ &+ \left. \frac{1}{3} \left( \frac{a^\circ}{\rho} \right)^{-3} q^\circ [1 - P_2^{(\circ)}(\sin \Phi)] \right\} = \\ &= \frac{fM}{\rho} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a^\circ}{\rho} \right)^{2n} (J_{2n}^{(\circ)})^\circ P_{2n}^{(\circ)}(\sin \Phi) + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{3} \left( \frac{a^\circ}{\rho} \right)^{-3} q^\circ [1 - P_2^{(\circ)}(\sin \Phi)] \right\}, \quad (766) \end{aligned}$$

$$q^\circ = \frac{\omega^2 (a^\circ)^3}{fM}; \quad (767)$$

$(J_{2n}^{(\circ)})^\circ$  — динамические коэффициенты для эллипсоида с параметрами  $fM$ ,  $a^\circ$ ,  $e^\circ$ . Так как речь идет об урovenном эллипсоиде, то  $U_0 = \text{const}$  для произвольных значений переменных  $\Phi$ ,  $\Lambda$ . Поэтому сразу можно написать, с учетом (758),

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{fM}{a^\circ} (W_0^{(\circ)})^\circ = \frac{fM}{a^\circ} \left[ 1 + \frac{1}{6} (e^\circ)^2 + \frac{1}{3} q^\circ + \right. \\ &+ \frac{17}{120} (e^\circ)^4 - \frac{1}{15} q^\circ (e^\circ)^2 + \frac{1}{5} (J_2^{(\circ)})^0 (e^\circ)^2 + \frac{211}{1680} (e^\circ)^6 - \\ &+ \left. \frac{4}{105} q^\circ (e^\circ)^4 + \frac{17}{70} (J_2^{(\circ)})^\circ (e^\circ)^4 \right] \quad (768) \end{aligned}$$

и заодно получить условия

$$\left. \begin{aligned}
 (W_2^{(\circ)})^\circ &= (J_2^{(\circ)})^\circ + \frac{1}{3}(e^\circ)^2 - \frac{1}{3}q^\circ + \frac{11}{42}(e^\circ)^4 - \frac{1}{21}q^\circ(e^\circ)^2 + \\
 &+ \frac{11}{14}(J_2^{(\circ)})^\circ(e^\circ)^2 + \frac{37}{168}(e^\circ)^6 + 0q^\circ(e^\circ)^4 + \\
 &+ \frac{53}{56}(J_2^{(\circ)})^\circ(e^\circ)^4 + \frac{10}{21}(J_4^{(\circ)})^\circ(e^\circ)^2 = 0 \\
 (W_4^{(\circ)})^\circ &= (J_4^{(\circ)})^\circ - \frac{1}{35}(e^\circ)^4 + \frac{4}{35}q^\circ(e^\circ)^2 + \frac{18}{35}(J_2^{(\circ)})^\circ(e^\circ)^2 - \\
 - \frac{29}{770}(e^\circ)^6 + \frac{4}{55}q^\circ(e^\circ)^4 + \frac{249}{385}(J_2^{(\circ)})^\circ(e^\circ)^4 + \frac{195}{154}(J_4^{(\circ)})^\circ(e^\circ)^2 = 0 \\
 (W_6^{(\circ)})^\circ &= (J_6^{(\circ)})^\circ + \frac{1}{231}(e^\circ)^6 - \frac{8}{231}q^\circ(e^\circ)^4 + \frac{3}{77}(J_2^{(\circ)})^\circ(e^\circ)^4 + \\
 &+ \frac{25}{33}(J_4^{(\circ)})^\circ(e^\circ)^2 = 0
 \end{aligned} \right\}, \quad (769)$$

а из них выведем искомые выражения для динамических постоянных уровня эллипсоида вращения

$$(J_2^{(\circ)})^\circ = -\frac{1}{3}(e^\circ)^2 + \frac{1}{3}q^\circ + 0(e^\circ)^4 - \frac{3}{14}q^\circ(e^\circ)^2 + 0(e^\circ)^6 - \frac{13}{1176}q^\circ(e^\circ)^4, \quad (770)$$

$$(J_4^{(\circ)})^\circ = \frac{1}{5}(e^\circ)^4 - \frac{2}{7}q^\circ(e^\circ)^2 + 0(e^\circ)^6 + \frac{9}{49}q^\circ(e^\circ)^4, \quad (771)$$

$$(J_6^{(\circ)})^\circ = -\frac{1}{7}(e^\circ)^6 + \frac{5}{21}q^\circ(e^\circ)^4 \quad (772)$$

или после подстановок

$$\left. \begin{aligned}
 (e^\circ)^2 &= 2\alpha^\circ - (\alpha^\circ)^2 \\
 (e^\circ)^4 &= 4(\alpha^\circ)^2 - 4(\alpha^\circ)^3 + (\alpha^\circ)^4 \\
 (e^\circ)^6 &= 8(\alpha^\circ)^3 - 12(\alpha^\circ)^4 + 6(\alpha^\circ)^5 - (\alpha^\circ)^6
 \end{aligned} \right\} \quad (773)$$

будем иметь

$$\begin{aligned}
 (J_2^{(\circ)})^\circ &= -\frac{2}{3}\alpha^\circ + \frac{1}{3}(\alpha^\circ)^3 + 0(\alpha^\circ)^3 + \frac{1}{3}q^\circ - \\
 &- \frac{3}{7}\alpha^\circ q^\circ + \frac{25}{147}(\alpha^\circ)^2 q^\circ, \quad (774)
 \end{aligned}$$

$$(J_4^{(\circ)})^\circ = \frac{4}{5}(\alpha^\circ)^2 - \frac{4}{5}(\alpha^\circ)^3 - \frac{4}{7}\alpha^\circ q^\circ + \frac{50}{49}(\alpha^\circ)^2 q^\circ, \quad (775)$$

$$(J_6^{(\circ)})^\circ = -\frac{8}{7}(\alpha^\circ)^3 + \frac{20}{21}(\alpha^\circ)^2 q^\circ. \quad (776)$$

Если подставим (770) в (768), то получим для потенциала уровенного эллипсоида

$$U_0 = \frac{fM}{a^2} \left[ 1 + \frac{1}{6} (e^\circ)^2 + \frac{1}{3} q^\circ + \frac{3}{40} (e^\circ)^4 + 0 (e^\circ)^2 q^\circ + \frac{5}{112} (e^\circ)^6 + 0 (e^\circ)^4 q^\circ \right], \quad (777)$$

или после подстановки вместо  $e^\circ$  выражений (773) получим

$$U_0 = \frac{fM}{a^2} \left[ 1 + \frac{1}{3} \alpha^\circ + \frac{1}{3} q^\circ + \frac{2}{15} (\alpha^\circ)^2 + 0 \alpha^\circ q^\circ + 0 (\alpha^\circ)^2 q^\circ + \frac{2}{35} (\alpha^\circ)^3 \right]. \quad (778)$$

Из уравнения (774) можем определить сжатие уровенного эллипсоида

$$\begin{aligned} \alpha^\circ = & -\frac{3}{2} (J_2^{(\circ)})^\circ + \frac{1}{2} q^\circ - \frac{11}{56} (q^\circ)^2 + \frac{3}{14} (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ + \\ & + \frac{9}{8} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 + \frac{9}{98} (q^\circ)^3 - \frac{93}{784} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 + \\ & + \frac{9}{98} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ - \frac{27}{16} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3, \end{aligned} \quad (779)$$

или квадрат его эксцентриситета

$$\begin{aligned} (e^\circ)^2 = & -3 (J_2^{(\circ)})^\circ + q^\circ - \frac{9}{14} (q^\circ)^2 + \frac{27}{14} (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ + \\ & + 0 [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 + \frac{149}{392} (q^\circ)^3 - \frac{51}{49} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 - \\ & - \frac{117}{392} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ + 0 [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3, \end{aligned} \quad (780)$$

а также и

$$\begin{aligned} (\alpha^\circ)^2 = & \frac{9}{4} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 + \frac{1}{4} (q^\circ)^2 - \frac{3}{2} (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ - \frac{11}{56} (q^\circ)^3 + \\ & + \frac{45}{56} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 + \frac{27}{56} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ - \frac{27}{8} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3, \end{aligned} \quad (781)$$

$$\begin{aligned} (\alpha^\circ)^3 = & -\frac{27}{8} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3 + \frac{1}{8} (q^\circ)^3 - \frac{9}{8} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 + \\ & + \frac{27}{8} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ, \end{aligned} \quad (782)$$

$$\begin{aligned} (e^\circ)^4 = & 9 [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 + (q^\circ)^2 - 6 (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ - \frac{9}{7} (q^\circ)^3 + \\ & + \frac{54}{7} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 - \frac{81}{7} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ + 0 [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3, \end{aligned} \quad (783)$$

$$(e^\circ)^6 = -27 [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3 + (q^\circ)^3 - 9 (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 + 27 [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ. \quad (784)$$

Выражения (779)—(784) помогут нам легко определить  $(J_4^{(\circ)})^\circ$  и  $(J_6^{(\circ)})^\circ$  как функции  $(J_2^{(\circ)})^\circ$  и  $q^\circ$

$$(J_4^{(\circ)})^\circ = \frac{9}{5} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 - \frac{3}{35} (q^\circ)^2 - \frac{12}{35} (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ - \\ - \frac{27}{245} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 - \frac{162}{245} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ + \frac{62}{245} (q^\circ)^3, \quad (785)$$

$$(J_6^{(\circ)})^\circ = \frac{27}{7} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3 - \frac{1}{7} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 - \\ - \frac{12}{7} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ + \frac{2}{21} (q^\circ)^3. \quad (786)$$

Выражения (779)—(784) дают возможность также определить потенциал (768), (777), (778) эллипсоида как функцию  $fM$ ,  $a^\circ$ ,  $(J_2^{(\circ)})^\circ$ ,  $q^\circ$

$$U_0 = \frac{fM}{a^\circ} \left\{ 1 + \frac{1}{2} q^\circ - \frac{1}{2} (J_2^{(\circ)})^\circ - \frac{9}{280} (q^\circ)^2 - \frac{9}{70} (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ + \right. \\ + \frac{27}{40} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 + \frac{17}{1470} (q^\circ)^3 + \frac{13}{3920} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 + \\ \left. + \frac{141}{490} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ - \frac{270}{224} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3 \right\}. \quad (787)$$

Большую полуось уровенного эллипсоида можем сразу же определить из (777), или (778), или (787). Для определения малой полуоси  $b^\circ$  имеем

$$b^\circ = \frac{fM}{U_0} \left\{ 1 + 0(q^\circ) + (J_2^{(\circ)})^\circ - \frac{3}{35} (q^\circ)^2 + \frac{44}{105} (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ - \right. \\ - \frac{6}{5} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 + \frac{5}{147} (q^\circ)^3 - \frac{33}{490} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 - \\ \left. - \frac{387}{490} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ + \frac{787}{385} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3 \right\}.$$

Из уравнения для нормального потенциала (766) можем определить нормальное ускорение силы тяжести

$$\gamma = \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{1}{\rho^2} \left( \frac{\partial U}{\partial \Phi} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (788)$$

причем разложение в ряд сферических функций получим в виде

$$\gamma = \frac{fM}{\rho^2} \left[ (C_0^{(\circ)})^\circ + (C_2^{(\circ)})^\circ P_2^{(\circ)}(\sin \Phi) + (C_4^{(\circ)})^\circ P_4^{(\circ)}(\sin \Phi) + \right. \\ \left. + (C_6^{(\circ)})^\circ P_6^{(\circ)}(\sin \Phi) + \dots \right]. \quad (789)$$

Для коэффициентов  $(C_n^{(\circ)})^\circ$  имеют место такие же выражения, как (715), только нужно положить  $J_n^{(\circ)} = (J_n^{(\circ)})^\circ$ ,  $q = q^\circ$ ,  $(a_0 = a^\circ)$  и в случае необходимости учесть (785), (786)

$$\left. \begin{aligned}
(C_0^{(\circ)}) &= 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-3} q^{\circ} + \frac{3}{5} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-4} [(J_2^{(\circ)})^{\circ}]^2 + \frac{1}{15} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-6} (q^{\circ})^1 - \\
&\quad - \frac{2}{5} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-1} (J_2^{(\circ)})^{\circ} q^{\circ} + \frac{4}{105} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-9} (q^{\circ})^3 - \frac{9}{35} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-4} \times \\
&\quad \times (J_2^{(\circ)})^{\circ} (q^{\circ})^2 - \frac{9}{35} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-6} [(J_2^{(\circ)})^{\circ}]^3 + \frac{18}{35} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-1} [(J_2^{(\circ)})^{\circ}]^2 q^{\circ} \\
(C_2^{(\circ)})^{\circ} &= \frac{2}{3} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-3} q^{\circ} + 3 \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-2} (J_2^{(\circ)})^{\circ} + \frac{3}{7} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-4} [(J_2^{(\circ)})^{\circ}]^2 + \\
&\quad + \frac{1}{21} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-6} (q^{\circ})^2 - \frac{2}{7} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-1} (J_2^{(\circ)})^{\circ} q^{\circ} + \frac{27}{7} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-6} [(J_2^{(\circ)})^{\circ}]^3 - \\
&\quad - \frac{90}{49} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-1} [(J_2^{(\circ)})^{\circ}]^2 q^{\circ} - \frac{3}{49} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-4} (J_2^{(\circ)})^{\circ} (q^{\circ})^2 + \\
&\quad + \frac{4}{49} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-9} (q^{\circ})^3 \\
(C_4^{(\circ)})^{\circ} &= \frac{279}{35} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-4} [(J_2^{(\circ)})^{\circ}]^2 - \frac{36}{35} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-1} (J_2^{(\circ)})^{\circ} q^{\circ} - \\
&\quad - \frac{207}{2695} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-4} (J_2^{(\circ)})^{\circ} (q^{\circ})^2 - \frac{12\,906}{2695} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-1} [(J_2^{(\circ)})^{\circ}]^2 q^{\circ} - \\
&\quad - \frac{19}{35} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-6} (q^{\circ})^2 + \frac{3274}{2695} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-9} (q^{\circ})^3 + \frac{54}{35} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-6} [(J_2^{(\circ)})^{\circ}]^3 \\
(C_6^{(\circ)})^{\circ} &= \frac{1683}{77} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-6} [(J_2^{(\circ)})^{\circ}]^3 - \frac{708}{77} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-1} [(J_2^{(\circ)})^{\circ}]^2 q^{\circ} - \\
&\quad - \frac{89}{77} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-4} (J_2^{(\circ)})^{\circ} (q^{\circ})^2 + \frac{46}{77} \left(\frac{a^{\circ}}{\rho}\right)^{-9} (q^{\circ})^3
\end{aligned} \right\} (790)$$

Если подставить в (789) в качестве  $\rho$  радиус-вектор уровенного эллипсоида, т. е.

$$\left. \begin{aligned}
\rho^{\circ} &= a^{\circ} [1 + (a_0^{(\circ)})^{\circ} + (a_2^{(\circ)})^{\circ} P_2^{(\circ)}(\sin \Phi) + (a_4^{(\circ)})^{\circ} P_4^{(\circ)}(\sin \Phi) + \\
&\quad + (a_6^{(\circ)})^{\circ} P_6^{(\circ)}(\sin \Phi)], \\
\text{где } (a_0^{(\circ)})^{\circ} &= -\frac{1}{6} (e^{\circ})^2 - \frac{11}{120} (e^{\circ})^4 - \frac{103}{1680} (e^{\circ})^6 = \frac{1}{2} (J_2^{(\circ)})^{\circ} - \\
&\quad - \frac{1}{6} q^{\circ} + \frac{13}{840} (q^{\circ})^2 + \frac{8}{35} (J_2^{(\circ)})^{\circ} q^{\circ} - \frac{33}{40} [(J_2^{(\circ)})^{\circ}]^2 + \\
&\quad + \frac{71}{3920} (J_2^{(\circ)})^{\circ} (q^{\circ})^2 - \frac{267}{490} [(J_2^{(\circ)})^{\circ}]^2 q^{\circ} - \frac{1}{147} (q^{\circ})^3 + \\
&\quad + \frac{927}{560} [(J_2^{(\circ)})^{\circ}]^3 \\
(a_2^{(\circ)})^{\circ} &= -\frac{1}{3} (e^{\circ})^2 - \frac{5}{42} (e^{\circ})^4 - \frac{3}{56} (e^{\circ})^6 = (J_2^{(\circ)})^{\circ} - \frac{1}{3} q^{\circ} + \\
&\quad + \frac{2}{24} (q^{\circ})^2 + \frac{1}{14} (J_2^{(\circ)})^{\circ} q^{\circ} - \frac{15}{14} [(J_2^{(\circ)})^{\circ}]^2 - \frac{5}{56} (J_2^{(\circ)})^{\circ} (q^{\circ})^2 + \\
&\quad + \frac{3}{98} [(J_2^{(\circ)})^{\circ}]^2 q^{\circ} - \frac{4}{147} (q^{\circ})^3 + \frac{81}{56} [(J_2^{(\circ)})^{\circ}]^3 \\
(a_4^{(\circ)})^{\circ} &= \frac{3}{35} (e^{\circ})^4 + \frac{57}{770} (e^{\circ})^6 = \frac{27}{35} [(J_2^{(\circ)})^{\circ}]^2 + \frac{3}{35} (q^{\circ})^2 -
\end{aligned} \right\} (791)$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{18}{35} (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ - \frac{27}{5390} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 + \frac{5427}{5390} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ - \\
 & \quad - \frac{39}{1078} (q^\circ)^3 - \frac{1539}{770} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3 \\
 (a_8^{(\circ)})^\circ = & -\frac{5}{231} (e^\circ)^6 = -\frac{45}{77} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ + \frac{15}{77} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 - \\
 & -\frac{5}{231} (q^\circ)^3 + \frac{45}{77} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3
 \end{aligned} \tag{792}$$

то далее получим

$$\gamma = \gamma_0^{(\circ)} + \gamma_2^{(\circ)} P_2^{(\circ)}(\sin \Phi) + \gamma_4^{(\circ)} P_4^{(\circ)}(\sin \Phi) + \gamma_6^{(\circ)} P_6^{(\circ)}(\sin \Phi),$$

