

П.И. Балк, А.С. Долгаль

**Аддитивные методы
решения обратных задач
гравиразведки
и магниторазведки**

**Москва
Научный мир
2020**

УДК 550.831
ББК 22.21.67
Б 20

П.И. Балк, А.С. Долгаль. Аддитивные методы решения обратных задач гравиразведки и магниторазведки. М.: Научный мир, 2020, 456 стр.

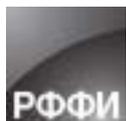
ISBN 978-5-91522-493-2

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор Ю.И. Блох
доктор физико-математических наук, профессор В.Н. Глазнев

Рекомендовано к изданию ученым советом Горного института УРО РАН

В монографии раскрыты главные причины возникновения многочисленных противоречий в теории количественной интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Показано, что в основном они являются следствием недостатков традиционных математических форм представления ее результатов. Предложены эффективные подходы к построению содержательных инвариантов на множестве допустимых решений линейной и нелинейной обратной задачи. Разработан новый класс методов построения репрезентативных подмножеств допустимых решений в конечноэлементных модельных классах при наличии различной априорной информации об источниках поля. Установлена эффективность применения созданных алгоритмов в аддитивных технологиях интерпретации, основанных на идее суммирования полезной информации, содержащейся в каждом из полученных решений. Приведены модельные и практические примеры, иллюстрирующие преимущества аддитивных методов в вопросах повышения достоверности результатов моделирования геологических тел и структур. Книга рассчитана на широкий круг специалистов в области интерпретации данных гравиразведки и магниторазведки, а также на аспирантов и студентов старших курсов.



Публикуется при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-15-00014)
Издание РФФИ не подлежит продаже.

ISBN 978-5-91522-493-2

© П.И. Балк, А.С. Долгаль, 2020
© Издательство «Научный мир», 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	7
Глава 1. СПОРНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ В СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ	13
1.1. Принципиальные противоречия между математическим и геофизическим подходами к обратным задачам	13
1.2. Проявления неадекватности в математической теории интерпретации геопотенциальных полей	18
1.3. Семь спорных положений в теории решения обратных задач гравиразведки и магниторазведки	22
1.3.1. Первое положение	25
1.3.2. Второе положение	39
1.3.3. Третье положение	46
1.3.4. Четвертое положение	52
1.3.5. Пятое положение	55
1.3.6. Шестое положение	64
1.3.7. Седьмое положение	68
Глава 2. БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ, ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ И ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ В КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ КЛАССАХ ИСТОЧНИКОВ ПОЛЯ	77
2.1. Базовые понятия.....	78
2.2. Основные операции	86
2.3. Типовые задачи	96
Глава 3. БАЗОВЫЙ МЕТОД РЕГУЛИРУЕМОЙ НАПРАВЛЕННОЙ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ	110
3.1. История развития конечноэлементных методов решения обратных задач.....	111

3.2. Метод РНК Страхова-Лапиной как прообраз современных монтажных алгоритмов	115
3.3. Результаты вычислительных экспериментов	120
Глава 4. ОБОБЩЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕГУЛИРУЕМОЙ НАПРАВЛЕННОЙ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ.....	138
4.1. Суть концепции обобщенных алгоритмов РНК	141
4.2. Комплексирование обобщенных алгоритмов РНК и метода разделения полей.....	150
4.3. Результаты вычислительных экспериментов.....	153
Глава 5. ПЕРСПЕКТИВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ МОНТАЖНОГО ПОДХОДА	184
5.1. Выход за рамки концепции РНК.....	188
5.1.1. Метод регулируемой направленной раскristализации.....	189
5.1.2. Метод регулируемой направленной перекристаллизации ..	191
5.1.3. Монтажные алгоритмы на основе комбинирования итерационных процессов РНК, РНР и РНП.....	195
5.1.4. Обновление структуры замощения в ходе итерационного процесса	199
5.1.5. Монтажные алгоритмы без обязательного наследования свойств предшествующего приближения.....	202
5.1.6. Синтез монтажных алгоритмов с классическими методами минимизации.....	204
5.1.7. Элементы искусственного интеллекта в монтажных алгоритмах решения обратных задач.....	209
5.2. Решение рудных обратных задач по нескольким производным гравитационного потенциала	211
5.3. Решение обратных задач с неполной информацией о петрофизических свойствах	215
5.3.1. Предпосылки к использованию монтажных алгоритмов для решения смешанных обратных задач.....	216
5.3.2. Алгоритм РНК при нечеткой информации об эффективной плотности (намагниченности)	217
5.4. Монтажные методы в структурных и структурно-рудных обратных задачах гравиразведки	221
5.4.1. Монтажный подход к решению обратной задачи гравиразведки для финитной контактной границы.....	221
5.4.2. Объединение «парциальных» итерационных процессов при решении структурно-рудной обратной задачи.....	224
5.5. Результаты вычислительных экспериментов.....	227

Глава 6. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ КАК ПРОБЛЕМА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И РИСКА ..	250
6.1. Оптимальные решения в условиях неопределенности	252
6.2. Оптимальные решения в условиях риска	264
6.3. Построение апостериорных оценок плотности распределения допустимых решений обратной задачи	267
6.4. Результаты вычислительных экспериментов	277
Глава 7. ГАРАНТИРОВАННЫЙ ПОДХОД К ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ.....	302
7.1. Сущность гарантированного подхода	303
7.2. Линейная обратная задача	309
7.2.1. Типичная постановка задачи	310
7.2.2. Постановка задачи в случае гарантированного подхода	317
7.2.3. Сравнительная оценка эффективности двух подходов	319
7.2.4. Дополнительные замечания.....	321
7.3. Структурная обратная задача.....	324
7.4. Рудная обратная задача	330
7.4.1. Постановка обратной задачи в рамках гарантированного подхода.....	331
7.4.2. Алгоритм построения гарантирующих пространственных областей.....	339
7.4.3. Факторы влияния на достоверность результатов интерпретации	348
7.4.4. Взаимодополняемость традиционного и гарантированного подходов	353
7.5. Задачи планирования геофизического эксперимента.....	354
7.5.1. Постановка задачи и алгоритм вычисления прогнозных оценок качества интерпретации.....	356
7.5.2. Учет предварительного сглаживания помех	360
7.6. Результаты вычислительных экспериментов	364
Глава 8. АДДИТИВНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ И ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ	386
8.1. Объективные предпосылки к развитию аддитивных методов интерпретации	387
8.2. Аддитивные методы решения обратных задач рудного типа.....	390
8.2.1. О разумном компромиссе между математической строгостью и здравым смыслом.....	391
8.2.2. Функции пространственного распределения оценочных параметров.....	393

8.3. Обобщенные решения обратных задач	402
8.4. Результаты вычислительных экспериментов.....	409
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	433
ЛИТЕРАТУРА	436

ВВЕДЕНИЕ

Побудительным мотивом к написанию данной монографии стало осознание ее авторами всей глубины проникновения в теорию интерпретации гравитационных и магнитных аномалий чуждых идей, заимствованных большей частью из классической теории решения некорректных обратных задач, в которой действуют своя иерархия приоритетов и система ценностей, имеющих мало общего с потребностями прикладной геофизики. Математически безупречный фундамент, на котором построена теория некорректных обратных задач, в случае ее приложения к обратным задачам гравиразведки и магниторазведки оборачивается неким «виртуальным миром», в котором находят место абсолютно неприемлемые априорные предпосылки (измерения поля в континуальном множестве точек, возможность устремления нормы помехи измерений к нулю) и не выполнимые в реальности критерии состоятельности методов решения обратных задач, предусматривающие сходимость последовательности (существующих лишь в воображении) приближенных решений к истинному.

Основная проблема, которую перед собой ставит теория решения некорректных обратных задач, состоит в преодолении неустойчивости приближенных решений за счет дополнительной информации общего характера (в задачах гравиразведки это может быть предположение о гладкости носителя возмущающих масс). Что касается практики количественной интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, то благодаря естественным ограничениям на физические и геометрические параметры возмущающего объекта неустойчивости (в ее строгом понимании!), на преодоление которой и направлена теория, изначально не существует. Сколь угодно большие ошибки решения обратной задачи остаются лишь в умозаключениях, но также при этом и нет возможности фактически обеспечить сходимость и наперед заданную точность результата интерпретации. В действительности проблема, которую перед теорией решения обратных задач ставит геофизическая практика,

состоит, вообще говоря, в другом – в построении методов, обеспечивающих извлечение максимума достоверной информации об источниках поля в конкретных физико-геологических условиях интерпретации.

На первых порах та «опека» над теорией интерпретации гравитационных и магнитных полей, которую взяла на себя теория решения некорректных обратных задач, для первой из них оказалась весьма полезной. Геофизики получили ответы на многие гносеологические вопросы принципиальной познаваемости изучаемых объектов по их косвенным проявлениям – физическим полям. В немалой степени благодаря математикам геофизики познакомились с разнообразными формами проявления строгой неоднозначности в обратных задачах потенциала. Правда, уже здесь не обошлось без неадекватности теории практике – теоремы единственности, доказанные в функциональных пространствах, оторваны от реальности и не имеют прикладного значения в силу дискретности измерений гравитационного и магнитного полей. К сожалению, это обстоятельство остается почти не замеченным, о чем свидетельствуют многочисленные публикации, в которых с ссылок на такие теоремы начинается обоснование предлагаемого алгоритма решения обратной задачи. Справедливости ради необходимо сказать все же, что интерес геофизиков к классической теории решения некорректных обратных задач обусловлен не одним только пиететом, который представители прикладных наук традиционно испытывают к «чистым» математикам, но и ощутимой практической отдачей – условие гладкости решения нередко позволяло получать приемлемые результаты при минимуме априорных предположений. И все же, нельзя не отметить, что иллюзия благополучия, которого – если не замечать несоответствия теоретических предпосылок реалиям практики – можно добиться при относительно слабых требованиях к априорной информации, стала на долгие годы серьезной преградой на пути действительно актуальных направлений развития теории интерпретации потенциальных полей.

Развернутому обоснованию неадекватности краеугольных положений классической теории некорректных обратных задач условиям, которые имеют место в практике интерпретации данных гравиразведки и магниторазведки, посвящена первая глава монографии. Сделанные в ней выводы легли в основу принципиально новых методов решения обратных задач гравиразведки и магниторазведки, изложенных в монографии.

Аддитивные технологии интерпретации гравитационных и магнитных аномалий применительно к рудной постановке обратной задачи, изучение которых составляет основную цель монографии, предполагают построение достаточно большого числа (результативных) допустимых решений обратной задачи. На их основе впоследствии осуществляется построение итогового результата интерпретации, причем в терминах, не принятых в существующей теории интерпретации потенциальных полей. С очевидностью, возникает не-

обходимость в полностью формализованных алгоритмах поиска такого рода решений. За последние 20–25 лет появилось достаточно много исследований, выполненных преимущественно авторами монографии, в которых обосновано, что в случае обратных задач рудного типа для поиска достаточно мощного семейства допустимых вариантов интерпретации с успехом можно воспользоваться различными модификациями монтажного метода.

Для итерационных монтажных алгоритмов характерна своеобразная структура итерационного шага, особое значение приобретает топология (конфигурационного) носителя источников аномалии, собранного из элементов замощения изучаемой части пространства, его связность и односвязность. Специфическую форму приобретает также условие пофрагментной гладкости границы носителя масс. Соответственно, возникает потребность в базовых понятиях, в терминах которых можно было бы осуществлять описание монтажных алгоритмов. Необходимы эффективные процедуры слежения за соблюдением условия наследования текущим приближением к искомому носителю возмущающих масс основных топологических свойств, присущих предшествующему приближению. Помимо процедур, осуществляющих такой контроль, монтажные алгоритмы нуждаются также в процедурах преобразования произвольных конфигурационных носителей в минимальные носители с заданными свойствами. Этим вопросам посвящена вторая (подготовительная) глава монографии.

В третьей главе излагается суть простого (базового) метода регулируемой направленной кристаллизации (РНК), ставшего прообразом многих модификаций монтажных алгоритмов.

В четвертой главе обсуждаются различные направления, по которым в последние годы, преимущественно силами авторов монографии, проводились исследования по обобщению метода РНК. Прежде всего – по линии расширения типов априорных ограничений на свойства носителя возмущающих масс. Список этих ограничений охватывает сегодня, по сути, все типы априорной информации, встречающейся в практике интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Основной акцент при оценивании достоинств метода РНК сделан на возможности его использования в качестве рабочего инструмента в аддитивных технологиях интерпретации. Отмечается важное преимущество монтажных алгоритмов, не требующих задания априорных ограничений на свободные параметры модели источников поля в привычных терминах системы равенств и неравенств. Эта особенность монтажных алгоритмов позволяет достаточно просто учитывать априорные ограничения топологического характера, включая формализацию условия, препятствующего появлению геологически бессодержательных фрагментов (так называемых «отростков») у границы модельного носителя. С точки зрения основного предназначения монтажных методов к их достоинствам следует также отнести то,

что результат поиска каждого допустимого решения обратной задачи практически не зависит от выбора начального приближения. До недавнего времени оставался открытым вопрос о том, как обойти эффект перераспределения масс с эффективными плотностями разного знака, размещенных по различным парциальным носителям в модели источников аномалии. Во многом проблеме удалось закрыть за счет комплексирования метода РНК с процедурой разделения аномальных эффектов, использующей истокообразную аппроксимацию.

Базовый и обобщенный методы РНК – это лишь одна из математических форм воплощения концепции монтажных алгоритмов. Поскольку эти алгоритмы остаются на сегодня единственным конструктивным средством, позволяющим реализовать концепцию аддитивных технологий интерпретации, то актуальна проблема их дальнейшего развития. Этому посвящена пятая глава монографии. В ней обсуждаются возможности выхода за рамки концепции метода РНК и предлагаются соответствующие вычислительные процессы. Существенно обновлена модель наблюдаемого поля (фоновая компонента, различные метрики близости наблюдаемого и модельного полей). Расширен класс обратных задач, использующих агрегированные методы, в которые встроены монтажные алгоритмы. В их числе: обратная задача с интервально заданными значениями эффективных плотностей отдельных тел, структурно-рудная обратная задача для контактной границы и нескольких локальных тел, обратная задача совместной интерпретации измерений нескольких производных гравитационного потенциала, задача комплексной интерпретации данных гравиразведки и магниторазведки в рудном классе моделей.

Своего рода «перекидным мостиком» между традиционными и аддитивными методами интерпретации гравитационных и магнитных аномалий являются методы решения обратных задач, основанные на идеях и критериях общей теории принятия решений в условиях неопределенности и риска. Оптимальные решения обратных задач, отвечающие таким критериям, предлагается – наряду с результатами интерпретации в рамках аддитивных технологий – включить в общий пакет информации об источниках аномалии, которую удалось извлечь из имеющихся данных. Методы интерпретации, прилегающие к теории принятия решений, наследуют от традиционных методов решения обратных задач математические формы представления результата интерпретации, но оптимальность решения определяется по иным критериям, которые тесно и неформальным образом связаны со структурой множества Q допустимых решений. Обсуждению методов решения обратных задач в условиях неопределенности и риска, в структуру которых мы – в дополнение к рекомендациям общей теории принятия решений – встроили принцип доверительной вероятности, посвящена шестая глава.

Седьмая глава монографии посвящена гарантированному подходу к решению обратных задач, опрокинувшему традиционные представления о том, в

каких математических терминах могут быть выражены результаты интерпретации. За результат интерпретации при решении обратной задачи рудного типа предложено принять пару областей D_1 и D_2 , обеспечивающих наилучшую двухстороннюю оценку $D_2 \subset S \subset D_1$ для носителя S . В структурной обратной задаче результатом интерпретации могут служить огибающие семейства допустимых границ раздела. В линейной обратной задаче результат интерпретации можно выразить в терминах наилучшаемых отдельных оценок плотностей локальных тел, составляющих модель источников поля. Важным свойством методов, реализующих гарантированный подход, является монотонная зависимость информативности результатов интерпретации от объема и качества интерпретируемых данных, что недоступно традиционным методам решения обратных задач. С помощью гарантированного подхода можно оценить вклад различных объемов априорных данных в информативность итогового результата интерпретации.

Аддитивные методы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, которым посвящена последняя, восьмая глава монографии, были предложены ее авторами сравнительно недавно и названы так по главному принципу, положенному в их основу, – суммировать в результатах интерпретации (в сжатом виде) информацию, которую несет каждое допустимое решение обратной задачи. Прототипом этих методов можно назвать методы, реализующие концепцию гарантированного подхода. Как и в случае гарантированного подхода, фундаментом аддитивных методов служит множество Q допустимых решений обратной задачи (на практике некоторое его представительное подмножество). Отличием аддитивных методов интерпретации от методов, реализующих концепцию гарантированного подхода, является возможность более детального изучения исследуемой части пространства D с помощью оценочных функций $\lambda(X)$, $X \in D$ распределения специальных параметров, назначение которых состоит в оценке вероятности успешного решения поставленной задачи при условии, что будут учтены эти параметры. По сути, речь идет о возможности решения сугубо детерминистскими средствами тех задач, которые всегда считались прерогативой информационно-статистического направления. В числе оценочных функций – функция локализации для оценки вероятности обнаружения возмущающих масс в любом заданном «элементарном фрагменте» области D и функция обнаружения для оценки вероятности подсечения возмущающих масс буровой скважиной заданной траектории.

Аддитивные методы интерпретации олицетворяют собой, если можно так выразиться, более высокий уровень культуры извлечения информации из геофизических данных. Если точность единичного решения обратной задачи ассоциируется с достоинствами конкретного алгоритма, с помощью которого была осуществлена интерпретация, и носит, вообще говоря, случайный характер, то результаты интерпретации в рамках аддитивных методов харак-

теризуют информативность совокупных априорных данных. В этой главе мы предложили также вводить в методы решения обратных задач поправки за неадекватность модели источников аномалии, позволяющие формализовать и оптимизировать выбор размерности модели источников поля не в ущерб информативности итоговых результатов интерпретации.

Предлагая любые новаторские идеи, требующие отказа от привычных представлений, нельзя сбрасывать со счетов субъективный фактор. Какую-бы доказательную базу мы ни подвели под преимущества аддитивных методов интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, трудно рассчитывать, что геофизики полностью откажутся от привычных форм представления результатов интерпретации – без гипотетических границ возмущающих объектов геофизики и геологи работать не могут. В этом и нет нужды. Оптимальное сочетание оценочных функций и частных решений мы находим в обобщенных решениях $\langle S^*; \lambda(X), X \in S^* \rangle$ обратных задач гравиразведки и магниторазведки, как все тех же «обычных» допустимых решений S^* обратных задач, но теперь уже идущих в паре с оценочными функциями λ , которыми аддитивные методы готовы поделиться. По глубокому убеждению авторов монографии, за такими «синтетическими» технологиями будущее в обновленной теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий.

При написании монографии использовались результаты исследований, выполненных в рамках грантов РФФИ «Развитие монтажных технологий решения обратной задачи гравиметрии при трехмерном моделировании геологических объектов» № 10-05-96023_р_урал_а (2010–2011 гг.); «Разработка методов количественной интерпретации геопотенциальных полей, базирующихся на синтезе функционально-аналитического и вероятностно статистического подходов» № 12-05-00414-А (2012–2014 гг.); «Разработка методов оценки параметров источников потенциальных полей на основе согласования допустимых решений обратной задачи» № 15-05-01823_а (2015–2017 гг.), № 18-05-70094 «Ресурсы Арктики» «Тектоно-магматические факторы образования платино-медно-никелевых месторождений Арктической части Сибирской трапповой провинции» (2018–2020 гг.). Издание монографии осуществлено за счет гранта РФФИ 20-15-00014\20.

Глава 1

**СПОРНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ В СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ
ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТНЫХ
АНОМАЛИЙ**

**1.1. Принципиальные противоречия между математическим
и геофизическим подходами к обратным задачам**

Полная адекватность реалиям геофизической практики – отличительная черта математической теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий XXI века, появление которой, по прогнозам В.Н. Страхова [1995, 2000₁], можно было ожидать к концу 2020 года. Время вносит свои коррективы в обозначенные сроки, причем не в лучшую сторону. С сожалением приходится констатировать, что стремительные темпы развития теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, присущие 70–90-м годам минувшего века, остались в прошлом, и, похоже, безвозвратно. На это есть объективные причины. Советская, а затем и российская наука потеряла многих геофизиков-теоретиков, которые стояли у истоков математической теории интерпретации потенциальных полей и были генераторами большинства ее методообразующих идей. Тесные связи между академической и отраслевой наукой позволяли достаточно быстро внедрять в производство новые идеи и методы решения обратных задач. Результаты практической апробации новых подходов к решению обратных задач, в свою очередь, способствовали ускорению темпов развития теории. Если говорить о настоящем времени, то экономическая ситуация, в которой сегодня находится российская геологическая отрасль, не располагает к широкомасштабным финансовым затратам на проведение научно-исследовательских разработок. В значительно меньшей степени, чем в годы расцвета теории интерпретации потенциальных полей, производственные геофизические организации могут рассчитывать на академическую науку.

Современное состояние теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий не располагает к распылению усилий на задачи второстепенного характера и клонированию известных результатов, когда при кажущемся многообразии алгоритмов решения обратных задач многие из них различаются, по меткому выражению В.Н. Страхова, «кто на ε , а кто и вовсе на δ ». Следует сосредоточиться на поиске скрытых возможностей повышения информативности геофизических методов, а каждый новый подход или алгоритм необходимо сопровождать сравнением его с уже имеющимися разработками. Успех во многом будет зависеть от того, какие смежные математические дисциплины мы выберем в союзники и в какой мере доверимся их общеметодологическим установкам. В афористичной форме В.Н. Страхов так описал ситуацию [Страхов, 1995]: «...математика является языком всех естественных наук, но каждая конкретная наука должна “разговаривать” на собственном диалекте этого универсального языка», что ставит под сомнение эффективное развитие теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий за счет одного только заимствования идей и методов вычислительной математики.

Среди субъективных причин, сдерживающих темпы развития теории интерпретации потенциальных полей, адекватной реалиям геофизической практики, один из авторов настоящей монографии назвал в свое время столкновение интересов исследователей, принадлежащих конкурирующим научным школам и придерживающихся различных представлений о критериях состоятельности и значимости научных результатов [Балк, 2000, 2001, 2002]. В этой связи нельзя не отметить то негативное влияние, которые оказали, и, судя по материалам научных семинаров, продолжают оказывать на теорию интерпретации потенциальных полей некоторые стереотипы мышления, сложившиеся под влиянием формальных математических теорий, и в первую очередь классической теории некорректных обратных задач [Тихонов, Арсенин, 1979; Тихонов, 1999]. В то же время приходится с сожалением констатировать, что на научных геофизических форумах, проводимых в России, доля теоретических докладов в последние годы неуклонно снижается. Из анализа зарубежных публикаций однозначно следует, что тенденция к снижению интереса к сугубо методологическим разработкам и формализации интерпретационного процесса носит всеобщий характер. Тренд сегодняшнего дня – неформализованный подбор и модернизация интерактивных систем моделирования. Создается впечатление, что большинство специалистов считает, что резервы математической теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий в основном уже исчерпаны. Цель настоящей монографии – показать, что это не так. Теория интерпретации гравитационных и магнитных аномалий рискует остаться с прежним багажом методологических установок, подходов и алгоритмов, не вполне адекватных реалиям геофизической практики, и скрытые до времени потенциальные возможности гравиразведки и магниторазведки останутся невостребованными.

Как сугубо математическая дисциплина, возникновение которой не было инициировано нуждами какой-то определенной прикладной науки, теория решения некорректно поставленных обратных задач построена безукоризненно: минимум априорных ограничений на свойства оцениваемого решения и помехи (гладкость решения и возможность устремления нормы помехи к нулю) и максимум качества обещанного результата (сходимость последовательности приближенных решений к истинному). В математике результат имеет наивысшую ценность, если он базируется на необходимых и достаточных предпосылках, и логика классической теории решения некорректных обратных задач проста: если сходимость позволяет обеспечить необходимую точность приближенного решения (разумеется, только на бумаге), то в принципе нет особой необходимости в любых дополнительных исследованиях сверх тех, что гарантируют сходимость. Классическая теория решения обратных задач может позволить себе такую роскошь, как игнорирование априорной информации, кроме той, которая необходима для обеспечения сходимости. Хотя, справедливости ради, надо отметить появление работ, в которых авторы отходят от этого принципа [Васин, Агеев, 1993].

Все было бы хорошо, если бы не одна «малость» – неадекватность методологии классической теории решения обратных задач реалиям и целям геофизики. При практическом применении методов этой теории отмеченная неадекватность способна свести на нет все достоинства, вытекающие из математической строгости этой теории. Впору задаться вопросом не о заимствовании результатов математической теории решения некорректных обратных задач, а о том, как оградить теорию интерпретации гравитационных и магнитных аномалий как сугубо прикладную область науки от чуждых идей теории, которая по чисто формальным признакам претендует на нее как на одну из областей своего применения. Заимствование математических результатов далеко не всегда ведется с учетом адекватности условий, в которых эти результаты справедливы. В качестве примера напомним, что все основные теоремы единственности решения обратной задачи гравиметрии доказаны в предположении задания поля на достаточно мощном континуальном множестве точек, тогда как на практике измерения гравитационного поля дискретны. Несмотря на это, геофизическая литература изобилует ссылками на такие теоремы в обоснование состоятельности предлагаемых алгоритмов решения обратных задач.

Многим известен афоризм: теоретическая (абстрактная, «чистая») математика делает то, что можно, и так, как это нужно, тогда как прикладная – то, что нужно, и так, как можно. Неприятности начинаются тогда, когда в стремлении найти практическое приложение своим результатам в той или иной прикладной области науки теоретики пытаются выдать «что можно» за то, «что нужно» специалистам в этой прикладной области. Развитие противоречий в теории интерпретации геопотенциальных полей, связанных с внедрением в нее

чуждых идей, пришедших из абстрактных разделов математики, происходит по следующей схеме [Балк, 2000].

а) Для практики интерпретации данных гравиразведки (магниторазведки) характерна некая задача A , для решения которой – исходя из приоритета геофизических ценностей над математическими – ранее был разработан (во многом силами самих геофизиков) некий метод B . Пусть не достаточно формализованный, не вполне отвечающий математическим канонам, содержащий элементы эвристики, но вобравший в себя богатый опыт работы с практическим материалом, интуитивные представления геофизиков о реальных интерпретационных возможностях используемого метода в различных физико-геологических условиях и прошедший, кроме того, относительно успешную апробацию на модельных примерах и производственном материале. К подобным методам можно отнести, прежде всего, широко распространенные алгоритмы автоматизированного подбора.

б) В какой-то момент задача A попадает в поле зрения профессиональных математиков. Они легко обнаруживают, что: 1) по ряду формальных признаков (к примеру, типу операторного уравнения и пространства, к которому можно отнести изучаемый объект) задача A принадлежит достаточно общему классу задач, для решения которых математика уже располагает методом B_0 (или даже целым классом методов); 2) предложенный геофизиками метод B не отвечает математическим стандартам; определенные замечания, в частности, вызывают критерии состоятельности метода и оптимальности построенного с его помощью решения (к примеру, отсутствуют условия для обеспечения сходимости последовательности приближенных решений к истинному при стремлении нормы помехи к нулю – эти «альфа и омега» классической теории некорректных обратных задач). Если говорить о методе подбора, до сих пор остающимся основным рабочим инструментом интерпретатора, то в обоснование его несостоятельности приводятся примеры, в которых при соблюдении теоретической единственности ошибка приближенного решения по методу B может оказаться сколь угодно большой, при том что норма помехи в измерениях поля не превышает достаточно малого числа. Хотелось бы сразу обратить внимание читателя на некорректность иллюстрации такого рода примеров, когда метод, разработанный геофизиками, искусственно ставится в невыгодное положение, а строгий математический метод, напротив, в благоприятные, виртуальные условия. В первом случае игнорируются естественные ограничения на геометрические и физические параметры источников поля, что сразу исключило бы сколь угодно большую погрешность решения, во втором – предполагается, что интерпретируемое поле задано в континуальном множестве точек, а норму помехи измерений можно устремить к нулю.

в) За формализацию постановки задачи A и придание ей более строгого вида берется представитель классической школы, владеющий методом B_0 . Изменив

постановку задачи в соответствии со своими профессиональными интересами (а также возможностями известного ему математического аппарата) и действуя по принципу «что можно – как нужно», он предлагает теории интерпретации потенциальных полей вместо задачи A другую, казалось бы, эквивалентную задачу A_0 и тот самый метод B_0 (либо его незначительную модификацию). Интрига заключается в том, что метод B_0 способен, на первый взгляд, дать геофизику много больше, чем метод B . Взять хотя бы декларирование способности обеспечить погрешность решения обратной задачи, не превосходящую сколь угодно малое ε . Впечатляет и заявление о том, что теория регуляризации позволяет решать задачи, которые прежде считались нерешаемыми (перечисляются имена выдающихся математиков). Правда, здесь имеет место определенное лукавство. Во-первых, если о замене задачи A на задачу A_0 говорить как об «эквивалентной», то это слово надо брать в кавычки, поскольку речь идет о двух принципиально различных постановках. Во-вторых, нерешаемые некорректные задачи, о которых говорили классики, так и остаются нерешаемыми по принятым математическим критериям, а в современной теории решения некорректных обратных задач речь идет уже совсем о других задачах, в постановки которых *добавлена априорная информация*, большей частью о гладкости решений. Но главное в другом: для геофизики интерес представляет *противоположная* и более общая связка: «какое качество интерпретации (не обязательно оцениваемой скалярном ε в одной из классических метрик) можно гарантировать при данном объеме совокупных априорных данных G и фиксированной норме помехи?». Именно те методы, которые способны решить эту проблему, и следовало бы, по мнению авторов монографии, считать состоятельными по отношению к геофизической проблематике.

Неудивительно, когда при столь заманчивых обещаниях можно и не заметить, что эквивалентность постановок A_0 и A обратной задачи, которую с такой легкостью установил представитель классической школы некорректных задач, весьма условна, что речь уже идет о другой обратной задаче, у которой с исходной задачей общим является один лишь оператор прямой задачи. В числе прочего произошла подмена целевой установки интерпретации и критерия ее состоятельности. При этом важно не поддаваться заблуждению, считая, что если в идеализированных условиях строгий метод дает наилучшее в некотором смысле решение, то и в отличных от них практических условиях интерпретации качество решения по этому методу хотя и понизится, но останется выше качества решения по другому методу, менее строгому (или несостоятельному) с математической точки зрения.

2) В итоге в теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий в качестве «правильной» и сулящей максимальную практическую отдачу прочно обосновалась постановка A_0 . При этом многие важные особенности исходной задачи A в постановке A_0 попросту «растворились». Так, любая допол-

нительная информация, без которой сходимость обеспечивается, может уже и не присутствовать в постановке A_0 . Как известно, на этапе становления теории некорректно поставленных обратных задач основной упор был сделан на использование всего одного типа априорной информации – условия гладкости решения. Только спустя некоторое время, когда резервы такого рода постановки были практически исчерпаны, стали появляться работы, в которых используются и другие типы ограничений на искомое решение. Однако эти ограничения всегда оставляли место для проявления неустойчивости и, значит, борьбы с ней – иначе пропал бы математический интерес к задаче. Желание видеть в постановке обратной задачи гравиразведки изначальную неустойчивость (возможность появления сколь угодно больших ошибок решения) приводит к тому, что в постановках типа A_0 упорно игнорируются естественные ограничения на физические и геометрические параметры источников поля.

д) Наступает своего рода прозрение. Де-факто, по результатам решения конкретных примеров, прежде всего модельных, приходит осознание того, что обещанные возможности постановки A_0 обратной задачи, которые и сделали ее столь привлекательной, основаны на совершенно необоснованных идеализациях, ущерб от которых невозможно исправить математическими средствами. Оказывается, что негативные последствия неадекватности предпосылок, лежащих в фундаменте постановки A_0 , превосходят достоинства строгих математических построений, выполненных на этом фундаменте, и становится ясно, что все надежды на достижение желаемой точности решения обратной задачи были иллюзорными.

е) Но в теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий под влиянием идей, заложенных в постановку A_0 , уже сложились устойчивые стереотипы мышления, не предполагающие пересмотр основных концептуальных положений. Остается лишь преодолевать проблемы, которые привнесла «эквивалентная» постановка A_0 и которых могло не быть, если бы перед желающими внести свой вклад в прикладную геофизику изначальным образом был поставлен запрет на любое изменение постановки задачи и переформулировку ее целевых установок, а исходная постановка задачи A и метод решения B не были отвергнуты как математически не вполне обоснованные.

1.2. Проявления неадекватности в математической теории интерпретации геопотенциальных полей

В самом общем виде интерпретационный процесс – это преобразование всей известной информации (прежде всего измерений интерпретируемого физического поля), большей частью косвенно (в скрытом виде) содержащей сведения о геометрии, пространственном положении и физических параметрах

(плотности, намагниченности) источников поля, необходимой для решения целевой геологической задачи, к виду, пригодному для решения этой задачи.

Неадекватность физико-математических моделей (в их широком понимании [Страхов, 1993, 1994, 1995]) и теории интерпретации потенциальных полей в целом чрезвычайно многогранна и не ограничивается ошибками выбора модели источников геофизического поля. Если какие-то из проявлений неадекватности, свойственной господствующей теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, лежат на поверхности и никем не оспариваются, то другие не входят в противоречие со сложившимися представлениями и потому не так заметны.

Безусловно, наиболее очевидные признаки неадекватности теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий – это те, которые входят в противоречие с физико-геологической реальностью и фактическими условиями проведения геофизической съемки. По классификации В.Н. Страхова [2000, 2001] к ним следует отнести:

- 1) идеализацию плоского (двухмерного) поля;
- 2) идеализацию плоской бесконечной границы земля-воздух (игнорирование факта сферичности Земли при решении региональных задач);
- 3) идеализацию задания значений некоторого элемента поля на всей плоской границе земля-воздух;
- 4) идеализацию континуального задания некоторого элемента поля в односвязной области плоской границы земля-воздух;
- 5) идеализацию задания значений некоторого элемента поля в бесконечной совокупности изолированных точек на плоской границе раздела земля-воздух;
- 6) идеализацию точного задания значений некоторого элемента поля;
- 7) идеализацию задания точного значения нормы помехи в измерениях поля.

Разумеется, в каждой конкретной постановке обратной задачи могут присутствовать лишь отдельные из названных идеализаций. Некоторые из них попросту несовместимы друг с другом. К примеру, предположения 4) и 5), или же 6) и 7).

Мы бы добавили к этим очевидным признакам неадекватности еще и предположение о стремлении нормы помех измерений к нулю, на котором базируется теория решения некорректно поставленных обратных задач. Особо отметим названную В.Н. Страховым посылку о точно известном значении нормы суммарных помех инструментального и геологического характера. В настоящее время точность полевых измерений силы тяжести компьютеризированными гравиметрами составляет порядка 10–20 мкГал, что существенно ниже погрешностей, обусловленных существующими процедурами редуцирования поля (в частности – учетом влияния рельефа местности) и тем более

– влиянием приповерхностных геоплотностных неоднородностей, обладающих неизвестными параметрами.

В гравиразведке и магниторазведке помеха «многолика», статична и принципиально неустранима. Если погрешность гравиметрической съемки еще можно оценить по результатам контрольных измерений и наблюдениям на интерполяционных профилях, то влияние помех геологического происхождения (например, связанных с изменением мощности и плотности рыхлых отложений) охарактеризовать крайне затруднительно. Как известно, детально изучить пространственные изменения плотности горных пород в их естественном залегании весьма сложно (как минимум, необходимо наличие достаточно густой сети буровых скважин). С этим обстоятельством связано еще одно проявление неадекватности, характерное для известных постановок и методов решения обратных задач – гипотеза о постоянной плотности возмущающих объектов и горизонтов геологического разреза. Она входит в противоречие с результатами экспериментальных исследований [Блох, 2004; Кобрунов, 2008] и в немалой степени является следствием деления обратных задач гравиразведки (магниторазведки) на линейные и нелинейные, что, в свою очередь, продиктовано характером условно-экстремальных задач для оценки параметров возмущающего объекта.

Понятно, что влияние каждой из форм проявления неадекватности на качество результатов интерпретации различно. С некоторыми из них можно смириться, если их вклад в снижение качества интерпретации пренебрежимо мал по сравнению с негативным влиянием приближенной эквивалентности. Такой компромисс вполне допустим, если в результате удастся существенно снизить вычислительную сложность решаемых задач. Наглядный пример – использование средних значений эффективной плотности возмущающих масс при решении обратных задач гравиразведки рудного типа. В определенных случаях на нарушение адекватности модельных представлений приходится идти под давлением неразрешимых противоречий. Так, в силу дискретного характера измерений гравитационного поля информационно обеспеченными могут быть лишь конечнопараметрические модели источников поля, тогда как природные геологические объекты следовало бы, строго говоря, описывать с помощью элементов бесконечномерных функциональных пространств. Наконец, использование на практике заведомо неадекватных моделей часто имеет банальное объяснение и связано с ограниченными ресурсами вычислительных систем (хотя с течением времени на эту причину будет все труднее ссылаться) и отсутствием необходимого программного обеспечения (не все известные алгоритмы решения обратных задач программно реализованы применительно к трехмерным моделям источников поля).

Следует выделить еще один тип проявления неадекватности, на которую идут осознанно и которая зачастую оказывается полезной. Эта неадекват-

ность напрямую связана с проблемой параметрической размерности модели источников поля, которая обусловлена противоречиями между стремлением к более детальному описанию особенностей строения изучаемой геологической среды и сдерживающей его практической эквивалентностью. При разумной параметризации модели, предусматривающей введение поправок за ее неадекватность исследуемому геологическому объекту, заведомое упрощение модели источников поля может быть не только оправданным, но и эффективным [Балк, 2013₁]. При малом числе оцениваемых параметров гораздо легче удержать формально допустимые решения обратной задачи, отвечающие априорной информации, в рамках множества геологически содержательных распределений масс. Эффект от удачной параметризации модели источников поля может превзойти эффект от введения в постановку задачи дополнительного объема априорной информации. К такому выводу трудно прийти сторонникам классического подхода к обратным задачам, так как при использовании более грубых моделей возмущающих тел нельзя обеспечить сходимость последовательности приближенных решений к точному.

Однако есть еще один, наиболее скрытный, но не менее важный аспект неадекватности, который остается незамеченным специалистами в области математической геофизики. Речь идет о неадекватности многих определяющих положений методологии современной теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий практическим целям интерпретационного процесса. Некоторые из этих положений, как уже отмечалось, были заимствованы теорией интерпретации потенциальных полей из математических дисциплин. Во избежание недоразумений определимся, что впредь под методологией геофизического метода исследований мы будем понимать «совокупность общих принципов, обеспечивающих эффективное получение достоверной и полезной геофизической информации, необходимой для решения поставленных или могущих быть поставленными геологических задач» [Светов, Бердичевский, 1996].

Причина возникновения такого рода проявлений неадекватности – им посвящен следующий раздел главы – во многом есть результат противоборства математических и геофизических интересов различных групп исследователей, участвовавших в становлении этой методологии. В этой связи резонно задаться вопросом, в какой мере прикладная геофизика может опираться на идеи, методы и критерии из математических дисциплин, и прежде всего из теории решения некорректно поставленных обратных задач. Если не считать работы авторов монографии, то в этом направлении нам известны лишь несколько публикаций В.Н. Страхова (к примеру, [Страхов, 2001]), в которых обсуждалась неадекватность классической теории некорректных задач. Речь в них шла об отрыве от геофизической практики континуальных постановок проблем единственности, существования и устойчивости решения обратных задач.

Поднимался также вопрос о необходимости решать проблему регуляризации обратной задачи сразу в конечномерной постановке, не прибегая предварительно к формулировке этой проблемы в бесконечномерном пространстве.

Как выяснилось, это лишь «вершина айсберга» противоречий в методологии теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий [Балк, 2014]. Мы рискуем предположить, что такого рода неадекватность в теории интерпретации потенциальных полей имеет даже более широкое распространение, чем неадекватность, связанная с особенностями природы изучаемых геологических объектов и особенностями геофизической съемки. Размежевание математического и геофизического подходов к обратным задачам гравиразведки и магниторазведки начинается уже на уровне отдельных концепций методологического характера и даже самого ключевого понятия результата математической интерпретации данных гравиразведки и магниторазведки [Балк, 1980₁]. Некоторые из противоречий, присущих теории интерпретации потенциальных полей, обусловлены стереотипами мышления, среди которых немало явных заблуждений. В работе [Балк, 2000] высказано предположение, что многие из них порождены виртуальными перспективами, которые сулит классический подход к обратным задачам.

Сформированный под влиянием многочисленных факторов, большей частью не доступных нашим оценкам, природный объект вовсе не обязан отвечать неким экстремальным признакам, которые были бы удобны для математического аппарата, выбранного в качестве рабочего инструмента для изучения этого объекта. Стремление подогнать постановку задачи под готовые математические разработки (тогда как необходимо обратное) – яркий и, к сожалению, весьма типичный пример проявления неадекватности в теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий.

1.3. Семь спорных положений в теории решения обратных задач гравиразведки и магниторазведки

Проблеме разрушения стереотипов, препятствующих построению теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, полностью адекватной геофизической практике, большое значение на рубеже XX–XXI веков придавал В.Н. Страхов. Вот ссылки лишь на некоторые публикации, посвященные этой теме [Страхов, 2000_{2,3}, 2001]. Неудивительно, что стереотипы, на которые обратил внимание В.Н. Страхов, коррелируются с признаками неадекватности теории интерпретации потенциальных полей, которые он же и отмечал, в частности, в работах [Страхов, 2000₁, 2001]. Что касается заблуждений, на которых мы заострим внимание читателя в данном разделе главы и которые в целом обусловлены противоречиями между профессиональными интересами

математиков и практическими потребностями геофизики, то они, насколько нам известно, другими авторами не обсуждались.

Мы остановимся также на некоторых спорных положениях существующей методологии интерпретации потенциальных полей, которые не подвергались критике со стороны В.Н. Страхова и планировались им для включения в обновленную методологию теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий [Страхов, 2000₄].

Авторы монографии предвидят вполне резонный вопрос читателя: как так, вообще, могло случиться, что в теорию интерпретации геопотенциальных полей закралось столько противоречий? Отвечая на него, подчеркнем сразу, что большинство из этих противоречий ни в коей мере не являются результатом грубых просчетов исследователей, участвовавших в создании методологии существующей теории интерпретации, и вполне согласуется с теми незыблемыми постулатами, которые заложены в основу этой методологии. Поясним это.

Представим (условно) теорию интерпретации гравитационных и магнитных аномалий как некую «замкнутую» науку со своей аксиоматикой, в которой одно из положений гласит: «Результат математической интерпретации может быть описан исключительно в терминах единичного приближенного решения обратной задачи, наделенного определенным признаком оптимальности». Но, как удалось выяснить, существуют значительно более эффективные математические формы представления результатов интерпретации, без которых, на наш взгляд, невозможно решить проблему наиболее полного извлечения информации из геофизических данных. И вот уже (взгляд извне) с позиций новых математических форм представления результатов интерпретации отдельные положения теории, которые не могли вызвать критического отношения в рамках общепринятых форм, теперь выглядят как противоречивые.

Чтобы сразу стало ясно, сколь весомы эти противоречия, приведем, а чуть позже и обоснуем несколько позиций. Так, можно утверждать, что по многим аспектам не выдерживает критики принцип оптимальности, если речь идет об отдельном допустимом решении обратной задачи, которое является наилучшим по скалярному критерию сравнения альтернативных вариантов интерпретации. Исходя уже из недостатков концепции оптимального решения обратной задачи можно утверждать, что *идея критериальности* (как одной из пяти метообразующих идей фундаментального характера [Страхов, 2000₄]) отводится необоснованно высокая роль. Еще одна из этих пяти идей – *идея согласования множества допустимых решений* путем усреднения, результатом которого, опять же, является единичное допустимое решение – так же является, на наш взгляд, продуктом сложившихся стереотипов и не оправдывает себя в той мере, в какой это было задумано.

Мы выделили в этой главе семь положений, которые, на наш взгляд, определили облик существующей теории интерпретации потенциальных полей

и которые носят характер *заблуждений*. Надо сказать, что в геофизических публикациях эти стереотипные положения не всегда четко сформулированы. Однако обсуждаемые в них постановки обратных задач, используемые критерии состоятельности методов решения этих задач и выводы, которые сделаны по результатам интерпретации, выполненной с помощью этих методов, однозначно свидетельствуют о существовании таких заблуждений и их широком распространении среди геофизиков.

Разрушение стереотипов не может происходить безболезненно, оно неминуемо заденет авторские амбиции и профессиональные интересы определенной части активно работающих теоретиков, требуя от них снижения оценки значимости своих результатов, готовности, по выражению В.Н. Страхова, «сдать какие-то из них в архив». Выбирая наиболее эффективные формы полемики с читателями, придерживающимися противоположных нам взглядов, мы исходили из того, что многие наши доводы, в особенности сильно противоречащие сложившимся стереотипам, могут быть с ходу отвергнуты нашими оппонентами по известному принципу «этого не может быть, потому что этого не может быть никогда».

Принимая это во внимание, мы используем «многослойную» систему доводов, включающую критический анализ спорных положений, доказательную аргументацию наших контрпредложений, а также простые и доходчивые примеры. Там, где выводы, сделанные на основании численных расчетов, могут, на наш взгляд, показаться читателю особо удивительными, мы предоставляем полный набор исходных данных, которые позволят любому желающему перепроверить эти доводы. Некоторые противоречия существующей теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, которые мы рассмотрим в этой главе, обусловлены одними и теми же причинами, и потому некоторые наши доводы, встречающиеся в различных разделах главы, могут частично пересекаться.

Исходя из потребностей аддитивных технологий интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, изложение которых составляет основную цель монографии и которые предъявляют более жесткие, чем обычно, требования к процедурам поиска отдельных допустимых решений обратных задач, нам придется адресовать существующей теории также некоторые критические замечания, которые не имеют прямого отношения к традиционным подходам к решению обратных задач. И, наконец, последнее.

Чтобы наши замечания по поводу противоречий, присущих существующей теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, не показались читателю изначально необоснованными (в силу кажущейся их неразрешимости), мы будем вынуждены уже в этой главе дать краткую характеристику тех альтернативных идей и подходов, детальное изложение которых составляет содержание последующих глав монографии.

1.3.1. Первое положение

Признак состоятельности методов количественной интерпретации геопотенциальных полей может быть заимствован у классической теории решения некорректных обратных задач.

В практических условиях интерпретации гравитационных и магнитных аномалий устранить противоречие между фактом объективного существования множества Q допустимых решений обратной задачи, каждое из которых может оказаться истинным (либо наиболее близким к нему), и стремлением свести интерпретационный процесс к поиску одного, оптимального приближенного решения, которое обладало бы заранее заданной точностью, невозможно. Однако это противоречие можно обойти, если вырвать проблему из геофизических реалий и поместить ее в область гипотетических рассуждений. По сути, так советуют поступать специалисты, придерживающиеся концепции построения математической теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий на базе математической теории решения некорректных обратных задач. Убеждение в том, что состоятельный метод решения обратной задачи должен обеспечивать сходимость последовательности приближенных решений к точному при стремлении нормы помехи в измерениях к нулю, является «краеугольным камнем» классической теории решения некорректных обратных задач, вписываясь в общие представления математиков об «изящности» и законченности научного результата.

Мы можем лишь допустить, что формирование обсуждаемого стереотипа у специалистов, занятых в области геофизики, происходило не без психологического давления, которое на них оказывал авторитет выдающихся математиков, стоящих у истоков классической теории некорректно поставленных задач [Тихонов, 1943; Лаврентьев, 1962; Иванов, 1962]. К тому же, не стоит забывать, что в становлении теории некорректно поставленных задач заметную роль сыграла геофизическая проблематика. Во всяком случае, одно из первых практических приложений методы этой теории получили как раз в геофизике [Страхов, 1967_{1,2,3}; Гласко, 1972; Старостенко, 1974, 1978; Тихонов, Гласко, 1975; Старостенко, Заворотько, 1976]. Почти сразу здесь наметился тесный союз математиков и геофизиков [Тихонов и др., 1968; Мудрецова и др., 1974]. Можно предположить, что изначально сложившиеся тесные связи между двумя научными направлениями не позволили геофизикам заметить очевидную вещь – классическая теория некорректных задач, возникшая как абстрактная математическая дисциплина для решения в функциональных пространствах операторных уравнений с неточно заданными правой частью и, возможно, самим оператором, не адекватна реалиям геофизической практики и целям интерпретации. Впрочем, успешный союз специалистов, придерживающихся

ся разных критериев ценности научного результата, можно объяснить и таким образом: геофизики попросту «пропускали через себя» математическое обоснование методов, особо не акцентируя внимание на признаках неадекватности, и оставляя для своих нужд лишь вычислительные конструкции, позволяющие при слабой априорной информации получать в отдельных случаях вполне приемлемые результаты интерпретации.

Ситуация, когда при любом разумном ужесточении допущений о свойствах помех точность решения обратной задачи все равно будет ограничена, не устраивает сторонников классической теории некорректных обратных задач; для них возможность получения результата с заранее заданной точностью (пусть это выполняется не в реальности, а только на бумаге) является определяющей. Теория решения некорректных обратных задач нашла выход из положения – довольно странный с позиций прикладных наук, но вполне в духе формальных математических теорий. Если говорить в терминах геофизической проблематики, то состоятельность метода решения обратной задачи она предлагает оценивать не по фактическому качеству результатов интерпретации, которое достигается при имеющемся объеме данных, а в *сослагательном наклонении* – по тому, какими результаты могли бы быть в виртуальных условиях. Неудивительно, что (вытекающая из сходимости последовательности приближенных решений к точному) возможность обойти многие острые углы и одновременно избавиться от большинства неудобных вопросов и нерешенных проблем оказалась весьма привлекательной и породила обсуждаемый стереотип. В числе этих проблем – отсутствие монотонной зависимости фактической точности приближенного решения обратной задачи от объема априорной информации, а также трудности формализации некоторой части априорной информации, без которой сходимость будет и так обеспечена.

Но характерный признак алгоритма «сходимость полученного решения» – это ведь некая условность, виртуальность; реализовать указанную сходимость в виде конкретной последовательности приближенных решений, сходящихся к точному, невозможно. Сходимости построенного решения (к чему бы то ни было!) не может быть уже потому, что оно всего одно и статично. В действительности речь идет о последовательности *несуществующих* решений, за которыми не стоят реальные измерения. Такие виртуальные решения отвечают определенным значениям нормы помех, которые (гипотетически) могли бы отягощать измерения поля (что автоматически предусматривает многократное выполнение измерений с различным уровнем помех). Предполагается, что значения этих норм выстроены в убывающую последовательность, сходящуюся к нулю (безусловно, сделать на бумаге это можно всегда). При таком подходе к проблеме нет даже возможности ввести в рассмотрение фиксированное множество допустимых решений Q обратной задачи, поскольку меняются априорные предпосылки (норма помехи); есть

лишь (широкое) функциональное пространство (по сути модельный класс M источников поля), из которого будет выбрано приближенное решение S^* . Если взять наиболее распространенный метод решения некорректных обратных задач – метод регуляризации, то априорные ограничения здесь, строго говоря, заключены в функционале гладкости искомого решения. Причем всегда возникает проблема выбора параметра регуляризации, а степень гладкости решения заранее не задается – насколько оно будет гладким, устанавливается лишь *апостериори*. Если вдуматься, то это довольно странный прием задания априорных ограничений, когда в количественном выражении они нам, по сути, навязываются.

Сходимость этой умозрительной последовательности, где все элементы, кроме одного (того, что отвечает фактической норме помехи в измерениях), являются виртуальными, и выдается за сходимость построенного приближенного решения. Необходимые условия, обеспечивающие сходимость в функциональных пространствах, оторваны от геофизической практики не только по причине невозможности обеспечить динамику поведения помехи, но и потому, что измерения геопотенциальных полей можно выполнить лишь в дискретном множестве точек. Сходимость – это иллюзия возможности обеспечить на практике заданную точность решения обратной задачи. Несколько переиначив известный афоризм Дж. Тьюки, сказанный им в отношении оптимальности, можно сказать, что сходимость становится опасной, если ее принимать слишком всерьез. Если алгоритм решения не оправдал ожиданий при решении конкретной задачи, то какими бы замечательными побочными свойствами он ни обладал, и как бы мы ни уверяли интерпретатора в том, что, будь условия задачи другими, все было бы прекрасно, для интерпретатора это является слабым утешением. Состоятельность метода нельзя оценивать в сослагательном наклонении. Вместе с тем, никто не будет оспаривать, что сослагательное наклонение и сопутствующая ему идеализация входных данных вполне уместны при решении гносеологических проблем принципиальной познаваемости реальной действительности по ее косвенным проявлениям.

Роль, которую может сыграть та или иная математическая дисциплина в геофизике, зависит от того, что перевесит – ее безукоризненная строгость или издержки от ее неадекватности реалиям. Если отбросить весь тот антураж (сходимость и прочее), который обрамляет сам способ построения регуляризованного решения обратной задачи, и оценивать теорию регуляризации в сугубо прикладном аспекте, то в «сухом остатке» от нее остается метод построения допустимого решения обратной задачи при специфической информации об особенностях решения, использующий конструкцию штрафного слагаемого в структуре минимизируемого функционала. Получается, что вся эта гигантская надстройка, призванная обосновать виртуальные возможности метода, не имеет на практике большого значения.

Продолжим анализ различных аспектов теории решения некорректно поставленных обратных задач с точки зрения их соответствия реалиям геофизической практики. Начнем с очевидного: в общем случае свойства метода не наследуются со сменой условий, в которых они имели место. Нет гарантии, что сходящийся алгоритм обеспечит наилучшие (или хотя бы просто приемлемые) результаты в реальных условиях интерпретации. Нет гарантии и того, что в конкретных условиях интерпретации алгоритм, обеспечивающий теоретическую сходимость, превзойдет по точности решения метод, который попросту игнорирует вопросы сходимости. Вокруг вопроса о сходимости конфликт математических и геофизических интересов налицо.

Для практики важно, какую полезную информацию можно с помощью предлагаемого метода извлечь из *имеющихся* данных, и совершенно безразличны любые отвлеченные рассуждения о возможностях этого метода в каких-то иных условиях. Предлагаем читателю убедиться, как заметно могут различаться взгляды математика и геофизика на проблемы, сопутствующие интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. С этой целью сошлемся на две работы. Согласно [Васин, Агеев, 1993], «вопрос использования дополнительной априорной информации для повышения точности приближенного решения корректно поставленной задачи не является принципиальным». По мнению авторов работы [Васин и др., 2003], «при совпадении носителей масс, создающих гравитационное и магнитное поля, можно ограничиться интерпретацией лишь одного из этих полей».

При формальном математическом подходе качество приближенного решения при определенном значении нормы помехи в данных измерений не играет роли – важно, что происходит в бесконечно малой окрестности нулевого значения нормы помехи. Дополнительные объемы априорной информации, на которые прикладная наука геофизика делает главную ставку, но без которых сходимость можно обеспечить, вправе быть расценены приверженцами классического направления в теории обратных задач как избыточные, приводящие к переопределенной постановке обратной задачи, что в математике не приветствуется.

Пример 1.1. Поясним суть противоречий. Пусть для решения обратной задачи гравиразведки рудного типа, где измеренные значения $\Delta \tilde{g}_i$ аномалии Δg обусловлены геологическим телом \hat{S} , удалось подобрать два конкурирующих метода A_1 и A_2 . Для метода A_1 , который мы ассоциируем с одним из методов классической теории решения некорректно поставленных обратных задач, создадим идеализированные условия, когда измерения выполнены в континуальном множестве точек и есть возможность управлять нормой помехи, позволяя добиться сколь угодно малой погрешности $\rho(S_1^*, \hat{S})$ решения S_1^* . Для большей контрастности пойдём дальше навстречу методу A_1 и согласимся со строгой монотонной зависимостью фактической точности решения от нормы

помехи (рис. 1.1). Методу A_2 , которым может быть один из методов подбора, мы, напротив, не станем искусственно улучшать условия его применения: как в реальной геофизической практике, ему придется решать обратную задачу по конечному числу m измерений $\Delta\tilde{g}_i$. Если мысленно провести эксперимент, в котором методу A_2 приходится решать не одну, а последовательность обратных задач, в каждой последующей из которых норма помехи в измерениях меньше, чем в предыдущей, и с ростом номера задачи эта норма стремится к нулю, то ошибка $\rho(S_2^*, \hat{S})$ решения S_2^* (в отличие от метода A_1), предположим, не становится сколь угодно малой и стремится к некоторому ρ_0 (см. рис. 1.1). Это, в частности, произойдет тогда, когда в силу дискретности измерений $\Delta\tilde{g}_i$ методу A_2 придется искать решение S_2^* в конечнопараметрическом модельном классе M , которому истинное решение \hat{S} не принадлежит, и ρ_0 есть расстояние между \hat{S} и классом M .

А теперь момент истины: значение ε_0 нормы помехи в измерениях поля на практике не известно, но всегда, пусть с «запасом», можно указать содержащий его интервал $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$. Для интерпретатора, которому необходимо выбрать лучший из двух альтернативных методов, безразлично, какой из них имеет преимущество вне интервала $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$. Рис. 1.1 воспроизводит вполне ожидаемую ситуацию, когда в интересующем интервале $[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ нормы помехи метод

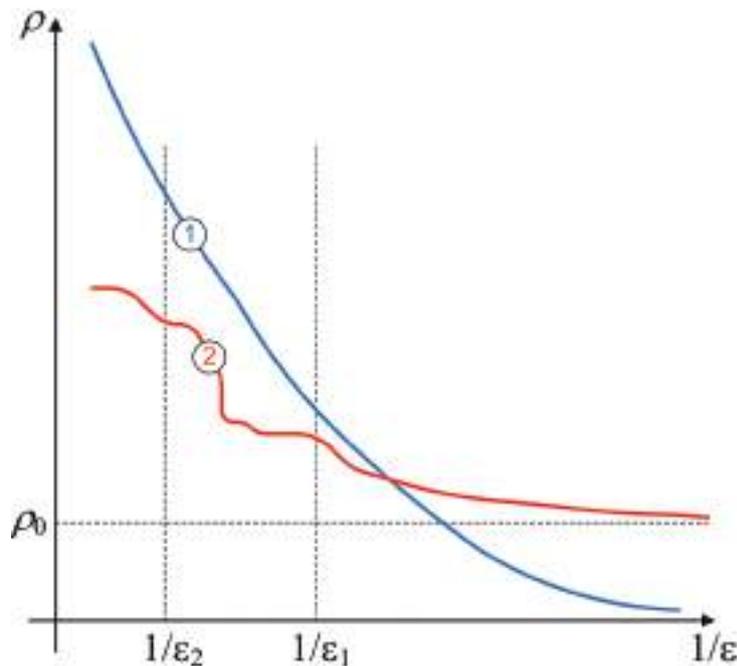


Рис. 1.1. Зависимости погрешности решения обратной задачи от уровня помех: 1 – по методу A_1 ; 2 – по методу A_2 .

A_1 , обеспечивающий сходимость, уступает по точности методу A_2 . Тем более, если представить, что метод A_1 выбрал для достижения сходимости какое-то одно необходимое ограничение, например, условие гладкости, тогда как метод A_2 привлек все имеющиеся возможности для сужения множества допустимых решений обратной задачи.

Тема обсуждения вопроса о сходимости этим не исчерпывается. Сходимость тесно связана с корректностью обратной задачи, которая, в свою очередь, базируется на «трех китах»: *существовании, единственности и устойчивости* решения. Попробуем разобраться, в какой мере эти три свойства являются определяющими при решении практических задач.

Начнем со свойства *существования* решения обратной задачи. В том случае, когда измерения выполнены в конечном числе точек, вопрос существования решения, в точности отвечающего наблюдаемому полю, это всего лишь вопрос выбора соответствующей параметрической размерности модели источников. Впрочем, модельное распределение источников, порождающих поле, которое в точности отвечает наблюдаемому полю и, значит, «тянется» за помехами измерений, не представляет интереса; никакого эффекта сглаживания помех при этом не происходит.

Возьмем теперь свойство *устойчивости*. Главный мотив для придания свойству устойчивости статуса неотъемлемого и определяющего свойства любого состоятельного метода решения обратной задачи в монографии [Тихонов, Арсенин, 1979, с. 16] сформулирован в виде вопроса: «В самом деле, какую физическую интерпретацию может иметь решение задачи, если сколь угодно малым возмущениям исходных данных могут соответствовать большие изменения решения?». Мы полагаем, что к обратным задачам гравиразведки и магниторазведки указанная ситуация попросту не имеет отношения. Чтобы это понять, достаточно вновь вспомнить о естественных ограничениях на физические и геометрические параметры источников поля, которые автоматически присутствуют в любой практической задаче интерпретации геофизических данных и введение которых в постановку обратной задачи не снижает степень ее общности.

Хотя в дополнение к прочей априорной информации, обычно присутствующей в постановках обратных задач, эти ограничения, как правило, не привносят того, что могло бы кардинально повысить качество интерпретации, в методологическом плане их значение неопределимо. Благодаря естественным ограничениям, область поиска приближенного решения сужается до компактного множества. Главный устрашающий довод классической теории некорректных задач – возможность получения сколь угодно большой ошибки решения при малой помехе – в геофизической практике попросту теряет свою актуальность за отсутствием подобной ситуации. С точки зрения геофизических приложений свойство устойчивости, тесно связанное с идеализацией и погрешением

в виртуальный мир, является, на наш взгляд, не самым удачным показателем состоятельности метода решения обратной задачи. В практике интерпретации много важнее, если метод обладает свойством максимального (насколько позволяет априорная информация) извлечения надежной информации об объекте исследования. И эти два качества слабо коррелируются друг с другом.

Обратимся, наконец, к свойству *однозначности* решения обратных задач. Теоретическая неоднозначность – вот тот единственный барьер на пути (пусть виртуального) построения приближенных решений обратной задачи с заданной точностью, который никакими математическими приемами не преодолеть. Механизм регуляризации обратных задач к настоящему времени отработан достаточно хорошо, выявлены широкие классы некорректно поставленных задач, обладающих свойством регуляризуемости. И часто проблема построения математически состоятельного метода решения некорректной обратной задачи сводится в основном к решению проблемы единственности. Безусловно, никто не станет оспаривать, что при прочих равных условиях модельные классы источников поля с единственностью более предпочтительны, чем те, в которых эта единственность отсутствует. Однако, по нашему мнению, в геофизической литературе единственности придается необоснованно завышенное значение.

По сути настойчиво навязывается мнение, что единственность решения теоретической обратной задачи в выбранном модельном классе есть чуть ли не главный гарант качества интерпретации. Если ознакомиться с публикациями, в которых предлагаются новые методы решения обратных задач, то легко отметить, что обсуждение в них обычно начинается с вопроса о том, имеет ли место теоретическая единственность решения. Кстати, в случае методов подбора возникает еще один аспект неоднозначности – единственность приближенного решения, отвечающего минимуму критерия оптимальности. Этот аспект проблемы единственности, не имеющий никакого отношения к качеству интерпретации, хотя и редко, но все же поднимается в геофизических публикациях.

Казалось бы, иного не дано, как рассматривать проблему единственности по отношению к выбранному модельному классу источников поля. Мы считаем, что это не совсем так. Масштабы проявления неоднозначности в самом модельном классе M не играют особой роли; значение имеет лишь степень проявления неоднозначности в рамках множества $Q \subset M$ допустимых решений обратной задачи. И здесь важно, что благодаря все тем же естественным ограничениям на значения физического параметра (плотности, намагниченности) и размеры геологических тел множество Q ограничено. Фактор неоднозначности нельзя рассматривать вне контекста особенностей конкретной постановки. Все определяется мощностью множества Q допустимых решений, в структуре которого «переплелись» влияния строгой и приближенной

эквивалентности и нет особого смысла противопоставлять одну другой. Вообще говоря, безразлично, создают любые два решения из Q точно совпадающие между собой поля, либо поля, различающиеся между собой в пределах ошибки измерения – в том и другом случае они являются альтернативными. Строгую неоднозначность можно рассматривать как крайнее проявление ε -эквивалентности. Априорная информация G может быть такова, что мощность множества $Q_0 \subset Q$ решений, создающих одно и то же поле, мала настолько, что урон, нанесенный строгой эквивалентностью, не превзойдет тот, который наносит неадекватность используемой модели источников поля. Поясним это.

Пример 1.2. Гравитационный потенциал \hat{U} создается неоднородным шаром \hat{S} массы \hat{m} единичного радиуса, центр O которого расположен в известной точке. В сферической системе координат (r, φ, ϑ) с началом O плотность шара (при заданном $p > 0$) подчинена закону $\hat{\delta} = \hat{a} + \hat{b}r^p$ ($\hat{a}, \hat{b} > 0$). В двухпараметрическом модельном классе

$$M = \{\delta = a + br^p : a, b > 0\} \quad (1.1)$$

плотностей обратная задача неоднозначна и неограниченное множество

$$M_1 = \left\{ \delta_a(r) = a + (p+3) \left(\frac{\hat{m}}{4\pi} - \frac{a}{3} \right) r^p, a > 0 \right\} \quad (1.2)$$

– суть однопараметрическое семейство эквивалентных решений теоретической обратной задачи, отвечающих заданному потенциалу \hat{U} . Предположим теперь, что заданы двухсторонние ограничения $\bar{a} \leq \hat{a} \leq \bar{\bar{a}}$. Множество эквивалентных решений M_1 в таком случае сужается до ограниченного множества

$$M_2 = \{\delta_a(r) \in M_1 : \bar{a} \leq a \leq \bar{\bar{a}}\}. \quad (1.3)$$

Если точность решения, взятого из множества M_2 , оценивать (по отношению к паре (\hat{a}, \hat{b})) с помощью функционала

$$\rho = (a - \hat{a})^2 + (b - \hat{b})^2, \quad (1.4)$$

то легко убедиться в справедливости неравенства

$$\rho \leq \left(1 + \frac{(p+3)^2}{9} \right) (\bar{\bar{a}} - \bar{a})^2. \quad (1.5)$$

В альтернативном неадекватном классе M_0 постоянных плотностей $\delta = a -$ классе со свойством единственности – решение обратной задачи

$$a = \hat{a} + \frac{3}{p+3} \hat{b} \quad (1.6)$$

имеет погрешность

$$\rho = \left(\frac{9}{(p+3)^2} + 1 \right) \widehat{b}^2. \quad (1.7)$$

Сопоставляя (1.6) и (1.7) находим, что при выполнении условия

$$\overline{\overline{a}} - \overline{a} \leq \frac{3}{p+3} \widehat{b} \quad (1.8)$$

любое эквивалентное решение из модельного класса M_2 , где нет единственности, превзойдет по точности (1.4) решение обратной задачи, взятое из класса M_0 со свойством единственности. Вывод: неоднозначность теоретической обратной задачи не всегда является наибольшим злом среди остальных факторов неопределенности.

Обсудим еще один аспект проблемы единственности теоретической обратной задачи. Основное назначение единственности состоит в создании предпосылок для обеспечения сходимости последовательности приближенных решений обратной задачи к точному при стремлении нормы помехи к нулю. Но поскольку такая сходимость в практике интерпретации не реализуема, то получается, что теоремы единственности обслуживают не реализуемое (виртуальное) свойство, которое не только создает иллюзию благополучия, но и отвлекает внимание от действительно насущных проблем интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Если удалось добиться приемлемого качества интерпретации (сейчас не важно, как это будет установлено), то, в принципе, не столь важно, имела место или нет теоретическая единственность обратной задачи. Проблема единственности решения обратной задачи в выбранном модельном классе возникает тогда, когда необходимого качества интерпретации не удалось достичь и встает вопрос о том, не внесла ли в это весомую лепту теоретическая неоднозначность.

Коль скоро мы взяли на себя ответственность заявить о неадекватности классической теории некорректно поставленных задач реальным геофизической практики, есть смысл дальше развить тему единственности, занимающую в этой теории центральное место. Согласно существующим представлениям, первые теоретические результаты по проблеме единственности (теоремы о телах нулевого внешнего потенциала) восходят к исследованиям итальянских математиков П. Пицетти и Дж. Лауричелли [Pizetti, 1909; Lauricella, 1911]. В статье С.М. Оганесяна и В.И. Старостенко [1985] результаты, опубликованные в этих работах, были встроены в современные разработки по единственности решения линейной обратной задачи гравиметрии. К сожалению, приходится констатировать неадекватность большинства теоретических результатов по проблематике единственности реальным геофизической практики. Суть в том, что многие теоремы единственности, на которые принято ссылаться при ре-

шении обратных задач гравиразведки (к примеру, [Новиков, 1938; Раппопорт, 1940; Сретенский, 1954; Прилепко, 1970; Остромогильский, 1970]), доказаны для *функциональных* пространств при условии задания поля на достаточно мощных *континуальных* множествах. Эти теоремы не переносятся автоматически на случай дискретного задания поля – в последнем случае обратные задачи будут заведомо неоднозначны (обратное отображение конечномерного пространства на несчетное функциональное). Встречая ссылки на такого рода теоремы в работах по созданию устойчивых методов интерпретации данных гравиразведки (или магниторазведки) в практических условиях задания поля в конечном множестве точек, трудно удержаться, чтобы не спросить автора: а какое, собственно, отношение имеют такого рода теоремы к рассматриваемой постановке обратной задачи?

Если же взять конечнопараметрические модельные классы источников поля, то здесь идея параметризации реализуется обычно как выбор наиболее подходящего класса $M^{(k)}$ из последовательности вложенных множеств $M^{(1)} \subset M^{(2)} \subset \dots$, каждое следующее из которых принадлежит пространству, размерность которого выше размерности предшествующего. Характер проявления неоднозначности решения обратных задач гравиразведки и магниторазведки в параметрических классах источников аномалии наглядно иллюстрирует философский закон перехода количества в качество – параметрической размерности модели в неоднозначность. Это происходит, как только число свободных параметров модели преодолевает некое пороговое значение. Так, в классе параллелепипедов полиномиальной плотности δ неоднозначность линейной обратной задачи наступает, как только степень полинома δ становится равной десяти [Балк, 1986]. Достаточно глубокое исследование проблемы единственности решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии были выполнены В.Н. Страховым и М.А. Бродским [1982, 1983]. При этом был построен пример неоднозначности – «аннигилятор масс» Бродского – Страхова, представляющий собой кусочно постоянное распределение масс по совокупности треугольных областей, объединение которых образует невыпуклый шестиугольник – «звезду Давида» [Бродский, Страхов, 1983]. Внешний потенциал «аннигилятора» всюду равен нулю. Другой пример той же направленности, который был построен В.Н. Страховым, – эквивалентность по внешнему полю масс постоянной плотности, заключенных в области, ограниченной бесконечной границей в виде конхоиды Слюза и точечной массы. Этим примером был «переброшен мостик» между вопросами единственности в двух различных постановках обратной задачи – структурной и рудной.

Внедрение в математическую теорию интерпретации потенциальных полей идей и методов науки об искусственном интеллекте всегда считалось одним из наиболее актуальных направлений ее развития. Среди проблем, относящихся к прерогативе искусственного интеллекта, особо выделяется пробле-

ма автоматизации доказательства теорем, которая в представлении многих специалистов из других областей науки ассоциируется с искусственным интеллектом и является своего рода его «визитной карточкой». Математическая теория интерпретации потенциальных полей до сих пор не может похвастать особыми успехами на поприще внедрения в нее идей и методов искусственного интеллекта. Однако еще в работах более чем тридцатилетней давности одним из авторов монографии была продемонстрирована возможность автоматизации решения некоторых теоретических проблем, возникающих при изучении аналитических свойств параметрических модельных классов источников поля. К ним относятся, в частности, проблема вывода строгих аналитических формул решения прямой задачи для многопараметрических распределений плотности возмущающих масс, а также проблема доказательства теорем единственности и поиска примеров неоднозначности решения обратной задачи. Как было показано, изучение этих проблем требует выхода за рамки привычных исследовательских приемов, нуждается в частичной автоматизации и может рассматриваться с позиций искусственного интеллекта как задача построения человеко-машинных систем поиска строгих утверждений, использующих доказательные вычисления на компьютерах (в ту пору – ЭВМ).

В человеко-машинных технологиях решения первой из названных выше проблем на долю исследователя приходился поиск аналитических формул решения (базовых) однократных интегралов (подготовительный этап), тогда как роль компьютера заключалась в обработке графа вычисления многомерного интеграла, включая приведение «промежуточных интегралов» к линейной комбинации базовых интегралов и преобразование окончательной формулы к максимально компактному виду. Опыт решения этой проблемы, включая подготовительный этап, представлен, в том числе, в работах [Балк, 1973, 1974, 1975₁, 1979₃, 1986; Балк и др., 1976_{1,2}; Балк, Балк Т., 1986_{1,2}]. В основу компьютерных технологий изучения проблемы единственности в классе многопараметрических моделей источников поля были положены точные аналитические формулы решения прямой задачи (первая из двух названных проблем, рассмотренных на предмет автоматизации), а также известная теорема, согласно которой массы, не создающие внешнего поля, имеют нулевые гармонические моменты. Во всех случаях решение проблемы сводилось непосредственно к точному решению систем линейных уравнений высокого порядка в целочисленной арифметике. В первом случае (использование аналитических выражений производных гравитационного потенциала) теорема могла быть доказана для постановки обратной задачи, где поле задано в *конечном числе* точек его измерения, что с прикладной точки зрения весьма важно. По сути, уже тогда был поставлен вопрос о том, чтобы в технологическую цепочку интерпретации включить теоретический блок анализа постановки решения обратной задачи на предмет ее единственности. Результаты этого направления иссле-

дований были представлены, в том числе, в работах [Балк, 1979_{1, 2, 3}, 1983₂, 1986, 1987₁; Балк, Леонтьева, 1978] и частично реализованы в пакете прикладных программ, который планировался для включения в программное обеспечение советского суперкомпьютера серии «Эльбрус» [Балк, Горнаков, 1982; Балк, 1983₃; Горнаков и др., 1985].

Для своего времени теоремы, представленные в перечисленных выше публикациях, являлись пионерскими работами не только в математической теории интерпретации потенциальных полей, но, пожалуй, в целом в математической геофизике, и по времени шагали вровень с аналогичными исследованиями, проводимыми в физике [Гердт и др., 1980].

По мере совершенствования методов компьютерной алгебры и создания соответствующего специализированного программного продукта исследования, подобного тем, что были выполнены в упомянутых выше работах, перестали быть искусством организации сложных доказательных вычислений и аналитических выкладок с использованием алгоритмических языков (Алгол, Фортран), не предназначенных для этих целей. Появились новые возможности для внедрения методов искусственного интеллекта в математическую теорию интерпретации потенциальных полей.

В.Н. Страхов неоднократно подчеркивал, что неотъемлемой составляющей успеха в создании обновленной теории интерпретации потенциальных полей является объективный анализ значимости предшествующих теоретических разработок и готовность авторов этих разработок сдать в архив результаты собственных исследований, уже переставших быть актуальными. В нашем случае приходится согласиться, что с позиций создания новой теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий значимость компьютерных методов доказательства теорем единственности в узких, но практически важных модельных классах не столь высока, как казалась прежде. Признавая это, мы призываем также пересмотреть значимость для математической теории интерпретации потенциальных полей известных теорем единственности, доказанных для функциональных пространств.

Мы так детально остановились на успехах (пусть и достаточно скромных), достигнутых в вопросах автоматизации решения теоретических проблем теории интерпретации гравитационных аномалий, не забыв отметить еще не востребованные резервы, чтобы показать, что даже в таких вопросах может проявляться неадекватность текущей оценки значимости того или иного теоретического направления исследований, которое в свое время было «модным» и отвечало насущным потребностям математической геофизики тех лет. При этом, подчеркнем еще раз: не подлежит сомнению, что при прочих равных условиях модельные классы со свойством теоретической единственности решения обратной задачи априори предпочтительней тех, которые этим свойством не обладают. Вопрос лишь в недопустимости абсолютизации

этого свойства. Сложившееся представление о единственности как гарантии высокого качества результатов интерпретации необходимо переосмыслить.

Возвращаясь в целом к триаде свойств обратных задач – «существование, устойчивость, единственность», можно сказать следующее. Дихотомическая классификация обратных задач гравиразведки и магниторазведки на «хорошие» и «плохие» по признаку «корректно поставленные» и «некорректно поставленные» носит весьма условный характер, а оценка состоятельности методов решения обратных задач в терминах сходимости не адекватна реалиям и целям геофизической практики. Постановка обратной задачи может не отвечать ни одному из трех условий корректности, но с позиций здравого смысла качество решения этой задачи будет выше качества решения, которое можно ожидать от другой постановки, где все условия корректности соблюдены.

Так, возьмем случай, когда в небольшом числе точек выполнены высокоточные измерения гравитационного поля, созданного телом, весьма близким к однородному шару, с неизвестной геометрией и эффективной плотностью. При этом известен достаточно узкий интервал, которому эта плотность принадлежит. Если эту смешанную обратную задачу решать в пятипараметрическом модельном классе однородных шаров (оцениваются координаты центра шара, его радиус и эффективная плотность), то все три условия корректности нарушены. Тем не менее, с позиций здравого смысла такая обратная задача является «хорошей» и обещает высокую точность оценки всех пяти параметров. Что же касается действительно «плохих» задач, решаемых в условиях соблюдения требований корректности, то, как показывает опыт одних только модельных расчетов, далеко ходить за такими задачами не приходится.

Авторы монографии отдают себе отчет в том, что сколь бы ни были убедительны их доводы в пользу пересмотра роли классической теории решения некорректных обратных задач в теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, дело не сдвинется с места, пока – как принято говорить в подобных случаях – «идеи не овладеют массами» и ведущие специалисты не придут к необходимости переосмысления ряда устоявшихся положений господствующей теории. С точки зрения глобальной проблемы создания адекватной теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий чрезвычайно важно, что отсутствие сколь-нибудь тесной связи между сходимостью приближенных решений с фактической точностью решения обратных задач становится заметной все большему числу геофизиков. Хотя в последние годы поток работ методологического плана по тематике обратных задач гравиразведки и магниторазведки заметно уменьшился, полностью он не иссяк.

Весьма показательной является публикация одного из ведущих специалистов в электроразведке [Светов, 2010]. Мы сочли, что было бы непродуктивно свести обсуждение названной работы к попытке оспорить эффективность подмены проблемы всестороннего изучения (с помощью аппарата решения

экстремальных задач) множества допустимости Q , структура которого вбирает в себя все «частности и оттенки» практических постановок обратных задач, проблемой установления соответствия между математическими моделями систем передачи информации по каналам связи и математическими моделями геофизических исследований. Для нас сейчас много важнее другое. Б.С. Светов формулирует обратную задачу геофизики так: «По наблюдаемому массиву данных, заданному с известной погрешностью, определить искомым массив данных с требуемой точностью». И хотя в аспекте *требуемой* точности такую формулировку с точки зрения практики как раз можно оспорить, в ней ясно сказано, что в математической теории, как в случае обоснования существования решения, так и в случае обоснования единственности решения, в неявном виде подразумевается неограниченный объем наблюдаемых данных, тогда как «в случае дискретных данных вопросы существования и единственности становятся неочевидными». Не так важно и то, что в работе [Светов, 2010] для обоснования следующего утверждения не удалось обойтись «внутренними резервами» детерминистского направления в теории решения обратных задач геофизики и пришлось привлечь теорему А.Н. Колмогорова. Важно, что в работе четко прозвучало: «Интерпретатор по весьма ограниченным наблюдаемым данным получает геофизический разрез гораздо детальнее, чем это допустимо», а это уже (слабо завуалированное) прямое указание на то, что сходимости в практике интерпретации геофизических данных не имеет решающего значения.

Еще более решительны высказывания геофизиков, познавших «вкус» обещаний математических теорий (вспомним «...по наперед заданной точности решения обратной задачи...») и способных объективно их оценить. В этой связи сошлемся еще на одну публикацию методологического плана [Петрищевский, 2014]. В ней высказываются близкие авторам мысли о том, что «значимые в математическом смысле регуляризации решений некорректных обратных задач мало продвигают нас к реальным отображениям сложных геологических сред и новым геологическим результатам», что «математически строгие алгоритмы с оптимизацией, адаптацией, регуляризацией, или раздроблением решений – это лишь средство улучшения результата собственно гравитационного моделирования, но никак не гарантированный способ получения новой объективной геологической информации», что «универсальной схемы интерпретационного процесса не существует, и идея создания принципиально новых компьютерных технологий, направленных на решение любых задач на единой аппроксимационной основе, представляется утопичной».

Если суммировать доводы авторов монографии и других упомянутых выше специалистов, и попытаться охарактеризовать противоречие между «математическим» и «геофизическим» началами, то основной вывод будет состоять в следующем. Безукоризненно построенная математическая те-

ория решения некорректных обратных задач оказалась уязвимой с точки зрения реалий геофизической практики. Главный вывод состоит в том, что теория интерпретации гравитационных и магнитных аномалий не должна отдавать на откуп математикам постановку обратной задачи, в особенности ее целевую установку и критерий состоятельности методов ее решения. Действительность такова, что – мы приводим слова академика С.П. Новикова – «математика стала слишком отдаляться от естественных наук, то есть на самом деле от реальности».

В ответственные моменты, когда встает вопрос о сотрудничестве с математиками для решения сугубо прикладной задачи, не лишне вспомнить об одном высказывании выдающегося математика, академика В.И. Арнольда, который, ни в коей мере не ратуя за примитивизацию науки, приложил немало усилий к тому, чтобы повернуть математику к насущным проблемам реального мира. Вспомнить о его возражении против стремления математики к максимально общему, абстрактному описанию объективной реальности и «замены содержательной науки об устройстве мира жонглированием логическими символами» [Арнольд, 1999]. Неверное толкование математических результатов порождает заблуждения, способствуя тому, что ряд проблем, решение которых позволило бы существенно повысить – в реальности, а не виртуально – качество интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, оказываются отодвинутыми на второй план.

1.3.2. Второе положение

Вектор оценок параметров модели источников поля является безальтернативной математической формой представления результатов количественной интерпретации гравитационных и магнитных аномалий.

Если не брать в расчет аддитивные методы решения обратных задач, предложенные авторами данной монографии сравнительно недавно [Балк, Долгаль, 2016₁, 2018], и методы, реализующие концепцию гарантированного подхода, сформулированную в работах [Балк, 1980_{1,2}], то при всем обилии и многообразии алгоритмов количественного истолкования гравитационных и магнитных аномалий эти алгоритмы связывает один общий признак – представление результатов интерпретации в терминах единичного решения обратной задачи. Поскольку факт существования множества Q допустимых решений обратной задачи, каждое из которых отвечает всей априорной информации (включая данные измерений поля), не отрицается ни одним из известных подходов, то для обоснования выбора какого-то одного из этих решений в качестве итогового результата интерпретации используются разнообразные критерии оптимальности. Ясно, что для интерпретатора, решившего воспользоваться тем

или иным алгоритмом, принципиально важно, чтобы свойство оптимальности не было выражено в каких-то отвлеченных терминах, не имеющих прямого отношения к качеству выбранного решения. Требуется, чтобы свойство оптимальности выводило алгоритм на решение, точность которого не уступала бы точности решения по другому альтернативному принципу выбора наилучшего варианта интерпретации.

В своих представлениях о том, в каких математических терминах может и должен выражаться результат интерпретации данных гравиразведки и магниторазведки, геофизики едины, пожалуй, как ни в чем другом. За редким исключением [Зейгельман, 1983; Рокитянский, 1985], во всех известных нам публикациях положение о безальтернативности привычных форм представления результатов интерпретации не подвергается сомнению. Оно считается само собой разумеющимся, не требующим специальных теоретических обоснований. Логика сторонников сложившихся представлений о том, что считать за результат количественной интерпретации гравитационной (магнитной) аномалии, проста и на первый взгляд безупречна. В самом деле, если $\Theta \in \mathbf{R}^n$ – вектор неизвестных параметров $\hat{\Theta}_j$ модели источников поля, то, казалось бы, как же иначе может выражаться результат интерпретации, как не *в тех же самых* терминах, то есть в терминах вектора $\Theta^* \in \mathbf{R}^n$ приближенных оценок Θ_j^* параметров $\hat{\Theta}_j$? При необходимости в обоснование подобного вывода его сторонники всегда могут сослаться на одно из краеугольных положений вычислительной математики: всегда, когда возникает проблема приближенного решения некоторой задачи, необходима метрика для оценки его точности, что, в свою очередь, предполагает принадлежность истинного и построенного решений *одному и тому же* пространству, а в случае обратных задач грави- и магниторазведки – *одному и тому же* параметрическому семейству моделей источников поля.

Наглядное представление о том, какой точки зрения по обсуждаемому вопросу придерживаются ведущие специалисты в области обратных задач геофизики, можно получить из содержания соответствующих публикаций и научных докладов. В них четко прослеживается эквивалентность понятий «количественная интерпретация гравитационной (магнитной) аномалии» и «оптимальное оценивание параметров модели источников гравитационной (магнитной) аномалии». Так, А.И. Кобрунов [1997] предлагает под обратной задачей гравиразведки понимать «задачу нахождения параметров среды при введенных о ней модельных представлениях и связанной с ней параметризацией по заданным значениям измеренной величины гравитационного поля в точках плоскости наблюдений». Как считает П.С. Мартышко [1997], «под обратной задачей гравимагнитометрии, в самом широком смысле, следует понимать задачу определения по наблюдаемому на некотором носителе гравитационному или магнитному полю геометрических и/или физических параметров аномально-

го объекта (плотности, или намагниченности)». В общем определении обратной задачи ориентация на единичный «оптимальный» вариант интерпретации может явно и не просматриваться. По мнению Ю.И. Блоха [1995, 1998], «обратные задачи заключаются в определении местоположения, формы, размеров, элементов залегания и физических свойств интерпретационных моделей, удовлетворяющих имеющейся априорной информации, по создаваемым ими аномалиям». Но при «расшифровке» этого определения выясняется, что речь идет все-таки об оценке конечного числа параметров, описывающих указанные характеристики источника поля. В прочтении В.Н. Страхова идея оптимальности как одна из методообразующих идей [Страхов, 1995] автоматически предполагает представление результата интерпретации в терминах единичного решения обратной задачи.

Если отойти от методологических установок и обратиться к известным постановкам обратных задач, а также методам их решения, то и здесь эквивалентность двух отмеченных выше понятий проявляется явно и недвусмысленно. Сошлемся на широко известную и имеющую высокий индекс цитируемости монографию В.И. Старостенко [1978], а также фундаментальный труд Е.Г. Булаха [2010]. Приводимые в них алгоритмы количественной интерпретации гравитационных и магнитных аномалий – это алгоритмы построения оптимальных оценок параметров возмущающих масс. Можно добавить, что традиционное представление о том, в каких терминах должен выражаться результат интерпретации, в корне не изменится, когда речь пойдет о совместной интерпретации нескольких геофизических полей. Так, согласно определению Г.Я. Голиздры [1996], «обратную задачу комплексной интерпретации можно сформулировать как определение параметров моделей по совокупности элементов геофизических полей».

Информационно-статистический подход к выбору «наилучшего» решения предполагает неравноправие допустимых вариантов интерпретации. Оценке качества построенного решения здесь уделяется больше внимания, чем при детерминистском подходе – результаты интерпретации в обязательном порядке должны сопровождаться оценками их точности. Однако в вопросе о том, в каких терминах должен выражаться сам результат интерпретации, заметных расхождений со сторонниками детерминистского направления нет. Так, согласно точке зрения Ф.М. Гольцмана [1997], «в статистической теории интерпретации геофизических данных в случае задачи количественной интерпретации понятие обратной задачи сводится к оцениванию параметров модели объекта». Понятно, что суть обратной задачи как задачи формирования единичного наилучшего варианта интерпретации не изменится, если непосредственно интерпретатора интересуют не оценки параметров модели, а приближенные значения некоторых функционалов, построенных по этим оценкам (например, гармонические моменты возмущающих масс).

Мы, тем не менее, попытаемся возразить такому консолидированному мнению и показать, что традиционное представление о том, что следует считать результатом интерпретации, является едва ли не самым опасным и «жизнестойким» заблуждением, которое стоит на пути создания новых методов решения обратных задач гравиразведки и магниторазведки, претендующих на более полное извлечение информации об источниках поля. Признание общепринятых форм представления результатов интерпретации как единственно возможных, заставляет геофизика смириться с недостатками концепции единичных решений и воспринимать их как *неизбежное зло* ввиду кажущегося отсутствия разумных альтернатив. В своих контрдоводах мы делаем акцент на двух признаках известных форм представления результатов интерпретации – их *информативности* и кажущейся *безальтернативности*. Как и при обсуждении некоторых других проблем, отправной точкой нам послужит факт объективного существования множества Q допустимых вариантов интерпретации, каждый из которых полностью отвечает совокупной априорной информации и с равным правом претендует на статус истинного решения обратной задачи (или наилучшей его аппроксимации). Чтобы не возникло предположение, что недостатки того или иного критерия выбора наилучшего решения связаны с его особенностями, будем вести изложение с общих позиций, не конкретизируя, *по какому принципу* отбирается оптимальное решение из множества Q .

Начнем с *информативности*. Простая и очевидная истина, – если ее выразить в терминах теоретико-множественных представлений, – состоит в том, что какими бы замечательными свойствами (в нашем случае – свойством оптимальности) ни обладал элемент множества (в нашем случае – единичное приближенное решение обратной задачи), он не способен *сколь-нибудь полно* представить собой все множество (в нашем случае – множество допустимых решений Q). Добавим к этому, что информацию об источниках поля, содержащуюся в *приближенных* оценках параметров модели, не всегда легко «расшифровать» и переформулировать в геологически содержательных терминах. К примеру, преобразовать приближенные оценки координат вершин многогранника, описывающего модель возмущающего тела, и элементы соответствующей ковариационной матрицы в оценку вероятности встречи возмущающих масс в каждой из точек изучаемой части пространства. В типичной для практики ситуации, когда погрешность приближенного решения не известна, его информативность, по сути, падает до нуля, а успех (или неудача) решения поставленной геологической задачи по результатам такой интерпретации – это всего лишь игра случая.

Последнее заявление весьма ответственно и здесь не обойтись без развернутого пояснения. Начать, пожалуй, следует с того, что мы часто, особо не задумываясь, оперируем понятием информации, полагая, что его смысл на интуитивном уровне ясен и воспринимается всеми заинтересованными ли-

цами одинаково. В некоторой степени вольное обращение с понятием информации оправдано – ведь до сих пор нет единого определения информации как научного термина, точно так же как нет, например, всеобъемлющих понятий функции и множества, которыми мы оперируем на каждом шагу. Однако всему есть граница. Вольная трактовка понятия информации привела к тому, что между построенным приближенным решением S^* и информацией о точном решении \hat{S} обратной задачи зачастую ставится знак равенства. Однако резонно задаться вопросом: а в чем собственно заключена информация о решении \hat{S} , которую удастся извлечь из *единичного* решения S^* ? Можно ли, к примеру, при решении обратной задачи рудного типа по приближенному модельному носителю S^* гарантированно выделить область пространства, являющуюся фрагментом истинного носителя \hat{S} возмущающих масс? Если нет, то хотя бы дать оценку меры этой области? Утвердительного ответа не последует. Можно задаться и другими каверзными вопросами, заставляющими критически взглянуть на концепцию единичного оптимального решения обратной задачи. Однако не будем торопиться с подобными вопросами, а лучше обозначим вначале некую общую платформу для их формулировки.

Если согласиться, что интуитивное представление геофизика об информативности результатов интерпретации каким-то образом связано с «остаточной» неопределенностью, которая остается после ознакомления с результатами интерпретации, то есть смысл процитировать Клода Шеннона, которому принадлежит следующее, не претендующее на полноту понятие: «информация – это снятая неопределенность наших знаний о предмете исследования». Если так, то под информацией, которую несет в себе построенный модельный носитель S^* возмущающих масс, логично считать его фрагмент S_0^* , одновременно являющийся и фрагментом истинного носителя $\hat{S}: S_0^* \subseteq S^* \cap \hat{S}$. Мету $\mu(S_0^*)$ можно принять за меру *достоверной* информации, которую несет приближенное решение в конкретных условиях интерпретации. Если область S_0^* указать невозможно (она существует, но неясно, где именно располагается в пространстве), логично назвать ее *скрытой достоверной* информацией об изучаемом объекте. Область $S^* \setminus \hat{S}$, которая позиционирует себя как возможный фрагмент носителя возмущающих масс, но таковой в действительности не является, назовем *ложной* информацией, а фрагмент $\hat{S} \setminus S^*$ области, заполненной возмущающими массами, но не нашедшей отражения в решении S^* обратной задачи, – *потерянной* информацией (рис. 1.2).

Если через призму введенных понятий проанализировать возможности приближенных методов решения обратных задач, составляющих на практике ядро алгоритмического обеспечения гравиразведки и магниторазведки, то придем к неутешительным выводам (для определенности, опять же, возьмем обратную задачу рудного типа). Даже если удалось построить оценку ρ^* точности ρ приближенного решения S^* , то результаты интерпретации в терминах

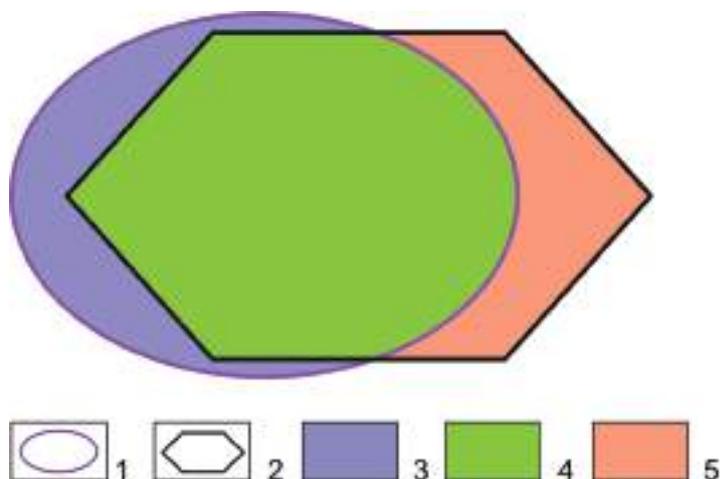


Рис. 1.2. Информационная модель, отражающая взаимосвязь аномалиеобразующего объекта и решения обратной задачи гравirazведки: 1 – геологический объект (источник поля); 2 – модельный носитель масс; информация: 3 – потерянная, 4 – скрытая достоверная, 5 – ложная.

пары $\langle S^*, \rho^* \rangle$ не содержат информацию, которая позволила бы гарантированно определить, пусть и достаточно малый, фрагмент истинного носителя \hat{S} возмущающих масс (понятно, что если множество Q достаточно широкое, то такого фрагмента может и не быть). Не говоря уже о *достоверной* информации, при *любом* скалярном критерии F попарного сравнения конкурирующих вариантов решения обратной задачи результаты интерпретации в терминах пары $\langle S^*, \rho^* \rangle$ не содержат сведений ни о *скрытой*, ни о *ложной*, ни о *потерянной* информации. Никакую из этих типов информации известные методы решения обратных задач грави- и магниторазведки выявить не могут. Не видно также никаких предпосылок к тому, чтобы поставить вопрос хотя бы об оценке меры каждого из названных типов информации. И наконец, еще один важный аспект проблемы: мало того что информацию любого из трех типов нельзя извлечь из отдельно взятого приближенного решения обратной задачи, так она зависит еще от того, какое конкретно из допустимых решений принято за оптимальное, тогда как желательно, чтобы извлекаемая информация об источниках поля зависела лишь от объема совокупных априорных данных, то есть от структуры множества Q .

Тем не менее, несмотря на дефекты общепринятого понятия результата интерпретации, невозможно отрицать, что алгоритмы решения обратных задач, использующие это понятие, многократно доказывали свою состоятельность на практике. Мы не видим в этом никакого противоречия. Обсуждаемые методы решения обратных задач работают как бы «вслепую», с непредсказу-

емым результатом. Авторы рискнут предположить, что достаточный объем *скрытой достоверной* информации и есть то главное, что на интуитивном уровне ожидает геофизик от построенного приближенного решения обратной задачи. В ряде случаев, по законам той же теории вероятности, наличие определенного объема такой информации в построенном решении обратной задачи позволяет обеспечить успех количественной интерпретации.

Теперь о второй составляющей обсуждаемого заблуждения – о якобы имеющей место *безальтернативности* существующим математическим формам представления результатов интерпретации. Поскольку этот вопрос непосредственно относится к содержанию других глав монографии, мы остановимся лишь на одном примере, показывающем ошибочность такого утверждения. С учетом выводов, которые были сделаны ранее, читатель, вероятно, согласится, что более содержательным и близким к целевой установке обратной задачи рудного типа будет ее определение не как проблемы построения оптимальных оценок Θ_j^* параметров Θ_j модели \hat{S} источников поля, и даже не как проблемы построения оценки S^* носителя источников аномалии \hat{S} , а как проблемы непосредственного оценивания *геометрического места* точек пространства, занятых возмущающими массами. При всей видимой близости трех названных целевых установок (две последние, вообще, кажутся идентичными) принципиальное отличие последней в том, что она в своем описании не связана с математическим объектом «единичное допустимое решение обратной задачи». Именно это и является первым шагом в направлении создания новых математических форм представления результатов интерпретации.

В силу объективного существования множества Q возможных вариантов интерпретации однозначно восстановить геометрическое место точек области \hat{S} , занятой возмущающими массами, не удастся. Но можно оценить эту область опосредованно, в терминах двух пространственных областей D_1 и D_2 , одна из которых (D_2) *гарантированно* является фрагментом области \hat{S} , заполненной возмущающими массами, а другая (D_1) *гарантированно* содержит область \hat{S} (соответственно, вне области D_1 источников аномалии *гарантированно* нет) [Балк, 1980₁]. Таким образом, «остаточную» неопределенность несут лишь точки области $D_1 \setminus D_2$, каждая из которых может принадлежать или не принадлежать носителю \hat{S} . Мера μ этой области есть мера приближенной эквивалентности в рассматриваемой постановке обратной задачи. Пара $\langle D_1, D_2 \rangle$ – это одна из математических форм реализации так называемого *гарантированного подхода*, который будет рассмотрен в седьмой главе монографии. Различным аспектам этого подхода и примерам его использования посвящен уже достаточно внушительный цикл исследований, причем не только гравиметрической направленности [Балк, 1980₂, 1987₂, 1997, 2009₂, 2013_{1,3}, 2014; Балк, Балк Т., 1985_{1,2}, 1987; Балк, Березовский, 1989; Балк, Гольдшмидт, 1988, 1989; Балк, Долгаль, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015₁, 2017₃,

2018; Балк, Кошелев, 1987; Балк и др., 1982, 1990, 2009₂, 2011₁, 2012₂; Балк Т., 1981_{1,2}, 1983, 1992; Балк Т., Балк, 1988; Балк Т. и др., 1988; Долгаль, 2002; Долгаль и др., 2012].

Понятно, что восстановить области D_1 и D_2 по какому-то одному допустимому решению из множества Q невозможно. Вместе с тем очевидно, что $D_1 = \cup S_\alpha$ и $D_2 = \cap S_\alpha$, где объединение и пересечение берется по всем элементам S_α множества Q , обеспечивают *неулучшаемые* двухсторонние оценки (типа включений) для истинного носителя \hat{S} возмущающих масс – $D_2 \subset \hat{S} \subset D_1$. Отсюда следует вывод: вопреки распространенному мнению, альтернативные общепринятым математические формы представления результатов интерпретации гравитационных и магнитных аномалий существуют и они более информативны. Чтобы сразу развеять сомнения по поводу существования конструктивных методов решения обратных задач в терминах пары $\langle D_1, D_2 \rangle$ областей, скажем, что на практике их построение осуществляется по конечно-представительному подмножеству Q_0 допустимых носителей, пересечение и объединение которых совпадает с «теоретическими» областями D_1 и D_2 , либо мало от них отличаются.

Важный момент состоит в том, что новая форма $\langle D_1, D_2 \rangle$ представления результатов интерпретации не нуждается в понятии оптимальности – все допустимые решения из множества Q для нее равноправны. Результаты интерпретации в новых математических терминах обладают рядом свойств, которые (или аналоги которых) не присущи известным методам решения обратных задач. Отметим только одно: если при использовании известных алгоритмов всегда остается сомнение насчет того, нельзя ли было с помощью другого, альтернативного, алгоритма получить более качественные результаты интерпретации, то с новыми формами их представления таких сомнений нет – извлекается тот объем достоверной информации, который содержится в измерениях поля совместно со всеми априорными ограничениями. В паре $\langle D_1, D_2 \rangle$ находят себя и все три типа информации об источниках аномалии: *скрытой достоверной, ложной и потерянной*. Для любого приближенного решения S^* , взятого в качестве оптимального, пространственные области, отвечающие этим типам информации, являются фрагментами области D_1 .

1.3.3. Третье положение

Качество результатов интерпретации – это в главном вопрос критерия выбора наилучшего из множества допустимых решений обратной задачи.

Все семь спорных положений, которые мы предполагали обсудить в данной главе, достаточно тесно взаимосвязаны. В одном случае одни из них являются прямым следствием других. В другом случае два спорных положения

могут иметь общие точки пересечения. При обсуждении второго спорного положения нам было важно показать лишь, что информативность результатов интерпретации в терминах единичного допустимого решения обратной задачи (вне зависимости от критерия выбора его из множества Q) в принципе не может быть достаточно высокой. Но если мы желаем оставаться в рамках общепринятых представлений о том, что считать результатом математической интерпретации, то актуальным становится вопрос о том, сколь заметно друг от друга различаются по информативности единичные допустимые решения и сколь значительна в этой связи роль критерия отбора наилучшего решения из множества Q .

Несмотря на то, что классическая теория решения некорректных обратных задач оказала существенное влияние на становление математической теории количественной интерпретации потенциальных полей, основу алгоритмического обеспечения последней составляют все же методы, тяготеющие к концепции подбора. С методами, разработанными в рамках теории некорректных задач, их объединяет представление результатов интерпретации в терминах отдельно взятого приближенного решения. Что касается объективного существования множества допустимых решений Q , то обойти этот факт методы подбора не могут. Во избежание разночтения перечислим вначале те признаки, которыми руководствуются авторы методов решения обратных задач гравиразведки и магниторазведки, относящиеся, по нашей классификации, к семейству методов подбора. К ним мы отнесли:

а) отказ от критериев состоятельности и эффективности метода, если эти критерии основаны на неоправданных идеализациях;

б) признание бездоказательными всякие доводы относительно состоятельности любых методов решения обратных задач, если эти методы используют сослагательное наклонение;

в) осознание факта объективного существования множества Q допустимых решений обратной задачи, то есть приближенных решений, отвечающих всем априорным данным, ограничениям и посылкам;

г) понимание того, что метод обязан использовать всю дополнительную информацию, даже если при этом постановка задачи с математической точки зрения переопределена;

д) представление о результатах интерпретации гравитационного (магнитного) поля как о некотором элементе S^* множества Q ;

е) придание элементу S^* статуса оптимальности по какому-то скалярному критерию попарного сравнения альтернативных вариантов решения;

ж) наличие некоторого скалярного критерия F (в характерном случае это невязка наблюденного и модельного полей) для попарного сравнения альтернативных вариантов интерпретации, с помощью которого и осуществляется выбор оптимального решения S^* ;

з) заимствование у математики метода решения условно-экстремальной задачи для поиска минимального значения F^* критерия F и соответствующего ему оптимального решения S^* ;

и) понимание того, что одной «оптимальностью» приближенного решения не обойтись, и нужны эффективные оценки точности таких решений (обычно дальше декларации этого тезиса дело не идет, если не считать расчеты в рамках имитационного моделирования и отдельные приемы построения оценок точности, используемые в рамках информационно-статистического подхода к обратным задачам).

Этот список можно дополнить еще двумя признаками, которые всегда по умолчанию заложены в методы, реализующие концепцию подбора:

к) предположение о том, что среди элементов множества Q найдется элемент S° , аппроксимирующий решение \hat{S} с приемлемой точностью (по умолчанию именно он, а не само решение \hat{S} , подлежит оцениванию);

л) тесно связанное с существованием элемента S° допущение о том, что модельный класс M источников аномалии обладает достаточно хорошими аппроксимативными свойствами, а априорная информация G непротиворечива.

Сформулируем несколько общих замечаний, прямо или косвенно затрагивающих проблему оптимальности (единичного) решения обратной задачи. То, что критерий оптимальности решений обратных задач считается необходимым и чрезвычайно важным элементом интерпретационной модели, отражено в одной из методологических идей существующей теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. В афористичной форме она звучит так: «всякая интерпретация критериальна». В развернутом виде принцип критериальности (или принцип оптимизации) звучит так [Страхов, 1995]: «В любой задаче, возникающей в любом интерпретационном процессе, истинную ценность имеют лишь те решения, которые оптимальны по некоторой принятой системе критериев – либо априорных, либо вырабатываемых по ходу интерпретационного процесса». В принципе критериальности можно выделить три момента, которые с учетом перспектив внедрения в практику новых математических форм представления результатов интерпретации вызывают критические замечания:

1. Отрицание иной возможности представления результатов количественной интерпретации, как только в виде единичного решения обратной задачи;

2. Придание неоправданно высокого значения одному из *априори равных* допустимых решений, принимаемому за оптимальное;

3. Обесценивание всех оставшихся решений, при том что они с равным правом, как и оптимальное, претендуют на статус истинного решения.

В связи с двумя последними моментами, характеризующими принцип оптимальности, будет уместным сослаться на известный результат из общей теории выбора [Айзерман, Малишевский, 1981]: оптимальный выбор «луч-

шего» из множества «допустимых к сравнению» вариантов на основе парно-доминантных отношений «если $F(x_1) < F(x_2)$, то вариант x_1 предпочтительней варианта x_2 » не может быть осуществлен ни при каком скалярном критерии оптимальности, если само понятие «лучший» определяется с учетом взаимодействия альтернативных вариантов и зависит от всего «контекста выбора» (у нас таковым является множество Q допустимых решений обратной задачи). Опять же, вспомним афоризм Дж. Тьюки [1981]: «Оптимальность становится опасной, если ее принимать слишком всерьез». В некоторых прикладных науках, к примеру, в теории управления, специалисты пришли к выводу, что на практике свойство оптимальности уступает свойству робастности алгоритмов. Парадигма, пришедшая под лозунгом «оптимизировать все, что оптимизируется, а то, что не оптимизировалось, сделать оптимизируемым», сменилась парадигмой «робастизировать все, что робастизируется, а то, что в данный момент не робастизируется, сделать робастизируемым». Напомним, что свойство робастности заключается в устойчивости (слабой зависимости) полученных оценок к малым отклонениям реальных условий от предполагаемых посылок, заложенных в алгоритм решения задачи [Хьюбер, 1984]. В проблематике обратных задач гравиразведки (магниторазведки), когда нет уверенности, что модель источников поля полностью адекватна фактическому распределению возмущающих масс, это свойство в особенности актуально.

Спрашивается, как в рамках концепции методов подбора решается вопрос, связанный с противоречием, возникающим при попытке представить множество Q одним из его элементов. Если ответить коротко, то – никак; эта концепция по своей сущности не предполагает суммирование информации, которую несут все решения из множества Q . Усилия сторонников концепции подбора сосредоточены на двух проблемах:

1. Учет новых типов априорных ограничений (актуальность этой проблемы не подвергается сомнению);
2. Поиск более эффективных критериев выбора оптимального решения из множества Q .

Зададимся, однако, вопросом, который для кого-то может показаться странным: сколь вообще перспективны подобные поиски? Начнем с того, что методы подбора как сугубо прикладные методы должны, казалось бы, руководствоваться одним критерием своей состоятельности – *фактической* точностью результатов интерпретации. Поэтому, отвечая на поставленный вопрос, договоримся сразу: нас не будут интересовать признаки оптимальности, имеющие отвлеченный характер по отношению к *фактическому* качеству приближенного решения обратной задачи, отвечающие этому признаку. В этой связи отметим, что мы не находим особого смысла в часто употребляемом утверждении типа «решение, оптимальное по минимуму невязки». Важно понять, как влияют критерии оптимальности на качество решения обратной задачи в

конкретных условиях интерпретации и в какой мере оправданы усилия, направленные на поиск новых критериев. Если окажется, что рассматриваемом методе преимущество того или иного критерия оптимальности, используемого для выбора отдельного допустимого решения обратной задачи на роль результата количественной интерпретации – это каждый раз дело случая, то мы будем вынуждены свести такие методы в один класс *эквивалентности* [Балк, 2015]. Более конкретно – класс методов, эквивалентных по критерию достижимой точности результатов интерпретации.

Чтобы придать дальнейшим рассуждениям более конкретное содержание, приведем один пример, который, на наш взгляд, позволяет многое расставить по своим местам.

Пример 1.3. На рис. 1.3 схематически представлена ситуация, возникающая в случае, когда модель источников поля описывается двумя параметрами – Θ_1 и Θ_2 , и $S = S(\Theta_1, \Theta_2)$ – произвольное допустимое решение обратной задачи из множества Q . Пусть $\Theta_1 = \hat{\Theta}_1$ и $\Theta_2 = \hat{\Theta}_2$ – значения параметров истинного решения $\hat{S} = \hat{S}(\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2)$ обратной задачи, а точность приближенного решения $S^* = S^*(\Theta_1^*, \Theta_2^*)$ оценивается в евклидовой метрике $\rho(S^*, \hat{S}) = (\Theta_1^* - \hat{\Theta}_1)^2 + (\Theta_2^* - \hat{\Theta}_2)^2$. Предположим, что сравнению между собой

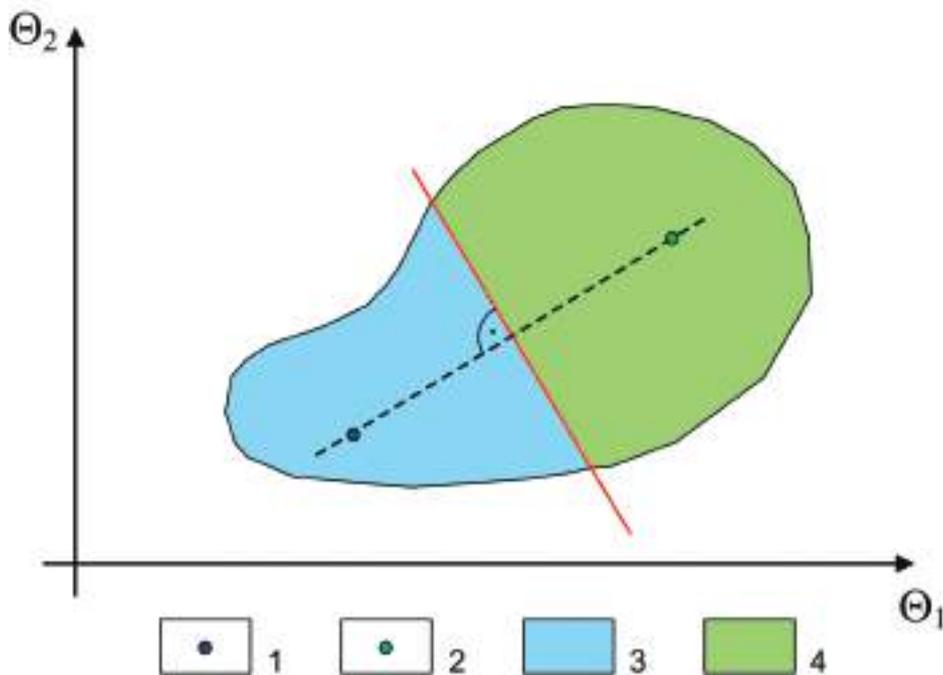


Рис. 1.3. Иллюстрация эквивалентности двух алгоритмов по критерию гарантированного превосходства по точности решения обратной задачи: 1 – S_1^* , 2 – S_2^* , 3 – Q_1 , 4 – Q_2 .

подлежат два метода решения обратной задачи – A_1 и A_2 , по которым оптимальными являются решения S_1^* и S_2^* , соответственно. Заметим, что мы не конкретизируем вид используемых критериев оптимальности и потому последующий вывод инвариантен относительно их структуры.

Нетрудно понять: где бы в пределах множества допустимых решений Q ни располагались эти два решения, найдутся непустые открытые непересекающиеся подмножества Q_1 и Q_2 (замыкание объединения которых совпадает с множеством Q) такие, что: если $\hat{S} \in Q_1$, то решение S_1^* превосходит по точности решение S_2^* , а если $\hat{S} \in Q_2$, то более предпочтительным по точности является решение S_2^* . Ясно, что аналогичная картина будет иметь место при любой параметрической размерности модели источников аномалии.

Считаем, что необходимые предпосылки к предметному обсуждению причин возникновения рассматриваемого стереотипа у нас уже есть. По нашему мнению, эти причины лежат в укоренившемся представлении о том, что существует возможность (гарантированно!) повысить точность решения обратной задачи за счет более удачной структуры скалярного критерия оптимальности F для попарного сравнения альтернативных допустимых решений обратной задачи из множества Q . Стремление обнаружить такие критерии стало едва ли не наиболее значимой и заметной коллизией, сопровождающей развитие теории интерпретации потенциальных полей в несколько последних десятилетий. Мы не стали бы так настойчиво, в чем-то даже повторяясь, акцентировать на это внимание, если бы не тот урон, который несет теория интерпретации потенциальных полей из-за этого стереотипа. При желании можно припомнить многочисленные статьи, в которых дискутируются преимущества той или иной метрики подбора (и это, заметим, при отсутствии данных о свойствах помех в измерениях поля), статьи, в которых во главу угла ставятся вопросы достижения глобального экстремума минимизируемого функционала (как будто этот вопрос имеет хоть сколь-нибудь значимое отношение к проблеме фактической точности решения обратной задачи) и т.п.

Феномену, который заключается в том, что в теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий бесконфликтно уживаются различные методы решения одних и тех же обратных задач, можно дать следующее объяснение. Как только зафиксированы модельный класс источников поля, априорная информация, выраженная в терминах элементов структуры этого класса, а также иные априорные предпосылки, то однозначно определено множество допустимых решений Q . При желании в этом множестве можно отыскать немало точек S_k^* , каждая из которых формально будет являться наилучшим решением. Для этого необходимо всего-то задаться своим критерием оптимальности решения обратной задачи (не особо заботясь об объяснении, в чем состоит эта оптимальность с точки зрения объема и качества извлекаемой информации об источниках аномалии) и подобрать соответствующий алгоритм,

который выявит в множестве Q это «свое» оптимальное решение S_k^* . Иначе говоря, в вопросе оптимизации выбора наилучшего решения существование множества допустимых вариантов интерпретации представляет исследователям широкое поле деятельности. Не это ли имеется в виду в работе [Петрищевский, 2014]: «Интерпретация гравитационных аномалий – это обширное поле изобретательной деятельности, провоцируемое широкими пределами эквивалентности обратных задач гравитационного потенциала и высокой неоднозначностью их решений в сложных геологических средах».

Неудачный выбор критериев оценки состоятельности и степени новизны алгоритмов приближенного решения обратных задач привел к парадоксальной ситуации. Состоит она в том, что при кажущемся многообразии методов количественной интерпретации, порожденных различными критериями отбора оптимального решения из множества Q , все они на поверку оказываются эквивалентными с точки зрения априорных ожиданий того объема и качества информации об источниках поля, которая может быть извлечена из предоставляемых этими методами «наилучших» решений. В сознании геофизика понятие эквивалентности обычно ассоциируется с существованием различных аномалиеобразующих объектов, создающих близкие или совпадающие поля. Оказывается, это не единственная форма эквивалентности в проблематике обратных задач гравиразведки и магниторазведки. Судя по геофизической литературе, другая форма – эквивалентность самих методов решения обратных задач гравиразведки (магниторазведки) – до сих пор не обращала на себя внимание специалистов. Такого рода эквивалентность позволяет объединить подавляющее большинство известных алгоритмов решения обратных задач грави- и магниторазведки в одну группу *принципиально равнозначных* алгоритмов, которые априори невозможно ранжировать по значению *фактической* точности решения обратной задачи, которое будет достигнуто с помощью каждого из них. Если пойти еще дальше, то можно утверждать, что общепринятые формы представления результатов интерпретации гравитационных и магнитных аномалий в совокупности с понятием оптимальности решения обратной задачи порождают многочисленные противоречия, свойственные современной теории интерпретации потенциальных полей.

1.3.4. Четвертое положение

Результат интерпретации в виде суммы оптимального решения обратной задачи и неулучшаемой оценки его точности можно считать практически исчерпывающим.

Подобного утверждения придерживаются специалисты, развивающие оба основных направления в теории интерпретации гравитационных и магнитных

аномалий – детерминистское и информационно-статистическое. Попробуем разобраться, насколько такое утверждение соответствует действительности. Поставим вопрос следующим образом: коль скоро привычные формы представления результатов интерпретации в терминах единичного оптимального решения сами по себе еще не несут достаточной информации об источниках поля, то удастся ли кардинально изменить ситуацию, если удастся построить эффективную оценку такого решения? Иначе говоря, могут ли выявленные недостатки концепции единичного оптимального решения обратной задачи быть существенно сглажены, если это решение пойдет в паре с эффективной оценкой его точности.

Надо сказать, что проблема эффективной оценки достоверности решения обратных задач является, пожалуй, наиболее болезненной темой в теории интерпретации потенциальных полей. Согласно В.Н. Страхову [1995], она рассматривается в теории как «проблема построения модели эвристических критериев оценки надежности и точности найденной интерпретации, включая описание специальных имитационных расчетов на модельных примерах, проводимых в целях нахождения оценок надежности и точности конкретных интерпретаций». Реальная практика такова, что при обсуждении достоинств предлагаемого алгоритма (независимо от того, в рамках какого подхода он был построен) тему достоверности результатов стараются либо обойти, либо переключить ее на проблематику сходимости, или же ограничиться двумя-тремя модельными примерами, в объективности выбора которых порой приходится сомневаться. Имитационное моделирование – это, безусловно, лучше чем ничего. Но при этом мы вынуждены о качестве конкретной интерпретации практического материала судить по усредненному качеству модельных расчетов, выполненных в неких условиях, «близких» к физико-геологическим условиям практической задачи. Не вполне может нас устроить и прием, когда часть априорной информации изымается из интерпретационного процесса и служит экзаменационным материалом. Подобная расточительность есть вынужденная плата за изъяны общепринятых математических форм представления результатов интерпретации, которую, как будет показано позже, можно избежать.

Мы не станем акцентировать внимание на том, что построением оценок точности в теории интерпретации потенциальных полей почти никто не занимался, и что, даже будучи построенными для широких классов решений, такие оценки окажутся чрезвычайно грубыми (универсальность, как известно, входит в противоречие с эффективностью). Напомним также, что вывод аналитических оценок точности решений обратных задач (особенно, когда в постановке присутствуют различные априорные ограничения) встречает существенные математические трудности. В свое время геофизики отказались от главенства аналитических методов решения прямых и тем более обратных задач в пользу более гибких (и имеющих значительно более широкую область

применения) численных методов. При построении оценок точности результатов конкретной интерпретации целесообразно, на наш взгляд, также практиковать алгоритмический подход. Правда, такой способ построения оценок – это своего рода доказательство точечных, локальных теорем, обслуживающих один пример обратной задачи с конкретными данными, и такие теоремы вряд ли входят в иерархию ценностей математиков, ориентированных на общность результата. Наконец, не будем оспаривать, что какие-то оценки точности могут быть заданы из опыта решения подобных задач (или исходя из результатов широкого имитационного моделирования), и эти оценки будут достаточно эффективными.

Возвратимся к поставленному вопросу о вкладе скалярных критериев точности решения обратных задач в информативность результатов интерпретации. С этой целью мы готовы даже максимально идеализировать ситуацию, считая, что в настоящее время проблемы построения эффективных оценок точности приближенных решений обратных задач нет, или, во всяком случае, ее удастся снять в ближайшие годы. Нас интересует принципиальный вопрос: в какой мере оценки точности могли бы укрепить математическую форму представления результатов решения обратной задачи в терминах оптимальных оценок параметров модели источников. Если окажется, что незначительно, то, по крайней мере, это позволит закрыть проблему таких оценок как малоперспективную.

Возьмем наиболее выигрышный случай и предположим, что:

1) истинное решение \hat{S} обратной задачи принадлежит выбранному конечнопараметрическому модельному классу M , элементы которого можно описать вектором $\Theta \in \mathbf{R}^n$;

2) априорная информация G непротиворечива и множество допустимых решений обратной задачи содержит истинное решение – $\hat{S} \in Q$;

3) некоторым образом удалось построить *неулучшаемую* верхнюю оценку ошибки приближенного решения Θ^* обратной задачи в некоторой метрике ρ : $\rho(\Theta^*, \hat{\Theta}) \leq \varepsilon$, где $\varepsilon = \sup \rho(\Theta, \Theta^*)$, $\Theta \in Q$.

Усилим возможности концепции «единичное оптимальное решение плюс оценка его качества», взяв наиболее благоприятные для нее условия. Для этого мы (опять же, идеализируя реальное положение дел) будем считать, что константу ε каким-то образом удалось найти, не прибегая к использованию *явного* описания множества Q (в противном случае мы бы попросту плавно перешли к обсуждению новых математических форм представления результатов интерпретации).

Итак, пусть всю имеющуюся информацию G удалось свернуть в пару $\langle \Theta^*, \varepsilon \rangle$. Ее содержательный смысл таков: неизвестным вектором Θ может оказаться любой вектор $\hat{\Theta}$, удовлетворяющий неравенству $\rho(\Theta, \Theta^*) \leq \varepsilon$. Спрашивается, можно ли считать пару $\langle \Theta^*, \varepsilon \rangle$ полным (законченным) решением обратной задачи, опираясь на принципы, принятые в вычислительной математике.

Самый очевидный контрдовод состоит в следующем: точно так же, как одиночный элемент $\Theta^* \in Q$ не может сколь-нибудь полно представить все множество Q , так и скаляр ε не может достаточно полно охарактеризовать особенности границы и «размеры» множества Q . Это находит отражение в том, что не все векторы Θ , удовлетворяющие приведенному неравенству, отвечают априорной информации G . Множество $Q_0 = \{\Theta : \rho(\Theta, \Theta^*) \leq \varepsilon\}$ в общем случае шире множества Q допустимых решений обратной задачи. Иначе говоря, неопределенность, заключенная в паре $\langle \Theta^*, \varepsilon \rangle$, выше той, что заключена в совокупной информации G – при свертке исходной информации в пару $\langle \Theta^*, \varepsilon \rangle$ значительная часть полезной информации может быть потеряна. Чем разнообразнее априорная информация, чем сложнее граница множества Q , тем заметнее эти потери. И эти потери непременно проявят себя, когда мы попытаемся на основании результатов интерпретации в терминах пары $\langle \Theta^*, \varepsilon \rangle$ охарактеризовать особенности истинного решения $\hat{\Theta}$.

Мы предполагаем, что заблуждение, которое сейчас обсуждалось, во многом обусловлено тем, что этот факт остался не замеченным специалистами, либо был намеренно проигнорирован.

1.3.5. Пятое положение

Увеличение объемов априорной информации и сужение за счет этого множества допустимых вариантов интерпретации позволяет повысить качество оптимального решения обратной задачи.

Ранее мы рассмотрели ситуацию, в которой два метода подбора, подлежащие сравнению по точности получаемых с их помощью решений, были поставлены в равные условия – оба они выбирали свои «оптимальные» решения из *одного и того же* множества допустимых решений Q . Оказалось, что в общем случае преимущество (по точности решения!) того или другого метода – это дело случая. Это обстоятельство позволило нам поставить под сомнение саму корректность применения признака оптимальности по отношению к единичному допустимому решению обратной задачи. Однако все это не мешает задаться следующим вопросом: пусть привычные математические формы представления результатов интерпретации несовершенны, пусть «оптимальность» решения весьма условна, но может быть эти недостатки можно в той или иной мере *гарантированно* сгладить за счет дополнительных объемов априорной информации и сужения множества допустимых решений?

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим ситуацию, когда у какого-то метода, работающего с вполне определенным критерием оптимальности, есть возможность выбрать наилучшие решения S_1^* и S_2^* из двух множеств Q_1 и Q_2 . Нас интересует, прежде всего, как соотносятся точности достигнутых реше-

ний в ситуации, когда одно из этих множеств является подмножеством другого. Этот интерес напрямую связан с общепризнанной концепцией, согласно которой основным резервом геофизических методов разведки является повышение точности измерений и увеличение объемов косвенной априорной информации об изучаемом геологическом объекте, приводящих к сужению множества Q . Оговоримся сразу, что к самой концепции у авторов монографии претензий нет. Есть лишь сомнение в том, что эти резервы используются в современной теории интерпретации потенциальных полей эффективно. Если конкретизировать, то нас интересует, не может ли случиться такое, что из-за недостатков привычных математических форм представления результатов интерпретации возникнет ситуация, когда заметное увеличение объема априорной информации не только не даст существенного прироста качества результатов интерпретации, но и приведет к его ухудшению (да что там – к *существенному* ухудшению). Вопрос серьезный, поскольку если признать такое возможным, то значит поставить под сомнение одну из основополагающих методологических идей теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Мы утверждаем, и подкрепим наши доводы наглядными примерами, что отрицание возможности снижения качества результатов интерпретации, выраженных в терминах единичного оптимального решения обратной задачи, при увеличении объемов априорной информации есть еще одно типичное заблуждение.

Не так просто привести ссылки на чужие публикации, в которых прямо отрицалась бы возможность немонотонного поведения зависимости качества результатов интерпретации от объема и качества априорной информации. Но это, видимо, потому, что поставленным выше вопросом попросту никто не задавался. Но если бы такое заблуждение не имело места, то не было бы многочисленных публикаций, само содержание которых косвенно говорит о наличии этого заблуждения.

Как обычно, под результатом интерпретации будем понимать единичное решение S^* , взятое из допустимого множества Q , а под качеством этого решения – его точность. Формулировку утверждения «позволяет повысить» усилим до утверждения «позволяет *гарантированно* повысить» и попытаемся его опровергнуть. Пусть имеются два объема информации – G_1 и G_2 , которым соответствуют множества Q_1 и Q_2 допустимых решений обратной задачи в рамках выбранного модельного класса M . Положим, что качественно информация G_2 более предпочтительна и выражается это в том, что множество Q_2 является значительно более узким, чем множество Q_1 . Более определенно: если каждое допустимое решение суть вектор Θ параметров $\Theta_j, j = 1, 2, \dots, n$, модели источников, а Q_1 и Q_2 – ограниченные области в \mathbf{R}^n , то $\mu(Q_2) \ll \mu(Q_1)$. Возможны два исхода: $Q_2 \subset Q_1$ и $Q_2 \not\subset Q_1$. Первый исход возникает тогда, когда информация G_2 получена путем добавления к информации G_1 неких новых результативных

ограничений на допустимые значения параметров Θ_j . Вторым исход возникает в том случае, когда объемы информации G_1 и G_2 не связаны друг с другом или слабо связаны.

Пример 1.4. Суть заблуждения, обозначенного как пятое спорное утверждение, первоначально проясним схематически. Возьмем наглядный случай, когда $n = 2$ ($\Theta = (\Theta_1, \Theta_2)$) и $S_1^* \in Q_1$, $S_2^* \in Q_2$ – приближенные решения обратной задачи, построенные (с помощью одного и того же алгоритма!) по информации G_1 и G_2 , соответственно. Пусть, для определенности, точность решений S_k^* , $k = 1, 2$ оценивается в евклидовой метрике.

Если априорные данные непротиворечивы и точное решение \hat{S} обратной задачи принадлежит модельному классу M , то имеет место включение $\hat{\Theta} \in Q_1 \cap Q_2$. Вообще говоря, ничто не мешает решению S_1^* , построенному по более бедной информации, оказаться по воле случая элементом множества $Q_1 \cap Q_2$, но мы и здесь не будем рассчитывать на удачу и создавать обратной задаче, использующей информацию G_1 , наиболее выгодные условия. На рис. 1.4 отмечена область Q_0 , содержательный смысл которой таков: если истинным решением $\hat{\Theta}$ окажется любая точка из этой области, то решение S_2^* ока-

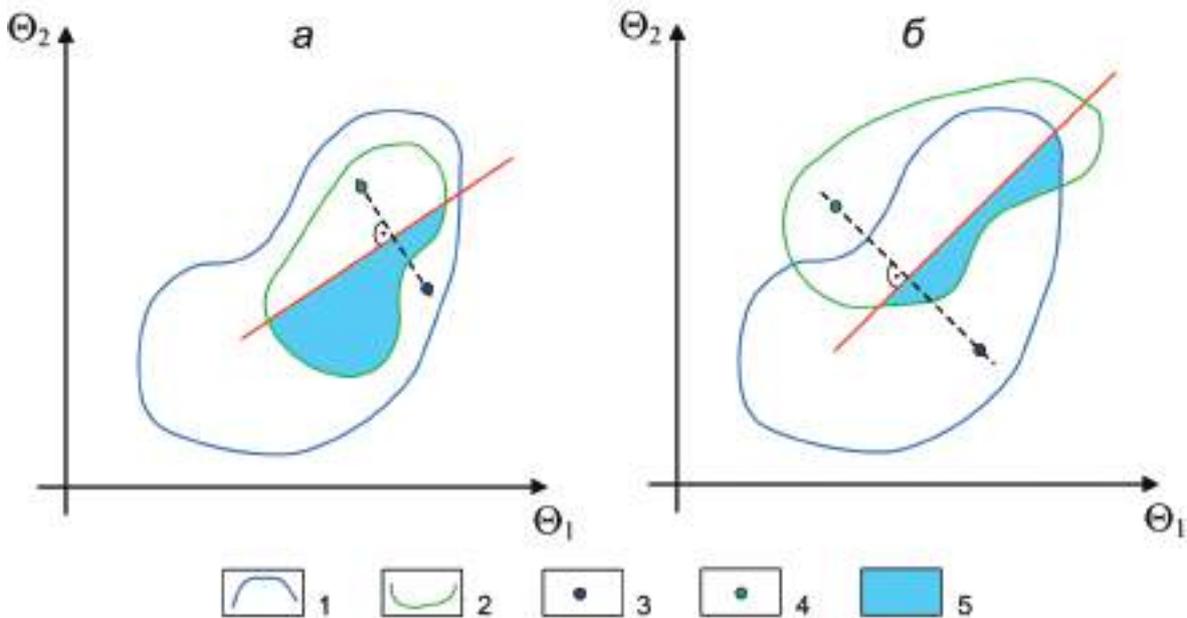


Рис. 1.4. Иллюстрация отсутствия монотонной зависимости точности приближенного решения S^* обратной задачи от объема априорной информации G (а – случай $Q_2 \subset Q_1$; б – случай $Q_2 \not\subset Q_1$ ($\mu(Q_2) < \mu(Q_1)$)): 1 – граница множества допустимых решений Q_1 ; 2 – граница множества допустимых решений Q_2 ; 3 – приближенное решение S_1^* по информации G_1 ; 4 – приближенное решение S_2^* по информации G_2 ; 5 – область Q_0 .

жется менее точным, чем S_1^* . В обоих случаях множество Q_0 не пусто. И это означает, что немонотонное поведение точности приближенного решения от объема используемой информации не такой уж редкий случай.

К озвученному заблуждению примыкает еще одно, которое мы не стали выделять отдельной строкой: **«качество результатов интерпретации, выполненной с использованием взаимонезависимых объемов G_i , $i = 1, 2, \dots, t$, априорной информации, не уступит (далее мнения могут расходиться): а) качеству результатов интерпретации по каждому парциальному объему информации G_i (оптимистичный вывод); б) качеству результатов интерпретации хотя бы по одному из парциальных объемов информации G_i (осторожный вывод)»**.

На подобном убеждении основана концепция комплексирования данных измерений различных геофизических полей при решении обратных задач. Первое, оптимистичное, мнение наиболее уязвимо и тянет за собой целый клубок противоречий. Ясно, что если, скажем, к высокоточным измерениям «добавить» грубые, то весьма велики ожидания, что качество приближенного решения станет только хуже. Но вот то, что решение обратной задачи по совокупным данным уступит *всем* решениям, построенным в отдельности по каждым из парциальных данных, в общепринятые стандарты мышления не укладывается. Тем не менее, дело обстоит именно так, и связано это с фактом немонотонного поведения точности приближенного решения обратной задачи (независимо от того, в рамках какого подхода оно было построено) с ростом объема и качества используемой априорной информации.

Пример 1.5. Общие рассуждения не дают количественного представления об отмеченном нами феномене. Поскольку его природа не связана, вообще говоря, с особенностями оператора прямой задачи, мы сочли полезным привести пример, где читатель, если у него появились сомнения в возможности столь неожиданного исхода, мог бы самостоятельно все перепроверить, даже на калькуляторе.

Итак, оценке подлежат коэффициенты $\hat{\Theta}_1$ и $\hat{\Theta}_2$ линейной функции $\varphi(x) = \hat{\Theta}_1\varphi_1(x) + \hat{\Theta}_2\varphi_2(x)$ по ее значениям $\tilde{y}_i = \varphi(x_i) + \xi_i$, где ξ_i – случайные помехи. У нас $\varphi_1(x) \equiv 1$, $\varphi_2(x) = x$, $\hat{\Theta}_1 = \hat{\Theta}_2 = 1$, и речь, таким образом, идет о построении приближенных оценок Θ_k^* параметров линейной регрессии. Мы могли бы легко перевести данный пример в плоскость проблематики обратных задач, когда речь идет о двухмерной линейной обратной задаче гравиметрии. Достаточно было в качестве функций $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2$ взять гравитационные влияния двух (фиксированных) локальных однородных тел единичной плотности, где $\hat{\Theta}_k$ – неизвестные оцениваемые эффективные плотности этих тел.

Оценки параметров $\hat{\Theta}_1$ и $\hat{\Theta}_2$ будем строить по трем группам данных:

1) по значениям \hat{y}_i , заданным в точках $x_i = i$, $i = 1, 2, \dots, 5$, когда $\xi_1 = 0,87$, $\xi_2 = 1,59$, $\xi_3 = -0,23$, $\xi_4 = 0,84$, $\xi_5 = 2,40$ (парциальные данные G_1);

2) по значениям \tilde{y}_i , заданным в точках x_i , $i = 6, 7, \dots, 10$, когда $\xi_6 = -0,12$, $\xi_7 = -0,89$, $\xi_8 = -0,44$, $\xi_9 = 0,11$, $\xi_{10} = -0,54$ (парциальные данные G_2);

3) по десяти измерениям, представленным в данных G_1 и G_2 (совокупные данные $G = \langle G_1, G_2 \rangle$). Оценки Θ_1^* и Θ_2^* вычисляются по методу наименьших квадратов, а их качество оценивается по трем характерным функционалам:

$$\nu_1 = ((\Theta_1^* - \hat{\Theta}_1)^2 + (\Theta_2^* - \hat{\Theta}_2)^2)^{1/2}, \quad (1.9)$$

$$\nu_2 = |\Theta_1^* - \hat{\Theta}_1| + |\Theta_2^* - \hat{\Theta}_2|, \quad (1.10)$$

$$\nu_3 = \max \left\{ |\Theta_1^* - \hat{\Theta}_1|, |\Theta_2^* - \hat{\Theta}_2| \right\}. \quad (1.11)$$

Получены следующие оценки параметров $\hat{\Theta}_1$, $\hat{\Theta}_2$.

По информации G_1 : $\Theta_1^* = 1,401$, $\Theta_2^* = 1,231$, $\nu_1 = 0,463$, $\nu_2 = 0,632$, $\nu_3 = 0,401$.

По информации G_2 : $\Theta_1^* = 0,672$, $\Theta_2^* = 1,016$, $\nu_1 = 0,328$, $\nu_2 = 0,344$, $\nu_3 = 0,328$.

По информации $G = \langle G_1, G_2 \rangle$: $\Theta_1^* = 2,361$, $\Theta_2^* = 0,834$, $\nu_1 = 1,371$, $\nu_2 = 1,527$,
 $\nu_3 = 1,361$.

Таким образом, худшее из двух решений, построенных по *парциальным объемам информации*, превосходит по точности решение, построенное тем же методом по *совокупной информации*, более чем в два раза. Причем по всем трем показателям – ν_1 , ν_2 и ν_3 ! При столь малых выборках данных измерений бессмысленно говорить о законе распределения помех – их статистические характеристики будут заметно отличаться от вероятностных. Любую реализацию случайных чисел ξ_i с равным успехом можно «привязать» к различным законам распределения, тут важно лишь, чтобы значения ξ_i попали в область определения случайной величины. По нашему мнению, при обсуждении численных экспериментов зачастую присутствует необязательный и сбивающий с толку акцент на закон распределения помех в измерениях поля. Эта информация имела бы еще какой-то смысл, если бы речь шла не об одной выборке, а о длинной серии примеров с различными выборками одной и той же случайной величины. Но такого рода модельные расчеты не характерны для геофизических публикаций.

Тем не менее, в нашем примере, где в одном из случаев оптимальные оценки отвечают минимуму квадратичного функционала невязки, благоприятствующим фактором применения которого является близость к нулю среднего значения $\bar{\xi}$ помехи, интересно знать, каково это значение по каждой из трех выборок случайных помех. Оказалось, что $\bar{\xi} = 1,094$ по первой группе данных G_1 , $\bar{\xi} = -0,376$ по второй группе данных G_2 , $\bar{\xi} = 0,359$ по совокупным данным G . Как видим, и здесь совокупная информация G поставлена в более благоприятные условия, но избежать парадоксального исхода это не позволило. На этом обсуждение примера закончено.

Отсутствие монотонной зависимости входит в противоречие с еще одним достаточно распространенным стереотипом: **«Успех решения проблемы наиболее полного извлечения достоверной информации из разнородных данных – это лишь вопрос удачного выбора весовых коэффициентов в структуре минимизируемого взвешенного функционала невязки»**. Правда, как отмечено в [Голиздра, 1988, 1996], «не так просто быть достаточно объективным, задавая значения этих весовых коэффициентов». Нам же трудно удержаться от вопроса: насколько можно рассчитывать, что построенное решение будет с приемлемой точностью удовлетворять *порознь* каждому из геофизических полей? Другими словами, окажется ли это решение допустимым решением по *каждому* из этих полей. Если при выборе весовых коэффициентов мы все же будем заботиться в первую очередь о допустимости решения порознь по каждому из полей, то в этом случае вообще не видно особого смысла использовать конструкцию агрегированного функционала при поиске оптимального решения обратной задачи. Не логичнее ли искать наилучший вариант интерпретации среди множества допустимых решений, удовлетворяющих одновременно сразу всем априорным ограничениям, собранным из постановок обратных задач для отдельно взятых геофизических полей, и тех связей, которые объединяют обратные задачи для отдельных полей?

Мы полагаем, что подобная мысль приходила в голову не только нам. Просто в этом случае возникает несколько непривычная (нестандартная) ситуация, когда среди геофизических полей надо выделить одно, «головное», в качестве минимизируемого функционала использовать невязку соответствующего теоретического поля и наблюдаемых значений этого поля, а ограничения на допустимую невязку оставшихся полей включить в число ограничений условно-экстремальной задачи. «Степень нелинейности» условно-экстремальной задачи при этом, несомненно, возрастет. Если сторонники использования взвешенных минимизируемых функционалов в свое время это предусмотрели, то их выбор можно расценить как тактический ход, когда приходится поступиться методологией в пользу снижения вычислительной сложности задачи.

Чтобы в некотором смысле поставить точку в вопросе о существовании универсальных критериев выбора весовых коэффициентов в смешанном функционале невязки, способных решить проблему эффективного комплексирования геофизических данных, мы рассмотрим несколько модельных примеров, результаты решения которых могут, как нам представляется, для многих оказаться неожиданными. В том числе мы приведем пример, когда почти при любом выборе этих коэффициентов результаты количественной интерпретации по комплексу уступят результатам интерпретации *по каждому* из комплексируемых полей. При определенном «раскладе» помех в измерениях поля возможна ситуация, когда некоторый объем информации удастся разбить на несколько частей так, что точность решения обратной задачи по

каждой отдельно взятой части информации окажется выше точности решения, построенного с использованием всего объема информации.

Пусть, как и прежде, $\hat{S} \in M$ – точное решение обратной задачи, Q_1, Q_2, \dots, Q_m – множества допустимых решений обратной задачи, отвечающих некоторым взаимонезависимым объемам априорной информации G_1, G_2, \dots, G_m . Тогда $Q = Q_1 \cap Q_2 \cap \dots \cap Q_m$ – множество допустимых решений, отвечающих всей априорной информации $G = \langle G_1, G_2, \dots, G_m \rangle$. Обозначим через $S_i^* \in Q_i$ решение обратной задачи, построенное по информации G_i с помощью какого-то метода подбора, а через $S^* \in Q$ – приближенное решение, построенное тем же методом по информации G . Пусть теперь $\nu(S_1, S_2)$ – функционал близости любых двух элементов модельного класса M , который, подчеркнем это, вовсе не обязан быть метрикой. Введем в рассмотрение множество

$$Q' = \{S \in Q : \nu(S, S^*) > \nu(S, S_j^*), j = 1, 2, \dots, m\}. \quad (1.12)$$

Если оно окажется не пустым, то в случае $\hat{S} \in Q'$ решение S^* уступит по качеству всем решениям обратной задачи, построенным по парциальным объемам информации G_i .

По сути в множестве (1.12) заложен конструктивный способ моделирования такого рода «неожиданных» примеров. Опишем его. Пусть при решении обратной задачи некоторым методом A по совокупной информации и отдельным ее частям построены озвученные ранее решения $S^*; S_1^*, S_2^*, \dots, S_m^*$. Предположим, что множество (1.12) оказалось не пустым. Тем самым необходимое условие для конструирования модельного примера, опровергающего привычные представления о зависимости точности решения обратных задач от объема исходных данных, выполнено. Если при этом $\hat{\Theta} \in Q'$, то выполнено и достаточное условие. Если же это условие не выполнится, то:

1) забудем, что исходный вектор параметров $\hat{\Theta}$ есть истинное решение обратной задачи, а использованная выборка случайных чисел ξ_i – помехи в измерениях аномалии;

2) возьмем любой элемент Θ множества Q' и объявим его точным решением $\hat{\Theta}$ обратной задачи, а в качестве помех в измерениях $\Delta \tilde{g}_i$ объявим разности $\xi_i = \Delta \tilde{g}_i - \Delta \hat{g}_i$ исходного («наблюденного») поля и поля, отвечающего вновь выбранному вектору $\hat{\Theta}$.

Необходимый эффект достигнут, и мы еще раз убеждаемся, что качество единичных оптимальных решений обратной задачи столь же случайно, сколь случайна помеха в значениях аномального поля.

Пример 1.6. Аномалия Δg создается двумя шарами \hat{S}_1 и \hat{S}_2 единичного объема $V_1 = V_2 = 1$ с эффективными плотностями $\hat{\delta}_1 = \hat{\delta}_2 = 1$, которые по постановке обратной задачи являются оцениваемыми. Центры шаров известны и имеют координаты $(-1, 0, 1)$ и $(1, 0, 1)$. Гравитационная постоянная условно приравнена единице. Имеются три (парциальные) группы данных – G_1, G_2 и G_3 .

В группу G_1 входят приближенные значения аномалии $\Delta\tilde{g}(x_i) = \Delta\tilde{g}_i$ в точках $x_i = -3,2+0,2i, i = 1,2,\dots,15$, содержащие помехи ξ_i , собранные в массив $\Xi_1 = \{-0,53, 1,17, -0,94, 0,80, -0,72, 0,04, -0,26, 0,96, -0,63, 0,02, -2,25, 0,20, -0,91, 0,33, -0,44\}$. В группу G_2 входят приближенные значения аномалии $\Delta\tilde{g}_{i+15}$ в точках $x_{i+15} = 0,2i, i = 1,2,\dots,15$, содержащие помехи ξ_{i+15} , собранные в массив $\Xi_2 = \{-0,75, 1,10, 0,18, -0,61, -0,31, -0,74, 0,81, 0,14, 0,35, -1,62, -0,99, -0,32, 0,19, -0,74, 2,00\}$. В группу G_3 входят приближенные значения аномалии $\Delta\tilde{g}_{i+30}$ в точках $x_{i+30} = -1,7+0,2i, i = 1,2,\dots,15$, содержащие помехи ξ_{i+30} , собранные в массив $\Xi_3 = \{-0,30, -0,49, 1,33, -0,88, -0,02, -0,41, -0,23, -1,48, 1,20, -0,24, -0,02, -0,42, 0,02, -2,50, 2,59\}$. Иной информации нет, и в качестве оптимальных оценок δ_1^* и δ_2^* плотностей $\hat{\delta}_1$ и $\hat{\delta}_2$ выбираются значения, минимизирующие квадратичную невязку модельного и «наблюденного» полей.

Казалось бы, во всех трех «парциальных» случаях точки измерения аномалии выбраны крайне неудачно с точки зрения ожидаемого качества решения обратной задачи. Действительно, данные G_1 и G_2 характеризуют, соответственно, левый и правый фланг аномалии, а данные G_3 – ее достаточно узкую эпицентральною часть. В то же время совокупные данные $G = \langle G_1, G_2, G_3 \rangle$ не только полно характеризуют аномалию в целом, но в ее эпицентральной части содержат измерения по более густой сетке, чем парциальные данные в отдельности. Однако вопреки стереотипным представлениям решение обратной задачи оказалось наихудшим именно по совокупным данным G , если его качество оценивать величиной ошибки

$$\nu = \left| V_1(\delta_1^* - \hat{\delta}_1) + V_2(\delta_2^* - \hat{\delta}_2) \right| \quad (1.13)$$

определения суммарной эффективной массы источников аномалии.

Результаты интерпретации таковы:

по данным G_1 : $\delta_1^* = 0,452$, $\delta_2^* = 1,255$, $\nu = 0,293$;

по данным G_2 : $\delta_1^* = 1,444$, $\delta_2^* = 0,766$, $\nu = 0,210$;

по данным G_3 : $\delta_1^* = 0,836$, $\delta_2^* = 0,882$, $\nu = 0,282$;

по данным G : $\delta_1^* = 0,664$, $\delta_2^* = 0,891$, $\nu = 0,444$.

Таким образом, точность определения общей избыточной массы источников поля по совокупности измерений G уступает как минимум в полтора раза точности ее определения по каждой из трех групп G_k парциальных измерений.

Пример 1.7. Особенно удручающе выглядит отсутствие монотонной зависимости качества результатов интерпретации от объема используемой информации при интерпретации разнородных геофизических данных. Таким образом, мы возвращаемся к вопросу о весовых коэффициентах в агрегированном функционале невязки.

Пусть аномалии Δg и V_x порождены совокупностью двух шаров \widehat{S}_1 и \widehat{S}_2 единичного объема с эффективными плотностями $\widehat{\delta}_1 = \widehat{\delta}_2 = 1$, считающимися по постановке задачи неизвестными. Координаты центров шаров $(-1, 0, 1)$ и $(1, 0, 2)$ считаются заданными (по сути мы имеем линейную обратную задачу). Измерения обеих производных гравитационного потенциала выполнены в $n = 30$ точках $x_i = -3, 2 + 0, 2i, i = 1, 2, \dots, n$. Постоянная тяготения условно приравнена к единице. Значения аддитивных помех ξ_i в «измерениях» $\Delta \widetilde{g}(x_i)$ собраны в массив $\Xi_1 = \{0, 14, -0, 01, -0, 67, -0, 44, -0, 58, 0, 42, -1, 33, -1, 22, 0, 41, -1, 70, -1, 34, -1, 17, 0, 92, -0, 20, 0, 94, -0, 85, 0, 34, 1, 55, 0, 31, -0, 02, 0, 03, -0, 98, -1, 38, 0, 91, 1, 04, -0, 49, 0, 33, -1, 59, 0, 57, -0, 39\}$. Значения аддитивных помех ξ_i в «измерениях» $\widetilde{V}_{xz}(x_i)$ собраны в массив $\Xi_2 = \{0, 05, 0, 88, 1, 44, -0, 05, -1, 34, -0, 23, 0, 34, -0, 06, 1, 56, 1, 45, -1, 08, 0, 15, -0, 26, -1, 12, -0, 60, -1, 90, -0, 95, 0, 30, -0, 98, -0, 24, -0, 21, 2, 01, -0, 94, 1, 08, -0, 31, 0, 26, 0, 06, -0, 49, -0, 62, -1, 11\}$. Показателем качества ν решения обратной задачи является точность определения эффективной массы по приближенным оценкам плотностей δ_1^* и δ_2^* этих шаров. Выбор наилучшего решения осуществляется по минимуму взвешенного функционала невязки

$$F(\delta_1, \delta_2) = p \sum_{i=1}^n (\Delta g(\delta_1, \delta_2; x_i) - \Delta \widetilde{g}(x_i))^2 + (1-p) \sum (V_{xz}(\delta_1, \delta_2; x_i) - \widetilde{V}_{xz}(x_i))^2, \quad (1.14)$$

где δ_1 и δ_2 – оптимизируемые значения плотности, $\Delta g(\delta_1, \delta_2; x_i)$ и $V_{xz}(\delta_1, \delta_2; x_i)$ – суммарные аномалии от обоих шаров \widehat{S}_1 и \widehat{S}_2 плотности δ_1 и δ_2 . Считается, что интерпретатору предоставлена свобода выбора параметра p ($0 < p < 1$) исходя из каких-то косвенных соображений.

При $p = 1$ минимум функционала (1.14) дает следующее приближенное решение по одним лишь измерениям $\Delta \widetilde{g}(x_i)$:

$$\delta_1^* = 0, 171, \delta_2^* = 1, 678, \nu = 0, 150.$$

При $p = 0$ минимум функционала (1.14) дает решение обратной задачи по одним измерениям $\widetilde{V}_{xz}(x_i)$:

$$\delta_1^* = 1, 854, \delta_2^* = -0, 133, \nu = 0, 279.$$

Результаты расчетов, выполненных с различными фиксированными значениями весового коэффициента $p \in [0, 1]$, показали следующее. Лишь в очень узком диапазоне значений $p \in (0, 927; 1)$ весового коэффициента оценка общей эффективной массы двух тел, построенная по совокупности данных измерений обеих аномалий, превосходит по точности оценку общей массы источников, построенной по одним лишь измерениям $\widetilde{V}_{xz}(x_i)$. При $0 < p < 0, 927$ результаты совместной интерпретации аномалий двух производных гравитационного потенциала уступают как решению обратной задачи по одним лишь данным $\Delta \widetilde{g}(x_i)$, так и решению обратной задачи только по измерениям $\widetilde{V}_{xz}(x_i)$. Таким образом, ни при одном значении $p \in (0, 1)$ результаты комплексной ко-

личественной интерпретации не оказались наилучшими. Такой неожиданный (а для некоторых специалистов, возможно, и обескураживающий) результат проще всего объяснить геометрически [Балк, 2004, 2013₂].

С точки зрения концепции повышения качества результатов интерпретации геофизических данных за счет роста объемов используемой информации исход, подобный только что представленному, является достаточно пессимистичным. Однако, оговоримся сразу, приведенные расчеты ни в коей мере не направлены на подрыв доверия к обсуждаемой концепции. Они лишь раскрывают еще одну слабую сторону общепринятых форм представления результатов решения обратных задач при их использовании – это важно подчеркнуть – вкуче со скалярными критериями оптимальности, основанными на попарном сравнении альтернативных вариантов интерпретации. Разумеется, приведенный пример не является типичным, но не является он и патологическим.

1.3.6. Шестое положение

Добиться повышения достоверности результатов интерпретации можно за счет согласования приближенных решений обратной задачи, построенных различными методами.

Методы, разработанные в рамках теории некорректных обратных задач, и методы, реализующие концепцию подбора, не охватывают все возможные подходы к выбору наилучшего решения. В последние два десятилетия наметился интерес к идее построения оптимальных вариантов интерпретации, реализующих компромисс между определенным числом допустимых решений, которые удалось найти. В главном, речь идет о решениях, полученных *различными* методами на основе своих критериев оптимальности. По-видимому, к такой идее ее сторонники пришли через осознание того, что в построении итогового варианта интерпретации не должно участвовать лишь одно из возможных решений, каким бы свойством оптимальности оно ни обладало.

Можно лишь приветствовать, что все большему числу геофизиков становится очевидным, что все допустимые варианты интерпретации должны действовать заодно, а не соперничать в споре за право называться наилучшим. Возникло понимание необходимости в компромиссном (согласованном) решении обратной задачи, в выбор которого каждое из найденных допустимых решений вносило бы свой вклад. По предложению В.Н. Страхова [1995], идея согласования допустимых решений обратной задачи получила в современной теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий статус общеметодологической идеи фундаментального характера. Надо сказать, что алгоритмы решения обратных задач, основанные на поиске компромисса между альтернативными вариантами интерпретации экспериментальных данных, стали использоваться и в других областях науки [Костомаров и др., 2011].

Обращают на себя внимание три особенности концепции согласования В.Н. Страхова:

1. Эта концепция считает более предпочтительной ситуацию, когда согласуемые допустимые решения получены *различными* методами решения обратной задачи.

2. Эта концепция исходит из того, что результатом согласования вновь должно стать некоторое допустимое решение обратной задачи.

3. Эта концепция допускает довольно широкое толкование термина «согласование», хотя алгоритмически идея была проработана В.Н. Страховым в случае, когда результатом интерпретации является вектор параметров, определяемый из решения системы линейных алгебраических уравнений (собственно согласование у В.Н. Страхова сводится к процедуре усреднения допустимых векторов параметров модели, построенных различными методами [Страхов, 2000₁]).

Попытаемся критически осмыслить содержание и предназначение названных особенностей концепции согласования решений, принимая во внимание результаты, изложенные в предыдущих разделах главы. Мы вынуждены прибегнуть к этому анализу, поскольку в работах самого В.Н. Страхова нам не удалось найти ответы на интересующие вопросы.

Что касается первой из названных особенностей, то, по нашему мнению, не особенно важно, участвуют в согласовании какие-то «рядовые» решения, или решения, обладающие свойством оптимальности по определенным (частным) критериям – в любом случае это элементы множества Q . Более важно другое. В стремлении представить все множество Q достаточно малым подмножеством, желательно, прежде всего, добиться, чтобы согласуемые допустимые решения сравнительно «равномерно» покрыли это множество. Теперь можно лишь строить догадки. Вполне возможно, что в концепцию согласования В.Н. Страхов заложил следующую эвристику: шансы на то, что построенные допустимые решения обратной задачи будут обладать бóльшим разнообразием, выше, если эти решения получены различными методами. Но не исключено, что имела место более прозаическая причина, и В.Н. Страхов предполагал, что автоматизированные технологии интерпретации, реализующие идею согласования допустимых решений, будут работать только с *одним* начальным приближением – тем, которое задаст интерпретатор. Соответственно, любой детерминированный метод даст только *одно* допустимое решение.

К слову сказать, для сторонников подхода с усреднением допустимых решений мы могли бы предложить следующий выход из положения, который позволил бы многократно увеличить число построенных решений, которые будут участвовать в процедуре согласования. Он заключается в том, чтобы автоматизировать процедуру выбора различных начальных приближений, обеспечив возможность построения различных приближенных решений с по-

мощью одного и того же метода. Для этого лишь необходимо, чтобы метод поиска отдельного допустимого решения был мало чувствителен к выбору нулевого приближения в том смысле, что такой выбор слабо влиял на саму возможность выхода метода на какое-то из допустимых решений. Забегая вперед, отметим, что подобные методы будут предложены далее, но уже в связи с реализацией аддитивных алгоритмов интерпретации гравитационных и магнитных аномалий.

По нашему мнению, идея покрытия множества Q одними лишь локально-оптимальными решениями обратной задачи, которые впоследствии будут подвергнуты согласованию, довольно противоречива. В самом деле, исходя из традиционных воззрений, такие решения (в среднем) должны быть близки к истинному – на то они и оптимальные (пусть и по какому-то частному критерию). Но в таком случае они покроют лишь достаточно локальное подмножество $Q_0 \subset Q$. Если все же окажется, что в силу особых свойств помехи в измерениях поля локально-оптимальные решения «сдвинулись» относительно истинного решения обратной задачи $\hat{S} \in Q$, которое теперь оказалось достаточно удаленным от подмножества Q_0 , то и согласованное (компромиссное) решение не будет обладать высокой точностью. Если за верхнюю оценку точности согласованного решения будет взят диаметр подмножества Q_0 , то такой прогноз окажется чересчур оптимистичным.

Что касается второй особенности концепции согласования решений, то здесь все просто. Результат согласования есть *единичное* решение со всеми вытекающими последствиями вне зависимости от того, каким способом оно было найдено. Мы об этом уже сказали достаточно много.

Что касается третьей особенности. Если взять общий случай (не выделяя ни класс обратных задач, ни класс моделей источников аномалии), то возникнет проблема, как суммировать объемы информации, которые несут найденные допустимые решения (неважно, были они найдены с помощью одного или нескольких методов), чтобы в результате этого суммирования получить опять же какое-то одно *допустимое* решение. Так, мы слабо себе представляем, как должна выглядеть процедура усреднения, если речь идет не о векторных оценках параметров модели, а, скажем, об альтернативных носителях из множества Q .

Группа методов интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, основанная на концепции согласования допустимых решений, в каком-то смысле, находится «посередине», между двумя группами методов. По «одну сторону» от нее лежит группа методов, основанных на представлении результата интерпретации как единичного оптимального решения, выбранного с помощью скалярных критериев попарного сравнения альтернативных допустимых решений. С методами согласования допустимых решений методы этой группы объединяет форма представления результатов интерпретации.

По «другую сторону» от группы «методов согласования» лежит группа методов интерпретации, тяготеющих к гарантированному подходу [Балк, 1980_{1,2}]. Обе эти группы объединяет принцип неформального участия всех (либо, по меньшей мере, какой-то их части) допустимых решений в интерпретационном процессе.

Процедура согласования допустимых решений путем синтеза некоторого нового допустимого решения, к каким бы замысловатым конструкциям она ни прибегала, проблему гарантированного повышения точности результатов интерпретации решить не в состоянии. Ведь усредненное решение – это тоже единичное решение со всеми вытекающими недостатками, о которых много уже говорилось. Впрочем, с точки зрения подхода к решению обратных задач, который развивается авторами в последние годы, одно преимущество усредненного решения перед решением, отвечающим минимуму скалярного критерия F попарного сравнения альтернативных вариантов интерпретации, несомненно, есть.

В последнем случае решение не чувствительно к любым изменениям в структуре множества Q , если эти изменения не затрагивают точку минимума функционала F , тогда как усредненное решение стремится учесть особенности единичных допустимых решений, участвующих в процедуре согласования. Но, опять же, при неудачном задании весовых коэффициентов (их выбор – отдельная проблема) такое усредненное решение вообще может оказаться недопустимым (например, если множество Q не выпукло). Также нельзя быть уверенным, что усредненное решение превзойдет по точности все усредняемые решения. Если так, возникают новые вопросы. Сколь велика доля усредняемых решений, чья точность может оказаться выше точности усредненного решения? Может ли усредненное решение уступить решению, отвечающему минимуму некоторого функционала F , и как тогда сопоставлять две рассмотренные стратегии построения единичных оценок параметров модели? Не лучше ли обратиться к стохастическим процедурам и строить усредненное решение по множеству допустимых решений, взятых из Q случайным образом?

Заметим, что все эти «неудобные» вопросы не возникают в случае новых математических форм представления результатов интерпретации, которые будут рассмотрены в монографии и с одной из которых ($\langle D_1, D_2 \rangle$) мы уже познакомили читателя. Что примечательно, эти новые формы также являются результатом своего рода согласования допустимых решений обратной задачи, составляющих некое результативное подмножество из Q . Правда, само согласование проводится принципиально иначе, чем усреднение, и результат интерпретации, что крайне важно, уже не представляет собой элемент множества Q . По нашему твердому убеждению, цель согласования допустимых решений, понимаемая в самом широком смысле этого слова, заключается не в том, чтобы *наделить* (по чуть-чуть) итоговое решение обратной задачи свойства-

ми других допустимых решений, а в том, чтобы итоговый результат интерпретации *учитывал* факт существования целого множества альтернативных допустимых решений обратной задачи.

Несмотря на всю критику в адрес концепции оптимального решения, прозвучавшую в данной главе, уместно будет сказать, что определенные резервы у традиционного представления результатов интерпретации гравитационных и магнитных аномалий еще остались. В частности, они связаны с критериями выбора, практикуемыми в *теории принятия решений* [Ларичев, 2002]. Если же говорить в целом о резервах самой теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, то в значительной степени они связаны с осознанием всей тщетности попытки подменить неформальный, содержательный анализ множества допустимых решений обратной задачи поиском некоего «магического критерия» оптимальности и построением алгоритма поиска единичного решения, удовлетворяющего этому критерию.

1.3.7. Седьмое положение

Классические методы решения условно-экстремальных задач полностью обеспечивают потребности технологий интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Не столь категоричное заявление звучит так: ***Геофизики не могут соперничать с научной школой теории и методов решения задач минимизации – слишком неравные силы; если даже текущие возможности методов минимизации, позаимствованных у вычислительной математики, не вполне удовлетворяют насущным запросам теории и практики интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, надеяться можно лишь на то, что в будущем необходимые методы будут разработаны математиками.***

До сих пор мы обсуждали характерные заблуждения, относящиеся непосредственно к *методологии* теории интерпретации гравитационных и магнитных полей. Сейчас речь пойдет о проблеме *вычислительного* характера. Спрашивается, действительно ли классические методы решения условно-экстремальных задач обеспечивают потребности современной теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий в эффективном рабочем инструменте для решения обратных задач. Нас, конечно, будет интересовать и другой вопрос: в какой мере обновленная и полностью адекватная реалиям теория интерпретации, базирующаяся на новых математических формах представления результатов интерпретации, может рассчитывать на известные методы минимизации, разработанные в вычислительной математике.