где выражения для коэффициентов  $\gamma_n^{(\circ)}$  вытекают из (736) для  $J_n^{(\circ)} = (J_n^{(\circ)})^\circ$ ,  $a_i = a^\circ$ ,  $e = e^\circ$ ,  $e_1 = 0$ ,  $q = q^\circ$ , после подстановок (785)–(786) и (770)–(772), тогда

$$\begin{aligned}
 \gamma_0^{(\circ)} = & \frac{fM}{(a^\circ)^2} \left\{ 1 + \frac{1}{3} (e^\circ)^2 - \frac{2}{3} q^\circ + \frac{1}{3} (e^\circ)^4 + \frac{1}{15} q^\circ (e^\circ)^2 + \right. \\
 & + \frac{1}{15} (q^\circ)^2 + \frac{4}{5} (J_2^{(\circ)})^\circ (e^\circ)^2 - \frac{2}{5} (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ + \frac{3}{5} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 + \\
 & + \frac{19}{420} q^\circ (e^\circ)^4 + \frac{1}{3} (e^\circ)^6 + \frac{8}{7} (J_2^{(\circ)})^\circ (e^\circ)^4 + \frac{27}{35} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 (e^\circ)^2 - \\
 & - \frac{2}{35} (q^\circ)^2 (e^\circ)^2 - \frac{3}{35} (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ (e^\circ)^2 - \frac{9}{35} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3 - \\
 & \left. - \frac{9}{35} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 + \frac{18}{35} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ + \frac{4}{105} (q^\circ)^3 \right\} = \\
 = & \frac{fM}{(a^\circ)^2} \left[ 1 + \frac{1}{3} (e^\circ)^2 - \frac{2}{3} q^\circ + \frac{2}{15} (e^\circ)^4 + \frac{1}{3} q^\circ (e^\circ)^2 + 0 (q^\circ)^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{21} (e^\circ)^6 + \frac{19}{84} q^\circ (e^\circ)^4 + 0 (q^\circ)^2 (e^\circ)^2 + 0 (q^\circ)^3 \right] \\
 \gamma_2^{(\circ)} = & \frac{fM}{(a^\circ)^2} \left\{ 3 (J_2^{(\circ)})^\circ + \frac{2}{3} (e^\circ)^2 + \frac{2}{3} q^\circ + \frac{2}{3} (e^\circ)^4 + \frac{1}{21} (q^\circ)^2 + \right. \\
 & + \frac{1}{21} q^\circ (e^\circ)^2 + \frac{22}{7} (J_2^{(\circ)})^\circ (e^\circ)^2 - \frac{2}{7} (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ + \frac{3}{7} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 + \\
 & + \frac{20}{7} (J_2^{(\circ)})^\circ (J_4^{(\circ)})^\circ + \frac{2}{3} (e^\circ)^6 + \frac{1}{84} q^\circ (e^\circ)^4 + \frac{31}{7} (J_2^{(\circ)})^\circ (e^\circ)^4 + \\
 & + \frac{9}{7} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 (e^\circ)^2 - \frac{2}{21} (q^\circ)^2 (e^\circ)^2 - \frac{1}{7} (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ (e^\circ)^2 - \\
 & - \frac{20}{21} (J_4^{(\circ)})^\circ q^\circ - \frac{9}{7} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3 - \frac{1}{7} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 + \frac{6}{7} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ + \\
 & \left. + \frac{20}{7} (J_4^{(\circ)})^\circ (e^\circ)^2 \right\} = \frac{fM}{(a^\circ)^2} \left\{ 3 (J_2^{(\circ)})^\circ + \frac{2}{3} (e^\circ)^2 + \frac{2}{3} q^\circ + \right. \\
 & + \frac{2}{3} (e^\circ)^4 + \frac{1}{21} (q^\circ)^2 + \frac{1}{21} q^\circ (e^\circ)^2 + \frac{22}{7} (J_2^{(\circ)})^\circ (e^\circ)^2 - \\
 & - \frac{2}{7} (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ + \frac{3}{7} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 + \frac{26}{21} (e^\circ)^6 - \frac{195}{196} q^\circ (e^\circ)^4 + \\
 & \left. + \frac{31}{7} (J_2^{(\circ)})^\circ (e^\circ)^4 + \frac{9}{7} (J_2^{(\circ)})^\circ (e^\circ)^2 + \frac{26}{147} (q^\circ)^2 (e^\circ)^2 - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{7}(J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ (e^\circ)^2 - \frac{9}{7} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3 - \frac{1}{7}(J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 + \\
& + \frac{6}{7} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ \} = \frac{fM}{(a^\circ)^2} \left[ -\frac{1}{3}(e^\circ)^2 + \frac{5}{3}q^\circ - \frac{1}{3}(e^\circ)^4 + \right. \\
& + \frac{19}{42}q^\circ (e^\circ)^2 + 0(q^\circ)^2 - \frac{5}{21}(e^\circ)^6 + \frac{5}{392}q^\circ (e^\circ)^4 + \\
& \quad \left. + 0(q^\circ)^2 (e^\circ)^2 + 0(q^\circ)^3 \right] \\
\gamma_4^{(\circ)} & = \frac{fM}{(a^\circ)^2} \left\{ 5(J_4^{(\circ)})^\circ + 0(e^\circ)^4 - \frac{4}{35}q^\circ (e^\circ)^2 - \frac{4}{35}(q^\circ)^2 + \right. \\
& + \frac{72}{35}(J_2^{(\circ)})^\circ (e^\circ)^2 + \frac{24}{35}(J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ - \frac{36}{35} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 + 0(e^\circ)^6 - \\
& - \frac{32}{385}q^\circ (e^\circ)^4 + \frac{240}{77}(J_2^{(\circ)})^\circ (e^\circ)^4 - \frac{432}{385} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 (e^\circ)^2 - \\
& - \frac{32}{385}(q^\circ)^2 (e^\circ)^2 + \frac{48}{385}(J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ (e^\circ)^2 - \frac{20}{77}(J_4^{(\circ)})^\circ q^\circ + \\
& + \frac{54}{385} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3 + \frac{174}{385}(J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 - \frac{288}{385} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ - \\
& - \frac{4}{55}(q^\circ)^3 + \frac{585}{77}(J_4^{(\circ)})^\circ (e^\circ)^2 + \frac{60}{77}(J_2^{(\circ)})^\circ (J_4^{(\circ)})^\circ \} = \frac{fM}{(a^\circ)^2} \left\{ (e^\circ)^4 - \right. \\
& - \frac{54}{35}q^\circ (e^\circ)^2 - \frac{3739}{2695}q^\circ (e^\circ)^4 - \frac{4}{35}(q^\circ)^2 + \frac{72}{35}(J_2^{(\circ)})^\circ (e^\circ)^2 + \\
& + \frac{24}{35}(J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ - \frac{36}{35} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 + \frac{117}{77}(e^\circ)^6 + \frac{240}{77}(J_2^{(\circ)})^\circ (e^\circ)^4 - \\
& - \frac{432}{385} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 (e^\circ)^2 + \frac{424}{2695}(q^\circ)^2 (e^\circ)^2 + \frac{48}{385}(J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ (e^\circ)^2 + \\
& + \frac{54}{385} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3 + \frac{174}{385}(J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 - \frac{288}{385} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ - \\
& - \frac{4}{55}(q^\circ)^3 \} = \frac{fM}{(a^\circ)^2} \left[ \frac{1}{5}(e^\circ)^4 - \frac{6}{7}q^\circ (e^\circ)^2 + 0(q^\circ)^2 + \frac{23}{77}(e^\circ)^6 - \right. \\
& \quad \left. - \frac{361}{539}q^\circ (e^\circ)^4 + 0(q^\circ)^2 (e^\circ)^2 + 0(q^\circ)^3 \right] \\
\gamma_6^{(\circ)} & = \frac{fM}{(a^\circ)^2} \left\{ 7(J_6^{(\circ)})^\circ + 0(e^\circ)^6 - \frac{40}{11}(J_2^{(\circ)})^\circ (J_2^{(\circ)})^\circ + \right. \\
& + \frac{40}{33}(J_4^{(\circ)})^\circ q^\circ + \frac{108}{77} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3 - \frac{4}{77}(J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 - \\
& - \frac{48}{77} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ + \frac{8}{231}(q^\circ)^3 + \frac{24}{77}(J_2^{(\circ)})^\circ (e^\circ)^4 + \frac{2}{77}q^\circ (e^\circ)^4 - \\
& - \frac{72}{77} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 (e^\circ)^2 + \frac{16}{231}(q^\circ)^2 (e^\circ)^2 + \frac{8}{77}(J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ (e^\circ)^2 + \\
& + \frac{50}{11}(J_4^{(\circ)})^\circ (e^\circ)^2 \} = \frac{fM}{(a^\circ)^2} \left\{ -\frac{1}{11}(e^\circ)^6 + \frac{7}{11}q^\circ (e^\circ)^4 - \right. \\
& - \frac{32}{77}(J_2^{(\circ)})^\circ (e^\circ)^4 + \frac{8}{7}(J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ (e^\circ)^2 - \frac{64}{231}(q^\circ)^2 (e^\circ)^2 + \\
& + \frac{108}{77} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3 - \frac{4}{77}(J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 - \frac{48}{77} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ + \frac{8}{231}(q^\circ)^3 - \\
& - \frac{72}{77} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 (e^\circ)^2 \} = \frac{fM}{(a^\circ)^2} \left[ -\frac{25}{231}(e^\circ)^6 + \frac{95}{231}q^\circ (e^\circ)^4 + \right. \\
& \quad \left. + 0(q^\circ)^2 (e^\circ)^2 + 0(q^\circ)^3 \right]
\end{aligned}$$

(793)

Нормальное ускорение силы тяжести  $\gamma_e$  на экваторе уровенного эллипсоида вращения определим из (792), положив  $\Phi = 0^\circ$ , тогда (с учетом выражений (793), (773), (779))

$$\begin{aligned} \gamma_e &= \gamma_0^{(e)} - \frac{1}{2} \gamma_2^{(e)} + \frac{3}{8} \gamma_4^{(e)} - \frac{5}{16} \gamma_6^{(e)} = \frac{fM}{(a^\circ)^2} \left[ 1 + \frac{1}{2} (e^\circ)^2 - \frac{3}{2} q^\circ + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{8} (e^\circ)^4 - \frac{3}{14} q^\circ (e^\circ)^2 - \frac{47}{294} q^\circ (e^\circ)^4 + \frac{5}{16} (e^\circ)^6 + 0 (q^\circ)^2 (e^\circ)^2 \right] = \\ &= \frac{fM}{(a^\circ)^2} \left[ 1 + \alpha^\circ - \frac{3}{2} q^\circ + (\alpha^\circ)^2 - \frac{3}{7} \alpha^\circ q^\circ + (\alpha^\circ)^3 - \frac{125}{294} (\alpha^\circ)^2 q^\circ \right] = \\ &= \frac{fM}{(a^\circ)^2} \left\{ 1 - \frac{3}{2} (J_2^{(e)})^\circ - q^\circ - \frac{9}{56} (q^\circ)^2 - \frac{9}{14} (J_2^{(e)})^\circ q^\circ + \right. \\ &\quad \left. + \frac{27}{8} [(J_2^{(e)})^\circ]^2 - \frac{1}{588} (q^\circ)^3 + \frac{83}{784} (J_2^{(e)})^\circ (q^\circ)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{135}{16} [(J_2^{(e)})^\circ]^3 + \frac{123}{49} [(J_2^{(e)})^\circ]^2 q^\circ \right\}. \end{aligned} \quad (794)$$

Формулы для ускорения силы тяжести на поверхности уровенного эллипсоида вращения нужно привести к привычной в гравиметрической практике форме, для чего

$$\begin{aligned} \frac{1}{\gamma_e} &= \frac{(a^\circ)^2}{fM} \left[ 1 - \frac{1}{2} (e^\circ)^2 + \frac{3}{2} q^\circ - \frac{1}{8} (e^\circ)^4 - \frac{9}{7} q^\circ (e^\circ)^2 + \frac{9}{4} (q^\circ)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{16} (e^\circ)^6 - \frac{8}{147} q^\circ (e^\circ)^4 - \frac{153}{56} (q^\circ)^2 (e^\circ)^2 + \frac{27}{8} (q^\circ)^3 \right] \end{aligned} \quad (795)$$

представим в виде отношения

$$\gamma : \gamma_e = 1 + {}^1\beta_0^{(e)} + {}^1\beta_2^{(e)} P_2^{(e)}(\sin \Phi) + {}^1\beta_4^{(e)} P_4^{(e)}(\sin \Phi) + {}^1\beta_6^{(e)} P_6^{(e)}(\sin \Phi), \quad (796)$$

где с учетом (793)

$$\begin{aligned} {}^1\beta_0^{(e)} &= -\frac{1}{6} (e^\circ)^2 + \frac{5}{6} q^\circ - \frac{19}{120} (e^\circ)^4 - \frac{5}{42} q^\circ (e^\circ)^2 + \frac{5}{4} (q^\circ)^2 - \\ &\quad - \frac{69}{560} (e^\circ)^6 - \frac{103}{735} q^\circ (e^\circ)^4 - \frac{5}{8} (q^\circ)^2 (e^\circ)^2 + \frac{15}{8} (q^\circ)^3, \end{aligned} \quad (797)$$

$$\begin{aligned} {}^1\beta_2^{(e)} &= -\frac{1}{3} (e^\circ)^2 + \frac{5}{3} q^\circ - \frac{1}{6} (e^\circ)^4 - \frac{37}{42} q^\circ (e^\circ)^2 + \frac{5}{2} (q^\circ)^2 - \\ &\quad - \frac{5}{168} (e^\circ)^6 - \frac{145}{294} q^\circ (e^\circ)^4 - \frac{31}{14} (q^\circ)^2 (e^\circ)^2 + \frac{15}{4} (q^\circ)^3, \end{aligned} \quad (798)$$

$${}^1\beta_4^{(e)} = \frac{1}{5} (e^\circ)^4 - \frac{6}{7} q^\circ (e^\circ)^2 + \frac{153}{770} (e^\circ)^6 + \frac{317}{5390} q^\circ (e^\circ)^4 - \frac{9}{7} (q^\circ)^2 (e^\circ)^2, \quad (799)$$

$${}^1\beta_6^{(e)} = -\frac{25}{231} (e^\circ)^6 + \frac{95}{231} q^\circ (e^\circ)^4 \quad (800)$$

или

$$\frac{\gamma}{\gamma_e} = 1 + {}^2\beta_2^{(\circ)} \sin^2 \Phi + {}^2\beta_4^{(\circ)} \sin^4 \Phi + {}^2\beta_6^{(\circ)} \sin^6 \Phi, \quad (801)$$

где

$$\begin{aligned} {}^2\beta_2^{(\circ)} = & -\frac{1}{2} (e^\circ)^2 + \frac{5}{2} q^\circ - (e^\circ)^4 + \frac{53}{28} q^\circ (e^\circ)^2 + \frac{15}{4} (q^\circ)^2 - \\ & - \frac{3}{2} (e^\circ)^6 + \frac{1363}{784} q^\circ (e^\circ)^4 + \frac{3}{2} (q^\circ)^2 (e^\circ)^2 + \frac{45}{8} (q^\circ)^3, \end{aligned} \quad (802)$$

$${}^2\beta_4^{(\circ)} = \frac{7}{8} (e^\circ)^4 - \frac{15}{4} q^\circ (e^\circ)^2 + 3 (e^\circ)^6 - \frac{439}{56} q^\circ (e^\circ)^4 - \frac{45}{8} (q^\circ)^2 (e^\circ)^2, \quad (803)$$

$${}^2\beta_6^{(\circ)} = -\frac{25}{16} (e^\circ)^6 + \frac{95}{16} q^\circ (e^\circ)^4 \quad (804)$$

или с учетом соотношений

$$\left. \begin{aligned} \sin^4 \Phi &= \sin^2 \Phi - \frac{1}{4} \sin^2 2\Phi \\ \sin^6 \Phi &= \sin^2 \Phi - \frac{1}{4} \sin^2 2\Phi - \frac{1}{4} \sin^2 \Phi \sin^2 2\Phi \end{aligned} \right\} \quad (805)$$

получим

$$\frac{\gamma}{\gamma_e} = 1 + {}^3\beta_2^{(\circ)} \sin^2 \Phi + {}^3\beta_4^{(\circ)} \sin^2 2\Phi + {}^3\beta_6^{(\circ)} \sin^2 \Phi \sin^2 2\Phi, \quad (806)$$

где

$$\begin{aligned} {}^3\beta_2^{(\circ)} = & -\frac{1}{2} (e^\circ)^2 + \frac{5}{2} q^\circ - \frac{1}{8} (e^\circ)^4 - \frac{13}{7} q^\circ (e^\circ)^2 + \frac{15}{4} (q^\circ)^2 - \\ & - \frac{1}{16} (e^\circ)^6 - \frac{8}{49} q^\circ (e^\circ)^4 - \frac{33}{8} (q^\circ)^2 (e^\circ)^2 + \frac{45}{8} (q^\circ)^3, \end{aligned} \quad (807)$$

$${}^3\beta_4^{(\circ)} = -\frac{7}{32} (e^\circ)^4 + \frac{15}{16} q^\circ (e^\circ)^2 - \frac{23}{64} (e^\circ)^6 + \frac{213}{448} q^\circ (e^\circ)^4 + \frac{45}{32} (q^\circ)^2 (e^\circ)^2, \quad (808)$$

$${}^3\beta_6^{(\circ)} = \frac{25}{64} (e^\circ)^6 - \frac{95}{64} q^\circ (e^\circ)^4. \quad (809)$$

В геодезической практике, однако, используют не широту  $\varphi$ , а широту геодезическую, т. е. угол, который образует нормаль к эллипсоиду с плоскостью экватора. Геодезическую широту для случая уровненного эллипсоида обозначим  $\bar{B}$ \*. Между  $\varphi$  и  $\bar{B}$  суще-

\* Мы обозначим ее с черточкой для отличия от геодезической широты  $\bar{B}$  на геодезическом референц-эллипсоиде. Связь  $B$  и  $\bar{B}$  определяют известные дифференциальные формулы первого и второго рода при взаимно параллельных осях (см. часть I, § 20, IV)

$$\begin{aligned} B - \bar{B} = & \frac{\rho''}{M} \sin B \cos L \Delta x_0 + \frac{\rho''}{M} \sin B \sin L \Delta y_0 - \frac{\bar{\rho}''}{M} \cos B \Delta x_0 - \\ & - (e^\circ)^2 \sin B \cos B \frac{da}{a^\circ} - [2 - (e^\circ)^2 \sin^2 B] \sin B \cos B \frac{d\alpha}{1 - \alpha^\circ} + \\ & + \varepsilon_0 \sin L - \psi_0 \cos L, \quad M = \frac{a^\circ [1 - (e^\circ)^2]}{[1 - (e^\circ)^2 \sin^2 B]^{3/2}}, \end{aligned}$$