Возьмем за основу рассуждений типичную постановку обратной задачи гравиразведки, которую предполагается решать в рамках концепции подбора.

Итак, пусть:

1) осуществлена формализация конечнопараметрической модели источников аномалии и модели наблюдаемого поля;

2) задекларирован набор ограничений на свободные параметры в этих моделях;

3) дана установка на поиск оптимального вектора параметров модели возмущающего объекта, минимизирующих некий функционал F ;

4) выбран один из методов решения условно-экстремальных задач, имеющих в арсенале вычислительной математики, с помощью которого будет выполнена минимизация функционала F (может оказаться, что попутно придется оценить какие-то мешающие параметры модели, например – коэффициенты регионального фона).

Поставим вопрос так: какие вычислительные проблемы могут возникнуть при решении сформулированной обратной задачи с помощью классических методов решения условно-экстремальных задач, и к каким методологическим неувязкам может привести неполное решение этих проблем?

Начнем с последних двух пунктов в рассматриваемой постановке обратной задачи и констатации факта существования противоречия, изначально заложенного по умолчанию в эту постановку. Суть в том, что, формулируя обратную задачу как задачу поиска глобального минимума некоторого функционала (в частности, невязки наблюдаемого и модельного полей) и выбирая наиболее подходящий алгоритм оптимизации, позаимствованный у вычислительной математики, мы почти всегда знаем заранее, что алгоритм с этой задачей не справится. Во всяком случае, тогда, когда минимизируемый функционал имеет сложный рельеф, поскольку проблема глобального минимума многоэкстремальных функций не решена [Бахвалов и др., 2003]. Вольно или нет, но мы практикуем двойные стандарты: предлагаем критерий оптимальности, с возможностью реализовать который средствами вычислительной математики связываем состоятельность выбранного алгоритма, тогда как фактически находим приближенное решение обратной задачи по другому, не вполне ясно какому критерию. И объясняем это непреодолимыми причинами в виде нерешаемой проблемы глобального оптимума. Можно сказать и так: в постановке обратной задачи, предполагающей возможность построения решения, отвечающего глобальному минимуму многоэкстремальной функции, изначально заложена неадекватность теоретических предпосылок реальной практике применения алгоритма, построенного на этих предпосылках.

Наиболее известный прием, формально позволяющий обойти проблему глобального экстремума, заключается в том, чтобы переключиться с этой проблемы на проблему отыскания решения обратной задачи, отвечающего локальному экстремуму минимизируемой функции. Здесь классические методы решения условно-экстремальных задач практически не сталкиваются с

ощутимыми трудностями. Но это лишь еще более запутывает ситуацию. В самом деле, если мы настаивали на превосходстве решения, обеспечивающего глобальный минимум невязки, то спрашивается: чем же решение, которое не соответствует локальному минимуму невязки и обеспечивает некое «рядовое» значение F_1 , хуже решения, отвечающего локальному минимуму функционала $F_2 > F_1$. Логика в этом нет. Однако повторимся: если оба значения F_1 и F_2 допустимы, то такого рода подвижки в сторону глобального минимума функционала для целей гарантированного повышения точности решения обратной задачи не имеют, как мы установили раньше, большого значения. Другое дело, что мы сталкиваемся порой с неопределенностью такого рода: метод оптимизации не вышел на приемлемое значение функционала (например, на допустимую невязку) и не ясно, то ли метод просто «не дотянул» до такого значения, то ли взятая модель источников поля и априорные ограничения противоречивы. В этой связи новые результаты по проблеме глобального экстремума, сокращающие разрыв между достигнутым значением функционала и его неизвестным наименьшим значением, дают дополнительные возможности снизить вероятность столкновения с подобным исходом.

Продолжая обсуждение проблемы глобального экстремума и выбора наиболее подходящих методов минимизации стоит сказать, что в рамках самой теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий периодически появляются работы по этой тематике [Гольдшмидт, 1979; Майер и др., 1985; Булах, 1999; Балк, 2017], по результатам которых сделаны выводы о преимуществах и недостатках методов минимизации многопараметрических функционалов, наиболее часто используемых при решении обратных задач для геопотенциальных полей. Какие-то из методов существенно доработаны с учетом специфики геофизических задач [Старостенко, 1978]. По результатам широкого вычислительного эксперимента геофизики подбирают из числа им известных наиболее эффективные методы оптимизации для решения определенных классов обратных задач грави- и магниторазведки. В конце концов, и с проблемой глобального экстремума еще не все потеряно – математики пока не считают ее бесперспективной и продолжают активные поиски ее решения. Исследования ведутся по многим направлениям. Здесь и построение рандомизированных алгоритмов, основанных на сочетании случайного просмотра области поиска и локальных детерминированных методов поиска минимума [Рубан, 2004], и моделирование комбинированных алгоритмов на основе нечетко-нейронных сетей [Кошур, 2006], а также многочисленные генетические алгоритмы, использующие модели эволюционного развития [Курейчик, 1999].

Конечно, такие алгоритмы достаточно сложны и не предназначены для массового использования при необходимости однократного решения большого числа оптимизационных задач. Но здесь можно возразить, что, во всяком случае в рамках традиционного подхода к обратным задачам гравитационной разведки

и магниторазведки, требуется *всего один раз* решить условно-экстремальную задачу. Одним словом, с какой бы долей успеха ни выполнялись эти исследования, они могут оказаться полезными: если проблема глобального экстремума даже не будет решена, то будут найдены возможности для обеспечения меньшего значения функционала F , а значит и выхода алгоритма решения обратной задачи на приемлемое значение невязки.

При отсутствии монотонной зависимости точности решения обратной задачи от меры близости наблюденного и модельного полей проблема глобального минимума, с нашей точки зрения, не должна восприниматься так остро. Необходимо просто отказаться от сомнительной концепции, что «оптимальным является решение, обеспечивающее минимум невязки». На практике задача поиска глобального минимума невязки всегда по умолчанию рассматривается как средство, позволяющее алгоритму выйти на некоторое *допустимое* значение невязки, соответствующее предполагаемому уровню помех в измерениях поля. Иначе говоря, минимизация невязки – это не самоцель, а способ удовлетворить один из типов априорной информации, тогда как остальные типы априорной информации удалось формализовать. Мы полагаем, что вряд ли кто из геофизиков серьезно связывает успех интерпретации с возможностью обеспечить абсолютный минимум критерия оптимальности. В практических задачах мы осознанно идем на то, что не достигнем глобального минимума функционала, но надеемся, что в процессе стремления к нему выйдем на достаточно малое, приемлемое его значение (как правило – сопоставимое с точностью задания интерпретируемых значений поля, например – с точностью определения аномалий Буге). И при таком подходе к проблеме глобального минимума любые подвижки в ее решении, даже если они не достигли конечной цели, можно лишь приветствовать.

Проблема глобального минимума не единственная, значимость которой в теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий несколько преувеличивается. Скорее всего, некоторые специалисты, работающие в области прикладной геофизики, находятся под влиянием критериев ценности теоретического результата, сложившихся в математике, и готовы придавать необоснованно высокое значение вопросам, малозначимым для практики интерпретации. Так, например, известны публикации, в которых обсуждается возможность существования нескольких векторов параметров модели источников поля, обеспечивающих одно и то же значение локального минимума невязки, как будто это имеет решающее влияние на качество результата интерпретации. Создается впечатление, что эти и подобные факты были подсмотрены в каких-то разделах математики (где, наверное, они имели важное значение) и ошибочно отложились в памяти как факторы, гарантирующие успех в любых прикладных задачах.

Итак, если подходить формально, то к классическим методам решения экстремальных задач можно предъявить претензию по поводу нерешенной

проблемы глобального минимума. Но, с учетом приведенных выше доводов, читатель, вероятно, согласится, что при правильном понимании назначения этих методов при поиске допустимого варианта интерпретации отсутствие гарантии выхода на глобальный минимум функционала не имеет принципиального значения.

В действительности, больше вопросов должно возникать в отношении второго пункта приведенной выше характерной постановки обратной задачи. Суть в том, что классическая теория условно-экстремальных задач предъявляет четкие требования к математической форме записи ограничений на оптимизируемые переменные. Это должна быть система неравенств или равенств. Если взять известные алгоритмы решения обратных задач гравиразведки и магниторазведки, то в заметном числе из них присутствуют лишь двухсторонние ограничения на отдельные параметры модели источников поля, либо линейные комбинации из них. Для некоторых модельных классов M , привлекательных по ряду позиций (например, в аналитическом плане или по аппроксимативным свойствам), требования теории решения оптимизационных задач к форме записи ограничений на оптимизируемые параметры могут оказаться обременительными. Интерпретаторы наверняка не раз сталкивались с трудностями формализации априорной информации и вынуждены были довольствоваться лишь теми ограничениями, которые легко можно было записать в виде системы неравенств. Это хорошо видно на примере обратных задач гравиразведки рудного типа.

Остановимся на том, какими достаточно общими модельными классами источников поля располагает теория интерпретации гравитационных и магнитных аномалий при решении обратных задач рудного типа и каковы перспективы их применения в *автоматизированных* технологиях интерпретации. По нашему мнению, таких модельных классов не слишком много, а точнее, всего два – класс произвольных однородных по физическим характеристикам многогранников (многоугольников в плоской постановке обратной задачи) и конечноэлементный класс источников поля, в рамках которого модельные возмущающие тела представляют собой объединения конечного числа элементов замощения V_j изучаемой части пространства D .

Аналитические результаты по решению прямых задач гравиразведки в классе многогранников являются, образно говоря, одним из «бриллиантов в короне достижений» математической теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Достаточно напомнить об экономичных алгоритмах вывода аналитических формул решения прямой задачи [Страхов, Лапина, 1982_{1,2}]. Этот класс обладает и хорошими аппроксимационными свойствами – любое геологическое тело можно с заданной точностью описать многогранником при надлежащем выборе числа вершин. Класс многогранников составляет основу едва ли не всех диалоговых систем моделирования гравитационных и магнит-

ных аномалий. К сожалению, на этом весь позитив заканчивается, как только речь начинает идти об использовании этого класса моделей в *полностью автоматизированных* технологиях интерпретации. Разговор даже не доходит до обсуждения вопроса о формализации априорной информации в виде неравенств и, соответственно, о возможностях классического аппарата решения условно-экстремальных задач. Дело в том, что классом многогранников как модельным классом источников поля в принципе невозможно воспользоваться в формализованных алгоритмах решения обратной задачи из-за банальной необходимости контроля за последовательностью обхода вершин многогранника. Но если бы даже не такая необходимость, то проблема возникла бы на этапе формализации ограничений топологического характера в терминах равенств и неравенств. Конечно, можно пойти на сужение рассматриваемого модельного класса, как предлагалось, в частности, в работах Е.Г. Булаха [2010]. Однако это не лучший выход из положения. Диагноз классу произвольных многогранников как претенденту на использование в автоматизированных технологиях интерпретации гравитационных и магнитных аномалий поставил Ю.И. Блох [1995], отметивший, что автоматическая параметризация многогранников произвольной формы невозможна и решение этой задачи есть удел человека-интерпретатора. Не в этом ли кроется одна из причин, что основная доля публикаций по полностью формализованным методам решения нелинейных обратных задач гравиразведки приходится на структурные обратные задачи?

А как обстоят дела с совместимостью классических методов решения условно-экстремальных задач и конечноэлементных модельных описаний носителей источников гравитационных и магнитных аномалий? В вычислительном плане такие классы источников даже более привлекательны, чем класс многогранников, да и по аппроксимационным свойствам не уступают ему. Возможность их использования в сочетании с методами линейного программирования при решении обратной задачи гравиразведки рудного типа интенсивно изучалась в 60-х годах прошлого века [Дядюра, Шалаев, 1968; Ломтадзе, 1968; Шалаев, 1972]. Однако надежды на то, что полученные распределения плотностей будут похожими на однородные связные тела, не оправдались (что совершенно ожидаемо, имея в виду результаты А.И. Кобрунова [2008]). Не помогло и включение в минимизируемый функционал штрафного слагаемого, призванного как-то «фокусировать» массы [Жданов, 2007]. В названной работе речь шла о простейшем случае моделирования локального изолированного источника поля. Вряд ли успех могут обеспечить и методы целочисленного программирования в варианте безусловной минимизации, когда с каждым конечным элементом V_j пространства ассоциируется бинарная переменная x_j , принимающая значение 1, если элемент V_j является фрагментом возмущающего тела, и значение 0 в противном случае. «Размазывания» распределения масс по всей области D , предположительно содержащей все источники анома-

лии, при этом удастся избежать. Модельное решение будет представлять собой совокупность достаточно большого числа отдельных, хаотично «вкрапленных» в область D локальных масс заданной плотности. Но гарантировать, что эти «вкрапления» будут объединены в нужное число связных (односвязных) фрагментов, будет сложно. С введением в постановку задачи различных типов априорной информации ситуация лишь осложняется. Даже для ограничений на максимально возможную мощность возмущающих объектов по латерали и вертикали эффективные способы их учета будет, по видимому, трудно подобрать; скорее всего, придется вводить в рассмотрение еще одну группу целочисленных переменных, ассоциированных теперь уже с номерами элементов V_j . Структура самих ограничений-неравенств будет тесно привязана к структуре замощения области D элементами V_j , точнее – с алгоритмом нумерации этих элементов. Не менее простой видится и формализация в терминах неравенств ограничений на топологию конечноэлементного решения обратной задачи.

Речь идет о свойствах связности и односвязности носителя и ограничениях на гладкость отдельных фрагментов его границы. Не остается иного, как опираясь на собственные интеллектуальные ресурсы разрабатывать проблемно-ориентированные методы оптимизации, использующие в полной мере специфику обратных задач гравиразведки и магниторазведки. Такие мысли неоднократно высказывал В.Н. Страхов. Монтажные методы поиска допустимых решений обратных задач рудного типа, которым посвящены три следующие главы, иллюстрируют правомерность и результативность этой идеи.

Зададимся теперь вопросом: способны ли алгоритмы оптимизации, заимствованные у вычислительной математики, полностью удовлетворить требованиям новых технологий интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Скажем сразу, ответ будет отрицательным. Наиболее отчетливо недостаточность классического аппарата решения задач оптимизации проявляется при изучении потребностей технологий интерпретации, реализующих концепцию гарантированного подхода и идею аддитивных методов решения обратных задач рудного типа, рассматриваемых в двух последних главах монографии. Мы постараемся особо не забегать вперед, и потому – не раскрывая особенности рассматриваемых в этих главах методов – просто назовем некоторые не типичные требования, предъявляемые этими технологиями к алгоритмам решения условно-экстремальных задач.

Так, в аддитивных технологиях интерпретации [Балк, Долгаль, 2016, 2018], которые мы видим в будущем в роли одних из ведущих и которые опираются на достаточно мощные и представительные подмножества предварительно найденных допустимых решений обратной задачи, на методы оптимизации возлагается еще одно дополнительное требование. При поиске каждого очередного допустимого варианта интерпретации этим методам придется «стартовать» с произвольного нулевого приближения, которое не только само по себе, но и по

полю может существенно отличаться от неизвестного истинного распределения аномалиеобразующих масс. Для известных методов, где наличие нулевого приближения, близкого к искомому решению, является определяющим, это может оказаться трудно преодолимой преградой. Кроме того, методы оптимизации, применяемые в технологиях, когда требуется построить не одно, а несколько сотен, или даже тысяч допустимых решений обратной задачи (таким образом, мы уже говорим о *полностью формализованных* методах), должны автоматически корректировать ход итерационного процесса, с тем чтобы он не вышел на какое-то из уже найденных допустимых вариантов интерпретации.

Весьма желательно также, чтобы найденные допустимые решения, по которым будет построен итоговый вариант интерпретации, причем в терминах, отличных от ныне практикуемых, по возможности наиболее полно представляли все множество Q . Иными словами, были достаточно «равномерно рассредоточены» по этому множеству. Для обеспечения «разнообразия» найденных решений обратной задачи в постановку задачи оптимизации придется помимо априорных включить некоторые дополнительные (направляющие итерационный процесс) ограничения, которые обязаны целенаправленно обновляться. В силу этого метод каждый раз будет искать решение, по определенным признакам отличающееся от найденных, что и обеспечит представительность в целом набора построенных вариантов интерпретации. Все эти непривычные требования лишь усиливают нагрузку на используемые методы оптимизации.

Выше мы были вынуждены раньше срока раскрыть одну из новых математических форм представления результатов интерпретации. Речь шла о паре $\langle D_1, D_2 \rangle$ пространственных областей. Первая из них представляет собой минимальный из фрагментов пространства, целиком содержащих возмущающие массы. Вторая – представляет собой максимальный из фрагментов пространства, целиком заполненный возмущающими массами. Будет показано, что приближенные оценки D_1^* и D_2^* областей D_1 и D_2 можно достаточно эффективно искать в виде объединения некоторого числа элементов V_j замощения пространства. В этом случае исходная проблема построения области D_1^* формулируется как задача идентификации элементов V_j на предмет принадлежности хотя бы одному из допустимых носителей S_α^* возмущающих масс (при этом не обязательно даже знать какому именно), тогда как элемент V_j принадлежит области D_2 , если он принадлежит всем допустимым носителям. Нетрудно догадаться, какие трудности будут сопровождать построение оценок D_1^* и D_2^* , если эту процедуру свести к классическим методам минимизации. На примере решения рудной обратной задачи в терминах областей D_1 и D_2 ошибочность мнения, согласно которому все потребности теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий в методах оптимизации можно удовлетворить за счет классических методов, видны достаточно отчетливо. Имея в виду этот класс обратных задач, актуальность проблемы создания специализиро-

ванных, геофизически ориентированных методов минимизации не должна вызывать возражения.

В заключение раздела скажем следующее. Авторы полагают, что им удалось раскрыть всю сложность создания на основе классического аппарата решения условно-экстремальных задач современных автоматизированных технологий интерпретации, предусматривающих построение достаточно большого числа допустимых решений обратной задачи, которые обладают, к тому же, некоторыми дополнительными свойствами, не прописанными в априорной информации, и не чувствительных к выбору нулевого приближения. Как будет показано в трех следующих главах, проблема универсальной связки конечно-элементного модельного класса M источников аномалии и эффективных процедур поиска отдельных допустимых носителей возмущающих масс успешно решается с помощью различных модификаций *проблемно-ориентированного* монтажного метода Страхова-Лапиной [Страхов, Лапина, 1976₁₋₃; Страхов, 1980]. Развитию этого метода, который изначально был разработан для решения достаточно частной обратной задачи (в ней вся априорная информация сводится к тому, что источник аномалии является связным телом), и его апробации при решении практических задач в последние 20 лет был посвящен не один десяток работ, в частности [Балк, 1989, 1993, 1997, 2017; Балк, Балк, 2000; Балк, Балк Т., 1995, 1996; Балк, Долгаль, 2009, 2015, 2016, 2019; Балк, Йеске, 2013; Балк и др., 1993, 1994, 2009₁, 2011₃, 2012_{1,3}, 2015₂, 2016₃; Блох и др., 2012, 2013, 2018, 2019; Бычков и др., 2013, 2015; Долгаль, 2012, 2017, 2019_{1,2}; Долгаль, Мичурин, 2010; Долгаль и др., 2011, 2012, 2013, 2015, 2017; Рашидов и др., 2009; Balk, Dolgal, 2019]. «Момент истины» для различных обобщений монтажного алгоритма состоит в том, что они не требуют предварительной формализации априорных ограничений в терминах равенств и неравенств. Априорная информация, о которую «споткнулись» известные методы минимизации, благодаря специальному, адаптированному к геофизическим задачам, структурированию итерационного процесса вполне доступна этим алгоритмам. Результаты успешного применения монтажных алгоритмов опровергают широко распространенное заблуждение относительно *бесперспективности конечно-элементных модельных классов источников поля*. Напомним, что поводом к такому заблуждению стала высокая степень неустойчивости решения *линейной* обратной задачи гравиразведки в сеточных классах, с которой сталкивались многие геофизики, и это свойство было незаслуженно распространено на нелинейные обратные задачи рудного типа.

Глава 2

**БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ, ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ
И ТИПОВЫЕ ЗАДАЧИ В КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ
КЛАССАХ ИСТОЧНИКОВ ПОЛЯ**

Данная глава носит вспомогательный характер; ее результаты используются в трех последующих главах при построении монтажных алгоритмов поиска допустимых решений обратной задачи, необходимых для реализации гарантированного подхода и аддитивных методов интерпретации в случае рудной модели источников гравитационных и магнитных аномалий.

Алгоритмы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, построенные на основе классических методов решения условно-экстремальных задач, обходятся одной общей понятийной базой, в которую нет необходимости вносить описание специфических особенностей используемых модельных классов источников поля. Достаточно задекларировать, что модель возмущающего объекта задается вектором параметров $p \in \mathbf{R}^n$, и дальнейшее описание алгоритма решения обратной задачи вести уже в терминах классической теории минимизации, когда (в характерном случае) особенности структуры оператора прямой задачи отразятся в структуре минимизируемого функционала. Монтажные алгоритмы имеют свои особенности. Эти алгоритмы используют одни и те же специальные операции с конечноэлементными моделями. Здесь требуется своя особая терминология и используются специфические приемы решения типовых промежуточных задач, возникающих, в частности, в связи с анализом топологии текущих приближений к модели носителя возмущающих масс. Решение любой такой задачи носит не *аналитический* характер (когда условие выполнения заданного ограничения сводится к тому, что значение определенной функции параметров модели источников поля должно удовлетворять какому-то неравенству), а *алгоритмический*, и представляет собой реализацию некоторого итерационного

процесса. Этим, в частности, объясняется плохая совместимость конечноэлементных постановок обратных задач рудного типа с классическими методами решения условно-экстремальных задач.

2.1. Базовые понятия

Скажем, что система V , элементами которой являются выпуклые замкнутые многоугольники (многогранники) V_n , образует *замощение* заданной области D плоскости \mathbf{R}^2 (пространства \mathbf{R}^3 в трехмерной обратной задаче), если объединение всех элементов V_n системы V содержит область D , а общими у двух элементов V_i и V_j могут быть разве что их граничные точки. При решении обратных задач рудного типа в качестве области D выбирается ограниченная часть пространства, заведомо содержащая возмущающие геологические объекты, а объединения элементов замощения V_n используются при описании модельного носителя источников поля. По умолчанию предполагается, что указан некий алгоритм B_0 , позволяющий для каждого V_n определить множество $I(V_n)$ (коротко $I(n)$) номеров элементов замощения V_i , граничащих с элементом V_n . В случае плоского замощения можно договориться не включать в индексное множество $I(n)$ номера элементов V_i , имеющих с V_n лишь одну общую точку (например, общую с элементом V_n вершину в случае замощения области D квадратами), а в случае \mathbf{R}^3 – даже общий отрезок (когда, к примеру, соприкосновение двух многогранников происходит по их общему ребру).

Замощение V является *регулярным*, если все его элементы V_n конгруэнтны некоторому (протоэлементу) V_0 . К «маленьким хитростям», упрощающим вычислительную схему решения обратной задачи в случае применения регулярных замощений, можно отнести прием, когда в качестве области D берутся прямоугольники (параллелепипеды). При этом весьма удобна двухиндексная (в \mathbf{R}^2) и трехиндексная (в \mathbf{R}^3) нумерация элементов замощения. Благодаря ей всегда удается подобрать достаточно простую функцию $\phi : n \rightarrow I(n)$. Важной характеристикой регулярного замощения является размер его элементов. Если замощение выполнено с помощью правильных многоугольников (многогранников), то такой характеристикой может служить *линейный параметр замощения* – длина стороны (ребра) геометрической фигуры. В общем случае характеристикой величины элементов регулярного замощения может служить лебегова мера $\mu(V_0)$ его протоэлемента, характеризующая детальность замощения.

Несколько более громоздкие вычислительные схемы возникают в случае использования *нерегулярных* замощений. Однако такие замощения имеют одно важное преимущество перед регулярными замощениями. Если соотношение между мерами отдельных элементов V_n выдержано таким образом, что

средние значения поля по точкам измерения, рассчитанные от каждого элемента V_n , близки друг к другу и равны некоторому \bar{u}_0 , то это позволяет построить «равномерно устойчивое» решение обратной задачи. Точность воспроизведения приближенным решением S^* границ истинного носителя \hat{S} с глубиной в этом случае мало изменяется. Кроме того, при решении обратных задач на основе нерегулярных замощений параметрическую размерность модели источников можно существенно понизить без ущерба для качества результата интерпретации. На рис. 2.1 представлены несколько типов замощений в \mathbf{R}^2 .

Объединение Ω любого числа элементов замощения V_n (в том числе и одиночный элемент) будем называть *конфигурацией*, множество $Y(\Omega)$ этих элементов – *ядром* конфигурации Ω , множество $O(\Omega)$ элементов $V_n \subset V$, не принадлежащих $Y(\Omega)$, но граничащих хотя бы с одним элементом из $Y(\Omega)$ – *оболочкой* конфигурации Ω . Понятия ядра и оболочки конфигурации были введены в работе [Страхов, Лапина, 1976₁] для описания простейшего варианта монтажного метода решения обратной задачи – так называемого *метода регулируемой направленной кристаллизации* (РНК).

С учетом потребностей математического описания различных обобщений метода РНК, разработанных авторами монографии, расширим список понятий. Назовем подмножество $\Gamma(\Omega) \subseteq Y(\Omega)$ элементов ядра $Y(\Omega)$, каждый из которых граничит хотя бы с одним элементом оболочки $O(\Omega)$, *границей*, а подмножество $Y_0(\Omega) \subset Y(\Omega)$ элементов ядра $Y(\Omega)$, не граничащих ни с одним

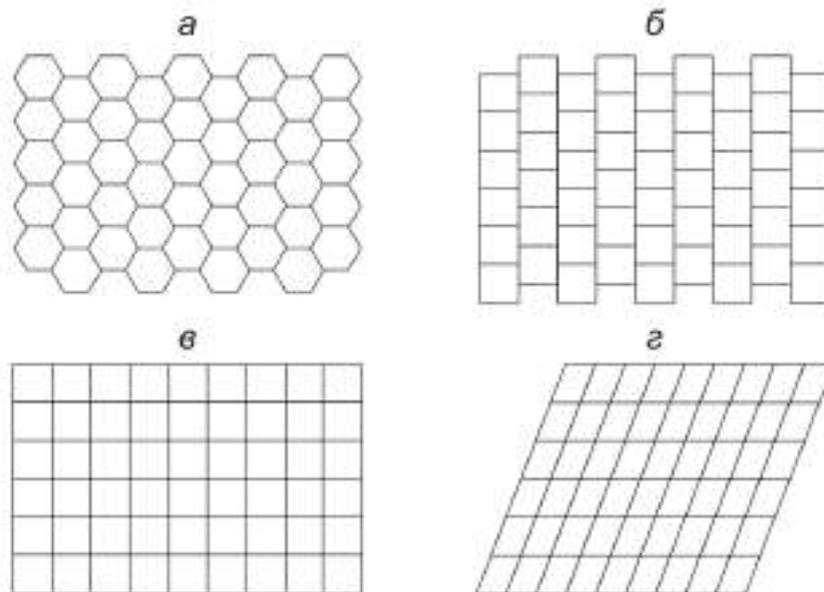


Рис. 2.1. Некоторые типы регулярных плоских замощений: а – шестиугольниками; б, в, г – четырехугольниками.

элементом оболочки $O(\Omega)$ – внутренним ядром конфигурации. Мощностью $|\mathcal{Y}(\Omega)|$ ядра конфигурации Ω назовем число элементов замощения V_n , входящих в это ядро (по аналогии вводится понятие мощности оболочки, границы и внутреннего ядра). Как принято в подобных случаях, введем понятия пустой конфигурации $\Omega = \emptyset$, мощность ядра которой равна нулю. Граница и оболочка такой конфигурации, соответственно, также являются пустыми множествами. Обратим внимание на то, что случай, когда внутреннее ядро конфигурации пусто, не является каким-то особенным.

Легко догадаться, что в компьютерных технологиях все операции в сеточных классах M источников поля выполняются непосредственно не с множествами $\mathcal{Y}(\Omega)$, и $O(\Omega)$, $\Gamma(\Omega)$ и $\mathcal{Y}_0(\Omega)$ элементов замощения V_n , а с соответствующими множествами их номеров n . В монтажных методах решения обратных задач основные операции сводятся к обмену оболочки и границы конфигурации некоторыми подмножествами своих элементов V_n . Возможность осуществлять такие операции в целочисленной арифметике способствует сокращению времени, которое требуется для реализации этих методов.

Определяющими свойствами конфигурации Ω являются *связность* и *односвязность*, а также *гладкость* ее границы $\Gamma(\Omega)$, которая при решении обратных задач практически всегда в том или ином виде присутствует в априорных ограничениях, способствуя заметному ослаблению влияния приближенной эквивалентности. Конфигурацию Ω ($|\mathcal{Y}(\Omega)| \geq 2$) назовем *связной* (проще говоря, неделимой на несколько отдельных конфигураций, попарно не граничащих друг с другом), если любые два элемента V_i, V_j , принадлежащие множеству $\mathcal{Y}(\Omega)$, можно встроить в последовательность

$$V_i = V_{k(1)}, V_{k(2)}, \dots, V_{k(m)} = V_j, \quad m \geq 2, \quad (2.1)$$

элементов ее ядра, такую что

$$V_{k(r)} \in O(V_{k(r+1)}), \quad r = 1, 2, \dots, m-1. \quad (2.2)$$

Конфигурацию, ядро которой состоит из одного элемента замощения, отнесем к связным. Связной будем также считать конфигурацию с пустым ядром. Конфигурацию Ω назовем *односвязной*, если для любых двух элементов замощения области D , не принадлежащих ее ядру, можно подобрать связную конфигурацию Ω_1 , ядро которой содержит оба эти элемента и имеет пустое пересечение с ядром $\mathcal{Y}(\Omega)$. Заметим, что согласно такому определению конфигурационный «аналог» трехмерного торообразного тела относится к односвязным. Оболочка связной односвязной конфигурации (конфигурации, не имеющей «пустот» (иногда говорят – «дыр») является ядром некоторой связной конфигурации. В случае связной, но не односвязной конфигурации есть смысл выделить из ее оболочки *внешний* и *внутренний* фрагменты. Пусть Ω – такая конфигурация, тогда как Ω' – минимальная связная односвязная конфигурация, ядро

$Y(\Omega')$ которой содержит ядро $Y(\Omega)$. Внутренней оболочкой $O^-(\Omega)$ конфигурации Ω назовем пересечение $O(\Omega) \cap Y(\Omega')$, а ее внешней оболочкой $O^+(\Omega)$ – дополнение внутренней оболочки $O^-(\Omega)$ до $O(\Omega)$. Если число m «дыр» в конфигурации Ω больше одного, то внутреннюю оболочку $O^-(\Omega)$ можно разбить на m парциальных фрагментов $O_k^-(\Omega)$, $k = 1, 2, \dots, m$, каждый из которых суть граница $\Gamma_k(\Omega)$ конфигурации Ω_k , заполняющей соответствующую «дыру» в конфигурации Ω . Соответствующий алгоритм будет рассмотрен ниже.

В обратных задачах рудного типа понятие гладкости призвано количественно охарактеризовать степень «изрезанности» границы изучаемых геологических объектов. За интегральную характеристику гладкости конфигурации Ω можно взять отношение $\nu = |\Gamma(\Omega)|/|Y(\Omega)|$ (при уменьшении значения ν конфигурация становится в целом более гладкой). Интегральная оценка гладкости конфигурации тяготеет к классическому подходу к проблеме задания априорных ограничений. Особенность конечноэлементных моделей источников поля проявляется не только в линейных постановках обратной задачи, когда без использования двухсторонних ограничений на оптимизируемые эффективные плотности решение почти наверняка будет бессодержательным. При решении обратных задач рудного типа значение отношения ν не достаточно для того, чтобы охарактеризовать гладкость носителя; его достаточно малое значение не исключает появление геологически малосодержательных фрагментов границы модельного носителя возмущающих масс. В работе [Балк, 1989] предложено использовать дифференцированный подход к проблеме гладкости границы конфигурации, когда осуществляется контроль за особенностью строения отдельных фрагментов ее границы. Имеются различные возможности формализации понятия гладкости локальных фрагментов границы конфигурации, в том числе и с использованием понятия «отростка» как малосодержательного фрагмента ее границы, представляющего собой «ветвящуюся цепочку», собранную из некоторого числа элементов замощения. Противоположным понятию отростка является понятие «разреза» конфигурации, который может, как и отросток, иметь достаточно причудливую форму. Разрез плоской конфигурации Ω можно рассматривать как отросток другой конфигурации, чье ядро является дополнением $Y(\Omega)$ до множества всех элементов замощения. К примеру, в двумерной постановке обратной задачи, базирующейся на регулярном замощении типа a, b (см. рис. 2.1), за отросток конфигурации Ω можно принять связную конфигурацию $T(\Omega) \subseteq \Omega$, такую, что пересечение оболочки каждого элемента $V_n \subset T(\Omega)$ с ядром $Y(\Omega)$ не содержит граничащих элементов из этого ядра.

На рис. 2.2 приведена связная (но не односвязная) конфигурация, обладающая четырьмя отростками и двумя разрезами. Внутренняя оболочка конфигурации состоит здесь из элементов замощения, заполняющих обе «дыры». Соответственно, внешняя оболочка состоит из всех элементов замощения,

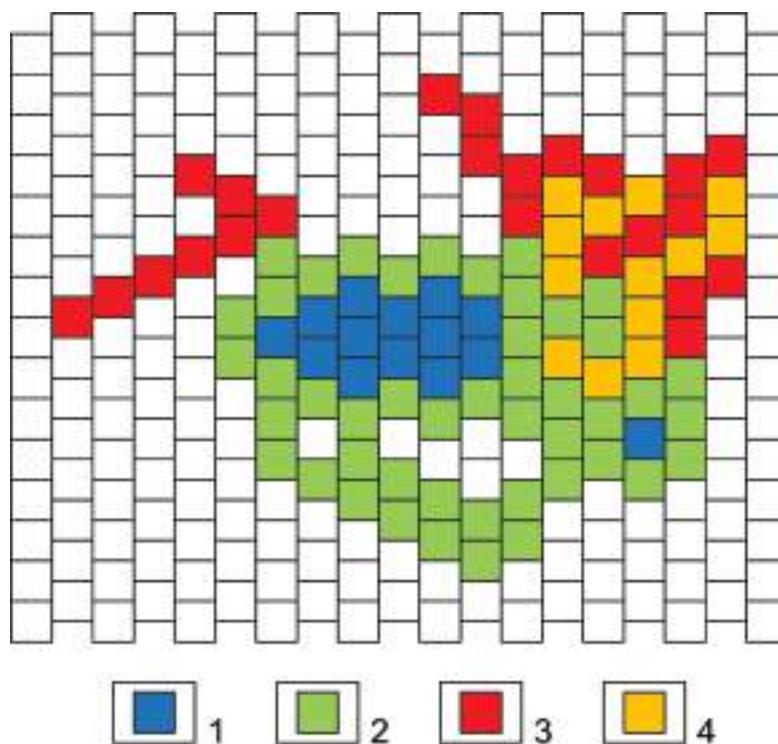


Рис. 2.2. Связная (но не односвязная – две «дыры» из одного и пяти элементов замощения) конфигурация Ω с четырьмя «отростками» (длины три, пять, семь и восемь), двумя «разрезами» и с несвязной «внутренностью»: 1 – элементы внутреннего ядра $\mathcal{Y}_0(\Omega)$ конфигурации; 2 – элементы границы $\Gamma(\Omega)$ конфигурации, не вошедшие в отростки; 3 – элементы ядер $\mathcal{Y}(T(\Omega))$ отростков $T(\Omega)$ конфигурации; 4 – элементы фрагментов оболочки $\mathcal{O}(\Omega)$ конфигурации, представляющих ее «разрезы».

граничащих с элементами ядра конфигурации, исключая элементы, заполняющие дыры. Элементы замощения, составляющие разрезы, также относятся здесь к внешней оболочке.

Для оценки близости двух модельных носителей, один из которых (S°) является аппроксимацией истинного носителя \hat{S} возмущающих масс, а другой (S^*) является приближенным решением обратной задачи, не обойтись без функционала расстояния. В характерных случаях при описании модели источников вектором p каждая из его компонент p_i принимает *несчетное* множество значений. «Элементарным представителем» пространства в таком случае является *точка*. В отличие от этого, множество конфигураций, построенных на заданном замощении, хотя чрезвычайно велико, но все равно *конечно*. «Элементарным представителем» пространства в этом случае уже является *элемент замощения*. Соответственно, нет смысла при оценке расстояния меж-

ду двумя конфигурациями пользоваться известными метриками, в которых фигурируют точки пространства, например метрикой Хаусдорфа. Мы предлагаем ввести для этой цели специальное понятие расстояния между двумя конфигурациями.

Пусть Ω_1 и Ω_2 , где $\mathcal{Y}(\Omega_1) \cap \mathcal{Y}(\Omega_2) = \emptyset$, $|\mathcal{Y}(\Omega_1)| \geq 1$, $|\mathcal{Y}(\Omega_2)| \geq 1$ – связные конфигурации, определенные на некотором замощении V . Пусть также Ω – система всех связных конфигураций $\Omega_{1,2}^{(j)}$, ($\mathcal{Y}(\Omega_{1,2}^{(j)}) \cap \mathcal{Y}(\Omega_1) = \emptyset$, $\mathcal{Y}(\Omega_{1,2}^{(j)}) \cap \mathcal{Y}(\Omega_2) = \emptyset$, $j = 1, 2, \dots, j_0$), объединение ядра каждой из которых с ядрами $\mathcal{Y}(\Omega_1)$ и $\mathcal{Y}(\Omega_2)$ представляет собой ядро некоторой связной конфигурации. Предположим, что $\Omega_{1,2}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, k_0$, $k_0 \geq 1$ – те из них, которые обладают минимальной мощностью: $|\mathcal{Y}(\Omega_{1,2}^{(k)})| = m$, $k = 1, 2, \dots, k_0$. Натуральное m назовем *конфигурационным расстоянием* $\rho(\Omega_1, \Omega_2)$ между конфигурациями Ω_1 и Ω_2 , а саму конфигурацию $\Omega_{1,2}^{(k)}$, обладающую минимальной мощностью, – *минимальной связующей конфигурацией*. Подчеркнем следующее:

1) в общем случае минимальных связующих конфигураций может быть несколько ($k_0 > 1$);

2) если объединение конфигураций Ω_1 и Ω_2 уже оказалось связной конфигурацией, то конфигурационное расстояние между ними принимается равным нулю (в этом случае минимальных связующих конфигураций только одна, и это конфигурация с пустым ядром);

3) логично считать нулевым и конфигурационное расстояние между двумя конфигурациями, ядра которых имеют общие элементы замощения.

Условное конфигурационное расстояние $\rho_A(\Omega_1, \Omega_2)$ между двумя связными конфигурациями Ω_1 и Ω_2 определим по аналогии с введенным выше («простым») конфигурационным расстоянием $\rho(\Omega_1, \Omega_2)$, с той лишь разницей, что выбор конфигурации $\Omega_{1,2}^{(k)}$ осуществляется среди конфигураций, удовлетворяющих заданному дополнительному условию A . Таким условием может, в частности, стать требование, согласно которому в ядро минимальной связующей конфигурации не имеют права входить элементы замощения, содержащиеся в ядре некоторой третьей конфигурации Ω^- , либо, напротив, оно обязано содержать элементы замощения ядра некоторой конфигурации Ω^+ . В определенных ситуациях условное расстояние может не существовать (нет ни одной связующей конфигурации, отвечающей заданному условию A). При решении обратных задач в классе конфигурационных носителей источников поля такое возможно при задании заведомо противоречивых, взаимоисключающих ограничений.

С понятием конфигурационного расстояния и длиной минимальной связующей конфигурации тесно связаны следующие два понятия. *Простейшей правильной конфигурацией* порядка $m > 1$, ассоциированной с элементом замощения V_n , назовем (заданную рекуррентно) конфигурацию $\Omega_{m,n}$, ядром которой является объединение ядра и оболочки конфигурации $\Omega_{m-1,n}$. При этом полагается, что $\mathcal{Y}(\Omega_{1,n}) = \{V_n\}$. Если в данном определении вместо одиночного эле-

мента замощения V_n взять произвольную связную односвязную конфигурацию Ω , то придем к понятию *произвольной правильной конфигурации* порядка m , ассоциированной с заданной конфигурацией Ω . К построению правильной конфигурации сводится, например, задача дополнения двух связных конфигураций, не имеющих общих точек, до минимальной связной конфигурации.

Понятия простого (безусловного) и условного конфигурационного расстояния в основном востребованы при решении ряда теоретических вопросов. Мы не будем на них останавливаться. Что касается использования расстояния в практике решения обратных задач в рамках классического подхода, то основное его предназначение состоит в оценке близости подобранного (оптимального) модельного носителя Ω^* и конфигурационной аппроксимации Ω° истинного носителя \hat{S} возмущающих масс. В особенности функционал расстояния может быть востребован при формализованном подходе к оцениванию эффективности того или иного алгоритма по результатам решения серии модельных примеров в рамках имитационного моделирования. Конфигурационное расстояние мало подходит для таких целей. Впрочем, то же самое можно сказать и в отношении классических метрик оценки близости двух множеств.

Действительно, пусть $\rho(\Omega^*, \Omega^\circ) > 0$. Это означает, что имеет место самый пессимистический исход интерпретации – у носителей Ω° и Ω^* нет общего фрагмента, и уже не важно, каково это значение $\rho(\Omega^*, \Omega^\circ) > 0$. Пусть теперь конфигурационное расстояние $\rho(\Omega^*, \Omega^\circ) = 0$ – более реалистичный исход даже при скудной априорной информации. Если исключить из рассмотрения случай, когда конфигурации Ω^* и Ω° граничат друг с другом, то это означает, что у названных носителей имеется общий фрагмент (объем скрытой достоверной информации не равен нулю). Но, независимо от меры μ этого общего фрагмента, расстояние между носителями остается одним и тем же – нулевым, и мы не можем по значению расстояния рассортировать результаты решения обратной задачи по их фактическому качеству. Одним словом, при решении практических задач требуются функционалы расстояния, обладающие свойствами, обратными к тем, что имеет конфигурационное расстояние. Можно сказать и так: несмотря на высокую степень проявления приближенной эквивалентности, практический интерес имеют функционалы близости *пересекающихся* множеств, по сути – функционалы оценки меры общности двух носителей.

Если обратную задачу рудного типа понимать как задачу оценивания геометрического места точек пространства, занятых возмущающими массами, то весьма эффективной оценкой близости двух носителей Ω_1 и Ω_2 – если их рассматривать как замкнутые измеримые множества – является порожденная мерой Лебега μ метрика Штейнхауса [Marczewski, Steinhaus, 1958]:

$$d(\Omega_1, \Omega_2) = 1 - \frac{\mu(\Omega_1 \cap \Omega_2)}{\mu(\Omega_1 \cup \Omega_2)}. \quad (2.3)$$

Метрика является нормированной: $d(\Omega_1, \Omega_2) = 1$, если $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, и $d(\Omega_1, \Omega_2) = 0$, если $\Omega_1 = \Omega_2$. Несмотря на ее очевидную эффективность, нам не известны публикации, где бы эта метрика использовалась в алгоритмах решения обратных задач гравиразведки и магниторазведки. В случае, когда Ω_1 и Ω_2 являются конфигурациями, заданными на регулярном замощении пространства, метрика Штейнхауса определена на множестве рациональных чисел из отрезка $[0, 1]$ и принимает следующий вид:

$$d(\Omega_1, \Omega_2) = 1 - \frac{|\mathcal{Y}(\Omega_1 \cap \Omega_2)|}{|\mathcal{Y}(\Omega_1 \cup \Omega_2)|}. \quad (2.4)$$

При использовании аддитивных методов решения обратных задач рудного типа возникает проблема оценивания *совместной близости* более, чем двух допустимых носителей $\Omega_j, j = 1, 2, \dots, m$, составляющих некоторое подмножество Q_0 . Для этих целей можно воспользоваться результатами работы [Балк, 2009₁]. В ней вводится понятие *расширенной метрики* $\tau(A)$ для характеристики совместной близости элементов произвольного конечного множества A и доказана теорема, которую применительно к нашей (более узкой) проблематике при достаточно общих посылках относительно множеств Ω_j можно озвучить следующим образом.

Предложение. Функция

$$\tau(Q_0) = 1 - \frac{\mu\left(\bigcap_{j=1}^m \Omega_j\right)}{\mu\left(\bigcup_{j=1}^m \Omega_j\right)}, Q_0 \neq E, E = \{\emptyset\}, \quad (2.5)$$

дополненная в «нуле» условием $\tau(E) = 0$, является расширением метрики Штейнхауса.

Для геофизических приложений интерес представляют два свойства расширенной метрики (2.5): ее нормированность и монотонность ($\tau(Q_0) \in [0, 1]$; $Q'_0 \subset Q''_0 \rightarrow \tau(Q'_0) \leq \tau(Q''_0)$). При $|Q_0| = 2$ расширенная метрика (2.5) вырождается в метрику Штейнхауса. В случае, когда конфигурации Ω_j заданы на регулярном замощении V , функцию (2.5) можно по аналогии с (2.4) переписать так:

$$\tau(Q_0) = 1 - \frac{\left| \mathcal{Y}\left(\bigcap_{j=1}^m \Omega_j\right) \right|}{\left| \mathcal{Y}\left(\bigcup_{j=1}^m \Omega_j\right) \right|}. \quad (2.6)$$

2.2. Основные операции

В том случае, когда интерпретатор обладает средствами визуализации, ему не представляет особого труда выполнить на текущем шаге итерационной процедуры подбора наблюдаемого поля такие операции, как дополнение конфигурации до минимальной связной, или частичное «разрушение» отростка, длина которого превзошла максимально допустимую по априорным ограничениям. Иное дело, когда все топологические операции «ложатся на плечи» самого метода поиска допустимого решения обратной задачи, как это имеет место в случае использования этого метода в аддитивных технологиях интерпретации, предусматривающих полностью автоматизированный режим построения достаточно мощного подмножества Q_0 допустимых вариантов решения. Дело в том, что любая конфигурация Ω , образно выражаясь, «видит» лишь на один шаг вперед – из всех элементов замощения V , не принадлежащих ее ядру, она способна – используя множества $I(n)$, $V_n \in \mathcal{Y}(\Omega)$ – установить лишь элементы своей оболочки и по специальным целочисленным *меткам* идентифицировать их на предмет принадлежности ядрам других конфигураций. Чтобы «заглянуть» дальше, конфигурация вынуждена создавать дополнительные (рабочие) конфигурации, обладающие тем или иным свойством. Процедура построения таких конфигураций, как правило, представляет собой итерационный процесс. Спрашивается, какими возможностями должны обладать методы построения отдельных допустимых решений в подобных условиях.

На перспективах использования классических методов решения условно-экстремальных задач и тех трудностях, с которыми при этом сопряжена формализация априорных ограничений, мы остановимся позже. Что же касается монтажных алгоритмов решения обратных задач, то они нуждаются в качественно иных операциях с конфигурациями, чем те, что достаточны при использовании классических методов минимизации. К *элементарным операциям* на множестве конфигураций, определенных на заданном замощении V , отнесем процедуру определения множества $I(n)$ номеров элементов замощения, граничащих с заданным элементом V_n (ранее мы обговорили, что каждому замощению должен быть автоматически приписан алгоритм B_0 построения этого множества), а также расширение (сужение) ядра $\mathcal{Y}(\Omega)$ некоторой конфигурации Ω за счет одного элемента замощения V_n , взятого из оболочки $O(\Omega)$ (изъятого из границы $\Gamma(\Omega)$) этой конфигурации. Каждая из таких операций – это простейший шаг при выполнении более общих операций, которые мы рассматриваем ниже и из которых складываются монтажные алгоритмы решения обратных задач гравиразведки и магниторазведки.

Операция 1. Построение внутреннего ядра $\mathcal{Y}_0(\Omega)$, границы $\Gamma(\Omega)$ и оболочки $O(\Omega)$ произвольной конфигурации Ω .

Пусть Ω – произвольная конфигурация, определенная на заданном замощении V ограниченной пространственной области D (в \mathbf{R}^2 , либо в \mathbf{R}^3), $m = |\mathcal{Y}(\Omega)|$ – мощность ее ядра ($m \geq 1$) и $J = \{j(1), j(2), \dots, j(m)\}$ – множество номеров элементов V_j замощения V , составляющих это ядро. Напомним, что по умолчанию считается, что известен некий алгоритм B_0 , позволяющий найти оболочку $O(V_n)$ любого его элемента V_n . Согласно данному ранее словесному определению,

$$\mathcal{Y}_0(\Omega) = \{V_j, j \in J : O(V_j) \subset \mathcal{Y}(\Omega)\}, \quad (2.7)$$

$$\Gamma(\Omega) = \{V_j, j \in J : O(V_j) \not\subset \mathcal{Y}(\Omega)\}, \quad (2.8)$$

$$O(\Omega) = \{V_j \in V : V_j \notin \mathcal{Y}(\Omega), O(V_j) \cap \mathcal{Y}(\Omega) \neq \emptyset\}. \quad (2.9)$$

Алгоритмизировать построение множеств $\mathcal{Y}_0(\Omega)$, $\Gamma(\Omega)$ и $O(\Omega)$ можно с помощью итерационного процесса длины m , взяв за нулевые приближения к каждому из них пустое множество – $\mathcal{Y}_0^{(0)}(\Omega) = \Gamma^{(0)}(\Omega) = O^{(0)}(\Omega) = \emptyset$. На каждом шаге k этого процесса очередные приближения к множествам $\mathcal{Y}_0(\Omega)$, $\Gamma(\Omega)$ и $O(\Omega)$ находим следующим образом:

1) если $O(V_{j(k)}) \subset \mathcal{Y}(\Omega)$, то

$$\mathcal{Y}_0^{(k)}(\Omega) = \mathcal{Y}_0^{(k-1)}(\Omega) \cup \{V_{j(k)}\} \quad (2.10)$$

(в противном случае $\mathcal{Y}_0^{(k)}(\Omega) = \mathcal{Y}_0^{(k-1)}(\Omega)$);

2) если $O(V_{j(k)}) \not\subset \mathcal{Y}(\Omega)$, то

$$\Gamma^{(k)}(\Omega) = \Gamma^{(k-1)}(\Omega) \cup \{V_{j(k)}\} \quad (2.11)$$

(в противном случае $\Gamma^{(k)}(\Omega) = \Gamma^{(k-1)}(\Omega)$);

3) если множество

$$O'(V_{j(k)}) = O(V_{j(k)}) \setminus (\mathcal{Y}(\Omega) \cup O^{(k-1)}(\Omega)) \quad (2.12)$$

не пусто, то

$$O^{(k)}(\Omega) = O^{(k-1)}(\Omega) \cup O'(V_{j(k)}) \quad (2.13)$$

(в противном случае $O^{(k)}(\Omega) = O^{(k-1)}(\Omega)$).

После выхода из итерационного процесса полагаем: $\mathcal{Y}_0(\Omega) = \mathcal{Y}_0^{(m)}(\Omega)$, $\Gamma(\Omega) = \Gamma^{(m)}(\Omega)$, $O(\Omega) = O^{(m)}(\Omega)$.

В принципе, каждый из итерационных процессов (2.10), (2.11), (2.13) может применяться самостоятельно. Однако, если одно из двух множеств – $\mathcal{Y}_0(\Omega)$

или $\Gamma(\Omega)$ – уже было построено, то другое получим как дополнение первого до ядра $\mathcal{Y}(\Omega)$. Если граница $\Gamma(\Omega)$ конфигурации была построена ранее, то для отыскания ее оболочки $O(\Omega)$ достаточно, действуя по прежней схеме, организовать итерационный процесс не по всем элементам ядра $\mathcal{Y}(\Omega)$, а лишь по элементам границы $\Gamma(\Omega)$ конфигурации (Ω) .

Сделаем одно общее замечание. При суммировании двух множеств, имеющих общие элементы, в суммарном множестве эти элементы – согласно правилам теории множеств – встретятся только один раз; в компьютерных программах при формировании соответствующих массивов номеров элементов замощения необходимо предусмотреть, чтобы избежать дублирования этих номеров.

Операция 2. Идентификация произвольной конфигурации Ω на предмет ее связности.

Пусть Ω – произвольная непустая конфигурация, определенная на заданном замощении V ограниченной пространственной области D (в \mathbf{R}^2 , либо в \mathbf{R}^3), V_n – наугад выбранный элемент ее ядра $\mathcal{Y}(\Omega)$. Организуем итерационный процесс построения ядра вспомогательной конфигурации $\bar{\Omega}$, выбрав за его нулевое приближение $\mathcal{Y}(\bar{\Omega}_0)$ элемент замощения V_n :

$$\mathcal{Y}(\bar{\Omega}_i) = \mathcal{Y}(\bar{\Omega}_{i-1}) \cup (O(\bar{\Omega}_{i-1}) \cap \mathcal{Y}(\Omega)), \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.14)$$

Критерием завершения будет выполнение равенства $\mathcal{Y}(\bar{\Omega}_{i+1}) = \mathcal{Y}(\bar{\Omega}_i)$. В формуле (2.14) оболочки $O(\bar{\Omega}_{i-1})$ текущих приближений $\bar{\Omega}_{i-1}$ к искомой конфигурации $\bar{\Omega}$ будут построены с помощью рассмотренной ранее процедуры (операция 1).

Предположим, что критерий сработал на некотором $i = i(0)$. Если при этом $\mathcal{Y}(\bar{\Omega}_{i(0)}) = \mathcal{Y}(\Omega)$, то конфигурация Ω является связной. В противном случае – $\mathcal{Y}(\Omega) \setminus \mathcal{Y}(\bar{\Omega}_{i(0)}) \neq \emptyset$ – множество $\mathcal{Y}(\bar{\Omega}_{i(0)})$ суть ядро связного фрагмента конфигурации Ω , каждый элемент которого не граничит ни с одним элементом множества $\mathcal{Y}(\Omega) \setminus \mathcal{Y}(\bar{\Omega}_{i(0)})$.

Предположим, что конфигурация Ω не оказалась связной и требуется представить ее в виде суммы минимального числа m связных конфигураций $\Omega^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, m$, причем число m предстоит определить в ходе построений. Начнем с того, что одна из конфигураций $\Omega^{(j)}$ у нас уже есть – $\Omega^{(1)} = \bar{\Omega}_{i(0)}$. Для поиска каждой очередной конфигурации $\Omega^{(j)}$, $j = 2, 3, \dots$ можно воспользоваться итерационным процессом (2.14), с той разницей, что применить этот процесс теперь уже надо не к конфигурации Ω , а к конфигурации с ядром

$$\mathcal{Y}(\Omega) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{j-1} \mathcal{Y}(\Omega^{(k)}) \right). \quad (2.15)$$

Как только при некотором $j = j(0)$ множество (2.15) оказалось пустым, итерационный процесс прерывается: $m = j(0)$ и система конфигураций $\Omega^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, m$, есть решение поставленной задачи.

Операция 3. Идентификация связной конфигурации Ω на предмет ее односвязности.

В практике применения монтажных алгоритмов обсуждаемая операция часто используется в связке с операцией дополнения связной конфигурации Ω – если она не оказалась односвязной – до минимальной односвязной конфигурации. Перед рассматриваемой операцией поставим дополнительно задачу установления числа m «дыр» («пустот») в конфигурации Ω (каждая из таких «дыр» суть некая связная конфигурация Ω_k , $k = 1, 2, \dots, m$).

Заметим, прежде всего, что если конфигурация, ядром которой служит оболочка $O(\Omega)$, является связной (проверить это можно с помощью операции 2), то связная конфигурация Ω является односвязной. В противном случае с помощью операции 2 оболочку $O(\Omega)$ можно представить в виде попарно непересекающихся подмножеств $O_k(\Omega)$, $k = 1, 2, \dots, m+1$, $m \geq 1$, таких, что одно из них (пусть $k = k(0)$ – его номер) является внешней оболочкой $O^+(\Omega)$ конфигурации Ω , а оставшиеся m множеств – парциальными фрагментами $O_k^-(\Omega)$ внутренней оболочки $O^-(\Omega)$ конфигурации Ω . Эти парциальные фрагменты являются одновременно и границами $\Gamma(\Omega_k)$ соответствующих конфигураций Ω_k , заполняющих «дыры» в конфигурации Ω . Как показывает рис. 2.2, ядро каждой из таких «дыр» может целиком состоять из элементов замощения, образующих соответствующий фрагмент внутренней оболочки $O_k^-(\Omega)$, то есть все элементы ядра конфигурации Ω_k являются ее граничными элементами.

Итак, пусть с помощью приемов, используемых при реализации операции 2, мы определили $m + 1$ фрагментов $O_k(\Omega)$, $k = 1, 2, \dots, m+1$, оболочки $O(\Omega)$, среди которых m фрагментов $O_k^-(\Omega)$ относятся к внутренней оболочке $O^-(\Omega)$ конфигурации Ω , а один фрагмент – суть внешняя оболочка $O^+(\Omega)$ конфигурации Ω . Если конфигурация оказалась не односвязной, то весь вопрос в том, какое именно из $m + 1$ множество $O_k(\Omega)$ является внешней оболочкой.

Можно поступить следующим образом. Возьмем произвольный элемент замощения V_n , заведомо не принадлежащий не только конфигурации Ω , но и ее дополнению до минимальной односвязной конфигурации. Такой элемент подобрать нетрудно (разумеется, речь все также идет о полностью автоматическом режиме без использования средств визуализации). Так, для уверенности в том, что алгоритм не выбрал элемент замощения, содержащийся в одной и «дыр», можно дополнить замощение области D , гарантированно содержащей конфигурацию Ω , и нужный элемент выбрать из этого дополнения.

Введем теперь в рассмотрение вспомогательную связную конфигурационную область $\bar{\Omega}$, которую нам предстоит построить и в качестве начального

приближения к ядру которой примем элемент $V_n: \mathcal{Y}(\bar{\Omega}_0) = \{V_n\}$. Организуем итерационный процесс

$$\mathcal{Y}(\bar{\Omega}_i) = \mathcal{Y}(\bar{\Omega}_{i-1}) \cup O(\bar{\Omega}_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.16)$$

с критерием останова $\mathcal{Y}(\bar{\Omega}) \cap O(\Omega) \neq \emptyset$. Пусть $i = i(0)$ – номер шага итерационного процесса (2.16), на котором критерий сработал. Тогда внешней оболочкой $O^+(\Omega)$ конфигурации Ω является то из множеств $O_k(\Omega)$, $k = 1, 2, \dots, m+1$, которое содержит как подмножество пересечение $\mathcal{Y}(\bar{\Omega}_{i(0)}) \cap O_k(\Omega)$.

Итерационный процесс допускает наглядную иллюстрацию (рис. 2.3). Легко видеть, что фактически речь здесь идет о построении *простейшей правильной конфигурации*.

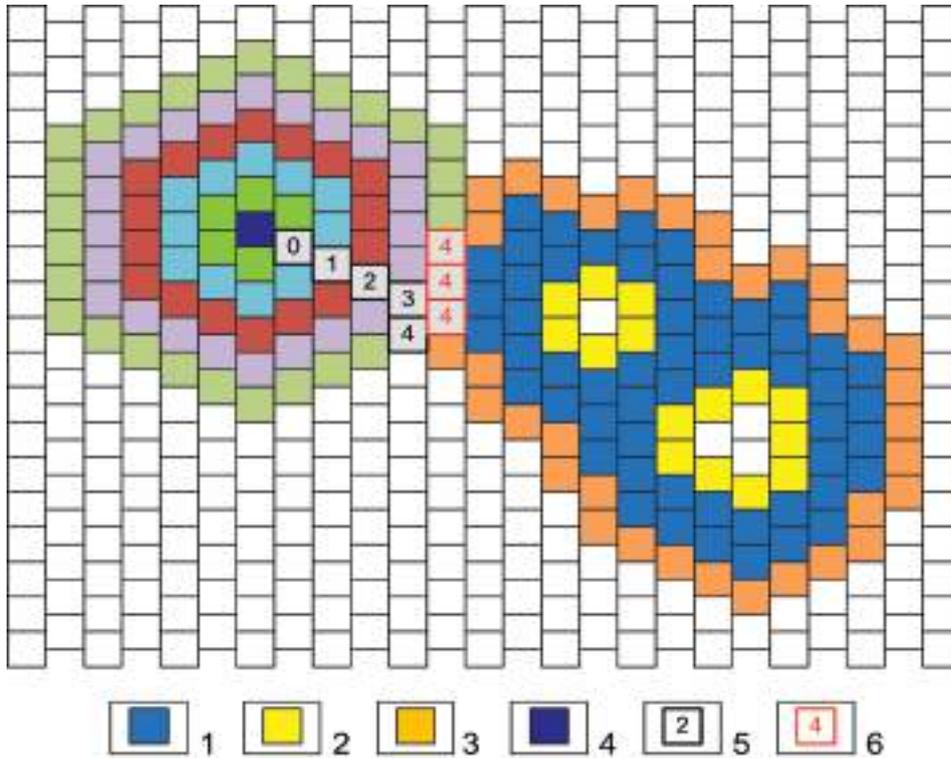


Рис. 2.3. Иллюстрация алгоритма поиска фрагмента «внешней» оболочки связной конфигурации Ω : 1 – элементы ядра $\mathcal{Y}(\Omega)$; 2 – элементы «внутренней» оболочки конфигурации Ω ; 3 – элементы «внешней» оболочки конфигурации Ω ; 4 – элемент замощения V_n , заведомо внешний по отношению к дополнению конфигурации Ω до минимальной односвязной конфигурации; 5 – элементы оболочек $O(\bar{\Omega}_i)$ текущих приближений $\bar{\Omega}_i$ к рабочей конфигурации $\bar{\Omega}$ и их номера i ; 6 – пересечение $\mathcal{Y}(\bar{\Omega}_{i(0)}) \cap O(\Omega)$ ($i(0) = 5$).

Операция 4. Пересчет оболочки $O(\Omega)$, границы $\Gamma(\Omega)$ и внутреннего ядра $Y_0(\Omega)$ связной односвязной конфигурации Ω при наращивании ее ядра $Y(\Omega)$ на один элемент замощения $V_n \in O(\Omega)$.

Необходимость многократного выполнения указанной операции в монтажных алгоритмах построения допустимого решения обратной задачи связана с их итерационным характером, когда на каждом шаге очередное конфигурационное приближение к искомому допустимому носителю образуется за счет увеличения ядра предшествующего конфигурационного приближения на один элемент замощения.

Безусловно, указанную задачу можно решить с помощью операции 1, применив ее к конфигурации $\Omega \cup V_n$. Но это не экономично. При включении одного элемента в ядро конфигурации изменения коснутся лишь отдельных фрагментов ее границы, оболочки и внутреннего ядра, и нет смысла работать со всеми элементами конфигурации. Рассмотрим более экономичный алгоритм.

Пусть V – некоторое, в общем случае нерегулярное, замощение и результатом элементарной операции является конфигурация Ω_1 :

$$Y(\Omega_1) = Y(\Omega) \cup \{V_n\}, V_n \in O(\Omega). \quad (2.17)$$

При переходе $\Omega \rightarrow \Omega_1$ свой статус могут изменить не только некоторые элементы замощения, имевшие статус элементов оболочки, границы или внутреннего ядра конфигурации Ω , но и «нейтральные» («бесстатусные») элементы замощения V . Находим, что

$$O(\Omega_1) = (O(\Omega) \setminus \{V_n\}) \cup \{V_i : i \in I(V_n), V_i \notin (Y(\Omega) \cup O(\Omega))\}, \quad (2.18)$$

$$\Gamma(\Omega_1) = (\Gamma(\Omega) \cup \{V_n\}) \setminus \{V_i : i \in I(V_n), V_i \in \Gamma(\Omega), O(V_i) \subset Y(\Omega_1)\}, \quad (2.19)$$

$$Y(\Omega_1) = Y_0(\Omega) \cup \{V_i : i \in I(V_n), V_i \in \Gamma(\Omega), O(V_i) \subset Y(\Omega_1)\}. \quad (2.20)$$

где, как и прежде, $I(V_n)$ – множество номеров всех элементов замощения, граничащих с элементом V_n .

Подчеркнем, что требование односвязности конфигурации Ω необходимо, чтобы формулы (2.18)–(2.20) были справедливы. В самом деле, пусть Ω – плоская связная (но не односвязная) конфигурация, ядро которой собрано из элементов регулярного замощения V , представленного на рис. 2.1 (а или б), причем конфигурация Ω имеет единственную «дыру» – некий элемент замощения V_n , и пусть именно этим элементом требуется нарастить ядро $Y(\Omega)$. В такой ситуации элемент V_n будет принадлежать уже не границе конфигурации Ω_1 , как в случае односвязности конфигурации Ω , а ее внутреннему ядру. Больше того, оболочка $O(\Omega_1)$ теперь уже не приобретет новые элементы замощения. И, наконец, если ни один элемент оболочки элемента V_n не граничит с элементами оболочки $O(\Omega_1)$, то все элементы из $O(V_n)$, ранее имеющие в

конфигурации Ω статус элементов ее границы, в конфигурации Ω_1 получают статус элементов внутреннего ядра.

При выполнении операций, подобных рассматриваемой, попутно возникает вопрос о наследовании конфигурацией Ω_1 топологических свойств конфигурации Ω . Ясно, что и здесь желательно иметь экономичный способ проверки, который бы эффективно использовал тот факт, что исходная конфигурация Ω обладает интересующими топологическими свойствами. Со свойством связности все понятно, конфигурация Ω_1 его автоматически наследует. Но этого не скажешь об односвязности. В работе [Балк, 1993] показано, что для определенных классов плоских замощений условием наследования односвязности конфигурацией $\Omega_1 = \Omega \cup V_n$, $V_n \in O(\Omega)$ является связность конфигурации, ядром которой является множество $O(V_n) \cap Я(\Omega)$.

Может возникнуть и противоположная ситуация, когда за счет наращивания ядра $Я(\Omega)$ на один элемент замощения конфигурация Ω_1 приобретает свойство, которым конфигурация Ω не обладала. Пусть Ω_1 и Ω_2 – две связные конфигурации, объединение Ω которых не связно. Предположим далее, что конфигурационное расстояние между ними равно 1 и $\Omega_{1,2}$ суть связующая их конфигурация с ядром $Я(\Omega_{1,2}) = \{V_n\}$. Тогда конфигурация $\Omega_1 \cup \{V_n\}$ будет уже связной.

Операция 5. Пересчет оболочки $O(\Omega)$, границы $\Gamma(\Omega)$ и внутреннего ядра $Я_0(\Omega)$ связной односвязной конфигурации Ω при изъятии из ее границы $\Gamma(\Omega)$ одного элемента замощения V_n .

Пусть теперь $|Я(\Omega)| \geq 2$ и результатом элементарной операции является конфигурация Ω_1 :

$$Я(\Omega_1) = Я(\Omega) \setminus \{V_n\}, V_n \in \Gamma(\Omega). \quad (2.21)$$

Тогда

$$O(\Omega_1) = (O(\Omega) \cup \{V_n\}) \setminus \{V_i : i \in I(V_n), O(V_i) \cap Я(\Omega_1) = \emptyset\}, \quad (2.22)$$

$$\Gamma(\Omega_1) = (\Gamma(\Omega) \setminus \{V_n\}) \cup \{V_i : i \in I(V_n), V_i \in Я_0(\Omega)\}, \quad (2.23)$$

$$Я_0(\Omega_1) = Я(\Omega) \setminus \{V_i : i \in I(V_n), V_i \in Я_0(\Omega)\}. \quad (2.24)$$

Подчеркнем, что формулы (2.22)–(2.24) позволяют независимо друг от друга находить каждую из трех названных характеристик конфигурации Ω_1 . В противном случае для одной из двух характеристик можно воспользоваться соотношением $\Gamma(\Omega_1) \cup Я_0(\Omega_1) = Я(\Omega)$.

Что касается существования локальных признаков (критериев) наследования конфигурацией Ω_1 свойств связности и односвязности конфигурации Ω , то можно привести простые примеры, где изучение одной лишь «окрестности» элемента V_n , изымаемого из границы конфигурации Ω , не достаточно для того, чтобы заметить потерю ее связности.

Операция 6. Дополнение объединения двух связных конфигураций Ω_1 и Ω_2 , $Я(\Omega_1) \cap Я(\Omega_2) = \emptyset$ до минимальной (по мощности) связной конфигурации Ω , пересечение $Я(\Omega) \cap Я(\Omega^-)$ ядра которой с ядром заданной произвольной конфигурации Ω^- пусто.

В монтажных алгоритмах решения обратной задачи эта операция нередко присутствует при построении нулевого приближения к искомому решению. В алгоритмах решения обратной задачи рудного типа, реализующих гарантированный подход, а также в аддитивных методах интерпретации эта операция востребована всегда. Объясняется это тем, что допустимые решения, которые понадобятся в этих технологиях интерпретации, должны удовлетворять дополнительному ограничению, не прописанному в априорной информации. Это ограничение обязывает включать в ядра текущих приближений элементы замощения, достаточно удаленные от области, заведомо принадлежащей искомому решению по априорной информации.

По умолчанию предполагается, что условия поставленной задачи непротиворечивы и она имеет решение. Противоречивость, к примеру, может быть в случае, если конфигурация Ω^- является связной, но не односвязной, причем конфигурация Ω_1 располагается в одной из ее «дыр», тогда конфигурация Ω_2 расположена в любой другой из «дыр», либо во внешности дополнения конфигурации Ω^- до минимальной связной конфигурации.

В общем случае решение задачи сводится в главном к построению произвольной правильной конфигурации определенного порядка и допускает наглядную иллюстрацию (рис. 2.4).

Если $O(\Omega_1) \cap Я(\Omega_2) \neq \emptyset$ (или, что то же, $O(\Omega_2) \cap Я(\Omega_1) \neq \emptyset$), то конфигурация $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ уже является связной. В противном случае введем в рассмотрение вспомогательную конфигурацию Ω_3 и организуем итерационный процесс:

$$Я(\Omega_3^{(t)}) = Я(\Omega_3^{(t-1)}) \cup (O(\Omega_3^{(t-1)}) \setminus Я(\Omega^-)), \quad t \geq 1, \quad (2.25)$$

где $Я(\Omega_3^{(0)}) = Я(\Omega_1)$. Продолжим его до тех пор, пока на некотором шаге $t = t(0)$ не выполнится неравенство

$$O(\Omega_3^{(t(0))}) \cap Я(\Omega_2) \neq \emptyset. \quad (2.26)$$

Тогда $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_{1,2}$, где связная конфигурация $\Omega_{1,2}$ – кратчайшая связующая (конфигурации Ω_1 и Ω_2) «цепочка», составленная из элементов замощения; по одному элементу из каждой оболочки $O(\Omega_3^{(t)})$, $t = 0, 1, \dots, t(0) - 1$. В качестве такой связующей конфигурации можно взять объединение любых элементов замощения $V_{n(t)}$, $t = 0, 1, \dots, t(0) - 1$, где $V_{n(0)}$ – произвольно взятый элемент замощения, граничащий с любым элементом замощения, принадлежащим пересечению $O(\Omega_3^{(0)}) \cap Я(\Omega_2)$, а остальные элементы $V_{n(t)}$, $t = 1, 2, \dots, t(0) - 1$ удовлетворяют включениям:

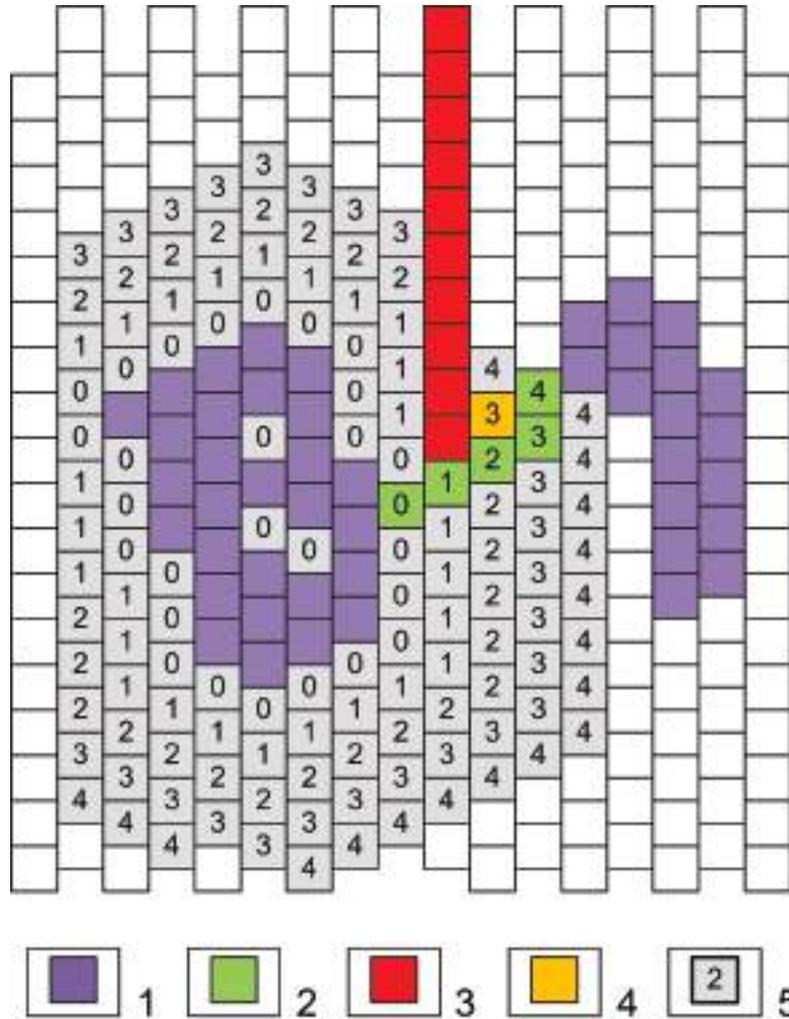


Рис. 2.4. Иллюстрация операции дополнения двух не граничащих между собой связанных конфигураций Ω_1 и Ω_2 до (единой) связанной конфигурации Ω : 1 – элементы ядер $\mathcal{Y}(\Omega_1)$ и $\mathcal{Y}(\Omega_2)$; 2 – элементы ядра связующей конфигурации; 3 – элементы ядра конфигурации Ω^- ; 4 – элемент замощения, с участием которого можно построить альтернативную связующую конфигурацию $\Omega_{1,2}$ той же длины; 5 – элементы оболочек рабочих конфигураций $\Omega_3^{(t)}$ и их номера t : $t = 0 - O(\Omega_3^{(0)})$, $t = 1 - O(\Omega_3^{(1)})$, $t = 2 - O(\Omega_3^{(2)})$, $t = 3 - O(\Omega_3^{(3)})$, $t = 4 - O(\Omega_3^{(4)})$.

$$V_{n(t)} \in O(\Omega_3^{(t(0)-t)}) \cap O(V_{n(t-1)}). \quad (2.27)$$

Мощность $|\mathcal{Y}(\Omega_{1,2})|$ связующей конфигурации суть условное конфигурационное расстояние между конфигурациями Ω_1 и Ω_2 .

Операция 7. Дополнение связной неодносвязной конфигурации Ω до минимальной односвязной конфигурации Ω_0 .

Будем считать, что с помощью операции 3 установлено число m «дыр» в конфигурации Ω и из оболочки $O(\Omega)$ вычленены парциальные фрагменты $O_k^-(\Omega)$ ее внутренней оболочки $O^-(\Omega)$. Эти фрагменты являются границами $\Gamma_k(\Omega)$ тех связных конфигураций Ω_k , которыми следует заполнить соответствующие «дыры» в конфигурации Ω .

Алгоритм построения каждой из конфигураций Ω_k состоит в следующем. Введем в рассмотрение последовательность конфигураций $\Omega^{(i)}$, которые образуем с помощью рекуррентности

$$Я(\Omega^{(i)}) = Я(\Omega^{(i-1)}) \cup (O(\Omega^{(i-1)}) \setminus Я(\Omega)), \quad (2.28)$$

где $Я(\Omega^{(0)}) = O_k^-(\Omega)$. Критерием прерывания итерационного процесса служит условие $Я(\Omega^{(i)}) = Я(\Omega^{(i-1)})$. Предположим, что критерий сработал на некотором $i = i(0)$. Тогда $Я(\Omega_k) = Я(\Omega^{(i(0)-1)})$.

Если, исходя из ожидаемой экономии вычислений, считается целесообразным воспользоваться услугами операции 3, довольствовавшись только установлением $m+1$ фрагментов $O_k(\Omega)$, $k = 1, 2, \dots, m+1$, оболочки $O(\Omega)$ (без идентификации этих фрагментов на предмет принадлежности внешней оболочке и парциальным фрагментам внутренней оболочки), то можно поступить следующим образом. Обозначим через $k = k(0)$ неизвестный номер фрагмента $O_k(\Omega)$, являющегося внешней оболочкой $O^+(\Omega)$ конфигурации Ω . Этот фрагмент можно формально рассматривать как границу $\Gamma(\Omega_{k(0)})$ некоторой связной (заведомо не односвязной) конфигурации $\Omega_{k(0)}$, $Я(\Omega_{k(0)}) \cap Я(\Omega) = \emptyset$, охватывающей конфигурацию Ω . Как таковая конфигурация $\Omega_{k(0)}$ нас не интересует, но введение ее в рассмотрение позволяет поставить все $m+1$ фрагментов $O_k(\Omega)$ оболочки $O(\Omega)$ в равные начальные условия и вовлечь их в общий итерационный процесс. Этот глобальный итерационный процесс состоит из нескольких локальных итерационных процессов, число которых изначально равно $m+1$, но со временем уменьшится до одного. В качестве нулевых приближений $Я(\Omega_k^{(0)})$, $k = 1, 2, \dots, m+1$ к ядрам конфигураций Ω_k возьмем соответствующие связные фрагменты $O_k(\Omega)$ оболочки $O(\Omega)$ конфигурации Ω :

$$Я(\Omega_k^{(0)}) = O_k(\Omega), k = 1, 2, \dots, m+1. \quad (2.29)$$

На очередном шаге $t \geq 1$ глобального итерационного процесса текущие приближения $\Omega_k^{(t)}$ вычисляются по формуле

$$Я(\Omega_k^{(t)}) = Я(\Omega_k^{(t-1)}) \cup (O(\Omega_k^{(t-1)}) \setminus Я(\Omega)), \quad (2.30)$$

причем только для тех k , для которых локальный итерационный процесс построения конфигурации Ω_k не был завершён на более ранних шагах t . Критерием завершения k -го локального итерационного процесса на шаге t яв-

ляется условие $\mathcal{Y}(\Omega_k^{(t)}) = \mathcal{Y}(\Omega_k^{(t-1)})$ (все элементы замощения, составляющие k -ю «дыру», исчерпаны – $\mathcal{Y}(\Omega_k) = \mathcal{Y}(\Omega_k^{(t)})$). Глобальный итерационный процесс прерывается, как только число завершенных локальных итерационных процессов равно m . Номер k локального итерационного процесса, оказавшегося на этот момент не завершенным, и есть $k(0)$. Тогда искомая односвязная конфигурация

$$\Omega_0 = \Omega \cup \left(\bigcup_{k \neq k(0)} \Omega_k \right). \quad (2.31)$$

2.3. Типовые задачи

В этом подразделе мы рассмотрим несколько базовых задач, которые возникают при построении конечноэлементных методов решения обратных задач рудного типа в классе конфигурационных носителей возмущающих масс. Речь пойдет о группе задач, связанных с формализацией и учетом *требования гладкости* границы модельного носителя источников поля в терминах, отличных от интегральных характеристик гладкости.

Введение в постановку задачи ограничения на интегральный показатель гладкости носителя не представляет особой сложности. В качестве такового можно, к примеру, взять ограничение на максимально допустимое отношение мощности границы $\Gamma(\Omega)$ конфигурационного носителя Ω к мощности его внутреннего ядра $\mathcal{Y}_0(\Omega)$. Можно оперировать с допустимым отношением мощности оболочки $|\mathcal{O}(\Omega)|$ конфигурации Ω к мощности $|\mathcal{Y}(\Omega)|$ ее ядра. Однако информативность интегрального ограничения на гладкость носителя вполне сопоставима, на наш взгляд, с другими «рядовыми» ограничениями типа ограничений на мощность возмущающих тел или предельные глубины их залегания.

Хорошо известно, что при изучении определенного процесса, отдельные «ураганные» значения измеряемой величины (иногда их принято называть выскоками) не всегда могут нарушить *общее* позитивное впечатление от усредненной картины, но могут принципиально изменить отношение к этому процессу. Похожим образом дело обстоит и с условием гладкости границы модельного носителя при решении обратных задач гравirazведки и магниторазведки. При том, что в целом граница может оказаться по значению (скалярного!) интегрального показателя достаточно гладкой, отдельные фрагменты границы носителя способны охарактеризовать данное решение как не отвечающее геологической природе изучаемого объекта (по сути, забраковать его). Одним словом, сдерживать модельный носитель в рамках допустимого с помощью всего лишь одного скаляра трудно. Значительно более эффектив-

ными, чем интегральные, являются дифференцированные оценки гладкости носителя, с помощью которых можно осуществлять контроль за особенностями строения *отдельно взятых* фрагментов его границы. Компенсировать отсутствие таких оценок жесткими ограничениями на геометрию и пространственное положение источников поля крайне затруднительно. Ограничения на максимальную мощность геологического тела по вертикали и латерали, а также границы области, заведомо содержащей возмущающие массы, задают лишь *необходимые*, но не *достаточные* требования к геологически содержательному решению обратной задачи рудного типа. В рамки любых, пусть даже достаточно жестких количественных ограничений (включающих и интегральную оценку допустимой гладкости носителя) можно поместить заведомо неприемлемые с геологической точки зрения модельные носители, которые, тем не менее, обеспечат (совместно с заданными физическими параметрами возмущающих масс) допустимую невязку наблюдаемого и модельного полей. У авторов монографии вряд ли хватит фантазии, чтобы проиллюстрировать все те причудливые формы, которые могут принять границы конфигурационных носителей, если их освободить от условия пофрагментной гладкости.

В ряде наших журнальных публикаций, посвященных проблеме контроля за гладкостью носителя, дана лишь малая доля примеров решения обратных задач, в которых границы конфигураций, построенных без ограничений на их пофрагментную гладкость, имеют малозначимые фрагменты в виде «ветвящихся цепочек» – *отростков*, составленных из отдельных элементов замощения. Применяя специальные ограничения, прежде всего, на топологию отдельных участков границы текущего конфигурационного приближения к искомому решению Ω^* обратной задачи, появления подобных фрагментов можно в значительной степени избежать.

Однако при таком подходе возникают определенные проблемы. Суть в том, что многие геометрические задачи на плоскости, связанные с изучением различных структур, в действительности много сложнее, чем кажутся на первый взгляд, и не имеют формализованного решения. В качестве примера – к настоящему времени построено не менее пятнадцати различных регулярных замощений пятиугольниками, и, насколько мы знаем, неизвестно, существуют ли еще подобные замощения. Что уж говорить о сложности самой попытки формализовать понятие отростка в классе произвольных замощений, если представления геофизика о геологически содержательных фрагментах границы носителя, безусловно, всегда будут связаны со структурой замощения и мерой его протоэлемента. С одной стороны, мы не вправе навязывать интерпретатору какие-то определенные, «шаблонные» формализации свойства гладкости носителя. Собственно, мы не ставим перед собой такую задачу; наша цель – показать, как это можно сделать, задавшись определенным типом замощения и конкретным представлением о том, какие фрагменты границы

носителя следует считать малосодержательными (в рамках выбранного замощения). Кроме того, авторы убеждены, что в практике интерпретации гравитационных и магнитных аномалий в большинстве случаев геофизика вполне удовлетворят регулярные замощения, в которых элементами являются квадраты (в \mathbf{R}^2) и кубы (в \mathbf{R}^3). Поэтому, изложение будем вести по отношению к регулярному замощению, геометрия элементов которого не зафиксирована, но отвечать будем за справедливость предлагаемых алгоритмов по отношению к квадратному замощению, приведенному на рис. 2.1а,б. Вместе с тем, мы рассчитываем, что приведенные ниже алгоритмы в действительности охватывают более широкий класс замощений.

В дополнение к основным базовым понятиям нам понадобятся сейчас еще несколько определений и обозначений. Пусть Ω – произвольная конфигурация, ядро $\mathcal{Y}(\Omega) = \{V_i : i \in I\}$ которой составлено из элементов замощения $V = \{V_n\}$ достаточно обширной области D пространства \mathbf{R}^2 . Введем в рассмотрение бинарную функцию $\Psi(V_i; \Omega)$, определенную на элементах ядра конфигурации Ω и позволяющую установить, содержат или нет оболочки $O(V_i)$ элементов $V_i \in \mathcal{Y}(\Omega)$ граничащие между собой элементы замощения из множества $\mathcal{Y}(\Omega)$. Положим $\Psi(V_i; \Omega) = 1$, если множество $O(V_i) \cap \mathcal{Y}(\Omega)$ содержит хотя бы одну пару граничащих друг с другом элементов, и $\Psi(V_i; \Omega) = 0$ – в противном случае. Назовем связную конфигурацию

$$T(m; J) = \bigcup_{j \in J} V_j, \quad J = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}, \quad J \subseteq I, \quad m \geq 1 \quad (2.32)$$

отростком длины m конфигурации Ω , если $\Psi(V_j; \Omega) = 0$ для всех $j \in J$. В общем случае элемент замощения может принадлежать сразу нескольким отросткам. Более определенно, если элемент замощения $V_{j(0)}$ принадлежит ядру отростка $T(m; J)$, $m > 1$, то конфигурация $T(m_k; J_k)$, $m_k < m$, чье ядро содержит элемент $V_{j(0)}$, $j(0) \in J_k$ и удовлетворяет включению $\mathcal{Y}(T(m_k; J_k)) \subset \mathcal{Y}(T(m; J))$, также является отростком конфигурации Ω . Можно сказать и так: если $T_1(m_1; J_1)$ и $T_2(m_2; J_2)$ – два отростка конфигурации Ω ($\mathcal{Y}(T_1(m_1; J_1)) \cap \mathcal{Y}(T_2(m_2; J_2)) = \emptyset$), граничащие между собой, то их объединение есть также отросток длины $m_1 + m_2$.

Подчеркнем, что данное выше определение отростка – это лишь одна из возможных формализаций малосодержательных фрагментов границы конфигурационного носителя Ω . В качестве альтернативы можно предложить достаточно гибкое определение отростка, по которому в оболочке каждого элемента его ядра присутствует менее чем l элементов замощения ядра самой конфигурации Ω . Манипулируя значением l можно обеспечивать различную степень гладкости границы носителя. К примеру, расчеты показали, что при использовании замощения, представленного на рис. 2.1в, ограничение $l \geq 3$ для всех элементов ядра конфигурации позволяет существенно сдерживать возникновение у ее границы малосодержательных фрагментов.

Индексом $\nu(V_i; \Omega)$ элемента замощения V_i , принадлежащего ядру $\mathcal{Y}(\Omega)$ плоской конфигурации Ω , назовем максимальную из длин всех отростков, ядра которых содержат этот элемент. Если в конфигурации Ω не найдется отростка, чье ядро содержит элемент замощения V_i , то принимается $\nu(V_i; \Omega) = 0$. Если нулю равен индекс $\nu(V_i; \Omega)$ всех элементов V_i ядра конфигурации Ω , то она считается *безотростковой*. Конфигурацию $B(\Omega)$, ядро $\mathcal{Y}(B(\Omega))$ которой состоит из всех элементов $V_i \in \mathcal{Y}(\Omega)$, чей индекс $\nu(V_i; \Omega)$ равен нулю, назовем *основой* плоской конфигурации Ω . Таким образом, ядро $\mathcal{Y}(\Omega)$ конфигурации Ω мы в общем случае представляем объединением ее внутреннего ядра $\mathcal{Y}_0(\Omega)$ и границы $\Gamma(\Omega)$, а в особых случаях – объединением ядра его основы и суммарного ядра всех отростков конфигурации.

Плоскую связную конфигурацию Ω назовем *физичной* (по заданному m), если ее основа связна и сама конфигурация Ω не содержит отростков длины больше m . В понятии физического конфигурационного носителя просматривается попытка формализации интуитивного образа «компактного» распределения природных масс, который в какой-то мере находит отражение в предположениях о выпуклости и звездности многих геологических тел.

В связи с проблемой идентификации конфигурационного носителя (в том числе нулевого приближения, автоматический выбор которого предусмотрен в аддитивных методах интерпретации) на предмет гладкости, выраженной в терминах отростков его границы, и проблемой наследования свойства гладкости возникает ряд задач.

Задача 1. Построить распределение индекса $\nu(V_i; \Omega)$ на элементах $V_i \in \mathcal{Y}(\Omega)$ ядра связной конфигурации Ω .

Такая задача возникает, в частности, при идентификации нулевого приближения к искомому решению обратной задачи на предмет его допустимой гладкости и (или) физичности.

Алгоритм решения этой задачи был предложен еще в работе [Балк, 1993]. Здесь мы внесем в него некоторые изменения. Начнем с того, что определим значение функции $\Psi(V_i; \Omega)$ для всех элементов V_i ядра $\mathcal{Y}(\Omega)$. Тогда множество $\{V_i \in \mathcal{Y}(\Omega) : \Psi(V_i; \Omega) = 1\}$ – ядро основы $B(\Omega)$ конфигурации Ω . Если оно совпадает с $\mathcal{Y}(\Omega)$, то конфигурация Ω является безотростковой и все элементы ее ядра имеют индекс $\nu = 0$. В противном случае множество

$$\mathcal{Y}(\Omega^{(1)}) = \mathcal{Y}(\Omega) \setminus \mathcal{Y}(B(\Omega)) \quad (2.33)$$

суть ядро конфигурации $\Omega^{(1)}$, являющееся объединением ядер всех отростков из Ω . По умолчанию предполагается, что речь идет об отростках максимальной длины. Определим число таких отростков и длину каждого из них.

Последовательно для $k = 1, 2, \dots$ организуем глобальный итерационный процесс, на каждом шаге k которого выполним следующие операции:

1) выберем из множества $\mathcal{Y}(\Omega^{(k)})$ произвольно один элемент и пусть это $V_{i(k)}$;
 2) полагая $\mathcal{Y}(\Omega_0) = \{V_{i(k)}\}$, организуем внутренний (локальный) итерационный процесс

$$\mathcal{Y}(\Omega_j) = \mathcal{Y}(\Omega_{j-1}) \cup \{V_i \in O(\Omega_{j-1}) \cap \mathcal{Y}(\Omega) : \Psi(V_i; \Omega) = 0\}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.34)$$

с критерием прерывания $\mathcal{Y}(\Omega_{j+1}) = \mathcal{Y}(\Omega_j)$.

Предположим, что критерий сработал при некотором $j = j(k)$. Тогда $\mathcal{Y}(\Omega_{j(k)})$ – суть ядро отрезка максимальной длины, содержащее элемент $V_{i(k)}$. Длина m_k этого отрезка, который обозначим как $T_k(m_k; J_k)$, равна $|\mathcal{Y}(\Omega_{j(k)})|$, а множество J_k состоит из номеров всех элементов замощения, попавших в ядро конфигурации $\Omega_{j(k)}$. Всем элементам, попавшим в ядро отрезка T_k , припишем, соответственно, индекс $\nu = m_k$.

Полагая

$$\mathcal{Y}(\Omega^{(k+1)}) = \mathcal{Y}(\Omega^{(k)}) \setminus \mathcal{Y}(T_k(m_k; J_k)), \quad (2.35)$$

приступаем к очередному шагу глобального итерационного процесса – поиску очередного отрезка конфигурации Ω .

Глобальный итерационный процесс прерывается, как только $\mathcal{Y}(\Omega^{(k(0)+1)}) = \emptyset$ при некотором $k = k(0)$. Это означает, что конфигурация Ω содержит $k(0)$ отрезков $T_k(m_k; J_k)$, $k = 1, 2, \dots, k(0)$, и длина каждого из них больше длины всякого отрезка, содержащего любой элемент его ядра.

Задача 2. Пересчитать распределение индекса $\nu(V_i; \Omega)$ на элементах V_i ядра связной конфигурации Ω в распределение индекса $\nu(V_i; \Omega')$ на элементах V_i ядра конфигурации Ω' : $\mathcal{Y}(\Omega') = \mathcal{Y}(\Omega) \cup \{V_n\}$, если $V_n \in O(\Omega)$.

В монтажных алгоритмах такая задача возникает, когда необходимо убедиться, что некая «пробная» конфигурация, претендующая на статус очередного приближения к искомому решению Ω^* обратной задачи, наследует свойство предшествующего приближения, характеризуемого максимально допустимым значением индекса ν . При этом желательно, пользуясь тем, что «близкая» к Ω' конфигурация Ω этим свойством обладает, экономизировать вычисления, не прибегая к использованию алгоритма решения задачи 1. Случаи $\Psi(V_n; \Omega) = 1$ и $\Psi(V_n; \Omega') = 0$ следует рассматривать в отдельности каждый.

1. В первом случае $\nu(V_n; \Omega') = 0$, и $\nu(V_i; \Omega') = \nu(V_i; \Omega)$ для всех элементов замощения $V_i \in \mathcal{Y}(\Omega)$. Следовательно, все отрезки конфигурации Ω (если они у нее есть) без каких-либо изменений сохраняются у конфигурации Ω' .

2. В рамках второго случая можно, в свою очередь, выделить два исхода.

При первом исходе оболочка $O(V_n)$ не содержит элементы, входящие в отрезки конфигурации Ω ($\nu(V_i; \Omega) = 0$ для всех элементов $V_i \in O(V_n) \cap \mathcal{Y}(\Omega)$). Тогда:

а) $\nu(V_n; \Omega') = 1$ (в конфигурации Ω' элемент V_n представляет собой отросток единичной длины);

б) $\nu(V_i; \Omega') = \nu(V_i; \Omega)$ для всех элементов замощения $V_i \in \mathcal{Y}(\Omega)$ – основы $B(\Omega')$ и $B(\Omega)$ конфигураций Ω' и Ω идентичны;

в) в дополнение к новоявленному отростку $T_0(1; \{n\})$ конфигурация Ω' наследует все отростки конфигурации Ω .

При втором исходе оболочка $O(V_n)$ содержит элементы замощения, входящие в ядра одного или нескольких отростков конфигурации Ω ; обозначим их как $T_k(m_k; J_k)$, $k = 1, 2, \dots, K$, $K \geq 1$. Тогда:

а) в конфигурации Ω' эти отростки объединяются с отростком $T_0(1; \{n\})$, образуя единый отросток

$$T = T \left(1 + \sum_{k=1}^K m_k; \{n\} \cup \left(\bigcup_{k=1}^K J_k \right) \right); \quad (2.36)$$

б) статус (по отношению к значению индекса ν) элементов ядра $\mathcal{Y}(\Omega)$, не попавших в обозначенные K отростков (среди них могут быть те, что присутствуют в ядрах других отростков), остается прежним.

Задача 3. Пересчитать распределение индекса $\nu(V_i; \Omega)$ на элементах $V_i \in \mathcal{Y}(\Omega)$ ядра связной конфигурации Ω , $|\mathcal{Y}(\Omega)| \geq 2$, в распределение индекса $\nu(V_i; \Omega')$ на элементах ядра связной конфигурации Ω' : $\mathcal{Y}(\Omega') = \mathcal{Y}(\Omega) \setminus \{V_n\}$, когда $V_n \in \Gamma(\Omega)$.

В отличие от предыдущей задачи, обслуживающей основную группу монтажных алгоритмов, где очередное конфигурационное приближение к искомому носителю образуется путем наращивания ядра предшествующего приближения на один элемент замощения, эта задача возникает в алгоритмах, в которых мощность ядра последующего приближения на единицу меньше мощности предшествующего приближения.

Прежде всего, следует убедиться, что изъятие элемента V_n из ядра конфигурации Ω не приводит к потере связности конфигурацией Ω' . Это можно сделать с помощью итерационного процесса, используемого при выполнении операции 2.

Предположим, что конфигурация Ω' оказалась связной. Здесь следует порознь рассмотреть два случая:

1. Пусть $\nu(V_n; \Omega) = 0$. Это означает, что элемент V_n не принадлежит ни одному из отростков конфигурации Ω (если таковые вообще существуют). Здесь возможны два исхода.

При первом исходе для каждого из элементов замощения $V_i \in O(V_n) \cap \mathcal{Y}(\Omega)$ можно указать попарно граничащие элементы замощения, принадлежащие множеству $O(V_i) \cap (\mathcal{Y}(\Omega) \setminus \{V_n\})$. Тогда $\nu(V_i; \Omega') = \nu(V_i; \Omega)$ для всех элементов $V_i \in \mathcal{Y}(\Omega')$.

При втором исходе среди элементов замощения $V_i \in O(V_n) \cap \mathcal{Y}(\Omega)$ найдутся такие – пусть $i(1), i(2), \dots, i(l)$ их номера, что множества $O(V_{i(k)}) \cap (\mathcal{Y}(\Omega) \setminus \{V_n\})$, $k = 1, 2, \dots, l$, не содержат граничащие между собой элементы замощения. Тогда $V_{i(1)}, V_{i(2)}, \dots, V_{i(l)}$ – элементы ядер каких-то отростков (по-прежнему имеются в виду отростки максимальной длины), принадлежащих конфигурации Ω' . В ядра этих отростков могут попасть и элементы замощения, чей индекс ν в конфигурации Ω был равен нулю. Остается установить число этих отростков и их длину.

С этой целью возьмем элемент $V_{i(1)}$ и, воспользовавшись описанной прежде итерационной процедурой, определим максимальную связную конфигурацию Ω_1 , $V_{i(1)} \in \mathcal{Y}(\Omega_1)$, для всех элементов V_j ядра которой выполняется условие $\Psi(V_j; \Omega') = 0$. Тогда конфигурация Ω_1 – один из искомым отростков; обозначим его как T_1 (может оказаться, что $\mathcal{Y}(\Omega_1) = \{V_{i(1)}\}$). Если в ядро этого отростка вошли все элементы $V_{i(2)}, V_{i(3)}, \dots, V_{i(l)}$, то процедура идентификации отростков в Ω' , граничащих с элементом замощения V_n , завершена. В противном случае берем один из перечисленных элементов замощения, не вошедших в ядро отростка T_1 , и проделаем ту же самую процедуру, которую только что проделали с элементом $V_{i(1)}$. Будем повторять эту операцию до тех пор, пока среди элементов $V_{i(k)}$ не останется ни одного, который ранее не вошел в ядра уже построенных отростков. Остается приписать элементам их ядер значение индекса ν , равное длине соответствующего отростка. У всех остальных элементов замощения $V_i \in \mathcal{Y}(\Omega')$ остаются те же самые значения индекса, которые эти элементы имели в конфигурации Ω .

2. Пусть теперь $\nu(V_n; \Omega) \neq 0$ и $T(m; J)$, $J = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$ – отросток длины m , ядро которого содержит элемент замощения V_n . Возможны несколько исходов.

а) Если $\nu(V_n; \Omega) = 1$ ($m = 1, J = \{n\}$), то каждый из элементов конфигурации Ω' наследует то значение индекса, которое он имел в исходной конфигурации Ω :

$$\nu(V_i; \Omega') = \nu(V_i; \Omega), \quad V_i \in \mathcal{Y}(\Omega'). \quad (2.37)$$

б) Если $\nu(V_n; \Omega) > 1$ и ядро отростка T за вычетом элемента V_n представляет собой ядро связной конфигурации, то значение индекса всех элементов V_i ядра конфигурации $T' \subset \Omega'$, $\mathcal{Y}(T') = \mathcal{Y}(T) \setminus \{V_n\}$ принимает значение $m - 1$. Значения индекса остальных элементов замощения из $\mathcal{Y}(\Omega')$ остаются теми же, что были в конфигурации Ω :

$$\nu(V_i; \Omega') = \nu(V_i; \Omega), \quad V_i \in \mathcal{Y}(\Omega') \setminus \mathcal{Y}(T'). \quad (2.38)$$

в) Если $\nu(V_n; \Omega) > 1$, но конфигурация T' не является связной, то с помощью уже известной процедуры представим конфигурацию T' в виде суммы минимального числа p связных конфигураций T'_1, T'_2, \dots, T'_p , являющихся отростками. Пусть их ядра содержат m_1, m_2, \dots, m_p элементов замощения ($m_1 + m_2 + \dots + m_p = m - 1$). Тогда элементы ядра каждого из этих отростков получают значение индекса

$$\nu(V_i; \Omega) = m_t, V_i \in \mathcal{Y}(T_t), t = 1, 2, \dots, p. \quad (2.39)$$

Значение индекса каждого из всех остальных элементов V_i ядра конфигурации Ω' совпадает со значением индекса, которое этот элемент замощения имел в конфигурации Ω .

Задача 4. Дополнить связную односвязную конфигурацию Ω до (по возможности близкой к минимальной) конфигурации Ω' со связной основой $B(\Omega')$.

Эта задача может встретиться тогда, когда от модельного носителя требуется физичность в оговоренном ранее смысле. Такая задача может возникнуть при автоматизированной корректировке нулевых приближений при поиске достаточно состоятельного подмножества допустимых решений обратной задачи.

Прежде всего необходимо установить, есть ли необходимость в решении поставленной задачи. Поскольку по условию конфигурация Ω является связной, то необходимость в решении поставленной задачи отпадает, если индекс $\nu(V_i; \Omega)$ всех элементов ядра $\mathcal{Y}(\Omega)$ равен нулю. В общем случае введем в рассмотрение конфигурацию Ω_0 :

$$\mathcal{Y}(\Omega_0) = \{V_i \in \mathcal{Y}(\Omega) : \nu(V_i; \Omega) = 0\} \quad (2.40)$$

и идентифицируем ее на предмет связности с помощью одной из рассмотренных выше операций. Если связность подтверждается, то необходимость решения поставленной задачи также отпадает.

Предположим, что ни один из двух простых исходов не реализовался, и задано некоторое достаточно широкое множество I_0 номеров i элементов замощения $V_i \notin \mathcal{Y}(\Omega)$, которыми можно достраивать ядро $\mathcal{Y}(\Omega)$, чтобы получить ядро искомой конфигурации Ω' (для упрощения рассуждений мы откажемся здесь от введения множества $\mathcal{Y}(\Omega')$ элементов замощения, запрещенных к включению в ядро конфигурации Ω').

Разобьем конфигурацию Ω_0 на попарно не граничащие друг с другом связные конфигурации; пусть это $\Omega_0^{(1)}, \Omega_0^{(2)}, \dots, \Omega_0^{(r)}$, $r \geq 2$. После этого поставленная задача редуцируется к семейству подзадач следующего вида: для некоторого отростка $T(m_{1,2}; J_{1,2})$, $m_{1,2} \geq 1$, связывающего (кратчайшим образом) два не граничащих между собой фрагмента Ω_1 и Ω_2 основы некоторой конфигурации, найти (по возможности близкое к минимальному) подмножество $I_{1,2} \subset I_0$ номеров элементов замощения $V_i \notin \mathcal{Y}(\Omega)$, $i \in I_0$, таких, что множество

$$\{V_i; i \in I_{1,2}\} \cup \mathcal{Y}(T(m_{1,2}; J_{1,2})) \quad (2.41)$$

– суть ядро связной конфигурации, все элементы которой имеют индекс ν , равный нулю. По умолчанию мы предполагаем, что некоторые вспомогательные задачи (к примеру, построение связующей конфигурации – отростка

$T(m_{1,2}; J_{1,2})$), предшествующие рассматриваемой постановке основной задачи, решены с помощью определенных *операций*, изложенных в предыдущем разделе главы.

Индексное подмножество $I_{1,2}$ можно построить следующим образом. Введем в рассмотрение конечную последовательность вспомогательных конфигураций Ω_k :

$$\mathcal{Y}(\Omega_0) = \mathcal{Y}(\Omega^1), \quad \mathcal{Y}(\Omega_k) = \mathcal{Y}(\Omega_{k-1}) \cup ((O(\Omega_{k-1}) \cap \mathcal{Y}(T(m_{1,2}; J_{1,2}))), \quad k = 1, 2, \dots, k(0), \quad (2.42)$$

где $k(0)$ – минимальное из k , при котором

$$\mathcal{Y}(\Omega_{k(0)+1}) \cap \mathcal{Y}(\Omega^2) \neq \emptyset. \quad (2.43)$$

Эта последовательность позволяет упорядочить элементы ядра отрезка T , снабдив входящие в него элементы замощения дополнительным номером k . Двигаясь по элементам ядра отрезка T в порядке возрастания номера k , можно установить искомое подмножество $I_{1,2}$ элементов замощения, таких, что множество

$$\mathcal{Y}(\Omega^1) \cup \mathcal{Y}(\Omega^2) \cup \mathcal{Y}(T(m_{1,2}; J_{1,2})) \cup \{V_i : i \in I_{1,2}\} \quad (2.44)$$

– суть ядро связного фрагмента основы конфигурации с ядром $\mathcal{Y}(\Omega) \cup \{V_i : i \in I_{1,2}\}$.

Возвращаясь к поставленной задаче, необходимо добавить следующее. В разделе, посвященном основным операциям в классах конфигурационных носителей, мы обсуждали, как построить минимальные связующие конфигурации (в нашем случае отрезки T), образующие вместе с двумя связуемыми конфигурациями единую связную конфигурацию. Если под конфигурациями Ω_1 и Ω_2 понимать связные фрагменты основы $\Omega_0^{(1)}$ и $\Omega_0^{(2)}$ заданной конфигурации Ω , и при этом $r = 2$, то решение рассмотренной подзадачи является и решением поставленной задачи. Если же $r > 2$, то, применяя изложенный алгоритм к новообразованному связному фрагменту основы $B(\Omega)$ искомой конфигурации (принимая при этом Ω' за Ω^1 , а фрагмент $\Omega_0^{(3)}$ за конфигурацию Ω^2) и действуя по аналогии, получим в конечном итоге решение исходной задачи.

Коротко прокомментируем ход решения рассмотренной задачи на одном примере (рис. 2.5). Вначале требовалось выделить множество элементов ядра конфигурации Ω , представляющее собой ядро ее основы $B(\Omega)$. Было установлено, что $\mathcal{Y}(B(\Omega)) \neq \emptyset$ и сама основа состоит из двух не граничащих друг с другом связных конфигураций – $\Omega_0^{(1)}$ и $\Omega_0^{(2)}$. Далее из элементов ядра $\mathcal{Y}(\Omega)$ была выделена связующая конфигурация $\Omega_0^{(1,2)}$, $|\mathcal{Y}(\Omega_0^{(1,2)})| = 6$ (в условных обозначениях это элементы \mathfrak{Z}), объединение которой с основой $B(\Omega)$ связно. Затем алгоритм обнаружил, что один из элементов – назовем его V_n , вошедших в $\mathcal{Y}(\Omega_0^{(1,2)})$, не может войти в основу искомой конфигурации $\mathcal{Y}(\Omega')$, так как граничит с элементом оболочки $O(\Omega)$, являющимся одновременно и элементом

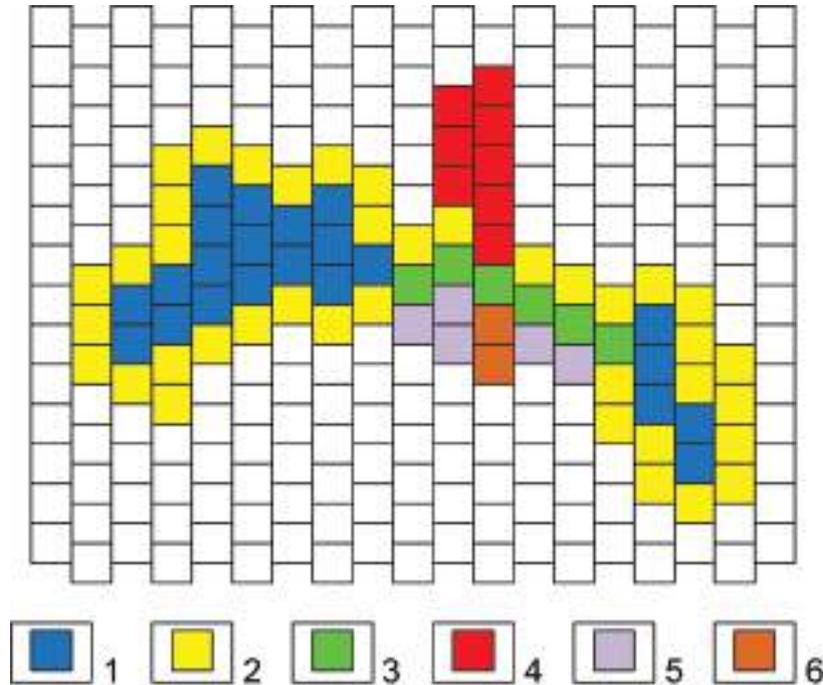


Рис. 2.5. Иллюстрация алгоритма решения задачи дополнения конфигурации Ω до конфигурации Ω' со связной основой $B(\Omega')$: 1 – элементы ядра основы $B(\Omega)$ конфигурации Ω ; 2 – «пассивные» элементы границы $\Gamma(\Omega)$ конфигурации Ω ; 3 – элементы границы $\Gamma(\Omega)$ конфигурации $B(\Omega')$, принимающие активное участие в формировании связной основы $B(\Omega')$; 4 – элементы ядра конфигурации Ω^- , на включение которых в ядро $\mathcal{Y}(\Omega')$ наложен запрет; 5, 6 – элементы замощения, которыми дополнено ядро $\mathcal{Y}(\Omega)$ до ядра $\mathcal{Y}(\Omega')$ искомой конфигурации Ω' .

ядра $\mathcal{Y}(\Omega^-)$. С учетом специфики замощения это означает, что два элемента замощения (в условных обозначениях эти элементы помечены цифрой 4), лежащие ниже элемента V_n , должны быть включены в ядро искомой конфигурации Ω' . Один из этих двух элементов – тот, что граничит с V_n , войдет в ядро $\mathcal{Y}(B(\Omega'))$, а включение другого в это ядро является необходимым условием того, что первый элемент будет иметь в конфигурации Ω' индекс $\nu = 0$. Один из пяти элементов замощения, помеченных цифрой 5, требует включения в $\mathcal{Y}(\Omega')$, чтобы обеспечить связность новообразованного фрагмента основы $B(\Omega')$. Чтобы оболочки всех элементов замощения, планируемых в качестве элементов ядра основы конфигурации Ω' , имели пустое пересечение с оболочкой $O(\Omega')$, понадобилось включить в ядро конфигурации Ω' еще четыре других элемента, помеченных цифрой 5.

Задача 5. Привести связную односвязную конфигурацию Ω к конфигурации Ω' , длины отростков которой не превышали бы заданное t (при условии сохранения основных топологических свойств исходной конфигурации Ω).

Безусловно, ситуация, когда геометрия и размеры элементов замощения таковы, что для описания каких-то геологически значимых фрагментов носителя возмущающих масс отростки в конфигурационном модельном носителе попросту не нужны, является с вычислительной точки зрения более предпочтительной. И вообще, в традиционных технологиях интерпретации, когда требуется построить только *одно* оптимальное решение обратной задачи, интерпретатор при необходимости может самостоятельно дополнить нулевое приближение, построенное по априорной информации, до некой физической конфигурации. Что же касается задачи 5, то она может возникнуть в аддитивных методах интерпретации при автоматизированном формировании нулевых приближений к искомым решениям обратной задачи. Кстати, наличие в модели носителя отростков малой длины в какой-то мере даже оправданно: благодаря разнообразным и неожиданным проявлениям приближенной эквивалентности отростки способны частично скомпенсировать в гравитационном поле влияние мелких геоплотностных неоднородностей, не учтенных в модели источников аномалии.

Частичное «разрушение» отростков в той мере, когда их длины не будут превосходить максимально допустимое значение, можно осуществить двумя способами: путем изъятия из их ядер некоторого числа элементов замощения либо путем наращивания их ядер за счет некоторого (по возможности минимального) числа элементов замощения, образующих с отдельными элементами отростков связные фрагменты основы «новой» конфигурации. Подчеркнем, что поставленная задача не предусматривает приведение конфигурации Ω до полностью безотростковой конфигурации. Сделать это было бы как раз наиболее просто. Но при решении обратной задачи такой радикальный способ решения проблемы может оказаться неприемлемым, если повлечет за собой недопустимое ухудшение значения невязки.

В каких-то случаях стремление иметь дело исключительно с безотростковыми конфигурационными приближениями к решению обратной задачи может привести к парадоксальным ситуациям. Представим себе нулевое приближение в виде конфигурации, представляющей собой отросток. Тогда процедура полного разрушения последнего за счет изъятия элементов ядра приведет к безотростковой конфигурации с пустым ядром.

Остановимся на первой из двух названных выше возможностей. Если подойти к задаче формально, то достаточно изучить случай, когда конфигурация Ω имеет один отросток $T(m_0; J_0)$, длина m_0 которого больше допустимого значения t на единицу. Среди элементов замощения V_j , $j \in J_0$ отыщем любой из них (обозначим его как V_n), при изъятии которого из ядра конфигурации Ω

последняя остается связной. Тогда $Y(\Omega') = Y(\Omega) \setminus \{V_n\}$. Последовательно отсекая от отростка по одному элементу замощения при условии сохранения его связности решим задачу для произвольного $m_0 > m$.

Понятно, что при изъятии из ядра отростка $T(m_0; J_0)$ какого-то элемента V_n конфигурация Ω может распасться на две не граничащие между собой связанные конфигурации Ω_1 и Ω_2 . Одна из них – пусть это Ω_2 – является фрагментом отростка. Если теперь в качестве Ω' взять конфигурацию Ω_1 , то длина отростка в ней будет равна $m_0 - (Y|\Omega_2| + 1)$. Какой прием более эффективный – последовательное отсечение у отростка по одному элементу замощения или одноразовое отсечение сразу «целого» фрагмента отростка – может показать невязка полей, когда речь пойдет об использовании решения рассматриваемой задачи в алгоритмах интерпретации.

Если конфигурация Ω имеет больше одного отростка недопустимой длины, то аналогичным образом поступим с каждым из этих отростков.

Рассмотрим вторую возможность. Здесь важны два момента. Первое, если свойство связности основы конфигурации входит в число допущений и этой связности при формировании конфигурации Ω удалось достичь с помощью ранее изложенного алгоритма, то при включении элементов замощения в ядро конфигурации Ω с целью разрушения ее отростков недопустимой длины вновь образованная конфигурация Ω' должна наследовать это свойство. Второе, если в постановке задачи фигурирует некая конфигурация Ω^- , элементы ядра которой не имеют права войти в ядро искомой конфигурации Ω' , мы должны это учесть. Естественно, мы полагаем, что условия задачи не противоречивы.

Если теперь взять отросток $T(m_0; J_0)$ конфигурации Ω , длина m_0 которого больше максимально допустимой, то укоротить его можно за несколько шагов. На первом из них сформируем множество

$$U = O(T(m_0; J_0)) \setminus (Y(\Omega) \cup Y(\Omega^-)) \quad (2.45)$$

пробных элементов замощения. Среди них выберем тот (обозначим его как V_n), при подключении которого в ядро $Y(\Omega)$ длина отростка T максимально уменьшается и при этом не будет образован новый связный фрагмент основы конфигурации $\Omega \cup V_n$. В алгоритмах решения обратных задач к этим двум критериям может добавиться критерий, связанный с невязкой. Если после этой процедуры длина отростка остается все еще больше, чем m , то на следующем этапе по аналогии к ядру – теперь уже конфигурации $\Omega \cup V_n$ – будет подключен еще один элемент замощения. И так далее.

Проиллюстрируем работу алгоритма разрушения отростков за счет новых элементов замощения. На рис. 2.6 представлена связная односвязная конфигурация с пятью отростками длины 1, 2, 3, 5 и 7. Как и предусмотрено, разрушение каждого отростка начинается с его «основания» (мы полагаем, нет необходимости объяснять, что есть «основание»).

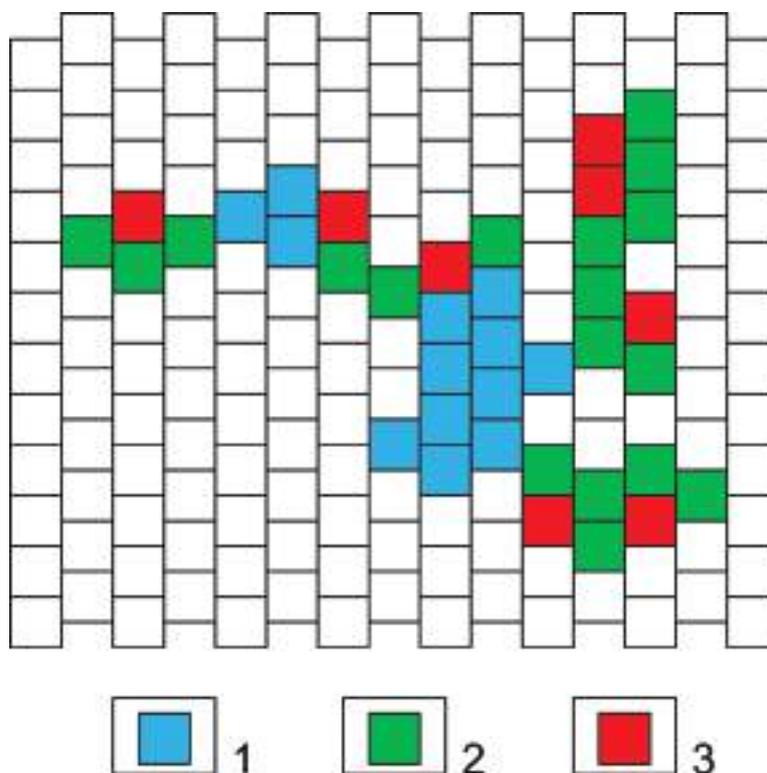


Рис. 2.6. Иллюстрация алгоритма решения задачи разрушения отростков конфигурации Ω путем дополнения ее ядра некоторым числом элементов замощения: 1 – элементы ядра $\mathcal{Y}(\Omega)$, не принадлежащие отросткам границы конфигурации; 2 – элементы ядер отростков конфигурации Ω ; 3 – элементы оболочки $\mathcal{O}(\Omega)$ конфигурации, понадобившиеся для полного разрушения всех отростков.

С этой целью среди альтернативных вариантов включения в ядро конфигурации одного элемента из ее оболочки берется тот, при котором помимо элемента, лежащего в основании отростка, максимальное число других элементов ядра данного отростка теряет свой статус. При этом учитывается возможность «одним выстрелом убить двух зайцев», когда подключение к ядру некоторого элемента замощения позволяет укоротить длину сразу более чем одного отростка. В нашем примере так произошло с отростками длины 1 и 2.

В завершение двух последних разделов главы одно общее замечание. Процедуры выполнения типовых операций совместно с алгоритмами решения типовых задач, потребность в которых возникает в конечноэлементных методах интерпретации и которые изложены в этих разделах, можно условно разбить на две группы. В первую группу попадают те из них, где речь идет

об установлении тех или иных свойств заданной конфигурации. Во вторую – те, где речь идет о проверке соблюдения наследования свойств конфигурации при ее «локальном» преобразовании и пересчете ее основных характеристик. В принципе возможности процедур, попавших в первую группу, перекрывают потребности в решении задач, являющихся прерогативой алгоритмов из второй группы.

Типовые операции и задачи из первой группы решаются более просто: какие-то из приведенных алгоритмов справедливы как для плоских, так и для объемных замощений, в том числе и нерегулярных. Алгоритмы решения задач, связанных с корректировкой статуса элементов замощения, входящих в ядро конфигурации Ω' , полученной за счет «локального» изменения конфигурации Ω с ранее установленными свойствами, несколько сложнее и большей частью привязаны к особенностям замощения и размерности пространства, в которых эти замощения построены. Однако они более экономичны.

Глава 3

БАЗОВЫЙ МЕТОД РЕГУЛИРУЕМОЙ НАПРАВЛЕННОЙ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ

Идеи, заложенные в известные методы решения обратных задач гравиразведки и магниторазведки в классах моделей источников поля, распределенных по конфигурационным носителям, тесно примыкают к более общей концепции применения методов конечных элементов – численных методов, используемых для решения широкого круга задач механики твердого тела, теплообмена, гидродинамики и др. [Зенкевич, 1975; Галлагер, 1984; Хокни, Иствуд, 1987]. Метод конечных элементов не имеет строгих очертаний. Правильнее было бы говорить о группе методов, объединенных идеей дискретизации изучаемой среды и приближенной замены континуальной постановки задачи математической физики на конечномерную.

При комплексной интерпретации геофизических исследований при поисках медно-колчеданных руд успешно используется модель неоднородного геологического пространства, состоящего из элементарных ячеек, обладающих определенным набором физических, химических, минералогических и др. параметров [Виноградов, 2004]. Если взять проблематику обратных задач геофизики, то метод конечных элементов известен здесь достаточно хорошо. В частности, он является важнейшим инструментом построения геоэлектрических моделей сложных геологических сред по измерениям нестационарных электромагнитных полей [Тригубович и др., 2009]. Для гравиразведки и магниторазведки, где измерения поля выполняются в конечном числе точек, идея дискретизации геологической среды, при которой возмущающие тела представлены в виде объединения определенного числа простых геометрических фигур, пришлась как нельзя кстати. Обратные задачи в этом случае естественным образом переходят в класс конечномерных. Тем самым устраняется один из наиболее очевидных признаков неадекватности теории интерпретации, о котором шла речь в первой главе монографии и который состоит в несоответ-

ствии дискретного задания поля, с одной стороны, и описания модели источников как элемента функционального пространства, с другой.

Рассуждая о проблемах математической геофизики, В.Н. Страхов отнес задачу углубленного изучения конечноэлементных технологий к двенадцати наиболее актуальным направлениям развития теории интерпретации потенциальных полей [Страхов, 2001]. По его мнению, проблему становления конечноэлементного подхода к обратным задачам следует ставить в один ряд с созданием специализированного искусственного интеллекта и разработкой математической теории некорректных задач, полностью адекватной реалиям геофизической практики.

3.1. История развития конечноэлементных методов решения обратных задач

В теории и практике интерпретации гравитационных и магнитных аномалий можно выделить несколько этапов пристального внимания геофизиков к конечноэлементным описаниям модели геологической среды. Если не брать в расчет палетки, то начало соответствующим разработкам, судя по всему, положили работы А.А. Юнькова и Е.Г. Булаха [1958], обративших внимание на возможность использования в проблематике обратных задач геофизики математических методов минимизации, переживающих в то время период активного становления. В конце 60-х – начале 70-х годов прошлого века, по мере того, как все большее число геофизиков стало овладевать методами решения условно-экстремальных задач (прежде всего – задач линейного программирования), которые к тому времени получили необходимые технические средства (ЭВМ) для своей реализации, появляются публикации, объединенные идеей синтеза конечноэлементного описания среды и этих методов [Ломтадзе, 1968; Шалаев, 1972]. Определенную роль в становлении нового направления, безусловно, сыграла и работа академика Л.В. Канторовича [1962] по применению линейного программирования для получения двухсторонних оценок избыточной массы источников гравитационного поля в рамках модели в виде «пакета» однородных тел (призм). Среди исследований конца 60-х – начала 70-х годов, посвященных решению обратных задач в классах конечноэлементных моделей источников поля, безусловно следует упомянуть и результаты Д. Зидарова по использованию ε -эквивалентных перераспределений масс [Зидаров, 1968; Zidarov, Zhelev, 1970] для построения допустимых вариантов решения обратной задачи гравиразведки.

Параллельно с разработкой методов решения линейных обратных задач грави- и магнитометрии для оценки физического параметра (эффективной плотности, эффективной намагниченности) в каждом элементе (объеме) се-

точной структуры среды предпринимаются попытки модификации этих методов с целью решения сугубо нелинейных обратных задач, ориентированных на локализацию источников поля [Дядюра, Шалаев, 1968; Перфильев, 1972]. Большие надежды возлагались на различного рода штрафные слагаемые в минимизируемом функционале. Неудачи, сопровождающие поиски исследователей в этом направлении, нашли свое объяснение несколько позже в результатах А.И. Кобрунова [2008] – речь идет о скрытой эквивалентности. Предпринимались также попытки создания алгоритмов решения нелинейных обратных задач на базе методов случайного поиска и методов целочисленного программирования [Миньковский, Чередниченко, 1992].

Отсутствие значимых результатов (проблемы стали возникать уже на этапе формализации условия связности носителя масс) на какое-то время привело к замораживанию теоретических работ по созданию численных алгоритмов решения нелинейных обратных задач гравиразведки и магниторазведки на базе конечноэлементных описаний изучаемой геологической среды. Не последнюю роль сыграл в этом и пришедшийся на 70–90-е годы пик повсеместного увлечения методами решения некорректных обратных задач в функциональных пространствах. Некоторый успех в решении проблемы пространственной локализации парциальных носителей, входящих в модель источников гравитационного поля, был достигнут с помощью метода фокусирующей инверсии [Жданов, 2007]. Правда, в работе М.С. Жданова он демонстрируется на чрезвычайно простом примере. К тому же, успех применения этого метода существенно зависит от искусства выбора весовых коэффициентов в конструкции минимизируемого функционала (ситуация, в чем то похожая на проблему выбора параметра регуляризации в одноименных методах). Заметим также, что в обсуждаемом методе речь идет о задаче инверсии в, так сказать, чистом, «рафинированном» виде, когда постановка обратной задачи не обременена никакими априорными ограничениями, что, конечно же, снижает ее практическую значимость.

Оценивая эффективность вышеперечисленных методов в глаза бросается один крупный недостаток – отсутствие в постановках решаемых задач сколь-нибудь заметного разнообразия априорной информации. Методы решения обратных задач в конечноэлементных модельных классах, на которые мы ссылались выше, были в основном отобраны из числа известных авторам монографии по следующему признаку: в интерпретационном процессе участвует *целиком* замощение изучаемой части пространства, с каждым элементом которого связана оптимизируемая переменная (эффективная плотность масс в элементарном объеме в случае задачи гравиразведки). При этом заведомо ясно, что большинство элементов замощения, число которых даже в плоской обратной задаче будет измеряться многими сотнями, не войдет в приближенное решение обратной задачи. Отсюда возникает нежелательная ситуация, когда размерность решаемой условно-экстремальной задачи заметно превы-

сит фактическую (правда, априори неизвестную) размерность подобранной модели возмущающего объекта.

Если в качестве определяющего признака конечноэлементных методов решения обратных задач взять условие, по которому модель источников поля собирается из некоторого заданного числа простых геометрических фигур (в этом случае иногда удобно говорить о модели в виде «пакета» призм), то перечень работ в этом направлении можно существенно расширить. Достаточно сказать, что «призматические модели» плотностной среды присутствуют даже в самих понятиях линейной и нелинейной обратной задачи гравиразведки [Булах и др., 1976; Старостенко, 1978]. В определенный период времени конечноэлементные модели источников поля подверглись, по нашему мнению, не заслуженной критике. Произошло это по причине того, что недостатки разработанных методов решения обратных задач на базе конечноэлементных моделей источников поля были приписаны самим моделям.

Универсальность и эффективность – два свойства, плохо уживающиеся друг с другом. Во многих работах, посвященных общим методам решения условно-экстремальных задач, подчеркивается, что математическая состоятельность метода не является гарантией успеха его применения на практике при решении какого-то узкого класса задач. Определяющее значение здесь приобретают эвристика и учет особенностей конкретной задачи, а наиболее эффективными могут неожиданно оказаться какие-то частные, узконаправленные методы, ни в коей мере не претендующие на общность [Бахвалов и др., 2003]. Как естественная реакция на ограниченные возможности классического аппарата минимизации при решении обратных задач рудного типа для потенциальных полей в конечноэлементных классах источников поля в середине 70-х годов с небольшим разрывом во времени выходят работы А.В. Овчаренко [1975] и В.Н. Страхова в соавторстве с М.И. Лапиной [1976₁]. В этих работах были предложены принципиально новые, не опирающиеся на классические методы решения условно-экстремальных задач физически содержательные алгоритмы решения нелинейных обратных задач гравиразведки рудного типа в конечноэлементных классах источников поля. В.Н. Страховым было предложено называть такие алгоритмы монтажными.

Несмотря на их идейную близость, очевидным преимуществом метода В.Н. Страхова стало отсутствие требования априорного задания эффективной массы источников аномалии. Конечно, условие задания предполагаемой эффективной массы источников поля – это еще далеко не самое жесткое требование, которое может предъявить метод решения обратной задачи. Известно, что теоретически эффективная масса источников аномалии однозначно восстанавливается по точному гравитационному полю, заданному на достаточно мощном континуальном подмножестве точек. Кроме того, существуют достаточно быстродействующие методы приближенной оценки эффективной мас-

сы по ограниченному числу измерений поля с помощью класса формальных распределений масс, не обладающих геологической содержательностью. Но именно постановка обратной задачи, в которой эффективная масса источников не фигурирует, позволила обнаружить ряд конструктивных приемов, не характерных для классических методов минимизации, которые впоследствии были с успехом использованы авторами данной монографии в более сложных постановках обратных задач.

В работе [Страхов, Лапина, 1976₁] приводится, как мы теперь понимаем, простейший из монтажных методов. Он получил название *метода регулируемой направленной кристаллизации* (РНК). По сути, в постановке обратной задачи, обслуживаемой методом РНК, отсутствуют какие-либо априорные ограничения на геометрию носителя возмущающих масс и его пространственное положение. Метод РНК гарантирует лишь одно – связность модельного носителя, построенного с помощью этого метода. Но ведь именно свойство связности носителя стало своего рода камнем преткновения для разрабатываемых ранее методов решения обратной задачи в конечноэлементных классах источников поля на базе классических методов минимизации. Но и это не все. Даже беглое знакомство с методом РНК не оставляло сомнений, что многие другие типы априорной информации, включая те, с формализацией которых в классических методах решения условно-экстремальных задач были ощутимые проблемы, в монтажных алгоритмах учесть будет проще. Неудивительно, что специалисты не могли пройти мимо благоприятных прогнозов относительно возможностей нового подхода.

Идеи, заложенные в метод РНК, легли в основу нескольких алгоритмов, предложенных в работах представителей украинской научной школы – [Булах, Корчагин, 1978; Завойский, Неисжал, 1979]. Широкий вычислительный эксперимент с методом РНК был выполнен в работе [Schäfer, 1990]. В статье [Долгаль, 1993] этот метод (в двумерной постановке обратной задачи) был впервые опробован на результатах профильной гравиметрической съемки при поиске медно-никелевых руд на п-ове Таймыр, а в работе [Балк и др., 1993] – при прослеживании дифференцированных интрузий по данным гравиразведки. С точки зрения обоснования перспектив практического приложения метода РНК и монтажного подхода в целом важную роль сыграла работа [Schäfer, Balk, 1993], в которой при уровне развития вычислительной техники тех лет была продемонстрирована возможность решения сугубо трехмерных задач в режиме реального времени. Позже авторы монографии не раз возвращались к вопросу развития сугубо трехмерного варианта метода РНК, взять, к примеру, работу [Балк, Долгаль, 2009]. Можно утверждать, что к настоящему времени накоплен уже немалый опыт применения монтажных технологий при объемном моделировании геологических тел и структур по аномальному гравитационному полю в редукции Буге.

Вполне естественно, изучалась перспектива использования метода РНК в иных постановках обратных задач, выходящих за рамки рудной обратной задачи гравirazведки для одной компоненты гравитационного потенциала, обусловленной локальным телом известной эффективной плотности. Эти направления исследований обсуждаются в следующей главе монографии. Здесь же упомянем некоторые из них. Так, в работе [Балк Т., Шефер, 1992] была впервые продемонстрирована возможность решения с помощью модификации алгоритма РНК совмещенной обратной задачи грави- и магнитометрии. В статье [Балк и др., 2011₃] предложен алгоритм решения смешанной обратной задачи при неполной информации об эффективных плотностях, базирующийся на идее метода РНК. В цикле работ П.И. Балка, выполненных частично в соавторстве с Т.В. Балк [Балк, 1993, 1997; Балк, Балк Т., 1995, 1996; Балк и др., 1994], идеи, заложенные в метод РНК, распространены на слоисто-блоковые геоплотностные модели и задачи, возникающие при совместной интерпретации сразу нескольких производных гравитационного потенциала. Рассмотрены также постановки обратных задач, в которых присутствует фоновая компонента в измерениях поля и используются другие метрики близости наблюдаемого и модельного полей. Здесь же были приведены процедуры учета некоторых общих ограничений на свойства помех в измерениях поля (позже эта тематика была затронута в статьях [Балк и др., 2011₁, 2016₂]). Отдельно подчеркнем, что в обсуждаемом цикле работ П.И. Балка и Т.В. Балк изучены возможности использования различных типов априорной информации о свойствах носителя источников поля топологического характера, а также введены различные формы учета гладкости отдельных фрагментов границы носителя возмущающих масс.

Следует также сказать, что независимо от исследований советских, а позже российских геофизиков разработкой конечноэлементных методов инверсии гравитационного поля занимались и специалисты из других стран [Rene, 1986; Samacho et al., 2000]. Примечательно, что подход, разрабатываемый в последней из названных статей, вышедшей значительно позже работы В.Н. Страхова и М.И. Лапиной, довольно заметно перекликается с монтажным подходом. Видимо идея такого рода алгоритмов решения обратных задач грави- и магнитометрии назрела настолько, что буквально «витала в воздухе».

3.2. Метод РНК Страхова-Лапиной как прообраз современных монтажных алгоритмов

Начиная с 80-х годов прошлого столетия в статьях академика В.Н. Страхова, посвященных вопросам методологии интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, стали высказываться сомнения относительно того, что

заимствованные у вычислительной математики методы условной минимизации, являющиеся основным рабочим инструментом решения обратных задач, в состоянии полностью удовлетворить потребности практики. По существу, В.Н. Страхов обозначил проблему развития принципиально новых подходов к методам решения обратных задач, оптимизационная составляющая которых была бы приближена к их геофизическому содержанию. Говоря другими словами, перед математической геофизикой был поставлен вопрос о необходимости создания собственных специализированных методов решения условно-экстремальных задач в условиях наличия широкого спектра различных априорных допущений о строении геоплотностной (геомагнитной) среды и свойствах помех в измерениях поля.

В работе [Страхов, 1987₁] эта мысль была сформулирована следующим образом: «Реализация концепции алгоритмов нового типа решения обратных задач для потенциальных полей должна идти через генерирование некоторой последовательности итераций, каждая из которых исчерпывает в главном отдельную компоненту (локальный фрагмент) в строении изучаемой среды». Предполагалось, что в алгоритмах нового типа решения обратной задачи большое значение будет придаваться декомпозиции исходной задачи, призванной облегчить контроль за соблюдением априорных ограничений на каждом шаге итерационного процесса с помощью последовательности простейших («локальных») критериев, каждый из которых работает лишь с узким подмножеством параметров в описании модели возмущающего геологического объекта. Не исключалось, а скорее даже предполагалось, что такие методы будут созданы специалистами, посвященными в специфику проблемы интерпретации гравитационных и магнитных полей.

По существу, основные положения, сформулированные в работе [Страхов, 1987₁], нашли отражение в концепции монтажных алгоритмов и реализованы в виде метода РНК [Страхов, Лапина, 1976₁₋₃]. С тем чтобы избежать недоразумений при сопоставлении особенностей метода РНК с особенностями более поздних модификаций этого метода, будем называть его *базовым*.

Применительно к гравиразведке основная идея, заложенная в базовый метод РНК и в монтажные алгоритмы в целом, состоит в единстве замощения $V = \{V_i\}$ некоторой достаточно обширной части пространства D , заведомо содержащей в себе область, заполненную источниками аномалии известной эффективной плотности, и специального (монтажного) способа параметризации источников поля. При этом модель конфигурационного носителя источников аномалии собирается (монтируется) из элементов V_i замощения V . Как выяснилось позже [Балк, 1989, 1993; Балк, Балк Т., 1995, 1996; Балк, Балк С., 2000; Балк и др., 1993, 1994, 2011₃, 2012₁, 2016₂; Долгаль и др., 2012], такое единство обеспечивает особо благоприятные условия для учета (причем одновременного) разнообразной априорной информации о геометрии возмущающих

объектов, их положении в пространстве, а также облегчает вычисление модельных полей. Главной особенностью метода РНК является способ структурирования итерационного процесса, при котором каждое новое приближение к решению обратной задачи образуется путем введения «локальной поправки» в предшествующее приближение, что упрощает контроль за соблюдением априорных ограничений (для этих целей можно воспользоваться результатами, изложенными в предшествующей главе). Заметим, что эта особенность метода РНК характерна и для всех последующих, более общих, версий монтажных алгоритмов.

Базовый метод РНК рассчитан на решение плоской обратной задачи, когда источником аномалии гравитационного поля Δg является локальное (связное) однородное тело \hat{S} известной эффективной плотности $\hat{\delta} > 0$. Считается, что измерения поля выполнены в конечном числе m точек X_i произвольной границы «земля–воздух». Принимается аддитивная модель наблюдаемого поля: $\Delta \tilde{g}(X_i) = \Delta \hat{g}(X_i) + \xi_i$, где $\Delta \hat{g}(X_i)$ – поле, обусловленное телом \hat{S} , ξ_i – помеха, $i = 1, 2, \dots, m$. Вся априорная информация сводится к предположению о связности носителя \hat{S} возмущающих масс, указанию точки X_0 пространства, заведомо ему принадлежащей, а также заданию ожидаемого среднеквадратического значения ε нормы помех ξ_i в измерениях $\Delta \tilde{g}(X_i)$.

Работа метода РНК предваряется построением замощения $V = \{V_n\}$, из элементов V_n которого будет «собрано» приближенное решение обратной задачи – конфигурационный модельный носитель Ω^* возмущающих масс. В работе [Страхов, Лапина, 1976₁] предлагалось использовать регулярное замощение правильными шестиугольниками. Причем это было сделано не из соображений изящности (замощение типа «пчелиные соты» выглядит менее «прозрачно», чем, скажем, замощение квадратами, а граница конфигурации – более гладко), а из стремления снизить вычислительные затраты. В эпоху сравнительно маломощных ЭВМ, на которую пришлось создание метода РНК, это было достаточно актуально даже при решении плоских обратных задач – поле шестиугольников, достаточно удаленных от точек измерения поля, можно было заменить полем точечных масс, помещенных в центр этих шестиугольников. Однако ничто не мешает использовать в методе РНК и нерегулярные замощения.

Собственно метод РНК представляет итерационный процесс, в котором за нулевое приближение Ω_0 к искомому носителю Ω^* принимается элемент замощения (обозначим его как $V_{n(0)}$), содержащий точку X_0 . Этот элемент принято называть *центром кристаллизации*. На каждом шаге $k \geq 1$ ядро $Я(\Omega_k)$ очередного конфигурационного приближения Ω_k образуется путем добавления в ядро $Я(\Omega_{k-1})$ предшествующего приближения (Ω_{k-1}) одного элемента замощения (обозначим его как $V_{n(k)}$), взятого из оболочки $O(\Omega_{k-1})$. Благодаря последнему условию очередное приближение Ω_k *автоматически* наследует

свойства связности конфигурации Ω_{k-1} . Таким образом, связность искомого решения Ω^* обеспечивается по построению. Выбор конкретного элемента $V_{n(k)}$ из $O(\Omega_{k-1})$ осуществляется в соответствии с принципом *локальной оптимальности*, на котором остановимся чуть позже.

Целевая установка метода РНК состоит в том, чтобы за конечное (априори неизвестное) число шагов $k = k(0)$ цепочка вложенных локально-оптимальных конфигураций $\Omega_0 \subset \Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots$ замкнулась на некоторую конфигурацию $\Omega_{k(0)}$, которая, будучи заполненной массами эффективной плотности $\widehat{\delta}$, обеспечила бы приемлемую среднеквадратическую невязку наблюдаемого и подобранного полей. Эта невязка должна быть согласована с предполагаемым уровнем ε суммарной помехи, включающей в себя и помехи геологического характера. Если пара $\langle \Omega_{k(0)}, \widehat{\delta} \rangle$ обеспечила приемлемое значение невязки, метод РНК свое предназначение выполнил, и конфигурация $\Omega_{k(0)}$ принимается за одно из допустимых приближенных решений Ω^* обратной задачи гравиразведки.

Принцип *локально-оптимального* выбора наилучшего варианта

$$\mathcal{Y}(\Omega_k) = \mathcal{Y}(\Omega_{k-1}) \cup \{V_{n(k)}\} \quad (3.1)$$

перехода от предшествующего приближения Ω_{k-1} к текущему приближению Ω_k сводится к выполнению следующей цепочки операций.

1. Известный параметр – эффективная плотность $\widehat{\delta}$ – переводится в число свободных (оптимизируемых).

2. Организуется локальный итерационный процесс длины $|O(\Omega_{k-1})|$, на каждом шаге которого:

2.1 – для каждого элемента замощения $V_n \in O(\Omega_{k-1})$ ставится в соответствие пробная конфигурация $\Omega'_{k,n} = \Omega_{k-1} \cup V_n$, претендующая на статус локально-оптимального на шаге k приближения Ω_k ;

2.2 – для каждой пробной конфигурации $\Omega'_{k,n}$ из решения одномерной задачи безусловной минимизации (оптимизируемым параметром является эффективная плотность $\delta_{k,n}$ масс, распределенных по области $\Omega'_{k,n}$), а по существу – из решения линейного алгебраического уравнения, определяется значение $\delta_{k,n} = \delta_{k,n}^*$, минимизирующее среднеквадратическое расхождение

$$\Phi_0(\delta_{k,n}) = \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\Delta \widetilde{g}(X_i) - \Delta g(\Omega'_{k,n}, \delta_{k,n}; X_i))^2 \right)^{1/2} \quad (3.2)$$

в точках X_i наблюдаемого поля $\Delta \widetilde{g}$ и поля Δg модельных масс;

2.3 – вычисляется величина $\varepsilon_{k,n}^* = \Phi_0(\delta_{k,n}^*)$ этого минимального расхождения.

3. После завершения (на шаге k) локального итерационного процесса среди всех $|O(\Omega_{k-1})|$ пробных вариантов $\Omega'_{k,n}$, $n = 1, 2, \dots, |O(\Omega_{k-1})|$ выбирается тот, в котором значение $\varepsilon_{k,n}^*$ оказалось наименьшим. Индекс n , при котором значение $\varepsilon_{k,n}^*$ минимально, обозначим как $n(k)$, а значения $\varepsilon_{k,n(k)}^*$ и $\delta_{k,n(k)}^*$ как ε_k^* и δ_k^* , соответ-

ственно. В качестве наилучшего на шаге k (локально-оптимального) претендента на подключение к ядру $\mathcal{Y}(\Omega_{k-1})$ берется элемент замощения $V_{n(k)}$, так что

$$\mathcal{Y}(\Omega_k) = \mathcal{Y}(\Omega_{k-1}) \cup \{V_{n(k)}\}. \quad (3.3)$$

Из физических соображений ясно, что должна иметь место тенденция к убыванию значений локально-оптимальных плотностей δ_k^* с ростом номера шага k глобального итерационного процесса (по сути – с увеличением меры текущего носителя Ω_k). Как только на некотором шаге $k = k(0)$ выполнится неравенство $\delta_{k(0)}^* \leq \hat{\delta}$, итерационный процесс завершен. Если достигнутая на шаге $k(0)$ невязка $\varepsilon_{k(0)}^*$ оказалась допустимой, приближение $\Omega_{k(0)}$ принимается за искомое решение Ω^* обратной задачи (при достаточно большой мощности $|\mathcal{Y}(\Omega^*)|$ ядра подобранного конфигурационного носителя разностью $|\delta_{k(0)}^* - \hat{\delta}|$ можно пренебречь).

При желании в методе РНК можно найти признаки известных алгоритмов решения экстремальных задач. Так, метод РНК, если его рассматривать как специализированный метод решения определенного класса экстремальных задач, тяготеет к методам минимизации нулевого порядка – здесь нет необходимости в вычислении производных минимизируемой функции. Вместе с тем, метод РНК имеет пять важных особенностей.

Первая и, пожалуй, наиболее яркая особенность заключается в том, что в методе РНК используется такой необычный для классических методов решения условно-экстремальных задач прием, как перевод известного параметра (в нашем случае эффективной плотности $\hat{\delta}$) в число оптимизируемых.

Вторая особенность состоит в том, что в критерии завершения итерационного процесса фигурирует текущее значение эффективной плотности (оптимизируемой переменной), при том, что признаком того, является или нет построенное решение Ω^* допустимым, служит достигнутое значение невязки.

Третья особенность состоит в том, что конфигурация Ω_0 – как единичный элемент замощения – далека от привычных представлений о нулевом приближении к решению обратной задачи гравиразведки, согласно которым оно должно быть по геометрии и по создаваемому (вместе с плотностью $\hat{\delta}$) полю достаточно близким к точному решению \hat{S} . Благодаря тому, что эффективная плотность является в методе РНК свободным параметром, удается довольно быстро подобрать эффективную массу при существенном отличии конфигурации Ω_0 от носителя \hat{S} . Вследствие этого итерационный процесс буквально с первых шагов выходит на достаточно малые значения невязок ε_k^* .

Четвертая особенность состоит в том, что для метода РНК отсутствует привычное представление о размерности условно-экстремальной задачи, согласно которому эта размерность остается неизменной на протяжении всего итерационного процесса. Если ввести понятие (локальной) размерности задачи на шаге итерационного процесса и считать, что в нашем случае это число

$|O(\Omega_{k-1})|$ элементов замощения, непосредственно участвующих в оптимизации на итерации k (плюс свободный параметр эффективной плотности), то эта размерность будет на каждом шаге своя. «Плавающая» размерность – это одно из достоинств метода РНК. Отчасти по этой причине метод РНК в меньшей мере подвержен «проклятию размерности», которое, по Р. Беллману [Bellman, 1961], висит над всеми нелинейными многоэкстремальными задачами. Если бы мы попытались выполнить интерпретацию (в том же модельном классе), но с использованием целочисленного (бинарного) программирования, то размерность задачи была бы значительно выше и равнялась числу элементов замощения, покрывающих область D . Стремление обеспечить при этом связность построенного носителя за счет штрафного слагаемого в минимизируемом функционале столкнулось бы, скорее всего, с определенными затруднениями (в частности, с чрезмерным заглаживанием границы носителя Ω^*).

Пятая особенность метода РНК заключается в том, что нелинейная по постановке обратная задача становится линейной. Действительно, если считать, что роль вектора геометрических параметров в описании модели возмущающего объекта здесь играет множество I номеров элементов замощения, составляющих ядро конфигурационного носителя Ω^* , то

$$\Delta g(I_1 \cup I_2; X) = \Delta g(I_1; X) + \Delta g(I_2; X). \quad (3.4)$$

Базовый метод РНК – это пример того, как, отказавшись от практики заимствования классических методов минимизации из вычислительной математики, можно заметно поднять эффективность результатов интерпретации за счет специализированных, проблемно-ориентированных алгоритмов решения условно-экстремальных задач.

3.3. Результаты вычислительных экспериментов

По мнению авторов монографии, главные особенности базового метода РНК, как, впрочем, и метода А.В. Овчаренко, достаточно полно раскрывают ответы на три следующих вопроса.

Вопрос первый: насколько эффективным является прием с раскрепощением известного параметра $\hat{\delta}$ и в какой степени такой прием является вынужденным?

Вопрос второй: насколько чувствительно построенное решение Ω^* обратной задачи к структуре выбранного замощения $\{V_i\}$ и выбору нулевого приближения (центра кристаллизации $V_{n(0)}$); можно ли снять требование обязательной принадлежности центра кристаллизации истинному носителю масс (другими словами, способен ли метод РНК сам, за счет своих внутренних резервов, исправить неудачный выбор нулевого приближения)?

Вопрос третий: обеспечена ли результативность обоих методов удачно выбранной (среднеквадратической) метрикой подбора, а если нет, то в какой мере мы можем разнообразить структуру функционала близости наблюдаемого и модельного полей, оставляя столь же высокие шансы на выход итерационного процесса на приемлемое решение обратной задачи по значению такого функционала?

Эти вопросы имеют большей частью теоретический характер. Что касается потенциального пользователя базовым методом РНК (мы сейчас отставим в сторону вопрос о том, сколь часто на практике встретится ситуация, когда вся априорная информация сводится к связности носителя возмущающих масс), то его, скорее всего, заинтересует возможность достижения приемлемой невязки наблюдаемого и подобранного полей. Если речь идет о решении модельного примера, то вряд ли можно удержаться, чтобы не оценить и точность построенного решения, даже понимая, что она имеет случайный характер. В этой связи считаем необходимым четко определиться наперед с, казалось бы, очевидным (в силу сложившихся стереотипов) ответом на вопрос: что, собственно, следует ожидать от результатов решения модельных примеров в целом и по каким признакам мы собираемся судить о состоятельности предлагаемых методов. Не станем пересказывать контрдоводы, приведенные в первой главе, а лишь повторимся: если метод (мы сейчас говорим не только о методе РНК) сумел учесть все априорные ограничения и вышел на допустимое решение обратной задачи, то он достиг поставленной перед ним цели. Какая при этом достигнута точность приближенного решения – это уже дело случая, за которым, безусловно, незримо стоит мощность множества Q допустимых решений обратной задачи. В случае метода РНК вся коллизия заключается в одном: успеет ли последовательность достигнутых значений невязки выйти на приемлемое значение до того, как в малую окрестность плотности $\hat{\delta}$ выйдет последовательность значений эффективной плотности, обеспечивающих на каждом шаге минимум невязки, т.е. до того, как завершится итерационный процесс. Тем не менее, исключительно лишь из желания очередной раз показать, сколь широко проявление эквивалентности в конкретной постановке обратной задачи и есть ли смысл рассчитывать в подобной ситуации на удачу, мы будем попутно иллюстрировать не только графики изменения невязки, но и построенные приближенные решения.

Таким образом, цель наших модельных примеров не в иллюстрации каких-то высоких разрешающих возможностей метода на специально подобранных примерах, а в том, чтобы дать наглядное представление о сути и специфике этого метода – сложные модельные примеры, отвлекающие от главного, здесь не нужны. К тому же, при желании мы легко можем сконструировать примеры, когда в довольно сложных ситуациях при минимуме априорных ограничений алгоритм (без всяких подтасовок!) выйдет на приближенное решение с желаемой точностью. В первой главе мы рассказали, как строить такие примеры.

В дополнение к тому, что было изложено в первой главе, есть смысл еще раз заострить внимание читателя на одном важном аспекте, который следует иметь в виду при выборе модельных примеров и оценке метода РНК (да и вообще любых методов решения обратных задач гравиразведки и магниторазведки). Речь идет о бессмысленности стремления минимизировать невязку сверх необходимости. В обоснование этого утверждения можно привести три довода.

Первый довод: между невязкой модельного и точного поля, с одной стороны, и точностью решения обратной задачи, с другой, нет прямой зависимости.

Второй довод: решение обратной задачи, обеспечивающее невязку, незначительно превосходящую уровень помехи в измерениях поля, может по точности превзойти иные допустимые решения.

Третий довод: даже если бы прямая зависимость между точностью решения и близостью подобранного и точного полей имела место, то не следует забывать, что в методах приближенного решения обратных задач речь всегда идет о невязке модельного и *наблюденного* (а не *истинного*) полей.

В базовом методе РНК (как, впрочем и в его обобщающих модификациях) выход на допустимое решение обратной задачи связан как раз с возможностью достичь ее приемлемого значения (добиться в этих обобщающих версиях выполнения других ограничений формально не представляет сложностей) и потому наше предостережение остается актуальным. Но это не означает, что вопрос о предельных возможностях метода РНК в вопросе минимизации невязки не так уж важен. Действительно, возьмем ситуацию, когда приемлемое значение невязки достичь не удалось и открытым остается вопрос, а существуют ли вообще допустимые решения обратной задачи при взятых ограничениях на модель среды и поля. Понятно, что чем ближе достигнутая невязка к ее глобальному минимуму, тем реже подобная ситуация будет возникать, и если все же возникнет, то у нас будет больше уверенности в том, что допустимых решений попросту не существует. В этом смысле интерес, в том числе, представляют и модельные примеры, в которых решение обратной задачи осуществляется по *точному* полю. На них можно количественно оценить, насколько достигнутая невязка «не дотянула» до глобального минимума, который в случае адекватных предпосылок известен и равен нулю, и перенести эту оценку на примеры с приближенно заданными значениями аномального поля.

Что касается содержания примеров, приведенных в данном разделе, то, помимо всего, они подобраны с учетом тех моделей источников аномалии, которые в следующей главе мы выбрали для демонстрации работы обобщенного метода РНК. Есть смысл уже сейчас назвать основные признаки, по которым обобщенный метод РНК отличается от базового.

1. Обобщенный метод РНК рассчитан на модели с любым заданным числом локальных тел различной (в том числе и разнознаковой) эффективной плотности;

2. Обобщенный метод РНК допускает использование произвольных нулевых приближений (не связных, не односвязных), ядра которых могут состоять из любого числа элементов замощения;

3. Обобщенный метод РНК использует в качестве априорных ограничений на искомое решение дифференцированные оценки гладкости отдельных фрагментов границы носителей источников аномалии;

4. Обобщенный метод РНК предполагает учет практически всех известных априорных ограничений на геометрию и пространственное положение источников поля, встречающихся при решении обратных задач гравиразведки и магниторазведки.

Несколько слов относительно расширения возможностей базового метода РНК за счет ограничений, отмеченных в пункте 4. Будем считать, что авторы базового метода РНК, занятые принципиальными вопросами, просто не успели акцентировать внимание на некоторых из этих возможностей. К примеру, ограничения на пространственное положение источников поля формализуются весьма просто; в некоторых случаях, достаточно должным образом задать область D , подлежащую замощению. Случай $\bar{\delta} < 0$ легко свести к случаю $\bar{\delta} > 0$. Понятно, что не представляет труда следить на каждой итерации за тем, чтобы размеры текущего носителя по латерали и вертикали не превышали максимально допустимых значений. В особенности сделать это просто в случае регулярных замощений. По этой причине в примеры, демонстрирующие суть базового метода РНК, мы будем для большей наглядности включать некоторые простые ограничения (без них высокая неустойчивость приближенного решения отвлекает внимание от главного), хотя формально они и не были предусмотрены авторами этого метода.

Пример 3.1. Рассмотрим модельную ситуацию, когда в роли носителя масс эффективной плотности $\delta = 0,3$ г/см³ выступает бесконечно протяженная горизонтальная призма, сечением которой (вкрест простирания) служит конфигурация $\bar{\Omega}$ мощности $|\mathcal{Y}(\bar{\Omega})| = 88$, собранная из квадратных элементов замощения с длиной стороны 25 м. Таким образом, при оценке того, сколь велика (или мала) достигнутая невязка мы исключаем необходимость введения поправок за неадекватность модельного класса источников поля. Приближенные (условно говоря, измеренные) значения $\Delta\tilde{g}_i = \Delta\tilde{g}(x_i)$ аномалии Δg заданы на профиле в $m = 36$ точках $x_i = 50(i - 1)$ (в метрах) и отягощены помехой ξ , имеющей достаточно близкое к нулю среднее. Ее среднеквадратическое значение составляет чуть более 2% от максимума аномалии и приблизительно равно 0,015 мГал (рис. 3.1). Априори предполагается, что носитель масс является односвязным, его мощность не превышает 1 км по латерали и 0,5 км по вертикали, а глубина залегания нижней кромки не превосходит 1 км. На рис. 3.2 представлены графики изменения невязки ε_k^* и оптимизируемой плотности δ_k^* с ростом номера итерации k .

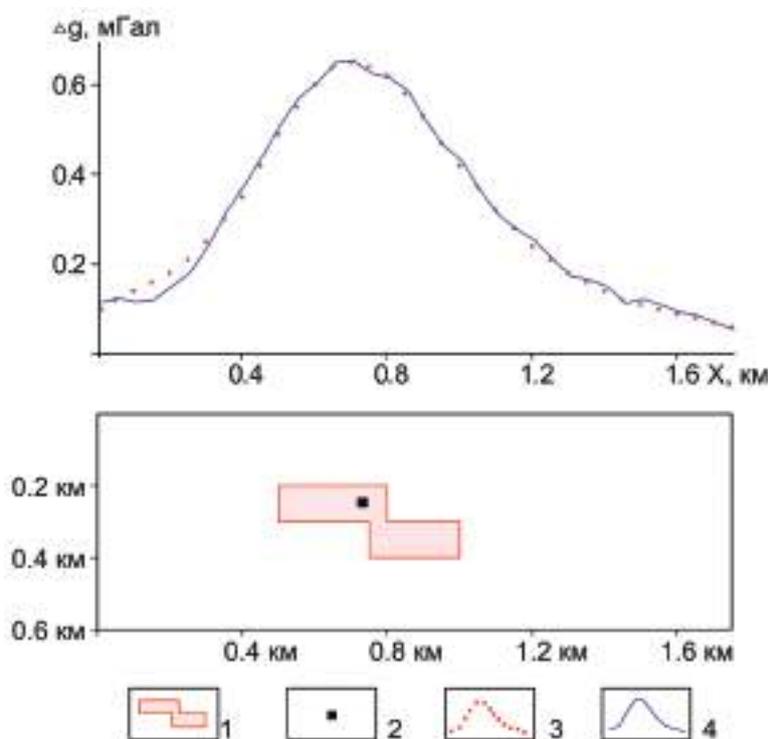


Рис. 3.1. Геоплотностная модель: 1 – аномалиеобразующий объект; 2 – центр кристаллизации; 3 – точное поле Δg ; 4 – заданное («наблюденное») поле $\Delta \tilde{g}$.

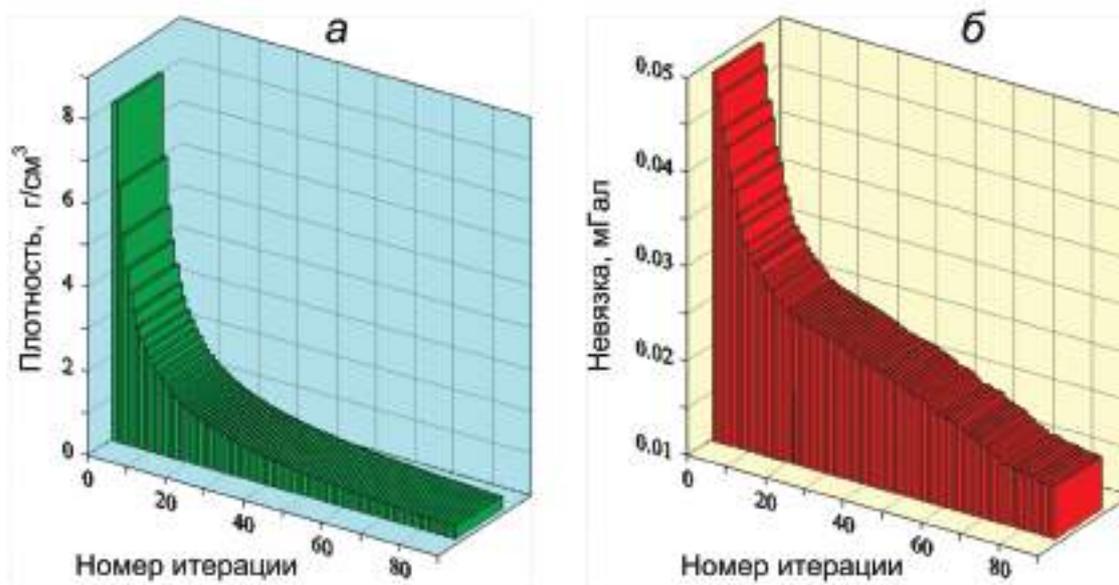


Рис. 3.2. Графики поведения локально оптимальных значений плотности δ_k^* масс, распределенных по текущим конфигурационным приближениям $\Omega_k(a)$, и невязки ε_k^* (б).

Базовый метод РНК справился с поставленной задачей – итерационный процесс вышел на невязку, величина которой практически совпала с нормой помех в значениях поля.

На рис. 3.3 приведены несколько промежуточных приближений Ω_k , включая само решение Ω^* обратной задачи.

Пример 3.2. Мы считаем необходимым дать ответ на вопрос, действительно ли прием с раскрепощением физического параметра является вынужденной мерой для базового метода РНК? Не было ли здесь просто желания авторов метода пойти оригинальным, нетрадиционным путем, насколько физически оправданным оказался этот шаг?