ствуёт известное в высшей геодезии соотношение [65]

$$\begin{aligned} \Phi - \bar{B} = & -\frac{(e^\circ)^2}{2-(e^\circ)^2} \sin 2\bar{B} + \frac{1}{2} \left[ \frac{(e^\circ)^2}{2-(e^\circ)^2} \right]^2 \sin 4\bar{B} - \\ & -\frac{1}{3} \left[ \frac{(e^\circ)^2}{2-(e^\circ)^2} \right]^3 \sin 6\bar{B} + \dots, \end{aligned} \quad (810)$$

которое с достаточной для наших целей точностью можно переписать так

$$\begin{aligned} \Phi - \bar{B} \simeq & -\left[ \frac{1}{2} (e^\circ)^2 + \frac{1}{4} (e^\circ)^4 + \frac{1}{8} (e^\circ)^6 \right] \sin 2\bar{B} + \frac{1}{8} [(e^\circ)^4 + (e^\circ)^6] \times \\ & \times \sin 4\bar{B} - \frac{1}{24} (e^\circ)^6 \sin 6\bar{B}, \end{aligned} \quad (811)$$

$$(\Phi - \bar{B})^2 \simeq \frac{1}{4} (e^\circ)^4 \sin^2 2\bar{B}. \quad (812)$$

Кроме того,

$$\sin^2 \Phi \simeq \sin^2 \bar{B} - \left[ \frac{1}{2} (e^\circ)^2 - \frac{1}{4} (e^\circ)^4 \right] \sin^2 2\bar{B} - (e^\circ)^4 \sin^2 \bar{B} \sin^2 2\bar{B}, \quad (813)$$

$$\sin^2 2\Phi \simeq \sin^2 2\bar{B} - 2(e^\circ)^2 \sin^2 2\bar{B} + 4(e^\circ)^2 \sin^2 \bar{B} \sin^2 2\bar{B}. \quad (814)$$

Используя (780), (783), (784), получаем

$$\begin{aligned} \Phi - \bar{B} \simeq & \left\{ -\frac{1}{2} q^\circ + \frac{3}{2} (J_2^{(\circ)})^\circ + \frac{1}{14} (q^\circ)^2 + \frac{15}{28} (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ - \frac{9}{4} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 + \right. \\ & + \frac{5}{784} (q^\circ)^3 - \frac{111}{392} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 - \frac{261}{784} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ + \\ & + \frac{27}{8} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3 \left. \right\} \sin 2\bar{B} + \left\{ \frac{1}{8} (q^\circ)^2 - \frac{3}{4} (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ + \frac{9}{8} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 - \right. \\ & - \frac{1}{28} (q^\circ)^3 - \frac{9}{56} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 + \frac{27}{14} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ - \frac{27}{8} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3 \left. \right\} \sin 4\bar{B} - \\ & - \left\{ \frac{1}{24} (q^\circ)^3 + \frac{9}{8} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ - \frac{3}{8} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 - \frac{9}{8} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3 \right\} \sin 6\bar{B}. \end{aligned} \quad (815)$$

$$\begin{aligned} (\Phi - \bar{B})^2 \simeq & \left\{ \frac{1}{4} (q^\circ)^2 - \frac{3}{2} (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ + \frac{9}{4} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 - \frac{9}{28} (q^\circ)^3 + \right. \\ & + \frac{27}{14} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 - \frac{81}{28} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ \left. \right\} \sin^2 2\bar{B}, \end{aligned} \quad (816)$$

$$\begin{aligned} \sin^2 \Phi \simeq & \sin^2 \bar{B} + \left\{ -\frac{1}{2} q^\circ + \frac{3}{2} (J_2^{(\circ)})^\circ + \frac{4}{7} (q^\circ)^2 - \frac{69}{28} (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ + \right. \\ & + \frac{9}{4} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 - \frac{401}{784} (q^\circ)^3 + \frac{120}{49} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 - \frac{2151}{784} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ \left. \right\} \sin^2 2\bar{B} + \end{aligned}$$

где  $da$ ,  $d\alpha$  — разности соответствующих параметров геодезического референцного и уровенного эллипсоидов,  $\Delta x_0$ ,  $\Delta y_0$ ,  $\Delta z_0$ ,  $\varepsilon_0$ ,  $\psi_0$  — элементы трансформации.

$$+ \left\{ -(q^\circ)^2 + 6 (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ - 9 [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 + \frac{9}{7} (q^\circ)^3 - \frac{54}{7} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 + \right. \\ \left. + \frac{81}{7} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ \right\} \sin^2 \bar{B} \sin^2 2\bar{B}, \quad (817)$$

$$\sin^2 2\Phi \simeq \sin^2 2B - \left\{ 2q^\circ - 6 (J_2^{(\circ)})^\circ - \frac{9}{7} (q^\circ)^2 + \frac{27}{7} (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ + \right. \\ \left. + \frac{149}{196} (q^\circ)^3 - \frac{102}{49} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 - \frac{117}{196} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ \right\} \sin^2 2\bar{B} + \\ + \left\{ 4q^\circ - 12 (J_2^{(\circ)})^\circ - \frac{18}{7} (q^\circ)^2 + \frac{54}{7} (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ + \frac{149}{98} (q^\circ)^3 - \right. \\ \left. - \frac{204}{49} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 - \frac{117}{98} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ \right\} \sin^2 \bar{B} \sin^2 2\bar{B}. \quad (818)$$

С учетом (813)—(814) и, наконец, из (806) получим

$$\gamma = \gamma_e (1 + {}^4\beta_2^{(\circ)} \sin^2 \bar{B} + {}^4\beta_4^{(\circ)} \sin^2 2\bar{B} + {}^4\beta_6^{(\circ)} \sin^2 \bar{B} \sin^2 2\bar{B}) \quad (819)$$

или с обозначениями [66]

$$\gamma = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 \bar{B} - \beta_1 \sin^2 2\bar{B} - \beta'_1 \sin^2 \bar{B} \sin^2 2\bar{B}). \quad (820)$$

Здесь

$$\beta = {}^4\beta_2^{(\circ)} = {}^3\beta_2^{(\circ)}, \quad (821)$$

$$-\beta_1 = {}^4\beta_4^{(\circ)} = \frac{1}{32} (e^\circ)^4 - \frac{5}{16} q^\circ (e^\circ)^2 + \frac{1}{64} (e^\circ)^6 + \\ + \frac{69}{448} q^\circ (e^\circ)^4 - \frac{15}{32} (q^\circ)^2 (e^\circ)^2, \quad (822)$$

$$-\beta'_1 = {}^4\beta_6^{(\circ)} = \frac{1}{64} (e^\circ)^6 - \frac{15}{64} q^\circ (e^\circ)^4, \quad (823)$$

или, с учетом соотношений (780), (783), (784),

$$\beta = 2q^\circ + \frac{3}{2} (J_2^{(\circ)})^\circ + \frac{117}{56} (q^\circ)^2 + \frac{75}{14} (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ - \frac{9}{8} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 + \\ + \frac{239}{98} (q^\circ)^3 + \frac{7755}{784} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 - \frac{153}{98} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ + \frac{27}{16} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3, \quad (824)$$

$$-\beta_1 = -\frac{9}{32} (q^\circ)^2 + \frac{3}{4} (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ + \frac{9}{32} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 - \frac{31}{224} (q^\circ)^3 - \\ - \frac{9}{448} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 + \frac{81}{56} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ - \frac{27}{64} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3, \quad (825)$$

$$-\beta'_1 = -\frac{7}{32} (q^\circ)^3 + \frac{81}{64} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 - \frac{27}{16} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ - \frac{27}{64} [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3. \quad (826)$$

Среднее значение  $\bar{\gamma}$  нормального ускорения силы тяжести на поверхности уровенного эллипсоида вращения лучше всего вычислить по формуле (748), в которой положим  $a_0 = a_i = a^\circ$ .

$$\bar{\gamma} = \frac{fM}{(a^0)^2} \left[ 1 + \frac{1}{3} (e^0)^2 - \frac{2}{3} q^0 - 0 (q^0)^2 + \frac{8}{45} (e^0)^4 + \frac{1}{9} q^0 (e^0)^2 \right] = \\ = \frac{fM}{(a^0)^2} \left\{ 1 - \frac{1}{3} q^0 - (J_2^{(0)})^0 + \frac{47}{630} (q^0)^2 - \frac{53}{70} (J_2^{(0)})^0 q^0 + \frac{8}{5} [(J_2^{(0)})^0]^2 \right\}.$$

Возвращаясь к определению нормального поля по Гельмерту [68], напишем уравнение для потенциала силы тяжести на сфероиде Гельмерта

$$U_0 = \frac{fM}{\rho^{\circ}} \left\{ 1 + \left( \frac{a^{\circ}}{\rho^{\circ}} \right)^2 (J_2^{\circ})^{\circ} P_2^{\circ}(\sin \Phi) + \left( \frac{a^{\circ}}{\rho^{\circ}} \right)^4 (J_4^{\circ})^{\circ} P_4^{\circ}(\sin \Phi) + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} \left( \frac{a^{\circ}}{\rho^{\circ}} \right)^{-3} q^{\circ} [1 - P_2^{\circ}(\sin \Phi)] \right\}, \quad (827)$$

$$\text{где } q^{\circ} = \frac{\omega^2 (a^{\circ})^3}{fM},$$

$\rho^{\circ}$  — радиус-вектор поверхности этого сфероида, в выражении которого удержаны члены порядка  $[(J_2^{\circ})^{\circ}]^3$ ,

$$\left. \begin{aligned} \rho^{\circ} &= (R_0)^{\circ} \left[ 1 + (a_0^{\circ})^{\circ} + (a_2^{\circ})^{\circ} P_2^{\circ}(\sin \Phi) + (a_4^{\circ})^{\circ} P_4^{\circ}(\sin \Phi) + \right. \\ &\quad \left. + (a_6^{\circ})^{\circ} P_6^{\circ}(\sin \Phi) \right], \\ (a_0^{\circ})^{\circ} &= \frac{1}{3} v_0^{-3} q^{\circ} + \frac{2}{5} v_0^{-6} (q^{\circ})^2 - \frac{1}{15} v_0^{-1} (J_2^{\circ})^{\circ} q^{\circ} - \frac{2}{5} v_0^4 [(J_2^{\circ})^{\circ}]^2 + \\ &\quad + \frac{24}{35} v_0^{-9} (q^{\circ})^3 - \frac{8}{35} v_0^{-4} (J_2^{\circ})^{\circ} (q^{\circ})^2 + \\ &\quad + \frac{1}{24} v_0 [(J_2^{\circ})^{\circ}]^2 q^{\circ} + \frac{2}{5} v_0^6 [(J_2^{\circ})^{\circ}]^3 \\ (a_2^{\circ})^{\circ} &= v_0^2 (J_2^{\circ})^{\circ} - \frac{1}{3} v_0^{-3} q^{\circ} - \frac{4}{7} v_0^{-6} (q^{\circ})^2 + \frac{5}{21} v_0^{-1} (J_2^{\circ})^{\circ} q^{\circ} - \\ &\quad - \frac{4}{7} v_0^4 [(J_2^{\circ})^{\circ}]^2 - \frac{8}{7} v_0^{-9} (q^{\circ})^3 + \frac{4}{7} v_0^{-4} (J_2^{\circ})^{\circ} (q^{\circ})^2 + 3 v_0^6 [(J_2^{\circ})^{\circ}]^3 - \\ &\quad - \frac{12}{7} v_0^6 (J_2^{\circ})^{\circ} (J_4^{\circ})^{\circ} - \frac{1}{24} v_0 [(J_2^{\circ})^{\circ}]^2 q^{\circ} + \frac{2}{21} v_0 (J_4^{\circ})^{\circ} q^{\circ} \\ (a_4^{\circ})^{\circ} &= v_0^4 (J_4^{\circ})^{\circ} + \frac{6}{35} v_0^{-6} (q^{\circ})^2 - \frac{6}{35} v_0^{-1} (J_2^{\circ})^{\circ} q^{\circ} - \frac{36}{35} v_0^4 [(J_2^{\circ})^{\circ}]^2 + \\ &\quad + \frac{216}{385} v_0^{-9} (q^{\circ})^3 - \frac{192}{385} v_0^{-4} (J_2^{\circ})^{\circ} (q^{\circ})^2 + \frac{6}{77} v_0 [(J_2^{\circ})^{\circ}]^2 q^{\circ} + \\ &\quad + \frac{108}{55} v_0^6 [(J_2^{\circ})^{\circ}]^3 - \frac{120}{77} v_0^6 (J_2^{\circ})^{\circ} (J_4^{\circ})^{\circ} - \frac{19}{77} v_0 (J_4^{\circ})^{\circ} q^{\circ} \\ (a_6^{\circ})^{\circ} &= v_0^6 (J_6^{\circ})^{\circ} - \frac{8}{77} v_0^{-9} (q^{\circ})^3 + \frac{12}{77} v_0^{-4} (J_2^{\circ})^{\circ} (q^{\circ})^2 - \\ &\quad - \frac{6}{77} v_0 [(J_2^{\circ})^{\circ}]^2 q^{\circ} + \frac{18}{41} v_0^6 [(J_2^{\circ})^{\circ}]^3 - \frac{30}{41} v_0^6 (J_2^{\circ})^{\circ} (J_4^{\circ})^{\circ} + \\ &\quad + \frac{5}{33} v_0 (J_4^{\circ})^{\circ} q^{\circ}, \\ v_0 &= \frac{a^{\circ}}{(R_0)^{\circ}}, \quad (R_0)^{\circ} = \frac{GM}{U_0}. \end{aligned} \right\} (827')$$

Для ускорения силы тяжести на сфероиде Гельмерта получим, согласно (788),

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{fM}{[(R_0)^\circ]^2} [1 + \gamma_0^{(\circ)} + \gamma_2^{(\circ)} P_2^{(\circ)}(\sin \Phi) + \\
&\quad + \gamma_4^{(\circ)} P_4^{(\circ)}(\sin \Phi) + \gamma_6^{(\circ)} P_6^{(\circ)}(\sin \Phi)] \\
\text{где } \gamma_0^{(\circ)} &= -\frac{4}{3} \nu_0^{-3} q^\circ - \frac{3}{5} \nu_0^{-6} (q^\circ)^2 + \frac{4}{15} \nu_0^{-1} (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ - \\
&\quad - \frac{2}{5} \nu_0^4 [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 - \frac{4}{5} \nu_0^{-9} (q^\circ)^3 + \frac{1}{5} \nu_0^{-4} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 + \\
&\quad + \frac{88}{105} \nu_0 [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ + \frac{33}{35} \nu_0^6 [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3 \\
\gamma_2^{(\circ)} &= \nu_0^2 (J_2^{(\circ)})^\circ + \frac{4}{3} \nu^{-3} q^\circ + \nu_0^{-6} (q^\circ)^2 - \frac{8}{3} \nu_0^{-1} (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ - \\
&\quad - \nu_0^4 [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 + \frac{8}{7} \nu_0^{-9} (q^\circ)^3 - \frac{5}{7} \nu_0^{-4} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 - \\
&\quad - \frac{8}{21} \nu_0 [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ + \frac{339}{49} \nu_0^6 [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3 - \\
&\quad - 4 \nu_0^6 (J_2^{(\circ)})^\circ (J_4^{(\circ)})^\circ + \frac{4}{3} \nu_0 (J_4^{(\circ)})^\circ q^\circ \\
\gamma_4^{(\circ)} &= 3 \nu_0^4 (J_4^{(\circ)})^\circ - \frac{2}{5} \nu_0^{-6} (q^\circ)^2 + \frac{12}{5} \nu_0^{-1} (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ - \\
&\quad - \frac{18}{5} \nu_0^4 [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 - \frac{372}{385} \nu_0^{-9} (q^\circ)^3 + \frac{338}{385} \nu_0^{-4} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 + \\
&\quad + \frac{1416}{385} \nu_0 [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ + \frac{21 \cdot 654}{2695} \nu_0^6 [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3 - \\
&\quad - \frac{60}{11} \nu_0^6 (J_2^{(\circ)})^\circ (J_4^{(\circ)})^\circ - \frac{552}{77} \nu_0 (J_4^{(\circ)})^\circ q^\circ \\
\gamma_6^{(\circ)} &= 5 \nu_0^6 (J_6^{(\circ)})^\circ - \frac{4}{11} \nu_0^{-4} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 + \frac{8}{33} \nu_0^{-9} (q^\circ)^3 - \\
&\quad - \frac{48}{11} \nu_0 [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ + \frac{108}{11} \nu_0^6 [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3 - \\
&\quad - \frac{160}{11} \nu_0^6 (J_2^{(\circ)})^\circ (J_4^{(\circ)})^\circ + \frac{60}{11} \nu_0 (J_4^{(\circ)})^\circ q^\circ
\end{aligned} \tag{828}$$

или

$$\gamma = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 \Phi - \beta_1 \sin^2 2\Phi - \beta_1' \sin^2 \Phi \sin^2 2\Phi),$$

где

$$\begin{aligned}
\beta &= \frac{3}{2} \nu_0^3 (J_2^{(\circ)})^\circ + 2 \nu_0^{-3} q^\circ + \frac{21}{4} \nu_0^{-6} (q^\circ)^2 + \frac{15}{8} \nu_0^4 (J_4^{(\circ)})^\circ + \\
&\quad + \frac{3}{2} \nu_0^{-1} (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ - 3 \nu_0^4 [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 + \frac{105}{16} \nu_0^6 (J_6^{(\circ)})^\circ + \\
&\quad + \frac{101}{7} \nu_0^{-9} (q^\circ)^3 + \frac{3}{2} \nu_0^{-4} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 - \frac{21}{2} \nu_0 [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ + \\
&\quad + \frac{1605}{56} \nu_0^6 [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3 - \frac{117}{4} \nu_0^6 (J_2^{(\circ)})^\circ (J_4^{(\circ)})^\circ + \frac{173}{28} \nu_0 (J_4^{(\circ)})^\circ q^\circ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\beta_1 = & -\frac{105}{34} v_0^4 (J_4^{(\circ)})^\circ - \frac{9}{16} v_0^6 (q^\circ)^2 - \frac{3}{8} v_0^{-1} (J_2^{(\circ)})^\circ q^\circ + \\
& + \frac{99}{16} v_0^4 [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 - \frac{105}{16} v_0^6 (J_6^{(\circ)})^\circ - \frac{3}{28} v_0^8 (q^\circ)^3 + \\
& + \frac{999}{224} v_0^{-4} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 - \frac{2493}{112} v_0 [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ + \frac{6399}{224} v_0^6 [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3 - \\
& - \frac{2025}{64} v_0^8 (J_2^{(\circ)})^\circ (J_4^{(\circ)})^\circ + \frac{225}{16} v_0 (J_4^{(\circ)})^\circ q^\circ, \quad (829) \\
-\beta_1^* = & -\frac{1155}{64} v_0^6 (J_6^{(\circ)})^\circ - \frac{9}{8} v_0^{-9} (q^\circ)^3 - \frac{63}{16} v_0^{-4} (J_2^{(\circ)})^\circ (q^\circ)^2 + \\
& + 54 v_0 [(J_2^{(\circ)})^\circ]^2 q^\circ - \frac{1539}{16} v_0^6 [(J_2^{(\circ)})^\circ]^3 + \\
& + \frac{735}{8} v_0^6 (J_2^{(\circ)})^\circ (J_4^{(\circ)})^\circ - \frac{525}{16} v_0 (J_4^{(\circ)})^\circ q^\circ.
\end{aligned}$$

Для ускорения силы тяжести во внешнем пространстве в определении Гельмерта имеют место соотношения, по форме сходные с (789), но коэффициенты в них  $(C_n^{(\circ)})^\circ$  нужно, однако, вычислять по (715) с использованием  $(J_n^{(\circ)})^\circ$  и  $q^\circ$  для сфероида Гельмерта.