Рассмотрим плоскую обратную задачу гравиразведки, в которой аномалия Δg обусловлена телом \hat{S} эффективной плотностей $\hat{\delta} = 0,25$ г/см³ (рис. 3.4). Интерпретация осуществляется по точным значениям аномалии $\Delta \tilde{g}(x_i)$,

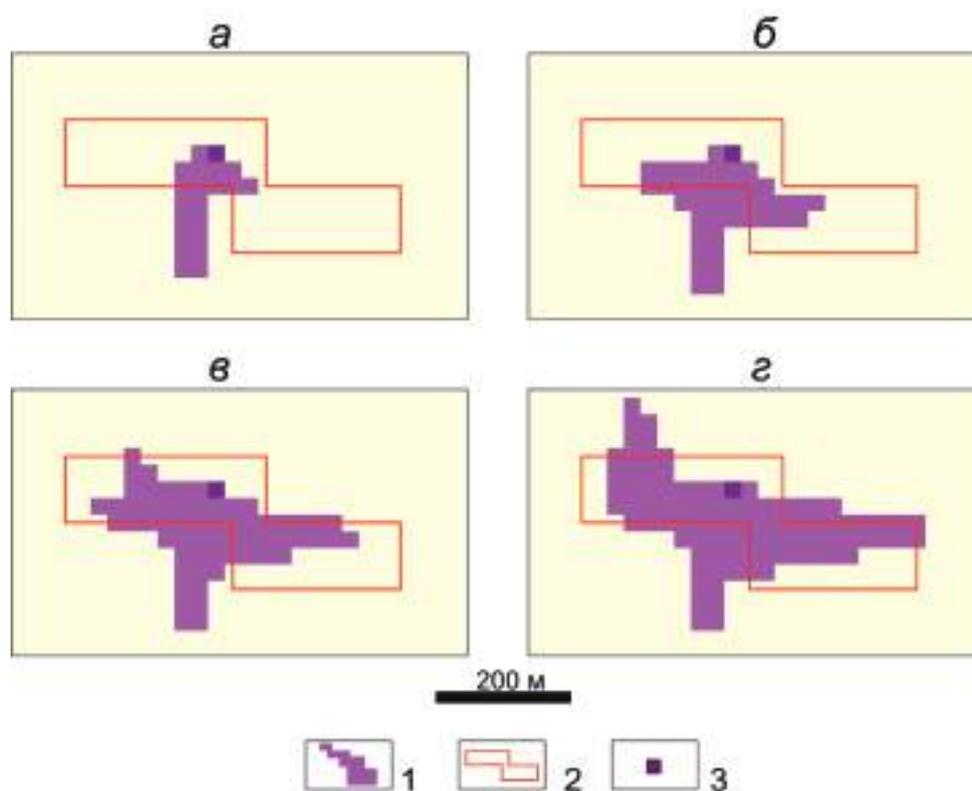


Рис. 3.3. Текущие приближения к решению обратной задачи методом РНК, достигнутые за различное число k итераций: *а* – $k = 20$ ($\delta_{20}^* = 1,248$ г/см³, $\varepsilon_{20}^* = 0,026$ мГал); *б* – $k = 40$ итераций ($\delta_{40}^* = 0,656$ г/см³, $\varepsilon_{40}^* = 0,023$ мГал); *в* – $k = 60$ итераций ($\delta_{60}^* = 0,439$ г/см³, $\varepsilon_{60}^* = 0,020$ мГал); *г* – итоговый результат интерпретации ($\delta^* = \delta_{88}^* = 0,298$ г/см³, $\varepsilon^* = \varepsilon_{88}^* = 0,016$ мГал). 1 – текущее приближение Ω_k ; 2 – аномалиеобразующий объект; 3 – центр кристаллизации (нулевое приближение Ω_0).

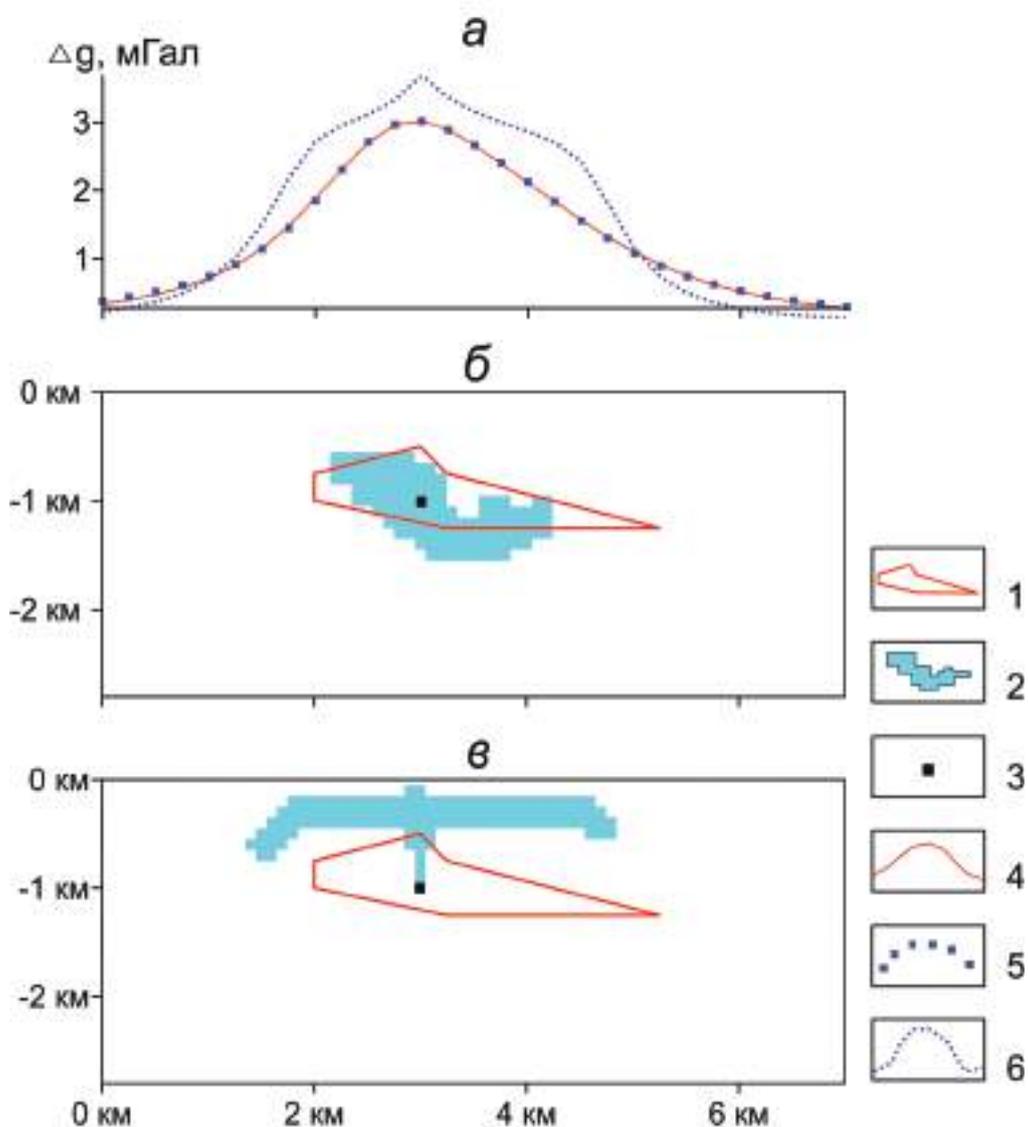


Рис. 3.4. Результаты решения обратной задачи по двум сопоставляемым методам: *a* – гравитационные поля, *б* – решение по методу РНК, *в* – решение по «аналогу» метода РНК. 1 – истинное тело S ; 2 – решение обратной задачи Ω^* ; 3 – нулевое приближение Ω_0 (центр кристаллизации); 4 – исходное («наблюдаемое») поле; 5 – модельное поле от конфигурации Ω^* , построенной по методу РНК; 6 – модельное поле от конфигурации Ω^* , построенной по «аналогу» метода РНК.

заданным с шагом 250 м на горизонтальном профиле длиной 7 км, то есть $\Delta \tilde{g}_i = \Delta \tilde{g}(x_i)$.

Априорная информация сводится к ограничению на максимально допустимую глубину погружения нижней кромки тела (не более 1,5 км) и заданию

достаточно широкой прямоугольной области D , гарантированно содержащей возмущающий объект.

На рис. 3.4 приводятся решения обратной задачи (на базе регулярного замощения с квадратными элементами), построенные по базовому методу РНК и по его «аналогу». «Аналог» отличается от метода РНК одним – на всех итерациях k и на всех пробных шагах, выполняемых в рамках каждой итерации, оптимизация эффективной плотности масс, распределенных по модельному носителю, не выполняется. Везде берется истинное значение эффективной плотности – $\delta_{k,n}^* = \hat{\delta}$ для всех k и n . Рис. 3.5 иллюстрирует важную характеристику итерационных процессов – функцию изменения достигнутой невязки ε_k^* с ростом номера итерации k . Показано, как эти функции соотносятся с априорной информацией в виде задания порогового значения невязки, равного 0,05 мГал (пунктирная линия).

В поддержку приема с раскрепощением известного параметра – эффективной плотности, и перевода его в число оптимизируемых мы даже не станем особо акцентировать внимание на том, сколь существенно отличаются точности решения по этим двум сопоставляемым методам. С прицелом на использование базового метода РНК в аддитивных методах интерпретации нас, прежде всего, интересует достигнутая невязка ε^* , а значит и шансы метода РНК выйти на допустимое решение обратной задачи в схожих условиях. В случае метода РНК она равна 0,020 мГал (0,6% от амплитуды аномалии). В случае «аналога» метода РНК нельзя вообще говорить о достигнутой невязке – ведь критерий останова итерационного процесса, аналогичный тому, что есть в

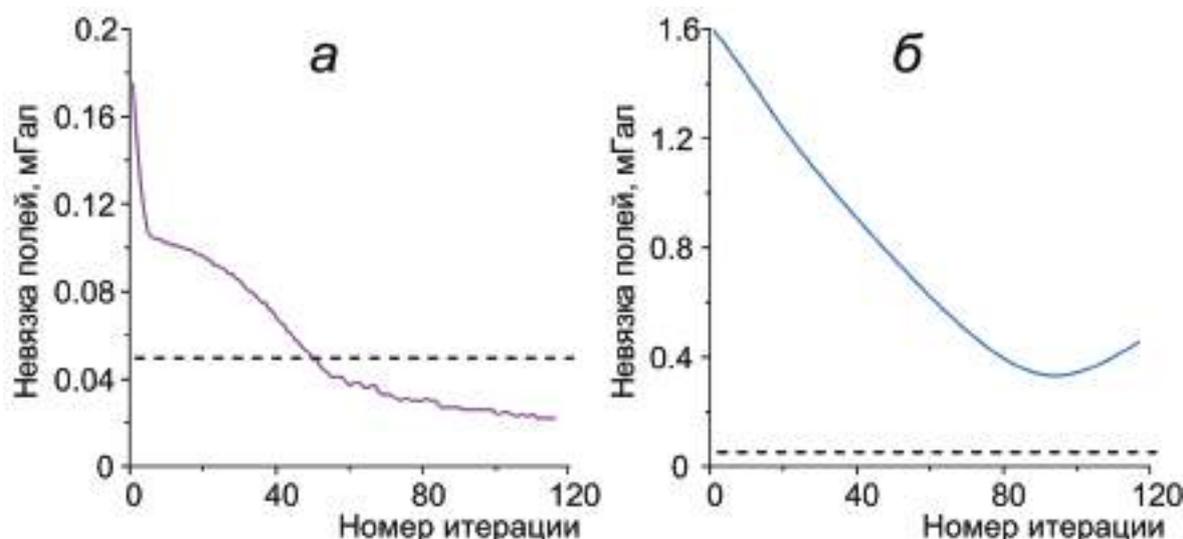


Рис. 3.5. Графики изменения невязки ε_k^* с ростом номера итерации k : а – по методу РНК; б – по «аналогу» метода РНК.

методе РНК, здесь отсутствует. Можно заметить, что «аналог» метода РНК, начиная уже с первых шагов k , стремился понизить невязку за счет включения в ядра текущих приближений Ω_k приповерхностных элементов замощения.

Мы сочли полезным привести приближение Ω_k на том шаге k , на котором «аналог» метода РНК вышел (не подозревая того) на истинную эффективную (избыточную) массу. Если все же позволить «аналогу» проделать довольно много итераций, то окажется, что минимальное из достигнутых значений невязок равно 0,253 мГал (8,3% от амплитуды аномалии). Приведенные числовые характеристики двух итерационных процессов говорят о многом: если бы интерпретатор в качестве приемлемой невязки назвал любое значение в диапазоне от 0,020 до 0,253 мГал, то вопрос о существовании допустимых решений «аналог» метода РНК оставил бы открытым, тогда как базовый метод РНК не только отвечает на него утвердительно, но и готов представить одно из таких решений.

Пример 3.3. Читатель, вероятно, самостоятельно сделал правильный вывод из результатов решения предыдущего примера. По нашему мнению, он состоит в следующем. Метод РНК не относится к числу так называемых *жадных алгоритмов* [Кормен и др., 2005] – локальный принцип оптимальности в нашем случае не гарантирует оптимальность итерационного процесса в целом. Если бы это было так, то при решении обратной задачи по точному полю и адекватной модели возмущающих масс метод РНК должен был бы выходить на нулевое значение невязки. Этого не происходит. Однако включение эффективной плотности в число оптимизируемых параметров, по сути означающее эксплуатацию того факта, что недостаток меры носителя возмущающих масс можно отчасти компенсировать большим значением плотности, позволяет сгладить недостатки локального принципа оптимальности. Подобный довод вселяет определенный оптимизм в отношении успешного применения метода РНК с другими функционалами близости наблюдаемого и подбираемого полей.

В случае октаэдрической метрики на каждом шаге итерационного процесса РНК возникнет задача минимизации суммы модулей невязок полей в точках x_i :

$$\Phi_1(\delta) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |\Delta \tilde{g}(x_i) - \Delta g(\Omega, \delta; x_i)|, \quad (3.5)$$

где (опуская индексы) через $\Delta g(\Omega, \delta; x_i)$ обозначено поле масс эффективной плотности δ , распределенных по какому-то пробному конфигурационному носителю Ω .

В случае использования еще одной из триады наиболее востребованных метрик в конечномерных пространствах предполагается, что интерпретатор может указать оценку максимально возможного значения помехи по всем точкам измерения поля. Соответственно, на каждом пробном шаге итерационного процесса РНК возникнет задача минимизации функции вида

$$\Phi_2(\delta) = \max\{|\Delta\tilde{g}(x_i) - \Delta g(\Omega, \delta; x_i)|, i = 1, 2, \dots, m\}. \quad (3.6)$$

Важно подчеркнуть (и в этом прагматический геофизический подход также расходится с математическим), что минимизируемый функционал, фигурирующий в методе РНК, вовсе не обязан даже быть метрикой, тем более – одной из классических.

В стремлении максимально приблизить поле подобранного распределения возмущающих масс к истинному (хотя, более строго следует сказать – наблюдаемому) геофизиками не раз выдвигалась идея применения в структуре минимизируемого функционала каких-то весовых коэффициентов. Считается, что это может повысить качество интерпретационных построений, особенно в тех случаях, когда измерения заведомо не равноточны. В случае с весовыми коэффициентами на пробном шаге понадобится решать задачу одномерной минимизации функции вида

$$\Phi_3(\delta) = \left(\sum_{i=1}^m p_i (\Delta\tilde{g}(x_i) - \Delta g(\Omega, \delta, x_i))^2 \right)^{1/2}, \quad p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1. \quad (3.7)$$

Понятно, что вместо взвешенного квадратичного функционала могла быть заявлена взвешенная сумма модулей невязок.

Если запрос на функционал типа (3.7) поступил, возникает вопрос: по какому принципу выбирать веса? На наш взгляд, если уж применять конструкцию с весовыми коэффициентами, стремясь максимально приблизиться к наблюдаемому полю, то пусть эти коэффициенты будут «плавающими», меняющимися по ходу итерационного процесса в соответствии с достигнутыми за предыдущие итерации локальными невязками в точках x_i . Интерпретаторам, пожелавшим использовать весовые конструкции в минимизируемом функционале, можно рекомендовать следующий принцип: на каждой итерации k берутся веса $p_i^{(k)}$, согласованные со степенью близости полей $\Delta\tilde{g}(x)$ и $\Delta g(\Omega_{k-1}, \delta_{k-1}; x)$ на предыдущем шаге $k - 1$:

$$p_i^{(k)} = \frac{|\Delta\tilde{g}(x_i) - \Delta g(\Omega_{k-1}, \delta_{k-1}; x_i)|}{\sum_{r=1}^m |\Delta\tilde{g}(x_r) - \Delta g(\Omega_{k-1}, \delta_{k-1}; x_r)|}. \quad (3.8)$$

К концепции применения весовых коэффициентов в структуре минимизируемого функционала близка идея использования предварительного логарифмирования отношений подбираемого и наблюдаемого поля:

$$\Phi_4(\delta) = \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left(\ln \left| \frac{\Delta g(\Omega, \delta, x_i)}{\Delta\tilde{g}(x_i)} \right| \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (3.9)$$

Это далеко не весь перечень структур минимизируемого функционала, который мог бы быть использован в алгоритме РНК. Так, В.Н. Страхов неоднократно ставил вопрос о создании методов решения обратных задач гравитразведки при мультипликативно-аддитивной помехе в измерениях [Страхов, 1991₁₋₃]. Возьмем ситуацию, когда в среднем помеха пропорциональна значению поля и интерпретатор может задать такое $\varepsilon_0 > 0$, что:

$$1 - \varepsilon_0 \leq \frac{\Delta \hat{g}(x_i)}{\Delta \tilde{g}(x_i)} \leq 1 + \varepsilon_0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (3.10)$$

Тогда, следуя логике монтажного подхода, необходимо на каждой итерации k для каждой пробной конфигурации Ω подобрать плотность δ , минимизирующую функционал

$$\Phi_5(\delta) = \max \left\{ \left| \frac{\Delta g(\Omega, \delta; x_i)}{\Delta \tilde{g}(x_i)} - 1 \right|, i = 1, 2, \dots, m \right\}. \quad (3.11)$$

Критерий останова итерационного процесса остается прежним. Признаком того, что процесс вышел на допустимое решение обратной задачи, является выполнение неравенства $\Phi_5(\delta) \leq \varepsilon_0$.

Не исключено, что большинство геофизиков из числа ознакомившихся с этими результатами увидит в способности метода РНК настроиться на различные типы минимизируемого функционала возможность повышения точности решения обратной задачи и свяжут это с условием согласования структуры этого функционала с априорной информацией о свойствах помех в измерениях поля. Что касается авторов монографии, то мы видим в способности метода РНК работать с различными минимизируемыми функционалами другое – возможность движения к допустимому решению обратной задачи Ω^* еще по какой-то из «траекторий», которая может оказаться более удачной среди опробованных с точки зрения обеспечения приемлемого значения невязки. Что примечательно (и мы в этом убедимся по результатам вычислительного эксперимента), решение по методу РНК с использованием одной метрики может дать меньшее значение невязки в какой-то другой метрике, чем в случае, когда эта другая метрика согласована с метрикой, используемой в методе РНК. Это не удивительно, если принять во внимание *локально-оптимальный* характер итерационного процесса РНК.

Перейдем теперь к конкретным расчетам. Рассмотрим ту же модель источников, что и в примере 3.1, с той лишь разницей, что значения аномалии (в тех же $m = 36$ точках x_i) не содержат помех – $\Delta \tilde{g}(x_i) = \Delta \hat{g}(x_i)$, но алгоритм решения обратной задачи учитывать это обстоятельство не станет.

Нам понадобятся следующие характеристики интенсивности интерпретируемой аномалии $\Delta \tilde{g}$, с которыми мы будем сопоставлять достигнутые значения функционалов невязки:

$$v_0 = \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \Delta \hat{g}^2(x_i) \right)^{1/2} = 0,361 \text{ мГал}, \quad (3.12)$$

$$v_1 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |\Delta \hat{g}(x_i)| = 0,304 \text{ мГал}, \quad (3.13)$$

$$v_2 = \max\{|\Delta \hat{g}(x_i)|, i = 1, 2, \dots, m\} = 0,653 \text{ мГал}. \quad (3.14)$$

Поскольку у нас есть альтернатива – использовать базовый метод РНК или метод А.В. Овчаренко, то определимся вначале, в рамках модификаций какого из этих двух методов более целесообразно работать в нашем случае. С этой целью сопоставим особенности итерационных процессов, описывающих метод РНК и метод А.В. Овчаренко, на одном типе функционала – среднеквадратическом расстоянии между двумя полями. Как показывает рис. 3.6, на протяжении всех 88 итераций, которые понадобились как алгоритму А.В. Овчаренко, так и методу РНК, графики изменения локально-оптимальных плотностей δ_k^* едва ли не копируют друг друга (максимальное относительное расхождение обеих графиков менее 4%). Весьма схожи и графики изменения невязки ε_k^* . Достигнутые по этим методам значения среднеквадратической невязки до-

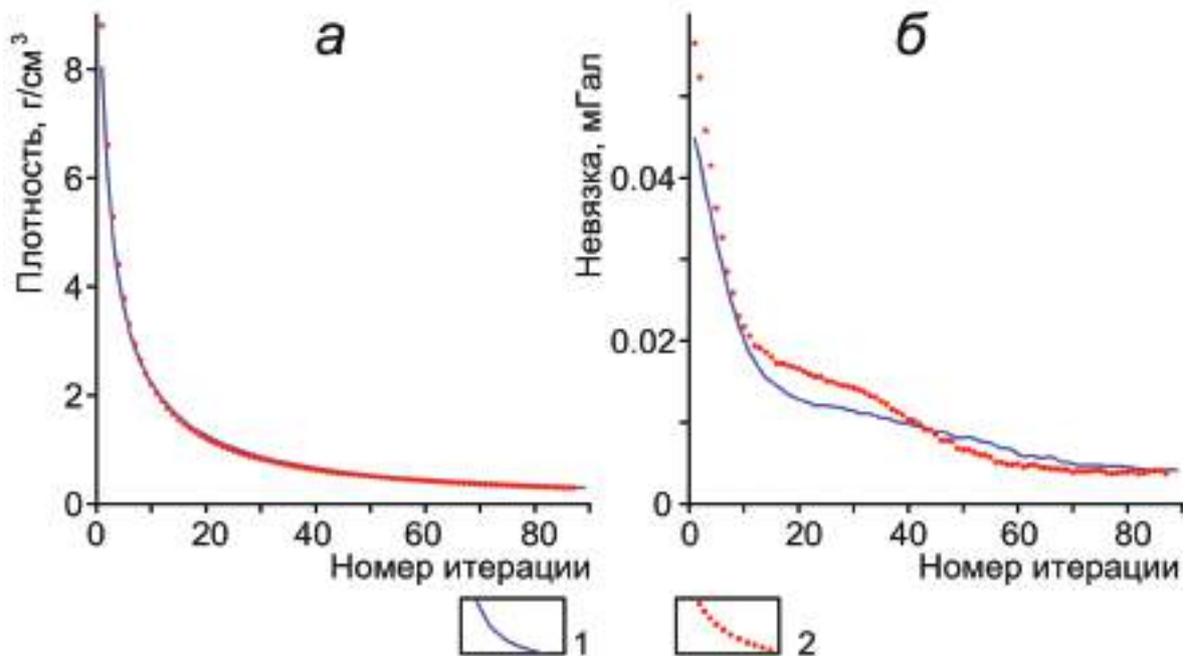


Рис. 3.6. Графики изменения плотности δ_k^* (а) и невязки ε_k^* (б) с ростом номера шага k в итерационном процессе: 1 – по методу РНК; 2 – по алгоритму А.В. Овчаренко.

статочны близки между собой и составляют: по базовому методу РНК – 1,37%, по алгоритму А.В. Овчаренко – 1,02% от интенсивности ν_0 аномалии.

Кстати, сами приближенные решения обратной задачи, полученные по сопоставляемым методам, также весьма близки между собой (рис. 3.7).

Мы сочли не столь важным, какой из двух методов будет опробован на предмет эффективности при использовании различных функционалов Φ_r , остановив свой выбор на алгоритме А.В. Овчаренко. Результаты решения обратной задачи гравirazведки при использовании различных функционалов близости заданного и модельного полей приведены на рис. 3.8, а информация о достигнутых значениях этих функционалов – в табл. 3.1.

Заметим, что мы можем в этой таблице сопоставить лишь значения трех первых функционалов (подбор в трех классических метриках), два последних функционала вообще безразмерны.

В конечном итоге нас интересует степень близости наблюдаемого поля и поля $\Delta g^*(x)$ построенного распределения $\langle \Omega^*; \hat{\delta} \rangle$, оценками нормы помех в которых интерпретатор может (хотя и не всегда) располагать на практике. Соответствующую информацию несет табл. 3.2. Каждый ее столбец s , $s = 1, 2, \dots, 6$, отвечает за результаты решения обратной задачи по модификации метода А.В. Овчаренко, работающего при выборе локально-оптимальных приближений Ω_k с функционалом Φ_{s-1} , а каждая строка $r = 1, 2, 3$ отвечает за определенный функционал ν_{r-1} качества приближения наблюдаемого поля. Таким образом, безразмерный элемент $a_{r,s}$, $r = 1, 2, 3$, $s = 1, 2, \dots, 6$ в этой таблице есть (нормированное по величине ν_{r-1} интенсивности аномалии) значение функционала Φ_{r-1} , вычисленного по распределению масс $\langle \Omega = \Omega^*; \hat{\delta} \rangle$, в котором конфигурационный носитель Ω^* был построен с использованием при выборе

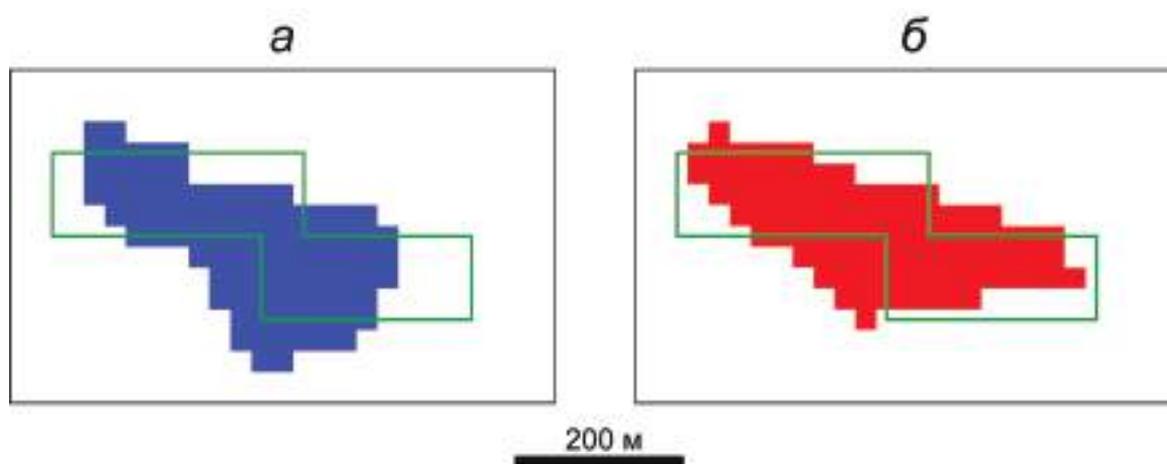


Рис. 3.7. Результаты решения обратной задачи гравirazведки по методу РНК (а) и по алгоритму А.В. Овчаренко (б).

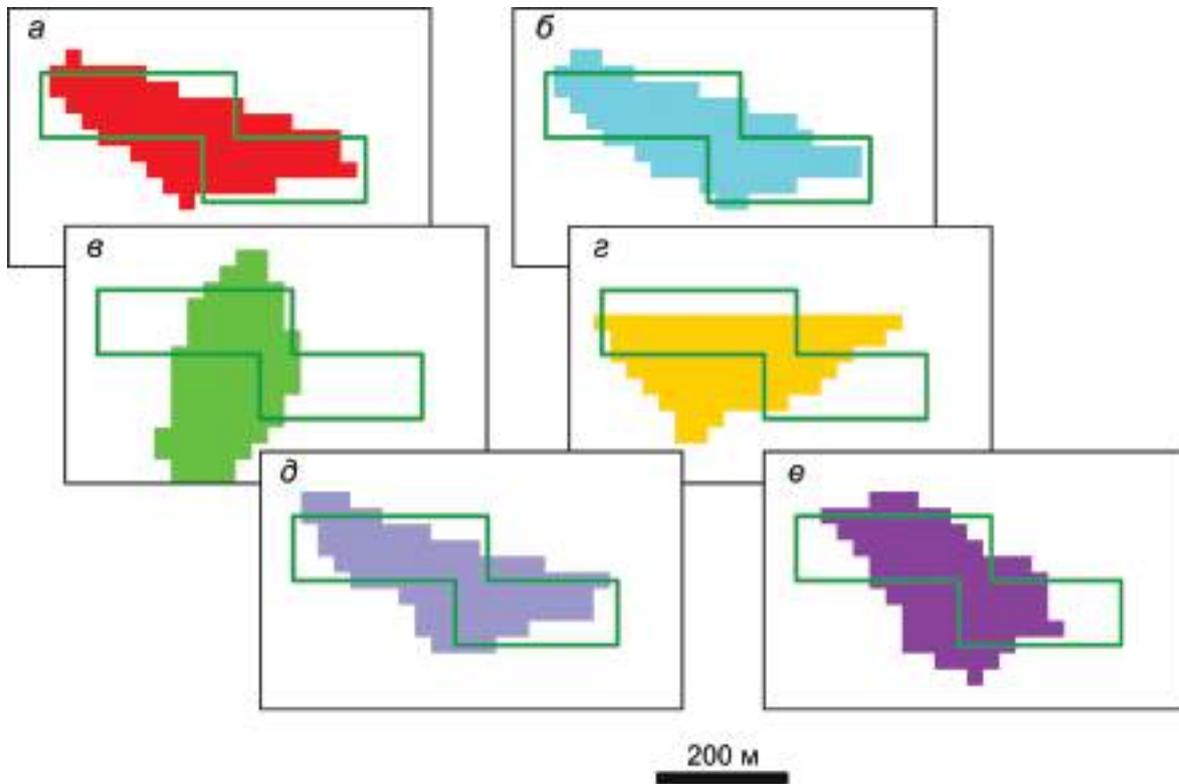


Рис. 3.8. Результаты решения обратной задачи гравиметрии по алгоритму А.В. Овчаренко с использованием различных функционалов Φ_r локальной оптимальности: $a - \Phi_0$; $b - \Phi_1$; $в - \Phi_2$; $г - \Phi_3$; $д - \Phi_4$; $е - \Phi_5$.

локально-оптимальных приближений Ω_k функционала Φ_{s-1} . Согласно данной таблице, во всех 18 комбинациях выбора критерия локальной оптимальности текущего приближения и выбора метрики, в которой оценивается относительное значение достигнутой невязки, последнее колеблется от 1 до 7%. На наш взгляд, это довольно обнадеживающий результат.

Перейдем к обсуждению результатов численного эксперимента. Выводы, которые при этом будут сделаны, выходят за рамки отдельно взятого примера.

Начнем с того, что особенности метода, который заботится лишь об оптимальности решения на каждом своем отдельном шаге, заключаются в том, что меньшее значение ε^* итоговой невязки в какой-то метрике может быть достигнуто при работе с функционалом Φ_r , рассчитанным, вообще говоря, на минимизацию *иного* типа невязки. Так, из табл. 3.2 видно, что меньшее (нормированное) значение невязки, причем по всем трем метрикам, достигается в том случае, когда итерационный процесс работает с функционалом Φ_1 , а не с функционалом Φ_0 , используемом в методах В.Н. Страхова и А.В. Овчаренко.

Таблица 3.1

Значения невязки наблюдаемого и модельного полей

Тип функционала	Φ_0	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	Φ_5
Значение	0,0041 мГал	0,0037 мГал	0,0465 мГал	0,0193 мГал	0,0216	0,0678

Таблица 3.2

Достигнутые нормированные значения невязок при работе с шестью различными функционалами близости заданного и подбираемого полей

Тип функционала Φ_r	Φ_0	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4	Φ_5
Значение Φ_0/ν_0	0,0114	0,0102	0,0653	0,0433	0,0119	0,0391
Значение Φ_1/ν_1	0,0106	0,0100	0,0637	0,0462	0,0112	0,0361
Значение Φ_2/ν_2	0,0169	0,0123	0,0708	0,0508	0,0154	0,0538

В частности, добиваясь на каждой итерации k минимума среднего абсолютного расхождения наблюдаемого поля и поля текущего модельного распределения масс, мы, выходя попутно на среднеквадратическую невязку, которая на 10% меньше той, которую получим, если локальную оптимизацию вести в своей «родной» квадратической метрике.

Мы не станем обобщать эту закономерность, выявленную на одном примере. При проведении широкого вычислительного эксперимента такого рода ситуация нам встречалась неоднократно. Это можно расценивать как позитивный фактор, когда одни модификации алгоритма как бы «подстраховывают» другие. Располагая целой плеядой модификаций метода и запуская их (даже из одного и того же нулевого приближения Ω_0) по различным траекториям $\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega^*$, можно существенно расширить подмножество $Q_0 \subset Q$ допустимых решений обратной задачи, которые удалось найти и которые необходимы для реализации аддитивных технологий интерпретации. Это замечание, кстати, можно будет отнести и к обобщенному методу РНК, который мы рассмотрим в следующей главе.

Пойдем дальше. Как известно, в теории решения некорректных обратных задач одним из наиболее общих способов построения устойчивых решений, не связанных с априорным назначением класса корректности, является естественная регуляризация (или саморегуляризация). Смысл ее состоит в том [Алифанов, 1979], чтобы, управляя параметрами в вычислительном методе, добиться наилучшей согласованности приближенного и точного решений.

Главный источник естественной регуляризации – так называемые вязкостные свойства вычислительных методов, заключающиеся в естественной фильтрации высокочастотных составляющих в искомом решении. В методах, основанных на идеях саморегуляризации, к таким параметрам относится, в частности, число степеней свободы в модели изучаемого объекта. В методах В.Н. Страхова и А.В. Овчаренко принцип саморегуляризации присутствует при выборе размеров элементов замощения, а также его структуры. Выявленная нами по результатам серийных расчетов заметная чувствительность решения к структуре замощения (прежде всего она проявляется в появлении бессодержательных фрагментов границы носителя при использовании достаточно «мелкого» замощения $\{V_n\}$) лишний раз напоминает о важности проблемы параметрической размерности модели источников поля и наталкивает на мысль о необходимости введения понятия *пофрагментной гладкости* границы носителя возмущающих масс.

Если вязкостные свойства метода понимать как способность автоматически настраиваться на определенный тип помех, не отмеченный в априорной информации, то эти свойства могут сыграть «злую шутку». Возьмем типичную ситуацию с априорной информацией о помехах, когда предполагается известной либо норма помехи ε , либо ее приближенное значение $\tilde{\varepsilon}$, тогда как никаких предположений о законе распределения помехи не высказывается. Такого рода посылка выглядит не столь уж жесткой, и это придает алгоритму решения обратной задачи, который, казалось бы, может обойтись столь бедной априорной информацией, дополнительную «солидность». Но скаляр ε (или $\tilde{\varepsilon}$) охватывает различные, в том числе и «плохие» выборки помехи. Однако при проведении модельных расчетов лицо, заинтересованное в продвижении того или иного метода решения обратной задачи, вряд ли станет использовать «плохие», а тем более, патологические выборки. Обычно при проведении модельных расчетов в качестве помех в измерениях берутся выборки центрированной нормально распределенной величины, да и то в основном те, в которых первые статистические моменты близки к вероятностным (в частности, среднее значение близко к нулю). Многие известные методы по умолчанию рассчитаны как раз на такие характеристики помехи в измерениях. В итоге задекларированные разрешающие возможности метода зачастую много ниже фактических. Разумеется, все это в полной мере относится и к обсуждаемым конечноэлементным методам.

Недостаточно, если разрешающие способности метода оценивать на модельных примерах лишь по тому, какую ему удалось достичь точность приближенного решения при той или иной норме помехи в измерениях. Даже прекрасно понимая, что эта точность – величина случайная, необходимо обращать внимание, какими статистическими характеристиками обладала выборка случайных чисел, используемая в качестве помех в измерениях поля.

Теперь, уже в завершение всего раздела, – об одной замечательной особенности базового метода РНК. Она связана с нулевым приближением к искомому решению Ω^* обратной задачи. Суть в том, что в практике интерпретации гравитационных аномалий не всегда можно указать фрагмент носителя \hat{S} источников аномалии, который послужил бы наиболее удачным нулевым приближением к искомой оценке Ω^* этого носителя. В этой связи возникает вопрос: присущи ли методу РНК *элементы самоорганизации*? Способен ли он сам корректировать нулевое приближение и за несколько циклов глобального итерационного процесса, на каждом шаге которого метод работает с новым, причем каждый раз более удачным, нулевым приближением, выйти на допустимое (по невязке) решение обратной задачи? Разумеется, если при первоначальном нулевом приближении это сделать не удалось.

На большом числе модельных примеров была изучена ситуация, когда центр кристаллизации V_0 намеренно задавался довольно неудачно – не только вне носителя, но и на достаточно большом от него расстоянии, равном нескольким диаметрам истинного носителя возмущающих масс (множества \hat{S}). На первом шаге глобального итерационного процесса базовый метод РНК работает с исходным нулевым приближением – центром кристаллизации V_0 . Вполне ожидаемо, что по завершении итерационного процесса РНК выйти на конфигурационный носитель Ω_1^* , который (совместно с плотностью $\hat{\delta}$) оказался бы допустимым по невязке ε решением обратной задачи, не удастся. Зато отчетливо прослеживается следующая тенденция: носитель Ω_1^* как бы «подтягивается» к истинному носителю \hat{S} . Более конкретно, евклидово расстояние $\rho(\bar{X}(\Omega_1^*), \bar{X}(\hat{S}))$ между центром тяжести $\bar{X}(\Omega_1^*)$ построенного конфигурационного носителя Ω_1^* и центром тяжести истинного носителя \hat{S} оказывается меньше евклидова расстояния $\rho(\bar{X}(V_0), \bar{X}(\hat{S}))$ между центрами тяжести нулевого приближения Ω^* и истинного носителя. Можно догадаться, что обратную задачу следует попытаться решить вновь, выбирая уже в качестве начального приближения к искомому носителю Ω^* элемент замощения, содержащий центр тяжести $\bar{X}(\Omega_{i-1}^*)$ носителя, построенного на предыдущем шаге.

Глобальный итерационный процесс следует продолжать до тех пор, пока не будет выполнен один из двух критериев:

- 1) метод РНК после нескольких вариантов с различными нулевыми приближениями выходит, в конце концов, на допустимое значение невязки;
- 2) при очередной попытке решения обратной задачи с новым центром кристаллизации метод выходит на невязку, превышающую ту, что была достигнута при предыдущей попытке.

В последнем случае приходится признать, что методу РНК не удастся достичь приемлемой невязки в рамках принятой модели источников аномалии и принятых априорных предпосылок. Является ли это недостатком метода (не может выйти на глобальный минимум невязки, которая была бы этом случае

допустимой), либо априорные предпосылки противоречивы и допустимых решений в этом случае не существует – это уже другой вопрос.

Выполненные примеры, суть которых мы здесь описали, не приводя конкретный численный материал, позволили лишний раз убедиться нам в том, что для базового метода РНК нулевое приближение не имеет решающего значения, как для широко распространенных на практике методов автоматизированного подбора. Данное свойство, присущее в целом монтажным алгоритмам решения обратных задач, окажется весьма полезным при использовании этих алгоритмов в новых, аддитивных технологиях интерпретации гравитационных и магнитных аномалий.

Глава 4

ОБОБЩЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ РЕГУЛИРУЕМОЙ НАПРАВЛЕННОЙ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ

Итерационные алгоритмы решения обратных задач гравirazведки и магниторазведки рудного типа в конечноэлементных классах моделей источников поля договоримся относить к классу обобщенных алгоритмов РНК, если – как и в базовом методе РНК Страхова-Лапиной – ядро каждого очередного, вообще говоря, многосвязного приближения Ω_k^* к искомому носителю Ω^* образуется путем *внесения* в ядро предшествующего приближения *одного* элемента замощения, взятого из его оболочки *локально-оптимальным* образом. При этом обязан соблюдаться *принцип наследования* текущим приближением свойств предшествующего приближения, прописанных в априорной информации. При таких ограничениях на структуру итерационного процесса развитие обобщенных алгоритмов РНК может идти в направлении разнообразия учитываемой этими алгоритмами априорной информации о модели среды и поля. По объему используемой априорной информации базовый метод РНК, в котором требуется лишь соблюдение связности носителя, можно считать простейшим алгоритмом класса обобщенных алгоритмов РНК. Забегая вперед скажем, что в принципе можно отказаться от соблюдения каких-то из выделенных курсивом признаков обобщенных алгоритмов РНК, но в этом случае речь пойдет о еще более общей генерации конечноэлементных методов решения обратных задач. Они названы монтажными, рассматриваются в следующей главе, и теперь уже обобщенные алгоритмы РНК являются их частным случаем.

С точки зрения практических приложений из всех направлений, по которым желательно расширить возможности базового метода РНК, следует, прежде всего, назвать его обобщение на случай модели источников аномалии, представляющей объединение *нескольких* парциальных тел. В частном случае, когда эти тела имеют одну и ту же эффективную плотность, базовый метод

РНК, по сути, не подвергается сколь-нибудь значимым изменениям. Вся особенность будет состоять в том, что начальным приближением к теперь уже многосвязному, конфигурационному носителю станет служить не один центр кристаллизации, а несколько – по одному элементу замощения на каждое парциальное тело. При этом оболочки текущих приближений уже не будут представлять собой ядра связных конфигураций, но принципиальной роли это не играет. Метод этого даже не заметит.

Иное дело, если мы решаем обратную задачу для модели *многосвязного* распределения возмущающих масс, когда каждое изолированное тело \hat{S}_j , $j = 1, 2, \dots, m$, имеет свою эффективную плотность $\hat{\delta}_j$. На первый взгляд может показаться, что и здесь достаточно действовать по аналогии с базовым методом РНК. А именно, в качестве оптимального варианта перехода от k -го приближения

$$\Omega_k = \bigcup_{j=1}^m \Omega_{j,k} \quad (4.1)$$

к очередному приближению Ω_{k+1} , где $\Omega_{j,k}$ – парциальная составляющая k -му локальному телу \hat{S}_j , брать тот, при котором достигается наименьшее значение невязки при специально подобранном векторе плотностей $\delta_{k+1} = (\delta_{1,k+1}, \delta_{2,k+1}, \dots, \delta_{m,k+1})$. При таком подходе отличие от базового метода РНК состояло бы в том, что на каждом пробном шаге пришлось решать не одно линейное уравнение, а систему линейных уравнений размерности m . Несколько возросший объем вычислений в этом случае не в счет. Проблема в другом: почти наверняка значения $\delta_{j,k}$ не выйдут *одновременно* в малые окрестности истинных плотностей $\hat{\delta}_j$ – критерий завершения итерационного процесса попросту не сработает. Таким образом, метод, в котором удастся решить проблему одновременного выхода оптимизируемых плотностей масс в окрестности заданных значений $\hat{\delta}_j$ на некотором шаге итерационного процесса, можно будет отнести к новой генерации методов, реализующих общую идею регулируемой направленной кристаллизации. Решение этой проблемы в рамках обобщенного метода РНК будет изложено ниже. Пока же перечислим необходимые условия для реализации обобщенных методов РНК, а также основные типы априорной информации, возможность учета которых позволит говорить о достаточно высокой степени общности новой генерации методов, продвигающих идею РНК.

Применительно к обратной задаче гравиразведки основные условия для реализации обобщенного алгоритма РНК сводятся к следующему.

1. Предполагается, что интерпретатор до начала работы алгоритма задает замощение V изучаемой области D пространства, в пределах которой расположены источники аномалии.

2. Считается, что он же называет число m локальных однородных тел \hat{S}_j , создающих аномалию гравитационного поля Δg , и указывает их эффективные плотности $\hat{\delta}_j$.

3. Интерпретатор обязан также задать пространственные области S_j^+ , $j = 1, 2, \dots, m$, которые наверняка (например, по результатам бурения), либо предположительно (исходя из морфологии поля) являются фрагментами локальных тел \widehat{S}_j . Области S_j^+ могут быть достаточно малыми, в частном случае их аппроксимацией может быть всего лишь один элемент замощения.

4. Известным считается максимально возможный уровень помех ξ_i в измерениях $\Delta \widetilde{g}_i$, на основании которого устанавливается допустимая невязка ε в одной из классических метрик.

Это были обязательные условия. В принципе какие-то из них могут и не выполняться. Это приведет лишь к росту неопределенности и потребует *многократного* решения обратной задачи с различными допущениями.

Перечислим теперь типы априорной информации (ограничений), которые не обязательно должны присутствовать в постановке обратной задачи, но учет которых обобщенный алгоритм РНК обязан при необходимости обеспечить.

1. Считается, что парциальные носители \widehat{S}_j , помимо того что они связные, являются еще и односвязными.

2. Сформулированы условия допустимого контактирования парциальных носителей \widehat{S}_j . С этой целью задается бинарная матрица C размерности $m \times m$, элементы $c_{r,t}$, $r, t = 1, 2, \dots, m$, которой имеют следующий смысл: $c_{r,t} = 1$, $r \neq t$, – контактирование носителей \widehat{S}_r и \widehat{S}_t допускается, $c_{r,t} = 0$ – в противном случае.

3. Заданы минимально допустимые расстояния между отдельными парциальными носителями \widehat{S}_j . С этой целью в постановку обратной задачи вводится матрица P размерности $m \times m$ предельно допустимых евклидовых, либо конфигурационных (в соответствии с определением, данным во второй главе) расстояний $\rho_{r,t}$ между парциальными носителями \widehat{S}_r и \widehat{S}_t , $r, t = 1, 2, \dots, m$. Если априорная информация не содержит ограничения на допустимое расстояние между носителями \widehat{S}_r и \widehat{S}_t , то $\rho_{r,t} = -1$.

4. Требуется, чтобы интегральные показатели гладкости конфигураций, аппроксимирующих носители \widehat{S}_j , не превосходили заданные $\nu_0^{(j)}$; одним из таких показателей может служить отношение числа элементов замощения, вошедших в границу построенного конфигурационного носителя, к числу элементов замощения, составляющих его ядро.

5. В терминах топологических свойств конфигураций заданы ограничения на гладкость отдельных фрагментов границы каждого из m парциальных носителей Ω_j^* в построенном приближенном решении обратной задачи – многосвязном носителе $\Omega^* = (\Omega_1^*, \Omega_2^*, \dots, \Omega_m^*)$ вкпе с подобранным вектором $\delta^* = (\delta_1^*, \delta_2^*, \dots, \delta_m^*)$, $\delta^* \approx \widehat{\delta}$; в частности, могут быть заданы максимально допустимые длины l_j отростков, составленных из элементов границы.

6. Помимо пофрагментной гладкости границы парциальных носителей Ω_j^* требуется связность их основ (или, другими словами, физичность парциальных носителей согласно определению, введенному во второй главе).

7. По результатам буровых работ, или из иных соображений, заданы области S_j^- , не имеющие общих точек с телами \hat{S}_j .

8. Даны ограничения на минимально и максимально возможные глубины залегания верхних и нижних кромок отдельных локальных тел \hat{S}_j в модели источников поля.

9. Даны ограничения на максимально возможную протяженность тел \hat{S}_j по вертикали и по латерали.

10. Даны ограничения типа $\hat{S}_j \subset D_j$.

Несмотря на столь широкий спектр приведенных ограничений, мы вполне допускаем, что он не является исчерпывающим. Вместе с тем, мы убеждены, что для читателя, который заинтересуется рассматриваемым классом алгоритмов и поймет из нашего изложения, каким образом в монтажных алгоритмах осуществляется учет перечисленных типов априорных ограничений, учет каких-то других ограничений уже не будет представлять особой проблемы.

4.1. Суть концепции обобщенных алгоритмов РНК

Выбор структуры пространственного замощения. Как и в случае базового метода РНК, реализация обобщенных алгоритмов РНК начинается с выбора интерпретатором замощения $V = \{V_n\}$. Проблема выбора замощения в чем-то близка к проблеме выбора параметрической размерности модели источников поля и также требует от интерпретатора компромиссного решения.

Структура замощения способна влиять на отдельные качественные характеристики решения Ω^* . В частности, добиться желаемого угла падения у модельного тела заметно проще, если в качестве элементов замощения взять наклонные призмы. Нет никаких препятствий к тому, чтобы использовать комбинированные замощения, когда каждая область D_j , заведомо содержащая парциальный источник \hat{S}_j , покрывается «своими» геометрическими фигурами V_n . Если говорить о размерах элементов замощения, то здесь можно выделить несколько противоречивых факторов. С одной стороны, увеличение размеров элементов замощения V_n снижает вычислительные затраты на поиск допустимого решения обратной задачи и в какой-то степени повышает его устойчивость (в обычном смысле этого слова). С другой стороны, желательно, чтобы степень дискретизации изучаемой области D позволяла пренебречь поправкой за неадекватность конечноэлементного представления источников поля при оценке допустимости достигнутой невязки. В противном случае эту поправку придется задать и учесть в значении максимально допустимого расхождения модельного и наблюдаемого полей. Кроме того, критерии гладкости отдельных фрагментов границ в терминах допустимых длин отростков парциальных носителей, используемые для отбраковки вариантов интерпре-

тации, противоречащих геологическим представлениям, срабатывают, как правило, лишь в некотором диапазоне размеров элементов замощения. Так, некоторый фрагмент границы конфигурационного носителя, собранного из элементов замощения V_n какого-то определенного размера, может попасть под определение отростка, данное во второй главе. Но стоит задаться новым, более мелким замощением, когда каждый элемент V_n прежнего замощения станет объединением некоторого числа элементов этого нового замощения, как (согласно тому же определению) указанный фрагмент границы конфигурации перестает быть отростком. И наконец, размеры элементов замощения V_n должны быть настолько малы, чтобы спорный случай, когда истинному носителю масс \hat{S} принадлежит часть элемента V_n , но эту ситуацию требуется охарактеризовать лишь одним из двух включений – $V_n \subset \hat{S}$, либо $V_n \not\subset \hat{S}$, – можно было бы разрешить по желанию.

Формализация априорной информации в терминах элементов структуры модельного класса источников аномалии. Начнем с того, что области S_j^+ , S_j^- и D_j (см. обязательное условие 3 и допустимые ограничения 7, 10) должны быть представлены их конфигурационными аппроксимациями Ω_j^+ , Ω_j^- и Ω_j^0 , соответственно. Условия связности и односвязности носителей \hat{S}_j переносятся на парциальные конфигурационные носители согласно данным в главе 2 определениям. Интегральный критерий гладкости границы носителя был нами сформулирован ранее в терминах отношения мощности границы конфигурационного носителя к мощности его ядра. Априори допустимый факт наличия у локальных геологических тел \hat{S}_r и \hat{S}_i общей границы означает, что в построенном многосвязном носителе Ω^* в оболочке $O(\Omega_r^*)$ парциального носителя Ω_r^* могут оказаться некоторые элементы ядра $Я(\Omega_i^*)$ конфигурации Ω_i^* . В рамках всякого конкретного замощения $\{V_n\}$ ограничения на глубины погружения нижней и верхней кромок тел \hat{S}_j , а также ограничения типа $\hat{S}_j \subset D_j$ легко формализуются в терминах номеров n элементов V_n , запрещенных к включению в ядра соответствующих парциальных носителей Ω_j^* . Контроль за соблюдением ограничений на предельные размеры простираения тел по различным направлениям особенно просто выполняется в случае регулярных замощений.

Проблеме учета гладкости конфигурационного носителя мы посвятили целый раздел во второй главе монографии, где были даны решения некоторых частных задач, которые могут в связи с этим возникнуть. Однако, несмотря на теоретическую возможность получить в качестве решения обратной задачи конфигурационный носитель Ω^* с весьма «причудливыми» фрагментами границ, на практике зачастую все обстоит не столь драматично. При использовании монтажных алгоритмов критерий гладкости отдельных фрагментов границы конфигурации Ω^* вводится после того, как зафиксирована структура замощения. В каких-то случаях достаточно потребовать, чтобы в оболочке

$O(V_n)$ любого элемента границы $\Gamma(\Omega^*)$ присутствовала хотя бы одна пара граничащих между собой элементов ее ядра без дополнительного ограничения на связность основы $B(\Omega)$ конфигурации. Еще один критерий гладкости формулируется так: оболочка любого элемента регулярного замощения, входящего в ядро конфигурации Ω^* , должна содержать не менее, чем заданное число r элементов замощения из $\mathcal{Y}(\Omega^*)$. Увеличивая значения r будем получать все более гладкие конфигурационные носители. Как будет показано на одном из модельных примеров, возможность варьирования гладкостью можно успешно использовать в ходе итерационного процесса, хотя по формальным признакам – это уже выход за рамки обобщенного алгоритма РНК.

Следует еще раз подчеркнуть, что стандартные подходы к решению вопроса о контроле за геометрическими особенностями отдельных фрагментов границы конечноэлементного носителя обладают серьезными недостатками. Было бы опрометчиво полагать, что с помощью одной лишь константы можно оценить геометрию сразу всех фрагментов границы носителя. В этой связи авторы монографии лишний раз убеждаются, сколь поверхностной является концепция интегральных оценок гладкости носителей источников поля, далеко не всегда способных «удержать» приближенное решение обратной задачи в рамках дозволенного.

Выбор нулевого приближения. Принцип наследования очередным приближением Ω_k свойств предшествующего приближения Ω_{k-1} , который обобщенные алгоритмы РНК перенимают у базового метода РНК, заметно упрощает контроль за соблюдением априорных ограничений, но в то же время предъявляет дополнительные требования к нулевому приближению Ω^* .

Поскольку по априорным предпосылкам имеет место включение $S_j^+ \subset \hat{S}_j$, то обобщенный алгоритм РНК обязан обеспечить для всех $j = 1, 2, \dots, m$ включение $\Omega_j^+ \subset \Omega_j^*$ – конфигурационные пространственные области Ω_j^+ должны гарантированно стать фрагментами соответствующих парциальных носителей Ω_j^* в построенном приближенном решении Ω^* обратной задачи. Проще всего это предусмотреть уже на уровне нулевого приближения, полагая $\Omega_{j,0} = \Omega_j^+$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Интерпретатор назначает области Ω_j^+ на основании каких-то объективных данных и может оказаться, что конфигурации Ω_j^+ не удовлетворяют другим ограничениям, которые априорная информация налагает на парциальные составляющие Ω_j^* искомого решения Ω^* . Вплоть до того, что конфигурации Ω_j^+ не являются связными. В том случае, когда интерпретация сводится к поиску лишь одного допустимого решения обратной задачи, интерпретатору можно было бы рекомендовать самому дополнить нулевые приближения до (по возможности минимальных) конфигураций, обладающих нужными топологическими свойствами. Однако, если обобщенный алгоритм РНК используется как рабочий инструмент в аддитивных технологиях интерпретации и в его обя-

занности входит построение достаточно обширного подмножества допустимых носителей, проблема подходящих начальных приближений стоит более остро. Теперь в качестве нулевого варианта $\Omega'_{j,0}$ начального приближения $\Omega_{j,0}$ к j -ому парциальному носителю в очередном (t -ом) искомом допустимом носителе берется конфигурация $\Omega'_{j,0} = \Omega_j^+ \cup \Omega_j^{(t)}$, где слагаемое $\Omega_j^{(t)}$ выбирается специальным образом с учетом особенностей уже построенных до того ($t-1$)-го допустимого носителя. С тем, как осуществляется такой выбор, мы ознакомимся позже при изложении концепции *гарантированного подхода*. Но предварительно скажем одно: конфигурации $\Omega'_{j,0}$, $j = 1, 2, \dots, m$, практически никогда не будут связными, безотростковыми и физическими. И потому нам понадобятся здесь алгоритмы решения типовых задач, изложенные в главе 2. Речь, прежде всего, идет о следующих из них:

- 1) задачи дополнения конфигурации $\Omega'_{j,0}$ (если она оказалась не связной) до связной конфигурации;
- 2) задачи идентификации конфигурации $\Omega'_{j,0}$ на предмет односвязности;
- 3) задачи дополнения конфигурации $\Omega'_{j,0}$ (если она не является односвязной) до минимальной односвязной конфигурации $\Omega''_{j,0}$;
- 4) задачи определения максимальной длины отростков границы заданной конфигурации;
- 5) задачи частичного «разрушения» отростков конфигурации $\Omega''_{j,0}$, если того требует априорная информация.

Подчеркнем, что цепочку преобразования (на основе решения этих пяти задач) конфигураций $\Omega'_{j,0}$, $j = 1, 2, \dots, m$, до приемлемых нулевых приближений $\Omega_{j,0}$ в аддитивных технологиях интерпретации необходимо будет осуществлять в автоматическом режиме с помощью полностью формализованных процедур.

Алгоритмическое обеспечение критерия завершения обобщенного итерационного процесса РНК. Как уже отмечалось, чтобы обеспечить за конечное число шагов итерационного процесса выход на вектор $\hat{\delta}$ заданных значений $\hat{\delta}_j$ плотностей масс, распределенных по парциальным носителям \hat{S}_j , мы не можем в случае нескольких локальных тел различной эффективной плотности непосредственно воспользоваться приемом, применяемом в базовом методе РНК. Нет смысла начинать обсуждение структуры итерационного шага обобщенного алгоритма РНК, если предварительно не удастся решить вопрос о критерии прерывания итерационного процесса. Поэтому мы несколько изменим естественный ход изложения обобщенного алгоритма РНК.

Пока мы ограничимся случаем, когда эффективные плотности имеют один и тот же знак. Для определенности предположим, что $\hat{\delta}_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, m$.

Итак, пусть очередным, k -ым приближением к искомому приближенному решению $\Omega^* = (\Omega_1^*, \Omega_2^*, \dots, \Omega_m^*)$ обратной задачи гравirazведки является объединение m связных парциальных носителей $\Omega_{j,k}$, $j = 1, 2, \dots, m$, заключающих в

себе массы (оптимизируемой) эффективной плотности $\delta_{j,k}$. Оставим в качестве свободного только один (ведущий) параметр – плотность масс, заполняющих какой-то, для определенности первый, парциальный носитель, и свяжем плотности $\delta_{j,k}$ масс, распределенных по оставшимся $m-1$ (ведомым) носителям $\Omega_{j,k}$, достаточно гладкими непрерывными функциями

$$\delta_{j,k} = \varphi_j(\widehat{\delta}_1, \widehat{\delta}_j, \delta_{1,k}), \quad j = 2, 3, \dots, m, \quad (4.2)$$

такими, что для всех $j = 1, 2, \dots, m$ выполняется условие: если $\delta_{1,k} \rightarrow \widehat{\delta}_1$, то и $\delta_{j,k} \rightarrow \widehat{\delta}_j$. Различные функции φ_j порождают различные «траектории движения» от Ω_0 к Ω^* и дают обобщенному алгоритму РНК, располагающему набором таких функций, дополнительные возможности для выхода на допустимое решение Ω^* обратной задачи. В частности, можно предложить мультипликативные зависимости

$$\delta_{j,k} = \frac{\widehat{\delta}_j}{\widehat{\delta}_1} \delta_{1,k}, \quad j = 2, 3, \dots, m. \quad (4.3)$$

После этого мы, по сути, попадаем в условия базового метода РНК. Из физических соображений ясно, что при условии $\widehat{\delta}_j > 0$ на каком-то шаге $k = k(0)$ для значения эффективной плотности $\delta_{1,k(0)}^*$, минимизирующей совместно с ведомыми эффективными плотностями $\delta_{j,k(0)}^*$, $j = 1, 2, \dots, m$, невязку функционала близости модельного и наблюдаемого поля, гарантированно выполнится неравенство $\delta_{1,k(0)}^* \leq \widehat{\delta}_1$. При том что на всех предыдущих шагах $k < k(0)$ имело место неравенство $\delta_{1,k}^* > \widehat{\delta}_1$. Это станет признаком завершения итерационного процесса. Алгоритм не может гарантировать, что итерационный процесс точно выйдет на значение $\delta_{1,k(0)}^* = \widehat{\delta}_1$. Однако при сравнительно большой мощности ядра $\mathcal{Y}(\Omega_{k(0)})$ модуль разности $\widehat{\delta}_1 - \delta_{1,k(0)}^*$ будет невелик и им можно будет пренебречь. При достаточной гладкости функций φ_j будет обеспечен одновременно и выход других эффективных плотностей $\delta_{j,k}^*$ в малые окрестности значений $\widehat{\delta}_{j,k}$. Остается для строгости пересчитать невязку поля при точных значениях δ_j^* плотностей масс, заключенных в носителях $\Omega_{j,k(0)}$, $j = 1, 2, \dots, m$, и если она окажется приемлемой, принять $\Omega_{k(0)}$ за допустимое решение Ω^* обратной задачи.

Заметим, если в качестве ведущей взять эффективную плотность другого локального тела, то изменится и траектория движения текущих приближений к решению обратной задачи.

Выделение из множества пробных вариантов перехода к текущему приближению подмножества вариантов, допустимых к сравнению. Если быть кратким, обобщенный метод РНК решения обратной задачи гравиразведки рудного типа состоит в том, чтобы, отправляясь от некоторого начального приближения

$$\Omega_0 = \bigcup_{j=1}^m \Omega_{j,0} \quad (4.4)$$

к неизвестному носителю

$$\widehat{S} = \bigcup_{j=1}^m \widehat{S}_j, \quad (4.5)$$

выстроить конечную последовательность приближений Ω_k , удовлетворяющую двум условиям:

1) при некотором $k < k(0)$ связанные парциальные составляющие $\Omega_j^* = \Omega_{j,k(0)}$, $j = 1, 2, \dots, m$, конфигурации $\Omega^* = \Omega_{k(0)}$ удовлетворяют всем априорным предпосылкам относительно геометрических особенностей парциальных носителей \widehat{S}_j и их положения в пространстве;

2) суммарное поле масс, распределенных с заданными эффективными плотностями $\widehat{\delta}_j$ по построенным носителям Ω_j^* , $j = 1, 2, \dots, m$, обеспечивает приемлемую невязку модельного и наблюдаемого полей.

Предположим, что начальное приближение $\Omega_0 = (\Omega_{1,0}, \Omega_{2,0}, \dots, \Omega_{m,0})$, которое согласуется со всеми априорными ограничениями, предъявляемыми к итоговой многосвязной конфигурации Ω^* , построено. Это означает, что нулевой вариант начального приближения Ω'_0 был при необходимости доведен с помощью процедур, описанных в главе 2, до многосвязной конфигурации Ω_0 , обладающей всеми необходимыми топологическими свойствами, включая связность основы.

Рассмотрим произвольный k -ый шаг обобщенного итерационного процесса РНК.

Номер элемента $V_n \in O(\Omega_{k-1})$, который вносится на шаге k в ядро $\mathcal{Y}(\Omega_{r,k-1})$ одного из парциальных носителей, и сам номер r этого носителя будет определен по результатам внутреннего итерационного процесса. Но прежде необходимо сузить множество $\Pi_k^{(0)}$ пробных вариантов перехода от предшествующего (многосвязного) приближения Ω_{k-1} к текущему Ω_k до множества Π_k вариантов, допустимых к сравнению. В множество $\Pi_k^{(0)}$ отбираются всевозможные варианты образования текущего приближения Ω_k , когда ядро конфигурации Ω_k образуется путем внесения в ядро конфигурации Ω_{k-1} некоторого элемента замощения, взятого из оболочки $O(\Omega_{k-1})$. Понятно, что фактически на один элемент замощения наращивается ядро какого-то одного парциального носителя $\Omega_{j,k-1}$; его связность сохраняется автоматически. В подмножество же $\Pi_k \subset \Pi_k^{(0)}$ отбираются те из пробных вариантов перехода от Ω_{k-1} к Ω_k , в которых конфигурация Ω_k отвечает принципу наследования всех свойств предшествующего приближения Ω_{k-1} , прописанных в априорной информации.

Для удобства на каждом шаге k целесообразно вводить сплошную локальную нумерацию элементов замощения, составляющих оболочку $O(\Omega_{k-1})$: V_1 ,

V_2, \dots, V_l , где $l = |O(\Omega_{k-1})|$. Некоторые из этих элементов могут принадлежать одновременно сразу нескольким парциальным оболочкам $O(\Omega_{j,k-1})$. Принимая это во внимание, с каждым элементом замощения $V_t \in O(\Omega_{k-1})$ свяжем множество $J(t)$ номеров j парциальных носителей $\Omega_{j,k-1}$, оболочкам которых он принадлежит. Тогда

$$\Pi_k^{(0)} = \{(t, j) : t = 1, 2, \dots, |O(\Omega_{k-1})|, j \in J(t)\}. \quad (4.6)$$

Таким образом, каждый *пробный* вариант перехода от предшествующего приближения Ω_{k-1} к текущему Ω_k ассоциируется с парой индексов (t, j) . Пробную конфигурацию, отвечающую варианту (t, j) , обозначим как $\Omega_k^{(t,j)}$. Она образуется путем внесения элемента V_t в ядро $Y(\Omega_{j,k-1})$ парциального носителя $\Omega_{j,k-1}$, входящего в предшествующее многосвязное приближение Ω_{k-1} к искомому носителю Ω^* :

$$\Omega_k^{(t,j)} = (\Omega_{1,k-1}, \Omega_{2,k-1}, \dots, \Omega_{j,k-1} \cup V_t, \dots, \Omega_{m,k-1}). \quad (4.7)$$

Далее из индексного множества $\Pi_k^{(0)}$ следует выделить подмножество Π_k , элементы которого ассоциируются с *допустимыми к сравнению* вариантами перехода от конфигурации Ω_{k-1} к конфигурации Ω_k . Каждая допустимая к сравнению конфигурация должна уже отвечать всем априорным ограничениям. Только это дает ей право претендовать (по достигнутому значению невязки) на статус *локально-оптимального* варианта выбора текущего приближения к решению обратной задачи.

Собственно говоря, процедура выделения на итерации k подмножества Π_k из множества $\Pi_k^{(0)}$ сводится к последовательной проверке каждой конфигурации $\Omega_k^{(t,j)}$, $(t, j) \in \Pi_k^{(0)}$ на предмет соблюдения ею всех априорных ограничений (другими словами, к проверке выполнения условия наследования конфигурацией Ω_k свойств конфигурации Ω_{k-1} , прописанных в априорной информации). Проверку можно осуществлять в любом порядке. Как только обнаружится, что конфигурация Ω_k не удовлетворяет очередному ограничению, соответствующий пробный вариант исключается из дальнейшего рассмотрения на предмет включения его в подмножество вариантов Π_k .

Понятно, что большинство ограничений будут непосредственно касаться лишь одной парциальной конфигурации $\Omega_k^{(t,j)} = \Omega_{j,k-1} \cup V_t$. Начнем же мы с рассмотрения процедуры проверки ограничения, которое в случае $|J(t)| > 1$ охватывает сразу несколько парциальных носителей.

Если для какой-то пары (j_1, j_2) , $j_1 \in J(t)$, $j_2 \in J(t)$ контактирование парциальных носителей с номерами j_1 и j_2 запрещено (согласно матрице C в вышеприведенном перечне ограничений, которые обязаны быть доступны обобщенному методу РНК), то сразу оба пробных варианта (t, j_1) и (t, j_2) не войдут в подмножество Π_k . К рассмотренному ограничению примыкает ограничение на минимально допустимые расстояния между парциальными носителями.

Предположим, что решение обратной задачи строится на регулярном замощении пространства. Тогда, принимая во внимание геометрические размеры его элементов, можно использовать и *конфигурационное расстояние* для оценки близости пробного носителя $\Omega_k^{(t,j)}$ к каждому из тех парциальных носителей $\Omega_{r,k-1}$, $r \neq j$, входящих в $(k-1)$ -ое приближение Ω_{k-1} , для которых элементы $p_{j,r}$ матрицы P не равны минус единице. Алгоритм вычисления конфигурационного расстояния между двумя связными конфигурациями дан в главе 2.

Теперь о соблюдении ограничений на пространственное положение каждого из парциальных носителей, выраженных в *терминах включений*. Если $V_i \not\subset \Omega_j^0$, то пробный вариант (t, j) не будет допущен к сравнению. Если – как того требуют априорные ограничения – ядро парциального носителя $\Omega_{j,k-1}$ не имеет общих элементов замощения с ядром конфигурации Ω_j^- , то для соблюдения ограничения $\mathcal{Y}(\Omega_{j,k}^{(t)}) \cap \mathcal{Y}(\Omega_j^-) = \emptyset$ достаточно выполнения условия $V_i \notin \mathcal{Y}(\Omega_j^-)$.

Коль скоро структура замощения закреплена, контроль за соблюдением ограничений на геометрические размеры и пространственное положение носителя, выраженные в *терминах неравенств* (предельно допустимые размеры локальных тел по вертикали и латерали, максимально и минимально возможные глубины погружения верхних и нижних кромок тел), оборачивается довольно рутинной операцией. Останавливаться на каких-то ее деталях нет никакого смысла.

Перейдем к проблеме учета ограничений топологического характера на отдельные парциальные носители. Поскольку изначально процедура построения приемлемого нулевого приближения берет на себя основную часть проблемы, то остается немного. Во-первых, приходится следить за сохранением свойства односвязности того из парциальных носителей, в ядро которого предполагается включить элемент замощения V_i . Во-вторых, необходимо следить за сохранением свойства *физичности* парциальными носителями (если таковое предусмотрено априорной информацией). Алгоритмы решения обеих названных задач изложены в главе 2.

Из анонсированных выше ограничений, которые могут присутствовать в постановке обратной задачи и которые, на наш взгляд, обязан учитывать обобщенный алгоритм РНК, не рассмотрено еще одно – ограничение на гладкость. Что касается *интегрального показателя гладкости* нового приближения Ω_k , то здесь все просто. Проблема наследования условия *гладкости отдельных фрагментов границы* допустимого носителя – это отдельный вопрос, решение которого не только определяется тем, какой смысл заложен в это понятие, но и в определенной мере зависит от структуры выбранного замощения V и геометрических размеров его элементов. Имеется ряд возможностей для решения этой проблемы. Одна из них связана с использованием понятия *отростка* границы конфигурационного носителя. Длина отростка является эффективным регулятором степени гладкости носителя. Во второй главе монографии

– применительно к одному классу замощений – дано одно из возможных определений отрезка и приведены решения всех задач, которые могут возникнуть в связи с проблемой гладкости, выраженной в терминах максимально допустимых длин отрезков границы конфигурации.

Формирование подмножества Π_k допустимых к сравнению вариантов, из которых будет выбрано локально-оптимальное решение Ω_k обратной задачи на шаге k , составляет первый из двух этапов реализации каждой итерации в обобщенном алгоритме РНК.

Можно утверждать, что способность к радикальной декомпозиции процедуры учета имеющейся информации и отсутствие жестких требований к способам ее формализации выгодно отличает обобщенные алгоритмы РНК от алгоритмов решения обратных задач гравиразведки, опирающихся на методы решения условно-экстремальных задач. Напомним в этой связи, что некоторые типы априорной информации о носителе возмущающих масс (к примеру, имеющие топологический характер) нелегко «уложить» в «прокрустово ложе» стандартных ограничений типа равенств и неравенств.

Отметим также, что анализ пробных вариантов выбора текущего приближения на шаге обобщенного итерационного процесса РНК на предмет их включения в множество вариантов, допустимых к сравнению, в принципе можно вести одновременно, независимо друг от друга. Это означает, что время, необходимое для компьютерной реализации алгоритма, можно кардинально сократить за счет его распараллеливания на многопроцессорных вычислительных системах.

Выбор локально-оптимального варианта очередного приближения. Второй этап при выполнении шага k – выбор наилучшего приближения Ω_k . Итак, будем считать, что индексное множество Π_k построено, и с каждой парой $(n, j) \in \Pi_k$ ассоциируется допустимый вариант перехода от предшествующего многосвязного конфигурационного приближения Ω_{k-1} к текущему приближению Ω_k к решению Ω^* обратной задачи. При этом ядро $\mathcal{Y}(\Omega_{j,k-1})$ частичного носителя $\Omega_{j,k-1}$ из предшествующего приближения Ω_{k-1} наращивается на элемент замощения $V_n \in O(\Omega_{j,k-1})$.

Пусть для определенности в качестве ведущего взят первый частичный носитель $\Omega_{1,k}$, так что значение эффективной плотности масс, заполняющих этот носитель, предопределяет значения эффективной плотности масс в остальных $m - 1$ частичных носителях. В соответствии с общей концепцией монтажных алгоритмов для каждого варианта (n, j) , допустимого к сравнению, необходимо определить значение $\delta = \delta_{n,j}^*$ эффективной плотности масс, заполняющих частичный носитель $\Omega_{1,k}$, которая доставляет минимальное значение $\varepsilon_{n,j}^*$ функционала $\Phi_{n,j}(\delta)$ среднеквадратической невязки модельного и наблюдаемого полей. В случае, когда используются зависимости (4.3), функционал невязки приобретает следующий вид:

$$\Phi_{n,j}(\delta) = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\Delta \tilde{g}(X_i) - \frac{1}{\hat{\delta}_1} \left(\sum_{t=1}^m \Delta g(\Omega_{t,k-1}; X_i) \hat{\delta}_t + \Delta g(V_n; X_i) \hat{\delta}_j \right) \delta \right)^2 \right)^{1/2} \quad (4.8)$$

и, соответственно,

$$\delta_{n,j}^* = \hat{\delta}_1 \frac{\sum_{i=1}^N \left(\sum_{t=1}^m \Delta g(\Omega_{t,k-1}; X_i) \hat{\delta}_t + \Delta g(V_n; X_i) \hat{\delta}_j \right) \Delta \tilde{g}(X_i)}{\sum_{i=1}^N \left(\sum_{t=1}^m \Delta g(\Omega_{t,k-1}; X_i) \hat{\delta}_t + \Delta g(V_n; X_i) \hat{\delta}_j \right)^2}, \quad (4.9)$$

где $\Delta g(\Omega; X_i)$ – значение в точке X_i поля масс единичной эффективной плотности, распределенных по Ω .

Пусть наименьшая из невязок $\varepsilon_{n,j}^*$, $(n, j) \in \Pi_k$, – обозначим ее как ε_k^* – достигается при $n = n(k)$ и $j = j(k)$. Значение эффективной плотности масс, заполняющих парциальный носитель $\Omega_{1,k}$, при которой в варианте $(n(k), j(k))$ была достигнута минимальная невязка, обозначим как δ_k^* . Тогда $\Omega_{j,k} = \Omega_{j,k-1}$, если $j \neq j(k)$, и $\Omega_{j,k} = \Omega_{j,k-1} \cup V_{n(k)}$, если $j = j(k)$.

Критерий выхода из итерационного процесса мы уже успели обсудить выше.

4.2. Комплексование обобщенных алгоритмов РНК и метода разделения полей

До недавнего времени все известные обобщения базового метода РНК на случай многосвязных распределений масс были рассчитаны на то, что эффективные плотности локальных тел в модели источников аномалии имеют один и тот же знак. Столь сильное ограничение было обусловлено спецификой критерия завершения итерационного процесса. Распространить базовый метод РНК на востребованные на практике модели с разнознаковыми эффективными плотностями отдельных геологических тел, используя лишь внутренние резервы самого метода, не удавалось. Между тем, от того, будут или нет обобщенные алгоритмы РНК распространены на модели с разнознаковыми эффективными плотностями, зависит в конечном итоге возможность *полной* автоматизации технологий интерпретации гравитационных аномалий в той части, где во вмешательстве геофизика уже нет необходимости. Как оказалось, выход из положения может состоять в том, чтобы работу монтажных методов предварять процедурой разделения полей, осуществляя декомпозицию обратной задачи гравиразведки на две подзадачи для компонент поля, каждая из которых обусловлена объектами эффективной плотности одного знака.

Постановки обратных задач, в которых присутствуют объекты с эффективными плотностями разных знаков, обычно ассоциируются с ростом влияния ε -эквивалентности. Нас же пока интересует другой аспект проблемы – как с помощью алгоритма РНК организовать поиск одного из допустимых решений обратной задачи. Мы все так же придерживаемся принципа: если алгоритм вышел на допустимое решение, то свою задачу он выполнил. Если же после этого интерпретатор недоволен решением, то остается лишь посоветовать ему ужесточить априорные ограничения и перерешать обратную задачу.

При таком подходе к оценке состоятельности алгоритма у последнего, казалось бы, лишь возрастают шансы на успех, обусловленные возросшей степенью неопределенности. Можно было ожидать, что она облегчит выход на какое-то из допустимых решений обратной задачи. Однако в действительности все оказалось не так. Эффект компенсации (по полю) масс разного знака препятствует срабатыванию критерия завершения итерационного процесса, который в ряде случаев начинает, как принято говорить, «идти в разнос». Так, если снять ограничения типа $\hat{S}_j \subset D_j$, то это выражается в неограниченном росте размеров парциальных тел в модели источников аномалии, когда гравитационный эффект масс положительной эффективной плотности компенсирует эффект от возмущающих масс отрицательной эффективной плотности. При наличии ограничений $\hat{S}_j \subset D_j$ текущие приближения к парциальным носителям способны выйти на границы областей D_j и на этом итерационный процесс несанкционированно завершится. Конечно, подобное происходит не всегда. Но в каждом таком случае последовательность невязок, достигнутых на итерациях, ведет себя крайне нерегулярно и эти значения заметно превосходят допустимое (так что и при плотностях, далеких от истинных $\hat{\delta}_j$, не удастся построить решение обратной задачи, приемлемое по невязке).

Возможность обеспечить допустимое значение невязки, когда алгоритм РНК не в состоянии сделать это самостоятельно, мы связываем с разделением поля $\Delta\hat{g}(X)$ на составляющие, отвечающие аномалиеобразующим телам положительной и отрицательной эффективной плотности. Такое разделение позволит осуществить декомпозицию исходной задачи на две подзадачи для парциальных моделей среды с плотностями одного знака. В основе метода лежит истокообразная аппроксимация дискретных значений потенциального поля, предложенная в работах [Аронов, 1976, 1990].

Пусть J^+ , $|J^+| = m^+$, – множество номеров j локальных тел \hat{S}_j эффективной плотности $\hat{\delta}_j > 0$, суммарную аномалию которых обозначим как $\Delta\hat{g}_+(X)$, и J^- , $|J^-| = m^-$, – множество номеров тел \hat{S}_j плотности $\hat{\delta}_j < 0$, суммарную аномалию которых обозначим как $\Delta\hat{g}_-(X)$. Для простоты изложения представим ситуацию, когда проекция на плоскость $z=0$ сети Γ точек $X_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, задания приближенных значений $\Delta\tilde{g}_i$ аномалии $\Delta\hat{g}(X)$ является регулярной сеткой, расстояние между любыми двумя ближайшими узлами кото-

рой равно h_0 . Приближения $\Delta\tilde{g}_+(X)$ к $\Delta\hat{g}_+(X)$ и $\Delta\tilde{g}_-(X)$ к $\Delta\hat{g}_-(X)$, по которым в дальнейшем будут построены положительная $\Omega_+^* = \cup \Omega_j^*$, $j \in J^+$ и отрицательная $\Omega_-^* = \cup \Omega_j^*$, $j \in J^-$ компоненты решения Ω^* , найдем как суммы полей положительных и отрицательных локальных масс (шаров), помещенных в точки определенной поверхности.

Суть предлагаемой процедуры разделения полей заключается в следующем. Наметим глубины H_{\min} и H_{\max} , в пределах которых заведомо расположены источники аномалии $\Delta\hat{g}(X)$. Введем в рассмотрение семейство конгруэнтных Γ сеток Γ_k с узлами $X_i^{(k)} = (x_i, y_i, z_i + kh)$, $h \leq h_0$. Координаты z_i узлов обязаны лежать внутри интервала $[H_{\min}, H_{\max}]$ и равномерно его покрывать. Пусть это сетки Γ_k (назовем их пробными) с номерами $k = k_{\min}, k_{\min} + 1, \dots, k_{\max}$. Для каждой такой сетки выполним перечисленные ниже операции.

1. Поместим в узлы пробной сетки точечные источники и из решения системы линейных уравнений определим массы $M_i^{(k)}$ источников, при которых их суммарное поле в точках X_i совпадает с интерпретируемыми значениями $\Delta\tilde{g}_i$; пусть I_k^+ – множество номеров i тех узлов, в которых $M_i^{(k)} > 0$, а I_k^- – множество номеров узлов сетки Γ_k , в которых $M_i^{(k)} < 0$.

2. Суммируя гравитационные эффекты источников, помещенных в узлы $X_i^{(k)}$, $i \in I_k^+$, получим некоторое приближение $\Delta\tilde{g}_+(X)$ к $\Delta\hat{g}_+(X)$; аналогично находим приближение $\Delta\tilde{g}_-(X)$ к отрицательной компоненте $\Delta\hat{g}_-(X)$ аномалии. Тем самым предпосылки к декомпозиции обратной задачи созданы.

3. Рассматривая составляющую $\Delta\hat{g}_+(X)$ как некую обособленную аномалию, которая обусловлена m^+ локальными телами положительной эффективной плотности, попытаемся по ее приближенным значениям $\Delta\tilde{g}_+(X_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ отыскать с помощью одной из версий обобщенного метода РНК допустимое решение обратной задачи Ω_+^* . При этом учитываются априорные ограничения, относящиеся к локальным телам \hat{S}_j , $j \in J^+$. Аналогично попробуем отыскать m^- -связное решение Ω_-^* по аномалии $\Delta\tilde{g}_-(X)$, учитывая и ту априорную информацию, которая касается взаиморасположения локальных тел отрицательной и положительной эффективной плотности (в качестве последних будут фигурировать локальные тела из уже построенного решения Ω_+^*).

4. По величине невязки наблюденного поля $\Delta\tilde{g}(X)$ в точках X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, и суммы $\Delta g^*(X)$ полей $\Delta g_j^*(X)$ масс, сосредоточенных в парциальных носителях Ω_j^* , $j \in J^+ \cup J^-$, с соответствующими эффективными плотностями $\hat{\delta}_j$, установим, является или нет конфигурация $\Omega^* = \Omega_+^* \cup \Omega_-^*$ приемлемым решением обратной задачи.

С формальных позиций к данной четырехэтапной схеме поиска допустимых решений возникает несколько вопросов. Так, можно усомниться в том, что мера близости этих полей порознь к неизвестным составляющим $\Delta\hat{g}_+(X)$ и $\Delta\hat{g}_-(X)$ истинной аномалии $\Delta\hat{g}(X)$ окажется сопоставима с погрешностью измерений, то есть что разделение поля действительно произойдет «правиль-

но». Конечно же, речь не идет о том, что такая близость будет достигнута при использовании *каждой* из сеток Γ_k . Вопрос в том, будет ли она достигнута в случае размещения точечных масс *хотя бы на одной* из этих сеток. И если да, то как мы узнаем, на какой именно из сеток? Но вот на последний вопрос ответить как раз просто: узнаем апостериори, используя косвенные доводы, а конкретно – по тому, удалось ли по компонентам разделенного поля получить допустимое решение обратной задачи. Ведь в конечном счете важно не качество разделения полей (разумеется, в разумных пределах), а возможность построить по результатам такого разделения допустимое решение обратной задачи. Если это удалось, то в принципе не обязательно знать, какая точность была достигнута при разделении полей. Если удалось построить несколько допустимых решений, отвечающих различным сеткам Γ_k , то всех их можно будет учесть в аддитивных методах решения обратной задачи, и безразлично, в каком из этих случаев разделение полей было более правильным.

Главный вывод, который можно сделать по результатам апробации алгоритма на довольно внушительной серии модельных примеров, состоит в том, что эвристика, заложенная в принцип выбора семейства сеток Γ_k , оказалась весьма удачной. Подмечена важная закономерность: среди пробных сеток Γ_k , задаваемых предложенным выше способом, всегда отыщется та (обозначим ее номер как k_{opt}), при которой каждая из выделенных аномалий $\Delta\tilde{g}_+(X)$ и $\Delta\tilde{g}_-(X)$ довольно хорошо приближает соответствующую составляющую истинного поля $\Delta\hat{g}(X)$. При этом качество аппроксимации компонент $\Delta\tilde{g}_+(X)$ и $\Delta\tilde{g}_-(X)$, построенной с помощью сетки Γ_k , монотонно ухудшается с ростом расстояния $|k - k_{opt}|$. До конца объяснить этот феномен нам пока не удалось.

4.3. Результаты вычислительных экспериментов

Приступая к описанию результатов апробации обобщенных алгоритмов РНК, мы считаем необходимым (в дополнение к тому, что было сказано по этому поводу в предыдущей главе) объяснить читателю нашу позицию в отношении выбора примеров. Поскольку точность интерпретации не может являться критерием состоятельности алгоритма решения обратных задач, если последний смог учесть все априорные ограничения, то и нет особого смысла иллюстрировать работу алгоритма на сложных модельных примерах. Возможность алгоритмов РНК учитывать различные ограничения (пока не беря в расчет ограничение на максимально допустимое значение невязки) у читателя, надо полагать, уже не вызывает сомнения. Как и в предыдущей главе, в случае базового метода РНК цель модельных расчетов – помочь читателю глубже понять суть обобщенных алгоритмов РНК и продемонстрировать, что они действительно в состоянии выходить на сравнительно малые (допустимые) значе-

ния невязки, несмотря на то, что используют принцип *локальной (пошаговой) оптимизации*. В этой связи, конечно, можно было бы поднять вопрос о том, насколько алгоритмы РНК близки к классу жадных алгоритмов [Кормен и др., 2005]. Но, в конце концов, дело не в этом. Даже если интерпретация выполняется по точному полю и истинное решение принадлежит модельному классу, то метод РНК практически никогда не выйдет на это решение. Но при этом довольно велика вероятность, что он выйдет на невязку, которая, оказавшись этот пример практическим, являлась бы вполне приемлемой.

Что касается вычислительного аспекта, то, в отличие от большинства известных алгоритмов, компьютерное время, требуемое для реализации алгоритмов РНК, слабо зависит от числа локальных тел в модели источников поля. Конечно, переход от плоских обратных задач к трехмерным заметно сказывается на времени реализации метода. Поэтому, чтобы иметь объективное представление о технической поддержке методов РНК при современном уровне развития вычислительных средств, мы сочли обязательным включить в иллюстрационный материал примеры работы обобщенных монтажных алгоритмов с сугубо трехмерными постановками обратных задач. Также есть смысл брать примеры, в которых постановка обратной задачи несколько выходит за рамки условий, оговоренных для обобщенного метода РНК, особенно если речь идет о моделировании ситуации, приближенной к реалиям геофизической практики.

Поясним суть последнего замечания. Дело в том, что точные значения плотности геологических тел в естественном залегании никогда не известны. Горные породы представляют собой сложные гетерогенные образования, а сложенные ими геологические тела являются, по современным представлениям, неоднородными по физическим характеристикам мультифрактальными объектами [Блох, 2004; Кобрунов, 2008]. Постоянную плотность в рудных постановках обратных задач следует рассматривать, скорее всего, как некое «условное среднее» значение этого параметра, обеспечивающее приблизительно такое же гравитационное поле, что и природные массы. Геологические разрезы, представленные совокупностью локальных тел с постоянной плотностью, залегающих в однородной по плотности среде, в реальности не существуют. Наличие «условного среднего» значения эффективной плотности во многом обеспечивает фактор ε -эквивалентности, однако безошибочно определить это значение невозможно по ряду причин, в числе которых различие физических свойств горных пород, определенных по образцам и в естественном залегании [Вахромеев, Давыденко, 1987]. Варьируя эффективной плотностью хотя бы в пределах $\pm 5\%$ относительно некоторого опорного значения, можно построить серию решений обратной задачи и путем их сопоставления выявить наиболее надежно определяющиеся геометрические особенности возмущающих тел.

Пример 4.1. Аномалия $\Delta\hat{g}(x)$ обусловлена тремя локальными телами \hat{S}_j (рис. 4.1, нумерация тел слева направо) постоянной эффективной плотности $\hat{\delta}_1 = 0,15 \text{ г/см}^3$, $\hat{\delta}_2 = 0,2 \text{ г/см}^3$, $\hat{\delta}_3 = 0,3 \text{ г/см}^3$, но считается, что интерпретатор этого не знает и полагает, что оперирует средними значениями $\bar{\delta}_j$. Чтобы оценить, насколько обобщенный алгоритм РНК «не дотягивает» до глобального минимума невязки, интерпретация выполнена по точным значениям аномалии, заданной в точках $x_i = 0,2(i - 1)$, $i = 1, 2, \dots, 76$, в предположении, что границы тел \hat{S}_j достаточно гладкие и аппроксимирующие их парциальные конфигурации Ω_j^* не должны иметь «отростков». На рис. 4.2 представлены приближенные решения $\Omega^* = \Omega_1^* \cup \Omega_2^* \cup \Omega_3^*$, построенные при точно (а) и приближенно (б, в) заданных значениях эффективных плотностей локальных аномалиеобразующих объектов, которые играют роль задаваемых интерпретатором «средних» значений. В варианте б в качестве истинных эффективных плотностей взяты величины $\bar{\delta} = 1,04\hat{\delta}_1$, $\bar{\delta}_2 = 1,02\hat{\delta}_2$ и $\bar{\delta}_3 = 0,95\hat{\delta}_3$. В варианте в – $\bar{\delta}_1 = 0,96\hat{\delta}_1$, $\bar{\delta}_2 = 0,97\hat{\delta}_2$, $\bar{\delta}_3 = 1,02\hat{\delta}_3$. Во всех трех вариантах величина достигнутой среднеквадратической невязки не превышает 0,015 мГал, что составляет менее 0,4% от амплитуды гравитационной аномалии.

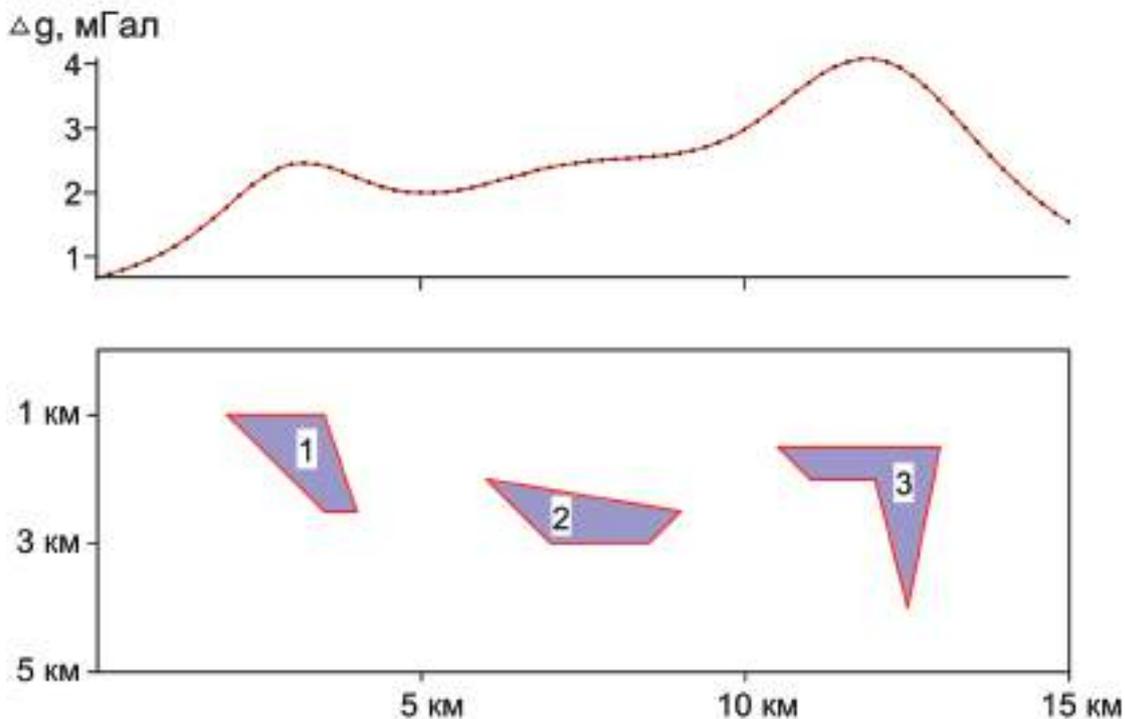


Рис. 4.1. Геоплотностная модель: аномалиеобразующие объекты, их номера и суммарное гравитационное поле (наблюдаемое и подобранное): 1 – $\hat{\delta}_1 = 0,15 \text{ г/см}^3$; 2 – $\hat{\delta}_2 = 0,2 \text{ г/см}^3$; 3 – $\hat{\delta}_3 = 0,3 \text{ г/см}^3$.

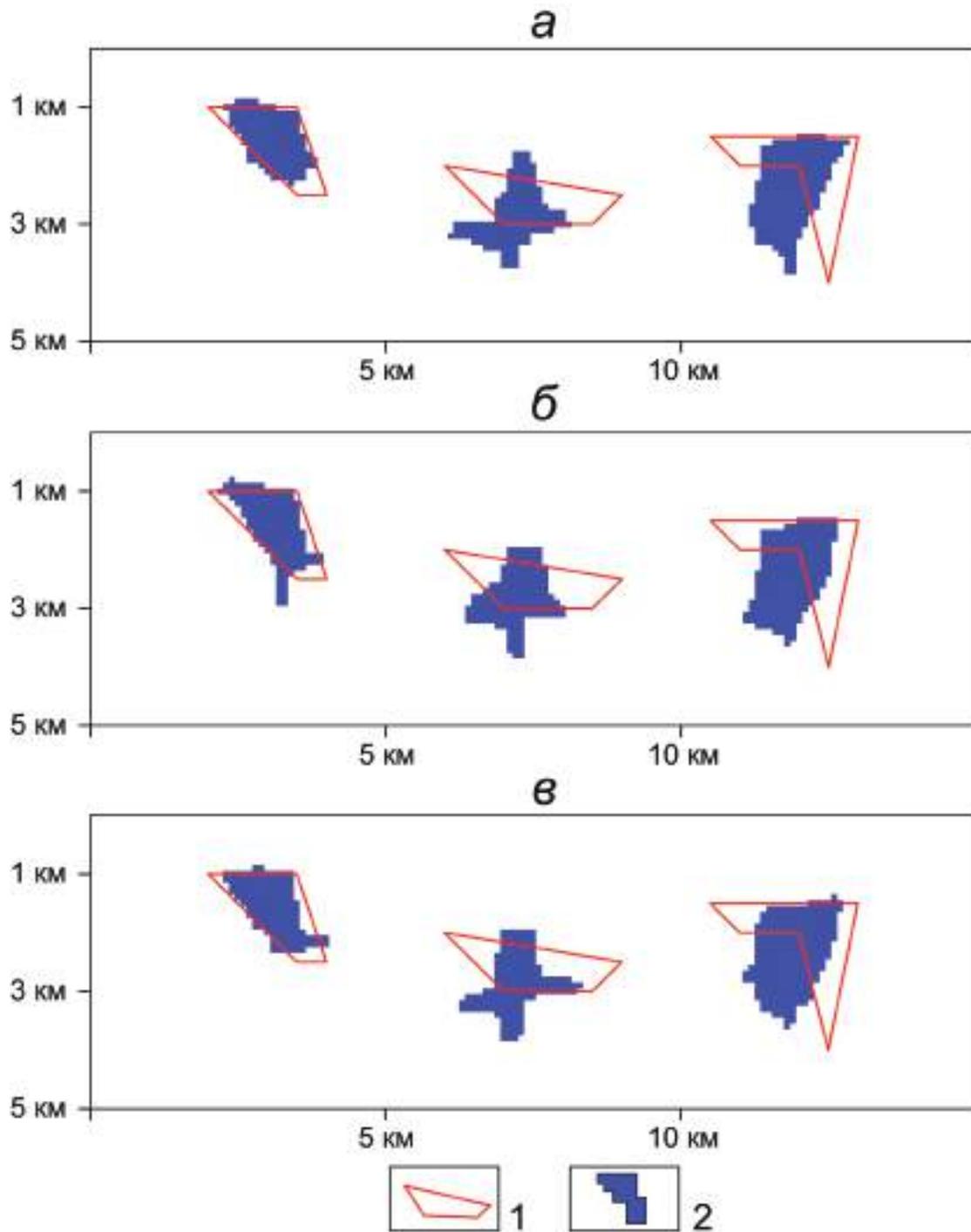


Рис. 4.2. Результаты решения обратной задачи гравиразведки обобщенным методом РНК по точно (*a*) и приближенно (*б*, *в*) заданным значениям эффективной плотности источников аномалии: 1 – истинные тела \hat{S}_j ; 2 – подобранные локальные тела Ω_j^* .

Пример 4.2. Рассмотрим еще одно полезное отступление от стандартной схемы обобщенного алгоритма РНК. Суть в следующем. Большинство элементов замощения, которым суждено составить ядро искомого носителя Ω^* , в ходе итерационного процесса РНК меняют свой статус: вначале они вообще могут не иметь никакого отношения к текущему конфигурационному приближению. Так, на первой итерации к их числу относятся все элементы замощения, не принадлежащие нулевому приближению Ω_0 и его оболочке $O(\Omega_0)$. Затем, по мере расширения ядер текущих приближений Ω_k , какие-то «нестатусные» элементы замощения становятся элементами оболочек, еще позже некоторые из них становятся элементами границы и, наконец, элементами внутреннего ядра текущих приближений Ω_k^* . Таким образом, если итерационный процесс РНК представить как двухстадийный, то особенности границы искомого носителя Ω^* формируются на второй стадии итерационного процесса; причем сказать, на какой итерации (или на каком интервале номеров итераций) пролегает черта между этими стадиями, трудно. Теоретически какие-то из элементов замощения, вошедшие в границу нулевого приближения Ω_0 , могут так и оставаться граничными элементами всех текущих приближений Ω_k , включая итоговую конфигурацию Ω^* , тогда как другие элементы могут успеть попасть в границу текущих приближений буквально на последних итерациях. Мы попытаемся использовать подмеченные тенденции.

Возьмем отношение $\delta_{1,k}^* / \hat{\delta}_1$ оптимального значения эффективной плотности первого локального тела в модели источников поля на шаге k к истинному значению плотности тела \hat{S}_1 и обозначим его как $\gamma(k)$ ($\gamma > 1$ в случае положительных эффективных плотностей $\hat{\delta}_k$). По текущему значению $\gamma(k)$ можно оценить процентное отношение числа шагов, которые итерационному процессу РНК еще предстоит пройти, к числу уже выполненных итераций. Располагая такой оценкой и принимая во внимание выше охарактеризованные тенденции, мы можем позволить обобщенному алгоритму РНК несколько отойти от стандартной схемы.

Мы «отпустим» начало итерационного процесса и позволим ему на первых шагах сосредоточиться на главном – на минимизации невязки, будучи убежденными, что на оставшихся итерациях он сумеет «выправить» свойства текущих приближений. Иными словами, в число параметров, регулирующих ход итерационного процесса, можно включить некое γ_0 , такое, что метод начнет заботиться о каких-то свойствах носителя Ω^* (к примеру, гладкости его границы), начиная лишь с шага k , при котором $\gamma(k) < \gamma_0$. В каких-то случаях подобное разбиение итерационного процесса может оказаться вынужденной мерой. Возьмем, к примеру, ограничение сверху на отношение числа элементов в оболочке конфигурации к числу элементов замощения в ее ядре. На первых шагах итерационного процесса оно вообще может оказаться невыполнимым. Одна из возможностей преодолеть данное противоречие как раз и состоит в

том, чтобы снять некоторые априорные ограничения на начальной стадии итерационного процесса.

Понятно, что выбор чересчур большого значения γ_0 обяжет итерационный процесс учитывать требование гладкости много раньше, чем это необходимо. Издержки такой перестраховочной тактики понятны. Напротив, если значение γ_0 сравнительно невелико, то итерационный процесс не успеет до его завершения скорректировать границу текущих приближений, построенных без оглядки на требование гладкости.

Итерационный процесс можно разбить не на два, а на большее число стадий, на каждой последующей из которых требования к гладкости границы текущего приближения становятся все более жесткими. Конечно, мы отдаем себе отчет в том, что если такого рода разбиение итерационного процесса будет прерогативой интерпретатора, то эта задача может для него оказаться слишком сложной. Но если – правда, здесь мы заметно отойдем от стандартной схемы обобщенного алгоритма РНК – мысленно представить итерационный процесс, который способен возвращаться *назад*, в общем случае не один раз, и пересчитывать часть итераций уже с обновленными требованиями (мы надеемся, что читатель понимает, о чем идет речь), то процедуру задания указанного разбиения и ее корректировки можно будет формализовать и включить как составную часть алгоритма. Ясно, что помимо гладкости речь можно вести и по отношению к другим свойствам носителя.

Оценим теперь на конкретном числовом материале, насколько эффективны наши предложения. Аномалия $\Delta g(x)$ обусловлена одиночным возмущающим телом \hat{S} , ее амплитуда составляет 3,02 мГал. Замощение выполнено с помощью квадратных элементов замощения (см. рис. 2.1в). За нулевое приближение выбран элемент замощения с координатами центра $x = 3$ км и $z = 1$ км. В рассматриваемом примере – он выполнен в трех вариантах: *a*, *б* и *в* – критерий гладкости не привязан к понятию отрезка. Мы снимем любые требования к гладкости границы текущих приближений на первых пяти итерациях. Зато, начиная с шестой итерации, потребуем, чтобы в оболочке каждого элемента замощения, который войдет в ядро текущего приближения, содержалось не менее трех элементов замощения из этого ядра. В варианте *a* этим требованием все используемые ограничения исчерпаны. В варианте *б* условия задачи ужесточаются. В дополнение к ограничениям из варианта *a* необходимо, чтобы начиная с итерации k , на которой значение $\gamma(k)$ опустилось до значения 1,20, оболочка каждого элемента замощения, включаемого в ядро текущего приближения, содержала не менее четырех элементов замощения этого ядра. Вариант *в* отличается от варианта *б* тем, что это последнее условие должно выполняться, начиная уже с итерации k , на которой значение $\gamma(k)$ достигло значения 1,50.

На рис. 4.3 представлены решения обратной задачи в каждом из трех вариантов – *a*, *б* и *в*. Достигнутые в каждом из них значения невязки составляют, со-

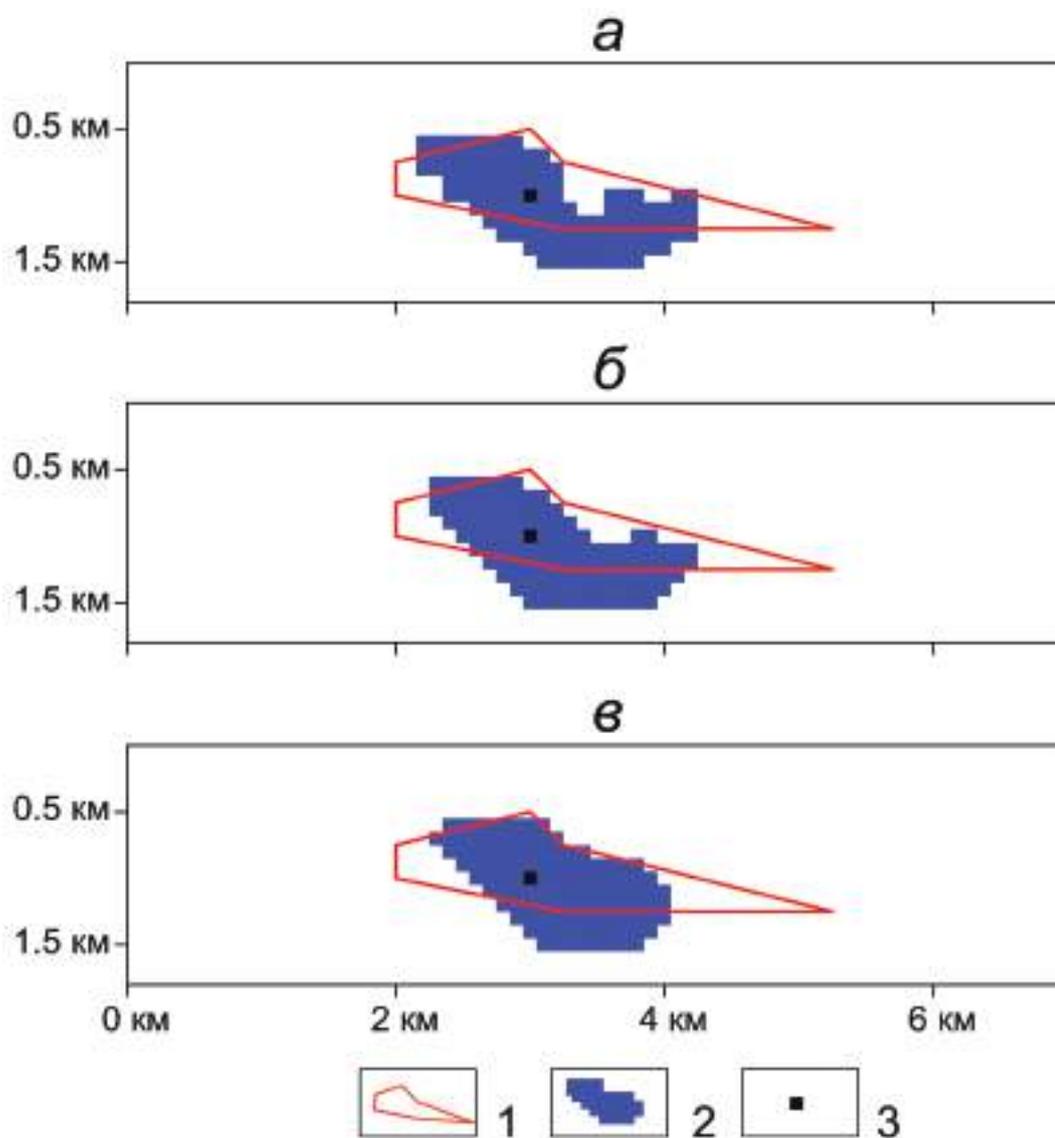


Рис. 4.3. Результаты решения обратной задачи гравirazведки методом РНК при низкой (а), средней (б) и высокой (в) степени сглаживания границы модельного конфигурационного носителя: 1 – аномалиеобразующий объект; 2 – модельный носитель масс; 3 – центр кристаллизации.

ответственно, 0,022 мГал, 0,039 мГал и 0,109 мГал. Четко прослеживаемая тенденция, которая заключается в росте невязки наблюдаемого и подобранного полей с ужесточением требования гладкости, является своего рода «платой» за желание видеть решение обратной задачи более гладким. Причем различия

в ходе итерационных процессов, отвечающих каждому из вариантов задания той или иной степени жесткости ограничений на гладкость, начинают проявляться после формирования основы конфигурации Ω^* (рис. 4.4).

Пример 4.3. С учетом случайного характера точности построенного решения обратной задачи единственной гарантией надежности результатов интерпретации может служить уверенность, что при заданном объеме априорной информации множество допустимых решений Q является достаточно узким. В этом случае, независимо от того, какой элемент S^* из множества Q принят за приближенное решение обратной задачи и какой его элемент является истинным решением \hat{S} (или его наилучшим приближением), расстояние $\rho(S^*, \hat{S})$ будет относительно небольшим. Для постановок обратных задач, встречающихся на практике, нередко характерно наличие разнообразной априорной информации, и – с точки зрения оценки возможностей обобщенного алгоритма РНК – они более интересны, чем модельные постановки, в которых априорные ограничения носят вымышленный характер.

Поделимся с читателем результатами применения обобщенного алгоритма РНК при интерпретации данных профильной гравirazведки на Боотанкагской площади (п-ов Таймыр). Основной целью интерпретации было выделение

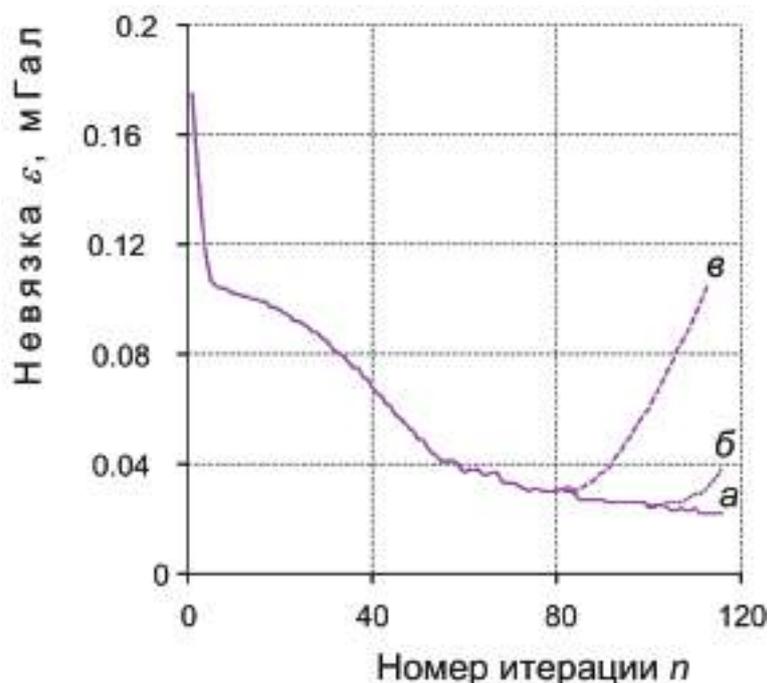


Рис. 4.4. Графики изменения невязки полей в итерационных процессах в вариантах а, б и в.

и оконтуривание в разрезе объекта повышенной плотности – интрузивного тела ультрабазитового состава, перспективного на платино-медно-никелевое оруденение. При построении модели каждого разреза учитывался довольно обширный объем априорной информации. Конкретно: использовались данные поискового бурения, предположение о направлении падения тел и ожидаемой форме интрузий, считалось, что имеет место достаточно гладкий характер границ соприкосновения магматических пород с вмещающей средой (терригенными отложениями). Задавались ограничения на максимальную мощность возмущающих тел, которые предполагались односвязными. Исходя из геологических соображений было принято решение использовать двухмерную модель возмущающих объектов.

Результаты гравитационного моделирования подтвердили возможность уверенно проводить оконтуривание в разрезе основного возмущающего объекта – дифференцированной интрузии базит-гипербазитов, состоящей из нескольких ветвей (рис. 4.5). Из пяти рекомендованных по геофизическим данным скважин четыре вскрыли искомые геологические объекты.

Пример 4.4. До сих пор мы демонстрировали возможности обобщенного метода РНК исключительно на двухмерных моделях источников аномалии. Но не во всех случаях использование плоских (и даже 2,5-мерных) моделей

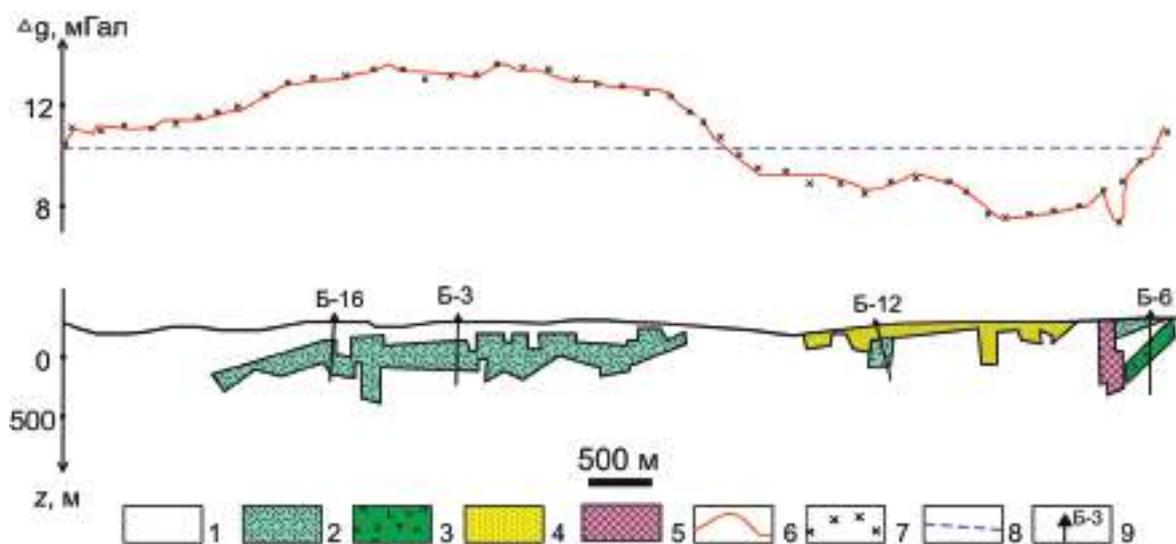


Рис. 4.5. Результаты моделирования геологического разреза по гравитационному полю с помощью обобщенного метода РНК. Боотанкагская площадь: 1 – осадочные породы; 2 – интрузии габбро-долеритов; 3 – силлы долеритов; 4 – рыхлые отложения; 5 – зоны дробления горных пород; 6 – наблюдаемое поле; 7 – поле построенной модели геологического объекта; 8 – фоновая составляющая поля; 9 – буровые скважины.

источников поля можно признать приемлемым. По крайней мере, технологии интерпретации данных гравиразведки, рассчитанные на изучение геологических тел и структур, таких как изометричные интрузивные тела, вулкано-соляные купола, тектонические депрессии, астроблемы и т.п., должны основываться на сугубо трехмерных моделях источников гравитационного поля.

Теоретически возможное и практически реализуемое – не всегда одно и то же. В проблематике обратных задач гравиразведки и магниторазведки банальной причиной тому зачастую являются недостаточная мощность существующих на тот момент вычислительных средств и отсутствие должного программного обеспечения (что происходит в настоящее время чаще). Как справедливо заметил В.И. Старостенко [1999]: «Заявление о том, что метод легко обобщается на трехмерный случай, остается в большинстве случаев чистой декларацией». Будем надеяться, что в недалеком будущем ситуация изменится к лучшему. Но пока, к сожалению, программное обеспечение монтажных алгоритмов, созданное преимущественно авторами монографии, заметно отстает от теоретических разработок. Тем не менее, некоторые расчеты показать мы все же сможем. Однако прежде следует сказать о характерных теоретических проблемах, возникающих при разработке методов решения сугубо трехмерных обратных задач.

Специфика трехмерных задач в сеточных модельных классах начинает проявляться уже на уровне понятия односвязности конфигурации. Если в плоской постановке обратной задачи конфигурационные носители, содержащие «дыры», не считаются односвязными, то в трехмерной постановке торообразный носитель («бублик») будет, согласно определению, данному во второй главе, считаться односвязным. Найти математически привлекательный и вместе с тем конструктивный алгоритм распознавания конфигурационных торообразных и им подобных тел авторам пока не удалось. Но помимо надежды на то, что (при всех проявлениях эквивалентности) вероятность появления такого рода приближенных решений обратной задачи низка, на практике остается возможность отслеживать (естественно, в автоматическом режиме) топологию определенных сечений носителя. В большинстве случаев это будет достаточно, а в случае регулярных замощений, к тому же, и не сложно.

Теперь, о соблюдении условия гладкости границы конфигурационного носителя. Если мы ограничимся интегральными характеристиками типа отношения мощности границы носителя к мощности его ядра, то теоретически трехмерные задачи ничем не отличаются от двумерных. Дополнительные проблемы возникают при использовании критериев пофрагментной гладкости границы носителя. Так, проблема «отростков» (если интерпретатор примет решение характеризовать геологически бессодержательные фрагменты границы носителя возмущающих масс в этих терминах) в трехмерных задачах стоит острее. Нетрудно привести примеры конфигураций, которые (при

выбранном критерии гладкости) в двумерной постановке можно принять за природные объекты, тогда как в трехмерной постановке их аналоги будут выглядеть не реалистично из-за отдельных фрагментов своей границы. Речь, в частности, идет о названных нами так по аналогии «графеновых отростках» – «однослойных» («толщиной» в один элемент замощения) трехмерных конфигурациях. Для регулярных замощений с заданной структурой, по-видимому, можно подобрать алгоритм для распознавания «графеновых отростков». Что касается аналогов понятия отростка, предложенного в отношении плоских конфигураций, то в трехмерном случае можно попросту ужесточить условия и на протяжении всего итерационного процесса не выходить за рамки класса безотростковых конфигурационных носителей. Можно поступить и так: потребовать, чтобы оболочка каждого элемента замощения, входящего в ядро конфигурационного носителя, содержала не только минимум одну пару граничащих друг с другом элементов ядра носителя, но и некое минимальное число элементов ядра.

Следует объективно оценить всю сложность проблемы бессодержательных фрагментов модельных конфигурационных носителей и не требовать от авторов обобщенного алгоритма РНК ее законченного решения. Все познается в сравнении. И в этом смысле классические приемы учета гладкости границы носителя возмущающих масс – это слишком упрощенный подход к проблеме, даже в сопоставлении с теми предложениями, которые мы озвучили выше. Если согласиться с авторами монографии, что в плане создания новых технологий интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, основанных на содержательном анализе некоторого множества конкурирующих вариантов решения рудной обратной задачи, альтернативы конечноэлементным модельным классам источников поля пока не видно, то мы попросту «обречены» заниматься более углубленным изучением проблемы гладкости в этих классах.

Перейдем непосредственно к примеру и начнем с простого случая, когда аномалия Δg обусловлена шаром \bar{S} эффективной плотности $\bar{\delta} = 0,3$ г/см³ радиуса 1 км. Его центр располагается на глубине 2 км. Интерпретация выполнена по точным значениям аномалии силы тяжести, заданной на плоскости $z = 0$ в точках квадратной сети с шагом 500 м. Область задания поля – квадрат со стороной 10 км, его значения лежат в диапазоне от 0,04 до 2,1 мГал. Дополнительная априорная информация не использована (по сути мы имеем дело с базовым методом РНК в трехмерном варианте). Замощение пространства выполнено с помощью кубических элементов со стороной 200 м. В качестве нулевого приближения к искомому решению Ω^* взят элемент замощения, расположенный вблизи центра шара \bar{S} .

Для построения приближенного решения Ω^* обратной задачи понадобилось 524 итерации. Невязка истинного поля и поля масс, заполняющих с плотностью $\bar{\delta}$ носитель Ω^* , составила 0,00055 мГал (всего 0,025% от макси-

му аномалии). Собственно конфигурационная область Ω^* близка к шару (рис. 4.6); при том что объем шара \hat{S} равен $4,187 \text{ км}^3$, мера μ конфигурации Ω^* составляет $4,192 \text{ км}^3$ (расхождение с мерой $\mu(\hat{S})$ по сути в четвертом знаке). Время решения задачи на компьютере с процессором IntelPentiumc тактовой частотой 3 МГц составило чуть более трех минут.

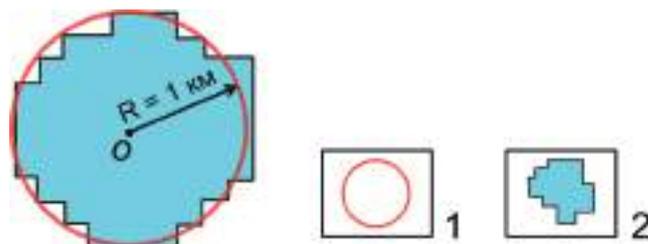


Рис. 4.6. Сечение возмущающего (1) и подобранного (2) носителей горизонтальной плоскостью $z = 2,1 \text{ км}$.

Пример 4.5. Рассмотрим результаты применения обобщенного метода РНК в случае более сложной трехмерной модели источников поля. Аномалия Δg обусловлена однородным телом \hat{S} , представляющим собой объединение трех соприкасающихся однородных прямоугольных призм эффективной плотности $\hat{\delta} = 0,25 \text{ г/см}^3$, расположенных в интервале глубин от 1 до 4,5 км. Область задания поля – квадрат со стороной 10 км, шаг сети съемки – 500 м. Значения поля $\Delta \hat{g}(x_i, z_i, 0)$ лежат в диапазоне от 0,13 до 2,24 мГал (рис. 4.7). Прибегнем опять к испытанному приему: чтобы оценить, на какой уровень помех в измерениях поля, при котором могла бы быть достигнута допустимая невязка, можно рассчитывать, интерпретация осуществляется по точным значениям поля. Элемент замощения – куб со стороной 400 м. Начальным приближением к искомому решению Ω^* служит одиночный элемент замощения, расположенный на глубине 3 км.

Дополнительно вводятся ограничения на минимальную глубину верхней и максимальную глубину нижней кромок – 0,2 и 7,0 км, соответственно. Введено также требование безотростковости искомого носителя Ω^* .

Ядро построенного конфигурационного носителя Ω^* состоит из 503 элементов замощения. Как видно из рис. 4.8, построенная конфигурация сохранила основные особенности возмущающего объекта, и это во многом является отражением сравнительно невысокого уровня приближенной эквивалентности при заданных априорных ограничениях. Если же говорить о заслугах самого алгоритма РНК, то они заключаются в том, что при соблюдении всех ограничений на геометрию и пространственное положение источников аномалии удалось выйти на довольно низкое значение невязки $\varepsilon = 0,0028 \text{ мГал}$ (всего-то чуть более 0,1% от максимума аномалии). Такой результат позволяет

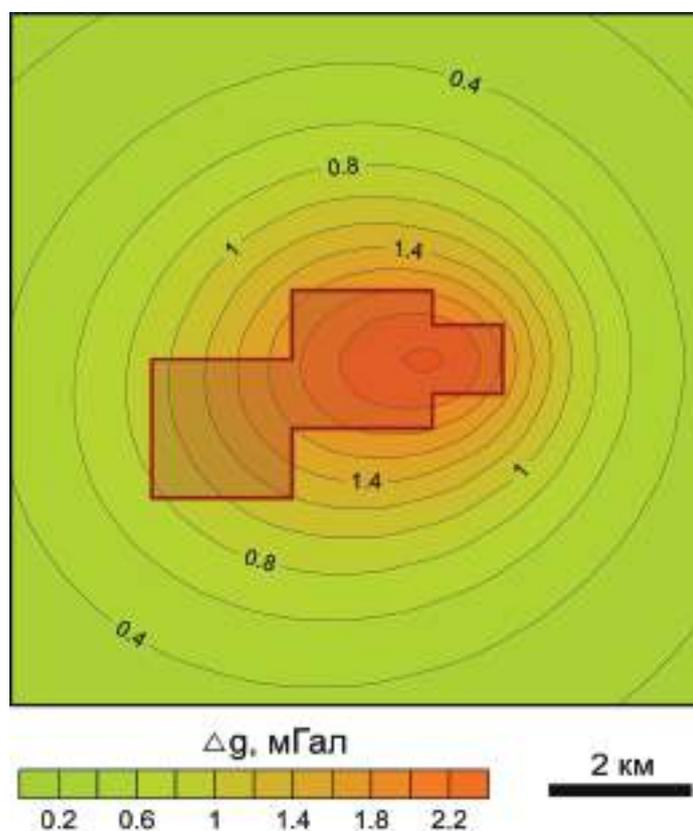


Рис. 4.7. Гравитационное поле и проекция возмущающего объекта на плоскость $z = 0$.

рассчитывать на то, что на практике в схожих условиях и при уровне помех в измерениях не ниже 0,2 – 0,3% от максимума аномалии обобщенный метод РНК выйдет на допустимое решение обратной задачи.

Как и в двумерных постановках обратной задачи, здесь также наблюдается монотонное снижение локально-оптимальных значений эффективной плотности с ростом номера итерации, а также наличие малых возмущений в графике изменения локально-оптимальной невязки при общей тенденции к ее снижению с ростом номера итерации (рис. 4.9). Немонотонное поведение невязки иллюстрирует возможности алгоритма автоматически преодолевать локальные минимумы функционала.

Пример 4.6. В тех практических ситуациях, когда использование 2- и 2,5-мерной постановок обратных задач еще допустимо, концепция монтажных алгоритмов в варианте обобщенного метода РНК была не раз опробована авторами на практическом материале и показала неплохие результаты [Балк и др., 1993].

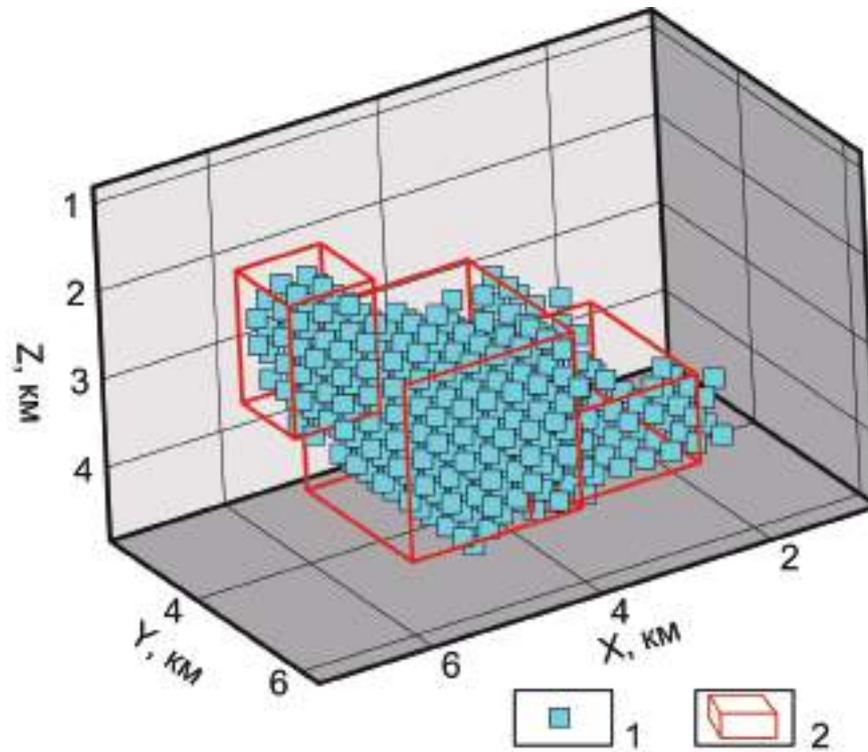


Рис. 4.8. Трехмерное изображение возмущающего объекта (2) и построенного конфигурационного носителя Ω^* (1).

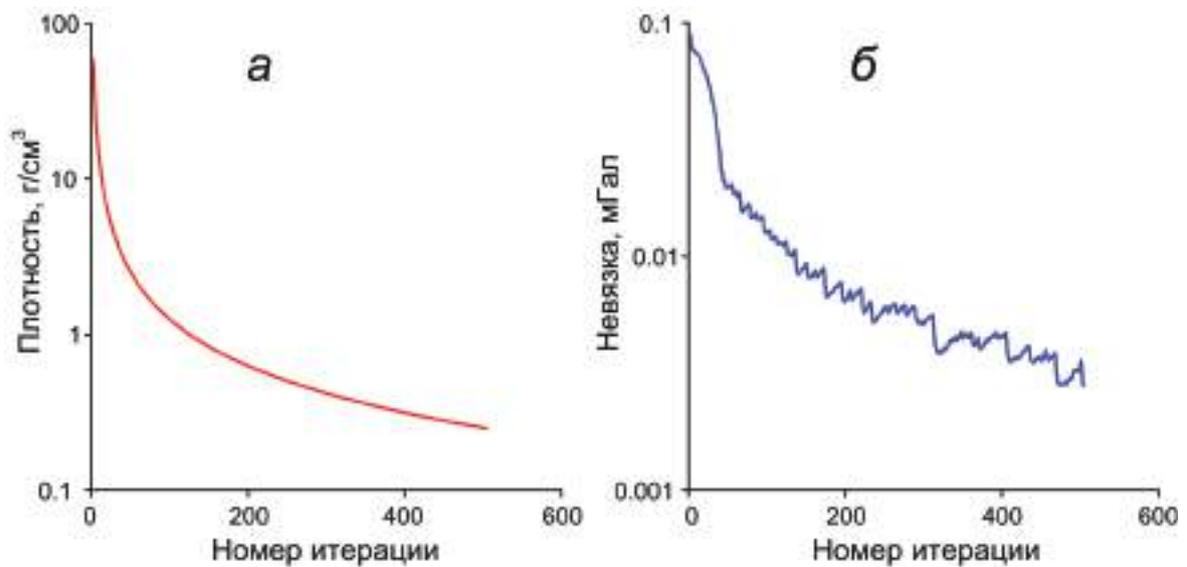


Рис. 4.9. Характеристики итерационного процесса: а – график поведения плотности; б – график поведения невязки.

На нескольких примерах продемонстрируем сейчас возможности обобщенного алгоритма РНК в сугубо трехмерной постановке при изучении глубинного строения земной коры и поисках месторождений рудных полезных ископаемых.

В пределах северо-западного фаса Сибирской платформы выделяется линейная субмеридиональная Норильско-Игарско-Верещагинская зона высоких значений гравитационного поля (до 50 мГал и более) шириной около 100 км, окаймляющая древний кратон (рис. 4.10). Зона, вероятно, представляет собой фрагмент древней рифтогенной структуры, обладающей повышенной подвижностью и проницаемостью и насыщенной магматическими образованиями (пикритом и продуктами его эволюционирования по мере продвижения магматической колонны к дневной поверхности) [Долгаль и др., 2006].

В составе продуктов магматизма преобладают неизмененные или слабоизмененные пикриты (коромантийный расплав, перидотиты), характеризующиеся высокой плотностью и весьма низкими магнитными свойствами (железо присутствует только в силикатной форме, ферромагнитные минералы практически отсутствуют). Предположительно данная петрофизическая

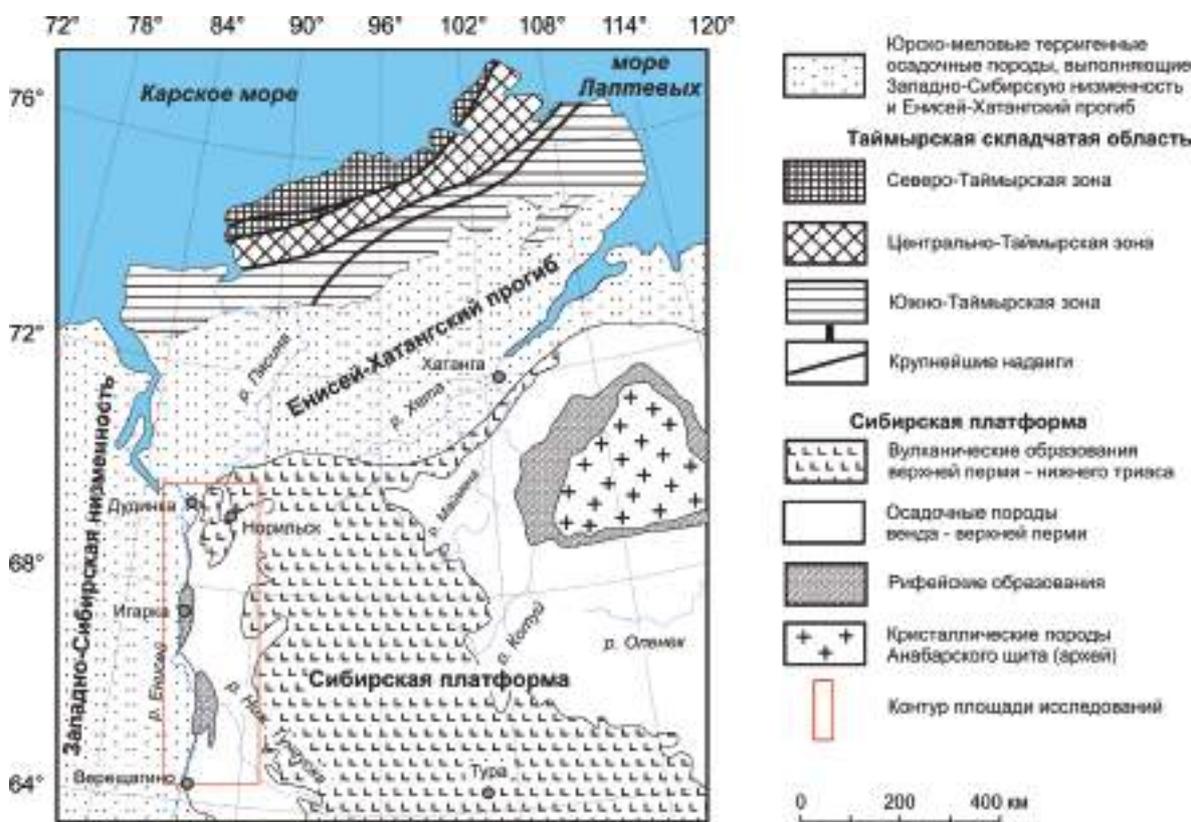


Рис. 4.10. Обзорная карта севера Центральной Сибири.

ассоциация пород формировалась в условиях глубинного мантийного термодинамического режима при температуре выше 1000°C и давлении от 2 МПа и выше. Этим, вероятно, объясняется пространственная корреляция повышенных значений поля силы тяжести и низкого магнитного поля в пределах рассматриваемой магмоактивной зоны. Площадь, на которой заданы значения гравитационного поля в редукции Буге, составляет около 86 тыс. км²; сеть точек – 10×10 км (рис. 4.11а).

С целью ослабления влияния криволинейности поверхности измерения поля и подавления аномалий-помех, обусловленных верхней частью геологического разреза, наблюдаемые значения гравитационного поля предварительно были пересчитаны на уровень 1600 м, близкий к максимальной высотной отметке рельефа земной поверхности на территории исследований. В качестве элемента замощения выбран куб со стороной 10 км. После выполне-

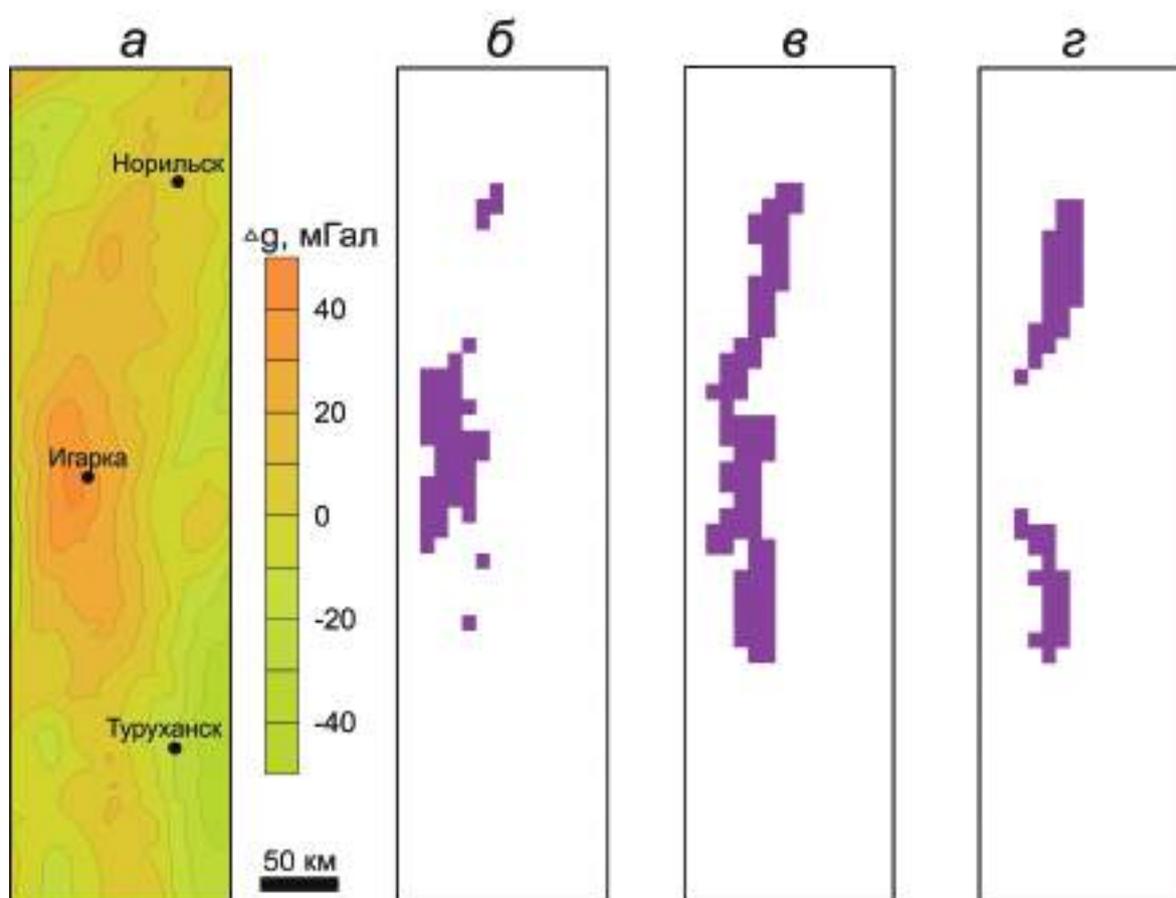


Рис. 4.11. Норильско-Игарско-Верещагинская аномальная зона (а) и горизонтальные срезы ее источников на глубинах 15 (б), 25 (в), 35 (г) км.

ния 190 итераций алгоритм вышел на невязку исходного (пересчитанного в верхнее полупространство) и модельного полей, составляющую 2,57 мГал.

По результатам гравитационного моделирования можно говорить о предположительных параметрах рудогенерирующей палеорифтовой структуры, насыщенной магматическими образованиями, суммарный объем которых составил около 190 тыс. км³. Сложно построенный аномалиеобразующий объект с эффективной плотностью 0,15 г/см³ имеет, согласно решению обратной задачи, дугообразную в плане форму, крутое падение на восток и прослеживается до глубин порядка 50 км (рис. 4.11б–г).

Пример 4.7. Рассмотрим результаты применения обобщенного алгоритма РНК при интерпретации материалов площадной гравиметрической съемки масштаба 1:25 000, выполненной на Урале с целью поисков хромитов. Вытянутая в меридиональном направлении положительная локальная аномалия гравитационного поля с амплитудой более 2 мГал предположительно связана с интрузивным массивом ультраосновного состава каледонского возраста, перспективным на хромитовое оруденение (рис. 4.12а).

Решение обратной задачи получено с использованием регулярного замощения кубическими элементами со стороной 0,25 км. Достигнутая невязка полей составила 0,16 мГал. Построена модель аномалиеобразующего объекта с эффективной плотностью 0,25 г/см³, отождествляемого с крутопадающим перидотитовым массивом. Морфология массива охарактеризована серией меридиональных и широтных разрезов, а также горизонтальными срезами при шаге глубин 250 м (рис. 4.12б–г). Согласно расчетам, кровля массива залегает на глубинах 0,1–0,4 км, подошва – на глубинах 1,2–1,5 км; его блоковое строение предположительно обусловлено развитием постинтрузивных субширотных дизъюнктивных нарушений. Также следует отметить, что участки сравнительно неглубокого залегания кровли перидотитов, установленные по гравиметрическим данным, отвечают аномалиям магнитного поля ΔT с интенсивностью до 300–500 нТл. Это свидетельствует о развитии процессов серпентинизации пород в верхней части массива, что является благоприятным признаком для обнаружения хромитов.

Пример 4.8. Поделимся опытом применения обобщенного алгоритма РНК при интерпретации локальной гравитационной аномалии, зафиксированной при выполнении гравиметрической съемки масштаба 1:50 000 в пределах южной части Енисейского края – одной из наиболее значимых золоторудных провинций России. Аномалия отрицательного знака с амплитудой около 3,1 мГал имеет в плане близкую к эллипсоидальной форму, ее размеры составляют примерно 9,2×3,6 км (рис. 4.13). С высокой степенью достоверности можно предположить, что изучаемая аномалия создается мощной корой выветрива-

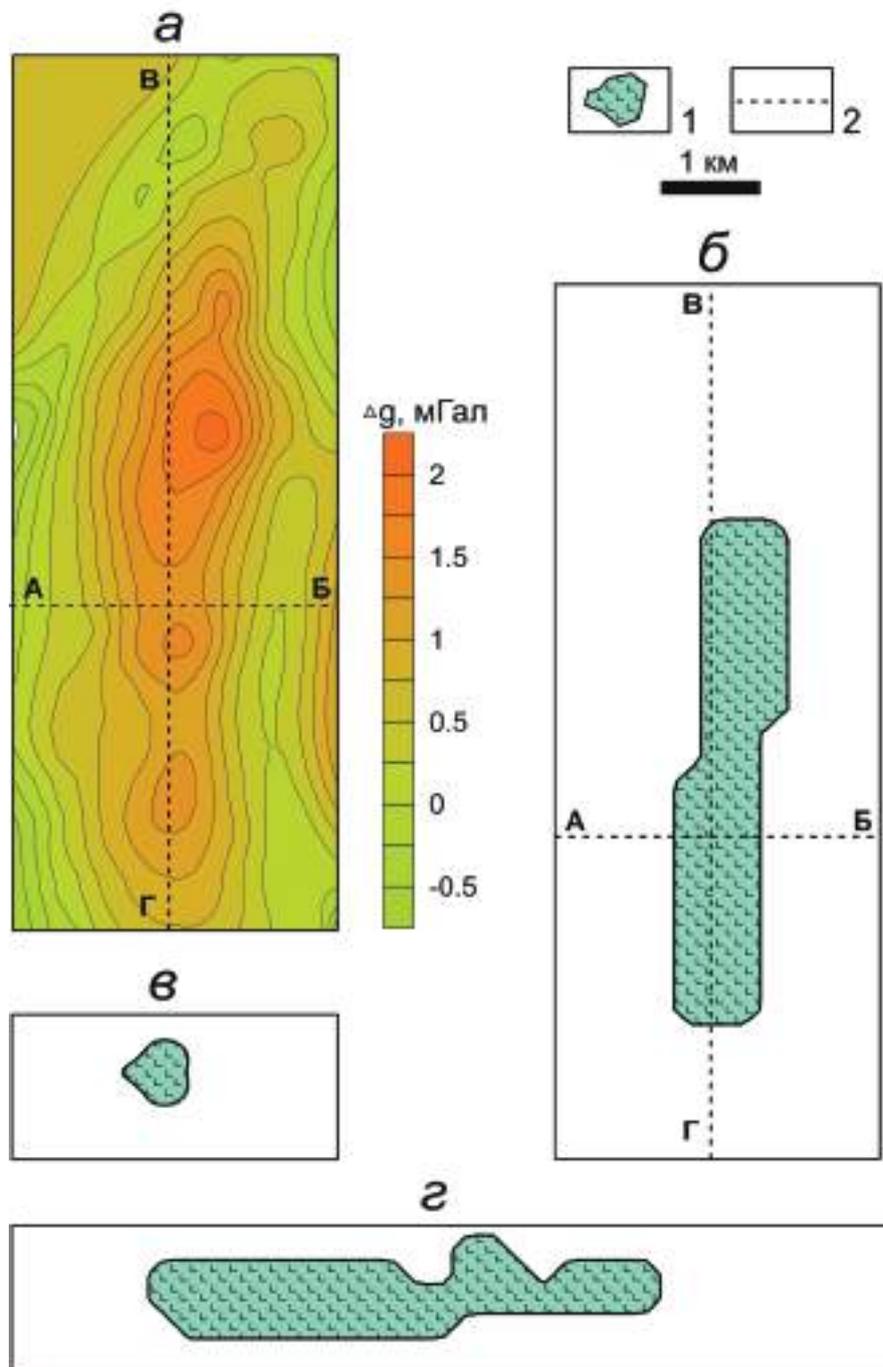


Рис. 4.12. Интерпретация гравитационного поля интрузивного массива, перспективного на хромитовое оруденение: *а* – карта локальной составляющей гравитационного поля; *б* – горизонтальный срез геологической среды на глубине 875 м; *в* – разрез по линии АБ; *г* – разрез по линии ВГ. 1 – контур массива перидотитов; 2 – интерпретационные профили.

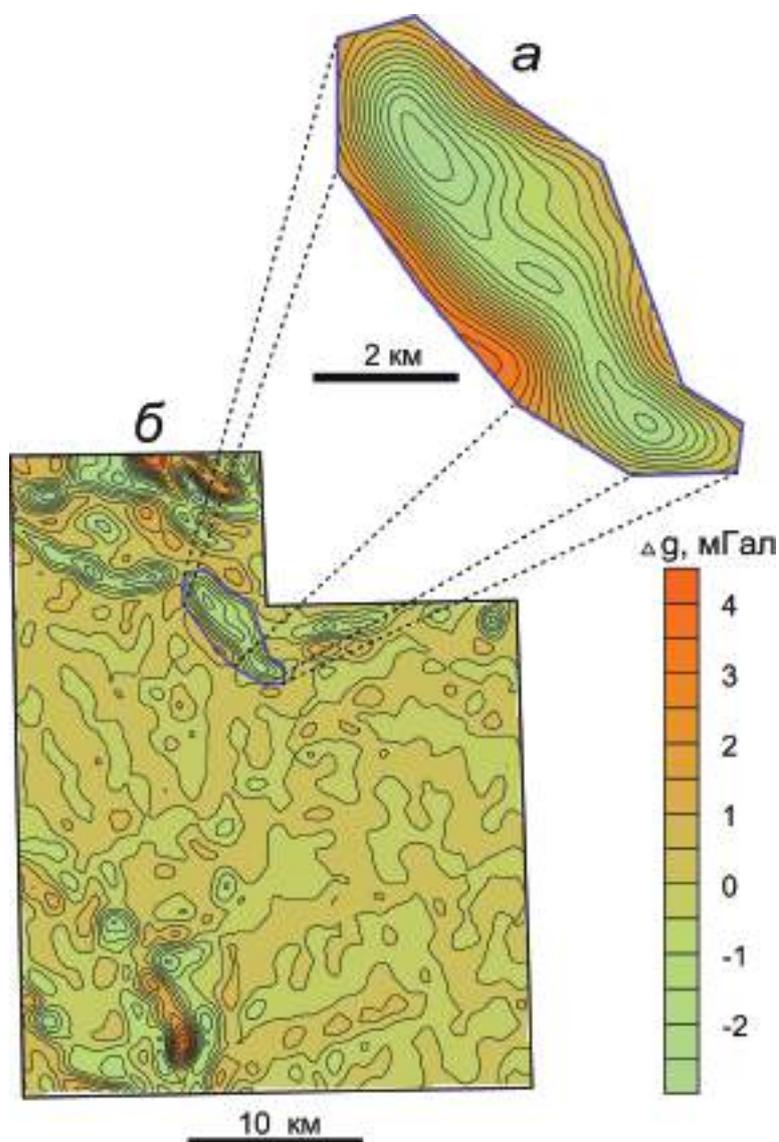


Рис. 4.13. Локальная аномалия силы тяжести, предположительно обусловленная древней корой выветривания (а) и ее местоположение на карте гравитационного поля (б). Южная часть Енисейского кряжа (по материалам Гравиметрической экспедиции №3).

ния. Объекты такого типа оцениваются как перспективные на обнаружение золотого оруденения, однако в этой части Енисейского кряжа они остаются недостаточно изученными.

Для интерпретации использовались материалы гравиметрической съемки в пределах участка, на котором расположена 451 точка измерения. Отрица-

тельная эффективная плотность аномалиеобразующего объекта принята равной $-0,4 \text{ г/см}^3$ (в абсолютном выражении примерно $2,35 \text{ г/см}^3$).

Замоещение изучаемой части пространства выполнено с помощью кубов со стороной 200 м. Алгоритму потребовалось около 400 итераций. Достигнутая невязка наблюденного и модельного полей составила 0,15 мГал, что сопоставимо с точностью гравиметрической съемки, включая помехи геологической природы.

Построенный возмущающий объект простирается на северо-запад при ярко выраженном крутом падении, имеет вытянутую форму и характеризуется максимальной глубиной залегания нижней кромки около 1,2 км (в юго-восточной части). По своим морфологическим особенностям и петроплотностным параметрам его вполне можно отнести к древней коре выветривания, перекрытой рыхлыми отложениями (рис. 4.14). Объекты подобного типа в настоящее время разрабатываются в пределах Олимпиадинского месторождения.

Пример 4.9. Аномалия $\Delta\hat{g}(x)$ обусловлена телами \hat{S}_1 и \hat{S}_2 , предположительно расположенными выше плоскости $z = 8 \text{ км}$ (рис. 4.15). Рассмотрим два случая: 1) тела имеют эффективные плотности одного знака: $\hat{\delta}_1 = 0,2 \text{ г/см}^3$ и $\hat{\delta}_2 = 0,3 \text{ г/см}^3$; 2) тела имеют эффективные плотности разного знака: $\hat{\delta}_1 = 0,2 \text{ г/см}^3$ и $\hat{\delta}_2 = -0,3 \text{ г/см}^3$. Считается также, что границы модельных носителей достаточно гладкие, а среднеквадратическое значение помех в измерениях аномалии, выполненных на горизонтальном профиле длиной 30 км с шагом 500 м, не превышает 0,1 мГал. В обоих случаях алгоритм использует мультипликативные зависимости (4.3).

В первом случае обобщенный метод РНК показал вполне удовлетворительные результаты. После выполнения 461 итерации он обеспечил невязку $\varepsilon = 0,029 \text{ мГал}$ (рис. 4.16а). В случае же разнознаковых плотностей $\hat{\delta}_1$ и $\hat{\delta}_2$ (рис. 4.16б) итерационный процесс РНК, как и можно было предвидеть, «пошел в разнос» – критерий прерывания итерационного процесса сработал лишь после 803 итераций (число итераций всегда прямо пропорционально мере построенных парциальных носителей). При этом невязка полей составила 0,149 мГал (в пять раз выше, чем в предыдущем случае). Отсюда вывод: решение обратных задач с разнознаковыми эффективными плотностями не всегда удается реализовать, используя резервы одного лишь обобщенного алгоритма РНК. Необходимы «обходные» пути их реализации, в частности, как мы установили, связанные с комплексированием концепции РНК и идеи разделения полей.

Пример 4.10. Возьмем модель источников аномалии из предыдущего примера – тела \hat{S}_1 и \hat{S}_2 плотности $\hat{\delta}_1 = 0,2 \text{ г/см}^3$ и $\hat{\delta}_2 = -0,3 \text{ г/см}^3$, и воспользуемся процедурой предварительного разделения полей. Значения поля не будем усложнять помехами. Это позволит нам лучше оценить разрешающие спо-

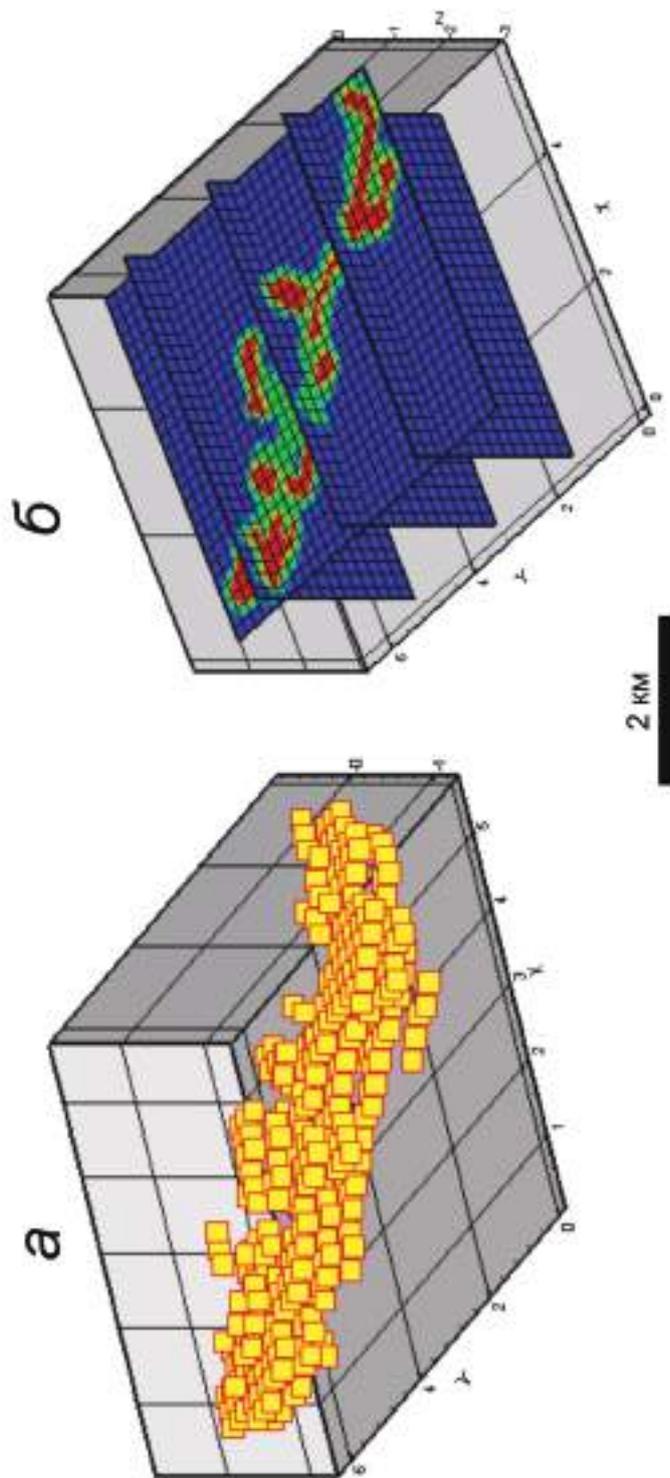


Рис. 4.14. Объемная модель коры выветривания (а), построенная по результатам количественной интерпретации гравитационного поля и ее сечения плоскостями $y = 1,36$ км, $y = 3,20$ км, $y = 5,18$ км и $z = 0,61$ км (б).

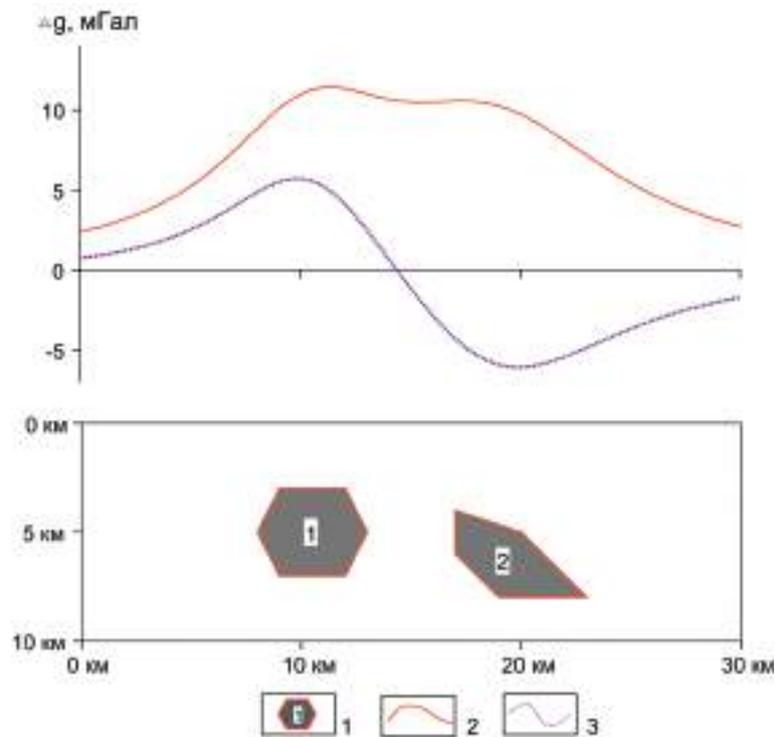


Рис. 4.15. Иллюстрация работы обобщенного метода РНК при эффективных плотностях одного знака (случай 1) и разных знаков (случай 2): 1 – аномалиеобразующие объекты; 2 – истинное поле в случае 1; 3 – истинное поле в случае 2.

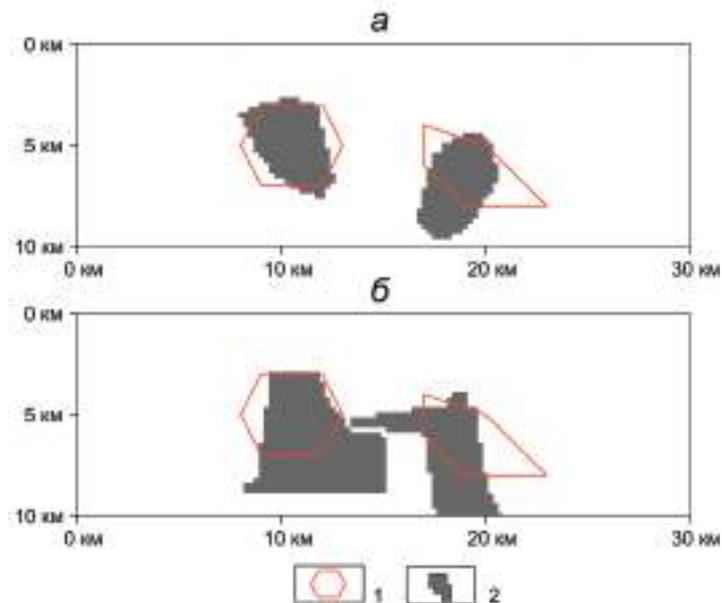


Рис. 4.16. Результаты решения обратной задачи: *а* – в случае 1, *б* – в случае 2: 1 – истинные тела \hat{S}_j ; 2 – подобранные тела Ω_j^* .

собности метода. Мы ограничились сетками Γ_k , расположенными в пределах глубин от 2 до 4 км с шагом $h = 250$ м ($k_{min} = 8, k_{max} = 24$).

Поскольку пример модельный, то можно установить, что наилучшие приближения $\Delta\tilde{g}_+(X)$ и $\Delta\tilde{g}_-(X)$ компонент $\Delta\hat{g}_+(X)$ и $\Delta\hat{g}_-(X)$ аномалии $\Delta\hat{g}(X)$ получены тогда, когда точечные источники помещаются в узлы сетки Γ_{19} , расположенной на глубине 4750 м. Прослеживается четкая зависимость качества разделения поля от глубины погружения пробных сеток Γ_k (табл. 4.1, рис. 4.17).

На рис. 4.18 приводится решение обратной задачи с использованием сетки Γ_{19} при требовании безотростковости искомых парциальных носителей. Значения достигнутой невязки составили 0,016 мГал и 0,090 мГал для положительной и отрицательной компонент поля $\Delta\hat{g}(X)$, соответственно. Значение невязки истинной и подобранной аномалий $\Delta\hat{g}(X)$ и $\Delta g^*(x) = \Delta g_+^*(x) + \Delta g_-^*(x)$ составило всего 0,091 мГал.

Мы оцениваем эти результаты как весьма обнадеживающие. Вместе с тем исследования в этом направлении, безусловно, необходимо продолжить. В

Таблица 4.1

Результаты разделения гравитационного поля на две составляющие с помощью истокообразной аппроксимации

Глубина погружения точечных источников, км	Точность восстановления поля $\Delta\tilde{g}_+(X)$, мГал	Точность восстановления поля $\Delta\tilde{g}_-(X)$, мГал
2	1,633	1,633
2,25	1,540	1,540
2,5	1,439	1,439
2,75	1,331	1,331
3	1,218	1,218
3,25	1,100	1,100
3,5	0,977	0,977
3,75	0,843	0,843
4	0,694	0,694
4,25	0,498	0,498
4,5	0,253	0,253
4,75	0,153	0,153
5	0,503	0,503
5,25	1,047	1,046
5,5	1,715	1,714
5,75	2,594	2,594
6	3,820	3,820

Жирным шрифтом выделены параметры, отвечающие сетке с номером k_{opt} .

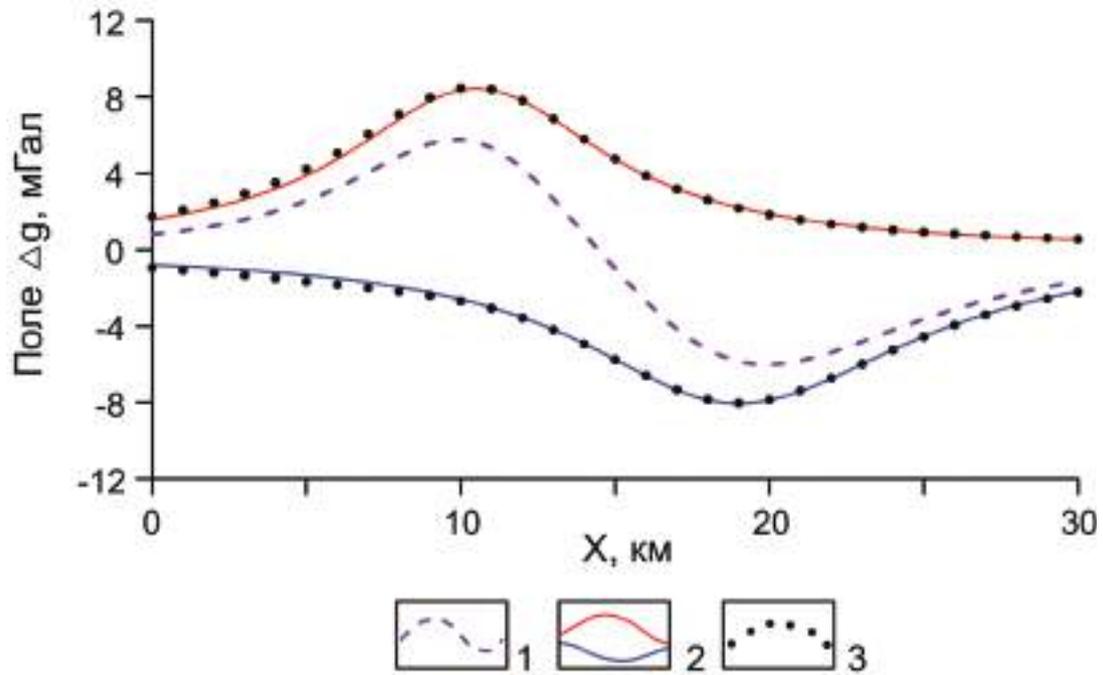


Рис. 4.17. Разделение гравитационного поля на две составляющие, одна из которых обусловлена источником положительной, а другая — источником отрицательной эффективной плотности: 1 — суммарное поле; 2 — аномальные поля от каждого из двух источников; 3 — восстановленные составляющие $\Delta\tilde{g}_+(x)$ и $\Delta\tilde{g}_-(x)$ гравитационного поля.

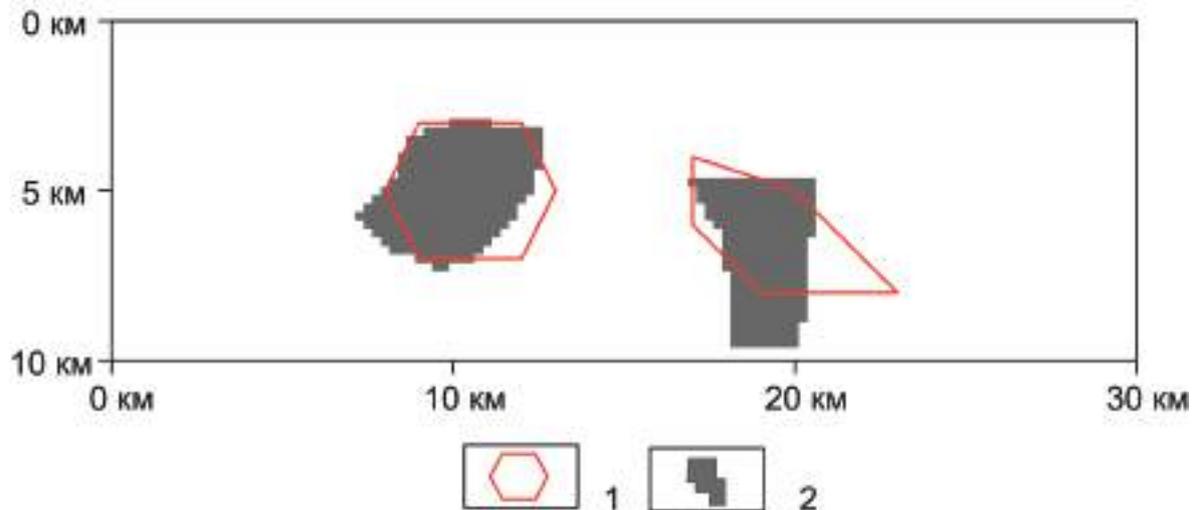


Рис. 4.18. Результаты интерпретации: 1 — истинные тела; 2 — построенные конфигурационные носители.

практических задачах при выборе глубин погружения пробных сеток Γ_k можно опираться на геологические сведения (например – о глубинах фундамента для платформенных территорий), на данные о мощности гравиактивного слоя, определенной статистическим путем [Глазнев и др., 2014], на предполагаемую среднюю глубину залегания возмущающих объектов в изучаемом разрезе.

Пример 4.11. На практике монтажный метод может использоваться в рамках более широкой технологической цепочки количественной интерпретации гравитационных аномалий. Мы рассмотрим это применительно к задаче поиска глубокозалегающих медно-никелевых руд в Норильском районе [Долгаль, 2002]. Физико-геологические условия Норильского района являются весьма сложными, что заведомо предполагает возможность широкого проявления приближенной эквивалентности.

Модель исходного поля Δg здесь можно представить в следующем виде: $\Delta g = \Delta g_{лок} + \Delta g_{стр} + \Delta g_{фон} + \varepsilon$, где $\Delta g_{лок}$ – поле неизвестных (подлежащих определению) тел; $\Delta g_{стр}$ – поле, обусловленное объектами с известными параметрами («структурная составляющая»); $\Delta g_{фон}$ – поле сторонних источников (региональный фон); ε – случайные помехи (геологические, инструментальные и т.п.).

Обобщенная физико-геологическая модель исследуемого плотностного разреза представляет собой субгоризонтальнослоистую среду, содержащую ряд локальных возмущающих тел. Наиболее контрастными плотностными границами слоистой среды являются:

- а) граница между рыхлыми мезо-кайнозойскими отложениями и толщей палеозоя (скачок плотности $\Delta\delta \in (0,50; 0,80)$ г/см³);
- б) граница между туфолоавовой толщей и терригенно-угленосными отложениями тунгусской серии ($\Delta\delta \in (0,10; 0,20)$ г/см³);
- в) граница между отложениями тунгусской серии и толщей осадочных отложений палеозоя ($\Delta\delta \in (0,10; 0,25)$ г/см³).

Внутри эффузивной толщи выделяется серия менее контрастных плотностных границ, конформных ее подошве. В качестве локальных возмущающих объектов выступают тектонически ослабленные зоны ($\Delta\delta \in (0,05; 0,30)$ г/см³), соленосные отложения девона ($\Delta\delta \in (0,30; 0,60)$ г/см³), различные типы интрузивных образований основного–ультраосновного состава ($\Delta\delta \in (0,10; 0,40)$ г/см³), ореолы контактово-метаморфических пород ($\Delta\delta \in (0,05; 0,15)$ г/см³) и т.п.

Медно-никелевое оруденение пространственно и генетически связано с дифференцированными интрузиями габбро-долеритов и приурочено к их придонным частям. Рудоносные интрузии имеют хонолитообразную форму и локализуются в пределах определенного стратиграфического интервала,

включающего в себя нижнюю часть туфолавовой толщи, отложения тунгусской серии и нижележащие породы девонского возраста преимущественно карбонатного состава. Вертикальная мощность дифференцированных интрузий измеряется десятками (и даже первыми сотнями) метров, ширина – сотнями метров, а длина достигает нескольких километров; их эффективная плотность колеблется в пределах 0,20–0,40 г/см³ в зависимости от состава вмещающих пород.

Предлагается осуществить декомпозицию алгоритма решения обратной задачи, предполагающую, в частности, разложение модели исследуемого геологического разреза на две компоненты: субгоризонтальнослоистую среду, формирующую поле Δg_{cmp} , и локальные геоплотностные неоднородности, ответственные за поле $\Delta g_{лок}$. Собственно технология моделирования геологических разрезов по гравитационному полю состоит из трех этапов.

На первом этапе – путем решения прямой задачи для слоистой модели среды – выполняется геологическое редуцирование наблюдаемого поля силы тяжести Δg , в результате которого исключается влияние Δg_{cmp} основных плотностных границ. При этом используются данные бурения и других геофизических методов, а также проводится решение 3D прямой задачи гравиразведки [Долгаль и др., 1995]. Геометрические параметры слоистой модели, как правило, удается охарактеризовать достаточно точно. В частности, погрешность в определении глубины залегания кровли отложений тунгусской серии по данным рудной сейсморазведки МОГТ и электроразведки ЗМПП не превышает $\pm 10\%$. В зависимости от имеющейся петрофизической информации каждому слою приписываются массы постоянной или переменной по латерали плотности. Точность определения поля Δg_{cmp} полностью определяется качеством построения используемой геоплотностной модели. Полученное после редуцирования поле $\Delta g^{раз} = \Delta g - \Delta g_{cmp}$ назовем разностным.

На втором этапе по полю $\Delta g^{раз}$ осуществляется построение геоплотностного разреза методом последовательного накопления и разрастания масс. Этот метод был разработан в Институте геофизики НАН Украины под руководством Е.Г. Булаха [Булах, Левашов, 1987]. Метод направлен на построение некоторого эквивалентного по полю распределения масс в узлах регулярной сети, покрывающей область поиска решения нелинейной обратной задачи. Соответственно, итоговым результатом построений является прямоугольная матрица эффективных плотностей, описывающая некоторую сеточную аппроксимацию исследуемого геологического разреза. Информация, хранящаяся в сеточной модели, оказывает в сочетании с геологическими сведениями существенную помощь при определении геометрических параметров источников поля. Результаты работы метода Е.Г. Булаха могут быть использованы, в частности, при построении начального приближения для монтажного метода и оценки регионального фона.

Есть смысл напомнить о возможностях метода Е.Г. Булаха на одном модельном примере (рис. 4.19), в котором путем последовательного накопления и разрастания масс построен геоплотностной разрез по полю, обусловленному тремя телами различной эффективной плотности ($\delta_1 = 0,25$ г/см³, $\delta_2 = 0,20$ г/см³, $\delta_3 = 0,15$ г/см³), осложненному линейным фоном $\Delta g_{\text{фон}} = 2 + 0,5x$. Эквивалентная модель, представленная в виде вертикальной карты изолиний эффективной плотности $\delta_{\text{эф}}$, позволяет приближенно определить местоположение источников локальной составляющей поля и оценить их плотности. Фоновая компонента поля восстанавливается при этом довольно точно.

Теперь, что касается непосредственно Норильского района. По составляющей поля $\Delta g^{\text{раз}}$ было построено распределение эффективной плотности $\delta_{\text{эф}}(x, z)$ в узлах сетки до глубины порядка 4 км. Нескомпенсированная низкочастотная составляющая поля $\Delta g^{\text{раз}}$ рассматривается в качестве ре-

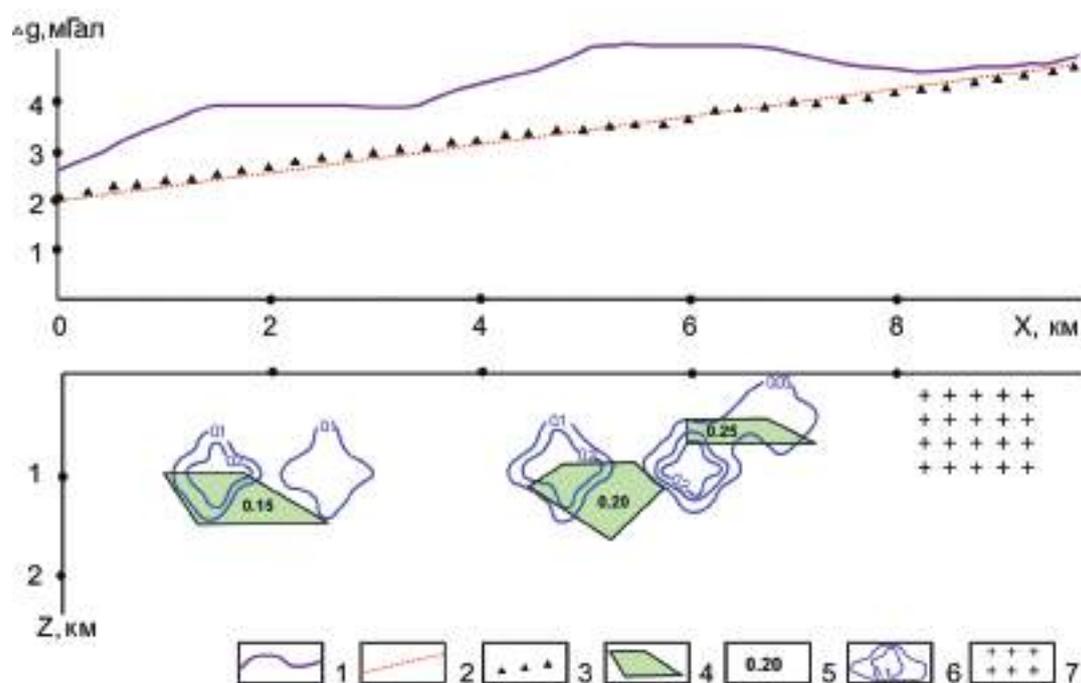


Рис. 4.19. Интерпретация гравитационного поля методом последовательного накопления и разрастания масс: 1 – суммарное гравитационное поле; 2 – фоновая составляющая $\Delta g_{\text{фон}} = 2 + 0,5x$; 3 – подобранная фоновая составляющая; 4 – аномалиеобразующие тела; 5 – значения эффективной плотности тел, г/см³; 6 – изолинии подобранных значений эффективной плотности, г/см³; 7 – фрагмент сеточной модели геоплотностной среды.

гионального фона $\Delta g_{фон}$, который в силу ограниченности размеров поисковых площадей можно считать линейным. Поле силы тяжести, выделенное после вычитания линейной фоновой компоненты, назовем остаточным: $\Delta g^{ост} = \Delta g^{раз} - \Delta g_{фон}$. Из теоретических соображений и опыта решения модельных примеров можно предположить, что это остаточное поле близко к полю от искомых возмущающих объектов $\Delta g^{ост} = \Delta g_{лок} + \varepsilon$, отягощенному случайными помехами измерений.

На третьем этапе выполняется количественная интерпретация остаточного поля силы тяжести $\Delta g^{ост}$ с использованием монтажного метода решения обратной задачи рудного типа. При этом используется полученное с помощью метода Е.Г. Булаха сеточное распределение масс, позволяющее приближенно охарактеризовать местоположение и плотности возмущающих объектов.

По результатам интерпретации установлено, что гравитационный эффект от дифференцированных интрузий усиливается за счет ореолов контакто-метаморфических пород и переуплотнения в виде «столба» вышележащей толщи эффузивных пород [Долгаль, 1993]. Зафиксирована высокая степень пространственной корреляции остаточных аномалий поля силы тяжести и вертикальной мощности северо-восточной ветви Талнахской интрузии, что можно объяснить лишь развитием мощных околоинтрузивных ореолов пород повышенной плотности ($\sim 0,2-0,25$ г/см³). В пользу этого предположения также свидетельствуют некоторые результаты петрофизических измерений, данные подземной гравиметрической съемки и опыт решения обратной задачи гравиразведки в линейной постановке по детально изученным геологическим разрезам в пределах месторождений медно-никелево-платиновых руд.

Влияние перечисленных выше факторов приводит к образованию *автолокализованных* гравитационных аномалий [Новоселицкий и др., 1979], что благоприятствует повышению разрешающих возможностей гравиразведки при выделении рудоперспективных объектов на глубинах 2,5–3,0 км. Под *автолокализацией* здесь понимается существенное увеличение амплитуды локальных аномалий над рудоперспективными объектами за счет уплотнения вмещающих их пород.

В этой связи рассмотрим следующие результаты имитационного моделирования (рис. 4.20). От залегающей на глубине 2,5 км рудоносной интрузии при наличии уплотнения вмещающих пород рассчитан теоретический аномальный эффект. Полученные данные используются для решения обратной задачи монтажным методом. При этом предполагается, что аномалия Δg обусловлена одним односвязным телом, выпуклым по направлениям координатных осей x и z . Кроме этого, задается отрезок, заведомо принадлежащий этому телу.

Мощность подобранного тела примерно в 5 раз превышает мощность самой интрузии, а значения эффективной плотности этих объектов совпадают. По мнению авторов, целесообразно при выполнении количественных расче-

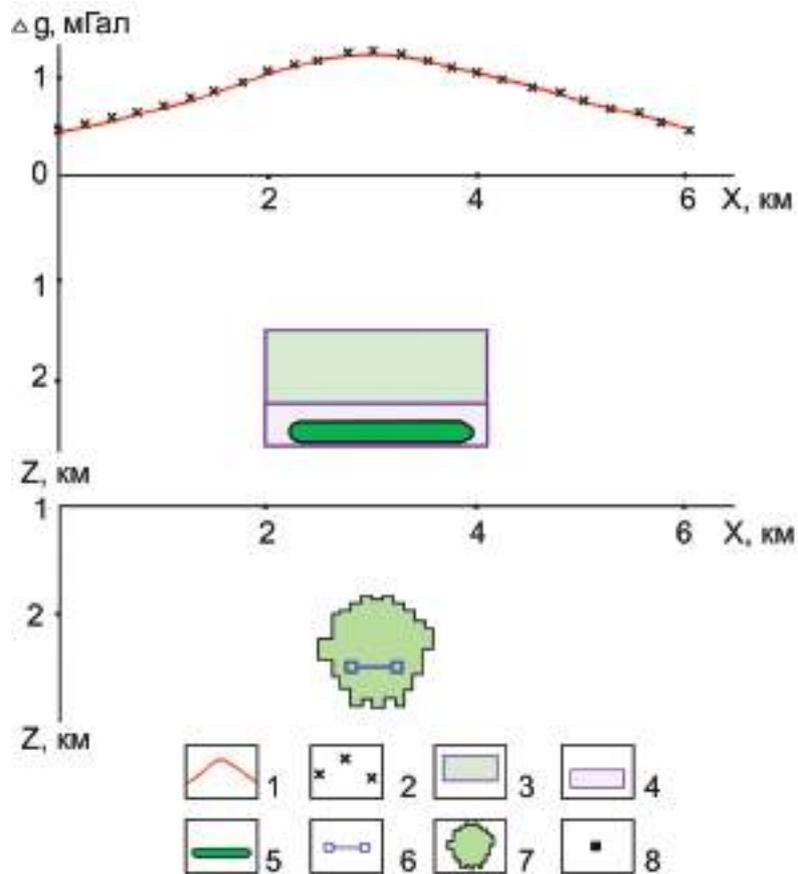


Рис. 4.20. Количественная интерпретация автолокализованной аномалии силы тяжести для рудоносной интрузии и уплотненных горных пород: 1 – суммарное гравитационное поле интрузии и уплотненных пород; 2 – поле подобранного объекта; 3 – надинтрузивная зона уплотненных горных пород, $\delta = 2,8$ г/см³; 4 – ореол контакто-метаморфических пород, $\delta = 2,85$ г/см³; 5 – рудоносная интрузия, $\delta = 3,0$ г/см³; 6 – отрезок, принадлежащий подбираемому телу; 7 – подобранный объект $\delta = 3,0$ г/см³; 8 – элемент замощения. Плотность вмещающей среды $\delta = 2,75$ г/см³.

тов ограничиваться подобными построениями без дальнейшего усложнения результирующих моделей поисковых объектов. Недостаточный объем априорной информации о характеристиках уплотнений вмещающих пород, при включении их в интерпретационную модель в виде ее отдельных компонентов, лишь расширяет область проявления эквивалентности в обратной задаче.

Очевидно, при решении практических задач для выделения дифференцированных интрузий под мощным чехлом эффузивных образований достаточно выделить в разрезе крупные, с размерами до 500–900 м по вертикали, неоднородности разреза, обладающие эффективной плотностью 0,2–0,3

г/см³. Такие неоднородности, располагающиеся в пределах рудоперспективного стратиграфического интервала, предлагается рассматривать в качестве геофизического поискового признака сульфидных медно-никелевых руд.

На рис. 4.21 приведен пример использования рассмотренной технологии по детально изученному разведочными скважинами профилю, пересекающему Талнахское месторождение медно-никелевых руд.

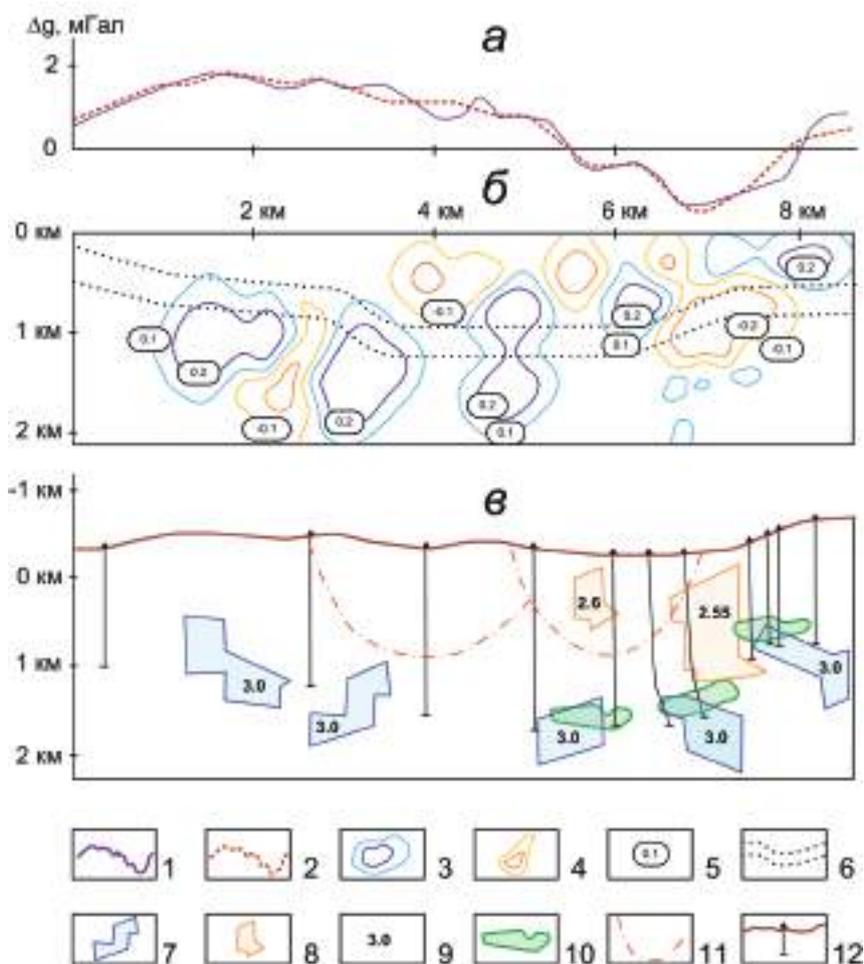


Рис. 4.21. Результаты моделирования геологического разреза Талнахского месторождения по гравитационному полю: *а* – графики полей; *б* – геоплотностной разрез, построенный методом накопления и разрастания масс, *в* – модель разреза, построенная монтажным методом: 1 – остаточная составляющая поля $\Delta g^{\text{ост}}$; 2 – поле подбранной модели; изолинии эффективной плотности: 3 – положительной, 4 – отрицательной; 5 – значения эффективной плотности, г/см³; 6 – горизонт пород тунгусской серии; подбранные тела, обладающие: 7 – положительной, 8 – отрицательной эффективной плотностью; 9 – плотность подобранных тел, г/см³; 10 – рудоносные интрузии; 11 – разрывные нарушения; 12 – буровые скважины. Плотность вмещающих пород – 2.75 г/см³.

На подобранной модели разреза зафиксирована мощная зона разуплотнения горных пород, приуроченная к Норильско-Харалахскому рудоконтролирующему разлому, и три объекта повышенной плотности, отвечающие известным дифференцированным интрузиям. Параметры этих объектов подтверждают ранее высказанное предположение о наличии уплотнения горных пород вблизи интрузий. Скважиной, пересекающей объект повышенной плотности, находящейся в левой (северо-западной) части профиля, вскрыта зона контактово-метаморфизованных пород, свидетельствующая о близости магматического тела (предполагаемой рудоперспективной дифференцированной интрузии). Другой объект отвечает неполно дифференцированной Нижнеталнахской интрузии основного состава.

Глава 5

ПЕРСПЕКТИВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ МОНТАЖНОГО ПОДХОДА

Из материалов предыдущей главы читатель мог сделать вывод, что обобщенные алгоритмы РНК позволяют кардинально расширить область практического применения монтажного подхода в сравнении с теми постановками обратной задачи, которую охватывал предшественник этих алгоритмов – базовый метод регулируемой направленной кристаллизации [Страхов, Лапина, 1976₁], включая его незначительные модификации. Модель источников поля в виде совокупности связных тел \hat{S}_j и широкий спектр априорных ограничений, доступный учету в обобщенных алгоритмах РНК, достаточно полно охватывают практические постановки обратных задач рудного типа. Однако это не закрывает проблему дальнейшего совершенствования метода РНК и монтажного подхода к обратным задачам в целом. Поводом для инициирования дальнейших исследований в этом направлении может стать стремление *повысить надежность* выводов, которые будут сделаны на основании результатов решения обратной задачи. Собственно, проблема надежности возникает в связи с недостатками принципа локальной оптимизации, обойтись без которого (не рискуя потерять свою эффективность) монтажные алгоритмы не в состоянии.

Вовсе не обязательно замыкаться в границах концепции регулируемой направленной кристаллизации – концепцию монтажного подхода следует трактовать значительно шире, чем она представлена в обобщенных алгоритмах РНК. Концепция регулируемой направленной кристаллизации – это лишь одна из возможных форм структурировании итерационных монтажных алгоритмов. В самой общей и лаконичной форме сущность монтажного подхода в обратных задачах рудного типа можно передать следующими словами: отправляясь от произвольного нулевого приближения Ω_0 , организовать конечный итерационный процесс, на каждом шаге k которого очередное конфигурационное приближение

$$\Omega_k = \bigcup_{j=1}^m \Omega_{j,k}, \quad k \geq 1 \quad (5.1)$$

образуется из предыдущего приближения Ω_{k-1} путем *локального преобразования отдельных фрагментов* одного или нескольких парциальных носителей $\Omega_{j,k-1}$; результатом итерационного процесса должна стать конфигурация

$$\Omega^* = \bigcup_{j=1}^m \Omega_j^*, \quad (5.2)$$

удовлетворяющая (совместно с плотностями $\hat{\delta}_j$ масс, распределенных по парциальным носителям Ω_j^*) всей априорной информации, включая ограничение на максимально допустимое значение невязки наблюдаемого и модельного полей.

Вне всякого сомнения, обобщенным алгоритмам РНК – как одной из форм реализации концепции монтажного подхода – присущ ряд признаков, которые позволяют этим алгоритмам претендовать на довольно высокую степень общности. Действительно, эти алгоритмы допускают полную свободу выбора структуры замощения и способны к одновременному учету практически всех известных типов априорной информации об источниках поля (в том числе и ограничений топологического характера). Теоретически они позволяют работать как с 2D так и 3D геоплотностными моделями, в которых присутствует произвольное число локальных источников поля. Алгоритмы не налагают практически никаких ограничений на нулевое приближение и даже способны в определенной степени корректировать его в автоматическом режиме без вмешательства интерпретатора. И, тем не менее, *регулируемая направленная кристаллизация* в том виде, каком она присутствует в обобщенных алгоритмах РНК, – это всего лишь одна из возможных форм *локального преобразования отдельных фрагментов носителя*, которое можно понимать значительно шире, чем в этих алгоритмах.

Обобщенные алгоритмы РНК практикуют *простейший вариант перехода* от конфигурации Ω_{k-1} к конфигурации Ω_k . Ядро $Я(\Omega_k)$ текущего приближения к искомому приближенному решению Ω^* обратной задачи образуется путем *наращивания ядра* $Я(\Omega_{k-1})$ предшествующего приближения *всего на один элемент замощения* V_n , взятый из оболочки $O(\Omega_{k-1})$ *локально-оптимальным образом* при соблюдении *принципа наследования* конфигурацией Ω_k всех тех свойств конфигурации Ω_{k-1} , которые прописаны априорной информацией. Предполагается, что выбор наилучшего приближения Ω_k происходит в результате *простого перебора всевозможных вариантов* перехода от конфигурации Ω_{k-1} к конфигурации Ω_k . По сути, при такой структуре итерационного шага преобразования касаются лишь какого-то одного из парциальных модельных

носителей $\Omega_{j(0),k-1}$ – все остальные локальные носители $\Omega_{j(0),k-1}$, $j = 1, 2, \dots, m$, $j \neq j(0)$ без изменения переходят в очередное приближение Ω_k . Частный характер концепции РНК виден в том, что отмеченные выше курсивом признаки обобщенных алгоритмов РНК не фигурируют как обязательные в приведенном выше лаконичном описании монтажного подхода.

Но есть ли вообще какой-то смысл поднимать вопрос об актуальности дальнейшего развития методов, реализующих идею монтажного подхода (во всяком случае, для решения обратных задач рудного типа), если и при той структуре, которая практикуется в обобщенных алгоритмах РНК, удастся достичь многого? В самом деле, как было показано в предыдущей главе, благодаря столь простой структуре итерационного шага для обобщенного алгоритма РНК не представляет особой сложности соблюдать *принцип наследования*. При любых типах априорных ограничений на геометрию и пространственное положение источников поля проблема их учета и гарантия того, что итоговая конфигурация Ω^* будет им отвечать, по существу решается уже на этапе задания приемлемого нулевого приближения Ω_0 . Если же нулевое приближение, построенное по априорным данным (к примеру, результатам бурения), не удовлетворяет некоторым (прежде всего топологическим) ограничениям, оно дополняется до минимальной (либо близкой к ней) приемлемой конфигурации с помощью процедур, изложенных во второй главе.

По сути остается одно – вопросы, относящиеся к величине достигнутой невязки. Основная причина вводить в монтажные алгоритмы другие структуры итерационного шага как раз и заключается в стремлении еще более повысить надежность выводов, которые могут быть сделаны по результатам интерпретации с помощью этих алгоритмов. Помимо надежности обнаружения алгоритмом одного из допустимых решений обратной задачи (разумеется, если таковые вообще существуют при заданной системе априорных ограничений), речь также идет и о надежности установления факта самого существования допустимых вариантов интерпретации при заданных априорных ограничениях. Мы разграничили оба аспекта проблемы надежности еще и потому, что в аддитивных методах решения обратных задач отрицательный ответ на вопрос о существовании допустимых решений, обладающих данными свойствами, находит непосредственное выражение в итоговых результатах интерпретации.

Таким образом, поскольку учет всех априорных ограничений на геометрию и пространственное положение возмущающих объектов не представляет труда уже для обобщенных алгоритмов РНК, то все усилия необходимо направить на решение проблемы надежности, так или иначе связанной с достижимым значением невязки. Совершенно ясно, что мы облегчим монтажному алгоритму его задачу, если будем разнообразить возможные траектории движения от нулевого приближения к искомому решению, то есть пополним набор структур итерационного шага, которыми может воспользоваться алгоритм.

Вернемся к тому, что проблема надежности идентификации заданной системы априорных ограничений на модель геологической среды и поля на предмет существования хотя бы одного допустимого решения обратной задачи, отвечающего этим ограничениям, особо актуальна для аддитивных технологий интерпретации. В аддитивных технологиях – а они требуют предварительного построения достаточно представительного подмножества Q_0 допустимых решений – монтажному методу при поиске каждого из них приходится решать более сложную задачу, чем та, которая возникает в традиционных технологиях, где требуется найти одно допустимое решение. Суть в том, что в случае аддитивных технологий по мере формирования множества Q_0 необходимо искать очередное допустимое решение, которое не только бы удовлетворяло всем априорным ограничениям, продиктованным априорной информацией, но и обладало неким дополнительным свойством. Причем заведомо не будет ясно, есть ли вообще такие допустимые решения. Но и это не все. Монтажному методу здесь будут *наверняка* предъявляться для идентификации случаи, когда множество допустимых решений, обладающих некоторым дополнительным свойством, будет либо пусто, либо достаточно узким. И эту ситуацию методу необходимо будет распознать. Возможность понизить невязку даже на несколько процентов в сравнении с той, что достигается с помощью обобщенного алгоритма РНК, может при этом иметь определяющее значение.

Обозначенную проблему будем пытаться решить за счет разумного усложнения итерационного шага, освобождая монтажный метод от некоторых признаков обобщенных алгоритмов РНК.

Можно назвать еще одно перспективное, на наш взгляд, направление развития монтажных методов. По своему первоначальному предназначению это методы решения обратных задач гравиразведки и магниторазведки *сугубо рудного типа* в рамках *парциальной модели экспериментальных данных* (по одной из компонент гравитационного или магнитного поля) при *заданных физических параметрах* источников аномалии. Снять первое из выделенных курсивом ограничений – означает распространить монтажные методы на более сложные постановки обратных задач, в которых «рудная компонента» была бы в них лишь одной из составляющих. Речь, таким образом, идет о структурно-рудных обратных задачах. Для начала, хотя бы в случае одной границы раздела петрофизических свойств. Снятие второго ограничения означает возможность совместной интерпретации различных производных гравитационного и магнитного потенциала. Наконец, снять последнее из названных ограничений означает переход к более адекватным постановкам обратных задач, когда физический параметр (эффективная плотность, эффективная намагниченность) каждого из парциальных источников в точности не известен. По сути, ставится вопрос о распространении монтажного подхода на смешанные постановки обратных задач.

Постановки обратных задач гравиразведки и магниторазведки, свободные от каждого из трех выделенных ограничений, рассматривались частично в работах [Балк, Балк Т., 1995, 1996], а также авторами монографии совместно с Л.А. Христенко [Балк и др., 2011₃, 2012₃]. В этой главе данные исследования получают дальнейшее развитие. Тем не менее, мы обязаны отметить, что новые версии монтажных алгоритмов изучены пока в меньшей степени, чем обобщенные алгоритмы РНК. Поэтому некоторые наши предложения носят отчасти постановочный характер, относиться к ним надо как к «протоколу о намерениях» и предложению другим исследователям присоединиться к изучению возможностей монтажного подхода.

5.1. Выход за рамки концепции РНК

Как уже говорилось, идея усложнения структуры монтажных методов с выходом за рамки концепции РНК преследует одну цель – повысить шансы правильно идентифицировать ситуацию, в которой могут иметь место два исхода: первый – множество допустимых решений Q не пусто, хотя возможно и довольно узко (в этом случае алгоритм обязан найти любое из этих решений); второй – множество Q пусто.

Если априорные ограничения непротиворечивы и множество Q не пусто, успех применения любого алгоритма решения обратной задачи, включая методы из класса монтажных, зависит от исхода противостояния двух факторов. На одной чаше весов – многоэкстремальность нелинейных обратных задач. В нашем случае сюда надо добавить локально-оптимальный характер метода, когда последний настроен лишь на оптимизацию текущего шага k , а также не всегда удачный выбор связующих зависимостей (4.3). На другой – приближенная (практическая) эквивалентность, которая в данной ситуации выступает в роли союзника, готового на каждом шаге k скорректировать итерационный процесс и вывести его на одно из допустимых решений Ω^* .

В случае односторонне направленного итерационного процесса РНК, когда элементы замощения, «неудачно» включенные в ядро текущего приближения на любой из итераций, остаются в итоговой конфигурации Ω^* , подобная корректировка в принципе еще возможна, если за предыдущие $k - 1$ шагов итерационный процесс – в силу своего локально-оптимального характера – не успел пройти «точку невозврата». Последнее означает, что среди допустимых решений Ω_m^* остались еще те, что удовлетворяют включению $\Omega_{k-1} \subset \Omega_m^*$. Новые, более сложные структуры итерационного шага призваны исключить возникновение такого рода «точек невозврата» (или хотя бы понизить вероятность их встречи), с тем чтобы у метода оставался (пусть теоретический) шанс исправить результаты предыдущих итераций, и это позволило бы достичь меньшей невязки наблюдаемого и подобранного полей.

5.1.1. Метод регулируемой направленной раскristализации

Рассмотрение новых модификаций монтажных методов начнем с базового метода *регулируемой направленной раскristализации* (РНР). Так же как и базовый метод РНК, базовый метод РНР имеет простейшую структуру итерационного шага и рассчитан на решение обратной задачи гравиразведки для локального (связного) тела \hat{S} известной эффективной плотности $\hat{\delta} > 0$. В базовом методе РНР каждое очередное приближение Ω_k к искомому связному носителю Ω^* образуется – в отличие от РНК – не путем *наращивания* ядра $\mathcal{Y}(\Omega_{k-1})$ предшествующего конфигурационного приближения на один элемент замощения, взятый из оболочки $O(\Omega_{k-1})$, а путем *изъятия* из границы $\Gamma(\Omega_{k-1})$ (также одного) элемента замощения:

$$\mathcal{Y}(\Omega_k) = \mathcal{Y}(\Omega_{k-1}) \setminus \{V_n\}, V_n \in \Gamma(\Omega_{k-1}). \quad (5.3)$$

В методе РНР последовательность текущих приближений Ω_k к искомому решению Ω^* обратной задачи также, как и в случае метода РНК, образует цепочку вложенных множеств, но теперь уже убывающих по мере Лебега. Если в базовом методе РНК нулевым приближением служит одиночный элемент замощения $V_{n(0)}$, предположительно принадлежащий возмущающему телу \hat{S} , то в базовом методе РНР нулевым приближением служит по возможности близкая к минимальной конфигурация Ω_0 , заведомо содержащая в себе носитель \hat{S} . Последовательность локально-оптимальных плотностей δ_k^* здесь имеет, в отличие от метода РНК, монотонно возрастающий характер. Критерием завершения итерационного процесса РНР на некотором шаге $k = k(0)$ является неравенство $\delta_{k(0)}^* > \hat{\delta}$, а признаком достижения допустимого решения Ω^* – выход на приемлемое значение невязки.

Если в случае базового метода РНК свойство связности предшествующего приближения Ω_{k-1} наследуется конфигурацией Ω_k автоматически, то в случае базового метода РНР изъятие одного элемента замощения из границы $\Gamma(\Omega_{k-1})$ связной конфигурации может привести к потере связности. И напротив, если наращивание ядра односвязной конфигурации Ω_{k-1} на один элемент замощения $V_n \in O(\Omega_{k-1})$ может привести к неодносвязной конфигурации $\Omega_{k-1} \cup V_n$, то в методе РНР свойство односвязности наследуется автоматически.

В общих чертах идея использования обратного к РНК итерационного процесса была высказана в работе [Балк и др., 1994]. Фактически эта идея была реализована в виде *базового метода РНР* в работе [Долгаль, Мичурин, 2010].

У читателя, безусловно, возникнет вопрос: коль скоро был построен своего рода антипод базовому методу РНК, то должна быть возможность построить и обобщенный алгоритм РНР, также рассчитанный на решение обратной задачи для модели источников аномалии в виде совокупности локальных связных тел

$\widehat{S}_j, j = 1, 2, \dots, m$ различной эффективной плотности $\widehat{\delta}_j$. И в продолжение вопроса: не будет ли такой алгоритм более эффективен, чем обобщенный алгоритм РНК?

Во всяком случае, чтобы обобщенный алгоритм РНР оказался конкурентоспособен, необходимо вменить ему в обязанности учет всех типов априорной информации, которые доступны обобщенному алгоритму РНК. Что касается контроля за выполнением условия наследования топологических особенностей конфигурации при ее «локальном» изменении, то здесь, так же как и в случае с обобщенным алгоритмом РНК, можно воспользоваться результатами, описанными во второй главе. Что касается остальных ограничений, то алгоритм РНР как «зеркальный» по отношению к алгоритму РНК требует и «зеркальных» способов их учета.

Прежде всего надо определиться с начальными приближениями $\Omega_{j,0}^*$ к искомым парциальным носителям $\Omega_j^*, j = 1, 2, \dots, m$, построенными по априорной информации. Если принять во внимание пространственные области S_j^-, S_j^+ и D_j , фигурирующие в ограничениях $\widehat{S}_j \cap S_j^- = \emptyset, \widehat{S}_j \supset S_j^+$ и $\widehat{S}_j \subset D_j$ (см. постановки обратной задачи для обобщенного алгоритма РНК), то логично в качестве каждого парциального нулевого приближения $\Omega_{j,0}^*$ брать конфигурационную аппроксимацию области $D_j \setminus S_j^-$. Тогда *пробными* многосвязными конфигурационными приближениями к искомому носителю

$$\Omega^* = \bigcup_{j=1}^m \Omega_j^*, \quad (5.4)$$

из которых впоследствии будет сформировано множество Π_k допущенных к сравнению вариантов перехода от конфигурации Ω_{k-1} к конфигурации Ω_k , станут все конфигурации, полученные путем изъятия одного элемента замощения из границы любой парциальной конфигурации $\Omega_{j,k-1}$ при условии, что этот элемент не принадлежит ядру конфигурации Ω_j^+ .

Не характерная для метода РНК ситуация возникает в связи с учетом ограничений на максимально допустимые размеры по вертикали и латерали парциальных конфигурационных носителей. В случае обобщенного алгоритма РНР – во всяком случае, на некоторых первых итерациях – эти ограничения могут не выполняться (размеры текущих конфигураций $\Omega_{j,k}$ будут превосходить максимально допустимые) в силу объективных причин и ни о каком принципе наследования очередным приближением свойств носителя, прописанных в априорной информации, говорить не придется. Мало того, если не предпринять специальных мер, то может оказаться, что критерий завершения итерационного процесса сработает раньше, чем размеры модельных носителей достигнут, наконец, приемлемых значений. Эти специальные меры могут заключаться в том, что отбор наилучшего варианта перехода от Ω_{k-1} к Ω_k осуществляется среди тех, где размеры соответствующего парциального носителя, превышающие допустимое значение, в обязательном порядке уменьшаются.

Тем не менее, в определенных случаях концепция РНР может оказаться эффективнее своего прототипа, во всяком случае, когда речь идет о базовом методе РНР. И это подтверждают численные расчеты. Метод РНР может иметь определенные технологические преимущества перед методом РНК при моделировании эшелонированных по вертикали геоплотностных неоднородностей, локализованных в определенных горизонтах геологического разреза. Приуроченность этих неоднородностей к определенным слоям или структурам выявляется уже на начальной стадии интерпретационного процесса при построении нулевых приближений.

При всем том, что было сказано в адрес метода РНР, основное его предназначение мы видим в том, чтобы корректировать на отдельных этапах итерационного процесса РНК текущие приближения Ω_k за счет «обратного хода», когда, прежде чем перейти к новому приближению, из ядра $Я(\Omega_k)$ изымается некоторое число элементов замощения в соответствии с принципом работы алгоритма РНР. Эту возможность мы рассмотрим в следующем разделе главы.

5.1.2. Метод регулируемой направленной перекристаллизации

Оба метода – РНК и РНР – имеют заметный изъян. В базовом и обобщенном методах РНК элемент замощения V_n , однажды «неудачно» помещенный в ядро текущего приближения, автоматически попадает в ядро итоговой конфигурации Ω^* . Аналогичная ситуация и с методом РНР: элемент замощения, «неудачно» изъятый из ядра текущего приближения, уже не имеет шансов попасть в ядро конфигурации Ω^* . Термин «неудачно» связан с тем, что итерационные процессы РНК и РНР имеют локально-оптимальный характер и не гарантируют достижения абсолютного минимума невязки наблюдаемого и модельного полей. Вполне возможна ситуация, когда достаточно было на некотором шаге k взять не самое лучшее по невязке приближение, как окончательная невязка при выходе из итерационного процесса оказалась бы ниже той, что получена при «правильном» использовании этих методов.

Другими словами, локальный успех (снижение невязки) на некотором шаге k , достигнутый за счет включения в ядро $Я(\Omega_{k-1})$ некоторого элемента замощения $V_n \in O(\Omega_{k-1})$, может в конечном итоге не компенсировать потери (опять же, в терминах величины невязки), которые метод РНК несет на дальнейших итерациях из-за того, что этот элемент будет находиться в ядрах последующих приближений. Поскольку ядро приближенного решения обратной задачи неминуемо будет содержать элементы замощения, не принадлежащие истинному носителю, и наоборот, это ядро не досчитается каких-то элементов, являющихся фрагментами истинного носителя, возникает определенная коллизия. Не всегда даже обязательно, чтобы с целью понижения достигнутой

невязки некоторый элемент V_n , который в действительности не принадлежит истинному носителю, вообще не вошел в ядра всех текущих приближений (и, в конечном счете, в ядро $Y(\Omega^*)$). Просто издержки были бы много меньше, если бы это хотя и произошло, но на более поздних итерациях, позволив итерационному процессу в целом пойти по иной, более выгодной «траектории». Как ни странно, аналогично можно высказаться и в отношении элементов замощения, которые действительно являются фрагментами носителя \hat{S} . Здесь тоже важно, чтобы эти элементы если уж вошли в ядро текущего приближения, то не на всякой итерации, а на нужной. Больше того, начиная с некоторого шага итерационный процесс может пойти по такой «траектории», что с точки зрения минимизации окончательной невязки было бы лучше, чтоб отдельные элементы замощения, в действительности принадлежащие истинному носителю, *не вошли* в ядра последующих приближений Ω_k . Таковы издержки принципа локальной оптимальности.

Аналогично обстоят дела и с методом РНР. К чему может привести отмеченный выше недостаток, лучше уже сейчас объяснить количественно на примере.

Пример 5.1. Источник аномалии Δg – тонкий приповерхностный пласт \hat{S} эффективной плотности $0,25 \text{ г/см}^3$ (рис. 5.1). Для чистоты эксперимента он в точности совпадает с одной из конфигураций $\hat{\Omega}$, построенной на замощении плоскости квадратами. Интерпретация с помощью базового метода РНК осуществляется по точному полю. Нулевое приближение – центр кристаллизации – указан на рис. 5.1а. Итерационный процесс завершился при значении подо-

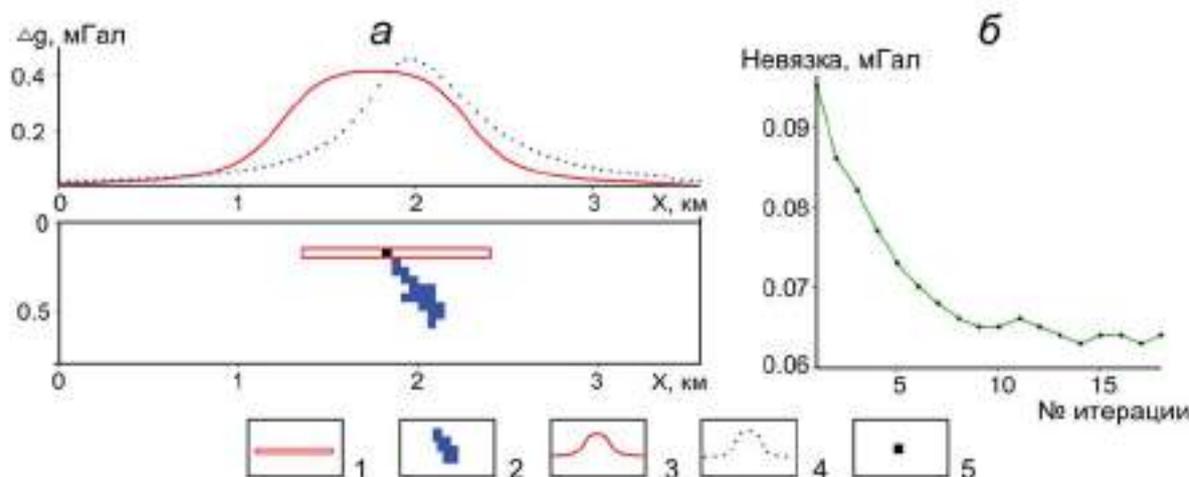


Рис. 5.1. Решение обратной задачи для пластины: а – гравитационное поле и геоплотностной разрез; б – график изменения невязки: 1 – аномалиеобразующий объект; 2 – выбранное тело; 3 – интерпретируемое поле; 4 – выбранное модельное поле; 5 – центр кристаллизации.

бранной эффективной плотности $0,23 \text{ г/см}^3$. На рис. 5.1б представлен график изменения невязки с ростом номера итерации. Значение невязки ε^* , достигнутое на выходе из итерационного процесса, составило более 14% от амплитуды аномалии. И это при том, что во всех приведенных ранее модельных примерах это значение не превышало 3–4% от амплитуды аномалии.

Заметим, что даже при столь низком качестве построенного решения обратной задачи, мы акцентируем прежде всего внимание на невязке. Случись так, что невязка оказалась бы приемлемой, мы приняли бы построенное решение за допустимое. Иными словами, мы и далее не станем отступать от принципа «если построенное решение удовлетворяет всем принятым ограничениям, включая и максимально приемлемое значение невязки, то решение принимается за допустимое, а достигнутая точность решения случайна и не является признаком состоятельности алгоритма».

Понятно, что в этом примере без всяких расчетов, а исходя из одних только физических соображений, можно было предсказать характер поведения текущих приближений Ω_k . Собственно, мы так намеренно и выбрали этот пример. Факт остается фактом: без возможности корректировки локально-оптимальных решений на отдельных итерациях методы РНК и РНР могут с задачей не справиться даже в достаточно простых ситуациях.

Для того чтобы метод, реализующий концепцию монтажного подхода, имел возможность, хотя бы частично, исправить результаты работы, выполненной за определенное число предыдущих итераций, необходимо усложнить структуру итерационного шага. Простейшим из методов, где такое удастся осуществить, является метод *регулируемой направленной перекристаллизации* (РНП). На его отдельных итерациях k осуществляется обмен элементами замощения между оболочкой $O(\Omega_{k-1})$ и границей $\Gamma(\Omega_{k-1})$ предшествующего приближения Ω_{k-1} , по одному элементу с каждой стороны:

$$Y(\Omega_k) = Y(\Omega_{k-1}) \cup \{V_i\} \setminus \{V_j\}, \quad V_i \in O(\Omega_{k-1}), \quad V_j \in \Gamma(\Omega_{k-1}), \quad (5.5)$$

Причем не обязательно, чтобы элементы V_i и V_j относились к одному и тому же парциальному носителю [Балк, 1993].

Вполне закономерно, что отдельный шаг процесса перекристаллизации вносит еще большее разнообразие в вопрос о наследовании свойств связности и односвязности, чем это имеет место в процессах кристаллизации и раскристаллизации. Так, в результате перекристаллизации связная односвязная конфигурация может потерять оба этих свойства. И напротив, несвязная и неодносвязная конфигурация может приобрести сразу оба названных свойства. Однако какова бы ни была сложность итерационного шага монтажного метода, установить топологические свойства пробных вариантов конфигураций, претендующих на текущее приближение, можно с помощью соответст-

вующих процедур, представленных во второй главе монографии. Мы всегда можем воспользоваться декомпозицией и проанализировать вначале последствия перемещения элемента замощения из оболочки предшествующего конфигурационного приближения в его ядро $\mathcal{Y}(\Omega_{k-1})$, а затем последствия изъятия элемента замощения из границы той же конфигурации.

Поскольку может оказаться, что элемент $V_j \in \Gamma(\Omega_{k-1})$ принадлежит внутреннему ядру конфигурации $\Omega_{k-1} \cup V_i$ (что изначально влечет к неодносвязности конфигурации $\Omega_k = \Omega_{k-1} \cup V_i \setminus V_j$), то целесообразно поступать на каждом шаге k следующим образом. Вначале сформировать множество $\Pi = \{V_i \in O(\Omega_{k-1})\}$ пробных вариантов включения элементов замощения V_i в ядро $\mathcal{Y}(\Omega_{k-1})$, а затем связать с каждым из элементов замощения $V_i \in \Pi$ множество $\Pi^{(i)}$ пробных вариантов изъятия элементов замощения $V_j, V_j \neq V_i$ из границы конфигурации $\Omega_{k-1} \cup V_i$. Тогда множество пробных вариантов обмена элементами будет представлено всевозможными парами элементов замощения $(V_i, V_j), V_i \in \Pi, V_j \in \Pi^{(i)}$.

Как и итерационные процессы РНК и РНР, об одном принципиальном изъятии которых мы ранее говорили, процесс РНП так же не лишен недостатков. Однако вначале скажем об одной его особенности. Для наглядности возьмем случай, когда источник поля – одиночное геологическое тело эффективной плотности $\hat{\delta} > 0$. Суть в том, что методы, реализующие однонаправленные итерационные процессы, в которых последовательность приближений Ω_k представляет собой конечную цепочку вложенных друг в друга конфигураций – $\mathcal{Y}(\Omega_{k-1}) \subset \mathcal{Y}(\Omega_k)$ для всех k в методе РНК и $\mathcal{Y}(\Omega_{k-1}) \supset \mathcal{Y}(\Omega_k)$ в методе РНР – имеют в своем распоряжении некое число итераций, которые надо разумно потратить для достижения приемлемого значения невязки. Обычно после первых двух-трех шагов можно достаточно уверенно предсказать, на какой итерации сработает критерий завершения итерационного процесса. Соответственно, у методов, реализующих однонаправленные процессы, есть *регламентированное* число шагов, которые им отводятся для компенсации урона, нанесенного своими «неудачными» локально-оптимальными решениями, допущенными на предыдущих итерациях. Число этих шагов определяется мощностью ядра текущего приближения к искомому решению Ω^* .

Что касается итерационного процесса РНП, то выполнение любого числа шагов не ведет к изменению мощности текущих конфигураций – не происходит ни роста, ни убывания числа элементов замощения в ядрах этих конфигураций. По сути, нет особого смысла и в приеме с оптимизацией плотности. Достаточно работать с истинными плотностями, задавшись наперед максимальным числом итераций, которое предоставляется методу с тем, чтобы он вышел на допустимую невязку. Однако, если лебегова мера нулевого приближения далека от меры истинного носителя, то и за любое число шагов метод РНП не выйдет на допустимое значение ε невязки. График изменения теку-

щих значений ε_k невязки с ростом номера итерации k будет незначительно колебаться относительно некоторой горизонтальной прямой, причем локальные минимумы на этом графике будут оставаться выше значения ε . Все это налагает достаточно жесткие требования к нулевому приближению Ω_0 . Иначе говоря, использовать *самостоятельно* метод РНП есть смысл лишь тогда, когда иным методом (к примеру – методом РНК) предварительно был построен некий носитель Ω^* , но достигнутая при этом невязка «слегка» превышала допустимую, и методу РНП предстоит подкорректировать это решение путем незначительной деформации границы.

Сама собой напрашивается мысль о комплексировании итерационных процессов РНК, РНР, РНП и создании на их основе некоего агрегированного метода, эффективно использующего отдельные преимущества этих трех процессов.

5.1.3. Монтажные алгоритмы на основе комбинирования итерационных процессов РНК, РНР и РНП

Данная глава, как следует из ее названия, носит преимущественно постановочный характер. В ней изложены общие соображения авторов монографии относительно актуальных направлений дальнейшего развития монтажного подхода. Для облегчения восприятия наших предложений и априорного оценивания ожидаемой практической отдачи от их реализации совсем не обязательно, чтобы они были проиллюстрированы на достаточно общих постановках обратных задач.

Ранее мы указали на некоторые принципиальные недостатки односторонних процессов РНК и РНР, не свойственные итерационному процессу РНП, равно как и недостатки метода РНП, не свойственные методам РНК и РНР и связанные с повышенными требованиями метода РНП к нулевому приближению. Соответственно, мы успели обсудить и специфические достоинства всех трех методов. Эти обстоятельства, как мы уже отмечали, естественным образом подводят к идее совместного использования всех трех итерационных процессов в комбинированных монтажных алгоритмах, в которых последовательная смена режимов их работы осуществлялась бы с помощью нескольких *управляющих параметров*. Предполагается, что с помощью таких параметров агрегированный итерационный процесс будет автоматически, или в зависимости от поведения невязки на нескольких последних итерациях, переключаться с одного итерационного процесса – РНК, РНР и РНП – на другой. Понятно, что произвол в выборе закона чередования итераций k , каждая из которых будет выполняться по правилам какого-то одного из трех методов – РНК, РНР и РНП, порождает многообразие конкретных схем реализации комбиниро-

ванного итерационного процесса. Ясно также, что при последовательном исполнении каждого из трех названных итерационных процессов, для которых проблемы, связанные с контролем за *соблюдением наследования* текущим приближением свойств предшествующего приближения к решению обратной задачи, уже были изучены ранее, новых вопросов по этому поводу не возникнет.

Рассмотрим одну из таких схем на примере постановки обратной задачи, на которую рассчитан родоначальник класса монтажных алгоритмов – базовый метод РНК. Итак, будем считать, что, согласно априорным предположениям, аномалия Δg гравитационного поля обусловлена связным объектом \widehat{S} эффективной плотности $\widehat{\delta} > 0$ и норма помех в измерениях поля Δg не превосходит заданное ε . Пусть, к тому же, есть основания считать фрагментом возмущающего объекта \widehat{S} некоторый элемент $V_{n(0)}$ регулярного замощения V , построенного интерпретатором. Необходимые условия для реализации базового метода РНК, таким образом, выполнены.

Предположим, есть основания считать, что ситуация достаточно сложная (требуется обеспечить сравнительно малую невязку) и базовый итерационный процесс РНК скорее всего не выйдет на приемлемое значение невязки. Исходя из этих опасений принято решение использовать с самого начала более сложный (агрегированный) управляемый итерационный процесс, в котором были бы задействованы возможности и преимущества каждого из трех методов – РНК, РНР и РНП.

Предварим такой итерационный процесс вычислением оценки \tilde{n} числа элементов замощения V , которые составят ядро $\mathcal{Y}(\Omega^*)$ допустимого носителя Ω^* . Особая точность здесь не нужна. При регулярном замощении для этого достаточно иметь оценку эффективной массы тела \widehat{S} , которую можно построить, воспользовавшись методом подбора в классе формальных источников поля. Необходимую оценку можно также получить, выполнив несколько итераций метода РНК. Пусть на последней из этих итераций, когда мощность ядра текущего приближения оказалась равной некоторому k , минимальная невязка была достигнута при эффективной плотности δ^* . Тогда $\tilde{n} = k\delta^* / \widehat{\delta}$.

В нашем представлении комбинированный монтажный метод есть процесс выполнения конечной последовательности самостоятельных *циклов*, в каждом из которых задействован один из трех итерационных процессов – РНК, РНР и РНП – с выбором наиболее эффективной длины циклов и порядка их чередования. Предполагается, что эти данные будут вложены в алгоритм исходя из эвристических соображений и имеющегося опыта. Итерации, работающие в режиме *кристаллизации*, будут продвигать глобальный итерационный процесс к тому моменту, когда сработает критерий завершения работы алгоритма. Итерации, в которых метод будет работать в режимах *раскристаллизации* и *перекристаллизации*, призваны корректировать результаты построений, выполненных в режиме *кристаллизации*.

В принципе, можно *неоднократно* в автоматическом режиме включать в работу глобального итерационного процесса тот или иной из названных парциальных (локальных) итерационных процессов – РНК, РНР и РНП. В относительно простом случае, который позволяет получить общее представление об идее комбинированных монтажных алгоритмов, предусматривается всего четыре *цикла* парциальных итерационных процессов, выполняемых по правилам, прописанным в методах РНК, РНР и РНП. Критерии прерывания этих процессов устанавливают *управляющие параметры*, а в качестве начального приближения к искомому носителю в каждом из циклов будет использоваться текущее приближение, построенное на выходе из предшествующего цикла. Порядок вступления в действие итерационных процессов РНК, РНР и РНП выбран с учетом преимуществ и возможностей каждого из них.

Первый цикл глобального итерационного процесса состоит из некоторого числа k_1 итераций, выполненных в режиме *кристаллизации*. В принципе, параметр k_1 можно даже исключить, дав возможность доработать методу РНК до конца (до итерации, на которой сработает критерий завершения итерационного процесса). Коль скоро мы остановились на постановке обратной задачи, на которую распространяется базовый метод РНК, то первый цикл запускается с нулевого приближения в виде одиночного элемента замощения – *центра кристаллизации*.

Второй цикл включает «обратный ход» глобального итерационного процесса и состоит из $k_2 < k_1$ итераций в режиме *раскристаллизации*. Задача этих k_2 итераций – вернуть глобальный итерационный процесс к уже пройденному рубежу (под этим рубежом мы понимаем мощность ядра текущего приближения к искомому носителю) и позволить ему начать третий цикл с меньшего значения невязки (при том, что у завершающей стадии глобального итерационного процесса останется все то же число элементов, которые еще можно будет включить в ядра текущих приближений). Эффективность процедуры *раскристаллизации* можно будет оценить тем, насколько новое значение невязки окажется меньше той, что была достигнута усилиями процедуры *кристаллизации* за первые $k_1 - k_2$ итераций.

Третий цикл осуществляется опять же в режиме *кристаллизации*. При этом парциальный итерационный процесс пройдет первые k_2 итераций с теми же мощностями ядер текущих приближений, с которыми процесс РНК проходил в первом цикле. Но, благодаря режиму РНР, используемому на втором цикле, старт этого отрезка из k_2 итераций будет дан с нового (меньшего) значения невязки. Завершается третий цикл выходом эффективной плотности, минимизирующей функционал невязки, в окрестность истинного значения $\hat{\delta}$.

Четвертый, завершающий цикл окажется востребованным лишь в случае, когда по завершению третьего цикла допустимое решение обратной задачи не было-таки построено – неприемлемым оказалось значение достигнутой

невязки. Этот цикл представляет собой последовательность не более чем k_3 итераций, выполненных в режиме *перекристаллизации*. Поскольку режим *перекристаллизации* наиболее трудоемок, может быть введен критерий прерывания цикла, когда снижение невязки на очередном шаге столь незначительно, что не окупает вычислительных затрат. Для этого помимо управляющих параметров k_1 , k_2 и k_3 (пока можно сказать одно: выбор их значения должен зависеть в том числе и от оценки \tilde{n}) вводится еще один – минимальная величина $\Delta\varepsilon$ снижения невязки на очередной итерации, при которой продолжать *перекристаллизацию* еще может быть признано целесообразным.

Несколько слов о двух ситуациях, которые могут произойти в ходе реализации предложенного алгоритма и изменить «нормальный» режим его работы.

Первая ситуация может возникнуть, если оценка \tilde{n} не была вычислена, и значение k_1 было взято «с запасом». При этом в первом же цикле процесс РНК, не доработав отведенные ему k_1 итераций, завершится выходом в малую окрестность плотности $\hat{\delta}$, и при этом достигнутая невязка окажется приемлемой. Обратная задача решена, и комбинированный метод сужается до метода РНК, который, как апостериори выяснится, оказался самодостаточным.

Вторая ситуация (мы считаем ее маловероятной) возникает тогда, когда за счет второго и третьего циклов (опять же, по причине локальной оптимальности) не удалось понизить невязку в сравнении с тем, какой она была на соответствующей итерации после первого цикла. В такой ситуации алгоритм просто проигнорирует результаты этих двух нерезультативных циклов и предложит процедуре РНК продолжить работу, выполненную ею за первые k_1 итераций, вплоть до выхода итерационного процесса на некотором шаге k на плотность $\delta_k \leq \hat{\delta}$. Здесь, опять же, возможны два варианта, в первом из которых достигается приемлемое значение невязки, а во втором – придется корректировать построенную конфигурацию с помощью итерационного процесса *перекристаллизации*.

Разумеется, при работе комбинированного алгоритма может встретиться и нежелательный исход, когда допустимое решения обратной задачи получить не удалось. Тогда остаются возможными две ситуации, в одной из них множество Q допустимых решений попросту пусто, во второй – мощность этого множества мала настолько, что даже комбинированному методу не удалось выйти ни на один из его элементов.

Исходя из эвристических соображений и по мере апробации каждого последующего из созданных комбинированных методов, можно будет также расширять множество управляющих параметров. По сути, все это подводит к идее монтажных методов с элементами искусственного интеллекта.

И, наконец, последнее. Существование множества схем реализации концепции синтеза методов РНК, РНР и РНП, особенно если принять во внимание возможность введения в них различных управляющих параметров, а также

отсутствие четких критериев предпочтительности одной схемы над другой, следует рассматривать не как проявление неопределенности выбора, а как предоставление геофизику достаточно широких возможностей для импровизации (разумеется, при наличии развитого программного обеспечения). Основополагающий принцип здесь чрезвычайно прост и заключается в том, что любые эвристики хороши, если они позволяют методу за приемлемое время добиться нужного результата.

5.1.4. Обновление структуры замощения в ходе итерационного процесса

Еще один резерв не только повышения надежности построений, но и экономизации вычислений связан со свободой выбора замощения V . Мы уже отмечали, что в случае многосвязного носителя \hat{S} возмущающих масс с каждым парциальным носителем \hat{S}_j может быть связано свое замощение $V^{(j)}$. В случае регулярных замощений областей D_j , гарантированно содержащих (согласно априорным предпосылкам) носители \hat{S}_j , элементы замощений одной области D_j могут быть подобны элементам замощения другой области D_j . Хотя это совсем и не обязательно. Одновременное использование на каждом шаге итерационного процесса нескольких различных замощений, в том числе и нерегулярных, не вносит принципиальных осложнений в структуру итерационного процесса. Трудности алгоритмического характера (которых нет в случае единого замощения V области D , содержащей все источники поля) возникают лишь тогда, когда отдельные пары областей D_j имеют непустое пересечение. Определенная сложность возникнет здесь при контроле за условием взаимонепересечения модельных локальных носителей.

При выборе замощений $V^{(j)}$ (мы включаем сюда как регулярные, так и нерегулярные, равно как и случай единого замощения V для D) приходится всегда соблюдать компромисс. С одной стороны, понятно стремление к снижению мощности $|Y(\Omega^*)|$ ядра приближенного решения Ω^* за счет использования замощений $V^{(j)}$ с относительно большим значением меры μ его элементов $V_{j,n}$. Такое стремление объясняется не только желанием понизить уровень модельной неопределенности (уменьшить мощность множества Q допустимых решений) в надежде повысить качество результатов интерпретации. Здесь имеют место соображения вычислительного характера – чем меньше понадобится элементов замощения для построения ядра $Y(\Omega^*)$, тем меньше будет суммарное число пробных вариантов перехода к очередному приближению Ω^* , которые придется проанализировать алгоритму. С другой стороны, на выбор замощения оказывает влияние требование обеспечения приемлемого значения невязки (что может оказаться невозможным при чрезмерно грубом

замощении) и желание обойтись без введения поправок за неадекватность модели. Причем, как в значение минимально допустимого значения невязки, так и при оценке точности построенного приближенного решения обратной задачи. И, конечно же, велик соблазн построить модельный носитель Ω^* с хорошо прорисованной границей. Он может спровоцировать использование интерпретатором чрезмерно детальных замощений.

Все, что сейчас было сказано о выборе структуры замощения при решении обратной задачи монтажным методом, это, в конечном счете, проблема выбора параметрической размерности модели источников поля [Балк, 2013₁]. В практике применения других модельных классов, да и не только в случае обратной задачи рудного типа, интерпретатору всегда приходится решать эту проблему.

Еще одно отступление от заложенных в методы РНК базовых принципов монтажного подхода, которое в отдельных случаях может стать перспективным, связано с отказом от условия постоянства замощения, из элементов которого на протяжении *всего* итерационного процесса формируется ядро искомого конфигурационного носителя Ω^* . Принцип постоянства замощения, который придерживаются базовый и обобщенные методы РНК, следует понимать так. Используем ли мы *единое* замощение V области $D \supset \hat{S}$, либо *мозаичное* замощение, представляющее собой сумму различных парциальных замощений $V^{(j)}$ областей $D_j \subset D$, такое замощение на протяжении всего итерационного процесса *остается неизменным*.

Несколько следующих тенденций и закономерностей, подмеченных по результатам апробации монтажных алгоритмов, способны, на наш взгляд, подсказать, как за счет отказа от условия постоянства замощения можно достаточно эффективно решить проблему обеспечения компромисса между детальностью замощения и надежностью результатов интерпретации. Опять же, для большей наглядности и лучшего восприятия читателем сути наших предложений достаточно взять за основу базовый метод РНК для связного носителя.

Начнем с того, что допустимый носитель Ω^* , построенный по базовому методу РНК на основе некоторого фиксированного регулярного замощения $V = \{V_n\}$, можно, как правило, описать в виде специально подобранного объединения значительно меньшего, чем $|Y(\Omega^*)|$, числа *разновеликих* геометрических фигур (в двумерной обратной задаче) или тел (в трехмерной задаче), множество которых обладает следующими свойствами. Первое, все эти фигуры (тела) можно распределить по сравнительно небольшому числу множеств $A_j, j = 1, 2, \dots, m$, каждое из которых состоит исключительно из *конгруэнтных* геометрических фигур $V_{j,i}, i = 1, 2, \dots, m$. Второе, *все* геометрические объекты $V_{j,i}$, попавшие в подмножества $A_j, j = 1, 2, \dots, m-1$, *подобны* элементам V_n замощения V , тогда как подмножество A_m состоит из элементов V_n замощения V (другими словами, геометрические фигуры $V_{m,i}$ принадлежат ядру $Y(\Omega^*)$). Подобную си-

туацию можно интерпретировать, как будто конфигурация Ω^* собрана из элементов *небольшого числа* t различных регулярных замощений, одно из которых суть замощение V , а элементы замощений – $V^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, t-1$ – подобны элементам замощения V . В таком случае можно говорить об альтернативном представлении конфигурации Ω^* . Проще всего это представить, если V есть замощение плоскости квадратами со стороной a , тогда как элементами замощений $V^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, t-1$, являются квадраты со сторонами $2^j a$.

По сути, такое представление апостериори можно было бы принять за решение обратной задачи на некотором нерегулярном замощении, когда различные области изучаемой части пространства имеют различные «локальные» замощения, и фрагменты этих замощений стали фрагментами построенного носителя. Но на альтернативное представление конфигурации Ω^* можно посмотреть и иначе. Придать картине некоторую динамику и считать, что эти локальные замощения были построены не до того, как был запущен алгоритм решения обратной задачи, а лишь при вступлении итерационного процесса в какую-то очередную стадию, когда итерационный процесс под воздействием специальных управляющих параметров «решил» сменить замощение. Причем это новое замощение должно быть *согласовано* с замощением, используемым на предыдущей стадии. Последнее условие должно помочь итерационному процессу *подстроиться* под особенности границы приближения Ω_k , построенного на предыдущей стадии. Достичь такого рода согласованность много проще в случае локальных замощений квадратами (кубам), когда сторона квадратного (кубического) элемента очередного локального замощения отличается в два раза от длины стороны квадратного (кубического) элемента предшествующего замощения.

Обратимся теперь к закономерностям, которые были подмечены по результатам численного эксперимента и которые в принципе нетрудно было предвидеть исходя из одних эвристических соображений. Так, если взять конфигурационный носитель Ω^* , построенный по базовому методу РНК на некотором *достаточно детальном* замощении V , и наложить на него альтернативное представление этого же носителя, собранного из элементов различных замощений, то наблюдается следующая тенденция. Чем элемент замощения $V_n \in \mathcal{Y}(\Omega^*)$ ближе к оболочке $O(\Omega^*)$, тем у него в среднем меньше шансов оказаться в альтернативном представлении конфигурации Ω^* фрагментом элемента более грубого замощения $V^{(j)}$, который бы, в свою очередь, сам оказался фрагментом конфигурации Ω^* . Анализируя теперь *пошагово* протоколы работы итерационного процесса базового метода РНК, можно отметить четкую закономерность: элементы замощения $V_n \in \mathcal{Y}(\Omega^*)$, оказавшиеся фрагментами элементов более грубого локального замощения в альтернативном представлении конфигурации Ω^* , оказались в ядрах текущих приближений Ω_k , начиная с какой-то достаточно ранней итерации k . Если такие тенденции принять

во внимание, то в характерном случае альтернативное представление конфигурации Ω^* выглядит так: в ее, условно говоря, центральной части лежит несколько элементов самого грубого замощения, их обрамляет определенное число элементов более мелкого замощения, и, наконец, приграничный фрагмент области Ω^* сложен из элементов самого мелкого замощения. В каких-то случаях альтернативные представления этих носителей могут отдаленно походить на изображения фракталов [Мандельброт, 2002].

Все сказанное указывает на то, что конфигурация Ω^* (или достаточно близкая к ней), построенная с помощью метода РНК на постоянном замощении V , с таким же успехом могла быть построена с помощью более экономичного итерационного процесса, который последовательно использует различные (по значению лебеговой меры протоэлемента) регулярные замощения, начиная с достаточно грубого и затем переключаясь через определенное число итераций на другое, более детальное замощение.

5.1.5. Монтажные алгоритмы без обязательного наследования свойств предшествующего приближения

Еще одно направление развития монтажных алгоритмов связано с их частичным освобождением от условия наследования текущим приближением Ω_k к искомому решению Ω^* свойств предшествующего приближения Ω_{k-1} , прописанных в априорной информации.

Можно предложить достаточно общую структуру интерпретационного процесса, когда последний разбивается на несколько этапов, причем чем более ранним является этап, тем решение на этом этапе осуществляется при более слабых требованиях к устойчивым связям между свойствами приближений, построенных на двух соседних шагах итерационного процесса. Расчет заключается в том, что у итерационного процесса, не обремененного значительными ограничениями, на каждом шаге имеется в резерве и большее число допустимых решений, на которые его могли бы вывести оставшиеся итерации, а значит и больше шансов выйти на меньшее значение невязки. Преследуя на каждой стадии локальную цель, метод может *попутно* (без уступок в отношении невязки) автоматически корректировать моделируемый носитель в направлении выполнения тех ограничений, учет которых ему не вменялся на пройденных итерациях. В этом весь смысл декомпозиции итерационного процесса.

Если присмотреться, то предложенные ранее обобщенные алгоритмы РНК все же допускали некоторые отступления от основополагающего для класса этих алгоритмов принципа наследования текущими приближениями свойств, прописанных в априорной информации. Происходило это преимущественно на самых первых итерациях в силу объективных причин.

Возьмем в качестве примера постановку обратной задачи, в которой указаны *минимально допустимые* размеры возмущающего объекта. Размеры конфигурации Ω_0 , которая по априорной информации взята в качестве нулевого приближения (в базовом методе РНК это, вообще, всего лишь отдельный элемент замощения), могут оказаться меньше минимально допустимых. Ускорить выход итерационного процесса на допустимые по геометрии текущие приближения, конечно же, можно. Достаточно при формировании множества вариантов, *допустимых к сравнению*, внести дополнительное условие, по которому на тех итерациях, где названное ограничение не выполняется, минимальный размер (скажем, по латерали или вертикали) носителя Ω_k должен превосходить соответствующий минимальный размер носителя Ω_{k-1} . К сожалению, такой путь не лишен издержек и они очевидны: не выдерживается принцип локальной оптимальности.

Вспомним теперь, как мы поступали в случае, когда нулевое приближение Ω_0 оказывалось неодносвязным. При поиске допустимых решений для реализации аддитивных технологий интерпретации подобный исход может быть обусловлен не только априорной информацией (сложный характер подсечения возмущающего объекта скважинами), но и специальным дополнительным требованием, которое всегда присутствует в названных технологиях и обеспечивает целенаправленный поиск очередного *результативного* допустимого решения обратной задачи. Так вот, первые шаги итерационного процесса всегда были направлены на приведение начального приближения к допустимому виду, без оглядки на проблему пошаговой минимизации невязки.

Общая идея, не вписывающаяся в стандартные требования концепции РНК, состоит в том, чтобы дать итерационному процессу бóльшую свободу выбора (а значит и больше возможности для минимизации текущего значения невязки), понимая, что на последующих шагах у него еще будет время исправить допущенные «ошибки». Так, исходя из физических соображений, можно ожидать, что в случае неодносвязного текущего приближения – даже не предпринимая специальных мер – проблема будет автоматически решена за счет того, что элементы замощения, минимизирующие невязку, будут выбираться в том числе и из внутренних оболочек конфигурации. Поэтому «дыры» в текущих конфигурационных приближениях к решению обратной задачи постепенно «затянутся». Аналогично, если начальный вариант нулевого приближения, построенный, к примеру, по данным бурения, не оказался связным (тогда как по априорной информации изучаемый носитель является одиночным локальным телом), то связующие конфигурационные дополнения также могут быть проложены итерационным процессом автоматически (элементы замощения, которые составят связующие конфигурации, окажутся на соответствующих итерациях теми самыми, при которых достигается локальный минимум невязки).

Также не обязательно освобождаться от недопустимых отростков границы нулевого приближения сразу на первых итерациях, отодвигая на второй план задачу минимизации невязки. Требования к гладкости границы очередного конфигурационного приближения к искомому носителю можно ужесточать по мере выполнения итерационного процесса. Если, согласно критерию гладкости, оболочка элемента (регулярного) замощения, претендующего (на шаге k итерационного процесса) на включение в ядро предшествующего приближения Ω_{k-1} , должна содержать не менее r элементов замощения, принадлежащих этому ядру, то можно поступить следующим образом. Разбить весь итерационный процесс на несколько стадий, сделать число r переменным и на каждой последующей из них увеличивать его на единицу. Длина (по числу итераций) каждой такой стадии должна определяться в ходе итерационного процесса, опять же, с помощью системы управляющих параметров. Один модельный пример, реализующий эту идею, мы, забегая вперед, уже рассмотрели ранее.

И, наконец, у нас всегда остается возможность проанализировать свойства построенного носителя Ω^* на предмет наличия нужных свойств, и если они «слегка» нарушены, довести этот носитель с помощью процедуры перекристаллизации до приемлемого.

Можно было бы привести еще примеры такого подхода, но читателю, по-видимому, уже все понятно.

5.1.6. Синтез монтажных алгоритмов с классическими методами минимизации

До сих пор мы рассматривали возможности совершенствования монтажных алгоритмов только лишь за счет внутренних резервов этой теории. Исключение составил синтез с процедурой разделения полей. Еще одно из потенциально возможных направлений развития монтажного подхода связано с идеей кооперации монтажных методов и традиционных методов решения условно-экстремальных задач, позволяющей освободиться от *полного перебора* пробных вариантов при реализации монтажного итерационного процесса.

Различие в ядрах соседних приближений Ω_{k-1} и Ω_k ограничивалось до сих пор всего одним элементом в методах РНК и РНР и двумя в методе РНП. Конечно, в теории можно говорить и о большем, чем два, числе элементов замощения, которые принадлежат одному из ядер двух последующих конфигурационных приближений Ω_{k-1} и Ω_k , но не принадлежат одновременно им обоим. Однако, принимая во внимание стремительный рост вычислительных затрат на осуществление *полного перебора* всех пробных вариантов перехода к текущему приближению, мы не видим больших перспектив (даже с учетом мощности современных вычислительных средств и прогнозов их роста на ближай-

шие годы) использования более сложных итераций с полным перебором, чем те, что приняты в методах РНК, РНР и РНП.

Введем определение, позволяющее классифицировать монтажные алгоритмы решения обратных задач гравиразведки и магниторазведки по сложности итерационного шага. Присвоим итерационному процессу $A(n, m)$, $n \geq 0$, $m \geq 0$, $n + m \geq 1$, составляющему основу некоторого монтажного алгоритма, степень сложности (порядок) $l = m + n$, если на каждой его итерации k ядро любой пробной конфигурации Ω , претендующей на роль текущего приближения Ω_k , образуется путем наращивания ядра $Y(\Omega_{k-1})$ предшествующего приближения Ω_{k-1} на n элементов замощения, взятых из оболочки $O(\Omega_{k-1})$ конфигурации Ω_{k-1} , при одновременном изъятии m элементов замощения из ее границы $\Gamma(\Omega_{k-1})$. Если \hat{S} – многосвязное распределение масс, то на шаге k может осуществляться наращивание не одного, а сразу нескольких парциальных носителей $\Omega_{j,k-1}$. Изымаемые m элементов замощения могут точно так же принадлежать границам различных текущих парциальных носителей.

Согласно принятой классификации, итерационные процессы РНК и РНР относятся к классам $A(1,0)$ и $A(0,1)$, соответственно. Оба процесса имеют минимальный порядок $l = 1$. Причем в методе РНК $n = 1$, $m = 0$, тогда как в методе РНР $n = 0$, $m = 1$. Порядок $l = 2$ имеют три итерационных процесса: $A(2,0)$, $A(0,2)$ и $A(1,1)$. Один из режимов работы процесса, а именно $A(1,1)$, это режим работы метода РНП, два других – режимы работы методов РНК и РНР за два шага. В случае процесса $A(2,0)$ ядро очередного приближения Ω_k может быть получено либо путем наращивания ядра $Y(\Omega_{k-1})$ на один элемент замощения (по сути, это шаг алгоритма РНК, или, другими словами, одна итерация процесса $A(1,0)$), либо на два. В последнем случае, подчеркнем еще раз, этими элементами могут быть пополнены различные парциальные ядра предшествующего приближения. Ясно, что реализация одного шага процесса $A(2,0)$ требует больших вычислений, чем реализация двух шагов процесса $A(1,0)$. Правда, за счет одного шага процесса $A(2,0)$ невязку можно снизить на бóльшую величину, чем за два последовательных шага процесса $A(1,0)$. Но, опять же, все это преимущество относится лишь к одному небольшому фрагменту итерационного процесса. Аналогичные рассуждения имеют место и в отношении итерационного процесса $A(0,2)$.

Безусловно, нет никаких принципиальных препятствий распространить рассуждения на итерационные процессы степени $l > 2$. Однако в конструктивном плане вряд ли можно рассчитывать на практическое использование таких процессов, тем более при решении трехмерных обратных задач.

Можно вспомнить, что одно время в геофизической литературе обсуждалась идея применения целочисленного программирования при решении обратных задач в конечноэлементных классах источников аномалии. Доподлинно нам неизвестно, почему исследования в этом направлении были свер-

нуты. Есть предположение, что возможности вычислительной техники тех лет оказались недостаточными (ведь задача минимизации ставилась на *всех* элементах замощения области D и была достаточно высокой размерности), либо (скорее всего) так и не удалось обеспечить связность построенного распределения масс. Однако эти исследования натолкнули авторов статьи [Балк, Балк С., 2000] на мысль о комбинировании монтажного подхода с классическими методами минимизации с целью обойти полный перебор пробных вариантов образования текущих приближений. Предполагалось, что в самом общем виде на каждом шаге такого рода комбинированных итерационных алгоритмов будет осуществляться обмен *заранее не фиксированным* (оптимизируемым) числом элементов замощения между оболочкой и границей предшествующего конфигурационного приближения Ω_{k-1} .

Если попытаться реализовать высказанную идею, ограничившись для лаконичности изложения базовой постановкой обратной задачи (одиночное тело, а априорные ограничения сведены к связности построенного носителя Ω^*) и одним лишь процессом наращивания ядер текущих приближений, то комбинированный алгоритм будет выглядеть следующим образом.

Пусть $m(1)$ – число элементов замощения, составляющих оболочку $O(\Omega_{k-1})$ предшествующего приближения к искомому носителю Ω^* . Введем сквозную локальную нумерацию элементов замощения V_n , вошедших в эту оболочку. С каждым элементом замощения $V_n \in O(\Omega_{k-1})$, $n = 1, 2, \dots, m(1)$ свяжем оптимизируемую бинарную переменную v_n : при $v_n = 1$ элемент замощения $V_n \in O(\Omega_{k-1})$ войдет в ядро текущего приближения Ω_k , при $v_n = 0$ он перейдет из оболочки $O(\Omega_{k-1})$ в оболочку $O(\Omega_k)$. Еще одна оптимизируемая переменная – эффективная плотность δ масс, заполняющих носитель Ω_k – является вещественнозначной. Таким образом, число оптимизируемых переменных в ходе итерационного процесса будет изменяться от итерации к итерации и равняться $m(1) + 1$, где $m(1) = |O(\Omega_{k-1})|$. На каждом шаге k ставится задача минимизации функционала невязки при условии $v_n \in \{0, 1\}$ и $\delta > 0$ для всех $n = 1, 2, \dots, m(1)$. Важно, что независимо от того, какое число переменных v_n примут значения, равные 1, носитель Ω_k автоматически *наследует* свойство *связности* носителя Ω_{k-1} .

Размерность экстремальных задач, возникающих в такого рода методах, будет существенно ниже той, что возникает в методах, предложенных в работах [Ломтадзе, 1968; Дядюра, Шалаев, 1968; Перфильев, 1972; Шалаев, 1972], где число оптимизируемых переменных равно числу элементов, участвующих в замощении всей изучаемой части пространства.

Оптимизируемая переменная δ : вносит дополнительную нелинейность в структуру минимизируемого функционала, да и сама задача (согласно известной классификации) уже не войдет в число основных типов условно-экстремальных задач. Мы не беремся судить, насколько методы решения подобных смешанных экстремальных задач изучены в специальной литературе, хотя в

нашем случае мы имеем наиболее простой вариант – всего одна вещественнозначная переменная и целочисленные (бинарные) переменные. Однако при соответствующем выборе метрики приближения полей у нас есть возможность перейти к сугубо $0-1$ целочисленному линейному программированию. И здесь уже воспользоваться известными в целочисленном программировании методом Гомори либо методом ветвей и границ [Корбут, Финкельштейн, 1969; Вагнер, 1972].

Означенная возможность заключается в следующем: предварительно, используя аппроксимационные методы вычисления гармонических моментов возмущающих масс в классах формальных источников поля, оценить эффективную массу источников поля. Располагая ее значением и мерой предшествующего приближения Ω_{k-1} , можно *закрепить* значение эффективной плотности δ_k , не позволяющее нарушить условие сохранения найденной эффективной массы на очередном шаге k итерационного процесса. Но это при условии, что мы знаем, сколько новых элементов попадет в ядро $Я(\Omega_{k-1})$ очередного приближения. У нас несколько иная ситуация: априори, до выполнения процедуры минимизации неизвестно, сколько переменных v_n примет значение 1. Иначе говоря, неясно, сколько элементов замощения V_n из оболочки $O(\Omega_{k-1})$ перейдет в ядро $Я(\Omega_k)$, и, значит, неизвестно, какую меру будет иметь носитель Ω_k . Соответственно, мы не можем оценить значение эффективной плотности δ_k масс, которым предстоит заполнить носитель Ω_k , так чтобы эффективная масса совпала с той, что была вычислена до начала работы комбинированного алгоритма решения обратной задачи.

Можно поступить следующим образом: наращивать ядро предыдущего приближения Ω_{k-1} не на *оптимизируемое* число элементов замощения, а на *произвольное, но фиксированное* число $t < m(1)$, так что $|Я(\Omega_k)| = |Я(\Omega_{k-1})| + t$. Теперь мы можем указать необходимое значение эффективной плотности, и задача минимизации невязки на шаге k переходит в класс экстремальных задач с исключительно целочисленными переменными при ограничении

$$\sum_{n=1}^{m(1)} v_n = t.$$

Можно расширить постановку задачи за счет усложнения итерационного шага. С этой целью организуем на шаге k комбинированного алгоритма *обобщенную процедуру перекристаллизации*, которая предполагает, что, наряду с включением в ядро $Я(\Omega_k)$ текущего приближения заданного числа t элементов замощения из $O(\Omega_{k-1})$, в него не попадет заданное число $q < m(2)$ элементов замощения, входящих в границу $\Gamma(\Omega_{k-1})$, где $m(2)$ – число элементов замощения, составляющих границу $\Gamma(\Omega_{k-1})$. Как и прежде не представит труда закрепить нужное значение эффективной плотности на шаге k . Понятно, что выбор

конкретных элементов из границы $\Gamma(\Omega_{k-1})$ будет, как и в случае с элементами оболочки $O(\Omega_{k-1})$, определяться по результатам минимизации невязки.

Перенумеруем элементы замощения, составляющие границу конфигурации Ω_{k-1} , и назначим этим элементам номера $n = m(1) + 1, m(1) + 2, \dots, m(1) + m(2)$. С каждым из этих элементов свяжем бинарную переменную v_n и добавим теперь в число ограничений, фигурирующих в формулировке задачи целочисленного программирования условие

$$\sum_{n=m(1)+1}^{m(1)+m(2)} v_n = q.$$

Мы отмечали, что именно трудности учета в классических методах решения условно-экстремальных задач некоторых типов априорной информации об особенностях строения источников аномалии в немалой степени и привели к концепции монтажных алгоритмов. Но с этими трудностями мы можем столкнуться в случае комбинированных методов. В случае с $t + q$ оптимизируемыми переменными не будет гарантии в наследовании свойств связности. Если же выйти за рамки только одного этого требования, то возникнет вопрос о наследовании условия односвязности, не говоря уже о гладкости границы носителя. Правда, в запасе у нас остается такой ход: решать обратную задачу без оглядки на требование выполнения определенных условий, а затем корректировать построенное решение с помощью процедур РНК, РНР и РНП.

Окончательные выводы о целесообразности союза монтажных алгоритмов с классическими методами минимизации можно будет сделать лишь по результатам широкого вычислительного эксперимента. Исходя из того, что есть на сегодня, мы находим, что достаточно полное алгоритмически-программное обеспечение итерационных процессов $A(n, m)$ порядка 2 уже может покрыть потребности, возникающие на практике при решении обратных задач рудного типа. Если же безотносительно к данному прогнозу попытаться охарактеризовать перспективы комбинации монтажного подхода и методов целочисленной оптимизации, то они, на наш взгляд, таковы. Конструктивный путь состоит в том, чтобы при реализации обобщенной процедуры перекристаллизации на основе целочисленной оптимизации не учитывать дополнительные ограничения на особенности носителя, прописанные в априорной информации (иначе говоря, не придерживаться строго *принципа наследования* свойств предшествующего приближения текущим), и лишь затем осуществлять корректировку результатов с помощью обобщенных алгоритмов РНК и РНР и РНП. Эту корректировку можно выполнять в том числе и после каждого шага целочисленной оптимизации.

5.1.7. Элементы искусственного интеллекта в монтажных алгоритмах решения обратных задач

В завершение данного раздела главы есть смысл обсудить вопрос о том, в какой мере концепция монтажных алгоритмов приближает нас к решению проблемы создания теории и компьютерных технологий искусственного интеллекта, позволяющих находить геологические интерпретации геофизических данных на компьютерах в *строго автоматическом режиме*, без вмешательства геофизика. В свое время В.Н. Страхов включил эту проблему в число четырех основных проблем [Страхов, 1995], которые стоят перед математической и вычислительной геофизикой в XXI веке. Проблема полной автоматизации интерпретационного процесса была поднята В.Н. Страховым при обсуждении обновленной редакции методологии теории интерпретации потенциальных полей, в которой результат интерпретации трактуется все также как (единичное) оптимальное решение обратной задачи. Что касается мнения авторов монографии, то оно состоит в том, что пока в режиме реального времени геофизик будет в состоянии с помощью диалоговой системы подобрать приемлемый вариант интерпретации, споры вокруг вопроса о преимуществе глобальной автоматизации интерпретационного процесса не будут утихать. Актуальность проблемы полной формализации интерпретационного процесса не станет подвергаться сомнению и проявится в полной мере лишь тогда, когда используемые технологии интерпретации будут предполагать построение большого числа допустимых вариантов интерпретации и воспользоваться диалоговыми системами моделирования фактически уже станет невозможно. Важно, чтобы геофизик не рассматривал автоматизацию интерпретационного процесса как просто вынужденную меру, с которой приходится смириться за неимением альтернативы, а смог осознать, что формализованные технологии интерпретации не столь уж значительно уступили бы эффективности человеко-машинным технологиям, будь возможность реализовать их на практике.

Напомним, что термин «искусственный интеллект» ввел в рассмотрение Д. Маккартни в 1956 году, определив его как способность интеллектуальных машин выполнять творческие функции, которые традиционно считаются прерогативой человека. Особенно выигрышно в этой связи смотрятся найденные с помощью компьютерных программ теоремы, известные алгоритмы доказательства которых потребовали бы выполнение чрезвычайно большого объема вычислений (яркий пример – известная теорема о четырех красках, доказанная Appelем и Хакеном в 1976 году). Хорошо известен тест Тьюринга для оценки меры интеллектуальности программы [Turing, 1950]. В свободной форме изложения его можно озвучить так: на свои вопросы специалист полу-

чает ответы от компьютера и человека, и на основании их он должен определить, с кем общался. Задача компьютерной программы – ввести специалиста в заблуждение, заставив его неверно указать своего «собеседника».

Если взять геофизическую проблематику и задаться вопросом, в какой мере данному методу решения обратной задачи (гравиразведки, магниторазведки) присущи признаки искусственного интеллекта, то, на наш взгляд, это можно сделать следующим образом. Геофизику, которому могут быть доверены функции экзаменатора, необходимо предоставить данные решения нескольких модельных и практических примеров. Причем одна часть примеров должна быть решена с помощью компьютерной реализации экзаменуемого метода, а другая – квалифицированным интерпретатором с помощью некоторой диалоговой системы моделирования. Экзаменатор должен догадаться, кем была выполнена интерпретация. Предоставленные ему данные должны включать графики поведения невязки в ходе итерационного подбора и графические изображения построенных решений обратных задач. На дисплей компьютера могут быть выведены также текущие приближения на нескольких итерациях из числа последних; для монтажного метода особо выигрышными были бы итерации, относящиеся к фазе перекристаллизации. Привести графику всего итерационного монтажного процесса нет смысла, поскольку метод попросту обнаружит себя, обеспечивая (за счет оптимизируемой плотности) небольшие значения невязки при малых размерах текущего модельного носителя, что совершенно не в стиле работы интерпретатора. К критериям наличия у того или иного метода решения обратной задачи признаков искусственного интеллекта можно отнести и такой: по некоторому числу первых итераций специалист не может однозначно предсказать дальнейший ход решения обратной задачи. Развитые монтажные технологии поиска допустимых вариантов интерпретации, предполагающие наличие нескольких управляющих параметров, способны заметно затруднить специалисту решение подобной задачи. Тем более если учесть, что такие параметры могут изменяться по ходу итерационного процесса в зависимости от текущих результатов его применения. И еще. Согласно теории Э. Ханта [1978], широкий класс задач, решаемых в рамках науки об искусственном интеллекте, можно представить как передвижение в пространстве состояний при наличии множества операторов, обеспечивающих такое передвижение. По существу, то же самое происходит с итерационными процессами, реализующими монтажные алгоритмы. Здесь на каждом шаге также существует множество альтернатив дальнейшего движения. В том случае, когда целевой задачей итерационного процесса является не какое-то одно конкретное решение (оптимальный вариант интерпретации), а любое допустимое решение из достаточно широкого подмножества альтернатив, предпосылки к тому, чтобы считать задачу прерогативой искусственного интеллекта, лишь усиливаются.

Можно поступить и следующим образом: решения всех примеров монтажным методом продублировать результатами интерпретации с помощью диалоговой системы моделирования. Затем из каждой пары решений экзаменатор должен выбрать то, что выполнено человеком. По большому же счету важно лишь, чтобы экзаменатору трудно было найти причины считать «монтажное» решение худшим по качеству, по сравнению с результатом работы диалоговой системы.

Мы убеждены, что при проведении такого тестирования экзаменатору не удастся избежать ошибок, и это даст право говорить о монтажных методах решения обратных задач как методах с элементами искусственного интеллекта. Однако скажем сразу, что рассуждения авторов об «интеллектуальных признаках» монтажных методов совершенно не преследуют цель каким-то образом примкнуть к модному течению в науке. Суть в другом. С прицелом на аддитивные технологии интерпретации, где потребуются большое число допустимых вариантов интерпретации и (в конструктивном плане) исключено использование диалоговых систем моделирования, а также визуальный анализ каждого из построенных вариантов решения обратной задачи, геофизик должен быть уверен в используемом этими технологиями рабочем инструменте – монтажных методах поиска приемлемых решений обратной задачи.

Наличие у монтажных методов признаков искусственного интеллекта – это лишь предпосылка к тому, что они выполнят свое основное предназначение, заключающееся в том, чтобы обнаруживать допустимые решения обратной задачи в тех случаях, когда это не удастся сделать интерпретатору за разумное время с помощью диалоговой системы моделирования.

5.2. Решение рудных обратных задач по нескольким производным гравитационного потенциала

Ведущие специалисты в области интерпретации потенциальных полей [Веселов, 1983; Страхов, 1987₁] неоднократно подчеркивали, что главным, и едва ли не единственным внутренним резервом повышения информативности результатов интерпретации, который еще остался у гравиразведки и магниторазведки как самостоятельных геофизических методов является переход на более глубокое экспериментальное исследование полей за счет измерения нескольких производных гравитационного потенциала (различных компонент магнитного поля), подкрепленное соответствующим алгоритмическим и программным обеспечением. С позиций господствующей теории интерпретации магнитных и гравитационных аномалий, «заточенной» на поиск оптимального решения обратной задачи, так, скорее всего, и есть. Правда, увеличение объемов априорной информации об источниках поля не гарантирует

повышения качества отдельно взятого решения обратной задачи, по какому бы критерию оптимальности оно ни было построено. В каких-то случаях это качество может даже снизиться! Соответствующие объяснения и наглядные примеры тому приведены в первой главе монографии. При использовании же аддитивных методов интерпретации, где дополнительные объемы данных способствуют сужению множества допустимых решений обратной задачи, подобный пессимистический исход невозможен.

В последние годы наметился существенный прогресс в развитии аппаратуры и методики спутниковых измерений тензора градиентов гравитационного поля и оптимизации методики гидромагнитной съемки [Михайлов, Диаман, 2006; Петровская, Вершков, 2014; Кочетов, Журавлев, 2018], что вселяет уверенность в широком внедрении таких исследований в практику проведения наземной гравиметрической и магнитной съемки. Эффективность и реальная отдача от таких работ будет определяться тем, как соответствующие методы решения обратных задач смогут воспользоваться возросшим объемом разнородной информации. Сужение множества Q допустимых вариантов интерпретации за счет комплексирования различных геофизических полей и их составляющих является лишь хорошей *предпосылкой* к повышению геологической эффективности рассматриваемых геофизических методов. Но произойдет ли это *реально* – зависит в главном от того, как мы распорядимся фактом наличия неопределенности, количественно выраженной в структуре и мощности множества Q .

В соответствии с тем, что данная глава, как мы говорили ранее, во многом носит постановочный характер, не стоит ожидать, что в этом разделе будут даны законченные решения. Для большей наглядности сути наших предложений рассмотрим задачу внутриметодного комплексирования в гравиразведке.

Возьмем случай, когда источник аномалии есть связанное тело \hat{S} эффективной плотности $\hat{\delta} > 0$, и интерпретацию необходимо выполнить по измерениям $\tilde{U}^{(j)}(X_{j,i})$, $i = 1, 2, \dots, n(j)$, элементов $U^{(1)}, U^{(2)}, \dots, U^{(m)}$ гравитационного поля. Считается, что в априорные ограничения входят максимально допустимые значения $\varepsilon^{(j)}$ среднеквадратического расхождения наблюдаемого поля $\tilde{U}^{(j)}(X)$ и подобранного модельного поля (обозначим его как $\bar{U}^{(j)}(X)$) в точках $X_{j,i}$. В качестве отправной точки при конструировании интересующего нас алгоритма возьмем метод А.В. Овчаренко [1975]. По ряду позиций все останется, как и в случае интерпретации данных измерений одной компоненты гравитационного поля. Здесь также возникает задача дополнения нулевого приближения, отвечающего данным бурения или другим косвенным данным, до конфигурационного носителя, обладающего всеми свойствами, прописанными в априорной информации. Для решения этой не связанной с гравиметрическими измерениями задачи можно, опять же, воспользоваться результатами, изложенными во второй главе. Процедура контроля за соблюдением

условия наследования текущим приближением априорных ограничений на геометрию, пространственное положение и топологию носителя источников поля также не зависит от того, осуществляется интерпретация по одной или нескольким компонентам поля. Так что, в этой части обобщение метода А.В. Овчаренко на случай многокомпонентной съемки, как, впрочем, и метод В.Н. Страхова, никаких изменений не претерпевают, кроме одного, о котором пойдет речь ниже.

Но даже если бы мы взяли модель источников поля в виде некоторого числа K парциальных тел \widehat{S}_k известной эффективной плотности $\widehat{\delta}_k > 0$, то и этот случай мало чем отличался бы от случая одиночного возмущающего тела. Точно так же здесь понадобится обеспечить (на некотором шаге $t = t(0)$) одновременный выход локально-оптимальных значений эффективных плотностей $\delta_{k,t}^*$ возмущающих масс, распределенных по парциальным носителям, на заданные значения $\widehat{\delta}_k$ (или близкие к ним). С этой целью можно воспользоваться приемом, разработанным для обобщенных алгоритмов РНК. А именно, задаться непрерывными и достаточно гладкими функциями φ_k , $k = 2, 3, \dots, K$, которые свяжут эффективные плотности масс $\delta_{k,t} = \varphi_k(\delta_{1,t})$, заполняющих текущие пробные приближения $\Omega_{k,t}$ к парциальным носителям \widehat{S}_k , с плотностью $\delta_{1,t}$ масс, распределенных по пробному носителю $\Omega_{1,t}$. Функции φ_k должны, напомним, удовлетворять условию: $\varphi_k(\delta_1) \rightarrow \widehat{\delta}_k$ при $\delta_1 \rightarrow \widehat{\delta}_1$. Таким образом, даже в случае интерпретации данных многокомпонентных измерений текущая плотность δ_1 остается единственным оптимизируемым параметром на каждом шаге t итерационного процесса.

Особенности постановки обратной задачи для случая многокомпонентной съемки начинают проявляться при выборе на шаге t локально-оптимального приближения к искомому носителю Ω^* . Среди пробных вариантов перехода к очередному приближению почти наверняка не окажется *абсолютно оптимального* – минимум невязки приближения измерений каждой из компонент гравитационного поля будет достигаться при *различных вариантах* наращивания ядра предшествующего приближения Ω_{t-1} на один элемент замощения из множества $O(\Omega_{t-1})$. Так, если запустить параллельно m итерационных процессов для каждой компоненты $U^{(j)}$ гравитационного поля, то с ростом номера шага t все заметнее текущие приближения, построенные по измерениям каждой из этих компонент поля, будут отличаться друг от друга. Рассчитывать на простую декомпозицию задачи не приходится – решения обратных задач $\Omega^*(j)$, построенные по парциальным составляющим поля, с большой вероятностью будут заметно различаться между собой.

Таким образом, на каждом шаге t итерационного процесса возникнет стандартная ситуация для постановки задачи многокритериальной оптимизации, где в качестве *частных критериев выбора* выступят невязки подбора измерений отдельных компонент $U^{(j)}$ гравитационного поля. Кстати, если при по-

строении алгоритма совместной интерпретации данных многокомпонентной гравиметрической съемки мы взяли бы за основу метод РНК, то неопределенность выбора локально-оптимального решения на шаге итерационного процесса повысилась бы за счет того, что минимумы невязок каждого из полей достигались еще и при различных значениях эффективной плотности. Остается добавить, что в многокритериальных задачах выбора решения можно воспользоваться принципом Парето-оптимальности или близким к нему принципом оптимальности по Слейтеру [Кини, Райфа, 1981; Подиновский, Ногин, 1982].

Конкретизируем сказанное выше, ограничившись регулярным замощением $V = \{V_n\}$ изучаемой части пространства D . Ставится задача построения допустимого связного носителя Ω^* , удовлетворяющего (совместно с эффективной плотностью $\hat{\delta}$) априорной информации G об особенностях геометрии и пространственного положения возмущающих масс и порождаемых ими полей $U^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, m$. В общем случае эти поля могут быть измерены в различных множествах точек $X_{j,i}$. Через M^* обозначим оценку эффективной избыточной массы тела \hat{S} , которую (наряду с эффективной плотностью $\hat{\delta}$) необходимо знать при использовании метода А.В. Овчаренко. Способ построения этой оценки нас в данном случае не интересует; для удобства оценку M^* можно отнести к априорной информации G .

Пусть Π_t – множество номеров r элементов V_r замощения из оболочки $O(\Omega_{t-1})$ предшествующего приближения Ω_{t-1} к искомой конфигурации Ω^* , включение любого из которых в ядро $\mathcal{Y}(\Omega_{t-1})$ обеспечивает наследование конфигурацией $\Omega_{t-1} \cup V_r$ свойств конфигурации Ω_{t-1} , прописанных априорной информацией G . Тогда

$$\delta_t = M^* / (\mu(\Omega_{t-1}) + \mu(V_0)) \quad (5.6)$$

– эффективная плотность модельных масс на шаге t в методе А.В. Овчаренко, где V_0 – протоэлемент замощения V .

Для каждого допустимого к сравнению варианта очередного приближения $\Omega_{t,r} = \Omega_{t-1} \cup V_r$, $r \in \Pi_t$ можно подсчитать для всех $j = 1, 2, \dots, m$ значения $\varepsilon_{t,r}^{(j)}$ невязки наблюдаемого поля $\tilde{U}^{(j)}(X)$ в точках $X_{j,i}$ и модельного поля $U^{(j)}(\Omega_{t,r}, \delta_t; X)$ масс, распределенных с эффективной плотностью δ_t по конфигурационному носителю $\Omega_{t,r}$. Если, следуя основной концепции монтажных алгоритмов, на каждом шаге t считать невязки $\varepsilon_{t,r}^{(j)}$ частными критериями выбора локально-оптимального решения, то множество оптимальных по Парето вариантов очередного приближения Ω_t будет состоять из всех тех допустимых к сравнению конфигураций $\Omega_{t,r}$, которые не уступают остальным по всем частным критериям и по меньшей мере по одному из них являются более предпочтительными. Все решения из множества оптимальных по Парето являются, вообще говоря, равноценными и не сопоставимыми. Любой

элемент этого множества можно взять в качестве локально-оптимального приближения Ω_t при совместной интерпретации нескольких компонент гравитационного поля.

В тех случаях, когда задача имеет множество равноправных решений зачастую возникает желание отыскать среди них наилучшее. В нашем случае можно в принципе свести задачу к однокритериальной путем линейной свертки парциальных функционалов невязки. В геофизических приложениях такой подход является доминирующим [Голиздра, 1988]. Однако при этом всегда возникает проблема выбора весовых коэффициентов в такой свертке. Проблема усугубляется еще и тем, что каждый частный критерий имеет свою собственную шкалу. Впрочем, по меньшей мере один оправданный критерий выбора наилучшего из множества оптимальных по Парето решений назвать можно. Суть в том, что в нашей задаче эти множества относятся не к итоговому результату интерпретации, а всего лишь к одной из итераций t . В этой связи необходимо заботиться о том, чтобы всем частным критериям обеспечить равные возможности в плане выхода на допустимые значения невязок $\varepsilon^{(j)}$. С этой целью для каждого варианта r вычислим функционал

$$\Phi_{t,r} = \max \left\{ \frac{\varepsilon_{t,r}^{(j)} - \varepsilon^{(j)}}{\varepsilon^{(j)}}, j = 1, 2, \dots, m \right\}. \quad (5.7)$$

и в качестве наилучшего на шаге t возьмем из множества оптимальных по Парето решений тот вариант r , на котором достигнуто наименьшее значение этого функционала.

5.3. Решение обратных задач с неполной информацией о петрофизических свойствах

Очевидные достоинства монтажных алгоритмов наталкивают на мысль о распространении накопленного опыта на смешанные постановки обратных задач, в которых доминирующей является рудная компонента. Тем более, рудные постановки обратных задач – при безусловном их праве на существование – не вполне адекватны физико-геологическим реалиям. Точные значения плотности геологических тел в естественном залегании никогда не известны. Горные породы – это сложные гетерогенные образования. Сложенные ими геологические тела являются неоднородными по физическим характеристикам мультифрактальными объектами [Блох, 2004; Кобрунов, 2008], так как петроплотностные и петромагнитные характеристики однородных по вещественному составу объектов далеко не всегда являются константами. Например, намагниченность однородных по составу магнетовозмущающих тел, обладающих высокой магнитной восприимчивостью, зависит от их формы и может

быть различной для отдельных фрагментов тел [Миков, 1975]. Признание существования неопределенности в отношении физических параметров (даже если они играют, как в случае рудной обратной задачи, роль мешающих параметров) и отказ от предпосылки об известных их значениях являются неотъемлемым атрибутом постановки обратной задачи гравиразведки и магнито-разведки, претендующей на адекватность.

Если для определенности взять обратную задачу гравиметрии, то постоянные величины, которые мы считали истинными эффективными плотностями локальных тел \hat{S}_j , это лишь некие условные «средние» значения $\bar{\delta}_j$ природной эффективной плотности $\hat{\delta}_j(X)$, которая в действительности является неизвестной функцией пространственных координат. Подобная подмена предполагает, что распределение масс плотности $\bar{\delta}_j$ по истинному парциальному носителю \hat{S}_j порождает «приблизительно» то же самое поле, что распределение масс переменной плотности $\hat{\delta}_j(X)$ в том же объеме \hat{S}_j . Существование таких значений $\bar{\delta}_j$ в большинстве случаев обеспечивает присущая обратным задачам ε -эквивалентность, но безошибочно установить величину $\bar{\delta}_j$ невозможно по ряду причин, в числе которых заметное различие физических свойств горных пород, определенных на образцах и в естественном залегании [Вахромеев, Давыденко, 1987].

5.3.1. Предпосылки к использованию монтажных алгоритмов для решения смешанных обратных задач

Перспективы успешного решения обратных задач при априорных предположениях, заведомо не вполне адекватных природным соотношениям, связаны с введением в допустимое значение невязки модельного и наблюдаемого полей поправки за неадекватность. Требуется также введение поправки в оценку точности самих результатов интерпретации. Этот вывод относится к любому классу обратных задач гравиразведки и магниторазведки [Балк, 2013₁].

В случае обратной задачи гравиразведки рудного типа, которую предполагается решать с помощью монтажного метода, именно «средние» значения эффективной плотности масс, распределенных по парциальным носителям, будем считать истинными, взяв в качестве области их возможных значений некоторые интервалы. Таким образом, обратная задача тотчас переходит в класс смешанных обратных задач.

Попытки создания смешанных методов решения обратных задач с неполной информацией о геометрических и физических параметрах аномалиеобразующих тел на базе классических методов минимизации предпринимались неоднократно. Но, вновь напомним, что даже в сугубо рудных постановках обратных задач возникает проблема совместимости наиболее распространенных мо-

дельных классов источников поля и методов решения условно-экстремальных задач. В смешанных постановках обратных задач грави- и магниторазведки ситуация усложняется неоднородностью пространства оптимизируемых параметров, имеющих различный физический смысл и размерность. Неслучайно, известные автоматизированные технологии интерпретации гравиметрических и магнитных данных в смешанных постановках обратной задачи представляют собой крупноблочные итерационные схемы, в которых процедура уточнения физических параметров (при закрепленных геометрических параметрах) и процедура корректировки геометрических параметров (при фиксированных физических параметрах) поочередно сменяют друг друга [Булах, 2010].

Коль скоро монтажные алгоритмы открыты для *совместного* учета разнородных априорных ограничений на геометрию, пространственное положение и топологические особенности возмущающих объектов, а также допустимый уровень помех в измерениях поля, возникает естественное желание дополнить рудную постановку обратной задачи некоторыми элементами линейных постановок. Модификацию обобщенного метода РНК, рассчитанную на такую комбинированную постановку, назовем *смешанным алгоритмом РНК*.

Расставим сразу все точки над i , имея в виду сложившиеся стереотипы. Достаточно распространенным является мнение, что смешанные обратные задачи гравиразведки лишены какой бы то ни было перспективы из-за их значительной неустойчивости. С этим можно согласиться, если целью интерпретации ставить построение решения обратной задачи с высокой точностью при сравнительно малом объеме априорной информации. В первой главе монографии мы категорически возражали против попыток за счет математических ухищрений убедить геофизиков в возможности извлечь достоверную информацию из данных, в которых эта информация попросту отсутствует. Наша цель – не внушая иллюзию благополучия, дать геофизику возможность почувствовать всю степень неопределенности, сопутствующей решению обратной задачи. Если реалии таковы, что смешанные обратные задачи объективно возникают на практике, необходимо располагать методами их решения, способными показать интерпретатору, на что в этом случае он может действительно рассчитывать.

5.3.2. Алгоритм РНК при нечеткой информации об эффективной плотности (намагниченности)

Пусть измеренные в n точках X_i произвольного рельефа значения $\Delta\tilde{g}(X_i)$ аномалии Δg обусловлены массами, распределенными по m парциальным носителям \hat{S}_j , $j = 1, 2, \dots, m$ с переменными, довольно гладкими, но не известными эффективными плотностями $\hat{\delta}_j(X) > 0$, $X \in \hat{S}_j$. Считается, что в постановке

задачи могут присутствовать все типы априорных ограничений, которые мы перечислили при описании обобщенного метода РНК и которые в смешанном алгоритме РНК будут учитываться аналогичным образом. Предполагается, что существуют некие «средние» значения $\bar{\delta}_j$ эффективных плотностей, при которых расхождением поля, обусловленного парциальным телом \hat{S}_j плотности $\bar{\delta}_j(X)$, $X \in \hat{S}_j$, и поля, вызванного массами со «средней» плотностью $\bar{\delta}_j$, заключенными в тех же самых носителях \hat{S}_j , можно пренебречь. Либо, что принципиально ничего не меняет, эти расхождения интерпретатор может априори оценить и внести их в качестве аддитивной поправки в допустимое значение невязки наблюдаемого поля и поля построенной модели плотностной среды. При этом считается, что хотя точные значения $\bar{\delta}_j$ неизвестны, но с уверенностью их можно заключить в заданные интервалы $[\delta'_j, \delta''_j]$, $\delta'_j > 0$.

Казалось бы, при столь простых ограничениях на плотности сложность задачи практически останется прежней. Но плотность в монтажных алгоритмах – это ведь «особый» параметр, который управляет всем итерационным процессом и входит в критерий его завершения. Требуется не просто обеспечить одновременное попадание на некотором шаге k всех текущих локально-оптимальных значений плотности $\delta_{j,k}$ в интервалы $[\delta'_j, \delta''_j]$ и удерживать их в этих интервалах на всех последующих итерациях. Если бы этого было достаточно, мы могли изначально – как в обобщенном методе РНК – зафиксировать плотности, полагая, к примеру $\bar{\delta}_j = (\delta'_j + \delta''_j)/2$, и действовать дальше уже по известной схеме. Но может случиться так, что при таких зафиксированных плотностях итерационный процесс не выйдет на допустимое значение невязки, тогда как при каких-то других значениях $\bar{\delta}_j$ из указанных интервалов этого можно было достичь.

Правда, в случае $m = 1$ все обстоит просто. Допустимое решение будет построено, если невязка достигнет приемлемого значения при любом значении эффективной плотности из заданного интервала. В других простых случаях (число m тел невелико, а поправка в невязку за неадекватность, обусловленную предположением о постоянстве плотности парциальных тел S_j , взята с таким запасом, что допустимые решения рудной обратной задачи существуют, скорее всего, при любом векторе эффективных плотностей из заданных интервалов $[\delta'_j, \delta''_j]$) можно было бы действовать простым перебором. А именно, покрыть каждый интервал $[\delta'_j, \delta''_j]$ сеткой Γ_j :

$$\delta_j = \delta_j^{(1)}, \delta_j^{(2)}, \dots, \delta_j^{L(j)} = \delta_j'' \quad (5.8)$$

и для всех комбинаций эффективных плотностей решить обратную задачу обобщенным методом РНК. В том случае, когда удастся построить не одно, а несколько допустимых решений, все они найдут применение в аддитивных технологиях интерпретации. Но такого рода перебор – это, конечно же, крайний выход из положения.

Если текущим эффективным плотностям $\delta_{j,k}$ оставить статус свободных, не связанных друг с другом параметров, то эвристические соображения требуют от алгоритма, чтобы на некотором шаге эти плотности вошли в интервалы $[\delta'_j, \delta''_j]$ достаточно «плавно», а не были «втиснуты» в них волевым путем, что привело бы к скачкообразному увеличению невязки. Если до некоторой итерации плотностям $\delta_{j,k}$ была предоставлена относительная свобода, то за несколько шагов до завершения итерационного процесса алгоритм должен решить, что этим плотностям пора целенаправленно двигаться к значениям $\bar{\delta}_j$. Таковы наши общие соображения по поводу того, как не в ущерб минимизации невязки организовать плавный вход подбираемых эффективных плотностей в заданные интервалы допустимых значений $\bar{\delta}_j$.

В частности, нами предлагается следующая организация итерационного процесса. Разобьем алгоритм построения допустимого решения $\langle \Omega^*; \delta^* \rangle$:

$$\Omega^* = \bigcup_{j=1}^m \Omega_j^*, \delta^* = (\delta_1^*, \delta_2^*, \dots, \delta_m^*); \delta_j^* \in [\delta'_j, \delta''_j], j = 1, 2, \dots, m \quad (5.9)$$

обратной задачи на две стадии [Балк и др., 2011₃]. На итерациях $k = 1, 2, \dots$, составляющих первую стадию процесса, плотности $\delta_{j,k}$, $j = 2, 3, \dots, m$ связываются с оптимизируемой плотностью $\delta_{1,k}$ непрерывными зависимостями

$$\Omega^* = \bigcup_{j=1}^m \Omega_j^*, \delta^* = (\delta_1^*, \delta_2^*, \dots, \delta_m^*); \delta_j^* \in [\delta'_j, \delta''_j], j = 1, 2, \dots, m, \quad (5.10)$$

подчиняющимися условию $\varphi_j(\delta_{1,k}; \delta_1'', \delta_j'') \rightarrow \delta_j''$ при $\delta_{1,k} \rightarrow \delta_1''$. В частности, можно использовать те же мультипликативные зависимости, которые предлагались ранее в обобщенном методе РНК в случае известных плотностей. Эти зависимости не позволяют оптимизируемым эффективным плотностям $\delta_{j,k}$ «хаотично блуждать»; они заставляют плотности согласованно двигаться «в сторону» границ их допустимых значений. А главное, они гарантируют, что за конечное число шагов k локально-оптимальное значение $\delta_{1,k}$ опустится до верхней границы δ_1'' возможного значения $\bar{\delta}_1$. Таким образом, первая стадия итерационного процесса копирует обобщенный алгоритм РНК с точностью до замены в критерии его завершения значения $\hat{\delta}_1$ на значение δ_1'' .

Предположим, что на некотором шаге k плотность $\delta_{1,k}^*$, минимизирующая совместно с другими $m - 1$ локально-оптимальными плотностями $\delta_{1,k}^*$, $j = 2, 3, \dots, m$ текущее значение невязки, удовлетворила неравенству $\delta_{1,k}^* \leq \delta_1''$. Это должно стать сигналом к тому, что пора переходить ко второй стадии итерационного процесса. На ней минимизирующие невязку плотности $\delta_{j,k}^*$, $j = 2, 3, \dots, m$ должны быть выбраны из допустимых интервалов $[\delta'_j, \delta''_j]$. С этой целью свяжем плотности $\delta_{j,k}$, $j = 2, 3, \dots, m$ с плотностью $\delta_{1,k}$ монотонно убыв-

вающими и достаточно гладким зависимостями $\delta_{j,k} = \phi_j(\delta_{1,k}; \delta'_1, \delta'_j)$, подчиняющимися условию: $\phi_j(\delta_{1,k}; \delta'_1, \delta'_j) \rightarrow \delta'_j$ при $\delta_{1,k} \rightarrow \delta'_1$. Если на некотором шаге $k = k(0)$ достигнуто приемлемое значение невязки, то текущее приближение $\Omega_{k(0)}^* = \Omega_{1,k(0)}^* \cup \Omega_{2,k(0)}^* \cup \dots \cup \Omega_{m,k(0)}^*$ есть одно из допустимых решений обратной задачи.

Нас могут интересовать и другие допустимые решения, которые можно построить в ходе итерационного процесса. Поэтому его нежелательно прерывать, напротив, его необходимо вести, пока локально-оптимальное значение плотности $\delta_{1,k}^*$ не выйдет в малую окрестность нижней границы интервала $[\delta'_1, \delta''_1]$, «собирая» по ходу этих («не обязательных») итераций все обнаруженные допустимые решения обратной задачи. Если после того, как значения $\delta_{1,k}^*$ пробежали интервал $[\delta'_1, \delta''_1]$, не удалось получить ни одного допустимого решения обратной задачи, можно опробовать другие функциональные зависимости ϕ_j . Как показано в работе [Балк и др., 2011₃], можно вообще отказаться от использования (фиксированных на протяжении итерационного процесса) функций φ_j и ϕ_j в пользу системы адаптивных весовых коэффициентов, значения которых определяются по результатам построений, выполненных на предыдущей итерации, и которые способны регулировать очередность разрастания ядер текущих приближений к парциальным носителям.

Как бы то ни было, в предложенной схеме решения обратной задачи опробуются далеко не все возможные векторы $\delta_k = (\delta_{1,k}, \delta_{2,k}, \dots, \delta_{m,k})$, а лишь некоторые «траектории» в области допустимых значений $\delta_{j,k}$. Надежда на то, что ε -эквивалентность, которая в других условиях выступает как мощный деструктивный фактор, а в нашем случае служит союзником, все равно возьмет свое, и алгоритм выйдет на допустимое решение обратной задачи, может и не оправдаться. В таком случае можно попробовать сочетать обобщенный алгоритм РНК с методами решения простейших условно-экстремальных задач. Здесь возможны различные варианты комбинации алгоритмов.

Можно начать с того, что реализовать обобщенный метод РНК в предположении, что известны плотности $\hat{\delta}_j = (\delta'_j + \delta''_j)/2$, $j = 1, 2, \dots, m$. Если при этом метод выйдет на допустимое по невязке решение обратной задачи, то цель достигнута. Если нет, то решаем линейную обратную задачу: минимизировать среднеквадратическое значение невязки наблюдаемого поля и поля модельных масс, распределенных с плотностями δ_j по ранее построенным парциальным носителям Ω_j^* при ограничениях $\delta'_j \leq \delta_j \leq \delta''_j$. Пусть δ^* – вектор плотностей δ_j^* , при котором достигнут минимум функционала невязки. В случае, когда это значение функционала оказалось допустимым, поставленная цель достигнута. Если и этого оказалось недостаточно, то можно организовать итерационный процесс регулируемой направленной перекристаллизации и на каждом его пробном шаге решать линейную обратную задачу гравиразведки – по сути, задачу квадратичного программирования при заданных двухсто-

ронных ограничениях на оптимизируемые плотности δ_j – и следить за тем, удалось ли достигнуть нужного значения невязки.

В смешанных алгоритмах решения обратных задач методы решения условно-экстремальных задач в принципе могут быть задействованы на каждом шаге итерационного процесса. В такого рода алгоритмах свободным параметром также будет являться плотность масс, заключенных в первом парциальном носителе, а плотности δ_j оставшихся $m - 1$ парциальных тел будут заключены в интервалах, длины которых уменьшаются с ростом номера итерации и которые должны стягиваться к интервалам $[\delta'_j, \delta''_j]$ и совпасть с ними, как только оптимизируемая плотность первого тела попадает в интервал $[\delta'_1, \delta''_1]$. Если принять во внимание, что размерность m этих условно-экстремальных задач на практике будет сравнительно мала, в вычислительном плане такой подход особых проблем испытывать не должен.

5.4. Монтажные методы в структурных и структурно-рудных обратных задачах гравиразведки

5.4.1. Монтажный подход к решению обратной задачи гравиразведки для финитной контактной границы

При решении обратной задачи для границы раздела двух различных по плотности горизонтов идея монтажного подхода была впервые применена в алгоритме, предложенном Т.В. Балк [1983₁], и опробована при интерпретации гравитационных аномалий Байкальской рифтовой зоны [Балк Т. и др., 1988]. Мы находим, что основной принцип структурирования итерационного процесса, заложенный в методе РНК и заключающийся в локальном изменении модели на каждом шаге, неявно используется также и в методе локальных поправок И.Л. Пруткина [1983, 1986; Акимова и др., 2013]. Постановка обратной задачи гравиразведки, на которую распространяется метод Пруткина, тяготеет к классической постановке структурной обратной задачи гравиразведки – бесконечно вытянутые границы раздела, стремящиеся к заданным горизонтальным асимптотам, известные значения скачков плотности на границах раздела двух плотностных сред, и почти полное отсутствие априорных ограничений «частного характера».

Суть предложения, сформулированного в работе [Балк Т., 1983], состоит в следующем. Пусть контактная граница раздела двух сред описывается некоторой непрерывной функцией $z = \widehat{\varphi}(x) \geq 0$ при $x \in [a, b]$. Координаты точек $x = a$ и $x = b$ известны. Зададимся сеточным покрытием Γ интервала $[a, b]$ – $a = \bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \dots < \bar{x}_l = b$. В качестве класса M_2 модельных границ раздела двух плотностных сред возьмем семейство ломаных $\varphi(\{(\bar{x}_t, z_t)\}_{t=1}^l; x)$ с вершинами в

точках (\bar{x}_t, z_t) , $t = 1, 2, \dots, l$, $\bar{x}_1 = a$, $\bar{x}_l = b$. Густоту сети Γ интерпретатор должен выбрать так, чтобы с высокой степенью надежности можно было утверждать, что в классе M_2 найдется ломаная, аппроксимирующая границу раздела $\widehat{\varphi}(x)$ с приемлемой точностью. Разумеется, это не гарантирует, что мы и кривую $\widehat{\varphi}(x)$ оценим с такой же точностью. Зато это дает нам возможность пренебречь неадекватностью модельного класса M_2 .

Подражая концепции РНК, приближенное решение $z = \varphi^*(x)$ обратной задачи будем искать в виде ломаной, являющейся последним (замыкающим) элементом некоторой конечной последовательности ломаных $\varphi_k(x) \in M_2$, таких что $\varphi_{k-1}(x) \leq \varphi_k(x)$ для всех $x \in [a, b]$. При этом последующее приближение $\varphi_k(x)$ образуется из предшествующего $\varphi_{k-1}(x)$ путем приращения координаты $z_{k-1,t}$ одного из ее узлов $(\bar{x}_t, z_{k-1,t})$, $t = 1, 2, \dots, l$ на заданную величину $\Delta z > 0$ при условии, что функция $\varphi_k(x)$ наследует свойства функции $\varphi_{k-1}(x)$, предписанные априорной информацией. Выбор конкретного из l узлов осуществляется, как и в методе РНК, по критерию минимума невязки в соответствии с принципом локальной оптимизации. При этом плотность масс, заключенных между дневной поверхностью и контактной границей, считается оптимизируемым параметром.

Между приведенной схемой решения обратной задачи для финитной контактной границы и алгоритмом РНК легко заметить много общего. Как и в методе РНК, на каждом шаге k итерационного процесса в текущее модельное приближение $\varphi_{k-1}(x)$ к искомому решению $z = \varphi^*(x)$ обратной задачи вносится локальное изменение. В алгоритме РНК число пробных вариантов, из которых будет выбран оптимальный вариант включения одного элемента замощения в ядро предшествующего приближения, определяется длиной оболочки последнего. Здесь число пробных вариантов на шаге k на протяжении всего итерационного процесса остается неизменным, равным l . Среднее расстояние между узлами \bar{x}_t сеточного покрытия Γ и величина Δz играют здесь ту же роль, что и размеры элементов замощения в алгоритме РНК. О сходстве обоих алгоритмов, выраженном в том, что известный параметр – эффективная плотность – считается свободным, мы уже говорили.

Желая видеть еще большую близость между «структурным» и «рудным» итерационными процессами, что могло бы содействовать построению алгоритмов решения структурно-рудной обратной задачи путем сведения двух «парциальных» итерационных процессов – структурного и рудного – в один общий, мы на время отставим в сторону термин «граница раздела». Вместо этого будем считать, что наблюдаемая аномалия $\Delta \tilde{g}$, заданная в точках x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, представляет собой гравитационный эффект масс, распределенных с эффективной плотностью $\hat{\delta}$ по некому связному носителю \hat{S} . Часть его границы – рельеф $\phi(x)$ дневной поверхности – закреплена, часть границы известна не полностью – это отрезки, лежащие на вертикальных прямых $x = a$ и

$x = b$, координаты одного из концов каждого из которых будут определены по завершении итерационного процесса. Оцениванию подлежит лишь нижняя кромка носителя, описываемая функцией $\varphi(x)$. Соответственно, приближение к решению структурной обратной задачи на шаге k можно интерпретировать в терминах носителя

$$S_k = \{(x, z) : a \leq x \leq b; \phi(x) \leq z \leq \varphi_k(x)\}. \quad (5.11)$$

Мы видим, что стоило только избавиться от привычной идеализации модели среды, выражающейся в бесконечно протяженных границах раздела (это упрощало вычисление интегралов при подсчете гравитационного эффекта), как различия между обратной задачей для контактной границы и рудной обратной задачей начинают стираться. Справедливости ради следует заметить также, что такой классический вариант модели является весьма идеализированным с точки зрения геологии: сложно представить наличие двусторонних выходов на асимптоту реальной литологической границы.

Локальную деформацию модельной границы на шаге k можно интерпретировать как наращивание носителя S_{k-1} на своего рода элемент замощения. Если на шаге k локально-оптимальным преобразованием ломаной $\varphi_{k-1}(x)$ в ломаную $\varphi_k(x)$ является сдвиг ее первой или последней (l -ой) вершины вниз на величину Δz , то в ассоциированной рудной задаче речь идет о наращивании носителя S_{k-1} на элемент замощения в виде треугольника. В остальных случаях речь идет о наращивании носителя S_{k-1} на четырехугольник. Поэтому в ассоциированной задаче мы можем также говорить о своего рода замощении, правда, заведомо нерегулярном. Это замощение не задается заранее, как в методе РНК, а выстраивается в ходе итерационного процесса. Остается добавить, что если в обобщенном методе РНК нулевое приближение Ω_0 должно удовлетворять условию $\Omega_0 \subset \hat{S}$, то и в структурной обратной задаче, сформулированной в терминах эквивалентной рудной обратной задачи для связного носителя с частично закрепленной границей, это условие также остается. Только теперь оно трансформируется в следующее требование к нулевому приближению $\varphi_0(x)$ для нижней кромки носителя Ω_0 : $\varphi_0(x) \leq \hat{\varphi}(x)$, $x \in [a, b]$. Критерием прерывания итерационного процесса все также является выход оптимизируемого значения эффективной плотности на заданное истинное значение δ .

Таким образом, структурную обратную задачу для одной границы раздела можно рассматривать с двух позиций – как собственно структурную задачу и как особый, частный случай рудной обратной задачи. Остается указать, какая априорная информация доступна предложенному алгоритму решения обратной задачи для границы раздела. Заранее ясно, что поскольку речь идет о частном случае рудной задачи, то вряд ли можно заметно расширить список априорных ограничений в сравнении с действующим для обобщенного ите-

рационального процесса РНК. С другой стороны, в случае структурной обратной задачи надо сделать акцент на особенности нижней кромки носителя масс. Мы нашли необходимым ввести следующие дополнительные ограничения.

1. Закреплены отдельные точки (или даже локальные участки) подбираемой границы раздела на основании данных бурения или сейсморазведки (такие ограничения учитываются сразу в нулевом приближении $\varphi_0(x)$ – соответствующие вершины ломаной закрепляются и налагается запрет на изменение их координат z на всех последующих итерациях k).

2. Вводится условие гладкости нижней кромки носителя, выраженное в терминах дифференциальных свойств модельных границ раздела из класса M_2 ; сюда же можно отнести и априорные предположения о максимально возможном числе экстремумов у этих границ (его легко будет подсчитать по числу переходов знака в последовательности $\varphi_k(\bar{x}_t) - \varphi_k(\bar{x}_{t-1})$, $t = 2, 3, \dots, l$).

5.4.2. Объединение «парциальных» итерационных процессов при решении структурно-рудной обратной задачи

Вероятно, читатель, проникшийся идеологией монтажного подхода к обратным задачам рудного типа, самостоятельно придет к мысли, что локально-оптимальный шаг k итерационного алгоритма решения смешанной структурно-рудной обратной задачи будет состоять в выборе наиболее предпочтительного (по невязке) варианта локального изменения модели среды, отвечающей предшествующему приближению $\langle \Omega_{k-1}, \varphi_{k-1}(x) \rangle$. Речь может идти либо об изменении рудной (Ω_{k-1}), либо структурной ($\varphi_{k-1}(x)$) компоненты модели источников аномалии, построенной на предшествующей $(k - 1)$ -ой итерации. Причем нельзя заранее предсказать, по какому закону в течение всего итерационного процесса будет происходить чередование «рудных» и «структурных» изменений общей модели плотностной среды.

Возьмем для простоты двумерную постановку и пусть модель источников поля представляет собой объединение m связных локальных тел \hat{S}_j эффективной плотности $\hat{\delta}_j > 0$ и области \hat{S} , заполненной осадочными породами эффективной плотности $\hat{\delta}_0$, которые заключены на интервале $[a, b]$ между дневной поверхностью и границей раздела $\hat{\varphi}(x)$ двух сред. Как и в рудной обратной задаче для многосвязного распределения возмущающих масс, здесь возникает проблема обеспечения одновременного выхода оптимизируемых плотностей на истинные значения $\hat{\delta}_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, и $\hat{\delta}_0$. Мы уже обсуждали эту проблему и нашли целесообразным оставить свободным параметром только одну плотность. Пусть на каждом шаге k итерационного процесса это будет плотность $\delta_{0,k}$ масс, заключенных (на отрезке $[a, b]$) между дневной поверхностью и текущим приближением к границе раздела $\hat{\varphi}(x)$ (разумеется,

за вычетом фрагментов пространства, занятых какими-то из возмущающих тел \widehat{S}_j). Что касается оставшихся m плотностей δ_j , то их необходимо связать с плотностью δ_0 зависимостями $\delta_j = f_j(\delta_0)$, удовлетворяющими условию:

$$f_j(\delta) \rightarrow \widehat{\delta}_j \text{ при } \delta \rightarrow \widehat{\delta}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (5.12)$$

Многообразие способов задания функций $f_j(\delta)$ порождает альтернативные варианты «траектории движения» текущих приближений, начиная от нулевого приближения и заканчивая итоговым решением обратной задачи, и какая из этих траекторий окажется предпочтительней, заранее спрогнозировать невозможно. При изложении обобщенного метода РНК мы привели одну из таких функций. В этот раз мы усложним ее структуру путем введения дополнительного параметра λ_j :

$$f_j(\delta) = \widehat{\delta}_j \left(\frac{\lambda_j + \delta}{\lambda_j + \widehat{\delta}} \right). \quad (5.13)$$

В вопросе выбора параметров λ_j любая эвристика хороша, если она позволит итерационному процессу выйти на одно из допустимых решений обратной задачи. Как показали численные эксперименты, достаточно успешной оказалась идея предоставить алгоритму (за счет параметров λ_j) те же стартовые условия, которые возникают на нулевой итерации в случае свободных плотностей δ_j . Пусть $\delta_j^{(\min)}$, $j = 1, 2, \dots, m$, и $\delta^{(\min)}$ – значения плотностей масс, распределенных по соответствующим нулевым приближениям к парциальным носителям, при которых среднеквадратическое значение невязки минимально. Мы не будем останавливаться на чисто гипотетическом случае совпадения каких-то из минимизирующих плотностей с соответствующими истинными значениями.

Итак, потребуем дополнительно выполнения условия:

$$f_j(\delta) \rightarrow \delta_j^{(\min)} \text{ при } \delta \rightarrow \delta^{(\min)}. \quad (5.14)$$

Тогда

$$\lambda_j = \frac{\delta_j^{(\min)} \widehat{\delta} - \delta^{(\min)} \widehat{\delta}_j}{\widehat{\delta}_j - \delta_j^{(\min)}}. \quad (5.15)$$

Подставляя каждое из двух последних выражений для λ_j в соответствующие формулы для $f_j(\delta)$, получим окончательную формулу для зависимостей, обеспечивающих не только одновременный выход эффективных плотностей δ , $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ на заданные истинные значения, но и минимально возможное значение невязки на нулевом приближении:

$$f_j(\delta) = \frac{\widehat{\delta}_j(\delta^{(\min)} - \delta) + \delta_j^{(\min)}(\delta - \widehat{\delta})}{\delta^{(\min)} - \widehat{\delta}}. \quad (5.16)$$

Напомним, что пробный вариант перехода от предшествующего к текущему приближению к искомому решению может заключаться либо в наращивании ядра одного из парциальных носителей на элемент замощения, либо в локальной деформации нижней кромки «структурного носителя» тяготеющих масс. Ранее мы включили в список используемых ограничений в обобщенном методе РНК условие допустимого контактирования отдельных тел в модели источников поля. Если условно рассматривать структурно-рудную обратную задачу как исключительно рудную задачу для $(m + 1)$ тела, то это условие здесь может быть задействовано в полной мере – если локальный источник \widehat{S}_j лежит выше границы раздела $\varphi(x)$, то его конфигурационное приближение будет контактировать с приближением к (неодносвязной) области \widehat{S} по всей своей границе.

Выпишем теперь формулу для вычисления локально-оптимального значения плотности δ в каждом пробном варианте. Пусть на любом шаге k итерационного процесса в рамках определенного пробного варианта перехода от предшествующего приближения к текущему действуют следующие обозначения: $\Omega_{j,k}$, $j = 1, 2, \dots, m$, – парциальные конфигурационные приближения к истинным носителям \widehat{S}_j ; S_k – приближение к области \widehat{S} , заключенной между графиками функций $\phi(x)$ и $\varphi_k(x)$, $x \in [a, b]$, за вычетом подобласти, занятой «рудными носителями» $\Omega_{j,k}$, $j = 1, 2, \dots, m$, или их фрагментами; $\Delta g(\Omega_{j,k}; x_i)$ – значение в точке x_i поля масс единичной плотности, распределенных по рудным парциальным носителям $\Omega_{j,k}$; $\Delta g(S_k; x_i)$ – значение в точке x_i поля масс единичной плотности, распределенных по структурному фрагменту S_k общего носителя возмущающих масс. Тогда

$$\delta = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \Delta \widetilde{g}(x_i) + \sum_{i=1}^n A_i B_i}{\sum_{i=1}^n A_i^2}, \quad (5.17)$$

где

$$A_i = \Delta g(S_k; x_i) + \sum_{j=1}^m a_j \Delta g(\Omega_{j,k}; x_i), \quad (5.18)$$

$$B_i = \sum_{j=1}^m b_j \Delta g(\Omega_{j,k}; x_i), \quad (5.19)$$

$$a_j = \frac{\delta_j^{(\min)} - \widehat{\delta}_j}{\delta^{(\min)} - \widehat{\delta}}, \quad (5.20)$$

$$b_j = \frac{\delta^{(\min)} \widehat{\delta}_j - \delta_j^{(\min)} \widehat{\delta}}{\delta^{(\min)} - \widehat{\delta}}. \quad (5.21)$$

В принципе не составило бы труда сформулировать достаточно общую (трехмерную) постановку структурно-рудной обратной задачи, в которой помимо совокупности локальных источников различной эффективной плотности фигурировали бы несколько границ раздела сред с различной эффективной плотностью, причем допускался бы и эффект выклинивания некоторых из них. Можно было бы приближенно охарактеризовать даже общую схему итерационного процесса для ее реализации. Однако не столь внушительный, как бы нам того хотелось, объем проведенных численных экспериментов и те проблемы, которые априори трудно предсказать, но с которыми можно неожиданно столкнуться, заставляют нас ограничиться пока малым – двумерной постановкой и классом моделей среды, в которых присутствует несколько изолированных геологических объектов \widehat{S}_j эффективной плотности $\widehat{\delta}_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, m$, и всего одна, достаточно гладкая граница раздела $z = \widehat{\varphi}(x)$, $x \in [a, b]$.

5.5. Результаты вычислительных экспериментов

Мы исходим из того, что если постановка обратной задачи входит в число тех, на которые рассчитан обобщенный алгоритм РНК, то потребность в новых монтажных алгоритмах для ее реализации, обладающих иной, более сложной структурой итерационного шага, возникает лишь тогда, когда алгоритму РНК не удалось выйти на приемлемое значение невязки полей (значит, и на допустимое решение). Пока мы остаемся в рамках традиционного определения результата математической интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, то в случае, когда алгоритм РНК обеспечил нужное значение невязки, нет особого смысла отдавать предпочтение другому решению, обеспечившему меньшее значение невязки. Другими словами, если постановка обратной задачи находится в границах области применения алгоритма РНК, назначение новых версий монтажных алгоритмов состоит в том, чтобы в спорных ситуациях помочь ответить на вопрос: явилась ли эта возникшая ситуация следствием того, что алгоритм РНК попросту не «дотянул» до приемлемого значения невязки, или же использовались противоречивые априорные сведения и множество Q допустимых вариантов интерпретации в действительности пусто.

Пример 5.2. Проиллюстрируем результаты применения метода РНР при решении плоской обратной задачи гравиразведки, в которой источник аномалии Δg – прямоугольная бесконечно протяженная призма \hat{S} со сторонами 2 и 0,5 км, эффективная плотность которой равна 0,2 г/см³. Измерения $\Delta \tilde{g}(x_i)$ заданы с шагом 250 м в $n = 26$ точках профиля, точные значения $\Delta \tilde{g}(x_i)$ содержатся в интервале 0,23–2,49 мГал. Нулевое приближение Ω_0 – бесконечно протяженная призма с прямоугольным сечением 4×1,6 км (рис. 5.2). Считается, что искомым носителем Ω^* не должен содержать «отростки».

Читателю предлагается на рассмотрение две серии вычислений. В первой из них изучалась зависимость результатов интерпретации от уровня помех в измерениях $\Delta \tilde{g}(x_i)$. Расчеты выполнены по точному полю $\Delta \tilde{g}$ и по приближенным значениям $\Delta \tilde{g}(x_i)$, отягощенным нормально распределенными помехами со стандартным отклонением σ , равным 0,11 мГал (условно говоря, «низкий» уровень помех), 0,23 мГал («средний» уровень помех) и 0,46 мГал («высокий» уровень помех), что составляет 5, 10 и 20% от амплитуды поля. Элементы замощения – квадраты со стороной 125 м.

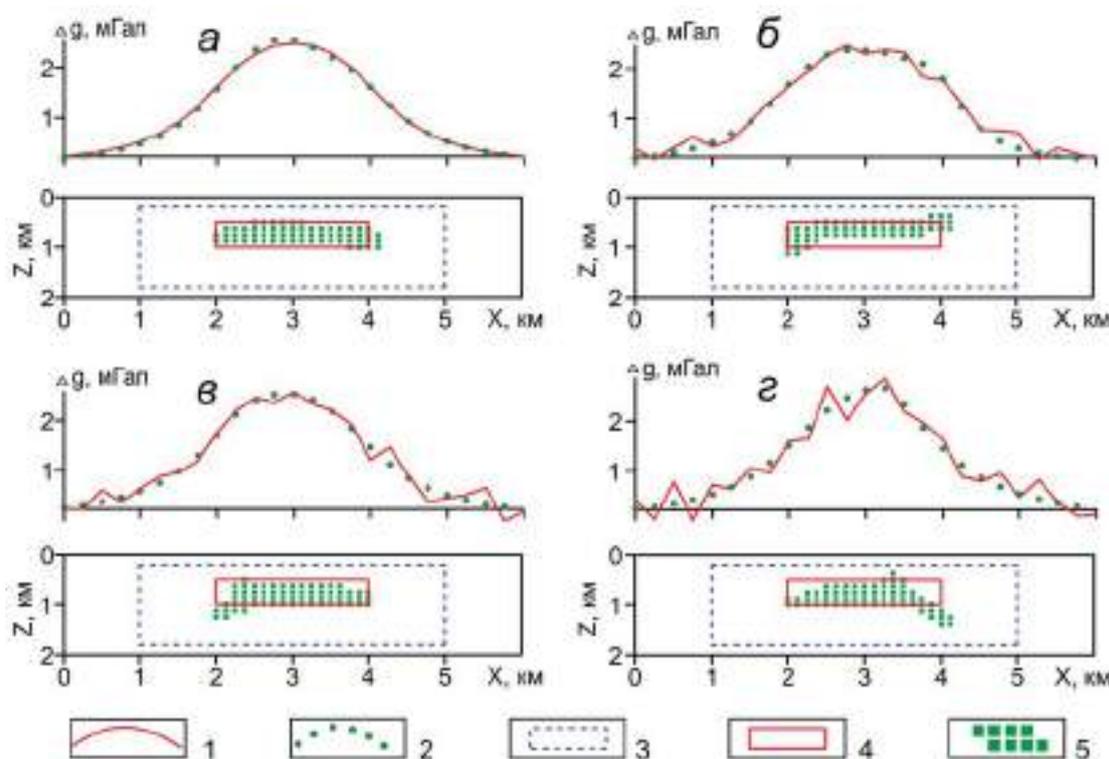


Рис. 5.2. Результаты применения метода РНР: *а* – по точному полю; *б* – при низком уровне помех; *в* – при среднем уровне помех, *г* – при высоком уровне помех. 1 – наблюдаемое поле; 2 – модельное поле; 3 – нулевое приближение Ω_0 ; 4 – аномалиеобразующее тело \hat{S} ; 5 – модельный конфигурационный носитель Ω .

Как следует из рис. 5.2, приближенные решения обратной задачи, построенные при трех различных уровнях помех, оказались сопоставимы по точности не только друг с другом, но и с решением по значениям поля, не отягощенным помехами (впрочем, нас в первую очередь интересовала величина достигнутой невязки). В варианте интерпретации по точным значениям поля достигнутое среднеквадратическое значение невязки равняется 0,044 мГал, что составляет менее 2% от максимума аномалии. Разумеется, мы констатируем конкретный факт и ни в коем случае не собираемся придать ему статус общей закономерности, присущей методу РНР.

На рис. 5.3 представлены особенности итерационного процесса РНР в варианте, когда наблюдения $\Delta\tilde{g}(x_i)$ характеризуются «высоким» уровнем помех. Как и в случае метода РНК, зависимость локально-оптимального значения невязки от номера итерации не носит строго монотонного характера, что для метода РНР, как и для метода РНК, не имеет принципиального значения.

Во второй серии вычислений изучалось влияние размеров элементов замощения на величину достигнутой невязки. Понятно, что это удобнее делать в случае, когда обратная задача решается по точным значениям поля. Если сюда включить часть расчетов, выполненных в первой серии, то обратная задача была решена в итоге на четырех замощениях, стороны квадратных элементов которых составляют геометрическую прогрессию со знаменателем 2 – 31,25 м, 62, 5 м, 125 м и 250 м. При этом достигнутая невязка составила, соответственно, 0,002, 0,005, 0,044 и 0,150 мГал. Какие из этого можно сделать выводы? Первый вывод: при выборе достаточно грубых (в каких-то случаях вполне оправданных) замощений приходится вводить в допустимое значение невязки поправку за неадекватность геоплотностной модели. Второй вывод: при выборе

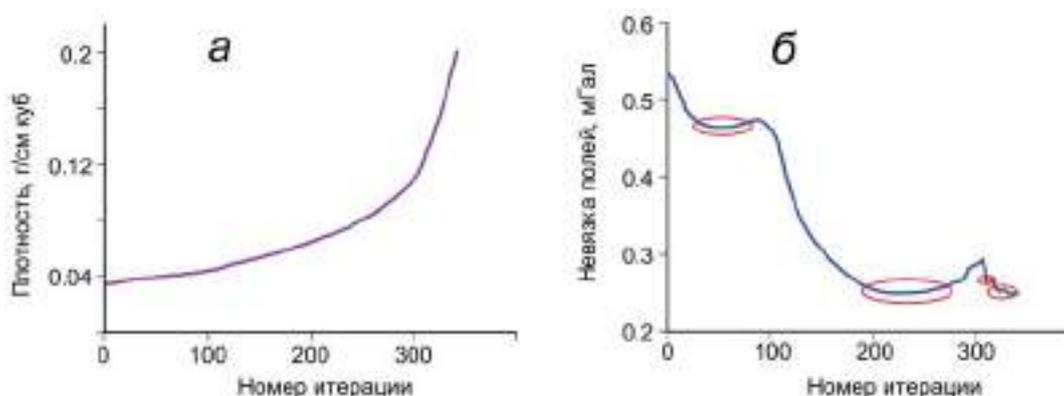


Рис. 5.3. Характеристики итерационного процесса: *а* – график изменения плотности масс, минимизирующую невязку; *б* – график изменения невязки (красными замкнутыми пунктиром обведены локальные участки нарушения монотонного характера убывания невязки с ростом номера итерации).

достаточно «мелких» замощений острота проблемы достижения приемлемого значения невязки будет снижаться, но это ни в коем случае не закрывает проблему выбора подходящей параметрической размерности модели источников поля, когда речь идет не о формальном удовлетворении условиям задачи, а о фактическом повышении достоверности результатов ее решения.

Пример 5.3. Приведем результаты опробования метода РНР еще на одном модельном примере. Источником аномалии Δg , заданной в 20 точках с шагом 250 м, является бесконечно протяженная призма, прямоугольное сечение которой вкрест простирания имеет размеры $1 \times 0,5$ км. Ее эффективная плотность $\hat{\delta}$ равна $0,2$ г/см³. В качестве нулевого приближения Ω_0 взята прямоугольная призма с размерами сечения $3 \times 1,6$ км. Выполнены три варианта расчетов по значениям аномалии, отягощенным нормально распределенными помехами со среднеквадратическими значениями, составляющими 5%, 10% и 20% от амплитуды точного поля (рис. 5.4). Помимо этого, по точным значениям поля обратная задача была решена при различных размерах квадратных элементов замощения (рис. 5.5). Ход итерационного процесса демонстрирует рис. 5.6.

Пример 5.4. Рассмотрим, сколь эффективным может оказаться сочетание метода РНК с режимом перераспределения элементов замощения, предусмотренное методом РНП. Аномалия $\Delta \hat{g}(x)$ задана в точках $x_i = -1,6 + (i - 1) \times 0,06$, $i = 1, 2, \dots, 100$, и обусловлена тремя телами \hat{S}_j эффективной плотности $\hat{\delta}_1 = 0,3$ г/см³ и $\hat{\delta}_2 = \hat{\delta}_3 = 0,2$ г/см³ (рис. 5.7). Предполагается, что границы этих тел являются достаточно гладкими. В модельном примере присутствует имитация буровых работ, и в качестве априорной информации при выборе нулевого приближения к искомому многосвязному решению обратной задачи используются данные «бурения». От парциальных носителей Ω_j^* , $j = 1, 2, 3$, составляющих приближенное решение обратной задачи, требуется их безотростковость.

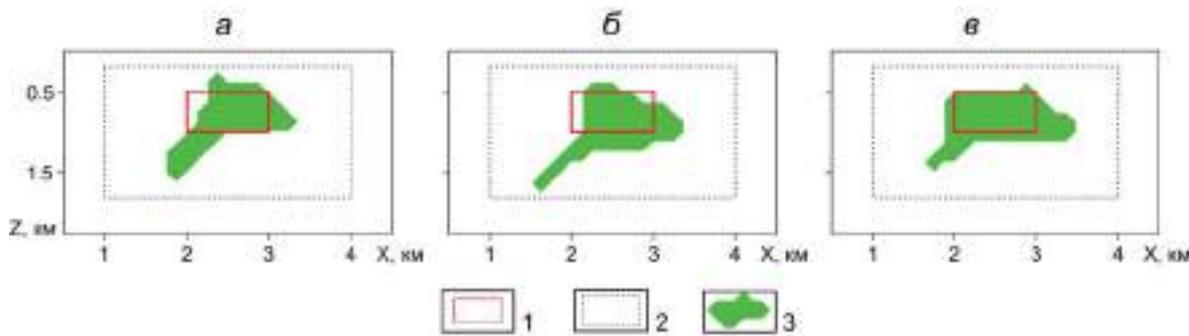


Рис. 5.4. Результаты решения обратной задачи по методу РНР при низком (а), среднем (б) и высоком (в) уровне помех: 1 – аномалиеобразующий объект \hat{S} ; 2 – начальное приближение Ω_0 ; 3 – построенное решение Ω^* обратной задачи.

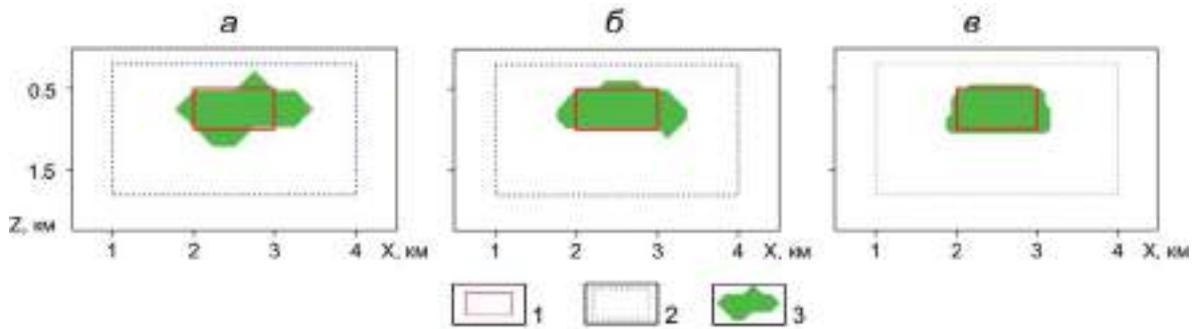


Рис. 5.5. Результаты решения обратной задачи по методу РНР при различных длинах l сторон квадратных элементов замощения: $l = 250$ м (а), $l = 125$ м (б), $l = 62,5$ м (в). 1 – аномалиеобразующий объект \hat{S} ; 2 – начальное приближение Ω_0 ; 3 – построенное решение Ω^* обратной задачи.

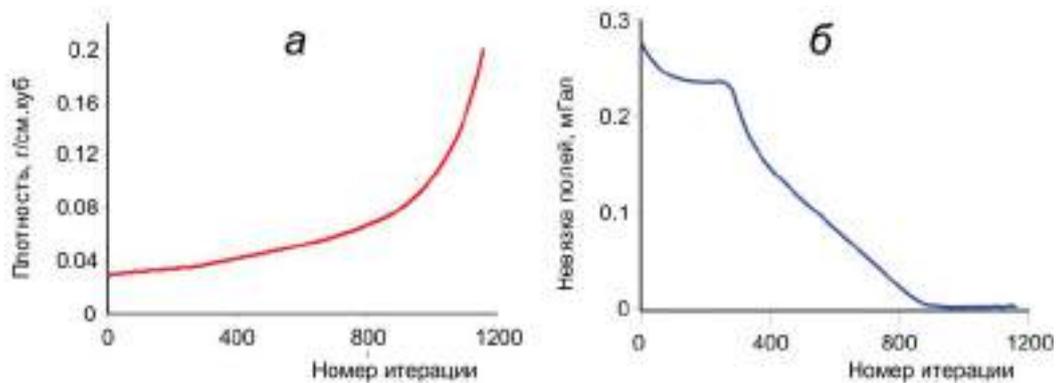


Рис. 5.6. Графики изменения в итерационном процессе РНР плотности (а) и невязки (б) при решении обратной задачи по точному полю (размер замощения $l = 62,5$ м).

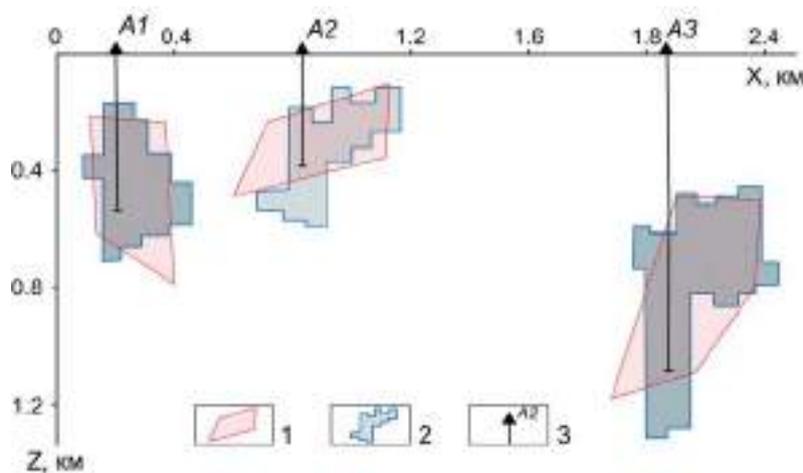


Рис. 5.7. Решение обратной задачи с помощью агрегированного монтажного алгоритма: 1 – истинные тела; 2 – подобранные тела; 3 – скважины.

На первом этапе работы агрегированного монтажного алгоритма с помощью итерационной процедуры РНК было достигнуто среднеквадратическое значение невязки $\varepsilon_1^* = 0,0179$ мГал (при том, что среднеквадратическое значение аномалии $\Delta\hat{g}$ в точках x_i составляет 0,71 мГал). На втором этапе с помощью процедуры перекристаллизации невязку удалось понизить более чем в 3 раза и довести до значения $\varepsilon_2^* = 0,0055$ мГал. На последнем, третьем этапе, когда осуществляется корректировка значений плотностей, нарушенных в результате работы процедуры перекристаллизации, невязка несколько ухудшилась и составила окончательно $\varepsilon^* = 0,0065$ мГал. Результаты интерпретации приведены на рис. 5.7.

Пример. 5.5. В одном из предыдущих примеров мы кратко затронули вопрос о том, будет ли итерационный процесс РНК сходиться к допустимому по невязке решению обратной задачи, если подбор вести в иной, чем L_2 , метрике. Выводы, сделанные в этом примере, мы решили подкрепить еще одним вычислительным экспериментом.

Аномалия $\Delta g(x)$ обусловлена вертикальным пластом \hat{S} эффективной плотности $\hat{\delta} = 0,2$ г/см³. Измерения выполнены в точках $x_i = (i - 24)/10, i = 1, 2, \dots, 70$. С целью ослабить влияние второстепенных факторов на выводы, которые предполагается сделать по результатам интерпретации, априорные ограничения сведены до минимума: начальное приближение Ω_0 строится по априорным данным, природа которых здесь не играет роли, а от искомого носителя Ω^* требуется, чтобы он не содержал отростков. Решение осуществляется по точному полю. Наряду с визуальной предлагается дополнительно количественная оценка точности решения обратной задачи с помощью функционала

$$\nu(\Omega^*, \hat{S}) = \mu(\Omega^* \cap \hat{S}) / \mu(\Omega^* \cup \hat{S}). \quad (5.22)$$

На рис. 5.8 представлены решения Ω^* обратной задачи по алгоритму РНК, построенные с использованием трех различных метрик. Характер изменения значений $\varepsilon(k)$ невязок, достигнутых на промежуточных итерациях k , можно отследить по рис. 5.9. Помимо этого, решение обратной задачи было выполнено по приближенным значениям $\Delta\tilde{g}(x_i)$. Зависимость точности (5.22) решения обратной задачи от уровня σ случайных помех в измерениях $\Delta\tilde{g}(x_i)$, нормированного относительно среднеквадратического значения Δ аномалии $\Delta\hat{g}(x)$, приведена на рис. 5.10. Случайный характер точности решения, обусловленной не только уровнем помех, но и спецификой выборки случайных чисел, используемой для имитации помех в интерпретируемых значениях аномалии, нашел отражение в немонотонном поведении зависимостей, представленных на рис. 5.10. Обратим внимание и на то, что при интерпретации по точным значениям аномалии достигнутая невязка составляет менее 0,5% от нормы аномалии, причем в случае каждой из трех метрик. Определенное преимущество решений, построенных при использовании более сильных метрик под-

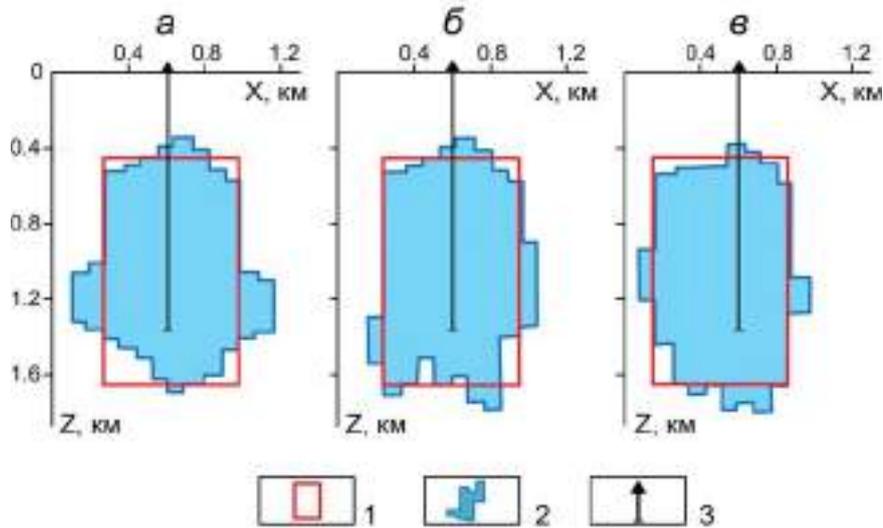


Рис. 5.8. Решение обратной задачи: *а* – в метрике L_2 ; *б* – в метрике L_1 ; *в* – в метрике S . 1 – истинное тело; 2 – приближенное решение; 3 – скважины.

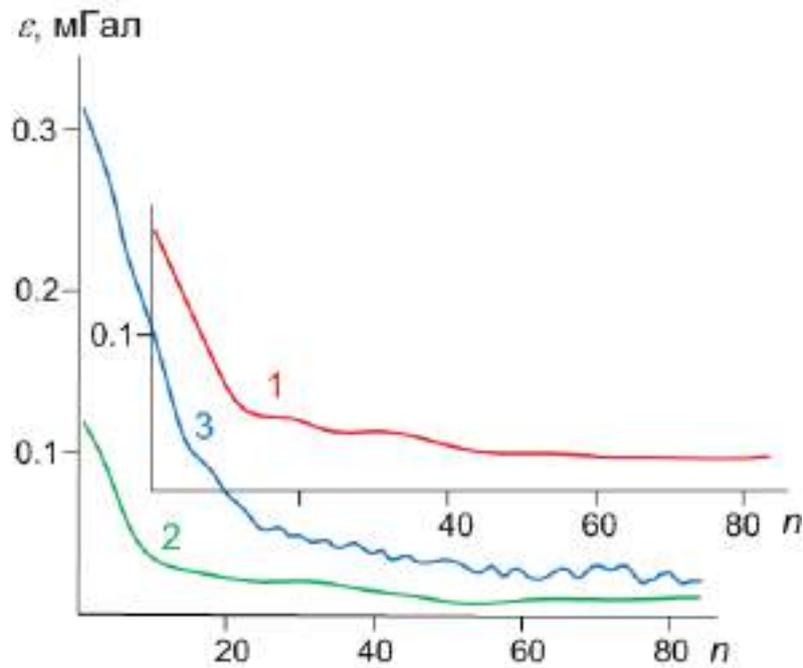


Рис. 5.9. Графики изменения невязки в ходе итерационного процесса РНК: 1 – в метрике L_2 ; 2 – в метрике L_1 ; 3 – в метрике S .

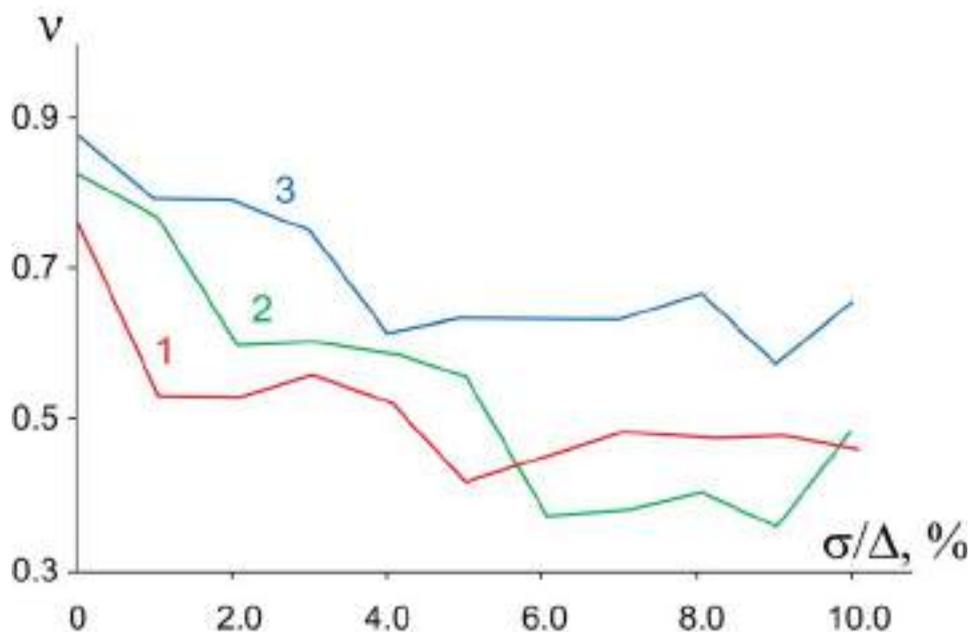


Рис. 5.10. Графики зависимости точности ν решения обратной задачи от нормированной по максимальному значению аномалии Δ величины уровня помех σ : 1 – в метрике L_2 ; 2 – в метрике L_1 ; 3 – в метрике C .