Теперь можно определить (в обоих определениях нормального поля) возмущающий потенциал

$$\begin{aligned}
T = W - U = & \frac{fM}{\rho} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{2n} J_{2n}^{(\circ)} - \left( \frac{a^\circ}{\rho} \right)^{2n} (J_{2n}^{(\circ)})^\circ \right] P_{2n}^{(\circ)}(\sin \Phi) + \right. \\
& + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + S_n^{(k)} \sin k\Lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{2n+1} J_{2n+1}^{(\circ)} P_{2n+1}^{(\circ)}(\sin \Phi) + \\
& \left. + \frac{1}{3} \left[ \left( \frac{a_0}{\rho} \right)^{-3} q - \left( \frac{a^\circ}{\rho} \right)^{-3} q^\circ \right] [1 - P_2^{(\circ)}(\sin \Phi)] \right\} \quad (830)
\end{aligned}$$

и истинную (полную) аномалию силы тяжести с учетом (714) и (789)

$$g - \gamma = \frac{fM}{\rho^2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [C_{2n}^{(o)} - (C_{2n}^{(o)})^o] P_{2n}^{(o)}(\sin \Phi) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} C_{2n+1}^{(o)} P_{2n+1}^{(o)}(\sin \Phi) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n (C_n^{(k)} \cos k\Lambda + D_n^{(k)} \sin k\Lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right\}. \quad (831)$$

В современной гравиметрической практике, однако, используют смешанные аномалии  $\Delta g$ , которые равны

$$\Delta g = g_M - \gamma_N. \quad (832)$$

Точки  $M$  и  $N$  лежат на общей отвесной линии (рис. 33), где  $H_q^M$  — нормальная высота точки  $M$ ,  $\zeta_q^M$  — высота квазигеоида,

$S$  — поверхность Земли,  $E$  — уровенный эллипсоид или сфероид, создающий нормальный потенциал. Точки  $M$  и  $N$  расположены так, что имеет место равенство

$$W_M = U_N. \quad (833)$$

Действительный потенциал в точке  $M$ , где учтено действительное ускорение силы тяжести (например, в точке физической поверхности реальной Земли), численно равен нормальному

потенциалу в точке  $N$ , где вычисляется нормальное ускорение.

Если потенциалы геоида  $W_0$  и уровенного эллипсоида или сфероида  $U_0$  не равны, т. е. если

$$W_0 \neq U_0, \quad (834)$$

то условие (833) изменяется так

$$W_M - W_0 = U_N - U_0. \quad (835)$$

Это означает, что при вычислении смешанных аномалий силы тяжести по наблюдениям ИСЗ нужно знать потенциал  $U_0$  и именно того уровенного эллипсоида или сфероида, в поле которого вычисляются смешанные аномалии.

В геодезической и гравиметрической практике нормальное поле практически определяется формулами для нормального ускорения силы тяжести  $\gamma$ . В эти формулы входят постоянные  $\gamma_e$  и  $\beta$  — в случае уровенного эллипсоида или три постоянные —  $\gamma_e, \beta, \beta_1$  в случае нормального сфероида Гельмерта. Кроме того, предполагается, что  $fM = fM^o$  и  $\omega = \omega^o$ .

Следовательно, нужно вычислить по этим данным постоянный потенциал  $U_0$  и параметры фигуры соответствующей уровенной поверхности (уровенного эллипсоида, нормального сфероида).

В системе Пизетти получим (по четырем данным параметрам  $fM$ ,  $\omega$ ,  $\gamma_e$ ,  $\beta$ )

$$(e^\circ)^2 = -2\beta + 5q^\circ - \beta^2 + \frac{87}{8} q^\circ \beta - \frac{485}{28} (q^\circ)^2 + \frac{1}{2} \beta^3 + \frac{1193}{196} q^\circ \beta^2 - \frac{17013}{392} (q^\circ)^2 \beta + \frac{36095}{784} (q^\circ)^3, \quad (836)$$

$$a^\circ = \left\{ \frac{fM}{\gamma_e} \left[ 1 + \frac{1}{2} (e^\circ)^2 - \frac{3}{2} q^\circ + \frac{3}{8} (e^\circ)^4 - \frac{3}{14} q^\circ (e^\circ)^2 - \frac{47}{294} q^\circ (e^\circ)^4 + \frac{5}{16} (e^\circ)^6 + 0(q^\circ)^2 (e^\circ)^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left\{ \frac{fM}{\gamma_e} \left[ 1 - \beta + q^\circ + \beta^2 - \frac{6}{7} q^\circ \beta - \frac{5}{14} (q^\circ)^2 - \frac{3}{4} \beta^3 - \frac{1205}{1176} q^\circ \beta^2 + \frac{10697}{2352} (q^\circ)^2 \beta - \frac{14855}{4704} (q^\circ)^3 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (837)$$

$$U_0 = \sqrt{GM\gamma_e} \left[ 1 + \frac{1}{6} \beta + \frac{2}{3} q^\circ + q^\circ \beta - \frac{25}{24} (q^\circ)^2 - \frac{19}{120} \beta^2 + \frac{29}{80} q^\circ \beta^2 - \frac{1663}{672} (q^\circ)^2 \beta + \frac{121}{1680} \beta^3 + \frac{1081}{448} (q^\circ)^3 \right]$$

$$(J_2^{(\circ)})^\circ = \frac{2}{3} \beta - \frac{4}{3} q^\circ + \frac{1}{3} \beta^2 - \frac{26}{7} q^\circ \beta + \frac{395}{84} (q^\circ)^2 - \frac{1}{6} \beta^3 - \frac{1093}{588} q^\circ \beta^2 + \frac{14141}{1176} (q^\circ)^2 \beta - \frac{28015}{2352} (q^\circ)^3$$

$$(J_4^{(\circ)})^\circ = \frac{4}{5} \beta^2 - \frac{24}{7} q^\circ \beta + \frac{25}{7} (q^\circ)^2 + \frac{4}{5} \beta^3 - \frac{2676}{245} q^\circ \beta^2 + \frac{1543}{49} (q^\circ)^2 \beta - \frac{1230}{49} (q^\circ)^3$$

$$(J_6^{(\circ)})^\circ = \frac{8}{7} \beta^3 - \frac{160}{21} q^\circ \beta^2 + \frac{50}{3} (q^\circ)^2 \beta - \frac{250}{21} (q^\circ)^3 \quad \left. \vphantom{U_0} \right\} \cdot (838)$$

В системе Гельмерта имеют место аналогичные соотношения, но содержащие пять параметров:  $fM$ ,  $\omega$ ,  $\gamma_e$ ,  $\beta$ ,  $\beta_1$ . Пренебрегая членами второго порядка малости, получаем

$$(e^\circ)^2 = -2\beta + 5q^\circ - \frac{19}{21} \beta^2 + \frac{87}{7} q^\circ \beta - \frac{215}{12} (q^\circ)^2 + \frac{16}{21} \beta_1, \quad (839)$$

$$a^\circ = \sqrt{\frac{fM}{\gamma_e}} \left[ 1 - \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{2} q^\circ + \frac{25}{56} \beta^2 - \frac{5}{28} q^\circ \beta - \frac{3}{4} (q^\circ)^2 + \frac{4}{7} \beta_1 \right], \quad (840)$$

$$\dot{U}_0 = \sqrt{fM\gamma_e} \left[ 1 + \frac{1}{6} \beta + \frac{2}{3} q^\circ + q^\circ \beta - \frac{5}{6} (q^\circ)^2 - \frac{23}{120} \beta^2 - \frac{4}{15} \beta_1 \right], \quad (841)$$

$$\begin{aligned}
(J_2^{(c)})^\circ &= \frac{2}{3} \nu_0^{-2} \beta - \frac{4}{3} \nu_0^{-6} q^\circ - \frac{10}{63} \nu_0^{-2} (\beta)^2 + \frac{4}{63} \nu_0^{-6} q^\circ \beta - \frac{25}{9} \nu_0^{-8} (q^\circ)^2 + \\
&+ \frac{8}{21} \nu_0^{-2} \beta_1 = \frac{2}{3} \beta - \frac{4}{3} q^\circ + \frac{2}{7} \beta^2 - \frac{26}{7} q^\circ \beta + 5 (q^\circ)^2 - \frac{8}{21} \beta_1, \\
(J_4^{(c)})^\circ &= \frac{88}{105} \nu_0^{-4} (\beta)^2 - \frac{24}{7} \nu_0^{-7} q^\circ \beta + \frac{10}{3} \nu_0^{-10} (q^\circ)^2 - \frac{32}{105} \nu_0^{-4} \beta_1 = \\
&= \frac{88}{105} \beta^2 - \frac{24}{7} q^\circ \beta + \frac{10}{3} (q^\circ)^2 + \frac{32}{105} \beta_1.
\end{aligned}$$

Численные значения этих и некоторых других величин приведены в табл. 18 для нормальных систем Гельмерта (1901—1909) [68], Кассиниса (1930) [67] и МГА (1967) (системы, принятой XIV Генеральной ассамблеей Международной геодезической ассоциации в 1967 г.).

Теперь можем приступить к вычислению смешанных аномалий силы тяжести во внешнем пространстве в точках  $M$  физической поверхности реальной Земли, конечно, опять в предположении сходимости используемого разложения, обсужденной в § 29; в каждом случае речь пойдет о поле, в известной мере сглаженном.

Потенциал  $W_0$ , как и достаточно большую совокупность динамических коэффициентов  $J_n^{(k)}$ ,  $S_n^{(k)}$ , предположим определенными по наблюдениям ИСЗ (см. § 27—28). Если совокупность коэффициентов недостаточно велика (недостаточно велика степень  $N$  разложения по сферическим функциям), то поле оказывается соответственно сглаженным.

Путь для вычисления смешанных аномалий силы тяжести в точках земной поверхности  $M$  с геоцентрическими сферическими координатами  $\rho_M$ ,  $\Phi_M$ ,  $\Lambda_M$  \* может быть следующим.

1. Определяем потенциал силы тяжести  $W_M$  в точке  $M$  согласно (755)

$$\begin{aligned}
W_M &= \frac{fM}{\rho_M} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n \left( \frac{a_0}{\rho_M} \right)^n (J_n^{(k)} \cos k \Lambda_M + \right. \\
&+ S_n^{(k)} \sin k \Lambda_M) P_n^{(k)}(\sin \Phi_M) + \frac{1}{3} \left( \frac{a_0}{\rho_M} \right)^{-3} q [1 - P_2^{(c)}(\sin \Phi)] \left. \right\}. \quad (842)
\end{aligned}$$

2. Определяем радиус-вектор  $\rho_N$  в точке  $N$ , в которой нормальный потенциал  $U_N$  равен

$$U_N = W_M - (W_0 - U_0), \quad (843)$$

\* Об определении  $\rho_M$ ,  $\Phi_M$ ,  $\Lambda_M$  см. § 28.

Величина	Размерность	Нормальные системы			
		Гельмерга (1901—1909) (норм. сфероид)	Кассиниса (1930) (уров. эллипсоид)		МГА (1967) (уров. эллипсоид)
$fM$	$10^9 \text{м}^3 \text{с}^{-2}$	398 603	398 603	398 633	398 603
$\omega$	$10^{-5} \text{с}^{-1}$	7.292 115	7.292 115	7.292 115	7.292 115
$\gamma_e$	млг	978 030	978 049	978 049	978 031,845 6
$\beta$		0.005 302	0.005 288 4	0,005 288 4	0,005 302 365 7
$\beta_1$		0.000 007	0,000 005 9	0,000 005 9	0,000 005 849 8
$q^\circ$	$10^{-6}$	3 461,427	3 461,388	3 461,520	3 461,407 2
$a^\circ$	м	6 378 172	6 378 148	6 378 388	6 378 160
$(e^\circ)^2$		0,006 696 46	0,006 722 07	0,006 722 67	0,006 694 604 5
$\alpha^\circ$		0,003 353 85	0,003 366 70	0,003 367 00	0,003 352 923 3
$1/\alpha^\circ$		298,16	297,03	297,00	298,2472
$(J_2^{(\circ)})^\circ$	$10^{-6}$	—1 083,46	—1 091,87	—1 092,04	—1 082,7
$(J_4^{(\circ)})^\circ$	$10^{-6}$	2,72	2,42	2,42	2,371
$U_0$	$10^3 \text{м}^2 \text{с}^{-2}$	62 636,95	62 637,43	62 639,79	62 637,030 5
$(R_0)^\circ = \frac{fM}{U_0}$	м	6 363 704	6 363 655	6 363 893	6 363 695,672
$\frac{fM}{[(R_0)^\circ]^2} = \frac{U^2}{fM}$	млг	984 284,5	984 299,6	984 299,7	984 287,020 4

используя формулу (719), согласно которой

$$\rho_N = \frac{fM}{U_N} \left\{ 1 - (A_0^{(0)})^\circ + \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n [(A_n^{(k)})^\circ \cos k\Lambda_N + (B_n^{(k)})^\circ \sin k\Lambda_N] P_n^{(k)}(\sin \Phi_N) \right\}, \quad (844)$$

где коэффициенты  $(A_0^{(0)})^\circ$ ,  $(A_n^{(k)})^\circ$ ,  $(B_n^{(k)})^\circ$  определяются выражениями (720), но только вместо  $R_i$  нужно принять  $R_N = fM/U_N$ , а вместо динамических постоянных  $J_n^{(k)}$  реального тела Земли постоянные  $[J_n^{(0)}]^\circ$  нормального тела (уровенного эллипсоида или сфероида).

3. Определяем действительное ускорение силы тяжести  $g_M$  в точке  $M$  согласно (714)

$$g_M = \frac{fM}{\rho_M^2} \left\{ C_0^{(0)} + \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n (C_n^{(k)} \cos k\Lambda_M + D_n^{(k)} \sin k\Lambda_M) P_n^{(k)}(\sin \Phi_M) \right\}. \quad (845)$$

4. Определяем нормальное ускорение силы тяжести  $\gamma_N$  в точке  $N$  по (789)

$$\gamma_N = \frac{fM}{\rho_N^2} [(C_0^{(0)})^\circ + (C_2^{(0)})^\circ P_2^{(0)}(\sin \Phi_N) + (C_4^{(0)})^\circ P_4^{(0)}(\sin \Phi_N) + (C_6^{(0)})^\circ P_6^{(0)}(\sin \Phi_N) + \dots]. \quad (846)$$

5. Вычисляем разность

$$g_M - \gamma_N.$$

Существует и другой путь вычисления смешанных аномалий силы тяжести через возмущающий потенциал (321), (830) [69, 70]

$$T_M = W_M - U_M. \quad (847)$$

Его производная по касательной к силовой линии нормального поля силы тяжести  $\nu$  равна

$$\left( \frac{\partial T}{\partial \nu} \right)_M = \left( \frac{\partial W}{\partial \nu} \right)_M - \left( \frac{\partial U}{\partial \nu} \right)_M, \quad (848)$$

и так как по определению потенциала имеет место

$$\left( \frac{\partial W}{\partial n} \right)_M = -g_M, \quad \left( \frac{\partial U}{\partial \nu} \right)_M = -\gamma_M, \quad (849)$$

то

$$\left( \frac{\partial T}{\partial \nu} \right)_M = -g_M \cos(\nu, n)_M + \gamma_M, \quad (850)$$

причем  $(\nu, n)_M$  — угол между касательной к действительной (направление  $n$ ) и нормальной (направление  $\nu$ ) силовой линией в точке  $M$ , т. е. так называемое «абсолютное» уклонение отвеса<sup>86</sup>. С ошибкой  $10^{-7}$  можно при  $(\nu, n) < 1^\circ$  принять  $\cos(\nu, n) = 1$  и переписать (850) в виде, в котором допускается ошибка  $< 0,1$  млг

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \nu}\right)_M = -g_M + \gamma_M, \quad (851)$$

а поскольку

$$\gamma_M \simeq \gamma_N + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \nu}\right)_N \zeta_q^M, \quad (852)$$

то

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \nu}\right)_M = -g_M + \gamma_N + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \nu}\right)_N \zeta_q^M. \quad (853)$$

С учетом обобщенной формулы Брунса

$$\zeta_q^M = \frac{T_M}{\gamma_N} - \frac{W_0 - U_0}{\gamma_N}, \quad (854)$$

наконец, получим

$$g_M - \gamma_N = -\left(\frac{\partial T}{\partial \nu}\right)_M + \frac{1}{\gamma_N} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \nu}\right)_N T_M - \frac{1}{\gamma_N} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \nu}\right)_N (W_0 - U_0), \quad (855)$$

или

$$g_M - \gamma_N = \Delta g \simeq -\left(\frac{\partial T}{\partial \nu}\right)_M - \frac{2T_M}{\rho_N} + \frac{2}{\rho_N} (W_0 - U_0), \quad (856)$$

или

$$\frac{1}{\gamma_N} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \nu}\right)_N \simeq -\frac{2}{\rho_N}. \quad (857)$$

По (854) можем вычислить и высоты  $\zeta$  непосредственно по возмущающему потенциалу, независимо от пути, описанного в § 30.

Следующий способ определения высот геоида основан на формуле Стокса [71]

$$\zeta = \frac{R_0}{4\pi g} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Delta g S(\psi) \cos \Phi d\Lambda d\Phi, \quad (858)$$

где  $S(\psi)$  — функция Стокса, для которой [72] справедлива формула

$$S(\psi) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} P_n(\cos \psi), \quad (859)$$

или, с учетом (198),

$$\begin{aligned}
 S(\psi) = & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \left\{ P_n^{(*)}(\sin \Phi_0) P_n^{(*)}(\sin \Phi) + \right. \\
 & + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\sin \Phi_0) \cos k\Lambda_0 P_n^{(k)}(\sin \Phi) \cos k\Lambda + \\
 & \left. + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\sin \Phi_0) \sin k\Lambda_0 P_n^{(k)}(\sin \Phi) \sin k\Lambda \right\}. \quad (860)
 \end{aligned}$$

Здесь речь идет опять о регуляризованном геоиде. Интегрирование проводится по поверхности сферы относимости. Если используются аномалии силы тяжести, исходящие из (856), то в разложении по сферическим функциям производную по  $\nu$  практически можем заменить производной по  $\rho$ , т. е.

$$\Delta g = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n (\Delta g_n^{(k)} \cos k\Lambda + \Delta h_n^{(k)} \sin k\Lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) + \frac{2}{\rho_0} (W_0 - U_0), \quad (861)$$

и тогда с учетом ортогональности сферических функций (см. § 7)

$$\begin{aligned}
 \zeta = & \frac{R_0}{4\pi g} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n-1} \Delta g_n^{(*)} P_n^{(*)}(\sin \Phi_0) \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [P_n^{(*)}(\sin \Phi)]^2 \cos \Phi d\Lambda d\Phi + \right. \\
 & + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{2n+1}{n-1} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \Delta g_n^{(k)} P_n^{(k)}(\sin \Phi_0) \cos k\Lambda_0 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \times \\
 & \times [P_n^{(k)}(\sin \Phi) \cos k\Lambda]^2 \cos \Phi d\Lambda d\Phi + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{2n+1}{n-1} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} \times \\
 & \left. \times \Delta h_n^{(k)} P_n^{(k)}(\sin \Phi_0) \sin k\Lambda_0 \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [P_n^{(k)}(\sin \Phi) \sin k\Lambda]^2 \cos \Phi d\Lambda d\Phi \right\} - \\
 & - \frac{1}{g} (W_0 - U_0), \quad (862)
 \end{aligned}$$

или с использованием (158), (176) и (177)

$$\zeta = \frac{R_0}{g} \left\{ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \Delta g_n^{(*)} P_n^{(*)}(\sin \Phi_0) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n-1} (\Delta g_n^{(k)} \cos k\Lambda_0 + \Delta h_n^{(k)} \sin k\Lambda_0) P_n^{(k)}(\sin \Phi_0) \right\} - \frac{1}{g} (W_0 - U_0), \quad (863)$$

где  $\rho_0$ ,  $\Phi_0$ ,  $\Lambda_0$  — координаты точки, в которой вычисляется высота регуляризированного геоида.

В разложении (863) отсутствуют сферические функции нулевой и первой степени и соответствующего порядка, что вытекает из (856) или из предположения о совпадении угловой скорости вращения и центров тяжести (см. § 7) действительной и нормальной Земли.

$$\text{Так как } \Delta x_0 = 0, \Delta y_0 = 0, \Delta z_0 = 0, \psi_0 = 0, \varepsilon_0 = 0, \omega_0 = 0, \quad (864)$$

то имеет место равенство

$$\begin{aligned} -\frac{\partial T}{\partial v} - \frac{2T}{\rho} &\simeq -\frac{\partial T}{\partial \rho} - \frac{2T}{\rho} = \frac{fM}{\rho^2} \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n (n+1) \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^n \times \\ &\times \{ [J_n^{(k)} - (J_n^{(k)})^{\circ}] \cos k\Lambda + [S_n^{(k)} - (S_n^{(k)})^{\circ}] \sin k\Lambda \} P_n^{(k)}(\sin \Phi) + \\ &+ \frac{fM}{\rho^2} \sum_{n=N}^{\infty} (n+1) \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + S_n^{(k)} \sin k\Lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) - \\ &- \frac{2fM}{\rho^2} \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^n \{ [J_n^{(k)} - (J_n^{(k)})^{\circ}] \cos k\Lambda + [S_n^{(k)} - (S_n^{(k)})^{\circ}] \sin k\Lambda \} \times \\ &\times P_n^{(k)}(\sin \Phi) - \frac{2fM}{\rho^2} \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + S_n^{(k)} \sin k\Lambda) P_n^{(k)} \times \\ &\times (\sin \Phi) = \frac{fM}{\rho^2} \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n (n-1) \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^n \{ [J_n^{(k)} - (J_n^{(k)})^0] \cos k\Lambda + \\ &+ [S_n^{(k)} - (S_n^{(k)})^{\circ}] \sin k\Lambda \} P_n^{(k)}(\sin \Phi) + \\ &+ \frac{fM}{\rho^2} \sum_{n=N}^{\infty} \sum_{k=0}^n (n-1) \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^n (J_n^{(k)} \cos k\Lambda + S_n^{(k)} \sin k\Lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) = \\ &= \Delta g - \frac{2}{\rho} (W_0 - U_0). \end{aligned} \quad (865)$$

Гармонические коэффициенты в разложении (865) равны

$$\begin{aligned} \Delta g_n^{(k)} &= \frac{fM}{\rho^2} (n-1) \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^n [J_n^{(k)} - (J_n^{(k)})^{\circ}] \\ \Delta h_n^{(k)} &= \frac{fM}{\rho^2} (n-1) \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^n [S_n^{(k)} - (S_n^{(k)})^{\circ}], \quad n = 2, 3, \dots, N, \\ \Delta g_n^{(k)} &= \frac{fM}{\rho^2} (n-1) \left(\frac{a_0}{\rho}\right)^n \frac{J_n^{(k)}}{S_n^{(k)}}, \quad n > N. \end{aligned} \quad (866)$$

В случае аномалий силы тяжести на физической поверхности Земли точность разложения (865) сравнительно низка [73]. Ее можно существенно повысить путем введения поправки [73]

$$G_1 = \frac{1}{16\pi R_0} \int_S \Delta g (\rho - \rho_0) \cos \sec^3 \frac{\psi}{2} dS. \quad (867)$$

Здесь  $\rho$ ,  $\rho_0$  — радиусы-векторы переменной и изучаемой точки;  $\psi$  — угол между ними.

Кроме того, вследствие весьма плохой сходимости разложения (865) речь идет о поле аномалий силы тяжести сильно сглаженном. Строгое решение задач физической геодезии, в которых характеристики внешнего поля тяжести вычисляют по величинам, измеренным на земной поверхности, наиболее полно рассмотрено в фундаментальных работах [69, 70].

До сих пор обсуждались пути, как вычислять при помощи спутниковых наблюдений аномалии силы тяжести с использованием динамических постоянных Земли  $J_n^{(h)}$ ,  $S_n^{(h)}$ . Их можно определить по вариациям элементов орбит ИСЗ, как описано в § 27. Существует, однако, и принципиально иной путь, чем определение аномалий силы тяжести по вариациям указанных элементов [74, 75]. Аномалии в тех частях континентов, океанов и морей, где они получены прямым измерением, используют прямо, а аномалии в областях гравиметрически неизученных выступают в уравнениях для вариаций элементов орбиты как величины неизвестные.

### § 36. СОЕДИНЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИ НЕСВЯЗАННЫХ РЕФЕРЕНЦНЫХ СИСТЕМ ДИНАМИЧЕСКИМ СПУТНИКОВЫМ МЕТОДОМ

Потенциал на поверхности геоида  $W_0$  или линейный масштабный коэффициент  $R_0$ , получение которых из наблюдений ИСЗ рассматривается в § 28, можно использовать для геодезической связи несвязанных геодезических систем. Предположим лишь, что в системах, которые нужно связать, известны относительные высоты геоида  $\zeta_r$ , хотя бы в трех выгодно размещенных точках. Кроме того, сохраним в силе все предыдущие замечания о сходимости ряда сферических функций, определяющего потенциал на поверхности геоида.

Если не вводить при вычислении  $W_0$ ,  $R_0$  поправки за внешние массы, то значения  $W_0$ ,  $R_0$  не будут точно соответствовать действительному геоиду, с которым связаны высоты  $\zeta_r$ . Однако значения  $\zeta_r$  содержат заметные неточности, если они вычислены из классического астрономического нивелирования без учета данных о силе тяжести. Если бы ошибки использованных относительных высот геоида были существенно меньше ошибок в постоянной  $R_0$ , то указанная поправка была бы желательна.

Пока, однако, имеем в распоряжении лишь вычисленные значения (583), (586), которые имеют сравнительно хорошую внутреннюю

сходимость отдельных результатов, но без учета влияния внешних масс.

Представим референдную геодезическую систему, определенную параметрами:

$a_r, e_r^2$  — большая полуось и квадрат эксцентриситета референчного эллипсоида,

$\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$  — координаты центра референчного эллипсоида относительно центра масс Земли.

Пока речь идет о малых углах  $\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0$  (см. часть I, § 4), в этой задаче их влияние пренебрежимо мало. В данной референдной системе имеем относительные высоты геоида  $\zeta_r$  в точках с геодезическими координатами  $B, L$ .

По приведенным данным можем вычислить радиус-вектор точки на геоиде  $(B, L, \zeta_r)$ , приведенный к центру референчного эллипсоида

$$\rho_r = \{[(N_r + \zeta_r) \cos B \cos L]^2 + [(N_r + \zeta_r) \cos B \sin L]^2 + [(N_r - N_r e_r^2 + \zeta_r) \sin B]^2\}^{\frac{1}{2}}, \quad (868)$$

где  $N_r = \frac{a_r}{\sqrt{1 - e_r^2 \sin^2 B}}$ .

По наблюдениям ИСЗ, предположим известными динамические постоянные  $J_n^{(k)}, S_n^{(k)}$  и коэффициент  $R_0$ . Тогда можно определить геоцентрический радиус-вектор изучаемой точки на геоиде

$$\rho = R_0 \left[ 1 + A_0^{(0)} + \sum_{n=2}^N \sum_{k=2}^n (A_n^{(k)} \cos k\Lambda + B_n^{(k)} \sin k\Lambda) P_n^{(k)}(\sin \Phi) \right]. \quad (869)$$

Выражения для постоянных  $A_0^{(0)}, A_n^{(k)}, B_n^{(k)}$  уже даны формулами (607), численные значения которых, вычисленные по совокупности динамических коэффициентов [52], приведены в табл. 10—11. Строго говоря, в (869) мы имели бы геоцентрические сферические координаты  $\Phi, \Lambda$  изучаемой точки на геоиде. Разность  $(\Lambda - L)$  в данной задаче всегда пренебрежимо мала, разность  $(\Phi - B)$  надо учитывать в областях больших изменений высот  $\zeta_r$ . В случае необходимости задача решается последовательными приближениями, т. е. после определения  $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$  в первом приближении вычисляется величина

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{(N_r - N_r e_r^2 + \zeta_r) \sin B + \Delta z_0}{\{[(N_r + \zeta_r) \cos B \cos L + \Delta x_0]^2 + [(N_r + \zeta_r) \cos B \sin L + \Delta y_0]^2\}^{\frac{1}{2}}}, \quad (870)$$

с использованием которой находится значение (869) во втором приближении.

Практически это, очевидно, не будет нужно, если точность постоянной  $R_0$  порядка нескольких метров. Если отвлекаться от ошибок всех использованных данных и оставаться при приведенных

упрощающих предпосылках, то разность  $\rho - \rho_r$  будет функцией только элементов сдвига  $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$ . При отбрасывании их квадратов

$$\rho_r - \rho \approx \Delta x_0 \cos B \cos L + \Delta y_0 \cos B \sin L + \Delta z_0 \sin \Phi, \quad (871)$$

что является сферической функцией первой степени в разложении потенциала.

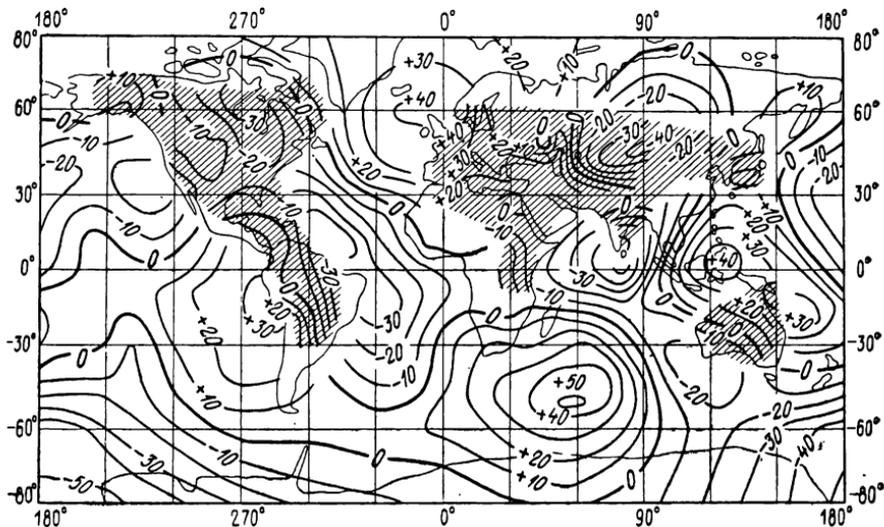


Рис. 34. Результаты трансформирования высот геоида

Тогда

$$J_1^{(0)} P_1^{(0)}(\sin \Phi) + J_1^{(1)} \cos \Lambda P_1^{(1)}(\sin \Phi) + S_1^{(1)} \sin \Lambda P_1^{(1)}(\sin \Phi). \quad (872)$$

Из (871) с учетом (868) и (869) получим,

$$\begin{aligned} & \Delta x_0 \cos B \cos L + \Delta y_0 \cos B \sin L + \Delta z_0 \sin B = \\ & = \{(N_r + \zeta_r)^2 - 2N_r(N_r + \zeta_r)e_f^2 \sin^2 B + N_r^2 e_f^4 \sin^2 B\}^{\frac{1}{2}} - \\ & - R_0 \left[ 1 + A_0^{(0)} + \sum_{n=2}^N \sum_{k=0}^n (A_n^{(k)} \cos kL + B_n^{(k)} \sin kL) P_n^{(k)}(\sin B) \right]. \quad (873) \end{aligned}$$

Имеем уравнения с тремя неизвестными  $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$ ; теоретически для их решения достаточно трех удачно расположенных точек с известными относительными высотами геоида. Практически задачу всегда будем решать путем уравнивания с использованием всей области, в которой имеются относительные высоты геоида.

Эта область должна быть достаточно обширной, чтобы коэффициенты при определяемых неизвестных имели как можно более различные значения.

Этим способом мы приблизительно связали относительные высоты геоида [76] с системой С7 с параметрами трехосного эллипсоида, приведенными в табл. 12, вариант 1 [55]. Результаты трансформации показаны на рис. 34. Области, где была использована классическая астрономо-геодезическая информация, заштрихованы; в областях без относительных высот геоида, а именно на океанах, были использованы спутниковые результаты (динамические постоянные из табл. 2 и 3).

1. Tallqvist H. Tafeln der abgeleiteten und zugeordneten Kugelfunktionen erster Art. Acta Societatis Scientiarum Fennicae, 1908, v. XXXIII, No 9.
2. Tallqvist H. Sechsstellige Tafeln der 16 ersten Kugelfunktionen  $P_n(x)$ . Acta Societatis Scientiarum Fennicae, Nova Series A, 1937, v. 11, No 4.
3. Tables of Associated Legendre Functions, New York, Columbia University Press, 1945.
4. Tables des fonctions de Legendre associées, Paris, Editions de la revue d'optique, 1952.
5. С л у д с к и й Ф. А. Избранные геодезические труды, М., «Недра», 1967.
6. H o b s o n E. W. The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics. Cambridge, University Press, 1931 Рус. пер. Гобсон Е., Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., ИЛ, 1952.
7. С у б б о т и н М. Ф. Курс небесной механики, т. I. М.—Л., Гос изд. техн-теор. лит. 1944.
8. С у б б о т и н М. Ф. Курс небесной механики, т. II. Л.—М., ОНТИ, 1937.
9. С у б б о т и н М. Ф. Курс небесной механики, т. III. Л.—М., Гос. изд. техн-теор. лит. 1949.
10. С у б б о т и н М. Ф. Введение в теоретическую астрономию. М., «Наука», 1968.
11. B r o u w e r D., C l e m e n s e G. Methods of Celestial Mechanics, New-York — London, 1961. Рус. пер. Б р а у э р Д., К л е м е н с Д. Методы небесной механики. М., «Мир», 1964.
12. M o u l t o n F. R. An Introduction to Celestial Mechanics. New-York — London: Macmillan and Co., 1914. Рус. пер. М у л т о н Ф., Введение в небесную механику, М., ОНТИ, 1935.
13. Д у б о ш и н Г. Н. Небесная механика. М., Гос. изд. физ-мат. лит., 1963.
14. Д у б о ш и н Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., «Наука», 1968.
15. Д у б я г о А. Д. Определение орбит. М., Гос. изд. техн-теор. лит., 1949.
16. D a n b y J. M. A. Fundamentals of Celestial Mechanics. The Macmillan Co., New York, Sec. Print., 1964.
17. E s c o b a l P. R. Methods of Orbit Determination. New-York — London — Sydney, John Wiley and Sons, Inc., 1965.
18. B a u s c h i n g e r J. Die Bahnbestimmung der Himmelskörper. Leipzig, Verl. Wilhelm Engelmann, 1928.