бора, мы даже готовы отнести к специфике конкретного примера, не обобщая этот факт до уровня закономерности. Важно одно – монтажные алгоритмы могут успешно работать и с другими метриками подбора.

Пример 5.6. Здесь нас в первую очередь интересует вопрос о том, насколько заметно наличие фоновой компоненты

$$\Delta g_{\phi}(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_m \varphi_m(x) \quad (5.23)$$

в модели экспериментальных данных может повлиять на величину невязки теоретического поля, обусловленного возмущающими массами, и модельным полем, обусловленным распределением масс $\langle \Omega^*; \hat{\delta} \rangle$. И опять же, для «чистоты эксперимента» обратную задачу удобнее решать по данным, которые не содержат ни случайной помехи, ни фоновой составляющей. Важно, что алгоритм будет предполагать наличие фона и заодно оценивать его коэффициенты c_i . Алгоритму будет неизвестно также, что в действительности заданное поле не содержит помех (кстати, если бы и было известно, то алгоритм все равно не смог бы этим воспользоваться). Мы выполним два варианта расчетов, в одном из них предположим наличие постоянного фона ($m = 1, \varphi_1(x) \equiv 1$), в другом – линейного фона ($m = 2, \varphi_1(x) \equiv 1, \varphi_2(x) = x$).

Аномалия $\Delta\hat{g}(x)$ обусловлена однородным телом \hat{S} с эффективной плотностью $\hat{\delta} = 0,3$ г/см³ и задана в точках $x_i = -2,2 + (i + 1)/10$ (км), $i = 1, 2, \dots, n$, $n = 80$. Считается, что нулевое приближение Ω_0 можно выбрать на основании результатов бурения. По этим же результатам можно наметить элементы замощения, которые не имеют права входить в ядро искомого носителя Ω^* . Предполагая, что граница тела \hat{S} является достаточно гладкой, на конфигурацию Ω^* наложим требование безотростковости.

На рис. 5.11 приведены решения обратной задачи, найденные при различных предположениях о степени сложности регионального фона. Как видим, введение в аппроксимационную конструкцию фоновой компоненты не повлияло сколь-нибудь заметно на точность решения. На каждом шаге k итерационного процесса оптимизируемыми являются текущее значение эффективной плотности δ_k масс, распределенных по носителю Ω_k , и оценки $c_{k,t}$ текущего приближения к фоновой компоненте ($t = 1$ в случае постоянного фона и $t = 1, 2$ в случае линейного фона). В нашем примере, где де-факто фона нет, желательно, чтобы эти мешающие параметры $c_{k,t}$ на протяжении всего итерационного процесса были близки к нулю. Это будет признаком того, что заметного перераспределения наблюдаемого поля между фоновой компонентой и аномальным эффектом возмущающих масс нет. Введем совместную оценку малости этих параметров:

$$\Delta_\phi(k) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{t=1}^m c_{k,t} \varphi_t(x_i) \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (5.24)$$

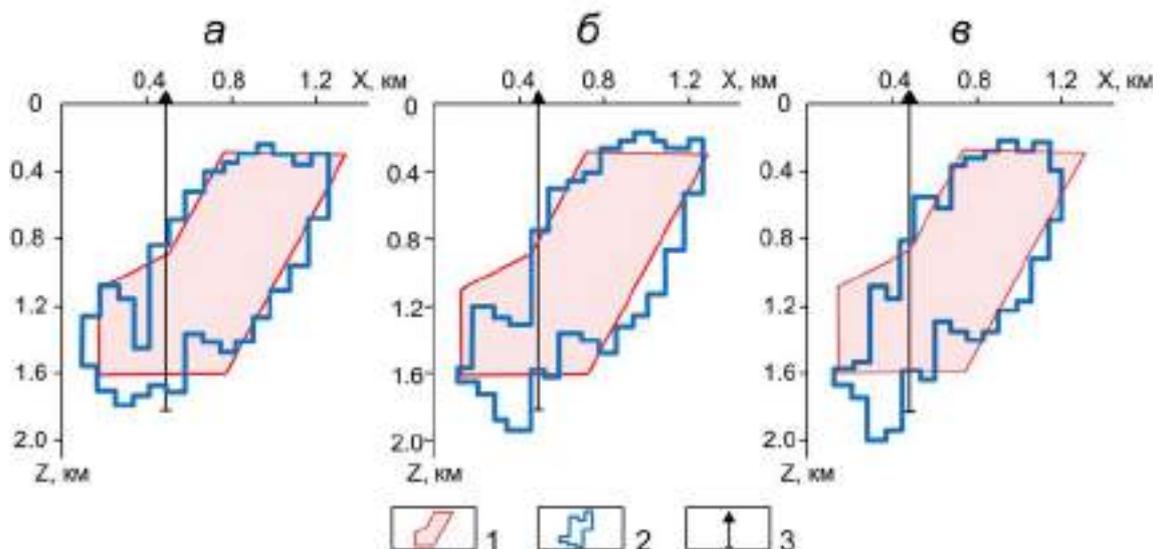


Рис. 5.11. Решение обратной задачи в предположении, что региональный фон: *a* – отсутствует; *б* – постоянный; *в* – линейный.

Графики функции $\Delta_\phi(k)$ представлены на рис. 5.12. Как в случае гипотезы о наличии постоянного фона, так и в случае предположения о существовании линейного фона, на выходе из итерационного процесса значение Δ_ϕ не превышает 2% от среднеквадратического значения $\bar{\Delta}_g$ аномального поля. Иначе говоря, опасения насчет того, что наблюдаемое поле может быть неудачно перераспределено между полезной и фоновой составляющей, в этом примере оказались напрасными.

Легко заметить также, что смена гипотезы о наличии постоянного фона на гипотезу о наличии линейного фона почти не сказалась на графике функции $\Delta_\phi(k)$ – обе кривые почти идентичны. Объяснить присутствие глубоких минимумов в районе 20–35 итераций не удалось. Расчеты были выполнены и в варианте, когда в измеренных значениях поля присутствуют случайные помехи. Приведенные на рис. 5.13 зависимости точности решения ν (5.22) от уровня помех в измерениях лишней раз обнаруживают общий недостаток любых методов построения единичных «оптимальных» вариантов интерпретации – отсутствие монотонной зависимости качества решения от объема и точности входных данных.

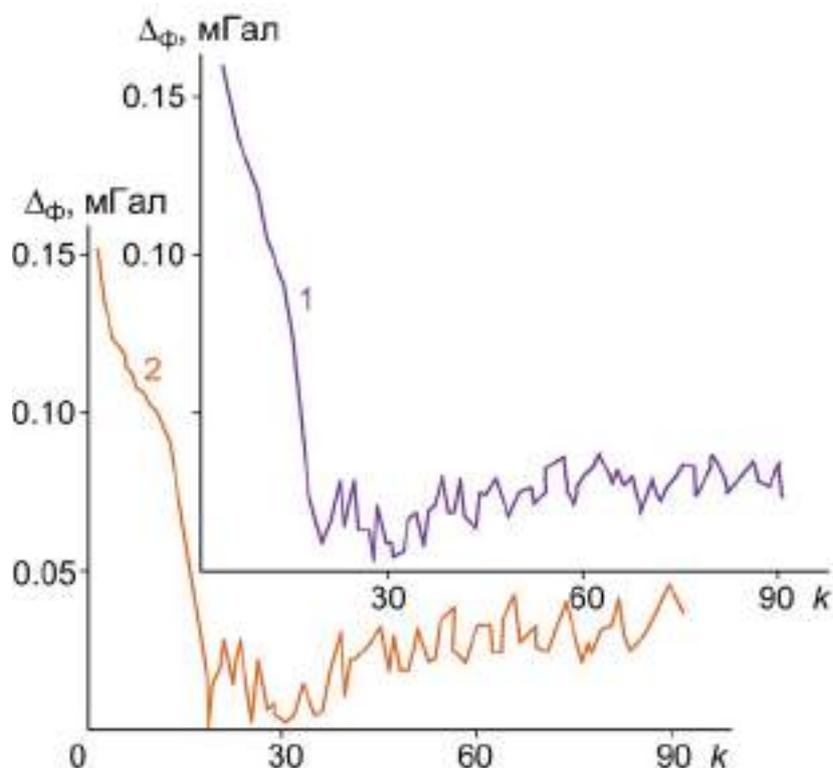


Рис. 5.12. Графики зависимости точности $\Delta_\phi(k)$ определения фоновой компоненты (1 – постоянной; 2 – линейной) поля от номера итерации k .

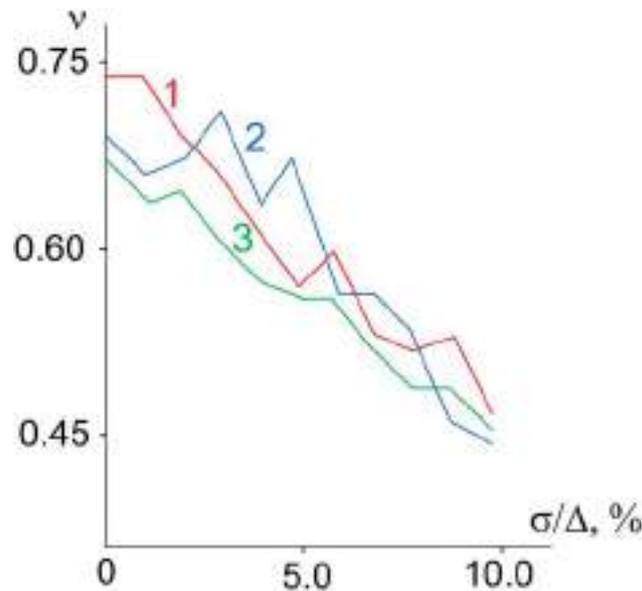


Рис. 5.13. Графики зависимости оценки точности ν от нормированного уровня помех в измерениях аномалии в предположении, что они: 1 – не содержат фоновой компоненты; 2 – содержат постоянный фон; 3 – содержат линейный фон.

Пример 5.7. Аномалия Δg задана в $n = 40$ равноотстоящих точках x_i оси x и обусловлена однородным телом \hat{S} эффективной плотности $\bar{\delta} = 0,3 \text{ г/см}^3$ (рис. 5.14), которая по условию задачи неизвестна. Напротив, считается, что в пределах носителя \hat{S} возмущающие массы неоднородны по плотности, но существует такое «среднее» значение $\bar{\delta} \in [0,15; 0,5]$, что замена функции $\hat{\delta}(X)$ на константу $\bar{\delta}$ не скажется ощутимо на гравитационном поле, и при оценке допустимости достигнутой невязки можно смело ориентироваться на уровень помех ξ_i в измерениях аномалии $\Delta \tilde{g}(x_i)$. Понятно, что в нашем случае последнее предположение выполняется идеально – $\bar{\delta} = \hat{\delta}$. Никаких иных предпосылок сделано не было.

Проведены три варианта расчетов: 1 – по точным значениям $\Delta \tilde{g}(x_i) = \Delta \hat{g}(x_i)$ (читатель уже привык к такого рода расчетам, позволяющим помимо прочего количественно оценить, на какую величину (в мГал) монтажный алгоритм «не дотянул» до глобального минимума невязки); 2 – по значениям $\Delta \tilde{g}(x_i)$, содержащим реализации ξ_i нормально распределенной случайной величины ξ , среднеквадратическое значение которой составляет 5% от максимального значения аномалии $\Delta \hat{g}(x_i)$; 3 – по полю $\Delta \tilde{g}(x_i)$, осложненному помехой той же интенсивности, что и в предыдущем варианте, но имеющей асимметричное распределение.

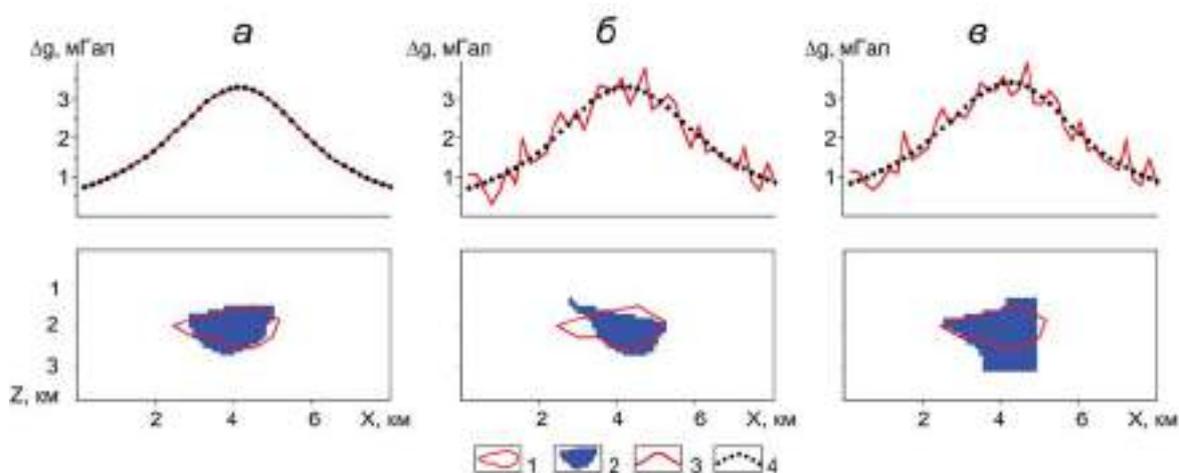


Рис. 5.14. Допустимые решения смешанной обратной задачи гравиразведки: *а* – по точно заданному полю; *б* – по полю, осложненному нормально распределенной помехой; *в* – по полю, осложненному асимметричной помехой. 1 – аномалиеобразующий объект; 2 – подобранный объект (носитель Ω^*); 3 – график наблюдаемого поля; 4 – поле распределения масс $\langle \Omega^*; \delta^* \rangle$.

Обсудим результаты расчетов. Главное заключается в том, что в вариантах 2 и 3 смешанный монтажный алгоритм позволил отыскать по несколько допустимых решений обратной задачи. На рис. 5.14 представлены те из них, что доставляют наименьшее значение невязки наблюдаемого и модельного полей. В варианте 1 невязка составила всего 0,2% от максимума аномалии, что много меньше уровня помех, при которых алгоритм испытывался в двух других вариантах. Как известно, существуют и могут быть построены различные непрерывные по плотности семейства однородных тел, строго эквивалентных по гравитационному полю. Наиболее яркий пример – семейство шаров с общим центром тяжести. Понятно, что этот феномен не мог не найти отражение, причем в более широком масштабе и в варианте приближенной эквивалентности по полю, когда за счет повышения значения эффективной плотности масс можно сравнительно неплохо скомпенсировать недостаток меры носителя масс. И наоборот, когда гравитационный эффект при завышенных геометрических размерах (завышенной мере) носителя можно погасить сравнительно небольшим значением эффективной плотности масс. Неудивительно, что (при практически одинаковых значениях достигнутой невязки) мера $\mu(\Omega^*)$ построенного носителя Ω^* в варианте 3 в 1,75 раза превышает меру носителя в варианте 2, тогда как минимизирующая невязку плотность масс δ^* в 1,55 раза выше уже в варианте 2.

Пример 5.8. Гравитационная аномалия Δg обусловлена тремя однородными бесконечно протяженными призмами \hat{S}_1 , \hat{S}_2 и \hat{S}_3 эффективной плотности

$\hat{\delta}_1 = 0,2$, $\hat{\delta}_2 = 0,3$ и $\hat{\delta}_3 = 0,5$ (в г/см³) и задана своими точными значениями $\Delta\hat{g}(x_i)$ в $n = 26$ точках оси x (рис. 5.15). Элементы замощения – квадраты со стороной 0,25 км. Число тел $m = 3$ задано, тогда как относительно плотностей считается известным, что: $\hat{\delta}_1 \in [0,1;0,3]$, $\hat{\delta}_2 \in [0,1;0,4]$ и $\hat{\delta}_3 \in [0,2;0,7]$. Задействованы и другие априорные ограничения. Считается, что \hat{S}_j – попарно не контактируют друг с другом, а их сечения (для удобства их также обозначаем как \hat{S}_j) – односвязные области, заключенные между прямыми $z = 1$ и $z = 12$ км. В качестве известных фрагментов Ω_j^+ каждого из сечений \hat{S}_j берется по одному элементу замощения $V_n \in \hat{S}_j$ на каждое тело.

Приведем основные результаты расчетов. Минимум невязки, достигнутый при эффективных плотностях $\delta_1^* = 0,235$, $\delta_2^* = 0,106$ и $\delta_3^* = 0,486$ г/см³, равен 0,345 мГал, что составляет около 1,5% от максимума аномалии. Это означает также, что при интерпретации приближенных значений аномалии $\Delta\tilde{g}(x_i)$ можно рассчитывать на успех (выход на допустимое решение обратной задачи) при уровне помех порядка тех же 1,5% от максимального значения поля.

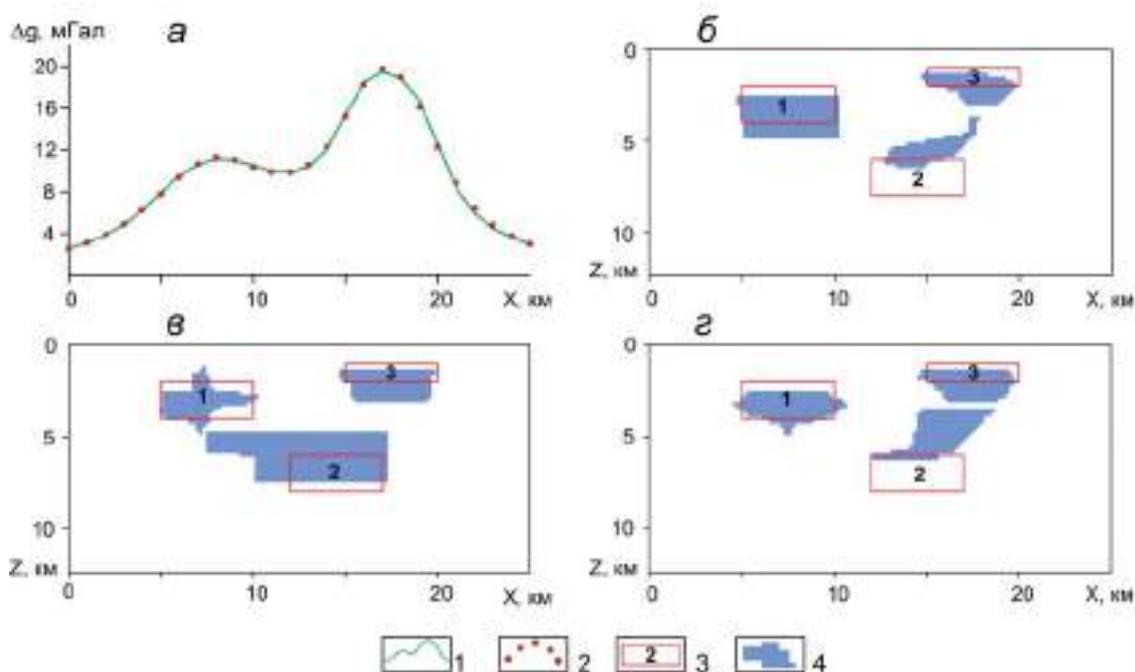


Рис. 5.15. Сравнительная характеристика решений обратной задачи для группы тел при разных исходных предположениях: а – графики наблюдаемого и подобранного модельного полей; б – результаты решения смешанной обратной задачи; в, з – результаты решения обратной задачи в варианте рудной постановки при правильно и не верно заданных значениях эффективной плотности, соответственно. 1 – график наблюдаемого поля; 2 – дискретные значения модельного поля; 3 – аномалиеобразующие тела и их номера; 4 – приближенные решения обратной задачи (подобранные носители).

Мы говорили и готовы повторить снова, что фактическая точность решения обратной задачи в каждом отдельно взятом случае есть величина случайная, и свою задачу мы видим не в том, чтобы продемонстрировать читателю удачно подобранные и по возможности максимально сложные примеры. Напротив, наша цель состоит в том, чтобы показать реальные разрешающие возможности гравиразведки в конкретных условиях интерпретации (особенно доходчиво в этом смысле смотрятся простейшие задачи, где, казалось бы, приближенная эквивалентность не должна быть столь ощутима), показать способность предлагаемых нами алгоритмов, подкрепленных программным обеспечением, стать эффективным рабочим инструментом для оценки этих возможностей.

Чтобы показать случайный характер фактического качества результатов интерпретации, не обойтись без соответствующих количественных показателей. Воспользуемся следующим (консолидированным) функционалом, пригодным для оценки точности решения модельных примеров в смешанной постановке обратной задачи:

$$\rho^{(S,\delta)} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \rho_j^{(S,\delta)}, \quad (5.25)$$

где

$$\rho_j^{(S,\delta)} = \sqrt{\rho_j^{(S)} \rho_j^{(\delta)}}, \quad (5.26)$$

$$\rho_j^{(S)} = \mu(\hat{S}_j \cap \Omega_j^*) / \mu(\hat{S}_j \cup \Omega_j^*), \quad (5.27)$$

$$\rho_j^{(\delta)} = 1 - \left| \delta_j^* - \hat{\delta}_j \right| / (\delta_j'' - \delta_j'). \quad (5.28)$$

Максимальное значение функционал $\rho^{(S,\delta)}$ принимает при идеальном исходе, когда приближенное решение обратной задачи совпадает с истинным.

Возвращаемся к вопросу о фактической точности результатов интерпретации. В нашем случае $\rho^{(S,\delta)} = 0,486$. Для сравнения, с помощью обобщенного метода РНК обратная задача была решена в исключительно рудной постановке (при известных плотностях). Характеристики построенного решения таковы: невязка составила 0,258 мГал, а точность решения $\rho^{(S,\delta)} = 0,507$ незначительно превзошла ту, что была в предыдущем варианте расчетов (при иных помехах в измерениях $\Delta \tilde{g}(x_i)$ могла бы оказаться и хуже). При ошибочно заданных средних эффективных плотностях – $\bar{\delta}_1 = 0,3$, $\bar{\delta}_2 = 0,15$ и $\bar{\delta}_3 = 0,4$ г/см³ – невязка $\varepsilon = 0,16$ мГал оказалась наименьшей по сравнению с двумя предыдущими случаями, тогда как качество приближенного решения $\rho^{(S,\delta)} = 0,403$ обратной задачи является наихудшим.

Дополнительные выводы можно сделать на основании анализа зависимостей, приведенных на рис. 5.16. Чтобы избежать введения логарифмических

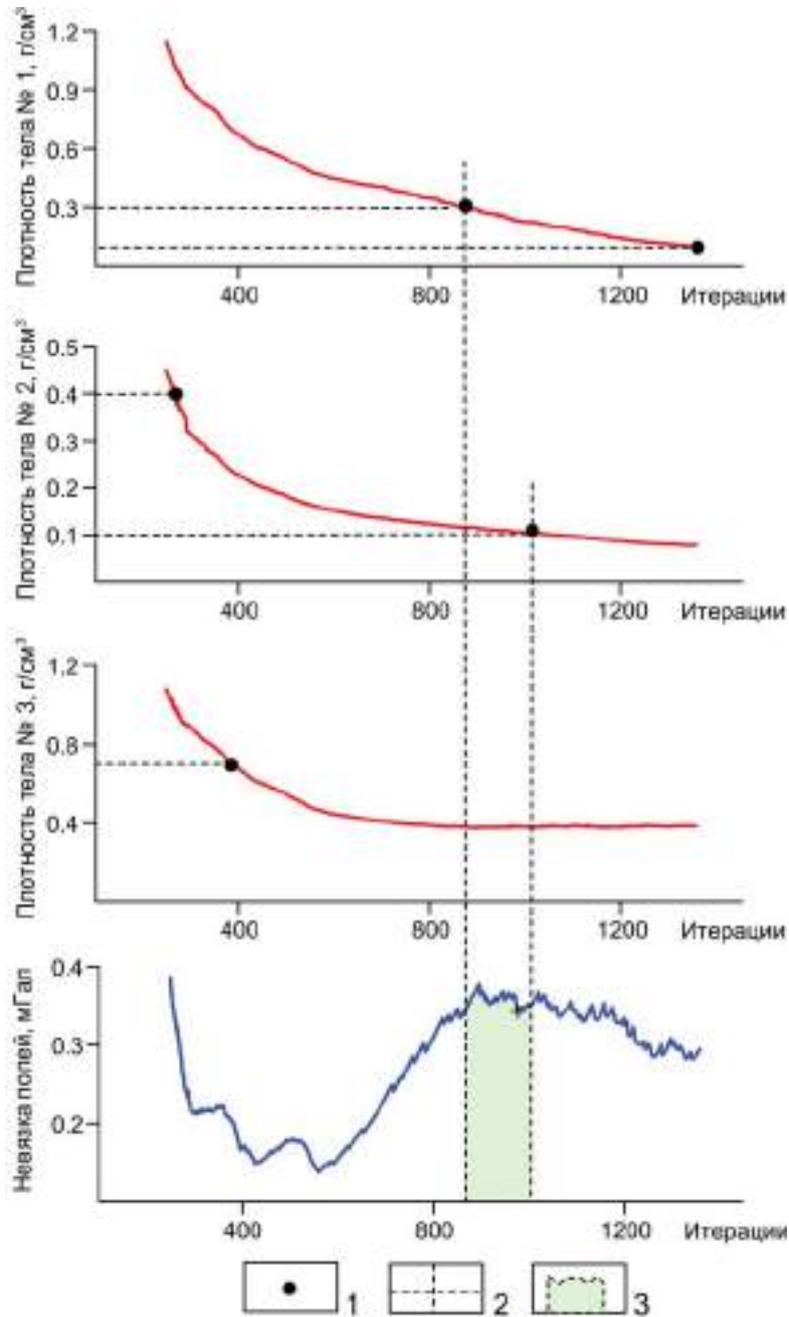


Рис. 5.16. Графики изменения (оптимизируемой) эффективной плотности модельных тел и невязки полей в ходе решения смешанной обратной задачи гравirazведки: 1 – граничные точки, отвечающие интервалам допустимых изменений плотностей парциальных тел в модели источников аномалии; 2 – вспомогательные соединительные линии; 3 – характерное изображение области допустимых решений обратной задачи, в которой плотности всех трех парциальных модельных тел не выходят за заданные границы, а невязка полей не превышает 0,4 мГал.

шкал, на графиках не представлены результаты первых итераций, на которых плотности и невязка имеют достаточно высокие значения. Вместе с тем, итерационному процессу была предоставлена возможность выполнить около четырехсот дополнительных итераций, что дает более полную картину поиска допустимого решения обратной задачи.

Пример 5.9. Решение рудной обратной задачи магниторазведки в смешанной постановке рассмотрим на двух модельных примерах. В первом примере в качестве исходных данных используется магнитное поле ΔT от двухмерного изолированного тела с прямоугольным сечением 4×2 км, обладающего однородной намагниченностью $J_x = 1$ А/м и $J_z = 4$ А/м (суммарная намагниченность $J_s = 4,12$ А/м, угол намагничения $\alpha = 76^\circ$), рассчитанное в 21 точке профиля в условиях нормального магнитного поля T_0 при наклонении 60° и склонении 40° .

Для решения обратной задачи были введены ограничения на вертикальные и поперечные размеры тела, существенно превышающие истинные значения. Интервалы («вилки») для эффективной намагниченности объекта были определены в двух вариантах: 1) $0 \leq J_x \leq 2$ А/м; $2 \leq J_z \leq 6$ А/м; 2) $0 \leq J_x \leq 3$ А/м; $2 \leq J_z \leq 8$ А/м. Для проверки устойчивости метода в исходные данные были добавлены нормально распределенные помехи разной интенсивности с нулевым математическим ожиданием: «слабые», «средние» и «сильные». «Слабые» помехи характеризуются среднеквадратическим отклонением 5% от максимальной амплитуды аномалии $\Delta T_{max} = 435$ нТл, «средние» – 10% от ΔT_{max} , «сильные» – 15% от ΔT_{max} . Как показывает рис. 5.17, во всех случаях качество решения обратной задачи высокое: мера общего фрагмента модельного и исходного объекта довольно близка к мере каждого из них. Итерационный процесс обеспечивает величину невязки между наблюдаемым и модельным полями, не превышающую уровня помех (табл. 5.1, 5.2). Направление вектора намагниченности определяется с точностью до 3° при «среднем» уровне помех в «наблюдаемом» магнитном поле. Величина модуля суммарной намагниченности объекта J_s подбирается с ошибкой 20–40% от истинного значения. Расширение диапазона предполагаемых значений составляющих J_x и J_z вектора намагниченности незначительно влияет на качество интерпретации.

Перейдем к более сложной модели геомагнитного разреза, состоящего из трех тел с близким направлением вектора намагниченности \mathbf{J}_s : $J_x^1 = 0,4$ А/м и $J_z^1 = 2$ А/м; $J_x^2 = 0,4$ А/м и $J_z^2 = 1,6$ А/м; $J_x^3 = 0,2$ А/м и $J_z^3 = 1$ А/м. При невязке, составляющей около 10% от максимальной амплитуды исходного магнитного поля, были получены следующие оценки намагниченности объектов: $J_x^1 = 0,159$ А/м и $J_z^1 = 1,446$ А/м; $J_x^2 = 0,329$ А/м и $J_z^2 = 1,231$ А/м; $J_x^3 = 0,175$ А/м и $J_z^3 = 1,018$ А/м. Угол α вектора намагничения J_s определился достаточно точно для всех трех тел (рис. 5.18).

Многочисленные вычислительные эксперименты показали хорошую помехоустойчивость алгоритма, позволяющего осуществлять определение угла

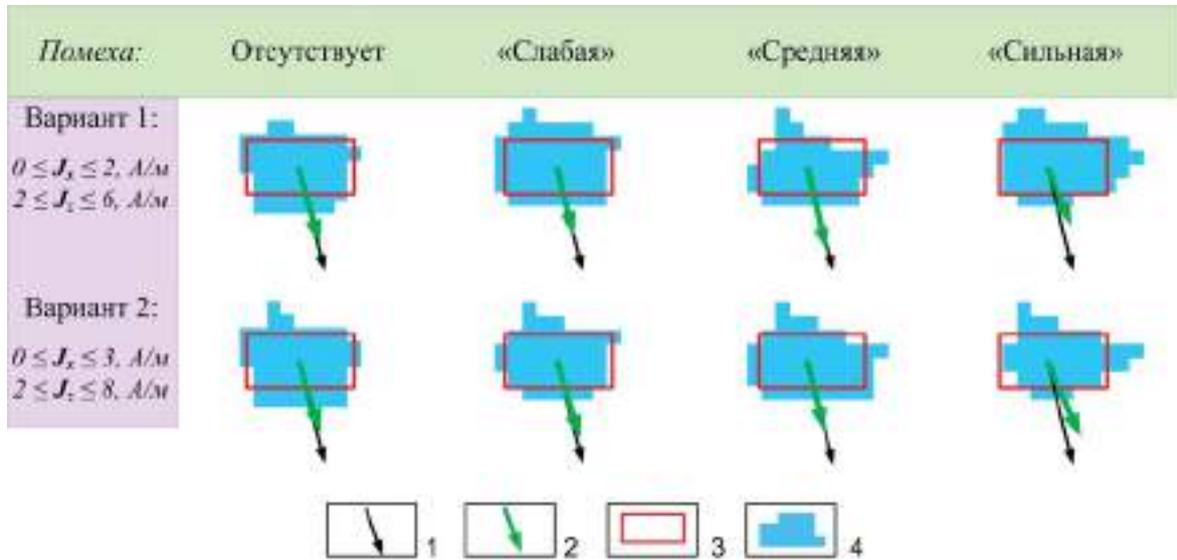


Рис. 5.17. Результаты построения сеточной модели изолированного тела монтажным методом: 1 – вектор истинной намагниченности J_s ; 2 – вектор подобранной намагниченности J_s ; 3 – контур аномалиеобразующей призмы; 4 – подобранный магнито-возмущающий объект.

Таблица 5.1

Результаты решения обратной задачи магниторазведки: вариант 1

Исходные данные	Подобранные значения параметров				Невязка полей, нТл
	$J_x, \text{ A/м}$	$J_z, \text{ A/м}$	$J_{\text{эф}}, \text{ A/м}$	$\alpha, ^\circ$	
Поле без помехи	0,83	2,94	3,05	75	3,8
Поле со «слабой» помехой	0,67	2,63	2,71	76	15,4
Поле со «средней» помехой	0,73	3,24	3,32	77	25,4
Поле с «сильной» помехой	0,94	2,24	2,43	67	28,0

Таблица 5.2

Результаты решения обратной задачи магниторазведки: вариант 2

Исходные данные	Подобранные значения параметров				Невязка полей, нТл
	$J_x, \text{ A/м}$	$J_z, \text{ A/м}$	$J_{\text{эф}}, \text{ A/м}$	$\alpha, ^\circ$	
Поле без помехи	0,83	2,79	2,92	73	4,1
Поле со «слабой» помехой	0,91	3,02	3,16	73	15,3
Поле со «средней» помехой	0,64	2,71	2,79	77	26,5
Поле с «сильной» помехой	1,29	2,92	3,19	66	28,2

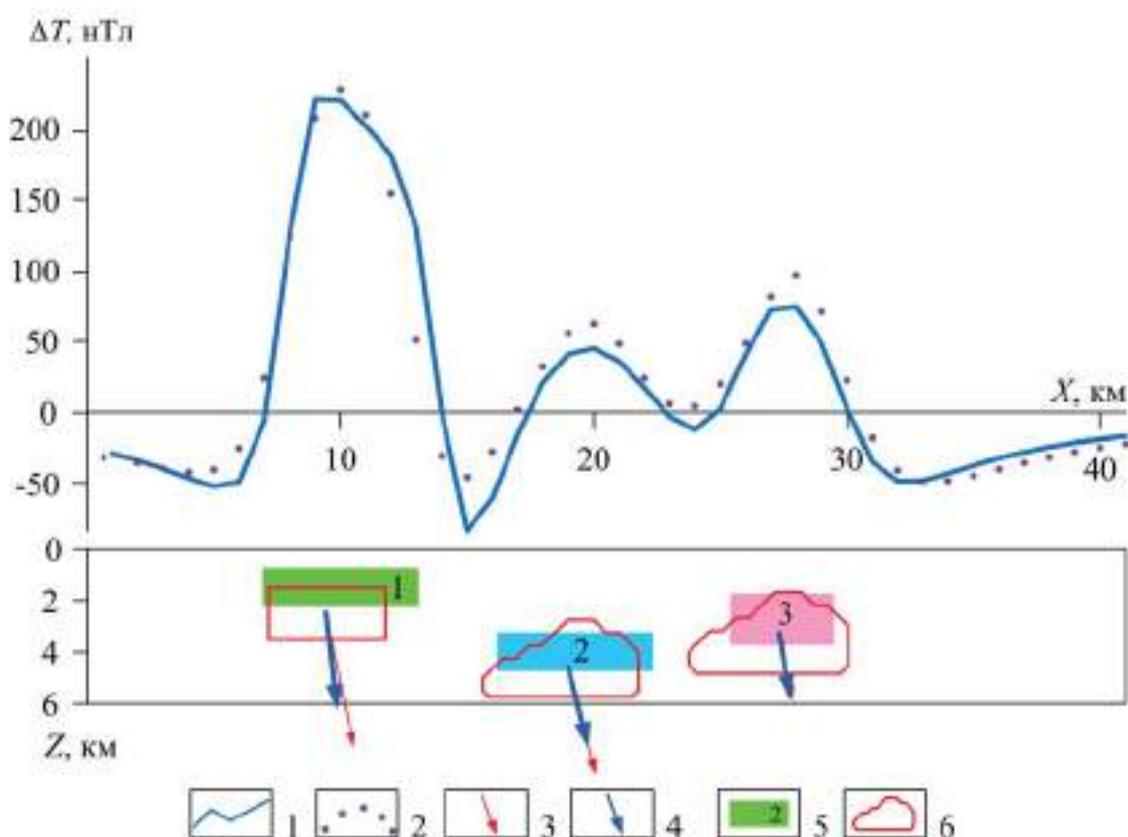


Рис. 5.18. Результаты решения смешанной обратной задачи магниторазведки для трех тел: 1 – исходное поле ΔT ; 2 – модельное поле ΔT ; 3 – вектор истинной намагниченности J_s ; 4 – вектор подобранной намагниченности J_s ; 5 – аномалиеобразующие тела, их номера; 6 – подобранные магнитовозмущающие объекты.

намагниченности a с точностью порядка $5-8^\circ$ (независимо от направления вектора эффективной намагниченности \mathbf{J}) и определение скалярной величины намагниченности с ошибкой, не превышающей 10–15%.

Пример 5.10. В нашей монографии при иллюстрации результатов численных экспериментов мы – это надо признать – отдаем предпочтение гравиметрической проблематике, ссылаясь на аналогию обратных задач магниторазведки и гравиразведки. Надеемся, что данный пример, в котором собраны наиболее сложные условия из тех, в которых рассматривались примеры решения обратных задач гравиразведки (пример практический, трехмерный, в постановке присутствует довольно богатая априорная информация (мы на ней не будем останавливаться), необходима смешанная постановка обратной задачи), отчасти нас оправдывает. Исходя из опыта решения примеров, не во-

шедших в данную книгу, мы рассчитываем на применение «магнитометрического аналога» смешанного алгоритма решения обратной задачи гравиразведки на случай, когда амплитуда аномалии не превышает 5000 нТл (оценка параметров источников интенсивных магнитных аномалий, обусловленных, в частности, железорудными залежами, требует учета взаимного влияния магнитных объектов). Вместо скалярных значений эффективных плотностей теперь будут использоваться векторные характеристики эффективной намагниченности аномалиеобразующих тел [Новикова, Долгаль, 2012].

Рассмотрим применение алгоритма решения смешанной обратной задачи магниторазведки при изучении подводного вулкана 6.1 (Миронова), расположенного в пределах Охотоморского склона Курильской островной дуги. Решение обратной задачи осуществлялось по трем пересекающимся галсам (рис 5.19а). Предварительно наблюденное геомагнитное поле ΔT_α было преобразовано в вертикальную составляющую ΔZ_α с помощью алгоритма истокообразной аппроксимации. При этом учитывались величина и направление вектора нормального поля T_0 для региона исследований. Помимо задачи локализации возмущающего тела ставилась задача уточнения намагниченности изучаемого объекта. По ходу интерпретационного процесса было также необходимо оценить линейный региональный фон.

В качестве элементов замощения были выбраны кубы со стороной 0,25 км, что соответствует среднему шагу измерений по профилю. В результате моделирования удалось локализовать в пространстве субвертикальный конусовидный магнитовозмущающий блок, обладающий поперечными размерами от 0,5 до 2,5 км (рис. 5.19б-г). Верхняя кромка этого блока находится на глубине около 2,5 км, нижняя – 15,5 км. Среднее значение намагниченности близко к 2 А/м для всех профилей. Максимальная невязка между модельным и наблюденным полями равна 21,5 нТл, что сопоставимо с точностью гидромагнитной съемки. Следует отметить, что на всех профилях имеются остаточные положительные аномалии ΔZ_α , связанные, вероятно, с влиянием периферийных магматических очагов. На основе результатов 2,5D моделирования путем интерполяции была построена объемная модель локализованного блока, отождествляемого с застывшей питающей системой вулкана.

Пример 5.11. Перейдем к обсуждению результатов модельных экспериментов, относящихся к решению структурно-рудных обратных задач. Аномалия $\Delta \hat{g}(x)$ обусловлена рудным телом эффективной плотности $\hat{\delta}_1 = 0,4$ г/см³ и массами эффективной плотности $\hat{\delta} = -0,05$ г/см³, заключенными между дневной поверхностью (осью x) и финитной границей раздела с выходами на поверхность в точках $x = 0$ и $x = 5,0$ км (рис. 5.20). Значения аномалии заданы в 150 точках равномерной сети с шагом $\Delta x = 0,05$ км. Рудная компонента решения обратной задачи выбирается из класса безотростковых связных конфигурационных областей, структурная – из класса кусочно-линейных сплайнов

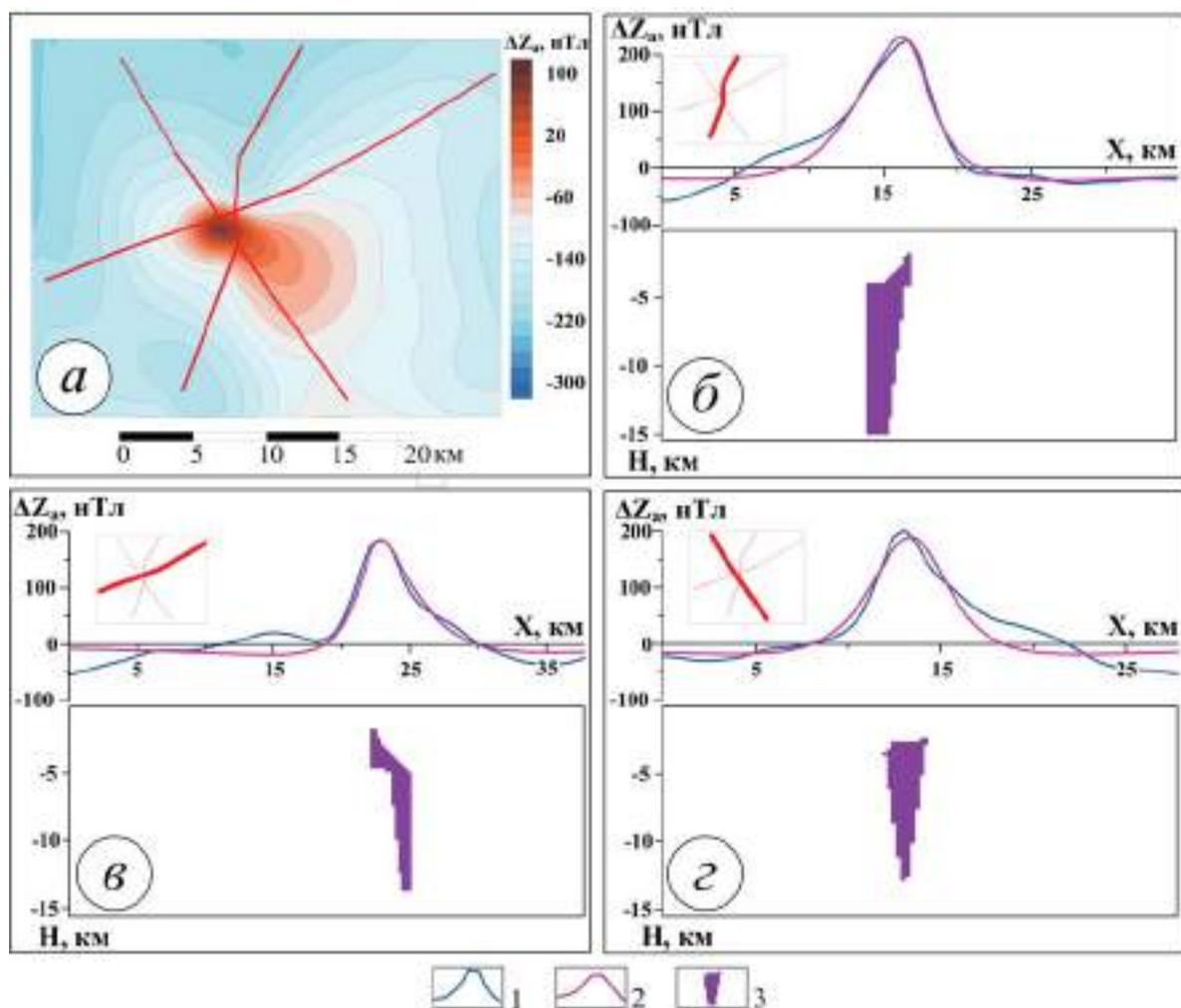


Рис. 5.19. Наблюдаемое магнитное поле подводного вулкана 6,1 (а) и результаты решения обратной задачи магниторазведки с помощью монтажных технологий для трех галсов (б-д): 1 – исходное поле; 2 – модельное поле; 3 – аномалиеобразующий объект.

при довольно слабых ограничениях на степень гладкости границы раздела и максимальную глубину ее погружения. При использовании аддитивной зависимости $f_1(\delta)$ для единственного несвободного параметра плотности рудного тела δ_1 наилучшее (то есть выбранное по формуле, учитывающей значения $\delta^{(min)}$ и $\delta_1^{(min)}$) значение λ_1 равно $\lambda_1^{opt} = -0,0109$. Приближенное решение обратной задачи, достигнутое при этом значении λ_1 , представлено на рис. 5.20.

Мы сопоставили итерационные процессы с различными значениями λ_1 . Удалось подметить интересную особенность, пока не нашедшую строгого объяснения. Если интервал значений λ_1 , при которых достигается невязка, сопо-

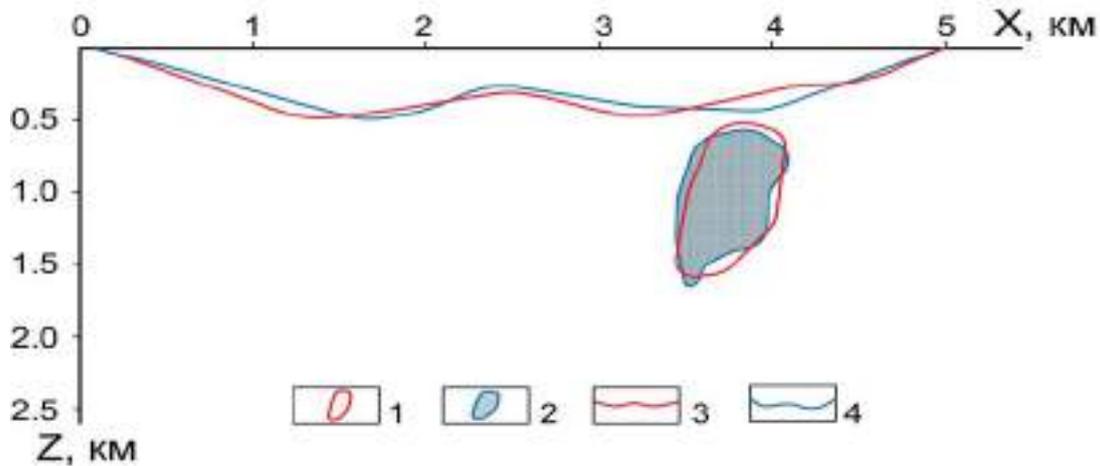


Рис. 5.20. Решение структурно-рудной обратной задачи при $\lambda_1 = \lambda_1^{opt}$: 1, 2 – модельное и (стилизованное) подобранное рудные тела; 3, 4 – модельная и подобранная контактные границы, соответственно.

ставимая с невязкой при $\lambda_1 = \lambda_1^{opt}$, довольно широк, то лишь при значениях λ_1 из сравнительно узкой окрестности плотности λ_1^{opt} достигается приблизительно та же точность приближенного решения обратной задачи, что и в случае λ_1^{opt} .

Возможно, все дело в вязкостных свойствах алгоритма, обеспечивающих при удачном задании параметров вычислительной схемы выход на решение, обладающее некоторыми «хорошими» свойствами, заранее не оговоренными в априорных ограничениях. В этом плане показательны графики зависимости достигнутого значения функционала невязки от номера итерации, построенные для двух значений параметра λ_1 , одно из которых есть λ_1^{opt} (рис. 5.21).

Видно, что в течение всего итерационного процесса, за исключением нескольких последних шагов, невязка при $\lambda_1 = \lambda_1^{opt}$ остается значительно ниже невязки в случае «неоптимального» выбора параметра λ_1 . И хотя, как мы это неоднократно подчеркивали, фактическую точность отдельно взятого приближенного решения обратной задачи следует рассматривать как величину случайную, читателю может быть интересен рис. 5.22 (близость ρ построенной и истинной рудных компонент модели источников поля оценивается в метрике Штайнхауса).

Пример 5.12. Несмотря на то, что мы заранее предупреждали, что не претендуем на эффективность предлагаемой схемы решения структурно-рудной обратной задачи в случае нескольких границ раздела, любопытство взяло верх. На рис. 5.23 представлена модель источников аномалии $\Delta\hat{g}(x)$, включаю-

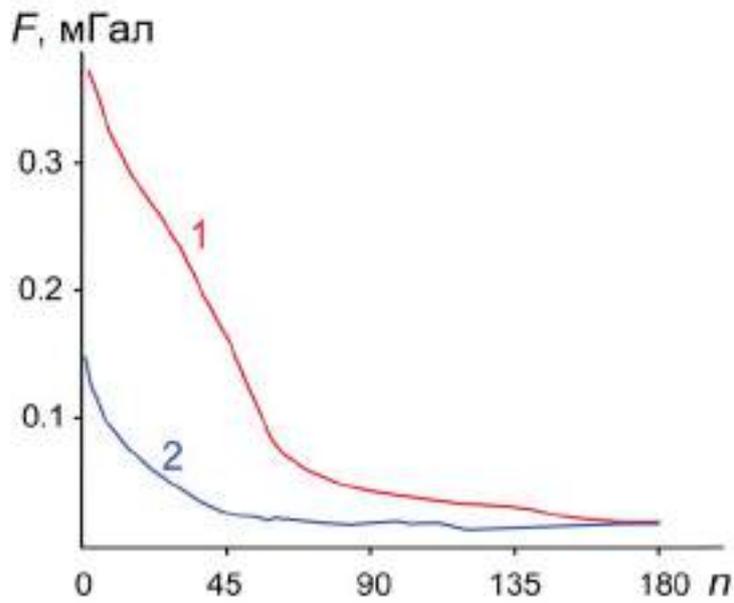


Рис. 5.21. Графики зависимости достигнутого значения минимизируемого функционала невязки от номера итерации для двух значений параметра λ_1 : 1 – $\lambda_1 = 0,03$; 2 – $\lambda_1 = \lambda_1^{opt}$.

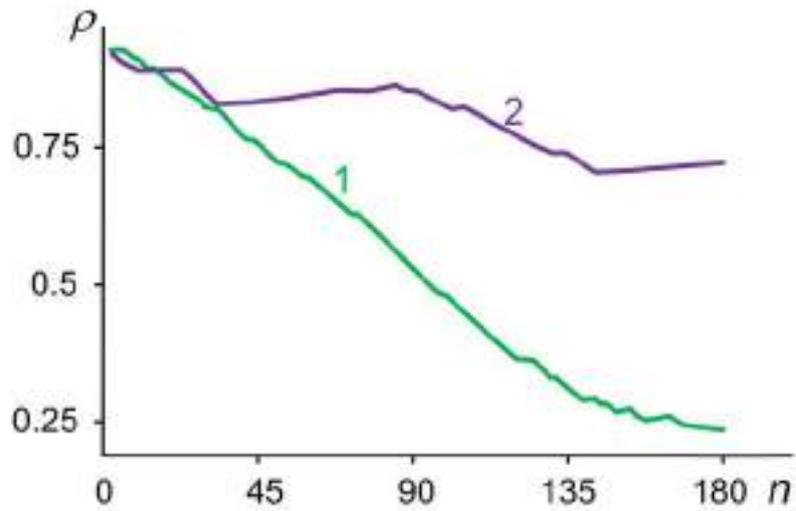


Рис. 5.22. Графики изменения погрешности текущих приближений к истинному рудному телу с ростом номера итерации n для двух значений λ_1 : 1 – $\lambda_1 = \lambda_1^{opt}$; 2 – $\lambda_1 = 0,03$.

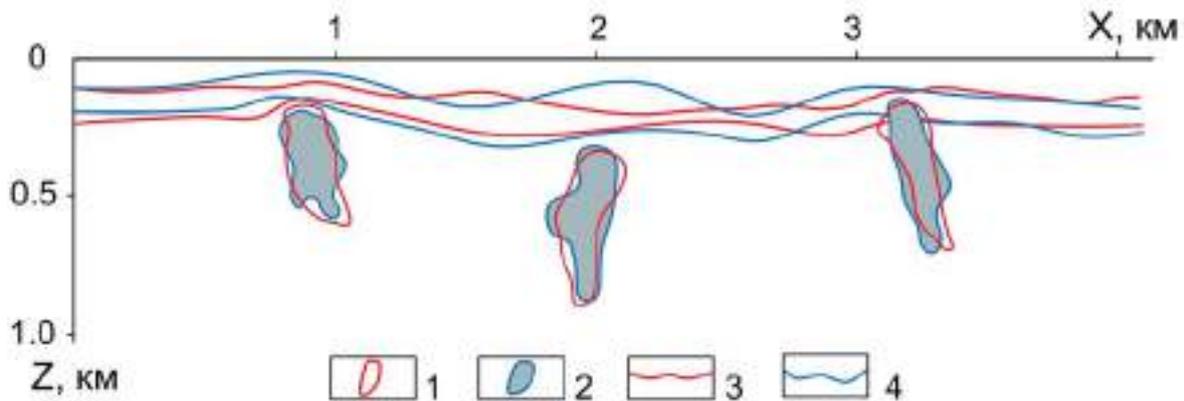


Рис. 5.23. Решение структурно-рудной обратной задачи при оптимальных значениях параметров λ_j : 1, 2 – модельные и подобранные рудные тела; 3, 4 – модельные и подобранные границы раздела.

щая три рудных тела \hat{S}_j , плотности $0,5 \text{ г/см}^3$, $0,6 \text{ г/см}^3$ и $0,6 \text{ г/см}^3$. Эффективная плотность масс, заключенных между дневной поверхностью (осью x) и верхней границей, равна $\delta^{(1)} = -0,03 \text{ г/см}^3$, а между двумя границами – $\delta^{(2)} = -0,02 \text{ г/см}^3$. Аномалия задана в 100 точках регулярной сетки с шагом $0,05 \text{ км}$. Действовано большинство ограничений, предусмотренных в рудно-структурной постановке обратной задачи. Для оценки рудной составляющей модели использовано замощение квадратами со стороной 25 м . В качестве оптимизируемого параметра используется плотность $\delta^{(1)}$. Найденное приближенное решение, представленное на рис. 5.23, близко к исходной геоплотностной модели. Примечательно, что при решении как этого, так и предыдущего примера мы не столкнулись с эффектом перераспределения масс между рудными и структурными составляющими модели геоплотностного разреза.

Глава 6

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ КАК ПРОБЛЕМА ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ И РИСКА

В первой главе монографии мы обсуждали недостатки господствующей концепции извлечения информации из данных измерений гравитационного (магнитного) поля, по которой за результат математической интерпретации принимается отдельное (оптимальное) решение S^* обратной задачи. Особо подчеркивалось, что обнаруженные недостатки связаны не только с самой формой представления результатов интерпретации, но и в немалой степени с общепринятыми критериями выбора этого решения из множества Q допустимых решений. Речь идет о скалярных критериях выбора на основе *попарного сравнения* альтернативных решений. Такие критерии носят, как правило, весьма условный характер и никак не связаны с качеством извлекаемой информации об источниках поля. Наглядный тому пример – оптимальность решения обратной задачи по минимуму достигнутой невязки наблюденного и подобранного полей.

Вполне логично задаться вопросом: если интерпретатор не желает ломать сложившиеся стереотипы и расставаться с привычными для него математическими формами представления результатов интерпретации, то можно ли хотя бы частично исправить ситуацию за счет принципиально иных типов критериев выбора оптимального решения из множества Q . По мнению авторов монографии, будущее гравиразведки и магниторазведки за автоматизированными технологиями интерпретации геофизических данных, в которых найдется место не одной, а нескольким математическим формам представления ее результатов. Но при этом определяющую роль будут играть и критерии выбора в тех случаях, когда эти формы предполагают поиск наилучшего из множества альтернатив. Что касается ответа на вопрос, насколько эффективны скалярные критерии выбора на основе попарного сравнения конкурирующих вариантов, то его дает общая теория принятия решений [Райфа, 1977; Черно-

руцкий, 2005] (см. также [Айзерман, Малишевский, 1981]). Согласно доводам этой теории, от критериев попарного сравнения альтернативных решений целесообразно отказаться в пользу критериев типа минимаксных, когда качество любого из решений определяется не по его отношению *порознь* к каждому другому решению, а по его отношению *сразу ко всем* остальным допустимым решениям. Другими словами, когда качество решения обратной задачи будет целиком, и главное – не формально, определяться структурой множества Q .

Если не ставить перед собой целью полный отказ от общепринятых математических форм представления результатов интерпретации и принципа оптимальности, то ощутимым продвижением в направлении повышения отдачи от геофизических методов разведки может стать концепция, согласно которой за результат интерпретации принимается не одно *глобально-оптимальное* решение обратной задачи, а набор *локально-оптимальных* решений [Балк, Долгаль, 2017₁, 2018]. Суть в том, что подавляющее большинство элементов множества Q – это попросту какие-то «рядовые» допустимые решения, в то время как локально-оптимальные решения обратной задачи являются в своем роде «особыми точками» множества Q . Они предпочтительней других допустимых решений как минимум по какому-то одному признаку, выраженному в терминах качества геологически содержательной информации о возмущающем объекте, которую несет это решение. В этом состоит смысл локальной оптимальности, а сама процедура отбора локально-оптимальных решений из множества Q напоминает процедуру построения множества решений, оптимальных по Парето [Подиновский, Ногин, 1982]. Допустимые решения обратных задач, отвечающие критериям из *теории принятия решений* и адаптированные к геофизической проблематике – первые претенденты на роль таких «особых точек».

В теории принятия решений разработана целая группа критериев, нацеленных, как бы мы сейчас сказали, на отдельные признаки локальной оптимальности выбранного решения и составляющих основу системного анализа для принятия решений в сложных проблемных ситуациях. Хотя для геолого-геофизической проблематики эти критерии не новы (они широко используются в исследованиях, связанных с задачами природопользования [Черемисина, Никитин, 2014]), в проблематике обратных задач гравиразведки и магниторазведки они, судя по всему, были впервые применены совсем недавно [Балк и др., 2015₁, 2016₁; Балк, Долгаль, 2017₁]. Авторы данной монографии показали, что критерии оптимальности, позаимствованные у теории принятия решений, особо удачно вписываются в проблематику обратных задач гравиразведки и магниторазведки в том случае, когда в них встроены *принцип достоверной вероятности*.

Эта глава монографии, где основной теоретический материал является относительно небольшим по объему, имеет важное методологическое значение. Алгоритмы решения обратных задач гравиразведки и магниторазведки, осно-

ванные на критериях оптимальности, заимствованных из теории принятия решений, являются своего рода «переходным мостиком» между известными технологиями интерпретации и новыми так называемыми *аддитивными технологиями интерпретации*. В этих алгоритмах, как и в большинстве известных, используется традиционное представление о том, что считать результатом количественной интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, но, в отличие от них, результат интерпретации чувствителен к особенностям структуры множества Q . Последний признак вместе с новыми математическими формами представления результатов интерпретации как раз характерен для аддитивных технологий интерпретации.

6.1. Оптимальные решения в условиях неопределенности

Теория принятия решений оперирует с двумя основными множествами: множеством $\Omega = \{\Omega_\alpha\}$ возможных состояний природы (изучаемого объекта), одно из которых будет иметь место (заранее неизвестно, какое именно), и конечным множеством $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ альтернативных действий, любое из которых может выбрать субъект, принимающий решение. Последствия принятия решения A_i характеризует функция полезности (выгоды, выигрыша) $\rho: (A \times \Omega) \rightarrow \mathbf{R}$. Иногда удобнее, когда $\rho(A_i, \Omega_\alpha)$ имеет смысл функции потерь. Каждая задача принятия решений имеет свой критерий оптимальности, который позволяет упорядочить все альтернативные решения из A по предпочтению в соответствии с целевой задачей выбора и возможными состояниями Ω_α изучаемого объекта. Критерии принятия решений в условиях неопределенности рассчитаны на задачи, в которых нельзя априори отдать предпочтение ни одному событию из множества Ω (с точки зрения того, что может произойти именно это событие).

В случае обратных задач гравиразведки (магниторазведки) рудного типа Ω – суть множество $Q = \{S_\alpha\}$ допустимых модельных носителей. После того как некоторый элемент $S^* \in Q$ будет рекомендован в качестве наилучшей оценки истинного носителя \hat{S} , настает очередь выбора дальнейших заверочных геологоразведочных работ – тех самых *альтернативных действий* (например – бурения скважины определенной глубины). Но этот выбор выходит за рамки собственно проблематики обратных задач. Поэтому за множество A логично также принять множество Q , из которого будет выбрано рекомендуемое решение. Таким образом, обратные задачи гравиразведки и магниторазведки представляют для теории принятия решений особый случай: $A = \Omega$, и $\rho(S_\alpha, S_\beta)$ суть выигрыш (или потери) при выборе носителя S_α в качестве оценки истинного носителя \hat{S} , тогда как в реальности $\hat{S} = S_\beta$ (либо S_β есть наилучшая аппроксимация носителя \hat{S}).

Успех применения того или иного критерия оптимальности решения обратной задачи во многом зависит от удачно выбранного функционала $\Phi(S^*, \hat{S})$ для оценки близости приближенного решения S^* к точному \hat{S} , который и здесь не обязан, вообще говоря, отвечать аксиомам метрики. В обратных задачах рудного типа, где приближенное решение S^* – как модельный носитель возмущающих масс – геометрическое место точек пространства, занятых возмущающими массами; функционал $\Phi(S^*, \hat{S})$, в основе которого лежит евклидово расстояние $\rho(x, y)$ между граничными точками двух носителей, мало содержателен. Если дальше развить эту мысль, то можно утверждать, что классическое расстояние

$$d(A, B) = \inf \rho(x, y), \quad x \in A, \quad y \in B \quad (6.1)$$

между двумя множествами A и B евклидова пространства, рассчитанное прежде всего на случай $A \cap B = \emptyset$, едва ли подходит для оценки качества приближенного решения рудной обратной задачи.

В самом деле, рассуждать всерьез о точности приближенного решения (носителя) S^* , построенного тем или иным методом, есть смысл лишь тогда, когда носители S^* и \hat{S} имеют хоть какой-то общий фрагмент. В противном случае не играет особой роли, как далеко оба носителя разнесены в пространстве. Но если взять два ограниченных замкнутых носителя S_1^* и S_2^* , первый из которых имеет общий с носителем \hat{S} только некоторый фрагмент своей границы, зато второй целиком совпадает с \hat{S} , то с точки зрения классической метрики d они имеют одну и ту же (максимально возможную) точность –

$$d(S_1^*, \hat{S}) = d(S_2^*, \hat{S}) = 0. \quad (6.2)$$

Можно сказать, что для оценки точности носителя S^* , как приближенного решения обратной задачи, малоэффективной является и классическая метрика Хаусдорфа [1937]

$$H(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\}, \quad (6.3)$$

где

$$d(X, Y) = \max\{d(x, Y) : x \in X\}, \quad (6.4)$$

$$d(x, Y) = \min\{\rho(x, y) : y \in Y\}. \quad (6.5)$$

Возьмем плоскую обратную задачу и ситуацию, когда каждый из носителей S^* и \hat{S} можно представить как объединение двух существенно разновеликих областей S_1^* и S_2^* (соответственно, \hat{S}_1 и \hat{S}_2). Пусть изопериметрический коэффициент одной из них S_1^* (\hat{S}_1), бóльшей по мере, близок к единице (область близка к кругу), а другой S_2^* (\hat{S}_2), мера которой достаточно мала в сравнении с мерой всего носителя S^* (\hat{S}), напротив, значительно меньше единицы, а сама

область имеет довольно вытянутую форму. Тогда хаусдорфово расстояние будет в основном определяться степенью вытянутости областей S_2^* и \widehat{S}_2 , которые в силу своих незначительных размеров могут оказаться малозначимыми с практической точки зрения.

С задачей оценивания степени близости двух ограниченных измеримых носителей S_1 и S_2 источников поля хорошо согласуются нормированные функционалы, порожденные мерой Лебега μ . Возьмем хотя бы функционал

$$\Phi(S_1, S_2) = \frac{\mu(S_1 \cap S_2)}{\mu(S_1 \cup S_2)}, \quad (6.6)$$

который можно считать расширением меры Танимото [Осипов, 2011], пригодной для сравнения двух конечных множеств, на случай несчетных множеств. Если носители совпадают друг с другом, то $\Phi = 1$, если они не имеют общих точек, то $\Phi = 0$. Несколько изменив конструкцию функционала (6.6), можно прийти к метрике Фреше-Никодима-Ароншьяна [Куратовский, Мостовой, 1970]:

$$\rho(S_1, S_2) = \mu((S_1 \cup S_2) \setminus (S_1 \cap S_2)) \quad (6.7)$$

а также к нормированной на отрезке $[0, 1]$ метрике Штейнхауса [Marczewski, Steinhaus, 1958], которая, напомним, выглядит так:

$$\rho(S_1, S_2) = 1 - \frac{\mu(S_1 \cap S_2)}{\mu(S_1 \cup S_2)}. \quad (6.8)$$

Разумеется, заинтересованное лицо в зависимости от целевой задачи само вправе назначить наиболее подходящий функционал близости или метрику ρ . Пусть, например, цель интерпретации заключена в оценке вертикальных размеров источника аномалии \widehat{S} . Обозначим через $\Delta z(S)$ максимальную мощность произвольного носителя S . Тогда простейшей оценкой *потерь* может служить функция

$$\rho(S^*, \widehat{S}) = |\Delta z(S^*) - \Delta z(\widehat{S})|. \quad (6.9)$$

Можно пойти дальше и ввести функционал потерь $\Phi(\Delta z(S^*), \Delta z(\widehat{S}))$, предусмотрев в его структуре различные факторы, важные с практической точки зрения, в том числе подойти дифференцированно к случаям превышения и занижения истинной мощности изучаемого объекта.

Часто проблемы вычислительного характера становятся заметной преградой при реализации алгоритмов, безупречных в теоретическом плане. Так происходит, например, когда завершающий этап реализации алгоритма заключается в установлении глобального минимума условно-экстремальной задачи, но фактически приходится довольствоваться локальным минимумом. При реализации критериев теории принятия решений в обратных задачах гравиразведки возникают более сложные оптимизационные задачи,

чем, скажем, при применении метода подбора. Это вынуждает согласиться с тем и принять это как неизбежное, что наилучшее решение будет выбрано не из всего множества Q , а из его конечного подмножества $Q_0 = \{S_j\}_{j=1}^n \subset Q$ путем прямого подсчета критерия оптимальности для каждого носителя $S_j \in Q_0$. При этом предполагается существование эффективного алгоритма поиска достаточно большого числа допустимых решений, которые составят подмножество Q_0 . Основное требование здесь состоит в том, что найденные решения должны составлять если не *репрезентативное*, то хотя бы достаточно *представительное* подмножество. Репрезентативное – это когда выводы, сделанные по результатам анализа подмножества Q_0 , совпадают с выводами, сделанными на основании анализа всего множества Q . Правда, неясно, как это можно будет подтвердить. Представительное – это когда различием результатов, которые будут получены по информации, содержащейся в допустимых решениях из Q_0 , можно пренебречь. Либо, когда вероятностью ложного вывода, сделанного на основании анализа неполного множества допустимых решений, также можно пренебречь. Но, опять же, как это можно установить, не располагая описанием множества Q в терминах, пригодных для использования в методах решения условно-экстремальных задач?

Ситуация, однако, не столь драматична, как может показаться на первый взгляд. Нам даже не понадобится в качестве оправдания состоятельности наших построений ссылаться на то, что это совершенно нормальная практика, когда о свойствах целого приходится, за неимением большего, судить по какой-то его части. Нам также не придется приводить в пример известные и общепризнанные алгоритмы решения обратных задач гравиразведки и магниторазведки, в которых по умолчанию подобные подмены узаконены. В самых общих словах, проблема построения состоятельного подмножества Q_0 – это проблема выделения из множества Q сравнительно небольшого числа элементов, которые образуют *относительно равномерное* его покрытие и которые благодаря этому составят подмножество Q_0 . Свойство, выделенное курсивом, требует разъяснения. Начнем с очевидного.

Факт первый. Если обратную задачу ставить в конечномерном пространстве (в классе M модельных источников поля, описываемых конечным числом параметров), то истинное решение \hat{S} обратной задачи (модель природного геологического объекта) не будет, строго говоря, принадлежать этому классу. Если модельный класс M источников интерпретируемой аномалии обладает хорошими аппроксимационными свойствами, а в допустимое значение невязки Δ , определяемое уровнем помех в измерениях, внесена поправка за неадекватность, то существует некоторое множество M_0 модельных распределений масс, которые близки к природному и норма разности поля которых с наблюдаемым полем не превосходит это Δ . Из множества M_0 можно выделить множество Q допустимых решений обратной задачи в классе M , отве-

чающих помимо ограничений на невязку всем априорным ограничениям. В общем случае такое множество может оказаться довольно широким; в этом и проявляется приближенная эквивалентность – практическая неустойчивость обратных задач.

Факт второй. У интерпретатора всегда имеется представление о том, сколь значительным может быть расхождение $\rho(\hat{S}, S^*)$ между точным (\hat{S}) и приближенным (S^*) модельными решениями обратной задачи, при котором этим расхождением еще можно было пренебречь и не в ущерб целевой задаче интерпретации поставить между этими решениями знак *практической тождественности*. Это представление обычно выражается в виде некоторой константы ε такой, что при выполнении неравенства $\rho(\hat{S}, S^*) < \varepsilon$ решения S^* и \hat{S} считаются практически неразличимыми, *эквивалентными*. Если впрямь практически неотличимые от \hat{S} приближенные решения обратной задачи обозначать как \bar{S} и называть *опорными* модельными решениями, то любой элемент подмножества $\bar{Q} = \{\bar{S} \in Q : \rho(\bar{S}, \hat{S}) \leq \varepsilon\}$ можно считать неизвестным истинным решением. Такой прием позволяет привести постановку обратной задачи в класс адекватных. Понятно, что подмножество \bar{Q} всегда останется неизвестным, но здесь важен сам факт его существования.

Факт третий. Каким бы емким ни было подмножество $Q_0 \subset Q$ приближенных решений обратной задачи, которые удалось построить в явном виде, мощность множества Q всех допустимых решений, пусть даже оно конечно, будет несоизмеримо больше. Поэтому рассчитывать на то, что если не истинное решение обратной задачи \hat{S} , то хотя бы какое-то одно приемлемое приближение $\bar{S} \in \bar{Q}$ попадет в подмножество Q_0 , маловероятно. В то же время, рассматриваемые ниже критерии из теории принятия решений исходят из того, что либо точное решение \hat{S} обратной задачи является элементом подмножества Q_0 , либо это подмножество содержит хотя бы одно приближенное решение \bar{S} , различием $\rho(\bar{S}, \hat{S})$ которого с \hat{S} можно пренебречь. Таким образом, имеет место определенное противоречие, которое, на первый взгляд, препятствует построению состоятельного подмножества Q_0 .

Однако все не так безысходно. Суть в том, что среди всего многообразия допустимых решений, слагающих множество Q , отыщутся подмножества (классы) Q_1, Q_2, Q_m , каждое из которых составлено из решений, любые два из которых *мало различимы* между собой. Последнее можно понимать так: в каждое из подмножеств $Q_r, r = 1, 2, \dots, m$ входят допустимые носители $\Omega_j^*, \Omega_j^* \in Q$, для любой пары $\Omega_{j(1)}$ и $\Omega_{j(2)}$ которых сумма мер μ фрагментов $\Omega_{j(1)} \setminus \Omega_{j(2)}$ и $\Omega_{j(2)} \setminus \Omega_{j(1)}$ не превышает заданного μ_0 . В общем случае существует не одно такое разбиение $\chi_t, t = 1, 2, \dots$ множества Q на попарно непересекающиеся подмножества $Q_1^{(t)}, Q_2^{(t)}, \dots, Q_{m(t)}^{(t)}$. Пусть χ_k – то из них, которое содержит минимальное число $m(k)$ классов $Q_r^{(k)}$. Вполне можно допустить, что число $m(k)$ окажется меньше мощности $|Q_0|$ подмножества найденных решений. Понятно, что мы не можем

знать ни число $m(k)$, ни тем более состав классов $Q_r^{(k)}$. Но это и не важно. Здесь важен лишь сам факт существования такого разбиения χ_k . Если бы в каждый класс $Q_r^{(k)}$, $r = 1, 2, \dots, m(k)$ попало хотя бы одно построенное допустимое решение из подмножества Q_0 (к сожалению, мы этого также не будем знать), то подмножество Q_0 оказалось бы состоятельным.

После всего сказанного из эвристических соображений напрашивается вывод: шансы построить представительное подмножество Q_0 допустимых решений значительно выше отношения его мощности к мощности всего множества допустимых решений обратной задачи. И на этом строится весь расчет. Далее возможны всяческие послабления. К примеру, можно считать подмножество построенных решений все еще состоятельным, если эти решения попадут «почти» во все подмножества $Q_r^{(k)}$ и т.п.

Таким образом, с точки зрения надежности выводов, которые будут сделаны на основании решения $S^* \in Q_0$, оптимального по какому-то критерию, важно, чтобы множество Q всех допустимых решений содержало некое *опорное* решение \bar{S} , расхождением которого с истинным решением \hat{S} можно было бы пренебречь. Если таких решений не одно, то это лишь упрощает ситуацию. Наличие же опорного решения в Q_0 позволит отождествить носители \bar{S} и \hat{S} , и считать в дальнейшем, что носитель \bar{S} , который, конечно же, останется неизвестным, и есть истинное решение \hat{S} обратной задачи. Можно сказать и так: близость носителей \bar{S} и \hat{S} означает, что о носителе \bar{S} достаточно знать ровно столько, сколько надо знать об истинном носителе \hat{S} для решения поставленной геологической задачи. Так, к примеру, если предстоит заверка гравитационной аномалии бурением, то достаточно, чтобы глубины залегания верхних кромок носителей \bar{S} и \hat{S} были примерно одни и те же. Понятно, что в этом случае можно обойтись множеством Q_0 достаточно малой мощности, а функционалы типа (6.9) окажутся здесь как нельзя кстати.

И последнее, что касается преамбулы к материалу, излагаемому ниже. Для большей ясности сути классических критериев из теории принятия решений мы, пренебрегая поправками, будем считать, что $\hat{S} \in Q_0$. При этом надо иметь в виду следующее. Большинство критериев теории принятия решения, которые позволяют в тех или иных терминах оценить качество принятого решения, рассчитаны на худший сценарий развития событий. В каком-то смысле – это оценки сверху для гарантированно достижимого качества интерпретации. С учетом поправок такие оценки в принципе могут несколько ухудшиться. Но крайний случай, на который рассчитаны оценки, может и произойти, соответственно, крайне редко. Поэтому можно ожидать, что фактическое качество решения в конкретных примерах будет во многих случаях выше прогнозируемого. На этом и строится весь расчет. Что касается способов построения системы результативных допустимых решений с помощью монтажных алгоритмов, то они будут рассмотрены несколько позже в связи с реализацией гаран-

ного подхода в рудной постановке обратной задачи. Определенные представления о новых критериях выбора наилучших решений и их зависимости от принципа построения множества Q_0 можно будет составить по результатам расчетов, приведенным в конце главы.

Критерий равнозначных состояний Лапласа. В его основе лежит посылка, которая по отношению к рудным обратным задачам гравиразведки звучит так: если носители $S_i, i = 1, 2, \dots, n$, составляющие множество Q_0 допустимых решений обратной задачи, нельзя априори ранжировать по вероятности (плотности вероятности) совпадения (степени близости) с истинным \hat{S} , то эти вероятности считаются равными. Если выбранная неотрицательная функция $\rho(S_i, S_j), S_i \in Q_0, S_j \in Q_0$, символизирует *потери* от принятия носителя S_i за оценку носителя S_j , то наилучшим согласно критерию Лапласа является приближенное решение $S^* \in Q_0$ обратной задачи, удовлетворяющее условию

$$\Phi_L(S^*) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \rho(S^*, S_j) = \min \left\{ \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \rho(S_i, S_j), i = 1, 2, \dots, n \right\}. \quad (6.10)$$

При этом значение $\Phi_L(S^*)$ суть оценка качества решения, оптимального по Лапласу.

Функционал (6.10) представляет собой средние потери по всему множеству допустимых решений из Q_0 . Иначе говоря, критерий Лапласа предполагает, что истинным решением задачи может оказаться любая точка множества Q_0 , и сам критерий рассчитан на *усредненные* показатели качества решения при многократном использовании этого критерия в схожих условиях. Оптимальное по Лапласу решение S^* минимизирует *математическое ожидание* $E(\rho)$ *потерь* ρ , когда случайное событие с исходами $S_i = \hat{S}, S_i \in Q_0, i = 1, 2, \dots, n$ имеет на множестве Q_0 *равномерное распределение*.

Мы предлагаем отнести решение обратной задачи, оптимальное по Лапласу, к «особым точкам» множества Q_0 . Не лишне еще раз акцентировать внимание на том, что в отдельно взятой ситуации допустимое решение обратной задачи, оптимальное по *любому* критерию, не может *гарантированно* превзойти по фактическому качеству ρ решение, выбранное по другому критерию в качестве наилучшего. Это относится и к решению, оптимальному по критерию Лапласа.

Остается сказать, что в случае, когда функция $\rho(S^*, \hat{S})$ характеризует *выигрыш*, для определения S^* надо ставить задачу максимизации среднего выигрыша.

Критерий максимина Вальда. В приложении к проблематике обратных задач его суть заключается в следующем. Для каждого из допустимых решений $S_i \in Q_0, |Q_0| = n$ введем его «антипод» $\bar{S}_i \in Q_0$, который при $\hat{S} = \bar{S}_i$ максимизирует *потери* $\rho(S_i, \bar{S}_i)$ от принятия решения S_i в качестве оценки истинного решения \hat{S} , так что:

$$\rho(S_i, \bar{S}_i) = \max\{\rho(\hat{S}_i, S_j) : j = 1, 2, \dots, n\}. \quad (6.11)$$

Наилучшим, по Вальду, является решение $S^* \in Q_0$, отвечающее условию

$$\Phi_w(S^*) = \rho(S^*, \bar{S}^*) = \min\{\rho(S_i, \bar{S}_i) : i = 1, 2, \dots, n\}. \quad (6.12)$$

Как критерий крайнего пессимизма критерий Вальда исходит из того, что природа предельно жестко играет против субъекта, принимающего решение. Этот субъект обязан, по Вальду, рассчитывать на то, что какое бы он ни выбрал решения S^* , истинное решение \hat{S} будет удалено от него на максимально возможное расстояние ρ . Поясним это на простом примере. Пусть модель источников поля описывается вектором $q \in \mathbf{R}^m$, множество Q_0 – шар в \mathbf{R}^m , а функция потерь ρ суть евклидово расстояние между вектором q^* , взятым в качестве приближенного решения обратной задачи, и истинным вектором параметров \hat{q} . Если интерпретатор в качестве вектора q^* взял центр шара, то он должен быть готов к тому, что вектор \hat{q} окажется точкой сферы.

Достоинство критерия Вальда состоит в том, что он рассчитан на максимизацию информативности результатов интерпретации в конкретной задаче без апелляции к средним показателям своей эффективности (как в случае критерия Лапласа) в расчете на самый неблагоприятный случай развития событий. По существу, критерий Вальда направлен на минимизацию оценки сверху для возможных потерь, связанных с приближенным характером построенного решения.

Напомним, что множество $S^* \cap \hat{S}$ точек пространства, которые являются общими для обоих носителей S^* и \hat{S} , мы прежде договорились называть *скрытой достоверной* информацией об изучаемом геологическом объекте. При $\rho(S^*, \hat{S}) = \mu(S^* \cap \hat{S})$ верхняя оценка объема скрытой достоверной информации, которую несет оптимальное, по Вальду, решение S^* , является наилучшей. Поэтому включение этого решения в число «особых точек» множества Q_0 , которые впоследствии войдут в «пакет информации», составленный по результатам интерпретации различными методами, не должно, на наш взгляд, вызывать возражение.

Гарантированные оценки качества решения должны предусматривать самые пессимистические исходы. В одних случаях эти исходы не являются определяющими, как при использовании критерия Лапласа, тогда как критерий Вальда чрезвычайно чувствителен к экстремальным исходам. В некоторых случаях критерий Вальда может проявлять чрезмерную, выходящую за рамки разумного, чувствительность к одиночному допустимому решению или небольшой группе решений S_i из подмножества Q_0 . Поясним это на примере. Пусть мощность n множества Q_0 достаточно велика и все допустимые модельные носители $S_i \in Q_0$ возмущающих масс, кроме двух – S_1 и S_2 , образуют множество $Q'_0 = \{S_i\}_{i=3}^n$ диаметра

$$d(Q'_0) = \max\{\rho(S_i, S_j) : S_i, S_j \in Q'_0\}, \quad (6.13)$$

где ρ – одна из метрик, порожденных лебеговой мерой, к примеру, метрика Штейнхауса. Предположим также, что расстояния

$$\rho_0(S_i, Q'_0) = \min\{\rho(S_i, S_j) : j = 3, 4, \dots, n\}, \quad i = 1, 2 \quad (6.14)$$

существенно превышают значение $d(Q'_0)$. Тогда при определенном расположении «точек» S_1 и S_2 относительно подмножества Q'_0 решением, оптимальным по Вальду, окажется одна из них. В этом случае оценки $\Phi_w(S^*)$ точности решений S^* , отобранных по критерию Вальда из элементов множеств Q'_0 , с одной стороны, и из элементов множества Q_0 , с другой стороны, будут существенно различаться между собой. Но если истинное решение \hat{S} (либо его аппроксимация S°) принадлежит множеству Q_0 , то с вероятностью $p = (n - 2)/n$ оно будет принадлежать подмножеству Q'_0 . В подобной ситуации было бы логично вообще исключить из рассмотрения решения S_1 и S_2 и работать с подмножеством Q'_0 , оценив надежность выбора наилучшего решения из подмножества Q'_0 значением доверительной вероятности $p = (n - 2)/n$.

Приведенный пример наталкивает на мысль о том, чтобы «подправить» критерий Вальда в случае его применения в обратных задачах. Общая идея состоит в том, чтобы, задавшись достаточно высоким значением доверительной вероятности p , выделить из Q_0 подмножество Q'_0 мощности $|Q'_0| \geq pn$ по возможности меньшего диаметра, и после этого вести поиск наиболее подходящего решения, по тому же критерию Вальда, уже на множестве Q'_0 .

Таким образом, критерии, разработанные в теории принятия решений, могут быть «подправлены» и распространены на более широкий класс задач выбора оптимальных решений, чем тот, на который эти критерии были изначально рассчитаны. Такую возможность мы показали выше, связав концепцию, лежащую в основе теории принятия решений, с концепцией доверительной вероятности. Но это не все. Предположим, мы все еще находимся в рамках рудной постановки обратной задачи гравиразведки, и допустим, что для каждого $S_i \in Q_0$ найдется носитель $S_{j(i)} \in Q_0$, не имеющий с S_i общих точек. Если выигрышем служит функционал $\rho(S^*, \hat{S}) = \mu(S^* \cap \hat{S})$, то при использовании критерия Вальда мы, очевидно, столкнемся с наиболее пессимистичным исходом: $\Phi_w(S^*) = 0$, то есть верхняя оценка объема *скрытой информации*, гарантированно содержащейся в оптимальном решении S^* , равна нулю. Такого рода исход не обязательно является признаком безысходности ситуации. Предположим, что непустое пересечение носителей S^* и \hat{S} дает шанс на успех при заверке гравитационной аномалии, и с точки зрения максимизации вероятности решения поставленной задачи наилучшим признается носитель S^* , имеющий общие точки с наибольшим числом допустимых носителей $S_i \in Q_0$. Может показаться, что речь сейчас пойдет о новом принципе отбора, выхо-

дующем за рамки критериев теории принятия решений. Но фактически речь по сути идет об оптимальном решении по критерию Лапласа, где в качестве выигрыша берется функционал

$$\rho(S_i, S_j) = \begin{cases} 1, & S_i \cap S_j \neq \emptyset \\ 0, & S_i \cap S_j = \emptyset \end{cases}, \quad (6.15)$$

а наилучшее решение S^* удовлетворяет условию

$$\Phi(S^*) = \max\{\Phi(S_i), i = 1, 2, \dots, n\}, \quad (6.16)$$

$$\Phi(S_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \rho(S_i, S_j). \quad (6.17)$$

Аналогично можно поставить задачу выбора и в случае применения критерия Вальда. С этой целью с каждым $i = 1, 2, \dots, n$ свяжем систему частично упорядоченных множеств $Q_0^{(i)} = \{S_{j(i,r)}\}_{r=1}^n$, состоящих из элементов множества Q_0 и подчиняющихся условию

$$\mu(S_i \cap S_{j(i,r+1)}) \leq \mu(S_i \cap S_{j(i,r)}), \quad r = 1, 2, \dots, n-1. \quad (6.18)$$

Таким образом для каждого фиксированного i с ростом значения r , входящего в описание $j(i,r)$ номера допустимого носителя из множества Q_0 , мера совпадения носителя $S_{j(i,r)}$ с носителем S_i уменьшается. Понятно, что $S_{j(i,1)} = S_i$ для всех i .

Положим

$$\Phi(S_i) = r_i^{(\min)} = \min\{r : \mu(S_i \cap S_{j(i,r)}) = 0; r = 1, 2, \dots, n\}. \quad (6.19)$$

Тогда $r_i^{(\min)} - 1$ – это число допустимых носителей, с которыми носитель S_i имеет общий фрагмент ненулевой меры. Если, как мы говорили, для интерпретатора этого достаточно, то за наилучшее решение S^* логично принять то, что подчиняется условию

$$\Phi(S^*) = \max\{\Phi(S_i), i = 1, 2, \dots, n\}. \quad (6.20)$$

Пусть максимальное значение $\Phi(S_i) = r_i^{(\min)}$ достигается на некотором $i = i(0)$. Тогда, копируя критерий Вальда, можно принять отношение $p = (r_{i(0)}^{(\min)} - 1) / n$ за оценку доверительной вероятности того, что, выбрав допустимый носитель $S_{i(0)}$ в качестве приближенного решения S^* обратной задачи, поставленная интерпретатором задача будет решена.

Конечно, более реалистичной была бы постановка задачи, в которой для решения целевой задачи интерпретации недостаточно выполнения одного

лишь условия $\mu(S^* \cap \widehat{S}) \neq 0$, а требуется, чтобы для заданного $0 < \mu_0 < 1$ выполнилось условие $\mu(S^* \cap \widehat{S}) \geq \mu_0$. В этом случае необходимо для всех $i = 1, 2, \dots, n$ вычислить функционал

$$\Phi(S_i, \mu_0) = r_i^{(\max)}(\mu_0) = \min \{r : \mu(S_i \cap S_{j(i,r)}) < \mu_0; r = 1, 2, \dots, n\} \quad (6.21)$$

и установить номер носителя S_i , для которого функционал $\Phi(S_i, \mu_0)$ принимает наибольшее значение. Пусть это некоторый номер $i = i(0)$. Тогда за наилучшую оценку истинного носителя принимается носитель $S^* = S_{i(0)}$, и величина $p = (r_{i(0)}^{(\min)}(\mu_0) - 1) / n$ есть соответствующая оценка доверительной вероятности.

Можно поставить также задачу, обратную к только что рассмотренной, когда по заданному значению доверительной вероятности p следует указать оценку снизу для меры μ_0 *общего фрагмента наилучшего и истинного решений, которую можно гарантировать при такой доверительной вероятности.*

Пусть $[pn]$ – ближайшее целое к произведению pn . Для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ установим величину

$$\Phi(S_i, p) = \mu_i^{(\min)}(p) = \mu(S_i \cap S_{j(i,[pn])}). \quad (6.22)$$

Тогда в качестве наилучшего решения S^* выбирается то, на котором было достигнуто наибольшее значение функционала (6.22), и это наибольшее значение есть искомое μ_0 .

Критерий минимакса сожалений Сэвиджа. Сожаление в теории принятия решений – это потери в результате упущенных возможностей, его мера – это дополнительный выигрыш, который мы теряем, взяв за наилучшее решение S_k , в то время как решение S_j является истинным (или наилучшей аппроксимацией для \widehat{S}). При работе с этим критерием функционал $\rho(S_i, S_j)$ надо выбрать так, чтобы его максимальное значение (к примеру единица) достиглось в случае $i = j$.

Главная особенность обратных задач гравиразведки, если их рассматривать как задачи теории принятия решений, заключена в равенстве $A = \Omega$. И поскольку наилучшей оценкой носителя S_j является он сам, то *мера сожаления*

$$\Delta\rho(S_k, S_j) = \rho(S_j, S_j) - \rho(S_k, S_j). \quad (6.23)$$

По Сэвиджу, наилучше решение $S^* \in Q_0$ отвечает условию

$$\begin{aligned} \Phi_C(S^*) &= \max \{ \Delta\rho(S^*, S_j) : j = 1, 2, \dots, n \} = \\ &= \min \{ \max \{ \Delta\rho(S_i, S_j) : j = 1, 2, \dots, n \}, i = 1, 2, \dots, n \}, \end{aligned} \quad (6.24)$$

минимизируя максимально возможные потери.

В случае $\rho(S^*, \widehat{S}) = \mu(S^* \cap \widehat{S})$ мера сожаления выражена в терминах оценки скрытой достоверной информации, содержащейся в решении S^* . И это дает повод причислить такое решение к «особым точкам» множества Q_0 .

Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица. Он является компромиссным: лучшее решение определяется исходя из наиболее оптимистичного и самого жесткого ответа природы на выбранное решение S^* . Пусть на этот раз функционал ρ символизирует *выигрыш*, тогда, как и прежде, \bar{S}_i – ассоциированное с допустимым решением $S_i \in Q_0$ другое допустимое решение обратной задачи, удовлетворяющее условию

$$\rho_0(S_i, \bar{S}_i) = \min\{\rho(S_i, S_j) : j = 1, 2, \dots, n\}. \quad (6.25)$$

По Гурвицу, решение $S^* \in Q_0$ оптимально, если для заданного коэффициента пессимизма $\alpha \in [0, 1]$ выполняется условие

$$\Phi_G(S^*) = \max\{\Phi_G(S_k) : k = 1, 2, \dots, n\}, \quad (6.26)$$

где

$$\Phi_G(S_k) = \alpha \rho_0(S_k, \bar{S}_k) + (1 - \alpha) \rho(S_k, S_k). \quad (6.27)$$

Субъект, принимающий решение согласно критерию Гурвица, грубо упрощает реальную ситуацию. Он полагает, что природа либо с вероятностью α поставит его в самую невыгодную ситуацию (когда истинным окажется носитель \bar{S}^* и выигрыш окажется минимально возможным), либо с вероятностью $(1 - \alpha)$ – в самую благоприятную (когда по воле случая выбранное решение S^* окажется истинным).

Понятно, что два элемента множества, на которые сделан упор в критерии Гурвица, не могут сколь-нибудь полно представить все множество. В случае обратных задач гравиразведки есть смысл обобщить и этот критерий. Предлагается следующее.

Первое, выполнить разбиение множества Q_0 на некоторое, существенно меньшее, чем число n его элементов, число m подмножеств Q_i сравнительно небольшого диаметра. Последнее условие позволяет считать все допустимые решения из подмножества Q_i практически эквивалентными.

Второе, в каждом из подмножеств Q_i выбрать решение S_i^* , которому будет доверено представлять это подмножество. В качестве S_i^* можно взять, например, решения, оптимальные, по Вальду, на множествах Q_i .

Третье, по аналогии с тем, как это принято в структуре критерия Гурвица, задаться коэффициентами пессимизма $\alpha_i, \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m = 1$.

Четвертое, для каждого $i = 1, 2, \dots, m$ вычислить функционал

$$\tilde{\Phi}_G(S_i^*) = \sum_{k \neq i} \alpha_k \rho(S_i^*, S_k^*) + (1 - \alpha_i) \rho(S_i^*, S_i^*). \quad (6.28)$$

Пятое, принять за оптимальное решение S_i^* то, на котором достигается максимум функционала (6.28).

Коль скоро критерий Гурвица существует и пользуется популярностью при решении различных прикладных задач, мы не имели права его проигнорировать. Если читателя интересует наше мнение, то мы не видим, что он мог бы эффективно быть использован в обратных задачах гравirazведки и магниторазведки. Во первых, не вполне ясно, в каких терминах может быть выражена достоверность и информативность решений, оптимальных по Гурвицу. Во вторых, трудно выработать обоснованные рекомендации по выбору параметра α .

6.2. Оптимальные решения в условиях риска

После того как в структуре множества Q все априорные ограничения детерминистского характера учтены, упорядочить исходы $\hat{S} = S_i$ по предпочтению позволяет информация о свойствах помехи ξ в измерениях поля. Мы уже останавливались на том, что с учетом помех геологического характера (влияние неоднородностей, не вошедших в модель наблюдаемого поля) рассчитывать на априорную информацию о каких бы то ни было «тонких» особенностях суммарной помехи не приходится. Однако даже довольно слабая информация о помехе в измерениях поля способна существенно повысить качество результатов интерпретации, в особенности в сочетании с принципом доверительной вероятности p . Критерии принятия решения в условиях риска охватывают задачи, в которых множество Q конечно и существует алгоритм, позволяющий построить априорные оценки вероятностей p_i событий $\hat{S} = S_i$.

Есть смысл изначально, как и при изложении критериев выбора наилучшего варианта в условиях неопределенности, исходить из того, что вычислительные схемы, реализующие эти критерии, будут по объективным причинам работать лишь с *конечным подмножеством* $Q_0 \subset Q$ допустимых решений обратной задачи. При этом не обойтись без предположения, что среди элементов этого множества найдется хотя бы один, который незначительно отличается от истинного решения \hat{S} обратной задачи, и его можно принять за это решение. Для удобства в таком случае принято считать решение \hat{S} элементом множества Q_0 .

Критерий максимума ожидаемой полезности. Этот критерий воплощает в себе распространенное мнение, согласно которому, если ожидаемый выигрыш превосходит затраты, то исходя из «здравого смысла» на них стоит идти.

Пусть случайная величина ζ описывает с вероятностями p_i события $\hat{S} = S_i$, $S_i \in Q_0$, и $\rho(S_k, S_i)$ – польза от принятия решения S_k , при том что истинным решением является S_i . Вероятности p_i событий $\hat{S} = S_i$ можно приписать собы-

тиям $\rho(S_k, \widehat{S}) = \rho(S_k, S_i)$, где S_k – какой-то элемент множества Q_0 . Математическое ожидание

$$E(\rho(S_k, \widehat{S})) = \sum_{i=1}^n p_i \rho(S_k, S_i) \quad (6.29)$$

– суть ожидаемая полезность от принятия решения $S_k \in Q_0$ в качестве результата интерпретации. Приближенное решение $S^* \in Q_0$ считается наилучшим, если

$$\Phi_1(S^*) = E(\rho(S^*, \widehat{S})) = \max \{E(\rho(S_k, \widehat{S})), k = 1, 2, \dots, n\}. \quad (6.30)$$

По отношению к проблематике обратных задач $\rho(S^*, \widehat{S})$ есть качество приближенного решения S^* , а функционал (6.30) есть оценка математического ожидания качества решения S^* . В случае рудной обратной задачи в роли функционала $\rho(S^*, \widehat{S})$ можно взять *объем скрытой достоверной информации* $\mu(S^* \cap \widehat{S})$.

И мы вновь, какой уже раз, сталкиваемся с противоречием между математической и геофизической шкалами оценки состоятельности результата. Договоримся не требовать от оценок, подобных (6.30), наличия свойств, которыми по канонам статистики они должны обладать при $n \rightarrow \infty$. В частности – их состоятельности. В наших задачах число допустимых решений, которые непосредственно удастся построить в явном виде и по которым будет получен итоговый результат интерпретации, всегда конечно. Нет смысла в своих рассуждениях вторгаться в мир виртуальных предпосылок, прибегнув к сослагательному наклонению.

Проблемы, которые не являются надуманными и на самом деле возникают при реализации критерия максимума ожидаемой полезности при решении обратных задач гравirazведки, таковы.

Проблема первая: как построить «разумно заданное» число n допустимых решений S_i обратной задачи, объединив их затем в множество Q_0 .

Проблема вторая: как добиться, чтобы допустимые решения, которые будут построены, «достаточно полно» представляли все существующее множество Q допустимых вариантов интерпретации.

Проблема третья: как преобразовать имеющуюся информацию о свойствах помех ξ_i в измерениях поля $\Delta \tilde{g}(X_i)$ в оценки вероятностей p_i того, что источником аномалии являются массы, заключенные в носителе S_i .

Решению первой проблемы по сути посвящены три предшествующие главы монографии. Изложенный в этих главах монтажный подход позволяет работать с произвольными нулевыми приближениями, которые могут иметь мало общего с искомым решением. Это дает возможность в автоматическом режиме продуцировать последовательность все новых и новых допустимых решений обратной задачи.

С решением второй проблемы тесно связана возможность реализации *гарантированного подхода* к обратным задачам, которому посвящается следующая глава монографии. В ней излагаются некоторые приемы, которые позволяют осуществлять не просто поиск любого, до того не построенного решения обратной задачи, а поиск *результативного* допустимого решения, обладающего некоторым дополнительным свойством, не присущим ранее найденным решениям S_i . Благодаря этому множество Q_0 , составленное из таких результативных решений, может претендовать на статус «достаточно состоятельного».

Что касается третьей проблемы, то разработка алгоритмов решения обратных задач при наличии определенной информации о свойствах помех (не считая ограничение на допустимое значение нормы помехи в измерениях поля) не является, вообще говоря, нашей целью. Однако для случая одного типа помех в измерениях алгоритм решения обратной задачи гравиразведки в условиях риска мы все же рассмотрим.

Критерий Ходжа-Лемана. Он представляет комбинацию критериев, взятых из двух разных классов – критерия Вальда и критерия максимума ожидаемой полезности. Определим $E(\rho(S_k, \hat{S}))$ как в (6.30) и пусть

$$\varphi(S_k, \alpha) = \alpha \rho^{(\min)}(S_k) + (1 - \alpha) E(\rho(S_k, \hat{S})), \quad (6.31)$$

где ρ – функция полезности, а $\alpha \in [0, 1]$ – параметр пессимизма. Решение $S^* \in Q_0$ считается наилучшим, если

$$\Phi_2(S^*) = \varphi(S^*, \alpha) = \max\{\varphi(S_k, \alpha) : k = 1, 2, \dots, n\}. \quad (6.32)$$

Первое слагаемое в (6.31) страхует на случай патологических ситуаций, в которых ориентация только на одно математическое ожидание не оправдывает себя. Пример такой ситуации хорошо описывает известный Санкт-Петербургский парадокс Бернулли [Кудрявцев, 2013].

Критерий наиболее вероятного состояния природы. Это, пожалуй, тот критерий, который субъект, не искушенный в теории, мог бы предложить и сам. В качестве наилучшего выбирается решение $S^* \in Q_0$, для которого априорная вероятность события $S^* = \hat{S}$ максимальна. Мы не смогли дать однозначный ответ на вопрос, что принять за качество функционала $\Phi_3(S^*)$ для такого решения. Видимо, это не случайно. По сути, критерий наиболее вероятного состояния природы – это один из многочисленных скалярных критериев оптимальности, основанных на *попарном* сравнении альтернативных вариантов интерпретации. Основным недостатком подобных критериев является слабая чувствительность к контексту выбора – структуре множества Q_0 .

Снова для наглядности возьмем крайнюю ситуацию. Пусть при достаточно большом n все решения S_i , кроме одного (S_1), составляют множество Q'_0 достаточно малого диаметра d , тогда как расстояние $\rho(S_1, Q'_0)$ многократно превышает d . Но если априорная вероятность p_1 события $\hat{S} = S_1$ превосходит

вероятности каждого из событий $\hat{S} = S_i, i = 2, 3, \dots, n$, то оптимальным, согласно рассматриваемому критерию, будет названо решение S_1 , причем независимо от того, насколько малым является p_1 и насколько большим является $\rho(S_1, Q'_0)$.

Конечно, весьма сомнительно, чтобы в обратных задачах гравиразведки и магниторазведки вероятность совпадения одного из допустимых решений с истинным была сопоставима с суммой вероятностей аналогичных событий по всем другим решениям из Q_0 . Сложно представить также, чтобы одно допустимое решение, имеющее, к тому же, особое преимущество, было заметно «удалено» от всех остальных. Впрочем, не стоит задаваться вопросом, при каких сочетаниях $\langle n, d, \rho(S_1, Q'_0) \rangle$ применение обсуждаемого критерия имеет смысл, а при каких нет. Проще подправить критерий. По нашему мнению известные критерии принятия решений в условиях риска только выиграют, если в их структуре, как и в случае критериев выбора решения в условиях неопределенности, найдется место для принципа доверительной вероятности p . Вполне возможно, читатель уже догадался, что надо попытаться найти как можно более узкое подмножество $Q'_0 \subset Q_0$, которому решение \hat{S} принадлежит с высокой вероятностью p , и если это удастся, то уже среди допустимых решений из Q'_0 выбирать наиболее вероятное.

Критерий минимума ожидаемых сожалений. По существу это обобщение критерия минимакса сожалений Сэвиджа. Определим значения $\Delta\rho(S_k, S_j)$, как в формуле (6.23). Пусть ζ_k – дискретная случайная величина, принимающая значения $\Delta\rho(S_k, S_j), j = 1, 2, \dots, n$, и p_j – вероятность события $S_j = \hat{S}$. Тогда

$$E(\zeta_k) = \sum_{j=1}^n p_j \Delta\rho(S_k, S_j). \quad (6.33)$$

Решение $S^* \in Q$ считается оптимальным, а $\Phi_4(S^*)$ – его качеством, если

$$\Phi_4(S^*) = \min\{E(\zeta_i) : i = 1, 2, \dots, n\}. \quad (6.34)$$

6.3. Построение апостериорных оценок плотности распределения допустимых решений обратной задачи

В теории принятия решений в условиях риска вопрос о том, каким образом можно получить распределения вероятностей возможных исходов изучаемого явления (процесса), выведен за рамки этой теории. Что касается обратных задач геофизики, изучаемых в монографии, то, как мы уже говорили, любая, пусть даже незначительная информация о помехах в геофизических измерениях способна заметно повысить качество результатов интерпретации, если этой информацией правильно воспользоваться. Постановки обратных задач

в условиях риска потенциально более информативны, чем задачи в условиях неопределенности.

В плане построения необходимого распределения вероятностей немало важно, в каких терминах будут выражены допустимые решения обратной задачи. Если вектор $q \in \mathbf{R}^m$ параметров $q_j, j = 1, 2, \dots, m$, модели источников поля входит в ее описание в явном виде, то в качестве элементов множества Q допустимых решений обратной задачи удобно эти векторы и брать. Примером тому может служить вектор эффективных плотностей парциальных тел, слагающих возмущающий объект, или вектор коэффициентов полинома, с помощью которого описывается граница раздела двух плотностных неоднородностей. В случае аппроксимации возмущающего объекта системой уступов [Булах, 2010] в качестве вектора выступают координаты их граней. Что касается класса конфигурационных носителей, то здесь отсутствует само понятие параметрической размерности возмущающего объекта, сохраняющейся неизменной на протяжении всего интерпретационного процесса. Поэтому при постановке рудной обратной задачи в классе конфигурационных носителей в качестве элементов множества Q удобнее брать непосредственно допустимые носители S_a . Если множество Q допустимых векторов q несчетно, то речь идет о восстановлении приближенной оценки $\tilde{P}(q)$ плотности $P(q)$ вероятностей совпадения допустимых решений из множества Q с истинным решением \hat{q} (при условии, что вектор $\hat{q} \in Q$, либо в множестве Q отыщется элемент, различием которого с \hat{q} можно пренебречь и который можно принять за \hat{q}). Если множество Q конечно (как в случае конфигурационного модельного класса), то речь пойдет не о плотности вероятностей, а об оценках вероятности совпадения элементов множества Q с истинным решением.

Действительность такова, что если свойства помех инструментального характера еще поддаются изучению, то о помехах геологического происхождения такого не скажешь. Интенсивность геологических помех, как правило, выше, чем инструментальных. Это обязывает весьма осторожно подходить к введению в постановки обратных задач тех или иных посылок о предполагаемых свойствах суммарной помехи ξ в измерениях аномалии, избегая неоправданной идеализации. Последняя приводит, в конечном счете, к завышенным оценкам реальных возможностей алгоритма решения обратной задачи, создавая иллюзию благополучия. Какой бы заманчивой не выглядела идея использования информации о «тонких» особенностях помехи измерений, адекватные постановки обратных задач гравиразведки и магниторазведки должны, на наш взгляд, иметь детерминистскую основу с небольшим «вкраплением» в нее простейшей и надежной информации о свойствах помех. В этом плане за характерной для многих известных постановок обратных задач посылкой, предполагающей нормальный закон распределения помех в измерениях (или даже равенство нулю математического ожидания помехи),

авторы монографии видят стремление «подогнать» реальность под известные математические наработки.

Принимая во внимание, что в постановках обратных задач присутствует разнообразная априорная информация об источниках поля, структура множества Q может оказаться достаточно сложной. В этой ситуации рассчитывать на то, что «свертку» априорной информации в оценку распределения вероятностей удастся выполнить с помощью какого-то простого оператора, не стоит. Аналитический подход к проблеме здесь едва ли окажется конструктивным. Необходим алгоритмический подход. Применительно к каждому типу информации о свойствах помех понадобится свой эффективный алгоритм «свертки». Как это можно сделать, покажем на примере.

Рассмотрим постановку обратной задачи гравиразведки, в которой помимо традиционного ограничения на норму помехи ξ вводится довольно слабое, но, как показали результаты вычислительного эксперимента [Балк, 1978, 2010, 2011; Балк, Балк Т., 1978; Балк, Березовский, 1990; Балк, Долгаль, 2017₂], чрезвычайно информативное предположение о равенстве нулю ее *медианного значения* $Me(\xi)$. Для геофизической практики такое допущение является, безусловно, более оправданным, чем стандартное предположение о центрированности помехи, и уж тем более – о ее нормальном распределении. В содержательном плане условие

$$Me(\xi) = 0 \quad (6.35)$$

означает, в сущности, довольно слабое предположение: нет объективных причин считать, что в измерениях поля преобладают помехи какого-то одного знака. Иначе говоря, помехи обоих знаков равновероятны, тогда как на абсолютные их значения никаких ограничений не налагается. Условие (6.35) допускает ситуацию, при которой среди наибольших по модулю помех преобладают помехи одного знака, то есть когда закон распределения помех имеет ярко выраженную асимметрию. В частности, такая гипотеза оправдана, если в модели плотностной среды нашли отражение небольшие по размерам приповерхностные неоднородности, обладающие как повышенной, так и пониженной эффективной плотностью. Хорошо известно, что в таком случае методы приближения, основанные на минимизации евклидовой нормы расхождения модельного и наблюдаемого полей, дают неудовлетворительные результаты.

Мы будем в существенном опираться на результаты отмеченных выше публикаций авторов монографии, в которых разработан алгоритм построения оценки $\tilde{P}(c)$ функции плотности вероятности $P(c)$ для вектора $c = (c_1, c_2, \dots, c_m)$ коэффициентов c_j регрессионной зависимости

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j(x) \quad (6.36)$$

по измерениям с помехами, подчиняющимся условию (6.35). Для нас этот алгоритм интересен тем, что в линейных обратных задачах гравиразведки можно действовать по аналогии с задачей оценивания коэффициентов регрессии. В этом случае функция $\varphi(x)$ в выражении (6.36) играет роль (суммарной) истинной аномалии $\Delta\hat{g}(x)$ (для определенности мы взяли гравиметрические измерения), а каждая функция $\varphi_j(x)$ – роль аномалии, обусловленной j -ым парциальным телом \hat{S}_j единичной плотности. Параметры c_j играют роль оцениваемых эффективных плотностей $\hat{\delta}_j$ этих тел. Собственно, наилучшие оценки c_j^* коэффициентов регрессии определяются по критерию максимума ожидаемой полезности. В специальной литературе в этом случае принято говорить о наилучших оценках, отвечающих минимуму эмпирического риска. Если взять нелинейную обратную задачу рудного типа, то она будет уже ассоциироваться с нелинейной функцией $\varphi(c)$, содержащей параметры c_j , которые играют роль оцениваемых характеристик носителя источников поля.

На большом числе модельных примеров установлена высокая степень робастности алгоритма, когда даже при заметном отступлении фактических свойств конкретной реализации помехи от условия (6.35) алгоритм способен существенно подавлять помеху, обеспечивая «невязку» модельной и истинной регрессионных зависимостей (мы используем геофизическую терминологию), которая многократно ниже уровня помех. Это вселяет надежду на то, что и в случае обратных задач гравиразведки и магниторазведки алгоритм продемонстрирует хорошие фильтрующие свойства и достигнутая невязка истинного и подобранного полей окажется существенно ниже уровня помех. Но, главное, конечно, что ожидалось от алгоритма – это сравнительно высокое качество приближенного решения, отвечающего минимуму эмпирического риска. Ожидания оказались не напрасными. Более того, на модельных примерах установлено, что минимум эмпирического риска, как оценка математического ожидания ошибки приближенного решения обратной задачи, может служить достаточно надежной оценкой фактической точности этого решения.

Изложим вкратце суть процедуры построения функции распределения вероятностей и собственно построения приближенного решения, отвечающего минимуму эмпирического риска. Мы ограничимся необходимым минимумом математических выкладок, отсылая заинтересованного читателя к упомянутым выше специализированным публикациям.

Рассмотрим ситуацию, охватывающую как рудную, так и линейную обратную задачи (для определенности, гравиразведки), когда в рамках принятого модельного класса M неизвестное распределение возмущающих масс можно (с приемлемой точностью, позволяющей пренебречь поправками за неадекватность модели) описать вектором $q \in \mathbf{R}^m$. Пусть помимо условия (6.35) задана оценка сверху для нормы помех ξ_i в измерениях

$$\Delta\tilde{g}(X_i) = \Delta\hat{g}(X_i) + \xi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.37)$$

Предположим также, что интерпретатор дополнительно к вышеназванной располагает еще некоторой априорной информацией G исключительно детерминистского характера. Забудем на время об условии (6.35); пусть ограниченное множество $Q \subset \mathbf{R}^m$ допустимых решений обратной задачи построено без его учета. Каждый элемент $q_\alpha = (q_{1,\alpha}, q_{2,\alpha}, \dots, q_{m,\alpha})$ этого множества может претендовать на статус вектора параметров истинного распределения масс $\hat{q} \in \mathbf{R}^m$ (либо на то, что является элементом q° , наиболее близким к \hat{q} среди всех элементов множества Q). Повторимся, что если относительно помехи измерения мы не располагаем информацией вероятностного характера, то все допустимые решения обратной задачи, составляющие множество Q , *равнозначны*. Иначе говоря, априорная информация детерминистского толка способна лишь сузить границы множества Q , но установить отношение порядка (отношение предпочтительности) на элементах этого множества такая информация не в состоянии. Если множество Q конечно, то можно говорить о существовании ненулевых вероятностей того, что то или иное из допустимых решений окажется неизвестным истинным решением. Но без привлечения информации о свойствах помех измерений эти вероятности *равны* между собой. Иная ситуация возникает при наличии такой информации. В нашем случае это условие $Me(\xi) = 0$.

Каждому допустимому вектору $q^{(r)} \in Q$ параметров модели соответствует определенный вектор $\xi^{(r)} = (\xi_1^{(r)}, \xi_2^{(r)}, \dots, \xi_n^{(r)})$, смысл которого состоит в следующем: решение $q^{(r)}$ является истинным решением \hat{q} обратной задачи, если вектором аддитивных помех в измерениях (6.37) является вектор $\xi^{(r)}$. Вектор $\xi^{(r)}$ есть разность между вектором измерений $\Delta\tilde{g}(X_i)$ и вектором значений поля, обусловленного распределением масс с вектором параметров $q^{(r)}$. Априорную информацию (6.35) о свойствах помех в измерениях поля можно преобразовать в апостериорные оценки плотности \tilde{p}_r вероятности того, что реализацией этой помехи мог быть вектор $\xi^{(r)}$. Или, что то же самое, – в апостериорные оценки плотности вероятности того, что допустимое решение $q^{(r)}$ является истинным решением обратной задачи (чтобы каждый раз не ссылаться на возможную неадекватность модели источников поля и не вводить в обсуждение *опорный* вектор параметров модели, будем, по крайней мере в этом разделе, считать далее, что $\hat{q} \in Q$)).

Если множество Q рассматривать как область определения случайного вектора q , компоненты которого описывают возможные значения неизвестных параметров $\hat{q}_j, j = 1, 2, \dots, m$, то процедура построения вектора q^* , отвечающего критерию минимума эмпирического риска, сводится по существу к построению функции $P(q)$ плотности вероятности вектора q на множестве Q . Лучше даже будет сказать – к построению эмпирической оценки $\tilde{P}(q)$ этой функции. В свою очередь, проблема построения функции $\tilde{P}(q)$ сводится при усло-

вии (6.35) к разбиению множества Q на систему замкнутых подмножеств D_k , $k = 1, 2, \dots, l$, любые два из которых могут иметь общими разве что граничные точки и которые допускают обоснованную оценку вероятностей принадлежности вектора \hat{q} каждому из этих подмножеств.

Рассмотрим вначале случай линейной обратной задачи гравиразведки, а затем просто отметим те особенности схемы построения функции плотности вероятностей \tilde{P} , которые обусловлены нелинейным вхождением оцениваемых параметров модели в формулу вычисления гравитационного эффекта модельных возмущающих масс.

Начнем со следующего замечания: согласно (6.35), вероятность того, что отклонение

$$d(i) = \Delta \tilde{g}_i - \sum_{j=1}^m \Delta g_{j,i} \hat{\delta}_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6.38)$$

наблюденого и истинного поля (здесь $\Delta g_{j,i}$ – поле масс, распределенных с единичной эффективной плотностью по парциальному носителю \hat{S}_j) имеет положительный знак, совпадает с вероятностью того, что оно имеет отрицательный знак и обе эти вероятности равны 0,5. По аналогии с (6.38) введем в рассмотрение n функций m переменных δ_j , $j = 1, 2, \dots, m$:

$$u(i) = \Delta \tilde{g}(X_i) - \sum_{j=1}^m \Delta g_{j,i} \delta_j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.39)$$

Предположим теперь, что мы взяли какой-то вектор $\delta \in Q$ и вычислили значения функций $u(i)$. Эти значения имеют следующий содержательный смысл: вектор δ был бы истинным вектором $\hat{\delta}$ эффективных плотностей лишь в том случае, если бы ошибками измерений ξ_i были названные значения функций $u(i)$. Возьмем теперь произвольную последовательность длины n (назовем ее U), элементами которой являются арифметические знаки «+» и «-», и пусть $D \subset Q$ – множество всех векторов δ , и при которой последовательность знаков $sign(d(1)), sign(d(2)), \dots, sign(d(n))$ совпадает с последовательностью U . Тогда априорная вероятность того, что $\hat{\delta} \in D$, равняется $\frac{1}{2^n}$. По сути, это есть ключ к выбору упомянутого выше разбиения

$$Q = \bigcup_{k=1}^l D_k. \quad (6.40)$$

Поскольку число различных последовательностей U равно 2^n , то, казалось бы, необходимо положить $l = 2^n$, с тем чтобы каждое из l множеств D_k объединяло векторы δ , обеспечивающие одну и ту же последовательность знаков разностей наблюденного и модельного полей в точках измерения X_j . Тогда, опять же в силу условия (6.35), априорные вероятности событий $\hat{\delta} \in D_k$,

$k = 1, 2, \dots, l$, были бы равны $\frac{1}{2^n}$. После этого оставалось бы реализовать алгоритм минимизации эмпирического риска.

Все так, если бы не одно обстоятельство. Суть его в следующем. Если не считать априорные ограничения детерминистского толка, то в случае линейной обратной задачи множества D_k при условии (6.35) являются многогранниками, высеченными в пространстве \mathbf{R}^m плоскостями $u(i) = 0, i = 1, 2, \dots, n$. Известна [Orlik, Terao, 1992] оценка сверху для числа K многогранников (включая неограниченные), на которые пространство \mathbf{R}^m разбивает система из n гиперплоскостей.

$$K \leq \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{m}. \quad (6.41)$$

При характерном для практики интерпретации гравитационных аномалий соотношении между числом n точек измерения поля и числом m оцениваемых параметров источников поля будет иметь место сильное неравенство $K \ll 2^n$. Другими словами, среди множеств D_k должны существенно преобладать пустые. Это означает, что для произвольно взятой последовательности знаков U наиболее характерным будет следующий исход: каким бы ни был вектор истинных плотностей δ_j масс, последние в принципе не могут породить измерения $\Delta \tilde{g}(X_i)$, в которых знаки помех ξ_i образовали бы эту последовательность. Таким образом, требуется пересчитать априорные вероятности событий $\delta \in D_k$ в апостериорные, учитывая при этом лишь непустые множества D_k .

Важной предпосылкой эффективности при использовании построенной плотности в алгоритмах оценивания параметров модели источников поля по минимуму эмпирического риска стала предложенная в [Балк, 1978] эвристика, согласно которой отмеченное апостериорное распределение вероятностей целесообразно строить не на введенных множествах D_k (тех, что оказались непустыми), а на более грубом разбиении множества Q на некоторое число множеств Ω_i , сопоставимое с числом измерений n . Неожиданность такого предложения заключается в том, что именно множества D_k являются наименьшими по мере областями из \mathbf{R}^m , допускающими обоснованную оценку априорной вероятности попадания в каждую из них вектора δ . Тем не менее, вопреки кажущейся потере информации идея «укрупнения» разбиения множества Q оказалась весьма удачной. Для того, чтобы названная эвристика оказалась эффективной на практике, необходим правильный принцип объединения отдельных семейств подмножеств D_k в множества Ω_i .

В основу этого принципа был положен предложенный в работе [Дубов, 1974] критерий выбора оптимальной степени полиномиальной зависимости при сглаживании измерений. Этот критерий рассчитан на условия, при которых среди измерений достаточно высок процент тех, что содержат малую по

абсолютной величине помеху, и при этом допускается определенный процент измерений со сравнительно большими по абсолютной величине помехами (так называемые ураганные измерения, или высоки). При названных выше условиях метод сглаживания экспериментальных зависимостей по минимуму эмпирического риска *непосредственно* направлен на минимизацию невязки модельной и истинной зависимости (в наших задачах – модельного и *истинного* полей). Напомним, что традиционные методы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий решают эту проблему опосредованно, путем минимизации модельного и *наблюдаемого* полей, что неэффективно при асимметричных помехах.

Итак, для $i = 1, 2, \dots, n$, введем в рассмотрение бинарные переменные

$$\lambda_i = \begin{cases} +1, & \text{если } u(i) \geq 0 \\ -1, & \text{если } u(i) < 0 \end{cases}, \quad (6.42)$$

а для $i = 1, 2, \dots, n-1$ – бинарные переменные

$$v_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \lambda_i \lambda_{i+1} \leq 0 \\ 0, & \text{если } \lambda_i \lambda_{i+1} > 0 \end{cases}. \quad (6.43)$$

Положим

$$\Omega_t = \left\{ \delta \in Q : \sum_{i=1}^{n-1} v_i = t \right\}, \quad t = 0, 1, \dots, n-1. \quad (6.44)$$

Таким образом, каждое из, вообще говоря, многосвязных множеств $\Omega_t \subset Q$ содержит векторы эффективных плотностей δ , при которых число переходов знаков элементов последовательности $u(i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ равно t . При условии (6.35) априорные оценки \bar{p}_t вероятностей событий $\delta \in \Omega_t$ вычисляются по формуле

$$\bar{p}_t = \frac{\binom{n-1}{t}}{2^{n-1}}, \quad t = 0, 1, \dots, n-1. \quad (6.45)$$

Среди подмножеств Ω_t также могут оказаться пустые, и с учетом этого обстоятельства оценки (6.45) необходимо пересчитать в апостериорные оценки \bar{p}_t вероятностей событий $\delta \in Q$. Однако ситуация с пустыми множествами Ω_t принципиально иная, чем в случае с подмножествами D_k . Число пустых множеств Ω_t теперь уже сравнимо с числом непустых множеств Ω_t . По результатам широкого вычислительного эксперимента можно даже утверждать, что для случайно выбранного элемента t индексного множества

$$T = \{t \in \{0, 1, \dots, n-1\} : \Omega_t \neq \emptyset\} \quad (6.46)$$

вероятность события $t \in T$ выше вероятности события $t \notin T$. Поэтому при пересчете априорных вероятностей в апостериорные $\bar{p}_t, t \in T$ можно поступить просто: увеличим пропорционально каждое значение \bar{p}_t . Тогда

$$\bar{\bar{p}}_t = \frac{\bar{p}_t}{\sum_{t \in T} \bar{p}_t}, \quad t \in T. \quad (6.47)$$

Таким образом, оценка $P_0(\delta)$ плотности вероятности случайного вектора δ , реализации которого могут быть истинным вектором $\hat{\delta}$, есть кусочно-постоянная в \mathbf{R}^m функция

$$P_0(\delta) = \frac{\bar{\bar{p}}_t}{\mu(\Omega_t)}, \quad \delta \in \Omega_t, \quad t \in T. \quad (6.48)$$

Теперь для реализации критерия максимума ожидаемой полезности, или, как здесь удобнее сказать, критерия минимума эмпирического риска необходимо ввести функцию потерь за принятие ошибочного решения. В вычислительном плане при реализации алгоритма минимизации эмпирического риска наиболее удобной функцией потерь является расстояние между векторами δ и $\hat{\delta}$ в евклидовой метрике. В этом случае, согласно [Балк, 2010], минимум эмпирического риска обеспечивает вектор эффективных плотностей δ^* с компонентами

$$\delta_j^* = \sum_{t \in T} \frac{\bar{\bar{p}}_t}{\mu(\Omega_t)} \int_{\Omega_t} \delta_j d\delta_1 d\delta_2 \dots d\delta_m, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (6.49)$$

В начале раздела мы ставили целью показать на примере какого-то одного из типов априорной информации о свойствах помех, как можно ее преобразовать в распределение функции плотности распределения вектора параметров модели, компоненты которого ассоциируются с возможными значениями истинных параметров возмущающего объекта. Если так, то формально поставленную цель мы достигли, после того как привели формулу (6.48). Что касается модели источников поля, нелинейной относительно оцениваемых параметров, то основное отличие от линейного случая будет состоять в том, что области D_k будут теперь ограничены криволинейными поверхностями.

Если подойти к задаче конструктивно, то нельзя не заметить, что даже в линейном случае алгоритмы вычисления оптимальных оценок по формулам (6.49), в которых присутствует операция интегрирования по областям m -мерного пространства, могут быть реализованы (даже при прогнозируемой мощности компьютеров ближайших лет) для моделей с числом параметров m порядка 3–4, от силы 5–6. Сюда надо приплюсовать и собственно проблему разбиения множества Q на подмножества Ω_t . Однако выход из положения был найден. Дело в том, что на практике – и вычислительный эксперимент это полностью под-

твердил – вполне успешно можно использовать упрощенный метод, когда наилучшее решение выбирается (по тому же критерию минимума эмпирического риска) из некоторого *конечного*, желательного сколь-нибудь близкого к репрезентативному подмножества допустимых решений обратной задачи. Такой подход нам особенно близок. Суть в том, что аддитивные технологии интерпретации гравитационных и магнитных полей, рассматриваемые в последней главе монографии, на практике удастся реализовать лишь по отношению к некоторому представительному конечному множеству допустимых решений обратной задачи. В методологическом плане ситуация будет выигрышной, если концепция использования конечного множества допустимых решений обратной задачи станет связующим звеном между аддитивными алгоритмами интерпретации и методами, практикующими критерии теории принятия решений.

Итак, пусть $q \in \mathbf{R}^m$ – вектор оцениваемых параметров модели источников аномалии без уточнения их содержательного смысла. Пусть Q_0 – некоторое (конечное) множество допустимых решений $q_k = (q_{1,k}, q_{2,k}, \dots, q_{m,k})$, $k = 1, 2, \dots, l$ обратной задачи, которые удалось построить интерпретатору. Напомним, что если множество Q всех допустимых решений построить не удастся (даже если оно конечно), но непременно требуется воспользоваться одним из критериев теории принятия решений, то мы вынуждены принять за неизбежное послышку о том, что истинный вектор \tilde{q} – это один из элементов его подмножества Q_0 .

Введем в рассмотрение множества

$$\Omega_t = \left\{ q \in Q_0 : \sum_{i=1}^{n-1} v_i = t \right\}, \quad t = 0, 1, \dots, n-1, \quad (6.50)$$

где бинарные переменные $v_i = v_i(q)$ связаны формулой (6.43) с бинарными же переменными λ_i , а те, в свою очередь, формулой (6.42) с функциями

$$u(i) = u(i; q) = \Delta \tilde{g}(X_i) - \Delta g(q; X_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.51)$$

где $\Delta g(q; X_i)$ – модельное поле в точке X_i . Точно так же, как мы поступали, работая с множествами D_k , соберем в индексное множество T номера t непустых множеств Ω_t :

$$T = \{t \in \{0, 1, \dots, n-1\} : \Omega_t \neq \emptyset\}. \quad (6.52)$$

По аналогии с (6.44), нам так же понадобится разбиение множества Q_0 на подмножества, в данном случае

$$Q(t) = \{q_k \in Q_0 : q_k \in \Omega_t\}, \quad t \in T. \quad (6.53)$$

Возьмем произвольно некоторое допустимое решение $q = q_k$, и пусть оно – в соответствии с числом переходов знака элементов последовательности значений $u(i)$ – принадлежит подмножеству Ω_t с некоторым номером t . Тогда апо-

стериорная оценка p_k вероятности того, что вектор q_k и есть истинный вектор \hat{q} , вычисляется по формуле

$$p_k = \frac{\binom{n-1}{t} |\Omega_t|}{2^{n-1} \sum_{r \in T} |\Omega_r|} . \quad (6.54)$$

Если в качестве потерь за принятие приближенного решения q^* взять функционал

$$\rho(q^*, \hat{q}) = \left(\frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (q_j^* - \hat{q}_j)^2 \right)^{1/2} , \quad (6.55)$$

то величина эмпирического риска $R(q_k)$ – в случае принятия вектора $q_k \in Q_0$ в качестве вектора оптимальных оценок истинных параметров модели источников поля – запишется в развернутом виде так:

$$R(q_k) = \sum_{t \in T} \sum_{q \in Q(t)} \frac{\binom{n-1}{t} |Q(t)|}{2^{n-1} \sum_{r \in T} |Q(r)|} \left(\frac{\sum_{j=1}^m (q_{j,k} - \hat{q}_j)^2}{m} \right)^{1/2} . \quad (6.56)$$

В качестве оптимального по минимуму эмпирического риска принимается тот вектор q_k (обозначим его как q^*), на котором достигается наименьшее значение функционала (6.56). При использовании такого упрощенного метода, свободного от операции интегрирования, вычислительные затраты на его реализацию по сути не зависят ни от характера нелинейности в функциональной зависимости поля от параметров модели, ни от функции потерь.

Для приложений наибольший интерес представляет вопрос, насколько величина риска (как математического ожидания ошибки приближенного решения обратной задачи) будет близка к фактической погрешности приближенного решения q^* . И, разумеется, интересно сопоставить (по значению функционала (6.55)) качество решения обратной задачи по предложенному методу, допускающему асимметричность помех, с методом, основанным на минимизации квадратической невязки подбора.

6.4. Результаты вычислительных экспериментов

Пример 6.1. На взгляд авторов монографии, наиболее интересным из рассмотренных восьми критериев из теории принятия решения является критерий оптимальности по минимуму эмпирического риска. Интерес к нему по-

догревается тем, что потенциально здесь появляется возможность оценить достигнутую точность решения обратной задачи не напрямую (что возможно лишь при решении модельных примеров), а опосредованно, по величине риска. Поэтому неслучайно описание результатов вычислительного эксперимента мы начинаем именно с этого примера.

Рассматривается двумерная обратная задача гравirazведки, в которой аномалия $\Delta g(x)$, заданная в точках $x_i = 0,4i$, $i = 1, 2, \dots, 50$, обусловлена призмами

$$\widehat{S}_1 = \{(x, z) : 8,5 \leq x \leq 11,5; 1,0 \leq z \leq 3,0\}$$

и

$$\widehat{S}_2 = \{(x, z) : 7,5 \leq x \leq 12,5; 4,5 \leq z \leq 7,5\}$$

с эффективными плотностями $\widehat{\delta}_1 = 0,15$, $\widehat{\delta}_2 = 0,20$. Пусть область, предположительно содержащая вектор $\widehat{\delta}$, суть прямоугольник

$$D = \{\delta = (\delta_1, \delta_2) : 0,1 \leq \delta_1 \leq 0,2; 0,1 \leq \delta_2 \leq 0,3\}$$

(расстояние в километрах, плотности в г/см³).

Выполнено несколько серий расчетов по $N = 500$ вариантов W_k решения обратной задачи в серии. В рамках каждой серии в каждом варианте k в качестве помех $\xi_i^{(k)}$, $i = 1, 2, \dots, n$ используются реализации нормальной случайной величины ξ с определенным среднеквадратическим значением σ ; в пределах каждой серии варианты W_k разнятся между собой реализациями (выборками) $\{\xi_i^{(k)}\}_{i=1}^n$ случайной величины ξ . Ниже приводятся средние (по всем N вариантам) значения фактической точности решения обратной задачи по методу минимизации невязки ($\bar{\rho}^{(MMH)}$) и по методу минимизации риска ($\bar{\rho}^{(MMP)}$) при различных уровнях помех (значение σ дано в процентном отношении к амплитуде поля $\Delta \bar{g}$). Методы минимизации, вообще говоря, не предполагают прогноз ошибки построенного решения. Их задача – дать наилучшее решение без оценки его качества. Тем не менее, мы решили для сравнения привести среднее значение \bar{R} прогнозируемой ошибки решения по методу минимизации риска.

Для трех различных уровней помехи получено:

$$\sigma = 5\%, \quad \bar{\rho}^{(MMH)} = 0,004, \quad \bar{\rho}^{(MMP)} = 0,007, \quad \bar{R} = 0,009;$$

$$\sigma = 10\%, \quad \bar{\rho}^{(MMH)} = 0,008, \quad \bar{\rho}^{(MMP)} = 0,012, \quad \bar{R} = 0,014;$$

$$\sigma = 20\%, \quad \bar{\rho}^{(MMH)} = 0,016, \quad \bar{\rho}^{(MMP)} = 0,020, \quad \bar{R} = 0,019.$$

Коротко прокомментируем эти результаты. Прежде всего обратим внимание на то, что в среднем точность решения по минимуму эмпирического риска не столь уж заметно уступает точности решения по минимуму невязки (от 25% до 75% в зависимости от уровня помех). И это при том, что метод

эмпирического риска обязан предусматривать и самые худшие случаи, когда истинными значениями $\hat{\delta}_j$ могут быть, скажем, точки границы области D . Метод же минимизации невязки никак не связан с этой областью и ее мерой. То есть по сути оба метода не находятся в равных условиях. Не менее интересно другое. Средняя оценка \bar{R} точности приближенного решения, построенная по методу минимизации риска, чрезвычайно близка к среднему значению $\bar{\rho}^{(MMP)}$ фактической точности решения, построенного в предположении (6.35). При трех опробованных уровнях помех в измерениях разница между этими величинами составила 30%, 15% и 5%. Лишь благодаря тому, что пример модельный, мы имеем возможность узнать величину средней точности построенных решений. Таким образом, можно сказать, что в этой серии примеров длины 500 точность построенного решения достаточно уверенно можно было бы оценить с помощью величины эмпирического риска.

Аналогичные расчеты, но уже с асимметрично распределенной помехой (часть значений $\xi_i^{(k)}$ положительного знака нормально распределенной помехи, имеющих наибольшее значение, увеличены в 10 раз, что с определенной долей условности можно интерпретировать как влияние локальных зон уплотнения горных пород в верхней части геологического разреза), дали следующее.

$$\sigma = 5\%, \quad \bar{\rho}^{(MMH)} = 0,011, \quad \bar{\rho}^{(MMP)} = 0,008, \quad \bar{R} = 0,010;$$

$$\sigma = 10\%, \quad \bar{\rho}^{(MMH)} = 0,021, \quad \bar{\rho}^{(MMP)} = 0,013, \quad \bar{R} = 0,014;$$

$$\sigma = 20\%, \quad \bar{\rho}^{(MMH)} = 0,038, \quad \bar{\rho}^{(MMP)} = 0,020, \quad \bar{R} = 0,019.$$

Прокомментируем эти результаты. Легко видеть, что ситуация резко изменилась. Если при нормальной помехе, которая наиболее благоприятна для применения метода минимизации среднеквадратической невязки, этот метод лишь незначительно превзошел по точности метод минимизации эмпирического риска, то при более реалистичных свойствах помех очевидно преимущество метода минимизации риска. Но важнее даже другое: при всех уровнях помех σ средние значения фактической точности решения обратной задачи и средние значения риска оказались практически равными. Такой исход трудно отнести к игре случая, когда речь идет о закономерности, отслеженной по результатам расчета пятисот (!) вариантов задания исходных данных. Как показали другие расчеты, эта закономерность сохраняется и в случае решения обратных задач по другим геофизическим полям. Все это дает уверенность в возможности эффективно оценивать качество результатов интерпретации при решении определенного класса обратных задач, что недоступно традиционным методам решения обратных задач.

Пример 6.2. Смоделируем ситуацию, в которой оценке подлежит эффективная намагниченность никеленосной интрузии, залегающей под трапповой мульдой на глубине 1500 м, и перекрывающих их пород (Балк и др, 2011₂).

Перекрывающие интрузию эффузивные породы состоят из двух вертикально намагниченных горизонтов: верхнего – $J_1 = 4$ А/м и нижнего – $J_2 = 2$ А/м. Интрузия имеет намагниченность $J_3 = 6$ А/м (рис. 6.1). Модули знакопеременных помех распределены по логнормальному закону. Интерпретация выполняется по измерениям вертикальной составляющей магнитного поля Δz в 160 точках. Известно, что $1 \leq J_1, J_2 \leq 5$, $2 \leq J_3 \leq 10$ (А/м).

Преимущество метода минимизации риска (по результатам 100 вариантов решения обратной задачи) очевидно: $\bar{\rho}^{(MMP)} = 0,52$ А/м, тогда как $\bar{\rho}^{(MMH)} = 1,25$ А/м. Также примечательно, что разброс погрешностей отдельных решений относительно среднего $\bar{\rho}^{(MMP)}$ в 3 раза меньше, чем аналогичный показатель у метода минимизации невязки (рис. 6.2). Метод минимизации риска обладает большей устойчивостью (лучше сказать, робастностью) по отношению к отклонениям статистических свойств помех от предполагаемых (вероятностных).

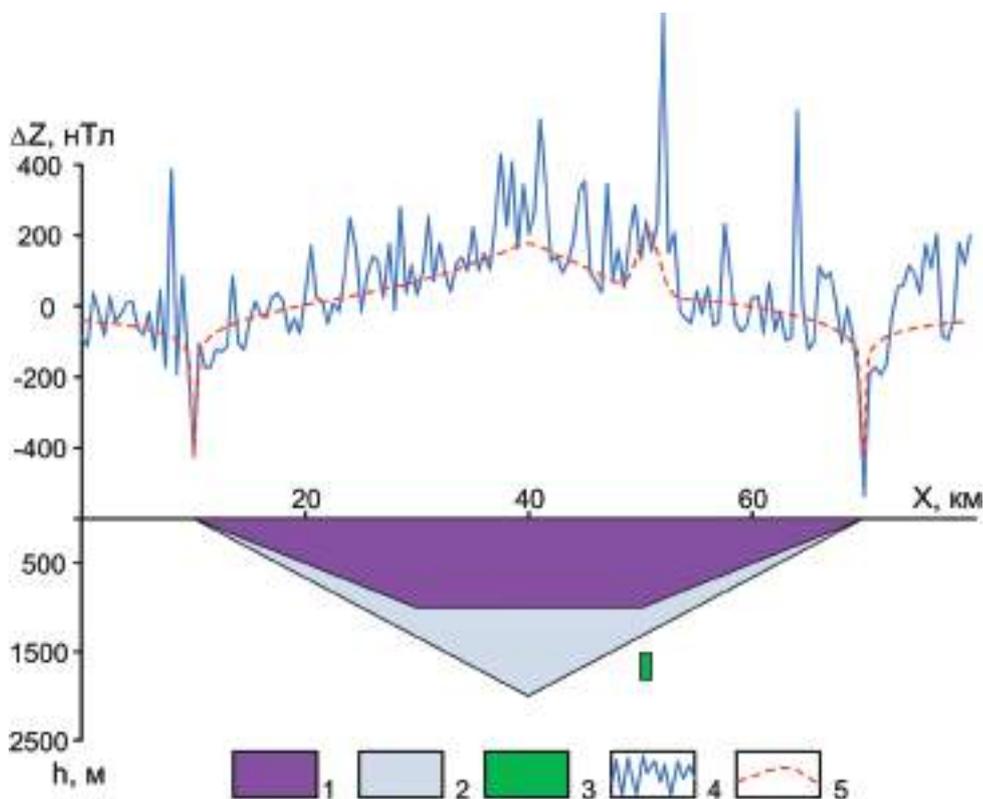


Рис. 6.1. Частное решение обратной задачи магниторазведки методом минимизации эмпирического риска: 1 – верхний горизонт эффузивных пород, $J_1 = 4$ А/м; 2 – нижний горизонт эффузивных пород, $J_2 = 2$ А/м; 3 – никеленосная интрузия, $J_3 = 6$ А/м; 4 – исходное магнитное поле ΔZ осложненное помехами; 5 – магнитное поле ΔZ , полученное в результате решения обратной задачи. Подобранные значения намагниченности: $J_1 = 3,0$ А/м, $J_2 = 2,3$ А/м, $J_3 = 5,5$ А/м.

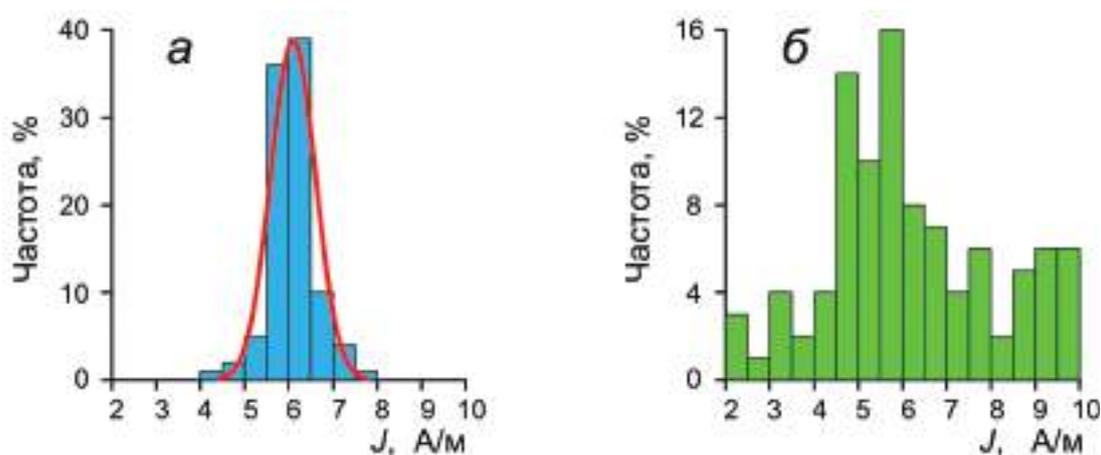


Рис. 6.2. Гистограммы намагниченности никеленосной интрузии, определенной в результате решения обратной задачи магниторазведки по методам минимизации риска (а) и минимизации невязки (б). Красная кривая – аппроксимация законом Гаусса.

Пример 6.3. Следующее замечание надлежало сделать, по-видимому, еще раньше. Речь о том, что читатель безусловно заметил, что большинство методологических выводов и алгоритмических построений, сделанных в предыдущих главах монографии, носят достаточно общий характер и не привязаны так тесно к природе гравитационного и магнитного полей. Иными словами, не лишена смысла идея распространить область применения соответствующих методов решения обратных задач на поля другой природы. Так монтажный подход оказался удобным для решения некоторых обратных задач теплопроводности и ВЭЗ [Балк, Гольдшмидт, 1988, 1989; Долгаль и др., 2020].

Возьмем горизонтальнослоистый геоэлектрический разрез с параметрами $\rho_1 = 1500$ Ом·м, $h_1 = 10$ м; $\rho_2 = 100$ Ом·м, $h_2 = 50$ м; $\rho_3 = 900$ Ом·м, $h_3 = 160$ м; $\rho_4 = 50$ Ом·м. Кривая вертикального электрического зондирования (ВЭЗ) типа НК осложнена равномерно распределенными помехами, амплитуда которых составляет 50% от значений ρ_k на каждом разносе АВ (рис. 6.3). Имитируется ситуация параметрических измерений над скважиной, когда мощности слоев изучаемого разреза известны. Для оценки точности использовался функционал

$$F = \left(0,25 \sum_{i=1}^4 (\rho_i^* - \rho_i)^2 \right)^{1/2}, \quad (6.57)$$

где ρ_i^* – сопротивление слоя по данным интерпретации; ρ_i – истинное сопротивление слоя; i – номер слоя. Средняя (по 50 вариантам решения обратной задачи) точность оценки сопротивлений горизонтов по методу минимизации

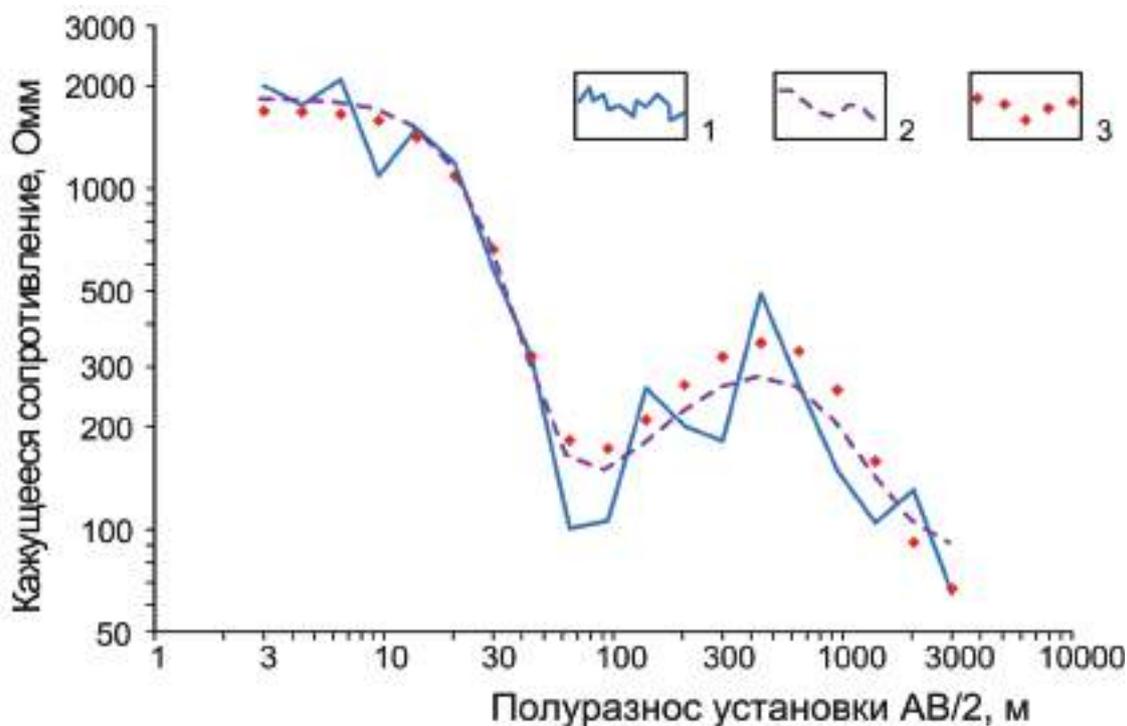


Рис. 6.3. Решение обратной задачи ВЭЗ двумя методами: 1 – исходная кривая ВЭЗ, осложненная помехой; 2, 3 – модельные кривые ВЭЗ, построенные по методу минимизации невязки и методу минимизации риска, соответственно. Удельное сопротивление горизонтов (Омм), определенное по методу минимизации невязки: $\rho_1 = 1750$, $\rho_2 = 103$, $\rho_3 = 540$, $\rho_4 = 80$; определенное по методу минимизации эмпирического риска: $\rho_1 = 1692$, $\rho_2 = 122$, $\rho_3 = 829$, $\rho_4 = 50$.

риска в 1,5 раза выше, чем при обычной минимизации невязки – 84 Ом против 127 Ом. И в этом примере прогнозируемая оценка точности результатов интерпретации близка к фактической – $\bar{R} = 91$ Ом.

Несомненным достоинством метода минимизации эмпирического риска является его способность оценивать точность собственных результатов, что не представляется возможным при использовании стандартных детерминистских технологий интерпретации ВЭЗ. Анализ функции плотности вероятности $P(\mathbf{W})$ позволяет охарактеризовать прогнозируемую точность J решения обратной задачи ВЭЗ [Балк и др., 2014]. Установлено, что зависимость между истинной F и прогнозируемой J точностью 1D инверсии данных ВЭЗ носит практически линейный характер и слабо зависит от уровня помех, что дает право использовать этот факт для приближенной оценки качества интерпретационных построений на практике при неизвестных параметрах геоэлектрического разреза (рис. 6.4).

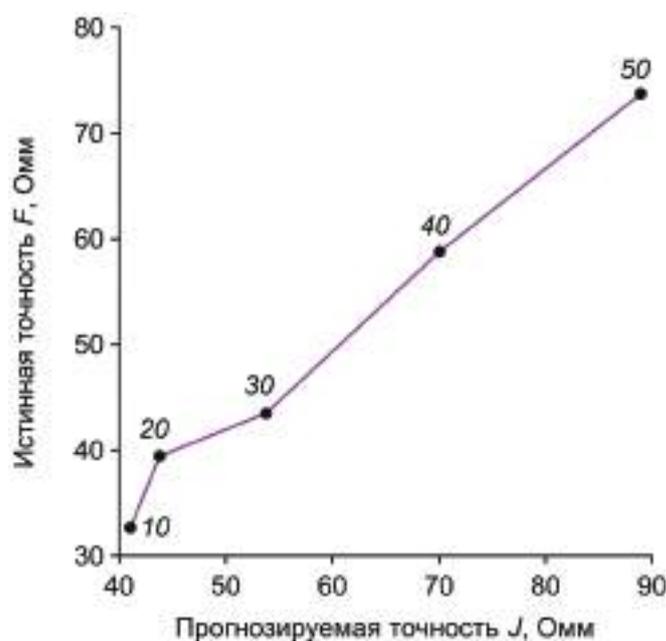


Рис. 6.4. Зависимость между истинной F и прогнозируемой J точностью инверсии данных ВЭЗ. Цифрами указан максимальный уровень помех в процентах от амплитуды полезного сигнала.

Применение метода минимизации эмпирического риска для интерпретации нескольких параметрических кривых ВЭЗ, опирающихся на скважины, в сложных геоэлектрических условиях Игарского района позволило получить хорошие результаты (рис. 6.5). В результате интерпретации кривой типа Н получены следующие параметры геоэлектрического разреза: $\rho_1 = 707$ Омм, $\rho_2 = 159$ Омм, $\rho_3 = 2143$ Омм; $h_1 = 10$ м, $h_2 = 180$ м. Прогнозируемая точность инверсии $J = 130$ Омм. Легко заметить, что выявленные геоэлектрические границы не совпадают с геологическими, поскольку обусловлены мерзлотно-гидрологическими факторами. Это вносит определенные ограничения для использования метода ВЭЗ для литологического расчленения разреза. Нужно добавить, что данные ВЭЗ и электрокаротажа КС хорошо согласуются между собой.

Следует отметить, что при числе оцениваемых параметров m порядка 3–4 метод минимизации риска может быть успешно реализован на современных компьютерах путем простого перебора допустимых значений этих параметров по некоторой достаточно густой сетке. По сравнению с линейными обратными задачами гравиразведки и магниторазведки количественная интерпретация данных ВЭЗ требует существенно больших вычислительных затрат. При большем числе оцениваемых параметров m целесообразно использовать дис-

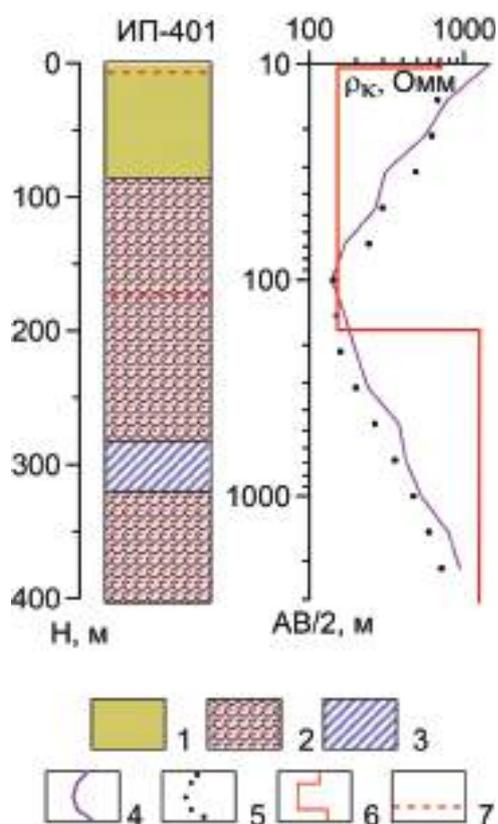


Рис. 6.5. Интерпретация параметрической кривой ВЭЗ на скв. ИП-401 (Игарский район): 1 – рыхлые отложения; 2 – глинистые сланцы; 3 – кварциты; кривые ВЭЗ: 4 – наблюдаемая, 5 – модельная (результат инверсии); 6 – результат интерпретации ВЭЗ; 7 – геоэлектрические границы.

кретные аналоги метода МЭР, в которых построения ведутся на случайной последовательности векторов параметров w , генерируемой процедурами типа Монте-Карло.

Сопоставим возможности решения задачи на сетках и случайного поиска на примере решения обратной задачи электроразведки ВЭЗ для ранее использованной теоретической кривой типа НК. Уровень помех на каждом разносе составлял до 10% от полезного сигнала. Задача сводилась к определению сопротивления всех геоэлектрических горизонтов при их фиксированной мощности. При равномерном поиске использовались сетки, содержащие $N = 10^4, 10^8, 10^{12}, 10^{16}$ узлов в пределах области D ; а при случайном поиске генерировались последовательности, включающие в себя $M = 10, 10^2, 10^3, 10^4$ векторов w вида $\{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\}$. Результаты, представленные в табл. 6.1, свидетельствуют о неоспоримых преимуществах случайного поиска: происходит увеличение скорости счета примерно в 200 раз, при сохранении достаточно высокой точности получаемых результатов.

Пример 6.4. Рассмотрим практическую задачу определения плотности вскрытых скважинами структурно-вещественных комплексов, слагающих

Таблица 6.1

Характеристики решения обратной задачи ВЭЗ разными алгоритмами

Равномерный поиск			Случайный поиск		
Число узлов сетки N	Точность F , Омм	Время t , мин	Число векторов M	Точность F , Омм	Время t , мин
10^4	19,88	0,83	10	37,16	0,008
10^8	42,40	5,88	10^2	40,34	0,03
10^{12}	32,39	55,72	10^3	44,94	0,3
10^{16}	33,29	570	10^4	46,39	3,3

геологический разрез западной части Норильского района до глубины 2 км (рис. 6.6). Исходные данные – результаты гравиметрической съемки 1:50 000 масштаба.

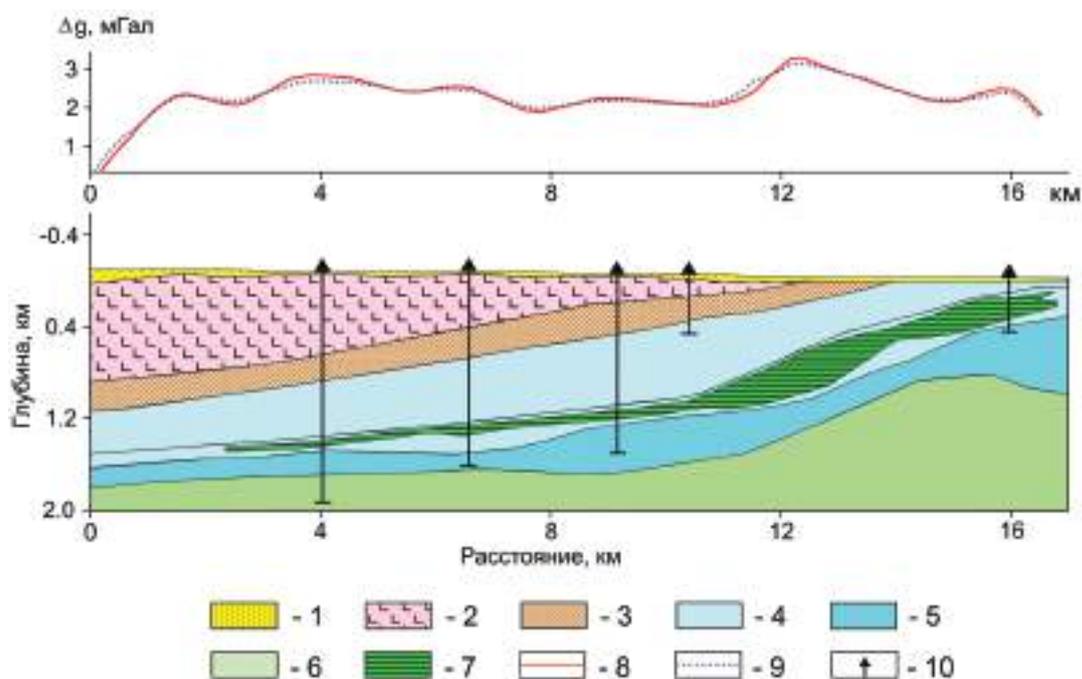


Рис. 6.6. Моделирование геоплотностного разреза по профилю скважин. Норильский район (по материалам ПО «Норильскгеология»): 1 – рыхлые отложения; 2 – эффузивные породы; 3 – углефицированные терригенные отложения тунгусской серии; осадочные породы: 4 – верхне-среднедевонского возраста, 5 – нижнедевонского возраста, 6 – силурийского возраста; 7 – дифференцированная интрузия габбро-долеритов; графики гравитационного поля: 8 – наблюдаемого, 9 – модельного; 10 – буровые скважины.

Для плотности горных пород в естественном залегании получены следующие оценки: рыхлые отложения – $2,25 \text{ г/см}^3$, эффузивные породы триаса – $2,76 \text{ г/см}^3$, отложения тунгусской серии – $2,62 \text{ г/см}^3$, осадочные породы верхнего и среднего девона – $2,74\text{--}2,77 \text{ г/см}^3$, интрузия габбро-долеритов – $2,94\text{--}2,97 \text{ г/см}^3$, нижнедевонские отложения – $2,75 \text{ г/см}^3$ (плотность подстилающих пород силурийского возраста принята равной $2,72 \text{ г/см}^3$). Полученные данные согласуются с результатами лабораторных измерений плотности по керну скважин. Невязка полей – $0,18 \text{ мГал}$, прогнозируемая точность решения составляет $0,006 \text{ г/см}^3$.

Пример 6.5. В этом примере мы проиллюстрируем действие всех четырех критериев принятия решения в условиях неопределенности. Как уже было подмечено, тенденции, установленные по результатам решения серии модельных примеров, в меньшей степени подвержены случайности, чем выводы, сделанные на основании решения единичного примера. До сих пор разнообразие отдельных примеров, составляющих серию, мы создавали за счет различных выборок случайных помех, которыми отягощали истинные значения поля модели. При этом модель самих возмущающих масс. подчеркнем это, оставалась неизменной. Более привлекательными, на наш взгляд, являются серии, где в каждом отдельном примере модель носителя источников поля будет своя и, так же как помехи в измерениях, будет носить случайный характер.

В работе [Балк, Долгаль, 2017₃] авторы опубликовали результаты серии расчетов, состоящей из $N = 100$ по сути не связанных между собой примеров P_k . В каждом из этих модельных примеров массы эффективной плотности $\delta = 0,2 \text{ г/см}^3$ распределены по некоторым носителям $\hat{S}_k \in M$ – различным для всех k . Во всех примерах модельный класс M суть множество связанных носителей, являющихся объединениями конечного числа квадратных элементов V_r регулярного замощения $V = \{V_r\}$. Длина стороны квадратов $V_r = 0,1 \text{ км}$.

Для того, чтобы носителям \hat{S}_k придать относительно случайный характер, предварительно с помощью монтажного алгоритма была решена обратная задача для одного (вспомогательного) локального тела Ω , $|\mathcal{Y}(\Omega)| = 50$, той же эффективной плотности $0,2 \text{ г/см}^3$, собранного из элементов замощения, на котором предполагается строить приближенные решения каждой из задач P_k . В каждом из примеров P_k помехи в измерениях $\Delta \tilde{g}^{(k)}(x_t)$, $x_t = 0,1(t-1)$, $t = 1, 2, \dots, m$ ($m = 51$) суть выборки $\Xi_k = \{\xi_{k,t}\}_{t=1}^m$ равномерно распределенных случайных чисел со стандартным отклонением, слегка превышающим 2% от амплитуды аномалии. Обратная задача была многократно решена с помощью базового метода РНК при различных начальных приближениях. Поскольку $N > |\mathcal{Y}(\Omega)|$, то для получения нужного числа носителей \hat{S}_k каждый вариант решения обратной задачи с новым нулевым приближением пересчитывался повторно, когда в итерационный процесс вносились определенные коррективы, заставляющие последний выйти на до того не построенный допустимый носитель. В

итоге удалось собрать 100 различных носителей \hat{S}_k . Для того чтобы получить определенное представление о том, насколько разнообразен набор носителей \hat{S}_k , используемых в примерах P_k , три наугад взятых носителя \hat{S}_k и отвечающие им наблюдаемые поля приведены на рис. 6.7. Визуальное совпадение трех полей не должно удивлять: все-таки здесь речь идет о теоретических полях допустимых носителей при решении обратной задачи для одного и того же вспомогательного примера. И, к тому же, интенсивность помех в примерах P_k все же достаточно мала.

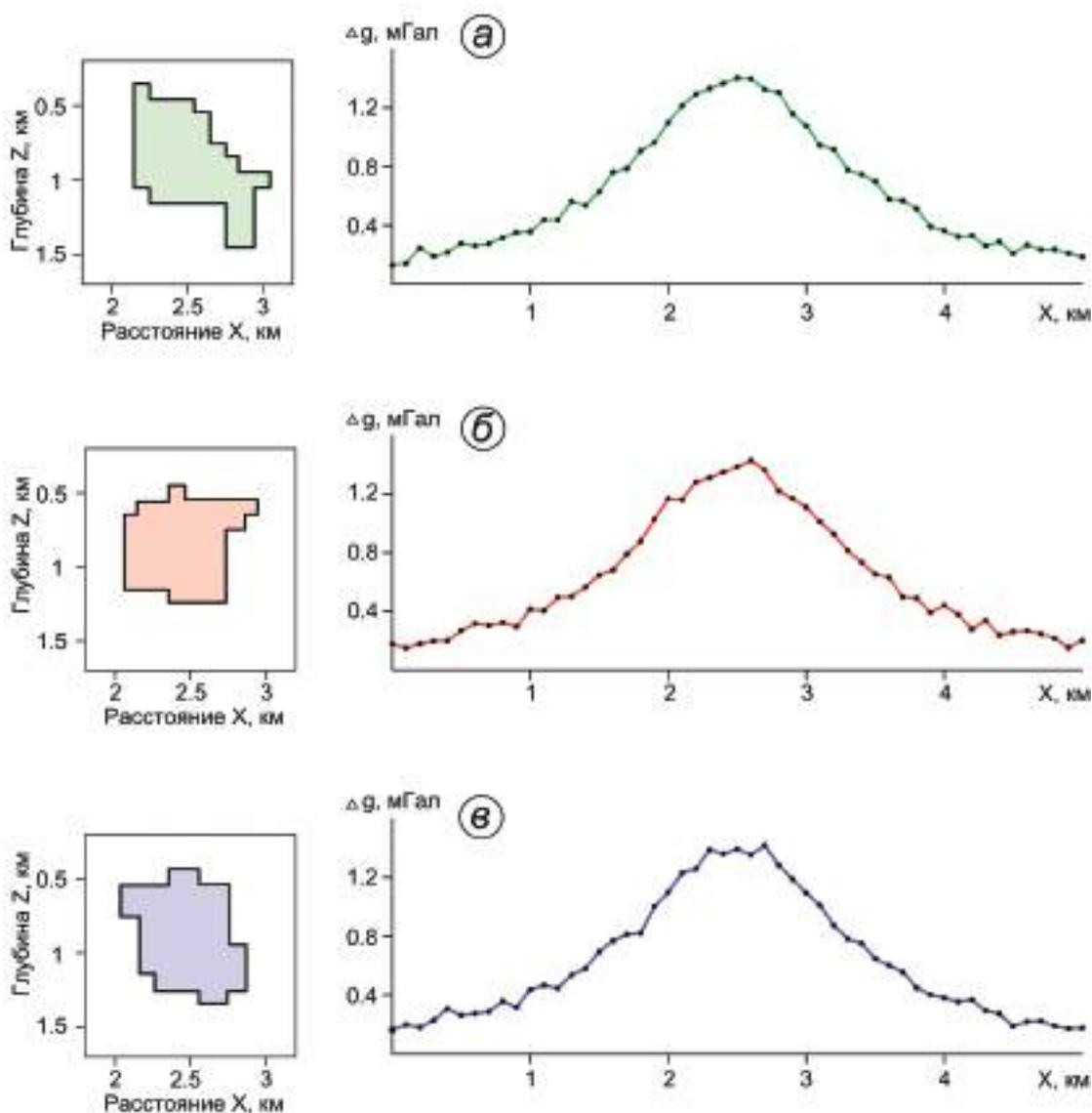


Рис. 6.7. Модельные носители возмущающих масс и графики гравитационного поля в трех выборочно взятых примерах: а – P_8 ; б – P_{69} ; в – P_{99} .