19. K o v a l e v s k y J. Introduction à la mécanique céleste. Collection Armand Collin, No 370. Section de Mathématique, Paris, 1963.
20. S m a r t W. M. Celestial Mechanics, London — New-York — Toronto, Longmans, Green and Co., 1953. Руск. пер. С м а р т В. М. Небесная механика. М., «Мир», 1965.
21. S t e r n e T. E. An Introduction to Celestial. Mechanics. New-York — London, Interscience Publishers, 1960. Рус. пер. Ш т е р н Т. Введение в небесную механику. М., «Мир», 1964.
22. S t u m p f f K. Himmelsmechanik B. I. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1959.
23. S t u m p f f K. Himmelsmechanik. B. II. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1965.
24. K o z a i Y. On the Effects of the Sun and the Moon Upon the Motion of a Close Earth Satellite. Res. in Space Sci., Sp. Rep., 1959, No 22, 7.
25. K o z a i Y. The Motion of a Close Earth Satellite. Astron. J., 1959, v. 64, 367.
26. C o o k A. H. The Contribution of Observations of Satellite to the Determination of the Earth's Gravitational Potential. Space Sci. Revs, 1963, v. 2, No 3.
27. K o z a i Y. Note on Expressions for Second — Order Short — Periodic Perturbations. SAO, Spec. Rep., 1966, No 234.
28. B u c h a r E. Vliv zplošteni Země na pohyb umělých družic. Říše hvězd, 1958, No 6, 121.
29. B u c h a r E. Motion of the Nodal Line of the Second Russian Earth Satellite (1957) and Flattening of the Earth. Nature, 1958, No 4629.
30. B u c h a r E. The Motion of the Orbital Node of Sputnik 2 (1957 $\beta$ ) and the Oblateness of the Earth. Studia geoph. et geod., 1958, v. 4, 2.
31. B u c h a r E. Die Bestimmung der Erdatplattung aus der Bewegung von Sputnik II. Wiss. Zft. Techn. Hochschule Dresden, 1958—1959, v. 8, 2.
32. K a u l a W. M. Analysis of Gravitational and Geometric Aspects of Geodetic Utilization of Satellites. NASA—TN, D—572; GJ, 1961, v. 5, 2, 104.
33. K a u l a W. M. Celestial Geodesy. Washington NASA—TN, D—1155, 1962. Рус. пер. К а у л а В. М. Космическая геодезия. М., «Недра», 1966.
34. K o z a i Y. Tesseral Harmonics of the Gravitational Potential of the Earth as Derived from Satellite Motion. Astron. J., 1961, v. 66.
35. I z s a k I. G. Tesseral Harmonics of the Geopotential and Corrections to Station Coordinates. J. Geophys. Res., 1964, v. 69, No 12; Space Res. 1965, v. 5, Amsterdam N.—Holl. Publ. Co.
36. I z s a k I., G a p o s h k i n E. M. Determination of Tesseral Harmonic Coefficients and Station Coordinates: Geodetic Parameters for a 1966 Smithsonian Institution Standard Earth, v. 1, SAO, Spec. Rep. 1966, No 200.
37. G a p o s h k i n E. M. A Dynamical Solution for the Tesseral Harmonics of the Geopotential, and Station Coordinates Using Baker — Nunn Data. Space Res. Amsterdam N.-Holl. Publ. Co., v. VII.
38. I z s a k I. G. A New Determination of Non-Zonal Harmonics by Satellites. Use Artif. Satel. Geod., Atheny, Publ. National Technical University, 1967, v. II.
39. G a p o s h k i n E. M. Tesseral Harmonic Coefficients and Station

Coordinates from the Dynamic Method. Geodetic Parameters for a 1966 Smithsonian Institution Standard Earth v. 2. SAO, Spec. Rep., 1966, No 200.

40. K o z a i Y. The Gravitational Field of the Earth Derived From Motions of Three Satellites. Astron. J., 1961, v. 66.

41. K o z a i Y. Numerical Results on the Gravitational Potential of the Earth from Orbits. SAO, Spec. Rep., 1962, No 101.

42. K o z a i Y. The Potential of the Earth Derived from Satellite Motions. Dynamics of Satellites. Berlin, Springer Verlag, 1963.

43. K o z a i Y. New Determinations of Zonal Harmonics Coefficients of the Earth's Gravitational Potential. Publ. Astron. Soc. Japan, 1964, v. 16, No 4; SAO Spec. Rep. 1964, No 165; Space Res, Amsterdam, N.-Holl. Publ., Co., 1964, 1964, v. 5.

44. K o z a i Y. Determination of Zonal Harmonic Coefficients: Geodetic Parameters for a 1966 Smithsonian Institution Standard Earth, v. 1, SAO Spec. Rep., 1966, No 200.

45. K o z a i Y. The Zonal Harmonic Coefficients: Geodetic Parameters for a 1966 Smithsonian Institution Standard Earth, v. 2, SAO Spec. Rep., 1966, No 200.

46. K o z a i Y. Improved Values for Coefficients of Zonal Spherical Harmonics in the Geopotential. SAO Spec. Rep. 1967, No 264.

47. K i n g - H e l e D. G., C o o k G. E., S c o t t D. W. The Odd Zonal Harmonics in the Earth's Gravitational Potential. Use Artif. Satel. Geod., v. II. Atheny, Publ. National Technical University, 1967.

48. K i n g - H e l e D. G., C o o k G. E., S c o t t D. W. Odd Zonal Harmonics in the Geopotential, Determined from Fourteen Well-Distributed Satellite Orbits. Planet. Space Sci. 1967, 15.

49. K i n g - H e l e D. G., C o o k G. E., S c o t t D. W. New Evaluation of Odd Zonal Harmonics in the Geopotential. Nature, 1968, v. 219, No 5159.

50. K i n g - H e l e D. G. et al.: Evaluation of Odd Zonal Harmonics in the Geopotential, of Degree less than 33, from the Analysis of 22 Satellite Orbits. Royal Aircraft Establishment, Techn. Rep. 68202, 1968.

51. K o z a i Y. New Determination of Zonal Harmonics Coefficients of the Earth's Gravitational Potential. SAO Spec. Rep., 1964, No 165.

52. V e i s G. The Determination of the Radius of the Earth and Other Geodetic Parameters as Derived from Optical Satellite Data. XIV General Assembly IUGG. Lucerne, 1967.

53. Ж о н г о л о в и ч И. Д. Потенциал земного притяжения. Бюл. Инст. теор. астр., 1957, т. VI.

54. L a m b e c k K. Comparisons and Combinations of Geodetic Parameters Estimated from Dynamic and Geometric Satellite Solutions and from Mariner Flights. Předloženo na XII. valném shromáždění COSPAR, Praha, 1969.

55. B u r š a M. Geopotential, Geoidal Surface and Earth's Figure Parameters as Determined from Satellite and Terrestrial Data. Studia geoph. et geod., 1970, v. 14, No 2.

56. Б р о в а р В. В., М а г н и ц к и й В. А., Ш и м б и р е в В. П. Теория фигуры Земли, М., Изд. геод. лит., 1961.

57. Д у б о ш и н Г. Н. Теория притяжения. М., Физматгиз, 1961.

58. B u r š a M. Geopotential and Gravity on External Surfaces as Derived from Satellite Observations. Studia geoph. et geod., 1970 14, No 1.

59. B u r s a M. Best — fitting Tri-axial Earth Ellipsoid Parameters Derived from Satellite Observations. *Studia geoph. et geod.*, 1970, 14, No 1.

60. H o s t i n s k y B. Diferencialni geometrie krivek a ploch. Přírod nakl., Praha, 1950.

61. P i z z e t t i P. Sull'espressione della gravità alla superficie del geoide supposto ellipsoidico. *Atti. Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, 1894, v. 3.

62. P i z z e t t i P. Principii della teoria meccanica della figura dei pianeti. (Pisa, 1913). Рус. пер. Пицетти П., Основы механической теории фигуры планет. М.—Л., Гос. изд. техн.-теор. лит., 1933.

63. G a p o s c h k i n E. M. Improved Values for the Tesseral Harmonics of the Geopotential and Station Coordinates. Předloženo na XII. valném shromáždění COSPAR, Praha, 1969.

64. B u r s a M. On the Determination of Parameters of the Earth's Figure from Satellite Orbit Dynamics. Předloženo na XII. valnem shromáždění COSPAR, Praha, 1969.

65. К р а с о в с к и й Ф. Н. Руководство по высшей геодезии. М., Геодезиздат, 1942.

66. И з о т о в А. А. Форма и размеры Земли по современным данным. Тр. ЦНИИГАиК, 1960, вып. 73.

67. C a s s i n i s G. Sur l'adoption d'une formule internationale pour la pesanteur normale. *Bull. géod.*, 1930, No 25.

68. H e l m e r t F. R. Die Schwerkraft und die Massenverteilung der Erde. *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften*, 1910, Verlag B. G. Teubner, Leipzig, 1910 B. VI lb, H. 2.

69. М о л о д е н с к и й М. С. Основные вопросы геодезической гравиметрии. Тр. ЦНИИГАиК, 1945, вып. 42.

70. М о л о д е н с к и й М. С., Е р е м е е в В. Ф., Ю р к и н а М. И. Методы изучения внешнего гравитационного поля и фигуры Земли. Тр. ЦНИИГАиК, 1960, вып. 131.

71. S t o k e s G. G. On the Variation of Gravity at the Surface of the Earth. *Cambridge Philosophical Soc. v. VIII, pt. V*, 1849; *Mathematical and Physical Papers, Cambridge, v. 2*, 1883. Рус. пер. Д. С т о к с. О силе тяжести на земной поверхности. В кн.: Статьи о силе тяжести и фигуры Земли, М., Геодезиздат, 1961.

72. P o i n c a r e H. Les mesures de gravité et la géodésie. *Bull. Astronomique*, 1901, T. XVIII, Oeuvres de H. Poincare, T. VIII, 1952. Рус. пер. П у а н к а р е А. Измерения силы тяжести и геодезия. В кн.: Статьи о силе тяжести и фигуры Земли. М., Геодезиздат, 1961.

73. П е л л и н е н Л. П. Определение коэффициентов разложения гравитационного потенциала Земли по шаровым функциям из совместной обработки гравиметрических и спутниковых данных. Изв. вузов. «Геодезия и аэрофото-съемка», 1965, вып. 5.

74. A r n o l d K. Skizzierung einer Methode zur Bestimmung des Schwerefeldes der Erde aus Satellitenbeobachtungen. *Gerlands Beitr. Geophys.*, 1963, B. 72, No 5.

75. A r n o l d K. Die Bahnen der künstlicher Erdsatelliten in ihrer Abhängigkeit von den Schwereanomalien. *Veröff. Geod. Inst. Potsdam*, 1965, No 27.

76. Fischer I. et al. New Pieces in the Picture Puzzle of an Astrogeodetic Geoid Map of the World. XIV Gen. Ass. IUGG, Lucerne, 1967.

77. Burša M. On the Determination of the Geopotential from Perturbations in Satellite Orbit Using the Orthogonality of Harmonics. *Studia geoph. et geod.*, 1969, 13, 359.

78. Burša M. Potential of the Geoidal Surface, the Scale Factor for Lengths and Earth's Figure Parameters from Satellite Observations. *Studia geoph. et geod.* 1969, 13, 337.

79. Burša M. Global Geoid Sections Determined by Satellite Orbit Dynamics. *Studia geoph. et geod.*, 1970, 14, 274—285.

#### ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

80. Aardoom L., Girnius A., Veis G. Geometric Results; Geodetic Parameters for a 1966 Smithsonian Institution Standard Earth vol. 2, SAO, Spec. Rep., 1966, No 200.

81. Aardoom L., Girnius A., Veis G. Determination of the Absolute Space Directions between Baker — Nunn Camera Stations. *Use Artif. Satel. Geod.*, Atheny Publ. National Technical University, 1967, v. II.

82. Allan R. R., Piggott B. A. N. Longitude Dependence of the Geopotential Deduced from Synchronous Satellites. Royal Aircraft Establishment. Royal Society Discussion Meeting on Orbital Analysis, Farnborough, 1966.

83. Allan R. R., Piggott B. A. N. Even Tesseral Harmonics in the Geopotential Derived from Syncom 2. *Use Artif. Satel. Geod.*, Publ. Atheny National Technical University, 1967, v. II.

84. Anderle R. J. Geodetic Parameter Set NWL-5E-6 Based on Doppler Satellite Observations. *Use Artif. Satel. Geod.*, Atheny Publ. National Technical University, 1967, v. II.

85. Anderle R. J., Oosterwinter C. A Preliminary Potential for the Earth from Doppler Observations on Satellites. *Space Res.* Amsterdam, N.-Holl. Publ. Co, 1964, v. 4.

86. Anderle R. J. Computational Methods Employed in Deriving Geodetic Results from Doppler Observations of Artificial Earth Satellites. US Naval Weapons Laboratory, 1965, No 1977.

87. Arnold K. Über das mittlere Erdellipsoid. *Gerl. Beitr. Geophys.*, 1956, v. 65, No 2.

88. Arnold K. The Use of Satellites for Geodetic Studies. *Space Sci. Revs.*, 1967, 7.

89. Arnold K. Eine Zusatzbedingung bei der Bestimmung des Potentialfeldes der Erde aus Satellitenbeobachtungen. *Gerl. Beitr. Geophys.*, 1967, No 1.

90. Arnold K. Determination of the Gravity — Field of the Earth by Successive Passages of Satellites. *Use Artif. Satel. Geod.*, Atheny Publ. National Technical University, 1967, v. II.

91. Arnold K. The Geodetic — Azimuth Potsdam — Bukarest from Echo I Observations. *Use Artif. Satel. Geod.*, Atheny, Publ. National Technical University, 1967, v. II.

92. Arnold K. An Attempt to Determine the Unknown Parts of the Earth's Gravity Field by Successive Satellite Passages. *Bull. Gèod.*, 1968, No 87.

93. Baker R. M. L. Jr. *Astrodynamics. Applications and Advances Topics*. New York and London, Academic Press, 1967.
94. Barlier M. F. *Recherches sur la détermination et l'utilisation des éléments osculateurs dans la mécanique des satellites proches*. Bull. astron., 1965, No 4.
95. Batrakov Y. V. *Perturbations in the Motion of a Satellite Due to the Second Zonal Harmonics of the Earth's Potential*. Dynamics of Satellites. Berlin, Springer — Verlag, 1963.
96. Beneš L. *Potenciál tíže otáčejiho se rotačnfho homogenniho sféroidu*. Travaux Inst. Géophys. Acad. Tchécosl. Sci. No 100, Geofysikalni sbornik 1959, NČSAV, Praha, 1960.
97. Berroth A. *Die Erdgestalt und die Hauptträgheitsmomente A und B der Erde im Äquator aus Messungen der Schwerkraft*. Gerl. Beitr. Geophys., Leipzig, 1915—1918.
98. Bjerhammar A. *A New Approach to Satellite Geodesy*. Publ. Inst. Geod. Sci., Alexandria, Virginia, 1967.
99. Bjerhammar A. *Gravimetric Geodesy Free of Density Estimate. Through Analysis of Descrete Gravity Data*. XIV Gen. Ass. IUGG, Lucerne, 1967.
100. Bjernammar A. *On the Theory of a New Geoid*. XIV Gen. Ass. IUGG. Lucerne, 1967.
101. Bjerhammar A. *On a Coalescent World Geodetic System*. XIV Gen. Ass. IUGG, Lucerne, 1967.
102. Brouwer D. *Solution of the Problem of Artificial Satellite Theory without Drag*. Astron. J., 1959, 64, 378.
103. Бровар В. В. *О формулах для вычисления возмущений потенциала и составляющих уклонений отвеса на земной поверхности*. Изв. вузов. «Геодезия и аэрофотосъемка», 1965, вып. 2.
104. Buchar E. *Geodetická astronomie I*. ČVUT, fakulta stavebni Praha, 1963.
105. Burša M. *Earth's Flattening and Harmonic Coefficients of Geopotential*. Studia geoph. et geod. 1968, 2, 237.
106. Burša M. *Theoretical and Practical Achievements in Determining the Figure of the Earth and its External Gravitational Field 1963—1967*. Travaux de l'AIG, T. 23, publié par le Bureau Central de l'AIG, Paris, au Secretariat de l'Association, 1968.
107. Burša M. *On the Figure of the Earth's Equipotential Surface from Satellite Orbit Dynamics*. Studia geoph. et geod., 1969, 13, 1.
108. Бузук В. В. *Принцип разделения абсолютных (гравиметрических) уклонений отвеса на местные и общие (планетарные)*. Тр. НИИГАиК, 1964, вып. 18.
109. Бузук В. В. *О связи между коэффициентами разложения по сферическим функциям и основными характеристиками гравитационного поля Земли*. Тр. НИИГАиК, 1964, вып. 18.
110. Бузук В. В. *Разложение аномалий силы тяжести в ряд по сферическим функциям с вычислением интегральных и средних интегральных значений сферических функций для десятиградусных секторов*. Изв. вузов, «Геодезия и аэрофотосъемка», 1965, вып. 1.

111. Caputo M. La pesanteur et la forme de la Terre. Bull. Géod., 1965, No 77.
112. Caputo M. The Gravity Field of the Earth from Classical and Modern Methods. New York — London, Academic press, 1967.
113. Caputo M. On the Shape, Gravity Field and Strength of the Moon Use Artif. Satel. Geod., v. II, Publ. Atheny, National Technical University, 1967.
114. Cook A. H. Reports on the Progress of Geophysics Developments in Dynamical Geodesy. Geophys. J. Roy. Astr. Soc., 1959, v. 2, N 3.
115. Cook A. H. The External Gravity Field of a Rotating Spheroid to the Order of  $e^3$ . Geophys. J., 1959, v. 2, No 3, 199.
116. Cook A. H. Report on the Determination of the Earth's Gravitational Potential from Observations of Artificial Satellites. IAG, Sec. IV, 1960.
117. Cook A. H. Geodetic Constants and the Motion of the Moon. Bull. Astron., 25, Fasc. 1.
118. Cook A. H. On the Determination of the Even Zonal Harmonics in the External Gravitational Potential of the Earth. Geophys. J. Roy. Astr. Soc. 1965, v. 10, No 2.
119. Cook A. H. Closing Summary of the Symposium. Use Artif. Satel. Geod., Amsterdam N.-Holl. Publ. Co., 1963.
120. Cook G. E., King — Hele D. G. The Contraction of Satellite Orbits under the Influence of Air Drag, Allowing for the Day-to-night Variation in air Density. Space Res. Amsterdam, N.-Holl. Publ. Co., 1965, 5.
121. Cook A. H. Parameters of the Earth's Gravitational Field. IAU Comm. 7 Meeting, 1964, Hamburg; Transactions IAU, 1966, v. XII, B.
122. Cook A. H. Estimation Problems in the Determination of the Even Zonal Harmonics of the External Potential of the Earth. Trajectories of Artificial Celestial Bodies. Ed. J. Kovalevsky, 1966.
123. Cook A. H. Exact Solutions in the Theory of Orbits. Mon. Not. R. Astr. Soc. 1966, No 3.
124. Culley F. L. Measurement Around the Earth by Electronic Tracking of Satellites. Use Artif. Satel., Atheny Publ. National Technical University, 1967.
125. Чеботарев Г. А., Макарова Е. Н., Сочилина А. С. Определение орбит и вычисление эфемерид искусственных спутников Земли. Наблюдения ИСЗ. Варшава, 1963, № 2.
126. Энеев Т. М., Платонов А. К., Казаков Р. К. Определение параметров орбиты искусственного спутника по данным наземных измерений. В сб.: Искусственные спутники Земли, М., Изд. АН СССР, 1960.
127. Fischer I. Comments on Comparison and Combination of Satellite with Other Results. Amsterdam, Use Artif. Satel. Geod., N.-Holl. Publ. Co., 1963.
128. Fischer I. Secretary's Report, Section V: Investigations Concerning the Astrogeodetic Determination of the Geoid on a Common Datum, Combined with Gravimetric and Satellite Interpolations. XIV. Gen. Ass. IUGG, Lucerne, 1967.
129. Gaposchkin E. M. Differentail Orbit Improvemmet (DOI-3). SAO, Spec. Rep., 1964, No 161.
130. Gaposchkin E. M. A Dynamical Solution for the Tesseral Harmo-

nics of the Geopotential and for Station Coordinates. VII COSPAR Space Sic-Symp., Vienna, 1966.