В каждом из примеров P_k множество допустимых носителей $Q_k = \{S_i^{(k)}\}_{i=1}^{n(k)}$ построено с помощью обобщенного алгоритма РНК. Принято ограничение на гладкость границы допустимых носителей $S_i^{(k)}$, предполагающее отсутствие у последних «отростков» (в смысле, оговоренном во второй главе). На практике норма помехи неизвестна и для сохранения адекватности приходится ее предполагаемое значение завышать. Мы завысили его в 1,5 раза по отношению к фактическому. За качество ρ оценки S_i носителя S_j взят функционал $\rho(S_i, S_j) = \mu(S_i \cap S_j)$.

При помощи манипуляций нулевыми приближениями число $n(k)$ допустимых решений $S_i^{(k)}$ в среднем по каждому из N примеров доведено до 190. В множества Q_k включены и носители \hat{S}_k ; на равных с другими они претендуют на роль истинного решения.

Прежде всего обратим внимание (табл. 6.2, рис. 6.8 и 6.9) на устойчивость оценок выигрыша (потерь), отвечающих решениям по каждому из четырех критериев – Лапласа (L), Вальда (W), Сэвиджа (C), Гурвица (G). Это находит выражение в том, что средние значения выигрыша (потерь) заметно превосходят соответствующие среднеквадратические отклонения. Даже разброс минимальных и максимальных значений выигрыша (потерь) не выглядит столь уж внушительным. По показателю качества локально-оптимальных решений проще всего сопоставить критерии Лапласа и Вальда. По абсолютному значению критерия Лапласа априори должен быть впереди, что и подтверждается табл. 6.2. Но это, понятно, не говорит о преимуществе критерия Лапласа – значения ρ , достигнутые на локально-оптимальных решениях по двум этим критериям, отвечают за оценки *различных* свойств оцениваемого решения \hat{S}_k . Благодаря тому, что во всех примерах значения $\mu(\hat{S}_k)$ приблизительно совпадают между собой, есть возможность содержательно прокомментировать каждое численное значение из табл. 6.2. К примеру, среднее значение 0,4 км² выигрыша ρ по критерию Лапласа означает, что локально-оптимальные носители S_k^* в среднем на 80% совпадают с оцениваемыми носителями \hat{S}_k .

Таблица 6.2

Статистические характеристики разброса значений выигрыша (или потерь) ρ при принятии решения по различным критериям выбора (по результатам решения $N = 100$ модельных примеров)

Критерий	Минимум	Максимум	Среднее	Среднеквадратическое отклонение
L	0,372	0,417	0,400	0,009
W	0,170	0,280	0,240	0,021
C	0,250	0,390	0,305	0,027
G	0,360	0,435	0,395	0,015

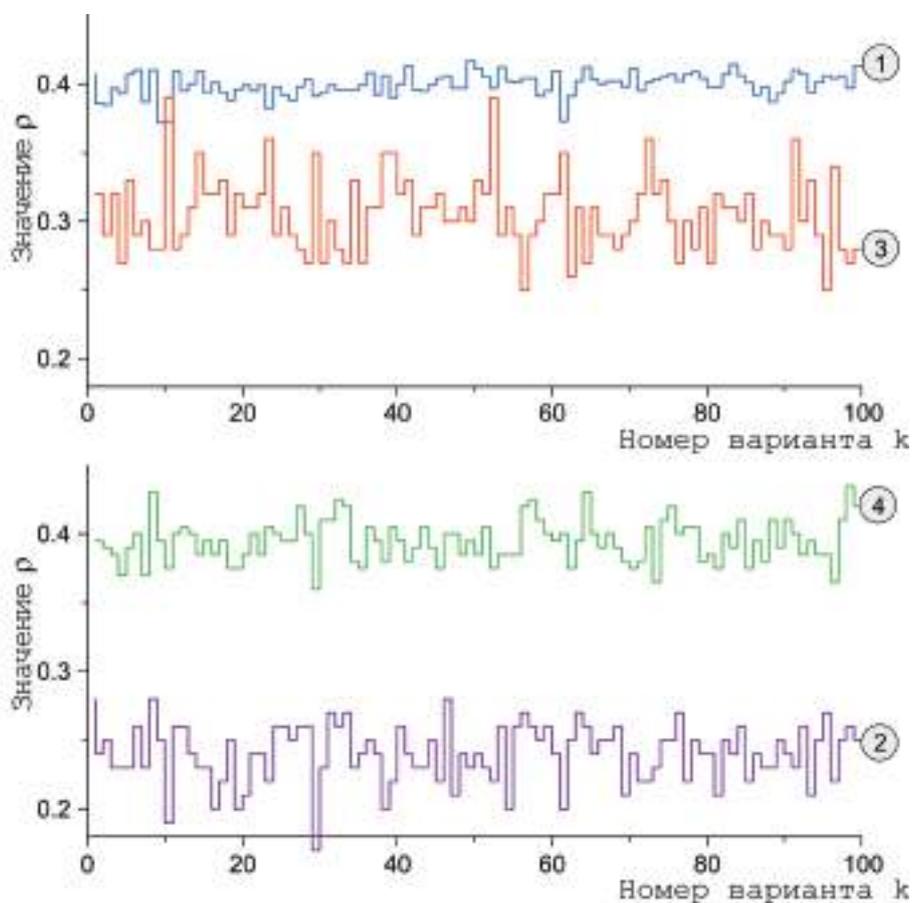


Рис. 6.8. Графики значений ρ , полученные по критериям Лапласа (1), Вальда (2), Сэвиджа (3), Гурвица (4) в $N = 100$ модельных примерах.

Каждый алгоритм отвечает за свой статус оптимальности по критерию, который лежит в его основе. Если алгоритм A_2 претендует на превосходство над алгоритмом A_1 , то сравнение надо вести по «правилам игры» последнего. Пусть $S_{i(k)}^* \in Q_k$ – решение, которое оказалось оптимальным по критерию B , и значение $\Phi_{A,B}(k)$ выигрыша (или потерь) от принятия его в качестве результата интерпретации оценивается по критерию A , а $\bar{\Phi}_{A,B}$ – среднее этих значений по всем N примерам P_k . В табл. 6.3 дана сравнительная характеристика результатов интерпретации по критериям Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица при $\alpha = 0,5$. Как и должно быть, в первых двух и четвертой строках таблицы (здесь речь идет о выигрыше) у диагональных элементов $\bar{\Phi}_{A,A}$ наибольшие значения, а в третьей строке (здесь речь идет о потерях) – наименьшее. В каждой строке разности $\bar{\Phi}_{A,A} - \bar{\Phi}_{A,B}$ недиагональных элементов с диагональным суть различие между средним выигрышем (потерями) от принятия решений,

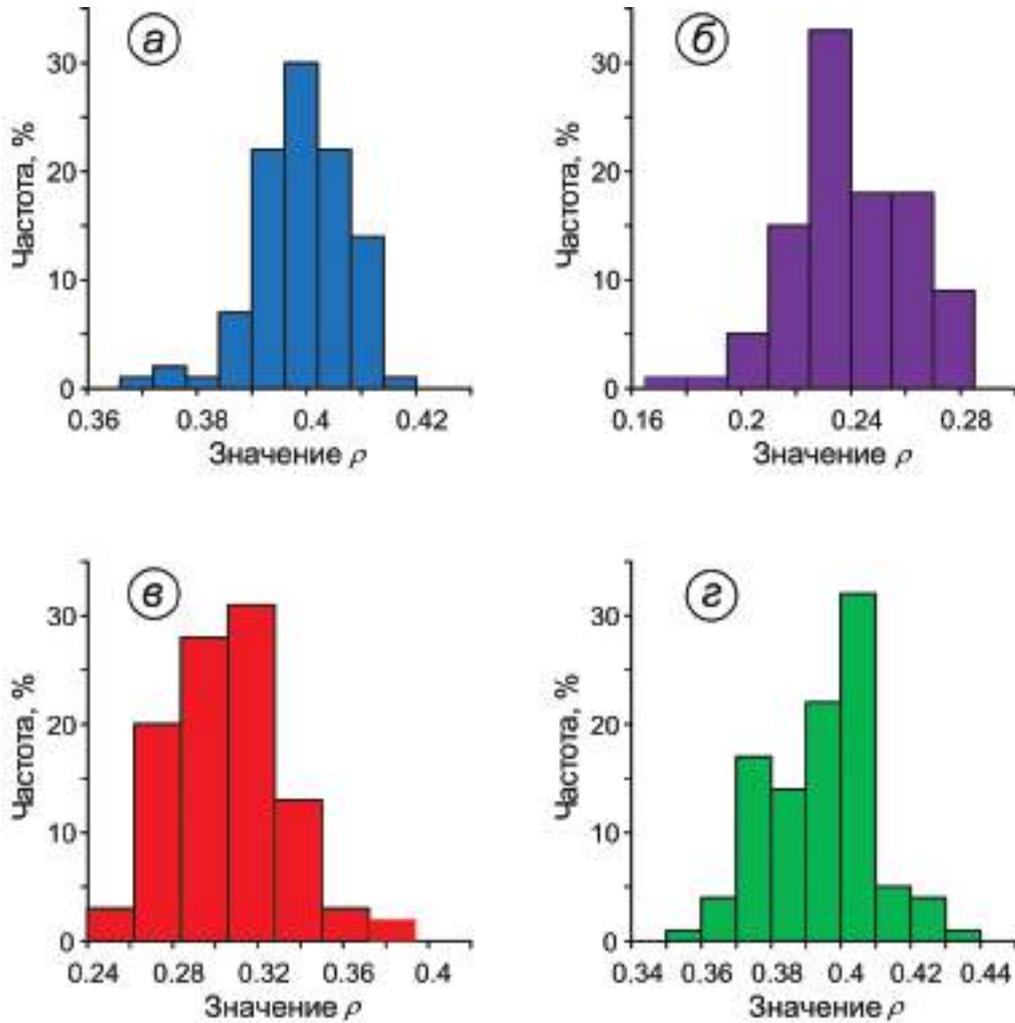


Рис. 6.9. Гистограммы значений ρ , достигнутые в $N = 100$ модельных примерах при использовании критериев Лапласа (а), Вальда (б), Сэвиджа (в), Гурвица (г).

Таблица 6.3
Характеристика результатов интерпретации
с использованием разных критериев.

Критерий оценивания решения	Критерий принятия решения			
	L	W	C	G
L	0,400	0,376	0,372	0,336
W	0,216	0,240	0,217	0,188
C	0,335	0,333	0,305	0,362
G	0,358	0,370	0,359	0,395

оптимальных по двум критериям (A, B), тогда как сопоставление этих решений идет по критерию оптимальности одного из них (A). Соответственно, разности $\overline{\Phi}_{A,A} - \overline{\Phi}_{B,A}$ в каждом столбце таблицы между диагональным элементом и остальными дают представление о том, как изменяются характеристики решения при смене критерия оптимальности, по которым оцениваются эти решения.

Не исключено, что некоторые из локально-оптимальных решений совпадут друг с другом. Случится такое или нет – зависит только от особенностей помехи в измерениях аномалии. В общем же случае локально-оптимальные решения могут заметно различаться между собой. В качестве иллюстрации на рис. 6.10 приведены локально-оптимальные решения, построенные в одном из примеров P_k .

Еще раз вернемся к неоспоримому факту случайного характера точности решения обратной задачи. Мы взяли наугад один пример P_k и зафиксировали аномалию $\Delta \tilde{g}^{(k)}(x)$, порожденную распределением масс $\langle \hat{S}_k, \hat{\delta} \rangle$ и выборкой Ξ_k случайных чисел в роли помех измерений, а также построенные решения S_L^*, S_W^*, S_C^* и S_G^* , оптимальные по четырем опробованным критериям. Забудем о выборке помех Ξ_k , равно как и об «истинном» решении \hat{S}_k , которое на

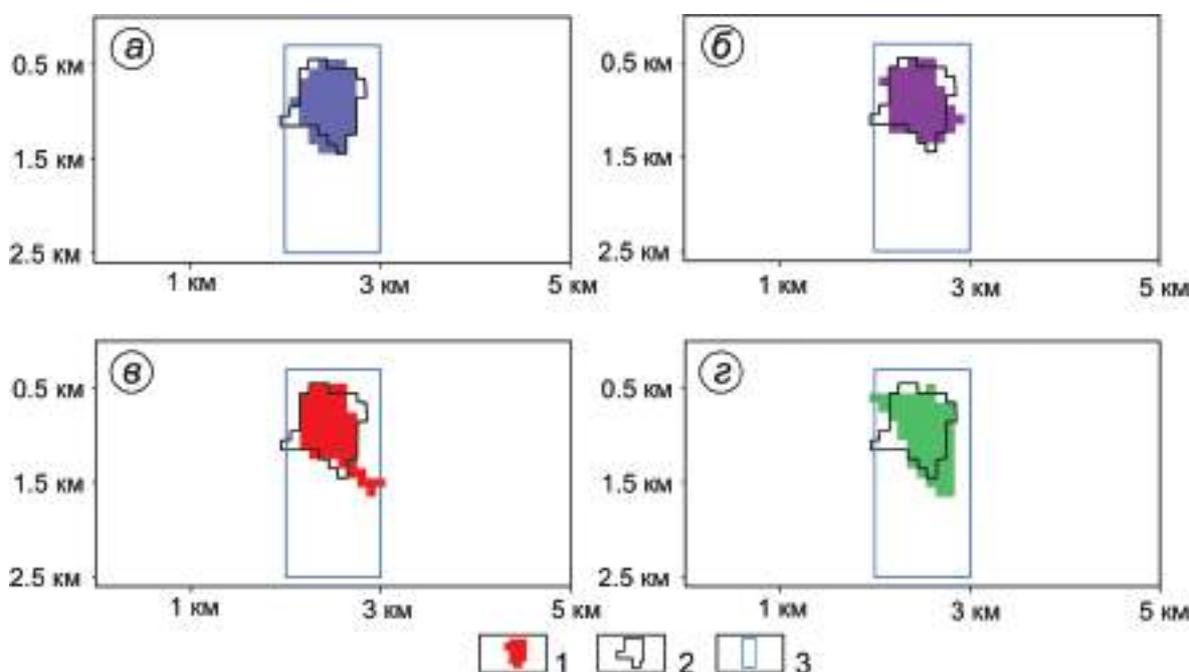


Рис. 6.10. Результаты интерпретации аномалии силы тяжести в одном случайно выбранном примере P_k по критериям Лапласа (a), Вальда ($б$), Сэвиджа ($в$), Гурвица ($г$): 1 – решение обратной задачи; 2 – истинный источник аномалии; 3 – область поиска допустимых решений обратной задачи.

практике не известно и установлено быть не может. Считаем, что у нас есть наблюдаемая аномалия $\Delta\tilde{g}^{(k)}(x)$ и множество Q_k , которое состоит из $n(k)$ носителей $S_i^{(k)}$, каждый из которых с равным правом претендует на статус неизвестного истинного носителя \hat{S}_k . Понятным образом можно рассчитать выборки помех $\Xi_{k,i} = \{\xi_{k,i}^{(l)}\}_{l=1}^m$, такие что: если истинным является носитель $S_i^{(k)} \in Q_k$, а множеством значений помех измерений в точках x_l окажется множество $\Xi_{k,i}$, то при всех $i = 1, 2, \dots, n(k)$ мы имели бы одно и то же наблюдаемое поле, а именно ту самую наблюдаемую аномалию $\Delta\tilde{g}^{(k)}(x)$. Рис. 6.9 показывает, при каких выборках помех $\Xi_{k,i}$ – назовем их «особыми» – оптимальные решения S_L^* , S_W^* , S_C^* , S_G^* совпадут с соответствующими носителями $S_i^{(k)}$, распределение масс по которым породило нашу наблюдаемую аномалию $\Delta\tilde{g}^{(k)}$. Иными словами, будь $S_i^{(k)}$ истинным носителем, то при помехах, чьи графики представлены на рис. 6.11, оптимальные по рассмотренным четырем критериям решения совпали бы с истинным. Заметим, что во всех четырех случаях помехи не выглядят экзотическими и даже нет смысла приводить их основные числовые характеристики. Аналогичным образом мы могли привести те распределения помех, при которых оптимальные (по тому или иному критерию) решения оказались бы по фактической точности наихудшими из возможных.

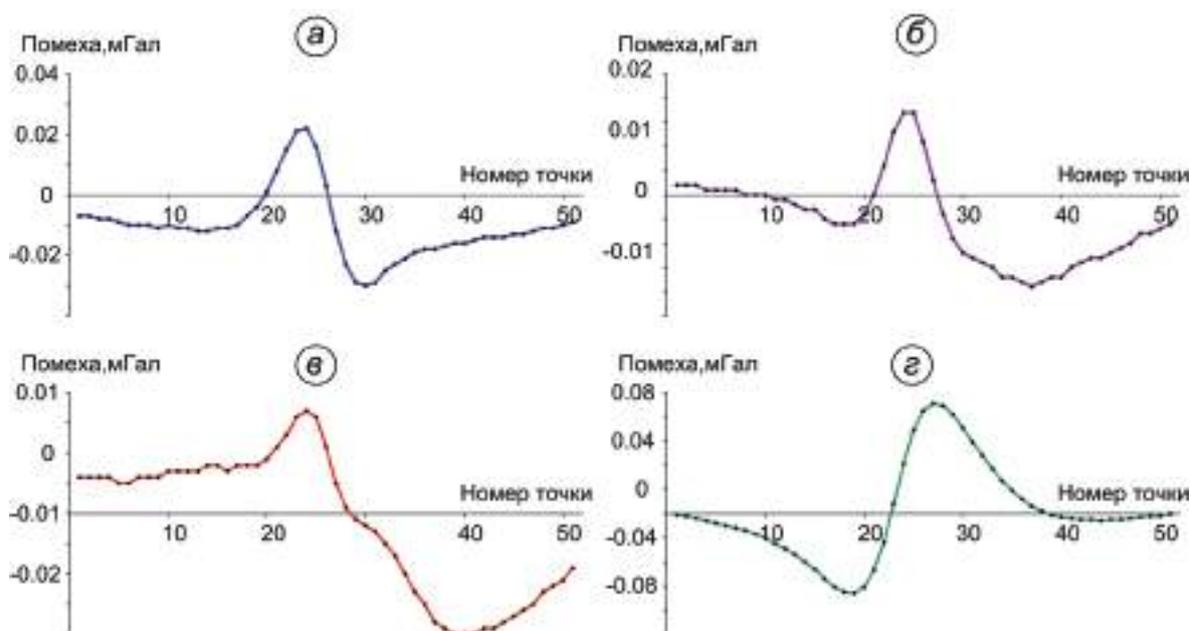


Рис. 6.11. Графики «особых» выборок помех для случаев, когда оптимальные решения обратной задачи выбираются по критериям Лапласа (а), Вальда (б), Сэвиджа (в), Гурвица (г).

Признавая случайный характер фактической точности приближенных решений в каждом отдельно взятом примере, читателя безусловно заинтересуют средние показатели качества результатов интерпретации. Соответствующие гистограммы приведены на рис. 6.12, где в качестве меры близости носителей S_i и S_j взят теперь уже функционал $\rho(S_i, S_j) = \mu(S_i \cap S_j) / \mu(S_i \cup S_j)$.

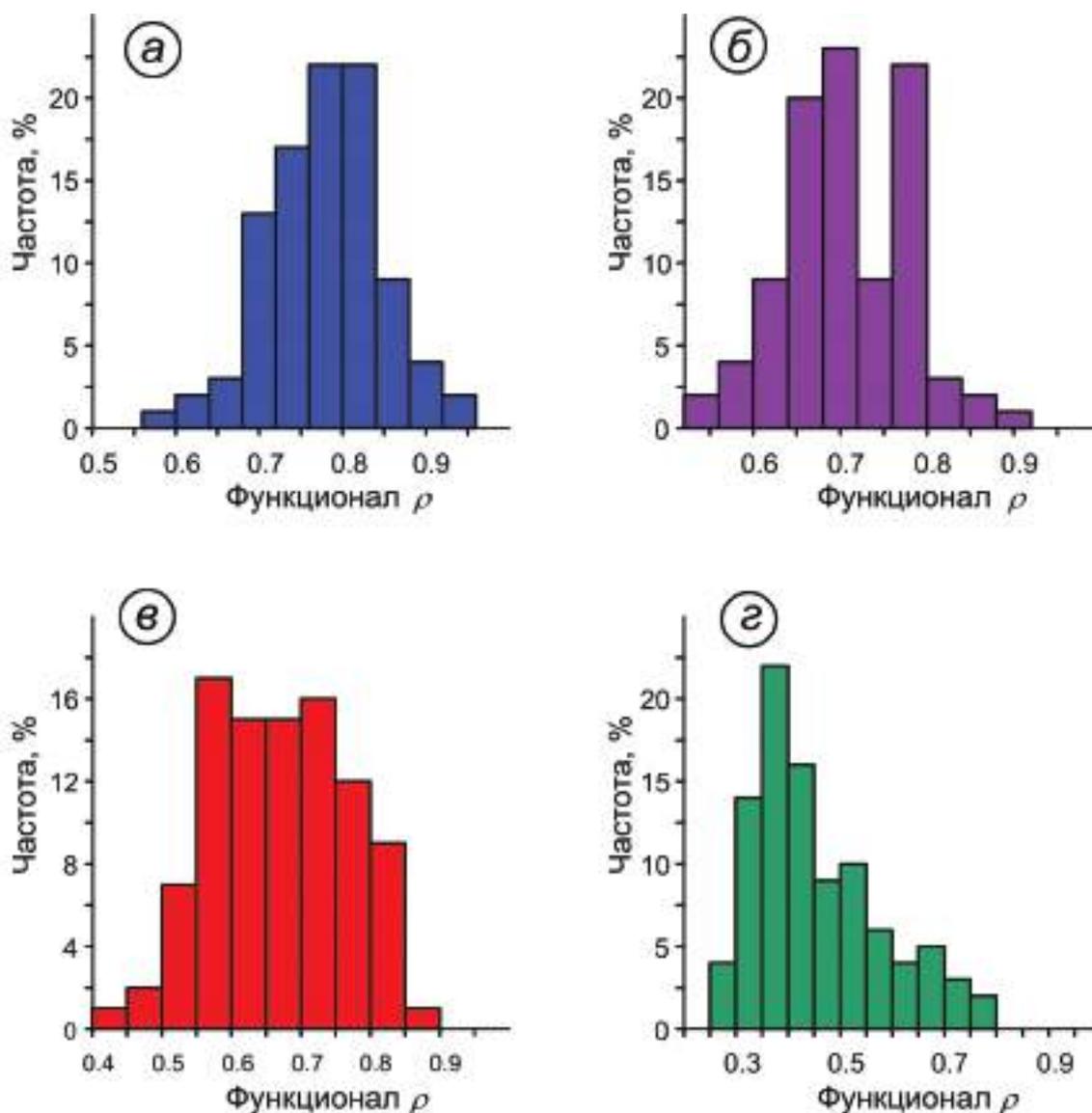


Рис. 6.12. Гистограммы фактической точности решений обратной задачи гравirazведки, построенные с использованием критериев Лапласа (а), Вальда (б), Сэвиджа (в), Гурвица (г).

Пример 6.6. Модель источников аномалии Δg – два связанных объекта, ассоциирующихся с интрузивными телами: хонолитом основного состава эффективной плотности $\hat{\delta}_1 = 0,3$ г/см³ и лакколитом среднего состава эффективной плотности $\hat{\delta}_2 = 0,2$ г/см³. «Измеренные» значения аномалии заданы в $m = 41$ точке x_t на профиле с шагом 500 м (рис. 6.13). Выполнены две серии расчетов по $N = 50$ вариантов в каждом для помех ξ двух типов. В первой серии в каждом варианте k в качестве помех $\xi_{k,t}$, $t = 1, 2, \dots, m$, измерений выступают ре-

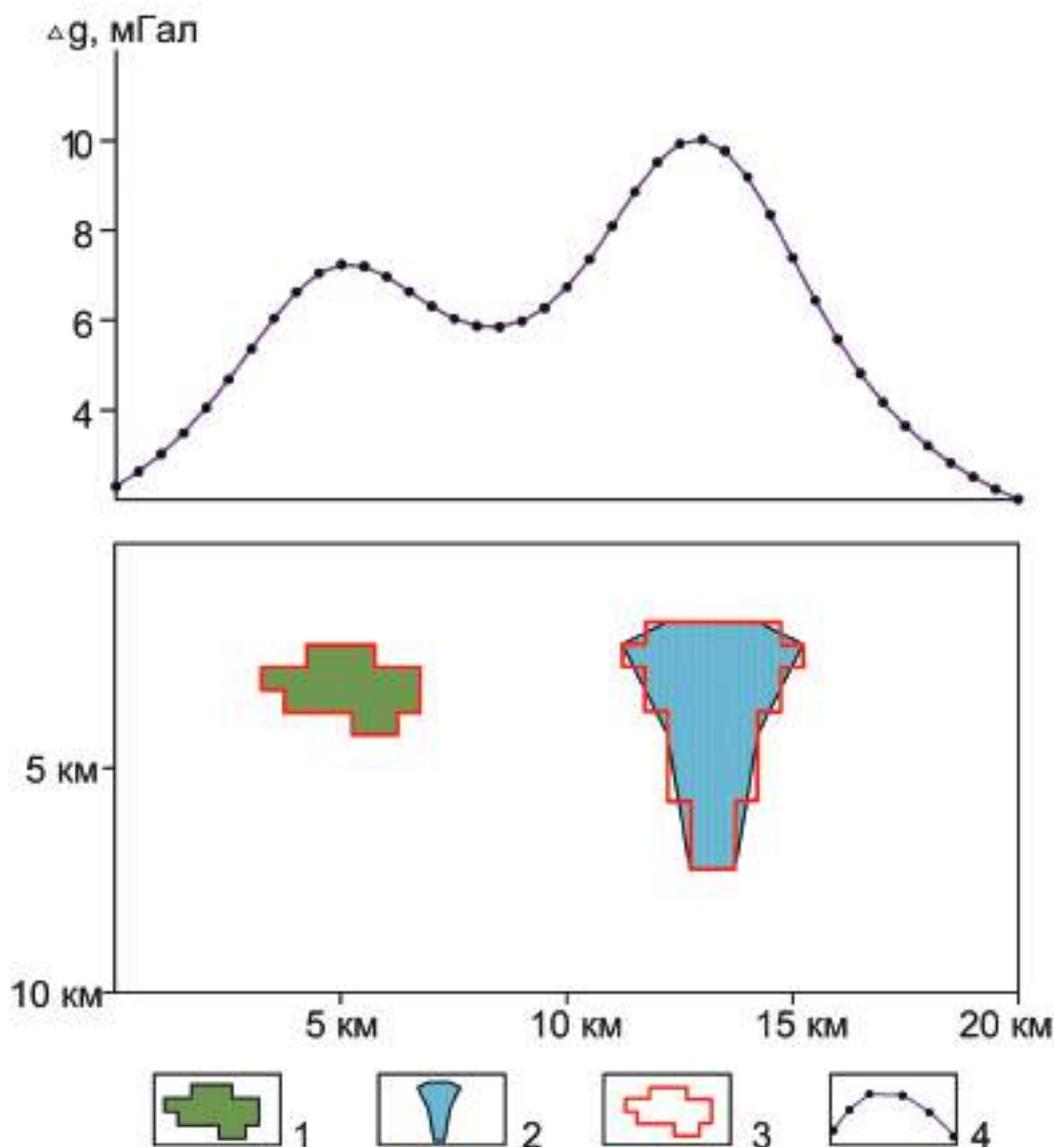


Рис. 6.13. Модель геоплотностного разреза: интрузии основного (1) и среднего (2) состава, их конечноэлементные аппроксимации (3) и гравитационное поле (4).

ализации нормально распределенной несмещенной случайной величины со среднеквадратическим отклонением $\sigma = 0,5$ мГал (присвоим этому типу помех номер 1). Во второй серии помехи носят асимметричный характер ($E(\xi) \neq 0$, но $Me(\xi) = 0$) при нулевом медианном значении; за основу берутся выборки Ξ_k случайной величины ξ , равномерно распределенной на отрезке $[-0,5; 0,5]$ (мГал). После чего все числа $\xi_{k,t} \geq 0,2$ мГал увеличиваются в 3 раза (присвоим этому типу помех номер 2). При решении обратной задачи в обоих случаях помимо априорной информации о $Me(\xi) = 0$ используется ограничение $|\xi| \leq \xi_0$ на евклидову норму помехи. В каждом варианте задаваемое значение ξ_0 несколько превышает фактическую норму помехи, обеспечивая адекватность исходных посылок. О носителях \hat{S}_1 и \hat{S}_2 считается известным, что они односвязные, а их границы достаточно гладкие («безотростковые»). Кроме того, заданы ограничения, не позволяющие вертикальным и горизонтальным размерам допустимых носителей превосходить фактические в 2 раза.

В первой серии в среднем в каждом варианте удалось найти более 950 допустимых носителей. Во второй – около 800. Мы обсудим лишь результаты решения обратной задачи по критерию максимума ожидаемой полезности, взяв в качестве выигрыша функционал

$$\rho(S_k, S_i) = \frac{\mu(S_k \cap S_i)}{\mu(S_k \cup S_i)}, \quad (6.58)$$

который можно интерпретировать как оценку фактической точности приближенного решения S_k , если истинным является носитель S_i . Читателя здесь могут заинтересовать три момента.

В первой серии интересно проследить, будут ли решения обратной задачи по критерию максимума ожидаемой полезности уступать по фактической точности (и если да, то сколь заметно) решениям по критерию минимума среднеквадратической невязки, для которого случай нормально распределенных помех наиболее благоприятен.

Во второй серии интерес представляет вопрос о том, сколь существенным становится преимущество решения по первому из названных выше критериев, как только начинают выполняться условия $Me(\xi) = 0$ и $E(\xi) \neq 0$.

И наконец, в каждой серии расчетов интересно знать, насколько оценка математического ожидания точности приближенного решения обратной задачи близка к фактической точности построенного решения. Последнее особо важно. Поскольку на практике напрямую оценить фактическую точность построенного приближенного решения обратной задачи нельзя, то при наличии указанной близости можно было бы рекомендовать делать это по оценке эмпирического риска. Но, конечно же, речь идет лишь об оценках в среднем.

Качество локально-оптимальных решений предопределено разбросом допустимых носителей в пределах множества Q_0 . Для наглядности на рис. 6.14

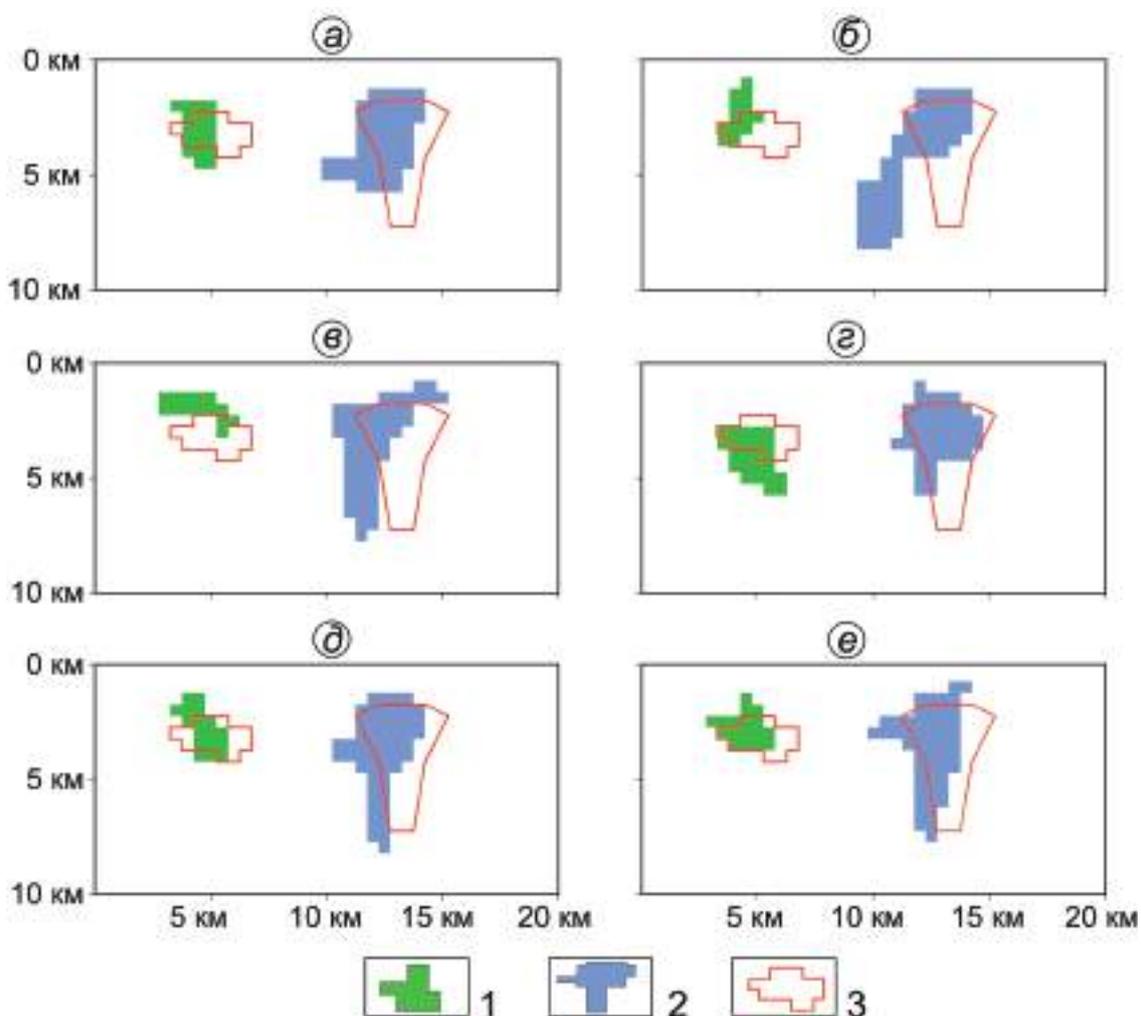


Рис. 6.14. Допустимые решения обратной задачи: *a* – оптимальное по минимуму риска ($\rho(S_{1,k}^*, \hat{S}) = 0,371$); *б* – оптимальное по минимуму невязки ($\rho(S_{2,k}^*, \hat{S}) = 0,252$); *в*, *г*, *д*, *е* – произвольно взятые «рядовые» решения. 1, 2 – подобранные объекты; 3 – контуры истинных тел.

приведены результаты решения одного из примеров при помехах второго типа. Табл. 6.4. и рис. 6.15 позволяют сопоставить фактические точности решений обратной задачи $S_{1,k}^*$ и $S_{2,k}^*$, $k = 1, 2, \dots, N$, построенных, соответственно, по критерию максимума ожидаемой полезности и по критерию минимума суммы квадратов невязок, при помехах того и другого типа. Как видим, в обоих случаях преимущество за критерием из теории принятия решений. Если в случае $E(\xi) \neq 0$ это было ожидаемо, то в случае нормальной помехи это стало приятной неожиданностью. Объяснить это можно следующим образом. Ста-

Таблица 6.4
Фактические показатели качества решений обратной задачи гравirazведки

Тип помехи	Параметр	Минимум	Максимум	Среднее	СКО
1	$\rho(S_{1,k}^*, \hat{S})$	0,305	0,576	0,486	0,062
1	$\rho(S_{2,k}^*, \hat{S})$	0,191	0, 583	0,381	0,096
2	$\rho(S_{1,k}^*, \hat{S})$	0,235	0,614	0,474	0,080
2	$\rho(S_{2,k}^*, \hat{S})$	0,169	0,586	0,378	0,093

Жирный шрифт – показатели, отвечающие критерию максимума ожидаемой полезности.

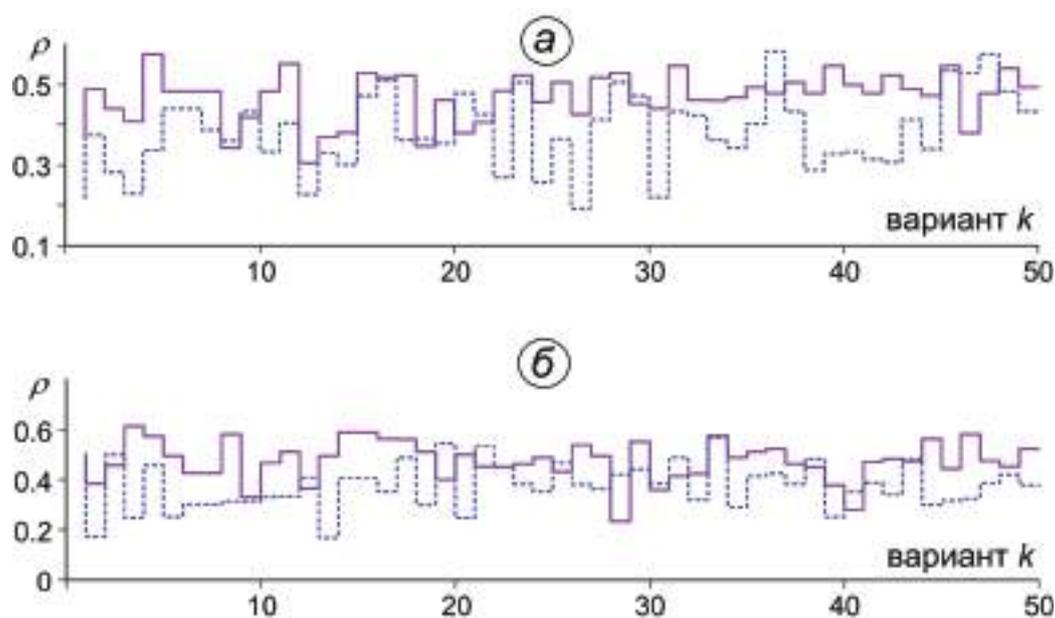


Рис. 6.15. Графики значений фактической точности решения обратной задачи по минимуму эмпирического риска (сплошная линия) и минимуму невязки (пунктирная линия) для помех типа 1 (а) и помех типа 2 (б)

статистические характеристики выборок случайных чисел при относительно небольшой длине m этих выборок могут заметно отличаться от вероятностных. И похоже, что предложенный алгоритм оказался более робастным (устойчивым к небольшим отступлениям от априорных посылок). Что касается последнего из обозначенных моментов, то сопоставление числовых характеристик результатов интерпретации, приведенных в табл. 6.4 и 6.5, а также на рис. 6.15, показывает близость соответствующих характеристик. Так, среднее значение

Таблица 6.5

**Прогнозируемые показатели качества решений
обратной задачи гравirazведки**

Тип помехи	Параметр	Минимум	Максимум	Среднее	СКО
1	$\Phi(S_{1,k}^*)$	0,440	0,596	0,525	0,033
2	$\Phi(S_{1,k}^*)$	0,443	0,752	0,545	0,056

точности, прогнозируемой по критерию максимума ожидаемой полезности, превышает лишь на 8% среднюю фактическую точность решений в случае одного типа помех и на 15% в случае другого типа помех.

Пример 6.7. Рассмотрим возможности использования критерия минимакса для выбора локально-оптимального решения обратной задачи гравirazведки. Для этой цели возьмем метрику Штейнхауса $\rho(S_\alpha, S_\beta)$ для открытых измеримых множеств из \mathbf{R}^3 , в структуре которой находят отражение все три вида информации – *скрытая, ложная и потерянная*. Подчеркнем, что данная метрика нормирована: ее минимальное значение $\rho(S_\alpha, S_\beta)$ достигается в случае $S_\alpha = S_\beta$, а максимальное $\rho(S_\alpha, S_\beta) = 1$ – в случае, когда множества S_α и S_β не имеют общих точек.

В предыдущих примерах относительно некоторых выводов, сделанных по результатам решения обратных задач, могла остаться неопределенность, связанная с тем, что все построения были выполнены не на всем множестве Q допустимых решений, а лишь на его подмножестве Q_0 . Сейчас мы специально рассмотрим случай, когда интерпретационная модель адекватна реальному возмущающему объекту и можно построить довольно «плотное» в Q подмножество Q_0 , а по сути – практически описать в явном виде все множество Q .

В рассматриваемом примере M – множество бесконечно протяженных призм, образующие которых параллельны координатной оси y . Их сечения имеют форму треугольника, координаты x вершин которых кратны 0,5 км, а координаты z кратны 0,25 км. «Измерения» $\Delta\tilde{g}(x_i)$ обусловлены модельной призмой плотности $\hat{\delta} = 0,3$ г/см³ и содержат помехи ξ_i , максимум модуля которых равен $\varepsilon = 0,8$ мГал (рис. 6.16). Имитируя практическую ситуацию, где норма помех точно неизвестна, будем считать, что она не превышает $\varepsilon_0 = 1,0$ мГал. Решение обратной задачи гравirazведки по критерию Вальда обозначим как S_1^{opt} . В роли альтернативного «оптимального» решения S_2^{opt} выступает носитель, при котором достигается минимум максимального модуля невязки наблюдаемого и модельного полей в точках измерения.

По результатам расчетов установлено: $\rho_1^{opt} = 0,561$, $\rho_2^{opt} = 0,725$. Это означает следующее:

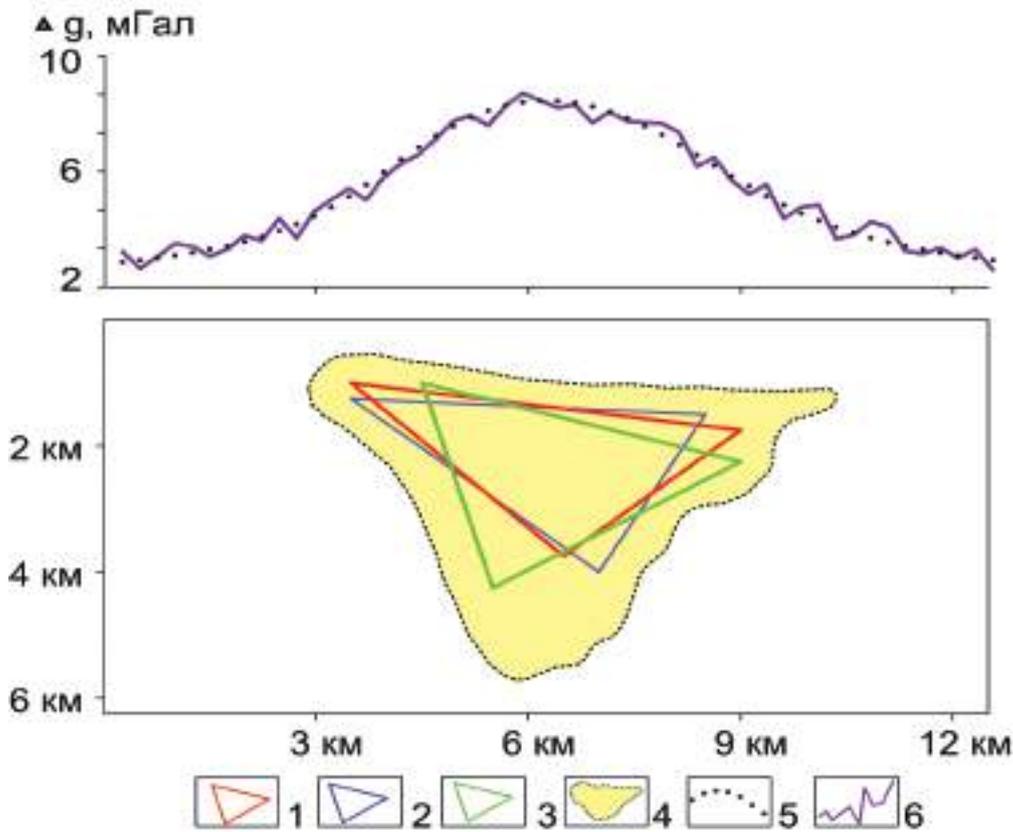


Рис. 6.16. Гравитационное поле и результаты интерпретации: 1 – призма, от которой рассчитана аномалия $\Delta \tilde{g}$; 2, 3 – результаты решения обратной задачи по критерию минимакса и минимуму невязки, соответственно; 4 – область, содержащая все допустимые решения обратной задачи; 5 – точное поле Δg ; 6 – «наблюдаемое» поле $\Delta \tilde{g}$.

1) даже при самом неблагоприятном исходе, когда истинным носителем \hat{S} окажется самая удаленная от S_1^{opt} призма $\bar{S}_1^{opt} \in Q$, мера (площадь) общего фрагмента сечения минимаксного (S_1^{opt}) и истинного ($\hat{S} = \bar{S}_1^{opt}$) носителей составит $\mu_1^{opt} = \mu(S_1^{opt} \cap \bar{S}_1^{opt}) = 3,7 \text{ км}^2$ (57% от площади $\mu(\hat{S}) = 6,5 \text{ км}^2$ всего сечения истинного носителя;

2) если истинным носителем \hat{S} окажется призма S_2^{opt} , наиболее удаленная от S_2^{opt} , то мера общего фрагмента носителей S_2^{opt} и \hat{S} (то есть гарантированный объем скрытой информации, содержащийся в S_2^{opt}) составит $\mu_2^{opt} = \mu(S_2^{opt} \cap \bar{S}_2^{opt}) = 2,8 \text{ км}^2$.

Объективная информация о носителе \hat{S} , содержащаяся в решениях S_1^{opt} и S_2^{opt} , этим исчерпана.

Пример 6.8. Объект изучения: Березовская аномальная зона в пределах Юрюзано-Сылвенской депрессии на юго-востоке Пермского края. Выполнена

интерпретация данных гравиметрической съемки масштаба 1:200 000 по профилю АБ в предположении, что эффективная плотность аномального объекта равна $0,45 \text{ г/см}^3$, а среднеквадратическая величина помехи в измерениях (при амплитуде поля порядка 30 мГал) не превышает 1,7 мГал. Соотношение между протяженностью (свыше 100 км) и шириной (около 20 км) аномальной зоны допускает использование 2D-модели источников (рис. 6.17). В наблюдаемом поле присутствует линейная фоновая компонента. С учетом косвенных данных о возможных значениях вертикальной и горизонтальной мощности аномального тела, а также глубин залегания его верхней и нижней кромок удалось с помощью монтажного алгоритма построить 169 допустимых вариантов решения обратной задачи, из которых затем было выбрано решение S^{opt} , оптимальное по минимаксному критерию.

Расчеты показали: если природный носитель \hat{S} возмущающих масс с приемлемой точностью можно описать хотя бы одним из найденных решений, то совпадение минимаксного и точного решения составит не менее 75%. Есть основания считать, что аномалия Δg обусловлена интрузивным телом ультраосновного состава, обладающим высокой эффективной плотностью и низкой

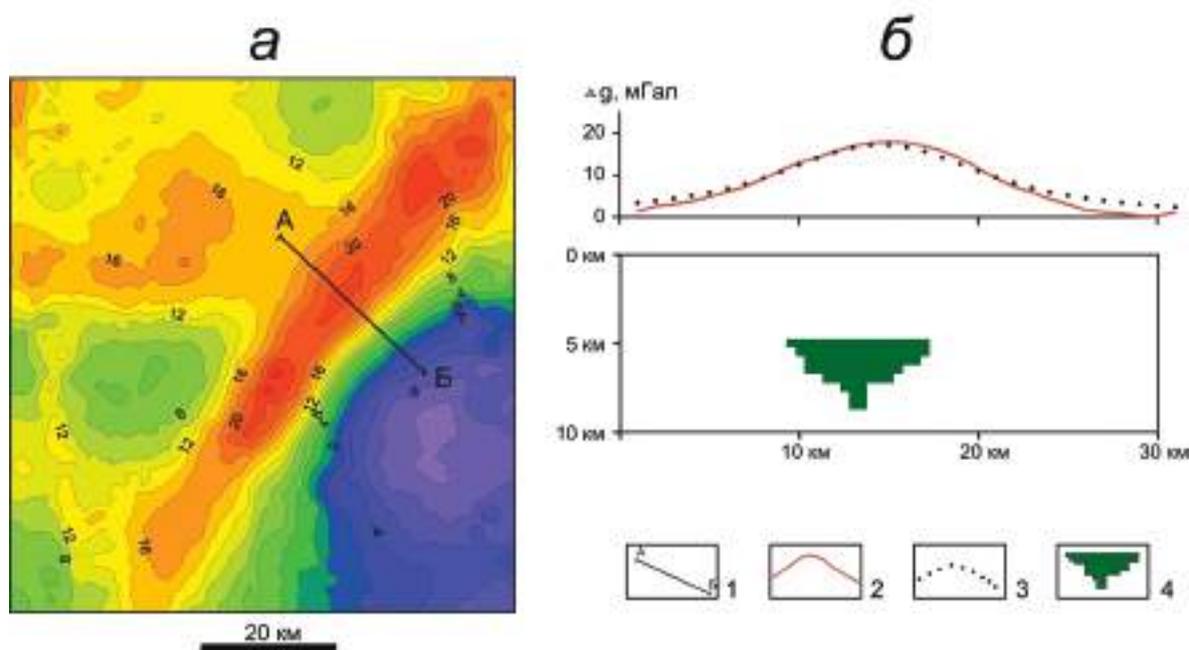


Рис. 6.17. Карта изоаномал гравитационного поля (а) и результаты количественной интерпретации Березовской аномальной зоны (б): 1 – интерпретационный профиль АБ; 2, 3 – графики наблюдаемого и модельного полей; 4 – модель аномалиеобразующего объекта по критерию минимакса.

намагниченностью, кровля которого располагается на уровне кристаллического фундамента. Авторы разделяют вывод [Койфман, 1982], что в изучаемом районе надинтрузивные осадочные образования могут оказаться перспективными для поисков нефтяных и газовых месторождений.

В заключение раздела можно сделать следующие выводы. Критерии выбора, разработанные в теории принятия решений и адаптированные к геофизической проблематике, полностью согласуются с концепцией теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, адекватной потребностям практики. Выделенный из множества альтернативных вариантов интерпретации гравитационного поля достаточно узкий набор локально-оптимальных решений обратной задачи, отвечающих каждому из рассмотренных критериев теории принятия решений, – это еще один математический инструмент противостоять приближенной эквивалентности, присущей обратным задачам геофизики. Труднообозримое множество Q допустимых решений обратной задачи удастся сузить до сравнительно небольшого числа вариантов интерпретации, которые способны достойно представлять это множество и в достаточно полном объеме, как и само оно, нести информацию об основных содержательных характеристиках изучаемых геоплотностных неоднородностей.

Глава 7

ГАРАНТИРОВАННЫЙ ПОДХОД К ИНТЕРПРЕТАЦИИ ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ

Концепция гарантированного подхода, впервые озвученная в работах [Балк, 1980_{1,2}], возникла из осознания того, что единичное решение обратной задачи, каким бы свойством оптимальности оно ни обладало, не в состоянии охватить тот объем информации об объекте исследования, которую несут данные измерений поля в совокупности с сопутствующими априорными ограничениями и которая находит свое выражение в множестве допустимых вариантов интерпретации Q . Основное достоинство гарантированного подхода – и мы в этом надеемся убедить читателя – состоит в том, что он позволяет дать объективную оценку разрешающим возможностям геофизического метода в конкретных физико-геологических условиях интерпретации. Благодаря этому алгоритмы интерпретации, реализующие идею гарантированного подхода, представляют собой эффективный математический инструмент для извлечения информации об источниках поля, которая в принципе недоступна методам, реализующим концепцию оптимального решения. Другим, и не менее важным достоинством данного подхода является его способность дифференцированно оценивать относительный вклад отдельных типов априорной информации об источниках аномалии в качестве результатов интерпретации.

Гарантированный подход никак не привязан к свойству потенциальности интерпретируемого поля, тем более к специфике того или иного класса обратных задач гравиразведки. После публикации [Балк, 1980₁], в которой гарантированный подход позиционировал себя как новый подход к решению обратных задач рудного типа, появились работы по его применению в других классах обратных задач гравиразведки – линейных обратных задачах [Балк Т., 1981_{1,2}] и структурной обратной задаче для финитной контактной границы [Балк Т., 1983, 1992; Балк Т. и др., 1988]. Несколько позже были опубликованы работы, в которых концепция гарантированного подхода (или какая-то близ-

кая к ней идея) использовалась в проблематике обратных задач из других разделов науки о Земле: в магниторазведке [Зейгельман, 1983], в геоэлектрике [Рокитянский, 1985], в геотермии [Балк, 1987₂; Балк, Гольдшмидт, 1988, 1989], в сейсморазведке [Тюленева и др., 1989], в геохимии [Балк, Кошелев, 1987]. Мы не утверждаем, что те из упомянутых сейчас статей, в которых автор работ [Балк, 1980_{1,2}] не принимал участия, были вызваны результатами именно этих его работ. Скорее всего, мысль о необходимости (не формального) учета в итоговом результате интерпретации специфической информации, которую несет каждое отдельно взятое допустимое решение обратной задачи, в те годы, как говорится, уже «виталя в воздухе».

Гарантированный подход можно рассматривать как прообраз аддитивных технологий интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, с которыми читатель сможет ознакомиться в последней главе монографии.

7.1. Сущность гарантированного подхода

Главная идея, положенная в основу гарантированного подхода, является логическим следствием тривиального вывода о том, что если все элементы множества Q обладают неким общим свойством, и математический объект x принадлежит этому множеству, то он также обладает тем же свойством. Возьмем геофизическую проблематику, и пусть Q есть множество допустимых вариантов интерпретации – совокупность приближенных решений обратной задачи в выбранном модельном классе M , удовлетворяющих заданным ограничениям. Предположим теперь, что все элементы множества Q имеют одни и те же особенности, значимые с точки зрения целевой задачи интерпретации. Если априорные предпосылки, положенные в основу интерпретационной модели, адекватны реальности, а значит истинное решение обратной задачи \bar{S} находится среди элементов множества Q , то ему эти особенности присущи также. Мы вправе считать такие особенности, если, конечно, нам их удастся выявить, содержательной гарантированной информацией об изучаемом геологическом объекте и рассматривать как новую форму представления результатов интерпретации. Алгоритмы интерпретации, реализующие концепцию гарантированного подхода, как раз и призваны выявлять геологически содержательные особенности, присущие всем допустимым решениям обратной задачи. Такие особенности будем называть инвариантами (на множестве Q).

История становления и развития теории интерпретации потенциальных полей пережила не одну смену парадигм, но известные авторам монографии публикации, в которых безальтернативность представления результатов количественной интерпретации в терминах отдельно взятого приближенного

решения обратной задачи подвергалась бы сомнению, можно, как принято говорить в подобных случаях, пересчитать по пальцам одной руки. В их числе и те публикации, на которые мы ссылались выше, перечисляя разработки, идейно близкие к гарантированному подходу. На сегодня математическая форма представления результатов интерпретации в виде единичного решения, обладающего особыми (оптимальными) свойствами, объединяет все три наиболее известных подхода к решению обратных задач. Два из них детерминистские, один из которых реализует концепцию подбора в заданном модельном классе источников поля, а другой рассматривает обратные задачи геофизики как задачи, изначально имеющие некорректную природу. Третий подход – вероятностно-статистический. Он позволяет ассоциировать истинное решение обратной задачи с реализацией случайной величины. Каждый из трех подходов по-своему решает проблему информативности и качества результата интерпретации.

Методы подбора действуют просто – «переводят стрелку» с названной проблемы на проблему оптимальности построенного решения по какому-то косвенному признаку, не имеющему прямого отношения к качеству решения. Взять, к примеру, такой признак «оптимальности», как минимум невязки наблюденного и модельного полей.

Теория некорректных обратных задач – мы об этом уже говорили – находит обоснование своим построениям в виртуальном мире и сослагательном наклонении (каким свойством *могло бы* обладать решение, *если бы* можно было устремить норму помехи к нулю).

В наиболее выгодном положении находится, на наш взгляд, информационно-статистический подход. Но необходимо считаться с тем, что используемый им математический аппарат почти полностью заимствован из статистики и теории вероятностей, в которых – как это обычно бывает в классических математических дисциплинах, основанных на системе аналитических выкладок, не принято без надобности нагружать общую постановку задачи частностями. К тому же, информационно-статистические методы решения обратных задач плохо совместимы с априорной информацией детерминистского характера о геометрии и пространственном положении источников аномалии. Это признают и приверженцы данного подхода [Никитин, 2004].

Методы интерпретации, претворяющие идеи гарантированного подхода, базируются на принципиально новых математических формах представления ее результатов в виде некоторой совокупности геологически содержательных инвариантов на множестве Q допустимых решений обратной задачи. К такого рода инвариантам можно причислить:

а) в рудной обратной задаче – максимальный общий фрагмент D_2 всех допустимых носителей S^* (модельных) возмущающих масс, и минимальную область D_1 пространства, навверняка содержащую эти массы;

б) в линейной обратной задаче гравиразведки для модели источников аномалии в виде априори зафиксированного «пакета» призм S_k , $k = 1, 2, \dots, m$, – общие двухсторонние оценки $\delta_k^{(\min)}$ и $\delta_k^{(\max)}$ для допустимых эффективных плотностей δ_k^* каждой из этих призм;

в) в структурной обратной задаче для границы раздела $\hat{\varphi}(x)$, $x \in [a, b]$, – внутреннюю φ_2^* и внешнюю φ_1^* огибающие семейства всех допустимых границ $\varphi^*(x)$, характеризующих предельные (минимальную и максимальную) глубины их залегания в каждой точке интервала $[a, b]$.

Смысл же самой инвариантности состоит в следующем:

а) в рудной обратной задаче все приближенные решения $S^* \in Q$ обладают общим свойством, которое находит свое выражение в двухстороннем включении $D_2 \subset S^* \subset D_1$;

б) в линейной обратной задаче все допустимые решения $\delta^* = (\delta_1^*, \delta_2^*, \dots, \delta_m^*)$ объединяет неравенство $\delta_k^{(\min)} \leq \delta_k^* \leq \delta_k^{(\max)}$, $k = 1, 2, \dots, m$;

в) в структурной обратной задаче все границы раздела $\varphi^*(x)$ двух плотностных сред, отвечающие априорной информации, удовлетворяют одному и тому же (функциональному) неравенству $\varphi_2^*(x) \leq \varphi^*(x) \leq \varphi_1^*(x)$, $x \in [a, b]$.

Хотя это не всегда так, но в приведенных примерах инвариантов последние имеют характер некоторых оценок (числовых, функциональных, множественных типа включений) для допустимых решений. В этой связи отметим, что инвариантами на множестве Q можно, вообще говоря, считать любые оценки точности приближенных решений, выраженные в каких угодно терминах, если, конечно, их удалось построить. Разумеется, речь всегда будет идти о *неулучшаемых* оценках. Понятно также, что вся эта инвариантность преследует одну цель: извлечение достоверной информации о характеристиках и свойствах *реальных* объектов (если оценки справедливы для всех возможных вариантов интерпретации, то в случае адекватности интерпретационной модели они справедливы и для реального геологического объекта и его физических свойств).

Часто случается такое, что в теории все обстоит гладко, но реалии практики вносят в результаты теории свои коррективы. Что касается практических условий применения гарантированного подхода, то здесь также есть свои «подводные камни»: любые особенности интерпретационной модели, не учтенные в постановке обратной задачи, способны придать термину «гарантированный» некоторую условность. В теории гарантированный подход предполагает выполнение ряда условий. Мы изложим их сейчас для обратных задач в целом. На том, в какой степени они являются обременительными при решении определенных классов обратных задач, мы остановимся в следующих разделах главы.

Во-первых, мы это уже отметили, требуется, чтобы все априорные предпосылки были адекватны природным соотношениям и свойствам помех в

измерениях поля. Такое требование вполне объяснимо и оправданно, коль скоро речь идет об извлечении *гарантированно* достоверной информации об исследуемом объекте. Внести неадекватность в постановку обратной задачи – это значит исказить структуру (геометрию) множества допустимых решений. Результаты интерпретации в терминах инвариантов на множестве Q в большей степени чувствительны к проявлениям неадекватности, чем, скажем, решение, оптимальное по минимуму невязки. Поясним это. Предположим, что Q_1 – множество допустимых вариантов интерпретации, отвечающее адекватным априорным предпосылкам, тогда как множество Q отвечает не вполне адекватным посылкам. Пусть при этом точка S^* , соответствующая минимуму функционала невязки, принадлежит пересечению множеств Q и Q_1 . Тогда сколь бы ни различались эти множества между собой, внесение данного типа неадекватности не скажется на результатах интерпретации в терминах оптимального решения. И этот факт, как мы отметили в первой главе, характеризует важнейший недостаток концепции оптимального решения – отсутствие должной зависимости результатов интерпретации от объема и качества априорной информации. В случае гарантированного подхода заметное различие между собой множеств Q и Q_1 может заметно сказаться на результатах интерпретации, выполненных в отношении каждого из этих множеств. Так, в ряде случаев геофизически содержательные инварианты на множестве приближенных решений обратной задачи представляют собой экстремальные характеристики этих решений; достаточно этим характеристикам проявиться на любых элементах множества $Q \setminus Q_1$, как условность свойства гарантированности тотчас проявится.

Во-вторых, вычислительные схемы реализации гарантированного подхода (исключая разве что линейные обратные задачи) требуют, чтобы все допустимые решения обратной задачи были найдены и представлены в явном виде. Но на практике это нереалистично. Правда, допускается определенное послабление – необходимо построить репрезентативное (представительное) подмножество Q_0 допустимых решений. Соответственно возникает проблема поиска эффективного рабочего инструмента для построения достаточно большого числа допустимых вариантов интерпретации, к которым дополнительно предъявляется требование их результативности. Последнее означает, что каждое из последующих допустимых решений обратной задачи, которые удалось найти, обязано содержать информацию, которой нет в ранее построенных решениях. Добиться этого можно путем наложения дополнительных, не присутствующих в априорной информации ограничений на свойства искомого решения обратной задачи. Лишь при соблюдении названных условий есть шанс, что сформированное из найденных решений подмножество $Q_0 \subset Q$ будет достаточно состоятельным и общие свойства решений из Q_0 совпадут со свойствами решений, слагающих все множество Q , либо будут к ним доста-

точно близки. И, конечно же, всегда будет возникать проблема обоснования состоятельности построенного подмножества Q_0 .

В-третьих, еще одним фактором, затрудняющим признание абсолютной достоверности выводов, сделанных по результатам интерпретации в рамках гарантированного подхода, является проблема глобального минимума при решении нелинейных условно-экстремальных задач, которые возникают при отыскании каждого очередного допустимого решения. Если при поиске такого решения, обязанного удовлетворять некоторому дополнительному условию, «по вине» проблемы глобального минимума будет сделан ошибочный вывод об отсутствии таких решений в множестве Q , то это может повлечь к неточностям в самих результатах интерпретации.

Скажем сразу: все три фактора не являются фатальными. Отмеченные в них противоречия можно заметно сгладить. Мы это раскроем в других разделах главы. Кроме того, гарантированный подход позволяет выявлять информацию об источниках поля, к которой вполне применим признак «гарантированная». При реализации гарантированного подхода мы сталкиваемся с ситуацией, в чем-то схожей с той, что возникает при реализации установок математической теории некорректных обратных задач. Формально эта теория в состоянии обеспечить сходимости, но от практики интерпретации она требует соблюдения невыполнимых условий – континуального множества точек задания поля и возможность устремить норму помехи к нулю. Однако в нашем случае (мы в этом убедимся позже) все обстоит не так уж драматично.

В заключение раздела логично задаться вопросом: в чем причина того, что гарантированный подход в обратных задачах для потенциальных полей не возник вскоре после того, как геофизики осознали случайный характер качества единичных интерпретаций, какой бы критерий оптимальности за ними ни стоял. По нашему убеждению, серьезные предпосылки к тому, что гарантированный подход (или близкий к нему) мог быть заявлен в геофизической литературе задолго до появления работы [Балк, 1980₁], были заложены в статье академика Л.В. Канторовича [1962]. Напомним, что речь в ней шла о простейшей линейной обратной задаче оценивания эффективной массы источников гравитационного поля. Правда, основной признак гарантированного подхода – новые математические формы представления результатов интерпретации – не был присущ алгоритму, предлагаемому в данной статье. Но все же, необходимый акцент на то, что за результат интерпретации вместо точечной оценки изучаемого параметра следует брать границы его возможных значений, в этой статье отчетливо прозвучал. К сожалению, дальнейшего и скорого развития, как, казалось, можно было ожидать, идея Л.В. Канторовича так и не получила.

Как теперь представляется, отсутствие должного интереса геофизиков к методологическому аспекту исследований Л.В. Канторовича во многом объясняется стереотипами, сложившимися еще в пору становления и господство-

вания концепции метода подбора, дополнительным стимулом для развития которого стало внедрение в практику интерпретации потенциальных полей методов вычислительной математики, и прежде всего методов математического программирования. Хотя, надо сказать, на методах математического программирования основывались и исследования Л.В. Канторовича. В этой связи сошлемся на работу [Юньков, Булах, 1958] как одну из пионерских в области автоматизации процедуры подбора наблюдаемого поля полем модели из заданного класса. Говоря о стереотипах, мы имеем в виду абсолютизацию свойства оптимальности какого-то одного из допустимых решений обратной задачи, замкнутого на некоторый скалярный критерий попарного сравнения альтернативных вариантов интерпретации. Примечательно, что это происходит при полном игнорировании в результатах интерпретации той информации, которую несут другие возможные и, объективно говоря, равноправные варианты решения обратной задачи.

Несколько позже внимание многих геофизиков переключилось с метода подбора на методы решения некорректных обратных задач [Тихонов, 1943, 1963_{1,2}], которые стали восприниматься многими как универсальное средство борьбы с практической многозначностью решения обратных задач, а обещанная сходимость, – едва ли, не как гарантия успеха. Если, к тому же, учесть, что к теории решения некорректных задач удалось привлечь внимание ведущих советских геофизиков, в числе которых В.Н. Страхов [1967₁₋₃, 1969_{1,2}], В.И. Старостенко [1974, 1975, 1976, 1978; Старостенко, Заворотько, 1976; Оганесян, Старостенко, 1978], Е.А. Мудрецова и В.Г. Филатов [Мудрецова и др., 1974; Мудрецова, Филатов, 1975_{1,2}] и другие, то неудивительно, что идее Л.В. Канторовича было суждено еще долго оставаться не востребовавшейся.

Можно назвать еще один фактор, препятствующий развитию подхода, наметившегося в работе Л.В. Канторовича. Речь идет о стереотипе, согласно которому вопросы оценки достоверности результатов математической интерпретации являются прерогативой информационно-статистического направления в теории интерпретации геофизических данных, получившего заметное развитие приблизительно в те же годы благодаря исследованиям Ф.М. Гольцмана и Т.Б. Калининой [Гольцман, 1971; Гольцман, Калинина, 1983]. В случае гарантированного подхода уместнее говорить не о точности решения обратной задачи по какому-то определенному алгоритму, а, что более важно, об оценке фактического объема информации об объекте исследования, содержащейся в совокупных априорных данных. И все же, сторонники классических направлений в теории интерпретации потенциальных полей могут упрямо стоять на том, что особой нужды в гарантированном подходе нет, поскольку, формально говоря, необходимым математическим аппаратом «в лице» информационно-статистического подхода эта теория уже располагает.

И наконец, нельзя сбрасывать со счетов возможности вычислительных средств того времени. Оперирующий с достаточно мощным подмножеством допустимых вариантов интерпретации, гарантированный подход, будь он предложен в эпоху ЭВМ или на ранней стадии компьютеризации прикладной геофизики, скорее всего, так бы и остался на долгие годы лишь на бумаге.

7.2. Линейная обратная задача

Приступая к изложению особенностей гарантированного подхода, мы нарушим хронологию его внедрения в постановки различных обратных задач грави- и магнитометрии и начнем с линейной задачи. Но прежде необходимо определиться с самим предметом приложения рассматриваемого подхода. Дело в том, что в теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий благополучно сосуществуют несколько различных классификаций обратных задач. По одним позициям эти классификации имеют между собой много общего, по другим – расходятся и даже вступают в противоречие друг с другом. Во избежание недоразумений необходимо договориться об используемой в дальнейшем терминологии.

За основу одной из наиболее известных классификаций обратных задач гравиразведки берутся особенности строения изучаемой геологической среды. По этой классификации обратные задачи разбиваются на три большие группы: задачи типа рудных; структурные задачи; задачи со сложным распределением возмущающих масс [Гравиразведка, 1981]. Чтобы задачи оценивания (корректировки) возможных значений эффективных плотностей источников поля не выпали из такой классификации, в ней, по умолчанию, предполагается, что в каждом из трех случаев неизвестными могут быть не только геометрические, но одновременно и физические параметры возмущающих объектов.

Другая, не менее распространенная классификация исходит как раз из того, какие именно параметры исследуемого геологического объекта подлежат оцениванию по результатам интерпретации – физические или геометрические [Старостенко, 1978]. В этом случае мы имеем, вообще говоря, два больших, хотя далеко не равнозначных класса обратных задач. В один из них попадут все три группы задач, фигурирующих в первой из названных классификаций, но при условии, что физические параметры геологических тел изначально заданы и оценке не подлежат.

Еще одной, достаточно распространенной и имеющей, к тому же, длинную историю является классификация (нам трудно сказать, кто ее ввел впервые), в которой за основу берется характер (линейный, нелинейный) вхождения свободных (оптимизируемых) параметров модели в аналитическое представление элементов гравитационного (магнитного) поля. Поскольку в явные выра-

жения потенциала тел, даже самой простейшей геометрической формы, входят трансцендентные функции, зависящие от параметров этих тел, то ясно, что, согласно этой классификации, линейными могут быть лишь постановки обратных задач, в которых свободными являются исключительно физические параметры геологических объектов. Да и это не все. Здесь будет уместно привести в качестве примера существования противоречий между различными классификациями обратную задачу, направленную на уточнение (по гравиметрическим данным) коэффициента в экспоненциальном законе изменения с глубиной плотности рыхлых осадков, заполняющих впадины [Авчан, Озерская, 1968]. По одной из классификаций речь будет идти о линейной обратной задаче гравиразведки, по другим классификациям – о нелинейной.

Нельзя не вспомнить и об одной классификации, близкой к последней из названных, но использующей в качестве отправной точки вычислительную сложность задач, которые возникают при поиске допустимых вариантов интерпретации. Такая классификация оставляет для линейных обратных задач еще меньше пространства. Требуется, чтобы оптимизируемые параметры входили линейным образом во все элементы соответствующей условно-экстремальной задачи – в минимизируемый функционал и во все ограничения типа равенств и неравенств. Исключение может быть сделано разве что квадратичному функционалу, еще реже – выпуклому.

7.2.1. Типичная постановка задачи

В практике интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, где, как правило, приходится одновременно подбирать как геометрические, так и физические параметры возмущающего объекта, линейные обратные задачи выступают как отдельные звенья технологической цепочки, в которой происходит чередование двух типов построений. Один тип построений заключается в корректировке геометрических параметров подбираемого распределения возмущающих масс. Второй – в корректировке физических параметров с помощью решения линейной обратной задачи. «Известные» параметры носителя, фигурирующие в теоретической постановке линейной обратной задачи, это как раз и есть результат подбора геометрических параметров в предшествующем цикле такой технологической цепочки.

Для понимания сущности гарантированного подхода в линейных обратных задачах гравиразведки и магниторазведки достаточно изучить особенности его применения на любой одной задаче, подпадающей под эту категорию по какой-нибудь из приведенных классификаций. Мы остановили свой выбор на задаче оценивания вектора параметров в представлении эффективной плотности масс, заключенных в заданном носителе \hat{S} , при условии, что в модель-

ное поле *все* оцениваемые параметры входят *линейным образом*. Прежде всего нас будет интересовать вопрос, в какой степени данная постановка обратной задачи нуждается в гарантированном подходе.

Предположим, что геофизику удалось определиться с максимальной мерой неадекватности модельных представлений, которой еще можно пренебречь и не вводить необходимые поправки в допустимое значение невязки, а также сами результаты решения обратной задачи. Пусть, исходя из каких-то косвенных данных (например, по результатам предшествующих геофизических работ), выполнена геометризация аномального объекта и с учетом допустимой меры неадекватности можно считать, что возмущающие массы распределены по K заданным связным парциальным носителям \hat{S}_k . При этом есть основания полагать, что эффективные плотности $\hat{\delta}_k$ масс в каждом из парциальных носителей \hat{S}_k изменяются с глубиной z по неизвестному кусочно-линейному закону

$$\hat{\delta}_k(z) = \bar{\delta}_k + \hat{c}_k z, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (7.1)$$

Использование кусочно-линейных законов изменения плотности обеспечивает возможность учета вертикального градиента плотности горных пород, что, как показано на примере нефтегазоносных структур Западной Сибири и Дальнего Востока, существенно повышает точность их моделирования [Исаев и др., 2011]. Может оказаться, что по априорным предпосылкам вертикальные градиенты \hat{c}_k плотностей малы настолько, что при назначенной мере неадекватности модели среды и поля гравитационный эффект любого тела \hat{S}_k переменной плотности $\hat{\delta}_k(z)$ и гравитационный эффект того же тела, но с некой «средней» плотностью $\bar{\delta}_k$ не различимы между собой. Тогда вектор \hat{c} можно исключить из рассмотрения и считать тела \hat{S}_k однородными по плотности. Допускается также, что значения наблюдаемого поля $\Delta\hat{g}(X_i)$, $i = 1, 2, \dots, m$, могут содержать, помимо аддитивных случайных помех ξ_i известной нормы $\|\xi\|$, еще и фоновую компоненту

$$\Delta\hat{g}^{(\phi)}(X) = \sum_{j=1}^L \hat{d}_j \varphi_j(X), \quad (7.2)$$

известную с точностью до значений параметров \hat{d}_j . Включать фоновую компоненту в общую аддитивную модель наблюдаемого поля и вовлекать ее в общий оптимизационный процесс, предлагалось геофизиками достаточно давно. Это предложение можно найти уже в работах [Булах, 1970; Старостенко и др., 1975]. Помимо коэффициентов фона роль мешающих параметров могут в принципе играть и некоторые параметры в описании самой эффективной плотности.

В характерном случае модель источников представляет собой «пакет» прилегающих друг к другу многогранников (к примеру, уступов) постоянной или линейной плотности, а наблюдаемое поле отягощено помимо случайных по-

мех еще и полиномиальным фоном. Таким образом, речь идет об известных «призматических» моделях плотностной неоднородности. Среди геофизиков отношение к таким моделям неоднозначно. Поэтому, прежде чем завершить описание постановки задачи (привести перечень типичных ограничений на оптимизируемые параметры среды и поля), а тем более перейти к изложению сути гарантированного подхода в классе таких моделей, есть смысл остановиться на отношении к ним геофизиков. Необходимо выяснить, имеют ли вообще такие модели «право на жизнь». Ведь именно так остро ставит вопрос геофизик, сомневающийся в практической значимости таких моделей.

Известные многим «коварные» свойства «призматических» моделей, которые проявляются в стремлении оптимизируемых плотностей выйти на границы их допустимых значений (какими бы широкими они ни были), привели некоторых геофизиков к мысли, что такого рода модели вообще бесперспективны в практике интерпретации. Позиция авторов монографии – иная. После того как по имеющейся априорной информации установлены ограничения на свойства допустимых решений обратной задачи, и алгоритму удалось найти приближенное решение обратной задачи, которое удовлетворяет этим ограничениям, *все претензии* к алгоритму относительно качества найденного решения *лишены объективных оснований*. Кроме того, не надо намеренно исключать из рассмотрения естественные ограничения на интервал возможных значений эффективной плотности. Оставаясь на сформулированной позиции, мы не видим смысла вступать в дискуссию по вопросу перспективности «призматических» моделей; нам любопытен другой аспект проблемы.

На наш взгляд, за критикой «призматических» моделей, основанной лишь на том, что интерпретация по минимуму невязки практически неминуемо приведет к геологически бессодержательному решению, стоят плохо скрываемые и неоправданные требования к методу решения обратной задачи. Суть в том, что в множестве Q – при том что его границы очерчены априорной информацией – почти наверняка отыщутся геологически малосодержательные распределения масс. От метода же ожидают, что приближенное решение обратной задачи будет выбрано не просто из множества Q допустимых вариантов интерпретации, а из более узкого подмножества Q_0 , в которое объединились исключительно содержательные решения. Казалось бы, если такого желанного выбора не происходит автоматически, то не лучше ли перестать рассчитывать на благоприятный случай и задать более жесткие ограничения? По меньшей мере, избежать явно выраженных «пилообразных» решений, послуживших поводом для критики в адрес «призматических моделей», могли бы ограничения на максимально допустимый скачок плотности между соседними призмами в модели плотностной среды.

«Призматические модели» плотностной среды лишний раз дают повод задуматься над одним довольно распространенным феноменом поведения раз-

работчиков программно-математического обеспечения, а также геофизиков, пользующихся этими разработками. Первые склонны к демонстрации успешных примеров применения своих алгоритмов, в которых *по воле случая* (но акцент на этом, разумеется, не делается) решение было выбрано из достаточно узкого подмножества $Q_0 \subset Q$ вариантов, де-факто отвечающих дополнительной информации, не заявленной в постановке задачи. Такая линия поведения понятна: авторы алгоритмов расценивают качество решения обратной задачи как качество предлагаемого ими алгоритма, и демонстрация не очень удачных примеров им не нужна. Все было бы иначе, если бы качество результатов интерпретации отражало не особенности конкретного алгоритма, а информативность совокупных данных, по которым была выполнена интерпретация, то есть информативность самого геофизического метода в конкретных физико-геологических условиях интерпретации. К алгоритму, способному оценить информативность геофизических данных, претензий уже быть не могло. Но для создания таких алгоритмов нужны принципиально иные подходы к обратным задачам, и гарантированный подход является одним из них. Что касается пользователей программно-алгоритмического обеспечения, то многие из них готовы заблуждаться и принимать удачные примеры за *объективные* возможности гравиразведки в рассматриваемых условиях интерпретации.

Мы не находим обоснованных доводов в пользу бесперспективности «призматических» классов моделей источников поля и займемся изложением основных элементов постановки линейной обратной задачи в таких классах. Приведем наиболее типичные априорные ограничения, участвующие в формировании множества Q допустимых решений обратной задачи. Прежде всего, это двухсторонние неравенства

$$\delta_k^{(1)} \leq \hat{\delta}_k \leq \delta_k^{(2)}, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (7.3)$$

$$c_k^{(1)} \leq \hat{c}_k \leq c_k^{(2)}, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (7.4)$$

Поскольку они носят характер естественных ограничений, то не нарушают общности постановки обратной задачи. В каждом конкретном случае некоторые из них могут оказаться нерезультативными. Однако благодаря условиям (7.3) и (7.4) множество Q допустимых решений обратной задачи, что чрезвычайно важно, заведомо становится ограниченным. Если в модели источников поля вертикальными градиентами эффективных плотностей можно пренебречь и $\hat{\delta}_k(X) \equiv \hat{\delta}_k$ для всех $X \in \hat{S}_k$, то другим важным типом ограничений являются максимально возможные значения скачка плотности на границе всех пар соседних носителей \hat{S}_k (своего рода условие гладкости). Пусть T – множество пар $(k(1), k(2))$ номеров контактирующих тел \hat{S}_k в модели источников поля. Тогда данные ограничения принимают следующий вид:

$$\left| \hat{\delta}_{k(1)} - \hat{\delta}_{k(2)} \right| \leq \Delta_{(k(1), k(2))}, \quad (k(1), k(2)) \in T. \quad (7.5)$$

Априорные предположения об интенсивности фона интерпретатор может задать с помощью двухсторонних ограничений на его коэффициенты

$$d_j^{(1)} \leq \hat{d}_j \leq d_j^{(2)}, j = 1, 2, \dots, L, \quad (7.6)$$

либо непосредственно на его значения в точках измерения поля:

$$\left| \sum_{j=1}^L \hat{d}_j \varphi_j(X_i) \right| \leq \varepsilon^{(\phi)}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.7)$$

В каких-то случаях геофизик может подойти дифференцированно к заданию двухсторонних ограничений на значения фоновой компоненты наблюдаемого поля в точках его измерения X_i , $i = 1, 2, \dots, n$, когда эти ограничения охватывают часть точек измерения:

$$\bar{\varepsilon}_i^{(\phi)} \leq \sum_{j=1}^L \hat{d}_j \varphi_j(X_i) \leq \bar{\bar{\varepsilon}}_i^{(\phi)}, i \in I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}. \quad (7.8)$$

Априорная информация о свойствах случайных помех ξ_i может сводиться к неравенствам

$$\bar{\xi} \leq \xi_i \leq \bar{\bar{\xi}}, i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.9)$$

а также к заданию предполагаемых границ возможного значения средней величины помехи:

$$\alpha \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i \leq \beta. \quad (7.10)$$

В последнем неравенстве отражены априорные представления интерпретатора о возможном отклонении фактического закона распределения случайной помехи от централизованного.

При описании структуры множества допустимых решений обратной задачи условие (7.9) преобразуется в неравенства, определяющие приемлемое расхождение наблюдаемого и модельного поля (включающего фоновую компоненту) в точках измерения:

$$\bar{\xi} \leq \left| \Delta \tilde{g}(X_i) - \left(\sum_{k=1}^K \Delta g^{(1)}(\hat{S}_k; X_i) \hat{\delta}_k + \sum_{k=1}^K \Delta g^{(z)}(\hat{S}_k; X_i) \hat{c}_k + \sum_{j=1}^L \varphi_j(X_i) \hat{d}_j \right) \right| \leq \bar{\bar{\xi}}, \quad (7.11)$$

где $\Delta g^{(1)}(\hat{S}_k; X_i)$ – значение в точке X_i поля Δg , обусловленного массами единичной плотности δ , сосредоточенными в парциальном носителе \hat{S}_k , а $\Delta g^{(z)}(\hat{S}_k; X_i)$ – значение поля, обусловленного телом \hat{S}_k плотности $\delta = z$. Аналогично можно дать развернутое представление для неравенства (7.10):

$$\alpha \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\Delta \tilde{g}(X_i) - \left(\sum_{k=1}^K \Delta g^{(1)}(S_k; X_i) \hat{\delta}_k + \sum_{k=1}^K \Delta g^{(z)}(S_k; X_i) \hat{c}_k + \sum_{j=1}^L \varphi_j(X_i) \hat{d}_j \right) \right) \leq \beta. \quad (7.12)$$

Сделаем одно важное замечание. Обычно в методах подбора внимание концентрируется на том, чтобы достигнутая невязка не превзошла максимально допустимую. Поэтому для удобства принимается $\bar{\xi} = 0$ и неравенство (7.11) приобретает, по сути, односторонний характер. Практика использования лишь одного ограничения сверху на уровень помех в измерениях не столь уж безобидна, как может показаться на первый взгляд. Принимая нулевой нижнюю границу возможного значения нормы помехи, мы тем самым допускаем возможность сколь угодно малого расстояния между модельным и наблюдаемым полем. Это приведет к тому, что модельное поле «потянется» за помехами.

Остается добавить, что при реализации концепции подбора оптимальные оценки δ^* , c^* и d^* векторов $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_K)$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_K)$ и $d = (d_1, d_2, \dots, d_L)$ определяются из решения условно-экстремальной задачи размерности $2K + L$, в которой в качестве минимизируемого функционала берется расхождение наблюдаемого и модельного полей в одной из классических метрик, к примеру,

$$F(\delta, c, d) = \sum_{i=1}^n \left(\Delta \tilde{g}(X_i) - \left(\sum_{k=1}^K \Delta g^{(1)}(\hat{S}_k; X_i) \delta_k + \sum_{k=1}^K \Delta g^{(z)}(\hat{S}_k; X_i) c_k + \sum_{j=1}^L \varphi_j(X_i) d_j \right) \right)^2. \quad (7.13)$$

Ограничениями при этом служат неравенства (7.3)–(7.8), (7.11), (7.12), в которых необходимо всюду (за исключением обозначения \hat{S}_k) убрать символ истинного решения («крышку»).

В первой главе монографии мы с достаточно общих позиций, без определенного акцента на классы обратных задач и особенности модели источников поля, обсуждали недостатки традиционных математических форм представления результатов интерпретации. Теперь появилась возможность сделать это более предметно. Для большей наглядности рассуждений вычленим из приведенной выше постановки обратной задачи случай, когда тела однородны по плотности ($\hat{\delta}_k = const$), а фоновая компонента в модели наблюдаемого поля отсутствует. Возьмем методы, реализующие концепцию выбора наилучшего решения по минимуму невязки, и зададимся вопросом: в чем, собственно, заключена оптимальность решения обратной задачи в терминах компонент δ_k^* вектора δ^* , и какую информацию об истинных эффективных плотностях δ_k несет пара $\langle \delta^*, F(\delta^*) \rangle$ в каждом конкретном случае интерпретации? Поставленный вопрос можно конкретизировать в нескольких частных вопросах.

Вопрос первый: по каким еще признакам, кроме минимально достижимой невязки $F(\delta^*)$, оптимальное решение δ^* является наилучшим, и связаны ли напрямую эти признаки с фактическим качеством такого решения?

Вопрос второй: можно ли по значению функционала невязки $F(\delta^*)$ сделать надежный вывод о точности построенного решения?

Вопрос третий: в чем преимущество оптимального решения δ^* в сравнении с любым другим решением $\delta^0 \in Q$, отвечающим иному, чем δ^* , признаку оптимальности; будет ли вообще решение δ^* более точным, чем δ^0 ?

Вопрос четвертый: какие из априорных ограничений, фигурирующих в условно-экстремальной задаче, оказались результативными?

Вопрос пятый: каков вклад каждого типа априорных ограничений в качество результатов интерпретации в терминах пары $\langle \delta^*, F(\delta^*) \rangle$ и как следует оценивать этот вклад?

Это те принципиальные вопросы, на которые концепция оптимального решения не имеет ответа, либо ответы на которые принижают значимость методов, ее реализующих. Неудивительно, что сторонники таких методов стараются эти вопросы попросту не поднимать. В основном все рассуждения по поводу эффективности используемого подхода ограничиваются сравнением векторов δ^* и $\hat{\delta}$ по результатам решения модельных примеров (скорее всего, хорошо подобранных) и какими-то субъективными выводами.

Бессмысленно отрицать, что в вычислительном плане (особенно в эпоху маломощной вычислительной техники) реализация концепции подбора всегда была сопряжена с существенными трудностями и требовала от интерпретатора большого искусства и глубокого знания изучаемого объекта. Но в чисто методологическом плане концепция метода подбора довольно примитивна и по сути сводится к простому заключению: существует некий объем априорной информация об объекте исследования, и если нам удастся подобрать модельное распределение масс, отвечающее этой информации, то есть *шанс*, что оно как раз и окажется истинным решением обратной задачи, либо, в крайнем случае, достаточно близким к нему. А поскольку из всех априорных ограничений наиболее трудно удовлетворить ограничению на максимально допустимое значение нормы невязки подбора наблюдаемого поля, то итерационный процесс подбора надо направить на то, чтобы минимизировать невязку. Поставив целью метода решения условно-экстремальной задачи достижение глобального минимума невязки, мы увеличиваем шансы выйти хотя бы на какое-то допустимое значение нормы невязки (даже если глобальный минимум достигнут не будет), а значит и на допустимое решение. С учетом сказанного, ответы на поставленные выше вопросы прозвучат так.

1. Никаким свойством оптимальности, связанным с фактическим качеством результатов интерпретации, решение обратной задачи, отвечающее минимуму невязки, не обладает.

2. Никакой сколь-нибудь значимой информации о фактической точности построенного решения δ^* достигнутое значение функционала невязки $F(\delta^*)$ не несет.

3. Превосходство по точности любого из допустимых решений над другим – это дело случая; соответственно, нет объективных оснований *гарантированно* говорить о преимуществе решения по минимуму функционала невязки F над любым другим приближенным решением из множества Q .

4. Метод подбора может выявить, *зависит* или нет решение по минимуму невязки от введения тех или иных ограничений (достаточно решить обратную задачу с учетом этих ограничений и без), но являются ли они *результативными* в смысле влияния на фактическое качество решения – установить по одному лишь приближенному решению и величине функционала невязки невозможно.

5. Не имея возможности ответить на предыдущий вопрос, методу подбора не под силу ответить и на последний вопрос, тем более если речь идет не о гарантированном вкладе той или иной априорной информации в точность решения обратной задачи по одному из алгоритмов группы методов подбора, а о ее вкладе в информативность совокупных данных, без привязки к конкретному алгоритму интерпретации.

7.2.2. Постановка задачи в случае гарантированного подхода

Как мы считаем, при оценивании значимости того или иного подхода к решению обратных задач необходимо учитывать два момента.

1. Любой подход оправдан (считается состоятельным), если он способен принести новую информацию об объекте исследования, извлечение которой из совокупных априорных данных (включая измерения поля) недоступно другим известным подходам, или связано со значительно большим объемом вычислений.

2. Итоговый результат интерпретации должен представлять собой некоторый «пакет информации», в формирование которого внесли свою лепту различные идеи и методы теории интерпретации потенциальных полей.

Напомним, что в классе линейных обратных задач гарантированный подход был впервые опробован в работах Т.В. Балк [1981_{1,2}]. В последующем этой проблематике был посвящен еще ряд публикаций [Балк, Балк Т., 1985_{1,2}, 1987; Балк и др., 1990].

Вместо вектора $\delta^* = (\delta_1^*, \delta_2^*, \dots, \delta_K^*) \in Q$ оценок эффективных плотностей $\hat{\delta}_k$ гарантированный подход предлагает в качестве результатов интерпретации множество, состоящее из некоторого числа q пар экстремальных значений

$$\Phi_r^{(\min)} = \min \Phi_r(\delta), \quad \Phi_r^{(\max)} = \max \Phi_r(\delta), \quad r = 1, 2, \dots, q, \quad \delta \in Q \quad (7.14)$$

функционалов

$$\Phi_r(\delta) = \sum_{k=1}^K \lambda_k^{(r)} \delta_k, \quad r = 1, 2, \dots, q \quad (7.15)$$

на множестве Q допустимых решений обратной задачи.

Число q и весовые коэффициенты $\lambda_k^{(r)}$ в этих функционалах согласованы с целевой задачей интерпретации, а за включением $\delta \in Q$ стоят ограничения (7.3)–(7.8), (7.11), (7.12). Независимо от объема и состава априорной информации, количественная интерпретация данных гравиразведки в рамках гарантированного подхода сводится к оптимизационным задачам того же класса, что и условно-экстремальная задача, возникающая при реализации метода подбора. Просто в случае метода подбора речь идет об одной условно-экстремальной задаче, а в случае гарантированного подхода о $2q$ условно-экстремальных задач. При этом мешающие параметры (коэффициенты фона) в структуру экстремизируемых функционалов $\Phi_r(\delta)$ не входят, а присутствуют лишь в ограничениях. Среди ограничений фигурирует и требование к максимально допустимой невязке наблюдаемого и модельного полей.

Безусловно, для читателя представляет интерес конкретизация структуры функционалов $\Phi_r(\delta)$. В одном из случаев ($q = K$, $\lambda_k^{(r)} = 1$ и $\lambda_k^{(r)} = 0$ для всех $r \neq k$), который мы берем для примера, такими функционалами являются минимально и максимально возможные значения $\delta_k^{(\min)}$ и $\delta_k^{(\max)}$, которые (при соблюдении всех априорных ограничений) могли бы иметь (но не одновременно!) неизвестные эффективные плотности $\hat{\delta}_k : \Phi_k^{(\min)} = \delta_k^{(\min)}$ и $\Phi_k^{(\max)} = \delta_k^{(\max)}$.

Результаты интерпретации в терминах экстремально возможных значений эффективных плотностей $\hat{\delta}_k$ уже позволяют, в отличие от результатов интерпретации в терминах единичного допустимого решения, ставить вопрос об их качестве и разрешающих возможностях гравиразведки в каждом конкретном случае. Вполне логично за оценку разрешающих способностей гравиразведки взять функционал ν , обладающий следующими свойствами.

1. Его значения монотонно возрастают с ростом качества интерпретации, оцениваемого по некоторым неформальным признакам. Данному требованию можно придать более развернутый вид: если G_1 и G_2 – два различных объема совокупной априорной информации, участвующей в интерпретационном процессе, причем G_2 есть некоторая часть информации G_1 , то $Q_2 \supseteq Q_1$ и $\nu_2 \leq \nu_1$.

2. Он нормирован на отрезке $[0, 1]$.

3. Значение $\nu = 0$ соответствует случаю, когда гравитационные измерения и результаты их интерпретации не привнесли ничего нового к тому, что и так было известно по априорной информации до проведения интерпретации.

4. Значение $\nu = 1$ соответствует идеализированной модельной ситуации, когда точное решение обратной задачи восстанавливается однозначно и результаты интерпретации в рамках гарантированного подхода эту ситуацию надежно идентифицируют.

Указанными свойствами обладает, например, функционал

$$\nu_1 = 1 - \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \frac{\delta_k^{(\max)} - \delta_k^{(\min)}}{\delta_k^{(2)} - \delta_k^{(1)}}. \quad (7.16)$$

Его значение показывает, насколько в среднем априорная информация, помимо той, что заключена в неравенствах (7.3), позволяет сузить априори известные интервалы $[\delta_k^{(1)}, \delta_k^{(2)}]$ возможных значений истинных плотностей $\hat{\delta}_k$. Разумеется, функционал (7.16) не единственный, по которому можно оценить качество интерпретации в терминах пар $\langle \delta_k^{(\min)}, \delta_k^{(\max)} \rangle$.

7.2.3. Сравнительная оценка эффективности двух подходов

Перечислим основные отличия математических форм, в которых выражаются результаты интерпретации в обоих подходах – классическом и гарантированном, и заострим внимание на том, как это различие отражается в информативности самих результатов.

1. Если при традиционном подходе результат интерпретации – это некий элемент множества Q , то при гарантированном подходе результаты интерпретации не обязаны являться элементами этого множества; лишь в исключительных случаях векторы $(\delta_1^{(\min)}, \delta_2^{(\min)}, \dots, \delta_K^{(\min)})$ и $(\delta_1^{(\max)}, \delta_2^{(\max)}, \dots, \delta_K^{(\max)})$ могут оказаться элементами множества Q .

2. Само свойство оптимальности решения выведено за рамки гарантированного подхода – в результатах интерпретации отдельные допустимые решения обратной задачи явно не представлены.

3. Результаты интерпретации в терминах пар $\langle \delta_k^{(\min)}, \delta_k^{(\max)} \rangle$ представляют собой *раздельные* двусторонние оценки истинных эффективных плотностей $\hat{\delta}_k$.

4. Если основным недостатком традиционных алгоритмов решения обратных задач является отсутствие монотонной зависимости качества результатов интерпретации от объема и качества априорной информации, то гарантированный подход свободен от указанного недостатка. Любое дополнительное ограничение может разве что сузить множество допустимых решений обратной задачи со всеми вытекающими отсюда последствиями. Больше того, теперь появляется возможность определить тот вклад в достигнутое качество интерпретации ν , который вносит любая, пусть даже незначительная дополнительная информация G_0 к уже имевшейся информации G_1 . Такой информацией может быть новое априорное ограничение либо несколько новых измерений геофизического поля.

На последней из названных особенностей гарантированного подхода есть смысл остановиться подробнее.

Пусть интерпретация в терминах функционалов (7.15) выполнена дважды – по исходной информации G_1 и по объединению G_2 этой информации с добавочным объемом информации G_0 . Пусть Q_1 и Q_2 – множества допустимых решений, отвечающих информации G_1 и G_2 . Соответственно, через ν_1 и ν_2 обо-

значим качество ν интерпретации по информации G_1 и $G_2 = G_1 \cup G_0$. Возможны три исхода.

1. $Q_2 = Q_1$. Такой исход является наиболее пессимистическим и означает, что информация G_0 не привнесла ничего нового в дополнение к информации G_1 и не позволила сколь-нибудь сузить множество допустимых решений обратной задачи. Другими словами, по отношению к имеющейся информации G_1 информация G_0 оказалась *абсолютно не результативной*. Каковы бы ни были цель интерпретации и структура функционалов (7.15), в терминах которых будет выражен ее результат, качество последнего остается прежним, причем при *любом* выборе функционала ν .

2. $Q_2 \subset Q_1$, но $\nu_2 = \nu_1$. Такой исход означает, что, хотя множество допустимых вариантов интерпретации и удалось сузить за счет дополнительной информации G_0 , с точки зрения целевой задачи интерпретации (качество которой определяется выбранным функционалом ν) информация Q_0 не смогла принести ничего нового. При этом вполне возможно, что при изменении цели интерпретации (коэффициентов $\lambda_k^{(r)}$ в функционалах (7.15)) и структуры функционала ν информация Q_0 могла оказаться результативной и привести к неравенству $\nu_2 > \nu_1$. В этом случае информацию G_0 логично назвать *условно не результативной*.

3. $Q_2 \subset Q_1$ и $\nu_2 > \nu_1$. Такой исход говорит о том, что информация Q_0 оказалась полезной с точки зрения целевой задачи интерпретации (хотя при другой структуре функционала ν могло случиться, что $\nu_2 = \nu_1$). В этом случае информацию G_0 логично назвать *условно результативной*.

В заключение раздела мы хотели бы отметить, что к гарантированному подходу в линейных обратных задачах, где результатом применения являются экстремальные (скалярные) оценки некоторых функций физических параметров модели, достаточно близко примыкают отдельные разработки, реализующие другие концепции. В них, на наш взгляд, предлагалось, если так можно выразиться, «половинчатое» решение проблемы неформального учета множества найденных вариантов интерпретации. На наш взгляд, довести эти исследования до логического завершения не позволил стереотип «оптимального» решения. Об одной такой разработке – методе согласования допустимых решений – мы уже говорили. Сейчас же вспомним монографию [Кауфман, Хансен, 2011]. В ней для оценивания достижимой точности определения вектора $\hat{\Theta} = (\hat{\Theta}_1, \hat{\Theta}_2, \dots, \hat{\Theta}_n)$ параметров модели источников поля предлагается следующее:

1) построить подмножество допустимых решений $\Theta_j^* = (\Theta_{j,1}^*, \Theta_{j,2}^*, \dots, \Theta_{j,n}^*)$ (при этом вопросы его репрезентативности не обсуждаются);

2) для каждого $k = 1, 2, \dots, n$ среди компонент $\Theta_{j,k}^*$ векторов Θ_j^* найти минимально и максимально возможные значения $\Theta_k^{(\min)}$ и $\Theta_k^{(\max)}$;

3) в вопросах оценки разрешающих возможностей геофизического метода исходить в дальнейшем из неравенств $\Theta_k^{(\min)} \leq \hat{\Theta}_k \leq \Theta_k^{(\max)}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

7.2.4. Дополнительные замечания

В главном, суть гарантированного подхода в линейной постановке обратной задачи гравиразведки достаточно полно раскрывает рассмотренная нами проблема построения неуплучшаемых отдельных оценок эффективных плотностей масс в парциальных фрагментах модельного носителя источников поля. Однако некоторые особенности подхода остались без внимания. Так, стоит отметить что изменение структуры функционалов $\Phi_r(\delta)$ может привести к знаковым статусным изменениям результата интерпретации. Далеко ходить за примером не надо. Положим $q = 1$, $\lambda_k = \mu(\hat{S}_k)$, $k = 1, 2, \dots, K$ (μ – мера Лебега). В этом случае целевая задача интерпретации заключается в оценке суммарной эффективной массы источников аномалии по ее минимально и максимально возможным значениям $\Phi^{(\min)}$ и $\Phi^{(\max)}$. Эта задача, как уже говорилось, рассматривалась Л.В. Канторовичем [1962]. В качестве оценки разрешающих возможностей гравиразведки здесь может выступать функционал

$$\nu = 1 - \frac{\Phi^{(\max)} - \Phi^{(\min)}}{\sum_{k=1}^K \mu(\hat{S}_k)(\delta_k^{(2)} - \delta_k^{(1)})} . \quad (7.17)$$

В методологическом плане задача оценивания минимально и максимально возможного значения эффективной массы источников аномалии принципиально отличается от задачи отдельного оценивания экстремально возможных значений эффективных плотностей масс в каждом из парциальных носителей \hat{S}_k . Векторы $\delta^{(\min)} = (\delta_1^{(\min)}, \delta_2^{(\min)}, \dots, \delta_K^{(\min)})$ и $\delta^{(\max)} = (\delta_1^{(\max)}, \delta_2^{(\max)}, \dots, \delta_K^{(\max)})$, определяющие координаты описанного вокруг множества Q K -мерного параллелепипеда, не принадлежат в общем случае множеству допустимых решений Q , которое в случае линейных априорных ограничений представляет собой многогранник в \mathbf{R}^K . Значения $\delta_k^{(\min)}$, $k = 1, 2, \dots, K$ (как и значения $\delta_k^{(\max)}$) достигаются, вообще говоря, на различных допустимых решениях δ^* (в различных точках множества Q). Экстремальные же значения эффективной массы являются возможными значениями истинной эффективной массы источников аномалии. Результатам интерпретации по Л.В. Канторовичу можно отвести роль неуплучшаемых оценок для приближенного значения эффективной массы, отвечающему «оптимальному» решению δ^* . Другое дело, что Л.В. Канторович предлагал отказаться от единичных «оптимальных» решений и придать статус результатов интерпретации самим оценкам $\Phi^{(\min)}$ и $\Phi^{(\max)}$. Понятно, что с позиций надежности результатов интерпретации такой статус более высок.

В принципе не представляет труда ввести новые типы экстремизируемых функционалов в постановке линейной обратной задачи гравиразведки в рамках гарантированного подхода. Так, в дополнение к эффективной массе, по

анalogии можно рассмотреть задачу на вычисление границ интервалов возможных значений других первых гармонических моментов. Напомним в этой связи, что в свое время достаточно популярны были методы решения прямых и обратных задач, основанные на вычислении и использовании некоторого числа первых гармонических моментов тяготеющих масс. В частности, речь шла о методах решения прямой задачи для сложнопостроенных сред путем вычисления поля от более простых распределений, некоторое число первых моментов которого совпадают с соответствующими гармоническими моментами возмущающих масс [Цирульский, 1974; Страхов, Лапина, 1975_{1,2}; Балк 1979₄]. Определенную известность получили также методы слабозквивалентного тела, предназначенные для свертывания информации, содержащейся в значениях некоторого, относительно небольшого числа первых гармонических моментов возмущающих масс, в геометрические параметры сравнительно простых модельных носителей [Кудря, 1972; Балк, 1975_{2,3}, 1983₁; Балк, Балк Т., 1977]. Однако, на наш взгляд, время этих методов прошло; сегодня мы не находим им места в современных технологиях интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Сдует, однако, признать, что в свое время двусторонние оценки для гармонических моментов могли бы существенно повысить эффективность этих методов.

Теперь обратимся к общему случаю, не уточняя ни структуру, ни число q функционалов $\Phi_r(\delta)$, в терминах экстремальных значений которых будет выражен результат интерпретации. Пусть Q_δ – множество векторов $\delta = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_K)$, отвечающих априорной информации G_δ о плотностях, которая не связана с измерениями гравитационного поля. Из всех типов ограничений, присутствующих в известных постановках линейной обратной задачи гравиразведки для «призматических» моделей плотностной среды, под эти условия подпадают неравенства (7.3), (7.5). Пусть

$$\bar{\Phi}_r = \min \Phi_r(\delta), \quad \overline{\bar{\Phi}}_r = \max \Phi_r(\delta), \quad r = 1, 2, \dots, q, \quad (7.18)$$

где, в отличие от (7.14), экстремумы берутся по всем векторам $\delta \in Q_\delta$. Сопоставим эти функционалы с функционалами $\Phi_r^{(\min)}$ и $\Phi_r^{(\max)}$, которые были вычислены при полной информации G . Тогда для каждого r возможны два исхода.

Первый исход

$$[\bar{\Phi}_r, \overline{\bar{\Phi}}_r] = [\Phi_r^{(\min)}, \Phi_r^{(\max)}] \quad (7.19)$$

говорит о том, что имеющегося объема гравиметрических данных (включая информацию о свойствах помех в измерениях) не достаточно, чтобы уточнить априорные сведения о возможном значении функционала $\Phi_r(\hat{\delta})$.

Второй исход

$$[\bar{\Phi}_r, \overline{\bar{\Phi}}_r] \supset [\Phi_r^{(\min)}, \Phi_r^{(\max)}] \quad (7.20)$$

означает, что гравиметрические измерения (совместно с априорной информацией о свойствах помех в этих измерениях) позволяют уточнить имевшуюся информацию о плотностях $\hat{\delta}_k$, сузив интервал $[\bar{\Phi}_r, \bar{\Phi}_r]$ предполагаемых значений функционала $\Phi_r(\hat{\delta})$ до интервала $[\Phi_r^{(\min)}, \Phi_r^{(\max)}]$, гарантированно содержащего точное значение $\Phi_r(\hat{\delta})$. Апостериорную информацию об области возможных значений функционала $\Phi_r(\hat{\delta})$ можно детализировать, разбив этот исход на три отдельных взаимонезависимых случая, когда удастся уточнить:

1) лишь верхнюю границу $\bar{\Phi}_r$ возможного значения функционала $\Phi_r(\hat{\delta})$ (когда $\Phi_r^{(\min)} = \bar{\Phi}_r$, но $\Phi_r^{(\max)} < \bar{\Phi}_r$);

2) лишь его нижнюю границу $\bar{\Phi}_r$ (когда $\Phi_r^{(\max)} = \bar{\Phi}_r$, но $\Phi_r^{(\min)} > \bar{\Phi}_r$);

3) сразу обе его границы $\bar{\Phi}_r$ и $\bar{\Phi}_r$ (когда $\Phi_r^{(\min)} > \bar{\Phi}_r$ и $\Phi_r^{(\max)} < \bar{\Phi}_r$).

В каждом конкретном случае выбора функционалов $\Phi_r(\hat{\delta})$ мы можем дать наглядную интерпретацию эффективности гравиметрического эксперимента. Возьмем случай, когда требуется построить отдельные оценки для экстремально возможных значений эффективных плотностей масс, заполняющих парциальные носители. Обозначим через V_1 часть геологического пространства, занятую теми парциальными носителями \hat{S}_k , для которых оказалось справедливым хотя бы одно из неравенств: $\delta_k^{(\max)} < \delta_k^{(2)}$ или $\delta_k^{(\min)} > \delta_k^{(1)}$. Через V_2 обозначим часть пространства, занятую остальными парциальными носителями \hat{S}_k . Теперь решение обратной задачи можно в сжатом виде представить следующим образом:

1. Выделена часть V_1 изучаемого геологического пространства, в пределах которой – при условии адекватности всех предпосылок – возможно *гарантированное* уточнение априорных представлений о предполагаемых границах значений эффективной плотности масс за счет привлечения гравиметрических данных.

2. Оконтурена часть V_2 изучаемого пространства, в пределах которой имеющиеся гравиметрические измерения не позволяют *гарантированно* уточнить априорные сведения о значениях эффективной плотности возмущающих масс.

Еще одно замечание связано с формой реализации гарантированного подхода, отличной от рассмотренной. В этой форме нашел отражение тот факт, что современные технологии интерпретации геопотенциальных полей предусматривают предварительную фильтрацию помех в измерениях, включая и учет регионального фона – решение обратных задач по существу всегда выполняется по сглаженным значениям аномалии. В отношении многих известных алгоритмов фильтрации помех в измерениях уже накоплен достаточно обширный статистический материал, позволяющий эмпирически вывести численное значение показателя их разрешающей способности в виде отношения χ нормы расхождения сглаженного и теоретического полей к норме помехи в измерениях гравитационного поля. Как правило, значение χ *существенно* меньше единицы. Опыт показывает, что даже в неблагоприятных ситуациях значение

χ для адаптивных алгоритмов фильтрации [Страхов, Валяшко, 1977; Валяшко, Страхов, 1984; Страхов, Павленкова, 1988], основанных на достаточно полном учете априорной информации о свойствах помех, редко превышает 0,2–0,3.

Идея состоит в том, чтобы переориентировать постановку обратной задачи с первичных измерений аномалии на данные предварительной обработки этих измерений. Сейчас мы не станем на этом останавливаться, поскольку в развернутом виде эта идея будет представлена в алгоритмах построения прогнозных оценок качества интерпретации, которые предлагаются в предпоследнем разделе главы.

7.3. Структурная обратная задача

Как и в случае линейной обратной задачи гравirazведки, отправной точкой при решении структурных обратных задач в рамках концепции гарантированного подхода является факт существования множества Q вариантов интерпретации, удовлетворяющих всем априорным сведениям, в том числе и допустимому значению невязки наблюденного и модельного полей. При решении структурных обратных задач множество Q может также оказаться довольно широким, и каким бы ни был критерий выбора оптимального решения из этого множества, без эффективной оценки точности информативность его не будет высокой. Здесь также целесообразно ставить вопрос об оценке реальных возможностей гравirazведки в конкретных условиях интерпретации – вне связи с каким-то определенным алгоритмом решения обратной задачи.

Впервые на возможность применения гарантированного подхода при оценке геометрии и пространственного положения финитной контактной границы $z = \hat{\varphi}(x) \geq 0$, $\alpha \leq x \leq \beta$, $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$ по гравиметрическим данным обратила внимание Т.В. Балк [1983]. По аналогии с линейной обратной задачей гравirazведки, гарантированный подход к решению которой был разработан в более ранних публикациях автора [Балк, 1981_{1,2}], схему реализации этого подхода в структурных обратных задачах можно описать в виде следующей цепочки преобразований:

$$G \rightarrow Q \rightarrow \{\Phi_r\} \rightarrow \nu, \quad (7.21)$$

смысл которых состоит в следующем.

1. Совокупные априорные данные о строении плотностной среды преобразуются в информацию G , выраженную в терминах модельного класса M источников поля.

2. Из класса M выделяется (не обязательно в явном виде) множество Q всех вариантов интерпретации, согласующихся с априорными ограничениями и наблюденной аномалией поля.

3. В рассмотрение вводится конечный набор геологически содержательных функционалов Φ_r , $r = 1, 2, \dots, q$, экстремальные значения $\Phi_r^{(\min)}$ и $\Phi_r^{(\max)}$ которых на множестве Q принимаются за результат интерпретации гравитационной аномалии.

4. По значениям $\Phi_r^{(\min)}$ и $\Phi_r^{(\max)}$ вычисляется показатель ν качества результатов интерпретации, причем структура этого показателя задается геофизиком, исходя из геологических целей интерпретации.

Исследованиям, относящимся к применению гарантированного подхода в обратной задаче гравиразведки для границы раздела двух плотностных сред, посвящено не более трех-пяти публикаций. Что же касается практического применения, то опыт изучения структуры отдельных впадин в пределах Байкальской рифтовой зоны [Балк Т. и др., 1988] является, пожалуй, единственным исследованием глубинных границ геологических объектов на основе данных гравиразведки с помощью гарантированного подхода. В этой связи мы не сочли целесообразным – с целью последующего сопоставления различных подходов – останавливаться на известных методах решения структурных обратных задач. Сразу перейдем к изложению особенностей применения гарантированного подхода, причем не с общих позиций, а по результатам его практического использования при интерпретации гравитационного поля одной из впадин Байкальской рифтовой зоны – Тункинской.

Вначале приведем краткую физико-геологическую характеристику этой структуры. Начнем с того, что континентальные рифтовые зоны, в число которых входит и Байкальская, относятся к наиболее активным тектоническим областям и могут рассматриваться в качестве природных полигонов для изучения геодинамических процессов на материках. Одним из параметров, количественно характеризующих эти процессы, является мощность осадков во впадинах, отражающая скорость прогибания кристаллического фундамента. Тункинская кайнозойская впадина проявляется четким минимумом и локальными понижениями гравитационного поля благодаря существенному контрасту в плотностях слаболитифицированных осадков, заполняющих впадину, и подстилающих ее глубоко метаморфизированных и магматических пород преимущественно докембрийского возраста (кристаллический фундамент). Размеры Тункинской впадины по простиранию в несколько раз превышают ее ширину, что позволяет аппроксимировать впадину двухмерным объектом типа линзы, верхняя граница которой совпадает с дневной поверхностью. На коротких профилях вкрест простирания впадины региональный фон достаточно уверенно может быть приближен полиномом первой степени. Плотность пород кристаллического фундамента определяется как средневзвешенная в пределах горного обрамления впадины и принимается постоянной. Эффективная плотность δ рыхлых отложений, по мнению ряда исследователей [Авчан, Озерская, 1968; Фотиади, 1957; Инженерная..., 1968], изменяется

с глубиной z по экспоненциальному закону. По поводу численных коэффициентов имеются незначительные разногласия, вызванные в основном различными представлениями о структурно-текстурных особенностях и минеральном составе осадочных толщ. С учетом классификации характера уплотнения осадков с глубиной, данной Ю.А. Зориным [1971], и результатов исследований, приведенных в статье [Авчан, Озерская, 1968], можно принять, что закон изменения с глубиной эффективной плотности осадочных пород, заполняющих Тункинскую впадину, описывается функцией

$$\delta(z) = -(0,08 + 0,84e^{-0,41z}). \quad (7.22)$$

В силу незначительных перепадов высот рельеф земной поверхности можно считать горизонтальной плоскостью, так что сечение носителя \hat{S} (вкрест простирания впадины) представляет собой область, ограниченную отрезком $[\alpha, \beta]$ оси x и собственно контактной границей $z = \hat{\varphi}(x)$. Целевая задача интерпретации формулируется так: охарактеризовать рельеф нижней границы впадины и предельные глубины ее погружения.

Изучаемую структурную обратную задачу формально можно рассматривать как плоскую обратную задачу рудного типа, в которой гравитационная аномалия обусловлена массами (осадочными породами), заключенными в бесконечнопротяженном носителе с сечением \hat{S} . Такая рудная обратная задача имеет две особенности. Первая выражается в том, что фрагмент границы сечения области \hat{S} , выполненного вкрест ее простирания, априори известен. Вторая особенность заключается в том, что на глубинах $z > 0$ вертикальные прямые в точках $x = x_0$, $x_0 \in [\alpha, \beta]$, пересекают границу носителя возмущающих масс один раз. Эти особенности могут существенно упростить вычислительную схему реализации гарантированного подхода, что наталкивает на мысль о целесообразности решать поставленную задачу именно как рудную, в которой, по сути, оцениваемой является нижняя кромка возмущающего объекта.

В качестве модельного класса M источников поля, элементами которого аппроксимируется осадочная толща, в работе [Балк Т. и др., 1988] выбран «пакет» бесконечно протяженных (вдоль оси y) прямоугольных призм Ω_k , $k = 1, 2, \dots, K$. Число призм и координаты $x = \alpha_{k-1}$ и $x = \alpha_k$, $k = 1, 2, \dots, K$ ($\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_K = \beta$) их боковых граней были выбраны в соответствии с предположением о степени гладкости контактной границы. Свободным параметром в описании каждой из призм Ω_k является глубина h_k залегания ее нижней грани. Если вернуться к терминологии структурных обратных задач, то в качестве модельного класса M контактных границ здесь выступает семейство кусочно-постоянных функций $\Gamma(h; x)$, $h = (h_1, h_2, \dots, h_K)$, где $h_k \geq 0$ для всех k .

В результате первичной обработки измерений был снят линейный фон. Учитывая погрешность съемки и введенную поправку за неадекватность модели, есть основания считать, что модуль разности остаточной аномалии и

истинного поля $\Delta\hat{g}(x_i)$ в каждой точке x_i не превосходит $\varepsilon = 0,8$ мГал. Если взять одно только это условие, то множество допустимых решений обратной задачи суть

$$Q = \{h : |\Delta\tilde{g}(x_i) - \Delta g(x_i; h)| \leq \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n\}, \quad (7.23)$$

где $\Delta g(x; h)$ – модельное гравитационное поле. Теоретически в постановке задачи могли бы присутствовать двусторонние ограничения $\bar{z}_k \leq h_k \leq \bar{\bar{z}}_k$ на минимально и максимально допустимые глубины погружения нижних граней h_k призм Ω_k , ограничения на максимально допустимые разности $|h_{k+1} - h_k|$ погружения соседних призм (как отражение каких-то косвенных данных и гипотетических предположений о степени гладкости границы $\hat{\varphi}(x)$), а также ограничение, обусловленное информацией о наличии у функции $\hat{\varphi}(x)$ единственного локального (он же глобальный) минимума. В данном практическом примере информация, которая могла бы позволить ввести такие ограничения, отсутствовала.

При изучении морфологии подошвы осадочной толщи, гарантированный подход может предложить в качестве решения обратной задачи *внутреннюю* $\Gamma^{(\min)}(x)$ и *внешнюю* $\Gamma^{(\max)}(x)$ *огигающие* семейства допустимых контактных границ:

$$\Gamma^{(\min)}(x) = \min\{\Gamma(h, x) : h \in Q\}, \quad x \in [\alpha, \beta]; \quad (7.24)$$

$$\Gamma^{(\max)}(x) = \max\{\Gamma(h, x) : h \in Q\}, \quad x \in [\alpha, \beta], \quad (7.25)$$

соответственно. В случае, когда расстоянием от функции $\hat{\varphi}(x)$ до множества Q можно пренебречь, *огигающие* (7.24) и (7.25) задают наилучшую двухстороннюю оценку для истинной контактной границы:

$$\Gamma^{(\min)}(x) \leq \hat{\varphi}(x) \leq \Gamma^{(\max)}(x), \quad x \in [\alpha, \beta]. \quad (7.26)$$

Интерпретация в терминах *огигающих* (7.24) и (7.25) эквивалентна интерпретации в терминах минимально и максимально возможных значений $h_k^{(\min)}$ и $h_k^{(\max)}$ глубин h_k залегания нижних кромок призм Ω_k , $k = 1, 2, \dots, K$. Разности

$$v_k = h_k^{(\max)} - h_k^{(\min)}, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (7.27)$$

могут служить оценками достоверности восстановления соответствующих фрагментов контактной границы любым алгоритмом, ориентированным на единичное оптимальное решение обратной задачи. При этом следует иметь в виду, что пары $\langle h_k^{(\min)}, h_k^{(\max)} \rangle$ являются *раздельными* оценками глубин погружения контактной границы в соответствующих участках $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$. Иначе говоря, все допустимые границы раздела двух плотностных сред лежат в «полосе», ограниченной двумя *огигающими* $\Gamma^{(\min)}(x)$ и $\Gamma^{(\max)}(x)$, но не всякая ку-

сочно-постоянная функция, чей график лежит в этой «полосе» (тем более обе огибающие), является допустимым решением обратной задачи.

В иных случаях, где у интерпретатора будет возможность назначить минимально и максимально возможные значения \bar{z}_k и $\bar{\bar{z}}_k$ погружения контактной границы на каждом из интервалов $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$, показателем v разрешающих способностей гравиразведки, предлагается вектор v с компонентами

$$v_k = 1 - \frac{h_k^{(\max)} - h_k^{(\min)}}{\bar{\bar{z}}_k - \bar{z}_k}, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (7.28)$$

Собственно процедуру построения огибающих $\Gamma^{(\min)}(x)$ и $\Gamma^{(\max)}(x)$ можно свести к решению K пар однотипных (парциальных) задач минимизации и максимизации переменной h_k при ограничениях-неравенствах

$$|\Delta \tilde{g}(x_i) - \Delta g(x_i; h)| \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.29)$$

Параметры h_k входят в функцию $\Delta g(x; h)$ нелинейно. Соответственно, нелинейными являются и экстремальные задачи. Поскольку более трудоемкие методы минимизации высокого порядка все равно не в состоянии решить проблему глобального экстремума, есть смысл воспользоваться более простыми безградиентными методами прямого поиска экстремально допустимых значений глубин h_k залегания отдельных фрагментов контактной границы. В работе [Балк Т. и др., 1988] каждую из этих задач предлагалось свести к сумме конечного числа более простых условно-экстремальных задач. Здесь есть несколько возможностей, среди которых – использование метода локальных поправок [Пруткин, 1986] и методов, реализующих концепцию монтажного подхода.

Приведем алгоритм определения значений $h_k^{(\min)}$, $h_k^{(\max)}$, близкий к тому, что использован в статье [Балк Т. и др., 1988], и основанный на идеях монтажного подхода. Прежде всего выполним нерегулярное замощение пространственной области

$$S = \{(x, y, z) : \alpha \leq x \leq \beta, |y| < \infty, z > 0\} \quad (7.30)$$

призмами

$$V_{r,t} = \{(x, y, z) : \alpha_{r-1} \leq x \leq \alpha_r, |y| < \infty, (t-1)h_z \leq z \leq th_z\}, \quad (7.31)$$

где $r = 1, 2, \dots, K$, $t = 1, 2, \dots$. Вообще говоря, можно повысить степень нерегулярности замощения, когда вертикальная мощность h_z каждой из призм (7.31) зависит и от k , и от t . На основе этого замощения с помощью приемов, используемых при решении обратных задач рудного типа монтажным методом, построим любое допустимое решение обратной задачи $\Omega^{(0)}$. По сути, носитель $\Omega^{(0)}$, вмещающий в себя осадочные породы, будет представлять собой объеди-

нение K бесконечнопротяженных горизонтальных призм Ω_k , координаты $h_k^{(0)}$ нижних граней которых задают одну из допустимых границ $\Gamma(h^{(0)}, x)$ раздела двух плотностных сред. При построении внешней огибающей $\Gamma^{(\max)}(x)$ семейства допустимых границ необходимо для каждого $k = 1, 2, \dots, K$ (опять же, с помощью монтажного метода) организовать поиск допустимых решений $h = (h_1, h_2, \dots, h_K)$, обладающих тем свойством, что глубина погружения (фиксированной) нижней грани призмы Ω_k больше на величину h_z той, что была достигнута в предыдущем допустимом решении. В первом из искомым допустимых решений принимается $h_k = h_k^{(0)} + h_z$. Аналогично поступаем при построении внутренней огибающей $\Gamma^{(\min)}(x)$.

Расчеты, выполненные для Тункинской впадины, показали, что в данных гравиметрических измерений содержится информация, достаточная для уверенного определения флангов плотностной границы между осадочными породами и кристаллическим фундаментом (рис. 7.1). С точностью до заранее оговоренной ошибки аппроксимации истинной границы раздела модельной

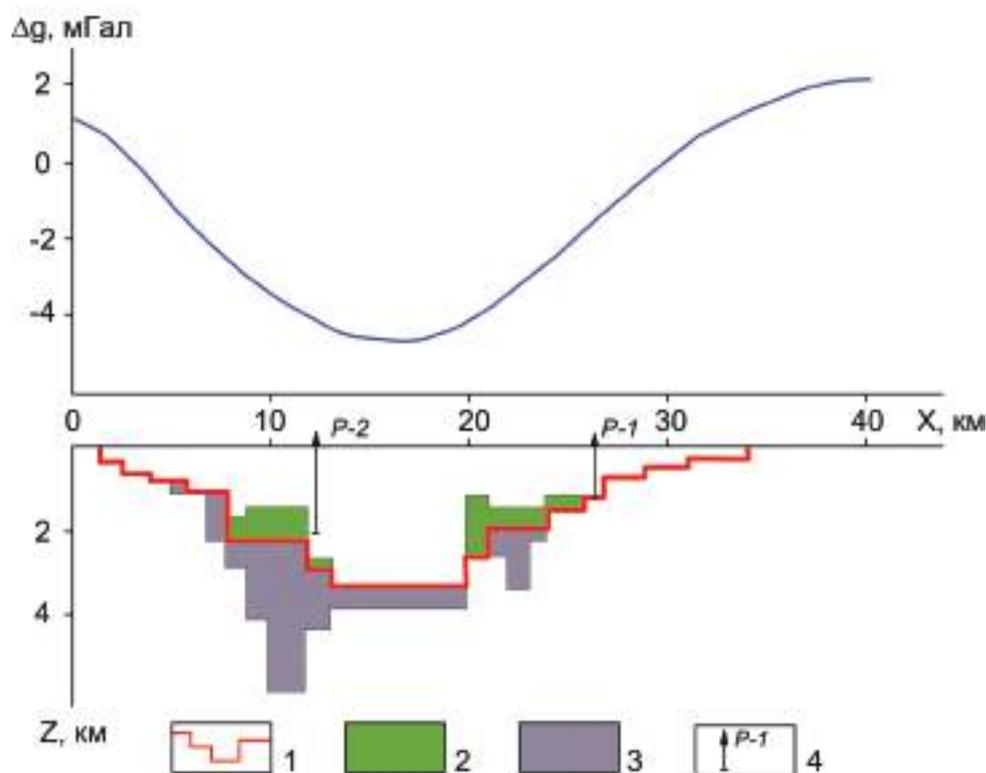


Рис. 7.1. Результаты применения гарантированного подхода к решению структурной обратной задачи. Тункинская впадина: 1 – контактная граница, отвечающая минимуму невязки среди всех допустимых границ; 2, 3 – область, заключенная между огибающими допустимого множества контактных границ; 4 – скважины, их номера.

границей (она не превышала 200 м) внешняя и внутренняя огибающие семейства допустимых границ совпали на флангах с границей, отвечающей минимуму среднего значения модуля невязки поля.

Независимо от выводов, которые следуют из результатов интерпретации, надежность оценивания глубин контакта на периферийных участках была подтверждена данными бурения в Тункинской долине (скважина Р-1). Как и следовало ожидать, проявление приближенной эквивалентности, присущей обратным задачам гравиразведки, усиливается по мере приближения к участкам более глубокого залегания фундамента – разброс допустимых глубин погружения каждой отдельной призмы V_k , совокупностью которых аппроксимируется осадочная толща, начинает доходить здесь до нескольких километров. Из этого следует вывод: в гравитационном поле нет информации, позволяющей надежно оценить диапазон возможных глубин погружения контактной границы в ее центральной части. Реалистичность полученных оценок глубин залегания изучаемых границ подтвердила скважина Р-2. Пройденная до отметки 2100 м, она пересекла «оптимальную» границу, но фундамент так и не встретила.

Столь разительному отличию достижимой точности оценки глубины залегания подошвы осадочных пород на флангах от точности оценки глубины их погружения в эпицентральной части, несомненно, способствовал и выбор горизонтальных размеров призм V_k . Согласно гипотезе об относительно спокойном рельефе различных участков дна впадины, горизонтальные размеры призм V_k различны; наиболее узкие из них были помещены под градиентными зонами графиков силы тяжести.

Без привлечения в постановку задачи требования гладкости решения приближенная эквивалентность приводит к возможности неограниченного заглабления одной из центральных призм V_k , при котором можно оставаться в пределах допустимого множества решений. Качественно этот феномен легко объяснить резким ослаблением гравитационного влияния глубоких горизонтов осадочной толщи. Геологически такой результат можно истолковать как существование под впадинами ослабленных вертикальных зон (хотя некоторые исследователи Байкальской рифтовой зоны подобную гипотезу не разделяют).

7.4. Рудная обратная задача

Изложение материала данной главы построено по принципу «от простого к сложному» и, как мы уже предупреждали, не согласуется с хронологией внедрения идеи гарантированного подхода в различные классы обратных задач гравиразведки и магниторазведки. Напомним, что впервые эта идея была высказана в работе [Балк, 1980,] в связи с анализом недостатков существующих методов решения рудной обратной задачи гравиразведки. В той или иной сте-

пени проблематике гарантированного подхода в обратных задачах рудного типа было посвящено больше всего публикаций. Вот лишь несколько из них: [Балк, 1980₂, 2000, 2001, 2002; Балк и др., 1982, 2012₂, 2015₂; Долгаль и др., 2012].

Точно так же, как в линейной и структурной обратных задачах, в задачах рудного типа гарантированный подход использует принципиально отличные от известных математические формы представления результатов интерпретации. Эти представления отражают объективный факт существования множества Q допустимых вариантов интерпретации, удовлетворяющих полю и всей имеющейся априорной информации. В рудной постановке дополнительно понадобилось внести принципиальные новшества в определение единичного приближенного решения обратной задачи. Вместо оценки параметров модели источников аномалии за единичное допустимое решение обратной задачи гравиразведки предлагается принять приближенную оценку *геометрического места точек*, образующих носитель возмущающих масс – область \bar{S} , которая занята источниками поля. Необходимость в таком определении вызвана даже не тем, что, в конечном итоге, интерес представляет область \bar{S} , а не приближенные оценки параметров модели. Главное в том, что традиционное определение решения обратной задачи рудного типа и предложенную трактовку единичного приближенного решения лишь формально можно считать эквивалентными. Располагая приближенными оценками параметров модели, не так уж просто трансформировать их в геометрическое место точек, занятых возмущающими массами, даже если известна точность этих оценок.

В плане применения концепции гарантированного подхода обратным задачам рудного типа в некотором смысле «повезло». В отличие от обратных задач, возникающих во многих прикладных научных областях, где целевым объектом являются параметры модели исследуемого объекта (процесса), в геофизике оценки параметров модели источников поля не могут считаться единственно возможной математической формой представления результатов интерпретации. Вслед за работой [Балк, 1980₁], это было подмечено, в частности, в работе [Рокитянский, 1985]. В связи с новой трактовкой понятия единичного приближенного решения обратной задачи рудного типа элементами множества Q удобнее считать не векторы параметров модели источников, а пространственные (в общем случае многосвязные) области S^* , содержащие эти источники.

7.4.1. Постановка обратной задачи в рамках гарантированного подхода

Прежде всего договоримся, что и при обсуждении природы точного решения обратной задачи \bar{S} , и в отношении приближенного модельного решения S^* понятия «геологическое тело», «носитель возмущающих масс» и «область, занятая источниками поля» мы будем для удобства считать эквивалентными

и в зависимости от контекста пользоваться любым из них. Несмотря на то, что в математике под областью принято считать открытое множество некоторого пространства, мы будем пользоваться этим понятием и в отношении замкнутых множеств (на практике нет смысла различать множества, отличающиеся друг от друга на фрагмент нулевой меры). Кроме того, в каких-то случаях более наглядно считать взаимонепересекающимися две замкнутые области пространства, имеющие общими лишь граничные точки.

В задачах рудного типа гарантированный подход, так же как в линейной и структурной обратных задачах, исходит из того, что возмущающий объект принадлежит модельному классу M источников поля. Предполагается также, что вся априорная информация об источниках поля выражена в терминах структурных элементов модельного класса M . В нашем случае к ней относятся, в частности, ограничения на геометрию и пространственное положение источников аномалии, предположение о степени гладкости границы носителя и уровне помех в измерениях поля. Принадлежность истинного решения обратной задачи модельному классу служит предпосылкой тому, что при адекватности априорной информации истинное решение \hat{S} обратной задачи принадлежит множеству Q допустимых вариантов интерпретации.

На практике, однако, мы вынуждены считаться с тем, что точное решение \hat{S} обратной задачи является, вообще говоря, элементом функционального пространства. Во всяком случае, точное решение не обязано принадлежать выбранному классу M , если модель источников описывается конечным числом параметров. Универсальный выход из такого противоречивого положения существует, и мы к нему уже прибегали. Он состоит во введении в рассмотрение некоторого «опорного» элемента S^0 из модельного класса M , являющегося наилучшей аппроксимацией истинного решения \hat{S} . Этот элемент, как, впрочем, и само истинное решение обратной задачи \hat{S} , останется неизвестным, но здесь важен сам факт его существования. Если в предполагаемое значение нормы суммарной помехи в измерениях аномалии внести поправку за расхождение полей истинного решения обратной задачи и «опорного», и в последующем это подправленное значение нормы помехи считать за допустимое, то элемент S^0 войдет в множество Q . Тем самым будут созданы необходимые предпосылки к использованию гарантированного подхода.

Разумеется, говоря о близости по полю двух распределений источников поля, мы рассматриваем носители совместно с известными значениями физического параметра – плотности, намагниченности масс, заполняющих эти носители. При хороших аппроксимативных свойствах модельного класса M расхождение между носителями \hat{S} и S^0 можно не брать в расчет, считая их практически эквивалентными. Тем более, можно пренебречь и упомянутой выше поправкой к норме помехи, хотя мы на этом не настаиваем. Важно одно: не входя в противоречие со здравым смыслом, рудную обратную задачу мож-

но рассматривать не по отношению к носителю \hat{S} , а по отношению к «опорному» носителю S^0 . И при этом не возвращаться более к вопросу об отсутствии математически строгой адекватности модельного класса M особенностям (реального) возмущающего объекта. Для удобства можно оставить за «опорным» носителем обозначение \hat{S} и термин «истинное решение обратной задачи», что мы в дальнейшем и сделаем.

В работе [Балк, 1980₁] рассматривалась обратная задача гравиразведки, в которой аномалия Δg обусловлена объединением (группой) геологических тел $\hat{S}_k, k = 1, 2, \dots, m$, эффективная плотность $\hat{\delta}_k = const$ каждого из которых считается известной. Такого рода модель источников поля в виде многосвязного распределения \hat{S} масс по локальным парциальным носителям \hat{S}_k неоднократно использовалась до того во многих работах геофизиков. Как правило, особенность каждой новой из предлагаемых постановок заключалась в наборе используемых априорных ограничений, метрике приближения наблюдаемого поля, либо в выбранном методе решения условно-экстремальной задачи. В этот раз новизна заключалась в том, что за результат интерпретации гравитационной аномалии вместо стандартной (оптимальной) оценки $S_k^* \in M$ каждого из локальных тел \hat{S}_k предлагались m пар областей $\langle D_1^{(k)}, D_2^{(k)} \rangle$ ($D_1^{(k)}, D_2^{(k)} \subset \mathbf{R}^2$ – в плоской обратной задаче, $D_1^{(k)}, D_2^{(k)} \subset \mathbf{R}^3$ – в трехмерной), имеющих следующий смысл.

Множества $D_1^{(k)}$ есть *минимальные* области, которые при соблюдении адекватности интерпретационной модели *гарантированно* содержат неизвестные парциальные носители \hat{S}_k . В развернутом виде свойство *минимальности* областей $D_1^{(k)}$ выражается в следующем. Каждая область $D_1^{(k)}$ не содержит точек, которые не принадлежали бы соответствующему парциальному носителю S_k^* , входящему хотя бы в одно из допустимых решений S^* . Поэтому каждая из точек области $D_1^{(k)}$ может оказаться точкой соответствующего парциального носителя \hat{S}_k . Кроме того, любое сужение области $D_1^{(k)}$ до некоторой области $\bar{D}_1^{(k)} \subset D_1^{(k)}$ (в необоснованном стремлении завязать возможности гравиразведки) нарушает гарантию выполнения условия $\hat{S}_k \subset D_1^{(k)}$. В этом случае отыщется допустимое решение S^* , в котором парциальному носителю S_k^* будет принадлежать некий фрагмент пространства (пусть довольно малый), лежащий вне области $\bar{D}_1^{(k)}$, и мы не сможем гарантировать, что это допустимое решение и есть неизвестный истинный носитель \hat{S} . Свойство *минимальности* предполагает также, что каждая точка вне области $D_1^{(k)}$ принадлежит парциальному носителю S_k^* , не входящему ни в какой из допустимых носителей S^* .

Множества $D_2^{(k)}$ – есть *максимальные* области, которые, опять же, при соблюдении адекватности всех элементов интерпретационной модели, *гарантированно* являются фрагментами соответствующих парциальных носителей \hat{S}_k . В развернутом виде свойство *максимальности* каждой из областей $D_2^{(k)}$ состоит в следующем. Парциальный носитель S_k^* , который входит в любое из допусти-

мых решений S^* , содержит как фрагмент область $D_2^{(k)}$. Таким образом, область $D_2^{(k)}$ является и фрагментом истинного парциального носителя \widehat{S}_k , коль скоро мы договорились считать \widehat{S} элементом множества \mathcal{Q} . Кроме того, любое расширение области $D_2^{(k)}$ до некоторой области $\overline{D}_2^{(k)} \supset D_2^{(k)}$ (все с тем же желанием видеть реальные возможности гравиразведки в данных условиях интерпретации более широкими) чревато, в конечном счете, нарушением условия $D_2^{(k)} \subset \widehat{S}_k$.

В силу отмеченных свойств области $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, m$, логично называть (неулучшаемыми) *гарантирующими* областями. Одна из них ($D_1^{(k)}$) содержит связный парциальный фрагмент носителя возмущающих масс, а другая ($D_2^{(k)}$) является его фрагментом. Важно уяснить, что сами области

$$D_i = \bigcup_{1 \leq k \leq m} D_i^{(k)}, \quad i = 1, 2 \quad (7.32)$$

не являются допустимыми решениями обратной задачи. В этом состоит одна из основных особенностей гарантированного подхода.

Сейчас уместно вспомнить о понятиях *скрытой достоверной, потерянной и ложной* информации, которые мы ввели в первой главе монографии в связи с обоснованием дефектности привычных форм представления результатов интерпретации. Читатель легко заметит, что с точки зрения этих понятий предложенная нами математическая форма представления результатов интерпретации выглядит более выигрышной.

С каждым значением k связано свое разбиение R_k пространства на три области: $D_2^{(k)}$, $D_1^{(k)} \setminus D_2^{(k)}$, $\mathbf{R}^3 \setminus D_1^{(k)}$.

Содержательный смысл областей $D_2^{(k)}$ мы установили. Не исключено, что некоторые из них совпадут с областями пространства, заведомо являющимися по априорной информации фрагментами тел \widehat{S}_k . В подобных случаях гарантированный подход находит, что гравиметрические измерения не несут информации, которая позволила бы *достоверно* установить новые, до того неизвестные фрагменты тел \widehat{S}_k .

Разность $D_1^{(k)} \setminus D_2^{(k)}$ – область неопределенности, каждую точку которой при имеющемся объеме информации невозможно однозначно идентифицировать на предмет принадлежности (непринадлежности) парциальному носителю \widehat{S}_k . Лебеговы меры областей $D_1^{(k)} \setminus D_2^{(k)}$ характеризуют степень проявления приближенной эквивалентности по отношению к задаче оценивания геометрии и пространственного положения локальных компонент \widehat{S}_k источников аномалии при данном объеме априорных данных в рамках принятой модели источников поля.

Внешность каждой области $D_1^{(k)}$ состоит из точек, гарантированно не принадлежащих парциальному носителю \widehat{S}_k (повторим в какой уже раз – при полной адекватности реальности всех элементов интерпретационной моде-

ли). Заметим, что отдельные пространственные области $D_1^{(k)}$ могут иметь непустые пересечения друг с другом. Ситуация, при которой существует непустая область $D_1^{(k1)} \cap D_1^{(k2)}$, означает, что среди элементов множества Q найдется хотя бы одна пара (обозначим их как S_β^* и S_γ^*) таких, что эта область одновременно является фрагментом парциального носителя $S_{\beta,k(1)}^*$ с номером $k(1)$ и парциального носителя $S_{\gamma,k(2)}^*$ с номером $k(2)$. По отношению к истинному распределению масс это говорит о том, что каждая точка такой области может оказаться точкой любого из двух соответствующих парциальных (природных) носителей. При сложной модели источников поля и высокой степени проявления приближенной эквивалентности по полю не исключена ситуация, когда некоторая область пространства может являться фрагментом более чем двух парциальных носителей с попарно различными номерами, принадлежащими различным допустимым решениям рудной обратной задачи гравиразведки. Может оказаться, что – даже при сравнительно большом числе m связных парциальных носителей \widehat{S}_k – область D_1 окажется, тем не менее, связной.

Остается главный вопрос: каким образом можно построить гарантирующие области $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$.

В случае применения гарантированного подхода в линейных обратных задачах гравиразведки вопрос о построении *в явном виде* сколь-нибудь большого (причем заранее не известного) числа отдельных допустимых решений не возникал. Специфика математических форм представления результатов интерпретации, равно как и линейный характер используемых ограничений, позволял обойтись решением сравнительно небольшого (причем априори известного!) числа простейших условно-экстремальных задач. В них достигнутые значения минимизируемого функционала и были теми инвариантами на множестве Q , которые могли заинтересовать интерпретатора. Хотя решение каждой такой экстремальной задачи достигалось на некоторых допустимых вариантах интерпретации, последние впоследствии не играли особой роли. Во всяком случае, эти решения не выдавались за какие-то оптимальные решения обратной задачи.

Однако уже в случае структурной обратной задачи искомые инварианты приходилось вычислять, используя предварительно построенные для этой цели допустимые решения обратной задачи. Причем число допустимых решений, достаточных для реализации гарантированного подхода, заранее известно не было.

Исходя из опыта решения структурной обратной задачи можно догадаться, что при реализации гарантированного подхода в рудных задачах без построения достаточно внушительного набора допустимых решений (носителей) не обойтись. И такие решения, в силу их массовости, не могут быть построены иначе как в *полностью автоматическом* режиме. Учитывая проведенный ранее анализ возможностей использования различных модельных классов в

автоматизированных методах решения рудной обратной задачи при наличии разнородной априорной информации, можно с уверенностью сказать, что единственно подходящими здесь являются конечноэлементные классы источников поля. Особо подчеркнем – при условии, что в качестве рабочего инструмента построения единичных допустимых решений обратной задачи будут выбраны монтажные алгоритмы либо их какие-то аналоги. При этом можно будет использовать богатый опыт работы с этими алгоритмами в рамках концепции подбора (главы 3–5), включая формализацию априорных ограничений в терминах структурных элементов конфигурационных моделей.

Прежде чем приступить к поиску конструктивного метода построения системы областей $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, m$, необходимо установить, как эти области связаны со структурой множества Q допустимых решений обратной задачи. Если между ними будут найдены какие-то связи, то необходимо будет отобрать наиболее надежную из них. В понятие «конструктивный метод» мы будем вкладывать следующий смысл: метод допускает декомпозицию, при которой построение каждой из областей $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$ сводится к некоторым *однотипным* задачам, число которых практически обозримо и несравнимо меньше числа допустимых вариантов интерпретации. Надежность построений мы связываем с ответом на вопрос: в какой мере можно рассчитывать, что построенные с помощью предлагаемого алгоритма области $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$ действительно удовлетворяют включениям

$$D_2^{(k)} \subset \widehat{S}_k \subset D_1^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (7.33)$$

Реализация гарантированного подхода в рудной постановке обратной задачи должна начинаться с задания некоей ограниченной области D пространства, заведомо содержащей все источники наблюдаемого гравитационного поля. Если есть возможность подойти к этому вопросу дифференцированно, то, безусловно, лучше располагать областями, наверняка содержащими каждый из парциальных носителей \widehat{S}_k в отдельности. Далее интерпретатор должен задаться некоторым замощением $V = \{V_i\}$ области D , обеспечивающим существование *опорного* конфигурационного носителя $\Omega^{(0)}$, мера близости которого к неизвестному истинному носителю \widehat{S} возмущающих масс такова, что его можно считать практически эквивалентным носителю \widehat{S} . Напомним, что носитель $\Omega^{(0)}$ в таких случаях остается неизвестным, но важен лишь сам факт его существования. Множество Q конфигурационных носителей (допустимых решений обратной задачи) $\Omega_r^* = (\Omega_{r,1}^*, \Omega_{r,2}^*, \dots, \Omega_{r,m}^*)$ является при такой параметризации *конечным*. Это, кстати, позволяет для нумерации носителей использовать не греческие, а латинские буквы – как принято в подобных случаях – и ввести в рассмотрение число $n = |Q|$ элементов множества Q .

Приступим непосредственно к обсуждению проблемы достоверности построений. Начнем с того, что каждая конфигурационная область $D_1^{(k)}$ $k =$

$1, 2, \dots, m$, совпадает с объединениями парциальных носителей $\Omega_{r,k}^*$, входящих во все допустимые носители Ω_r^* , а множества $D_2^{(k)}$ совпадают с пересечениями парциальных носителей $\Omega_{r,k}^*$, входящих, опять же, во все допустимые носители $\Omega_r^* \in Q$. Взять отношения

$$\bigcup_{r=1}^n \Omega_{r,k}^* = D_1^{(k)}, \quad \bigcap_{r=1}^n \Omega_{r,k}^* = D_2^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (7.34)$$

за основу при разработке конструктивного алгоритма построения областей $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$ мы не можем ввиду пусть и конечного, но чрезвычайно большого числа n допустимых решений, составляющих множество Q . Вместе с тем, к проблеме можно подойти с другой стороны.

Суть в том, что теоретически для построения гарантирующих областей достаточно располагать сравнительно небольшим, но специально подобранным подмножеством допустимых решений. В самом деле, при построении областей $D_1^{(k)}$ речь идет, в конечном счете, об идентификации каждого элемента V_t замощения $\{V_t\}$ области D на предмет его возможной принадлежности ядру парциального носителя хотя бы в одном из допустимых модельных носителей Ω_r^* . Таким образом, необходимо выполнить следующее:

1) подобрать для каждого элемента замощения V_t «свой» допустимый носитель $\Omega_r^*(t)$, ядро которого содержит этот элемент, в случае если хотя бы один такой допустимый носитель существует (понятно, что отдельные группы элементов замощения смогут обойтись одним и тем же допустимым носителем);

2) если для некоторых элементов замощения V_t монтажный метод не смог выйти на допустимый носитель, ядро которого содержало бы элемент, можно сделать вывод, что таких носителей нет – в тех случаях, когда их в действительности не существует.

Если это удастся, мы достигнем желаемого результата.

При построении областей $D_2^{(k)}$ речь идет об идентификации элементов замощения на предмет принадлежности ядер соответствующих парциальных носителей, входящих во все допустимые носители Ω_r^* .

Число задач, которые придется решить, вполне определено, и главное – сравнительно невелико. Но без конкретизации того, как выполнить такую идентификацию, проблема остается открытой.

Пойдем дальше. Равенства (7.34) не означают, что иных представлений для искомым гарантирующих областей нет. Теперь уже очевидно, что множество Q содержит в большом количестве достаточно узкие семейства носителей Ω_r^* , таких, что объединения и пересечения составляющих их парциальных носителей $\Omega_{r,k}^*$ также совпадают с искомыми множествами $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$, тогда как все оставшиеся носители из множества Q являются по отношению к элементам из Q_0 не результативными. Факт существования подмножеств Q_0 с таким свойством приобретает кардинальное значение. Именно его мы попытаемся ис-

пользоваться в алгоритме построения областей $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$. Таким образом, речь идет о том, чтобы обойти проблему построения всех допустимых решений обратной задачи, сведя ее к поиску *любого одного* из подмножеств Q_0 .

При самом оптимистичном прогнозе относительно минимального числа допустимых носителей Ω_r^* , которых должно оказаться достаточно для построения надежных оценок пространственных областей $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$ (во всяком случае, при построении области $D_1^{(k)}$ их понадобится меньше, чем n), без *полностью автоматизированных* методов поиска единичных допустимых решений обратной задачи не обойтись. Но сейчас мы хотели бы акцентировать внимание на том, что такие методы должны сами, без помощи извне, формировать различные нулевые приближения к искомым решениям, чтобы каждый раз выходить на новые допустимые варианты интерпретации. Для этого, в свою очередь, необходимо, чтобы в выбранном методе нулевое приближение служило механизмом, запускающим итерационный процесс, и не претендовало на близость к истинному решению – ни по геометрии, ни по полю. Не будет лишним напомнить, что такое послабление к выбору нулевого приближения идет вразрез с обычными требованиями к нему, которые предъявляют известные методы подбора. В обратных задачах геофизики удачный выбор нулевого приближения – это, как правило, залог успешного решения задачи [Яновская и др., 2018]. Монтажные алгоритмы, которые мы рекомендуем в качестве рабочего инструмента гарантированного подхода, свободны от жестких требований к нулевому приближению.

В завершение данного подраздела остановимся еще на одном важном моменте, который придется учесть при конструировании алгоритма построения гарантирующих областей. Отсутствие возможности визуализации построенных допустимых решений заставляет еще раз вернуться к идее опорных решений, озвученной в начале изложения концепции гарантированного подхода. Прием с опорным решением обратной задачи, позволяющий, не нарушая *практической общности* задачи, перейти от функциональной постановки к конечномерной, в современной теории интерпретации потенциальных полей явно недооценен. Мы уже не говорим о том, что этот прием может быть положен в основу решения проблемы выбора параметрической размерности модели источников аномалии – одной из наименее проработанных в теории интерпретации потенциальных полей. Суть в том, что априорная информация об источниках интерпретируемого поля – это, как правило, *необходимые*, но еще не *достаточные* условия, которым должно удовлетворять геологически содержательное приближенное решение обратной задачи. Другими словами, априорные ограничения устанавливаются, какими свойствами допустимое решение должно обладать *в обязательном порядке*. Но этих ограничений не достаточно. Свойства решения, противоположные обязательным, не исчерпывают всех тех особенностей, которые, с точки зрения интерпретатора, геологически содержательные решения

не должны иметь. Такие особенности довольно скрытны и обнаруживаются лишь после ознакомления с построенным решением. Конечно, если речь идет о методе подбора и единственном (оптимальном) решении, еще не все потеряно, и можно организовать новый цикл вычислений, добавив какие-то новые ограничения к прежним. При необходимости такую процедуру можно повторить несколько раз. В случае использования диалоговых систем моделирования названную проблему, вообще, можно снять с повестки. Но совсем иное дело, когда необходимо построить сотни, а возможно и тысячи допустимых вариантов интерпретации, визуализация которых физически невозможна. В этом случае в построенное подмножество Q_0 де-факто несанкционированно могут попасть недопустимые (по существу!) решения обратной задачи, что приведет к уменьшению информативности результатов интерпретации. На наш взгляд, прием с опорным решением хотя и не позволяет полностью избежать подобных эксцессов, но все же является мощным средством автоматического отсеивания большей части такого рода «скрытых» малосодержательных распределений источников поля, формально отвечающих априорным ограничениям.

7.4.2. Алгоритм построения гарантирующих пространственных областей

Будем исходить из того, что читатель ознакомился с содержанием предыдущих глав монографии, в которых раскрывается суть монтажных методов поиска допустимых решений обратных задач гравиразведки и приводится список типов априорной информации, учет которой доступен этим методам. Напомним, что монтажные методы заявлены нами как основной рабочий инструмент для решения рудной обратной задачи в терминах гарантирующих областей $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$. Напомним также (это вскоре понадобится), что в упомянутом списке в качестве *обязательной* информации фигурируют области S_k^+ , являющиеся фрагментами носителей \hat{S}_k . Непосредственно монтажные алгоритмы работают с конфигурационными аппроксимациями Ω_k^+ заданных областей S_k^+ .

Алгоритм построения гарантирующих областей $D_1^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, m$. За отправную точку возьмем, как оговаривали выше, факт существования довольно узких репрезентативных подмножеств $Q_0 \subset Q$ допустимых решений обратной задачи, анализ которых может подменить анализ всего множества Q . Соответственно, общая задача алгоритма заключается в обнаружении (де-факто) одного из таких подмножеств по результатам поиска допустимых решений обратной задачи. Если это удастся, найденных решений окажется достаточно для построения гарантирующих областей $D_1^{(k)}$.

Алгоритм представляет собой конечную – по числу m парциальных носителей – цепочку идентичных друг другу и последовательно выполняемых ите-

рациональных процессов A_k , $k = 1, 2, \dots, m$, каждый из которых отвечает, строго говоря, лишь за построение соответствующей области $D_1^{(k)}$. Впрочем, это не мешает итерационному процессу A_k попутно, без ущерба выполнению основной задачи вносить свой вклад в построение «чужих» областей $D_1^{(s)}$, $s \neq k$. Итерационные процессы A_k активно используют тот факт, что области $D_1^{(k)}$ – как объединения конечного числа *связных* парциальных носителей, имеющих общий связный фрагмент Ω_k^+ – также являются *связными*. Каждый итерационный процесс A_k сводится к построению некоторой подсистемы Σ_k допустимых модельных носителей $\Omega_{r(k,i)}^*$, $i = 1, 2, \dots, n(k)$, которые *в принципе* достаточны для построения области $D_1^{(k)}$. В свою очередь, поиск каждого допустимого носителя $\Omega_{r(k,i)}^*$ осуществляется с помощью одной из подходящих версий монтажного метода, обеспечивающей учет всех априорных ограничений. Число $n(k)$ допустимых носителей, которые будут построены с помощью каждого итерационного процесса A_k , устанавливается лишь апостериори, по завершению этого процесса. Окончательно каждая область $D_1^{(k)}$ будет построена на основании $n(k)$ допустимых носителей $\Omega_{r(k,i)}^*$, найденных с помощью итерационного процесса A_k , и некоторых допустимых носителей $\Omega_{r(s,i)}^*$, найденных с помощью других итерационных процессов A_s , $s \neq k$.

Объединив эти подсистемы, можно будет по завершении работы алгоритма сказать, что в процессе построения обнаружено одно из репрезентативных подмножеств

$$Q_0 = \left\{ \left\{ \Omega_{r(k,i)}^* \right\}_{i=1}^{n(k)} \right\}_{k=1}^m. \quad (7.35)$$

Основные вычисления, непосредственно касающиеся построения конкретной области $D_1^{(k)}$, производятся в ходе соответствующего итерационного процесса A_k . Попытка же уточнения каждого последующего приближения ко всем искомым гарантирующим областям $D_1^{(s)}$ осуществляется по мере отыскания любым из итерационных процессов A_k какого-то нового, i -го допустимого решения $\Omega_{r(k,i)}^*$ обратной задачи. Элементы замощения из ядра s -го парциального носителя $\Omega_{r(k,i),s}^*$, входящего в найденный итерационным процессом A_k (i -ым по счету) допустимый носитель $\Omega_{r(k,i)}^*$, не содержащиеся в ядрах текущих конфигурационных приближений к области $D_1^{(s)}$, пополняют эти ядра. Отсюда ясно: если такое решение найдено с помощью процесса A_k с определенным номером k , то можно утверждать, что гарантированно будет выполнено уточнение текущего приближения к области $D_1^{(k)}$. Что же касается остальных областей $D_1^{(s)}$, $s \neq k$, то произойдет или нет уточнение текущих приближений к ним, носит случайный характер. Однако такая «случайная помощь» трансформируется за время работы всего алгоритма в существенный вклад в повышение надежности построений (на этом моменте мы более обстоятельно остановимся чуть позже). Таковы общие сведения об изучаемом алгоритме.

А теперь рассмотрим произвольно взятый итерационный процесс A_k и его какой-то отдельный шаг $j > 1$, направленный на построение приближенного решения $\Omega_{r(k,i)}^*$ обратной задачи, которое, помимо того что должно быть допустимым, должно быть еще и *результативным* – уточняющим очередное приближение

$$D_{1,j}^{(k)} = D_{1,j-1}^{(k)} \cup \Omega_{r(k,j),k}^* \quad (7.36)$$

к искомой гарантирующей области $D_1^{(k)}$. В качестве нулевого приближения $D_{1,0}^{(k)}$ к каждой искомой области $D_1^{(k)}$, в принципе, можно было взять конфигурацию Ω_1^+ . Однако в стремлении минимизировать число $n(k)$ допустимых решений обратной задачи, которые предстоит построить итерационному процессу A_k , и благодаря содействию друг другу всех m итерационных процессов, можно поступить более эффективно. За исключением первого итерационного процесса A_1 , где действительно принимается $D_{1,0}^{(1)} = \Omega_1^+$, нулевые приближения $D_{1,0}^{(k)}$, с которых начинают работу итерационные процессы A_k , $k = 2, 3, \dots, m$, будут установлены по результатам работы предшествующих процессов A_s , $s = 1, 2, \dots, k-1$, а именно:

$$D_{1,0}^{(k)} = \bigcup_{s=1}^{k-1} \bigcup_{i=1}^{n(s)} \Omega_{r(s,i),k}^*, \quad k = 2, 3, \dots, m. \quad (7.37)$$

Для того чтобы найденный допустимый носитель $\Omega_{r(k,j)}^*$ оказался *результативным*, необходимо соблюсти условие $\Omega_{r(k,j),k}^* \not\subset D_{1,j-1}^{(k)}$. Ожидать, что это условие выполнится автоматически, не приходится. На допустимый носитель $\Omega_{r(k,j)}^*$, который предстоит найти, необходимо изначально наложить дополнительное требование. Оно должно обязать ядро парциального носителя $\Omega_{r(k,j),k}^*$ *заведомо* содержать, как минимум, один элемент замощения, не принадлежащий $Y(D_{1,j-1}^{(k)})$. Чтобы это гарантированно обеспечить, проще всего заранее указать конкретный элемент замощения (назовем его *пробным* и обозначим как $V_{t(j)}$), не входящий в ядро конфигурации $D_{1,j-1}^{(k)}$, но обязанный войти в ядро парциального носителя $Y(\Omega_{r(k,j),k}^*)$. По существу, речь как раз и идет о названной ранее идентификации элементов замощения на предмет принадлежности одному из допустимых носителей. Существуют ли в принципе допустимые решения обратной задачи, отвечающие сформулированному выше требованию (то есть даст ли такая идентификация положительный ответ), и если да, то удастся ли найти хотя бы одно из таких решений – это уже другой вопрос. Во всяком случае, обеспечить выполнение названного требования в монтажном алгоритме просто. Достаточно включить выбранный элемент замощения в ядро нулевого приближения к парциальному носителю $\Omega_{r(k,j),k}^*$ с условием, что он не будет изъят из ядер всех последующих приближений к этому носителю. При использовании одной из модификаций метода РНК за соблюдением данного условия даже не придется следить – оно выполнится автоматически.

Остается, собственно, обосновать процедуру выбора элемента $V_{t(j)}$.

Итерационный процесс A_k не обладает информацией, позволяющей отдать предпочтение тем или иным элементам замощения $V_t \notin \mathcal{Y}(D_{1,j-1}^{(k)})$ в плане того, что, скорее всего, они, а не другие могут оказаться в ядре соответствующего парциального носителя, входящего хотя бы в один из допустимых носителей. Ситуация осложняется необходимостью построения сравнительно большого числа допустимых решений обратной задачи. В таком случае, как мы уже говорили, речь может идти лишь об *автоматизированных технологиях* построения гарантирующих областей, когда после формализации априорных ограничений интерпретатор уже не вмешивается в процесс решения обратной задачи, включая и выбор нулевого приближения. В подобной ситуации право выбора пробного элемента $V_{t(j)}$ на каждом шаге j следует оставить за самим итерационным процессом A_k . И какой конкретно будет сделан выбор – заранее предвидеть невозможно, итерационный процесс будет осуществлять его с учетом результатов построений за предыдущие итерации. Принимая это все во внимание, поступим следующим образом.

Воспользуемся связностью гарантирующей области $D_1^{(k)}$, обеспеченной общим фрагментом Ω_k^+ всех слагающих эту область допустимых парциальных носителей $\Omega_{r,k}^*$. Предположим, что к моменту выхода итерационного процесса A_k на итерацию j существует непустое множество H элементов замощения V_t (пусть это даже *всего один* элемент), принадлежащих *хотя бы одному* из ядер соответствующих парциальных носителей $\Omega_{r,k}^*$, входящих в число допустимых носителей Ω_r^* , которые еще не были построены алгоритмом. Иными словами, элементы замощения из множества H , обязанные принадлежать ядру конфигурации $D_1^{(k)}$, не принадлежат ядру $\mathcal{Y}(D_{1,j-1}^{(k)})$ предшествующего приближения $D_{1,j-1}^{(k)}$ к искомой конфигурации $D_1^{(k)}$. Если это так, то можно утверждать, что *хотя бы один* элемент из множества H должен в таком случае принадлежать оболочке $O(D_{1,j-1}^{(k)})$. Таким образом, задавшись целью найти еще хотя бы один «новый» элемент замощения $V_{t(j)} \in \mathcal{Y}(D_1^{(k)})$, логично искать его среди элементов оболочки $O(D_{1,j-1}^{(k)})$, установить которую можно с помощью приемов, описанных во второй главе монографии. При этом может случиться, что некоторые элементы оболочки уже были опробованы на предыдущих шагах $i < j$ итерационного процесса A_k на предмет построения допустимого многосвязного носителя $\Omega_{r(k,i)}^*$, в котором элемент $V_{t(j)}$ был обязан войти в ядро парциального носителя $\Omega_{r(k,i),k}^*$. И эти построения оказались безрезультатными, а потому повторять их вновь не следует (понятно, что на шаге i элемент $V_{t(j)}$ фигурировал под обозначением $V_{t(i)}$).

В связи с последним замечанием введем в рассмотрение множество $W_{k,j} \subset O(D_{1,j-1}^{(k)})$ элементов замощения, которые еще не были опробованы процессом A_k в качестве пробного элемента замощения ни на предыдущих итерациях, ни на текущем шаге j . Тогда на шаге j итерационному процессу A_k остается перебрать (в произвольном порядке) все элементы множества $W_{k,j}$,

и, принимая поочередно каждый из них за элемент замощения $V_{t(i)}$, попытаться построить очередное допустимое решение $\Omega_{r(k,j)}^*$ обратной задачи. При каждой такой попытке за нулевое приближение к парциальному носителю $\Omega_{r(k,j),k}^*$ принимается конфигурация $\Omega_k^+ \cup V_{t(j)}$, а к парциальным носителям $\Omega_{r(k,j),s}^*$, $s \neq k$, – конфигурации Ω_s^+ . Важный момент заключается в том, что конфигурация $\Omega_k^+ \cup V_{t(j)}$ может оказаться несвязной. Это случится, как только для внутреннего ядра конфигурации $D_{1,j-1}^{(k)}$ выполнится включение $\mathcal{Y}_0(D_{1,j-1}^{(k)}) \supset \Omega_k^+$ (такое может произойти уже на нулевой итерации). Отсутствие связности можно установить с помощью алгоритма, предложенного во второй главе монографии. Если связность отсутствует, то прежде, чем начать поиск допустимого носителя $\Omega_{r(k,j)}^*$, нулевое приближение к парциальному носителю $\Omega_{r(k,j),k}^*$ придется дополнить до связной односвязной конфигурации, длина отростков которой не превосходит заданного числа, оговоренного в априорной информации. Для этих целей можно, опять же, воспользоваться результатами второй главы.

Возможны два случая.

В первом случае в одном из пробных вариантов выбора элемента замощения $V_{t(i)}$ из множества $W_{k,j}$ допустимый носитель $\Omega_{r(k,j)}^*$ удалось построить. Тогда вклад итерационного процесса A_k на шаге j в построение области $D_1^{(k)}$ сводится к уточнению предшествующего приближения $D_{1,j-1}^{(k)}$, согласно формуле

$$\mathcal{Y}(D_{1,j}^{(k)}) = \mathcal{Y}(D_{1,j-1}^{(k)}) \cup \mathcal{Y}(\Omega_{r(k,j),k}^*). \quad (7.38)$$

Во втором случае, опробовав все элементы замощения $V_t \in W_{k,j}$ на предмет использования их в статусе элемента $V_{t(i)}$, монтажному методу не удалось построить допустимое решение. В таком случае считается, что итерационный процесс A_k исчерпал свои возможности, а его вклад в построение гарантирующей области $D_1^{(k)}$ исчисляется $n(k) = j - 1$ допустимыми решениями $\Omega_{r(k,i)}^*$, $i = 1, 2, \dots, n(k)$, точнее, входящими в эти решения парциальными носителями $\Omega_{r(k,i),k}^*$.

Предположим, что все итерационные процессы A_k , $k = 1, 2, \dots, m$, завершены и

$$U_k = \left\{ \Omega_{r(k,1)}^*, \Omega_{r(k,2)}^*, \dots, \Omega_{r(k,n(k))}^* \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (7.39)$$

– множества допустимых решений обратной задачи, построенные в ходе каждого из этих процессов, соответственно. Тогда окончательно, с учетом возможности использовать при формировании гарантирующих областей $D_1^{(k)}$ результаты построений, выполненных следующими за A_k итерационными процессами A_s , $s > k$, получим окончательное представление для этих областей:

$$\mathcal{Y}(D_1^{(k)}) = \mathcal{Y}(D_{1,n(k)}^{(k)}) \cup \left(\bigcup_{s=k+1}^m \bigcup_{i=1}^{n(s)} \Omega_{r(s,i),k}^* \right), \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (7.40)$$

Взятые вместе формулы (7.37) и (7.40) дают полное представление о взаимодействии итерационных процессов A_k .

Алгоритм построения гарантирующих областей $D_2^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, m$. Как и в случае с $D_1^{(k)}$, этот алгоритм представляет собой цепочку выполняемых друг за другом идентичных итерационных процессов B_k , каждый из которых отвечает за построение соответствующей гарантирующей области $D_2^{(k)}$. Так же как это было с итерационными процессами A_k , необходимо разделять: вклад, который итерационные процессы B_k вносят в построение закрепленных за ними областей $D_2^{(k)}$, и вклад, который они *попутно* вносят в построение других гарантирующих областей B_s , $s \neq k$. Благодаря содружеству процессов B_k , а также того вклада, который в построение областей $D_2^{(k)}$ могут внести ранее выполненные итерационные процессы A_s , $s = 1, 2, \dots, m$, необходимость в выполнении некоторых из процессов B_k может даже отпасть. В каких именно – это в общем случае становится ясно лишь по мере работы алгоритма.

Прежде всего воспользуемся тем, что множества U_k допустимых носителей $\Omega_{r(k,j)}^*$, $k = 1, 2, \dots, m$, $i = 1, 2, \dots, n(k)$, найденных при реализации процессов A_k , могут быть эффективно применены при формировании нулевых приближений $D_{2,0}^{(k)}$ к гарантирующим областям $D_2^{(k)}$. Точнее – оценок $\tilde{D}_{2,0}^{(k)}$ сверху для множеств $D_{2,0}^{(k)}$, с которых действительно будет начинаться итерационный процесс B_k . В силу включений

$$\bigcap_{s=1}^m \bigcap_{i=1}^{n(s)} \Omega_{r(s,i),k}^* \supseteq D_2^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (7.41)$$

можно положить

$$\tilde{D}_{2,0}^{(k)} = \bigcap_{s=1}^m \bigcap_{i=1}^{n(s)} \Omega_{r(s,i),k}^*, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (7.42)$$

Не исключено, что для некоторых номеров k парциальных носителей левые части включений (7.41) совпадут с областями Ω_k^+ . Пусть K – множество таких значений k .

Тогда

$$D_2^{(k)} = \Omega_k^+, \quad k \in K. \quad (7.43)$$

Иначе говоря, для всех k , для которых имеет место равенство (7.43), можно утверждать, что:

1) итерационные процессы A_k не просто внесли свой вклад в построение нулевого приближения к искомым гарантирующим областям $D_2^{(k)}$, но вообще смогли выполнить работу за итерационные процессы B_k , после чего необходимость в соответствующих процессах B_k попросту отпала;

2) гравиметрических измерений в совокупности с априорной информацией оказалось недостаточно, чтобы хоть сколько-нибудь раздвинуть (в сравнении с известным фрагментом Ω_k^+) границы области пространства, гарантированно заполненной аномалиеобразующими массами плотности $\hat{\delta}_k$.

После того как информация, содержащаяся в допустимых решениях, которые были найдены с помощью итерационных процессов A_k , свернута по формуле (7.40) в множества $\tilde{D}_{2,0}^{(k)}$, и к этим решениям не придется возвращаться, можно вновь воспользоваться прежними обозначениями, но уже для итерационных процессов B_k . Итак, будем через $\Omega_{r(s,i),k}^*$ помечать k -ый парциальный носитель в i -ом решении $\Omega_{r(s,i)}^*$, построенном с помощью процесса B_s , $s \notin K$. Общее число допустимых решений, построенных с помощью итерационного процесса B_s , также обозначим как $n(s)$.

Структура рассматриваемого алгоритма такова, что основная роль в построении каждой из гарантирующих областей $D_2^{(k)}$ отводится соответствующему итерационному процессу B_k . Исходя из этого, допустимое решение обратной задачи, найденное с помощью любого итерационного процесса B_k , не обязано быть результативным в плане уточнения текущих приближений к другим гарантирующим областям $D_2^{(s)}$, $s \neq k$; как уже говорилось, это может быть сделано разве что попутно. На каждом шаге j итерационного процесса B_k решение обязано быть результативным лишь по отношению к очередному приближению к гарантирующей области $D_2^{(k)}$. Это, кстати, означает, что индекс i в обозначении $\Omega_{r(s,i)}^*$ будет совпадать с номером итерации j , и это мы учтем в дальнейших записях. Вместе с тем, алгоритм исходит из того, что любой из итерационных процессов B_k не всегда сможет самостоятельно решить поставленную перед ним задачу (даже с учетом вклада в построение нулевого приближения к гарантирующей области $D_2^{(k)}$ итерационных процессов A_k и предшествующих итерационных процессов B_s , $s < k$). Причина тому – все та же проблема многоэкстремальности нелинейных функционалов (вопросам надежности отводится следующий подраздел главы). В этой связи результат построения области $D_2^{(k)}$, выполненный каждым итерационным процессом B_k , еще не считается окончательным, и в обозначениях соответствующих приближений к искомой гарантирующей области используется волнистая черта.

Понятно, что каждый допустимый носитель $\Omega_{r(k,j)}^*$, построенный на шаге j с помощью итерационного процесса B_k , окажется результативным в том случае, если не выполняется включение $\tilde{D}_{2,j-1}^{(k)} \subset \Omega_{r(k,j),k}^*$. Ожидать, что это произойдет само собой, не приходится. Так же как в случае итерационных процессов A_k , итерационному процессу B_k придется искать каждый очередной допустимый носитель $\Omega_{r(k,j)}^*$ при дополнительном условии. Здесь это условие требует, чтобы ядро парциального носителя $\Omega_{r(k,j),k}^*$ заведомо не содержало какой-то элемент замощения, принадлежащий ядру конфигурации $\tilde{D}_{2,j-1}^{(k)}$. Назовем этот элемент *пробным* и обозначим как $V_{t(j)}$. Если элемент замощения конкретизирован, то в случае применения метода РНК для выполнения такого условия достаточно наложить запрет на вхождение элемента $V_{t(j)}$ в ядра всех текущих приближений к искомому парциальному носителю $\Omega_{r(k,j)}^*$, включая нулевое приближе-

ние. Если при этом по результатам построения окажется, что ядро $\mathcal{Y}(\Omega_{r(k,j),k}^*)$ не содержит сразу несколько элементов из $\mathcal{Y}(\tilde{D}_{2,j-1}^{(k)})$, то это дополнительный плюс. Однако мы не считаем целесообразным ставить на каждом шаге j (безусловно интересную с математической точки зрения) задачу поиска допустимого носителя $\Omega_{r(k,j),k}^*$, в котором парциальное ядро $\mathcal{Y}(\Omega_{r(k,j),k}^*)$ не содержало бы *максимального числа* элементов замощения, входящих в ядро $\mathcal{Y}(\tilde{D}_{2,j-1}^{(k)})$. Затраты на ее решение, скорее всего, не окупятся. Эффективнее ограничиться малым и сосредоточиться на более простой и существенно менее трудоемкой задаче построения допустимого решения, в котором k -ый парциальный носитель гарантированно не содержит *всего лишь один* пробный элемент $V_{t(j)}$. Если при таком ограничении допустимое решение построить удалось, то элемент $V_{t(j)}$ не войдет в ядро $\mathcal{Y}(\tilde{D}_{2,j}^{(k)})$ очередного приближения к гарантирующей области $D_2^{(k)}$, и результативность построенного решения будет обеспечена.

Как и в случае с итерационными процессами A_k , будем назначать элемент замощения, который мы хотели бы видеть в роли пробного. Из множества $\mathcal{Y}(\tilde{D}_{2,j-1}^{(k)}) \setminus \mathcal{Y}(\Omega_k^+)$ отберем те из его элементов, которые еще не были опробованы на предыдущих шагах $i < j$ итерационного процесса B_k на предмет построения допустимого многосвязного носителя $\Omega_{r(k,j),k}^*$ при условии, что отобранный элемент не имеет права попасть в ядро парциального носителя $\Omega_{r(k,j),k}^*$. Понятно, что прежде, на шаге i , элемент замощения $V_{t(j)}$, обсуждаемый в данный момент, фигурировал под обозначением $V_{t(i)}$. Множество таких неопробованных элементов обозначим как W_j .

Если $W_j = \emptyset$, итерационный процесс B_k завершается – полагая $n(k) = j - 1$, переходим к итерационному процессу B_{k+1} . Предположим все же, что $W_j \neq \emptyset$. Тогда задача j -го шага заключается в построении результативного допустимого решения в случае, когда в качестве пробного элемента замощения $V_{j(t)}$ выступает элемент множества W_j . Неважно, какой именно. Если, перебрав все элементы множества W_j в роли пробного элемента $V_{j(t)}$, допустимое решение так и не удалось построить, полагаем $n(k) = j - 1$ и переходим к следующему итерационному процессу B_{k+1} .

Возьмем, однако, «нормальный» случай, когда для одного из элементов замощения $V_i \in W_j$, принятого за пробный элемент $V_{j(t)}$, допустимое решение $\Omega_{r(k,j),k}^*$ удалось построить при условии $V_{t(j)} \notin \mathcal{Y}(\Omega_{r(k,j),k}^*)$. Может оказаться, что помимо элемента $V_{t(j)}$ ядро конфигурации $\tilde{D}_{2,j-1}^{(k)}$ содержит еще какие-то элементы замощения, не вошедшие в ядро парциального носителя $\Omega_{r(k,j),k}^*$. Соответственно, такие элементы также не должны войти в ядро текущего приближения $\tilde{D}_{2,j}^{(k)}$. Таким образом:

$$\tilde{D}_{2,j}^{(k)} = \tilde{D}_{2,j-1}^{(k)} \cap \Omega_{r(k,j),k}^* . \quad (7.44)$$

Последнее равенство характеризует вклад итерационного процесса B_k на шаге j в построение гарантирующей области $D_2^{(k)}$.

При первом упоминании об итерационных процессах B_k мы заметили, что каждый из них не только заботится о своей задаче – построении области $D_2^{(k)}$, но и содействует остальным процессам $B_s, s \neq k$ в решении аналогичных задач, поставленных перед ними. Для процессов B_s с номерами $s > k$ помощь итерационного процесса B_k выражается в корректировке нулевых приближений $\tilde{D}_{2,0}^{(s)}$, с которых в дальнейшем начнут работу эти процессы. Отметим прежде всего, что множество номеров k , для которых потребность в итерационных процессах B_k вообще отпадет, не ограничивается в общем случае множеством K и может пополниться. Это произойдет тогда, когда для данного k область $\tilde{D}_{2,0}^{(k)}$ (формула (7.42)) не совпадает с областью Ω_k^+ , но пересечение области $\tilde{D}_{2,0}^{(k)}$ с k -ми парциальными носителями, входящими в решения, построенные с помощью итерационных процессов $B_s, s < k$, уже совпадет с областью Ω_k^+ . Тогда для всех k , для которых есть необходимость в проведении итерационных процессов B_k , получим окончательное выражение для начального приближения, с которого будут стартовать эти процессы:

$$D_{2,0}^{(k)} = \tilde{D}_{2,0}^{(k)} \cap \left(\prod_s \prod_{i=1}^{n(s)} \Omega_{r(s,i),k}^* \right), \quad (7.45)$$

где индекс s пробегает номера итерационных процессов $B_s, s < k$, в выполнении которых была необходимость.

Для процессов B_s с номерами $s < k$ такая помощь состоит в возможности подкорректировать (при необходимости) области $\tilde{D}_{2,n(s)}^{(s)}$, полученные на выходе из «своих» итерационных процессов B_s . В итоге, искомые гарантирующие области $D_2^{(k)}, k = 1, 2, \dots, m$ представляют пересечения соответствующих парциальных носителей, входящих во все допустимые решения обратной задачи, которые были построены с помощью процессов A_s и $B_s, s = 1, 2, \dots, m$. По сути, гарантирующие области – это правые части формулы (7.45), где лишь индекс s пробегает номера всех итерационных процессов B_s , в выполнении которых была необходимость.

Читатель, вероятно, уже отметил, что по некоторым признакам процессы B_k – это процессы A_k с точностью до наоборот. Действительно, если на каждой итерации j процесса A_k ядро парциального носителя $\Omega_{r(k,j),k}^*$ в допустимом решении $\Omega_{r(k,j)}^*$ должно содержать заданный элемент замощения $V_{i(j)}$, то в случае итерационного процесса B_k необходимо, чтобы элемент не попал в ядро носителя $\Omega_{r(j),k}^*$. Если каждый итерационный процесс A_k – это процедура построения цепочки вложенных конфигураций, возрастающих по лебеговой мере, то в случае B_k речь идет об убывающих по мере конфигурационных приближениях $D_{2,j}^{(k)}$ к искомым гарантирующим областям $D_2^{(k)}$. Но есть один момент, характерный для итерационных процессов A_k , который процессам B_k не присущ. При поиске каждого допустимого носителя итерационные процессы B_k (на каждом их шаге) стартуют с одного и того же нулевого приближения, то-

логические свойства которого определены заранее. По мере роста номера итерации текущие приближения к искомым носителям начинают все более расходиться друг с другом.

7.4.3. Факторы влияния на достоверность результатов интерпретации

В ситуации, когда о свойствах некоторой выборки (в нашем случае – о множестве допустимых решений Q) приходится судить по некоторой ее подвыборке (по подмножеству Q_0), повышение надежности выводов обычно связывают с увеличением объема последней. Нам придется отказаться от такого подхода в силу специфики рассматриваемой задачи.

Множество допустимых решений обратной задачи в конечноэлементном классе носителей возмущающих масс настолько велико, что даже достаточно большой набор *случайно* найденных допустимых носителей не может претендовать на статус сколь-нибудь состоятельной подвыборки. Впрочем, для использования статистических приемов обработки данных в этом ничего удивительного как раз нет. Но в нашем случае имеет место одна особенность. Если допустимые решения, *взятые по отдельности*, априори имеют равную информативность по отношению к проблеме построения гарантирующих областей $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$, то этого нельзя сказать об отдельно взятых подмножествах из Q . Тем более если допустимые решения в эти подмножества отбирались специальным образом.

Неслучайно при построении гарантирующих областей $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$ мы воспользовались тем, что множество допустимых решений Q содержит, причем в большом количестве, довольно узкие подмножества (семейства) решений Q_0 , обладающих совместно такими же свойствами, что и все множество Q . Характерным признаком каждого из таких подмножеств является то, что входящие в него решения являются *результативными*. Таким образом, в подмножество Q_0 не попадают «лишние» решения. *Результативность* каждого решения из Q_0 выражается в том, что оно несет информацию об искомым гарантирующих областях $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$, которую не содержит никакое другое решение из подмножества Q_0 , во всяком случае те, что были построены ранее. Направленность алгоритма построения гарантирующих областей $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$ (если строго – оценок этих областей) на поиск любого одного из таких подмножеств позволяет заметно снизить число факторов, негативно влияющих на достоверность и качество полученных оценок. Проблема достоверности интерпретации в рамках гарантированного подхода сужается при этом до проблемы достоверности решения многоэкстремальных оптимизационных задач. Чтобы оценить, много это или мало, напомним, что проблема глобального минимума возникает и в известных методах решения обратных задач. Там она зачастую принимается за неизбежное зло и не берется даже во внимание.

Важный момент состоит в том, что в случае гарантированного подхода негативному влиянию фактора многоэкстремальности минимизируемого функционала невязки противодействует ряд других, позитивных, факторов. В итоге тот урон, который проблема многоэкстремальности могла бы нанести достоверности результатов интерпретации в рамках гарантированного подхода, эти факторы сводят практически к минимуму. Более того, если несколько «подправить» трактовку сути оценок гарантирующих областей, построенных с помощью предложенного алгоритма, то эти оценки уже можно рассматривать как гарантированно строгий результат. Позже мы остановимся на этом более подробно.

Отметим, прежде всего, что благодаря дополнительному ограничению, которое налагается на один из парциальных носителей в искомом приближенном решении обратной задачи, допустимое решение, если его удалось найти, неминуемо будет *результативным*. Благодаря результативности найденных решений Ω_r^* каждый итерационный процесс A_k теоретически достаточен для построения гарантирующей области $D_1^{(k)}$, а процесс B_k – для построения гарантирующей области $D_2^{(k)}$. Все это так, но при одном условии – метод построения единичного допустимого решения (в нашем случае – монтажный метод) должен быть способен отыскать допустимое решение в том случае, если такие вообще существуют при заданных ограничениях (либо, опять же в нашем случае, это сделали пришедшие ему на помощь другие итерационные процессы). Если же (даже с посторонней помощью) отыскать решение не удалось, мы должны быть уверены, что решения с необходимым дополнительным свойством попросту не существуют.

В монтажных алгоритмах, способных учитывать любые априорные ограничения на геометрию и пространственное положение источников поля, надежность выводов определяется одним фактором. Это – длина интервала I , левой границей α которого служит неизвестное минимальное значение невязки, которое достигается на каком-то решении из множества Q , а правой β является значение невязки наблюдаемого и модельного полей, достигнутое с помощью монтажного алгоритма. Интервал I значений невязки можно условно назвать областью неопределенности. Если норма помехи в измерениях поля попадает в интервал I , а значит допустимые решения при названных ограничениях существуют, то монтажный алгоритм будет не в состоянии распознать один из двух возможных исходов: а) допустимые решения существуют, но алгоритм не смог выйти на одно из них; б) допустимых решений нет. Впрочем, если таких решений действительно нет (норма помехи меньше принципиально достижимой на множестве Q), то и здесь монтажный алгоритм не сможет однозначно это установить.

Сужение интервала I (уменьшение значения β) – это путь к повышению достоверности выводов, сделанных на основании результатов работы монтаж-

ного алгоритма. Именно в связи с этим обстоятельством мы ранее достаточно много места уделили различным модификациям монтажных алгоритмов, направленным на уменьшение достигнутой невязки за счет усложнения структуры итерационного шага. Для гарантированного подхода успех в этом деле означает снижение числа «пограничных» ситуаций, когда монтажные методы попадают в условия неопределенности.

Аналогичные выводы можно сделать и в отношении оценок гарантирующих областей $D_2^{(k)}$ и итерационных процессов B_k .

Схожая ситуация с вопросом надежности имеет место и в случае применения традиционных методов решения нелинейных обратных задач гравиразведки и магниторазведки. Поэтому можно твердо сказать, что степень надежности оценки гарантирующей области $D_1^{(k)}$, построенной с помощью *одного лишь* итерационного процесса A_k , примерно та же, что и надежность оптимальных оценок параметров модели источников поля в традиционных методах решения обратных задач. Однако у предложенного нами алгоритма есть дополнительные резервы повышения надежности выполненных построений. Остановимся на них.

Один из таких резервов мы уже затрагивали. Речь шла о том, что любой из процессов A_k – и это важная особенность алгоритма в целом – готов попутно содействовать другим процессам A_s . Такая помощь может оказаться весьма существенной. Напомним, что каждый итерационный процесс A_k участвует в формировании нулевых приближений $D_{1,0}^{(s)}$, с которых впоследствии начнут работу процессы A_s с номерами $s > k$. Эта помощь выражается в том, что впоследствии итерационные процессы A_s могут быть освобождены от необходимости идентифицировать некоторые из элементов замощения на предмет их принадлежности соответствующим гарантирующим областям $D_1^{(s)}$. Помощь, которую может оказать итерационный процесс A_k итерационным процессам A_s с номерами $s < k$, выражается в способности подкорректировать оценки областей $D_1^{(s)}$, ранее построенных с помощью «своих» итерационных процессов A_s . Суть в том, что из-за проблемы глобального экстремума и локально-оптимального характера монтажных алгоритмов итерационный процесс A_s может не выйти на приемлемое значение невязки при поиске допустимого носителя, в котором ядро парциального носителя $\Omega_{r(s,i),s}^*$ содержало бы заданный элемент замощения V_i . Но на такой носитель по воле случая может выйти другой итерационный процесс. И тогда прежний вывод о том, что элемент V_i не принадлежит искомой области $D_1^{(s)}$, будет пересмотрен.

Объем реальной помощи, которую могут оказать друг другу итерационные процессы A_s , $s = 1, 2, \dots, m$, косвенно характеризует подмеченная по результатам модельных расчетов ситуация, когда

$$\bigcup_{k=s+1}^m \bigcup_{i=1}^{n(k)} \mathcal{Y}(\Omega_{r(k,i),s}^*) = \bigcup_{l=1}^s \bigcup_{i=1}^{n(l)} \mathcal{Y}(\Omega_{r(l,i),s}). \quad (7.46)$$

Последнее равенство говорит о том, что оценку гарантирующей области $D_1^{(s)}$, построенную с помощью итерационного процесса A_s (к тому же, на основе нулевого приближения, подготовленного предшествующими итерационными процессами A_l , $l = 1, 2, \dots, s - 1$), *попутно* могли бы построить итерационные процессы A_k с номерами $k > s$.

Аналогичные выводы можно сделать и о взаимной поддержке итерационных процессов B_s . О том, какой вклад в построение гарантирующих областей $D_2^{(k)}$ могут внести итерационные процессы A_s , мы уже говорили.

Далее сделаем одно небольшое отступление. Прикладные науки нередко сталкиваются с ситуацией, когда математически не вполне обоснованный метод дает, тем не менее, вполне приемлемые результаты. Наша позиция заключается в том, что методы количественной интерпретации геофизических данных не всегда обязаны следовать строго в «фарватере» критериев состоятельности алгоритмов, принятых в математике. В противном случае мы рискуем лишиться многих эффективных способов интерпретации геофизических данных, а взамен получить методы, математически обоснованные, но совершенно оторванные от геофизической реальности. Придерживаясь этой позиции, мы могли бы уже сейчас, на основе лишь одних ранее сделанных выводов считать решенным вопрос надежности оценок гарантирующих областей, построенных с помощью предложенного алгоритма. В крайнем случае мы могли бы сослаться на то, что в известных методах интерпретации дело обстоит не лучшим образом. Тем не менее, мы попытаемся развить проблему достоверности результатов, получаемых с помощью предложенного нами алгоритма. В некотором смысле к этому нас принуждает столь обязывающее понятие «гарантированный».

Обсудим теперь факторы, которые можно противопоставить той неопределенности, которая все еще остается, а также тот урон, который она может принести, если в каких-то случаях ее преодолеть не удастся.

Начнем с того, что в алгоритмах интерпретации, реализующих концепцию гарантированного подхода, монтажные методы перестают играть роль методов решения оптимизационных задач в их классическом понимании. Проблема глобального минимума здесь стоит не так остро. Всякий раз перед итерационными процессами A_k и B_k стоит задача не поиска *вполне определенного* (скажем, оптимального по какому-то критерию) допустимого решения, а *любого* допустимого решения, в числе прочего содержащего (не содержащего) заданный элемент замощения. Понятно, что ситуация при этом заметно упрощается. Минимум невязки перестает быть целью, а стремление к нему становится всего лишь средством для достижения любого приемлемого значения невязки, а значит и допустимого решения обратной задачи. Как уже отмечалось, приближенная эквивалентность здесь выступает в роли «союзника».

Далее. Остроту проблемы достоверности результатов интерпретации в терминах m пар $\langle \tilde{D}_1^{(k)}, \tilde{D}_2^{(k)} \rangle$ оценок областей $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$ – как объединения и пересечения парциальных носителей, входящих во все допустимые решения из Q – снижает и следующее обстоятельство. Дело в том, что при решении любого конкретного примера не столь уж важно, будет или нет достигнуто полное совпадение областей $\tilde{D}_1^{(k)}$ и $D_1^{(k)}$ ($\tilde{D}_2^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$). В практике интерпретации важно лишь, чтобы построенные области обеспечили двусторонние оценки типа включения для неизвестных парциальных носителей:

$$\tilde{D}_2^{(k)} \subset \hat{S}_k \subset \tilde{D}_1^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (7.47)$$

и совсем не обязательно, чтобы аналогичное включение выполнялось для абсолютно всех допустимых носителей. Больше того, если окажется так, что

$$\tilde{D}_1^{(k)} \subset D_1^{(k)}, \quad \tilde{D}_2^{(k)} \supset D_2^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad (7.48)$$

но, по воле случая, включение (7.47), тем не менее, выполнилось, то интерпретация от этого лишь выигрывает. По сути, здесь используется принцип доверительной вероятности. И в силу вышеназванных факторов вероятность выполнения включений (7.47) должна быть достаточно велика. Это подтверждается и результатами широкого вычислительного эксперимента. При решении модельных примеров (в условиях адекватности интерпретационной модели) нарушения указанных включений отмечались крайне редко, да и то в тех случаях, когда использовались наиболее простые версии монтажного метода.

И последнее. Независимо от мощности подмножества Q_0 допустимых решений, участвующих в построении пространственных конфигурационных областей $\tilde{D}_1^{(k)}$ и $\tilde{D}_2^{(k)}$, справедливы включения

$$\tilde{D}_1^{(k)} \subseteq D_1^{(k)}, \quad D_2^{(k)} \subseteq \tilde{D}_2^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \quad (7.49)$$

Таким образом, при адекватности всех априорных посылок результаты интерпретации в терминах пар $\langle \tilde{D}_1^{(k)}, \tilde{D}_2^{(k)} \rangle$ можно трактовать так: совокупная априорная информация оставляет неопределенность, при которой *по меньшей мере* любая точка области $\tilde{D}_1^{(k)}$ может оказаться точкой парциального носителя \hat{S}_k в модели источников аномалии, а фрагменты пространства, которые *гарантированно* можно было бы отнести к фрагментам парциальных носителей \hat{S}_k , малы настолько, что, *по меньшей мере*, лежат внутри областей $\tilde{D}_2^{(k)}$. И это уже *строгий* результат, оправдывающий название того подхода, в рамках которого он был получен.

7.4.4. Взаимодополняемость традиционного и гарантированного подходов

Безусловно, реализация гарантированного подхода, предполагающего предварительный поиск теперь уже не одного, а сотен и тысяч допустимых вариантов интерпретации, требует заметно бóльших вычислений, чем реализация подхода, направленного на построение единичного оптимального решения обратной задачи. Однако при нынешнем уровне развития вычислительной техники, включая возможность распараллеливания вычислительного процесса, указанная задача является вполне посильной.

С точки зрения проблемы достоверности обнаружения возмущающих масс в точках X изучаемой части пространства D (исключая те фрагменты пространства, в которых по априорной информации этих масс заведомо нет, либо они наверняка присутствуют) информативность отдельно взятого допустимого решения Ω^* обратной задачи, по сути – равна нулю. Каким бы признаком оптимальности ни было наделено это решение, оно не несет в себе информацию, позволяющую гарантированно идентифицировать точки X на предмет их принадлежности (непринадлежности) носителю \hat{S} возмущающих масс. Если же взять гарантированный подход, то областями неопределенности (своего рода «белыми пятнами»), точки которых недоступны однозначной идентификации, остаются лишь области $D_1^{(k)} \setminus D_2^{(k)}$, тогда как в отношении остальных точек X можно сделать однозначные выводы: вероятность события $X \in \hat{S}_k$ для всех $X \in D_2^{(k)}$ равна 1, а для всех точек $X \in \mathbf{R}^3 \setminus D_1^{(k)}$ она равна 0.

Даже если приведенные нами доводы в пользу надежности построенных оценок $\tilde{D}_1^{(k)}$ и $\tilde{D}_2^{(k)}$ не покажутся интерпретатору достаточно убедительными, все равно останется сформулированный выше *строгий* результат применения гарантированного подхода. Кроме того, если имело место равенство $\tilde{D}_2^{(k)} = \Omega_k^+$, то гарантированному подходу математически строго удалось установить, что гравиметрические данные не содержат информацию, позволяющую уточнить априорные данные о геометрии и пространственном положении парциального носителя масс \hat{S}_k . И это еще не все преимущества гарантированного подхода над традиционными методами.

Однако можно привести некоторые соображения и в пользу известных подходов. Пусть μ – классическая мера Лебега в \mathbf{R}^3 и Ω^* – любое (в том числе и оптимальное по какому-то критерию) приближенное решение обратной задачи. Какой бы алгоритм построения оптимального решения Ω^* ни был использован, совместный фрагмент каждого истинного парциального носителя \hat{S}_k и парциального носителя Ω_k^* , входящего в решение Ω^* , в общем случае *превзойдет* по мере (и, возможно, существенно) гарантированно установленный фрагмент истинного тела –

$$\mu(\Omega_k^* \cap \widehat{S}_k) > \mu(D_2^{(k)}), \quad k=1,2,\dots,m. \quad (7.50)$$

Правда, указать, какие именно точки $X \in \Omega_k^*$ являются также и точками тела \widehat{S}_k , в рамках обычного подхода не представляется возможным. Тем не менее, нельзя отрицать, что при использовании решения Ω^* , пусть даже и без оценки его достоверности, поставленную геологическую задачу удастся решить проще и быстрее, чем при точной локализации фрагмента источника аномалии малого размера.

Объединяя возможности обоих подходов, за результат интерпретации гравитационных аномалий можно, в качестве компромисса, принять триаду $\langle \Omega^*; D_1, D_2 \rangle$. По сути, в ней воплощена идея построения приближенного решения обратной задачи, снабженного неулучшаемыми двусторонними оценками. В случае рудной обратной задачи эти оценки имеют вид включений. Аналогичную форму представления результатов интерпретации можно использовать также в линейной и структурной постановках обратных задач. В этих случаях решение обратной задачи, построенное в рамках гарантированного подхода, будет служить неулучшаемыми двухсторонними оценками типа неравенств для единичного решения обратной задачи из множества Q , наилучшего по некоторому критерию оптимальности. В завершение следующей главы мы рассмотрим более общие и информативные, чем приведенная выше триада, математические формы представления результатов интерпретации, в которых в числе прочего используются решения обратных задач, полученные с помощью аддитивных методов.

7.5. Задачи планирования геофизического эксперимента

Эффективность математической интерпретации геофизических данных во многом предопределяется уже на стадии планирования геофизического эксперимента, которую можно считать начальной фазой интерпретационного процесса, предшествующей фактическому получению экспериментальных данных. Так, при проектировании геологоразведочных работ на новых площадях возникает необходимость в решении ряда вопросов, связанных с выбором рационального комплекса геофизических работ, в том числе с обоснованием целесообразности самой их постановки. Планирование геофизического эксперимента – как научное направление – по существу не сложилось, носит избирательный характер и преимущественно сводится, как это было в эпоху наибольшего расцвета теории интерпретации потенциальных полей, к выбору масштаба и точности съемки [Непомнящих, 1972]. На наш взгляд, сложившаяся ситуация, остающаяся неизменной на протяжении нескольких десятилетий, обусловлена, в числе прочего, тем, что привычные

математические формы представления результатов интерпретации мало пригодны для теоретических исследований в области построения прогнозных оценок ее качества.

Анализируя перспективы и пути развития геофизической кибернетики, В.Н. Страхов высказал мысль [Страхов, 1979], что проектирование геофизических (в частности, гравиметрических) работ удастся поставить на подлинно научную основу лишь тогда, когда проектирование станет критериальным и будет представлять собой решение некоторой условно-экстремальной задачи, направленной на максимизацию меры ожидаемой геологической эффективности исследования. Эти условно-экстремальные задачи обязаны отвечать следующей формуле планирования геофизических исследований: при наиболее полном использовании активных средств модели планирования (параметров в вычислительных схемах) и самом неблагоприятном сочетании неконтролируемых факторов из области неопределенности (прежде всего, конкретных реализаций случайной величины в измеряемых значениях поля) успешное решение поставленной геологической задачи должно быть заведомо обеспечено. В работе [Страхов, 1987₂] ее автор подчеркивал необходимость постановки задачи планирования гравиметрических работ на более строгую, формализованную основу, не ограничиваясь одним лишь имитационным моделированием. По мнению В.Н. Страхова, такое планирование должно заключаться в выработке теоретически обоснованных рекомендаций по выбору измеряемых элементов поля, сети наблюдений и требуемой точности измерений, обеспечивающих решение поставленной геологической задачи с учетом того графа обработки и извлечения информации о строении плотностной среды, который предполагается применить к данным фактических наблюдений.

Как бы то ни было, но в настоящее время прогнозные оценки ожидаемого качества интерпретации устанавливаются по результатам расчетов, выполненных по схеме квазиреального эксперимента для некоторых (выборочных) векторов параметров модели источников аномалии и реализаций случайной величины, распределенной по заданному закону и имитирующей помеху в измерениях поля. В силу неустойчивости большинства задач обработки и интерпретации такие оценки будут действительно состоятельными лишь в том случае, если в ходе имитационного моделирования удалось опробовать достаточно «плотное» подмножество допустимых реализаций векторов параметров интерпретационной модели. В задачах планирования, охватывающих все стадии проведения геофизических работ и анализа их результатов, к интерпретационной модели добавятся и некоторые параметры вычислительных схем, входящих в граф обработки и решения обратных задач, а также все те характеристики, которые входят в граф проведения и обработки результатов полевых наблюдений и определяют точность съемки [Старостенко и др., 1972].

Проблема составления оптимальных проектов гравиметрических работ в указанном выше смысле не может быть решена средствами одного лишь имитационного моделирования (на что и указывал В.Н. Страхов в работе [Страхов, 1987₂]) – слишком уж велика мощность репрезентативного подмножества возможных реализаций параметров интерпретационной модели.

По мнению авторов монографии, очевидно и другое: охватить всю эту «разнородную» многопараметрическую неопределенность какой-то *одной* условно-экстремальной задачей – на что рассчитывал В.Н. Страхов – вряд ли удастся. На наш взгляд, компромисс мог бы состоять в декомпозиции проблемы путем сведения ее к сравнительно небольшому числу экстремальных задач, каждая из которых смогла бы охватить «достаточно крупный ее фрагмент». При использовании имитационного моделирования вместо одной такой экстремальной задачи пришлось бы решать чрезвычайно большое число задач условной минимизации, хотя, конечно, и более простых.

В данном разделе главы применительно к одному из «фрагментов» задачи планирования излагается алгоритм, основанный на идее гарантированного подхода, который позволяет содержательно оценить тот объем достоверной информации о геологическом объекте, который – при условии полной адекватности всех предпосылок – будет извлечен из данных гравиметрических измерений *при любой* реализации вектора параметров интерпретационной модели, присутствующих в этом «фрагменте».

7.5.1. Постановка задачи и алгоритм вычисления прогнозных оценок качества интерпретации

Мы ограничимся ситуацией, в которой проблема оптимального проектирования гравиметрических работ рассматривается в аспекте их достаточности для решения заданной геологической задачи, а соображения экономического порядка и фактор оперативности проведения соответствующих работ уже нашли отражение при формировании множества допустимых вариантов исследований. Предметом нашего рассмотрения станет проблема априорного оценивания ожидаемого качества решения линейной обратной задачи в заданном параметрическом классе источников поля. Ее значимость определяется двумя обстоятельствами.

1. Решение этой проблемы позволяет резко сократить объем имитационного моделирования. Это происходит оттого, что набор возможных типовых ситуаций строения плотностной среды и наблюдаемых гравитационных полей при различных вариантах имитации помехи в измерениях, которые прежде потребовалось бы «разыграть», неизмеримо шире набора допустимых вариантов проведения инструментальных исследований и возможных графов обработки и интерпретации.

2. В ряде практических ситуаций решение одной такой проблемы окажется достаточным для обоснования того или иного плана проведения гравиметрических работ.

Итак, предположим, что носитель \widehat{S} источников поля представляет собой объединение заданного числа связных носителей \widehat{S}_k , $k = 1, 2, \dots, K$, каждый из которых содержит массы постоянной эффективной плотности $\widehat{\delta}_k$. Как и в «обычной» линейной обратной задаче, парциальные носители \widehat{S}_k считаются априори заданными (известными, закрепленными). Предположим, что у геофизика есть предпосылки считать, что наблюдаемые значения $\Delta\widetilde{g}(X_i)$, которые еще только предстоит получить по результатам гравиметрической съемки, будут отвечать аддитивной модели экспериментального материала

$$\Delta\widetilde{g}(X_i) = \sum_{k=1}^K \Delta g^{(k)}(X_i) \widehat{\delta}_k + \sum_{j=1}^L \varphi_j(X_i) \widehat{d}_j + \widehat{\xi}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (7.51)$$

где: $\Delta g^{(k)}(X_i)$ – значение поля в точке измерения X_i масс единичной плотности, сосредоточенных в носителе \widehat{S}_k ; $\varphi_j(X)$ – заданные функции в описании регионального фона, априори известного с точностью до параметров \widehat{d}_j ; $\widehat{\xi}_i$ – инструментальные погрешности измерений поля в заданных точках. Важным параметром при построении прогнозных оценок достижимой точности решения обратной задачи является норма помехи в интерпретируемых значениях поля. Мы будем исходить из того, что начальный этап гравиметрических исследований включает в себя выбор аппаратуры и методики полевых наблюдений, а также выбор методики обработки результатов съемки, и этим определяется точность съемки и информативность наблюдаемого поля. Исходя из этого, предположим, что с использованием хорошо зарекомендовавших себя на протяжении многих лет систем полной обработки данных гравиметрии [Старостенко и др., 1972; Лобанов, 1989] для каждого из альтернативных вариантов проведения полевых работ установлено вероятное значение максимальной ошибки съемки ε .

В постановках линейных обратных задач гравиразведки, которые рассматривались в этой главе, векторы $\widehat{\delta} \in \mathbf{R}^K$, $\widehat{d} \in \mathbf{R}^L$ и $\widehat{\xi} \in \mathbf{R}^n$ были *вполне определенные* (фиксированные), хотя и *неизвестные*. Фиксированным (и, понятно, известным) является вектор интерпретируемых значений $\Delta\widetilde{g}(X_i)$ гравитационного поля. Иное дело – задачи построения прогнозных оценок. Здесь дополнительная неопределенность возникает благодаря тому, что в число неизвестных (свободных) параметров модели прогнозирования войдут и сами векторы $\Delta\widetilde{g} = (\Delta\widetilde{g}_1, \Delta\widetilde{g}_2, \dots, \Delta\widetilde{g}_n)$ значений $\Delta\widetilde{g}_i = \Delta\widetilde{g}(X_i)$ интерпретируемого поля в точках измерений X_i , поскольку этих значений на момент построения прогнозных оценок попросту нет. Данная неопределенность характеризуется *множеством допустимых ситуаций* Ψ . Каждый элемент этого множества есть конкретный вектор $\Delta\widetilde{g}$ значений гравитационного поля, каким в дальнейшем может ока-

заться вектор наблюдаемых значений поля по результатам проведения гравиметрической съемки. В свою очередь, каждая допустимая ситуация из множества Ψ обусловлена в общем случае несколькими определенными наборами векторов $\hat{\delta}$, \hat{d} и $\hat{\xi}$. По априорным данным можно выделить множества Ψ_δ , Ψ_d и Ψ_ξ , которым могут принадлежать указанные векторы. Таким образом, множество допустимых ситуаций можно ассоциировать с декартовым произведением $\Psi_\delta \times \Psi_d \times \Psi_\xi$. Понятно, что с каждой допустимой ситуацией будет связано свое множество Q допустимых решений обратной задачи.

В постановке задачи прогнозирования могут присутствовать, вообще говоря, три списка математических объектов.

Первый список отвечает за множество допустимых ситуаций. Соответственно, он представлен множеством векторов наблюдаемого поля $\Delta\tilde{g}$, которые могут реализоваться при выполнении гравиметрической съемки. В свою очередь, это множество определяется множествами Ψ_δ , Ψ_d и Ψ_ξ ; их элементы участвуют в конструировании (по формуле (7,51)) выборки значений гравитационного поля, которые могут встретиться по результатам гравиметрической съемки.

Второй список математических объектов представлен параметрами, чьи оценки характеризуют прогноз качества результатов интерпретации.

Наконец, третий список представлен вспомогательными переменными, участвующими в постановке соответствующих условно-экстремальных задач прогнозирования. По сути, компоненты векторов $\hat{\delta}$, \hat{d} и $\hat{\xi}$ также можно отнести к числу вспомогательных переменных.

По сравнению с «обычной» постановкой линейной обратной задачи число переменных в условно-экстремальных задачах прогнозирования существенно больше, но основной смысл этих задач останется тем же. Он состоит в оценивании предельных возможностей гравиметрического метода в терминах гарантированного объема достоверной информации, который наверняка будет извлечен из данных наблюдений поля вместе с другой априорной информацией при *любой*, предположительно допустимой (природой и измерительной аппаратурой) реализации значений «истинных» параметров в модели планирования.

Возьмем для определенности ситуацию, когда требуется спрогнозировать, сколь большим может оказаться максимально допустимый разброс ν_k значений эффективной плотности масс, заполняющих парциальные носители, входящие в модель источников поля. Мы не можем здесь напрямую воспользоваться опытом решения линейной обратной задачи по *фиксированной* аномалии $\Delta\tilde{g}(X)$ уже потому, что *порознь* вычисленные экстремально возможные оценки $\delta_k^{(\min)}$ и $\delta_k^{(\max)}$ значений плотностей масс в каждом k -ом парциальном носителе будут, скорее всего, достигнуты на *различных* элементах множества допустимых ситуаций. То есть на отличных друг от друга векторах $\Delta\tilde{g}$ значе-

ний гравитационного поля, отвечающих за различные ситуации, которые могут возникнуть по результатам фактических измерений поля.

Поступим следующим образом. В дополнение к паре векторов $\hat{\delta} = (\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2, \dots, \hat{\delta}_K)$ и $\hat{d} = (\hat{d}_1, \hat{d}_2, \dots, \hat{d}_L)$ введем еще две пары вспомогательных векторов $\tilde{\delta} = (\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2, \dots, \tilde{\delta}_K)$, $\tilde{d} = (\tilde{d}_1, \tilde{d}_2, \dots, \tilde{d}_L)$ и $\tilde{\tilde{\delta}} = (\tilde{\tilde{\delta}}_1, \tilde{\tilde{\delta}}_2, \dots, \tilde{\tilde{\delta}}_K)$, $\tilde{\tilde{d}} = (\tilde{\tilde{d}}_1, \tilde{\tilde{d}}_2, \dots, \tilde{\tilde{d}}_L)$. Они будут отвечать за те два допустимых варианта решения обратной задачи, которые обеспечивают максимальную разность значений эффективной плотности масс, заключенных в парциальном носителе \hat{S}_k . Понятно, что эти два допустимых варианта интерпретации должны относиться к одной и той же допустимой ситуации из множества Ψ . Условно-экстремальная задача прогнозирования, которую нам предстоит сформулировать, должна и выявить ту самую неблагоприятную ситуацию, в которой указанная максимальная разность плотностей является наибольшей. Названные разности необходимо будет найти для каждого $k = 1, 2, \dots, K$.

С учетом сказанного для каждого $k = 1, 2, \dots, K$ задачу прогнозирования можно сформулировать как следующую условно-экстремальную задачу с $3K + 3L + n$ переменными. Установить максимум функционала

$$v_k = \tilde{\tilde{\delta}}_k - \tilde{\delta}_k \quad (7.52)$$

при следующих (обязательных) ограничениях:

$$\left| \left(\sum_{k=1}^K \Delta g^{(k)}(X_i) \tilde{\tilde{\delta}}_k + \sum_{j=1}^L \varphi_j(X_i) \tilde{\tilde{d}}_j \right) - \left(\sum_{k=1}^K \Delta g^{(k)}(X_i) \hat{\delta}_k + \sum_{j=1}^L \varphi_j(X_i) \hat{d}_j + \xi_i \right) \right| \leq \varepsilon, \quad (7.53)$$

$$\left| \left(\sum_{k=1}^K \Delta g^{(k)}(X_i) \tilde{\delta}_k + \sum_{j=1}^L \varphi_j(X_i) \tilde{d}_j \right) - \left(\sum_{k=1}^K \Delta g^{(k)}(X_i) \hat{\delta}_k + \sum_{j=1}^L \varphi_j(X_i) \hat{d}_j + \xi_i \right) \right| \leq \varepsilon \quad (7.54)$$

для всех $i = 1, 2, \dots, n$;

$$\delta_k^{(1)} \leq \hat{\delta}_k \leq \delta_k^{(2)}, \quad (7.55)$$

$$\delta_k^{(1)} \leq \tilde{\delta}_k \leq \delta_k^{(2)}, \quad (7.56)$$

$$\delta_k^{(1)} \leq \tilde{\tilde{\delta}}_k \leq \delta_k^{(2)} \quad d \quad (7.57)$$

для всех $k = 1, 2, \dots, K$;

$$d_j^{(1)} \leq \hat{d}_j \leq d_j^{(2)}, \quad (7.58)$$

$$d_j^{(1)} \leq \tilde{d}_j \leq d_j^{(2)}, \quad (7.59)$$

$$d_j^{(1)} \leq \tilde{\tilde{d}}_j \leq d_j^{(2)} \quad (7.60)$$

для всех $j = 1, 2, \dots, L$;

$$|\xi_i| \leq \varepsilon, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7.61)$$

Разумеется, в постановку задачи можно внести и другие типы априорной информации. К примеру, ограничения на максимально допустимые скачки значений эффективных плотностей масс для каждой пары граничащих друг с другом парциальных носителей.

7.5.2. Учет предварительного сглаживания помех

Можно предложить более экономичную, на наш взгляд, модель построения прогнозных оценок. В ней частично учтены элементы вычислительной схемы, применяемой при поиске отдельных допустимых решений обратной задачи. Суть предложений заключается в следующем.

Пусть $\delta^* = (\delta_1^*, \delta_2^*, \dots, \delta_K^*)$ – результат интерпретации по одному из методов, реализующих концепцию единичного оптимального решения обратной задачи. Мы не станем поднимать вопрос о преимуществах того или иного метода или о случайном характере точности построенного решения. Сейчас нас интересуют не разрешающие способности метода (точность оценивания вектора $\hat{\delta}$), а его аппроксимационные (сглаживающие) возможности – точность приближения подобранным модельным полем $\Delta g^*(X)$ неизвестного истинного поля $\Delta \hat{g}(x)$. По опыту применения выбранного метода при решении обратных задач (а если этого окажется недостаточно, то и прибегнув к дополнительным модельным расчетам) геофизик зачастую может довольно уверенно оценить норму ε_1 уклонения поля $\Delta g^*(X)$, обусловленного подобранным вектором эффективных плотностей $\delta^* = (\delta_1^*, \delta_2^*, \dots, \delta_K^*)$, от истинного $\Delta \hat{g}(x)$. Разумеется, речь идет об опыте такого оценивания в ситуации, близкой к той, для которой необходимо будет построить прогнозную оценку ожидаемого качества интерпретации. Как бы то ни было, если наблюдаемые значения $\Delta \tilde{g}(X_i)$ не отягощены помехами ξ_i , образующими некую патологическую выборку случайной величины, то в большинстве случаев имеет место довольно «сильное» неравенство $\varepsilon_1 \ll \varepsilon$. Это неравенство служит предпосылкой к еще одной постановке задачи вычисления прогнозных оценок ожидаемого качества интерпретации, отличной от той, что предложена в работах [Балк, Березовский, 1989; Балк и др., 1990].

Итак, будем исходить из того, что до проведения гравиметрической съемки из определенных соображений можно достаточно уверенно утверждать, что аномалия $\Delta \hat{g}(x)$, которую, подчеркнем, еще только предстоит измерить в заданных точках X_i , будет обусловлена массами, распределенными по заданному числу K связанных пространственных областей \hat{S}_k с постоянными эффектив-

ными плотностями $\hat{\delta}_k$, удовлетворяющими некоторым априорным ограничениям. Чтобы не выходить за рамки линейной постановки задачи прогнозирования, мы вынуждены предположить, что геометрия и пространственное положение носителей \hat{S}_k известны достаточно точно. Это не следует понимать в буквальном смысле. На практике речь может идти о целой серии расчетов, где в каждом варианте построения прогнозных оценок опробуются различные представления о возможной геометрии носителей масс. Пусть априори можно спрогнозировать, что:

1) будет иметь место аддитивная модель экспериментального материала (7.51), в которой измерения $\Delta\tilde{g}(X_i)$ аномалии $\Delta\tilde{g}(x)$ содержат значения $\Delta g^{(\phi)}(X_i)$ регионального фона;

2) из косвенных данных закон изменения регионального фона будет известен с точностью до его коэффициентов \hat{d}_j ;

3) независимо от игры случая помехи ξ_i не будут превосходить по определенной норме заданное значение ε .

Предположим также, что интерпретатор, как и прежде, может указать двусторонние оценки для неизвестных значений эффективной плотности масс в каждом из K парциальных носителей. Кроме того, интерпретатор может довольно надежно обозначить двусторонние оценки для коэффициентов фона \hat{d}_j и (или) двусторонние оценки для самих значений $\Delta g^{(\phi)}(X_i)$ регионального фона в точках X_i . Что касается помех ξ_i , то пусть в дополнение к информации о максимально возможном их значении ε могут быть спрогнозированы и другие, достаточно общие, свойства. Например, предполагаемый интервал $[\alpha, \beta]$ возможного значения их среднего $\bar{\xi}$, взятого по всем точкам измерений X_i . Важное замечание: в значении ε помимо уровня помех инструментального характера могут быть учтены поправки за неполную адекватность модели источников аномалии, к примеру, поправки за известные лишь приблизительно геометрию и пространственное положение парциальных носителей \hat{S}_k , а также за неточное описание регионального фона линейной комбинации функций $\varphi_j(X)$. Разумеется, построенные прогнозные оценки могут быть эффективными лишь тогда, когда эти поправки объективны и в то же время незначительны.

Предположим вначале, что когда гравиметрическая съемка будет выполнена, то по измерениям гравитационного поля и всем априорным ограничениям с помощью одного из известных алгоритмов – назовем его A – будет решена обратная задача в терминах оптимального вектора δ^* оценок эффективных плотностей масс, заключенных в заданных парциальных носителях \hat{S}_k . Как мы предупреждали выше, нас не будет интересовать построенное решение δ^* как результат интерпретации. Да и сам алгоритм A мы будем рассматривать не с точки зрения построения оценок δ_k^* эффективных плотностей, а как алгоритм аппроксимации экспериментальных данных. Его состоятельность

определяется возможностью сглаживать помехи в измерениях ξ_i и находить хорошее приближение к истинной функции $\Delta\hat{g}(x)$. Конкретно нас интересует одно: какова мера ε_1 близости подобранного поля $\Delta g^*(X) = \Delta g^*(\{\hat{S}_k\}, \delta^*; X)$ и истинного $\Delta\hat{g}(X) = \Delta\hat{g}(\{\hat{S}_k\}, \delta; X)$. Мы рассчитываем (об этом также говорилось ранее), что какие бы векторы $\hat{\delta}$ и \tilde{d} ни «предъявила» природа, а также какой бы ни оказалась фактическая реализация $\{\xi_i\}$ случайных помех в интерпретируемых измерениях $\Delta\tilde{g}(X_i)$, геофизик сможет – с учетом известных ему аппроксимационных (сглаживающих) свойств алгоритма A – указать оценку ε_1 .

Принимая во внимание все вышеназванные доводы, мы имеем ситуацию, которую можно описать двумя неравенствами. С одной стороны, приближенное решение δ^* обратной задачи, которое могло быть построено с помощью алгоритма A , предположительно должно было бы удовлетворять неравенству

$$\left\| \Delta g \left(\{\hat{S}_k\}_{k=1}^K, \delta^*; X \right) - \Delta\hat{g} \left(\{\hat{S}_k\}_{k=1}^K, \hat{\delta}; X \right) \right\|_{X \in \{X_i\}} \leq \varepsilon_1. \quad (7.62)$$

С другой стороны, допустимые решения $\tilde{\delta}$ обратной задачи, среди которых должно находиться истинное решение $\hat{\delta}$, в силу тех же сглаживающих свойств алгоритма A , предположительно должны удовлетворять неравенству

$$\left\| \Delta g \left(\{\hat{S}_k\}_{k=1}^K, \tilde{\delta}; X \right) - \Delta g \left(\{\hat{S}_k\}_{k=1}^K, \delta^*; X \right) \right\|_{X \in \{X_i\}} \leq \varepsilon_1. \quad (7.63)$$

Из неравенств (7.62) и (7.63) следует, что

$$\left\| \Delta g \left(\{\hat{S}_k\}_{k=1}^K, \tilde{\delta}; X \right) - \Delta\hat{g} \left(\{\hat{S}_k\}_{k=1}^K, \hat{\delta}; X \right) \right\|_{X \in \{X_i\}} \leq 2\varepsilon_1. \quad (7.64)$$

Таким образом, мы имеем следующее.

1. Если взять любой конкретный случай задания значений $\Delta\tilde{g}(X_i)$, то, располагая решением δ^* обратной задачи, построенным по этим значениям, и прочей априорной информацией, можно в пространстве значений гравитационного поля очертить ε_1 -окрестность этого решения, в которую попало поле $\Delta\hat{g}(X)$, обусловленное возмущающими массами (неравенство (7.62));

2. Опять же, располагая в каждом конкретном случае решением δ^* обратной задачи, можно в пространстве значений гравитационного поля очертить ε_1 -окрестность этого решения, среди элементов которой есть истинное поле $\Delta\hat{g}(x)$ возмущающих масс, и, следовательно, очертить в указанном пространстве множество векторов δ , которое можно рассматривать как множество допустимых по полю решений обратной задачи.

Но мы ведь задались целью обойти имитационное моделирование и вместе с ним необходимость построения приближенных решений δ^* для различных вариантов $\langle \hat{\delta}, \tilde{d}, \{\xi_i\}_{i=1}^n \rangle$. Тогда выход из положения состоит в том, чтобы, не прибегая к построению решения δ^* , оценить разброс по полю допустимых

решений $\tilde{\delta}$ с помощью неравенства (7.64). Понятно, что такой прием мы не могли бы использовать при решении обратной задачи с помощью гарантированного подхода, так как в этом случае не было бы известно точное решение $\hat{\delta}$. Но в задаче прогнозирования, когда мы должны виртуально «просмотреть» все возможные варианты $\langle \hat{\delta}, \hat{d}, \{\xi_i\}_{i=1}^n \rangle$, с одним из которых геофизик встретится при интерпретации гравиметрических измерений, такой прием возможен.

Теперь можно записать условно-экстремальную задачу прогнозирования. Для большей наглядности мы приведем и те ограничения, которые уже фигурировали в других рассмотренных постановках и были выведены в отдельные (пронумерованные) формулы.

Для каждого $k = 1, 2, \dots, K$ максимизировать линейный функционал

$$\Phi(\tilde{\delta}_k, \tilde{\delta}_k) = \tilde{\delta}_k - \tilde{\delta}_k \quad (7.65)$$

при следующих ограничениях:

$$\delta_k^{(1)} \leq \hat{\delta}_k \leq \delta_k^{(2)}, \quad (7.66)$$

$$\delta_k^{(1)} \leq \tilde{\delta}_k \leq \delta_k^{(2)}, \quad (7.67)$$

$$\delta_k^{(1)} \leq \tilde{\tilde{\delta}}_k \leq \delta_k^{(2)} \quad (7.68)$$

для всех $k = 1, 2, \dots, K$;

$$|\hat{\delta}_{k(1)} - \hat{\delta}_{k(2)}| \leq \Delta_{(k(1), k(2))}, \quad (7.69)$$

$$|\tilde{\delta}_{k(1)} - \tilde{\delta}_{k(2)}| \leq \Delta_{(k(1), k(2))}, \quad (7.70)$$

$$|\tilde{\tilde{\delta}}_{k(1)} - \tilde{\tilde{\delta}}_{k(2)}| \leq \Delta_{(k(1), k(2))} \quad (7.71)$$

для всех $(k(1), k(2)) \in T$, где T – множество пар номеров парциальных носителей \hat{S}_k , контактирующих друг с другом;

$$\left\| \Delta g \left(\{\hat{S}_k\}_{k=1}^K, \tilde{\delta}; X \right) - \Delta g \left(\{\hat{S}_k\}_{k=1}^K, \hat{\delta}; X \right) \right\| \leq 2\varepsilon_1, \quad (7.72)$$

$$\left\| \Delta g \left(\{\hat{S}_k\}_{k=1}^K, \tilde{\tilde{\delta}}; X \right) - \Delta g \left(\{\hat{S}_k\}_{k=1}^K, \hat{\delta}; X \right) \right\| \leq 2\varepsilon_1 \quad (7.73)$$

для всех $X = X_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Для каждого k достигнутый экстремум функционала Φ дает, по существу, прогноз точности оценивания эффективной плотности $\hat{\delta}_k$ по планируемым

гравиметрическим измерениям вкупе с соответствующей априорной информацией. В отличие от прежней модели прогнозирования размерность условно-экстремальных задач здесь намного ниже – $3K$. Отсутствуют коэффициенты, отвечающие за региональный фон, и вектор переменных ξ_i , отвечающих за возможные значения случайных помех в измерениях поля. Наконец, следует отметить, что прием с привлечением меры ε_1 расхождения подобранного и истинного полей (а теперь уже и вектора оптимальных оценок эффективных плотностей в роли некоего опорного допустимого решения обратной задачи) можно использовать и при решении линейной обратной задачи в рамках гарантированного подхода.

7.6. Результаты вычислительных экспериментов

Иллюстрацию особенностей гарантированного подхода мы начинаем с примеров решения линейных обратных задач гравиразведки. Уместно определиться вначале с тем, что мы ждем от подобных примеров. И следует ли вообще связывать качество алгоритма, реализующего гарантированный подход (да и состоятельность самого подхода), с качеством результатов интерпретации. Прежде всего напомним, что при демонстрации методов, реализующих концепцию единичного оптимального решения обратной задачи, успех или неудача их применения в каждом конкретном случае интерпретации были *делом случая*. При гарантированном подходе все обстоит иначе. Поскольку этот подход характеризует возможности не какого-то отдельного математического метода решения обратной задачи, а возможности самого геофизического метода в конкретных физико-геологических условиях, здесь совершенно нет необходимости подбирать «удачные» примеры для демонстрации достоинств алгоритма. Больше того, если с помощью гарантированного подхода удастся показать, что в каких-то ситуациях, ранее считавшихся «благополучными», реальные возможности гравиразведки в действительности не столь высоки, то гарантированный подход свою задачу выполнил.

Однако выйти на ту «критическую массу» модельных примеров, которые охватили бы все типичные ситуации, встречающиеся в практике интерпретации гравитационных полей и тем самым позволили бы раскрыть в полной мере истинные разрешающие способности гравиразведки, нереально. Подбирая примеры, авторы монографии исходили из того, что читателю, безусловно, будет проще проникнуться идеями гарантированного подхода, если результаты решения предложенных примеров будут иметь те качественные особенности, которые геофизик мог априори предвидеть, исходя из общих соображений и личного опыта. Авторы надеются, что предлагаемые этим подходом количественные оценки объема достоверной информации об источниках гра-

витационной аномалии, который в принципе можно извлечь из имеющихся совокупных данных, позволят читателю пересмотреть некоторые традиционные представления о реальных возможностях геофизического метода.

Пример 7.1. Мы позаимствовали его из статьи Т.В. Балк [1981₂]. Возмущающий объект сложен 13 призмами \hat{S}_k , образующие которых параллельны оси y , а основания лежат в плоскостях $y = -7$ и $y = 7$ (рис. 7.2). Координаты \bar{x}_k, \bar{z}_k центров тяжести призм, истинные плотности $\hat{\delta}_k$ призм, а также априорные границы $\delta_k^{(1)}$ и $\delta_k^{(2)}$ их возможных значений сведены в табл. 7.1. Интерпретация осуществляется по аномалии Δg , заданной в $n = 41$ точке $X_i = (x_i, 0, 0), x_{i+1} = x_i + 0,5, i = 1, 2, \dots, 40, x_1 = -6, 0$ (все физические величины в условных единицах). Фоновая компонента $U^{(\phi)}(X)$ отсутствует. Помимо двухсторонних оценок предполагаемых значений плотностей $\hat{\delta}_k$ заданы ограничения на максимально допустимые значения скачка плотности между соседними призмами $\hat{S}_{k(1)}$ и $\hat{S}_{k(2)}$ (табл. 7.2).

«Наблюденные» значения поля $\Delta \tilde{g}(x_i)$ осложнены нормально распределенной помехой ξ ; ее среднеквадратическое значение σ равно 0,0055, что состав-

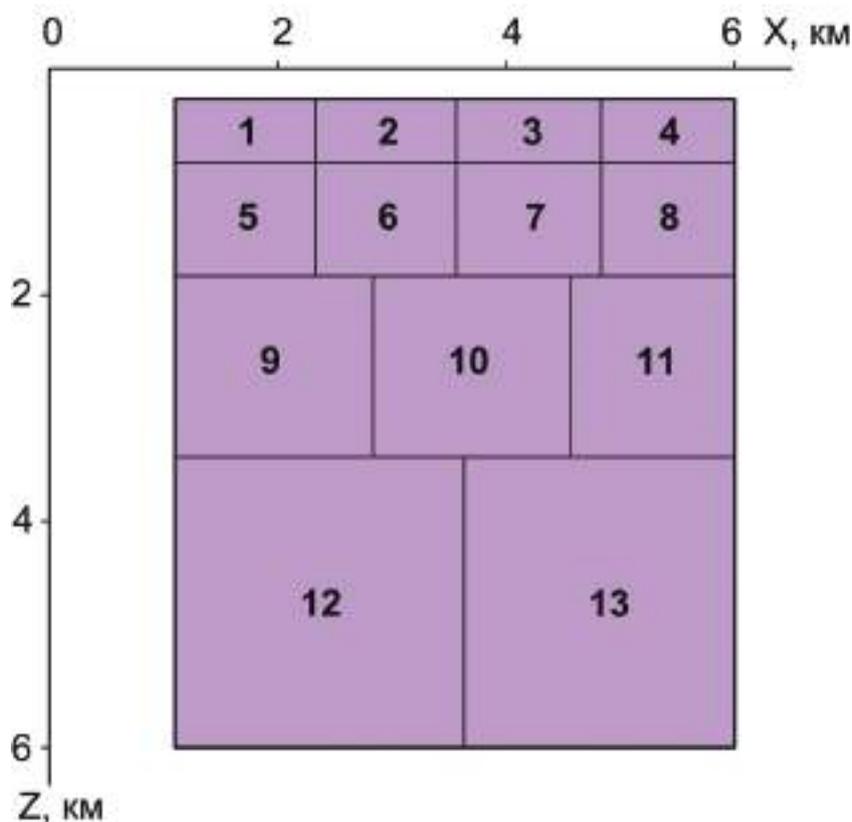


Рис. 7.2. Модель источников аномалии.

Таблица 7.1

Параметры возмущающего объекта

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
\bar{x}_k	1,62	2,88	4,12	5,38	1,62	2,88	4,12	5,38	1,83	3,50	5,16	2,25	4,75
\bar{z}_k	0,5	0,5	0,5	0,5	1,3	1,3	1,3	1,3	2,5	2,5	2,5	4,5	4,5
$\hat{\delta}_k$	0,20	0,25	0,20	0,18	0,25	0,30	0,30	0,25	0,40	0,40	0,40	0,50	0,50
$\delta_k^{(1)}$	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4
$\delta_k^{(2)}$	0,3	0,3	0,3	0,3	0,4	0,4	0,4	0,4	0,5	0,5	0,5	0,6	0,6

Таблица 7.2

Максимально допустимые значения «скачка» плотности между отдельными парами призм

$(k(1),k(2))$	(1,2)	(2,3)	(3,4)	(5,6)	(6,7)	(7,8)	(9,10)	(10,11)	(12,13)
$\Delta_{k(1),k(2)}$	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10	0,05	0,05	0,05
$(k(1),k(2))$	(1,5)	(2,6)	(3,7)	(4,8)	(5,9)	(6,10)	(8,11)	(9,12)	(11,13)
$\Delta_{k(1),k(2)}$	0,10	0,10	0,10	0,10	0,20	0,25	0,20	0,15	0,15

ляет 0,1% от амплитуды истинного поля $\Delta\hat{g}(x)$. Предполагается, что модули значения помех в каждом измерении гравитационного поля лежат в интервале $[0,3\sigma] = [0;0,0165]$.

Интерес к чебышевской метрике вызван тем, что она отвечает характеру ошибки, связанной с неадекватностью модели, а также характеру коррелированной остаточной ошибки фильтрации высокочастотной помехи методами регуляризации [Страхов, Валяшко, 1977]. Норма суммарной помехи в измерениях (включая помехи геологического характера) не обязательно должна непосредственно фигурировать в априорных ограничениях. Если помимо нормы помехи интерпретатор располагает какими-то другими данными о ней, то не всегда просто включить эти данные в систему ограничений при решении обратной задачи. В таком случае интерпретационный процесс целесообразно предварить процедурой фильтрации помехи (для алгоритма сглаживания учет этих данных может не представлять проблемы) и интерпретацию вести не по наблюдаемому полю, а по сглаженному. Соответственно, в качестве допустимых *по полю* вариантов распределения масс мы можем брать те, поле которых уклоняется от сглаженного на величину ε_0 , согласованную не только с уровнем помех в измерениях, но и с разрешающей способностью использованного алгоритма сглаживания. При благоприятных исходах даже несколько

завышенное значение ε_0 может оказаться существенно ниже уровня помех в измерениях. И это должно заметно сказаться на результатах интерпретации. В настоящее время в самой теории интерпретации построено достаточно большое число алгоритмов фильтрации, ориентированных на разнообразную априорную информацию о свойствах помех. Вспомним хотя бы цикл работ В.Н. Страхова, выполненных самостоятельно и в соавторстве [Страхов, 1977; Страхов, Валяшко, 1977; Валяшко, Страхов, 1984; Страхов, Иванов, 1988; Страхов, Старостенко, 1988].

Для реализации предложенной идеи можно привлечь методы фильтрации, разработанные в других науках, в частности в теории управления, и рассчитанные на достаточно общую информацию о помехах. Взять, к примеру, методы оценивания при почти произвольных помехах [Граничин, Поляк, 2003; Weuner et al., 2009]. Правда, всегда остается сомнение насчет эффективности общих методов, не учитывающих физическую природу сглаживаемых данных. Как бы то ни было, для многих известных методов фильтрации если не теоретически, то эмпирическим путем установлены надежные оценки их фильтрующих способностей – оценки показателя χ . Ясно, что χ -кратное уменьшение вариации возможных уклонов полей, отвечающих допустимым решениям обратной задачи, от поля построенного («опорного») решения не замедлит сказаться на качестве результатов количественной интерпретации в рамках гарантированного подхода.

Обсуждение результатов интерпретации начнем с табл. 7.3. В ней приведены минимально и максимально возможные (при заданных ограничениях)

Таблица 7.3
Результаты решения линейной обратной
задачи гравиразведки
(гарантированный подход)

k	$\delta_k^{(\min)}$	$\Delta\delta_k^{(1)}$	$\delta_k^{(\max)}$	$\Delta\delta_k^{(2)}$
1	0,156	0,056	0,258	0,042
2	0,199	0,099	0,300	0
3	0,161	0,061	0,298	0,002
4	0,150	0,050	0,222	0,078
5	0,200	0	0,311	0,089
6	0,200	0	0,366	0,034
7	0,200	0	0,329	0,071
8	0,200	0	0,300	0,100
9	0,351	0,051	0,475	0,025
10	0,316	0,016	0,500	0
11	0,351	0,051	0,468	0,032
12	0,443	0,043	0,540	0,060
13	0,451	0,051	0,532	0,068

значения $\delta_k^{(\min)}$, $\delta_k^{(\max)}$ эффективной плотности каждой из призм \hat{S}_k . Здесь же даны значения $\Delta\delta_k^{(1)} = \delta_k^{(\min)} - \delta_k^{(1)}$ и $\Delta\delta_k^{(2)} = \delta_k^{(2)} - \delta_k^{(\max)}$, на которые гарантированный подход позволяет уточнить априорные оценки нижней и верхней границ возможных значений плотностей $\hat{\delta}_k$.

Результаты расчетов согласуются с общими представлениями о том, что когда выдерживаются сравнительно близкие соотношения между геометрическими размерами парциальных носителей в модели источников поля и глубинами их залегания, гравиметрический метод позволяет с приблизительно одинаковой точностью оценивать эффективные плотности масс, расположенных на разных глубинах. Другое дело, дать строгую численную оценку возможностям гравirazведки в конкретных условиях интерпретации можно лишь на основе анализа множества допустимых решений обратной задачи, что и входит в функции гарантированного подхода.

Аналогичные расчеты были выполнены для случая, когда интерпретация осуществлялась по точным значениям поля, но все также предполагалось, что модули значений помехи в каждом из его измерений могут достигать, как и при предыдущих расчетах, величины 0,0165. Эти расчеты показали, что многократно используемый нами прием оправдан, и качество результатов интерпретации не столько зависит от фактического уровня помех, сколько от их предполагаемого уровня.

Достоинство гарантированного подхода состоит в возможности количественно оценить вклад той или иной априорной информации в достижимое качество результатов интерпретации с учетом того, какая цель поставлена перед гравиметрическим методом. В табл. 7.4 представлены результаты решения обратной задачи с помощью гарантированного подхода, когда по значениям минимально ($M^{(\min)}$) и максимально ($M^{(\max)}$) возможной эффективной массы всех тринадцати призм \hat{S}_k необходимо оценить длину интервала $\Delta M = M^{(\max)} - M^{(\min)}$, в который наверняка попало неизвестное значение \hat{M} . Дополнительно вычислен диапазон ΔM_1 возможных значений суммарной избыточной массы M_1 первых восьми призм \hat{S}_k и диапазон ΔM_2 возможных значений суммарной избыточной массы M_2 последних пяти призм \hat{S}_k .

Таблица 7.4

Результаты решения линейной обратной задачи гравirazведки при различном уровне помех в исходных данных (гарантированный подход)

	ΔM_1			ΔM_2			ΔM		
	$\sigma = 0,1$	$\sigma = 1,0$	$\sigma = 5,0$	$\sigma = 0,1$	$\sigma = 1,0$	$\sigma = 5,0$	$\sigma = 0,1$	$\sigma = 0,1$	$\sigma = 5,0$
А	10,7	18,6	21,0	10,8	28,9	49,2	3,2	16,8	41,1
Б	10,5	17,7	21,0	10,1	21,9	33,8	2,3	9,2	12,8
В	5,8	15,0	21,0	6,4	23,6	47,6	2,7	14,7	38,4
Г	5,8	14,7	20,5	5,8	19,5	31,5	1,3	7,7	11,3

Предоставим читателю возможность самому сопоставить разрешающие способности гравиразведки (разумеется, в пределах обсуждаемого примера) при наличии различных видов априорной информации и вклад каждого из типов информации в комбинации с другими. С этой целью были выполнены четыре группы расчетов – *A*, *B*, *B* и *Г*. В рамках каждой группы выполнено решение обратной задачи для трех значений σ фактического уровня помех, тогда как максимально допустимое значение модуля помехи, опять же, равнялось 3σ . Общим для всех четырех групп расчетов является использование ограничений типа (7.3) (за них отвечает табл. 7.1) и ограничения на максимально допустимое расхождение наблюденного и модельного полей в каждой точке измерения X_i (оно принимается равным 3σ). Как и в случае расчетов, представленных в табл. 7.3, в табл. 7.4 среднеквадратическое значение σ помехи в измерениях $\Delta g(x_i)$ дано в процентном отношении к амплитуде точного поля $\Delta \hat{g}(x)$. В вариантах расчетов, относящихся к группам *B* и *B*, используются дополнительные ограничения, помимо тех, что приняты в расчетах, относящихся к группе *A*. Так, в вариантах расчетов из группы *B* используется предположение о нулевом среднем значении помех. В вариантах расчетов из группы *B* используется ограничение на гладкость допустимых решений согласно табл. 7.2. В вариантах расчетов из группы *Г* используются наиболее жесткие, в сравнении с тремя другими группами расчетов, ограничения; в них присутствует как ограничение на нулевое среднее помехи, так и требование гладкости допустимых решений обратной задачи.

Налицо все те тенденции в поведении результатов интерпретации, которые можно было ожидать, исходя из физических соображений. Другое дело, что гарантированный подход придает этим тенденциям количественную «окраску». Обратим внимание на следующий факт: если в одних условиях определенная информация G_1 является более предпочтительной, чем информация G_2 , то в других условиях все может оказаться с точностью до наоборот. Так, при оценке избыточной массы первых восьми призм условие равенства нулю среднего значения помехи в измерениях оказалось менее информативным, чем условие гладкости допустимых распределений плотностей, тогда как при оценке избыточной массы последних пяти призм при уровне помех $\sigma = 1,0$ и $\sigma = 5,0$ имеет место противоположный вывод. В каких-то случаях отдельные ограничения вообще становятся нерезультативными. Так, при $\sigma = 5,0$ в вариантах *A*, *B* и *B* минимально и максимально допустимые значения массы первых восьми призм \hat{S}_k определяются значениями $\delta_k^{(1)}$, $\delta_k^{(2)}$ и не зависят от наличия ограничений на гладкость допустимых решений и среднее значение помехи в измерениях.

Остается задать один риторический вопрос с заведомо известным ответом: а могли бы традиционные методы интерпретации оценить вклад отдельных типов априорной информации в качество «оптимального» решения $\delta^* = (\delta_1^*, \delta_2^*, \dots, \delta_k^*)$ (не выходя за рамки информации, которая заложена в это

решение), если эти методы даже не имеют возможности объективно оценить в целом качество такого решения?

Приведем результаты еще одной серии расчетов для рассматриваемой модели источников гравитационного поля. Они направлены на условие гладкости решения обратной задачи гравиразведки, которое зарекомендовало себя как мощный фактор, позволяющий заметно ослабить неустойчивость решений обратных задач [Старостенко, 1978]. В многочисленных примерах, иллюстрирующих этот факт, используется классическая формализация условия гладкости через стабилизирующий функционал. Без сомнения, представляет интерес анализ максимально возможных погрешностей интерпретации при использовании другой, отличной от интегральной, формы задания условия гладкости. Собственно, мы этим уже занимались, задавая ограничения на максимально допустимые скачки $\Delta_{k(1),k(2)}$ плотности соседних призм $\hat{S}_{k(1)}$ и $\hat{S}_{k(2)}$. Но во всех предыдущих расчетах мы не обходились без двусторонних ограничений на допустимые значения плотностей призм \hat{S}_k . В этой связи у читателя может создаться ложное представление, что без этих ограничений указанный выше «эффект призматических моделей» подавить невозможно. Впрочем, в этом не было бы никакой беды, поскольку упомянутые двусторонние ограничения носят естественный характер и не снижают общность постановки обратной задачи.

По результатам использования гарантированного подхода в табл. 7.5 для каждой призмы \hat{S}_k приведены: максимально возможное превышение $\delta_k^{(\max)} - \hat{\delta}_k$ допустимого значения $\delta_k^{(\max)}$ плотности над истинным значением $\hat{\delta}_k$, а также

Таблица 7.5

**Оценка точности решения линейной обратной задачи
с использованием гарантированного подхода**

k	$\delta_k^{(\max)} - \hat{\delta}_k$				$\hat{\delta}_k - \delta_k^{(\min)}$			
	A	B	B	Γ	A	B	B	Γ
1	0,100	0,064	0,082	0,051	0,066	0,047	0,028	0,002
2	0,119	0,096	0,077	0,047	0,072	0,047	0,047	0,018
3	0,119	0,103	0,107	0,049	0,063	0,039	0,040	0,017
4	0,108	0,076	0,096	0,052	0,045	0,027	0,036	0,002
5	0,088	0,070	0,050	0,032	0,082	0,010	0,067	0,007
6	0,084	0,064	0,039	0,015	0,143	0,118	0,104	0,071
7	0,045	0,028	0,030	0,015	0,161	0,143	0,133	0,071
8	0,079	0,061	0,053	0,030	0,078	0,007	0,071	0,006
9	0,094	0,043	0,071	0,021	0,066	0,014	0,058	0,010
10	0,128	0,043	0,108	0,021	0,092	0,014	0,087	0,010
11	0,084	0,043	0,069	0,021	0,065	0,014	0,059	0,010
12	0,054	0,010	0,049	0,005	0,085	0,038	0,074	0,021
13	0,046	0,010	0,045	0,005	0,085	0,038	0,072	0,021

максимально возможное превышение $\widehat{\delta}_k - \delta_k^{(\min)}$ истинного значения $\widehat{\delta}_k$ над минимально допустимым значением $\delta_k^{(\min)}$. Помеха измерения аномалии составляет здесь 0,3% от ее амплитуды. При этом, помимо ограничений на степень гладкости допустимых решений (табл. 7.6) используется прежнее ограничение на максимальное расхождение наблюдаемых и подобранных значений поля в точках измерений X_i . Мы намеренно ввели в постановку задачи элемент неадекватности: дополнительно считалось, что среднее значение помехи в поле равно нулю, хотя среднее значение реализаций случайной величины, используемых в качестве «помех измерений», этому условию не удовлетворяло. Обратим внимание, что вариант А отвечает наименее жестким ограничениям на гладкость, а вариант Г – наиболее жестким. Все это нашло отражение в результатах, приведенных в табл. 7.5.

Пример 7.2. Рассмотрим ситуацию, когда, в отличие от предыдущего примера, модель источников поля не отвечает условию «чем глубже расположен парциальный носитель, тем большие размеры он должен иметь, чтобы точность решения обратной задачи была примерно одинаковой по всему изучаемому объему геологического пространства».

Как отмечалось, результаты расчетов на модельных примерах станут более наглядными, если не будут зависеть от специфики конкретной выборки случайных чисел, имитирующих помехи в измерениях поля. С этой целью в качестве наблюдений $\Delta\tilde{g}(x_i)$ берутся точные значения поля. Однако, использовать этот факт алгоритму решения обратной задачи запрещается. Как и прежде, предполагается, что заданные значения поля содержат помехи с неточно известным среднеквадратическим значением σ . Считается, что этой размытой информации достаточно, чтобы назвать такое ε , что модули помех ξ_i его наверняка не превосходят. Таким образом, точное решение обратной задачи здесь следует рассматривать лишь как отдельное допустимое решение обратной задачи, и, конечно же, не спекулировать на том, что простой метод подбо-

Таблица 7.6

Допустимые скачки плотности между отдельными парами призм

$(k(1), k(2))$	А	Б	В	Г	$(k(1), k(2))$	А	Б	В	Г
(1,2)	0,10	0,10	0,05	0,05	(2,3)	0,10	0,10	0,05	0,05
(3,4)	0,10	0,10	0,02	0,02	(5,6)	0,10	0,10	0,05	0,05
(6,7)	0,10	0,10	0,05	0,05	(7,8)	0,10	0,10	0,05	0,05
(9,10)	0,05	0	0,05	0	(10,11)	0,05	0	0,05	0
(12,13)	0,05	0	0,05	0	(1,5)	0,10	0,10	0,05	0,05
(2,6)	0,10	0,10	0,05	0,05	(3,7)	0,10	0,10	0,10	0,10
(4,8)	0,10	0,10	0,07	0,07	(5,9)	0,20	0,15	0,20	0,15
(9,12)	0,15	0,10	0,15	0,10	(8,11)	0,20	0,15	0,20	0,15
(11,13)	0,15	0,10	0,15	0,10					

ра без какой-либо дополнительной информации позволил по точно заданному полю получить точное решение обратной задачи.

Источник аномалии Δg , заданной в 21 точке $X_i = (x_i, 0, 0)$, $x_i = 2,5(i - 6,2)$ – совокупность из $K = 10$ призм \hat{S}_k , с основаниями, расположенными в плоскостях $y = -3$ и $y = 3$ (пример модельный, можно ограничиться условными единицами). Неизвестные истинные значения эффективной плотности $\hat{\delta}_k$ каждой из призм \hat{S}_k равны 1,0, но алгоритм не знает, что аномалия, по сути, порождается однородным телом (рис. 7.3). Известны лишь границы возможных значений $\delta_k^{(1)} = 0,9$ и $\delta_k^{(2)} = 1,1$ для всех k . Вводится условие гладкости кусочно-постоянного распределения плотностей в пределах области, занятой аномалиеобразующими массами: для всех пар $(k(1), k(2))$ номеров призм \hat{S}_k , граничащих хотя бы по неполной грани, $\Delta_{k(1),k(2)} = 0,05$. Предполагается, что измерения равноточны (повторим, алгоритм «не знает», что помеха отсутствует) и среднее значение помехи равно 0. Расчеты выполнены для различных значений ε – максимально допустимых уклонений в точках X_i поля модели от наблюдаемого поля (значение ε берется в процентном отношении к амплитуде наблюдаемого поля).

Табл. 7.7 отражает влияние неопределенности, обусловленной выбранным значением ε при наличии других типов априорных ограничений, на разрешающие возможности гравirazведки в конкретных условиях интерпретации. В ее первых $K = 10$ строках k приведены те значения $\Delta\delta_k^{(2)} = \delta_k^{(2)} - \delta_k^{(\max)}$, на которые можно уточнить верхние априорные границы $\delta_k^{(2)}$ для неизвестного значения $\hat{\delta}_k$ плотности призмы \hat{S}_k . В последней строке таблицы приводится значение функционала ν_1 информативности результатов интерпретации в

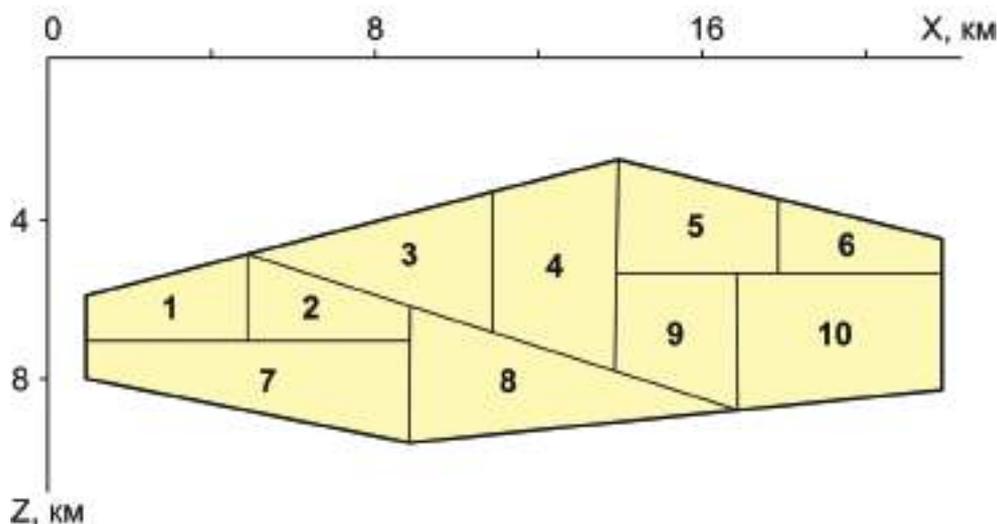


Рис. 7.3. Модель источников аномалии (указаны номера призм).

Таблица 7.7

**Влияние неопределенности на точность
решения линейной обратной задачи гравиразведки**

k	$\varepsilon = 0,1$	$\varepsilon = 0,3$			$\varepsilon = 1,0$		$\varepsilon = 2,0$	$\varepsilon = 3,0$
		A	B	B	Γ	D		
1	0,061	0,047	0,047	0	0,015	0,018	0	0
2	0,056	0,050	0,050	0	0,032	0,039	0,014	0,006
3	0,067	0,055	0,054	0	0,039	0,039	0,023	0,018
4	0,075	0,065	0,063	0,017	0,050	0,051	0,034	0,033
5	0,074	0,058	0,058	0,010	0,046	0,045	0,032	0,032
6	0,060	0,050	0,050	0	0,030	0,036	0,010	0
7	0,061	0,049	0,049	0	0,024	0,029	0,007	0,001
8	0,054	0,049	0,049	0	0,037	0,042	0,032	0,031
9	0,054	0,048	0,048	0	0,037	0,039	0,030	0,029
10	0,070	0,061	0,061	0	0,042	0,049	0,023	0,007
ν_1	0,632	0,532	0,529	0,027	0,352	0,393	0,205	0,150

форме (7.16). В нем нашли отражение и те, не вошедшие в таблицу величины, на которые можно уточнить нижние априорные границы $\delta_k^{(1)}$.

Со значением $\varepsilon = 0,3$ проведены несколько расчетов: вариант A – все перечисленные ранее ограничения заданы; B – отсутствует допущение о нулевом среднем значении помехи; B – сняты ограничения на гладкость решения. Со значением $\varepsilon = 1,0$ проведены два численных эксперимента – Γ и D , оба со всеми ограничениями. Но в варианте D , в отличие от всех других, где $\Delta\tilde{g}(X_i) = \Delta\hat{g}(X_i)$, наблюдаемые значения $\Delta\tilde{g}(X_i)$ действительно содержат помехи, в роли которых выступают реализации нормально распределенной случайной величины со среднеквадратическим значением $\sigma = 0,3\varepsilon$.

В результатах расчетов читатель легко обнаружит ряд тенденций, существование которых можно было ожидать исходя из общих представлений и опыта решения модельных примеров в рамках традиционных подходов. Гарантированный подход помог лишь придать этим тенденциям количественное выражение. Так, наблюдается почти полное отсутствие информативности ограничения на нулевое среднее помехи (сравним варианты A и B) и высокая эффективность ограничения на гладкость решения обратной задачи (об этом свидетельствует вариант B , в котором это ограничение не использовалось). Укажем и на возможность обезопасить себя от случайного характера результатов, связанного со спецификой конкретной выборки помех в измерениях при решении модельных примеров. Для этого достаточно в качестве наблюдаемого поля использовать точное, но «не сообщать» об этом алгоритму, заставляя его видеть допустимое решение обратной задачи в каждом приближенном решении, отличающимся по полю от «наблюдаемого» не более чем на ε . На

такую возможность указывают мало различающиеся между собой результаты интерпретации, представленные в вариантах Γ и Δ .

Теперь несколько замечаний общего характера. Очевидно, что сам по себе уровень развития математической теории решения обратных задач еще не определяет степень его фактического влияния на практику интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Многие определяются программным обеспечением, которым располагает интерпретатор. По известным причинам программные разработки всегда заметно отставали от текущего состояния теории интерпретации гравитационных аномалий. Актуальным остается тезис, сформулированный в свое время ведущими отечественными геофизиками [Страхов и др., 1982], согласно которому центральной проблемой при разработке программного обеспечения разведочной геофизики является создание интерпретационных систем, представляющих собой совокупность взаимодополняющих и технологически связанных между собой методов нахождения информации по геофизическим данным. В этой связи весьма привлекательной выглядит идея использования уже созданного программно-математического обеспечения, используемого при решении обратных задач гравиразведки традиционными методами, но теперь уже для нужд гарантированного подхода.

При обсуждении предыдущего примера мы отмечали, что в технологиях интерпретации, реализующих концепцию гарантированного подхода, с успехом могут быть использованы известные методы сглаживания экспериментальных зависимостей. Здесь же мы хотим акцентировать внимание на том, что единичное (оптимальное) решение обратной задачи, построенное в рамках традиционного подхода, может стать своеобразным «опорным» решением, благодаря которому удастся, с одной стороны, очертить более реалистичные границы множества Q допустимых решений обратной задачи, а с другой – уменьшить технологические трудности реализации гарантированного подхода. Позитивный момент здесь в том, что – в отличие от подхода с предварительной фильтрацией помех с помощью класса функций, напрямую не связанных со структурой модельного поля – поле опорного решения обратной задачи принадлежит тому же узкому классу функций, что модельные поля допустимых распределений масс.

Так, пусть функция $U^*(X)$ – поле масс, вектор эффективных плотностей δ^* которых был построен в результате решения обратной задачи одним из алгоритмов подбора в рамках «призматической» модели плотностной среды. Точность $\|\delta^* - \hat{\delta}\|$ приближенного решения сейчас не имеет особого значения. В принципе вектор δ^* мог бы даже не быть допустимым решением обратной задачи. Важно лишь одно – максимизировать отношение χ невязки наблюдаемого и истинного полей к невязке сглаженного и истинного полей. При использовании сглаженного поля U^* вместо наблюдаемого \tilde{U} априорная

информация о свойствах помех будет учитываться явным образом всего один раз – при построении аппроксимации $U^*(X)$. Далее априорная информация будет фигурировать уже неявно, в сжатом виде, как χ -кратное уменьшение (в сравнении с нормой $\|\tilde{U}(X) - \hat{U}(X)\|$) возможного уклонения сглаженного поля $U^*(X)$ от неизвестного истинного поля $\hat{U}(X)$.

Авторы монографии рискнут предположить, что в случае линейной обратной задачи гравиразведки методы решения задач линейного программирования плюс эффективные методы подавления случайных помех в экспериментальных данных при различной априорной информации о свойствах помех, плюс развитое программное обеспечение уже вполне достаточны для реализации идеи гарантированного подхода.

Пример 7.3. Суть гарантированного подхода в рудной обратной задаче поясним двумя методическими примерами. В первом из них аномалия Δg , обусловленная двумя бесконечными горизонтальными цилиндрами \hat{S}_1 и \hat{S}_2 радиуса 1 и координатами центров тяжести $\bar{x}_1 = 2,0$, $\bar{z}_1 = 2,5$ и $\bar{x}_2 = 6,5$, $\bar{z}_2 = 4,0$, соответственно, задана на профиле вкрест простирания тел в точках $x_i = -4 + i$, $i = 1, 2, \dots, 16$ и содержит нормальную помеху со среднеквадратическим значением $\sigma = 0,02$ (все размерности в условных единицах), что составляет 0,7% от ее максимального значения. Эффективная плотность $\hat{\delta}$ каждого из тел равна 1. Рис. 7.4 иллюстрирует динамику изменения геометрии и меры областей $D_1^{(k)}$ и $D_2^{(k)}$, $k = 1, 2$, с увеличением априорной оценки σ_0 предполагаемого уровня помех. Для значения $\sigma_0 = 0,03$ приводятся также результаты интерпретации, построенные в предположении, что эффективная плотность каждого из тел равна 2 (см. рис. 7.4г).

Легко видеть, как, начиная с некоторого значения предполагаемого уровня помех, множества $D_2^{(k)}$ вырождаются в пустые множества (причем, как и следовало ожидать, такое происходит вначале с более глубоко залегающим парциальным носителем). Также легко заметить, как с ростом предполагаемого значения σ_0 происходит расширение парциальных областей $D_1^{(k)}$, $k = 1, 2$, причем в какой-то момент эти области сливаются в одну связную область (см. рис. 7.4а). Последнее означает, что некоторые точки пространства в принципе могли бы быть как точками тела \hat{S}_1 , так и точками тела \hat{S}_2 .

Пример 7.4. Аномалия Δg обусловлена двумя однородными призмами \hat{S}_1 и \hat{S}_2 (рис. 7.5), плотности которых – 0,15 и 0,1 г/см³ – считаются известными. Чтобы исключить фактор неадекватности модельных представлений, поиск допустимых решений обратной задачи ведется среди пар однородных призм с прямоугольным сечением. Чтобы исключить неопределенность в отношении того, действительно ли в построениях использовалось репрезентативное подмножество Q_0 допустимых решений обратной задачи, осуществлялся прямой перебор геометрических параметров призм на достаточно густой сетке их возможных значений с последующей отбраковкой (по значению невязки)

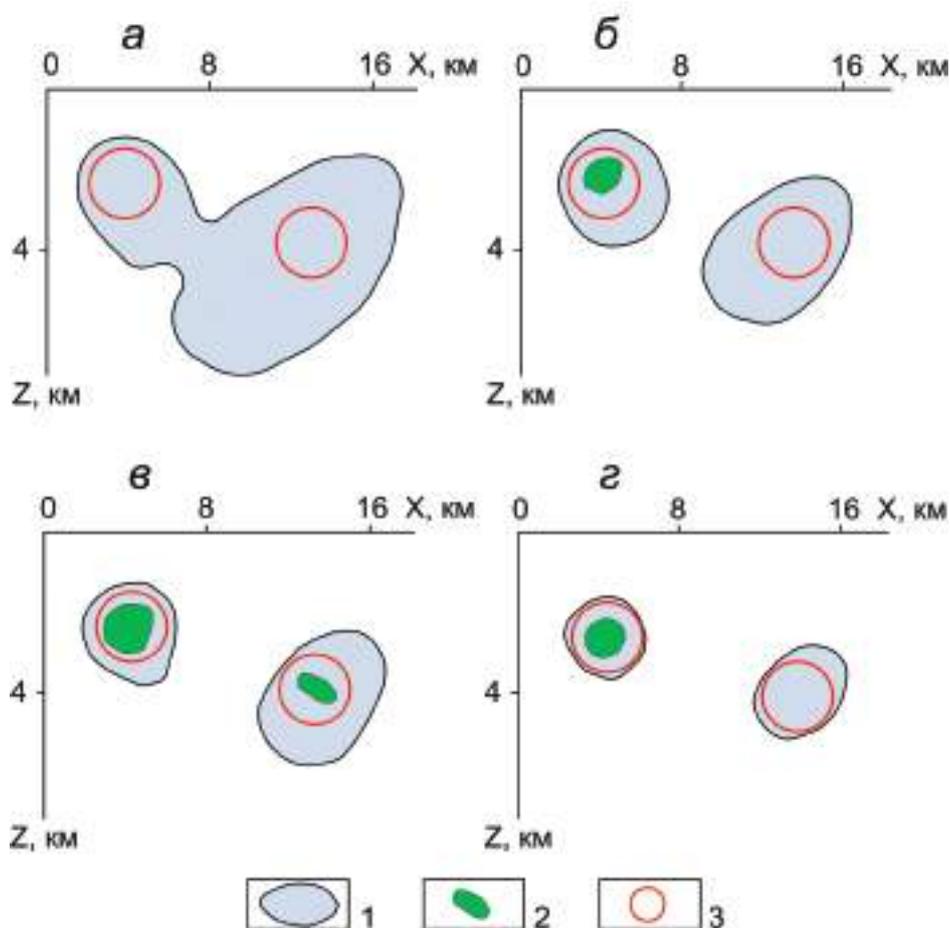


Рис. 7.4. Результаты решения рудной обратной задачи на основе гарантированного подхода при различном предполагаемом уровне σ_0 помех в измерениях поля: $a - \sigma_0 = 0,08$, $б - \sigma_0 = 0,05$, $в - \sigma_0 = 0,03$, $г - \sigma_0 = 0,03$, но $\hat{\delta} = 2$. 1 – области $D_1^{(k)}$; 2 – области $D_2^{(k)}$, 3 – границы источников аномалии.

неприемлемых решений. Наконец, чтобы не быть связанными с определенной выборкой случайных чисел, имитирующих помехи в измерениях поля, интерпретация намеренно осуществляется по точному полю, однако считается, что алгоритму это неизвестно.

Представлены решения обратной задачи при различных предположениях относительно максимально возможного уровня ε^{\max} помех в измерениях. Логично было ожидать (и это подтвердилось), что в некотором диапазоне значений ε^{\max} уровень неопределенности позволяет выявить фрагмент лишь одного, менее глубоко залегающего тела \hat{S}_1 . Если бы не априорное ограничение, согласно которому тело \hat{S}_1 лежит левее плоскости $x = 25$ км, а тело \hat{S}_2 – правее

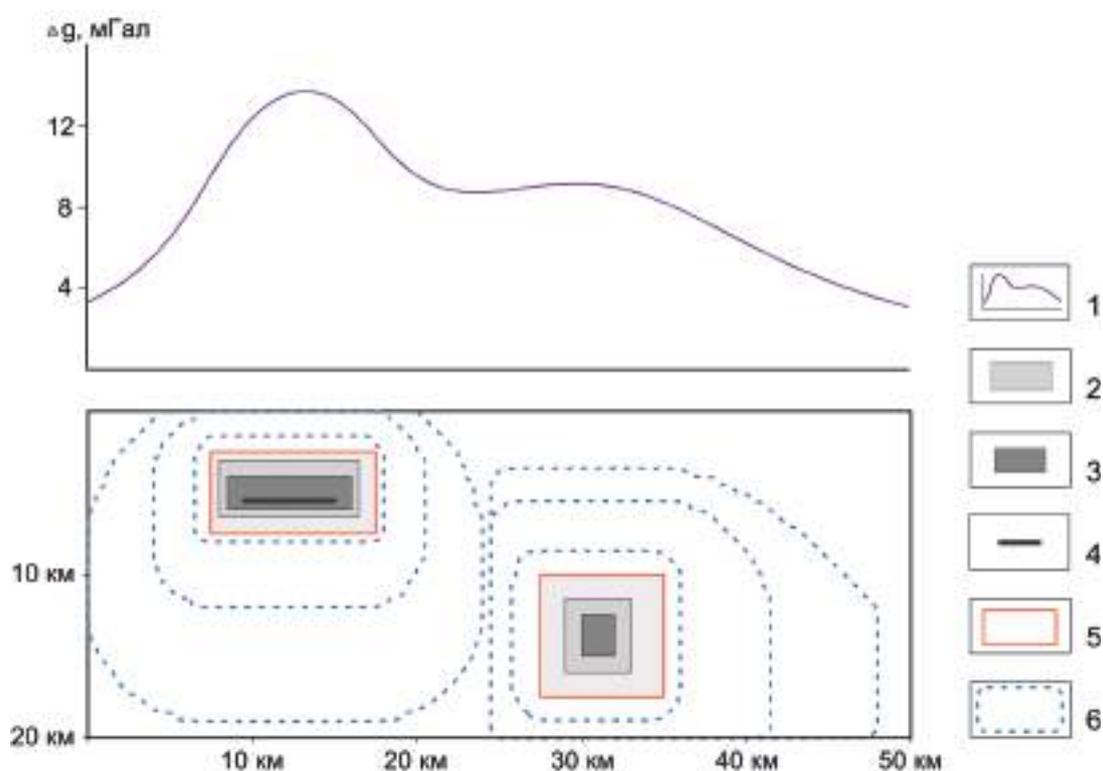


Рис. 7.5. Результаты решения рудной обратной задачи на основе гарантированного подхода: 1 – поле Δg ; 2, 3, 4 – фрагменты среды, гарантированно принадлежащие источникам поля при условии, что уровень помех в измерениях не превосходит: 0,4 мГал (2), 0,7 мГал (3), 1,2 мГал (4); 5 – границы аномалиеобразующих тел; 6 – границы областей, гарантированно содержащих источники аномалии в предположении, что уровень помех в измерениях не превосходит 0,4 мГал, 1,5 мГал и 2,5 мГал.

этой плоскости, то можно было бы отметить, как, начиная с некоторого ε^{\max} , области $D_1^{(1)}$ и $D_1^{(2)}$ начинают пересекаться. Это означало бы, что достигнут такой уровень неопределенности, при котором некоторая часть геологического пространства могла бы быть фрагментом либо первого, либо второго аномалиеобразующего тела.

Пример 7.5. На рис. 7.6 приведены результаты решения обратной задачи гравиразведки по данным крупномасштабной гравиметрической съемки, выполненной над месторождением медно-никелево-платиновых руд Норильск-1.

В основу модели среды положены следующие допущения: аномалия в основном обусловлена рудоносной интрузией базит-гипербазитового состава, обладающей эффективной плотностью (по отношению к вмещающим поро-

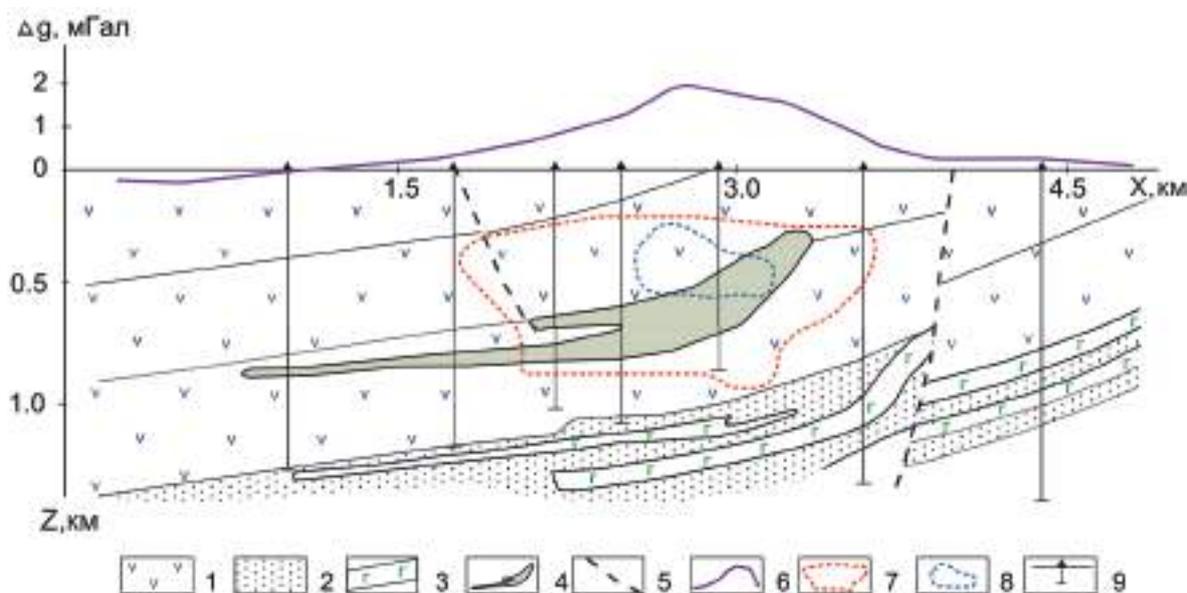


Рис. 7.6. Результаты интерпретации гравитационного поля месторождения медно-никелево-платиновых руд Норильск-1: 1 – породы туфовой толщи; 2 – отложения тунгусской серии; 3 – силлы габбро-долеритов; 4 – рудоносная интрузия; 5 – дизъюнктивные нарушения; 6 – локальная составляющая наблюдаемого поля; фрагменты пространства: 7 – построенная оценка области D_1 ; 8 – построенная оценка области D_2 ; 9 – буровые скважины.

дам трапповой формации) $\delta = 0,2 \text{ г/см}^3$. С помощью монтажного метода при различных центрах кристаллизации (начальных приближениях) было построено около 400 различных вариантов конфигурационных распределений масс, удовлетворяющих априорным допущениям. Их синтез позволил выделить область D_2 (см. рис. 7.6), которая, как мы полагаем, с высокой степенью достоверности принадлежит источнику аномалии при предполагаемом уровне помех $\varepsilon = 0,15 \text{ мГал}$ (что примерно отвечает точности гравиметрической съемки).

Смещение этой области в верхнюю часть разреза (относительно фактического положения рудоносной интрузии) связано с неучтенным ореолом уплотнения вмещающих эффузивных пород, что весьма характерно для над-интрузивных зон месторождений Норильского района.

Мы не видим особого смысла в том, чтобы привести большое число модельных примеров, поясняющих суть гарантированного подхода в рудной постановке обратной задачи. Тем более что в следующей главе речь пойдет о более общих, аддитивных технологиях интерпретации, перекрывающих по своим возможностям технологии, реализующие концепцию гарантированного подхода. Мы также не видели смысла использовать при иллюстрации га-

рантированного подхода более сложные модельные примеры, чтобы не оттягивать главное второстепенными деталями.

Пример 7.6. Далее рассмотрим два примера, относящихся к проблеме построения прогнозных оценок качества результатов интерпретации в линейной постановке задачи.

В этом модельном примере (единицы измерения условные) возмущающий объект сложен четырьмя горизонтальными однородными призмами \hat{S}_k , ограниченными по простиранию плоскостями $y = -40$ и $y = 40$ (рис. 7.7). По априорным ограничениям эффективные плотности каждой из призм лежат в интервале $[0,1;0,3]$. Предполагается, что норма ε погрешности в планируемых измерениях $\Delta\tilde{g}(x_i)$ не будет превосходить $1,5 \cdot 10^{-3}$, что составляет около 0,1% от амплитуды аномалии в случае эффективных плотностей, равных 0,2. Задача прогнозирования решена для нескольких вариантов планируемых измерений поля Δg . В вариантах 1 и 2 $-x_i = -5 + 2i$. В варианте 3 взят укороченный профиль наблюдений $-x_i = 1 + i$. В варианте 4 $-x_i = -11 + 3i$. Наконец, в варианте 5 $-x_i = -4 + i$. В первых четырех вариантах число точек измерения равно 11, в последнем – 21. В варианте 1 допускается наличие постоянного фона, значение которого может оказаться в пределах $[-0,2;0,2]$. В остальных вариантах фон отсутствует.

Результаты расчетов (по схеме, не предусматривающей предварительную фильтрацию помех) сведены в табл. 7.8, в которой представлены отношения (в %) прогнозных оценок длин интервалов, в которые могут попасть неизвестные значения эффективных плотностей $\hat{\delta}_k$, к длинам априорных интервалов

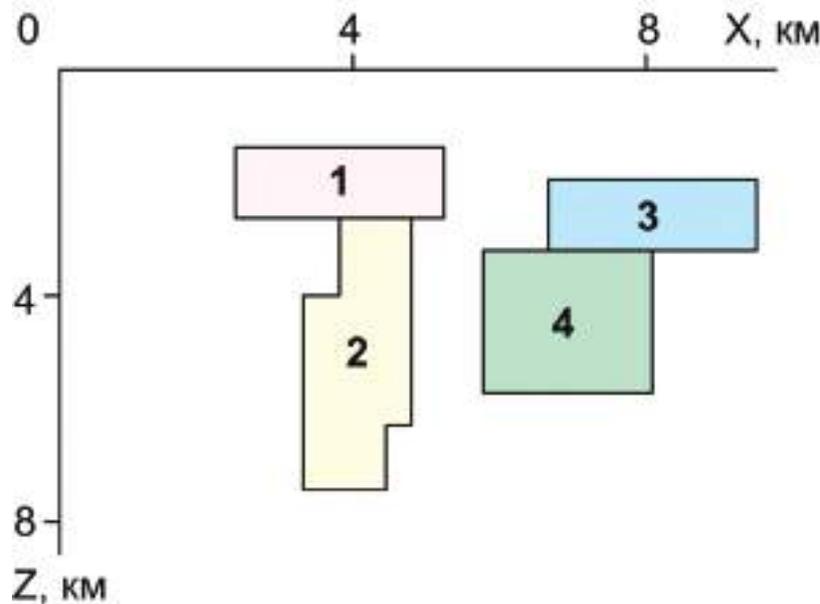


Рис. 7.7. Модель геоплотностного разреза (сечение плоскостью $y = 0$).

Таблица 7.8

Отношения (в %) значений прогнозных оценок точности определения плотностей к длинам априорных интервалов $(\delta_k^{(1)}, \delta_k^{(2)})$

Номер призмы	Варианты измерений поля				
	1	2	3	4	5
1	4,15	3,05	4,25	3,00	2,75
2	4,70	4,15	3,85	4,65	3,85
3	5,90	5,30	4,90	5,70	4,30
4	5,70	3,85	5,40	4,30	3,75

$(\delta_k^{(1)}, \delta_k^{(2)})$. Как следует из этой таблицы, изменение условий геофизического эксперимента неоднозначно сказывается на качестве прогнозных оценок: для одних призм \hat{S}_k изменение сети $\{x_i\}$ точек измерения поля ведет к улучшению этих оценок, для других – к ухудшению. Увеличение числа n точек измерения так же не в равной мере (сравни варианты 2 и 5) сказывается на относительных значениях оцениваемых функционалов. Однако главная ожидаемая тенденция подтвердилась в варианте 5, где число точек почти в 2 раза больше, чем в каждом из других четырех вариантов. Прогнозные оценки (причем по каждой из призм) здесь наилучшие. Точно так же, вполне ожидаемо, что качество прогнозных оценок в варианте 2, где присутствует фон, ниже, чем в варианте 1.

Отметим еще один результат, относящийся к априорному оцениванию пороговых значений погрешности съемки в варианте 1. Для гарантированного определения эффективной массы источников аномалии с ошибкой, не превосходящей 5% от разброса значений массы, предопределенного разбросом эффективных плотностей, норма ошибки измерений поля не должна превосходить $9,6 \cdot 10^{-3}$.

Пример 7.7. По результатам численных расчетов обсудим ситуацию, когда задача прогнозирования (в рамках линейной постановки, когда геометризация носителей источников выполнена исходя из каких-то косвенных данных) имеет целью установить максимальный (пороговый) уровень ε_{nop} помех в проектируемых измерениях гравитационного поля Δg , при котором гарантия решения поставленной задачи еще будет обеспечена.

Прототипом плотностной модели послужил укрупненный геологический разрез на одном из полиметаллических месторождений Восточного Казахстана [Балк и др., 1990]. Считается, что в имеющихся геологических условиях можно ожидать, что на глубинах 800–1000 м может находиться оруденение (рис. 7.8, тело 6). Цель планирования заключается в установлении максимально допустимого (порогового) уровня ε_{nop} помех в проектируемых измерениях $\Delta \tilde{g}(x_i)$, $x_{i+1} - x_i = 0,3$ км, $i = 1, 2, \dots, n$, $n = 20$, $x_1 = -30$, по результатам которых тело \hat{S}_6 – в случае если гипотеза о наличии оруденения справедлива и все предпо-

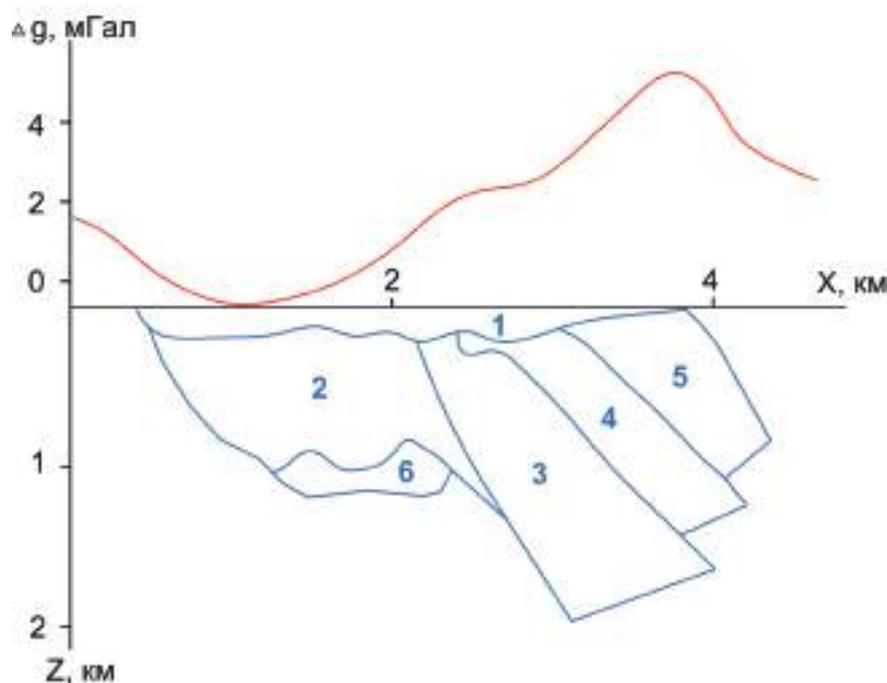


Рис. 7.8. Теоретическая модель для иллюстрации методики построения прогнозных оценок качества результатов интерпретации (цифрами показаны номера геологических тел).

сылки адекватны реальным природным соотношениям – будет строго идентифицировано как рудоносное.

Будем исходить из того, что на практике границы эффективных плотностей пород в схожих с рассматриваемым случаем геолого-геофизических условиях устанавливаются по данным петрофизических исследований. В нашем примере все варианты возможных значений эффективных плотностей $\hat{\delta}_k$ масс, распределенных по парциальным носителям \hat{S}_k с номерами $k = 1, 2, 3, 4, 5$, определяются по табл. 7.9. Соответственно, считается, что при интерпретации гравитационной аномалии ограничения на допустимые значения (теперь уже не природных, а модельных) эффективных плотностей $\tilde{\delta}_k$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$ будут выбраны также в соответствии с табл. 7.9. Особая ситуация возникает с плот-

Таблица 7.9

Априорные оценки допустимых значений плотностей, в г/см³

n	1	2	3	4	5	6
δ_{\min}	-0,22	-0,12	0,16	-0,12	0,15	0,03
δ_{\max}	-0,18	-0,08	0,20	-0,08	0,19	0,67

ностями $\hat{\delta}_6$ и $\tilde{\delta}_6$. Значение $\hat{\delta}_6$ мы подчинили неравенству $0,63 \leq \hat{\delta}_6 \leq 0,67$ (в г/см³), что на практике могло бы соответствовать гипотезе о наличии оруденения с эффективной плотностью $0,65 \pm 0,02$ г/см³. Если исходить из того, что при решении обратной задачи по тем гравиметрическим измерениям, которые предстоит еще выполнить, геофизику будет необходимо подтвердить или опровергнуть гипотезу о наличии оруденения в области \hat{S}_6 , то ограничение на допустимую плотность $\tilde{\delta}_6$ должно предоставить этой плотности достаточную свободу, не стесненную гипотезой о рудном составе тела \hat{S}_6 . Мы положили $0 \leq \tilde{\delta}_6 \leq 0,67$. Таким образом, ограничения на эффективную плотность $\tilde{\delta}_6$ в допустимых решениях обратной задачи охватывают как гипотезу о рудосодержащей области пространства \hat{S}_6 , так и альтернативу этой гипотезе. Подчеркнем, что эффективные плотности первых пяти тел \hat{S}_k , отвечающих за вмещающую среду, играют в нашем случае роль мешающих параметров.

Предположим, что геофизик задался нижней границей (пороговым значением) эффективной плотности $\delta_{pyd}^{(min)}$ оруденения, превышающей эффективные плотности более легких пород, которые заполняют области \hat{S}_k , $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Тогда поставленная задача прогнозирования будет заключаться в отыскании такого (максимального) уровня помех $\varepsilon_{пор}$ в планируемых измерениях $\Delta\tilde{g}(x_i)$, что при *всех вариантах* возможного распределения плотностей $\hat{\delta}_k$ и любом раскладе помех ξ_i в гравиметрических измерениях среди *всех множеств* Q допустимых решений обратной задачи $\tilde{\delta}$, отвечающих каждому из этих вариантов, не найдется *ни одного* такого, где $\tilde{\delta}_6 < \delta_{pyd}^{(min)}$.

В отличие от случая, рассмотренного в предыдущем разделе главы, минимизируемый функционал $\Phi(\tilde{\delta}) = \tilde{\delta}_6$, и здесь нет необходимости в векторе $\tilde{\delta}$. В рассматриваемом примере выбрано значение $\delta_{pyd}^{(min)} = 0,2$ г/см³. Опробуя различные значения уровня помех в измерениях, было установлено, что $\varepsilon_{пор} = 0,03$ мГал.

Пример 7.8. В главе 5 было сказано, что дальнейшим расширением возможностей монтажного подхода является использование нечетких представлений о плотности источников поля. Благодаря многочисленным примерам совпадения аномальных эффектов различных однородных по плотности тел сложилось мнение, что результаты совместного оценивания физических и геометрических параметров объекта не могут быть удовлетворительными. Объективной предпосылкой к успешному решению обратной задачи при нечетких представлениях о плотности источников является *принцип взаимозаменяемости априорной информации*, действие которого можно проиллюстрировать с использованием гарантированного подхода на простом модельном примере.

Аномалия поля Δg обусловлена изолированным выпуклым телом эффективной плотности $\delta = 0,2$ г/см³, а среднеквадратическое значение помехи в измерениях поля не превосходит 0,1 мГал (рис. 7.9а). На рис. 7.9б и 7.9в приведены результаты интерпретации при невязке «наблюденного» и модельного полей

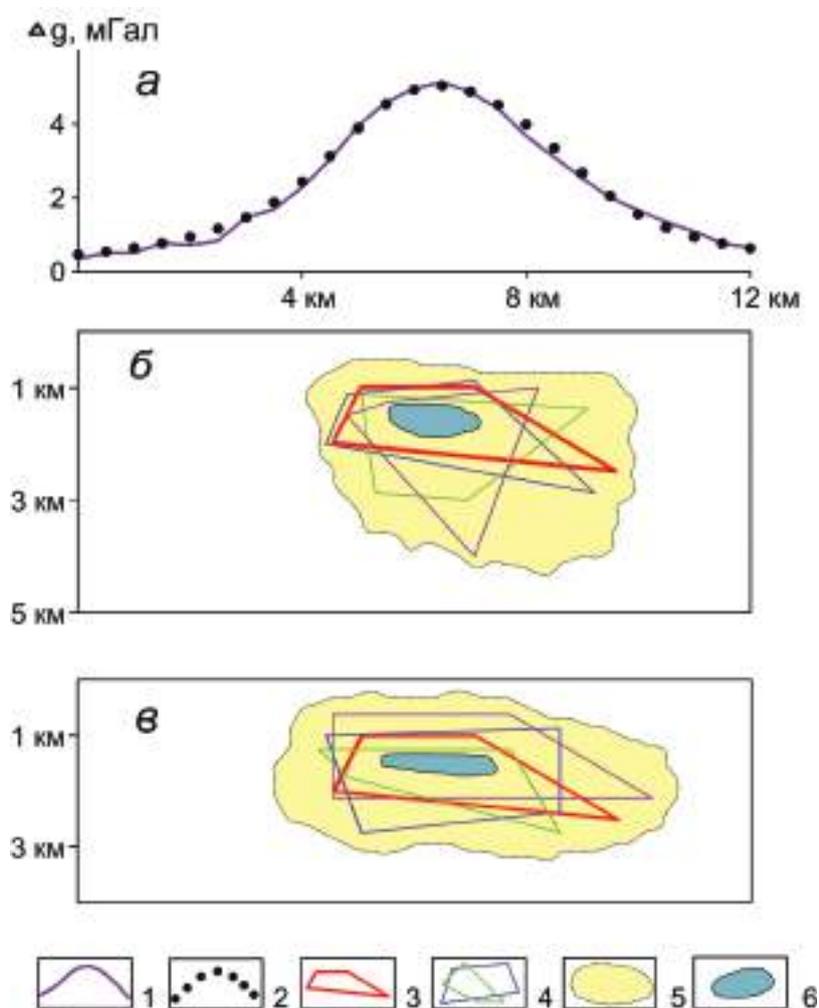


Рис. 7.9. Результаты интерпретации гравитационной аномалии (а) при точной (б) и интервально заданной (в) плотности ее источника: 1 – «наблюдаемое» гравитационное поле; 2 – подобранное гравитационное поле для одного из допустимых решений; 3 – источник аномалии; 4 – частные решения обратной задачи; 5 – построенная оценка области D_1 ; 6 – построенная оценка области D_2 .

$\varepsilon \leq 0,2$ мГал в терминах пары областей $\langle D_1, D_2 \rangle$ в случае, когда точное значение δ задано априори (вариант б), и в случае, когда известно лишь, что истинное значение δ лежит в достаточно широком интервале $[0,1; 0,3]$ г/см³ (вариант в).

В последнем случае в качестве дополнительной информации выступает предположение, что максимальная вертикальная мощность тела не превышает 2 км (фактически она равна 1,75 км). Легко заметить, что размеры области D_1 , гарантированно содержащей аномалиеобразующее тело, в обоих вариан-

тах оказались сопоставимыми. Область D_2 , которая, согласно используемому методу, заведомо является частью неизвестного тела, в варианте с нечеткой априорной информацией о плотности лишь на 15% меньше той, что в варианте с известной плотностью.

Пример 7.9. Промоделируем ситуацию картирования трех интрузивных тел (рис. 7.10): диоритового лакколита (тело 1 с эффективной плотностью $0,15 \text{ г/см}^3$) и смещенного по разлому габбрового хонолита, представленного двумя

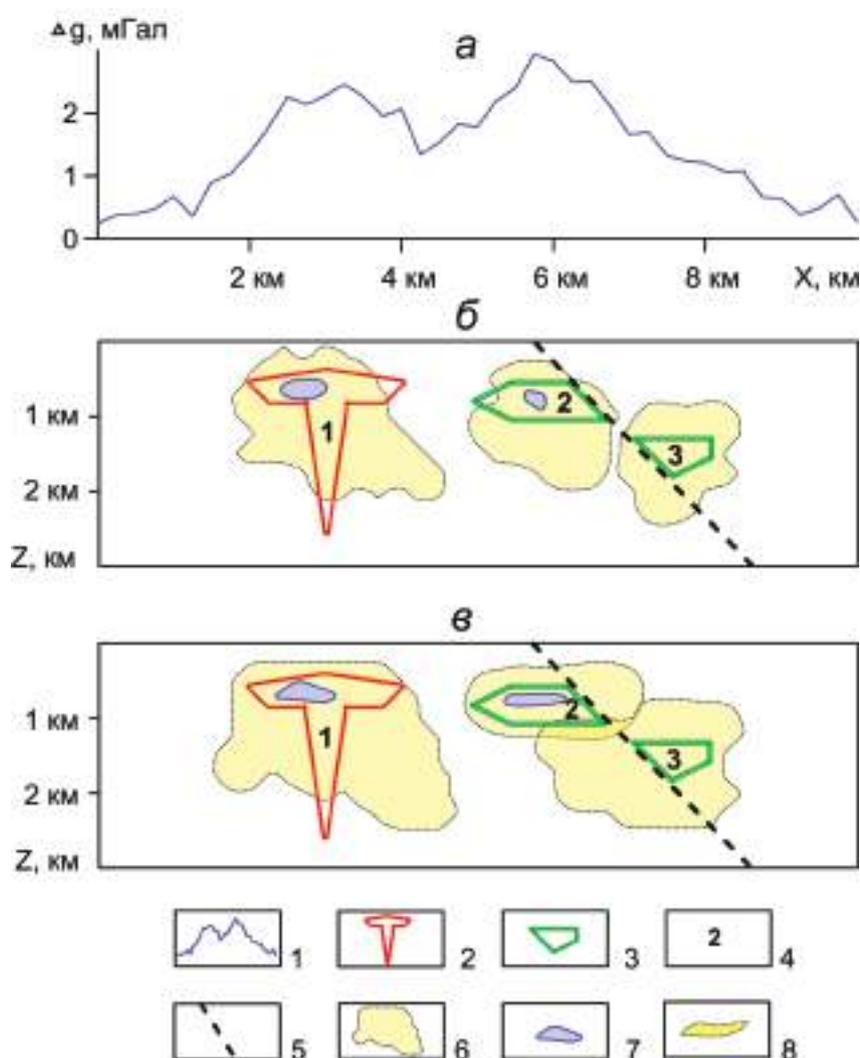


Рис. 7.10. Результаты интерпретации гравитационного поля (а), обусловленного группой интрузивных тел, при точных (б) и интервально заданных (в) значениях плотностей: 1 – «наблюдаемое» гравитационное поле; аномалиеобразующие объекты: 2 – лакколит, 3 – хонолит; 4 – номера объектов; 5 – разлом; 6 – построенная оценка области D_1 ; 7 – построенная оценка области D_2 ; 8 – зона пересечения построенных оценок областей $D_1^{(2)}$ и $D_1^{(3)}$

талами (тела 2 и 3 с эффективными плотностями $0,25 \text{ г/см}^3$ и $0,3 \text{ г/см}^3$, соответственно). «Наблюденное» поле Δg осложнено нормально распределенной помехой со среднеквадратическим значением $0,15 \text{ мГал}$ (см. рис. 7.10а), принимаемом за максимально допустимую невязку ε расхождения наблюдаемого и подобранного полей.

Как следует из рис. 7.10б, при априори известных значениях плотностей удается выявить две сравнительно небольшие области ($D_2^{(1)}$ и $D_2^{(2)}$), гарантированно принадлежащие телам 1 и 2. Установлено, что в гравиметрических данных недостаточно информации, которая позволила бы выявить хоть какой-то фрагмент третьего тела. На рис. 7.10в представлены результаты решения совмещенной обратной задачи гравиразведки, но теперь уже в случае, когда о плотностях интрузий известно лишь, что $0,1 \leq \bar{\delta}_1 \leq 0,3$ и $0,2 \leq \bar{\delta}_2, \bar{\delta}_3 \leq 0,3$ (в г/см^3), и при этом заданы ограничения на мощности тел по горизонтали (2,5 км для первого, 2 км для второго и 1,5 км для третьего) и по вертикали (2 км, 700 м и 700 м, соответственно). Факт пересечения областей $D_1^{(2)}$ и $D_1^{(3)}$ имеет следующее толкование: существует часть пространства, которая в каких-то одних допустимых вариантах интерпретации может оказаться фрагментом второго тела, а в каких-то других – фрагментом третьего тела.

Как видим, объемы извлеченной информации об источниках аномалии в обоих вариантах сопоставимы. Действительно, в каждом из них удастся выделить лишь фрагменты истинных тел 1 и 2, тогда как ни в том, ни в другом варианте объем априорной информации не позволяет указать сколь-нибудь малый фрагмент третьего тела. Области $D_2^{(k)}$, $k = 1, 2$, построенные в варианте с точно известными эффективными плотностями, близки по мере μ к соответствующим областям, построенным в варианте с размытой информацией об этих плотностях. Если в первом варианте области $D_1^{(k)}$, $k = 1, 3$, несколько уступают по мере соответствующим областям из второго варианта, то для тела 2 наблюдается противоположная картина. Все сказанное можно объяснить тем, что недостаток информации об эффективных плотностях был приблизительно компенсирован дополнительными ограничениями на геометрические параметры оцениваемых тел. И эту особенность априорной информации способен обнаружить гарантированный подход к решению обратных задач.

Глава 8

**АДДИТИВНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ КОЛИЧЕСТВЕННОЙ
ИНТЕРПРЕТАЦИИ И ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ
ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ**

Аддитивные технологии решения обратных задач грави- и магниторазведки в условиях неопределенности способны извлекать из совокупных априорных данных информацию об изучаемых геологических объектах, которая недоступна распространенным методам количественной интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. По сути, их можно рассматривать как продукт дальнейшего развития идей, заложенных в гарантированный подход к решению обратных задач, представленный в предыдущей главе. Так же как и гарантированный подход, концепция аддитивных технологий интерпретации гравитационных и магнитных аномалий исходит из объективного факта существования множества Q допустимых решений обратной задачи и использует отличные от известных математические формы представления результатов интерпретации. По сути процесс реализации аддитивных технологий интерпретации проходит две стадии. На первой, подготовительной стадии, как и в случае гарантированного подхода, осуществляется предварительное построение достаточно представительного подмножества $Q_0 \subset Q$ допустимых решений обратной задачи. Таким образом, опять же, как и в случае гарантированного подхода, основным условием успешного внедрения аддитивных технологий в практику интерпретации гравитационных и магнитных аномалий является наличие полностью автоматизированных методов решения обратных задач. Применительно к обратным задачам рудного типа семейство таких методов, основанных на монтажном принципе построения допустимых вариантов интерпретации в классе конечноэлементных моделей среды, было представлено в нескольких предыдущих главах монографии.

На второй, основной стадии осуществляется собственно реализация одного из аддитивных методов интерпретации, рабочим материалом для которых

служит множество допустимых решений обратной задачи, которые удалось построить на первой стадии.

Несмотря на то что гарантированный подход позволяет преодолеть (либо обойти) многие недостатки, присущие традиционным подходам к решению обратных задач для потенциальных полей (и благодаря этому заметно повысить объем информации, извлекаемой из геофизических данных), он не претендует на извлечение *максимального* объема достоверной информации об изучаемом геологическом объекте. Аддитивные методы интерпретации – это очередной шаг в направлении повышения информативности геофизических методов разведки.

Собственно, идея аддитивных методов интерпретации заключается в том, чтобы, опираясь на подмножество Q_0 допустимых решений обратной задачи, построить распределение некоторого параметра $\lambda(X)$, $X \in D$, ассоциируемого с оценкой вероятности обнаружения источников поля в точках изучаемой части D геологического пространства. Если такое распределение «приложить» к любой пространственной области, претендующей на роль истинного носителя аномалиеобразующих масс, то получим обобщенное допустимое решение обратной задачи с ранжированием отдельных фрагментов модельного носителя по степени вероятности обнаружения в них возмущающих масс. Таким образом, если гарантированный подход, ориентированный на извлечение *достоверной* информации об источниках поля, следует отнести к детерминистскому направлению в теории интерпретации, то аддитивные методы скорее тяготеют к статистическим приемам обработки массовой информации (в нашем случае – множества допустимых решений обратной задачи).

Концепции гарантированного подхода и аддитивных методов количественной интерпретации объединяет представление об интерпретационном процессе как о процедуре суммирования информации, содержащейся в каждом из предварительно найденных допустимых решениях обратной задачи. Поскольку построение представительного семейства Q_0 таких решений составляет заметный этап и при реализации технологий интерпретации в рамках гарантированного подхода, то соответствующую часть материала, изложенного в предыдущих главах монографии, можно рассматривать как необходимый подготовительный этап в построении аддитивных технологий интерпретации.

8.1. Объективные предпосылки к развитию аддитивных методов интерпретации

Для большей наглядности изложения ограничимся обратной задачей гравиразведки рудного типа, в которой оценивается связный носитель \hat{S} аномалиеобразующих масс известной эффективной плотности $\hat{\delta}$. В предыдущей

главе монографии в качестве результата интерпретации, выполненной в рамках гарантированного подхода, была предложена пара *гарантирующих* областей D_1 и D_2 , геометрия и пространственное положение которых обусловлены множеством Q допустимых решений обратной задачи.

Пара $\langle D_1, D_2 \rangle$ – это возможность однозначно идентифицировать любую точку $X \in \mathbf{R}^3 \setminus (D_1 \setminus D_2)$ на предмет принадлежности (непринадлежности) носителю \hat{S} аномалиеобразующих масс. Разумеется, при соблюдении адекватности всех априорных предпосылок. К сожалению, область $D_1 \setminus D_2$, представляющая для интерпретатора наибольший интерес, остается при этом областью неопределенности. Если при построении областей D_1 и D_2 использовались все априорные данные, то каждую точку области $D_1 \setminus D_2$ все равно невозможно однозначно идентифицировать как точку носителя \hat{S} или его внешности, причем *никаким* математическим методом. Это объективный факт. Но если строгая идентификация невозможна, то гипотетически еще остается возможность оценить вероятность каждого из этих двух исходов. Гарантированный подход не ставит перед собой такую задачу, тогда как аддитивные методы интерпретации в состоянии с ней справиться, причем без какой бы то ни было дополнительной априорной информации, в том числе и вероятностного характера, а с использованием исключительно одного лишь множества Q , либо какого-то из его репрезентативных подмножеств Q_0 .

Обойдемся без вступления и сразу отметим тот принципиальный недостаток решения обратной задачи в терминах пары $\langle D_1, D_2 \rangle$, который подвел нас к мысли о необходимости введения в рассмотрение новых, еще более информативных форм представления результатов интерпретации. Недостаток заключается в том, что гарантированный подход (и, кстати, не только в обратных задачах рудного типа) *не терпит компромисса*. Действительно, пусть $\langle D_1^*, D_2^* \rangle$ – оценка пары $\langle D_1, D_2 \rangle$, построенная с помощью алгоритма, предложенного в предыдущей главе. Особенность этого алгоритма состоит в том, что область D_1^* , построенная по некоторому подмножеству Q_0 допустимых решений обратной задачи, является, вообще говоря, оценкой снизу для гарантирующей области D_1 ($D_1^* \subseteq D_1$), а область D_2^* – оценкой сверху для D_2 ($D_2 \subseteq D_2^*$). Это означает, что достаточно хотя бы одному решению $S^* \in Q$, не попавшему в подмножество Q_0 , не удовлетворить включение $S^* \subset D_1^*$ как область D_1^* , строго говоря, теряет право на статус гарантирующей области. Аналогично, если найдется носитель $S^* \in Q \setminus Q_0$, для которого не выполняется условие $D_2^* \subset S^*$, то область D_2^* , следуя математическим канонам, также нельзя будет назвать гарантирующей.

В практике интерпретации геофизических полей, как и при проведении большинства других прикладных исследований, столь безапелляционная, категоричная позиция не всегда эффективна и порой явно входит в противоречие со здравым смыслом. В нашем случае можно столкнуться с ситуацией, в

которой относительная оценка погрешности восстановления гарантирующей области D_1 в виде отношения

$$v_1 = \frac{\mu(D_1 \setminus D_1^*)}{\mu(D_1^*)} \quad (8.1)$$

пренебрежимо мала. Сейчас неважно, что эту ситуацию мы распознать не сможем ввиду того, что область D_1 остается для нас неизвестной. Важно другое: незначительное отступление фактических свойств оценки D_1^* от ожидаемых формально лишило ее права называться гарантирующей. Аналогичная ситуация возможна с областями D_2 и D_2^* и, соответственно, с мерой расхождения

$$v_2 = \frac{\mu(D_2^* \setminus D_2)}{\mu(D_2^*)} \quad (8.2)$$

истинной области D_2 и ее оценки D_2^* .

Реалии таковы, что на практике невозможно достоверно установить, какие теоретико-множественные отношения связывают неизвестные (стопроцентно гарантирующие) области D_1 и D_2 с построенными оценочными областями D_1^* и D_2^* . Мы не располагаем возможностью наверняка идентифицировать области D_1^* , D_2^* на предмет выполнения требуемых включений для всех допустимых решений из множества Q . Если эти включения не выполняются, то мы не можем также установить (пусть приближенно) значения v_1 и v_2 и сказать, сколь «заметно» пришлось бы подкорректировать области D_1^* и D_2^* (или одну из областей), чтобы обеспечить их статусность.

Впрочем, в практических задачах не столь даже важно, обеспечил или нет метод построения областей D_1^* и D_2^* включения

$$D_2^* \subset S^* \subset D_1^* \quad (8.3)$$

для всех допустимых носителей $S^* \in Q$. Важно, сумел ли он обеспечить их *лишь для одного* носителя – \hat{S} . Включения (8.3) важны не сами по себе, а лишь как гарантия выполнения включения для \hat{S} . Если так, то уместно поставить вопрос о том, сколь высока вероятность p невыполнения включения

$$D_2^* \subset \hat{S} \subset D_1^* . \quad (8.4)$$

Гарантированный подход как чисто детерминистский подобным вопросом не задается. Понятно также, что ответ на вопрос о том, какое значение вероятности p приемлемо в том или ином конкретном случае, следовало бы согласовывать с погрешностями

$$v_3 = \frac{\mu(\hat{S} \setminus D_1^*)}{\mu(\hat{S} \cap D_1^*)} , \quad (8.5)$$

$$v_4 = \frac{\mu(D_2^* \setminus \widehat{S})}{\mu(\widehat{S} \cap D_2^*)} \quad (8.6)$$

выполнения включений (8.4).

Триада $\langle v_3, v_4, p \rangle$ вмещает в себя представление интерпретатора о том, с какой доверительной вероятностью можно пренебречь тем фактом, что некоторые фрагменты истинного носителя \widehat{S} возмущающих масс (определенной мощности) могут быть неверно идентифицированы на основании включения (8.4).

Но если уж осуществлять переход от детерминистских к вероятностным (статистическим) оценкам, то нет смысла замыкаться в построениях на какой-то один локальный фрагмент изучаемой части D пространства, тем более что, располагая оценками D_1^* и D_2^* гарантирующих областей D_1 и D_2 , все равно нет возможности дать приближенные оценки функционалам v_3 и v_4 . Таким образом, мера несовпадения областей D_1 и D_2 с их оценками, построенными по подмножеству Q_0 допустимых решений, все же не самая важная для нас информация, как может показаться на первый взгляд. Подход к обратным задачам, более общий, чем гарантированный, может заключаться в построении на множестве D вероятностного распределения некоторой специальной величины, привязанной к целевой задаче интерпретации. По сути, речь идет о проблеме извлечения более полной информации об источниках поля, хранящейся в множестве Q . Мы об этом говорили в начале главы.

В известных методах интерпретации гравитационных и магнитных аномалий в качестве «неделимой» единицы информации о носителе возмущающих масс выступает допустимое решение S^* обратной задачи. По замыслу авторов, аддитивные технологии должны идти дальше и быть способны структурировать остаточную неопределенность, сосредоточенную в области $D_1 \setminus D_2$ ($D_1^* \setminus D_2^*$), с помощью специальных функций $\lambda(X)$. В частности, такие функции могли бы позволить (за счет суммирования информации, содержащейся во всех найденных допустимых решениях обратной задачи) оценивать вероятности совпадения отдельных фрагментов модельного и природного носителей масс.

8.2. Аддитивные методы решения обратных задач рудного типа

Наиболее наглядно особенности концепции аддитивных методов интерпретации гравитационных и магнитных аномалий проявляются в рудных обратных задачах. Но, прежде чем остановиться на этих особенностях, сделаем несколько замечаний относительно того, в какой мере на практике допустимо отклонение от математических стандартов в вопросах строгости построений.

8.2.1. О разумном компромиссе между математической строгостью и здравым смыслом

Вряд ли можно оспаривать существование разумных границ приемлемого отклонения от «математически строгого» при выборе приемлемого алгоритма для решения практической задачи. Все определяется соотношением той выгоды, которую приносит конкретная технология интерпретации геофизических полей, с теми издержками, которые мы понесем, если в отдельных случаях эта технология не сработает. Характерным примером такого отношения, когда учитывается реальное положение дел в вопросе информационной обеспеченности решаемой задачи, является принцип доверительной вероятности, востребованный в различных сферах человеческой деятельности и допускающий, что математический метод не обязан обеспечивать стопроцентную гарантию достоверности результата. По сути мы вновь возвращаемся к дискуссии относительно приоритета геофизического начала над математическим при решении прикладных задач.

Нередко приходится сталкиваться с ситуацией, когда методы решения обратных задач, неплохо зарекомендовавшие себя на практике, подвергаются критике со стороны теоретиков, для которых абсолютная строгость результата превыше всего. Как правило, речь идет о неких *особенных*, можно сказать, *патологических* случаях, когда используемые и хорошо зарекомендовавшие себя на практике математические конструкции (в широком понимании этого термина) не срабатывают. Обнаружив подобный случай, математика как бы ставит под сомнение (объявляет «вне закона») эти конструкции *в целом*. За примерами далеко ходить не надо.

В первой главе монографии мы вспоминали об «аннигиляторе масс» Бродского-Страхова – не порождающем внешнего гравитационного поля кусочно-постоянном распределении масс по совокупности треугольных областей, объединение которых образует невыпуклый шестиугольник типа «звезды Давида». Насколько нам известно, необходимое и достаточное условие, при котором произвольная «призматическая модель» источников поля может породить нулевой внешний потенциал, не было найдено. Если так, то с точки зрения обязательного выполнения стандартного требования единственности решения обратной задачи класс таких моделей надо целиком признать несостоятельным. Но ситуация, когда при решении линейной обратной задачи гравиразведки интерпретатор невольно выберет модель, где отсутствует единственность решения обратной задачи, может случиться на практике крайне редко, и есть смысл пойти на мизерный риск ради почти гарантированного успеха. Мы уже не говорим о том, что неоднозначность решения теоретической обратной задачи в некотором модельном классе источников поля еще

не является, как было обосновано в первой главе монографии, бесспорным признаком непригодности этого класса.

Возьмем теперь пример из области, охватывающей построение и применение содержательных функционалов для оценки точности приближенных решений обратных задач. Все в той же первой главе мы отмечали, что классическое требование к таким функционалам, обязывающее эти функционалы удовлетворять всем аксиомам метрических пространств, вовсе не является главным. В практике решения обратных задач скорее важна их нормированность и монотонная зависимость от качества результатов интерпретации. Так, если придерживаться математических постулатов, то до тех пор, пока мы не определимся в вопросе о том, являются ли природные носители масс замкнутыми или открытыми множествами, придется отказаться от использования наиболее подходящей для обратных задач рудного типа метрики Штейнхауса. Эта метрика порождена мерой, и если мы возьмем модельный класс носителей источников, куда входят открытые и замкнутые геометрические тела, то метрика Штейнхауса, строго говоря, здесь неприменима. К примеру, расстояние между открытым шаром и тем же шаром, содержащим граничные точки, будет равно нулю, тогда как сами объекты с математической точки зрения не совпадают друг с другом. Но должны ли мы из-за этого отказаться от метрики Штейнхауса, при том что области меры нуль в обратных задачах грави- и магниторазведки не имеют никакого значения? Будь шар открытый или замкнутый, гравитационное поле его одно и то же.

Еще один пример, теперь уже из области условно-экстремальных задач, крайне важной для нас. Методы их решения являются рабочим инструментом технологий интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. С точки зрения их трудоемкости эти методы принято условно разбивать на два класса – методы полиномиальной сложности (наименее трудоемкие) и методы не полиномиальной (экспоненциальной) сложности. В математике немало сил было затрачено на доказательство того, что задачи линейного программирования являются задачами полиномиальной сложности. В 1979 г. Л.Г. Хачиняном был предложен метод эллипсов для решения задач линейного программирования и доказана его полиномиальная сложность [Карманов, 1986]. Правда, задолго до этого для решения задач линейного программирования уже был предложен достаточно эффективный симплекс-метод. Однако выяснилось, что, несмотря на высокую результативность (и прежде всего быстрое действие) при решении прикладных задач, возникающих в различных областях знаний, симплекс-метод все же имеет экспоненциальную сложность. Это стало ясно, когда был обнаружен пример, где для решения задачи линейного программирования в пространстве \mathbf{R}^n симплекс-методу понадобилось 2^n операций. Между тем опыт показал, что в вычислительном плане метод эллипсоидов работает медленнее симплекс-метода. Спрашивается, как реагировать на это противоречие тем, кто

использует методы решения экстремальных задач в качестве рабочего инструмента? Неужели этот уникальный пример обязывает отказаться от симплекс-метода в пользу метода эллипсоидов, если мы настроились на использование методов полиномиальной сложности, но в то же время и эффективных?

Нам, если вспомнить, также приходилось прибегать к оговоркам во избежание критики сторонников абсолютной строгости. Так, несмотря на приведенные выше доводы в пользу надежности предложенного алгоритма интерпретации в терминах гарантирующих областей, и на то, что исключительно во всех модельных примерах оценки D_1^* и D_2^* гарантирующих областей D_1 и D_2 , построенные по специально подобранному подмножеству Q_0 допустимых решений, обеспечивали включение $D_2^* \subset \hat{S} \subset D_1^*$, мы остерегались говорить, что построили эти области. Нет, только их оценки!

Примеры столкновений между требованием математической строгости и здравым смыслом можно было бы продолжить, но мысль, которой авторы монографии хотели поделиться с читателем, по-видимому уже ясна.

8.2.2. Функции пространственного распределения оценочных параметров

Сторонняя оценка ведущих специалистов из смежных научных дисциплин, касающаяся того, в какой мере содержание и основные направления развития теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий соответствуют целям геофизических исследований, позволяет выработать свежий взгляд на некоторые краеугольные положения теории, справедливость которых вследствие стереотипов, сложившихся в «собственной» научной среде, еще недавно казалась неоспоримой. Отмечая те трудности, с которыми геофизики сталкиваются при оценке перспективности изучаемых территорий традиционными методами теории интерпретации потенциальных полей, специалисты в области сейсморазведки относят к серьезным недостаткам этой теории преобладающее использование детерминистской трактовки результатов решения обратных задач [Кондратьев, 2000_{1,2}]. С этим невозможно не согласиться. Конечный продукт используемых на практике детерминистских методов количественной интерпретации потенциальных полей – это приближенная модель источников поля без какой-либо оценки ее достоверности.

Концепция детерминистского подхода, пришедшая из классической теории решения некорректных задач, состоит в том, чтобы состоятельность алгоритма решения обратной задачи применительно к конкретным условиям интерпретации рассматривать «через призму» тех свойств, которыми *обладало бы* решение обратной задачи по этому же алгоритму в совершенно иных, идеализированных условиях. В первой главе монографии мы останавливались на том, какой поте-

рей для гравиразведки и магниторазведки обернулось использование сослагательного наклонения в оценке состоятельности алгоритмов решения обратной задачи. Но и сугубо вероятностные методы интерпретации потенциальных полей, как оказалось, тоже не выход из положения. Сторонники этих методов прямо признают, что количественная интерпретация данных гравиразведки и магниторазведки – не самая выигрышная для них тема. Одна из причин заключается в том, что известные вероятностные методы решения обратных задач плохо адаптируются к разнородной информации детерминистского толка. Проблема и в отсутствии должной информационной базы, необходимой для построения вероятностных методов решения обратных задач. Данные о свойствах помех в измерениях, которыми интерпретатор располагает на практике и на которых основаны вероятностные методы, являются весьма скудными. Тенденция к заимствованию готовых математических наработок при построении вероятностных методов решения обратных задач привела к тотальному использованию гипотезы о нормальном законе распределения помех в измерениях, тогда как фактический закон распределения помех геологического характера является более сложным и на практике остается неизвестным. Подмена реальных законов распределения помех идеализированными (что позволяет воспользоваться готовым математическим аппаратом) приводит к существенному искажению выводов относительно строения изучаемой геоплотностной (геомагнитной) среды, сделанных по результатам интерпретации геофизических полей.

Если наличие вероятностных оценок качества результатов интерпретации рассматривать как некий тест на зрелость теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, то последняя в состоянии ответить на этот «вызов», используя, как ни парадоксально, скрытые резервы детерминистского подхода. Эти резервы удастся обнаружить в аддитивных технологиях интерпретации, ориентированных на более дифференцированную, чем в случае гарантированного подхода, оценку фрагментов изучаемой части D пространства на предмет перспективы обнаружения в них возмущающих масс. Как мы уже говорили, такого рода оценку можно осуществить с помощью определенных (оценочных) функций $\lambda(X)$, $X \in D$, структура которых тесно связана с целевой задачей интерпретации. Приведем несколько примеров таких функций.

Функция гарантии. Гарантированный подход в принципе можно также считать одной из форм реализации концепции аддитивных методов решения обратных задач.

В рудной обратной задаче информация, которая заключена в паре $\langle D_1, D_2 \rangle$, эквивалентна информации, заключенной в функции

$$\lambda(X) = \begin{cases} 1, & X \in D_2 \\ 0, & X \in D_{1,2} \\ -1, & X \in \bar{D}_1 \end{cases}, \quad (8.7)$$

где \bar{D}_1 – внешность области D_1 , $D_{1,2} = D_1 \setminus D_2$ – область неопределенности, каждую точку которой по имеющейся информации невозможно идентифицировать на предмет принадлежности (непринадлежности) носителю возмущающих масс. Распределение функции (8.7) можно сформулировать в терминах оценки вероятности принадлежности точек X носителю \hat{S} . Опуская для лаконичности уточнение о том, что речь идет об *оценках* вероятности, можно сказать следующее. Вероятность того, что точка X области D_2 является точкой носителя \hat{S} , равна 1. Вероятность того, что точка X области \bar{D}_1 является точкой носителя \hat{S} , равна 0. О вероятности принадлежности носителю \hat{S} точек $X \in D_{1,2}$ гарантированный подход ничего сказать не может. Функцию (8.7) логично называть *функцией гарантии*.

Если за качество результатов интерпретации в терминах функции гарантии принять лебегову меру области, на которой эта функция принимает значение 0 (чем меньше эта мера, тем выше качество), то оно монотонно зависит от объема совокупной априорной информации. Если при добавлении новых априорных ограничений на параметры модели источников поля указанная мера остается без изменения, то можно утверждать, что новые ограничения оказались неинформативными. Выявление подобных ограничений при решении конкретной интерпретационной задачи – это еще одна из возможностей функции гарантии.

Если принять во внимание, что рабочим инструментом гарантированного подхода в рудной постановке обратной задачи являются монтажные методы поиска допустимых решений Ω^* обратной задачи, то эффективнее вместо (8.7) использовать аналогичную функцию, но определенную уже на элементах замощения $\{V_i\}$ изучаемой части пространства D . Дискретный аналог функции гарантии, когда области D_1 и D_2 «собираются» из элементов замощения V_i , будет выглядеть так:

$$\lambda(V_i) = \begin{cases} 1, & V_i \in \mathcal{Y}(D_2) \\ 0, & V_i \in \mathcal{Y}(D_1) \setminus \mathcal{Y}(D_2) \\ -1, & V_i \notin \mathcal{Y}(D_1) \end{cases} \quad (8.8)$$

Безусловно, функция гарантии λ является более привлекательной, чем точечные оценки параметров модели источников поля. Она позволяет установить положение в пространстве если не всего носителя \hat{S} , то хотя бы его отдельного фрагмента D_2 . Однако нельзя сбрасывать со счетов пессимистический исход, когда $D_2 = \emptyset$, а область D_1 совпадает с областью D , гарантированно содержащей носитель возмущающих масс. Вместе с тем, не исключено, что стоило поступиться «малой частью» допустимых решений и включить механизм доверительной вероятности, как такой исход был бы невозможен. Но функция гарантии не допускает подобного компромисса. Вместе с тем, ясно,

что с точки зрения надежности обнаружения возмущающих масс в интересующей интерпретатора области важна доля тех допустимых носителей Ω^* , фрагментами которых является эта область. Осознание этого момента послужило поводом для введения в рассмотрение следующей функции.

Функция локализации. Пусть $V = \{V_i\}$ – некоторое замощение изучаемой части D пространства, используемое при построении допустимых решений обратной задачи с помощью одной из версий монтажного алгоритма. Возьмем два элемента замощения V_r и V_s , принадлежащие области $D_{1,2}$, которая была введена в рассмотрение при описании функции гарантии. Мы вправе рассматривать их как локальные фрагменты этой области. Гарантированный подход не позволяет сделать иного вывода, чем тот, что оба элемента V_r и V_s в *равной степени* могут принадлежать неизвестному носителю масс \hat{S} , но могут с *одинаковым успехом* и не принадлежать. Безусловно, в отношении любого элемента замощения $V_n \subset D_{1,2}$ нельзя сделать однозначный вывод о его принадлежности (непринадлежности) носителю \hat{S} . Но правильно ли будет утверждать, что оба исхода возможны в «равной степени»? Особенно в том случае, когда число допустимых конфигурационных носителей $\Omega^* \in Q$, в ядра которых входит элемент V_r , многократно превышает число допустимых носителей Ω^* , обеспечивающих включение $V_s \in Y(\Omega^*)$.

Возникает вопрос: обладают ли данные геофизических измерений информацией, которая позволяет *дифференцированно* подойти к оценке достоверности принадлежности отдельных фрагментов изучаемой части пространства носителю возмущающих масс. Иначе говоря, можно ли разнообразить линейку возможных значений оценочных функций λ , не ограничиваясь, как это имеет место в случае функции гарантии, трехцветной палитрой $\langle -1, 0, -1 \rangle$, и добиться того, чтобы эти значения служили оценками вероятности обнаружения источников аномалии в точках изучаемой части пространства.

В работе [Долгаль, Шархимуллин, 2011] показано, что задачу построения функции $\lambda(X)$, позволяющей оценить вероятности обнаружения источников аномалии в точках изучаемой части геологического пространства, можно решить детерминистскими средствами. Для этого необходимо обеспечить обмен информацией между допустимыми решениями обратной задачи, причем, как и в случае гарантированного подхода, каждое из допустимых решений должно активно участвовать в построении итоговых результатов интерпретации, но ни одно из этих решений не должно присутствовать в явном виде в результатах интерпретации.

На декартовом произведении $V \times Q$ построим вспомогательную функцию

$$\varphi(V_i, \Omega^*) = \begin{cases} 1, & V_i \in Y(\Omega^*) \\ 0, & V_i \notin Y(\Omega^*) \end{cases} \quad (8.9)$$

Функцию локализации определим как частоту, с которой среди всех допустимых носителей $\Omega^* \in Q$ встречаются те, чьим фрагментом является «элементарная» область пространства V_i :

$$\lambda_1(V_i) = \frac{\sum_{\Omega^* \in Q} \varphi(V_i, \Omega^*)}{|Q|} . \quad (8.10)$$

Функция (8.10) позволяет локализовать отдельные области пространства, оценка вероятности встречи возмущающих масс в которых имеет наиболее высокие значения (отсюда название функции).

На практике можно рассчитывать лишь на некоторое подмножество $Q_0 \in Q$ допустимых решений, которые удастся построить за приемлемое время с помощью подходящей версии монтажного метода. Понятно также, что вопрос достоверности выводов, которые сделаны по оценочным функциям, в том числе на основании функции локализации $\lambda_1(V_i)$, это, в конечном счете, проблема состоятельности (репрезентативности) подмножества Q_0 . На первый взгляд, ситуация аналогична имевшей место при реализации гарантированного подхода. Однако это не совсем так. Как было обосновано в предыдущей главе, достоверность результатов интерпретации в терминах пары $\langle D_1, D_2 \rangle$ (сейчас уже можно сказать – в терминах *функции гарантии*) достаточно высока и во всяком случае не ниже достоверности выводов об оптимальности оценок параметров модели источников поля по критерию достижения глобального минимума функционала невязки. При этом можно обойтись довольно узким подмножеством Q_0 , если правильно сориентировать алгоритм поиска каждого очередного допустимого решения с учетом свойств уже найденных решений.

В случае *функции локализации* ситуация несколько иная. Здесь важна не столько мощность множества Q_0 , сколько соблюдение принципа «сравнительно равномерной» аппроксимации множества Q элементами множества Q_0 . Мы не рассчитываем на некий строгий математический результат, который позволил бы достаточно надежно оценить (применительно к каждому конкретному случаю), в какой мере подмножество допустимых решений, построенное по тому или иному принципу, близко к репрезентативному с точки зрения его использования при построении определенной оценочной функции λ .

Можно было бы привести эвристические соображения, способные поставить под сомнение «достаточно равномерное» распределение допустимых решений из Q_0 , построенных по тому же принципу, что и в случае применения функции гарантии. Но, учитывая другие эвристические соображения, исход, при котором элементы так построенного подмножества Q_0 покроют множество Q крайне неравномерно, маловероятен. Поэтому мы сочли не целесообразным теоретизировать на предмет того, какие из противоречащих друг другу соображений «перевесят», а пойти другим и, как нам представляется,

более убедительным путем. Были проведены многочисленные расчеты, когда построение функции локализации осуществлялось по подмножествам допустимых решений $Q_0^{(1)}, Q_0^{(2)}, \dots$, образующих цепочку $Q_0^{(1)} \subset Q_0^{(2)} \subset \dots$. При этом опробовались различные схемы поиска результативных допустимых решений обратной задачи, в том числе и та, что использовалась при построении функции гарантии. На двумерных моделях «средней» сложности была подмечена удивительная закономерность: увеличение мощности $|Q_0|$ сверх 300–400 допустимых решений уже практически не ведет к заметному изменению функции локализации. Тем не менее, работу над этой проблемой следует продолжить. Как бы то ни было, урезанную постановку задачи оправдывает принцип: если задачу нельзя решить в полной постановке (в нашем случае по множеству Q), то надо исходить из того, что есть в распоряжении (в нашем случае подмножество Q_0).

Понятно, что функцию локализации можно строить и на более крупных фрагментах пространства, чем элементы замощения. Важно подчеркнуть, что в случае функции (8.10) речь идет о *раздельных* оценках вероятности событий $V_i \subset \hat{S}$. Это означает следующее. Пусть на каждом из нескольких элементов замощения, объединение которых образует некоторую связную область D_0 , значение функции локализации равно одному и тому же значению ν . Тогда значение функции локализации, вычисленной непосредственно на D_0 как неделимой области, будет, вообще говоря, меньше, чем ν .

Как и в случае гарантированного подхода, результаты интерпретации, выраженные в терминах функции локализации, определяются не свойствами конкретного алгоритма решения обратной задачи, а, что более ценно – непосредственно информативностью имеющихся данных.

Функция надежности. Впервые на возможность обобщения концепции гарантированного подхода к обратным задачам гравиразведки и магнито-разведки авторы монографии обратили внимание в статье [Балк, Долгаль, 2011]. Поводом к размышлению послужил тот факт, что на практике априорная информация зачастую носит размытый характер. Так, никогда точно не известно фактическое значение нормы ε_0 суммарной помехи в измерениях гравитационного поля. В.Н. Страхов неоднократно обращал внимание на неадекватность реалиям практики любой постановки обратной задачи, в которой предполагается известным *точное* значение ε_0 .

Противоречивость выбора интерпретатором максимально допустимого значения невязки ε подобранного модельного и наблюдаемого полей заключается в следующем.

1. Если уровень помех занижен ($\varepsilon < \varepsilon_0$), то допустимых решений может и не быть вообще, либо найденные решения попросту не являются допустимыми, поскольку получены при неадекватных предпосылках, о которых интерпретатор может и не подозревать.

2. Если в стремлении подстраховаться интерпретатор завысит фактический уровень помех, то будет завышен и уровень неопределенности за счет появления в множестве Q «неоправданных» решений.

На фоне этого противоречия возникает задача о максимальном значении $\varepsilon^{(\max)}$, при котором все еще можно утверждать, что при адекватности всех априорных предпосылок некий интересующий интерпретатора фрагмент пространства наверняка принадлежит носителю \hat{S} возмущающих масс. Задаче можно придать более общий вид. Пусть T_D – некоторое разбиение (замощение) изучаемой части пространства D , заведомо содержащей источники аномалии, и $D^{(j)}, j = 1, 2, \dots, m$ – элементы этого разбиения. В частном случае в роли «элементарных» областей $D^{(j)}$ могут выступать элементы V_i регулярного замощения V , которое мы собираемся использовать в монтажных алгоритмах поиска допустимых решений Ω^* обратной задачи. Если все-таки интерпретатор остановил свой выбор на более «крупном», чем $V = \{V_i\}$, замощении T_D , то для удобства будем считать, что каждая из областей $D^{(j)}$ является объединением некоторого числа элементов замощения V_i .

Пусть есть основания считать, что неизвестное фактическое значение нормы ε_0 суммарной помехи в измерениях гравитационного поля принадлежит заданному интервалу $[\bar{\varepsilon}, \bar{\bar{\varepsilon}}]$. Покроем его достаточно густой сеткой, узлы $\varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n, \varepsilon_{i+1} > \varepsilon_i, \varepsilon_1 = \bar{\varepsilon}, \varepsilon_n = \bar{\bar{\varepsilon}}$ которой будут в последующем играть роль предполагаемых максимально возможных значений нормы помех в измерениях поля. Пусть далее $G^{(i)}$ – объемы информации, которая помимо всех априорных ограничений содержит посылку об уклонении модельного и наблюдаемого поля на величину, не превосходящую ε_i . Введем обозначения: $Q^{(i)}$ – множество приближенных решений $\Omega_{i,k}^*, k = 1, 2, \dots, |Q^{(i)}|$ обратной задачи, отвечающих информации $G^{(i)}$. Очевидно, что $Q^{(1)} \subset Q^{(2)} \subset \dots \subset Q^{(n)}$. С каждой парой $(j, i), j = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, n$ свяжем множество

$$N(j, i) = \{ \Omega_{i,k}^* \in Q^{(i)} : \Omega_{i,k}^* \supset D^{(j)} \}, \tag{8.11}$$

а с каждым $j = 1, 2, \dots, m$ – максимальное значение индекса i (обозначим это значение как $i(j)$), для которого множество $N(j, i)$ пусто. Функцию

$$\lambda_2(D^{(j)}) = \varepsilon_{i(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, m \tag{8.12}$$

назовем *функцией надежности* (или *функцией предпочтения*). Своим названием эта функция обязана тому, что ее значения можно интерпретировать как оценку надежности обнаружения возмущающих масс в пространственной области $D^{(j)}$. Чем больше значение функции (8.12), тем надежность утверждения того, что область $D^{(j)}$ является фрагментом носителя возмущающих масс выше, поскольку возрастает пороговое значение помех в измерениях, при котором эта область является фрагментом всех допустимых решений обратной задачи.

Результаты интерпретации в терминах функции надежности $\lambda_2(D^{(j)})$ можно связать с решением $\langle D_1, D_2 \rangle$ рудной обратной задачи, построенном в рамках гарантированного подхода: функция надежности устанавливает максимальное значение предполагаемого уровня помех в измерениях поля, при котором фрагмент пространства $D^{(j)}$ все еще будет принадлежать области D_2 .