131. Гапoшкiн E. M. Review of the Rotation of the Earth. SAO, Spec. Rep., 1966, No 236.

132. Гапoшкiн E. M. Publication of Orbits Derived from Photo-reduced Baker — Nunn Observations. SAO, Spec. Rep., 1966, No 232.

133. Гапoшкiн E. M. Dynamical Determination of Station Locations Using Geos 1 Data. SAO, Spec. Rep., 1967, No 264.

134. Гарланд G. D. The Earth's Shape and Gravity. Pergamon Press: Oxford — London. Edinburgh — New York — Paris — Frankfurt 1965. Pyc. пер. Гарленд Дж. Д. Форма Земли и сила тяжести. М., «Мир», 1967.

135. Groten E. Betrachtung einiger Randwertaufgaben im Zusammenhang mit Satelliten — Bahnstörungen infolge topografischer Massenunregelmäßigkeiten. Veröff. Dtsch. geod. Komm. Bayer. Adad. Wiss., 1966, A, No 48.

136. Groten E. Die Genauigkeit der Bestimmung des Erdschwerepotentials und daraus abgeleiteter Größen mittels Satellitenbeobachtungen. Teil I. Zonaler Anteil. Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A: Theoretische Geodäsie, Munchen, 1967, N 56/1.

137. Groten E. On the Masses Necessary to Produce the Anomalous Gravitational Geopotential as Obtained from Satellite Observations. Boll. di geofisica teorica ed applicata, 1968, v. 10, No 39.

138. Groten E. On the Spherical Harmonics Series of the Geopotential at the Earth's Surface. Bull. Gèod., 1968, No 88.

139. Groten E. Ein Vergleich von Gravimetermessungen mit Satellitenbeobachtungsergebnissen. Z. Geophys., 1968, v. 34.

140. Groves G. V. Effect of the Earth's Equatorial Bulge on the Lifetime of Artificial Satellites and its Use in Determining Atmospheric Scale-Height's Nature, 1958, v. 182, No 4515.

141. Groves G. V. Motion of a Satellite in the Earth's Gravitational Fields. Proc. Roy. Soc., 1960, A, v. 254, No 1276.

142. Guier W. H. Determination of the Non-Zonal Harmonics of the Geopotential from Satellite Doppler-Data. Nature, 1963, v. 200, No 4902, John Hopkins U. Appl. Phys. Lab. preprint, 1963.

143. Guier W. H., Weiffenbach G. C. A Satellite Doppler Navigation System. Proc. Inst. Rad. Eng., 1960, v. 48.

144. Hamid S. E. First — Order Planetary Theory. SAO Spec. Rep. 1968, No 285.

145. Heiskanen W. A., Moritz H. Physical Geodesy. San Francisco and London, W. H. Freeman, 1967.

146. Henriksen S. Star Positions for Precise Satellite Tracking. Use Artif. Satel. Geod., v. II, Atheny, Publ. National Technical University, 1967.

147. Харкевич Г. А. Вычисления на электронной цифровой вычислительной машине планетарных характеристик гравитационного поля Земли. Изв. вузов. «Геодезия и аэрофотосъемка», 1965, № 3.

148. Холщевников К. В. О величине коэффициентов при тессеральных гармониках. Вестник Ленингр. унив., 1968, № 1.

149. И з о т о в А. А. Вопросы построения системы координат, отнесенной к центру масс и оси вращения Земли. Бюл. станции оптич. набл. ИСЗ, 1969, № 55.
150. I z s a k I. G. A Determination of the Ellipticity of the Earth's Equator from the Motion of Two Satellites. *Astron. J.*, 1961, 66.
151. I z s a k I. G. A Theory of Satellite Motion About an Oblate Planet. A Second — Order Solution of Vinti's Dynamical Problem. *SAO Spec. Rep.*, 1960, No 52.
152. I z s a k I. G. Tesseral Harmonics in the Geopotential. *Nature*, 1963, v. 199, No 4889.
153. I z s a k I. G. On the Critical Inclination in Satellite Theory. The Use of Artificial Satellites for Geodesy. Proc. of the first Intern. Symp. on the Use of Artificial Satellites for Geodesy, Washington, D. C., 1962. Amsterdam, North — Holland Publishing Company, 1963, 17.
154. I z s a k I. G. The Odd Harmonics Effect in the Motion of the Satellites 1960 Beta 2 and 1960 Iota 2. *Use Artif. Satel. Geod.*, Amsterdam, N.-Holl. Publ. Co., 1963.
155. I z s a k I. G., В е н и м а В., М и л л с С. В. Analytical Development of the Planetary Disturbing Function on a Digital Computer. *SAO Spec. Rep.*, 1965, No 164.
156. J e f f r e y s H. The Figures of the Earth and Moon. *Monthly Notices*, 1948, v. 5, No 7.
157. J e f f r e y s H. The Earth. Cambridge Univ. Press, 1959. Рус. пер. Д ж е ф ф р и с Г. Земля, ее происхождение, история и развитие, ИЛ, М., 1960.
158. J o h n s R. K. C. Determination of the Astronomic Unit from Observations of Artificial Planets. XII Gen. Assembly IUGG, Helsinki, 1960.
159. J o h n s R. K. C. Comments on Geodynamic Constants. California. Aerospace Corp., El. Segundo, 1963.
160. J o h n s R. K. C. The Development of the Function for External Gravitational Potential and the Discussion of Gravitational Models. Florida Inst. of Techn., Space Sci. Ser. No 2, Melbourne, Florida, 1968.
161. K a u l a W. M. Analysis of Gravitational and Geometric Aspects of Geodetic Utilization of Satellites. *Geophys. J.*, 1961, No 2.
162. K a u l a W. M. Analysis of Satellite Observations for Longitudinal Variations of the Gravitational Field. *Space Res.* v. 2, Amsterdam, N.-Holl. Publ. Co., 1961.
163. K a u l a W. M. A Geoid and World Geodetic System Based on a Combination of Gravimetric, Astrogeodetic, and Satellite Data. *Journal of Geophysical Research*, 1961, v. 66, 6, 1799.
164. K a u l a W. M. Development of the Lunar and Solar Disturbing Functions for a Close Satellite. *Astr. J.*, 1962, v. 67, No 5.
165. K a u l a W. M. Comparison and Combination of Satellite with Other Results for Geodetic Parameters. *Use Artif. Satel. Geod.*, Amsterdam, N.-Holl. Publ. Co., 1963.
166. K a u l a W. Improved Geodetic Results from Camera Observations of Satellites. *J. Geophys. Res.*, 1963, 68, No 18.

167. К а у л а У. М. Анализ орбит спутников для геодезических целей. В кн.: Проблемы движения искусств. небесн. тел. М., изд. АН СССР, 1963.
168. К а у л а W. M. Tesseral Harmonics of the Gravitational Field and Geodetic Datum Shifts Derived from Camera Observations of Satellites. *J. Geophys. Res.*, 1963, 68, No 2.
169. К а у л а W. M. Satellite Orbit Analyses for Geodetic Purposes. *Dynamics of Satellites*. Berlin, Springer — Verlag, 1963.
170. К а у л а W. M. Use of Observations of Artificial Satellites for the Study of the Potental of the Earth. Study Group No 3. Report to I. A. G. 1964—1967.
171. К а у л а W. M. Gravitational and Other Perturbations of a Satellite Orbit. *Dynamics of Rockets and Satellites*, ed. by G. V. Groves, N.-Holl. Publ. Co., 1965.
172. К а у л а W. M. A Review of Geodetic Parameters. *Bull. Astron.*, 1965, v. 25, No 1.
173. К а у л а W. M. *Theory of Satellite Geodesy*. Blaisdell Publ. Co., Waltham, Mass. 1966 Рус. пер. У. К а у л а. Спутниковая геодезия, теоретические основы. М., «Мир», 1970.
174. К а у л а W. M. The Use of Artificial Satellites for Geodesy. *Impact of Space Exploration on Society*, 1966, 8.
175. К а у л а W. M. Variations of the Earth's Gravitational Field from Camera Tracking of Satellites, Institute of Geophysics and Planetary Physics, University of California. Publ. No 487.
176. К а у л а W. M. Tesseral Harmonics of the Earth's Gravitational Field from Camera Tracking of Satellites. *J. Geophys. Res.* 1966, v. 71, No 18.
177. К а у л а W. M. Global Harmonic and Statistical Analysis of Gravimetry, Gravity Anomalies: Unsurveyed Areas. *Geophys. Monograph No 9*, edited by H. Orlin, Amer. Geophys. Union, Washington, D. C., 1966.
178. К а у л а W. M. Tests of Satellite Determinations of the Gravity Field Against Gravimetry and their Combination. *Trans. Amer. Geophys. Union*, 1966, v. 47, No 3; SAO, Cambridge, 1966.
179. К а у л а W. M. Geophysical Implications of Satellite Determinations of the Earth's Gravitational Field. *Space Sci. Revs.*, 1967, v. 7, No 5/6.
180. К а у л а W. M. Review of Tesseral Harmonic Determination from Satellite Orbit Dynamics. *Use Artif. Satel. Geod.*, v. II, Publ. National Technical University, Atheny, 1967.
181. К а у л а W. M. Results from Analysis of Earth Satellite Perturbations. *Use Artif. Satel. Geod.*, v. II, Publ. Nat. Techn. Univ., Atheny, 1967.
182. К а у л а W. M. Comparison and Combination of Satellite with Other Results for Geodetic Parameters. *Use Artif. Satel. Geod.*, v. II. Publ. Nat. Techn. Univ., Atheny, 1967.
183. К а у л а W. M. *An Introduction to Planetary Physics. The Terrestrial Planets*. Space Science Text Series. New York, J. Wiley and Sons, Inc., 1968.
184. К а у л а W. M. The Appropriate Representation of the Gravity Field for Satellite Geodesy. *Proc. IV. IAG, Symp. Mathem. Geodesy*, 1969.
185. O'Keefe J. A., Eckels A., Squires R. K. The Gravitational Field of the Earth. *Astron. J.*, 1959, v. 64, 245.

186. Kellogg O. D. Foundations of Potential Theory. New York, Dover Publications, Inc., 1954.
187. Kershner R. B. The Geos Satellite and Its Use in Geodesy. Use Artif. Satel. Geod., v. II, Atheny, Publ. National Technical University, 1967.
188. King — Hele D. G. The Earth's Gravitational Potential, Deduced from the Orbits of Artificial Satellites. The Earth Today. Publ. Royal Astr. Soc., 1961.
189. King — Hele D. G. Der Einfluss der Erdplattung auf Bahn eines nahen Satelliten. Dtsch. Geod. Komm. Bayer. Akad. Wiss. 1963. No 34; пер. с англ. Proc. Roy. Soc. A., 1958, v. 247, 49.
190. King — Hele D. G. Comment on the Values for the Coefficients of the Zonal Harmonics. Use Artif. Satel. Geod., Amsterdam, N. — Holl. Publ. Co., 1963.
191. King — Hele D. G. Theory of Satellite Orbits in an Atmosphere. London, Butterworths, 1964. Рус. пер. Д. Кинг - Хилл. Теория орбит искусственных спутников в атмосфере. М., «Мир», 1966.
192. King — Hele D. G., Cook G. E. The Even Zonal Harmonic of the Earth's Gravitational Potential. Geophys. J. Roy. Astr. Soc. Amsterdam, 1965, v. 10, No 1; Space Res, Amsterdam, 1965, v. 5.
193. King — Hele D. G., Cook G. E., Scott D. W. Even Zonal Harmonics in the Earth's Gravitational Potential: A Comparison of Recent Determinations. Planet. Space Sci., 1966, v. 14, No 1.
194. King — Hele D. G. Review of Dynamics Methods for Determining Zonal Harmonics in the Earth's Gravitational Potential. Use Artif. Satel Geod., v. II, Atheny, Publ. National Technical University, 1967.
195. Kivioja L. Effect of Topographic Masses and Their Isostatic Compensation on the Mean Free Air Gravity Anomalies of  $5^\circ \times 5^\circ$  Surface Elements. Publ. Isost. Inst., IAG, No 46, Helsinki 1964, Ann. Acad. Sci. Fenn. A III, 1964, No 77, Helsinki.
196. Кочина Н. Г. Влияние гравитационных аномалий Земли на движение искусственных спутников. Тр. Инст. теор. астр., 1962, № 9.
197. Koch K. R. Die Beziehung zwischen den Bahnstörungen künstlicher Erdsatelliten und den Schwereanomalien. ZfV. 1968, 93, N 4.
198. Kovalevsky J. Applications de la Mécanique Hamiltonienne aux problèmes du mouvement d'un satellite artificiel, Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, 1965, т. 35.
199. Kovalevsky J. Methods numérique pour la recherche d'une théorie générale d'un satellite. Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, 1965, т. 35.
200. Kovalevsky J., Barlier F. Géodésie terrestre et géodésie par satellites. Space Sci. Revs, 1967, v. 7, 69.
201. Kovalevsky J. Sur la théorie du mouvement d'un Satellite a fortes inclinaison et excentricité. Int. Astr. Union, Symposium 1966, No 25.
202. Kovalevsky J. Sur le mouvement d'un satellite autour de la Lune. Int. Astr. Union, Symp. 1966, No 25.
203. Kovalevsky J. La Sélénodesie. Use Artif. Satel. Geod., v. II, Atheny, Publ. National Technical University, 1967.
204. Kozai Y. The Earth's Gravitational Potential Derived from the Motion of Satellite 1958 Beta 2. Res. in Space Sci. Sp. Rep., 1959, No 22, 1.

205. K o z a i Y. Summary of Numerical Results Derived from Satellite Observations. Use Artif. Satel. Geod., v. II, Atheny Publ. National Technical University, 1967.

206. K o z a i Y. Determination of Love's Number from Satellite Observations. SAO Spec. Rep., 1966, No 236.

207. K o z a i Y. Lunisolar Perturbations with Short Periods. SAO Spec. Rep., 1966, No 235.

208. K ö h n l e i n W. J. On the Accuracy of the Gravitational Potential as Derived from Camera Observations of Artificial Satellites. SAO Spec. Rep., 1965, No 194.

209. K ö h n l e i n W. Combination of Geometric and Dynamic Methods. Geodetic Parameters for a 1966 Smithsonian Institution Standard Earth, v. 2, SAO Spec. Rep., 1966, No 200.

210. K ö h n l e i n W. The Accuracy of the Geopotential and its Gradient-Field; Geodetic Parameters for a 1966 Smithsonian Institution Standard Earth, v. 3. SAO Spec. Rep., 1966, No 200.

211. K ö h n l e i n W. On the Gradient Line of the Earth's Zonal Gravitational Potential. SAO Spec. Rep., 1966, No 216.

212. K ö h n l e i n W. Combination of Geometric and Dynamic Results. Geodetic Parameters for a 1966 Smithsonian Institution Standard Earth, v. 4. SAO Spec. Rep., 1966, No 200.

213. K ö h n l e i n W. J. Interface with Oceanography. SAO Spec. Rep., 1966, No 236.

214. K ö h n l e i n W. Correction to Station Coordinates and to Nonzonal Harmonics from Baker-Nunn Observations. Space Research VII, Amsterdam N.-Holl. Publ. Co.

215. K ö h n l e i n W. J. Determination of Station Coordinates from Optical Observations of Artificial Satellites. Use Artif. Satel. Geod. v. II, Athen Publ. Nat. Techn. Univ., 1967.

216. K ö h n l e i n W. The Earth's Gravitational Field as Derived from a Combination of Satellite Data with Gravity Anomalies. SAO Spec. Rep., 1967, No 264.

217. K ö h n l e i n W. On the Gravity Gradient at Satellite Altitudes. SAO Spec. Rep., 1967, No 246.

218. К у л и к о в К. А. Фундаментальные постоянные астрономии. М., Гос. изд. техн.-теор. лит., 1956.

219. L a m b e c k K. Probability of Recording Satellite Images Optically. Use Artif. Satel. Geod., v. II, Atheny, Publ. Nat. Techn. Univ., 1967.

220. L a m b e c k K. A Spatial Triangulation Solution for a Global Network and the Position of the North American Datum within it. Annual Meeting of the American Geophysical Union, Washington, D. C., April 1969.

221. L a m b e r t W. D. The Gravity Field of an Ellipsoid of Revolution as a Level Surface. Ann. Acad. Sc. Fenn., Ser. A-III, 1961, v. 57; Repr. Ohio Stat Univ., Inst. of Geodesy, Photogrammetry and Cartography, Publ., 1961, No 14.

222. L e d e r s t e g e r K. Critical Notes on the Mass-Functions Derived from Orbital Perturbations of Artificial Satellites. Use Artif. Satel. Geod., v. II, Atheny, Publ. Nat. Techn. Univ., 1967.

223. L e d e r s t e g e r K. The Equilibrium Figure of the Moon. Use Artif. Satel. Geod., v. II, Atheny, Publ. Nat. Techn. Univ., 1967.