Функция доверия. Определенный интерес может представить задача, являющаяся в каком-то смысле обратной к той, которую обслуживает функция локализации. Для ее решения понадобилось встроить в структуру оценочной функции принцип доверительной вероятности.

Поставим следующую задачу: в пределах области D , заведомо содержащей источники аномалии, установить максимальные *связные* области D_k , каждая из которых обладает следующим свойством: для любого элемента замощения $V_i \in D_k$ (*раздельная*) оценка вероятности принадлежности этого элемента носителю возмущающих масс не ниже заданного p_0 . Значение p_0 , задаваемое интерпретатором, играет роль доверительной вероятности. Понятно, что речь сейчас попросту идет о другой математической форме представления результатов интерпретации в терминах функции локализации. Тем не менее, в определенных случаях эта форма является более обозримой и есть смысл дать ее новой записи свое имя.

Алгоритм решения поставленной задачи предполагает, что предварительно построена функция локализации $\lambda_1(V_i)$. Если есть подозрение, что интерпретатор задал слишком высокое значение p_0 , ожидая от геофизических данных больше, чем они могут дать, целесообразно предварительно найти максимальное значение функции λ_1 . Если оно оказалось ниже заданного p_0 , то ранее указанными свойствами не обладает ни один фрагмент области D .

Возьмем, однако, благоприятный случай. Это значит, что путем перебора элементов замощения, принадлежащих области D , мы отыщем некоторый элемент V_r , для которого $\lambda_1(V_r) \geq p_0$. Организуем итерационный (по j) процесс

$$Y(D_1^{(j)}) = Y(D_1^{(j-1)}) \cup \{V_r \in O(D_1^{(j-1)}): \lambda_1(V_r) \geq p_0\}, \quad j \geq 1, \quad (8.13)$$

где $Y(D_1^{(0)}) = \{V_r\}$. Критерием завершения итерационного процесса служит условие $Y(D_1^{(j)}) = Y(D_1^{(j-1)})$. Если критерий сработал на некотором $j = j(0)$, то $D_1 = D_1^{(j(0))}$.

Предположим, что мы уже отыскали несколько областей $D_k - D_1, D_2, \dots, D_m$. Заранее неизвестно, сколько связных областей D_k , обладающих названными ранее свойствами, существует вообще. Поэтому, прежде чем приступить к поиску очередной области D_{m+1} , есть смысл проверить, существуют ли еще такие области. Решение задачи следует продолжить, если среди элементов замощения, не вошедших в ядра построенных конфигурационных областей D_k , $k = 1, 2, \dots, m$, найдется хотя бы один элемент V_r , для которого $\lambda_1(V_r) \geq p_0$. Первый попавшийся элемент замощения, для которого это неравенство имеет место,

можно взять за нулевое приближение к области D_{m+1} , процесс построения которой копирует итерационный процесс (8.13).

Функцию доверия определим следующим образом: для всех элементов замощения полагаем

$$\lambda_3(V_t) = \mu(D_{k(t)}), \tag{8.14}$$

где $k(t)$ – номер той из построенных областей D_k , ядру которой принадлежит элемент замощения V_t . Всем элементам замощения V_t , которые не вошли в ядра ни одной из построенных областей D_k , приписывается значение $\lambda_3(V_t) = 0$. Функцию доверия можно определить и так (оставив ей прежнее обозначение):

$$\lambda_3(V_t) = |\mathcal{Y}(D_{k(t)})|. \tag{8.15}$$

Функция обнаружения. На практике оценка S^* природного носителя масс \hat{S} фактически используется лишь фрагментарно. При заверке гравитационной аномалии бурением, планируемом по результатам интерпретации, успех зависит не столько от степени близости носителей S^* и \hat{S} , сколько от правильности идентификации фрагмента $S_0^* \subset S^*$ как фрагмента \hat{S}_0 носителя возмущающих масс, который фактически и предопределяет местоположение и глубину буровой скважины. Традиционные методы решения обратных задач, в которых носитель является «неделимой единицей информации», не в состоянии сделать вывод типа «хотя в целом модельный носитель S^* может заметно отличаться от истинного \hat{S} , но по меньшей мере его фрагмент S_0^* есть та часть пространства, которая с такой-то оценкой вероятности заполнена возмущающими массами». Для этих целей привычная математическая форма представления итоговых результатов интерпретации в виде единичного оптимального решения обратной задачи не подходит.

При планировании траектории L скважины по результатам интерпретации гравиметрических данных полезной может оказаться функция обнаружения. Ее предназначение – оценить вероятность успешного решения задачи, поставленной перед гравиразведкой, при условии, что буровые работы будут выполнены в соответствии с рекомендациями, выработанными на основе анализа структуры этой функции.

Пусть, как и прежде, $\{V_t\}$ – замощение, на котором предварительно будет построено некоторое подмножество Q_0 допустимых решений обратной задачи, используемых при построении функции обнаружения. Предположим, что вертикальную заверочную скважину предполагается пробурить в точку $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и эта точка принадлежит элементу замощения с номером $t = n$. Функцию обнаружения определим следующим образом:

$$\lambda_4(V_n) = \frac{|\{\Omega^* \in Q_0 : \{V_t \in T(n) : \Omega^* \cap V_t \neq \emptyset\} \neq \emptyset\}|}{|Q_0|}, \tag{8.16}$$

где $T(n)$ – ассоциированное с элементом замощения V_n подмножество элементов V , имеющих общие точки с отрезком $L = \{X : x = x_0, y = y_0, z \leq z_0\}$. Значение $\lambda_4(V_n)$ можно трактовать как оценку вероятности подсечения возмущающего тела скважиной, пробуренной в точку, находящуюся в пределах области V_n . При этом подсечение может произойти задолго до достижения самой точки X_0 (здесь принципиальное отличие от функций локализации). Аналогичную задачу можно поставить и в случае более сложной траектории буровой скважины.

8.3. Обобщенные решения обратных задач

Коль скоро оценочные функции λ несут в сжатом виде содержательную информацию о допустимых решениях обратной задачи, которые удалось отыскать, то, казалось бы, интерпретационный процесс можно свести к построению таких функций. Однако нельзя игнорировать субъективный фактор: какие бы преимущества ни сулил любой новый подход к интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, вряд ли стоит ожидать, что геофизики полностью откажутся от десятилетиями наработанного подхода с единичным оптимальным вариантом интерпретации. Для геолога и геофизика результаты интерпретации, в которых отсутствуют разрезы и контуры геологических тел – источников аномалии – непривычны. Если для решения задач поискового характера оценочными функциями в принципе можно и обойтись, то при решении геокартировочных задач всегда требуется указать местоположение геологических границ (пусть лишь предполагаемое). К тому же, те конкретные функции λ , которые мы привели выше, имеют большей частью характер *раздельных* оценок вероятности. Связная область «концентрации» высоких значений оценочной функции, на которую предполагается сделать ставку при проведении геологоразведочных работ, не должна вводить интерпретатора в заблуждение. Так, если область не является фрагментом какого-то одного из допустимых носителей, то вероятность того, что она вся заполнена возмущающими массами, равна нулю.

Эти соображения навели авторов на мысль о целесообразности объединения двух математических форм представления результатов интерпретации. В качестве компромиссной и вместе с тем наиболее общей математической формы представления результатов интерпретации мы предлагаем *обобщенное* решение $\langle S^*; \lambda(X), X \in S^* \rangle$ обратной задачи. В нем помимо оптимального носителя S^* – как наилучшего среди всех элементов множества Q по какому-то скалярному критерию – задается распределение (на множестве точек $X \in S^*$) одной или нескольких функций $\lambda(X)$, имеющих вероятностную (или, будет лучше сказать, статистическую) природу. Есть веские причины считать обо-

бщенное решение обратной задачи наиболее содержательной из известных математической формой представления результатов интерпретации данных гравиразведки и магниторазведки.

Концепция обобщенных решений обратных задач, как и концепция аддитивных технологий интерпретации, исходит из того, что каждое допустимое решение обратной задачи способно проявить себя в должной мере не в ходе конкуренции с другими альтернативными вариантами интерпретации, а напротив, в содружестве с ними. Такой подход к проблеме совершенно не свойственен известным методам интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, исключая аддитивные методы интерпретации и те, что реализуют концепцию гарантированного подхода. Но если в аддитивных методах отдельные допустимые решения обратной задачи вообще не присутствуют в результатах интерпретации в явном виде, то при использовании концепции обобщенных решений обратных задач мы вновь обращаемся к понятию наилучшего решения обратной задачи. Таким образом, становится возможным удовлетворить привычные представления геофизиков о том, как обязаны выглядеть результаты интерпретации гравитационного и магнитного поля.

Смысл новых предложений состоит в том, чтобы каждое допустимое решение S^* из множества Q (на практике – из подмножества Q_0) снабдить информацией, содержащейся во всех допустимых решениях из Q (Q_0) и выраженной в сжатой форме в одной из оценочных функций λ , к примеру – в функции локализации $\lambda_1(V_i)$. Каждое допустимое решение S_j^* обратной задачи возьмет лишь часть информации, содержащейся в функции $\lambda(V_i)$. Указанные объемы информации (обозначим их как G_j) могут сильно различаться между собой, что создает предпосылки для неформального выбора наилучшей пары $\langle S_j^*, G_j \rangle$ в качестве результата интерпретации.

Читатель, вероятно, уже догадался, о каких объемах информации G идет речь. Конечно же, о распределении функции $\lambda(V_i)$ на носителях S_j^* . Процедура перехода от «обычных» допустимых решений обратной задачи к обобщенным решениям состоит в том, чтобы, образно говоря, «приложить» функцию $\lambda(V_i)$ (соответствующей частью ее области определения) к каждому допустимому носителю S_j^* . Понимать это надо следующим образом. «Материнское» распределение $\lambda(V_i)$, $V_i \subset D$ (где, напомним, каждый допустимый носитель удовлетворяет включению $S_j^* \subset D$) порождает функции $\lambda^{(j)}(V_i) = \lambda(V_i)$, $V_i \subset S_j^*$, определенные на более узких подмножествах, чем сама функция $\lambda(V_i)$. Носитель S_j^* и функцию $\lambda^{(j)}(V_i)$ будем рассматривать как неразрывную пару, которую назовем *обобщенным решением обратной задачи*, ассоциированным с допустимым решением S_j^* и порожденным оценочной функцией $\lambda(V_i)$. Таким образом, в обобщенных решениях рудных обратных задач носитель S_j^* выступает в двух ипостасях: в привычной роли одного из возможных носителей возмущающих масс и как носитель сжатой информации о других допустимых носителях S_k^* ,

$k \neq j$. Образно говоря, если в «обычных» решениях обратной задачи рудного типа информацию несет лишь граница («оболочка») носителя, которая однозначно определяет область пространства, занятую возмущающими массами, то в обобщенных решениях информативна также и вся его «внутренность», каждой точке которой приписывается значение оценочной функции (в частном случае – оценка вероятности ее принадлежности истинному носителю \hat{S}).

Если охарактеризовать обобщенные решения $\langle S_j^*, \lambda^{(j)}(V_i) \rangle$ обратной задачи гравиразведки рудного типа с точки зрения их информативности, то вырисовывается следующая картина. «Составные части» S_j^* обобщенных решений – как «обычные» решения обратных задач – равноправны. Каждый носитель S_j^* с априорной оценкой $1/|Q_0|$ вероятности претендует на статус истинного решения \hat{S} обратной задачи или его наилучшей аппроксимации S° (напомним, что мы по умолчанию предполагаем, что в число найденных допустимых решений из подмножества Q_0 такая аппроксимация попала). Информативность результатов интерпретации в терминах единичного решения обратной задачи, оптимального (условно) по какому-то скалярному критерию сравнения альтернативных вариантов решения, по сути равна нулю, и для того, чтобы одно из допустимых решений назначить на роль наилучшего, никаких объективных причин нет. Не лишне будет еще раз подчеркнуть, что каждое *отдельно взятое* приближенное решение S^* обратной задачи рудного типа не несет в себе информацию о каких-то, пусть и довольно малых, его фрагментах, которые наверняка являлись бы и фрагментами истинного носителя \hat{S} . Не содержит оно и информацию, позволяющую указать какие-то его фрагменты, гарантированно не являющиеся фрагментами истинного носителя. И уж тем более, *в отдельно взятом* допустимом решении обратной задачи S_j^* не заключена информация о каких-то фрагментах истинного носителя, не оказавшихся фрагментами найденного приближенного решения. Качество результатов интерпретации в терминах единичного оптимального решения – это вопрос случая, а успешное решение поставленной геологической задачи по таким результатам – это вопрос удачи.

Иное дело – информация, содержащаяся в обобщенных решениях $\langle S_j^*, \lambda^{(j)}(X) \rangle$ обратной задачи. Всегда можно выполнить обратный ход и по функциям $\lambda^{(j)}(V_i)$, $V_i \in S_j^*$ восстановить исходную оценочную функцию $\lambda(V_i)$. В том случае, когда ею является функция гарантии, совокупность обобщенных решений несет в себе информацию, позволяющую указать часть пространства, заведомо являющуюся фрагментом истинного носителя \hat{S} . Но более интересно другое. Возьмем любое единичное обобщенное решение обратной задачи $\langle S_j^*, \lambda^{(j)}(V_i) \rangle$, порожденное, к примеру, функцией локализации $\lambda_1(V_i)$. Возникает любопытная ситуация. Априорная оценка вероятности того, что модельный носитель S_j^* является наилучшим приближением к истинному решению, мала и равна, всего-то, $1/|Q_0|$ (причем при условии состоятельности подмножества допустимых решений Q_0), тогда как априорная оценка обнару-

жения масс в любой области $V_i \subset S_j^*$ равна уже $\lambda_1(V_i)$ и в каких то случаях может достигать значения 1. Однако в этом нет никакого противоречия. Объяснить это можно тем, что факт обнаружения возмущающих масс в элементарной области V_i вовсе не означает, что эта область является фрагментом *конкретного* носителя S_j^* , интерес к которому и мог подвигнуть к изучению области V_i на предмет содержания в ней какой-то части возмущающих масс. Область V_i может оказаться фрагментом *любого другого* допустимого носителя, содержащего элемент замощения V_i . Таким образом, факт обнаружения по результатам бурения аномалиеобразующих масс в какой-то локальной области пространства не обязательно (и скорее всего не) есть следствие оптимальности решения обратной задачи, на основе которого были выполнены буровые работы.

Но следует ли считать признаком дефектности концепции обобщенных решений обратных задач ситуацию, когда задача обнаружения возмущающих масс была успешно решена исходя из *одного* обобщенного решения, тогда как в действительности успех был обусловлен *другим* допустимым решением? Разумеется, нет. С прикладной точки зрения важно лишь, что, поделившись своей информацией, множество допустимых решений «навело» геофизика на правильный выбор элемента замощения V_i для последующей проверки на предмет обнаружения возмущающих масс. То обстоятельство, что впоследствии могло бы быть установлено, что в целом возмущающие массы распределены по другому носителю, никакой роли уже не играет – задача обнаружения была решена, а последующая детализация – это уже совсем другая задача.

Если многие из известных скалярных критериев оптимальности, таких как значение функционала невязки, носят формальный характер и, по сути, не связаны с информативностью результата интерпретации, то в случае обобщенных решений обратной задачи имеются объективные предпосылки для сравнения этих решений. Понятно, что функция $\lambda(V_i)$ не может изменить ответ на вопрос о том, какая из областей S_j^* , скорее всего, является неизвестным истинным носителем \hat{S} (или ее наилучшей аппроксимацией). Иное дело, если область S_j^* рассматривать пофрагментно, когда безразлично, какие из допустимых носителей *целиком* содержат возмущающие массы, часть из которых попала в тот или иной фрагмент этой области.

Так, пусть выполнены следующие операции:

1) с помощью монтажных технологий построено подмножество $Q_0 \subset Q$ «обычных» допустимых решений обратной задачи – носителей S_j^* возмущающих масс;

2) на основе этих решений построена одна из оценочных функций λ ;

3) построено ассоциированное с Q_0 множество $Q_0(\lambda)$ обобщенных решений $\langle S_j^*, \lambda^{(j)}(V_i) \rangle$ обратной задачи.

Безусловно, профессионального взгляда достаточно, чтобы из двух (пусть пяти, или даже десяти) обобщенных решений назвать наилучшее, но в на-

шем случае выбор придется осуществлять из сотен таких решений. Понятно, что взятое целиком множество Q_0 не годится на роль итоговых результатов интерпретации – оно труднообозримо. Необходим принцип отбора лучшего из допустимых вариантов интерпретации. Для этого следует формализовать признаки оптимальности решения и свести их в один критерий \mathcal{G} . Логично, если такой критерий будет согласован со спецификой оценочной функции λ , фигурирующей в обобщенном решении, а сама функция привязана к целевой задаче интерпретации.

Достаточно общими, пригодными для применения с различными оценочными функциями λ , могут оказаться критерии оценки обобщенного решения в целом. Если учесть, что в случае рудной обратной задачи допустимые носители возмущающих масс будут найдены с помощью монтажных алгоритмов в классе конфигурационных распределений масс, то целесообразно использовать для этих носителей привычные обозначения. Пусть $I(j)$ – множество номеров t элементов замощения V_t , составляющих ядро $\mathcal{Y}(\Omega_j^*)$ допустимого носителя Ω_j^* , и $|I(j)|$ – его мощность. К универсальным критериям можно отнести следующие два:

$$\mathcal{G}_1(\Omega_j^*, \lambda) = \frac{1}{|I(j)|} \sum_{t \in I(j)} \lambda(V_t), \quad (8.17)$$

$$\mathcal{G}_2(\Omega_j^*, \lambda) = \min\{\lambda(V_t) : t \in I(j)\}. \quad (8.18)$$

В качестве наилучшего обобщенного решения обратной задачи логично принять то, на котором значение критерия максимально.

Если в качестве $\lambda(V_t)$ взять функцию локализации $\lambda_1(V_t)$, значение критерия (8.17) можно интерпретировать как среднюю (по отдельным фрагментам области Ω_j^*) оценку вероятности обнаружения возмущающих масс в наугад взятой «элементарной» области $V_t \in \Omega_j^*$. Значение же критерия (8.18) можно трактовать как оценку снизу вероятности обнаружения возмущающих масс в случайно выбранной точке области Ω_j^* .

Еще один рекомендуемый нами критерий наилучшего обобщенного решения связан с оценочными функциями λ , нацеленными на обнаружение отдельных фрагментов носителя возмущающих масс, такими, например, как функция доверия $\lambda_3(V_t)$. Напомним, что эта функция, определенная на элементах V_t замощения изучаемой пространственной области D , основана на максимальных по мере связных конфигурационных областях $D_{k(t)} \supset V_t$ таких, что раздельные оценки вероятности принадлежности каждого элемента $V_r \in \mathcal{Y}(D_{k(t)})$ носителю \widehat{S} возмущающих масс не ниже заданного p_0 . По максимуму критерия

$$\mathcal{G}_3(\Omega_j^*, \lambda_3) = \max\{\mu(\Omega_j^* \cap D_{k(t)}) : V_t \in \mathcal{Y}(\Omega_j^*)\}, \quad (8.19)$$

вычисленного для всех элементов замощения, вошедших в ядра хотя бы одного допустимого носителя Ω_j^* , можно отобразить обобщенное решение $\langle \Omega_j^*, \lambda_3^{(j)} \rangle$, содержащее максимальный по мере связный (конфигурационный) фрагмент $\Omega_j^{(0)}$ носителя Ω_j^* , оценки (раздельные) вероятности принадлежности каждого элемента $V_i \in \mathcal{Y}(\Omega_j^{(0)})$ которого истинному носителю \hat{S} не ниже заданного p_0 .

Если взять проблему в целом, то концепция авторов состоит в том, чтобы не навязывать интерпретатору «стандартные» оценочные функции λ и критерии оптимальности \mathcal{A} ; геофизик должен сам назначать их исходя из целей интерпретации.

В завершение теоретической части главы суммируем основные особенности концепции аддитивных технологий интерпретации. Отметим прежде всего, что в сравнении с широко распространенными методами интерпретации, нацеленными на поиск всего лишь одного, наилучшего варианта решения обратной задачи, структура аддитивных технологий интерпретации является более сложной. Это вполне объяснимо и оправданно существенно большей информативностью результатов интерпретации, выполненной с помощью этих технологий. Достаточно сказать, что, в отличие от известных методов решения обратных задач, построение какого-то одного из допустимых вариантов интерпретации является для аддитивных технологий лишь отдельным структурным элементом. В целом же, аддитивные технологии нуждаются в эффективных и полностью автоматизированных методах построения достаточно большого числа приближенных решений обратной задачи, множество Q_0 которых должно по возможности довольно равномерно покрывать множество Q всех допустимых решений обратной задачи. В наиболее проблемной, рудной постановке обратной задачи, где нет возможности (в силу известных причин) использовать в автоматизированных алгоритмах интерпретации модели геологических тел в виде произвольных многогранников, в качестве методов поиска отдельных допустимых решений обратной задачи можно задействовать монтажные алгоритмы, которые работают с конечноэлементными аппроксимациями источников поля.

Построение достаточно представительного множества допустимых решений – это всего лишь подготовительный этап при реализации аддитивных технологий интерпретации. Множество Q_0 предназначается для построения оценочных функций $\lambda(X)$, определенных в точках области D , заведомо содержащей источники аномалии. Если попытаться коротко охарактеризовать назначение этих функций, то их целью является оценивание вероятности успешного решения целевой задачи интерпретации при должном использовании информации, хранящейся в множестве Q . В данной главе представлены несколько таких функций, каждая из которых ориентирована на решение определенных вопросов. Чтобы получить наглядное представление о возможностях оценочных функций, вполне достаточно познакомиться с одной из них

– функцией локализации (мы обозначили ее как $\lambda_1(X)$). Эта функция представляет собой распределение отдельных оценок вероятности обнаружения возмущающих масс в точках X области D . Значение этой функции в каждой точке X суть отношение числа допустимых носителей $S^* \in Q_0$, содержащих точку X , к мощности множества Q_0 .

Если любой допустимый модельный носитель S^* возмущающих масс рассматривать в отрыве от других, то оценить вероятность принадлежности какого-то его фрагмента $S_0^* \subset S^*$, и в частности – отдельно взятой точки X , истинному носителю \hat{S} не представляется возможным. Но если тот же носитель S^* рассматривать как элемент множества Q (или его подмножества Q_0), то другие допустимые носители, которые также содержат заданную точку X , одним только фактом своего существования доведут оценку вероятности утверждения $X \in \hat{S}$ до значения $\lambda_1(X)$. Этот «феномен» объясняется тем, что, поделившись своей информацией с другими построенными допустимыми носителями, каждый из носителей получает, в свою очередь, информацию от всех других найденных допустимых носителей. Другими словами, аддитивные технологии интерпретации налаживают максимальную систему связей между известными допустимыми решениями обратной задачи. Вследствие этого фрагменты каждого, до того «безликого» («пустого»), носителя наполняются информацией, выраженной в значениях оценочной функции $\lambda(X)$.

Суммируя перечисленные особенности аддитивных технологий можно найти следующее достаточно простое объяснение их преимуществ перед известными методами решения обратных задач. Общим для этих методов является такая последовательность действий: вначале ведется поиск наилучшего (оптимального) варианта интерпретации, и только затем (на его основе) осуществляется собственно решение всех вопросов, относящихся к целевой задаче интерпретации. Но как только информацию об источниках поля, которые в совокупности несут все допустимые приближенные решения обратной задачи, доверено представлять лишь одному из них, основная часть этой информации попросту теряется (выводится из интерпретационного процесса). В аддитивных же технологиях интерпретации названные действия меняются местами. Если для определенности взять обратную задачу рудного типа и функцию локализации, то вначале, в соответствии с целевой задачей интерпретации, намечаются те фрагменты пространства, в которых требуется оценить вероятность обнаружения возмущающих масс, и уже затем для решения целевой задачи привлекается, теперь уже *вся*, информация, хранящаяся в найденных допустимых решениях обратной задачи.

Наконец, следует подчеркнуть, что аддитивные технологии интерпретации не отвергают привычные математические формы представления результатов количественной интерпретации гравитационных и магнитных измерений. В случае все той же рудной обратной задачи компромисс между традиционной

математической формой представления результатов интерпретации в виде наилучшей оценки S^{opt} носителя возмущающих масс и предложенной формой в виде оценочной функции обеспечивают обобщенные решения обратной задачи. «Информационный вес» обобщенных решений обратной задачи можно оценить с помощью скалярных или векторных критериев \mathcal{J} , некоторые из которых представлены в данной главе. Соответственно, возникает возможность выбора наилучшего варианта интерпретации $\langle S^{opt}, \mathcal{J} \rangle$, но теперь уже не по каким-то формальным критериям, а по некоторым признакам, напрямую связанным с достоверностью результатов интерпретации.

8.4. Результаты вычислительных экспериментов

Оценочные функции, используемые в аддитивных технологиях интерпретации, носят характер вероятностных оценок тех или иных событий. Специфика вероятностного подхода к обратным задачам такова, что ответ на вопрос, в чем же должна состоять доказательность численного эксперимента, не является столь уж очевидным. При решении модельных примеров любым из детерминистских методов выявить слабые стороны последнего не так уж сложно. Неудачу при решении практических задач можно списать здесь разве что на неполную адекватность принятых модельных представлений реальным физико-геологическим условиям. При вероятностном подходе, к которому в какой-то мере примыкает подход с оценочными функциями, недостатки предлагаемого метода решения обратной задачи обнаружить гораздо труднее. Если какие-то прогнозируемые с достаточно высокой вероятностью p предполагаемые свойства распределения возмущающих масс не подтвердились, неудачу оправдывает вероятность $1 - p$ противоположного исхода. Все это надо иметь в виду при оценке эффективности того или иного метода по результатам решения модельных примеров.

Пример 8.1. *Функция гарантии* λ как эквивалентная форма представления результатов интерпретации в терминах пары $\langle D_1, D_2 \rangle$ может принять на себя часть построений других оценочных функций, рассмотренных в этой главе. Если взять, к примеру, *функцию локализации* $\lambda_1(X)$, то она совпадает с *функцией гарантии* на всем пространстве, исключая область $D_1 \setminus D_2$. Довольно тесная связь существует также между *функцией гарантии* и *функцией обнаружения*, которую мы продемонстрируем в этом примере. Это обстоятельство подводит к мысли о возможности использования семейства допустимых решений, применяемых для построения *функции гарантии* (по сути, множеств D_1 и D_2), при построении других оценочных функций.

В данном примере аномалия Δg обусловлена бесконечно протяженными однородными прямоугольными призмами \hat{S}_1 и \hat{S}_2 . Первая призма, находя-

щаяся в левом верхнем углу рис. 8.1, обладает эффективной плотностью $0,1 \text{ г/см}^3$ и имеет в сечении размеры $1000 \times 500 \text{ м}$; вторая призма, расположенная на более значительной глубине, имеет эффективную плотность $0,15 \text{ г/см}^3$ и размеры $750 \times 750 \text{ м}$. Эффективные плотности считаются известными. Осуществляется прямой перебор параметров призм на достаточно густой сетке их возможных значений с последующим выбором (по значению невязки) допустимых решений обратной задачи. Тем самым мы обеспечили *равномерное*

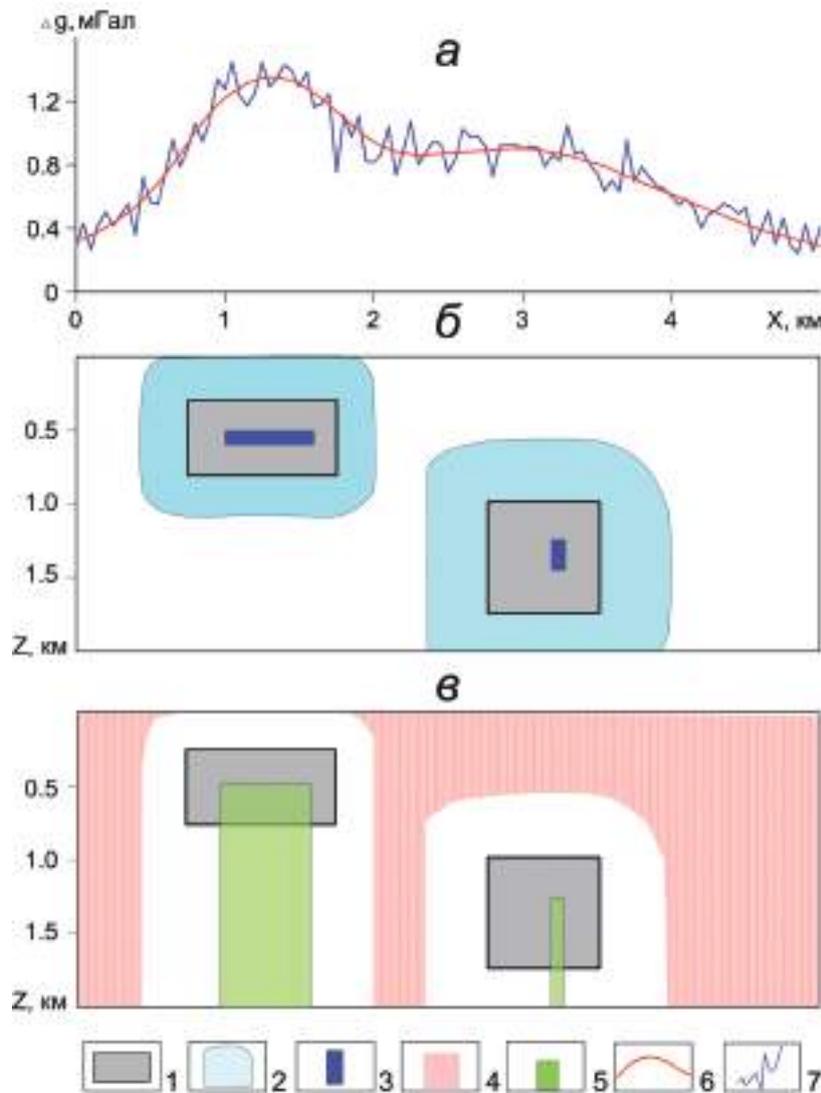


Рис. 8.1. Гравитационное поле двух призм (а) и результаты его интерпретации (б, в): 1 – возмущающие объекты; 2 – области $D_1^{(r)}$; 3 – области $D_2^{(r)}$; 4 – область, в которой $\lambda_4(X) = 0$; 5 – область, в которой $\lambda_4(X) = 1$; 6 – точное поле $\Delta \hat{g}$; 7 – поле $\Delta \tilde{g}$, осложненное помехой.

покрытие множества всех допустимых решений Q , что является *достаточным условием* (помимо адекватности) надежности построений. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, множество найденных допустимых решений обозначим как Q^* . Разумеется, такой путь не конструктивен на практике при решении обратных задач для более-менее сложных моделей. Но здесь мы пошли на это, с тем чтобы вывести за рамки примера проблему состоятельности множества допустимых решений, по которому будут построены оценочные функции, и прочувствовать, так сказать, «в чистом виде» меру неопределенности в терминах оценочной функции.

Мы вновь прибегли к испытанному приему, когда интерпретация осуществляется по точному полю, но алгоритм не принимает это во внимание, считая, что наблюдения поля отягощены помехами. При максимально допустимом значении невязки наблюденного и модельного полей 0,1 мГал число допустимых носителей оказалось равным $m = 7408$.

По результатам интерпретации в терминах пары $\langle D_1, D_2 \rangle$ мы можем, таким образом, очертить области, в которых значения *функции локализации* $\lambda_1(X)$ равны единице и нулю (рис. 8.1б).

Понятно, что любая (модельная) вертикальная скважина, имеющая общие точки с областью D_2 ($D_2 = D_2^{(1)} \cup D_2^{(2)}$, где гарантирующая область $D_2^{(r)}$, $r = 1, 2$, относится к локальному телу \hat{S}_r), подсечет и соответствующий возмущающий объект \hat{S}_r . Следовательно, геометрическое место точек, в которые пробурены (разумеется, виртуально) такие скважины, представляет собой пространственную область, в которой значение *функции обнаружения* равно единице. В свою очередь, вертикальные (модельные) скважины, не имеющие общих точек с областью D_1 ($D_1 = D_1^{(1)} \cup D_1^{(2)}$), гарантированно не подсекут возмущающие объекты. Следовательно, геометрическое место точек, в которые могли бы быть пробурены все скважины с такого рода свойством, представляет собой пространственную область, в которой значение *функции обнаружения* равно нулю. Области, в которых по *функции гарантии* однозначно восстанавливаются области, в которых *функция обнаружения* принимает граничные значения, представлены на рис. 8.1в.

Разумеется, интерес представляет поведение *функции обнаружения* в области, где ее значения принадлежат интервалу (0,1). Восстановить распределение значений функции в этой области по *функции гарантии* уже не удастся. Но мы можем воспользоваться тем же набором из m допустимых носителей, по которым были построены гарантирующие области D_1 и D_2 . Проиллюстрируем это на той же модели источников поля в виде двух призм. Предполагается, что форма, размеры и плотности призм априори известны. Неизвестно их положение, определяемое координатами (\bar{x}_1, \bar{z}_1) , (\bar{x}_2, \bar{z}_2) центров тяжести. Однако на этот раз мы решили провести интерпретацию в условиях, когда в измерениях поля присутствуют помехи, роль которых выполняют реализации нор-

мально распределенной случайной величины с нулевым средним. Расчеты были выполнены при трех значениях σ среднеквадратической величины помехи: $\sigma = \sigma_1 = 0,05$ мГал – «слабая» помеха; $\sigma_2 = 0,1$ мГал – «средняя» помеха; $\sigma_3 = 0,2$ мГал – «сильная» помеха. Наблюдаемое поле в случае одного из набора помех приводится на рис. 8.1а. Имитируя реальную ситуацию, когда уровень помех доподлинно неизвестен, во всех трех случаях максимально допустимое расхождение ε_0 наблюдаемого и подобранного полей взято с «запасом» – на 30% больше фактического значения уровня помех в измерениях.

Зададимся регулярной сеткой $\Gamma \subset \mathbf{R}^4$ с шагом 50 м, покрывающей область параметров модели $\bar{x}_1, \bar{z}_1, \bar{x}_2, \bar{z}_2$, заведомо содержащую вектор истинных координат $\hat{x}_1, \hat{z}_1, \hat{x}_2, \hat{z}_2$ центров тяжести тел \hat{S}_1 и \hat{S}_2 . Каждый узел сетки (у нас их более пяти миллионов) ассоциируется с возможным расположением истинных центров тяжести возмущающих тел. Если из числа апробируемых вариантов отобрать допустимые решения обратной задачи, то, в силу того, что сетка Γ является достаточно плотной, репрезентативность множества Q^* обеспечена.

При «слабой» помехе в множество Q^* попало $m = 269$ допустимых решений. Как следствие усиления фактора ε -эквивалентности при «средней» помехе множество Q^* содержит уже $m = 7408$ допустимых по невязке решений обратной задачи, а при «сильной» – $m = 221604$ решения. При «слабой» помехе наиболее высокие значения функции обнаружения концентрируются как раз в той части пространства, в которой расположены искомые тела \hat{S}_1, \hat{S}_2 и как следствие – ниже этих тел (рис. 8.2а). С ростом уровня помех отмеченная закономерность сохраняется, но, как логично было ожидать, результаты становятся менее контрастными (рис. 8.2б,в).

Акцентируем внимание на том, что для получения надежных результатов интерпретации в терминах функции обнаружения вовсе не обязательно располагать чрезмерно большим числом m допустимых решений; главное условие заключается в том, чтобы эти решения, как мы уже говорили, были равномерно распределены по множеству Q . Исходя из максимальных значений функции обнаружения можно наилучшим образом задать заверочные скважины С-1 и С-2 для вскрытия аномалиеобразующих объектов.

Пример 8.2. Рассмотрим модельный пример, в котором аномалия Δg , заданная в точках горизонтального профиля с шагом 500 м, обусловлена двумя телами, одно из которых ассоциируется с хонолитом основного состава эффективной плотности $\delta_1 = 0,3$ г/см³, другое – с лакколитом среднего состава эффективной плотности $\delta_2 = 0,2$ г/см³. Эту модель источников мы использовали в главе 6 (см. рис. 6.13).

Имитация помех ξ_i измерений (включая те, что имеют геологическую природу) выполнена с помощью случайных чисел с нестандартным законом распределения. Для создания нужной выборки помех вначале генерируется вы-

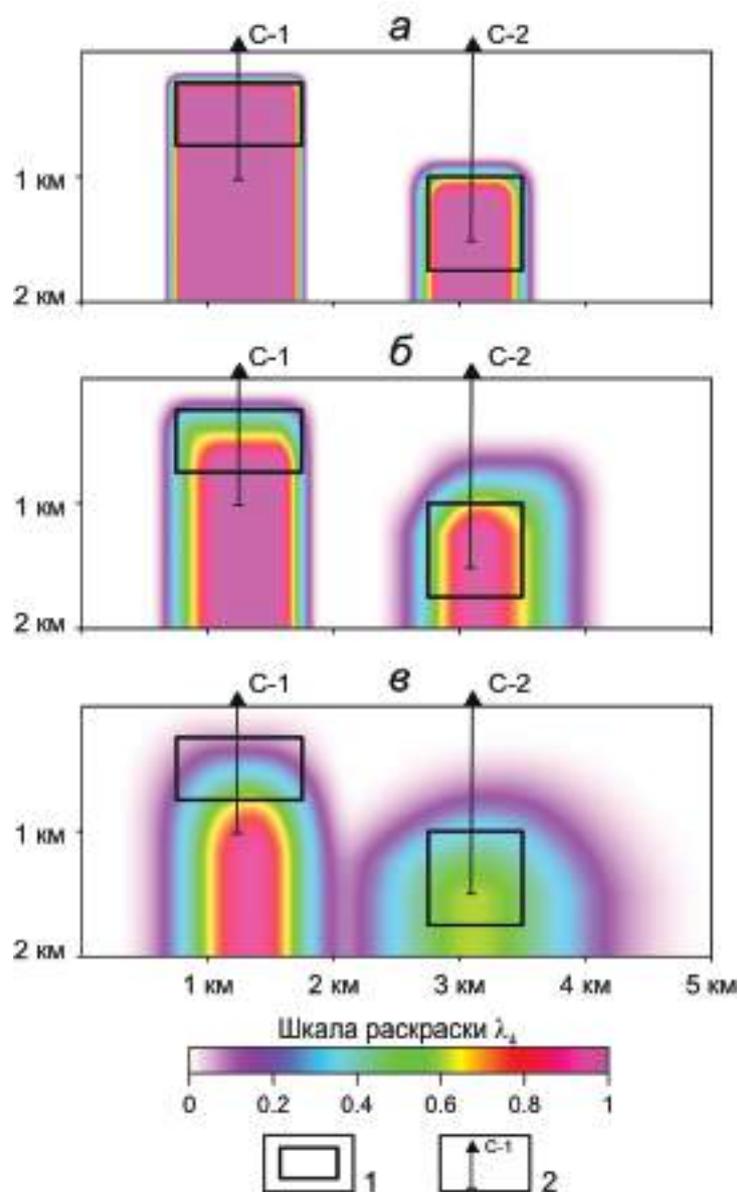


Рис. 8.2. Вертикальные карты функции обнаружения λ_4 для случая «слабых» (а), «средних» (б) и «высоких» (в) помех в гравитационном поле: 1 – аномалиеобразующие тела; 2 – проектируемые скважины.

борка нормально распределенной случайной величины, стандарт которой равен $\sigma = 0,2$ мГал, а затем модули всех тех значений ξ_i , которые превышают σ , увеличиваются в 3 раза и принимаются за значение помехи в i -ом измерении. Закон распределения приобретает ярко выраженный асимметричный харак-

тер, а среднеквадратическое значение помехи доходит почти до 0,5 мГал. Оно и взято за максимально допустимую невязку модельного и «наблюдённого» полей при поиске допустимых решений обратной задачи монтажным методом. В качестве априорного ограничения на геометрию границы конфигурационного модельного носителя используется условие его безотростковости, а в качестве оценки близости ρ модельного S^* и истинного \hat{S} носителей берётся отношение

$$\rho(S^*, \hat{S}) = \frac{\mu(S^* \cap \hat{S})}{\mu(S^* \cup \hat{S})}, \quad (8.20)$$

где, как обычно, μ – мера Лебега.

Как мы уже замечали, тенденции, подмеченные по результатам правильно организованных серийных расчетов, подвержены случайности в значительной меньшей степени, чем результаты единичных расчетов. Принимая это во внимание, интерпретация была выполнена для $N = 200$ вариантов помех в измерениях Δg_t . В каждом варианте t разнообразие найденных допустимых носителей обеспечивалось за счет выбора различных начальных приближений. В результате в каждом из вариантов было найдено в среднем около 1800 допустимых носителей. Изучались три критерия выбора наилучшего решения, которые мы поместили значениями $j = 1, 2, 3$. С этой целью во всех N вариантах из множества Q_0 выбирались три носителя $S_{j,t}^*$, $j = 1, 2, 3$: носитель $S_{1,t}^*$, обеспечивающей минимум невязки (как дань методу подбора) и два носителя $S_{2,t}^*$ и $S_{3,t}^*$, входящие в оптимальные обобщенные решения обратной задачи, отобранные по критериям \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 и построенные на основе функции локализации. В табл. 8.1 приведены: минимальное и максимальное значения ρ_j^{\min} и ρ_j^{\max} , $j = 1, 2, 3$ показателей $\rho(S_{j,t}^*, \hat{S})$ близости оптимального модельного и истинного носителей, которые были достигнуты в вариантах $t = 1, 2, \dots, N$, средние значения $\bar{\rho}_j$ этих показателей, а также среднеквадратические отклонения σ_j функционалов $\rho(S_{j,t}^*, \hat{S})$, $t = 1, 2, \dots, N$, от их среднего значения $\bar{\rho}_j$.

Выводы, которые следуют из таблицы: а) в терминах функционала (8.20) качество результатов интерпретации по критериям \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 примерно на 15% выше качества решения, минимизирующего невязку; б) результаты решения по критериям \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 значительно более устойчивы – значения σ_2 и σ_3 почти в 2 раза меньше, чем σ_1 .

Таблица 8.1

Статистические характеристики результатов вычислительного эксперимента

j	ρ_j^{\min}	ρ_j^{\max}	$\bar{\rho}_j$	σ_j
1	0,164	0,612	0,430	0,092
2	0,336	0,612	0,498	0,048
3	0,333	0,612	0,493	0,052

Приведем решения $S_{j,t}^*$ из одного, случайно взятого, варианта t (рис. 8.3), а также распределение функции локализации на носителе $S_{2,t}^*$ (рис. 8.4).

Пример 8.3. Измерения гравитационного поля, выполненные по горизонтальному профилю длиной 40 км с шагом 500 м, обусловлены тремя телами \hat{S}_1 , \hat{S}_2 и \hat{S}_3 эффективной плотности $\hat{\delta}_1 = 0,15$, $\hat{\delta}_2 = 0,2$ и $\hat{\delta}_3 = 0,3$ (г/см³), соответственно. Можно провести аналогию между выбранной плотностной моделью и некоторыми интрузивными телами, залегающими в гравиактивном слое мощностью до 10 км (рис. 8.5).

При поиске очередного j -го допустимого многосвязного носителя S_j , представляющего собой объединение трех связанных парциальных носителей $S_{j,t}$, $t = 1,2,3$, используется соответствующая модификация монтажного метода, рассчитанная на модель источников аномалии в виде совокупности нескольких связанных тел различной эффективной плотности. Как того требует монтажный метод, выполнено регулярное замощение $V_n = \{V_n\}$ достаточно обширной области нижнего полупространства квадратами V_n со стороной 250 метров. Пар-

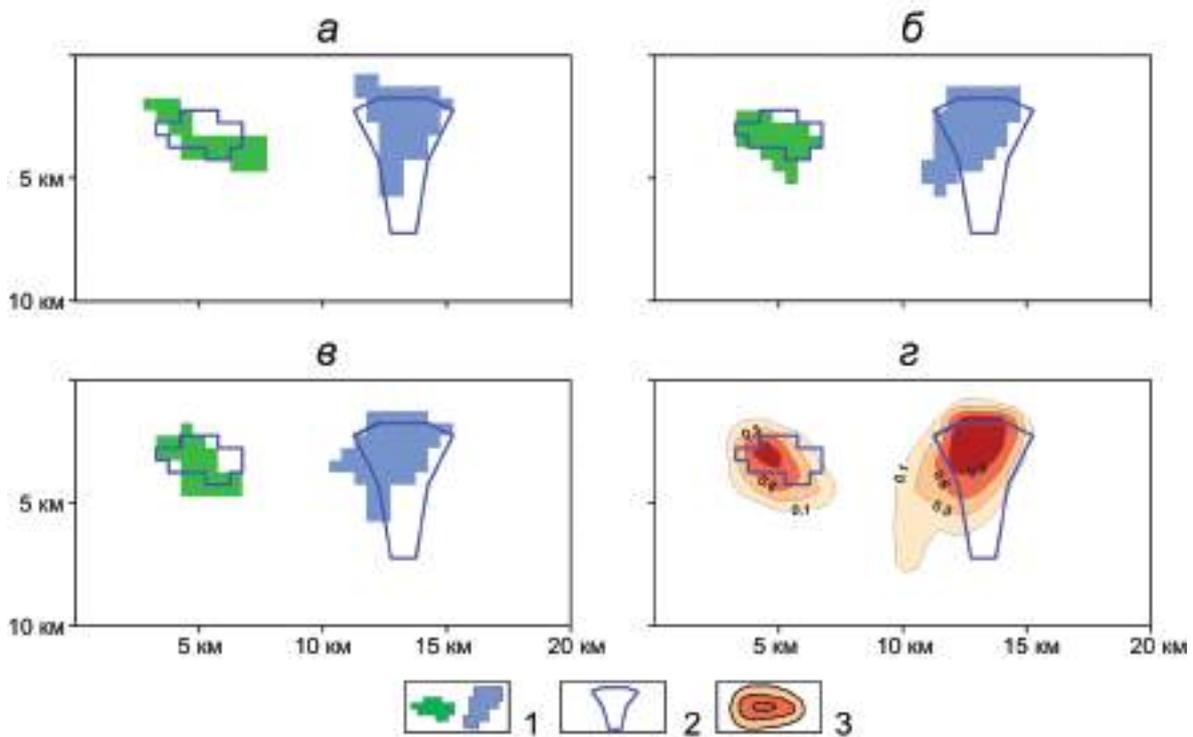


Рис. 8.3. Результаты расчетов по одному из вариантов t : а – $S_{1,t}^*$ ($\rho = 0,451$), б – $S_{2,t}^*$ ($\rho = 0,473$), в – $S_{3,t}^*$ ($\rho = 0,441$), г – карта изолиний функции локализации. 1 – результаты решения обратной задачи, 2 – границы истинных тел, 3 – области различных значений функции локализации λ_1 .

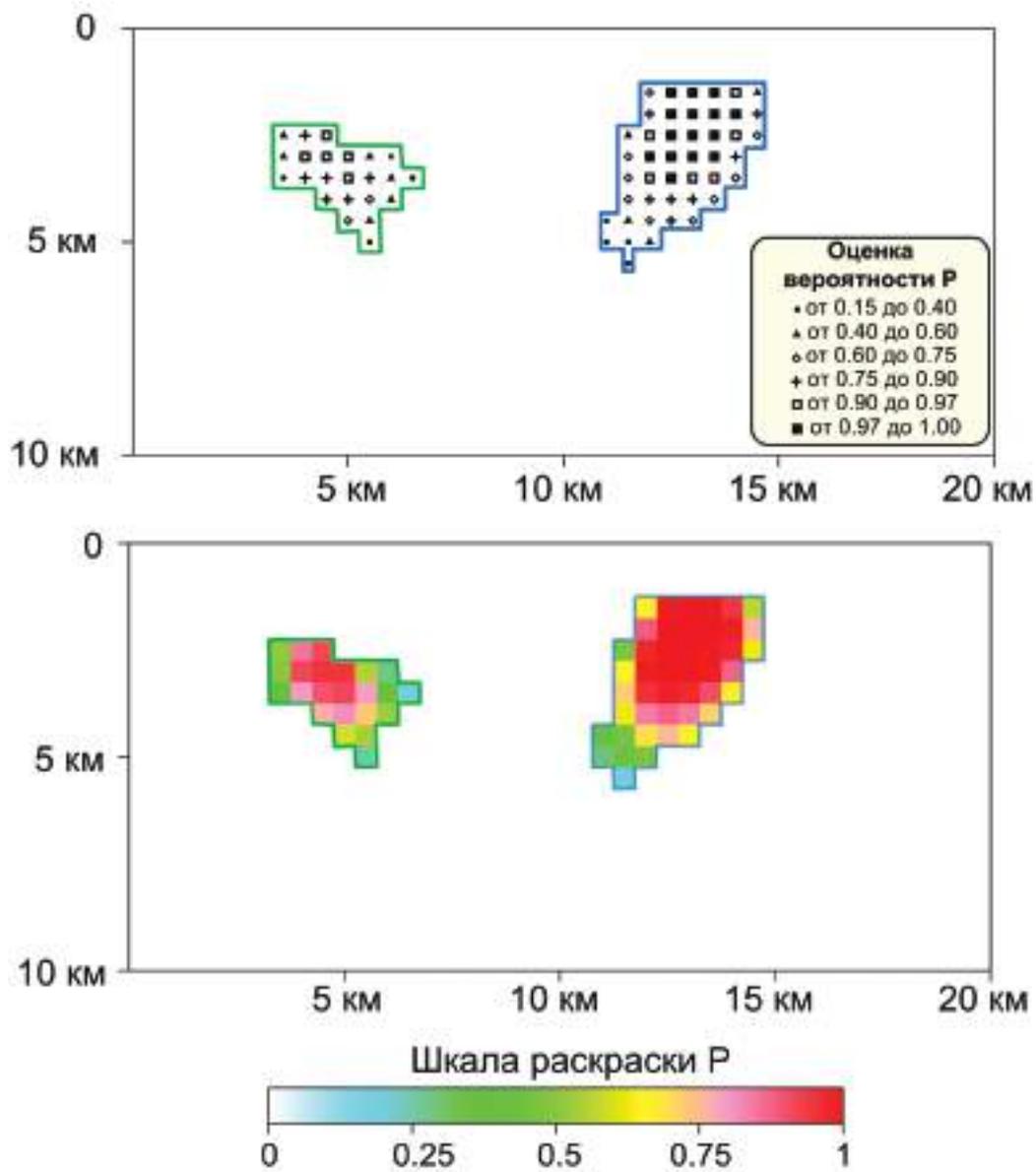


Рис. 8.4. Распределение функции локализации λ_1 на оптимальном по критерию \mathcal{G}_1 носителе $S_{2,t}^*$ в одном из вариантов t .

циальные носители $S_{j,t}$, составляющие допустимые решения S_j , выбираются из класса M всевозможных связных объединений элементов замощения V . По характеру поведения поля назначены прямоугольные области R_t (их границы отмечены на рис. 8.5 штриховой линией), имеющие по априорным предпо-

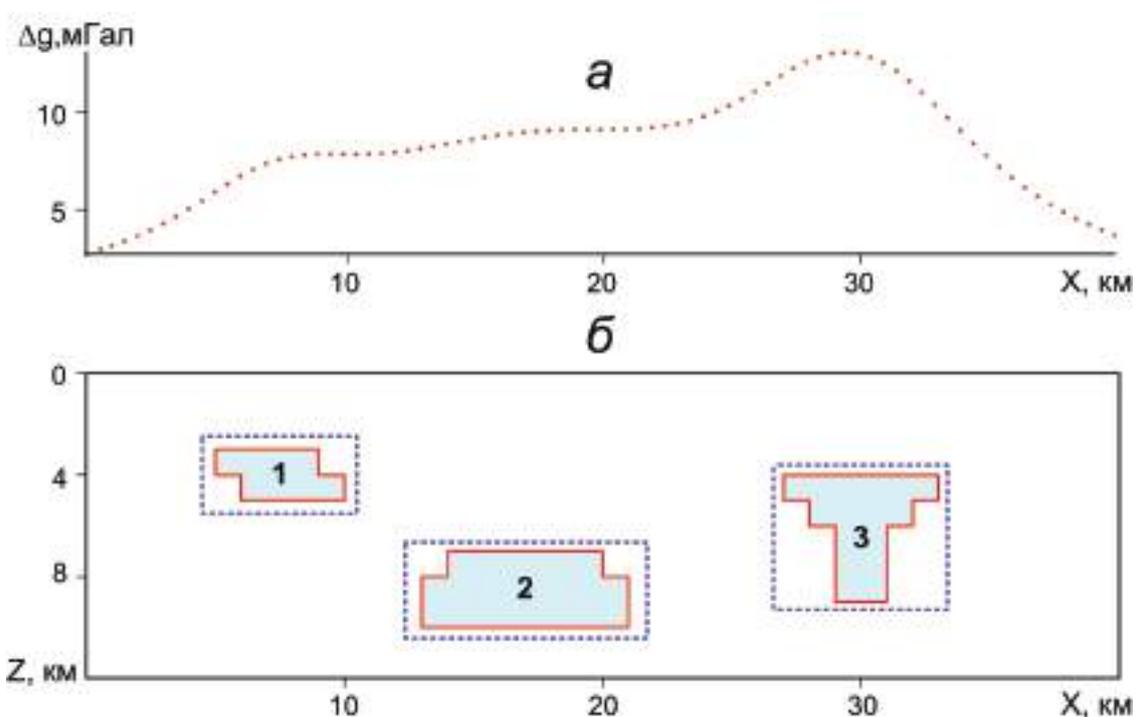


Рис. 8.5. Модель геоплотностного разреза (а) и гравитационное поле (б). Смысл штриховых линий поясняется в тексте.

сылкам непустые пересечения с соответствующими связными компонентами $\hat{S}_t, t = 1, 2, 3$ истинного носителя \hat{S} (разумеется, речь не идет о задании областей, целиком содержащих локальные тела). Это позволяет в качестве нулевого приближения к каждому связному фрагменту $S_{j,t}$ носителя S_j брать – по некоей схеме или случайным образом – один из элементов $V_n \subset R_t$, хотя и без гарантии, что он принадлежит этому фрагменту.

Определенная свобода выбора нулевого приближения порождает многообразие допустимых решений обратной задачи, которые удастся построить с помощью монтажных методов. Помимо предположения $\hat{S}_t \cap R_t \neq \emptyset$ принимается, что парциальные носители \hat{S}_t односвязны (не содержат «дыр»), а их границы гладки (по определению из [Балк, 1989]). В качестве меры близости любых двух носителей возьмем функционал (8.20), который, заметим, не является метрикой, что в наших задачах вовсе не обязательно.

В случаях, подобных нашему, не обязательно вести расчеты по полю, которое осложнено помехой. Их можно вести по точному полю, а в качестве максимально допустимого расхождения его с полем подобранного модельного распределения масс брать предполагаемую норму помех в измерениях. Выводы, которые будут сделаны по результатам расчетов, от этого не могут измениться.

Построено четыре подмножества $Q_0^{(r)}$ допустимых вариантов интерпретации, отвечающих следующим максимально разрешенным среднеквадратическим значениям ε_r нормы помех в измерениях: $\varepsilon_1 = 0,05$ мГал, $\varepsilon_2 = 0,1$ мГал, $\varepsilon_3 = 0,15$ мГал и $\varepsilon_4 = 0,3$ мГал. При выбранном алгоритме задания различных нулевых приближений процесс продуцирования новых допустимых решений прервался, когда число допустимых решений, отвечающих заданным значениям ε_r , достигло, соответственно, 891, 1189, 1252 и 1298. Довольно высокую степень проявления ε -эквивалентности можно видеть из рис. 8.6 (в качестве максимально разрешенной невязки взято значение ε_2 , составляющее, кстати, менее одного процента от амплитуды аномального поля Δg). Это при том, что (проводя аналогию между модельной постановкой и реальными физико-геологическими условиями) здесь мы имеем дело с довольно простой ситуацией, когда аномалиеобразующие объекты обладают эффективной плотностью одного знака и расположены достаточно далеко друг от друга, а величина ε_2 близка к качеству высокоточных гравиметрических съемок масштаба 1:25 000.

На рис. 8.7 представлена вертикальная карта изолиний функции локализации. Характерно, что она имеет три экстремума – по числу парциальных источников аномалии. Что важно, сами экстремумы приурочены к этим парциальным источникам. Более того, функция локализации принимает зна-

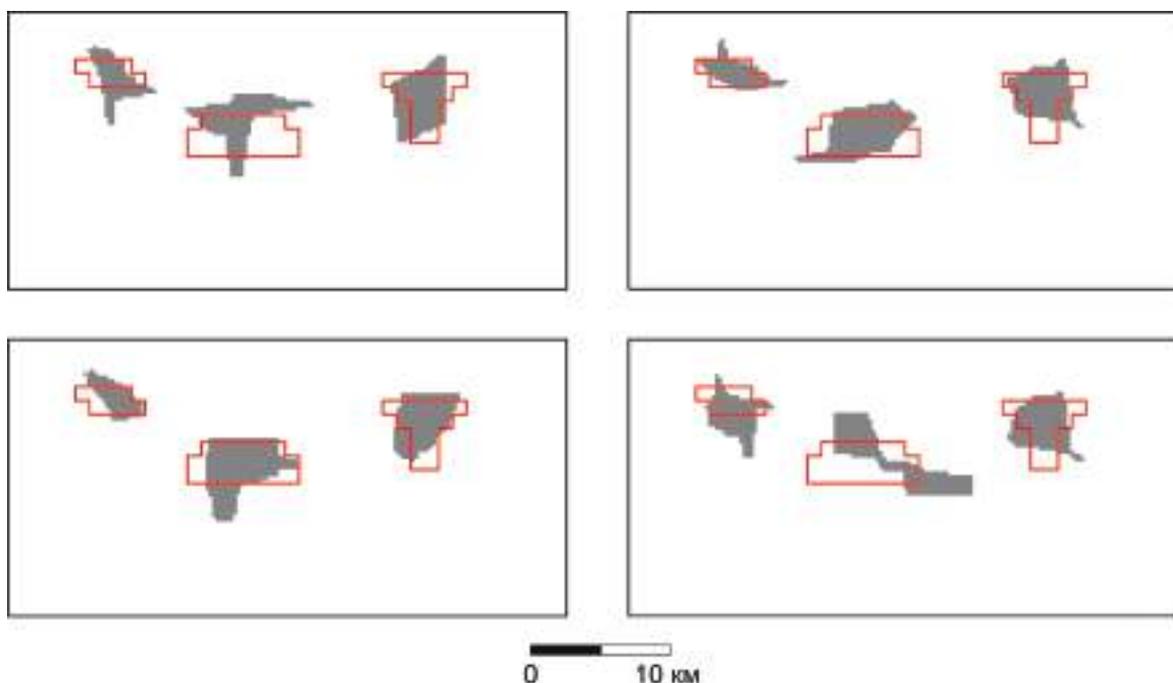


Рис. 8.6. Случайно выбранные допустимые решения обратной задачи гравirazведки и истинные возмущающие объекты.

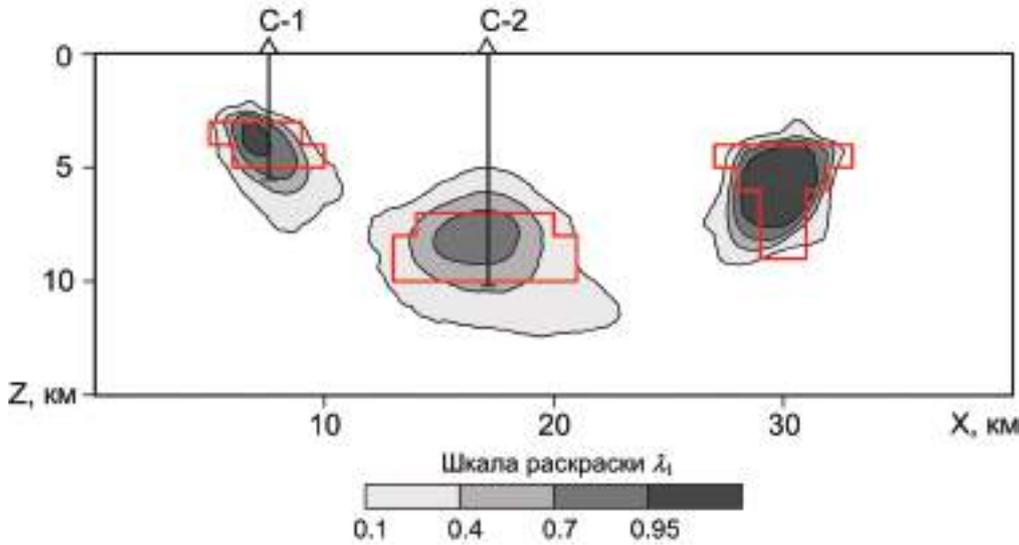


Рис. 8.7. Вертикальная карта изолиний функции локализации λ_1 и планируемые скважины С-1, С-2.

чения, близкие к максимальному, в точках, тяготеющих к центрам тяжести каждого из трех тел \hat{S}_i . Для первого и второго тел эти значения равны 0,992 и 0,902, соответственно. Максимально возможное значение 1,0 функция локализации принимает в точках некоторого фрагмента $\hat{S}_3^{(0)}$ третьего тела. Последнее означает, что область $\hat{S}_3^{(0)}$ оказалась фрагментом всех 1189 найденных допустимых носителей. В свою очередь, это говорит о том, что на элементах замощения $V_n \subset \hat{S}_3^{(0)}$ функция гарантии принимает единичное значение и область $\hat{S}_3^{(0)}$ идентифицируется как фрагмент истинного парциального носителя (рис. 8.8а), что в данном случае соответствует истине. Если вернуться к распределению функции локализации в целом на изучаемой части пространства, то можно сказать: если среди найденных допустимых решений оказались близкие к истинному, то критерий выбора оптимального обобщенного решения обратной задачи укажет именно на одно из этих решений – успех интерпретации будет обеспечен.

На рис. 8.8б представлена функция надежности, характеризующая влияние помех в измерениях поля на возможность локализации фрагментов $V_n \subset \hat{S}_3^{(0)}$ истинного носителя.

На рис. 8.9 приведены графики функции обнаружения возмущающих масс, построенные на отрезках прямых, проходящих вдоль полотна планируемых скважин С-1, С-2 (см. рис. 8.7), в предположении, что максимально допустимое значение нормы помехи составляет 0,15 мГал. На отрезке, пересекающем тело 1 (оно проявлено в гравитационном поле более контрастно, чем тело 2),

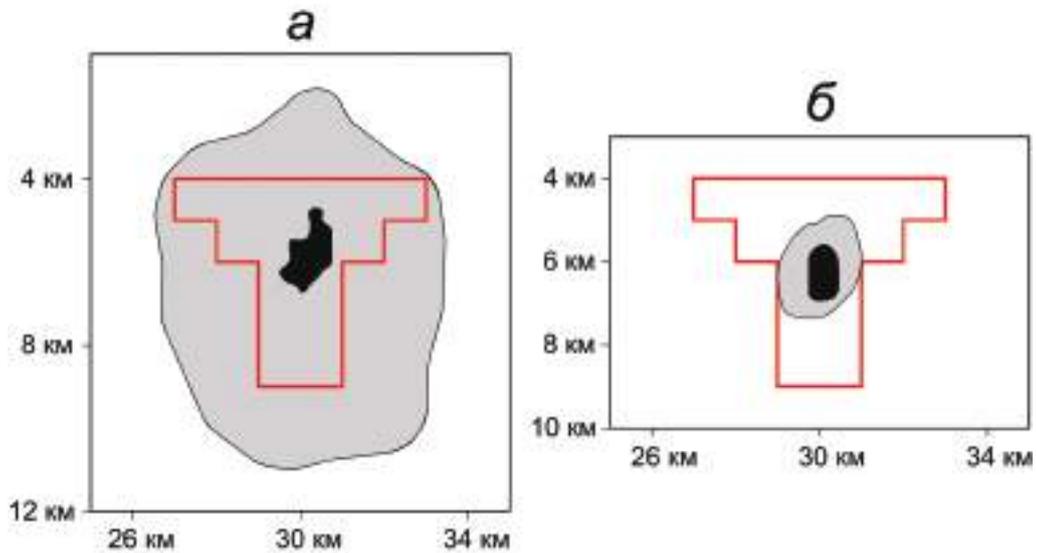


Рис. 8.8. Иллюстрация возможности локализации тела Z : a – функция гарантии: серый цвет – оценка области D_1 , черный цвет – оценка области D_2 ; b – функция надежности λ_2 : серый цвет ($\lambda = 0,05$ мГал), черный цвет ($\lambda = 0,15$ мГал).

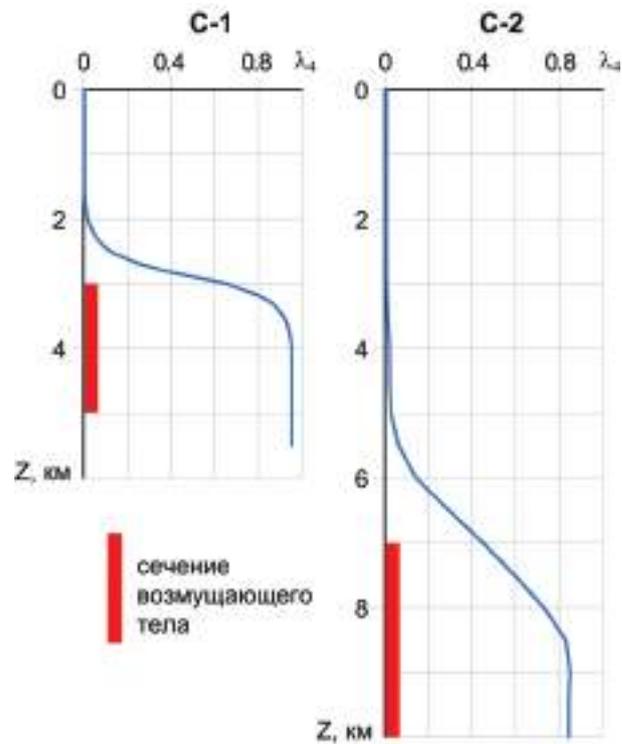


Рис. 8.9. Графики функции обнаружения λ_4 вдоль полотна скважин С-1 и С-2.

значения функции уже в районе его верхней кромки близки к единице и далее с глубиной достигают значения 0,992. На отрезке, пересекающем тело 2, максимальное значение функции обнаружения лишь слегка превышает 0,8. В содержательном смысле это явилось следствием того, что среди найденных 1252 допустимых парциальных носителей, претендующих на статус истинного природного носителя, нашлись лишь десять, которых скважина С-1 не подсекала. Иначе говоря, можно рекомендовать бурение заверочной скважины С-1 и с вероятностью ~99% ожидать успеха. Соответственно, с вероятностью, превышающей 80%, можно прогнозировать подсечение тела 2 скважиной С-2.

Пример модельный, и по результатам расчетов можно сказать, что в обоих случаях ожидания сбылись бы. И еще. Обращает на себя внимание высокий градиент функции обнаружения в окрестности координаты z верхней кромки тела 1.

На том же модельном примере проиллюстрируем смысл функции доверия. Поскольку в основе этой функции лежит другая оценочная функция – функция локализации, то результаты решения модельного примера проще излагать в терминах функции локализации. Рассмотрен случай, отвечающий предположению, что норма помехи не превосходит 0,05 мГал, и случай, где предполагаемая норма помехи не превышает 0,30 мГал. Для сравнения расчеты выполнены для двух значений доверительной вероятности – $p_0 = 0,3$ и $p_0 = 0,8$. Обозначим через $D(\varepsilon, p_0)$ объединение элементов замощения V_n , значение функции локализации в которых не меньше p_0 , а допустимые решения, по которым построена эта функция, доставляют невязку, не превосходящую ε . Области $D(\varepsilon, p_0)$, отвечающие выбранным значениям ε и p_0 , приведены на рис. 8.10. Как видно, результаты интерпретации полностью отвечают ожидаемой закономерности: с увеличением значений ε и p_0 мера области $D(\varepsilon, p_0)$ уменьшается.

Теперь самое время проиллюстрировать смысл обобщенных решений обратной задачи гравirazведки. За основу были взяты функция локализации и предельно допустимое значение невязки 0,1 мГал. Таким образом, построения выполняются по найденным 1189 («обычным») допустимым решениям. Обобщенными решениями они становятся тогда, когда на них осуществляется наложение распределения функции локализации в изучаемой части пространства. После этого для выбора лучшего из них можно воспользоваться критериями отбора наилучших обобщенных решений. На рис. 8.11 приведены решения, отвечающие максимальным значениям критериев \mathcal{J}_1 (8.17) и \mathcal{J}_2 (8.18).

Для сравнения приводится также решение обратной задачи по минимуму невязки. В терминах функционала (8.20) качество обобщенного решения, оптимального по критерию \mathcal{J}_1 , равняется 0,550. Качество обобщенного решения, оптимального по критерию \mathcal{J}_2 , равняется 0,515. Качество решения по минимуму невязки составляет всего лишь 0,370 при величине невязки, равной 0,026 мГал.

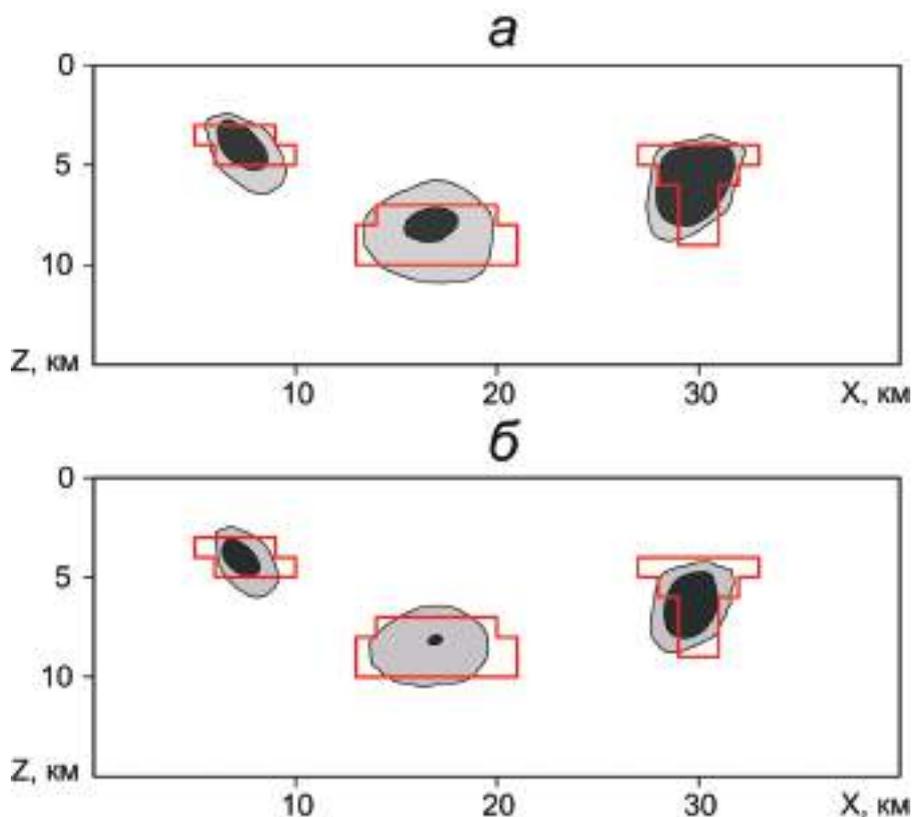


Рис. 8.10. Области доверия $D(\varepsilon, p_0)$: *a* – случай $\varepsilon = 0,05$ мГал, *б* – случай $\varepsilon = 0,3$ мГал. Серый цвет – $p_0 = 0,3$, черный цвет – $p_0 = 0,8$.

Если рассматривать все множество найденных допустимых решений обратной задачи, то по результатам численного эксперимента наблюдается довольно тесная связь между качеством ρ решения задачи в целом (8.20) и средним значением Θ пофрагментных оценок его качества с использованием значений функции локализации (8.10). Коэффициент корреляции между ρ и Θ , по множеству из 1189 решений составляет 0,745 (рис. 8.12). Для сравнения, коэффициент корреляции между значением ρ и величиной ε невязки составляет всего лишь 0,277.

Пример 8.4. На рис. 8.13 представлены результаты интерпретации материалов гравиметрической съемки, выполненной над нефтяным месторождением, расположенным в пределах Соликамской депрессии (Пермский край) [Бычков и др., 2009]. Скопления углеводородов приурочены к верхнедевонскому рифу, сложенному слоистыми известняками, находящемуся на глубине 2 км от дневной поверхности. Исследуемый геологический разрез охаракте-

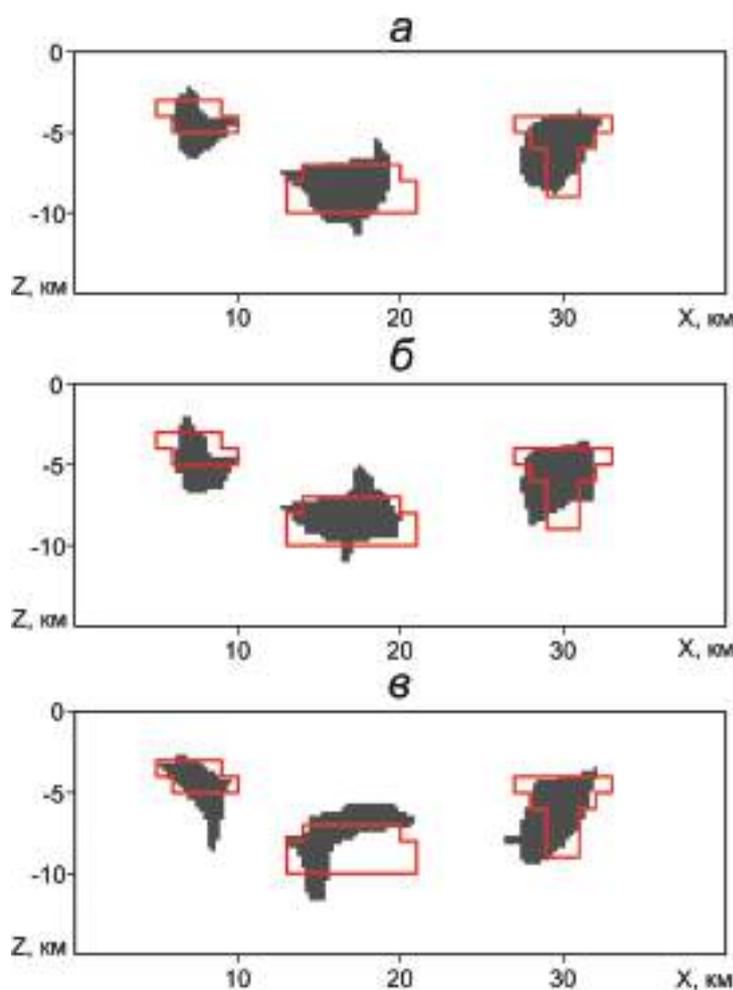


Рис. 8.11. Решения обратной задачи гравиразведки: *а, б* – носители, входящие в обобщенные решения, оптимальные по критериям \mathcal{J}_1 и \mathcal{J}_2 , соответственно; *в* – «обычное» решение по критерию минимума невязки.

ризован данными бурения и сейсморазведки 3D. Амплитуда локальной гравитационной аномалии над месторождением, полученной после исключения линейного регионального фона, составляет около 1 мГал.

Поиск допустимых решений обратной задачи монтажным методом был выполнен на регулярном замощении изучаемой области пространства квадратными элементами с длиной стороны 100 м. Высокие значения *функции обнаружения* располагаются примерно на 500 м выше центральной продуктивной верхнедевонской органогенной постройки, что предположительно связа-

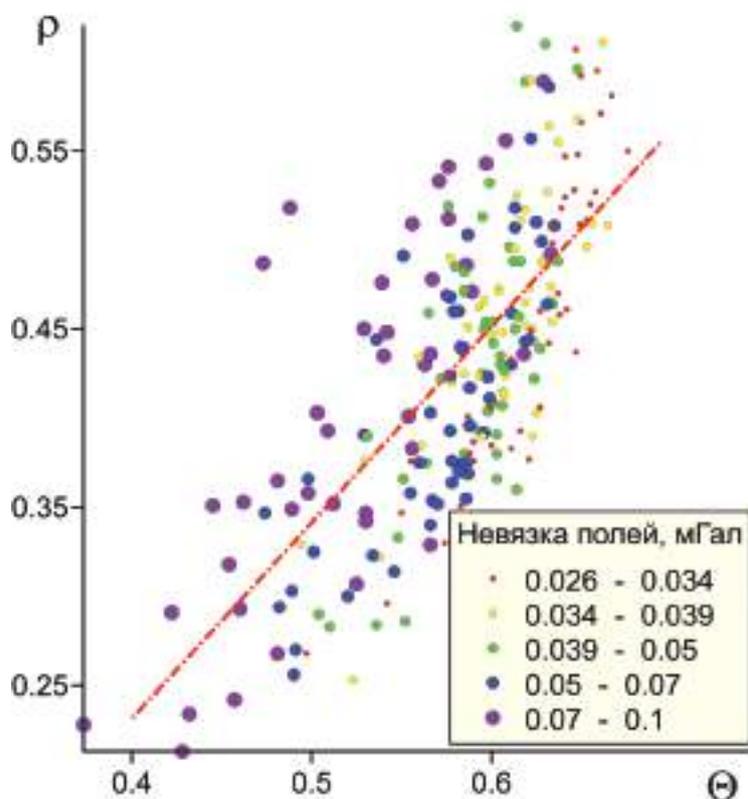


Рис. 8.12. Взаимосвязь между фактической и прогнозируемой точностью решения обратной задачи: кросс-плот и линейная регрессионная зависимость $\rho = 1,195\Theta - 0,268$ (штрих-пунктирная линия). Цветными точками показаны параметры для каждого десятого решения обратной задачи из множества Q , состоящего из 1189 решений.

но с унаследованностью геологического строения вышележащих отложений, создающих «интегральный» гравитирующий эффект (близкий к уплотнению вмещающих пород над рудоносными интрузиями в Норильском районе, см. гл. 4, рис. 4.20). В частности, значительный вклад в этот эффект вносит уменьшение мощности низкоплотных соляных пород над рифом. Подобные аномалии функции обнаружения можно попытаться в дальнейшем рассматривать как геофизические поисковые критерии нефтеперспективных объектов.

Пример 8.5. Функцию локализации можно использовать при поисках рудных месторождений, не выходящих на дневную поверхность, в частности – относящихся к медно-порфировому типу. В качестве примера приведем результаты интерпретации данных высокоточной гравиметрической съемки масштаба 1:25 000, выполненной в Южной Сибири научно-производственной

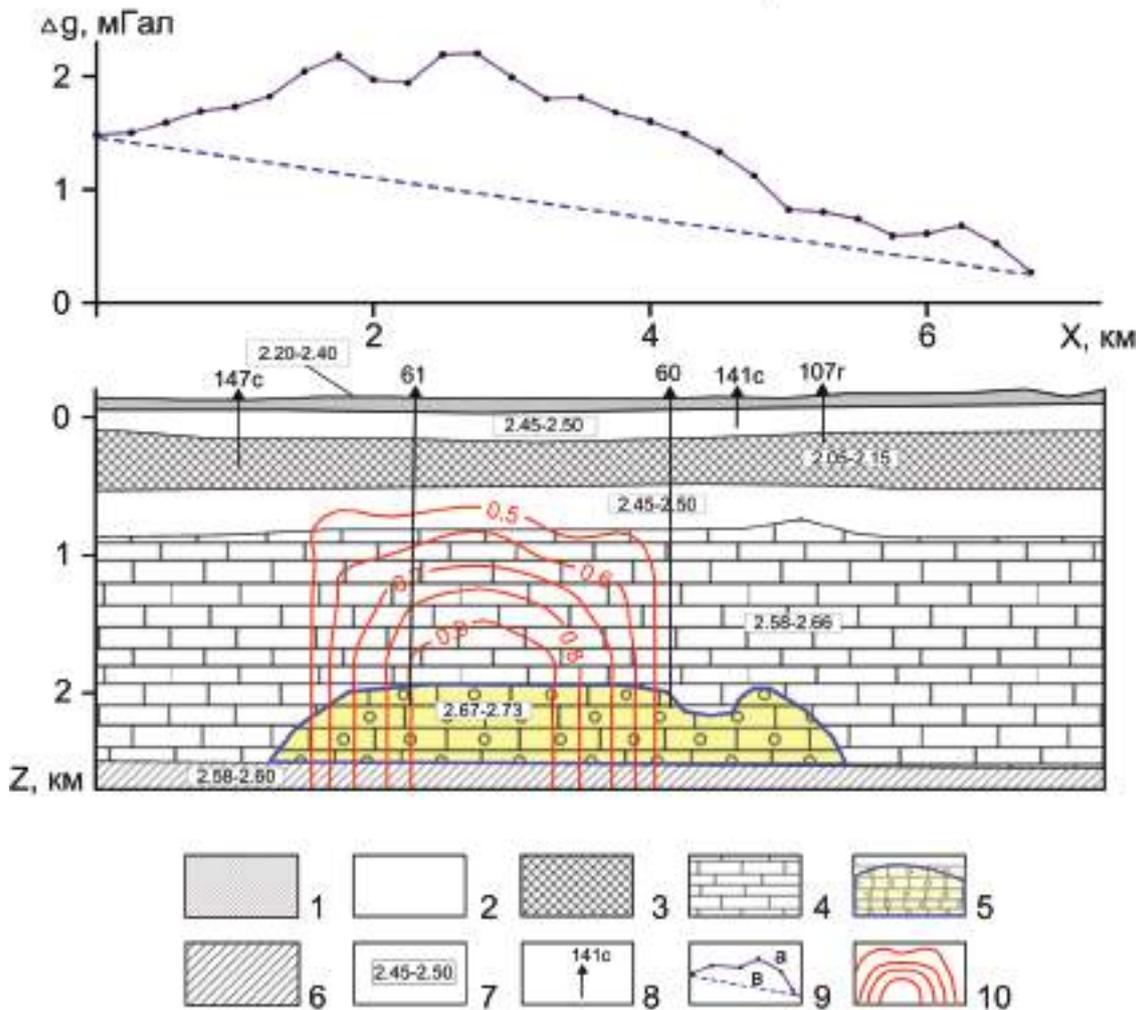


Рис. 8.13. Геолого-геофизическая модель разреза нефтяного месторождения (Соликамская депрессия). Литологические комплексы: 1 – терригенные, 2 – сульфатно-карбонатно-обломочные, 3 – соляные, 4 – карбонатные, 5 – карбонатные рифтогенные; 7 – значения плотности; 8 – скважины, их номера; 9 – графики гравитационного поля: а – наблюдаемого, б – региональной составляющей; 10 – изолинии функции обнаружения.

экспедицией Горного института УрО РАН (рис. 8.14). Медно-молибденовое оруденение пространственно и генетически связано со штокообразными интрузиями гранитоидов, с размерами в плане от 200–300 м и более.

Результаты построения функции локализации с использованием 985 допустимых решений обратной задачи представлены на рис. 8.14в. Предвари-

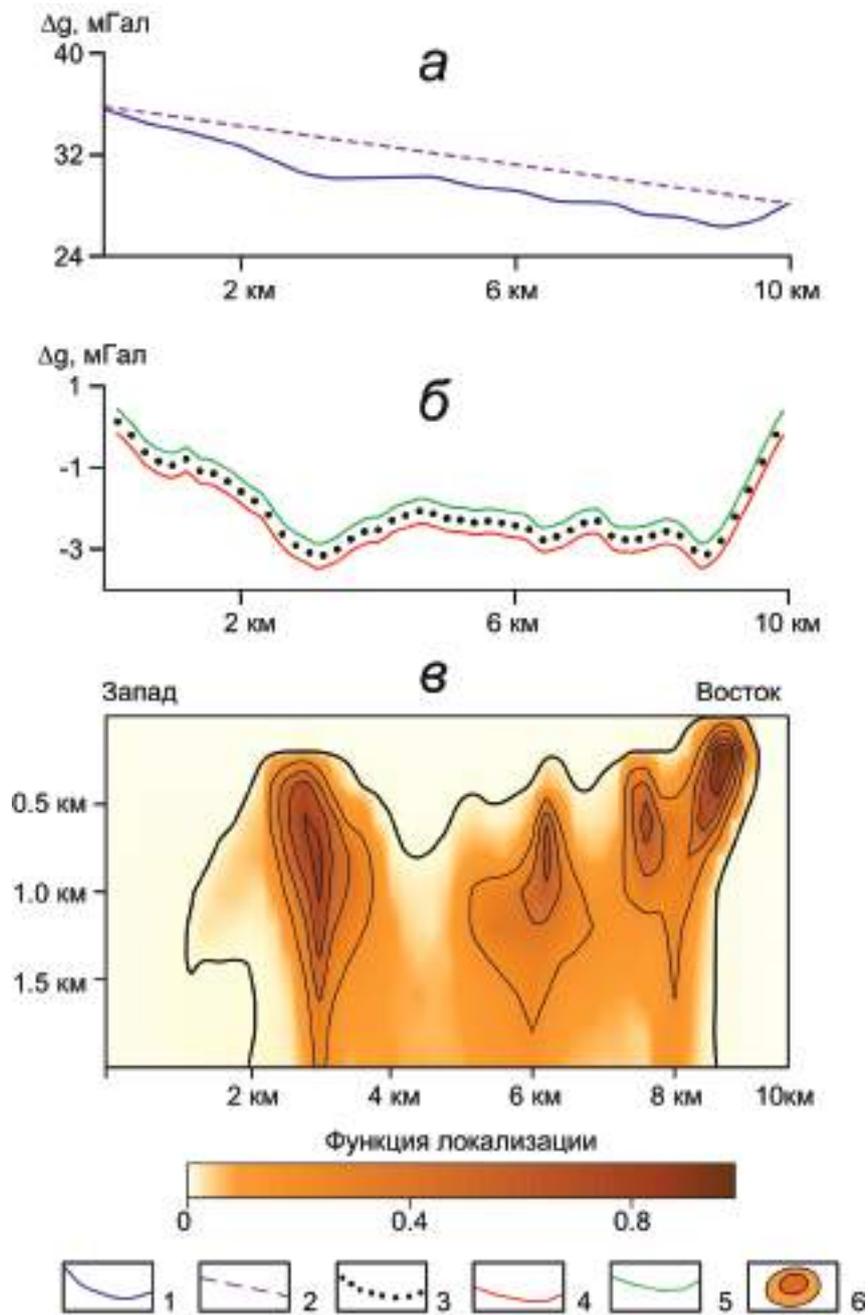


Рис. 8.14. Аномальное гравитационное поле в редукции Буге (а), его локальная составляющая (б) и вертикальная карта изолиний функции локализации (в): 1 – наблюдаемое поле; 2 – региональный фон; 3 – локальная составляющая; 4, 5 – границы области допустимых модельных полей; 6 – изолинии функции локализации (темный тон – рудоносные и рудоперспективные объекты).

тельно из наблюдаемого гравитационного поля исключался линейный региональный фон. Эффективная плотность возмущающего объекта принималась равной $-0,1 \text{ г/см}^3$. Размер квадратного элемента регулярного замощения составлял $200 \times 200 \text{ м}$. Множество допустимых решений было построено исходя из максимально возможной невязки $0,3 \text{ мГал}$.

В западной части профиля весьма вероятно наличие крутопадающего низкоплотного объекта, верхняя кромка которого находится на глубине около 400 м от дневной поверхности. На расстоянии около $2,5 \text{ км}$ и $0,8 \text{ км}$ к западу от месторождения выделяются аномалиеобразующие объекты, оценочная глубина кровли которых составляет порядка 500 м , являющиеся источниками локальных аномалий гравитационного поля. Принадлежность их к единой магматической системе с медно-порфировым месторождением, находящимся на востоке ($x \cong 8 \text{ км}$), невысока и составляет не более 20% . Делать какие-либо выводы о геологической природе этих объектов только по материалам гравиразведки некорректно.

Низкоплотный объект, связанный с рудоносным массивом гранитоидов, вероятнее всего, выклинивается на глубине около $700\text{--}800 \text{ м}$ от дневной поверхности. Если отождествить данный объект с наиболее гидротермально измененной и окварцованной частью интрузии, то можно весьма приблизительно оценить вертикальный размах медно-порфирового оруденения.

Пример 8.6. Весьма перспективным направлением использования аддитивных технологий является интерпретация мониторинговых гравиметрических наблюдений.

С целью выявления вариаций силы тяжести, связанных с техногенным воздействием на геологическую среду, на Верхнекамском месторождении калийно-магниевых солей проводятся повторные и мониторинговые гравиметрические наблюдения, которые выявляют динамику процессов деформации породных масс и позволяют осуществить прогноз опасных и катастрофических ситуаций. По результатам повторных наблюдений рассчитывается динамическая аномалия силы тяжести $\Delta g_{\text{дин}}$, определяемая как разность между последующими и предыдущими значениями силы тяжести. Динамические аномалии не искажены влиянием рельефа местности и не отражают неизменные плотностные неоднородности геологического разреза. Поскольку все неизменные составляющие гравитационного поля в равной степени присутствуют в любой паре наблюдений, динамическая аномалия отражает только конкретный горнотехнический или быстротекущий геологический процесс, происходящий в определенном интервале времени. Таким образом, источник динамической аномалии $\Delta g_{\text{дин}}$ представляет собой изолированную область, где произошли изменения плотности пород, расположенную в однородной вмещающей среде (рис. 8.15).

Отмечается пространственное совпадение динамической и локальной отрицательной аномалий силы тяжести (см. рис. 8.15б), что позволяет предпо-

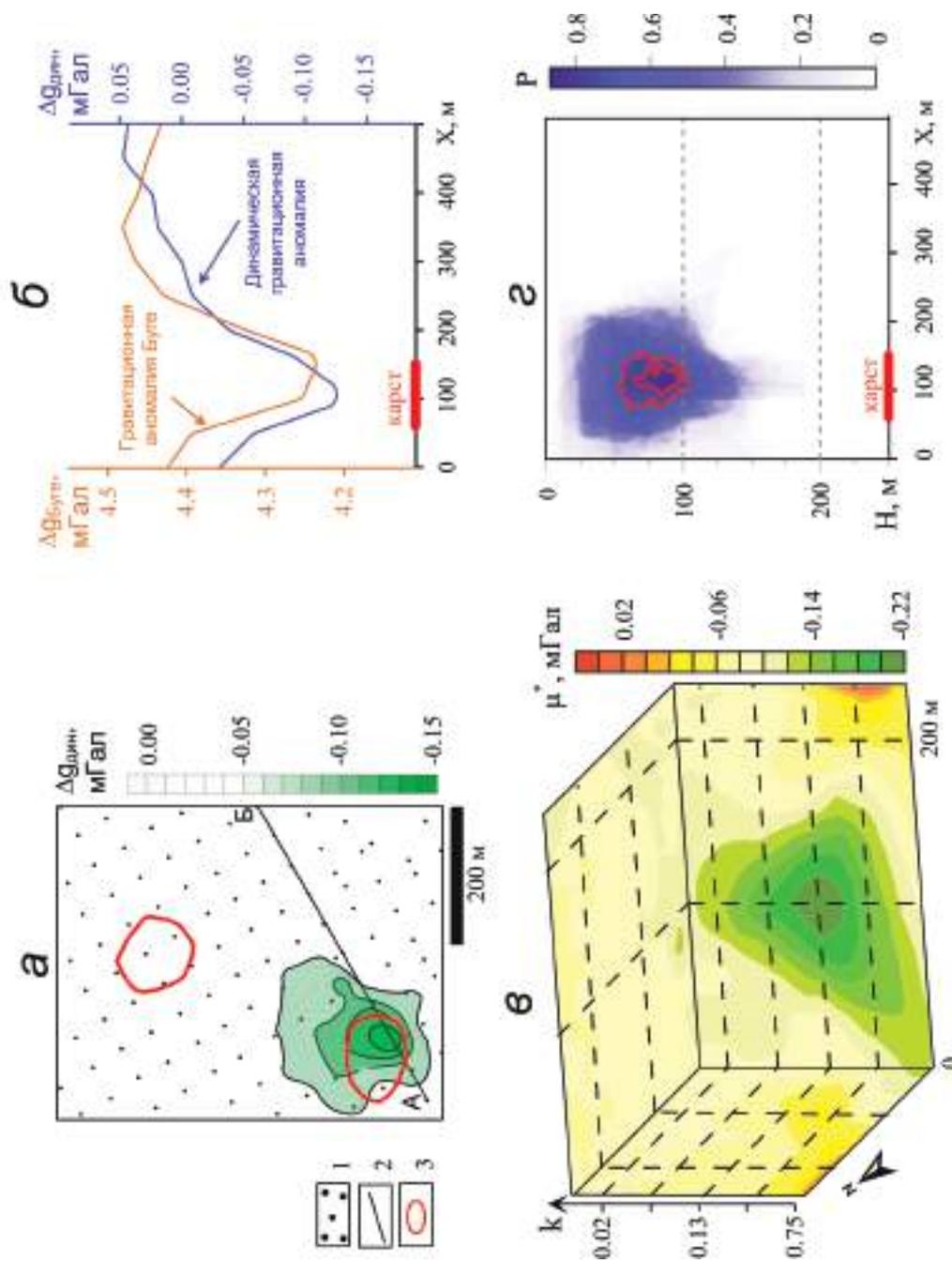


Рис. 8.15. Интерпретация данных гравиметрического мониторинга на Верхнекамском месторождении калийно-магниевых солей: *a* – участок гравиметрической съемки; *б* – гравитационные аномалии; *в* – куб квазиплотностей; *г* – функция локализации: 1 – пункты гравиметрических наблюдений; 2 – профиль АБ; 3 – провалы земной поверхности.

ложить существование природных зон разуплотнения пород, к которым приурочены техногенные карстовые процессы, приводящие к провалам земной поверхности. Интерпретационная томография – построение куба квазиплотностей m^* в системе ВЕКТОР – свидетельствует о наличии зоны разуплотнения пород, приуроченной к водозащитной соляной толще (см. рис 8.15в). Параметр m^* не имеет размерности физического параметра плотности, а шкала глубин построенных разрезов и 3D-диаграмм поля не отвечает истинной и оцифровывается в коэффициентах трансформации (k). Построение функции локализации λ_1 в трехмерном варианте с использованием 126 допустимых решений обратной задачи позволяет оценить параметры зоны развития соляного карста. В частности, по профилю АБ интервал ее глубин составляет 50–100 м, а величина разуплотнения пород $-0,10 \text{ г/см}^3$ (см. рис. 8.15г).

Пример 8.7. В заключение главы авторы хотели бы еще раз подчеркнуть, что в случае рудной постановки обратной задачи монтажный метод является лишь *одним из возможных инструментов реализации аддитивных технологий интерпретации*. В пятой главе монографии мы уже рассматривали некоторые направления развития методов построения допустимых решений обратной задачи, выходящие за рамки концепции монтажного подхода; в частности, речь шла о комбинировании монтажных методов и методов целочисленного программирования. Иначе говоря, то обстоятельство, что пока не видно разумной альтернативы монтажному подходу, не означает, что отсутствует целесообразность в поиске других конкурентоспособных алгоритмов построения семейства допустимых решений обратной задачи, необходимого для реализации аддитивных технологий.

Как отмечалось, важным, если не сказать определяющим, условием успешного применения аддитивных технологий является *сравнительно равномерное* распределение найденных вариантов интерпретации, составляющих некоторое подмножество Q_0 среди множества Q всех допустимых решений. При этом даже не столь важна мощность подмножества Q_0 . Проверить, насколько данное условие удалось выполнить, на практике невозможно. Однако можно предположить, что по показателю равномерного покрытия множества Q совокупностью найденных допустимых решений подмножество Q_0 , формирование которого осуществлялось под управлением некоторого *детерминистского правила*, уступит подмножеству Q_0 той же мощности, если поиск допустимых решений был доверен воле случая.

Идея формирования подмножества Q_0 на основе процедуры случайного поиска каждого очередного допустимого решения была впервые опробована в работе [Долгаль, Шархимуллин, 2011]. Мы проиллюстрируем ее на модельном примере, в котором гравитационная аномалия, зафиксированная на профиле длиной 10 км с постоянным шагом между измерениями 200 м, обусловлена объектом (рис. 8.16), глубина залегания кровли которого составляет 250 м, по-

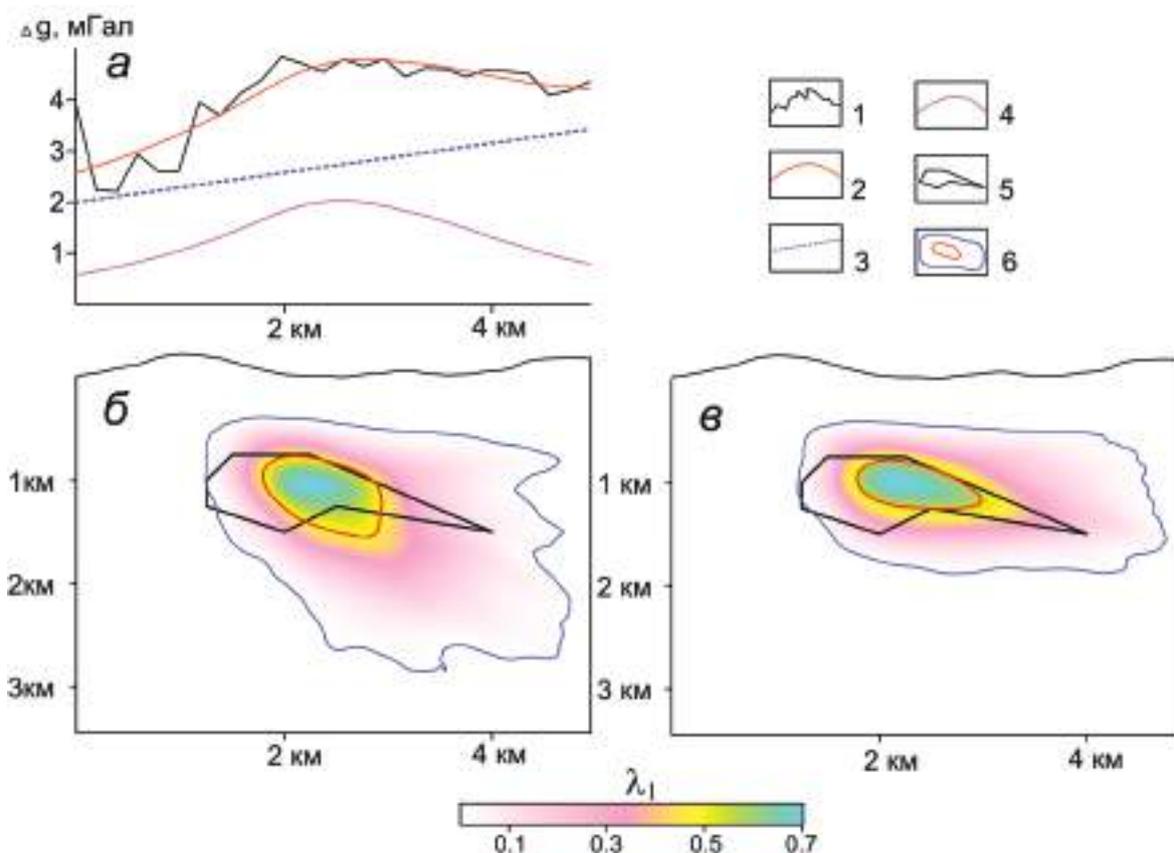


Рис. 8.16. Решение обратной задачи гравиразведки при различной априорной информации: *а* – графики поля; *б* – решение в варианте 1; *в* – решение в варианте 2: графики поля: 1 – «наблюденого», 2 – «наблюденого» без случайной помехи, 3 – фоновое, 4 – созданного возмущающим объектом; 5 – аномалиеобразующий объект; 6 – границы области положительных значений функции λ_1 (синий контур) и области, для которой $\lambda_1 \geq 0,55$ (красный контур).

дошвы – 1500 м. Его эффективная плотность равна $0,25 \text{ г/см}^3$, однако априори известен лишь интервал ее возможных значений. Таким образом, речь идет о смешанной обратной задаче. Высотные отметки точек измерения поля изменяются от 90 до 240 м. В «наблюденом» поле присутствуют случайная помеха со среднеквадратическим значением $0,3 \text{ мГал}$ и линейный региональный фон $\Delta g_{\text{фон}} = 0,5x + 1,25$. Решение задачи выполнено в двух вариантах с использованием различных априорных ограничений (табл. 8.2), причем во втором варианте они являются более жесткими.

В качестве модельного класса источника аномалии взято множество бесконечнопротяженных горизонтальных призм с произвольными четырехуголь-

Таблица 8.2

Двусторонние априорные границы допустимых значений параметров модели

Номер варианта	Горизонтальная мощность m^x объекта, км		Вертикальная мощность m^z объекта, км		Глубины залегания объекта h , км		Плотность объекта, г/см ³	
	m_{\min}^x	m_{\max}^x	m_{\min}^z	m_{\max}^z	h_{\min}	h_{\max}	δ_{\min}	δ_{\max}
1	0,2	4,5	0,1	2	0,5	6	0,15	0,35
2	0,2	4,5	0,2	1	0,5	4	0,2	0,3

ными сечениями (как легко видно из рис. 8.16, среди его элементов найдется достаточно хорошая аппроксимация возмущающего объекта). Процедура поиска допустимых решений (число которых мы априори ограничили пятидесятью) представляет собой итерационный процесс. На каждом его шаге из заданной прямоугольной области R , предположительно содержащей источник аномалии, случайным образом с помощью датчика значений равномерно распределенной случайной величины η выбираются четыре точки P_k , последовательность номеров k которых обеспечит в дальнейшем нужное направление обхода вершин вертикального сечения модельного тела при вычислении модельного поля. При случайном выборе координат x и z каждой очередной точки P_k задается (в автоматическом режиме) подходящая область определения случайной величины η , что позволяет заведомо обеспечить выполнение априорных ограничений на заданные геометрические параметры модели. Причем при выборе последней, четвертой, точки область определения случайной величины должна, ко всему прочему, обеспечить такой вариант, чтобы четырехугольник $P_1P_2P_3P_4$ не оказался четырехсторонником с взаимопересекающимися сторонами. Для каждого так построенного случайного четырехугольника путем решения линейной обратной задачи определяются значения эффективной плотности и коэффициенты линейного фона, минимизирующие невязку. Если все априорные ограничения выполнены, то построенный четырехугольник совместно с вычисленной эффективной плотностью принимаются за допустимое решение обратной задачи, которое затем уточняется. В работе [Долгаль, Шархимуллин, 2011] приводятся модификации приведенной схемы поиска допустимых решений, направленные на экономизацию вычислений. Мы не станем на них останавливаться.

На рис. 8.16 в терминах функции локализации $\lambda_1(X)$ для каждого из двух вариантов задания априорных ограничений дана количественная характеристика подмножества найденных допустимых решений. Необходимо отметить, что при сопоставлении результатов интерпретации, полученных в этих вариантах, не все тенденции, которые, казалось, можно было бы ожидать исходя из общих соображений, обязаны иметь место. Во-первых, в нашем примере

функция локализации в каждом из вариантов построена всего лишь по пятидесяти допустимым решениям. Во-вторых, мы имеем дело со смешанной обратной задачей, когда среди допустимых носителей встречаются заметно отличающиеся друг от друга по мере. В обоих вариантах максимальные значения функции локализации приблизительно равны 0,7. Это означает что используемой априорной информации недостаточно, чтобы указать, пусть даже довольно малый, фрагмент пространства, гарантированно заполненный возмущающими массами. Тем не менее, свою основную задачу функция локализации выполнила – наиболее высокие ее значения достигнуты в точках, принадлежащих аномалиеобразующему объекту.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Возросшая сложность геологических задач, решаемых с помощью гравиразведки и магниторазведки, требует расширения объемов и типов извлекаемой информации об источниках аномалии и повышения ее достоверности в границах объективно возможного. Само по себе повышение точности измерений еще не в состоянии обеспечить требуемый рост качества результатов интерпретации – многое зависит от эффективности используемых методов решения обратных задач. В монографии приводятся веские доводы в пользу того, что в плане увеличения информативности результатов интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, а также способности оценить ее качество резервы традиционных подходов к решению обратных задач, базирующихся большей частью на заимствовании идей и методов вычислительной математики без должного анализа их адекватности решаемым геофизическим задачам, в главном уже исчерпаны.

Математика развивается в соответствии со своими приоритетами, которые не обязаны учитывать интересы и особенности отдельно взятой прикладной науки, в том числе геофизики. Это обстоятельство не в достаточной степени принималось во внимание в процессе становления математической теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Если взять теорию решения некорректных обратных задач, определившую на многие годы основное направление развития методов количественной интерпретации данных гравиразведки и магниторазведки, то по отношению к реалиям геофизической практики она допускает две досадные идеализации, которым эта теория как раз и обязана своей привлекательностью. Речь идет о предположении, согласно которому поле задано в континуальном множестве точек, и допущении о возможности управлять нормой помехи в измерениях поля, устремляя ее к нулю.

Реалии геофизики, когда измерения гравитационного и магнитного полей осуществляются в конечном числе точек, обязывают развивать методы количественной интерпретации не в функциональных (как в случае теории некорректных обратных задач), а в конечномерных пространствах. В условиях

существования множества априори равноправных и допустимых вариантов интерпретации неразумно представлять это множество каким-то одним из его элементов (оптимальным решением обратной задачи) – потери информации, к которым это приводит, очевидны. Между тем, такое представление характерно вообще для всех наиболее известных концепций извлечения количественной информации из данных гравиметрии и магнитометрии.

Идея использовать новые математические формы представления результатов интерпретации гравитационных и магнитных аномалий, в которых не отдавалось бы предпочтение ни одному из допустимых решений обратной задачи, и вместе с тем учитывались бы особенности каждого из них, воплощена в гарантированном подходе и аддитивных методах решения обратных задач. Эти методы возникли как ответ на вопрос, можно ли в рамках детерминистского направления в теории интерпретации работать с иными, чем отдельное (пусть и «оптимальное») решение обратной задачи, «единицами информации». В частности, речь могла бы идти об относительно малых (по сравнению с носителем возмущающих масс) фрагментах изучаемой части пространства, каждому из которых удалось бы дать объективную оценку вероятности заполнения его возмущающими массами.

Основной принцип, заложенный в основу аддитивных технологий интерпретации, можно сформулировать так: допустимые варианты интерпретации должны не соперничать друг с другом за право называться наилучшим, а сообща участвовать в построении итогового варианта интерпретации, в котором суммировалась бы информация, которую несет каждый из таких вариантов. Поделившись информацией с остальными допустимыми решениями обратной задачи, каждый из них получает информацию, которую несут остальные решения. Если взять рудную обратную задачу, то вследствие такого обоюдного обмена до того «безликий» модельный носитель возмущающих масс наполняется информацией, достаточной для решения задачи о принадлежности локального фрагмента пространства реальному носителю возмущающих масс с оценкой вероятности этого события. В конечном счете, аддитивные методы интерпретации позволяют ранжировать отдельные фрагменты допустимых носителей по значению оценки вероятности того, что в этих областях действительно присутствует какая-то часть возмущающих масс. Прежде подобная задача никогда не рассматривалась, да и вряд ли ее можно было решить в рамках привычных математических форм представления результатов интерпретации.

Основной вычислительной особенностью аддитивных методов интерпретации является разработка полностью автоматизированных методов поиска отдельных допустимых решений обратной задачи. Выяснилось, что в этом вопросе потребности аддитивных методов (а значит в целом теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий) не могут быть полностью

обеспечены за счет классических методов решения условно-экстремальных задач. В этой связи в монографии для случая рудных постановок обратной задачи рассмотрен новый класс геофизически ориентированных методов построения допустимых вариантов интерпретации в конечноэлементных модельных классах источников поля.

Если говорить об основном достоинстве аддитивных методов, то здесь качество решения обратных задач, выраженное в геофизически содержательных терминах, монотонно зависит от объема и качества интерпретируемых данных, чего не удается достичь в методах подбора. К достоинствам аддитивных методов можно отнести и возможность оценить вклад той или иной априорной информации в качество результата интерпретации, что всегда считалось прерогативой информационно-статистического направления, но далеко не всегда удавалось сделать в рамках этого направления в силу плохой совместности соответствующего математического аппарата с ограничениями детерминистского характера.

ЛИТЕРАТУРА

- Авчан Г.М., Озерская М.А.* Закономерность уплотнения осадочных пород с глубиной // Изв. АН СССР. Серия геологическая. 1968. №2. С. 137–141.
- Айзерман М.А., Малишевский А.В.* Некоторые аспекты общей теории выбора лучших вариантов // Автоматика и телемеханика. 1981. №2. С. 65–83.
- Акимова Е.Н., Мартышко П.С., Мислов В.Е.* Алгоритмы решения структурной задачи гравиметрии в многослойной среде // Докл. РАН. 2013. Т. 453. №6. С. 676–679.
- Алифанов О.М.* Идентификация процессов теплообмена летательных аппаратов. М.: Машиностроение. 1979. 216 с.
- Арнольд В.И.* Антинаучная революция и математика // Вестник РАН. 1999. №6. С. 553–558.
- Аронов В.И.* Обработка на ЭВМ значений аномалий силы тяжести при произвольном рельефе поверхности наблюдений. М.: Недра, 1976. 131 С.
- Аронов В.И.* Методы построения карт геолого-геофизических признаков и геометризация залежей нефти и газа на ЭВМ. М.: Недра, 1990. 301 с.
- Балк П.И.* К аналитическому решению трехмерной обратной задачи теории потенциала // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213. №4. С. 830–832.
- Балк П.И.* Некоторые аналитические решения трехмерной прямой задачи теории потенциала // Геология и геофизика. 1974. №6. С. 96–102.
- Балк П.И.* К аналитическому решению трехмерной прямой задачи гравиметрии // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1975₁. №8. С. 99–103.
- Балк П.И.* К решению обратной задачи гравиметрии по гармоническим моментам возмущающих масс // Докл. АН СССР. 1975₂. Т. 220. №2. С. 331–334.
- Балк П.И.* О решении трехмерной обратной задачи гравиметрии методом построения семейств тел, обладающих слабой единственностью и эквивалентных источникам поля по нескольким гармоническим моментам // Докл. АН СССР. 1975₃. Т. 224. №1. С. 80–83.
- Балк П.И.* Алгоритмы идентификации в задачах регрессионного типа при нулевом медианном значении помехи // Автоматика и телемеханика. 1978. №12. С. 70–82.

- Балк П.И.* Об автоматизации решения проблем аналитической теории конкретных моделей в задачах гравитационного потенциала // Докл. АН СССР. 1979₁. Т. 245. №2. С. 337–341.
- Балк П.И.* Об автоматизации решения проблем аналитической теории конкретных моделей в задачах гравитационного потенциала // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1979₂. №7. С. 42–53.
- Балк П.И.* Об эквивалентности в трехмерной задаче гравитационного потенциала при переменной плотности возмущающих масс // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1979₃. №8. С. 54–63.
- Балк П.И.* Об алгоритме численного решения трехмерной прямой задачи // Геология и геофизика. 1979₄. №11. С. 84–89.
- Балк П.И.* О надежности результатов количественной интерпретации гравитационных аномалий // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1980₁. №6. С. 65–83.
- Балк П.И.* об устойчивом методе локализации однородных геологических объектов по гравитационным аномалиям // Геология и геофизика. 1980₂. №10. С. 89–98.
- Балк П.И.* Содержательная интерпретация гармонических моментов второго порядка трехмерных источников гравитационного поля // Докл. АН УССР. Сер. Б. 1983₁. №8. С. 3–6.
- Балк П.И.* Новые теоретические результаты для классических моделей источников гравитационного поля, полученные с помощью ЭВМ // Докл. АН УССР. Сер. Б. 1983₂. №12. С. 3–7.
- Балк П.И.* Группа модулей теоретического анализа моделей неоднородностей земной коры в ППП «Геолог» // Пакеты прикладных программ. Новосибирск: Наука, 1983₃. С. 129–141.
- Балк П.И.* Использование доказательных вычислений на ЭВМ при изучении свойств линейных отображений в конечномерных пространствах // Кибернетика. 1986. №5. С. 106–112.
- Балк П.И.* Опыт автоматизации решения теоретических проблем гравиметрии в параметрических классах интерпретации // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1987₁. №10. С. 41–57.
- Балк П.И.* О практически достижимой точности и достоверности решения обратной задачи теплопроводности // Инженерно-физический журнал. 1987₂. Т. 52. №2. С. 316–323.
- Балк П.И.* Использование априорной информации о топологических особенностях источников поля при решении обратной задачи гравиметрии // Докл. АН СССР. 1989. Т. 309. №5. С. 1082–1084.
- Балк П.И.* Использование априорной информации о топологических особенностях источников поля при решении обратной задачи гравиметрии в рамках монтажного подхода // Физика Земли. 1993. №5. С. 59–71.
- Балк П.И.* Проблема параметризации и достоверности решения нелинейной обратной задачи гравиметрии // Физика Земли. 1997. №10. С. 14–32.

- Балк П.И.* Столкновение геофизических и математических интересов – главный источник противоречий в современной теории интерпретации потенциальных полей // Геофизический журнал. 2000. Т. 22. №4. С. 3–20.
- Балк П.И.* Столкновение геофизических и математических интересов – основной источник противоречий в современной теории интерпретации потенциальных полей // Физика Земли. 2001. №3. С. 85–96.
- Балк П.И.* Математический формализм и не востребуемые идеи в теории интерпретации потенциальных полей // Геофизика. 2002. №2. С. 41–46.
- Балк П.И.* О принципиальных недостатках общепринятых форм представления результатов математической интерпретации потенциальных полей // Геофизический журнал. 2004. Т. 26. №5. С. 124–132.
- Балк П.И.* Об одном расширении понятия метрики // Докл. РАН. 2009₁. Т. 426. №5. С. 583–585.
- Балк П.И.* Содержательная оценка ε -эквивалентности в нелинейных обратных задачах гравиметрии // Геофизический журнал. 2009₂. Т. 31. №6. С. 55–61.
- Балк П.И.* Задачи регрессионного типа при нулевом медианном значении помех // Докл. РАН. 2010. Т. 430. С. 169–172.
- Балк П.И.* Оценивание параметров функциональной зависимости при нулевом медианном значении помех в измерениях // Автоматика и телемеханика. 2011. №5. С. 69–81.
- Балк П.И.* Априорная информация и допустимая сложность модели аномалиеобразующих объектов при решении обратных задач гравиразведки // Физика Земли. 2013₁. №2. С. 13–25.
- Балк П.И.* Несколько контрпримеров к стереотипам в теории интерпретации потенциальных полей // Геоинформатика. 2013₂. №3. С. 33–40.
- Балк П.И.* О выборе параметров модели аномалиеобразующего объекта при решении обратной задачи гравиразведки // Геофизика. 2013₃. №1. С. 48–54.
- Балк П.И.* Спорные положения методологии современной теории интерпретации гравитационных аномалий и пути разрешения сложившихся противоречий // Физика Земли. 2014. №2. С. 41–52.
- Балк П.И.* Скрытая эквивалентность алгоритмов решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии // Геоинформатика. 2015. №3. С. 26–31.
- Балк П.И.* В каких методах решения экстремальных задач нуждается теория интерпретации гравитационных аномалий // Геоинформатика. 2017. №4. С. 37–47.
- Балк П.И., Балк Т.В.* О построении начального приближения контура тяготеющих масс по их гармоническим моментам // Геофизический сборник АН УССР. 1977. Вып. 77. С. 50–57.
- Балк П.И., Балк Т.В.* Восстановление экспериментальных зависимостей при неизвестном законе распределения ошибок измерений // Заводская лаборатория. 1978. №3. С. 339–343.

- Балк П.И., Балк Т.В.* Резервы детерминистского подхода в повышении эффективности интерпретации гравитационных аномалий // Геология и геофизика. 1985₁. №12. С. 104–112.
- Балк П.И., Балк Т.В.* Детерминистские модели интерпретации для исследования разрешающих способностей гравиметрического метода в линейной постановке обратной задачи // Докл. АН УССР. 1985₂. Сер. Б. №6. С. 3–6.
- Балк П.И., Балк Т.В.* Трехмерная прямая и обратная задача гравиразведки при полиномиальной аппроксимации плотностных неоднородностей // Геология и геофизика. 1986₁. №5. С. 120–124.
- Балк П.И., Балк Т.В.* Прямая и обратная задача гравиметрии для сегмента эллиптического цилиндра полиномиальной плотности // Геофизический журнал. 1986₂. Т. 8. №6. С. 56–60.
- Балк П.И., Балк Т.В.* Детерминистские модели интерпретации для анализа разрешающих способностей гравиметрического метода в линейной постановке обратной задачи // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1987. №5. С. 41–54.
- Балк П.И., Балк Т.В.* Структурно-рудная обратная задача гравиметрии // Физика Земли. 1995. №6. С. 32–41.
- Балк П.И., Балк Т.В.* Совмещенная обратная задача грави- и магнитометрии // Физика Земли. 1996. №2. С. 16–30.
- Балк П.И., Балк С.П.* О решении нелинейной обратной задачи гравиметрии с использованием конечноэлементных представлений источников поля // Докл. РАН. 2000. Т. 371. №2. С. 231–234.
- Балк П.И., Березовский А.С.* Априорное оценивание ожидаемого качества интерпретации для оптимизации постановки гравиметрических работ // Геология и геофизика. 1989. №8. С. 120–125.
- Балк П.И., Березовский А.С.* Алгоритм кусочно-линейной аппроксимации экспериментальных зависимостей при ошибке измерения с ненулевым математическим ожиданием // Автоматика. 1990. №1. С. 83–86.
- Балк П.И., Гольдшмидт В.И.* Об одной малоизученной постановке и решении геометрической обратной задачи теплопроводности // Инженерно-физический журнал. 1988. Т. 54. №4. С. 669–680.
- Балк П.И., Гольдшмидт В.И.* Интерпретация нестационарных геотермических аномалий на основе анализа множества допустимых решений обратной задачи // Геофизический журнал. 1989. Т. 11. №3. С. 52–60.
- Балк П.И., Горнаков И.В.* Задачи и алгоритмы по количественной интерпретации гравитационных аномалий в пакете программ «Геолог» // Разработка пакетов прикладных программ. Новосибирск: Наука, 1982. С. 63–74.
- Балк П.И., Долгаль А.С.* Трехмерные монтажные технологии интерпретации гравиметрических данных // Докл. РАН. 2009. Т. 427. №3. С. 380–383.
- Балк П.И., Долгаль А.С.* Детерминированный подход к проблеме достоверности результатов интерпретации гравиметрических данных // Докл. РАН. 2010. Т. 431. №3. С. 102–106.

- Балк П.И., Долгаль А.С. Синтез преимуществ функционально-аналитического и вероятностно-статистического подходов в смешанных алгоритмах решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии // Геоинформатика. 2011. №1. С. 33–42.
- Балк П.И., Долгаль А.С. Обратные задачи гравиметрии как задачи извлечения достоверной информации в условиях неопределенности // Физика Земли. 2012. №5. С. 85–101.
- Балк П.И., Долгаль А.С. Определение местоположения и глубин буровых скважин при заверке гравитационных аномалий рудных объектов // Геофизика. 2013. №6. С. 52–58.
- Балк П.И., Долгаль А.С. Синтез допустимых решений обратной задачи при подготовке рекомендаций для заверки гравитационных аномалий // Докл. РАН. 2014. Т. 458. №4. С. 459–464.
- Балк П.И., Долгаль А.С. Детерминистские модели интерпретации для оптимизации местоположения и глубин залегания скважин при заверке гравитационных аномалий // Физика Земли. 2015₁. №1. С. 98–111.
- Балк П.И., Долгаль А.С. Минимаксный подход к решению обратной задачи гравиразведки и магниторазведки // Докл. РАН. 2015₂. Т. 462. №6. С. 706–710.
- Балк П.И., Долгаль А.С. Аддитивные технологии количественной интерпретации гравитационных аномалий // Геофизика. 2016₁. №1. С. 43–47.
- Балк П.И., Долгаль А.С. Метод минимизации риска для решения обратных задач гравиразведки при слабых предпосылках о свойствах геологических помех // Геофизический журнал. 2016₂. Т. 38. №5. С. 108–118.
- Балк П.И., Долгаль А.С. Обратные задачи гравиразведки как проблема принятия решения в условиях неопределенности и риска // Физика Земли. 2017₁. №2. С. 45–61.
- Балк П.И., Долгаль А.С. Сплайн-сглаживание экспериментальных данных при нулевом медианном значении помех // Автоматика и телемеханика. 2017₂. №6. С. 138–156.
- Балк П.И., Долгаль А.С. Новые возможности повышения информативности количественной интерпретации гравитационных аномалий // Докл. РАН. 2017₃. Т. 476. №4. С. 461–465.
- Балк П.И., Долгаль А.С. Обобщенные решения обратной задачи и новые технологии количественной интерпретации гравитационных аномалий // Физика Земли. 2018. №2. С. 189–204.
- Балк П.И., Долгаль А.С. Монтажные методы решения обратных задач как неотъемлемый элемент аддитивных технологий интерпретации гравитационных аномалий // Геофизический журнал. 2019. Т. 41. №4. С. 40–59.
- Балк П.И., Йеске А. Монтажный подход В.Н. Страхова к решению обратных задач гравиразведки: современное состояние и реальные возможности // Геофизический журнал. 2013. Т. 35. №1. С. 12–26.

- Балк П.И., Кошелев В.К. О достоверности решения обратных геохимических задач // Геология и геофизика. 1987. №10. С. 83–91.
- Балк П.И., Леонтьева З.Е. К проблеме эквивалентности в обратной задаче гравиметрии при переменной плотности // Геология и геофизика. 1978. №3. С. 96–107.
- Балк П.И., Балк Т.В., Зоркальцев В.И. О вычислении гармонических моментов тяготеющих масс // Геология и геофизика. 1976₁, №12. С. 100–111.
- Балк П.И., Балк Т.В., Носырев В.И. Об аналитическом решении трехмерной прямой задачи гравиразведки в случае переменной плотности возмущающих масс // Изв. вузов. Геология и разведка. 1976₂. №4. С. 110–121.
- Балк П.И., Балк Т.В., Горнаков И.В. Об устойчивости решения обратной задачи гравиметрии для группы точечных масс // Геология и геофизика. 1982. №10. С. 118–126.
- Балк П.И., Гольдшмидт В.И., Балк Т.В. Построение прогнозных оценок качества интерпретации при планировании гравиметрических работ // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1990. №8. С. 65–77.
- Балк П.И., Долгаль А.С., Балк Т.В. Сеточные методы решения обратных задач и опыт их применения при прослеживании дифференцированных интрузий по данным гравиразведки // Геология и геофизика. 1993. №3. С. 127–134.
- Балк П.И., Шефер У., Балк Т.В. Структура минимизируемого функционала в монтажных алгоритмах поиска допустимых решений обратной задачи гравиметрии // Физика Земли. 1994. №7–8. С. 98–106.
- Балк П.И., Долгаль А.С., Христенко Л.А. Теория и опыт применения монтажного подхода к решению трехмерных обратных задач гравиметрии // Геофизический журнал. 2009₁. Т. 31. №5. С. 128–140.
- Балк П.И., Долгаль А.С., Христенко Л.А. Резервы повышения эффективности автоматизированных систем интерпретации гравиметрических данных (гарантированный подход и монтажные технологии решения обратных задач) // Геоинформатика. 2009₂. №3. С. 30–36.
- Балк П.И., Долгаль А.С., Мичурин А.В. Смешанный вероятностно-детерминистский подход к интерпретации данных гравиразведки, магниторазведки и электроразведки // Докл. РАН. 2011₁. Т. 438. №4. С. 532–537.
- Балк П.И., Долгаль А.С., Мичурин А.В. Смешанные вероятностно-детерминистские методы решения линейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии // Геофизика. 2011₂. №2. С. 20–29.
- Балк П.И., Долгаль А.С., Христенко Л.А. Синтез линейной и нелинейной постановок обратной задачи в гравиразведке и магниторазведке // Геофизический журнал. 2011₃. Т. 33. №5. С. 51–65.
- Балк П.И., Долгаль А.С., Балк Т.В., Христенко Л.А. Конечноэлементные технологии интерпретации данных гравиразведки. Монтажный метод // Геофизические исследования. 2012₁. Т. 13. №3. С. 18–34.

- Балк П.И., Долгаль А.С., Балк Т.В., Христенко Л.А. Конечноэлементные технологии интерпретации данных гравirazведки. Гарантированный подход // Геофизические исследования. 2012₂. Т. 13. № 4. С. 19–33.
- Балк П.И., Долгаль А.С., Христенко Л.А. Локализация геологических объектов по данным гравirazведки при неполной информации о плотности горных пород // Докл. РАН. 2012₃. Т. 442. №5. С. 686–690.
- Балк П.И., Долгаль А.С., Мишурин А.В., Тайницкий А.А., Христенко Л.А. Подавление знакопеременных помех при инверсии данных вертикального электрического зондирования // Вестник Пермского университета. Сер. Геология. 2014. Вып. 2 (31). С. 55–63.
- Балк П.И., Долгаль А.С., Балк Т.В., Христенко Л.А. Согласование конкурирующих вариантов интерпретации гравитационных аномалий методом минимизации эмпирического риска // Геоинформатика. 2015₁. №4. С. 24–35.
- Балк П.И., Долгаль А.С., Балк Т.В., Христенко Л.А. Совместное использование различных методов решения обратных задач гравirazведки для повышения информативности результатов интерпретации // Геофизический журнал. 2015₂. Т. 37. №4. С. 75–92.
- Балк П.И., Долгаль А.С., Балк Т.В., Христенко Л.А. Критерии теории принятия решений в задачах количественной интерпретации гравитационных аномалий // Геоинформатика. 2016₁. №3. С. 35–46.
- Балк П.И., Долгаль А.С., Балк Т.В., Христенко Л.А. Априорная информация о помехах измерений в конечноэлементных монтажных технологиях интерпретации гравитационных аномалий // Геоинформатика. 2016₂. №4. С. 41–55.
- Балк П.И., Долгаль А.С., Балк Т.В., Христенко Л.А. Минимаксный подход в обратных задачах геофизики // Физика Земли. 2016₃. №2. С. 96–108.
- Балк Т.В. Об оценке надежности результатов интерпретации гравитационных аномалий по методу призм при переменной плотности // Геология и геофизика. 1981₁. №4. С. 119–125.
- Балк Т.В. О разрешающих способностях гравиметрического метода разведки на примере линейной обратной задачи // Геофизический журнал. 1981₂. Т.3. №4. С. 18–27.
- Балк Т.В. Некоторые вопросы оценки надежности результатов интерпретации гравитационных аномалий. Реферат дисс. канд. физ-мат. наук. Киев, 1983. 26 с.
- Балк Т.В. Решение обратной задачи для финитной контактной границы с использованием монтажного принципа // Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий. Киев: Наукова думка, 1992. С. 87–91.
- Балк Т.В., Балк П.И. Гарантированный подход в нелинейных обратных задачах грави- и магнитометрии // Геология и геофизика. 1988. №1. С. 97–105.
- Балк Т.В., Шефер У. Монтажный метод решения совмещенной обратной задачи грави- и магнитометрии // Докл. РАН. 1992. Т. 327. №1. С. 79–83.

- Балк Т.В., Новоселова М.Р., Балк П.И., Турутанов Е.Х. О точности определения нижней границы геологического объекта по гравиметрическим данным // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1988. №3. С. 81–86.
- Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Бином. 2003. 636 с.
- Блох Ю.И. Обнаружение и разделение гравитационных и магнитных аномалий. М.: МГГА, 1995. 81 с.
- Блох Ю.И. Количественная интерпретация гравитационных и магнитных аномалий. М.: МГГА, 1998. 89 с.
- Блох Ю.И. Проблема адекватности интерпретационных моделей в гравиразведке и магниторазведке // Геофизический вестник. 2004. №6. С. 10–15.
- Блох Ю.И., Бондаренко В.И., Долгаль А.С., Новикова П.Н., Рашидов В.А., Трусов А.А. Комплексные геофизические исследования подводного вулкана б.1, Курильская островная дуга // Геофизика. 2012. №2. С. 58–66.
- Блох Ю.И., Бондаренко В.И., Долгаль А.С., Новикова П.Н., Рашидов В.А., Трусов А.А. Комплексное моделирование подводных вулканов 2.7 и 2.8 (Курильская островная дуга) // Вестник КРАУНЦ. Сер. Науки о Земле. 2013. №1. Вып. 21. С. 57–65.
- Блох Ю.И., Бондаренко В.И., Долгаль А.С., Новикова П.Н., Петрова В.В., Пилипенко О.В., Рашидов В.А., Трусов А.А. Подводный вулканический массив Рикорда (Курильская островная дуга) // Вулканология и сейсмология. 2018. №4. С. 26–42.
- Блох Ю.И., Бондаренко В.И., Долгаль А.С., Новикова П.Н., Петрова В.В., Пилипенко О.В., Рашидов В.А., Трусов А.А. Комплексные геолого-геофизические исследования подводного вулканического массива Архангельского (Курильская островная дуга) // Вестник КРАУНЦ. Сер. Науки о Земле. 2019. №4. Вып. 41. С. 33–50.
- Бродский М.А., Страхов В. Н. Некоторые контрпримеры к проблеме единственности решения плоских обратных задач гравиметрии и магнитометрии для многоугольников. М.: ИФЗ АН СССР, 1983. 17 с.
- Булах Е.Г. О выделении регионального фона при интерпретации гравитационных и магнитных аномалий // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1970. №2. С. 95–99.
- Булах Е.Г. Обзор работ по методам минимизации в обратных задачах гравиметрии и магнитометрии // Геофизический журнал. 1999. Т. 21. №4. С. 5–19.
- Булах Е.Г. Прямые и обратные задачи гравиметрии и магнитометрии. Киев: Наукова думка, 2010. 464 с.
- Булах Е.Г., Корчагин И.Н. О подборе аномальных источников гравитационного поля методом последовательных приращений модели // Докл. АН УССР. Сер. Б. 1978. №10. С. 1059–1062.
- Булах Е.Г., Леваиов С.П. Построение геоплотностных моделей методом последовательного накопления и разрастания аномальных масс // Изучение литосферы геофизическими методами (электромагнитные методы, геотермия, комплексная интерпретация). Киев: Наукова думка, 1987. С. 37–47.

- Булах Е.Г., Ржаницын В.А., Маркова М.Н. Применение метода минимизации для решения задач структурной геологии по данным гравиразведки. Киев: Наукова думка, 1976. 219 с.
- Бычков С.Г., Простолупов Г.В., Щербинина Г.П. Гравиметрические исследования нефтеперспективных объектов Камско-Кинельской системы прогибов // Нефть. Газ. Новации. 2009. №4. С. 6–11.
- Бычков С.Г., Долгаль А.С., Симанов А.А. Синтез качественных и количественных методов извлечения информации из гравиметрических данных // Горный журнал. 2013. №6. С. 26–29.
- Бычков С.Г., Долгаль А.С., Костицын В.И., Мичурин А.В., Симанов А.А. Построение объемных моделей геологических объектов по гравитационному полю на основе синтеза качественных и количественных методов интерпретации // Геофизика. 2015. №5. С. 47–54.
- Вагнер Г. Основы исследования операций. Т. 2. М.: Мир, 1972. 488 с.
- Валяшко Г.М., Страхов В.Н. Фильтрация и дифференцирование экспериментальных геофизических данных методом аддитивной регуляризации // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1984. №12. С. 68–79.
- Васин В.В., Агеев А.Л. Некорректные задачи с априорной информацией. М.: Наука, 1993. 262 с.
- Васин В.В., Пересторонина Г.Я., Пруткин И.Л., Тимерханова Л.Ю. Решение трехмерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии для трехслойных сред // Математическое моделирование. 2003. Т. 13. №2. С. 69–76.
- Вахромеев Г.С., Давыденко А.Ю. Моделирование в разведочной геофизике. М.: Недра, 1987. 192 с.
- Веселов К.Е. Некоторые проблемы современного развития гравиразведки // Геологическое истолкование потенциальных полей. Киев: Наукова думка, 1983. 143 с.
- Виноградов А.М. Геополя и колчеданы Южного Урала. Екатеринбург: УрО РАН, 2004. 185 с.
- Галлагер Р. Метод конечных элементов. М.: Мир, 1984. 428 с.
- Гердт В.П., Тарасов О.В., Широков Д.В. Аналитические вычисления на ЭВМ в приложениях к физике и математике // Успехи физических наук. 1980. Т. 130. Вып. 1. С. 113–147.
- Глазнев В.Н., Муравина О.М., Воронова Т.А., Холин В.М. Оценка мощности гравиведного слоя земной коры Воронежского кристаллического массива // Вестник ВГУ. Сер. Геология. Воронеж, 2014. №4. С. 78–84.
- Гласко В.Б. Некоторые математические вопросы интерпретации геофизических наблюдений. Автореф. дисс. докт. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1972. 44 с.
- Голиздра Г.Я. Комплексная интерпретация геофизических полей при изучении глубинного строения земной коры. М.: Недра, 1988. 212 с.

- Голыздра Г.Я. Методология интерпретации данных комплекса геофизических полей // Вопросы методологии интерпретации геофизических данных в прикладной геофизике. М.: ОИФЗ РАН, 1996. С.85–97.
- Гольдшмидт В.И. Методы нелокального поиска в обратных задачах гравиметрии // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1979. №5. С. 79–86.
- Гольцман Ф.М. Статистические модели интерпретации. М.: Наука, 1971. 328 с.
- Гольцман Ф.М. Информационно-статистические методы интерпретации геофизических данных в XX веке // Геофизика. 1997. №1. С. 3–7.
- Гольцман Ф.М., Калинина Т. Б. Статистическая интерпретация магнитных и гравитационных аномалий. Л.: Недра, 1983. 248 с.
- Горнаков И.В., Балк П.И., Овсянников А.Л., Тарлинский И.И. Особенности функционального наполнения пакета прикладных программ «Геолог» // Пакеты прикладных программ. Опыт разработки. Новосибирск: Наука, 1985. С. 28–34.
- Гравirazведка. Справочник геофизика. Под ред. Е.А. Мудрецовоу. М.: Недра, 1981. 398 с.
- Граничин О.Н., Поляк Б.Т. Рандомизированные алгоритмы оценивания и оптимизации при почти произвольных помехах. М.: Наука, 2003.
- Долгаль А.С. Решение обратной задачи гравirazведки при поисках медно-никелевых руд // Геофизический журнал. 1993. №6. С. 83–88.
- Долгаль А.С. Компьютерные технологии обработки и интерпретации данных гравиметрической и магнитной съемок в горной местности. Абакан: Фирма-МАРТ, 2002. 188 с.
- Долгаль А.С. Совершенствование методов количественной интерпретации геопотенциальных полей // Вестник Пермского университета. Сер. Геология. 2012. Вып. 4 (17). С. 47–55.
- Долгаль А.С. Конечнoэлементный подход к моделированию источников гравитационных и магнитных аномалий // Геофизический вестник. 2017. №5. С. 7–14.
- Долгаль А.С. Декомпозиция решения обратной задачи гравirazведки рудного типа монтажным методом // Вестник КРАУНЦ. 2019₁. Сер. Науки о Земле. №1. Вып. 41. С. 25–36.
- Долгаль А.С. Аддитивные технологии локализации источников геопотенциальных полей // Вестник Пермского университета. Сер. Геология. 2019₂. Т. 18. №4. С. 380–385.
- Долгаль А.С., Мичурин А.В. Новая модификация монтажного метода решения нелинейной обратной задачи гравиметрии // Уральский геофизический вестник. 2010. №2 (17). С. 34–40.
- Долгаль А.С., Шархимуллин А.Ф. Повышение точности интерпретации моногенных гравитационных аномалий // Геоинформатика. 2011. №4. С. 49–56.

- Долгаль А.С., Булах Е.Г., Русанов Э.Б. Объемное моделирование геологического строения Талнахского рудного узла (Норильский район) по гравитационному полю. // Геофизический журнал. 1995. № 5. С. 62–66.
- Долгаль А.С., Калинин Д.Ф., Олешкевич О.И., Симонов О.Н. Применение компьютерных технологий интерпретации геопотенциальных полей при прогнозировании платино-медно-никелевого оруденения // Разведка и охрана недр. 2006. №8. С. 57–65.
- Долгаль А.С., Костицын В.И., Пугин А.В., Шархимуллин А.Ф., Христенко Л.А. Развитие методов качественной и количественной интерпретации данных гравиразведки // Геофизика. 2011. №5. С. 31–39.
- Долгаль А.С., Балк П.И., Деменев А.Г., Мичурин А.В., Новикова П.Н., Рашидов В.А., Христенко Л.А., Шархимуллин Ф.Ф. Использование метода конечных элементов при интерпретации данных гравиразведки и магниторазведки // Вестник КРАУНЦ. 2012. Т. 1. №19. С. 108–127.
- Долгаль А.С., Костицын В.И., Новикова П.Н., Рашидов В.А. Совместная оценка геометрических параметров и намагниченности геологических объектов монтажным методом // Геофизика. 2013. №5. С. 36–41.
- Долгаль А.С., Костицын В.И., Новикова П.Н., Рашидов В.А. Определение параметров сеточных моделей геологических объектов по аномальному магнитному полю // Докл. РАН. 2015. Т. 461. №3. С. 327–332.
- Долгаль А.С., Балк П.И., Новикова П.Н., Мичурин А.В. Критерии согласования допустимых решений обратной задачи гравиразведки рудного типа // Геофизические исследования. 2016. Т. 17. №3. С. 17–31.
- Долгаль А.С., Иваненко А.Н., Новикова П.Н., Рашидов В.А. Применение современных интерпретационных геомагнитных технологий для изучения гайота Сет (Горы Маркус-Неккер, Тихий океан) // Геоинформатика. 2017. №4. С. 48–57.
- Долгаль А.С., Тайницкий А.А., Христенко Л.А. Реализация концепции минимизации эмпирического риска в обратной задаче ВЭЗ // Вестник КРАУНЦ. Сер. Науки о Земле. 2020. №1. Вып. 45. С. 38–48.
- Дубов Р.И. Количественные исследования геохимических полей для поисков рудных месторождений. Новосибирск: Наука, 1974. 278 с.
- Дядюра В.А., Шалаев С.В. Определение местоположения локальных геологических объектов по гравитационным аномалиям // Вопросы разведочной геофизики. 1968. Вып. 8. С. 31–36.
- Жданов М.С. Теория обратных задач и регуляризации в геофизике. М.: Научный мир, 2007. 712 с.
- Завойский В.Н., Неисжал Ю.Е. Декомпозиционно-итерационный метод решения обратной задачи магниторазведки // Геофизический журнал. 1979. Т. 1. №12. С. 46–52.
- Зейгельман М.С. Один тип эквивалентности при оценке глубины залегания намагниченных масс // Докл. АН УССР. Сер. Б. 1983. №8. С. 10–13.

- Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 542 с.
- Зидаров Д.* О решении обратной задачи потенциала и его применении в геофизике. София: Болгарская АН, 1968. 143 с.
- Зорин Ю.А.* Новейшая структура и изостазия Байкальской рифтовой зоны и сопряженных территорий. М.: Наука, 1971. 159 с.
- Иванов В.К.* Интегральное уравнение первого рода и приближенное решение обратной задачи потенциала // Докл. АН СССР. 1962. Т. 142. №5. С. 998–1000.
- Инженерная геология Прибайкалья.* М.: Наука, 1968. 187 с.
- Исаев В.И., Коржов Ю.В., Лобова Г.А., Попов С.А.* Нефтегазоносность Дальнего Востока и Западной Сибири по данным гравиметрии, геотермии и геохимии. Томск: Томский политех. ин-т, 2011. 384 с.
- Канторович Л.В.* О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений // Сибирский математический журнал. 1962. Т. 3. №5. С. 701–709.
- Карманов В.Г.* Математическое программирование. М.: Наука, 1986. 288 с.
- Кауфман А.А., Хансен Р.* Принципы метода гравиметрии. Тверь: АИС, 2011. 376 с.
- Кини Р., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения. М.: Радио и связь, 1981. 560 с.
- Кобрунов А.И.* Заметки к истории развития методов решения обратной задачи гравиразведки в XX веке // Развитие гравиметрии и магнитометрии в XX веке. М.: ОИФЗ РАН, 1997. С. 188–200.
- Кобрунов А.И.* Математические основы теории интерпретации геофизических данных: учеб. пособие. М.: ЦентрЛитНефтеГаз, 2008. 288 с.
- Койфман Л.И.* Опыт объемного плотностного моделирования Березовского гравитационного максимума Предуралья // Региональная, разведочная и промысловая геофизика. 1982. Вып. 16. С. 1–9.
- Кондратьев О.К.* Математика в геофизике // Геофизика. 2000₁. №2. С. 6–15.
- Кондратьев О.К.* Суть наших разногласий // Геофизика. 2000₂. №3. С. 48–51.
- Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю.* Дискретное программирование. М.: Наука, 1969. 368 с.
- Кормен Т., Лайзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К.* Алгоритмы: построение и анализ. М.: Вильямс, 2005. 1296 с.
- Костомаров Д.П., Зайцев Ф.С., Сучков Е.П.* Построение сильно различающихся решений некоторого класса некорректных задач с неточно заданными входными данными // Докл. РАН. 2011. Т. 437. №3. С. 316–320.
- Кочетов М.В., Журавлев В.А.* Оптимизация методики дифференциальной гидромагнитной съемки // Вестник ВГУ. Сер. Геология. 2018. №2. С. 127–131.
- Кошур В.Д.* Адаптивный алгоритм глобальной оптимизации на основе взвешенного усреднения координат и нечетко-нейронных сетей // Нейроинформатика. 2006. Т. 1. №2. С. 106–128.
- Кудря А.В.* Решение обратной задачи гравиметрии по гармоническим моментам гравитационного поля // Докл. АН СССР. 1972. Т. 205. №3. С. 574–577.

- Кудрявцев А.А. Санкт-Петербургский парадокс и его значение для экономической теории // Вестник СПб. ун-та. 2013. Вып. 3. С. 41–55.
- Куратовский К., Мостовой А. Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
- Курейчик В.М. Генетические алгоритмы. Состояние. Проблемы. Перспективы // Изв. РАН. Теория систем управления. 1999. №1. С. 144–160.
- Лаврентьев М.М. О некоторых некорректных задачах математической физики. Новосибирск: СО АН СССР, 1962. 92 с.
- Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений. М.: Логос, 2002. 272 с.
- Лобанов А.М. О неэквивалентности оценок погрешностей измерений с гравиметрами // Изв. вузов. Геология и разведка. 1989. №11. С. 104–108.
- Ломтадзе В.В. Интерпретация гравитационных аномалий способом эквивалентных призм // Вопросы разведочной геофизики. 1968. Вып. 8. С. 36–40.
- Майер В.И., Никонова Ф.И., Федорова Н.В. Численная оптимизация при интерпретации гравитационных и магнитных аномалий // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1985. №5. С. 46–57.
- Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 273 с.
- Мартышко П.С. История развития теоретических основ и методов решения обратных задач гравиметрии и магнитометрии в плоском и пространственном вариантах // Развитие гравиметрии и магнитометрии в XX веке. М.: ОИФЗ РАН, 1997. С. 179–187.
- Миков Д.С. Методы интерпретации магнитных аномалий. Томск: Томс. ун-т, 1975. 180 с.
- Миньковский Л.А., Чердниченко В.Г. Аппроксимация аномального гравитационного поля и определение объекта методом случайного поиска // Интерпретация гравитационных и магнитных полей. Киев: Наукова думка, 1992. 132 с.
- Михайлов В.О., Диаман М. Некоторые вопросы интерпретации данных тензорной градиентометрии // Физика Земли. 2006. №12. С. 3–10.
- Мудрецова Е.А., Гласко В.Б., Филатов В.Г. О разрешающей способности метода регуляризации и определения участка характерного изменения формы контактной поверхности // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1974. №6. С. 98–101.
- Мудрецова Е.А., Филатов В.Г. Применение метода регуляризации в задаче разделения гравитационных полей // Прикладная геофизика. 1975₁. Вып. 77. С. 137–144.
- Мудрецова Е.А., Филатов В.Г. Определение глубины залегания, формы, избыточной плотности и участка модуляции контактной поверхности // Прикладная геофизика. 1975₂. Вып. 78. С. 153–158.
- Непомнящих И.А. Методика расчета оптимальных параметров систем наблюдений в разведочной геофизике // Вопросы рудной геофизики в Казахстане. Алма-Ата: Каз. филиал ВИРГ, 1972. Вып. 4. С. 293–297.
- Никитин А.А. Детерминированность и вероятность в обработке и интерпретации геофизических данных // Геофизика. 2004. №3. С. 10–16.

- Новиков П.С. О единственности решения обратной задачи потенциала // Докл. АН СССР. 1938. Т. 18. №3. С. 165–168.
- Новикова П.Н., Долгаль А.С. Локализация геологических объектов и определение вектора намагниченности горных пород монтажным методом // Вопросы теории и практики геологической интерпретации геофизических полей. Мат. 39-й сессии Международного семинара им. Д.Г. Успенского. Воронеж. 2012. С. 205–207.
- Новоселицкий В.М., Губайдулин М.Г., Койфман Л.И. Изучение строения осадочного чехла севера Урало-Поволжья на основе гравитационного моделирования // Геофизический журнал. 1979. № 2. С. 99–104.
- Овчаренко А.В. Подбор сечения двухмерного тела по гравитационному полю // Вопросы нефтяной и рудной геофизики. Алма-Ата: Каз. политех. ин-т, 1975. Вып. 2. С. 71–75.
- Оганесян С.М., Старостенко В.И. Тела нулевого внешнего гравитационного потенциала: о забытых работах и современном состоянии теории // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1985. №3. С. 49–62.
- Осипов Г.С. Методы искусственного интеллекта. М.: Физматлит, 2011. 296 с.
- Остромогильский А.Х. Об единственности решения обратной задачи теории потенциала // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1970. Т. 10. №2. С. 352–361.
- Перфильев Л.Г. Некоторые вопросы обработки и интерпретации геологогеофизических данных на ЭЦВМ. Автореф. дисс. канд. физ.-мат. наук. М., 1972. 28 с.
- Петрищевский А.М. Три образа мышления и три подхода к интерпретации гравитационных аномалий // Региональные проблемы. 2014. Т. 17. №2. С. 5–17.
- Петровская М.С., Вершков А.Н. Построение моделей гравитационного поля на основе спутниковых измерений производных от потенциала тяготения // Космические исследования. 2014. Т. 52. №2. С. 176–184.
- Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 256 с.
- Прилепко А.И. Об единственности определения плотности и формы тела в обратных задачах теории потенциала // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193. №2. С. 288–291.
- Пруткин И.Л. О приближенном решении трехмерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии методом локальных поправок // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1983. №1. С. 53–58.
- Пруткин И.Л. О решении трехмерной обратной задачи гравиметрии в классе контактных поверхностей методом локальных поправок // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1986. №1. С. 67–77.
- Райфа Г. Анализ решений. М.: Наука, 1977. 408 с.

- Раппопорт И.М.* О некоторых достаточных условиях единственности решения обратной задачи теории потенциала // Докл. АН СССР. Физ.-хим. и матем. 1940. №5. С. 23–25.
- Рашидов В.А., Долгаль А.С., Новикова П.Н.* Геомагнитные исследования гайотов Вулканолог и Коцебу (Магеллановы горы. Тихий океан) // Вестник КРАУНЦ. 2009. №1 (13). С. 98–106.
- Рокитянский И.И.* Моделирование в геоэлектрике. 1. Неоднозначность // Геофизический журнал. 1985. Т. 7. №1. С. 15–24.
- Рубан А.И.* Глобальная оптимизация методом усреднения координат. Красноярск: Красноярский ун-т, 2004. 302 с.
- Светов Б.С.* Два замечания о современной теории обратных задач геофизики // Физика Земли. 2010. №1. С. 90–93.
- Светов Б.С., Бердичевский.* Методологические вопросы электроразведки // Вопросы методологии интерпретации геофизических данных в прикладной геофизике. М.: ОИФЗ РАН, 1996. С. 21–28.
- Сретенский Л.Н.* Об единственности определения формы притягивающего тела по значениям его внешнего потенциала // Докл. АН СССР. 1954. Т. 99. №1. С. 21–22.
- Старостенко В.И.* Интерпретация геофизических аномалий на основе регуляризирующих алгоритмов нелинейного программирования // Докл. АН УССР. Сер. Б. 1974. №9. С. 797–800.
- Старостенко В.И.* Устойчивые алгоритмы квадратичного программирования и решение обратной задачи гравиметрии относительно плотностей // Геофизический сборник. 1975. Вып. 64. С. 52–57.
- Старостенко В.И.* Устойчивое решение задачи Неймана для гравитационного потенциала // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1976. №5. С. 46–58.
- Старостенко В.И.* Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. Киев: Наукова думка, 1978. 228 с.
- Старостенко В.И.* О теории и методах интерпретации данных гравиразведки и магниторазведки: некоторые соображения о потребностях сегодняшнего дня // Геофизика и математика. Материалы 1-ой Всерос. конф. М.: ОИФЗ РАН, 1999. С. 26–27.
- Старостенко В.И., Заворотько А.Н.* Методика и результаты применения регуляризирующего алгоритма при решении обратной нелинейной задачи гравиметрии // Геофиз. сборник. 1976. Вып. 71. С. 29–40.
- Старостенко В.И., Бас Р.Г., Бутаков Г.С., Дядюра В.А.* Автоматизированная система оперативной обработки данных гравиметрии и магнитометрии. Киев: Наукова думка. 1972. 164 с.
- Старостенко В.И., Дядюра В.А., Заворотько А.Н.* Об интерпретации гравитационного поля методом подбора // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1975. №4. С. 78–85.

- Страхов В.Н.* О решении некорректных задач магнито- и гравиметрии, представляемых интегральными уравнениями типа свертки. I. // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1967₁. №4. С. 36–54.
- Страхов В.Н.* О решении некорректных задач магнито- и гравиметрии, представляемых интегральными уравнениями типа свертки. II. // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1967₂. №5. С. 33–53.
- Страхов В.Н.* О некорректных задачах магнито- и гравиметрии, представляемых интегральными уравнениями типа свертки 2-го рода // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1967₃. №6. С. 56–71.
- Страхов В.Н.* Теория приближенного решения линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве и ее использование в разведочной геофизике // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1969₁. №8. С. 30–53.
- Страхов В.Н.* Теория приближенного решения линейных некорректных задач в гильбертовом пространстве и ее использование в разведочной геофизике // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1969₂. №9. С. 64–96.
- Страхов В.Н.* К теории фильтрации и трансформирования потенциальных полей при наличии априорной информации о помехах во входных данных // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1977. №3. С. 76–81.
- Страхов В.Н.* Становление геофизической кибернетики – фундаментальная проблема разведочной геофизики ближайших десятилетий // Геофизический сборник АН УССР. 1979. Вып. 87. С. 3–21.
- Страхов В.Н.* Основные положения теории конфигурационных и сеточных приближенных решений плоской обратной задачи гравиметрии // Геология и геофизика. 1980. №2. С. 88–93.
- Страхов В.Н.* О задачах, решаемых в рамках второй парадигмы в теории интерпретации гравитационных и магнитных полей // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1987₁. №3. С. 56–67.
- Страхов В.Н.* Теоретические основы моделирования в грави- и магнитометрии // Математическое моделирование в геофизике. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1987₂. С. 120–150.
- Страхов В.Н.* Обработка геофизической информации при мультипликативно-аддитивных помехах // Докл. АН СССР. 1991₁. Т. 319. №3. С. 559–563.
- Страхов В.Н.* Решение линейных задач геофизики при мультипликативно-аддитивных помехах // Докл. АН СССР. 1991₂. Т. 319. №4. С. 845–848.
- Страхов В.Н.* Обработка геофизической информации в случае мультипликативно-аддитивных помех при неизвестной дисперсии мультипликативной компоненты // Докл. АН СССР. 1991₃. Т. 320. №1. С. 82–84.
- Страхов В.Н.* Научное мировоззрение // Геофизика. 1993. №1. С. 7–15.
- Страхов В.Н.* Научное мировоззрение // Геофизика. 1994. №1. С. 9–21.
- Страхов В.Н.* Геофизика и математика // Физика Земли. 1995. №12. С. 4–23.
- Страхов В.Н.* Геофизика и математика. Методологические основы математической геофизики // Геофизика. 2000₁. №1. С. 3–18.

- Страхов В.Н.* Разрушение господствующего стереотипа мышления – главная задача в развитии теории и практики интерпретации потенциальных полей (гравитационных и магнитных аномалий) в начале XXI века. М.: ОИФЗ РАН, 2000₂. 44 с.
- Страхов В.Н.* Разрушение существующего стереотипа мышления – главная проблема в развитии теории и практики интерпретации потенциальных полей (гравитационных и магнитных аномалий) в начале XXI века // Докл. РАН. 2000₃. Т. 373. №3. С. 395–399.
- Страхов В.Н.* В чем причины различий в понимании взаимоотношений геофизики и математики? // Геофизика. 2000₄. №3. С. 39–47.
- Страхов В.Н.* Главная задача в теории и практике интерпретации потенциальных полей в начале XXI века – разрушение господствующего стереотипа мышления // Геофизика. 2001. №1. С. 3–18.
- Страхов В.Н., Бродский М.А.* О единственности решения двумерных обратных задач гравиметрии и магнитометрии для многоугольников // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264. №2. С. 318–322.
- Страхов В.Н., Бродский М.А.* Об условиях единственности решения плоских обратных задач гравиметрии и магнитометрии для многоугольников с переменной плотностью и намагниченностью // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. №6. С. 1359–1363.
- Страхов В.Н., Валяшко Г.М.* Об эффективности алгоритмов фильтрации, построенных с учетом априорной информации о свойствах помех во входных данных // Физика Земли. 1977. №6. С. 60–68.
- Страхов В.Н., Иванов С.Н.* Трехмерные алгоритмы сглаживания и трансформирования потенциальных полей // Геология и геофизика. 1988. №12. С. 123–131.
- Страхов В.Н., Лапина М.И.* Определение интегральных характеристик возмущающих масс аппроксимационным методом в задачах гравиметрии и магнитометрии // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1975₁. №4. С. 35–58.
- Страхов В.Н., Лапина М.И.* Приближенная эквивалентность и ее использование при решении прямой и обратной задач гравиметрии и магнитометрии // Прикладная геофизика. 1975₂. Вып. 80. С. 149–176.
- Страхов В.Н., Лапина М.И.* Монтажный метод решения обратной задачи гравиметрии // Докл. АН СССР. 1976₁. Т. 227. №2. С. 344–347.
- Страхов В.Н., Лапина М.И.* О монтажном принципе построения решений обратной задачи гравиметрии // Геофиз. сб. Ин-та геофизики АН УССР. 1976₂. Вып. 74. С. 3–19.
- Страхов В.Н., Лапина М.И.* Решение обратной задачи гравиметрии методом регулируемой направленной кристаллизации // Перспективы развития методов геологической интерпретации гравитационных аномалий. М.: Деп. в ВИНТИ. №3053–76. 1976₃. С. 66–78.

- Страхов В.Н., Лапина М.И.* Решение прямых задач гравиметрии и магнитометрии для произвольных однородных многогранников // Докл. АН СССР. 1982₁. Т. 262. №5. С. 1095–1099.
- Страхов В.Н., Лапина М.И.* Прямые задачи гравиметрии и магнитометрии для произвольных однородных многогранников // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1982₂. №4. С. 45–67.
- Страхов В.Н., Павленкова Г.А.* Алгоритмы определения δ^2 и автокорреляционной функции высокоточной слабокоррелированной помехи для профильных данных // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1988. №10. С. 29–41.
- Страхов В.Н., Старостенко Е.В.* Сглаживание наблюдаемых значений потенциальных полей (профильный вариант). 1. // Геофизический журнал. 1988. Т. 10. №4. С. 39–55.
- Страхов В.Н., Гольдшмидт В.И., Калинина Т.Б., Старостенко В.И.* Состояние и перспективы развития в СССР теории интерпретации гравитационных и магнитных аномалий // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1982. №5. С. 11–30.
- Тихонов А.Н.* Об устойчивости обратных задач // Докл. АН СССР. 1943. Т. 39. №5. С. 195–198.
- Тихонов А.Н.* О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. 1963₁. Т. 151. №3. С. 501–504.
- Тихонов А.Н.* О регуляризации некорректно поставленных задач // Докл. АН СССР. 1963₂. Т. 153. №1. С. 49–52.
- Тихонов А.Н.* Математическая геофизика. М.: ОИФЗ РАН, 1999. 476 с.
- Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 284 с.
- Тихонов А.Н., Гласко В.Б.* О применении метода регуляризации в задачах геофизической интерпретации // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1975. №1. С. 38–48.
- Тихонов А.Н., Гласко В.Б., Литвиненко О.К., Мелихов В.Р.* О продолжении потенциала в сторону возмущающих масс в гравиметрической и магнитной разведках на основе метода регуляризации // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1968. №2. С. 30–48.
- Тригубович Г.М., Персова М.Г., Соловейчик Ю.Г.* 3D-электроразведка становлением поля. Новосибирск: Наука, 2009. 218 с.
- Тьюки Дж.* Анализ результатов наблюдений. М.: Мир, 1981. 693 с.
- Тюленева С.Г., Фишман В.М., Зюганов С.К.* Построение достижимых границ области допустимых скоростных разрезов в рамках τ -метода // Докл. АН СССР. 1989. Т. 308. №5. С. 1107–1111.
- Фотиади Э.Э.* О зависимости пористости и плотности пород осадочного покрова от глубины их залегания // Геология нефти. 1957. №4. С. 59–60.
- Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.: ОНТИ, 1937. 306 с.
- Хант Э.* Искусственный интеллект. М.: Мир, 1978. 558 с.

- Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 532 с.
- Хокни Р., Иствуд Дж.* Численное моделирование методом частиц. М.: Мир, 1987. 640 с.
- Хьюбер П.* Робастность в статистике. М.: Мир, 1984. 304 с.
- Цирульский А.В.* О решении прямой и обратной задачи гравиразведки // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1974. №7. С. 84–90.
- Черемисина Е.Н., Никитин А.А.* Системный анализ в природопользовании. М.: ВНИИГеосистем, 2014. 117 с.
- Черноруцкий И.Г.* Методы принятия решений. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 416 с.
- Шалаев С.В.* Геологическое истолкование геофизических аномалий с помощью линейного программирования. Л.: Недра, 1972. 142 с.
- Юньков А.А., Булах Е.Г.* О точности определения плотности аномальных масс методом сеток // Докл. АН УССР. 1958. №11. С. 1234–1237.
- Яновская Т.Б., Медведев С.В., Гобаренко В.С.* Влияние начального приближения на решение задачи лучевой сейсмотомографии // Физика Земли. 2018. №2. С. 3–11.
- Balk P.I., Dolgal A.S.* Development of the Finite-Element Technologies in Quantitative Interpretation of Geopotential Fields // Practical and Theoretical Aspects of Geological Interpretation of Gravitational, Magnetic and Electric Fields. Nurgaliev D., Khairullina N. – eds Springer Proceedings in Earth and Environmental Sciences. Springer. Cham. 2019. P. 105–112.
- Bellman R.* Adaptive control processes: a guided tour. Princeton University Press, 1961. 255 p.
- Camacho A.G., Montesinos F. G., Vieira R.* Gravity inversion by means of growing bodies // Geophysics. 2000. Vol. 65. №1. P. 95–101.
- Laurucella G.* Sulla funzione potenziale di spazio corrispondente ad una assegnata azione esterna // Rendiconti Atti del. R. Accademia dei Lincei. 1911. Ser quinta. Vol. XX. 1° sern. P. 99–107.
- Marczewski F., Steinhaus H.* Colloquium Math. 1958. №6. P. 319–327.
- Orlik P., Terao H.* Arrangements of hyperplanes. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1992.
- Pizetti P.* Corpi equivalent rispetto alla attrazione newtoniana esterna // Rendiconti Atti del. R. Accademia dei Lincei. 1909. Ser. Quinta. Vol. XVIII. 1° sern. P. 211–215.
- Rene R. M.* Gravity inversion using open, reject, and “shape-of-anomaly” fill criteria // Geophysics. 1986. Vol 51. P. 988–994.
- Schäfer U.* Die Lösung einer inversen Aufgabe für gravimetrische und magnetische Anomalien mittels der Montagemethode. Potsdam: Zentralinstitut für Physik der Erde, 1990. 137 s.
- Schäfer U., Balk P.* The inversion of potential field anomalies by the assembling method: The third dimension // Proc. IAG Symp. № 112. Geodesy and Physik of the Earth. Berlin-Heidelberg: Springer Verlag, 1993. P. 237–241.

Turing A. Computing Machinery and Intelligence // *Mind*. Vol. LIX. No. 236. Oktober 1950. P. 433–460.

Weyner Erik, Ko Sangho, Campri M. C. Proc. 48th Conf. on Decision and Control. Shanghai. China. 2009. P. 92–98.

Zidarov D., Zhelev Zh. On obtaining a family of bodies with identical exterior fields-method of bubbling // *Geophys. Prosp.* 1970. Vol. XVIII. N°1.

Научное издание

П.И. Балк, А.С. Долгаль

**Аддитивные методы решения
обратных задач гравирозведки
и магниторозведки**

ООО «Издательство «Научный мир»
Тел. факс +7(499) 251-01-62
E-mail: naumir@naumir.ru
127055, Москва, Тихвинский переулок, д.10/12, корп.4

Подписано к печати 01.10.2020
Формат 60×84/8.
Печать офсетная.57 печ. л.
Тираж 300 экз. Заказ

Издание отпечатано в типографии
ООО «Галлея-Принт»,
111024, Москва, 5-я Кабельная, 2б