224. Lundquist C. A. Satellite Altimetry and Orbit Determination. SAO Spec. Rep., 1967, No 248.
225. MacMillan W. D. The Theory of the Potential. New York, Dover Publications, Inc., 1958.
226. Merson R. H., King-Hele D. G. Use of Artificial Satellites to Explore the Earth's Gravitational Field: Results from Sputnik 2 (1957 Beta) Nature, London, v. 1958, v. 182, No 4636.
227. Merson R. H. Single Station Coverage for Satellite Orbits. Space Res. Amsterdam, N.-Holl. Publ. Co., 1965, v. 5.
228. Michael W. H., Blackshesr W. T., Гарсунский J. P. Results on the Mass and the Gravitational Field of the Moon as Determined from Dynamics of Lunar Satellites. XII. Plenary Meeting of COSPAR, Praha, 1969.
229. Молоденский М. С. Новый метод решения геодезических задач. Тр. ЦНИИГАиК, 1951, вып. 103.
230. Molodensky M. S., Yermeyev V. F., Yurkina M. I. An Evaluation of Accuracy of Stokes' Series and of Some Attempts to Improve His Theory. Use Artif. Satel. Geod., Amsterdam, N.-Holl. Publ. Co., 1963.
231. Монин И. Ф. Формула распределения ускорения силы тяжести для европейской части СССР. Научн. зап. Львовск. политехн. инст., 1962, № 9.
232. Moritz H. Convergence Problems in Celestial Mechanics and Physical Geodesy. IV. Symp. on Mathematical Geodesy, Trieste, May, 1969.
233. Morrison F. Advances in Rapid Orbit Prediction and Applications to Satellite Visibility Studies. XII. Plenary Meeting of COSPAR, Praha, 1969.
234. Morrison F. Validity of the Expansion for the Potential Near the Surface of Earth. IV. Symp. on Mathematical Geodesy, Trieste, May 1969.
235. Musen P. The Motion of an Artificial Satellite in an Asymmetrical Gravitational Field. J. Geophys. Res., 1960, v. 65. 2783; NASA Technical Note D-569, 1960.
236. Mueller I. I. Introduction to Satellite Geodesy. New York, Frederic Ungar Publ. Co., Рус. пер. И. Меллер. Введение в спутниковую геодезию. М., «Мир», 1967.
237. Mueller I. I. The Geodetic Applications of Satellites. Report, No 34, Inst. Geod. Phot. Cart., Ohio State Univ. 1964.
238. Nelson W. C., Loft E. E. Space Mechanics. New York, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1962.
239. Newton R. R., Höpfield H. S., Kline R. C. Odd Harmonics of the Earth's Gravitational Field. Nature, 1961, v. 190, 617.
240. Newton R. R. Ellipticity of the Equator Deduces from the Motion of Transit 4A. J. Geophys. Res. 1962, v. 67, 415.
241. Newton R. R. Non-Zonal Harmonics Deduced from the Motion of Transit 4A. Use Artif. Satel. Geod., Amsterdam, N.-Holl. Publ. Co., 1963.
242. Ostac O. M., Pellinen L. P. Ob opredelenniji Stoksovych postojannyh Zemli po anomalijam sily tazesti. Symp. fys. geod., Praha, 1969.
243. Пеллинен Л. П. Определение коэффициентов разложения гравитационного потенциала Земли по шаровым функциям из совместной обработки гравиметрических и спутниковых данных. Изв. вузов. «Геодезия и аэрофото-съемка», 1965, вып. 5.

244. Пеллинен Л. П. Геодезическое использование искусственных спутников Земли. Итоги науки. Геодезия, 1965, М., 1967.
245. Пеллинен Л. П. Совместное уравнивание гравиметрических и спутниковых данных при определении гравитационного поля Земли. Бюл. станций оптич. набл. ИСЗ, 1969, № 55.
246. Пеллинен Л. П. О целесообразных путях совместной обработки наземной и космической триангуляции. Бюл. станций оптич. набл. ИСЗ, 1969, № 55.
247. Проскурин В. Ф., Кочина Н. Г. Влияние гравитационных аномалий Земли на движение искусственных спутников. В кн.: Проблемы движ. искусств. неб. тел. М., Изд. АН СССР, 1963.
248. R a b e E. Comparison of Terrestrial and Astronomical Results for GM. Use Artif. Satel. Geod., Amsterdam, N.-Holl. Publ. Co., 1963.
249. R a p p R. H. Comparison of Mean Gravity Anomalies at Elevation with Corresponding Ground Anomalies. Bull. Géod., 1967, N 83.
250. R a p p R. H. The Equatorial Radius and the Zero-Order Undulation of the Geoid. Inst. Geod. Phot. Cart., Ohio State Univ. 1966; Rep. No 73, J. Geophys. Res., v. 72, No 2.
251. R a p p R. H. Comparison of Satellite Geoids and Anomaly Fields. Ohio State Univ. 1967, Rep. No 80.
252. R a p p R. H. Gravitational Potential of the Earth Determined from a Combination of Satellite, Observed, and Model Anomalies. J. Geophys. Res., 1968, v. 73, No 20.
253. R a p p R. H. Further Studies in the Combination of Gravimetric and Satellite Data. Ohio State Univ. 1968, Rep. No 119.
254. R a p p R. H. The Geopotential to (14, 14) from a Combination of Satellite and Gravimetric Data. Bull. Géod., 1969, No 91.
255. R a p p R. H. Gravitational Potential Coefficients from Gravity Data Alone (II). 50 Annual AGU Meeting, Washington, D. C., 1969.
256. R a p p R. H. Analytical and Numerical Differences and Between Two Methods for the Combination of Gravimetric and Satellite Data. Bulletino di geofisica teorica ed applicata, 1969, v. XI, N 41—42.
257. R e i g b e r Ch. Zur Bestimmung des Gravitationsfeldes der Erde aus Satellitenbeobachtungen. Veröff. Dtsch. geod. Komm. Bayer. Akad. Wiss., C. 1969, N 137.
258. R o y A. E. The theory of the Motion of an Artificial Lunar Satellite II. The first-Order and Second-Order Theories. ICARUS, 9, 1968, No 1.
259. S e h n a l L. The Influence of the Equatorial Ellipticity of the Earth Gravitational Field on the Motion on a Close Satellite. Bull. of the Astronomical Inst. of Czechoslovakia, 1960, 11.
260. S e h n a l L. The Stability of the 24-Hour Satellite. Astronautica Acta, 1961, 7.
261. S c h m e h l H. Untersuchung über ein allgemeines Erdellipsoid. Neue Folge, 1927.
262. S c h n e i d e r M. Zur dynamischen Nutzung der Bahnen künstlicher Satelliten. Bundesministerium f. wissenschaftliche Forschung, W. 68—55, München, 1968.
263. S c h n e i d e r M. Outline of a General Orbit Determination Method. Space Res. Amsterdam, N.-Holl. Publ. Co., 1969, v. 9.

264. Schwarz Ch. R. The Use of Short Arc Orbital Constraints in the Adjustment of Geodetic Satellite Data. Ohio State Univ. 1969, N 118.

265. Smith D. E. A Determination of the Even Harmonics in the Earth's Gravitational Potential Function. Use Artif. Satel. Geod., v. II, Atheny, Publ. National Technical University, 1967.

266. Социлина А. С. Некоторые изменения в методике улучшения орбит искусственных спутников Земли. Бюлл. Инст. теор. астр., 1963, т. 9, № 1.

267. Socilina A. S. Determination of Orbits Based on Visual and Photographical Observations. Dynamics of Satellites. Berlin, Springer — Verlag' 1963.

268. Spence Mathematics. Part 1, 2, 3. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1966.

269. Spence Technology. Ed. Howard S. Seifert. New York — John Wiley and Sons Inc., 1959.

270. Срегенский Л. Н. Теория ньютоновского потенциала. М., Гос. изд. техн.-теор. лит., 1946.

271. Statistical and Harmonic Analysis of Gravity. Project No Mo-011. Army Map Service, Techn. Rept, 1959, No 24.

272. Sur le systeme des constantes astronomiques. XXI Symposium de l'UAI, Observatoire de Paris 27—31 mai 1963. Bull. astronomique, XXV, Paris, 1965.

273. Тенгстрем Э. О полной информации (геодезических, гравитационных и геомагнитных данных) для уравнения движения искусственных спутников Земли. В кн.: Проблемы движения искусственных небесных тел. М., изд. АН СССР, 1963.

274. Trkal V. Mechanika hmotných bodů a tuheho tělesa. Praha, ČSAV, 1956.

275. Uotila U. A. Investigations of the Gravity Field and Shape of the Earth. Publ. Inst. Geod. Photog., Ohio State Univ., 1960, 10.

276. Uotila U. A. Harmonics Analysis of World-wide Gravity Material. Publ. Isost. Inst., IAG, 1962, No 39; Ann. Acad. Scient. Fennicae. Ser. A, III, 60, Helsinki, 1962.

277. Uotila U. A. Coefficients of Low Degree Spherical Harmonics of Gravity Field as Computed from Surface Gravity Anomalies. Use Artif. Satel. Geod., Amsterdam, N.-Holl. Publ. Co., 1963.

278. Uotila U. A. Gravity Anomalies for a Mathematical Model of the Earth. Ann. Acad. Scient. Fenn., A, III, No 74, Helsinki, 1964.

279. Uotila U. A. Adjustment of a World-wide Gravity Base Station Network. Publ. Isost. Inst., IAG, No 42, Helsinki, 1963; Ann. Acad. Sci. Fenn., A, III, No 73 Helsinki, 1964.

280. Uotila U. A. Research into the Earth's External Gravity Field and the Determination of Geodetic Parameters Dependent on Gravity. Ohio State Univ. 1969, No 12.

281. Veis G. Geodetic Uses of Artificial Satellites. Smithsonian Contribution to Astrophysics, 1960, 3, No 9. Рус. пер. Г. Вейс. Геодезическое использование искусственных спутников Земли. М., «Недра», 1967.

282. Veis G., Whipple F. L. Experience in Precision Optical Tracking of Satellite for Geodesy. North. Holl. Publ. Co. Amsterdam, 1961.

283. Veis G. Ed. Proceedings of COSPAR-IAG Symposium of the Use of Artificial Satellites for Geodesy. Amsterdam, N.-Holl. Publ. Co., 1961.

284. Veis G. The Deflection of the Vertical of Major Geodetic Datums and the Semimajor Axis of the Earth's Ellipsoid as Obtained from Satellite Observations. Space Res. V, Amsterdam, N.-Holl. Publ. Co., 1965 (Preprint Aug. 1964. Bull. Géod., 1965, No 75, 78).

285. Veis G. Relation with DSIF Stations. SAO Spec. Rep., 1966, No 200.

286. Veis G. The Orbital Method, in Geodetic Parameters for a 1966, Smithsonian Institution Standard Earth v. 1, SAO Spec. Rep., 1966, No 200.

287. Veis G. The Reference System; Geodetic Parameters for a 1966 Smithsonian Institution Standard Earth v. 1, SAO Spec. Rep., 1966, No 200.

288. Veis G. Results from the Orbital Method; Geodetic Parameters for a 1966 Smithsonian Institution Standard Earth, v. 2, SAO Spec. Rep., 1966, No 200.

289. Veis G. Geodetic Interpretation; Geodetic Parameters for a 1966 Smithsonian Institution Standard Earth, v. 3. SAO Spec. Rep., 1966, No 200.

290. Veis G. The Orbital Method; Geodetic Parameters for a 1966 Smithsonian Institution Standard Earth, v. 1. SAO Spec. Rep., 1966, No 200.

291. Veis G. The Motion of the Spin Axis and the Rotation of the Earth. SAO Spec. Rep. 1966; No 236.

292. Veis G. Differential Orbit Improvement Program for Lunar Orbiters. SAO Spec. Rep., 1966, No 236.

293. Veis G. The Determination of the Radius of the Earth and Other Geodetic Parameters as Derived from Optical Satellite Data. SAO Spec. Rep., 1967; No 264.

294. Verniani F. The Total Mass of the Earth's Atmosphere. J. Geophys. Res., 1966, v. 71, No 2.

295. Vinti J. P. New Method of Solution for Unretarded Satellite Orbits. J. Res. Nat. Bur. Stand., 1959, v. 63, B, 105.

296. Vinti J. P. Theory of an Accurate Intermediary Orbit for Satellite Astronomy. J. Res. Nat. Bur. Stand. B, 1961, v. 65, 169.

297. Wagner C. A., Douglas B. C. Resonant Satellite Geodesy by High Speed Analysis of Mean Kepler Elements. XII. Plenary Meeting of COSPAR, Praha, May 1969.

298. Chi'-Yuen Wang. Some Geophysical Implications of the Satellite Geopotential. SAO Spec. Rep., 1966, No 236.

299. Watson J. C. Theoretical Astronomy. Relating to the Motions of the Heavenly Bodies. New York, Dover Publications, Inc., 1964.

300. Williams O. W., Illif R. L., Tavenner M. S. Lasers and Satellites: A Geodetic Application. Use Artif. Satel. Geod., v. II, Atheny Publ. Nat. Techn. Univ., 1967.

301. Witte L. de Altitude Extension of the Three Anomalous Gravity Components. Aerospace Corporation, Rep. APP-1001 (S 9990)-4, San Bernardino, 1967.

302. Woollard E. W. Theory of the Rotation of the Earth around its Center of Mass. Astronomical Papers, v. XV, Part 1, Washington, 1953. Рус. пер. Вуллард Э. Теория вращения Земли вокруг центра масс. М., Физматгиз, 1963.

303. Загребин Д. В. Уровненный трехосный эллипсоид и сила тяжести на его поверхности. М.—Л., Изд. АН СССР, 1948.

304. Жонголович И. Д. О редуциях силы тяжести. Тр. ЦНИИГайК, 1949, вып. 68.
305. Жонголович И. Д. Внешнее гравитационное поле Земли и фундаментальные постоянные, связанные с ним. Тр. Инст. теор. астр., 1952, вып. 3.
306. Жонголович И. Д. Об определении размеров общего земного эллипсоида. Тр. Инст. теор. астр., 1956, вып. 6.
307. Жонголович И. Д. Некоторые формулы, относящиеся к движению материальной точки в поле тяготения уровненного эллипсоида вращения. Бюл. инст. теор. астр., 1960, т. 7, № 7 (90).
308. Жонголович И. Д. Возмущение искусственного спутника в гравитационном поле Земли. Бюл. Инст. теор. астр., 1960, т. 7, № 10 (93).
309. Жонголович И. Д. Опыт определения некоторых параметров гравитационного поля Земли из результатов наблюдений спутников. М., Астр. совет АН СССР, МГТ, Бюл. № 2, 1960.
310. Жонголович И. Д., Пеллинен П. П. Средние элементы искусственных спутников Земли. Бюл. Инст. теор. астр., 1962, т. 7, № 6.
311. Жонголович И. Д. Движение полюсов Земли и астрономо-геодезические работы. Бюлл. станций оптич. набл. ИСЗ, 1959, № 55.
312. Жонголович И. Д. Условия применения классической формулы Стокса. Бюл. Инст. теор. астр., 1949, т. IV, № 6.
313. Жонголович И. Д. Некоторые стоксовы постоянные для уровненного трехосного эллипсоида. Бюл. Инст. теор. астр., 1950, т. IV, № 8.
314. Zongolovic I. D., Pellinen L. P. Certains aspects de la solution du probleme fundamental de la géodésie superieure. Use Artif. Satel. Geod., Amsterdam, N.-Holl., Publ. Co., 1963.
315. Zongolovic I. D. On the Use of the Results Obtained from Synchronous Observations of the Artificial Satellites of the Earth from the INTEROBS Programme for Scientific Purposes. Trajectories of Artificial Celestial Bodies. Ed. J. Kovalevsky; Berlin, Springer — Verlag, 1966.
316. Журавлев С. Г. Возмущения элементов орбиты синхронного спутника, движущегося в нецентральной поле тяготения Земли. Вестник МГУ физика, астр., 1969, № 2.

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Предисловие автора . . . . .	7
Принятые обозначения . . . . .	8
<b>Глава I. Гравитационный потенциал Земли во внешнем пространстве</b> . . . . .	<b>12</b>
§ 1. Исходные соотношения . . . . .	12
§ 2. Гармонические функции . . . . .	14
§ 3. Уравнение Лапласа в сферических координатах . . . . .	17
§ 4. Шаровые и сферические функции . . . . .	21
§ 5. Полиномы Лежандра и присоединенные функции Лежандра . . . . .	31
§ 6. Геометрическая классификация сферических функций . . . . .	35
§ 7. Ортогональность сферических функций . . . . .	39
§ 8. Разложение функции $V$ в ряд сферических функций . . . . .	42
§ 9. Разложение функции $1/r$ в ряд по полиномам Лежандра . . . . .	47
§ 10. Представление гравитационного потенциала в виде ряда сферических функций и выражения для основных динамических (стоксовых) постоянных . . . . .	49
§ 11. Точное выражение для гравитационного потенциала . . . . .	57
§ 12. Гравитационный потенциал Земли при некоторых упрощающих предположениях . . . . .	62
§ 13. Различные формы записи для разложения гравитационного потенциала . . . . .	66
§ 14. Нормирование сферических функций и динамических постоянных в разложении гравитационного потенциала . . . . .	68
§ 15. Возмущающий потенциал и его свойства . . . . .	71
<b>Глава II. Движение спутника в гравитационном поле Земли</b> . . . . .	<b>76</b>
§ 16. Уравнения движения Ньютона и уравнения движения Лагранжа второго рода . . . . .	76
1. Уравнения движения в геоцентрической системе . . . . .	76
2. Уравнения движения в геодезической референцной системе . . . . .	82
§ 17. Возмущающая функция . . . . .	84
§ 18. Понятие о мгновенных и оскулирующих элементах орбиты . . . . .	88
§ 19. Возмущения элементов орбиты . . . . .	93
1. Скобки Лагранжа . . . . .	93
2. Производные по элементам орбиты от общих интегралов однопородных уравнений движения и их изменения во времени . . . . .	98
3. Вычисление скобок Лагранжа . . . . .	105
4. Уравнения Лагранжа для возмущений элементов орбиты . . . . .	114
§ 20. Производные возмущающей функции по элементам орбиты . . . . .	120
§ 21. Производные возмущающей функции по сферическим координатам . . . . .	125
§ 22. Влияние притяжения Луны и Солнца . . . . .	126
§ 23. Уравнения движения узла и перигея как функции сферических координат спутника, элементов орбиты и динамических постоянных Земли . . . . .	132
	279

